

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ MENTOURI - CONSTANTINE  
FACULTÉ DES SCIENCES DE L'INGÉNIEUR  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

---



N° D'ordre : /Mag/2010  
Série : /GM/2010

**Mémoire**  
Présenté en Vue d'Obtenir  
Le Diplôme de MAGISTER en Génie Mécanique

**Option Mécanique Avancée**  
Conception Intégrée des Systèmes Mécaniques et Applications Industrielles

Par

**Dalila BELAÏD**

**THÈME**

**TRANSPLANTATION DE DOMAINE  
EN ELASTICITE**

Soutenue le 02-06-2010

**Membres du jury**

|                     |                  |   |                    |                           |
|---------------------|------------------|---|--------------------|---------------------------|
| Président du jury : | Mr B. NECIB      | , | <b>Professeur,</b> | Université de Constantine |
| Rapporteur :        | Mr Y. CHOUITER,  |   | <b>M.C,</b>        | Université de Constantine |
| Examineur :         | Mr S. BOUKEBBAB, |   | <b>Professeur,</b> | Université de Constantine |
| Examineur :         | Mr I. AMARA      | , | <b>M.C,</b>        | Université de Constantine |

*Merci à dieu de nous avoir donnés de la volonté,  
et de la patience pour réaliser ce travail*

## **REMERCIEMENTS**

Derrière ce travail se cache la présence, le support et l'ouverture d'esprit de mon encadreur, Mr Yassine Chouiter, à qui je dois énormément. J'ai particulièrement apprécié ses encouragements, ses conseils et la liberté qu'il m'a accordée dans la poursuite de mon travail.

Je lui suis aussi très reconnaissante pour m'avoir sensibilisé à l'importance de la communication scientifique.

Je remercie vivement le professeur Brahim Necib qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

Je tiens aussi à remercier vivement le professeur Salim Boukebbab, et le docteur Idriss Amara pour leur participation au jury de ce mémoire.

Je remercie aussi Mr Benchecker pour son soutien et son aide

Enfin je voudrais remercier vivement tous qui m'ont aidé de près ou de loin, ma famille et mes amis pour leurs encouragements et soutiens

*Dalila BFFAÛD*

# ***SOMMAIRE***

# ***TRANSPLANTATION DE DOMAINES ELASTICITE***

|                                                              |    |
|--------------------------------------------------------------|----|
| REMERCIEMENTS .....                                          | i  |
| INTRODUCTION GENERALE .....                                  | 1  |
| THEORIE DE L'ELASTICITE .....                                | 3  |
| I Thérie de l'élasticié .....                                | 3  |
| I.1. Définitions générales .....                             | 3  |
| I.2. Contraintes et équilibres .....                         | 5  |
| I.2.1. Contrainte .....                                      | 5  |
| I.2.2. Etat de contrainte .....                              | 5  |
| I.2.3. Transformation de contrainte.....                     | 6  |
| I.2.4. Contraintes principales .....                         | 7  |
| I.2.5. Equation d'équilibre .....                            | 8  |
| I.3. Déformation et compatibilité .....                      | 9  |
| I.3.1. Déformations et déplacements.....                     | 9  |
| I.3.2. Transformation des déformations.....                  | 11 |
| I.3.3. Les déformations principales.....                     | 12 |
| I.3.4. Compatibilité de déformation.....                     | 13 |
| I.4. Relations contraintes-déformations .....                | 15 |
| I.4.1. Caractérisation des matériaux.....                    | 15 |
| I.4.2. Loi de Hooke loi constitutive .....                   | 16 |
| I.5. Formulations générales et stratégies de solution .....  | 19 |
| I.5.1. Les équations fondamentales de l'élasticité .....     | 19 |
| I.5.2. Conditions aux limites .....                          | 20 |
| I.5.3. Formulation des contraintes.....                      | 22 |
| I.5.4. Formulation des déplacements .....                    | 23 |
| I.6. Hypothèses fondamentales de l'élasticité linéaire ..... | 24 |
| I.6.1. Energie de déformation .....                          | 24 |
| I.6.2. Théorèmes fondamentaux.....                           | 27 |

|                                                                                                                                 |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| METHODES ET APPROCHES MATHEMATIQUES .....                                                                                       | 31 |
| II Methodes et approches matématiques .....                                                                                     | 31 |
| II.1. Les équations différentielles aux dérivées partielles .....                                                               | 32 |
| II.1.1. Définitions générales .....                                                                                             | 33 |
| II.1.2. Classement des équations différentielles.....                                                                           | 35 |
| II.1.3. Classement des EDP du second ordre quasi-linéaires dans <b><i>IR<sup>2</sup></i></b> .....                              | 36 |
| II.1.4. Classement des EDP scalaires du second ordre linéaires à coefficients constants dans <b><i>IR<sup>2</sup></i></b> ..... | 39 |
| II.1.5. Classement des EDP scalaires du second ordre (quasi) linéaire dans <b><i>IR<sup>n</sup></i></b> .....                   | 41 |
| II.1.6. Solutions et conditions .....                                                                                           | 42 |
| II.2. Méthodes variationnelles .....                                                                                            | 44 |
| II.2.1. Calcul des variations.....                                                                                              | 44 |
| II.2.2. Définitions générales .....                                                                                             | 46 |
| II.3. Méthode de Polya et Schiffer.....                                                                                         | 48 |
| II.3.1. Introduction .....                                                                                                      | 48 |
| II.3.2. Transplantation de domaines .....                                                                                       | 50 |
| <br>                                                                                                                            |    |
| TRANSPLANTATION ET LIMITES ELASTIQUES DE L'ENERGIE DE DEFORMATION .....                                                         | 53 |
| III Transplantation et limite élastique de l'énergie de déformation .....                                                       | 53 |
| III.1. La membrane.....                                                                                                         | 53 |
| III.2. Transplantation dans la théorie de la torsion.....                                                                       | 58 |
| III.3. Extension aux problèmes de l'élasticité.....                                                                             | 61 |
| CONCLUSION .....                                                                                                                | 68 |
| REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....                                                                                               | 70 |
| RESUME.....                                                                                                                     | 72 |

|                |    |
|----------------|----|
| ABSTRACT ..... | 73 |
| المخلص .....   | 74 |

***INTRODUCTION***

***GENERALE***

# INTRODUCTION GENERALE

Beaucoup de problèmes de sciences de l'ingénieur, et particulièrement, ceux rencontrés en mécanique des milieux continus, imposent des conditions aux limites appropriées sur le corps à étudier. La résolution de ces systèmes (d'équations variationnelles) qui en découlent, se complique avec des formes géométriques complexes du corps

Face aux difficultés et aux temps pris par cette résolution, nous voulons utiliser des solutions, pour un domaine bien précis, déjà connues ou faciles à obtenir afin de pouvoir établir des estimations pour un domaine donné.

Polya et Schiffer (1) proposaient une méthode permettant d'obtenir des estimations à priori de l'intégrale de l'énergie de déformation dans des problèmes elliptiques auto-adjoints.

Si la construction des états admissibles, dans un problème de minimum, est une des questions parmi les plus délicates des procédures de type variationnel, la méthode de la transplantation s'avère être un instrument efficace et simple à utiliser, particulièrement dans les questions de la théorie de l'élasticité, où l'évaluation de l'énergie de déformation est souvent nécessaire.

L'objectif principal de ce travail est de montrer comment il est possible d'étendre la méthode aux problèmes de l'élasticité et, d'obtenir, en même temps, une procédure d'estimation de l'énergie de déformation, par excès et par défaut, du corps élastique.



Afin d'atteindre notre objectif, on abordera en premier lieu, tout ce qui concerne l'élasticité, et les systèmes des équations qui interprètent le comportement des structures mécaniques à savoir son énergie de déformation, et les hypothèses fondamentales.

Plus loin, au chapitre II , on traitera des équations aux dérivées partielles et le calcul variationnel (définitions et classifications des équations, conditions et méthodes de résolutions, type et problème variationnels ...) qui représentent un outil incontournable dans les problèmes de l'élasticité, et sur lesquels les conditions et la validité de la méthode de transplantation seront posées.

Des exemples caractéristiques et concrets occuperont le reste de ce mémoire au moyen desquels nous montrerons comment la méthode de transplantation peut être étendue aux problèmes de l'élasticité et fournit, en même temps, une procédure permettant de calculer les bornes inférieures, et supérieures, de l'énergie de déformation de corps élastique.

---

***CHAPITRE I***

---

***EQUATIONS DE LA  
THEORIE DE  
L'ELASTICITE***

# THEORIE DE L'ELASTICITE

La théorie de l'élasticité trouve son origine dans la pratique, le domaine de construction, (pont construction mécanique automobile...), font signe de l'utilisation des propriétés des corps solides ...), capables de supporter et transmettre certaines charges. L'étude des propriétés de la matière permet la compréhension des phénomènes, les prévoir et, de concevoir dans les conditions souhaitables.

La théorie de l'élasticité est l'une des branches les plus vigoureuses de la mécanique des milieux continus déformables, ses lois régissent l'étude de tous les corps solides qui nous environnent, du point de vue de leurs équilibres et leurs mouvements.

## I.1. Définitions générales

L'élasticité est la capacité physique d'un corps à reprendre sa forme initiale après suppression de la sollicitation. Le corps est parfaitement élastique s'il recouvre complètement sa forme originale après suppression de la charge; il est partiellement élastique si la déformation produite par les forces externes ne disparaît pas complètement après avoir retiré la charge. Dans le cas d'un corps parfaitement élastique, le travail dû aux forces externes, pendant la déformation, est entièrement transformé en énergie potentielle de déformation. Dans le cas d'un corps partiellement

élastique, une partie du travail, créé par les forces externes pendant la déformation, se dissipe sous forme de chaleur dans le corps pendant la déformation non élastique. (2)

Le modèle du corps élastique est caractérisé par les hypothèses fondamentales suivantes (3) :

**Hypothèse de l'espace –temps newtonien** : l'espace est euclidien (à trois dimensions), le temps est indépendant des coordonnées spatiales.

**Hypothèse du milieu continu** : chaque domaine élémentaire contient de la matière, cette hypothèse permet de considérer toutes les quantités comme fonctions du point dans le domaine élastique occupé par le corps.

**Hypothèse de la rigidisation des parties (ou de la solidification)** : un corps se trouve en équilibre si, et seulement si, les forces agissent sur chacune de ses parties forment un système nul ; cette hypothèse permet de séparer une partie arbitraire du corps, de remplacer l'action du reste par certaines forces, et de déterminer ces dernières par la condition que l'équilibre du corps entier reste intact.

**Hypothèse de la dépendance locale** : Les forces intérieures (tension) sont des fonctions du point, de la déformation, de la température, etc.

**Hypothèse de l'élasticité idéale** : il existe une correspondance bi-univoque entre les déformations et les tensions. Ceci caractérise un certain état de la matière, étant dans lequel la connaissance des tensions et celle des déformations fournissent des informations équivalentes.

et les hypothèses simplificatrices :

**Hypothèse de linéarité géométrique** : les déformations sont des fonctions linéaires des dérivées des déplacements.

**Hypothèse de linéarité physique** : les tensions sont des fonctions linéaires des déformations.

**Hypothèse d'isotropie** : les propriétés mécaniques du matériau ne changent pas avec la direction autour du point.

**Hypothèse d'homogénéité** : les propriétés mécaniques du matériau ne changent pas avec le point dans le corps.

## I.2. Contraintes et équilibres

### I.2.1. Contrainte

Sous l'action des charges externes  $P_1, P_2, \dots, P_n$  appliquées sur un corps, des efforts internes se produisent pour le mettre en équilibre. Ces derniers, sont que la résultante des efforts élémentaires agissant sur chaque section de l'élément sollicité par les forces extérieures. On appelle ces efforts élémentaires, *contraintes*  $\sigma$ . (4)

On considère les plans sécants  $A$  et  $A'$  passant par un point  $O$  d'un corps sollicité par des forces extérieures (Figure I.1). Une contrainte normale  $\sigma$  de traction ou de compression au point  $O$  est l'effet d'éloignement ou de rapprochement respectivement des plans  $A$  et  $A'$ . L'effet de glissement des deux plans est attribue aux contraintes tangentielles  $\tau$ . L'existence simultanée des contraintes normales et tangentielles tend à déplacer les plans suivant la direction de la résultante dite, *vecteur contrainte*  $P$  ( $\Delta F$ ).

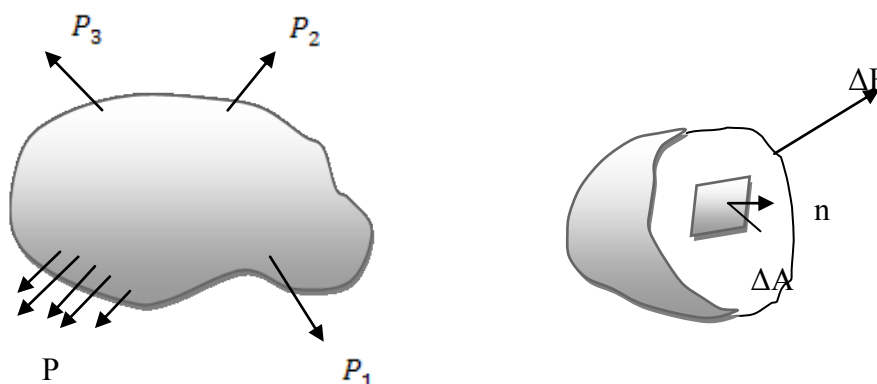
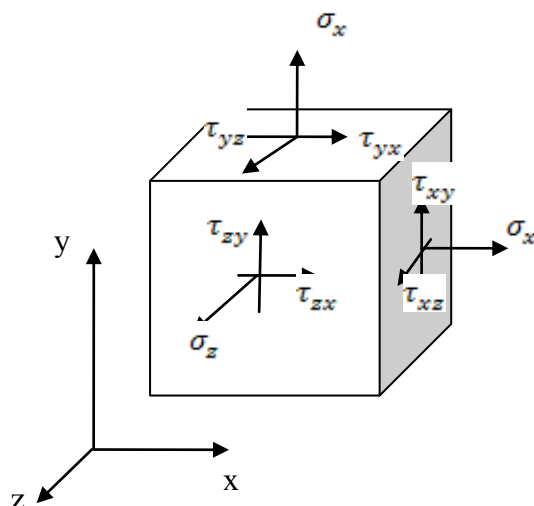


Figure I-1 : Solide soumis à des charges externes

### I.2.2. Etat de contrainte

Découpons au voisinage du point  $O$  du corps sollicité un parallélépipède rectangle infiniment petit de cotes  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Sur chaque face de ce parallélépipède agissent une contrainte normale et deux contraintes tangentielles. La contrainte normale est positive quand elle agit sur une facette positive dans le sens positive de l'axe considéré ou sur une facette négative dans le sens négatif de cet axe. Une contrainte tangentielle est

positive quand elle agit sur une facette positive dans le sens positif de l'axe parallèle à cette facette ou sur une facette négative dans le sens négatif de l'axe parallèle de cette facette. Toutes les contraintes de l'élément, sont représentées sur la Figure I-2.



**Figure I-2 :** Comportement des contraintes

L'état de contrainte plan est le cas particulier d'une seule facette du volume où sur chaque côté agissent une contrainte normale et une contrainte tangentielle.

L'état de contrainte linéaire est le cas particulier d'un seul côté de la facette sur lequel agissent une contrainte normale et une contrainte tangentielle.

