

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :
Série :

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **MAGISTER EN PHYSIQUE**

Spécialité : **ENERGETIQUE**

Option : **Photothermique**

Thème :

**REGIMES D'ECOULEMENTS ENTRE DEUX SPHERES
CONCENTRIQUES EN ROTATION**

Par

MEDJROUBI WIDED

Soutenu le : **14 / 06 / 2005**

Devant le jury :

<u>Président</u>	: L. BAHY	Professeur	Univ. Mentouri Constantine
<u>Rapporteur</u>	: M. AFRID	Professeur	Univ. Mentouri Constantine
<u>Examineurs</u>	: M.S. AIDA	Professeur	Univ. Mentouri Constantine
	Z. NEMOUCHI	Professeur	Univ. Mentouri Constantine

I. Sommaire

I. Sommaire.

I. SOMMAIRE.	1
II. NOMENCLATURE.	4
III. RESUME.	6
IV. ABSTRACT.	7
.V. التلخيص.	8
1. INTRODUCTION.	9
2. MODELISATION MATHEMATIQUE.	20
2.1 DESCRIPTION DU PROBLEME.	20
2.2 MODELE MATHEMATIQUE.	21
2.2.1 L'EQUATION DE LA CONTINUTE.	21
2.2.2 L'EQUATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT.	21
2.2.2.1 Equation de la quantité de mouvement suivant r .	21
2.2.2.2 Equation de quantité de mouvement suivant q .	21
2.2.2.3 Equation de mouvement suivant f .	22
2.2.3 LES CONDITIONS AUX LIMITES DU PROBLEME.	22
2.2.4 ADIMENSIONNALISATION DES VARIABLES.	22
2.2.5 REECRITURE DES EQUATIONS SOUS FORME ADIMENSIONNELLE.	23
2.2.5.1 Equation de la continuité.	23
2.2.5.2 Composante radiale de l'équation de la quantité de mouvement.	23
2.2.5.3 Composante polaire de l'équation de la quantité de mouvement.	23
2.2.5.4 Composante azimutale de l'équation de la quantité de mouvement.	24
2.2.6 LES CONDITIONS AUX LIMITES ADIMENSIONNELLES.	24
3. RESOLUTION NUMERIQUE.	25
3.1 METHODE NUMERIQUE.	25
3.2 METHODE DES VOLUMES FINIS.	26
3.3 DISCRETISATION DU DOMAINE PHYSIQUE.	26

I. Sommaire

3.3.1 LE MAILLAGE TYPIQUE.	27
3.3.2 MAILLAGE DECALE.	35
3.4 DISCRETISATION DES EQUATIONS.	35
3.4.1 DISCRETISATION TEMPORELLE.	35
3.4.1.1 Traitement des dérivées temporelles.	36
3.4.1.2 Traitement des termes convectifs et non linéaires.	36
3.4.1.3 Traitement des termes diffusifs et de pression.	37
3.4.2 DISCRETISATION SPATIALE.	37
3.5 DISCRETISATION DES EQUATIONS MODELISANTES.	40
3.5.1 DISCRETISATION DE L'EQUATION DE CONTINUTE.	40
3.5.2 DISCRETISATION DE LA COMPOSANTE RADIALE DE L'EQUATION DE QUANTITE DE MOUVEMENT.	41
3.5.2.1 Discrétisation du terme temporel.	42
3.5.2.2 Discrétisation des termes convectifs.	42
3.5.2.3 Discrétisation des autres termes à gauche.	43
3.5.2.4 Discrétisation des termes diffusifs.	44
3.5.2.5 Discrétisation des autres termes à droite.	45
3.5.2.6 Discrétisation du terme de pression.	45
3.5.3 DISCRETISATION DE LA COMPOSANTE POLAIRE DE L'EQUATION DE QUANTITE DE MOUVEMENT.	48
3.5.3.1 Discrétisation du terme temporel.	49
3.5.3.2 Discrétisation des termes convectifs.	49
3.5.3.3 Discrétisation des autres termes à gauche.	50
3.5.3.4 Discrétisation des termes diffusifs.	51
3.5.3.5 discrétisation des autres termes à droite.	51
3.5.3.6 Discrétisation du terme de pression.	52
3.5.4 DISCRETISATION DE LA COMPOSANTE AZIMUTALE DE L'EQUATION DE QUANTITE DE MOUVEMENT.	55
3.5.4.1 Discrétisation du terme temporel.	56
3.5.4.2 Discrétisation des termes convectifs.	56
3.5.4.3 Discrétisation des autres termes à gauche.	58
3.5.4.4 Discrétisation des termes diffusifs.	59
3.5.4.5 Discrétisation des autres termes à droite.	59
3.5.4.6 Discrétisation du terme de pression.	60
3.5.5 DISCRETISATION DES CONDITIONS AUX LIMITES.	62
3.5.5.1 Pour U. Les conditions aux limites en ce qui concerne la vitesse radiale sont:	62
3.5.5.2 Pour V. Les conditions aux limites en ce qui concerne la vitesse méridionale sont:	63

