

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

N° de série :

N° d'ordre :

MEMOIRE

PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE MAGISTER EN PHYSIQUE

SPECIALITE : ENERGIES RENOUVELABLES

Thème :

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA CONVECTION
NATURELLE AU SEIN D'UN TUBE ELLIPTIQUE REMPLI D'UN
MILIEU POREUX SATURE DE FLUIDE**

PAR:

M^{elle} Labeled Amel

Soutenu le : 09/12/ 2012

Devant le jury :

Président :	T. BOUFENDI	Prof.	Université Mentouri Constantine
Rapporteur :	M. DJEZZAR	Prof.	Université Mentouri Constantine
Examineurs :	R. GOMRI	Prof.	Université Mentouri Constantine



Dédicace

Je remercie Allah le tout puissant pour tout.

Je dédie ce travail:

A ma mère Zineb pour son amour et son encouragement depuis toujours.

A mon très cher père Sherif, je lui dédie avec fierté ce mémoire qui reflète le fruit de l'éducation et de l'attention qu'il m'a tant réservé, je suis très reconnaissante et j'aurai tant aimé partager la joie de ma réussite avec lui.

A mes frères et mes sœurs.

A toute ma famille et mes amies



Remerciements

Je désire tout d'abord exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements les plus chaleureux à Monsieur Mahfoud DJEZZAR, Professeur à l'université Mentouri Constantine pour son aide appréciable, pour ses conseils précieux, pour ses idées originales qui ont enrichi ce mémoire, pour sa disponibilité permanente et pour m'avoir fait profiter de son expérience.

Je tiens à remercier sincèrement Mr Toufik BOUFENDI Professeur à l'université Mentouri Constantine qui a bien voulu présider mon jury d'examen malgré ces nombreuses occupations. Monsieur Rabah GOMRI, Professeur à l'université Mentouri Constantine, qui m'a fait l'honneur d'examiner ce mémoire et de participer à mon jury d'examen. Qu'il trouve ici l'expression de mes meilleurs remerciements.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué de près où de loin à la réalisation de ce travail.

Nomenclature

Lettres latines

A_1	grand axe du cylindre elliptique intérieur. (m)
A_2	grands axe du cylindre elliptique extérieur. (m)
a	diffusivité thermique. ($m^2.s^{-1}$)
B_1	petit axe du cylindre elliptique intérieur. (m)
B_2	petit axe du cylindre elliptique extérieur. (m)
C	constante définie dans le système de coordonnées elliptiques, (distance aux pôles). (m)
C_p	Chaleur massique à pression constante. ($J. kg^{-1}.K^{-1}$)
Da	Nombre de darcy
D_h	longueur caractéristique. (m)
e_1	excentricité de l'ellipse interne.
e_2	excentricité de l'ellipse externe.
Gr	Nombre de Grashof.
g	Accélération de la pesanteur. ($m. s^{-2}$)
H	coefficient métrique adimensionnel.
h	coefficient métrique dimensionnel défini dans la relation. (m)
K	Perméabilité du milieu poreux. (m^2)
Nu_{moy}	Nombre de Nusselt moyen.
Nu_c	Nombre de Nusselt local sur la paroi chaude.
Nu_f	Nombre de Nusselt local sur la paroi froide.
P	Pression. (atm)
Pr	Nombre de Prandtl.
q	densité de flux de chaleur. ($W.m^{-2}$)
Ra	Nombre de Rayleigh.
Ra_m	Nombre de Darcy-Rayleigh modifié.
S_Φ	Terme de source figurant dans l'équation 3.3.
S	surface d'échange de la chaleur.
T	température du fluide en un point donné du système. (K)
t	Temps. (s)

T_0	température de référence. (K)
T_c	Température de la paroi chaude. (K)
T_f	Température de la paroi froide. (K)
u et v	Composantes de la vitesse suivant x et y . ($m.s^{-1}$)
\vec{V}	Vecteur vitesse. ($m. s^{-1}$)
v_η et v_θ	Composantes de vitesse suivant les directions η et θ . ($m.s^{-1}$)
x , y et z	Coordonnées cartésiennes. (m)

Lettres grecques

α	Angle d'inclinaison. ($^\circ$)
β	Coefficient d'expansion volumique thermique du fluide. (K^{-1})
λ_p	Conductivité thermique du fluide. ($W.m^{-1}.K^{-1}$)
μ	Viscosité dynamique. ($kg.m^{-1}.s^{-1}$)
ν	Viscosité cinématique. ($m^2.s^{-1}$)
ρ	Masse volumique du fluide. ($kg.m^{-3}$)
ρ_0	Masse volumique du fluide à la température de référence. ($kg.m^{-3}$)
σ_T	Facteur de la capacité thermique.
ψ	Fonction de courant. ($m^2.s^{-1}$)
ϕ	Fonction générale.

Exposant

+ Paramètres adimensionnels

Indices

c	Chaude
f	Froide
f	Fluide
η	Suivant la coordonnée η
θ	Suivant la coordonnée θ
p	Milieu poreux
m	matrice poreuse

Sommaire

INTRODUCTION

CHAPITRE 1 – RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE3

CHAPITRE 2 – ANALYSE THEORIQUE7

2.1 Description du problème7

2.2 Hypothèses simplificatrices9

2.3 Formulation vectorielle.....9

2.3.1 Formulation indicielle10

2.4 Formulation des équations en coordonnées cartésiennes.....10

2.5 Elimination du terme de pression de l'équation du mouvement11

2.6 Introduction des coordonnées elliptiques.....12

2.7 Adimensionalisation.....13

2.8 Formulation des conditions aux limites adimensionnelles14

2.9 Coefficients d'échange de la chaleur.....15

2.9.1 Valeur locale du nombre de Nusselt.....15

2.9.2 Nombre de Nusselt moyen14

CHAPITRE 3 – FORMULATION NUMERIQUE.....15

3.1 Introduction.....16

3.2 Principe de la méthode des volumes finis.....16

3.2.1 Volume élémentaire d'intégration.....17

3.3 Discrétisation de l'équation de la chaleur dans le volume de contrôle.....18

3.4 Discrétisation des conditions aux limites :.....26

3.5 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement.....26

3.6 Discrétisation des conditions aux limites27

3.7 Discrétisation des composantes de la vitesse27

3.8 Processus du calcul.....28

CHAPITRE 4 – RESULTATS ET DISCUSSIONS.....29

4.1 Introduction30

4.2 Etude du maillage30

4.3 Comparaison de résultats issus de ce code de calcul avec des résultats de la littérature...34

4.4. Influence du nombre de Darcy–Rayleigh :.....35



4.4.1 Les isothermes et les isocourants.....	35
4.4.2 Nombre de Nusselt local.....	47
4.4.2.1 Analogie entre la variation du nombre de Nusselt local - isothermes et isocourants...	47
4.4.2.2 Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi du cylindre elliptique interne.....	49
4.4.2.3 Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi du cylindre elliptique extérieur	50
4.4.2.4 Nombre de Nusselt moyen.....	50
4.5 Influence de l'angle d'inclinaison du système.....	47
4.5.1 Les isothermes et les isocourants.....	47
4.5.2 Nombre de Nusselt local et moyen.....	56
4.6 Influence de l'excentricité interne.....	58
4.6.1 Les isothermes et les isocourants.....	58
4-6.2 conductivité thermique équivalente	60
CONCLUSION.....	61
ANNEXE A : COORDONNEES ELLIPTIQUES.....	63
ANNEXE B: MILIEUX POREUX.....	74
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	79

Introduction

L'intérêt considérable qui a été porté ces dernières décennies à la convection naturelle dans les milieux poreux est dû à ses diverses applications dans la pratique telles que l'extraction de l'énergie géothermique, la récupération du pétrole, les échangeurs de chaleur, le stockage des produits d'agriculture, les problèmes de sécurité dans le cœur des réacteurs nucléaires et l'isolation thermique des bâtiments.

Dans la présente étude, nous nous sommes intéressés à la convection naturelle qui se développe dans un espace annulaire elliptique incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal, rempli par un milieu poreux saturé par un fluide newtonien. Les paramètres dont dépend l'écoulement sont : le nombre de Darcy-Rayleigh modifié qui varie entre 10 et 500, le facteur géométrique (les excentricités des parois interne e_1 et externe e_2) et l'angle d'inclinaison α qui varie entre 0° et 90° .

La présentation de ce memoire est articulée de la façon suivante :

Le premier chapitre est consacré à une synthèse bibliographique des travaux théoriques, expérimentaux et numériques ayant trait à la convection thermique dans un espace annulaire poreux, pour diverses configurations et pour différentes conditions aux limites.

Le modèle physique choisi, les équations gouvernantes ainsi que les conditions aux limites associées constituent le deuxième chapitre.

Le troisième chapitre est consacré à l'analyse numérique. Les techniques de discrétisation des différentes équations et les algorithmes de calcul y sont développés. L'équation de la chaleur étant parabolique est discrétisée à l'aide de la méthode des volumes finis tandis que l'équation de mouvement après transformation étant elliptique, elle l'est à

l'aide des différences centrées, les équations ainsi obtenues sont résolues par une méthode itérative de sous-relaxations successives (Successive Under Relaxation).

Nous rassemblons dans le chapitre quatre les principaux résultats numériques de cette étude. Les commentaires, interprétations et analyse des divers résultats sont présentés à partir des distributions de certaines grandeurs physiques.

En fin nous terminons ce travail par une conclusion générale qui résume les principaux résultats obtenus, et pour ne pas alourdir le texte, nous présentons en annexes une caractérisation d'un milieu poreux et quelques compléments de mathématiques.

Chapitre 1

Recherche bibliographique

La convection naturelle dans les cavités remplies d'un milieu poreux a été un sujet de recherche attractif et demeure d'actualité. Les travaux sur ce thème englobent l'expérimentation et les solutions analytiques, mais la modélisation numérique reste le plus souvent l'outil indispensable pour la prédiction. Une revue exhaustive des travaux disponibles sur ce sujet a été faite par Nield et Bejan [1] et par Borjes [2].

Les travaux antérieurs publiés montrent, à la fois expérimentalement et théoriquement, la richesse et la complexité du problème, ainsi différents régimes d'écoulements ont été considérés, stationnaires, instationnaires, laminaires ou turbulents, ainsi que différents modèles théoriques et aussi différentes méthodes numériques de résolutions. Différentes géométries ont été considérées aussi, régulières ou non entre autres, parallélépipédiques, cylindriques, sphériques ou cylindres elliptiques, etc... Différentes solutions ont été trouvées tels que des écoulements monocellulaires, bicellulaires ou multicellulaires.

Le premier travail expérimental et numérique sur un espace annulaire horizontal rempli d'une matière fibreuse ou granulaire a été fait par Caltagirone [3], qui a étudié deux cylindres concentriques remplies par un milieu poreux avec un rapport de rayon $R = 2$. Dans ses expériences, le champ thermique a été visualisé en utilisant l'effet Christiansen. Les nombres de Nusselt expérimentaux ont également été déterminés sur la base des mesures de la température du champ thermique au moyen de thermocouples insérés dans la couche poreuse. Pour des nombres de Rayleigh inférieurs à 65, il a observé un régime d'écoulement bidimensionnel stationnaire avec deux cellules symétriques. Pour des nombres de Rayleigh élevés, les effets fluctuants tridimensionnels ont été observés dans la partie supérieure de la couche, bien que la zone inférieure reste bidimensionnelle.

Les expériences de visualisation de Caltagirone ont été récemment refaites à nouveau par Charrier-Mojtabi et al [4]. Dans une série d'essais sur une couche poreuse cylindrique de $R=2$, lorsque le nombre de Rayleigh est augmenté jusqu'à 250 (phase de chauffage) l'écoulement bidimensionnel constitué de deux cellules symétriques devient tridimensionnel dans la partie supérieure de la couche, tout en restant bidimensionnel dans la partie inférieure. Au cours de la phase de refroidissement l'écoulement redevient bidimensionnel à nouveau, mais cette fois-ci quatre cellules sont apparues dans la couche. L'écoulement original bicellulaire est devenu à nouveau visible lorsque le nombre de Rayleigh chute en dessous de 69. Cet ensemble d'expériences est très intéressant, car elles prouvent l'existence d'un écoulement bidimensionnel.

Charrier-Mojtabi et Mojtabi [5] ont étudié numériquement l'écoulement bidimensionnel et tridimensionnel pour le modèle de Darcy. Ils ont trouvé que les spirales de l'écoulement tridimensionnel sont décrites au voisinage de la transition de l'écoulement bidimensionnel monocellulaire. Ils ont déterminé numériquement les points de bifurcation entre écoulements bidimensionnels monocellulaires et multicellulaires.

Himasekhar et Bau [6] ont fait une analyse détaillée des bifurcations pour des rapports des rayons, 2, 21/2, 21/4, et 21/8. Barbosa Mota et Saadjan [7] ont rapporté des solutions numériques précises pour le modèle de Darcy. Pour un rapport de rayon supérieur à 1,7 et pour des nombres de Rayleigh au-dessus d'une valeur critique. Pour un rapport de rayon inférieur à 1,7 et quand Ra augmente, le nombre de cellules dans les anneaux augmentent aucune bifurcation et aucun hystérésis n'y sont observés. Pour des rapports de rayon très petits, l'état d'équilibre contenant 2, 4, 6 et 8 cellules est obtenu successivement. Pour un rapport de rayon de 2, ils ont trouvé un bon accord avec l'expérience.

Mota, Saadjan et Lam [8] ont rapporté des solutions numériques précises pour les équations Darcy-Boussinesq bidimensionnels dans un system de coordonnées elliptiques. Ils ont utilisé la méthode des différences finies au second ordre avec un maillage très raffiné, et avec les deux cas limites de la géométrie circulaire, les résultats obtenus montrent que les boucles d'hystérésis sont observées pour quelques rapports de rayon choisis. ces résultats sont en très bon accord avec ceux qui utilise un système de coordonnées cylindriques et mêmes avec les résultats expérimentaux.

Un grand nombre de travaux a été consacré à l'étude de la convection naturelle en milieux poreux confinés. Parmi ces travaux, nous citons ceux de Bejan et Khair [9], de Mazouka et al. [10], de Beukema et Brun [11], de Ineba et Seki [12], de Lauriat et Prasad [13], de Chang et Hsiao [14]. Les travaux relatifs à la convection naturelle en milieux poreux semi-confinés sont plus rares. Parmi ces travaux nous citons celui de Bejan [1] qui a étudié le cas du cylindre vertical ouvert à son extrémité supérieure sur un milieu poreux semi-infini et ayant une température pariétale supérieure à celle de l'environnement, celui de Young et al [15] qui ont étudié le cas d'une cavité ouverte et son extrémité supérieure et présentant dans sa partie centrale une source linéique de chaleur.

Nasrallah, Amara et Peuty [16] ont étudié théoriquement l'écoulement et le transfert de chaleur par convection naturelle instationnaire dans un cylindre rempli de grains, ouvert à ses extrémités et dont la paroi est chauffée par une densité de flux de chaleur constante. Deux types de modèles sont utilisés : un modèle à deux températures et un modèle à une température. Les deux modèles sont résolus numériquement par la méthode des volumes finis en tenant compte des effets bidimensionnels. Des résultats concernant l'évolution spatio-temporelle de la température et de la pression sont présentés et analysés.

PHILIP [17] a développé des solutions exactes pour la convection libre, avec de petits nombres de Rayleigh dans des cavités poreuses à différentes formes, avec un gradient de température uniforme perpendiculaire au champ gravitationnel. Dans cette étude, le théorème qui indique que l'écoulement est indépendant de l'orientation de la cavité est établi. Les solutions exactes en détail pour les cavités rectangulaires et elliptiques avec λ (rapport de grand et petit axe) arbitraire, et pour des cavités triangulaires équilatérales, sont présentées. Le nombre de Rayleigh critique pour l'applicabilité de l'analyse est d'environ 1 pour des cavités avec le grand axe horizontal, et environ $\lambda^{1/2}$ avec le grand axe vertical.

Khanafer et al [18] ont étudié numériquement le transfert de chaleur par convection naturelle bidimensionnelle, dans un espace annulaire horizontal rempli partiellement par un milieu poreux saturé d'un fluide. La partie poreuse est damée sur la surface intérieure du cylindre extérieur. Les deux cylindres sont isothermes, la température du cylindre intérieur étant supérieure à celle du cylindre extérieur. En outre, les effets Forchheimer et Brinkman sont pris en considération lors de la simulation du mouvement des fluides à l'intérieur de la

couche poreuse et la condition d'équilibre thermique local est supposée être applicable pour cette investigation. Le fluide choisi est de l'air tandis que le cuivre est utilisé pour représenter la phase solide. La porosité est considérée comme uniforme et constante avec $\varepsilon = 0.9$. L'effet de couche poreuse sur l'écoulement a été examiné.

Kumari and Nath [19] ont étudié la convection naturelle instationnaire, dans un espace annulaire horizontal rempli par un milieu poreux non Darcien . Les équations de Navier-Stokes et l'équation de l'énergie sont résolues avec la méthode des Volume finis .Ces résultats montrent que l'isolation est meilleure quand l'espace est rempli par la matière poreuse et que l'influence de nombre de Darcy est plus prononcée que celle du nombre de Grashof .

Le même problème a été traité analytiquement par Leong and Lai [20]. Les résultats sont obtenus en utilisant la méthode de perturbation et la transformée de Fourier. L'objectif principal de cette étude est d'étudier l'écoulement induit par la flottabilité, affectée par la présence de la couche poreuse. Ils ont effectué une étude paramétrique pour étudier les effets du nombre de Rayleigh, le nombre de Darcy, l'épaisseur des tubes poreux, et la conductivité thermique relative sur les résultats de transfert de chaleur.

Sankar et al [21] ont étudié l'écoulement pour une convection naturelle dans un espace annulaire vertical rempli d'un milieu poreux saturé d'un fluide, lorsque la paroi intérieure est chauffée par partiellement. La paroi externe est maintenue isotherme à une température plus basse, tandis que les parois supérieures et inférieure, et les parties non chauffées de la paroi intérieure sont maintenus adiabatiques. Grâce à l'équation de Darcy-Brinkman, l'importance relative du chauffage partiel sur la convection naturelle dans l'espace annulaire poreux est examinée. Une méthode des différences finies implicite a été utilisée pour résoudre les équations qui régissent le système d'écoulement. L'analyse est effectuée pour une large gamme de Rayleigh modifié et de nombre de Darcy pour différentes longueurs de source de chaleur et position. Les résultats numériques indiquent que l'augmentation du rapport de rayon, du nombre de Rayleigh modifié et du nombre de Darcy augmente le transfert de chaleur, tandis que le transfert de chaleur diminue avec une augmentation de la longueur de l'élément chauffant.

Chapitre 2

Analyse théorique

2.1 Description du problème

Considérons un tube elliptique rempli d'un milieu poreux saturé par un fluide newtonien en l'occurrence de l'air. la figure 2.1 représente une section droite du système.

Les deux parois elliptiques interne et externe sont isothermes, maintenues aux températures T_c et T_f respectivement. Avec $T_c > T_f$.

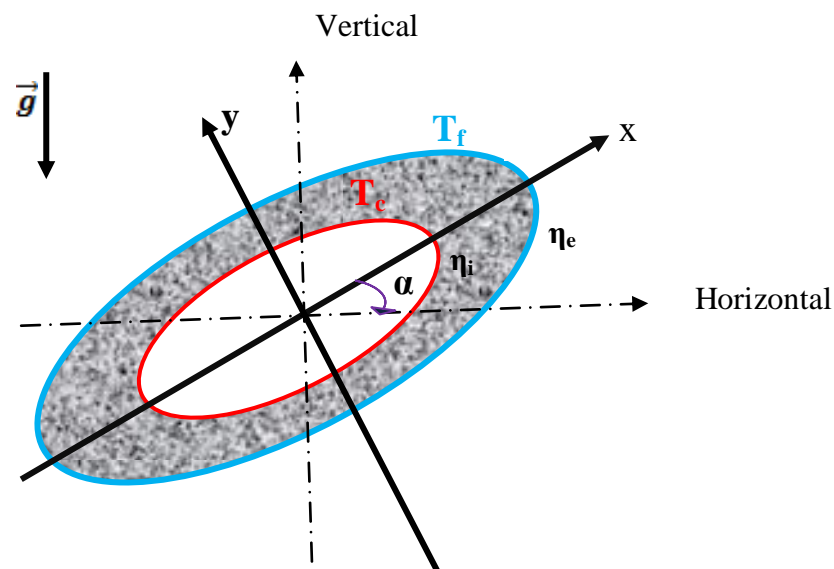


Fig 2.1 Section droite du système.

Il se produit dans l'enceinte une convection naturelle que nous nous proposons d'étudier numériquement.

2.2 Hypothèses simplificatrices

Nous considérons un écoulement de fluide incompressible, à propriétés physiques constantes et par ailleurs nous supposons être dans le cadre de l'approximation de Boussinesq. Celle-ci consiste à considérer les variations de la masse volumique ρ négligeables au niveau de tous les termes des équations de la quantité de mouvement hormis dans le terme de pesanteur dont les variations avec la température, supposées linéaires, engendrent la convection naturelle. Ces variations sont alors traduites par une équation d'état qui relie la masse volumique à la température.

L'équation d'état est donc:

$$\rho = \rho(T) = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (2.1)$$

Où :

β est le coefficient d'expansion thermique (constant).

ρ_0 est la masse volumique de référence (constante).

T_0 est la température de référence (constante) associée à ρ_0 .

Au niveau de tous les autres termes, la masse volumique est constante et égale à ρ_0 .

La dissipation visqueuse et le travail des forces de pression sont négligeables dans l'équation de la chaleur, le rayonnement n'est pas pris en considération (les propriétés émissives des parois étant négligées).

Nous admettons que le problème est bidimensionnel, permanent et laminaire.

2.3 Formulation vectorielle

-Equation de continuité :

$$\text{div} \vec{V} = 0 \quad (2.2)$$

-Equation du mouvement:

La grande majorité des études concernant la convection dans des milieux poreux utilisent la formulation classique de Darcy, établie il y a plus d'un siècle de ça comme équation macroscopique de mouvement pour les fluides newtoniens. Darcy a montré que l'écoulement dépendait linéairement du gradient de pression et de la force de gravité. La vitesse moyenne de filtration (vitesse de Darcy) \vec{v} est alors proportionnelle à la somme du gradient de pression ∇P et de la force gravitationnelle \vec{g} , l'effet de l'inertie étant négligé. Il en résulte la forme suivante courante de l'équation de Darcy:

$$\vec{v} = \frac{K}{\mu} (-\nabla P + \rho \vec{g}) \quad (2.3)$$

-Equation de la chaleur:

Le principe de conservation de l'énergie conduit à l'équation suivante :

$$(\rho C)_m \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho C)_f (\vec{V} \cdot \text{grad})T = \lambda_p \nabla^2 T \quad (2.4)$$

Avec :

- ρ : masse volumique du milieu poreux saturé.
- λ_p : conductivité thermique du fluide.
- $(\rho C)_f$: capacité thermique du fluide à pression constante.
- $(\rho C)_m$: capacité thermique de la matrice poreuse.
- P : tenseur des contraintes.
- V, g : vitesse du fluide et accélération de la pesanteur.
- K : la perméabilité du milieu poreux
- μ : la viscosité dynamique du fluide

2.3.1 Formulation indicielle

-Equation de continuité:

$$\frac{\partial}{\partial X_j} (V_j) = 0 \quad (2.2a)$$

-Equation du mouvement:

$$V_i = \frac{K}{\mu} \left[-\frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] g_i \right] \quad (2.3a)$$

-Equation de la chaleur:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho C_p T) + \frac{\partial}{\partial X_j} (\rho C_p T V_j) = \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial X_j} \right) \quad (2.4a)$$

2.4 Formulation des équations en coordonnées cartésiennes

Introduisons les coordonnées cartésiennes telles qu'elles sont définies sur la figure (2.1).

Le problème étant bidimensionnel et permanent donc les équations (2.2), (2.3) et (2.4) s'écrivent respectivement:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (2.5)$$

- L'équation de mouvement :

$$u = -\frac{K}{\mu} \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \rho_0 g \sin(\alpha) [1 - \beta(T - T_0)] \right] \quad (2.6a)$$

$$v = -\frac{K}{\mu} \left[\frac{\partial P}{\partial y} + \rho_0 g \cos(\alpha) [1 - \beta(T - T_0)] \right] \quad (2.6b)$$

-L'équation de chaleur :

Le principe de conservation de l'énergie conduit à l'équation suivante :

$$\sigma_T \frac{\partial T}{\partial t} + \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\lambda}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.7)$$

Ou :

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad : \text{Diffusivité thermique.}$$

$$\sigma_T = \frac{(\rho C_p)_m}{(\rho C_p)_f} : \text{Facteur de la capacité thermique.}$$

2.5 Elimination du terme de pression de l'équation du mouvement :

En dérivant les équations du mouvement (2.6a) (2.6b) respectivement par rapport à y et à x comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial y} (u) = -\frac{K}{\mu} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} [\rho_0 g \sin(\alpha) [1 - \beta(T - T_0)]] \right] \quad (2.8a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (v) = -\frac{K}{\mu} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} [\rho_0 g \cos(\alpha) [1 - \beta(T - T_0)]] \right] \quad (2.8b)$$

En soustrayant l'équation (2.8 a) de (2.8b), nous obtenons :

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{Kg\beta}{\nu} \left[\cos(\alpha) \frac{\partial T}{\partial x} - \sin(\alpha) \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (2.9)$$

En introduisant la fonction de courant ψ telle que :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.10a)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.10b)$$

Donc l'équation du mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{Kg\beta}{\nu} \left(\cos(\alpha) \frac{\partial T}{\partial x} - \sin(\alpha) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (2.11)$$

2.6 Introduction des coordonnées elliptiques

Il est commode donc de définir un référentiel tel que les limites du système se traduisent par des valeurs constantes des coordonnées. Les coordonnées dites "elliptiques" (η, θ) permettent, précisément dans notre cas d'obtenir ce résultat.

Dans le système de coordonnées (η, θ, z) , les surfaces $\eta = \text{constantes}$ sont des cylindres elliptiques, les surfaces $\theta = \text{constantes}$ sont des cylindres hyperboliques et les surfaces $z = \text{constantes}$ sont des plans parallèles. Comme l'illustre la figure 2.3.