### I.2.3. Transformation de contrainte

Nous pouvons déterminer des nouveaux comportements dans n'importe quel autre système en utilisant la matrice de rotation. (5)

Pour le cas général tridimensionnel, la matrice de rotation est donnée par :

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \quad (I.1)$$

Où  $Q_{ij} = \cos(x'_i, x_j)$

Utilisant cette notation, les relations de transformation pour les contraintes deviennent

$$\begin{aligned}
\sigma'_x &= \sigma_x l_1^2 + \sigma_y m_1^2 + \sigma_z n_1^2 + 2(\tau_{xy} l_1 m_1 + \tau_{yz} m_1 n_1 + \tau_{zx} n_1 l_1) \\
\sigma'_y &= \sigma_x l_2^2 + \sigma_y m_2^2 + \sigma_z n_2^2 + 2(\tau_{xy} l_2 m_2 + \tau_{yz} m_2 n_2 + \tau_{zx} n_2 l_2) \\
\sigma'_z &= \sigma_x l_3^2 + \sigma_y m_3^2 + \sigma_z n_3^2 + 2(\tau_{xy} l_3 m_3 + \tau_{yz} m_3 n_3 + \tau_{zx} n_3 l_3) \\
\tau'_{xy} &= \sigma_x l_1 l_2 + \sigma_y m_1 m_2 + \sigma_z n_1 n_2 + \tau_{xy}(l_1 m_2 + m_1 l_2) + \tau_{yz}(m_1 n_2 + n_1 m_2) + \tau_{zx}(n_1 l_2 + l_1 n_2) \\
\tau'_{yz} &= \sigma_x l_2 l_3 + \sigma_y m_2 m_3 + \sigma_z n_2 n_3 + \tau_{xy}(l_2 m_3 + m_2 l_3) + \tau_{yz}(m_2 n_3 + n_2 m_3) + \tau_{zx}(n_2 l_3 + l_2 n_3) \\
\tau'_{zx} &= \sigma_x l_3 l_1 + \sigma_y m_3 m_1 + \sigma_z n_3 n_1 + \tau_{xy}(l_3 m_1 + m_3 l_1) + \tau_{yz}(m_3 n_1 + n_3 m_1) + \tau_{zx}(n_3 l_1 + l_3 n_1)
\end{aligned} \tag{I.2}$$

Pour le cas bidimensionnel, les comportements de contraintes sont:

$$\begin{aligned}
\sigma'_x &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\
\sigma'_y &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\
\tau'_{xy} &= -\sigma_x \sin \theta \cos \theta + \sigma_y \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)
\end{aligned} \tag{I.3}$$

Elles peuvent être écrites en termes de double angle :

$$\begin{aligned}
\sigma'_x &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\
\sigma'_y &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\
\tau'_{xy} &= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta
\end{aligned} \tag{I.4}$$

#### I.2.4. Contraintes principales

En variant l'angle  $\theta$ , les contraintes normales et tangentielles varient. Et pour n'importe quel tenseur de contrainte nous pouvons établir le problème de la valeur principale et résoudre l'équation caractéristique pour déterminer les valeurs et les directions. L'équation caractéristique générale pour les contraintes

$$\det[\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}] = -\sigma^3 + I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma + I_3 = 0 \tag{I.5}$$

Où  $\sigma$  sont les contraintes principales;  $I_1, I_2, I_3$  sont les invariants.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\
I_2 &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 \\
I_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3
\end{aligned} \tag{I.6}$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sont les contraintes principales

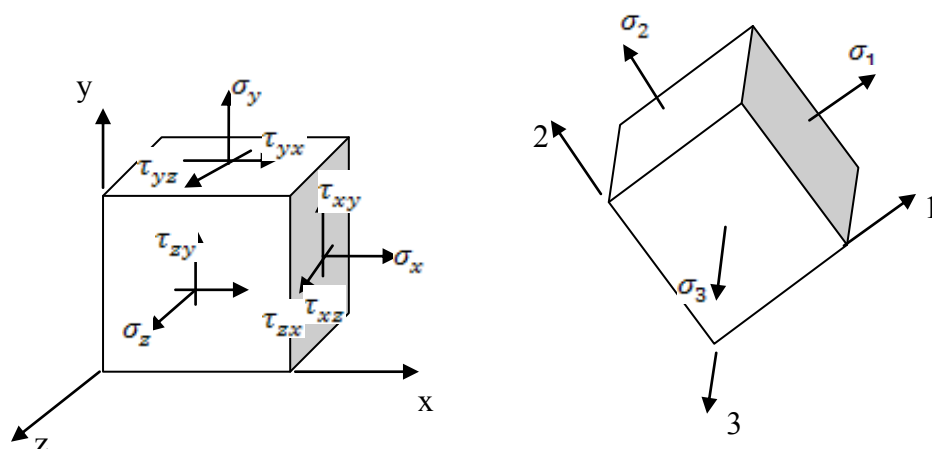


Figure I-3 : Contraintes générales et principales

Dans le système des coordonnées principales, la matrice des contraintes prend la forme diagonale spéciale

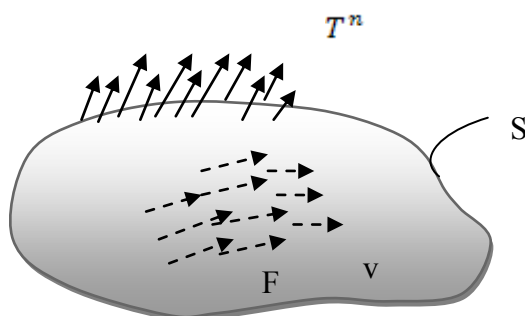
$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (I.7)$$

### I.2.5. Equation d'équilibre

Le champ des contraintes dans un solide élastique est distribué continument dans le corps et déterminé uniquement par les charges appliquées. Ces charges doivent satisfaire l'équation d'équilibre statique. La somme des forces et des moments est égale à zéro. Si le corps entier est en équilibre, donc toute partie est en équilibre. Alors, nous partitionnons le solide en sous domaines et appliquons le principe d'équilibre à cette région.

Considérons un sous domaines fermé avec un volume  $V$  et surface  $S$  à l'intérieur d'un corps en équilibre.





*Figure I-4 : Forces de volume et de surfac agissantes sur une portion du corps*

L'équation d'équilibre est donnée par l'équation suivante:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (\text{I.8})$$

Les équations d'équilibres en notation scalaire s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.9})$$

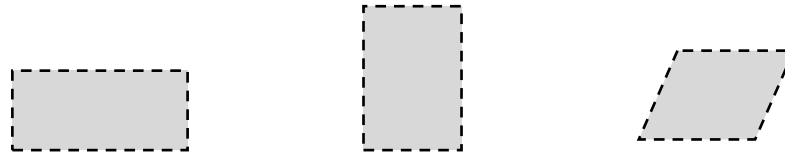
Donc, tous les champs de contraintes élastiques doivent satisfaire ces relations afin d'être en équilibre statique .

## I.3. Déformation et compatibilité

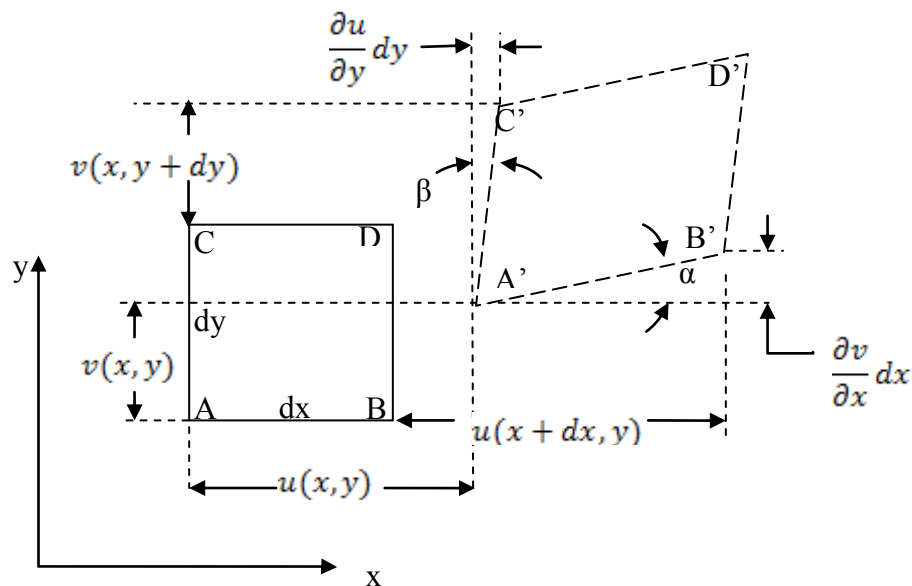
### I.3.1. Déformations et déplacements

Sous l'action d'un chargement externe ou d'une variation de température, les dimensions d'un corps varient: il en résulte une déformation. Nous pouvons distinguer deux types de déformations, le premier est la déformation normale, le deuxième est la déformation de cisaillement. (2)

La figure (I-5) illustre une déformation bidimensionnelle d'un élément rectangulaire avec des dimensions originales  $dx$  par  $dy$ . Après déformation, l'élément prend la forme montrée par le contour en pointillé. Les déplacements des points de référence sont indiqués dans la figure (I-6).



**Figure I-6 :** Déformation typique pour un élément rectangulaire



**Figure I-5 :** Déformation géométrique bidimensionnelle

Le point de référence A est pris en coordonnées  $(x,y)$ , et les comportements de déplacement de ce point sont  $u(x,y)$  et  $v(x,y)$ . Les déplacements correspondants au point B sont  $u(x+dx,y)$  et  $v(x+dx,y)$ , et les déplacements pour les autres points de coin sont définis d'une manière analogue. Pour la théorie des petites déformations,  $u(x+dx,y) \approx u(x,y) + (\partial u / \partial x) dx$ , avec expansions similaires pour les autres termes.

**La déformation normale** ou extensionnelle dans la direction  $n$  est définie par le changement de longueur par unité de longueur des fibres orientés dans la direction  $n$ . La théorie des petites déformations donne :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{I.10})$$

**La déformation de cisaillement** est définie par le changement d'angle entre deux directions orthogonales. Pour les petites déformations (4)

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{I.11})$$

Dans le cas général tridimensionnel, les trois comportements de déformations normales et les trois comportements de déformation de cisaillement sont:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{I.12})$$

En utilisant l'écriture tensoriel  $e_{ij}$ , les relations déformations-déplacements peuvent être exprimées sous forme:

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, e_y = \frac{\partial v}{\partial y}, e_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ e_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), e_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), e_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.13})$$

Les six équations de comportements indépendants décrivent la théorie de petites déformations, et cet ensemble des équations est référé comme les relations *déformations-déplacements*.

### I.3.2. Transformation des déformations

Si la déformation est donnée pour un système de coordonnées, nous pouvons déterminer le nouveau comportement dans n'importe quel système de rotation. Pour le cas tridimensionnel la matrice de rotation est définie comme l'équation (I.1):

Les relations de transformation sont:

$$\begin{aligned}
e'_x &= e_x l_1^2 + e_y m_1^2 + e_z n_1^2 + 2(e_{xy} l_1 m_1 + e_{yz} m_1 n_1 + e_{zx} n_1 l_1) \\
e'_y &= e_x l_2^2 + e_y m_2^2 + e_z n_2^2 + 2(e_{xy} l_2 m_2 + e_{yz} m_2 n_2 + e_{zx} n_2 l_2) \\
e'_z &= e_x l_3^2 + e_y m_3^2 + e_z n_3^2 + 2(e_{xy} l_3 m_3 + e_{yz} m_3 n_3 + e_{zx} n_3 l_3) \\
e'_{xy} &= e_x l_1 l_2 + e_y m_1 m_2 + e_z n_1 n_2 + e_{xy}(l_1 m_2 + m_1 l_2) + e_{yz}(m_1 n_2 + n_1 m_2) + e_{zx}(n_1 l_2 + l_1 n_2) \\
e'_{yz} &= e_x l_2 l_3 + e_y m_2 m_3 + e_z n_2 n_3 + e_{xy}(l_2 m_3 + m_2 l_3) + e_{yz}(m_2 n_3 + n_2 m_3) + e_{zx}(n_2 l_3 + l_2 n_3) \\
e'_{zx} &= e_x l_3 l_1 + e_y m_3 m_1 + e_z n_3 n_1 + e_{xy}(l_3 m_1 + m_3 l_1) + e_{yz}(m_3 n_1 + n_3 m_1) + e_{zx}(n_3 l_1 + l_3 n_1)
\end{aligned} \tag{I.14}$$

Pour le cas bidimensionnel la matrice s'écrit:

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sous cette transformation les déformations deviennent:

$$\begin{aligned}
e'_x &= e_x \cos^2\theta + e_y \sin^2\theta + 2e_{xy} \sin\theta \cos\theta \\
e'_y &= e_x \sin^2\theta + e_y \cos^2\theta - 2e_{xy} \sin\theta \cos\theta \\
e'_{xy} &= -e_x \sin\theta \cos\theta + e_y \sin\theta \cos\theta + e_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)
\end{aligned} \tag{I.15}$$

Où elles peuvent être écrites en termes de double angle

$$\begin{aligned}
e'_x &= \frac{e_x + e_y}{2} + \frac{e_x - e_y}{2} \cos 2\theta + e_{xy} \sin 2\theta \\
e'_y &= \frac{e_x + e_y}{2} - \frac{e_x - e_y}{2} \cos 2\theta - e_{xy} \sin 2\theta \\
e'_{xy} &= \frac{e_y - e_x}{2} \sin 2\theta + e_{xy} \cos 2\theta
\end{aligned} \tag{I.16}$$

La relation de transformation peut être appliquée directement pour établir les transformations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires. (5)

### I.3.3. Les déformations principales

Nous pouvons identifier et déterminer les valeurs de déformation principales et les directions principales en résolvant l'équation caractéristique suivante

$$\det[e_{ij} - e\delta_{ij}] = -e^3 + \vartheta_1 e^2 - \vartheta_2 e + \vartheta_3 = 0 \tag{I.17}$$

Où  $e$  est la déformation principale et les invariants fondamentaux de la déformation peuvent être exprimés par les trois déformations principales:

$$\begin{aligned}
\vartheta_1 &= e_1 + e_2 + e_3 \\
\vartheta_2 &= e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1 \\
\vartheta_3 &= e_1 e_2 e_3
\end{aligned}
\tag{I.18}$$

Le premier invariant  $\vartheta_1 = \vartheta$  est nommé la délitation cubique, parce qu'il a une relation avec le changement de volume de l'élément matériel.

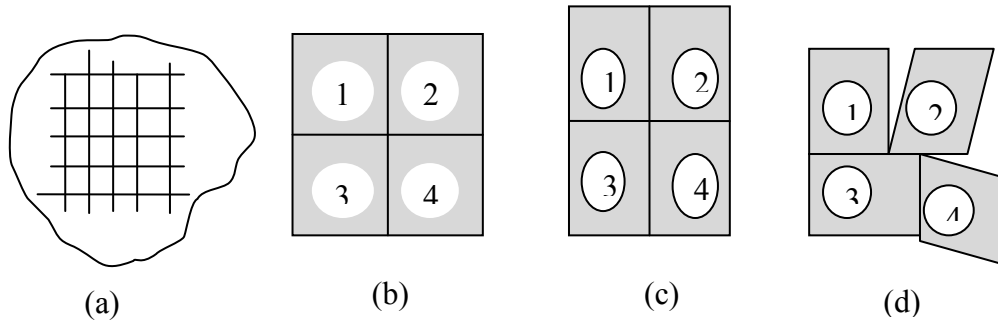
La matrice de déformation dans le système de coordonnées principales prend la forme diagonale

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{bmatrix}
\tag{I.19}$$

On note que dans le système de coordonnées principales, la déformation ne produit pas de cisaillement mais uniquement une extension.

### I.3.4. Compatibilité de déformation

Pour assurer la continuité de l'uniformité des déplacements, les déformations doivent satisfaire les relations additionnelles nommées les équations d'intégrabilité ou les équations de compatibilité. Avant de développer ces équations, il est instructif de considérer l'interprétation géométrique de ce concept. L'exemple bidimensionnel est montré dans la figure (I-7) où le solide élastique est premièrement divisé en série d'éléments dans le cas (a). Pour la simple visualisation, considérons uniquement quatre éléments. Dans la configuration indéformée montrée dans le cas (b), ces éléments sont unis parfaitement. Après déformation arbitraire pour chaque élément et reconstruction le solide, pour le cas (c), les éléments ont été unis et arrangés de façon continue et d'un déplacement uniforme. (5)



**Figure I-7 : Interprétation physique de la compatibilité de déformation**

Cependant, pour le cas (d), les éléments ont été individuellement déformés sans aucun intérêt pour les déformations avoisinantes. Il est observé dans ce cas que le système ne sera pas ajusté sans des vides et des écarts, et cette situation produit un champ de déplacement discontinu. Nous concluons donc que les comportements de déformation doivent être de manière ou d'autre reliés pour produire des déplacements continus et uniformes. La procédure de développer ces équations est basée sur l'élimination des déplacements des relations de déformation-déplacement.

Ceci nous conduit à une équation de compatibilité de Saint VENANT sous forme tensorielle.

$$e_{ij,kl} + e_{kl,ij} - e_{ik,jl} - e_{jl,ik} = 0 \tag{I.20}$$

Ce système conduit à 81 équations individuelles, la plupart, sont répétées et nous aurons six équations restent indépendantes. Ces relations deviennent pour  $l=k$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 e_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2} &= 2 \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2} &= 2 \frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 e_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 e_y}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 e_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} \right) \end{aligned} \tag{I.21}$$

Ces relations sont de conditions nécessaires et suffisantes pour des déplacements continus et uniformes dans une région simplement connexe.

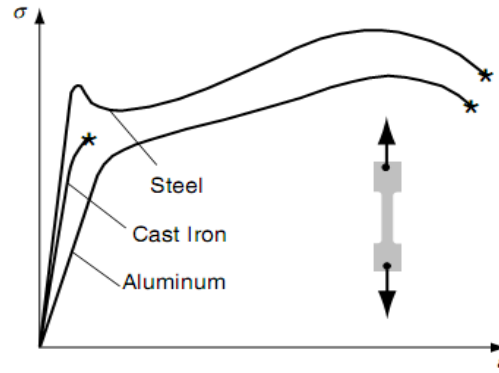
## **I.4. Relations contraintes-déformations**

### **I.4.1. Caractérisation des matériaux**

Les relations qui caractérisent les propriétés physiques des matériaux sont appelées les équations constitutives; la théorie de la mécanique réelle a établi quelques principes pour le développement des équations constitutives, la majorité des lois constitutives ont été développées au moyen des relations empiriques basées sur l'évidence expérimentale. Pour une certaine classe de matériaux solides le comportement mécanique est défini par les relations constitutives contraintes-déformations. Ces relations expriment la contraintes en fonction des déformations, et des propriétés des matériaux.

L'une des techniques est le test de la tension simple dans la quelle un cylindre spécial préparé est chargé axialement dans une machine à test .La déformation est déterminée par le changement de longueur entre les marques de référence sur l'échantillon. Les données de charge mesurées par les cellules de charge sont divisées par l'aire pour calculer les contraintes. Les données de contrainte-déformation sont rapportés et tracés en utilisant la technique expérimentale standard. Il est observé que chaque matériau montre une réponse contraintes-déformation initiale pour des petites déformations qui est approximativement linéaire. Elle est suivie par un changement de comportement non linéaire qui conduit à une large déformation et finalement se termine par une rupture.