I. Sommaire

3.5.5.3 Pour W. Les conditions aux limites en ce qui concerne la vitesse azimutale sont:	64
3.6 EQUATION DE DISCRETISATION DE LA PRESSION.	64
3.7 RESOLUTION DES EQUATIONS ALGEBRIQUES OU EQUATIONS DISCRETISEES.	70
3.8 LA METHODE DE BALAYAGE.	71
3.9 ALGORITHME DE THOMAS.	72
3.10 ALGORITHME TRI DIAGONAL CYCLIQUE.	73
3.11 ALGORITHME SIMPLER.	75
3.12 EQUATION DE LA VORTICITE.	77
3.12.1 DEFINITION.	77
3.12.2 EQUATION DE TRANSFERT DE LA VORTICITE.	78
3.12.3 EQUATION DE TRANSFERT DE LA VORTICITE AZIMUTALE DANS LES COORDONNEES SPHERIQUES.	78
3.12.4 EQUATION DE LA VORTICITE AZIMUTALE.	79
3.13 CALCUL DU TORQUE.	79
3.14 CALCUL DE L'ENERGIE CINETIQUE MOYENNE.	81
4. RESULTATS ET DISCUSSION.	82
<hr/>	
4.1 VALIDATION NUMERIQUE.	82
4.1.1 COMPARAISON.	85
4.1.2 ECOULEMENT A TRES FAIBLE NOMBRE DE REYNOLDS – ECOULEMENT DE STOKES.	86
4.1.3 REPRODUCTION DE LA TRANSITION 0-1 VORTEX.	87
4.2 PROCEDURE DE CALCUL.	89
4.4.1 PROCEDURE 1.	89
4.4.2 PROCEDURE 2.	89
4.3 EXPOSE DES RESULTATS OBTENUS.	89
4.3.1 LE CAS DE RE = 650.	89
4.3.2 LE CAS DE RE = 700.	97
4.3.3 LE CAS DE RE = 800.	105
4.3.4 LE CAS DE RE= 1000.	115
4.5.7 LE CAS DE RE=2000.	124
4.5.8 LE CAS DE RE=3000.	132
5. CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS.	141
<hr/>	
Références	144
<hr/>	

II. Nomenclature.

Symboles grecques.

b rapport d'aspect

q angle polaire

f angle azimutal

Ω_1 vitesse angulaire de la sphère intérieure

n viscosité cinématique

w vorticité

w_f composante azimutale de la vorticité

r masse volumique

Symboles latins.

Re nombre de Reynolds

P_0 pression de référence

F force

T torque

E_c énergie cinétique

E_{KIN} énergie cinétique moyenne

r distance radiale

U composante radiale de la vitesse

V composante polaire de la vitesse

W composante azimutale de la vitesse

t symbole du temps

Δt incrément temporel

P pression, point se trouvant au centre du volume de contrôle typique

N point se trouvant dans la direction radiale positive par rapport au point de référence P

S point se trouvant dans la direction radiale négative par rapport au point de référence P

F point se trouvant dans la direction polaire positive par rapport au point de référence P

B point se trouvant dans la direction polaire négative par rapport au point de référence P

E point se trouvant dans la direction azimutale positive par rapport au point de référence P

W point se trouvant dans la direction azimutale négative par rapport au point de référence P

n face se trouvant entre les deux points N et P

II. Nomenclature

s face se trouvant entre les deux points P et S

f face se trouvant entre les deux points F et P

b face se trouvant entre les deux points P et B

e face se trouvant entre les deux points E et P

w face se trouvant entre les deux points P et W

Δr_p distance radiale entre deux faces du maillage typique non décalé, en référence au point P qui se trouve au centre entre ces deux faces considérées

Δq_p distance polaire entre deux faces du maillage typique non décalé, en référence au point P qui se trouve au centre entre ces deux faces considérées

Δf_p distance azimutale entre deux faces du maillage typique non décalé, en référence au point P qui se trouve au centre entre ces deux faces considérées

dr_n distance radiale entre deux points du maillage typique non décalé, en référence à la face n qui sépare les deux points considérés

dq_f distance polaire entre deux points du maillage typique non décalé, en référence à la face f qui sépare les deux points considérés

df_e distance azimutale entre deux points du maillage typique non décalé, en référence à la face e qui sépare les deux points considérés

Indices.

u indique le décalage suivant la direction radiale

v indique le décalage suivant la direction polaire

w indique le décalage suivant la direction azimutale

int relatif à la sphère intérieure

ext relatif à la sphère extérieure

Exposants.

t indique que le terme est évalué au temps t

$t - \Delta t$ indique que le terme est évalué au temps $t - \Delta t$

$t + \Delta t$ indique que le terme est évalué au temps $t + \Delta t$

III. Résumé.

On considère l'étude numérique de l'écoulement laminaire et visqueux entre deux sphères concentriques en rotation. La configuration étudiée est celle avec une sphère intérieure en rotation avec une vitesse angulaire constante et une sphère externe fixe. Les paramètres de contrôle du problème sont le rapport d'aspect $b = (R_2 - R_1)/R_1$ et le nombre de Reynolds basé sur la vitesse de rotation de la sphère intérieure, R_1 et R_2 étant les rayons de la sphère intérieure et extérieure; respectivement. Le cas spécifique qu'on se propose d'étudier est celui de $b = 0.17$ et $650 \leq Re \leq 3000$. Les écoulements obtenus sont : l'écoulement 0-vortex, 0-vortex avec pincements et écoulement 2-vortex. Les écoulements qu'on obtient, pour chaque valeur du nombre de Reynolds, feront l'objet d'une étude descriptive.