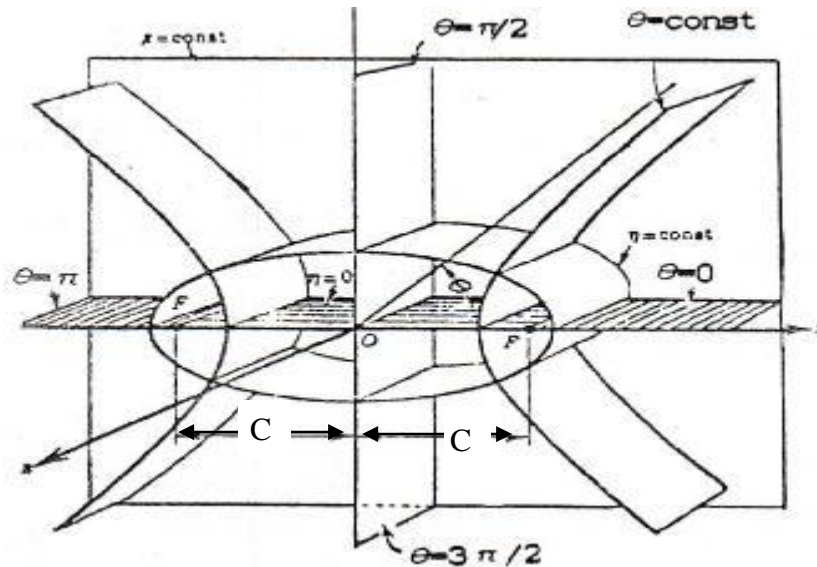


Fig 2.3 Représentation schématique des coordonnées elliptiques

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées elliptiques s'effectue à l'aide des relations suivantes (voir l'annexe) :

$$\left. \begin{aligned} x &= C \operatorname{ch} \eta \cos \theta \\ y &= C \operatorname{sh} \eta \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Les équations (2.5), (2.7) et (2.11) s'écrivent respectivement :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (h V_{\eta}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h V_{\theta}) = 0 \quad (2.13)$$

$$V_{\eta} \frac{\partial T}{\partial \eta} + V_{\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} = C \left(\frac{1}{h^2} \right) \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right] \quad (2.14)$$

$$\frac{1}{h} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} \right] = - \frac{Kg\beta}{\nu} [\cos \alpha F(\eta, \theta) - \sin \alpha G(\eta, \theta)] \frac{\partial T}{\partial \eta} \quad (2.15)$$

$$- [\sin \alpha F(\eta, \theta) + \cos \alpha G(\eta, \theta)] \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

Avec : $C = \frac{A}{ch\eta} = \frac{B}{sh\eta}$

$$h = C(\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)^{1/2}$$

$$\left. \begin{aligned} F(\eta, \theta) &= \frac{sh\eta \cos \theta}{(\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)^{1/2}} \\ G(\eta, \theta) &= \frac{ch\eta \sin \theta}{(\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)^{1/2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

V_η et V_θ sont les composants de vitesse suivant les directions η et θ .

2.7 Adimensionalisation

L'adimensionalisation a pour avantage de faciliter la simplification des équations et de généraliser les résultats.

Posons les quantités adimensionnelles suivantes :

$$D_h = C \text{ (distance focale arbitrairement choisie)} \quad H = \frac{h}{D_h}$$

$$V_\eta^+ = V_\eta \frac{D_h}{a} \quad \text{et} \quad V_\theta^+ = V_\theta \frac{D_h}{a}$$

$$\Psi^+ = \frac{\Psi}{a}$$

$$t^+ = \sigma_T \frac{a}{L^2} t$$

La température adimensionnelle pour la paroi interne est donnée selon la condition pariétale thermique imposée :

$$T^+ = \frac{T - T_f}{T_c - T_f} \text{ avec le nombre de Grashof} \quad Gr = \frac{g\beta D_h^3}{\nu^2} \Delta T$$

Introduisons aussi le nombre de Prandlt

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a}$$

le nombre de Rayleigh-Darcy modifié

$$\text{Ra}_m = \text{Da} * \text{Ra}$$

Et en portant dans les équations (2.13) (2.14) (2.15) , on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (HV_{\eta}^+) + \frac{\partial}{\partial \theta} (HV_{\theta}^+) = 0 \quad (2.17)$$

Dans le cas permanent :

$$HV_{\eta}^+ \frac{\partial T^+}{\partial \eta} + HV_{\theta}^+ \frac{\partial T^+}{\partial \theta} = \left[\frac{\partial^2 T^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T^+}{\partial \theta^2} \right] \quad (2.18a)$$

Dans le cas transitoire :

$$H^2 \frac{\partial T^+}{\partial t^+} + HV_{\eta}^+ \frac{\partial T^+}{\partial \eta} + HV_{\theta}^+ \frac{\partial T^+}{\partial \theta} = \left[\frac{\partial^2 T^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T^+}{\partial \theta^2} \right] \quad (2.18b)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{H} \left[\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2} \right] &= -\frac{Kg\beta D_h \Delta T}{\nu * a} [\cos \alpha F(\eta, \theta) - \sin \alpha G(\eta, \theta)] \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \\ &- [\sin \alpha F(\eta, \theta) + \cos \alpha G(\eta, \theta)] \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2} \right] &= \frac{K}{D_h^2} * \frac{g\beta D_h^3 \Delta T}{\nu^2} * \frac{\nu}{a} H [\cos \alpha F(\eta, \theta) - \sin \alpha G(\eta, \theta)] \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \\ &- [\sin \alpha F(\eta, \theta) + \cos \alpha G(\eta, \theta)] \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2} \right] &= -\text{Da} * \text{Gr} * \text{Pr} * H * [\cos \alpha F(\eta, \theta) - \sin \alpha G(\eta, \theta)] \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \\ &- [\sin \alpha F(\eta, \theta) + \cos \alpha G(\eta, \theta)] \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2} \right] &= -\text{Ra}_m * H * [\cos \alpha F(\eta, \theta) - \sin \alpha G(\eta, \theta)] \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \\ &- [\sin \alpha F(\eta, \theta) + \cos \alpha G(\eta, \theta)] \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2.22)$$

où les composantes V_{η}^+, V_{θ}^+ de la vitesse adimensionnelles sont définies par :

$$V_{\eta}^+ = \frac{1}{H} * \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \qquad V_{\theta}^+ = -\frac{1}{H} * \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}$$

2.8 Formulation des conditions aux limites adimensionnelles

Les conditions aux limites adimensionnelles sont :

- Paroi interne chaude ($\eta=\eta_i=cst$)

$$V_{\eta}^+ = V_{\theta}^+ = \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} = 0$$

$T_c^+=1$.

- Paroi externe froide ($\eta=\eta_e=cst$)

$$V_{\eta}^+ = V_{\theta}^+ = \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} = 0.$$

$T_f^+=0$.

2.9 Coefficients d'échange de la chaleur :

2.9.1 Valeur locale du nombre de Nusselt

L'étude du transfert de chaleur dans le tube elliptique nécessite la détermination des taux de transfert de chaleur, donnés par le biais du nombre de Nusselt .La formule générale de ce dernier est comme suit :

$$Nu = \frac{q * S}{\lambda \Delta T}$$

q : densité du flux de la chaleur à travers la paroi de l'enceinte.

ΔT : écart de température (T_c-T_f).

S : surface d'échange de la chaleur.

$$\text{Soit : } q = -\lambda \left. \frac{1}{h} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_{\eta=cst}$$

Et en utilisant les définitions des températures adimensionnelles dans les conditions pariétales thermiques, il vient :

$$Nu = -\left. \frac{1}{h} \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right|_{\eta=cst}$$

2.9.2 Nombre de Nusselt moyen :

Le nombre de Nusselt moyen s'exprime à partir de la relation suivante :

$$\text{Nu}_{\text{moy}} = -\frac{1}{\theta_{\text{NN}} - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_{\text{NN}}} \text{Nu} d\theta$$

Chapitre 3

Formulation Numérique

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons développé les équations de base régissant la convection naturelle, en milieu poreux. Les équations résultantes forment un système d'équations différentielles partielles non-linaires couplées. Ce sont par conséquent des équations difficiles à résoudre analytiquement et en général, on ne peut obtenir une solution de ces dernières que par le biais de méthodes numériques. Pour la résolution du système d'équations couplées, obtenu, et les conditions aux limites associées, nous considérons pour l'équation (2.22), qui est une équation du type elliptique, une solution numérique par la méthode des différences centrées. Alors que pour l'équation (2.18), qui est une équation du type parabolique, nous considérons une solution numérique par la méthode des volumes finis. Les deux méthodes sont très utilisées dans la solution numérique des problèmes de transferts, et sont bien exposées par S.V. Patankar [22] et E.F. Nogotov [23].

3.2 Principe de la méthode des volumes finis :

La méthode des volumes finis consiste à diviser le domaine de calcul en un certain nombre de volumes de contrôle. Les équations algébriques sont obtenues par l'intégration des équations de conservation à travers ces derniers dont les centres constituent les nœuds. La figure 3.1 représente le domaine de calcul.

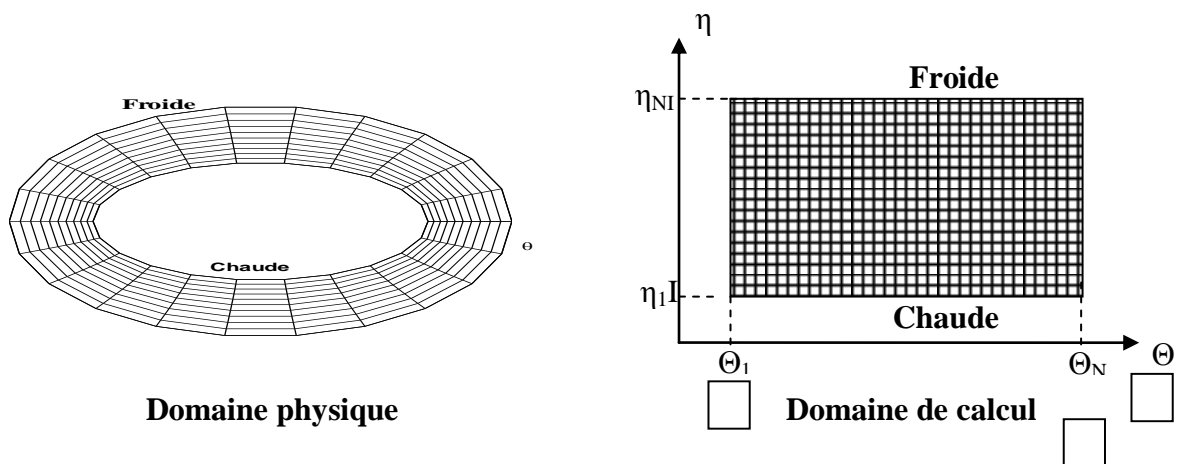


Fig3.1 Domaine physique et domaine de calcul.

Nous utilisons des pas $\Delta\eta$ et $\Delta\theta$ constants et plus précisément, nous posons :

$$\Delta\eta = \frac{\eta_{NI} - \eta_1}{NI - 1}$$

$$\Delta\theta = \frac{\theta_{NN} - \theta_1}{NN - 1}$$

Avec:

NI : le nombre de points suivant η .

NN : le nombre de points suivant θ .

3.2.1 Volume élémentaire d'intégration :

On découpe l'espace elliptique selon les directions θ et η en un ensemble de volumes élémentaires ou «volumes de contrôle» égaux à « $\Delta\eta.\Delta\theta.H^2.1$ ». (Le problème étant bidimensionnel, on prend l'unité dans la direction z comme épaisseur).

Le centre d'un volume fini typique est un point P et ses faces latérales «est», «ouest» «nord» et «sud», sont désignées respectivement, par les lettres e , w , n et s . Chacun des volumes finis intérieurs est entouré de quatre autres volumes finis. Les centres de ces volumes sont les points E , W , N et S . Les variables scalaires (température...) sont stockées aux points centrés dans les volumes finis. Donc les équations de transfert des variables scalaires sont intégrées dans le volume fini typique.

Les nœuds E et N sont pris dans les directions des coordonnées positives de θ et η respectivement et les nœuds W et S dans les sens contraires.

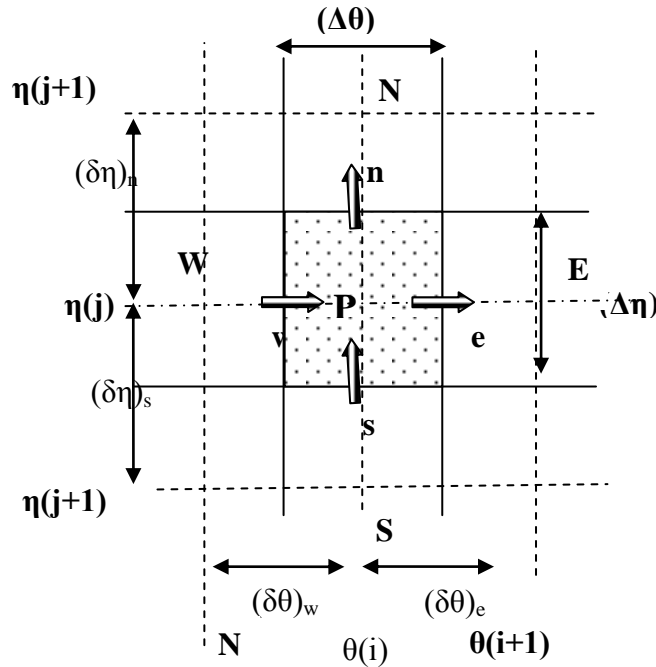


Fig 3.2 Représentation d'un volume-fini typique et son voisinage
Dans le domaine de calcul.

3.3 Discrétisation de l'équation de la chaleur dans le volume de contrôle :

Nous considérons l'équation de la chaleur (2.18b), elle s'écrit :

$$H^2 \frac{\partial T^+}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(HV_{\eta}^+ T^+ - \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(HV_{\theta}^+ T^+ - \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (3.1)$$

Cette équation est de la forme générale :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(HV_{\eta} \varphi - \Gamma_{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(HV_{\theta} \varphi - \Gamma_{\theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = S_{\varphi} \quad (3.2)$$

Le terme de source et le coefficient de diffusion sont spécifiés dans le tableau suivant :

Equation	Φ	Γ_{Φ}	S_{Φ}
(3.1)	T^+	1	0

Tableau 3.1 : Terme de source et coefficient de diffusion

L'équation de discrétisation d'une variable est obtenue par l'intégration de son équation de conservation dans un volume fini typique. Ci-après, nous présentons un cas de discrétisation d'une équation de transfert de φ .

$$\int_w \int_s \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \varphi}{\partial t^+} H^2 d\eta d\theta dt + \int_w \int_s \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\text{HV}_\eta \varphi - \Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) H^2 d\eta d\theta dt +$$

$$\int_w \int_s \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{HV}_\theta \varphi - \Gamma_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) H^2 d\eta d\theta dt = \int_w \int_s \int_t^{t+\Delta t} S_\varphi H^2 d\eta d\theta dt +$$

Ou bien

$$\int_w \int_s \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \varphi}{\partial t^+} H^2 d\eta d\theta dt + \int_w \int_s \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\text{HV}_\eta^+ \varphi \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{HV}_\theta^+ \varphi \right) H^2 d\eta d\theta dt =$$

$$\int_w \int_s \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Gamma_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) H^2 d\eta d\theta dt + \int_w \int_s \int_t^{t+\Delta t} S_\varphi H^2 d\eta d\theta dt +$$

Pour la discrétisation spatiale, nous utilisons le schéma de la loi de puissance (Power Law) pour approcher les variations de φ entre les points du maillage [19]. Ce schéma présente l'avantage d'être inconditionnellement stable.

Posons :

$$j_\eta = \text{HV}_\eta^+ \varphi - \Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \quad (3.3a)$$

$$j_\theta = \text{HV}_\theta^+ \varphi - \Gamma_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad (3.3b)$$

Où j_θ et j_η sont les flux totaux (convection plus diffusion).

En portant ces valeurs dans l'équation (3.2), on obtient :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t^+} + \frac{\partial j_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial j_\theta}{\partial \theta} = S_\varphi \quad (3.4)$$

L'intégration de l'équation (3.4) dans le volume de contrôle de la figure 3.2 donne :

$$\frac{(\varphi_p^t - \varphi_p^0)}{\Delta t} + j_e - j_w + j_s - j_n = \overline{S_\varphi} \Delta V \quad (3.5)$$

J_e, J_w, J_n et J_e sont les valeurs des flux totaux aux interfaces du volume de contrôle. $\overline{S_\varphi}$ est la valeur moyenne de S_φ dans ce volume élémentaire. Ce terme peut généralement être linéarisé en fonction de φ_p (au nœud P) et se mettre sous la forme :

$$\overline{S_\varphi} = S_0 + S_p \varphi_p \quad (3.6)$$

Avec : $S_p < 0$.

Par suite l'équation 3.5 devient :

$$\frac{(\varphi_p^t - \varphi_p^0)}{\Delta t} + j_e - j_w + j_s - j_n = (S_0 + S_p \varphi_p) \Delta V \quad (3.7)$$

En intégrant aussi l'équation de continuité (4) dans le volume élémentaire, on obtient :

$$F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \quad (3.8)$$

Où F_e , F_w , F_n , et F_s sont les débits massiques (termes de convection) à travers les surfaces de ce volume :

$$\left. \begin{aligned} F_n &= (HV_{\eta^+})_n \Delta\theta \\ F_s &= (HV_{\eta^+})_s \Delta\theta \\ F_e &= (HV_{\theta^+})_e \Delta\eta \\ F_w &= (HV_{\theta^+})_w \Delta\eta \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Nous poserons dans ce qui suit

$$\varphi_p^t = \varphi_p$$

En multipliant l'équation (3.8) par la fonction φ_p et en soustrayant l'équation obtenue de l'équation (3.7), il vient :

$$\begin{aligned} &\frac{\Delta(\varphi_p^t - \varphi_p^0)}{\Delta t} + (j_e - F_w \varphi_p) - (j_w - F_w \varphi_p) + (j_n - F_n \varphi_p) - (j_s - F_s \varphi_p) \\ &= (S_0 + S_p \varphi_p) \Delta V \end{aligned} \quad (3.10)$$

D'après le schéma numérique du POWER LAW de S.V.PATANKAR [22] on peut représenter les termes entre parenthèses de l'équation (3.10) de la manière suivante :

$$\left. \begin{aligned} (j_e - F_e \varphi_p) &= a_E (\varphi_p - \varphi_E) \\ (j_w - F_w \varphi_p) &= a_W (\varphi_W - \varphi_p) \\ (j_n - F_n \varphi_p) &= a_N (\varphi_p - \varphi_N) \\ (j_s - F_s \varphi_p) &= a_S (\varphi_S - \varphi_p) \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Introduisons ces valeurs dans l'équation (3.10) on obtient :

$$\begin{aligned} &\frac{\Delta(\varphi_p^t - \varphi_p^0) \Delta\eta \Delta\theta}{\Delta t^+} + a_E (\varphi_p - \varphi_E) - a_W (\varphi_W - \varphi_p) + a_N (\varphi_p - \varphi_N) \\ &- a_S (\varphi_S - \varphi_p) = (S_0 + S_p \varphi_p) \Delta V \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ce qui nous amène enfin à l'équation de discrétisation :

$$a_p \varphi_p = a_E \varphi_E + a_W \varphi_W + a_S \varphi_S + a_N \varphi_N + b \quad (3.13)$$

Avec :

$$a_p = a_E + a_W + a_S + a_N + a_p^0 - S_p \Delta V \quad (3.14)$$

$$a_p^0 = \frac{\Delta\eta\Delta\theta}{\Delta t} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{b} = S_0\Delta V + a_p^0\varphi_p^0 \quad (3.16)$$

On introduit maintenant la fonction $A(|P|)$ du nombre de Peclet, qui est celle de la loi de puissance (power law), d'après S.V PATANKAR, [22] elle est donnée par :

$$A(|P|) = \max(0, (1 - 0.1|P|)^5)$$

Le symbole $\|A, B\|$ signifie que le maximum entre A et B est choisi

Les coefficients de l'équation algébrique (3.13) deviennent alors :

$$\left. \begin{aligned} a_E &= D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ a_W &= D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \\ a_N &= D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ a_S &= D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0) \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Les grandeurs D_e, D_w, D_n, D_s sont les termes diffusifs, et P_e, P_w, P_n et P_s sont les nombres de Péclet, ils sont définis par :

$$\left. \begin{aligned} D_e &= \frac{(\Gamma_\varphi)_e \Delta\eta}{(\delta\theta)_e} \\ D_w &= \frac{(\Gamma_\varphi)_w \Delta\eta}{(\delta\theta)_w} \\ D_n &= \frac{(\Gamma_\varphi)_n \Delta\theta}{(\delta\eta)_n} \\ D_s &= \frac{(\Gamma_\varphi)_s \Delta\theta}{(\delta\eta)_s} \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

$$\left. \begin{aligned} P_e &= \frac{F_e}{D_e} \\ P_w &= \frac{F_w}{D_w} \\ P_n &= \frac{F_n}{D_n} \\ P_s &= \frac{F_s}{D_s} \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Les pas d'intégration, $(\delta\theta)_e, (\delta\theta)_w, (\delta\eta)_n$ et $(\delta\eta)_s$ peuvent être égaux ou non aux pas de calcul $\Delta\eta$ et $\Delta\theta$. Ils sont choisis constants et égaux respectivement aux pas $\Delta\eta$ et $\Delta\theta$.

Considérons que les interfaces n, s, e et w sont les milieux des (P, N), (P, S), (P, E) et (P, W).

Dans ces conditions les grandeurs précédentes s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} D_e &= \frac{(\Gamma_\varphi)_e \Delta\eta}{(\Delta\theta)} \\ D_w &= \frac{(\Gamma_\varphi)_w \Delta\eta}{(\Delta\theta)} \\ D_n &= \frac{(\Gamma_\varphi)_n \Delta\theta}{(\Delta\eta)} \\ D_s &= \frac{(\Gamma_\varphi)_s \Delta\theta}{(\Delta\eta)} \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Parmi les conditions de convergence et de stabilité exigées par cette méthode, notons que tous les coefficients dans l'équation (3.13) doivent être positifs. S_p doit être négatif et le Coefficient a_p , doit être égal à la somme des autres coefficients et $S_p \Delta V$.

La discrétisation précédente s'applique à l'équation d'énergie En suivant les mêmes étapes de discrétisation, on obtient l'équation algébrique suivante :

$$a_p T_p^+ = a_e T_e^+ + a_w T_w^+ + a_s T_s^+ + a_n T_n^+ + S_T \quad (3.21)$$

$$a_p = a_e + a_w + a_n + a_s + \frac{\Delta\eta\Delta\theta}{\Delta t^+} \quad (3.22)$$

Le terme de source de cette équation est

$$S_T = \frac{\Delta\eta\Delta\theta}{\Delta t^+} T_p^0$$

En introduisant la fonction de courant adimensionnelle ψ dans le système (3.9), il vient

$$\left. \begin{aligned} F_e &= \Delta\theta \left(\frac{\partial\psi^+}{\partial\theta} \right)_e \\ F_w &= \Delta\theta \left(\frac{\partial\psi^+}{\partial\theta} \right)_w \\ F_n &= \Delta\eta \left(\frac{\partial\psi^+}{\partial\eta} \right)_n \\ F_s &= \Delta\eta \left(\frac{\partial\psi^+}{\partial\eta} \right)_s \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Dans la suite nous supposons que :

$$\psi_e^+ = \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i, j)}{2}$$

$$\begin{aligned} \psi_w^+ &= \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i-1, j)}{2} \\ \psi_n^+ &= \frac{\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i, j)}{2} \\ \psi_s^+ &= \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j-1)}{2} \end{aligned} \tag{3.24}$$

Le développement du gradient de la fonction de courant à l'interface "e" est établi d'après la démarche de E.F. NOGOTOV [23], comme suit : (figure 3.3).

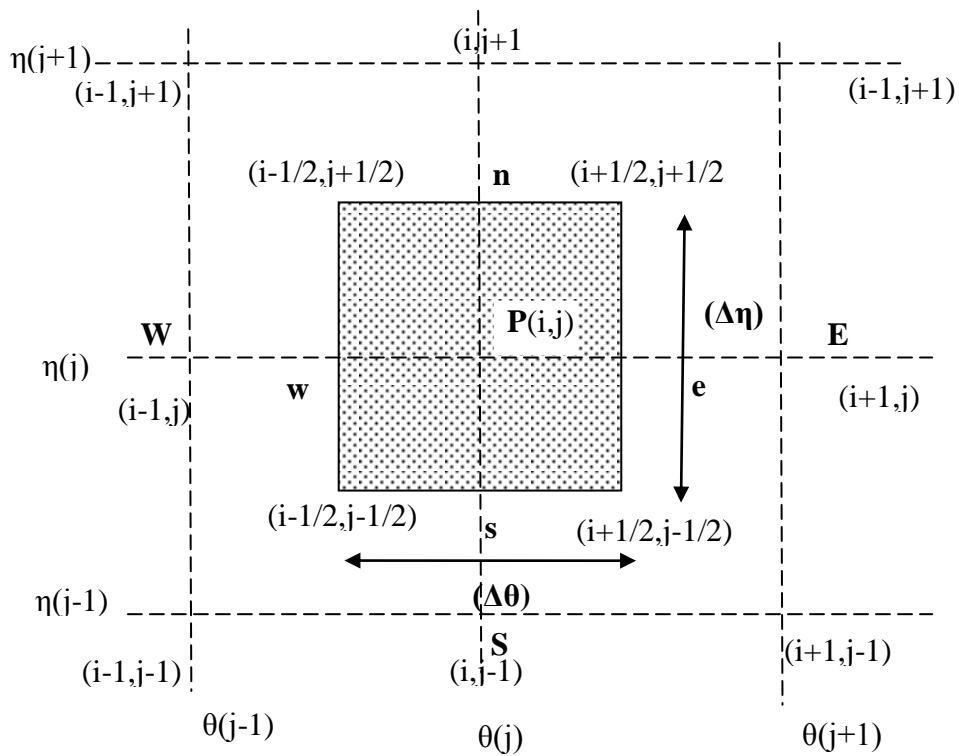


Figure 3.3 : Représentation schématique des nœuds P, E, W, N et S dans le maillage.