Observe aussi dans la région initiale que si le chargement est enlevé l'échantillon retourne à sa forme originale et la déformation disparaisse. Cette caractéristique est le descripteur primaire du comportement élastique. Cependant, à un certain point sur la courbe contraintes-déformation, le déchargement ne fait pas amener l'échantillon à une déformation nulle et il résulte une certaine déformation plastique permanente. (5)



**Figure I-8 :** Courbes uni axiales contrainte-déformation typiques pour trois structures de matériaux

Conclut par cette étude, que la variété des matériaux réels montre un comportement élastique linéaire sous des petites déformations. Cela conduit à un modèle constitutif linéaire pour le cas de charges axiales unidimensionnelles donnée par la relation  $\sigma = E\varepsilon$ , Où E est la pente de la courbe contrainte-déformation uni axiale.

#### I.4.2. Loi de Hooke loi constitutive

Se basant sur les observations précédentes, et dans le but de construire la loi constitutive générale tridimensionnelle pour les matériaux élastiques, nous concluons que chaque comportement de contrainte est linéairement relié de chaque comportement déformation.

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= C_{11}e_x + C_{12}e_y + C_{13}e_z + 2C_{14}e_{xy} + 2C_{15}e_{yz} + 2C_{16}e_{zx} \\
 \sigma_y &= C_{21}e_x + C_{22}e_y + C_{23}e_z + 2C_{24}e_{xy} + 2C_{25}e_{yz} + 2C_{26}e_{zx} \\
 \sigma_z &= C_{31}e_x + C_{32}e_y + C_{33}e_z + 2C_{34}e_{xy} + 2C_{35}e_{yz} + 2C_{36}e_{zx} \\
 \tau_{xy} &= C_{41}e_x + C_{42}e_y + C_{43}e_z + 2C_{44}e_{xy} + 2C_{45}e_{yz} + 2C_{46}e_{zx} \\
 \tau_{yz} &= C_{51}e_x + C_{52}e_y + C_{53}e_z + 2C_{54}e_{xy} + 2C_{55}e_{yz} + 2C_{56}e_{zx} \\
 \tau_{zx} &= C_{61}e_x + C_{62}e_y + C_{63}e_z + 2C_{64}e_{xy} + 2C_{65}e_{yz} + 2C_{66}e_{zx}
 \end{aligned} \tag{I.22}$$

Où les coefficients  $C_{ij}$  sont des paramètres matériels, le facteurs de deux est présent à cause de la symétrie de déformation. On note que cette relation doit être exprimée par l'écriture des déformations par une fonction linéaire des comportements des contraintes



La relation (I.22) peut être exprimée dans une notation standard de tenseur par l'écriture

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} \quad (\text{I.23})$$

Où  $C_{ijkl}$  est le tenseur de quatrième ordre dont les comportements incluent tous les paramètres nécessaires pour caractériser le matériau. Basant sur la symétrie du tenseur de contrainte et déformation, le tenseur d'élasticité doit avoir les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= C_{jikl} \\ C_{ijkl} &= C_{jilk} \end{aligned} \quad (\text{I.24})$$

En général, le tenseur du quatrième ordre  $C_{ijkl}$  a 81 composantes. Toutefois, les relations (I.24) réduisent le nombre de composantes indépendantes à 36, ce qui fournit la correspondance avec la forme (I.21). Les composantes de  $C_{ijkl}$  sont appelés modules élastiques et ont des unités de contraintes (force / surface).

Appliquant l'hypothèse simplificatrice de l'*homogénéité* le comportement élastique ne varie pas dans l'espace, et donc tous les modules élastiques sont constants

Similaire à l'homogénéité, une autre propriété *isotropie* à faire à des différences dans les modules de matériau à l'égard de l'orientation

La forme tensorielle (I.23) fournit un moyen simple d'établir les relations isotropes contrainte-déformation. Si l'on suppose un comportement isotrope, le tenseur d'élasticité doit être le même dans toutes les rotations du système de coordonnées. Le quatrième ordre du tenseur d'élasticité doit satisfaire:

$$C_{ijkl} = Q_{im} Q_{jn} Q_{kp} Q_{lq} \quad (\text{I.25})$$

Utilisant la forme générale contrainte-déformation nous aurons:

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (\text{I.26})$$

Où nous avons utilisé notamment les constantes d'élasticités  $\lambda$  et  $\mu$ . La constante  $\lambda$  est appelée la constante de Lamé, et  $\mu$  est appelé le module de cisaillement ou module de rigidité. L'équation (I.26) peut être écrite dans des équations scalaires individuelles

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \lambda(e_x + e_y + e_z) + 2\mu e_x \\
\sigma_z &= \lambda(e_x + e_y + e_z) + 2\mu e_z \\
\sigma_y &= \lambda(e_x + e_y + e_z) + 2\mu e_y \\
\tau_{xy} &= 2\mu e_{xy} \\
\tau_{yz} &= 2\mu e_{yz} \\
\tau_{zx} &= 2\mu e_{zx}
\end{aligned} \tag{I.27}$$

Les relations (I.26) ou (I.27) sont appelés lois Hooke généralisée pour les solides élastiques linéaires isotropes. Hooke en 1678, a proposé pour la première fois que la déformation d'une structure élastique est proportionnelle à la force appliquée. Il convient de noter que seulement deux des constantes élastiques sont nécessaires pour décrire le comportement des matériaux isotropes. (6)

Les relations contraintes -déformations (I.26) ou (I.27) doivent être inversées pour exprimer la déformation en fonction de la contrainte.

$$\sigma_{kk} = (3\lambda + 2\mu)e_{kk} \tag{I.28}$$

Et nous pouvons écrire

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \tag{I.29}$$

Où  $E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$  est appelé le module d'élasticité ou le module de Young, et  $\nu = \lambda/[2(\lambda + \mu)]$  est considéré comme le ratio de Poisson. La relation (I.29) doit être écrite en composants (scalaires) qui forment les six équations

$$\begin{aligned}
e_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\
e_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \\
e_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\
e_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy} = \frac{1}{2\mu} \tau_{xy} \\
e_{yz} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{yz} = \frac{1}{2\mu} \tau_{yz} \\
e_{zx} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{zx} = \frac{1}{2\mu} \tau_{zx}
\end{aligned} \tag{I.30}$$

La forme constitutive de (I.29) ou (I.30) montre à nouveau que seulement deux constantes élastiques sont nécessaires pour formuler la loi de Hooke pour les matériaux isotropes. En utilisant l'une des formes isotropes de la loi de Hooke, il peut

être démontré que les principaux axes de contrainte coïncident avec les principaux axes de déformation.

## I.5. Formulations générales et stratégies de solution

Les résultats comprennent un système différentiel et algébrique de relations entre les contraintes, les déformations, et déplacements. La formulation générale s'achève par, le développement des conditions aux limites appropriées. Ces conditions précisent le phénomène qui se produit sur la limite du corps et, plus généralement, le chargement qui a créé physiquement des contraintes internes, déformations, et les champs des déplacements. Bien que les champs des équations sont les mêmes pour tous les problèmes, les conditions aux limites sont différentes pour chaque problème. Par conséquent, le bon choix de conditions aux limites est essentiel pour la solution du problème, il est donc important d'acquérir une bonne compréhension de l'évolution des procédures. La combinaison des champs des équations avec les conditions aux limites, établit les problèmes fondamentaux de la valeur limite de la théorie. Cela nous amène finalement en deux formules différentes, en termes de l'une en termes de déplacements et l'autre en termes de contraintes. Parce que ces problèmes aux limites sont difficiles à résoudre, de nombreuses stratégies ont été développées pour aider à la solution du problème.

### I.5.1. Les équations fondamentales de l'élasticité

Nous pouvons résumer le champ des équations de base ou les équations fondamentales pour l'élasticité linéaire isotropique sous les formules indicielles suivantes.

#### *Les relations déformations-déplacements*

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{I.31})$$

#### *Les relations de compatibilités*

$$e_{ij,kl} + e_{kl,ij} - e_{ik,jl} - e_{jl,ik} = 0 \quad (\text{I.32})$$

### Les équations d'équilibre

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (\text{I.33})$$

### La loi constitutive élastique (loi de Hooke)

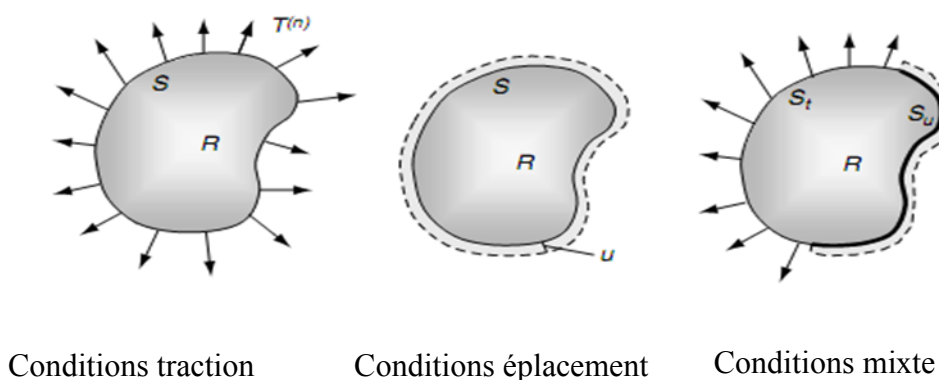
$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \\ e_{ij} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (\text{I.34})$$

Par conséquent, le système général du champ des équations d'élasticité correspond aux 15 relations (I.31), (I.33) et (I.34). Il est pratique de définir l'ensemble de ce système en utilisant un opérateur généralisé de notation comme

$$\mathfrak{F}\{u_i, e_{ij}, \sigma_{ij}, \lambda, \mu, F_i\} = 0 \quad (\text{I.35})$$

## I.5.2. Conditions aux limites

Les types de conditions aux limites pour les applications de l'élasticité incluent la spécification de la façon dont le corps est pris en charge (supporté) ou chargé. Ce concept est mathématiquement formulé par les déplacements ou les tractions aux points limites. La figure (I-9) illustre cette idée générale pour trois cas typiques, y compris tractions, déplacements, et un mélange de cas pour lesquels les tractions sont indiquées sur la frontière  $S_t$  et les déplacements sont donnés sur la portion restante  $S_u$ .



**Figure I-9 :** Conditions aux limites typiques

Donc nous pouvons formuler et classifier les trois problèmes fondamentaux de la valeur-limite dans la théorie de l'élasticité qui sont liés à la résolution du système général de champ des équations (I.33). Notre présentation est limitée au cas statique.

**Problème 1 : Problème traction**

Déterminer la distribution des déplacements, déformations, et contraintes à l'intérieur d'un corps élastique en équilibre lorsque les forces du corps sont données et la répartition des tractions est prescrite sur la surface du corps

$$T_i^{(n)}(x_i^{(s)}) = f_i(x_i^{(s)}) \quad (I.36)$$

Où  $x_i^{(s)}$  désignent les points de frontière (limites) et  $f_i(x_i^{(s)})$  sont les valeurs de la traction.

**Problème 2 : Problème déplacement**

Déterminer la distribution des déplacements, déformations et contraintes à l'intérieur d'un corps élastique en équilibre lorsque les forces du corps sont données et la distribution des déplacements est prescrite sur la surface du corps,

$$u_i^{(n)}(x_i^{(s)}) = g_i(x_i^{(s)}) \quad (I.37)$$

Où  $x_i^{(s)}$  désignent les points de frontière (limites) et  $g_i(x_i^{(s)})$  sont les valeurs de déplacement.

**Problème 3 : Problème mixte**

Déterminer la distribution des déplacements, déformations, et contraintes à l'intérieur, la traction est prescrite par (I.36) sur la surface  $S_t$ , et la répartition des déplacements est prescrite que par (I.37) sur la surface du corps  $S_u$  (voir Figure I-9).

La simplification de (I.35) est nécessaire pour le développement des méthodes de solution analytique. Sur la base de la description du problème 1 avec seulement les conditions aux limites de tractions, il serait souhaitable d'exprimer le système fondamental uniquement en termes de contrainte, qui est,  $\mathfrak{S}^t\{\sigma_{ij}, \lambda, \mu, F_i\}$  de manière à réduire le nombre d'inconnues dans le système. De même pour le problème 2, la

formulation des déplacements seulement est exprimée sous la forme  $\mathfrak{S}^u\{u_i, \lambda, \mu, F_i\}$  de manière à simplifier le problème. Nous allons maintenant poursuivre ces formulations spécialisées et déterminons explicitement ces systèmes d'équations. (5)

### I.5.3. Formulation des contraintes

Pour le premier problème fondamental de l'élasticité, les conditions aux limites doivent être données que dans les termes de tractions ou comportements de contrainte. En vue de développer des méthodes de solution pour ce cas, il est très utile de reformuler le système général (I.33), en éliminant les déplacements et les déformations et ainsi obtenir un nouveau système uniquement en termes de contraintes. Nous allons maintenant inclure les équations de compatibilité dans le système fondamental. Donc, nous commençons par l'utilisation de la loi Hooke (I.34) et nous éliminons les déformations des relations de compatibilité (I.32) pour obtenir

$$\sigma_{ij,kk} + \sigma_{kk,ij} - \sigma_{ik,jk} - \sigma_{jk,ik} = \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_{mm,kk} \delta_{ij} + \sigma_{mm,ij} \delta_{kk} - \sigma_{mm,jk} \delta_{ik} - \sigma_{mm,ik} \delta_{jk}) \quad (I.38)$$

Après quelques simplifications et modifications nous obtenons les relations de compatibilité en termes de contraintes et sont communément appelés les équations de compatibilité de Beltrami-Michell.

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{2+\nu} \sigma_{kk,ij} = -\frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} F_{k,k} - F_{ij} - F_{j,i} \quad (I.39)$$

Pour le cas sans les forces de volume, ces relations peuvent être exprimées comme les six équations scalaires:

$$\begin{aligned} (1 + \nu) \nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) &= 0 \\ (1 + \nu) \nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) &= 0 \\ (1 + \nu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) &= 0 \\ (1 + \nu) \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) &= 0 \\ (1 + \nu) \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) &= 0 \\ (1 + \nu) \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) &= 0 \end{aligned} \quad (I.40)$$

Ainsi, en combinant ces équations avec les équations d'équilibre (I.33) on a les données nécessaires pour résoudre les six relations pour les six contraintes inconnues pour le cas en trois dimensions. Ce système constitue la formulation des contraintes de la théorie de l'élasticité et est approprié pour une utilisation avec les problèmes des conditions de limites de traction. Une fois les contraintes déterminées, les déformations sont disponibles à partir de la loi de Hooke (I.34), et les déplacements peuvent être alors être calculée par l'intégration de (I.31).

Le système d'équations pour la formulation des contraintes est encore assez complexe, et les solutions analytiques sont déterminées pour ce cas en utilisant des fonctions de contraintes. Ce concept prévoit une représentation des contraintes qui satisfait les équations d'équilibre. Pour le cas à deux dimensions, ce concept représente des contraintes dans le plan en termes d'une fonction unique. La représentation satisfait l'équilibre, et le reste des équations de compatibilité les rendent en une seule équation aux dérivées partielles (équation biharmonique) en termes de *fonction de contrainte*.

#### I.5.4. Formulation des déplacements

La réduction du champ d'équations en termes de déplacements uniquement est le système dénommé formulation de déplacements. Il est plus utile lorsqu'il est associé aux conditions limites de déplacement dans le problème 2. Dans ce cas, nous éliminons les déformations et les contraintes du système fondamental (I.35). Ceci est facilement accompli en utilisant les relations déformation-déplacement et la loi de Hooke pour donner

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{I.41})$$

qui peut être exprimé en six équations scalaires

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_y &= \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_z &= \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \tau_{yz} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.42})$$

Utilisant ces relations dans les équations d'équilibre nous aurons

$$\mu u_{i,,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,ki} + F_i = 0 \quad (\text{I.43})$$

qui sont les équations d'équilibre en termes de déplacements et sont désignés comme les équations de Navier ou Lamé. Ce système peut être exprimé en termes de trois équations scalaires comme

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + F_x &= 0 \\ \mu \nabla^2 v + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + F_y &= 0 \\ \mu \nabla^2 w + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + F_z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.44})$$

Où le Laplacien est donnée par  $\nabla^2 = (\partial^2 / \partial x^2) + (\partial^2 / \partial y^2) + (\partial^2 / \partial z^2)$ . Les équations de Navier sont la formulation souhaitée pour le problème de déplacements, et le système représente trois équations pour les trois inconnus de composantes de déplacement. Semblable à la formulation de contraintes, ce système est encore difficile à résoudre, et de nouvelles techniques mathématiques ont été développées dans le but de simplifier ces équations pour la solution du problème. Ces méthodes emploient *les fonctions de potentiel de déplacement*.