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}\right)_e = \frac{\psi^+\left(\frac{i+1}{2}, \frac{j+1}{2}\right) - \psi^+\left(\frac{i+1}{2}, \frac{j-1}{2}\right)}{\Delta \eta}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}\right)_e = \frac{1}{\Delta \eta} \frac{\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i, j+1) + \psi^+(i, j) + \psi^+(i+1, j)}{4} - \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i, j) + \psi^+(i, j-1) + \psi^+(i+1, j-1)}{4}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}\right)_e = \frac{1}{4\Delta \eta} (\psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i+1, j+1) - \psi^+(i+1, j))$$

Donc

$$F_e = \frac{1}{4} \left(\begin{array}{c} \psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i+1, j+1) \\ - \psi^+(i+1, j) \end{array} \right) \quad (3.25a)$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}\right)_w = \frac{\psi^+\left(\frac{i-1}{2}, \frac{j+1}{2}\right) - \psi^+\left(\frac{i-1}{2}, \frac{j-1}{2}\right)}{\Delta \eta}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}\right)_w = \frac{1}{\Delta \eta} \frac{\psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i-1, j) + \psi^+(i, j) + \psi^+(i, j+1)}{4} - \frac{\psi^+(i, j-1) + \psi^+(i, j) + \psi^+(i-1, j) + \psi^+(i-1, j-1)}{4}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}\right)_w = \frac{1}{4\Delta \eta} (\psi^+(i-1, j-1) + \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i+1, j))$$

Donc

$$F_w = \frac{1}{4} \left(\begin{array}{c} \psi^+(i-1, j-1) + \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i+1, j-1) - \\ \psi^+(i+1, j) \end{array} \right) \quad (3.25b)$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_n = \frac{\psi^+\left(\frac{i+1}{2}, \frac{j+1}{2}\right) - \psi^+\left(\frac{i-1}{2}, \frac{j+1}{2}\right)}{\Delta \theta}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_n = \frac{1}{\Delta \theta} \frac{\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i, j+1) + \psi^+(i, j) + \psi^+(i+1, j)}{4} - \frac{\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i-1, j) + \psi^+(i, j)}{4}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_n = \frac{1}{4\Delta \theta} (\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i+1, j) - \psi^+(i-1, j+1) - \psi^+(i-1, j))$$

Donc

$$F_n = \frac{1}{4} \left(\begin{array}{c} \psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i+1, j) - \psi^+(i-1, j+1) \\ -\psi^+(i-1, j) \end{array} \right) \quad (3.25c)$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right)_s = \frac{\psi^+ \left(\frac{i+1}{2}, \frac{j-1}{2} \right) - \psi^+ \left(\frac{i-1}{2}, \frac{j-1}{2} \right)}{\Delta \eta}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right)_s = \frac{\frac{1}{\Delta \theta} \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i+1, j-1) + \psi^+(i, j) + \psi^+(i, j-1)}{4} - \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i-1, j) + \psi^+(i-1, j-1) + \psi^+(i, j-1)}{4}}{4}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right)_s = \frac{1}{4\Delta \theta} (\psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i, j+1) - \psi^+(i, j-1) - \psi^+(i-1, j-1))$$

Donc

$$F_s = \frac{1}{4} \left(\begin{array}{c} \psi^+(i-1, j-1) + \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i+1, j-1) \\ -\psi^+(i+1, j) \end{array} \right) \quad (3.25d)$$

Comme nous l'avons montré précédemment dans le tableau 3.1, le coefficient Γ_ϕ prend la valeur 1. En portant cette valeur dans le système (3.20), les coefficients s'écrivent :

$$\left. \begin{array}{l} D_e = D_w = \frac{\Delta \eta}{\Delta \theta} \\ D_s = D_n = \frac{\Delta \theta}{\Delta \eta} \end{array} \right\} \quad (3.26)$$

Par suite, les nombres de Péclet dans le système (3.19) deviennent :

$$\left. \begin{array}{l} P_e = F_e \frac{\Delta \theta}{\Delta \eta} \\ P_w = F_w \frac{\Delta \theta}{\Delta \eta} \\ P_n = F_n \frac{\Delta \eta}{\Delta \theta} \\ P_s = F_s \frac{\Delta \eta}{\Delta \theta} \end{array} \right\} \quad (3.27)$$

Pour homogénéiser les notations dans l'équation (3.21) on écrit P, E, W, N et S respectivement (i,j), (i+1,j), (i-1,j), (i,j+1), (i,j-1).

Les coefficients a_E , a_W , a_N et a_S , sont pris au nœud (i,j) L'équation (3.21) peut finalement s'écrire sous la forme :

$$a_p T^+(i,j) = a_E T^+(i+1,j+1) + a_W T^+(i-1,j) + a_S T^+(i,j+1) + a_N T^+(i,j-1) + S_T \quad (3.28)$$

3.4 Discrétisation des conditions aux limites :

Pour satisfaire les conditions imposées à la température des parois, on doit avoir :

- Sur la paroi chaude ($i=1$) :

$$T^+(1,j)=1$$

- Sur la paroi froide ($i=NI$) :

$$T^+(NI,J)=0$$

3.5 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement :

L'équation (2.22) étant de type elliptique comme nous l'avons cité plus haut, c'est pourquoi pour la discrétiser nous utiliserons les différences centrées:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{i,j}}{\Delta \theta^2} + \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta \eta^2} \quad (3.29)$$

Donc :

$$\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2} = \frac{\psi^+(i+1,j) + \psi^+(i-1,j) - 2\psi^+(i,j)}{\Delta \theta^2} + \frac{\psi^+(i,j+1) + \psi^+(i,j-1) - 2\psi^+(i,j)}{\Delta \eta^2} \quad (3.30)$$

)

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right|_{i,j} = \frac{T^+(i+1,j) - T^+(i-1,j)}{2\Delta \eta} \quad (3.31a)$$

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right|_{i,j} = \frac{T^+(i,j+1) - T^+(i,j-1)}{2\Delta \theta} \quad (3.31b)$$

Les équations (2.22), (3.30), (3.31a) et (3.31b) nous donnent :

$$\frac{\psi^+(i+1,j) + \psi^+(i-1,j) - 2\psi^+(i,j)}{\Delta \theta^2} + \frac{\psi^+(i,j+1) + \psi^+(i,j-1) - 2\psi^+(i,j)}{\Delta \eta^2} = Ra_m H^* \quad (3.32)$$

$$[\cos \alpha F(\eta, \theta) - \sin \alpha F(\eta, \theta)] \frac{T^+(i,j+1) - T^+(i,j-1)}{2\Delta \theta} - [\sin \alpha F(\eta, \theta) - \cos \alpha F(\eta, \theta)] \frac{T^+(i+1,j) - T^+(i-1,j)}{2\Delta \eta}$$

Donc:

$$\psi^+(i,j) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta \theta^2} + \frac{1}{\Delta \eta^2} \right)^{-1} * \frac{\psi^+(i+1,j) + \psi^+(i-1,j)}{\Delta \theta^2} + \frac{\psi^+(i,j+1) + \psi^+(i,j-1)}{\Delta \eta^2} - Ra_m H^* \quad (3.33)$$

$$[\cos \alpha F(\eta, \theta) - \sin \alpha F(\eta, \theta)] \frac{T^+(i,j+1) - T^+(i,j-1)}{2\Delta \theta} - [\sin \alpha F(\eta, \theta) - \cos \alpha F(\eta, \theta)] \frac{T^+(i+1,j) - T^+(i-1,j)}{2\Delta \eta}$$

3.6 Discrétisation des conditions aux limites :

Les conditions aux limites sont :

- Sur la paroi chaude ($i = 1$) : $\Psi^+(1, j) = 0$
- Sur la paroi froide ($j = NN$) : $\Psi^+(NI, j) = 0$

3.7 Discrétisation des composantes de la vitesse :

Nous utilisons aussi les différences centrées aussi, pour obtenir une expression discrétisée des composantes adimensionnelles et de la vitesse, ce qui nous donne :

$$V_{\eta}^+(i, j) = \frac{1}{H(i, j)} \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \Big|_{i, j} = \frac{1}{H(i, j)} \left[\frac{\psi^+(i+1, j) - \psi^+(i-1, j)}{2\Delta\theta} \right] \quad (3.34)$$

$$V_{\theta}^+(i, j) = \frac{1}{H(i, j)} \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \Big|_{i, j} = \frac{1}{H(i, j)} \left[\frac{\psi^+(i, j+1) - \psi^+(i, j-1)}{2\Delta\eta} \right] \quad (3.35)$$

$\forall (i, j) \ i \neq 1 ; i \neq NI ;$

$j \neq 1 ; j \neq NN$

3.8 Processus du calcul :

Pour résoudre le système d'équations (3.28) et (3.33) nous utilisons la méthode proposée par E.F. NOGOTOV [23].

Ces équations peuvent se mettre sous la forme suivante adaptée précisément à une résolution à l'aide d'une méthode itérative à coefficients de relaxation :

$$T^{n+1}(i, j) = (1 - G_T)T^n(i, j) + \left(\frac{G_T}{a_p}\right) * [a_E T^n(i+1, j) + a_w T^{n+1}(i-1, j) + a_s T^n(i, j-1) + a_E T^n(i, j+1)] \quad (3.36)$$

$$\psi^{n+1}(i, j) = (1 - G_P)\psi^n(i, j) + \frac{G_P}{2} \left(\frac{1}{\Delta\theta^2} + \frac{1}{\Delta\eta^2}\right)^{-1} * \frac{\psi^n(i+1, j) + \psi^{n+1}(i-1, j)}{\Delta\theta^2} + \frac{\psi^n(i, j+1) + \psi^{n+1}(i, j-1)}{\Delta\eta^2} - Ra_m H * [\cos \alpha F(\eta, \theta) - \sin \alpha F(\eta, \theta)] \frac{T^{n+1}(i, j+1) - T^{n+1}(i, j-1)}{2\Delta\theta} - [\sin \alpha F(\eta, \theta) - \cos \alpha F(\eta, \theta)] \frac{T^{n+1}(i+1, j) - T^{n+1}(i-1, j)}{2\Delta\eta} \quad (3.37)$$

n: l'ordre d'intégration.

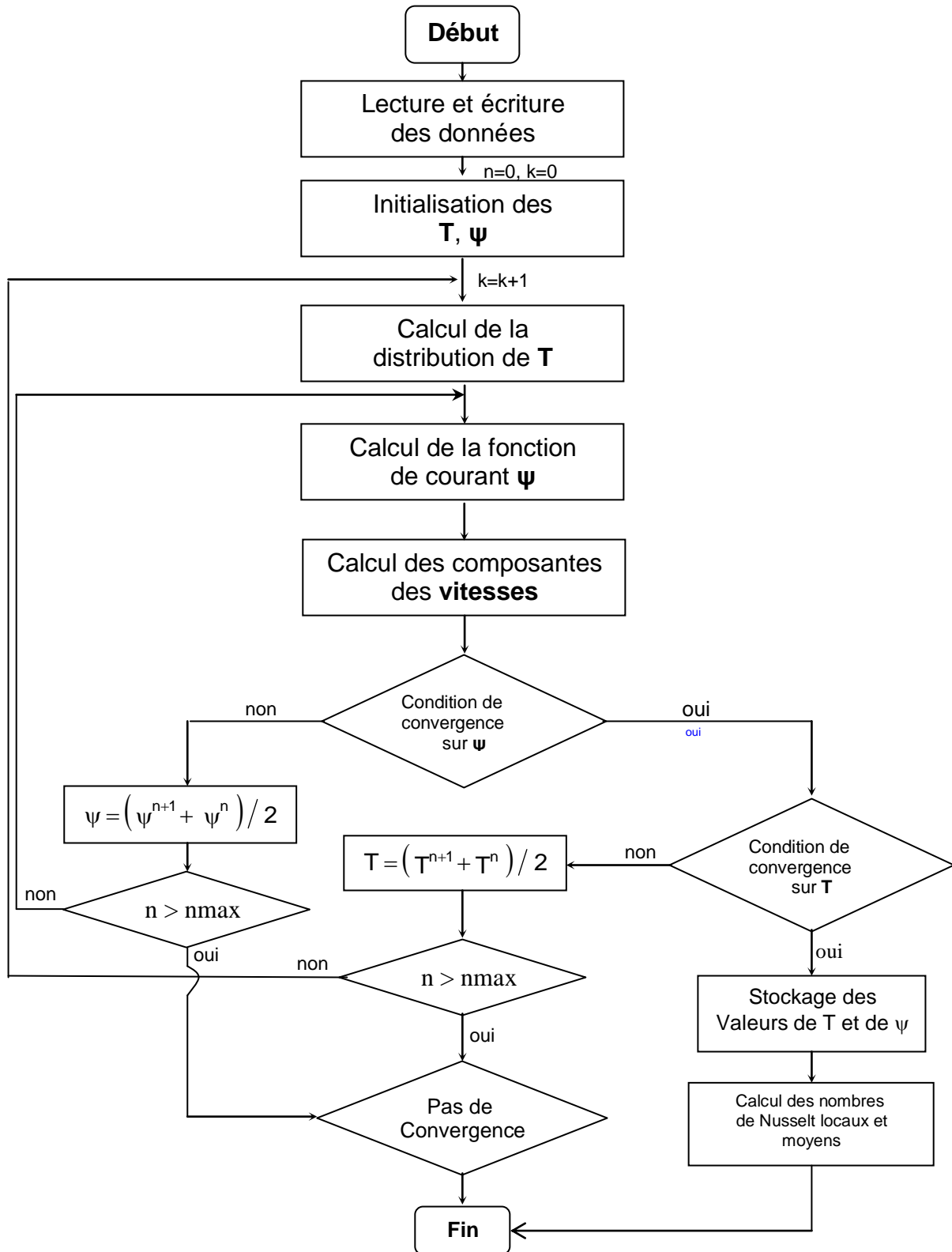
Les paramètres G_T et G_P sont les "facteurs de relaxation". Leurs valeurs dépendent, en principe, de la valeur du nombre de Darcy-Rayleigh modifié (Ra_m).

Nous résolvons le système d'équations (3.36) et (3.37) de la façon suivante :

1. Initialisation des valeurs de chaque variable au sein du maillage.
2. Calcul de la distribution de la température.
3. Calcul de la distribution de la fonction de courant.
4. Le processus itératif répété jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de changement significatif de la valeur de ψ par rapport au critère de convergence suivant :

$$\left| \frac{\max \psi^{n+1} - \max \psi^n}{\max \psi^{n+1}} \right| \leq 10^{-8}$$

5. Le même critère est utilisé pour la température.
6. Calcul des composantes de la vitesse.
7. Stockage des valeurs de T et ψ .



Chapitre 4 :

Résultats et discussions

Introduction :

Dans notre étude, trois paramètres influencent le profil de la fonction de courant et de la température dans l'espace annulaire elliptique, en maintenant le nombre de Prandtl constant. Ces paramètres sont : le facteur de géométrie (les excentricités des parois interne e_1 et externe e_2), le nombre de Rayleigh modifié Ra_m et l'angle d'inclinaison α .

Dans cette optique, nous étudions dans ce chapitre cette influence en faisant varier la valeur de Ra_m , e_1 , e_2 et l'angle α , comme suit :

- l'excentricité : ($e_1=0.99999$, $e_2=0.75$), ($e_1=0.9$, $e_2=0.75$), ($e_1=0.75$, $e_2=0.5$) et ($e_1=0.55$, $e_2=0.5$).
- l'angle α : 0° , 45° et 90° .
- Le Rayleigh modifié Ra_m : 10, 30, 50, 70, 100, 300 et 500.

Rappelons nos conditions de travail :

- Paroi interne chaude à $T=T_c$.
- Paroi externe froide à $T=T_f$.

4.1 Etude du maillage :

Dans cette étude, nous avons utilisé plusieurs maillages pour les configurations suivantes : ($\alpha=0^\circ$, $\alpha=45^\circ$ et $\alpha=90^\circ$, $e_1=0.75$ et $e_2=0.5$ Pour $Ra_m=10$, $Ra_m=30$, $Ra_m=50$, $Ra_m=70$, $Ra_m=100$, $Ra_m=300$ et $Ra_m=500$), pour voir leur effet sur les résultats, les figures (4.1a) (4.1b) (4.1c) (4.2a) (4.2b) et (4.2c) illustrent la variation du nombre de Nusselt moyen et de la valeur maximale de la fonction de courant, en fonction du nombre de nœuds, et nous a permis de choisir le maillage (101x113).

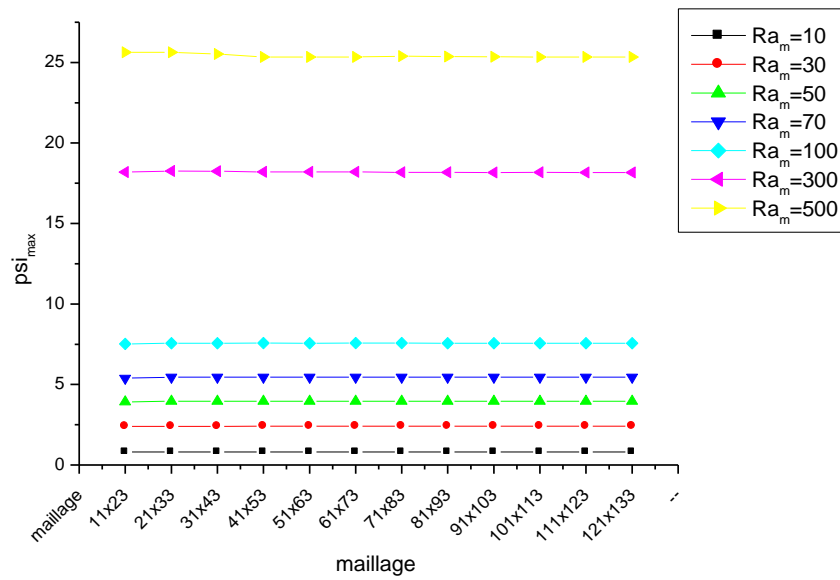


Fig 4.1a : Variation de la valeur de la fonction de courant maximale en fonction du maillage $e_1=0.75$, $e_2=0.5$ et $\alpha=0^\circ$.

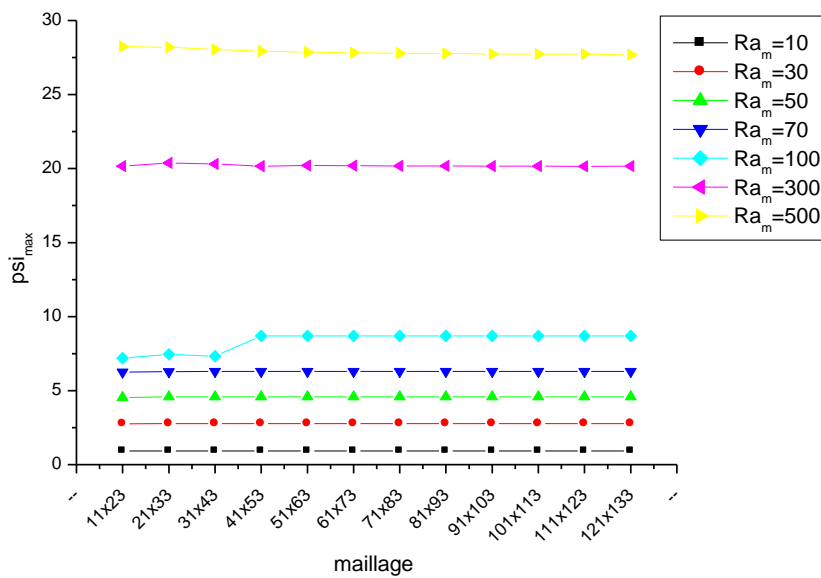


Fig 4.1b : Variation de la valeur de la fonction de courant maximale en fonction du maillage $e_1=0.75$, $e_2=0.5$ et $\alpha=45^\circ$.

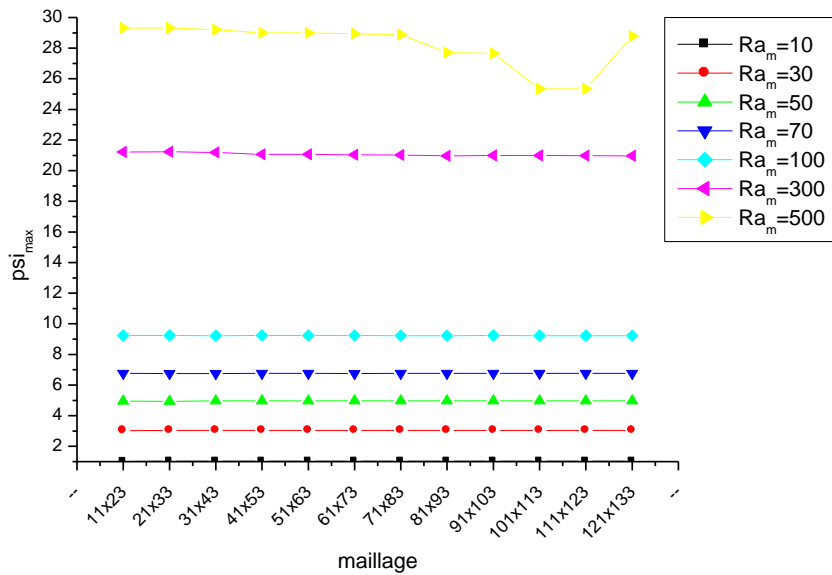


Fig 4.1c : Variation de la valeur de la fonction de courant maximale en fonction du maillage $e_1=0.75$, $e_2=0.5$ et $\alpha=90^\circ$.

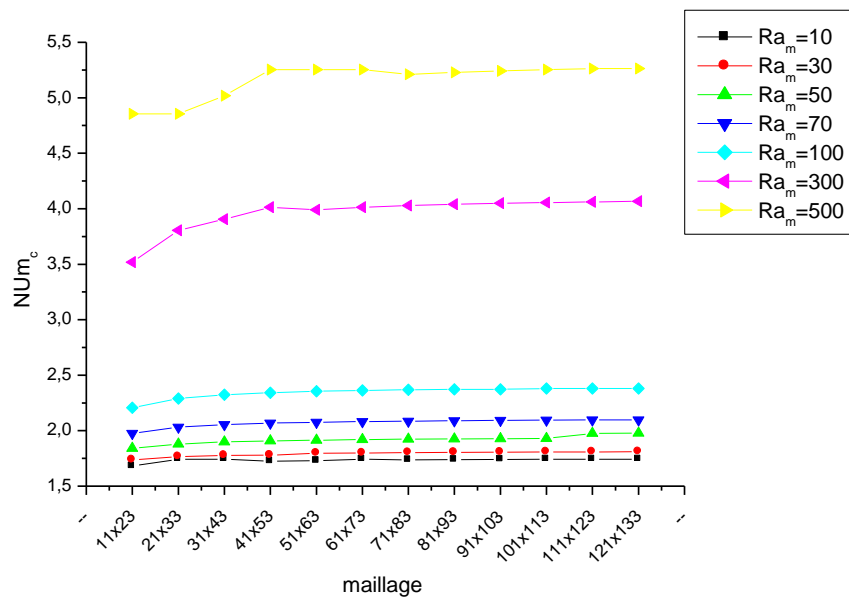


Fig 4.2a: Variation de nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude en fonction du maillage $e_1=0.75$, $e_2=0.5$ et $\alpha=0^\circ$.

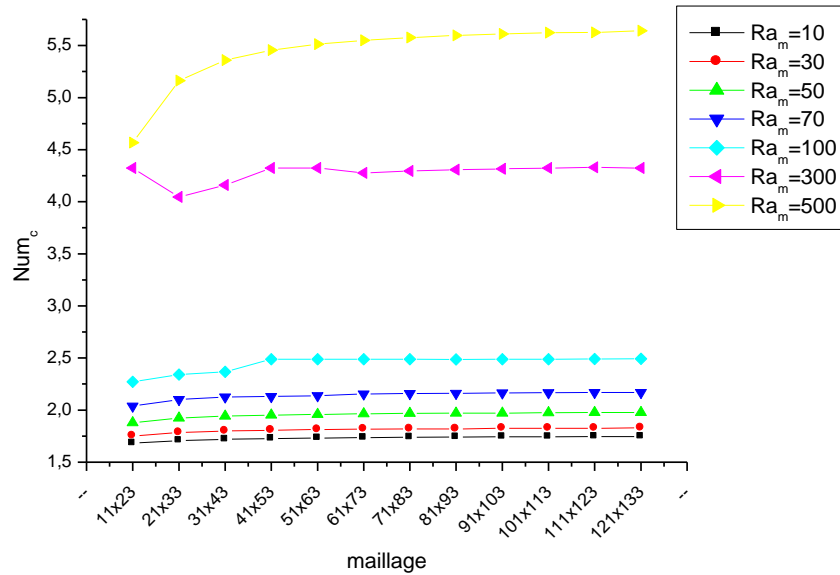


Fig 4.2b : Variation de nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude en fonction du maillage $e_1=0.75$, $e_2=0.5$ et $\alpha=45^\circ$.

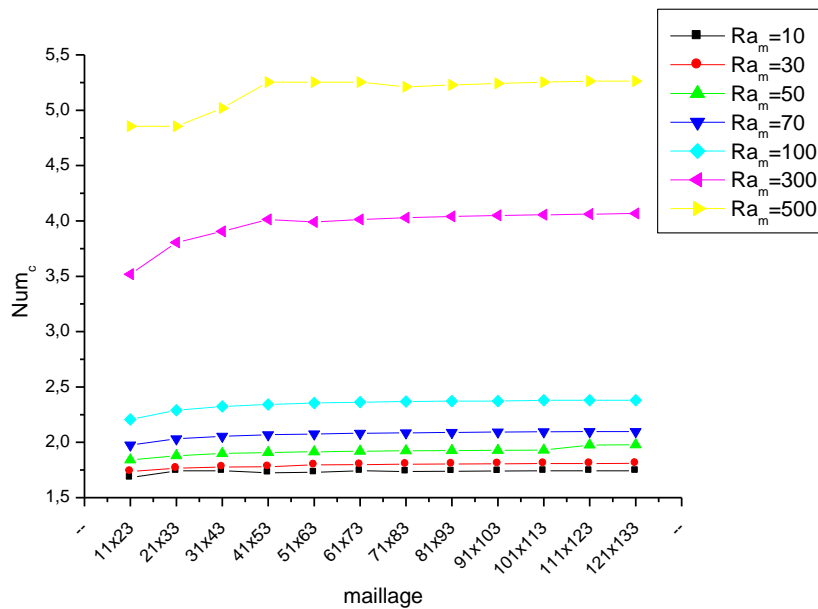


Fig 4.2c : Variation de nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude en fonction du maillage $e_1=0.75$, $e_2=0.5$ et $\alpha=90^\circ$.

4.3 Validation du code de calcul :

Mota, Saatdjian et Lam [8] ont élaboré une étude numérique sur la convection naturelle dans l'espace annulaire elliptique compris entre deux cylindres concentriques horizontaux dont le rapport des rayons hydrauliques a été pris égal à 2 (dans cette configuration ils ont validé leurs résultats avec ceux obtenus expérimentalement par Caltagirone [3]). Les figures (4.3a) et (4.3b) présentent les isocourants et les isothermes obtenus par notre code de calcul en utilisant les mêmes paramètres que ceux utilisés dans la référence [8]. En comparant, ces figures avec les figures (3.a) et (8.b) de la référence citée, nous remarquons que quantitativement nos résultats et les leurs sont en bon accord

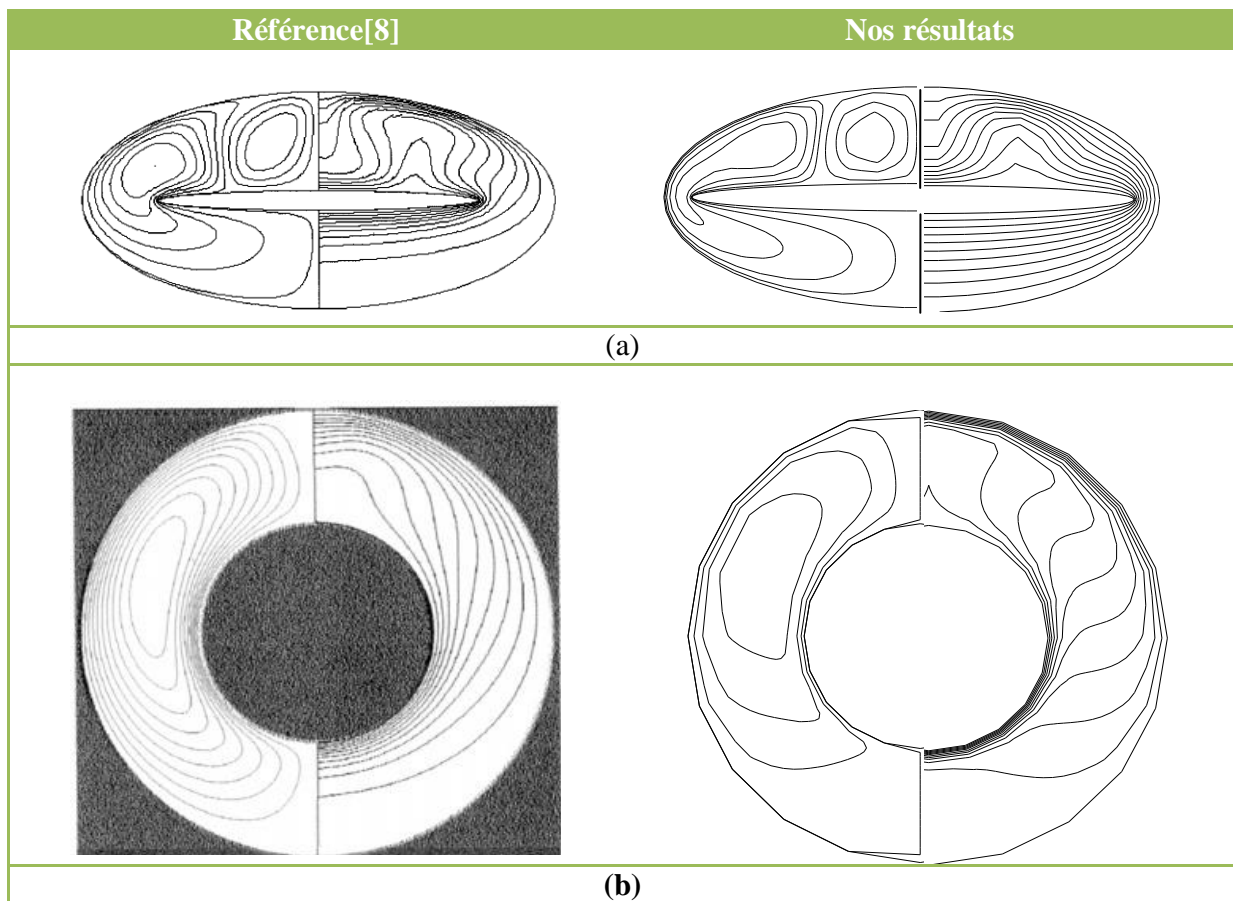


Fig4.3 Isothermes et isocourants : (a) $e_1=0.998$ $e_2=0.89$ pour $Ra_m=200$, (b) $e_1=0.14$ $e_2=0.07$ pour $Ra_m=100$.