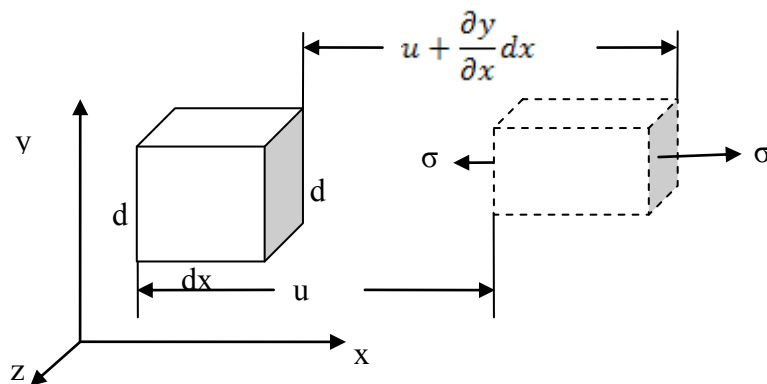
## I.6. Hypothèses fondamentales de l'élasticité linéaire

### I.6.1. Energie de déformation

Le travail effectué sur un élément, et emmagasiné à l'intérieur, sera appelée énergie de déformation. Il est supposé que l'élément reste élastique et aucune énergie cinétique n'est développée, c'est à dire que le retrait des charges résulte de la récupération complète de l'énergie stockée dans le corps. (6)

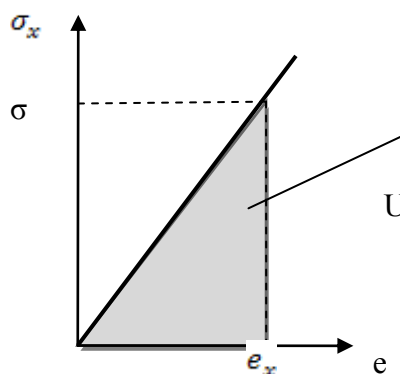
Afin de quantifier ce comportement, nous voulons à présent déterminer l'énergie de déformation en fonction de la contrainte et de la déformation qui en résulte dans le solide élastique. Considérons d'abord le cas de déformation uniaxial et uniforme sans les forces de volume, comme le montre la Figure I-10.





**Figure I-10** : Déformation sous une contrainte uniaxiale uniforme

Si l'élément cubique de dimensions  $dx, dy, dz$  est sous l'action d'une contrainte normale uniforme  $\sigma_x$  dans la direction  $x$  comme montré, nous avons une force  $\sigma_x dydz$  qui produit un travail sur l'extension  $\epsilon_x dx$ . La relation entre ces deux quantités durant la contrainte est représentée par la ligne droite (figure I-11), et le travail effectué durant la déformation est donné par l'aire  $\frac{1}{2}(\sigma_x dydz)(\epsilon_x dx)$  du triangle.



**Figure I-11** : L'énergie de déformation pour une déformation uniaxiale

Ecrivons  $dU$  pour ce travail nous aurons :

$$dU = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dx dy dz \tag{I.45}$$

De la même manière où l'élément est soumis aux six comportements, l'énergie de déformation devient :

$$dU = U_0 dx dy dz ; \quad U = \iiint U_0 dx dy dz \tag{I.46}$$

$$\text{Où } U_0 = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) \quad (\text{I.47})$$

$U_0$  est la quantité de travail par unité de volume, ou l'énergie de déformation par unité de volume.

En utilisant la loi de Hooke, nous pouvons exprimer l'énergie de déformation uniquement en fonction des contraintes :

$$U_0 = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)] + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \quad (\text{I.48})$$

d'où

$$U = \frac{1}{2} \iiint \left\{ \frac{1}{E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)] + \frac{1}{G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \right\} dx dy dz \quad (\text{I.49})$$

Comme nous pouvons l'écrire:

$$U(\sigma) = \frac{1+\nu}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2) - \frac{\nu}{2E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2$$

$$U(\sigma) = \frac{1+\nu}{2E} \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{2E} \sigma_{jj} \sigma_{kk}$$

Nous pouvons aussi exprimer la quantité de travail uniquement en fonction des comportements de déformation

$$U_0 = \frac{1}{2} \lambda \Theta^2 + G(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{1}{2} G(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \quad (\text{I.50})$$

d'où

$$U = \iiint \left[ \frac{1}{2} \lambda \Theta^2 + G(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{1}{2} G(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right] dV \quad (\text{I.51})$$

$$\text{Avec } \Theta = e_x + e_y + e_z = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Comme nous pouvons l'écrire

$$U(e) = \frac{1}{2} \lambda (e_x + e_y + e_z)^2 + \mu (e_x^2 + e_y^2 + e_z^2) + \frac{1}{2} \gamma_{xy}^2 + \frac{1}{2} \gamma_{yz}^2 + \frac{1}{2} \gamma_{zx}^2$$

$$U(e) = \frac{1}{2} \lambda e_{ij} e_{ij} - \mu e_{jj} e_{kk}$$

Le développement du concept de l'énergie de déformation peut produire de nouvelles informations utiles non trouvées par d'autres méthodes. Cette étude a aussi conduit à des nouvelles méthodes ou des principes qui permettent de nouvelles techniques pour résoudre les problèmes d'élasticité. Dans un certain sens, ces méthodes peuvent être considérées comme une alternative au champ d'équations dérivés. Pour les problèmes en mécanique des structures (barres, poutres, plaques, et coques) les méthodes de l'énergie se sont révélées très utiles dans le développement des équations régissant le comportement et les conditions aux limites associées (6).

## I.6.2. Théorèmes fondamentaux

### *Théorème de Clapeyron*

Si l'on applique un effort aux points  $A_j$  du corps, supposé dans son état naturel, des forces  $F_j$ , les points  $A_j$  se déplacent en  $A'_j$  et  $u'_j$  désigne la projection de  $A_j A'_j$  sur la direction de la force  $F_j$ . Le théorème des travaux virtuels donne la relation :

$$\sum_j F_j u_j = 2U$$

Nous obtenons ainsi l'expression de l'énergie de déformation en fonction des forces et des déplacements due à Clapeyron :

$$U = \frac{1}{2} \sum_j F_j u_j \quad (I.52)$$

### *Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti*

Considérons deux systèmes de forces  $F'_j$  et  $F''_j$  appliquées aux points  $A_j$  du corps. Le premier donne lieu aux déplacements  $u'_j$ , aux contraintes  $\sigma'_j$  et aux déformations  $\varepsilon'_j$ . Le second donne lieu aux déplacements  $u''_j$ , aux contraintes  $\sigma''_j$  et aux déformations  $\varepsilon''_j$ . Appliquons à chaque système le théorème des travaux virtuels en prenant pour déplacements et déformations virtuelles les déplacements et les déformations dus à l'autre système :

$$\sum_j F''_j u'_j = \int \sigma''^t \varepsilon'_j dv = \int \sigma''^t E \sigma'' dv$$

$$\sum_j F_j'' u_j' = \int \sigma''^t \varepsilon' dv = \int \sigma''^t E \sigma' dv$$

Le scalaire  $\sigma''^t E \sigma'$  est égal à son transposé  $\sigma''^t E \sigma'$ . Nous obtenons donc l'égalité suivante, qui exprime le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti :

$$\sum_j F_j' u_j'' = \sum F_j'' u_j' \quad (I.53)$$

Voici une importante conséquence du théorème de réciprocité (7): la structure étant soumise aux forces  $F_j$  appliquées aux points  $A_j$ , proposons-nous de calculer le déplacement  $\mathbf{u}$  d'un point  $A$  dans une direction  $\delta$ . Pour cela, appliquons au point  $A$  une force unité suivant la direction  $\delta$ ; les points  $A_j$  se déplacent de  $\lambda_j$  dans la direction des forces  $F_j$ . Le théorème de réciprocité donne la relation :

$$\mathbf{u} = \sum_j \lambda_j F_j \quad (I.54)$$

qui montre que le déplacement d'un point quelconque est une fonction linéaire et homogène des forces appliquées.

### *Théorèmes de Castigliano*

La structure étant soumise aux forces  $F_j$ , nous venons de voir, d'après le théorème de réciprocité, que :

$$u_j = \sum_k \lambda_{jk} F_k \quad (\lambda_{jk} = \lambda_{kj})$$

En reportant cette valeur dans l'expression (I.52), l'énergie de déformation apparaît comme une forme quadratique des forces appliquées :

$$U = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k \lambda_{jk} F_j F_k$$

et les déplacements  $u_j$  peuvent s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{u}_j = \frac{\partial U}{\partial F_j} \quad (I.55)$$

qui exprime le théorème de Castigliano.

Si l'on donne des variations quelconques  $dF_j$  aux forces  $F_j$ , nous avons, d'après la définition même de l'énergie de déformation :

$$dU = \sum_j F_j du_j$$

Il en résulte que, si l'on exprime  $U$  en fonction des déplacements, les forces  $F_j$  peuvent s'écrire sous la forme :

$$F_j = \frac{\partial U}{\partial u_j} \quad (\text{I.56})$$

qui exprime le théorème dual du théorème de Castigliano. (8)

Le théorème de Castigliano permet de calculer le déplacement  $\Delta$  d'un point  $A$  de la structure dans une direction  $\delta$ . Pour cela, appliquons au point  $A$  une force auxiliaire  $F$  suivant la direction  $\delta$ . Si  $U$  est l'énergie de déformation exprimée en fonction des forces  $F_j$  et  $F$ , il suffit d'appliquer le théorème de Castigliano et de faire  $F=0$  dans le résultat

$$u = \left( \frac{\partial U}{\partial F} \right)_{F=0}$$

---

***CHAPITRE II***

---

***METHODES ET  
APPROCHES  
MATHEMATIQUES***

# METHODES ET APPROCHES MATHEMATIQUES

Après avoir développé la formulation générale et les principes de formulation des problèmes d'élasticité, qui sont la plupart sous forme d'équations différentielles, quelques stratégies et méthodes mathématiques de solutions sont couramment utilisées pour résoudre ces problèmes où nous distinguons trois méthodes appelées direct, inverse et de semi inverse .

## *Méthode directe*

Cette méthode vise à déterminer la solution d'intégration directe du champ des équations (I.20) ou encore des formulations des contraintes et/ou des déplacements. Les conditions aux limites doivent être remplies exactement. Cette méthode des difficultés mathématiques importantes, ce qui limite son application à des problèmes de géométrie simple.

## *Méthode inverse*

Pour cette technique, une partie du champ de déplacements ou de contraintes sont sélectionnés qui satisfont le champ des équations de base. Une recherche est alors menée pour identifier un problème spécifique qui serait résolu par cette solution, ce qui revient à déterminer la géométrie du problème de la géométrie approprié, les

conditions aux limites, et les forces de volume qui détermineront la solution pour satisfaire toutes les conditions du problème. Cependant, il est parfois difficile de construire des solutions spécifiques à un problème d'intérêt pratique.

### ***Méthode semi inverse***

Pour cette technique une partie du champ de déplacement et / ou contraintes est spécifié, et l'autre portion est déterminée par les équations fondamentales (normalement en utilisant une intégration directe) et les conditions aux limites. Il est souvent, le cas échéant, que la construction de la solution de déplacements et / ou de contraintes peut être guidé par la théorie approximative de résistance des matériaux. L'utilité de cette approche est grandement renforcée par l'emploi du principe de Saint-Venant, pour lequel une condition à la limite complexe peut être remplacée par une simple distribution équivalente statique.

La complexité géométrique du corps à étudier complique la résolution du problème. De cet fait, nous allons voir plus loin une méthode mathématique proposée par Polya et Schiffer permettant d'obtenir des estimations de l'intégrale de l'énergie de déformation dans des problèmes elliptiques auto adjoints ; cette méthode est une extension de la méthode de transplantation des domaines qui s'avère être un instrument efficace et simple à utiliser dans la construction des états admissibles, dans les problèmes de minimum.

De ceci, nous donnerons brièvement un aperçu général sur les méthodes et les outils mathématiques sur lesquels la stratégie de résolution de Polya et schiffer est fondée ainsi que les méthodes de résolution des problèmes élastiques.

## **II.1. Les équations différentielles aux dérivées partielles**

Une équation faisant intervenir une ou plusieurs dérivées partielles d'une fonction inconnue de deux ou plusieurs variables indépendantes est une équation aux dérivées partielles. Par rapport aux équations différentielles ordinaires, beaucoup de problèmes en physique conduisent à des équations aux dérivées partielles.



En général, la totalité des solutions d'une équation différentielle aux dérivées partielles est très large. Toutefois, une unique solution d'une équation différentielle aux dérivées partielles correspond à un problème physique et peut être obtenue par l'utilisation des conditions aux limites et/ou les conditions initiales. Dans la pratique, les conditions aux limites servent fréquemment de guide dans le choix d'une forme particulière de la solution, qui satisfait l'équation différentielle, ainsi que les conditions aux limites.

### II.1.1. Définitions générales

Une équation différentielle (9) est une relation entre les dérivées (partielles) d'une fonction  $u: \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  qui peut formellement se mettre sous la forme :

$$F(x, u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}, u_{x_i x_j x_k}, \dots) = 0 \quad (\text{II.1})$$

Où

$$F(x, y, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots) = 0$$

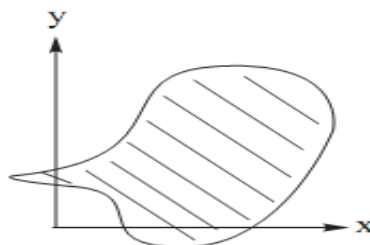
Où

–  $x, y, \dots$  les variables indépendantes

–  $u$ , la fonction "inconnue" variable dépendante.

–  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  un nombre fini de dérivées partielles de  $u$ .

$u$  est solution de l'EDP si, après substitution, la relation  $F(x, y, \dots, u, \partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial^2 u/\partial x^2, \dots) = 0$  est satisfaite pour  $x, y, \dots$  appartenant à une certaine région  $\Omega$  de l'espace des variables indépendantes.



Une équation différentielle peut être caractérisée par les définitions suivantes (9):

- On définit l'ordre d'une équation différentielle comme l'ordre de dérivation le plus grand des dérivées partielles apparaissant dans la relation (II.1).
- Si la relation (II.1) peut se mettre sous la forme d'un polynôme, on définit le degré d'une équation différentielle comme le degré du polynôme formé par les dérivées partielles d'ordre le plus élevé.

Enfin, on peut définir les notions de linéarité et de quasi-linéarité des équations différentielles.

- On dit qu'une équation différentielle est quasi-linéaire si elle est de degré 1.

De façon équivalente, on dit aussi qu'une équation différentielle est quasi-linéaire si elle est linéaire par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé.

- On dit qu'une équation différentielle est linéaire si la relation (II.1) peut se mettre sous la forme d'un polynôme de degré 1 dont les coefficients ne dépendent que des variables indépendantes  $x$  :

$$a(x) + b(x)u + \sum_{i=1}^n c_i(x)u_{x_i} + \sum_{i=i}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \dots = 0 \quad (\text{II.2})$$

Lorsque les coefficients du polynôme ne dépendent plus de  $x$ , on parle alors d'équation différentielle linéaire à coefficients constants.

- On dit qu'une équation différentielle linéaire est homogène si elle ne contient pas de terme indépendant de  $u$  et de ses dérivées. Elle peut se mettre sous la forme :

$$b(x)u + \sum_{i=1}^n c_i(x)u_{x_i} + \sum_{i=i}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \dots = 0 \quad (\text{II.3})$$

En d'autres termes, une équation différentielle linéaire homogène ne contient ni termes constants, ni termes dépendant seulement de  $x$ .

- La propriété fondamentale des équations linéaires est le principe de superposition,

Si  $u_1$  et  $u_2$  sont des solutions d'une équation aux dérivées partielles linéaires homogène, alors pour  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  des réels quelconques,  $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$  est aussi une solution.

Si  $u_h$  est une solution de l'équation linéaire homogène et  $u_p$  est solution de l'équation linéaire non homogène, alors  $u_h + u_p$  est une solution de l'équation complète.

### II.1.2. Classement des équations différentielles

Les grandes classes d'équations différentielles sont

- **Equations différentielles ordinaires (EDO)**

Lorsque la fonction  $u$  ne dépend que d'une variable indépendante, que l'on peut noter  $t$ , la dérivée de  $u$  par rapport à  $t$ , notée  $u'(t)$  est une dérivée totale. L'équation (II.1) devient alors une Equation Différentielle Ordinaire (EDO) que l'on peut définir de la façon suivante :

Une Equation Différentielle Ordinaire (EDO) scalaire est une équation mettant en jeu une fonction d'une variable scalaire  $u(t): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre  $m > 1$ :

$$F(t, u, u', u'' \dots \dots, u^{(m)}) = 0 \quad (\text{II.4})$$

Où  $u^{(m)}$  représente la dérivée d'ordre  $m$  de  $u$  par rapport à  $t$  et  $F$  est une fonction suffisamment régulière de  $I \times \mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}$ .

L'ordre d'une EDO, défini comme le plus grand ordre de dérivation présent dans l'équation, est donc égal à  $m$  dans ce cas.

- **Equation aux Dérivées Partielles (EDP)**

Une équation aux dérivées partielles est tout simplement une équation différentielle faisant intervenir une fonction d'au moins deux variables indépendantes. On note usuellement ces deux variables  $x$  et  $y$  lorsqu'elles représentent des variables d'espace et  $x$  et  $t$  lorsque le temps intervient.

L'équation différentielle bidimensionnelle du premier ordre quasi-linéaire est l'une des EDP les plus simples :

$$a(x, y, u)u_x(x, y) + b(x, y, u)u_y(x, y) = c(x, y, u), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{II.5})$$

Elle est linéaire si  $a$ ,  $b$  et  $c$  ne dépendent que  $x$  et  $y$ . La forme la plus générale d'équation linéaire du premier ordre est donc :

$$a(x, y)u_x(x, y) + b(x, y)u_y(x, y) + c(x, y)u(x, y) = d(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{II.6})$$

Elle modélise la plupart du temps un phénomène de transport.

### II.1.3. Classement des EDP du second ordre quasi-linéaires dans $\mathbb{R}^2$ .

Les EDP du second ordre quasi-linéaire conduisent à des comportements variés. Afin de séparer les principaux types de comportements, il existe une classification basée sur le classement des coniques (ellipse, hyperbole, parabole). De la même manière que pour les coniques, on introduit une forme canonique qui permet une étude plus systématique (10).

#### *Forme canonique*

Considérons donc le cas le plus général d'EDP linéaire du second ordre :

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + d = 0 \quad (\text{II.7})$$

où  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sont de fonctions de  $x$ ,  $y$ ,  $u_x$  et  $u_y$  seulement

*Changement de variables* De même que pour les coniques, on cherche à éliminer les termes croisés,  $2bu_{xu}$ . Pour cela, on introduit un changement de variables suffisamment régulier (C1-difféomorphisme),

$$X = \eta(x, y), \quad Y = \xi(x, y) \quad (\text{II.8})$$

permettant de passer de (II.7)(1.2.4) à une forme canonique du type :

$$Au_{XX} + Cu_{YY} + D = 0 \quad (\text{II.9})$$

On note les gradients de ce changement de variables de la manière suivante :

$$\alpha = \frac{\partial \eta(x,y)}{\partial x}, \beta = \frac{\partial \eta(x,y)}{\partial y}, \gamma = \frac{\partial \xi(x,y)}{\partial x}, \delta = \frac{\partial \xi(x,y)}{\partial y} \quad (\text{II.10})$$

La matrice jacobéenne du changement de variables devient alors :

$$J = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \quad (\text{II.11})$$

On suppose que ce changement de variables n'est pas dégénéré, c'est à dire que

$$\det J = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \quad \forall (x,y) \in \Omega \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{II.12})$$

Cherchons maintenant ce que devient l'équation (II.7) avec le changement de variables (II.8) :

$$u_{xx} = \alpha^2 u_{XX} + 2\alpha\gamma u_{XY} + \gamma^2 u_{YY} + [\dots] \quad (\text{II.13})$$

$$u_{xy} = \alpha\beta u_{XX} + (\alpha\delta + \beta\gamma)u_{XY} + \gamma\delta u_{YY} + [\dots] \quad (\text{II.14})$$

$$u_{yy} = \beta^2 u_{XX} + 2\beta\delta u_{XY} + \delta^2 u_{YY} + [\dots] \quad (\text{II.15})$$

où les termes entre crochets ne font intervenir que des dérivées d'ordre inférieure strictement à deux. En reportant ces expressions dans l'équation (II.7), on obtient la nouvelle équation linéaire :

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + D = 0 \quad (\text{II.16})$$

avec

$$A = a\alpha^2 + 2ba\beta + c\beta^2 \quad (\text{II.17})$$

$$B = a\alpha\gamma + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\beta\delta \quad (\text{II.18})$$

$$C = a\gamma^2 + 2b\gamma\delta + c\delta^2 \quad (\text{II.19})$$

*Discriminant* De même que pour les coniques, on peut remarquer la propriété d'invariance suivante par changement de variables :

$$B^2 - AC = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 (b^2 - ac) \quad (\text{II.20})$$

Le signe du discriminant  $b^2 - ac$  est invariant par changement de variables non dégénéré. Il va donc nous permettre de classer les EDP (quasi-)linéaires du second ordre suivant le signe de ce discriminant.

*Réduction à une forme canonique* Comme pour les coniques, il est toujours possible de choisir un changement de variables particulier qui annule  $B$ . Choisissons une simple rotation des axes autour de l'origine pour  $\eta$  et  $\xi$  :

$$X = \eta(x, y) = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (\text{II.21})$$

$$Y = \xi(x, y) = -x \sin \theta + y \cos \theta \quad (\text{II.22})$$

On obtient alors pour  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$

$$\alpha = \cos \theta, \quad \beta = \sin \theta \quad (\text{II.23})$$

$$\gamma = -\sin \theta, \quad \delta = \cos \theta \quad (\text{II.24})$$

Naturellement avec ce choix particulier de changement de variables,  $\det J = \alpha\delta - \beta\gamma = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  et donc  $B^2 - AC = (b^2 - ac)$ . Les relations (II.17), (II.18) et (II.19) deviennent alors :

$$A = a \cos^2 \theta + 2b \cos \theta \sin \theta + c \sin^2 \theta \quad (\text{II.25})$$

$$B = -a \cos \theta \sin \theta + b(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + c \cos \theta \sin \theta \quad (\text{II.26})$$

$$C = a \sin^2 \theta - 2b \sin \theta \cos \theta + c \cos^2 \theta \quad (\text{II.27})$$

En introduisant deux nouvelles variables  $p = (a + c)/2$  et  $q = (a - c)/2$ , et en considérant les relations trigonométriques avec les angles doubles ( $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$  et  $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ ), on obtient les relations simplifiées :

$$A = p + q \cos 2\theta + 2b \sin 2\theta \quad (\text{II.28})$$

$$B = -q \sin 2\theta + b \cos 2\theta \quad (\text{II.29})$$

$$C = p - q \cos 2\theta - 2b \sin 2\theta \quad (\text{II.30})$$

Pour annuler  $B$ , il suffit de choisir

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2b}{a-c} \right) + k \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\text{II.31})$$

Dans le cas  $a = c$ , on trouve  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . Le terme  $k \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  indique juste que la rotation peut être définie à  $\frac{\pi}{2}$  près, ce qui semble cohérent avec une rotation d'axes.

Dans le cas où  $B = 0$ , on trouve  $-AC = b^2 - ac$ . On peut classer les formes canoniques simplement suivant le signe de  $AC$ .

On remarque de plus que  $A$  et  $C$  ne peuvent pas être nuls tous les deux si l'EDP est effectivement du second ordre. En effet,  $A = C = 0$  impliquerait que  $c = -a$  et  $\cos 2\theta + \beta \sin 2\theta$ . La condition  $B = 0$  implique alors  $-a \cos 2\theta - \beta \sin 2\theta = 0$ . On obtient alors que  $a = b = c = 0$  ce qui est faux par hypothèse.

- **EDP elliptique**  $b^2 - ac = AC < 0$ ,  $A$  et  $C$  sont de même signe. Si  $b^2 - ac = -AC < 0$ , les coefficients  $A$  et  $C$  sont de même signe. On parle alors d'EDP elliptique que l'on écrit sous la forme générique suivante :

$$Au_{XX} + Cu_{YY} + D = 0, AC > 0 \quad (\text{II.32})$$

- **EDP hyperbolique**  $-AC = b^2 - ac > 0$ ,  $A$  et  $C$  sont de signes opposés. On parle d'EDP hyperbolique que l'on écrit sous la forme générique suivante :

$$Au_{XX} + Cu_{YY} + D = 0, AC < 0 \quad (\text{II.33})$$

- **EDP parabolique**  $b^2 - ac = 0$ ,  $A$  ou  $C$  est nul (quitte à changer  $\theta$  en  $\theta + \pi/4$ ), on peut toujours supposer que  $C$  s'annule. On parle alors d'EDP parabolique, qui peut, de la même façon, se mettre sous la forme :

$$Au_{XX} + D = 0 \quad (\text{II.34})$$

## II.1.4. Classement des EDP scalaires du second ordre linéaires

### à coefficients constants dans $\mathbb{R}^2$ .

*Elimination des termes du premier ordre* : Exprimons de nouveau les termes d'ordre inférieur dans leur forme complète pour une équation elliptique adimensionnée par un changement d'échelle de longueur :

$$u_{XX} + u_{YY} + Du_X + Eu_Y + Fu + G = 0 \quad (\text{II.35})$$

On peut montrer facilement qu'il est possible de supprimer les termes du premier ordre  $u_X$  et  $u_Y$ . Effectuons pour cela un changement d'inconnues en posant :

$$u(X, Y) = \exp(\rho X) \cdot v(X, Y), \quad \rho \in \mathbb{R} \quad (\text{II.36})$$

qui nous donne

$$u_x = \exp(\rho X) (v_x + \rho v), u_{xx} = \exp(\rho X) (v_{xx} + 2\rho v_x + \rho^2 v) \quad (\text{II.37})$$

Il vient alors pour l'EDP (II.35)

$$v_{xx} + v_{yy} + (2\rho + D)v_x + Ev_y + (\rho^2 + D\rho + F)v + G = 0 \quad (\text{II.38})$$

En choisissant  $\rho = -\frac{D}{2}$ , on peut faire disparaître le terme en  $v_x$

Si au lieu de (II.36), on pose

$$u(X, Y) = \exp(\rho X + \tau Y) \cdot v(X, Y), \rho, \tau \in \mathbb{R} \quad (\text{II.39})$$

Et en choisissant  $\rho = -\frac{D}{2}$  et  $\tau = -\frac{E}{2}$ , on peut éliminer à la fois  $v_x$  et  $v_y$  et l'on obtient une forme « ramassée » de la forme :

$$v_{xx} + v_{yy} + Fv + G = 0 \quad (\text{II.40})$$

On peut effectuer exactement le même calcul avec une équation hyperbolique adimensionnelle pour obtenir :

$$v_{xx} - v_{yy} + Fv + G = 0 \quad (\text{II.41})$$

En ce qui concerne l'équation parabolique adimensionnelle, il n'est plus possible d'utiliser le second changement d'inconnue (II.39). On obtient une forme ramassée où  $v_y$  reste présente:

$$v_{xx} + Ev_y + Fv + G = 0 \quad (\text{II.42})$$

Donc les trois formes canoniques pour les EDP quasi-linéaires dans  $\mathbb{R}^2$  sont :

$$Av_{xx} + Cv_{yy} + D = 0 \quad AC > 0 \quad \text{EDP elliptique} \quad (\text{II.43})$$

$$Av_{xx} + Cv_{yy} + D = 0 \quad A < 0 \quad \text{EDP hyperbolique} \quad (\text{II.44})$$

$$Av_{xx} + D = 0 \quad \text{EDP parabolique} \quad (\text{II.45})$$

Et les trois formes canoniques pour les EDP linéaires à coefficients constants

$$v_{xx} + v_{yy} + Fv + G = 0 \quad \text{EDP elliptique} \quad (\text{II.46})$$

$$v_{xx} - v_{yy} + Fv + G = 0 \quad \text{EDP hyperbolique} \quad (\text{II.47})$$

$$v_{xx} + Ev_y + Fv + G = 0 \quad \text{EDP parabolique} \quad (\text{II.48})$$



## II.1.5. Classement des EDP scalaires du second ordre (quasi)

### linéaire dans $\mathbb{R}^n$

En considérant toujours le cas scalaire où l'on a une seule fonction inconnue  $u$  et  $n$  variables indépendantes,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Une EDP du second ordre (quasi-)linéaire dans  $\mathbb{R}^n$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + [\dots] = 0 \quad (\text{II.49})$$

où le terme entre crochets ne comporte pas de dérivées secondes. Du fait du rôle symétrique de  $x_i$  et  $x_j$ , il est toujours possible de se ramener à une matrice  $Q = [a_{ij}]$  qui est symétrique. On peut donc dès lors envisager les valeurs propres réelles de la matrice  $Q$ .

Le classement réalisé dans les paragraphes précédents peut se généraliser de la façon suivante :

– Si toutes les valeurs propres de la matrice  $Q = [a_{ij}]$  sont non nulles et de même signe, alors l'équation est dite elliptique. La forme canonique la plus simple d'EDP elliptique dans  $\mathbb{R}^n$  est la suivante :

$$u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \dots + u_{x_n x_n} = 0 \quad (\text{II.50})$$

– Si toutes les valeurs propres de la matrice  $Q$  sont non nulles et qu'une seule d'entre elles est de signe opposé, alors l'équation est dite hyperbolique. La forme canonique la plus simple d'EDP hyperbolique dans  $\mathbb{R}^n$  est la suivante :

$$-u_{tt} + u_{x_2 x_2} + \dots + u_{x_n x_n} = 0 \quad (\text{II.51})$$

On dit aussi que l'équation est *ultra-hyperbolique* si on a au moins deux valeurs propres de chaque signe.

– Si au moins une des valeurs propres de la matrice  $Q$  est nulle ( $\det Q = 0$ ), alors l'équation est dite parabolique. La forme canonique la plus simple d'EDP parabolique dans  $\mathbb{R}^n$  est la suivante :

$$u_t = u_{x_2 x_2} + \dots + u_{x_n x_n} \quad (\text{II.52})$$

### II.1.6. Solutions et conditions

Une solution à l'équation aux dérivées partielles qui a été définie sur un domaine  $IR$  de l'espace des variables indépendantes, est une fonction, qui possède toutes les dérivées partielles apparaissant dans l'équation, pour un domaine incluant  $R$ , et satisfaisant l'équation sur tout le domaine  $IR$ . (11)

En général, il existe une grande variété de fonctions qui satisfont une équation aux dérivées partielles.

Les fonctions suivantes :

$$u = x^2 - y^2, \quad u = e^x \cos y, \quad u = \ln(x^2 + y^2)$$

sont toutes des solutions de l'équation de Laplace à deux dimensions :  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Une solution particulière à un problème donné, nécessite l'introduction de conditions aux frontières pour  $u$ , ou encore de conditions initiales (si l'une des variables indépendantes est le temps).

On peut citer quelques équations aux dérivées partielles célèbres :

|                          |                                              |
|--------------------------|----------------------------------------------|
| $\Delta u = 0.$          | Equation de Laplace                          |
| $\Delta u - f = 0.$      | Equation de Poisson                          |
| $u_t - \Delta u = 0.$    | Equation de la chaleur en diffusion homogène |
| $u_{tt} - \Delta u = 0.$ | Equation des ondes                           |

La solution générale d'une équation aux dérivées partielles d'ordre  $m$  dépend en général de  $m$  fonctions arbitraire de  $(d-1)$  variables.

La solution générale d'une équation aux dérivées partielles est celle qui permet de trouver tous les solutions de l'équation (sauf des cas de solutions singulières) en donnant des valeurs particulières aux fonctions arbitraires.

Pour trouver des solutions particulières d'une équation aux dérivées partielles, à partir de la solution générale, on va importer des conditions restrictives sur l'ensemble des solutions.

Les contraintes les plus fréquentes sont :

- **Conditions initiales** : si  $u$  est fonction de  $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  on donne

$$u(x, t_0) = \phi_0(x)$$

ou  $D_2^P u(x, t_0) = \phi_P(x)$ , on parle aussi de *conditions* de Cauchy ;

- **Conditions au bord** :

- **Condition aux bords de Dirichlet**

La condition de Dirichlet aux bords peut se définir comme la donnée d'une fonction  $u: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  sur une partie  $\Gamma$  de la frontière de  $\Omega$ , ce qui peut se noter :

$$u(x) = f(x), \forall x \in \Gamma \subset \partial\Omega \quad (\text{II.53})$$

$$u(t, x) = f(x), \forall x \in \Gamma \subset \partial\Omega(t)$$

La fonction  $f$  est une donnée du problème.

En particulier, en mécanique des milieux continus, ces conditions de Dirichlet reviennent à imposer une vitesse ou un déplacement sur le bord du milieu.

- **Condition aux bords de Neumann**

La condition de Neumann aux bords peut se définir comme la donnée de la dérivée de la fonction  $u: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  par rapport à  $\vec{n}$  sur une partie  $\Gamma$  de la frontière de  $\Omega$ , ce qui peut se noter

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \vec{n}} = g(x), \forall x \in \Gamma \subset \partial\Omega \quad (\text{II.54})$$

Ou

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \vec{n}} = g(x), \forall x \in \Gamma \subset \partial\Omega(t) \quad (\text{II.55})$$

La fonction  $g$  est une donnée du problème.

- **Condition mixte de Robin**

Il y a plusieurs façons d'obtenir des conditions mixtes de Neumann-Dirichlet. La première est d'imposer des conditions de Dirichlet dans certaines directions et des

conditions de Neumann dans d'autres au même point du bord. La seconde façon est imposer une moyenne pondérée des deux types de conditions sur une partie du bord de  $\Omega$  :

$$\alpha(x)u(x) + \beta(x) \frac{\partial u(x)}{\partial \bar{n}} = f(x), \forall x \in \Gamma \subset \partial\Omega \quad (\text{II.56})$$

On parle alors de la condition mixte de Robin aux bords.

- **Conditions à l'infini** : si  $\Omega$  n'est pas borné on a des conditions de la forme

$$u(x) \sim \Phi(x) \text{ quand}$$

$$|x| \rightarrow \infty \text{ ou } \|u\|_2 < \infty ;$$

- **Conditions sur les interfaces** : si  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , avec  $\bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2 = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ , et si l'on a déterminé  $u$  sur  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , alors pour pouvoir définir  $u$  sur  $\Omega$  on a des conditions sur  $u$ , resp  $\frac{du}{dn}$ , sur  $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ .

Les conditions sont en général imposées par la nature du problèmes que l'on essaie de modéliser, l'équation aux dérivées partielles et ses conditions restrictives seront donc a priori cohérentes.

De façon générale une équation aux dérivées partielles ne donne lieu à un problème raisonnable que si on l'associe à un certain type de conditions restrictives, par exemple des conditions initiales pour des problèmes d'évolution (équation de la chaleur, équation des ondes) ou des conditions au bord pour l'équation de Laplace.