4.4 Influence du nombre de Darcy –Rayleigh modifié:

4.4.1 Les isothermes et les isocourants :

Les figures (4.4a-4.7g) représentent les isothermes et les lignes de courant pour différentes valeurs de Darcy–Rayleigh modifié quand $\alpha=0$.

Ces isothermes et ces lignes de courants nous montrent que nous avons deux types d'écoulement selon la valeur de Ra_m : écoulement monocellulaire et multicellulaire. Ces isothermes et ces isocourants gardent toujours une symétrie par rapport au plan vertical fictif médian.

- **Écoulement monocellulaire :**

Pour les deux configurations ($e_1=0.99999$, $e_2=0.75$) ($e_1=0.75$, $e_2=0.5$) Pour $Ra_m = [10,500]$, la configuration ($e_1=0.55$, $e_2=0.5$) pour $Ra_m = [10,300]$ et la configuration ($e_1=0.9$, $e_2=0.75$) pour $Ra_m = [10,100]$, les figures (4.4a-4.4g) (4.5a-4.5g) (4.6a-4.6f) et (4.7a -4.7e) montrent que le régime de l'écoulement est monocellulaire :

- **Les lignes de courants:** L'écoulement s'organise en deux cellules symétriques qui tournent très lentement dans des sens opposés : la cellule gauche tourne dans le sens trigonométrique par contre la cellule droite tourne dans le sens horaire (les particules de fluide au contact de la paroi chaude s'échauffent et deviennent moins denses du fait de sa dilatation thermique et remontent sous l'action de la poussée d'Archimède, le fluide échange sa chaleur, se refroidit et s'alourdit. Il redescend sous l'effet de la pesanteur)
- **Les isothermes:** Ce sont des courbes presque parallèles et épousent bien le profil de la paroi chaude : la distribution des températures est simplement décroissante de la paroi chaude vers la paroi froide.

On peut dire que les transferts thermiques au niveau de la paroi chauffée sont des transferts quasi–conductifs, car les champs des vitesses sont différents de zéro. Les valeurs de la fonction de courant qui sont données sur ces figures restent très petites.

Les figures (4.4e) (4.4g) ($e_1=0.9999$ et $e_2=0.75$) pour $Ra_m = 300, 500$ et la figure (4.5g) ($e_1=0.75$ et $e_2=0.5$) montrent que les lignes isothermes se modifient et finissent par adopter la forme d'un champignon. La distribution de la température est décroissante de la paroi chaude vers la paroi froide. Le sens de la déformation des isothermes est conforme au sens de rotation des lignes de courant. En régime laminaire, on peut dire que, sous l'action du mouvement des particules qui décollent de la paroi chaude au niveau de l'axe de symétrie, les lignes isothermes s'éloignent de la paroi à cet endroit. Les valeurs des fonctions de courant

augmentent ce qui signifie que la convection s'intensifie ($\Psi_{\max}(\text{Ra}_m=500)=25.32$ dans le cas de $e_1=0.75$ et $e_2=0.5$).

La convection naturelle s'intensifie avec l'augmentation du nombre de Rayleigh-Darcy modifié cela apparait dans les figures (4.4f) et (4.4g) pour la configuration ($e_1=0.9999$ et $e_2=0.75$) : les deux vortex deviennent plus importants et leurs centres se déplacent vers le haut de l'enceinte pour se rapprocher davantage du plan fictif médian.

- **Ecoulement multicellulaire :**

Les figures (4.7f) et (4.7g) pour la configuration ($e_1=0.9$ et $e_2=0.75$) pour $\text{Ra}_m=150$ et $\text{Ra}_m=200$ montrent que l'augmentation du nombre de Rayleigh modifié traduit une intensification de la convection libre, qui a permis l'apparition d'une bifurcation donnant naissance à deux cellules supplémentaires tournant dans des sens opposés et les figures (4.7h) et (4.7i) ,pour des nombres de Rayleigh-Darcy modifiés de 300 et 500 pour la même configuration ($e_1=0.9$ et $e_2=0.75$) et la figure (4.6g) pour la configuration ($e_1=0.55$ et $e_2=0.5$) nous avons deux bifurcations avec quatre cellules tournant chacune dans le sens contraire de sa cellule voisine .L'augmentation de nombre Rayleigh-Darcy modifié, nous a permis donc de passer à un autre régime d'écoulement, qui est le régime multicellulaire, avec l'apparition de ces bifurcations dans la partie supérieure de notre espace annulaire ,qui est une zone d'instabilités aux grands nombres de Rayleigh-Darcy modifié.

Ces figures montrent aussi, que le fluide est pratiquement immobile, dans la partie basse de notre enceinte.

Les lignes isothermes se déforment et s'enfoncent là où il y a présence de deux tourbillons contra-rotatifs.

Notons aussi que les lignes isothermes, de toutes les figures citées plus haut, ont été tracées avec un $\Delta T^*=0.1$.

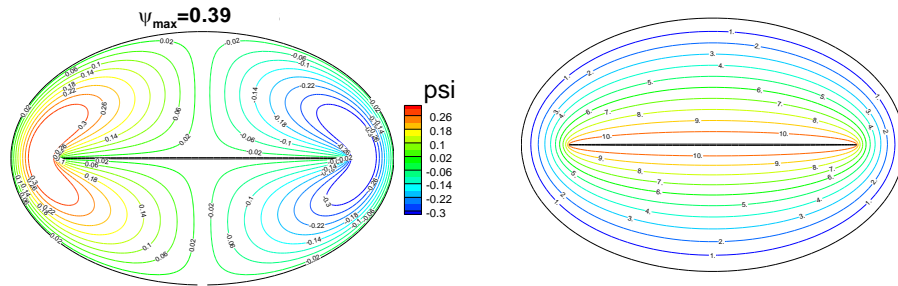


Fig 4.4a. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.99999$, $e_2=0.75$, $Ra_m=10$ et $\alpha=0^\circ$.

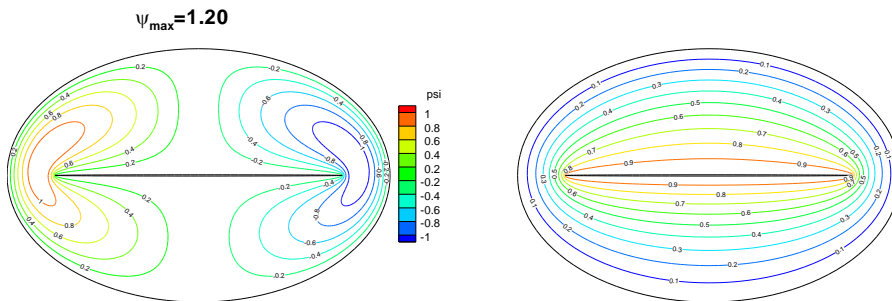


Fig 4.4b. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.99999$, $e_2=0.75$, $Ra_m=30$ et $\alpha=0^\circ$.

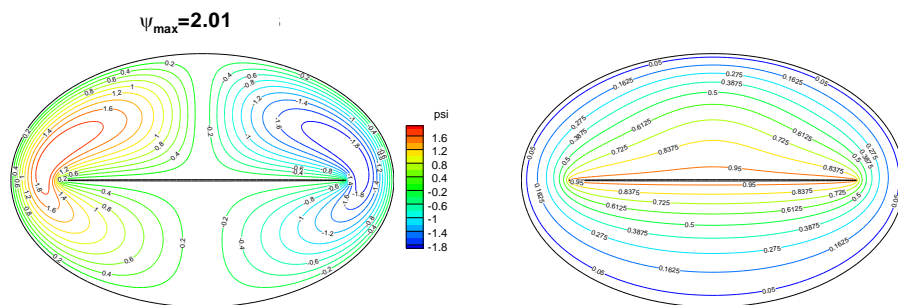


Fig 4.4c. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.99999$, $e_2=0.75$, $Ra_m=50$ et $\alpha=0^\circ$.

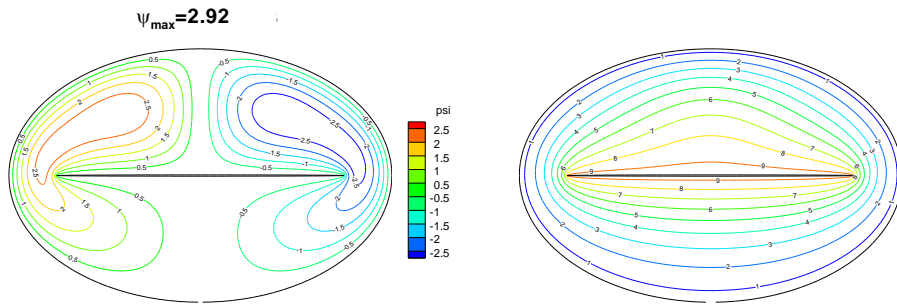


Fig4.4d. Isothermes et isocourants $e_1=0.99999$, $e_2=0.75$; $Ra_m=70$ et $\alpha=0^\circ$.

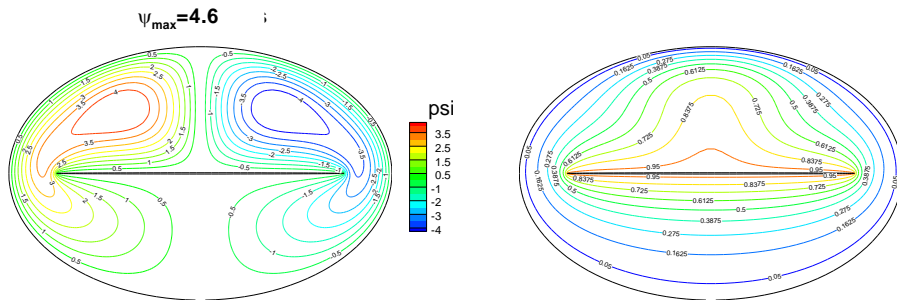


Fig 4.4e. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.99999$, $e_2=0.70$, $Ra_m=100$ et $\alpha=0^\circ$.

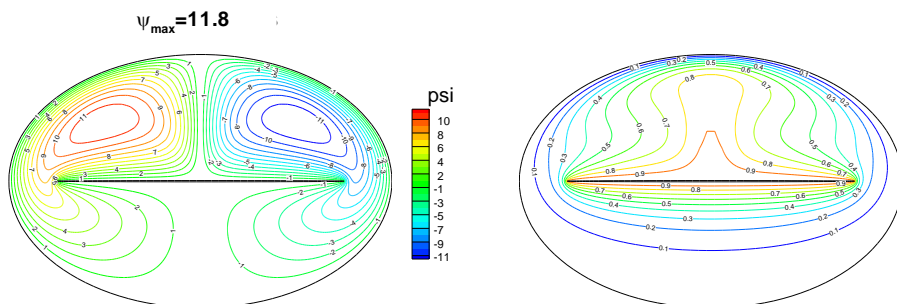


Fig 4.4f. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.99999$, $e_2=0.75$, $Ra_m=300$ et $\alpha=0^\circ$.

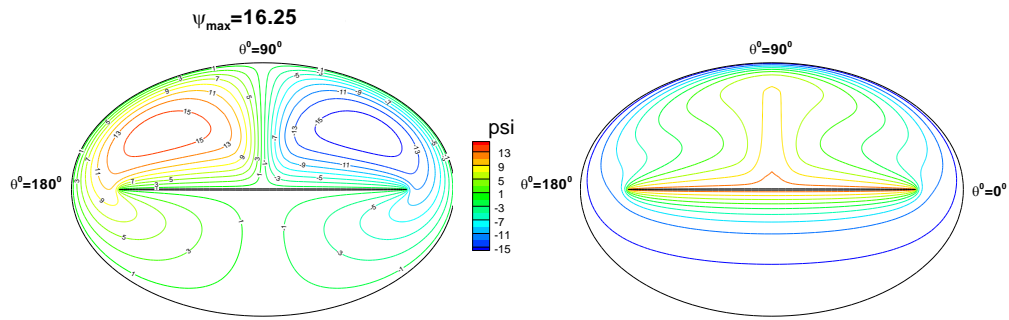


Fig 4.4g. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.99999$, $e_2=0.75$, $Ra_m=500$ et $\alpha=0^\circ$.

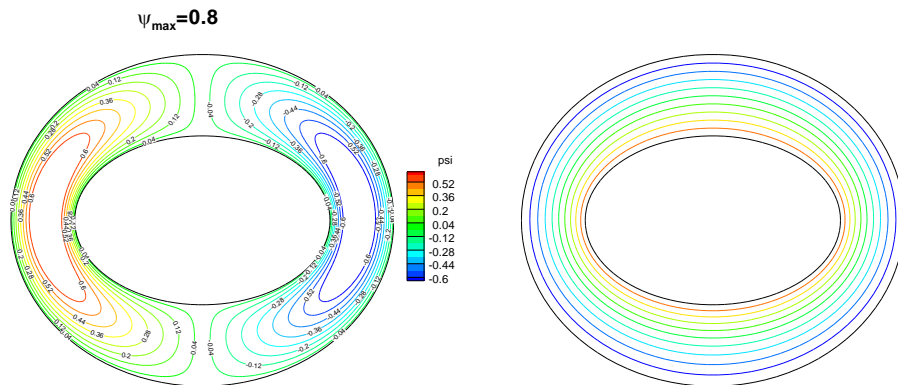


Fig 4.5a. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.75$, $e_2=0.5$, $\alpha=0$, $Ra_m=10$ et $\alpha=0^\circ$.

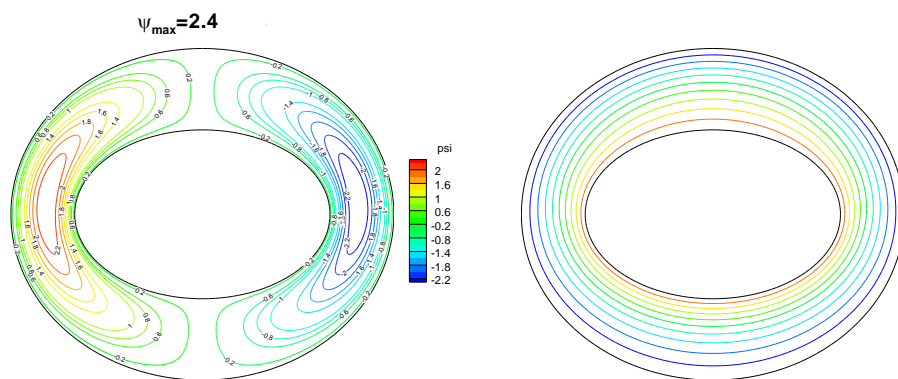


Fig 4.5b. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.75$, $e_2=0.5$, $\alpha=0^\circ$ et $Ra_m=30$.

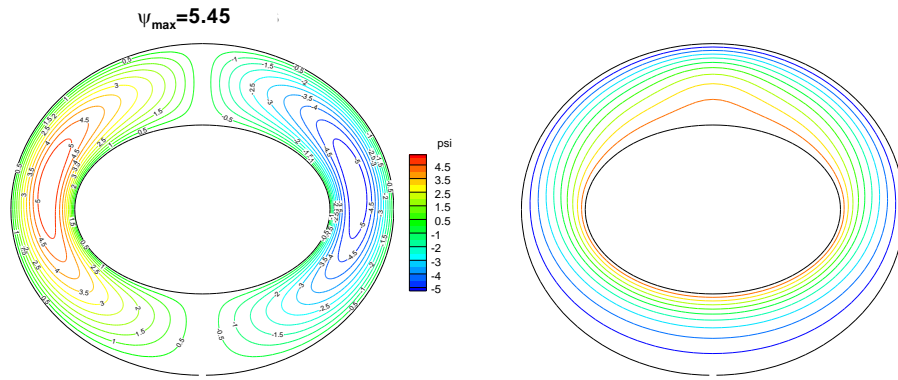


Fig 4.5c. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.75$, $e_2=0.5$, $\alpha=0^\circ$ et $Ra_m=50$.

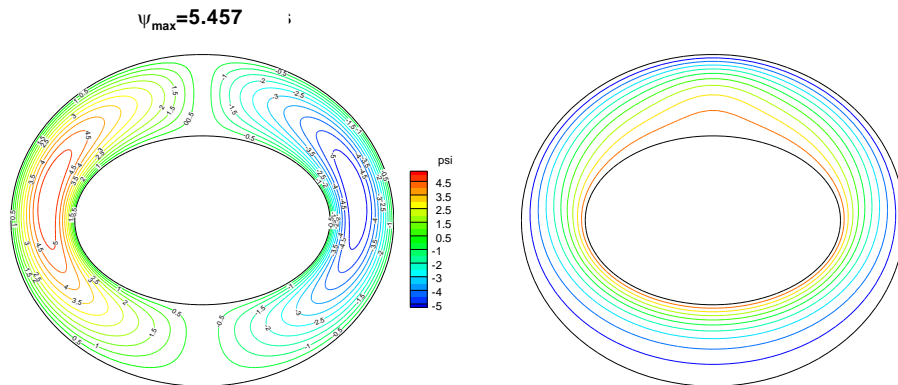


Fig 4.5d. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.75$, $e_2=0.5$, $\alpha=0^\circ$ et $Ra_m=70$.

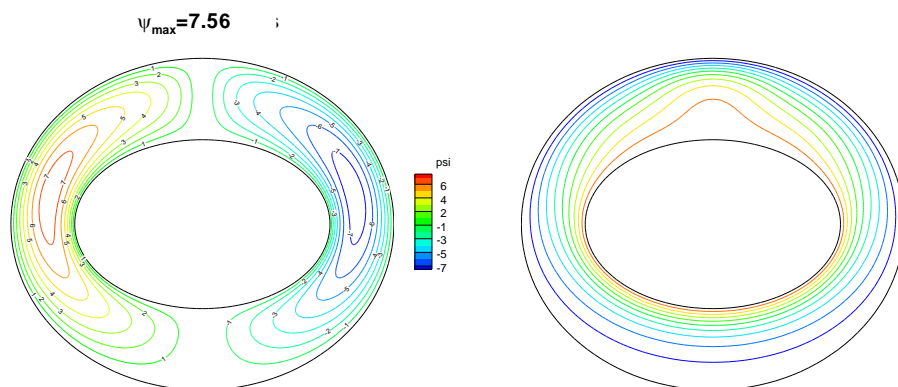


Fig 4.5e. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.75$, $e_2=0.5$, $\alpha=0^\circ$ et $Ra_m=100$.

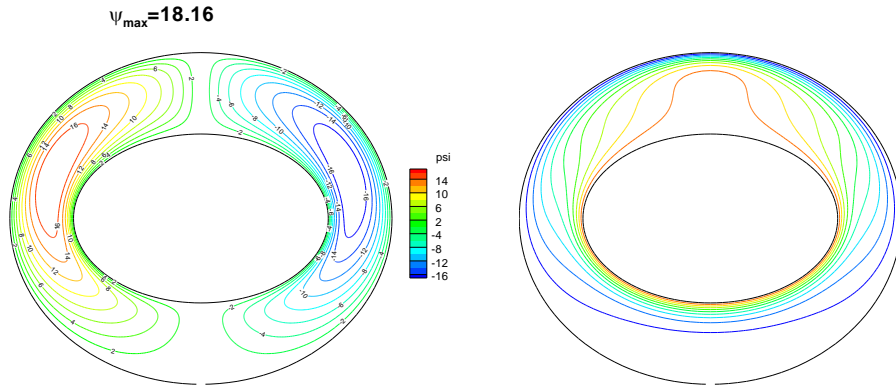


Fig 4.5f. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.75$, $e_2=0.5$, $\alpha=0^\circ$ et $Ra_m=300$.

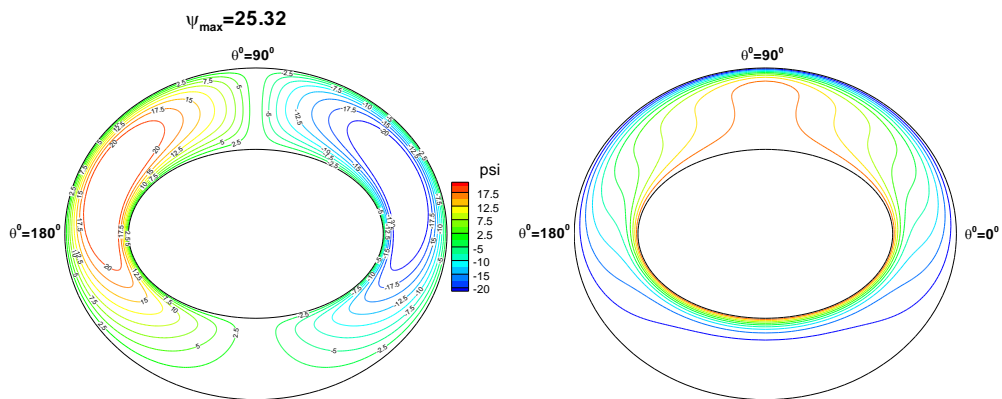


Fig 4.5g. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.75$, $e_2=0.5$, $Ra_m=500$ et $\alpha=0^\circ$.

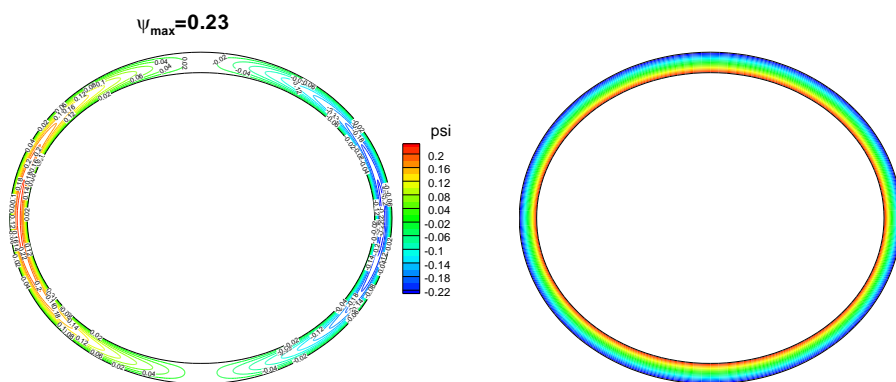


Fig 4.6a. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.55$, $e_2=0.5$, $\alpha=0^\circ$ et $Ra_m=10$.

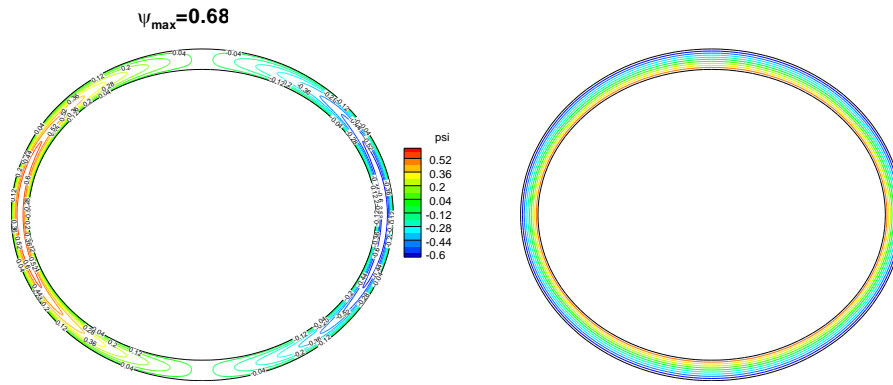


Fig 4.6b. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.55$, $e_2=0.5$, $\alpha=0^\circ$ et $Ra_m=30$.

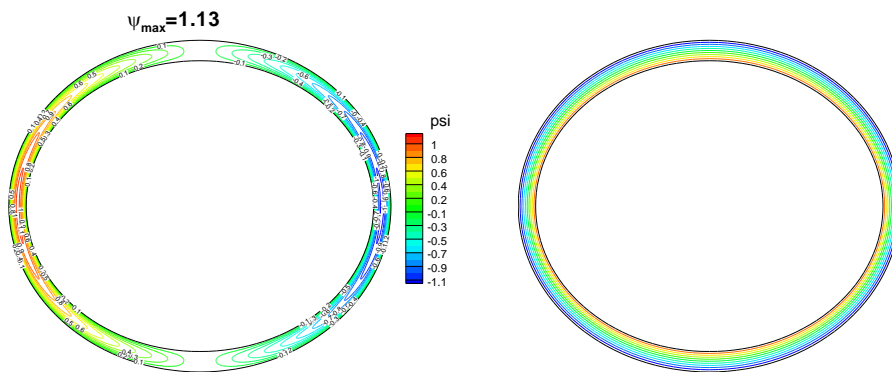


Fig 4.6c. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.55$, $e_2=0.5$, $\alpha=0^\circ$ et $Ra_m=50$.

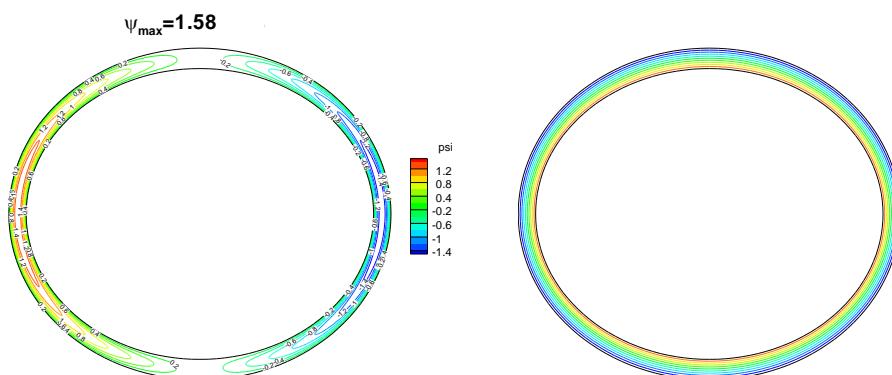


Fig 4.6d. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.55$, $e_2=0.5$, $\alpha=0^\circ$ et $Ra_m=70$.

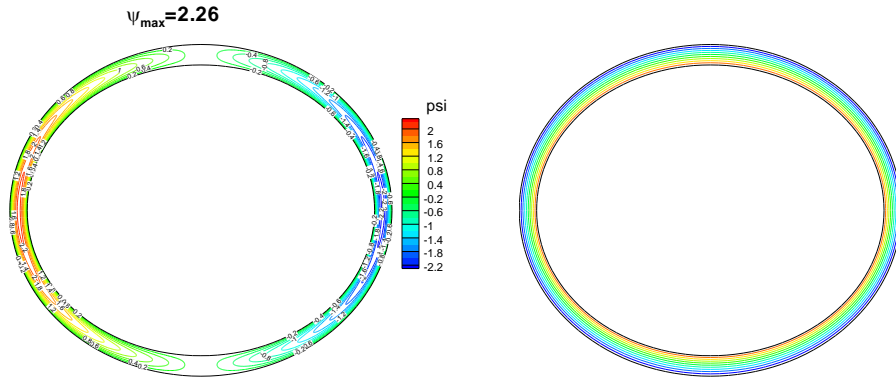


Fig 4.6e. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.55$, $e_2=0.5$, $\alpha=0^\circ$ et $Ra_m=100$.

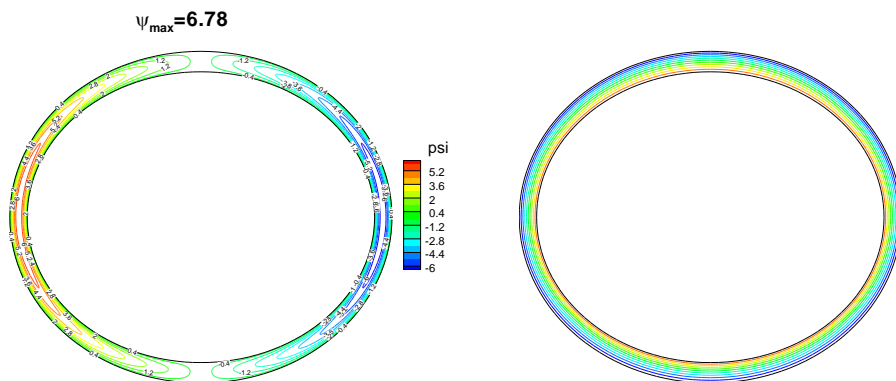


Fig 4.6f. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.55$, $e_2=0.5$, $\alpha=0^\circ$ et $Ra_m=300$.

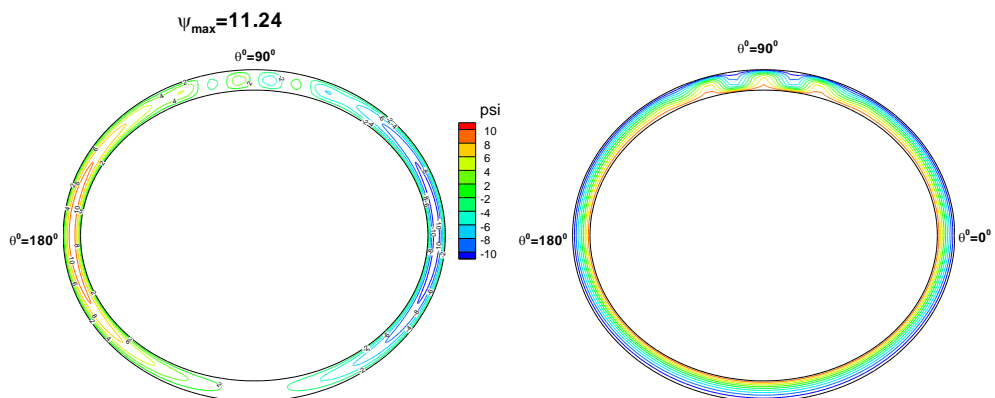


Fig 4.6g. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.55$, $e_2=0.5$, $\alpha=0^\circ$ et $Ra_m=500$.

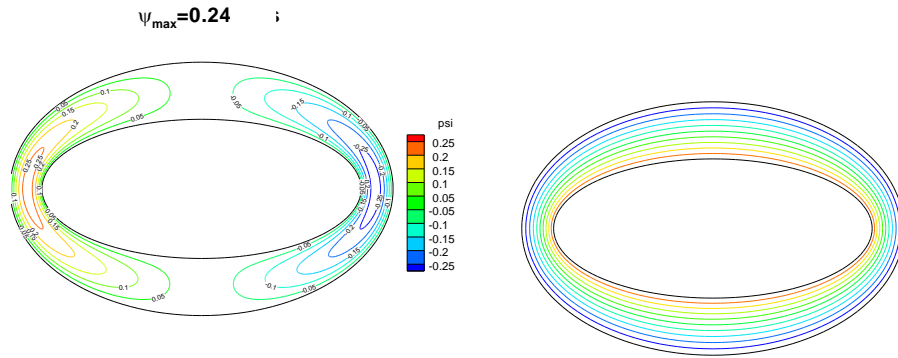


Fig 4.7a. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.9$, $e_2=0.75$, $\alpha=0^\circ$ et $Ra_m=10$.

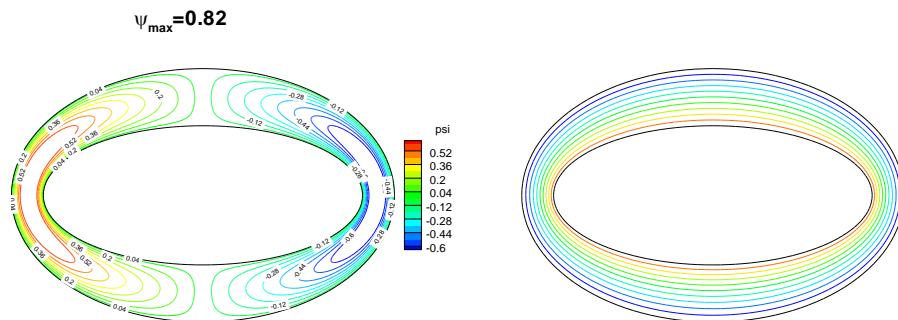


Fig 4.7b. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.9$, $e_2=0.75$, $\alpha=0^\circ$ et $Ra_m=30$.

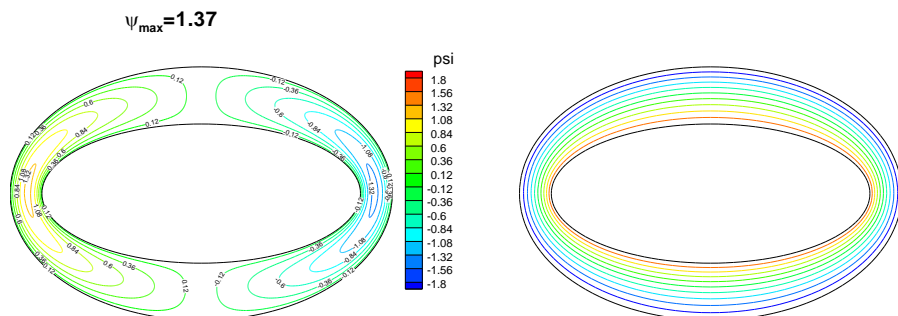


Fig 4.7c. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.9$, $e_2=0.75$, $\alpha=0^\circ$ et $Ra_m=50$.

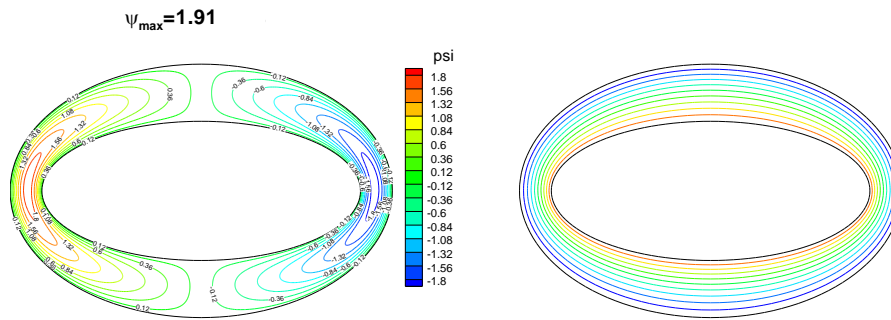


Fig 4.7d. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.9$, $e_2=0.75$, $\alpha=0^\circ$ et $Ra_m=70$.

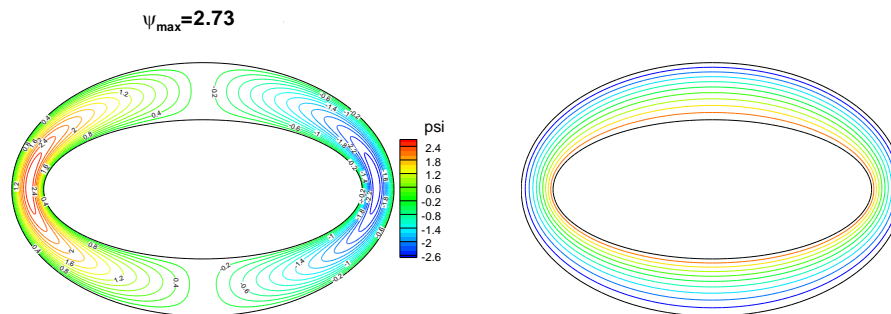


Fig 4.7e. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.9$, $e_2=0.75$, $\alpha=0^\circ$ et $Ra_m=100$.

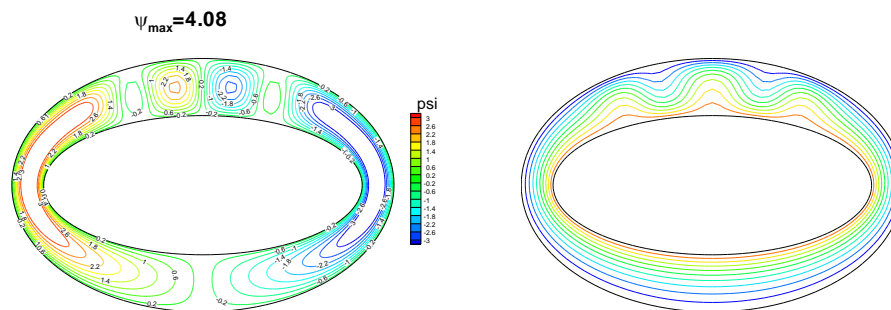


Fig 4.7f. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.9$, $e_2=0.75$, $\alpha=0^\circ$ et $Ra_m=150$.

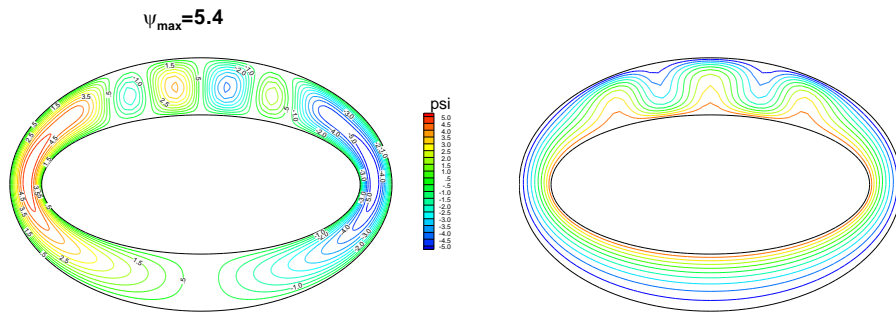


Fig 4.7g. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.9$, $e_2=0.75$, $\alpha=0^\circ$ et $Ra_m=200$.

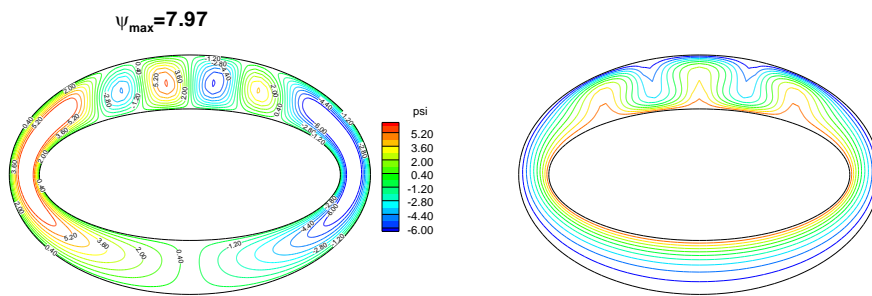


Fig 4.7h. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.9$, $e_2=0.75$, $\alpha=0^\circ$ et $Ra_m=300$.

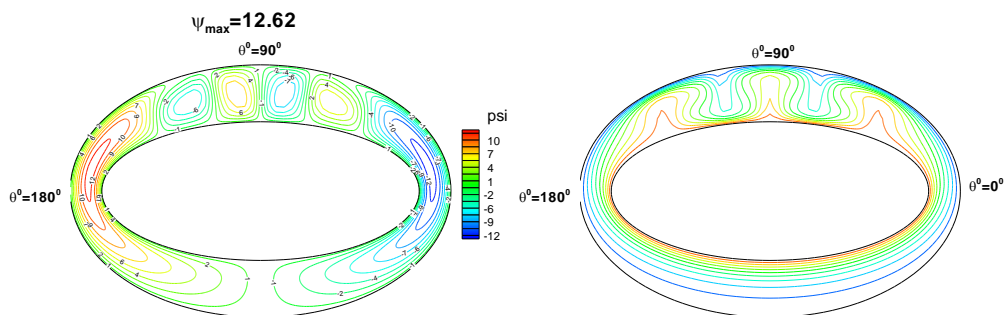


Fig 4.7i. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.9$, $e_2=0.75$, $\alpha=0^\circ$ et $Ra_m=500$.

4.4.2 Nombre de Nusselt local :

Nous déterminons les nombres de Nusselt locaux dont les variations le long des parois sont étroitement liées aux distributions des isothermes et des isocourants, de sorte que, qualitativement, ces variations et ces distributions peuvent souvent se déduire les unes des autres.

Un minimum traduit l'existence de deux tourbillons contra-rotatifs éloignant le fluide de la paroi, un maximum traduit, au contraire, l'existence de deux tourbillons contrarotatifs apportant du fluide vers la paroi.

4.4.2.1 Variation nombre de Nusselt local - isothermes et isocourants :

La figure (4.8) illustre les variations du nombre de Nusselt local sur la paroi interne pour la configuration ($e_1=0.9$ et $e_2=0.75$), ces variations présentent plusieurs minimums et maximums pour un nombre de Rayleigh-Darcy supérieur à 150 ce qui est traduit par un écoulement multicellulaire et un seul minimum pour un Rayleigh-Darcy modifiée inférieure à 100 indiquant un écoulement monocellulaire, ces résultats sont en conformité avec ce qui vient d'être cité précédemment.

Les figures (4.9), (4.10) et (4.11) confirment l'analogie entre la variation du nombre de Nusselt local - isothermes et isocourants pour un Ra_m de 500 pour les configurations ($e_1=0.9$ et $e_2=0.75$), ($e_1=0.55$ et $e_2=0.75$) et ($e_1=0.75$ et $e_2=0.5$).

Alors nous pouvons suivre l'évolution de l'écoulement en évaluant le Nusselt dans chaque position quel que soit l'espace annulaire étudié.

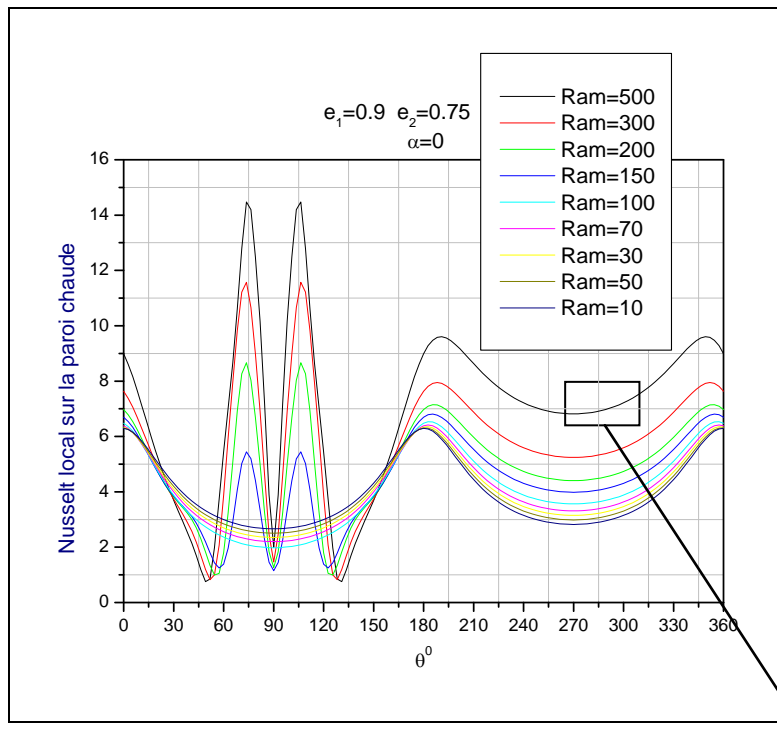


Fig.4.8a Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi interne chaude.

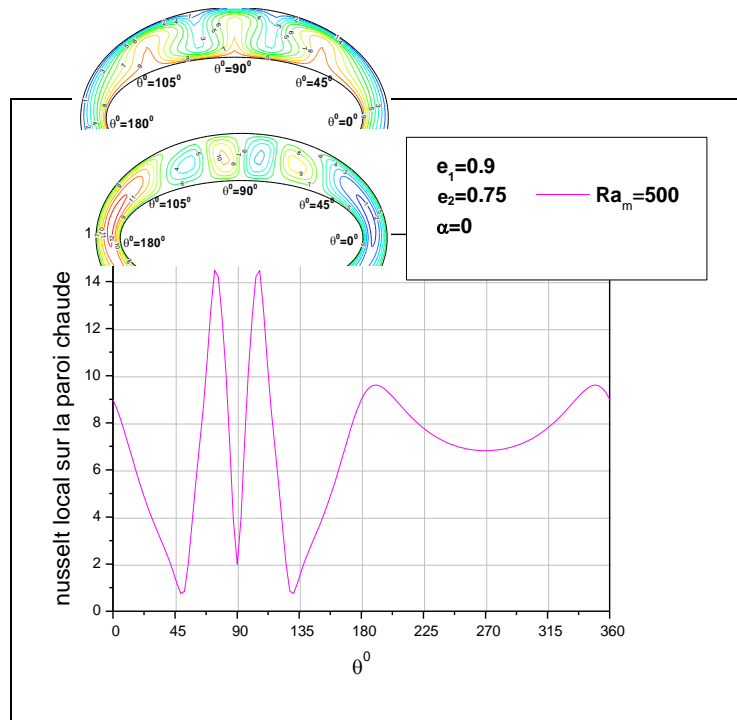


Fig.4.8b Analogie entre la variation du nombre de Nusselt local - isothermes et isocourants.

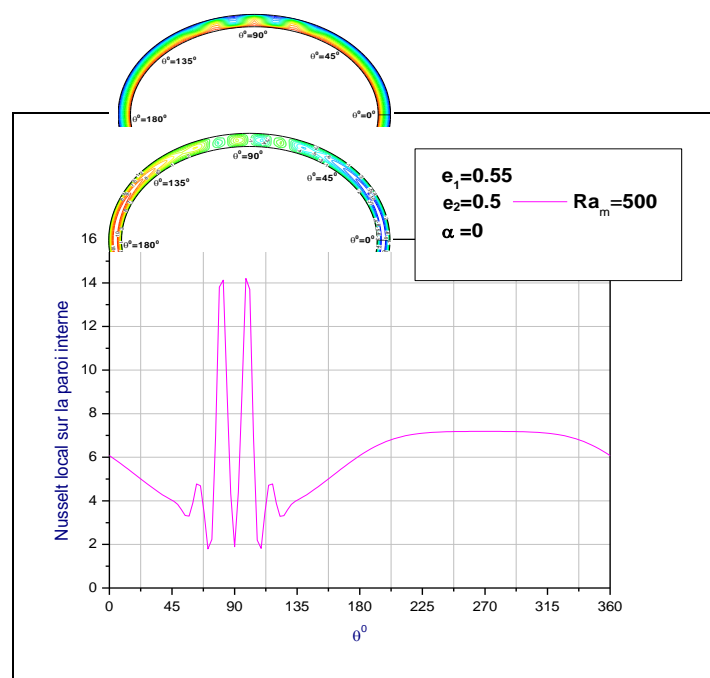


Fig.4.9 Analogie entre la variation du nombre de Nusselt local - isothermes et isocourants

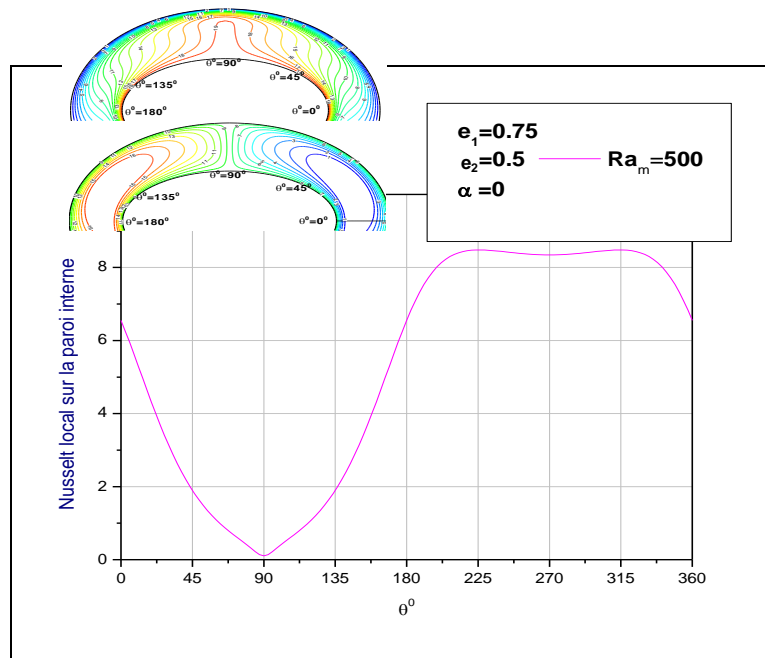


Fig.4.10 Analogie entre la variation du nombre de Nusselt local - isothermes et isocourants.

4.4.2 .2 Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi du cylindre elliptique intérieur :

La figure 4.11 illustre la variation du nombre de Nusselt local sur la paroi interne chaude pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh-Darcy modifié, l'augmentation de ce dernier entraine une augmentation du nombre de Nusselt, ce qui est évident.

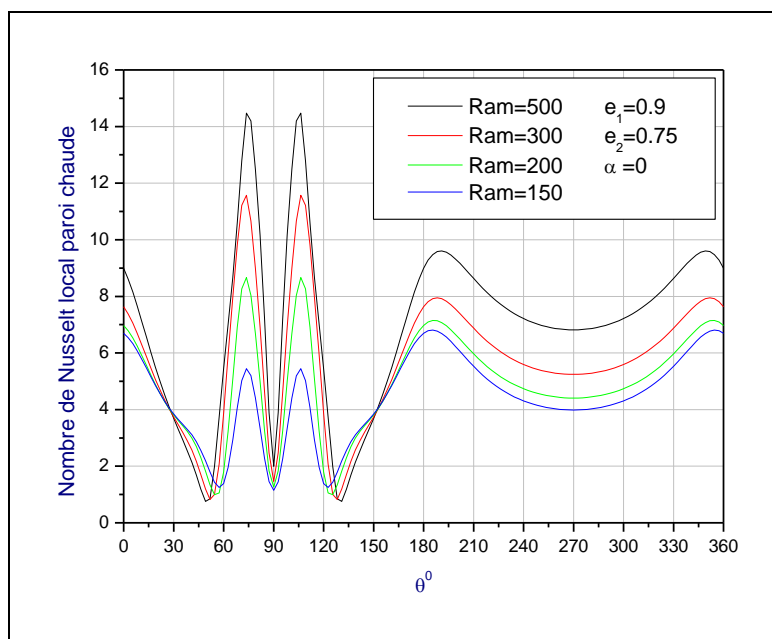


Fig.4.11 Variation de nombre de Nusselt local sur la paroi interne chaude.

4.4.2.3 Variation de nombre de Nusselt local sur les deux parois du cylindre elliptique :

La figure 4.12 représente les courbes de variation des nombres de Nusselt locaux Nu_c et Nu_f le long des parois des cylindres, intérieur et extérieur respectivement.

Nous remarquons dans cette figure que les variations des nombre de Nusselt locaux sur les parois chaude et froide varient dans des sens opposés où nous remarquons par exemple un maximum dans la région sommitale ($\theta=90^\circ$) pour le Nusselt local sur la paroi chaude Nu_c et un minimum pour le Nusselt local sur la paroi froide Nu_f .

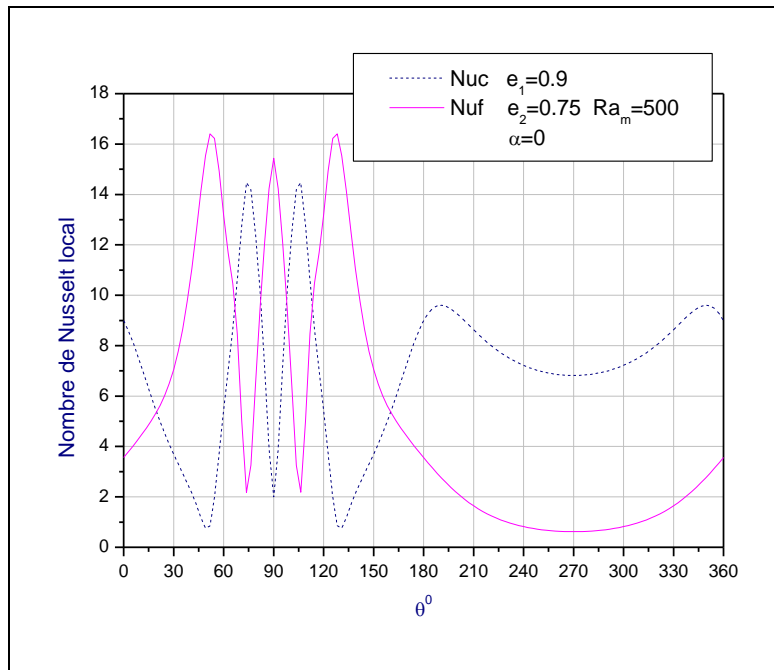


Fig.4.12 Variation de nombre de Nusselt local sur les deux parois.