## II.2. Méthodes variationnelles

### II.2.1. Calcul des variations

Le calcul des variations a une longue histoire d'interaction avec d'autres branches des mathématiques, comme la géométrie et les équations différentielles, en physique, et en particulier de la mécanique. Plus récemment, le calcul des variations a trouvé des applications dans d'autres domaines comme l'économie et de l'ingénierie

Le calcul des variations a pour objet des problèmes d'extremums, c'est-à-dire de maximales et de minimales (maximum ou minimum), de nature plus compliquée que les questions d'extremums ordinaires dont s'occupe le calcul différentiel. Celui-ci permet de déterminer les valeurs d'une ou de plusieurs variables, (géométriquement, des coordonnées de certains points) pour lesquelles une fonction donnée de ces variables acquiert la plus grande ou la plus petite valeur. Mais déjà la question géométrique fondamentale du plus court chemin entre deux points et celle de la courbe brachistochrone, quoique résolues d'abord par J. Bernoulli et L. Euler par les méthodes du calcul différentiel ordinaire, ne peuvent être traitées d'une manière rigoureuse et complète que par d'autres théories.

Le calcul des variations consiste dans la recherche des conditions pour lesquelles ont lieu les extrêmes d'une quantité, qui peut être une intégrale définie (c'est le cas le plus fréquent), la solution d'une équation différentielle, etc., dépendant de fonctions à déterminer. On fait donc jouer à des fonctions le rôle attribué, en calcul différentiel, à des variables. On peut toutefois envisager les questions de variations comme étant relatives aux extrêmes de fonctions d'une infinité de paramètres.

Le calcul des variations est aujourd'hui considéré comme un cas particulier du calcul fonctionnel. Cette conception, faisant apparaître des horizons nouveaux, semble appelée à jouer un rôle particulièrement important.

L'étude d'une fonction à valeurs réelles compte en particulier la détermination de ces extrémums. C'est là un des objets du calcul différentiel classique lorsque la source de cette fonction est un espace numérique.

Ce n'est cependant qu'au XVIII<sup>e</sup> siècle que Euler l'appela le calcul des variations lorsque cette source est un espace fonctionnel. La suite de l'essor du calcul infinitésimal, Euler et Lagrange établirent les fondements du calcul des variations et donnèrent une première condition d'extremum. Cette équation d'Euler-Lagrange allait jouer un rôle très important, surtout en physique, où elle justifiait les principes variationnels : principe de Fermat pour la propagation de la lumière dans les milieux différemment réfringents ; principe du moindre action de Maupertuis et Hamilton pour la détermination des mouvements en mécanique analytique (10).

## II.2.2. Définitions générales

### *Fonctionnelle*

Une fonctionnelle  $J$  est une loi de correspondance qui, à chaque fonction d'une certaine classe, fait correspondre un nombre réel. (12)

Soit par exemple la fonctionnelle  $J$  défini par :  $J = \int_0^2 y^2 dx$ . Si on substitue à  $y(x)$  diverses fonctions,  $J$  prendra différentes valeurs numériques.

D'une certaine façon, on peut dire qu'une fonctionnelle est une fonction de fonction .

### *Argument d'une fonctionnelle*

Soit par exemple la fonctionnelle  $J$  donnée par :

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (\text{II.57})$$

La fonction  $y = y(x)$  est appelée argument de la fonctionnelle.

### *Variation de l'argument d'une fonctionnelle*

L'accroissement de l'argument d'une fonctionnelle est la différence de deux fonctions (voir Fig. II-1).

On le note  $\delta y = \delta y(x)$ .

$$\delta y = y(x) - y^*(x) \quad (\text{II.58})$$

Il y a une différence essentielle entre  $\delta y$  et  $dy$  qui sont toutes deux des variations infinitésimales de  $y$ ;  $dy$  provient d'une variation de la fonction donnée par une variation infinitésimale de  $x$ , alors que  $\delta y$  est un changement infinitésimal de  $y$  causé par une nouvelle fonction. Généralement, on prend la variation  $\delta y(x)$  sous la forme :

$$\delta y = \varepsilon \eta(x) \quad (\text{II.59})$$

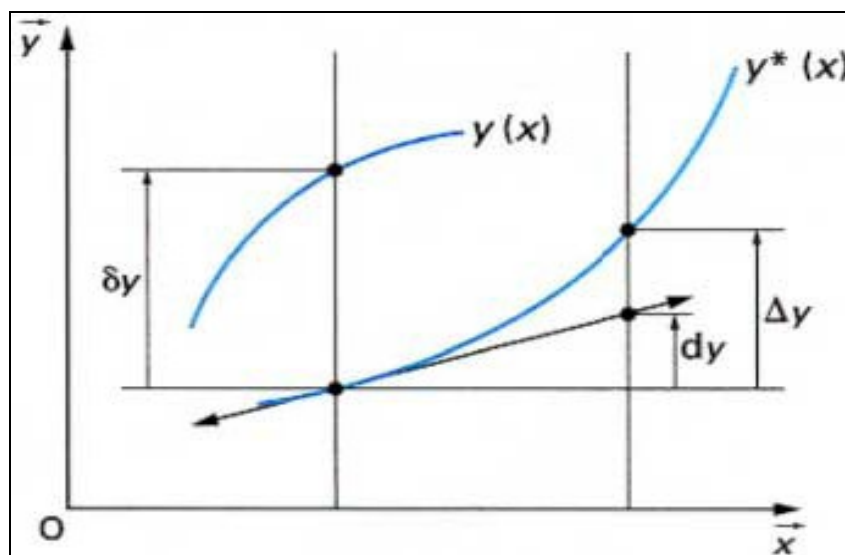


Figure II-1 : Accroissement de la fonctionnelle

**a) Problème fondamental du calcul des variations**

Dans le cas général du calcul des variations le problème consiste à trouver l'extremum (maximum ou minimum) de la fonctionnelle  $\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$

Avec une solution satisfait les conditions aux limites :

$$y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$$

**b) Lemme fondamental du calcul des variations**

Si l'intégral  $\int_{x_1}^{x_2} f(x)g(x)dx$  est nulle quelle que soit la fonction  $f(x)$ , continue pour  $x \in [x_1, x_2]$  et nulle pour  $x = x_1$  et  $x = x_2$ , et si  $g(x)$  est une fonction continue, alors la fonction  $g(x)$  est nulle.

**c) Equaion d'Euler-Lagrange**

L'équation (II-59) exprime la dérivée première de la fonctionnelle  $J$  ayant comme argument  $(x) = y^*(x) + \varepsilon\eta(x)$ . Puisque  $y^*(x)$  rend la fonctionnelle  $J$  extrémale, alors; (pour  $\varepsilon = 0$  on aura  $y(x) = y^*(x)$  et la valeur de la dérivée première doit être nulle pour cette valeur de  $\varepsilon$  (13).

Ainsi on aura :

$$J'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) \eta dx = 0 \quad (\text{II.59})$$

Puisque  $\eta$  est non nulle entre  $x_1$  et  $x_2$ , il faut alors que son facteur soit nul, donc :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (\text{II.60})$$

c'est l'équation d'Euler–Lagrange. La résolution de cette équation donnera la fonction  $y(x)$  pour laquelle la fonctionnelle  $J$  sera stationnaire.

L'équation d'Euler–Lagrange peut être écrite aussi sous la forme :

$$\frac{dy}{dx} \left( F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' \right) = \frac{\partial F}{\partial x} \quad (\text{II.61})$$

ou bien, en développant (II-61), sous la forme :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.62})$$

qui est une équation différentielle du second ordre non linéaire. Sa solution dépend de deux constantes arbitraires qui se déterminent par les conditions aux limites.

La valeur de la dérivée seconde pour  $\varepsilon = 0$  est :

$$J''(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \eta'^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \eta \eta' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \eta'^2 \right) dx \quad (\text{II.63})$$

Elle permet de déterminer la nature de l'extremum (soit minimum ou maximum)

## II.3. Méthode de Polya et Schiffer

### II.3.1. Introduction

Divers fonctionnelles seront définies par certains problèmes d'extremum, ou par les problèmes de la valeur limite pour les équations aux dérivées partielles de type elliptique. Dans les deux cas, il est difficile de calculer la fonctionnelle d'un domaine donné arbitrairement, tandis que des solutions explicites sont disponibles. Il se pose alors la question d'utiliser la connaissance de la fonctionnelle pour quelques domaines



spéciaux afin d'obtenir des informations sur la même fonctionnelle dans le cas général. Deux méthodes ont été appliquées avec succès à cette intention; nommées, la méthode de transplantation des fonctions extremum et la méthode de variations. (1)

La méthode de transplantation peut être appliquées, lorsque la fonctionnelle en question est caractérisée comme la valeur extremum d'une autre fonctionnelle sur une certaine classe de fonction en respectant le domaine de définition  $D$ . Supposons que nous savons que la fonction en  $D$  donne la valeur extremum correcte de la fonctionnelle et si  $D'$  est un autre domaine référé de  $D$  par une transformation de un à un d'un degré suffisant de continuité, nous devons considérer la fonction extremum de  $D$  lorsqu'il est correctement transplanté comme une nouvelle fonction dans  $D'$ . Enfin, nous devons de cette manière obtenir une comparaison entre les extrema en respectant  $D$  et  $D'$  de sorte que, si le  $D$ -extremum est connu, le borne de  $D'$ -extremum est trouvé. La méthode de variation suppose l'hypothèse d'une fonctionnelle est connue pour un domaine donné  $D$  et prévoit une formule de changement infinitésimal de la fonctionnelle dans le cas où le domaine de définition  $D$  est changé infinitésimalement. La formule variationnelle doit servir à caractériser les domaines pour lesquels la fonctionnelle atteint les valeurs extrémum sous des conditions variées. Il arrive souvent que la structure formelle de la fonctionnelle variationnelle indique la monotonie ou d'autres caractéristiques de croissance de la fonctionnelle étudiée.

La méthode de Polya et Schiffer est une certaine synthèse entre ces deux méthodes. La méthode de transplantation sera utilisée au sein d'une famille de domaines  $D(t)$ , qui se déduit d'un domaine donné  $D(1)$  par un paramètre de transformation. De cette façon, nous sommes en mesure d'obtenir des formules variationnelles et des expressions de la convexité pour des fonctionnelles considérées. L'information obtenue est plus étendue que celle trouvée par une transplantation discrète de la fonction extremum. La méthode de Polya et Schiffer est appliquée aux quelques types de transformations simples telles que les transformations conformables dans le cas du plan ou l'extension sur un seul côté dans le cas de deux et trois dimensions. Comme elle est applicable à d'autres transformations, ainsi, divers résultats analogues peuvent être obtenus. Nous indiquons brièvement l'extension partiel qui s'étend sur un seul côté d'un domaine qui consiste en une extension d'une

partie du domaine qui se trouve d'un seul côté d'une ligne donnée ou plan tandis que le reste du domaine reste inchangé. En utilisant la bonne extension partielle, de nombreuses formules variationnelles générales peuvent être obtenues par l'argument de transplantation.

### II.3.2. Transplantation de domaines

La transplantation de domaines est un instrument efficace et simple à utiliser particulièrement dans les questions de la théorie de l'élasticité, où l'évaluation de l'énergie de déformation est souvent nécessaire.

Pour évaluer l'énergie de déformation accumulée dans un corps élastique de forme donnée, il est possible de considérer que cette dernière peut être obtenue à partir d'une autre forme plus simple, au moyen d'une dilatation uniforme, suivant un axe de coordonnées, celui des  $x$  par exemple, pendant que les autres coordonnées restent inchangées.

Pour clarifier cette opération, considérons une ellipse de semi-axe  $(t_0, 1)$ , parallèles aux axes de coordonnées  $x$  et  $y$ , et dont l'équation cartésienne est :

$$\frac{x^2}{t_0^2} + y^2 = 1 \quad (\text{II.64})$$

Cette ellipse, peut être considérée comme étant la courbe image d'un cercle de rayon unitaire et d'équation cartésienne,

$$x'^2 + y'^2 = 1 \quad (\text{II.65})$$

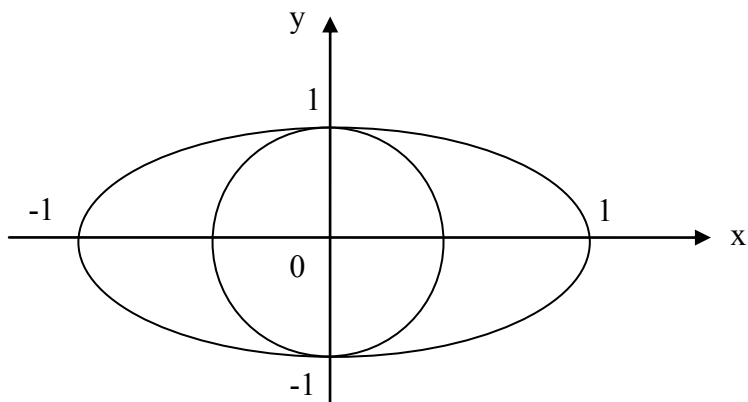
lorsqu'on effectue la transformation de données suivante :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{t_0} x \\ y' = y \end{cases} \quad (\text{II.66})$$

On peut même considérer que la transformation, entre les deux domaines, peut être paramétrisée tout simplement, en posant :

$$\begin{cases} x' = \frac{t}{t_0} x \\ y' = y \end{cases} \quad (\text{II.67})$$

Où  $t$ , est une variable additionnelle (Figure II-2)



*Figure II-2*

Polya et Schiffer appelèrent ce type de transformation, « une transplantation de domaines », et se posèrent la question qui consiste à savoir, comment, et de combien, les solutions d'un problème formulé sur un domaine circulaire, domaine pour lequel leur détermination peut être simple, diffèrent des solutions du même problème mais sur un domaine elliptique. Polya et Schiffer obtiennent, alors, deux types de résultats :

- Une méthode de comparaison entre les énergies du problème originaire et celle du transplanté ;
- Un critère d'évaluation de la dépendance de l'énergie vis-à-vis du paramètre  $t$  dans les expressions (II-68).

De cette façon, nous allons utiliser cette méthode de transplantation pour calculer ou estimer l'énergie de déformation dans le chapitre suivant .

---

*CHAPITRE III*

---

**TRANSPLANTATION ET  
LIMITES ELASTIQUES DE  
L'ENERGIE DE  
DEFORMATION**

# TRANSPLANTATION ET LIMITES ELASTIQUES DE L'ENERGIE DE DEFORMATION

Dans ce chapitre, nous allons étendre la méthode de (la transplantation de domaines) dans des exemples concrets pour calculer les bornes inférieure et supérieure de l'énergie de déformation. Pour cela nous avons pris trois exemples pour montrer l'efficacité de la méthode pour le calcul de l'énergie de déformation, où le premier exemple est une membrane élastique, le second exemple est la transplantation dans la théorie de la torsion et le troisième est une extension à la théorie de l'élasticité où nous prenons le problème de Schteicher

## III.1. La membrane

L'exemple est choisi pour le plus simple pour montrer l'efficacité de la méthode de la transplantation qui réside dans la comparaison de l'énergie de déformation accumulée dans une membrane elliptique, soumise à une charge uniforme  $P$ , lorsque celle-ci est considérée comme étant la transplantée d'un domaine circulaire pour lequel la solution est élémentaire ou connue.

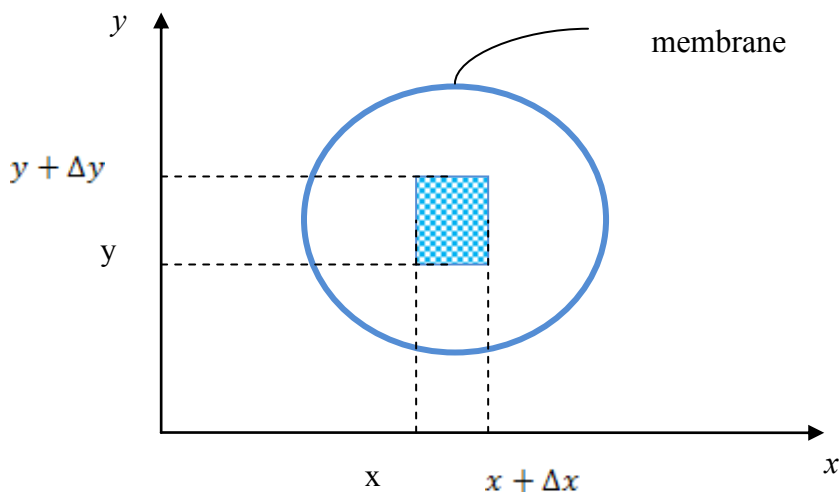


Figure III-1 : Membrane élastique

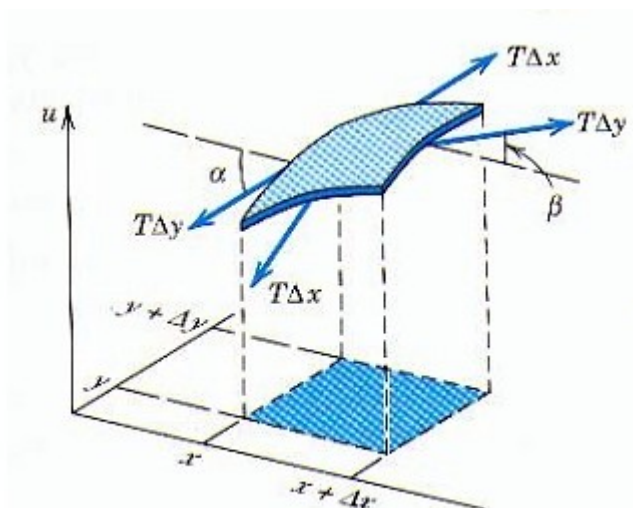


Figure III-2 : Tension de la membrane élastique

Soit une charge transversale  $P$ , uniformément répartie. Si  $T_0$  est la tension parallèle au plan médian, l'équation qui décrit le déplacement  $u$ , perpendiculaire à ce plan, lorsque les déformations sont infinitésimales, est la suivante :

$$\begin{cases} \Delta u + \frac{P}{T_0} = 0, & \text{à l'intérieur;} \\ u = 0 & \text{sur le bord;} \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

$\Delta$  étant l'opérateur de Laplace

La charge étant uniformément répartie, la solution de (III.1) dépend uniquement de la distance entre l'origine et un point quelconque. L'opérateur de Laplace en coordonnées polaires ayant la forme suivante :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \quad (\text{III.2})$$

$r$  étant la distance entre le point d'application et l'origine, la solution de l'équation (III.1) est simplement :

$$u = \frac{P}{4T_0} (1 - r^2) \quad (\text{III.3})$$

Ce qui représente une parabole de rotation ayant pour sommet l'origine.