4.4.2 .3 Nombre de Nusselt moyen :

La figure 4.13 montre que les valeurs du nombre de Nusselt moyen augmentent en augmentant la valeur du nombre de Rayleigh-Darcy modifié, pour les configurations considérées, ce qui est évident.

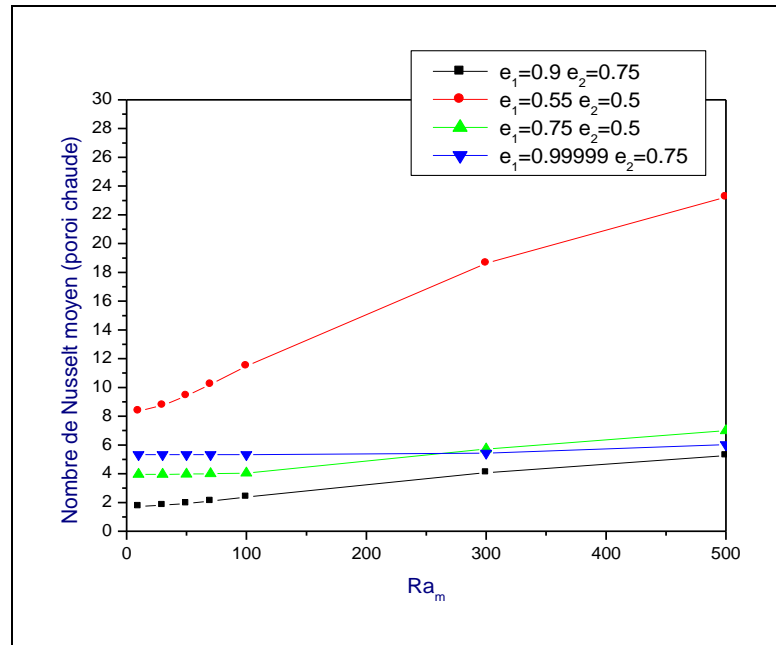


Figure 4.13 Variation du nombre de Nusselt moyen sur la paroi active interne.

4.5 Effet de la variation de l'angle d'inclinaison :

4.5.1 Les isothermes et les isocourants:

Nous examinons dans cette partie, l'effet de l'inclinaison du système par rapport à la verticale, l'angle est calculé à partir de l'horizontale dans le sens trigonométrique. Pour cela nous avons considéré trois valeurs de α (0° , 45° et 90°) pour toutes les géométries étudiées.

- **L'angle d'inclinaison nul ($\alpha = 0^\circ$) « position horizontale de l'espace annulaire »:**

Le plan vertical fictif médian est un plan de symétrie pour les phénomènes de transferts. L'écoulement s'organise, en deux cellules principales tournant dans des sens contraires, ou bien avec deux ou quatre cellules en plus, selon le cas considéré (différentes valeurs du nombre de Rayleigh-Darcy modifié), comme l'illustrent bien les figures (4.3a-4.7i).

- **L'angle d'inclinaison ($\alpha = 45^\circ$) :**

Pour un angle d'inclinaison de 45° , la symétrie du système par rapport au plan fictif vertical est détruite, en déplaçant la zone de rétrécissement de l'espace annulaire, vers le haut.

Les figure (4.15b) et (4.18b) pour $Ra_m=500$ pour les configurations ($e_1=0.99999$ et $e_2=0.75$) et ($e_1=0.75$ et $e_2=0.5$) montrent que le tourbillon de droite peut davantage se développer que son homologue dans la partie gauche et que la cellule de la partie droite inférieure se développe aussi davantage que son homologue dans la partie gauche. Les figures (4.16b) et (4.17b) pour $Ra_m=500$ pour les configurations ($e_1=0.55$ et $e_2=0.5$) et ($e_1=0.9$ et $e_2=0.75$) montrent toujours que les cellules se déplacent vers la droite de l'espace annulaire.

- **L'angle d'inclinaison ($\alpha = 90^\circ$) « position verticale de l'espace annulaire » :**

Pour un angle d'inclinaison de 90° la symétrie par rapport au plan vertical fictif médian est conservée en déplaçant le rétrécissement vers le haut de l'espace annulaire.

Les lignes isothermes s'enfoncent à ($\theta=0^\circ$) se qui ce traduit par l'existence de deux tourbillons contra-rotatif.

Les valeurs de la fonction de courant Ψ_{\max} mentionnées sur les figures (figure (4.15c), (4.16c), (4.17c) et (4.18c)) sont maximales par rapport aux Ψ_{\max} pour des angles d'inclinaisons de 0° et 45° .

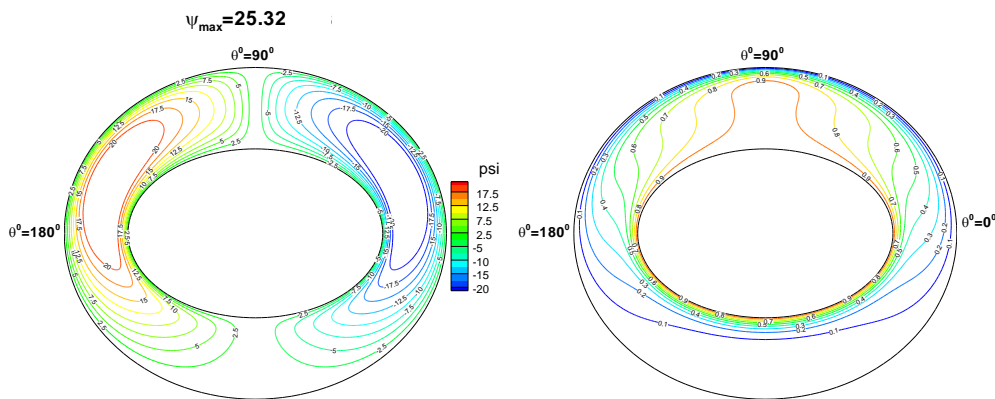


Fig4.15a. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.75$, $e_2=0.5$, $\alpha=0^\circ$ et $Ra_m=500$.

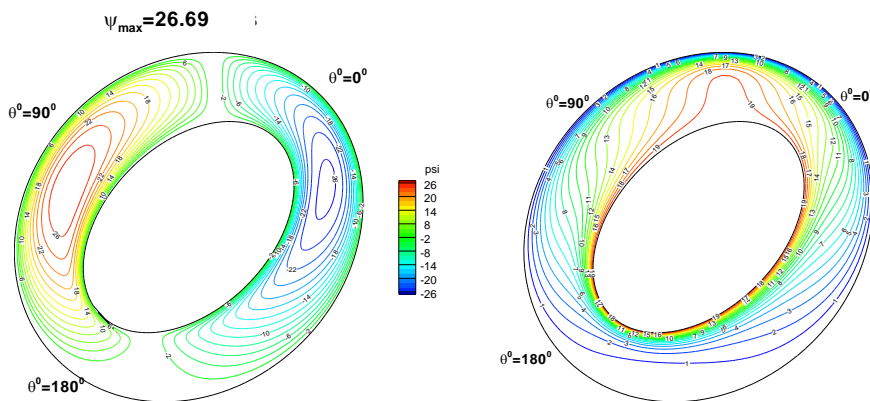


Fig 4.15.b Isothermes et isocourants $e_1=0.75$, $e_2=0.5$, $\alpha=45^\circ$ et $Ra_m=500$.

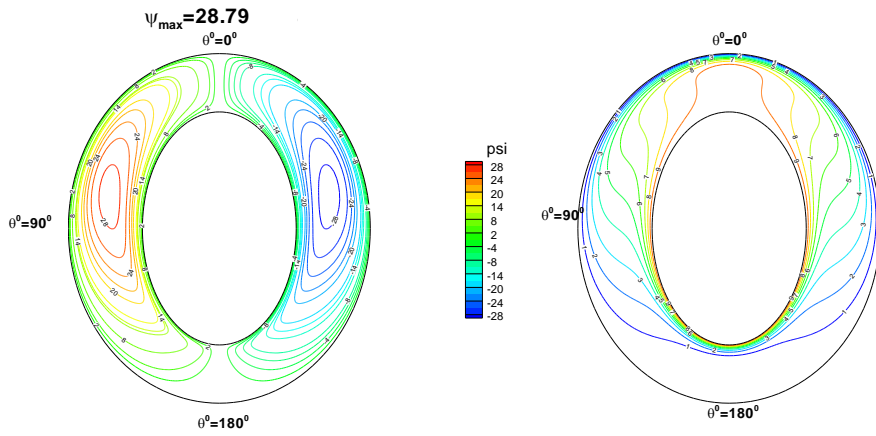


Fig 4.15.c Isothermes et isocourants $e_1=0.75$, $e_2=0.5$, $\alpha=90^\circ$ et $Ra_m=500$.

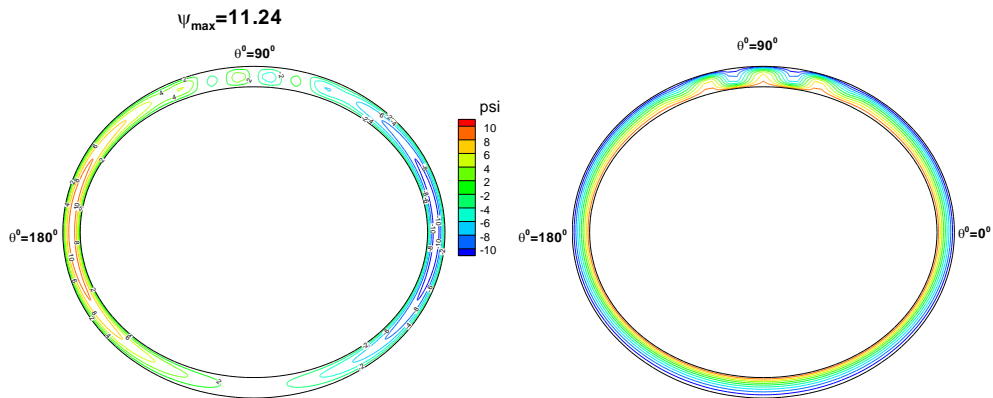


Fig 4.16a. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.55$, $e_2=0.5$, $\alpha=0^\circ$ et $Ra_m=500$.

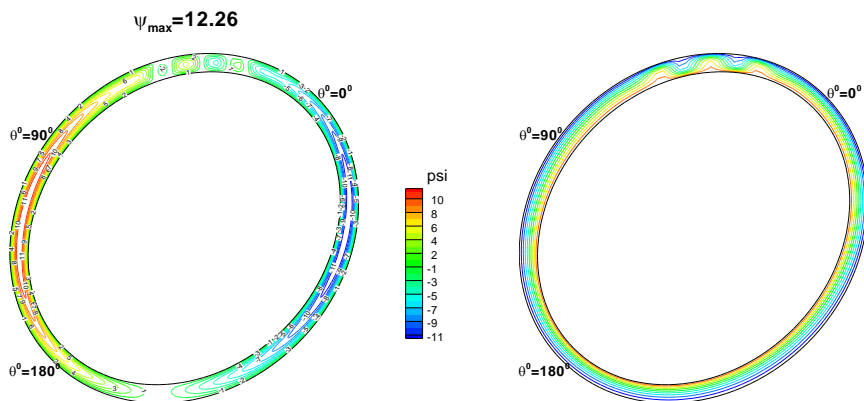
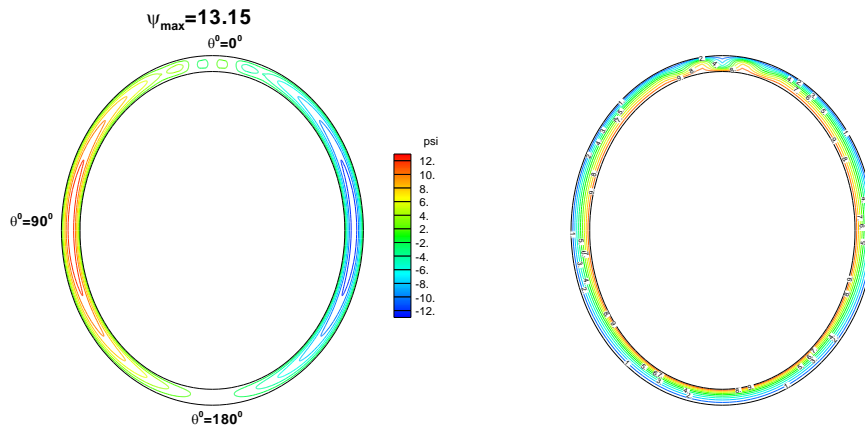


Fig 4.16b. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.55$, $e_2=0.5$, $\alpha=45^\circ$ et $Ra_m=500$.



4.16c. Isothermes et isocourants $e_1=0.55$, $e_2=0.5$, $\alpha=90^\circ$ et $Ra_m=500$.

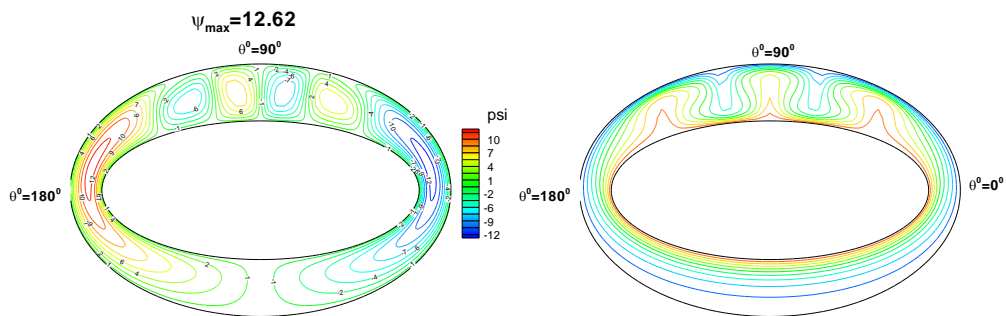


Fig 4.17a. Isothermes et isocourants $e_1=0.9$, $e_2=0.75$, $\alpha=0^\circ$ et $Ra_m=500$.

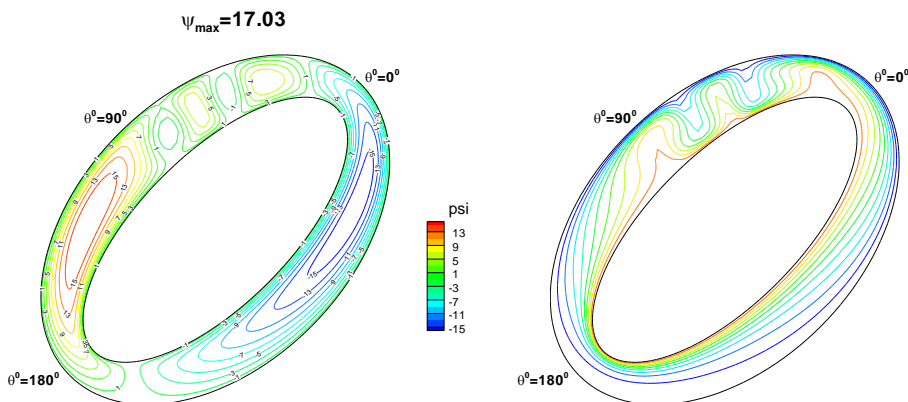


Fig 4.17b. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.9$, $e_2=0.75$, $\alpha=45^\circ$ et $Ra_m=500$.

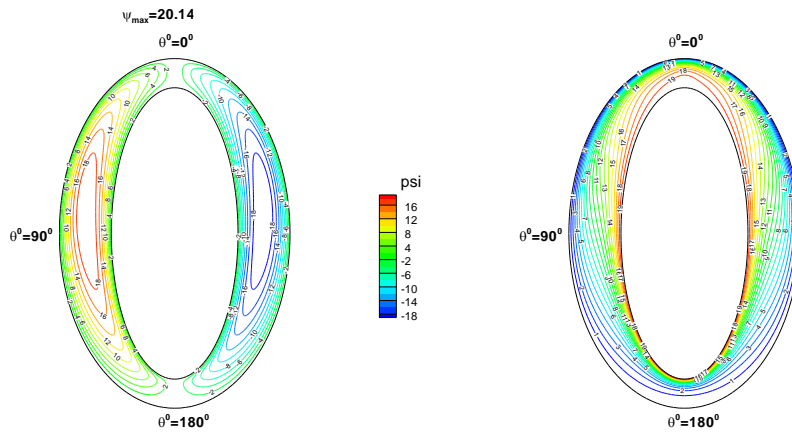


Fig 4.17c. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.9$, $e_2=0.75$, $\alpha=90^\circ$ et $Ra_m=500$.

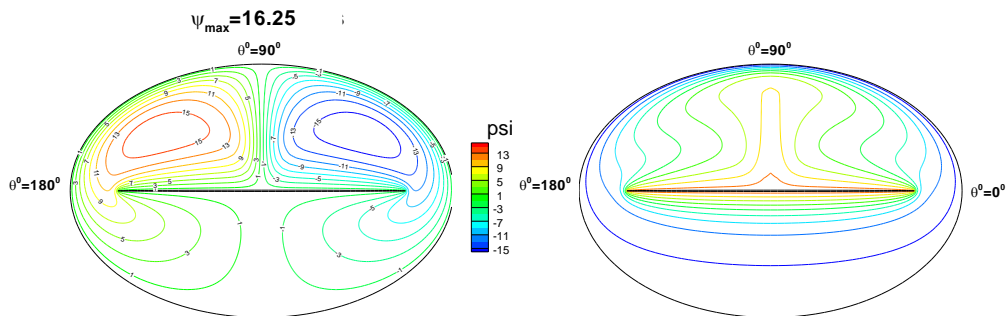


Fig 4.4g. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.99999$, $e_2=0.75$, $Ra_m=500$ et $\alpha=0^\circ$.

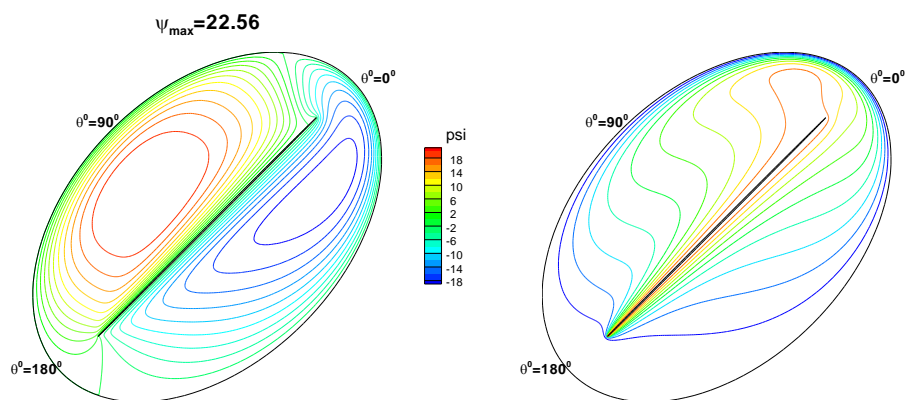


Fig 4.18b. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.99999$, $e_2=0$, $Ra_m=500$ et $\alpha=45^\circ$.

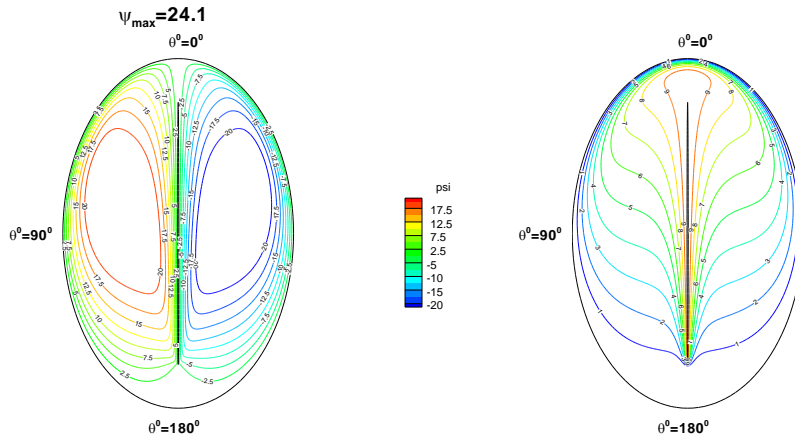


Fig 4.18c. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.99999$, $e_2=0.75$, $Ra_m=500$ et $\alpha=90^\circ$.

4.5.2 Nombre de Nusselt local et moyen :

La variation du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude interne (figure (4.20)) est en très bon accord avec les variations des lignes d'isothermes et isocourants (figure (4.19a) et (4.19b)) où on remarque un minimum pour $\alpha = 0^\circ$ à la position angulaire $\theta=90^\circ$ ce minimum se déplace vers la position angulaire $\theta^0=40^\circ$ pour $\alpha=45$ et $\theta=30^\circ$ pour $\alpha=90^\circ$, dans ces positions le fluide s'éloigne de la paroi chaude interne et forment les deux tourbillons contra-rotatifs .

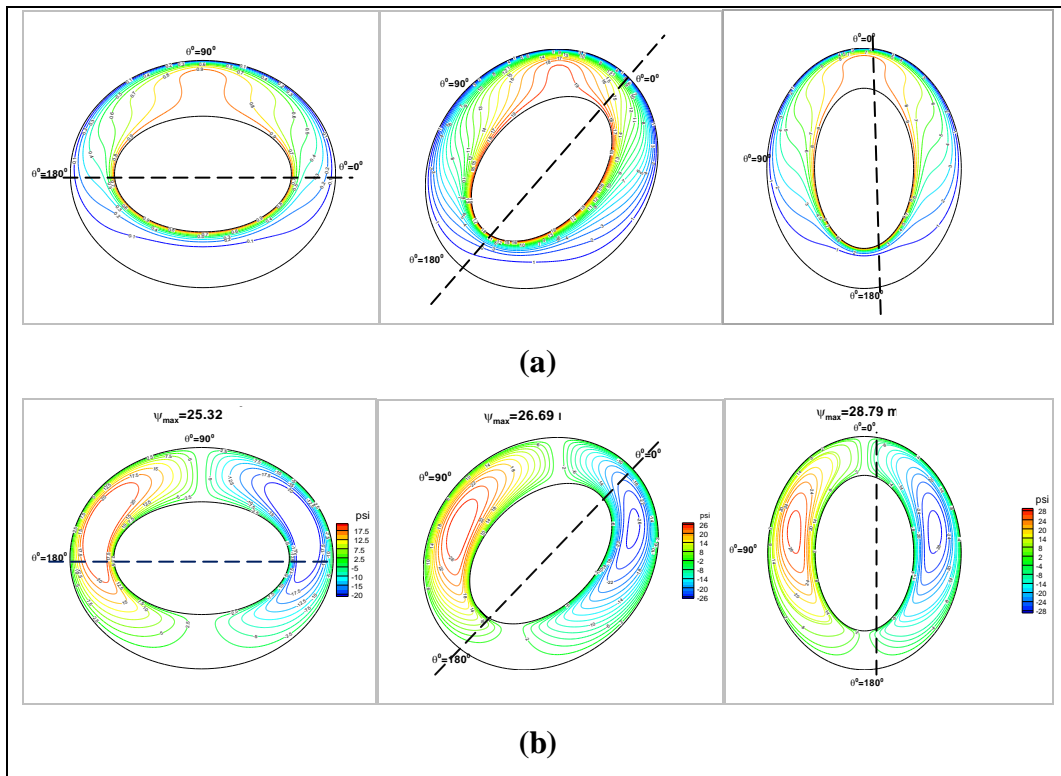


fig4.19 (a) : Isothermes (b) : isocourants $Ra_m=500$ pour $\alpha=0^\circ, 45^\circ$ et 90° .

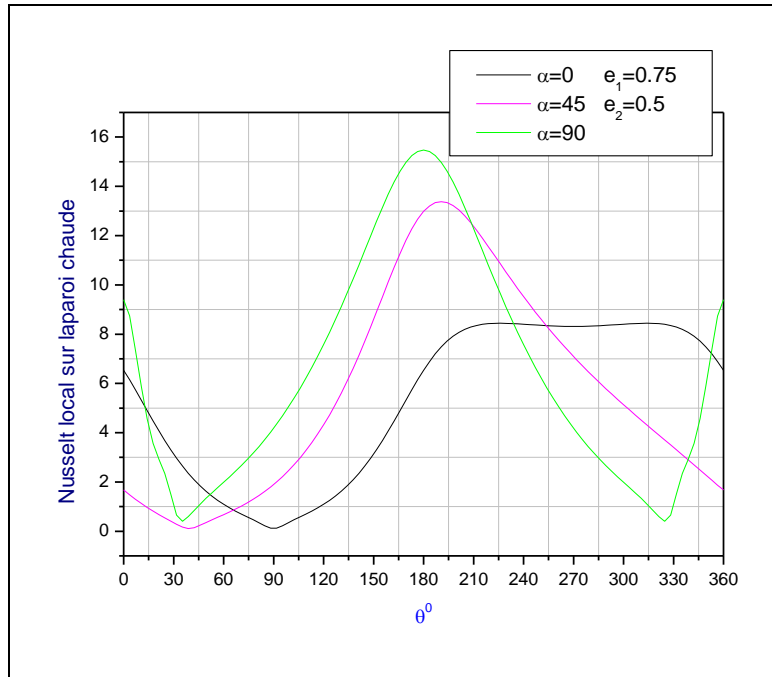


Fig. 4.20. Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude.

Pour ($\alpha=90^\circ$) les variations du nombre de Nusselt locaux sur les deux parois : interne chaude (Nu_c) et externe froide (Nu_f) sont inversées (figure (4.21)) : nous remarquons que Nu_f est maximum dans la région sommitale ($\theta=330^\circ - \theta=30^\circ$) et minimum dans la partie basse de l'enceinte ($\theta=180^\circ$) par contre le Nu_c est minimum dans la région sommitale et maximum dans la partie basse de l'espace annulaire.

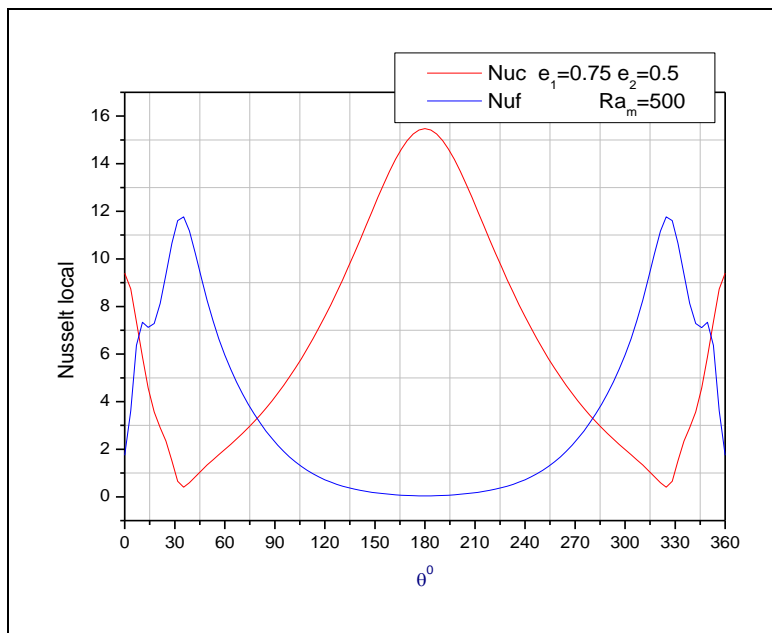


Fig. 4.21. Variation du nombre de Nusselt local sur les deux parois.