Connaissant la déformée, on peut calculer l'énergie de déformation accumulée dans la membrane, ou son double :

$$W = \iint_D \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{u}{r} \right)^2 \right] ds = \frac{P^2}{8T_0^2} \pi \quad (\text{III.4})$$

On remarque que (III.2) peut, également, être obtenue en appliquant le théorème de Clapeyron, en vertu duquel,  $W$  est égale au travail de la charge externe, c'est-à-dire

$$L = \iint_D \frac{P}{T_0} u ds = P \iint_D \frac{P}{4T_0} (1 - r^2) ds = \frac{P^2}{8T_0^2} \pi$$

Supposons, à présent, qu'on ait à résoudre le problème (III.1) pour une membrane occupant une région elliptique  $D'$ , de semi-axes  $\frac{t}{t_0}$  et 1 (Figure.II.2), où  $t_0$  est une constante positive et  $t$  un paramètre positif. Le domaine  $D'$  peut être considéré comme étant le résultat de la transformation du cercle, par le changement de variables indépendantes suivant :

$$\begin{cases} x' = \frac{t}{t_0} x ; \\ y' = y \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

En effet, l'image de  $D$  sur le plan  $x'y'$  est la courbe image

$$t_0^2 \frac{x'^2}{t^2} + y'^2 = 1$$

Pour  $t = t_0$ , on récupère l'équation du cercle.

On se demande alors s'il est possible de trouver une limite supérieure et une limite inférieure de l'énergie de déformation accumulée dans  $D'$ , sachant que la solution explicite pour  $D$  est connue (exprimée par (III.3)). Ceci est, en substance, la méthode de la transplantation. Pour répondre à cette question, il faut remarquer que pour limiter l'énergie de déformation, il suffit de construire une fonction  $u(x', y')$ , qui soit suffisamment régulière afin de pouvoir admettre l'intégrale finie et pouvoir vérifier des conditions au bord de type stable, comme le sont d'ailleurs ceux du problème(III.1). En outre, il faut trouver une fonction vectorielle,  $q_1(x', y')$ ,  $q_2(x', y')$ , qui vérifie l'équation,

$$\frac{\partial q_1}{\partial x'} + \frac{\partial q_2}{\partial y'} + \frac{P}{T_0} = \mathbf{0}, \quad (\text{III.6})$$

Sans aucune autre condition sur le contour. A travers les fonctions  $u', q_1, q_2$ , il est possible de calculer les limites inférieure et supérieure de l'énergie de déformation, en appliquant deux principes dus à Friedrichs (14) et repris par Synge (15)

Ces principes peuvent être résumés simplement par l'intégrale suivante :

$$\frac{\left( \iint_D \frac{P}{T_0} u' dx' dy' \right)^2}{\iint_{D'} \left( (u'_{x'})^2 + (u'_{y'})^2 \right) dx' dy'} \leq W' \leq \iint_{D'} (q_1^2 + q_2^2) dx' dy' \quad (\text{III.7})$$

Où  $u'$  est une fonction admissible,  $q_1$  et  $q_2$ , vérifiant (III.6). Partant du fait que le domaine  $D'$  est le transplante de  $D$  au moyen de la transformation (III.5), pour construire les deux champs admissibles, il suffit d'observer que  $u'(x', y')$  est obtenu à partir de  $u(x, y)$ , en posant :

$$u'(x', y') = u\left(\frac{t_0}{t} x', y'\right)$$

Ce qui signifie que,

$$u\left(\frac{t_0}{t} x', y'\right) = \frac{P}{4T_0} \left( 1 - \frac{t_0}{t^2} x'^2 - y'^2 \right)$$

s'annule sur le bord de l'ellipse  $D'$ . Connaissant  $u'(x', y')$ , il vient :



$$\frac{\partial y'}{\partial x'} = u_x \left( \frac{t_0}{t} x', y' \right) \left( \frac{t_0}{t} \right), \frac{\partial u'}{\partial y'} = u_y \left( \frac{t_0}{t} x', y' \right),$$

Et par conséquent,

$$\begin{aligned} \iint_{D'} \left[ (u'_{x'})^2 + (u'_{y'})^2 \right] dx' dy' &= \\ \iint_{D'} \left[ \left( \frac{t_0}{t} \right)^2 u_x^2 \left( \frac{t_0}{t} x', y' \right) + u_y^2 \left( \frac{t_0}{t} x', y' \right) \right] dx' dy'. \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Au moyen de la transformation

$$\begin{cases} x' = \frac{t}{t_0} x; \\ y' = y \end{cases}.$$

et sachant que,

$$dx' dy' = \left( \frac{t}{t_0} \right) dx dy,$$

l'intégrale double du premier membre de (III.8) s'écrit,

$$\iint_{D'} \left[ (u'_{x'})^2 + (u'_{y'})^2 \right] dx' dy' = \iint_D \left[ \left( \frac{t_0}{t} \right)^2 u_x^2 + u_y^2 \right] dx dy. \quad (\text{III.9})$$

En procédant de la même manière, on obtient alors,

$$\iint_{D'} \frac{P}{T_0} u' dx' dy' = \iint_D \frac{P}{T_0} u \left( \frac{t}{t_0} \right) dx dy.$$

Ces deux dernières relations, une fois remplacées dans (III.7), permettent de trouver une borne inférieure de l'énergie de déformation accumulée dans  $D'$  :

$$W' \geq \frac{\left( \frac{t}{t_0} \right)^2 \left( \iint_D \frac{P}{T_0} u dx dy \right)^2}{\iint_D \left[ \left( \frac{t_0}{t} \right) u_x^2 + \left( \frac{t}{t_0} \right) u_y^2 \right] dx dy},$$

Ou bien,

$$W' \geq \frac{\left(\frac{t}{t_0}\right)^2 \left(\iint_D \frac{P}{T_0} u dx dy\right)^2}{\max\left\{\left(\frac{t_0}{t}\right), \left(\frac{t}{t_0}\right)\right\} \iint_D [u_x^2 + u_y^2] dx dy},$$

et, en définitive,

$$W' \geq \frac{\left(\frac{t}{t_0}\right)^2}{\max\left\{\left(\frac{t_0}{t}\right), \left(\frac{t}{t_0}\right)\right\}} \cdot \frac{P^2 \pi}{8T_0^2}. \quad (\text{III.10})$$

Pour établir la borne supérieure, il suffit d'observer que les fonctions

$$q_1(x', y') = \left(\frac{t}{t_0}\right) u_x\left(\frac{t_0}{t} x', y'\right), q_2(x', y') = u_y\left(\frac{t_0}{t} x', y'\right),$$

Satisfont l'équation

$$\frac{\partial q_1}{\partial x'} + \frac{\partial q_2}{\partial y'} = u_{xx}\left(\frac{t_0}{t} x', y'\right) + u_{yy}\left(\frac{t_0}{t} x', y'\right) = u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = \frac{P}{T_0}; \quad (\text{III.11})$$

Le système  $q_1, q_2$ , est par conséquent admissible. On obtient ainsi, la majoration suivante :

$$W' \leq \iint_{D'} \left[ \left(\frac{t}{t_0}\right)^2 u_x^2 + u_y^2 \right] dx' dy' = \iint_D \left[ \left(\frac{t}{t_0}\right)^2 u_x^2 + u_y^2 \right] \left(\frac{t}{t_0}\right) dx dy.$$

Donc

$$W' \leq \max\left\{\left(\frac{t}{t_0}\right)^3, \left(\frac{t}{t_0}\right)\right\} \frac{P^2 \pi}{8T_0^2} \quad (\text{III.12})$$

Où, évidemment, pour  $\frac{t}{t_0} = 1$ , les deux limites coïncident avec la valeur exacte de l'énergie.

## III.2. Transplantation dans la théorie de la torsion

L'exemple suivant sert à clarifier l'idée. La fonction des contraintes induites par torsion pure d'une section limitée par deux cercles qui se coupent, comme ceux illustrés par la figure (II.1), peut être représentée, sous forme explicite (6)

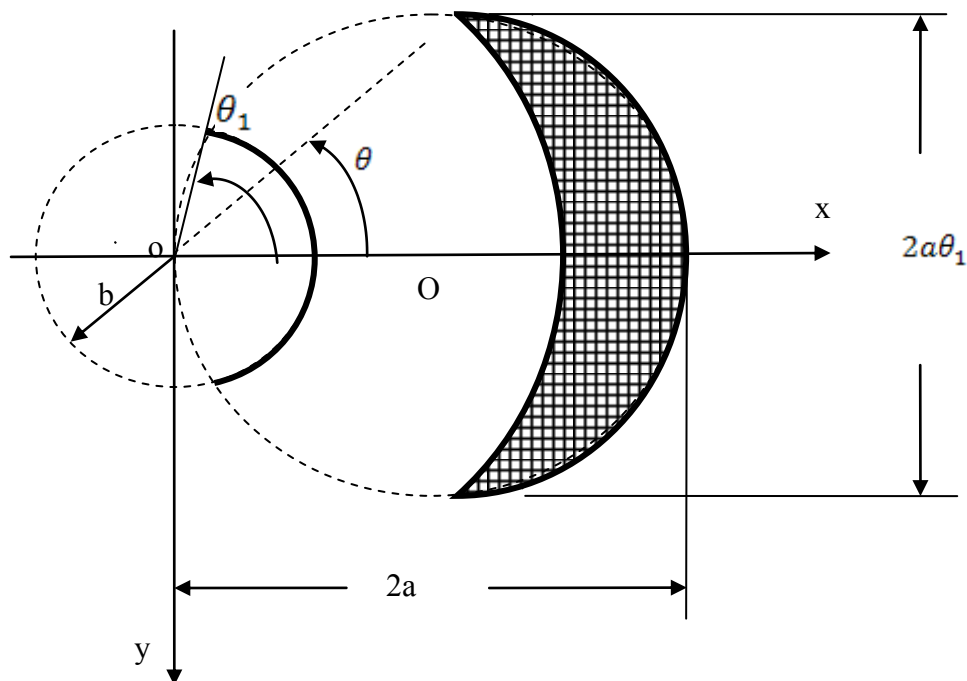


Figure III-3 Barre de section droite limitée par deux cercles qui se coupent

En particulier, si les deux cercles sont tels que le premier, de rayon  $b$  et de centre, l'origine  $O$ , le second possédant le rayon  $a$  et dont le centre est situé au point  $(a, O)$ , la fonction des contraintes, dans le système de coordonnées  $xoy$  de la figure (III.1), a la forme suivante :

$$\Phi = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) - \frac{a}{2}x + \frac{b^2}{2}a \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{1}{4}b^2. \tag{III.13}$$

Il est évident que la fonction, ainsi choisie, vérifie l'équation

$$\Delta \Phi = 1, \text{ à l'intérieur,} \tag{III.14}$$

et la condition  $\Phi=0$ , sur le bord. Si  $\Phi$  est connue, la rigidité à la torsion peut être déterminée après que :

$$J = -2 \iint_D \Phi dx dy, \tag{III.15}$$

ait été évaluée.

Par un calcul élémentaire on obtient

$$J = -2 \int_{\theta}^{\theta_1} d\theta \left\{ \int_b^{2a \cos \theta} \Phi(r, \theta) \right\} dr = 2 \left[ \frac{1}{48} a^4 \sin 4\theta_1 + \frac{1}{6} a^4 \sin 2\theta_1 + \frac{1}{4} a^4 \theta_1 - a^2 b^2 \left( \frac{1}{4} \sin 2\theta_1 + \frac{1}{2} \theta_1 \right) + \frac{2}{3} ab^2 \sin \theta_1 - \frac{1}{8} b \theta_1^4 \right] \quad (\text{III.16})$$

Où  $\theta_1 = \arccos \frac{a}{b}$ . Weber (16) est parvenu au résultat, avec des symboles différents.

En connaissant J, la rigidité à la torsion est donnée par :

$$GJ_t = -4 \iint_D \Phi dx dy = 2GJ. \quad (\text{III.17})$$

Weber a obtenu également une expression asymptotique de la rigidité à la torsion, lorsque l'angle  $\theta_1$  est assez petit et la région de la figure (III.1) se réduit à une mince tranche de forme lenticulaire comprise entre deux cercles, comme il a été indiqué en double trait dans la figure même. Dans ce cas,  $\theta_1$  est petit par rapport à l'unité, la longueur de la tranche est de  $2a\theta_1$ , son épaisseur maximale étant  $a\theta_1$ . Si on pose

$$\frac{b}{a} = 2 \cos \theta_1, \sin 4\theta_1 = 8 \sin \theta_1 \cos^3 \theta_1 - 4 \sin \theta_1 \cos \theta_1, \sin 2\theta_1 = 2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \quad (\text{III.18})$$

La rigidité à la torsion s'écrit alors :

$$GJ_t = 4Ga^4 \left[ \sin \theta_1 \left( \frac{1}{4} \cos \theta_1 + \frac{7}{2} \cos^3 \theta_1 \right) + \left( \frac{1}{4} - 2 \cos \theta_1 - 2 \cos^4 \theta_1 \right) \right], \quad (\text{III.19})$$

Et, un développement en série en  $\theta_1$  de cette expression, donne

$$GJ_t = \frac{32}{105G} a^4 \theta_1^7 + \dots, \quad (\text{III.20})$$

Où les termes d'ordre supérieur ont été omis (16)

Supposons, à présent, que (III.20) représente une expression suffisamment précise de la rigidité à la torsion d'une section lenticulaire fine. On soumet celle-ci à une transplantation, parallèle à l'axe des x du type défini par (III.5), et on se propose de borner l'énergie de déformation accumulée dans une barre, de longueur l, soumise à l'action d'un moment de torsion constant  $M_t$ ; l'énergie de déformation est donnée par l'expression

$$W' = \frac{1}{2} \frac{M_t^2 l}{GJ'_t}, \quad (\text{III.21})$$

Où  $GJ'_t$  est la rigidité à la torsion de la section après transplantation.

Pour  $W'$ , en utilisant directement les résultats obtenus dans le paragraphe précédent, on peut écrire que :

$$\frac{\left(\frac{t}{t_0}\right)^2 W}{\max\left\{\left(\frac{t}{t_0}\right), \left(\frac{t_0}{t}\right)\right\}} \leq W' \leq \max\left\{\left(\frac{t}{t_0}\right)^3, \left(\frac{t}{t_0}\right)\right\} W; \quad (\text{III.22})$$

Sachant que  $W$  est lié à la rigidité à la torsion  $GJ_t$ , de la section originaire, par une relation analogue à (III.7), on arrive à conclure que  $GJ'_t$  vérifie l'intégralité suivante :

$$\frac{\left(\frac{t}{t_0}\right)^2}{\max\left\{\left(\frac{t}{t_0}\right), \left(\frac{t_0}{t}\right)\right\}} \frac{1}{GJ_t} \leq \frac{1}{GJ'_t} \leq \max\left\{\left(\frac{t}{t_0}\right)^3, \left(\frac{t}{t_0}\right)\right\} \frac{1}{GJ_t}; \quad (\text{III.23})$$

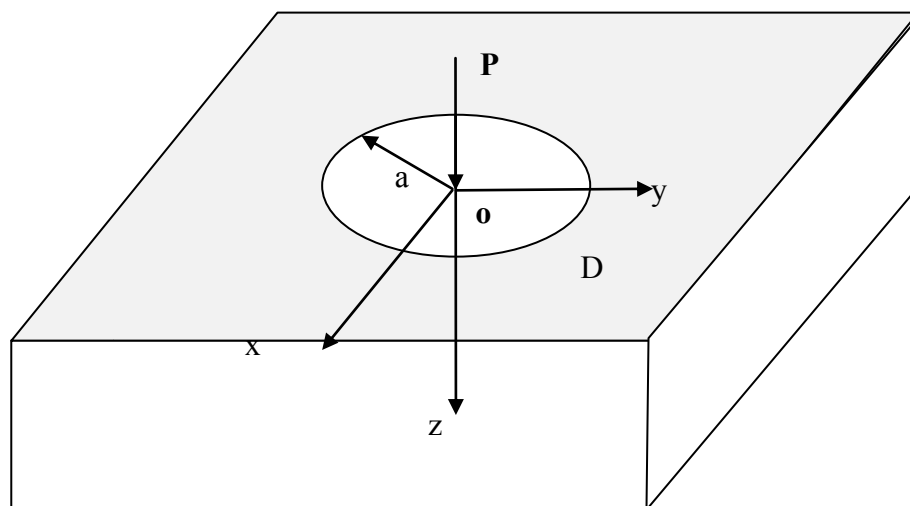
Où  $GJ_t$  est donnée par la (III.19) ou par sa version approchée (III.20).