La variation du nombre de Nusselt moyen sur la paroi interne en fonction du nombre de Rayleigh modifiée (figure 4.22) montre que l'angle est presque sans influence pour un

$Ra_m \leq 100$, ce qui nous met en accord avec ce qui précède (figures 4.5a - 4.5e) que le transfert de chaleur est quasi-conductif dans ce cas. Pour les plus grandes valeurs du nombre de Rayleigh modifiée, ce dernier influe sur le transfert convectif et les changements de structures de l'écoulement se traduisent par des perturbations.

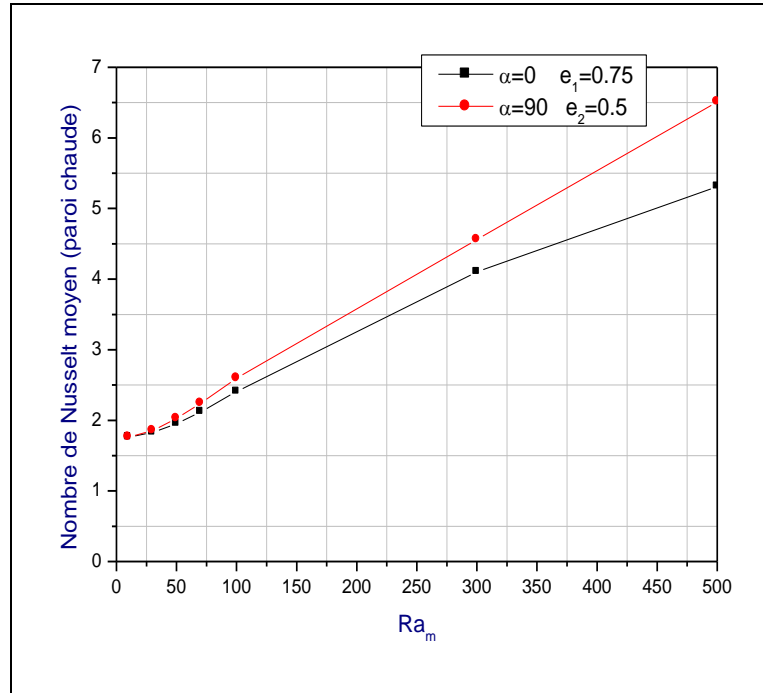


Fig. 4.22. Variation du nombre de Nusselt moyen sur la paroi interne

4.6 Influence de l'excentricité interne :

4.6.1 Les isothermes et les isocourants :

Dans cette partie, nous examinons l'influence de l'excentricité interne (e_1) de l'espace annulaire sur les isothermes et les lignes de courant en maintenant la valeur de l'excentricité externe (e_2) constante. Dans un premier cas on prend $e_2=0.5$ avec $e_1=0.55, 0.65$ et 0.75 puis on prend $e_2=0.75$ avec $e_1=0.99999, 0.9$ et 0.83 .

Les figures (4.23, 4.28) pour une valeur du nombre de Rayleigh-Darcy modifié de 500 montrent que l'augmentation de la valeur de l'excentricité interne e_1 , entraîne une augmentation de l'espace libre entre les deux surfaces d'échange, ce qui se traduit par une intensification de la convection naturelle, par exemple pour des excentricités internes de $e_1=0.9$ et $e_1=0.83$ avec une excentricité externe $e_2=0.75$, on remarque que la valeur de la fonction de courant maximale augmente avec l'augmentation de l'espace libre entre les deux surfaces d'échange ($\Psi_{\max}=7.92$ pour $e_1=0.83, e_1=0.75$ et $\Psi_{\max}=12.62$ pour $e_1=0.9, e_1=0.75$)

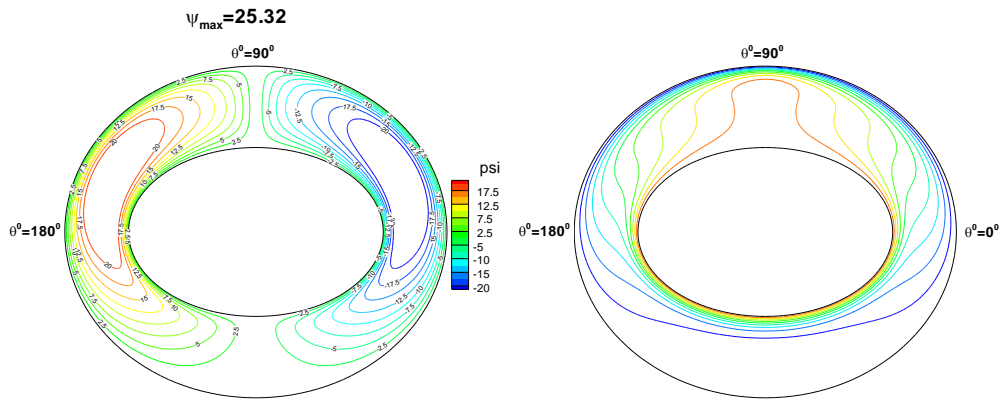


Fig 4.23. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.75$, $e_2=0.5$, $\alpha=0^\circ$ et $Ra_m=500$.

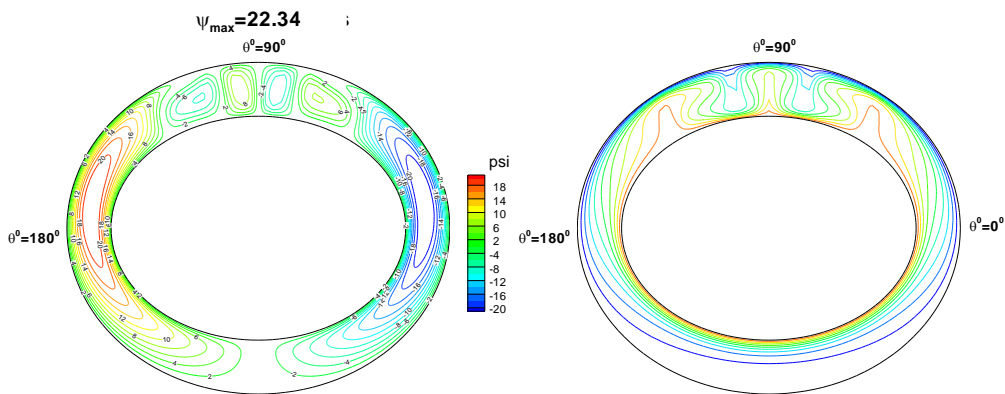


Fig 4.23. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.65$, $e_2=0.5$, $\alpha=0^\circ$ et $Ra_m=500$.

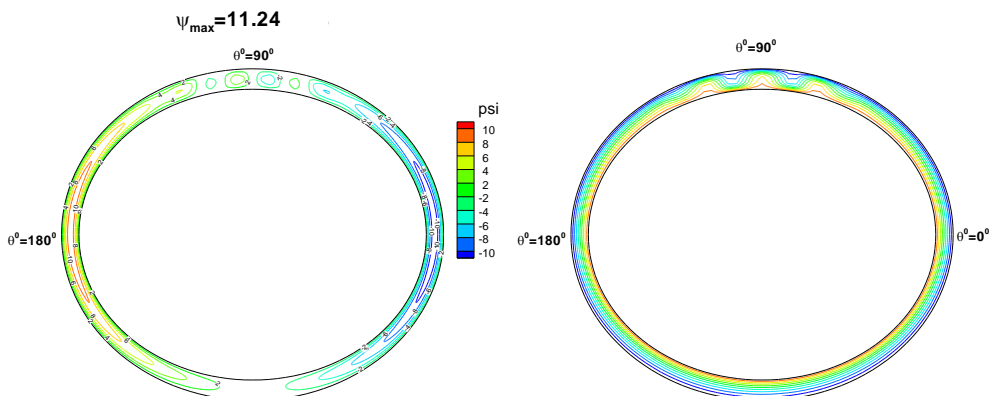


Fig 4.25. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.55$, $e_2=0.5$, $\alpha=0$ et $Ra_m=500$.

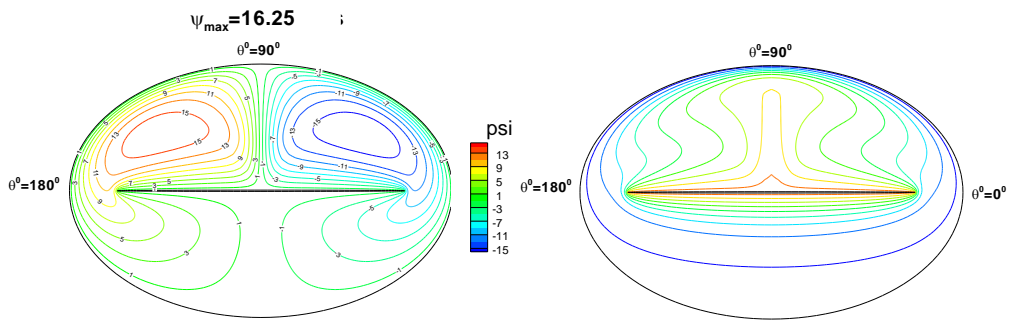


Fig 4.26. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.99999$, $e_2=0.75$, $\alpha=0^\circ$ et $Ra_m=500$.

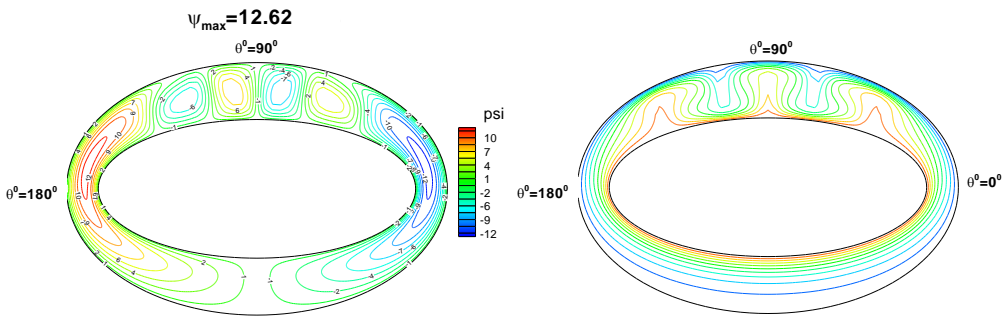


Fig 4.27. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.9$, $e_2=0.75$, $\alpha=0^\circ$ et $Ra_m=500$.

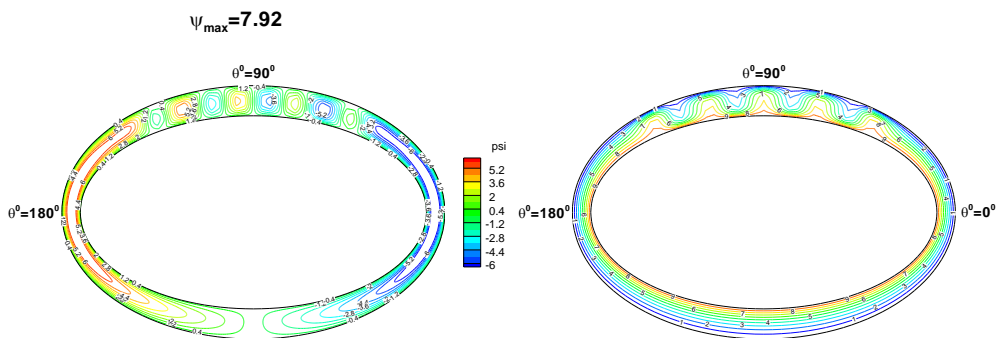


Fig 4.28. Isothermes et isocourants pour $e_1=0.83$, $e_2=0.75$, $\alpha=0^\circ$ et $Ra_m=500$.

4-6.2 conductivité équivalente globale:

Puisque cette étude examine la convection naturelle dans un espace annulaire dont la géométrie varie avec l'excentricité, la conductivité thermique équivalente est le paramètre le plus approprié pour comparer les transferts de chaleur intervenant dans les diverses géométries considérées. Le nombre de Nusselt est proportionnel à la valeur globale du taux de transfert de chaleur qui se compose des modes conduction et convection, en considérant que la conductivité thermique équivalente représente le rapport du transfert de chaleur total au transfert de chaleur par conduction pure entre les parois intérieure et extérieure, le nombre de Nusselt n'est pas un bon indicateur du transfert de chaleur en comparant les différentes géométries.

La conductivité thermique équivalente globale est donnée par le rapport des nombres moyens de Nusselt pour le cas de la convection plus la conduction sur des nombres moyens de Nusselt pour le cas de la conduction pure.

En faisant varier la valeur de l'excentricité 0.5 jusqu'à 0.75 pour un angle d'inclinaison $\alpha=0^\circ$ et un nombre de Rayleigh-Darcy modifié de 10,100 et 500, nous remarquons que la conductivité thermique équivalente globale augmente avec l'augmentation de l'excentricité, ce qui dénote une intensification de la convection naturelle.

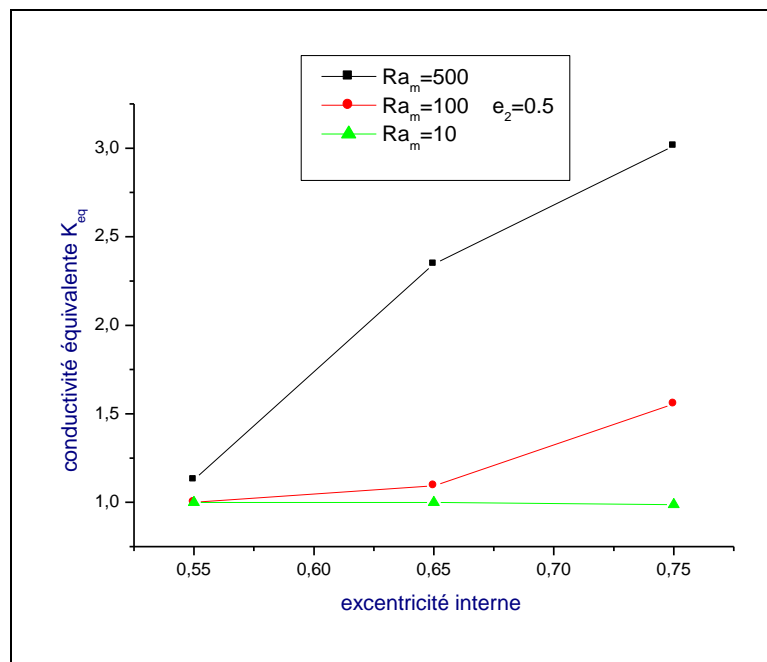


Fig 4.29. Variation de La conductivité thermique équivalente globale sur la paroi chaude en fonction de l'excentricité interne e_1 pour $Ra_m=500, 100, 10, e_2=0.5$ et $\alpha=0^\circ$.

Conclusion

Nous avons étudié numériquement la convection naturelle bidimensionnelle laminaire et permanente dans un espace annulaire elliptique horizontal, rempli d'un milieu poreux saturé par un fluide newtonien, les parois elliptiques interne et externe étant maintenues isothermes.

Ce problème est modélisé mathématiquement par les équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement et de l'énergie. Cette modélisation repose sur l'hypothèse de Boussinesq et sur la bidimensionnalité de l'écoulement. Les équations sont résolues par la méthode des volumes finis, en utilisant le schéma de « Power Law » pour la discrétisation des termes convectifs et non linéaires de l'équation d'énergie et le schéma des différences centrées pour la discrétisation de l'équation de mouvement. Le système d'équations discrétisées est résolu par une méthode itérative de Gauss Seidel. On obtient alors les champs de température et la distribution de la fonction de courant dans la matrice poreuse, ainsi que les nombres adimensionnels de Nusselt locaux et moyens et les conductivités thermiques équivalentes sur les parois de l'enceinte, en fonction des grandeurs caractérisant l'état du système. L'influence du nombre de Rayleigh-Darcy modifié, de l'excentricité interne et externe de notre espace annulaire et de l'inclinaison du système, sur l'écoulement en régime stationnaire a été notamment examinée.

Les résultats des simulations numériques ont montré que pour un angle d'inclinaison $\alpha=0^\circ$:

- Le transfert de chaleur se fait par pseudo-conduction et le régime de l'écoulement est monocellulaire pour des nombres de Rayleigh-Darcy modifiés variant de 10 à 30 pour $(e_1=0.99999, e_2=0.75)$ et $(e_1=0.75, e_2=0.5)$, variant de 10 à 300 pour $(e_1=0.55, e_2=0.5)$ et variant de 10 à 100 pour $(e_1=0.9, e_2=0.75)$.
- Nous obtenons une convection naissante pour $50 \leq Ra_m \leq 70$ pour la configuration $(e_1=0.99999, e_2=0.75)$ et pour $50 \leq Ra_m \leq 100$ pour $(e_1=0.75, e_2=0.5)$.

- Pour une augmentation du nombre de Rayleigh-Darcy modifié ($Ra_m \geq 300$) pour ($e_1=0.99999$, $e_2=0.75$) et pour ($e_1=0.75$, $e_2=0.5$) nous avons une convection prédominante avec un régime d'écoulement monocellulaire.
- Pour une augmentation du nombre de Rayleigh-Darcy modifié ($Ra_m \geq 500$) pour ($e_1=0.55$, $e_2=0.5$) et ($150 \leq Ra_m \leq 500$) pour ($e_1=0.9$, $e_2=0.75$), nous avons une convection prédominante avec un régime d'écoulement multicellulaire.

Nous avons remarqué aussi que l'écoulement s'intensifie le plus quand $\alpha=90^\circ$ pour tous les facteurs de forme considérés.

Les caractéristiques géométriques de l'enceinte étudiée influent beaucoup sur le transfert, ce dernier est donc meilleur quand on a considéré le plus grand espace libre entre les deux surfaces d'échange.

Une suite intéressante à ce travail serait de généraliser l'algorithme développé en appliquant d'autres conditions aux frontières de notre enceinte et d'examiner le transfert de chaleur correspondant à d'autres fluides tels que l'ammoniac liquide et le dioxyde de carbone liquide et les comparer au comportement thermique de l'air.

Annexe A

Coordonnées Elliptiques

A.1 Introduction

Dans le référentiel elliptique représenté sur la figure A.1, nous observons dans le plan (xy) un groupe d'ellipses et un groupe de paraboles :

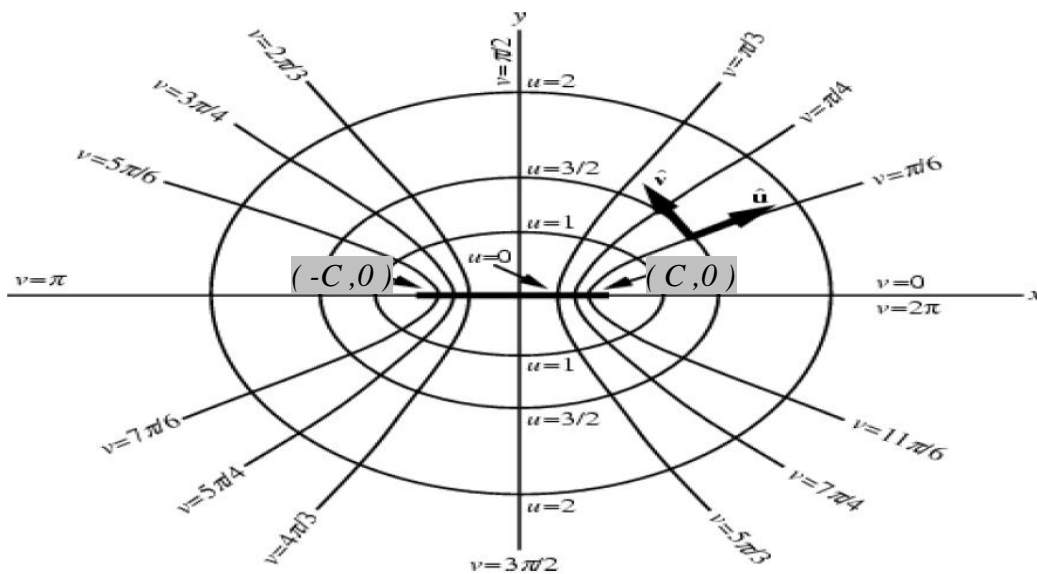


Fig. A.1 représentation schématique des coordonnées elliptiques

- Les ellipses sont définies par $u = \text{constant}$, dont le grand axe est confondu avec l'axe (x).
- Les hyperboles sont définies par $v = \text{constant}$.

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées elliptiques s'effectue à l'aide des relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} x &= C \operatorname{ch}\eta \cos\theta \\ y &= C \operatorname{sh}\eta \sin\theta \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.1})$$

Ces formules s'établissent comme suit, d'après la théorie des variables complexes.

Soit :

$$z = C \operatorname{ch}w \quad (\text{A.2})$$

Avec :

$$z = x + i y \quad \text{et} \quad w = \eta + i\theta$$

Nous avons :

$$\operatorname{ch}w = \frac{e^w + e^{-w}}{2} = \frac{e^\eta e^{i\theta} + e^{-\eta} e^{-i\theta}}{2}$$

En développant les termes exponentiels, nous obtenons :

$$\operatorname{ch}w = \cos\theta \operatorname{ch}\eta + i \sin\theta \operatorname{sh}\eta \quad (\text{A.3})$$

Introduisons cette valeur dans l'équation (A.2), il vient :

$$z = x + i y = C \operatorname{ch}w = C (\cos\theta \operatorname{ch}\eta + i \sin\theta \operatorname{sh}\eta) \quad (\text{A.4})$$

L'identification de la partie réelle à x et de la partie imaginaire à y donne :

$$x = C \operatorname{ch}\eta \cos\theta$$

$$y = C \operatorname{sh}\eta \sin\theta$$

A.2 Démonstration géométrique

A partir du système (A.1), on a :

$$\cos\theta = \frac{x}{C \operatorname{ch}\eta} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{y}{C \operatorname{sh}\eta}$$

soit :

$$\cos^2\theta = \frac{x^2}{C^2 \operatorname{ch}^2\eta}$$

$$\sin^2\theta = \frac{y^2}{C^2 \operatorname{sh}^2\eta}$$

comme :

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

on en déduit :

$$\frac{x^2}{C^2 \operatorname{ch}^2 \eta} + \frac{y^2}{C^2 \operatorname{sh}^2 \eta} = 1$$

on pose :

$$\left. \begin{aligned} A &= C \operatorname{ch} \eta \\ B &= C \operatorname{sh} \eta \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.6})$$

et comme :

$$\operatorname{ch} \eta > \operatorname{sh} \eta \quad \forall \eta \in \mathbb{R}$$

on se ramène donc à l'équation d'une famille d'ellipses de grand axe $A = a \operatorname{ch} \eta$ et de petit axe

$$B = C \operatorname{sh} \eta$$

L'équation (A.5) sera donc de la forme :

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad (\text{A.7})$$

A.3 Coefficient métrique :

En coordonnées cartésiennes un élément de longueur s'écrit :

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

En coordonnées polaires (r, θ) , $(ds)^2$ s'écrit :

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2$$

Cet exemple nous conduit à écrire, dans le cas général :

$$(ds)^2 = h_1 (du_1)^2 + h_2 (du_2)^2$$

où : u_1 et u_2 sont des coordonnées curvilignes, les quantités h_1 et h_2 les coefficients métriques qui sont fonction, en général, des coordonnées.

$$h_\eta = h_\theta = C(\operatorname{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)^{1/2}$$

En coordonnées cartésiennes, on a $h_x = h_y = 1$ et en coordonnées elliptiques :

$$h_\eta = h_\theta = C(\operatorname{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)^{1/2}$$

Ces coefficients sont obtenus en utilisant les transformations (A.1) et les définitions suivantes

$$h_\eta^2 = \left[\frac{\partial x}{\partial \eta} \right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial \eta} \right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial \eta} \right]^2 \quad (\text{A.8})$$

$$h_{\theta}^2 = \left[\frac{\partial x}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial \theta} \right]^2 \quad (\text{A.9})$$

$$h_z^2 = \left[\frac{\partial x}{\partial z} \right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial z} \right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial z} \right]^2 \quad (\text{A.10})$$

Par suite on obtient :

$$h_{\eta}^2 = h_{\theta}^2 = C^2 (sh^2 \eta + \sin^2 \theta) \quad (\text{A.11})$$

$$h_z^2 = 1 \quad (\text{A.12})$$

En connaissant les coefficients métriques, on peut écrire les différentes expressions des gradients, divergences, rotationnels, etc.....

$$\overrightarrow{\text{grad}} \Phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \vec{a}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \vec{a}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \vec{a}_3$$

Avec :

$$\text{div} \vec{V} = \frac{1}{h_4} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 V_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 h_3 V_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 V_3) \right\}$$

Avec

V_1, V_2, V_3 : composant de la vitesse suivant x_1, x_2, x_3 .

$$h_4 = h_1 * h_2 * h_3$$

$$\text{rot} \vec{V} = \frac{1}{h_4} \left\{ h_1 \left[\frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 V_3) - \frac{\partial}{\partial x_3} (h_2 V_2) \right] \vec{a}_1 + h_2 \left[\frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 V_1) - \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 V_2) \right] \vec{a}_2 \right. \\ \left. + h_3 \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 V_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 V_1) \right] \vec{a}_3 \right\}$$

$$\Delta \Phi = \frac{1}{h_4} \left[\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right]$$

Puisque dans notre cas, nous avons, en coordonnées elliptiques

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 = h_{\eta} \\ h_2 = h_{\theta} \\ h_3 = h_z = 1 \end{array} \right. \quad \text{et } h_{\eta} = h_{\theta} = h$$

et nous avons aussi :

$$\begin{cases} x_1 = \eta \\ x_2 = \theta \\ x_3 = z \end{cases} \quad \begin{cases} V_1 = V_\eta \\ V_2 = V_\theta \\ V_3 = V_z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{a}_1 = \vec{a}_\eta \\ \vec{a}_2 = \vec{a}_\theta \\ \vec{a}_3 = \vec{a}_z \end{cases}$$

ceci nous permettra donc de simplifier les équations précédentes

$$\overrightarrow{\text{grad}}\Phi = \frac{1}{h} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \vec{a}_\eta + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \vec{a}_\theta \right] + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{a}_z \quad (\text{A.13})$$

$$\text{div} \vec{V} = \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (hV_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (hV_\theta) \right] + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (\text{A.14})$$

$$\text{rot} \vec{V} = \left[\frac{1}{h} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right] \vec{a}_\eta + \left[\frac{\partial V_\eta}{\partial z} - \frac{1}{h} \frac{\partial V_z}{\partial \eta} \right] \vec{a}_\theta +$$

$$\left[h \frac{\partial V_\theta}{\partial \eta} + V_\theta \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \frac{\partial V_\eta}{\partial \theta} - V_\eta \frac{\partial h}{\partial \theta} \right] \vec{a}_z \quad (\text{A.15})$$

A.3.1 Exemple

Cas d'une cylindre elliptique (fig A.2)

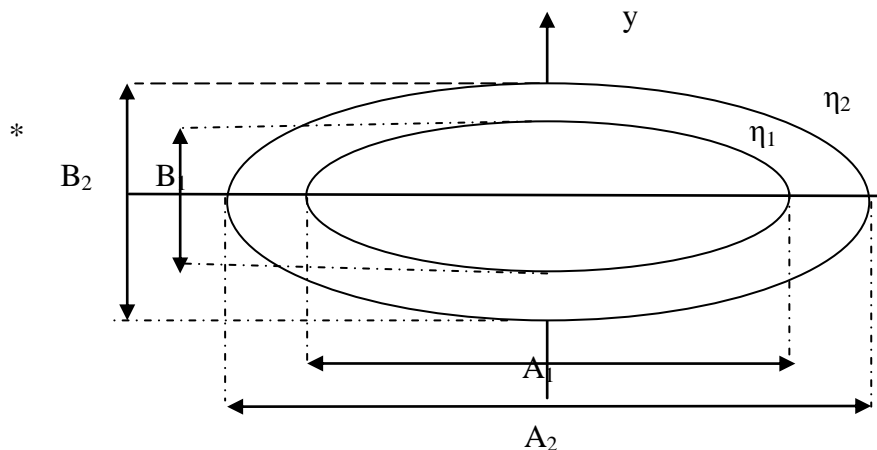


Fig. A.2 Représentation schématique de deux cylindres

Elliptiques confocaux d'axes horizontaux

Les relations (A.6) nous donnent :

$$\frac{A}{B} = \coth \eta = \frac{e^{2\eta} + 1}{e^{2\eta} - 1} \quad (\text{A.17})$$

On déduit :

$$e^{2\eta} = \frac{A+B}{A-B} \quad (\text{A.18})$$

Soit encore :

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{A+B}{A-B} \right) \quad (\text{A.19})$$

nous aurons donc pour le cylindre elliptique intérieur :

$$\eta_1 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{A_1+B_1}{A_1-B_1} \right) \quad (\text{A.19a})$$

Et pour le cylindre elliptique extérieur :

$$\eta_2 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{A_2+B_2}{A_2-B_2} \right) \quad (\text{A.19b})$$

A.3.2 Excentricité de l'ellipse :

L'excentricité de l'ellipse est donnée par

$$e = \frac{\sqrt{A^2-B^2}}{A} \quad (\text{A.20})$$

Avec : $0 < e < 1$

Et A et B respectivement le grand et le petit axe de l'ellipse.

D'autre part la relation (A.17) donne :

$$\frac{A^2}{B^2} = \coth^2 \eta = \frac{\text{ch}^2 \eta}{\text{sh}^2 \eta} \quad (\text{A.21})$$

Comme

$$\text{ch}^2 \eta - \text{sh}^2 \eta = 1 \quad (\text{A.22})$$

on déduit :

$$\text{ch}^2 \eta - 1 = \text{sh}^2 \eta$$

En remplaçant (A.22) dans (A.21) on obtient :

$$\frac{A^2}{B^2} = \coth^2 \eta = \frac{\operatorname{ch}^2 \eta}{\operatorname{ch}^2 \eta - 1}$$

D'où :

$$\frac{B^2}{A^2} = \frac{\operatorname{ch}^2 \eta - 1}{\operatorname{ch}^2 \eta} = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \eta}$$

On en déduit :

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \eta} = 1 - \frac{B^2}{A^2} = \frac{A^2 - B^2}{A^2}$$

Soit encore :

$$\frac{1}{\operatorname{ch} \eta} = \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A} = e$$

On obtient donc :

$$e = \frac{1}{\operatorname{ch} \eta} \tag{A.23}$$

On aura donc pour le cylindre elliptique intérieur :

$$e_1 = \frac{1}{\operatorname{ch} \eta_1} \tag{A.23a}$$

Et pour le cylindre elliptique extérieur :

$$e_2 = \frac{1}{\operatorname{ch} \eta_2} \tag{A.23b}$$

Les relations (A.21) (A.22) (A.23) donnent :

$$\operatorname{th}^2 \eta = \frac{\operatorname{ch}^2 \eta - 1}{\operatorname{ch}^2 \eta} = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \eta} = 1 - e^2$$

On aura donc :

$$\operatorname{th} \eta = \sqrt{1 - e^2} = \frac{e^{2\eta} - 1}{e^{2\eta} + 1}$$

ce qui donne :

$$e^{2\eta} = \frac{-(\text{th}\eta + 1)}{\text{th}\eta - 1}$$

Qui permet d'obtenir la relation suivante :

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\sqrt{1-e^2}+1}{1-\sqrt{1-e^2}} \right] \quad (\text{A.23c})$$

A.4 Formulation de l'équation de continuité, de la chaleur et du mouvement dans le système de coordonnée elliptique

A.4.1 l'équation de continuité :

Notre problème étant bidimensionnelle, la relation (A.14) s'écrit :

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (hV_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (hV_\theta) \right] \quad (\text{A.24})$$

Ainsi $\text{div } \vec{V} = 0$, se traduit par :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (hV_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (hV_\theta) = 0 \quad (\text{A.25})$$

A.4.2 Equation de la chaleur

L'équation (1.7) peut se mettre sous la forme :

$$(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})T = \frac{\lambda_p}{(\rho C)_f} \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}T) \quad (\text{A.26})$$

Compte tenu de l'expression du gradient donnée par la relation (A.13), le premier membre de (A.26) donne :

$$(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})T = \frac{V_\eta}{h} \frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad (\text{A.26a})$$

Des relations (A.13) et (A.24), nous déduisons :

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}T) = \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) \quad (\text{A.26b})$$

Nous obtenons donc :

$$V_\eta \frac{\partial T}{\partial \eta} + V_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\lambda_p}{(\rho C)_f h} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) \quad (\text{A.27})$$

A.4.3 Equation du mouvement

Récrivons l'équation (1.9) sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{\kappa g \beta}{v} \left(\cos(\alpha) \frac{\partial T}{\partial x} - \sin(\alpha) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (\text{A.28})$$

Ou :

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\psi) = -\frac{\kappa g \beta}{v} \left(\cos(\alpha) \frac{\partial T}{\partial x} - \sin(\alpha) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (\text{A.29})$$

Des relations (A.13) et (A.24), nous déduisons :

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\psi) = \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \quad (\text{A.30})$$

Nous expliciterons tout d'abord l'expression suivante :

$$\left(\cos(\alpha) \frac{\partial T}{\partial x} - \sin(\alpha) \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

En fonction de η et θ .

les dérivées partielles de T par rapport à x et à y sont définies par :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

D'après les relations (A.1), nous pouvons écrire :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta$$

$$dx = a(ch\eta \cos \theta d\eta - ch\eta \sin \theta) d\theta$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta$$

$$dy = C(sh\eta \sin \theta d\eta - sh\eta \cos \theta) d\theta$$

A partir de ces valeurs nous déterminons les valeurs de $d\eta$ et $d\theta$:

$$d\eta = \frac{1}{C^2(\sin^2 \theta + sh^2 \eta)} (C \sin \theta ch\eta dx + C \cos \theta sh\eta dy)$$

$$d\theta = \frac{1}{C^2(\sin^2 \theta + sh^2 \eta)} (-C \sin \theta ch \eta dx + C \cos \theta sh \eta dy)$$

Par suite on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{C \cos \theta sh \eta}{C^2(\sin^2 \theta + sh^2 \eta)} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{-C \sin \theta ch \eta}{C^2(\sin^2 \theta + sh^2 \eta)} \end{aligned} \right\} \quad (A.30a)$$

Nous remarquons que :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (A.30b)$$

En tenant compte de la relation (A.30.b), l'équation (A.31.b) devient :

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (A.31c)$$

Alors, en utilisant les relations (A.30.a), (A.31.a) et (A.31.c) nous obtenons :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{C \cos \theta sh \eta}{C^2(\sin^2 \theta + sh^2 \eta)} \frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{-C \sin \theta ch \eta}{C^2(\sin^2 \theta + sh^2 \eta)} \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad (A.32a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{C \sin \theta ch \eta}{C^2(\sin^2 \theta + sh^2 \eta)} \frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{C \cos \theta sh \eta}{C^2(\sin^2 \theta + sh^2 \eta)} \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad (A.32b)$$

En portant ces valeurs dans l'expression (A.28.a), il vient :

$$\cos \alpha \frac{\partial T}{\partial x} - \sin \alpha \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{C(\sin^2 \theta + sh^2 \eta)^{\frac{1}{2}}} *$$

$$\left[\frac{C \cos \alpha \cos \theta sh \eta - C \sin \alpha \sin \theta ch \eta}{C(\sin^2 \theta + sh^2 \eta)^{1/2}} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] - \left[\frac{C \sin \alpha \cos \theta sh \eta + C \cos \alpha \sin \theta ch \eta}{C(\sin^2 \theta + sh^2 \eta)^{1/2}} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \quad (A.33)$$

Annexe B

Milieu poreux

1. Définition du milieu poreux :

Un milieu poreux est une matrice solide rigide qui comporte des vides (pores) qui peuvent communiquer entre eux et contenir une ou plusieurs phases fluides (gaz ou liquide) pouvant s'écouler et, éventuellement, échanger entre elles et/ou avec le solide de la matière et/ou de l'énergie.

Un milieu poreux peut se présenter généralement sous les deux formes suivantes :

- Milieu poreux non consolidé dans lequel la phase solide est formée de grains ou de fibres non soudés entre eux (graviers, sable, billes de verre et d'acier, limons, matériaux divers).
- Milieu poreux consolidé dans lequel la phase solide est formée de grains cimentés (roches calcaires, grès, argiles, bois, céramiques, poudres frittées, tissus végétaux et animaux...)

Dans le cas de la matrice solide non consolidée les pores reliés entre eux, permettent l'écoulement d'un ou plusieurs fluides. On peut alors classer les problèmes rencontrés, suivant les phases en présence à l'intérieur des pores :

1) le milieu est saturé d'un seul fluide ou encore un ensemble de fluides miscibles (par exemple un sol imbibé d'eau).

2) le milieu est composé de plusieurs fluides non miscibles. Un ensemble de ménisques sépare alors les différentes phases (par exemple un mélange eau-huile-gaz dans les roches pétrolières, ou un sol partiellement saturé d'eau, la deuxième phase étant l'air).

3) le milieu est le siège d'un transport de fluide et de particules solides. Il agit en général comme un filtre, mais ses propriétés hydrodynamiques se modifient au cours du temps (dépollution des eaux contenant de grosses particules par percolation à travers le sol).

2. Paramètres :

2.1 Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R)

L'échelle du pore d varie généralement de $0.05\mu\text{m}$ pour les nano pores, à 0.5mm pour les macropores. Or la distribution des pores et des grains est généralement très irrégulière. A cette échelle, la pression, la vitesse et la température varient donc très irrégulièrement d'un point à l'autre du domaine. On est donc amené à effectuer une moyenne spatiale de ces grandeurs. Elles ont pour but d'éliminer les fluctuations à l'échelle du pore, mais pas les fluctuations à l'échelle macroscopique du milieu poreux L . Cette moyenne s'effectue donc sur des nombreux pores par l'intermédiaire d'un *Volume Élémentaire Représentatif* V.E.R (figure 1) du milieu. De plus, l'échelle l du V.E.R doit donc vérifier :

$$d \leq l \leq L$$

On obtient donc les grandeurs caractéristiques de la vitesse, la pression et la température, en les moyennant sur le V.E.R. Cela permet de représenter un point dans un nouveau milieu continu fictif par changement d'échelle. Il est équivalent au domaine poreux étudié mais à l'échelle macroscopique. Lorsque les propriétés locales, définies sur le V.E.R, sont indépendantes de la position de celui-ci, le milieu est dit homogène, à l'échelle macroscopique.

Sauf au cas particulier, toutes les grandeurs (pression, vitesse, température) apparaissant dans les différents modèles seront définies sur le V.E.R.

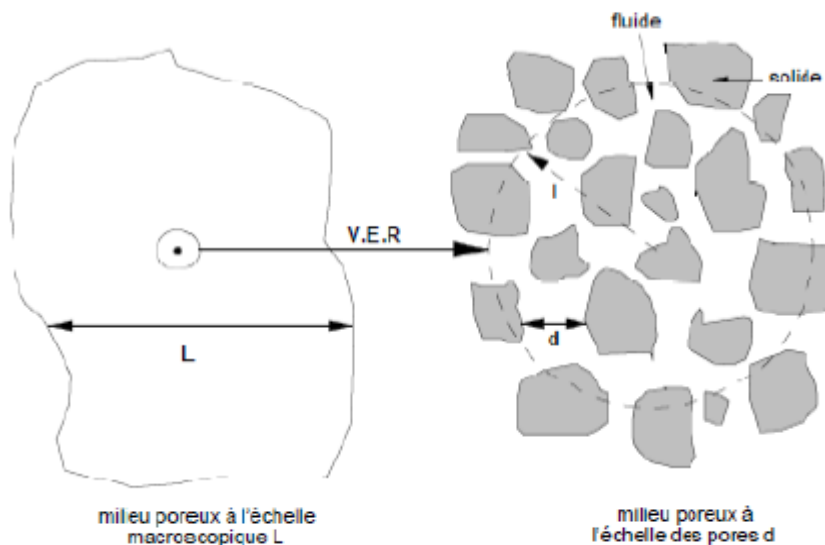


Figure 1 : La taille intermédiaire l du (V.E.R) entre la taille du milieu poreux à l'échelle macroscopique L et à l'échelle des pores d .

2.2 Porosité :

Le paramètre principal d'écrivant un milieu poreux est la *porosité* définie par :

$$\varepsilon = \frac{V_p}{V_0} = \frac{\text{volume des pores}}{\text{volume totale}}$$

qui varie donc entre 0 (solide plein) et 1 (volume complètement vide). Ce paramètre de porosité est complémentaire de la *fraction volumique de solide*

La proportion occupée par la matrice solide est donc donnée par: $1-\varepsilon$ En fait ε est plus exactement appelé *porosité totale*. En effet, cette définition prend en compte les pores fermés. On introduit donc une porosité accessible, définie comme le rapport du volume des pores connectés sur le volume total. Cela n'est possible que si on connaît suffisamment la structure du milieu poreux, elle est peu utilisée en pratique. Cette distinction n'aura pas lieu dans l'étude qui suit, les milieux expérimentaux se font par empilement (matrice solide non consolidée). Pour les milieux poreux naturels ε n'excède pas 0.66 (pour l'ardoise en poudre). Néanmoins cela peut être plus élevé pour des milieux poreux industriels (0.9 en moyenne pour les fibres de verre).

Beaucoup de résultats sont issus de modèles géométriques particuliers de grains ou de pores. Ils sont obtenus dans le cas d'empilements réguliers de sphères de même diamètre. Ces empilements forment des réseaux et la porosité dépend fortement de l'arrangement (figure 2). Dans le cas d'un réseau cubique il y a beaucoup plus d'espace pour le fluide ($\varepsilon = 0.476$) que dans le cas d'un réseau cubique à face centré ($\varepsilon = 0.255$) qui est le réseau régulier, le plus compact que l'on puisse obtenir avec des sphères de même diamètre.

Il existe de nombreux cas où la porosité est variable mais on la considère comme uniforme.

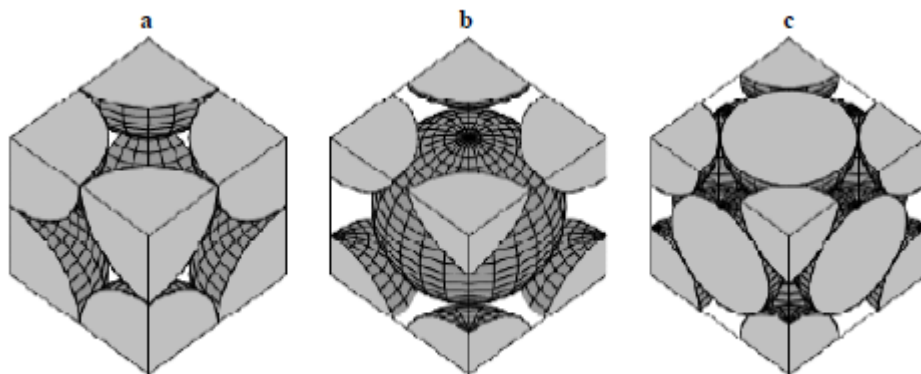


Figure2 : modèle géométrique par empilement régulier de sphères de même diamètre. (a) : cubique $\varepsilon = 0.476$, (b) : cubique centré $\varepsilon = 0.32$, (c) : cubique à face centré $\varepsilon = 0.255$.

Des mesures expérimentales donnent dans le tableau (1) ci dessous quelques valeurs de la porosité pour différents matériaux

Matériaux	porosité	Matériaux	porosité
Matériau moussoux	0.98	Sable	0.37-0.5
Fibrd de verre	0.88-0.93	Poudre de silice	0.37-0.49
Fil à tisser	0.68-0.76	Sphère bien empilée	0.36-0.43
Grain de silice	0.65	Filtre de cigarette	0.17-0.49
Poudre d'ardoise noir	0.57-0.66	Brique	0.12
Cuir	0.56-0.59	Poudre de cuivre	0.09-0.34
Catalyseur	0.45	Pierre à chaud Dolomite	0.04-0.10
Granulé de pierres	0.44-0.45	Terre	0.43

Tableau 1: Porosité de quelques matériaux

2.3 Perméabilité

La perméabilité K se réfère à la capacité du milieu poreux à laisser passer le ou les fluides à l'intérieur des pores. Elle ne dépend que de la géométrie de la matrice solide, en particulier de la porosité. Ainsi le milieu est d'autant plus perméable que les pores sont connectés entre eux.

Généralement K est déterminée par des mesures expérimentales, par le biais de la loi de Darcy régissant le mouvement du fluide dans le milieu poreux. Il existe de nombreux travaux répertoriant la perméabilité pour différents milieux. Elle se situe entre 10^{-7} et 10^{-9} pour le gravier et 10^{-13} et $10^{-16}m^2$ pour l'argile stratifié.

Il est possible d'évaluer la perméabilité K grâce à des géométries particulières du milieu, par l'intermédiaire de ϵ et d'une dimension caractéristique de la matrice solide à l'échelle du pore.

On note notamment :

- la relation de Kozeny-Carman (1937), qui donne une estimation satisfaisante de K dans le cas d'un empilement de grains de formes à peu près identiques et dont la distribution des tailles des grains n'est pas trop éloignée d'une taille moyenne D :

$$K = \frac{D^2 \epsilon^3}{36C_0(1 - \epsilon)^2}$$

C_0 est un coefficient de forme, il est compris entre 3.6 et 5. Il est égal à 4.8 pour les grains sphériques et dans ce cas D représente le diamètre de la sphère. Le tableau ci-dessous représente

La perméabilité de quelques matériaux poreux :

Matrice	Perméabilité [m ²]	Matrice	Perméabilité [m ²]
Briques	$4.8.10^{-15}$ - $2.2.10^{-13}$	Sable	2.10^{-11} - $1.8.10^{-10}$
Pierre à chaud, Dolomite	2.10^{-15} - $4.5.10^{-14}$	Cheveux artificiels	$8.3.10^{-10}$ - $1.2.10^{-9}$
Cuir	$9.5.10^{-14}$ - $1.2.10^{-13}$	Plaque de liège	$3.3.10^{-10}$ - $1.5.10^{-9}$
Poudre d'ardoise noire	$4.9.10^{-14}$ - $1.2.10^{-13}$	Fils à tisser	3.810^{-9} - $2.2.10^{-8}$
Terre	$2.4.10^{-11}$ - $1.4.10^{-13}$	Cigarette	$1.1.10^{-9}$
Fibre de verre	$2.4.10^{-11}$ - $5.1.10^{-11}$		

Tableau2: la perméabilité de quelques matériaux poreux

RÉFÉRENCES

BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] D. Nield, A. Bejan, Convection in Porous Media, 3rd ed. Spingerverlang, New York Inc. (2006).
 - [2] S. Bories, Natural convection in Porous Media, in Advances in Transport in Porous Media (Edited by J. Bear and M. Y. Corapcioglu). MartinusNijhoff, Dordrecht (1987).
 - [3] J.P. Caltagirone, Thermoconvective instabilities in a Porous Medium bounded by two concentric horizontal cylinders, J. Fluid Mech.vol 76, pp. 337-362 (1976).
 - [4] M.C. Charrier-Mojtabi, A. Mojtabi, M. Azaiez, G.Labrosse, Numerical and experimental study of multicellular free convection in an annular porous layer, Int.J. Heat Mass Transfer 34, pp. 3061-3074 (1991).
 - [5] M.C. Charrier-Mojtabi, Numerical simulation of two and three-dimensional free convection flows in a horizontal porous annulus using a pressure and temperature formulation, Int. J. Heat Mass Transfer 40, pp. 1521-1533 (1997).
 - [6] K. Himasekhar, H.H. Bau, Two-dimensional bifurcation phenomena in thermal convection in horizontal concentric annuli containing saturated porous media, J. Fluid Mech 187, pp. 267-300 (1988).
 - [7] J.P.B. Mota, E. Saadjan, Natural convection in a porous horizontal cylindrical annulus, J. Heat Transfer 116, pp 621-626 (1994).
 - [8] E. Saadjan, R. Lam, J.P.B. Mota, Natural convection heat transfer in the annular region between porous confocal ellipses, Int. J. Numer. Meth. Fluids 31, pp. 513-522 (1999).
 - [9] A. Bejan, The boundary layer regime in a porous layer with uniform heat flux from the side, Int. J. Heat Mass Transfer 26, pp. 1339-1345 (1983)
 - [10] T. Masuouka, Y. Yokote et T. Katsuhara, Heat transfer by natural convection in vertical porous layer, Bull. JSME 24, pp. 995-1001 (1981).
 - [11] K. J. Beukema et S. Bruin, Three dimensional natural convection in a confined
-

- porous medium with internal heat generation, *Int. J. Heat Mass Transfer* 26, pp. 451- 458 (1983).
- [12] H. Ineba et N Seki, A numerical study on transient heat transfer in a vertical porous layer, *Bull. JSME* 25, pp. 934- 938 (1982).
- [13] G. Lauriat et V. Prasad, Natural Convection in a Vertical Porous Cavity: a Numerical Study for Brinkman extended Darcy Formulation in Natural Convection in Porous Media.109, pp. 295. ASME, New York (1987).
- [14] W. J. Chang et C. H. Hsiao, Natural convection in a vertical cylinder filled with anisotropic porous media, *Int. J. Heat Mass Transfer* 36, pp. 3361 (1993).
- [15] B. D. Young, D. F. Williams and A. W. Bryson, Two dimensional natural convection and conduction in packed bed containing a hot spot and its relevance to the transport of air in a coal dump, *Int. J. Heat Mass Transfer* 29, pp. 331-336 (1986).
- [16] B. Nasrallah, T. Amara et M. A. Du Peuty Convection naturelle instationnaire dans un cylindre rempli de grains ouvert ses extrémités et dont la paroi est chauffée par un flux de chaleur constant: validité de l' hypothèse de l'équilibre thermique local, *Int. J. Heat Mass Transfer* 40, pp. 1155-1168 (1997).
- [17] Philip, J. R. Free convection at small Rayleigh number in porous cavities of rectangular, elliptical, triangular and other cross-sections, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 25, pp. 1503-1509 (1982).
- [18] Khanafer, K.; Al-Amiri, A.; Pop, I. Numerical analysis of natural convection heat transfer in a horizontal annulus partially filled with a fluid-saturated porous substrate, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 51, pp. 1613-1627 (2008).
- [19] Kumari, M.; Nath, G. Unsteady natural convection from a horizontal annulus filled with a porous medium, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 51, pp. 5001-5007 (2008).
- [20] Leong, J.C.; Lai, F.C.: Natural convection in a concentric annulus with a porous sleeve, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 49, pp. 3016-3027. (2006)
- [21] Sankar, M. et al.: Numerical study of natural convection in a vertical porous annulus with discrete heating, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 54, pp. 1493–1505 (2011)
- [22] S.V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and fluid flow*, McGraw-Hill book company, New York, (1980).
- [23] E.F. Nogotov, *Applications of Numerical Heat transfer*, McGraw-Hill book company, New York, (1978)
-

العنوان: الدراسة الرقمية لنموذج حمل طبيعي لفضاء حلقي اهليلجي مملوء بوسط مسامي مشبع بمائع نيوتوني.

ملخص

نقترح دراسة رقمية للسريان و الانتقال الحراري بواسطة حمل طبيعي، في نظام رقائقي مستقر، داخل فضاء حلقي اهليلجي الشكل مملوء بوسط مسامي مشبع بمائع غير منضغط نيوتوني. ونأخذ بعين الاعتبار الجدران الداخلية و الخارجية بدرجات حرارة ثابتة و متباينة . للنمذجة الرياضية نستخدم قانون Darcy، مقارنة بوسينسك ، و نموذج (دردورية- دالة تيار). كما أن معادلتنا الإستمرارية و كمية الحركة تصاغ في جملة الإحداثيات المسماة "اهليلجية" و ذلك لتسهيل كتابة الشروط الحدية و تحويل المجال المدروس من منحنى إلى مستطيل . ولإيجاد الحلول الممكنة نستعمل نموذج الحجم المنتهية، نتائج توزيعات الخطوط المتساوية الحرارة و الخطوط المتساوية التيار مقدمة مع التحليل و ذلك باختبار تأثير الميل، العوامل الهندسية و عدد رايلي-دارسي.

المفاتيح: الحمل الطبيعي، مقارنة بوسينسك، وسط مسامي، فضاء حلقي اهليلجي، طريقة الحجم المنتهية.

Title: Contribution to the study of the natural convection, in confocal elliptic annular space, filled with a fluid saturated porous medium

Abstract:

The purpose of the present paper is to analyze numerically the flow and heat transfer by steady laminar natural convection in a elliptical horizontal annulus filled with a Newtonian incompressible fluid saturated porous medium, with an isothermal inner and outer boundary. This study is carried out using the Darcy flow model, Boussinesq's approximation and the vorticity-stream function formulation, the continuity and the momentum equations are expressed in a frame of reference known as "elliptic ", to facilitate the writing of the boundary conditions and to transform the curvilinear field into a rectangular field. A computer code was developed, using finite volume method. The stream lines and temperature distributions are presented and analyzed, examining the slope, geometric parameters and Rayleigh-Darcy effect.

Key words: natural convection, Boussinesq equations, porous medium, elliptical annulus, Darcy flow model, velocity-function formulation

RESUME

Nous nous proposons d'étudier numériquement l'écoulement et le transfert de chaleur par convection naturelle, en régime laminaire et permanent, dans un espace annulaire elliptique rempli d'un milieu poreux saturé d'un fluide newtonien et incompressible, les parois interne et externe sont maintenues isothermes. En utilisant la loi de Darcy et l'approximation de Boussinesq et la formulation vorticité-fonction de courant, les équations de continuité et des quantités de mouvement obtenues sont exprimées dans un système de coordonnées dites "elliptiques", pour faciliter l'écriture des conditions aux limites et transformer le domaine curviligne en un domaine rectangulaire. Notre modèle mathématique est résolu par la méthode des volumes finis. Des résultats concernant la distribution des isothermes et des lignes de courant sont présentés et analysés, en examinant l'effet de l'inclinaison, des deux facteurs géométriques et du nombre de Rayleigh-Darcy modifié.

Mots-clés : convection naturelle, équations de Boussinesq, milieu poreux, espace annulaire elliptique, Formulation vorticité-fonction de courant