Ainsi, on remarque qu'en manipulant le facteur  $\frac{t}{t_0}$ , on peut déformer le profil en forme de lune de la figure (III.1), jusqu'à obtenir approximativement celui d'une section en « C », qui est très utilisée dans la pratique et, les résultats numériques de la rigidité à la torsion sont très proches de ceux obtenus par les formules empiriques, lorsque l'épaisseur de la section est assez exigüe.

### III.3. Extension aux problèmes de l'élasticité.

Dans ce paragraphe, on procède à une confrontation énergétique, au moyen de la transplantation, entre les solutions de deux problèmes de l'élasticité, formulée sur un semi-espace élastique, homogène et isotrope, sollicité sur deux régions différentes de la superficie et relaxe sur la partie restante.

Dans le problème illustré par la figure III-4 le semi-espace est limité par le plan  $Z=0$ , et la direction positive de l'axe  $Z$  est celle qui procède à l'intérieur du corps



**Figure III-4 :** Demi espace élastique sous l'action d'une matrice circulaire de rayon  $a$  et de poids  $P$

l'origine  $O$  ; celui-ci induit, sur la région interne du cercle, un déplacement constant dans la direction de l'axe  $Z$ , provoqué par l'action d'une force  $P$ , qui agit suivant cet axe. On suppose que le poinçon travaille sans frottement et, par conséquent, les tangentes sont nulles sur la région chargée.

Le problème ainsi posé, bien qu'assez compliqué du fait que les conditions au bord de type mixte, peut être résolu sous forme explicite, connue sous le nom de «solution de Scheicher» (17). Le déplacement provoqué par la charge est

$$\omega_0 = \frac{1-\nu^2}{\pi E a} P, \quad (\text{III.24})$$

Où  $E$  et  $\nu$  représentent, respectivement, le module de Young et le facteur de Poisson du matériau.

Connaissant le déplacement  $\omega_0$ , le double de l'intégrale de déformation accumulée dans le corps est, en vertu du théorème de Clapeyron :

$$W = P\omega_0 = \frac{1-\nu^2}{\pi E a} P^2. \quad (\text{III.25})$$

A présent, supposons que les coordonnées  $x, y, z$  du système précédent, soient assu-jetties à une transformation du type

$$\begin{cases} x' = \frac{t}{t_0} x, \\ y' = y, \\ z' = z, \end{cases} \quad (\text{III.26})$$

qui transformera la région sollicitée  $D$  du plan  $x, y$ , en une ellipse  $D'$ , de semi-axes  $\frac{t}{t_0} a$  et  $a$ . Ainsi, dans le système de coordonnées  $x', y', z'$ , la base d'appui du pénétrateur, qui était un cercle de rayon  $a$ , devient une ellipse. Pour le problème du poinçon elliptique (Figure.III.2), la solution du problème élastique correspondant, bien que connue, n'est pas élémentaire. Toutefois, une simple application de la méthode de la transplantation permet d'estimer, par excès et par défaut, l'énergie de déformation et, par conséquent, la profondeur de pénétration.

Pour obtenir un état de déplacement admissible, il suffit de remarquer que, si  $u, v$  et  $w$ , sont les composantes du déplacement dans le corps originaire, celles définies par :

$$\begin{cases} u'(x', y', z') = u\left(\frac{t_0}{t} x', y', z'\right), \\ v'(x', y', z') = v\left(\frac{t_0}{t} x', y', z'\right), \\ w'(x', y', z') = w\left(\frac{t_0}{t} x', y', z'\right), \end{cases} \quad (\text{III.27})$$

représentent un état admissible dans le corps transplanté, car elles sont régulières, en tant que solutions du problème relatif au poinçon circulaire et satisfont la condition cinématique, qui se traduit par le fait que  $W'$  est constant à l'intérieur de la base de contact.

Pour l'état  $u', v', w'$ , les déformations correspondantes s'obtiennent par dérivation :

$$\begin{aligned}
\varepsilon'_{xx} &= \left(\frac{t_0}{t}\right) u_x \left(\frac{t_0}{t} x', y', z'\right), \\
\varepsilon'_{yy} &= v_y \left(\frac{t_0}{t} x', y', z'\right), \\
\varepsilon'_{zz} &= w_z \left(\frac{t_0}{t} x', y', z'\right), \\
\varepsilon'_{xy} &= \frac{1}{2} \left[ u_y \left(\frac{t_0}{t} x', y', z'\right) + \left(\frac{t_0}{t}\right) v_x \left(\frac{t_0}{t} x', y', z'\right) \right], \\
\varepsilon'_{xz} &= \frac{1}{2} \left[ u_z \left(\frac{t_0}{t} x', y', z'\right) + w_x \left(\frac{t_0}{t} x', y', z'\right) \right], \\
\varepsilon'_{yz} &= \frac{1}{2} \left[ v_z \left(\frac{t_0}{t} x', y', z'\right) + w_y \left(\frac{t_0}{t} x', y', z'\right) \right],
\end{aligned} \tag{III.28}$$

Le corps étant homogène et isotrope, on récupère l'énergie de déformation au moyen des équations de l'élasticité :

$$\begin{aligned}
\sigma'_{xx} &= \frac{E}{1+\nu} \left[ \varepsilon'_{xx} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon'_{xx} + \varepsilon'_{yy} + \varepsilon'_{zz}) \right], \\
\sigma'_{yy} &= \frac{E}{1+\nu} \left[ \varepsilon'_{yy} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon'_{xx} + \varepsilon'_{yy} + \varepsilon'_{zz}) \right], \\
\sigma'_{zz} &= \frac{E}{1+\nu} \left[ \varepsilon'_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon'_{xx} + \varepsilon'_{yy} + \varepsilon'_{zz}) \right], \\
\sigma'_{xy} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon'_{xy}, \\
\sigma'_{yz} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon'_{yz}, \\
\sigma'_{zx} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon'_{zx},
\end{aligned} \tag{III.29}$$

qui permettent d'écrire,

$$\begin{aligned}
\frac{E}{1+\nu} \iiint_{D'} & \left[ \varepsilon'^2_{xx} + \varepsilon'^2_{yy} + \varepsilon'^2_{zz} + 2\varepsilon'^2_{xy} + 2\varepsilon'^2_{yz} + 2\varepsilon'^2_{zx} \right. \\
& \left. + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon'_{xx} + \varepsilon'_{yy} + \varepsilon'_{zz})^2 \right] dx' dy' dz'
\end{aligned}$$

où  $D'$  est la région  $Z' \geq 0$  .

En substituant dans cette intégrale, les expressions des déformations (III.28) et, en passant au semi-espace  $Z' \geq 0$  , celle-ci prend la forme :

$$\begin{aligned}
\frac{E}{1+\nu} \iiint_D & \left\{ \left(\frac{t_0}{t}\right)^2 u_x^2 + \dots + \frac{1}{2} \left[ u_y + \left(\frac{t_0}{t}\right) v_x \right]^2 + \dots + \right. \\
\frac{\nu}{1-2\nu} & \left. \left( \left(\frac{t_0}{t}\right) u_x + \dots \right)^2 \right\} \left(\frac{t}{t_0}\right) dx dy dz
\end{aligned} \tag{III.30}$$



Mais cette dernière peut être majorée par l'intégrale,

$$\max \left\{ \left( \frac{t_0}{t} \right), \left( \frac{t}{t_0} \right) \right\} \frac{E}{1+\nu} \iiint_D \left\{ u_x^2 + \dots + \frac{1}{2} [u_y + v_x]^2 + \dots + \frac{\nu}{1-2\nu} (u_x + \dots)^2 \right\} dx dy dz.$$

En observant que, par le théorème de Clapeyron, cette dernière intégrale se calcule à travers (III.25), on conclut que :

$$\max \left\{ \left( \frac{t_0}{t} \right), \left( \frac{t}{t_0} \right) \right\} P w_0, \quad (\text{III.30})$$

représente une borne supérieure pour l'énergie de déformation.

D'autre part, pour construire un état de tension admissible, il suffit de partir des composantes de la tension dans le système  $x, y, z$ , indiquées par  $\sigma_{xx}, \dots, \sigma_{xy}$ , et définir dans le système  $x', y', z'$ , les tensions,

$$\begin{aligned} \sigma'_{xx}(x', y', z') &= \left( \frac{t}{t_0} \right)^2 \sigma_{xx} \left( \frac{t_0}{t} x', y', z' \right), \\ \sigma'_{yy}(x', y', z') &= \sigma_{yy} \left( \frac{t_0}{t} x', y', z' \right), \\ \sigma'_{zz}(x', y', z') &= \sigma_{zz} \left( \frac{t_0}{t} x', y', z' \right), \\ \sigma'_{xy}(x', y', z') &= \left( \frac{t}{t_0} \right) \sigma_{xy} \left( \frac{t_0}{t} x', y', z' \right), \\ \sigma'_{xz}(x', y', z') &= \left( \frac{t}{t_0} \right) \sigma_{xz} \left( \frac{t_0}{t} x', y', z' \right), \\ \sigma'_{yz}(x', y', z') &= \sigma_{yz} \left( \frac{t_0}{t} x', y', z' \right), \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

Celles-ci satisfont aussi les conditions d'équilibre, à l'intérieur du semi-espace  $Z' \geq 0$ , que les conditions au bord sur la superficie externe à l'ellipse, de semi-axes  $\frac{t}{t_0} a, a$ . L'énergie

$$\frac{1+\nu}{E} \iiint_D \left[ \sigma'^2_{xx} + \sigma'^2_{yy} + \sigma'^2_{zz} + 2\sigma'^2_{xy} + 2\sigma'^2_{yz} + 2\sigma'^2_{zx} - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} + \sigma'_{zz})^2 \right] dx' dy' dz'. \quad (\text{III.32})$$

En utilisant les relations (III.32), et en passant au système de coordonnées  $x, y, z$ , il est facile de vérifier que l'intégrale (III.33) se majorée par :

$$\max \left\{ \left( \frac{t}{t_0} \right)^3 + 1 \right\} \frac{1+\nu}{E} \iiint_D \left[ \sigma'^2_{xx} + \sigma'^2_{yy} + \sigma'^2_{zz} + 2\sigma'^2_{xy} + 2\sigma'^2_{yz} + 2\sigma'^2_{zx} - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} + \sigma'_{zz})^2 \right] dx' dy' dz'.$$

Après avoir appliqué, bien entendu, le théorème de Clapeyron avec,

$$\max \left\{ \left( \frac{t}{t_0} \right)^3, 1 \right\} P w_0. \quad (\text{III.33})$$

Pour la détermination de la borne inférieure, on doit trouver une estimation par défaut de l'intégrale,

$$\iint_{\Gamma'} P_z w'_0 dx' dy', \quad (\text{III.34})$$

Où  $\Gamma'$  représente l'aire de l'ellipse,  $P_z$  la charge agissant sur  $\Gamma'$ ,  $w'_0$  le déplacement vertical de la base. Dans ce cas aussi, l'intégrale (III.35) peut être ramenée sur le plan  $x, y$  sous la forme :

$$\iint_{\Gamma} P_z w_0 \frac{t}{t_0} dx dy, \quad (\text{III.35})$$

Où par  $\Gamma$ , on désigne l'aire du cercle de rayon  $a$  sur le plan  $x, y$ .

Mais puisque  $\frac{t}{t_0}$  est une constante que peut l'extraire du signe de l'intégrale, alors

$$\frac{t}{t_0} \iint_{\Gamma} P_z w_0 dx dy = \frac{t}{t_0} P w_0, \quad (\text{III.36})$$

En définitive, sachant qu'une limite inférieure de l'énergie de déformation est fournie par une expression analogue à (III.37), on peut conclure que cette énergie est bornée inférieurement par le rapport,

$$\frac{\left( \frac{t}{t_0} \right)^2 P w_0}{\max \left\{ \left( \frac{t}{t_0} \right)^3, 1 \right\}}. \quad (\text{III.37})$$

# ***CONCLUSION***

## CONCLUSION

La méthode de la transplantation est une méthode mathématique qui permet l'obtention d'estimation à priori dans les problèmes variationnels.

Si, elle est bien connue des mathématiciens travaillant dans le domaine de l'électromagnétisme, elle reste étrangement méconnue des mécaniciens.

C'est pour cette raison, que l'objectif de ce mémoire consiste à l'étendre à la théorie de l'élasticité.

En effet, son application à l'élasticité, nous a permis de calculer les bornes inférieure et supérieure de l'énergie de déformation d'un corps élastique et par conséquent, d'établir les déplacements et contraintes.

Nous avons montré, au moyen de quelques exemples réels, l'efficacité de cette méthode, laquelle est en mesure de traiter des problèmes qui échappent à tout traitement analytique ou numérique.

***REFERENCES***

***BIBLIOGRAPHIQUES***

# REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. **G.POLYA, M.SCIFFER.** *Convexity of Functionals by Transplantation.* s.l. : Journal d'Analyse Mathématique, 1953.
2. **TIMOSHENKO, S.** *Résistance des matériaux.* 1977.
3. **SOLOMON, L.** *Elasticité linéaire.* s.l. : Masson, 1968.
4. **ANDRES Bazerguin, ANDRE Biron, GEORGES McIllyre, CHARLES Lagerge, THANG Bui-Quoc.** *Résistance des Matériaux.* s.l. : L'école Polytechnique de Montréal, 1993.
5. **SADD, MARTIN H.** *Elasticity Theory, Applications, and Numerics.* s.l. : ELSEVIER, 2005.
6. **TIMOSHENKO, S et GOODIER, J.** *Théorie de l'élasticité.* Béranger : s.n., 1951.
7. **Jean, COURBON.** *Théorie de l'élasticité.* s.l. : Technique de l'ingénieur.
8. **J.N.Reddy.** *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics.* s.l. : John Wiley and Sons, 1984.
9. **YEHUDA Pinchover, JACOB Rubinstein.** *An Introduction to Partial Differential Equations.* s.l. : Cambridge University Press, 2005.
10. **Molk, JULES.** *Encyclopédie des Sciences Mathématiques (Calcul des variations.* Paris : s.n., 1916.
11. **K.T.Tang.** *Mathematical Methods for Engineers and Scientists 3.* s.l. : Springer, 2007.
12. **S.Selçuk.Bayin.** *Essentials of Mathematical Methods in Science and Engineering.* s.l. : John Wiley and Sons, 2008.
13. **BUSSAK.I.B.** *Calculus of variations: Lecture notes.* California USA : Naval Postgraduate School, 2002.

14. **Hilbert.D, COURANT. R.** *Methods of mathematical physics*. New York : Interscience Publishers, 1953.
15. **Synge.J.L.** *The Hyercircle in Mathematical physics*. Lonon : Cambidge University press, 1957.
16. **WEBER.L.** *Torsion Théorie*. Braunschweig : Fr.Vieweg und Sohn, 1958.
17. **REKATCH.V.** *Problèmes de la Théorie de L'Elasticité*. Moscou : Mir Publishers , 1980.
18. **MANDEL, J.** *Cours de mécanique des milieux continus*. 1966.
19. **PIGEAUD, Q.** *Résistance des matériaux*. Gauthier-Villars : Gauthier-Villars, 1928.
20. **P., BROSSAD.J.** *Mécanique générale : Dynamique (optimisation)", Techniques de l'Ingénieur, vol a1669, 2000. s.l. : Techniques de l'Ingénieur, vol a1669, 2000.*

---

# RESUME

En 1953, Polya et Schiffer proposèrent une méthode permettant d'estimer l'intégrale d'énergies auto adjointes

Le sujet traitera de l'extension de la méthode de la transplantation des domaines à la théorie de l'élasticité.

Dans ce travail, à partir d'exemples concrets, on montrera comment la méthode peut être étendue et fournit, en même temps, une procédure permettant de calculer les bornes inférieures et supérieures de l'énergie de déformation de corps élastique

**Mots clés :** *Elasticité, Equations différentielles, Calcul variationnel, transplantation de domaine*



---

# ABSTRACT

In 1953, Polya and Schiffer proposed a method for estimating the energies of integrals self adjoint

The topic will address the extension of the method of transplantation of fields to the theory of elasticity

In this work, using concrete examples, we show how the method can be extended and shall, at the same time, a procedure to calculate the lower and upper bounds of the strain energy of elastic body

**Key words:** *Elasticity, variational calculus, differential equations*

---

## المخلص

في عام 1953 بوليا و شيفر اقترحا طريقة تسمح بتقدير تكامل طاقة التشوهات

هذا الموضوع يعالج طريق تمديد زرع. الحقول في نظرية المرونة

نحاول من خلال بحثنا هذا تقديم مجموعة من الأمثلة الملموسة تبيان نجاعة هذه الطريقة و كيفية

تطبيقاتها وإسقاطاتها ميدانيا لتكون وسيلة فعالة لتقدير أو حصر قيمة طاقة التشوهات.

الكلمات المفتاحية: نظرية المرونة، المعادلات التفاضلية الإشتقاق الجزئي، حساب التغيرات، زرع الحقول.