Mots clés: Ecoulement de Couette sphérique, géométrie sphérique, méthode des volumes finis, entrefers moyens.

IV. Abstract.

We consider the numerical simulation of the laminar and viscous flow between two concentric and rotating spheres. The inner sphere rotates with a constant angular velocity while the outer sphere is kept stationary. The control parameters are the aspect ratio $b = (R_2 - R_1)/R_1$ and the Reynolds number based on the inner sphere velocity. R_1 and R_2 are the radii of the inner and the outer sphere respectively. We consider the specific case of $b = 0.17$ and $650 \leq \text{Re} \leq 3000$, and we obtain the following flows : 0-vortex flow, 0-vortex with pinches flow and the 2-vortex flow. For each Reynolds number the obtained flow is described.

Key words: Spherical Couette flow, spherical geometry, finite volumes method, medium gaps.

V. التلخيص.

في هذا العمل نتطرق إلى الدراسة الرقمية لجريان لزج وغير مضطرب بين كرتين متمركزتين في حالة دوران. الكرة الداخلية تدور بسرعة زاوية ثابتة Ω_1 والكرة الخارجية مثبتة. العوامل التي تتحكم في الجريان هي عامل الشكل $b = (R_2 - R_1) / R_1$ و عدد رينولدز $Re = \left(\Omega_1 R_1^2 \right) / \nu$. R_2 و R_1 هما نصف قطر الكرتين الداخلية و الخارجية على التوالي. الحالة الخاصة التي تعرضنا إليها هي التي تتميز بـ $b = 0.17$ و $650 \leq Re \leq 3000$. إن كل عدد رينولدز ينجم عنه نوع جريان، في هذه الدراسة تحصلنا على : جريان بدون دوامة (vortex)، جريان بدون دوامة مع إنقباض (pincements)، و جريان بوجود دوامتين. تتم الدراسة الوصفية لكل نوع جريان.

الكلمات الدالة : جريان Couette الكروي، الشكل الكروي، طريقة الحجم المنتهية، عامل الشكل المتوسط.

1. Introduction.

L'écoulement de Couette dans l'espace annulaire entre deux sphères concentriques est d'une grande importance dans la compréhension de la physique des fluides confinés en rotation. Les résultats obtenus pour le cas des écoulements confinés entre deux cylindres (écoulement de Couette–Taylor) étudiés par le célèbre scientifique **G.I. Taylor** [1], ont été l'un des stimulateurs des études des instabilités hydrodynamiques.

L'étude des instabilités hydrodynamiques est capitale dans la compréhension des systèmes dynamiques non linéaires. Un grand progrès a été réalisé dans les domaines des instabilités, des bifurcations et des transitions vers le chaos. Plusieurs études théoriques, expérimentales et numériques ont été consacrées au cas spécifique des écoulements confinés entre deux sphères. Ces études portent surtout sur les diagrammes de bifurcation de l'écoulement et la transition laminaire–turbulent. Ces études ont permis une plus grande compréhension des instabilités sous la forme de vortex de Taylor. L'écoulement de Couette sphérique possède des applications en astrophysique et en géophysique.

L'écoulement de Couette sphérique peut être étudié sous deux aspects. On peut considérer soit le cas isotherme, soit le cas avec transfert de chaleur. L'une des références de l'écoulement de Couette sphérique avec transfert thermique est l'étude expérimentale et numérique (avec le logiciel *GEOFLOW*) de **C. Egbers et al.** [2]. Elle se base sur l'analogie de la convection dans l'espace annulaire entre deux sphères en rotation, et le problème posé par la convection thermique au cœur de la terre. On peut aussi ajouter l'effet d'un champ magnétique pour modéliser la géodynamo terrestre. Il est généralement établi, que le champ magnétique des planètes Mercure, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune et quelques lunes de Jupiter, est généré par une convection magnétohydrodynamique qui se produit dans le cœur conducteur d'électricité de ces planètes. Dans son étude numérique, **R. Hollerbach** [3], a élaboré un code numérique pseudo-spectral pour la résolution des équations de la convection magnétohydrodynamique. Quant à l'étude de l'écoulement de Couette sphérique sans transfert de chaleur, elle sert à mettre en évidence les effets de la rotation dans le développement des instabilités. Les études expérimentales de **M. Wimmer** [4] et de **G. Schrauf** [5], ont été menées dans ce sens.

Quant aux études récentes, elles explorent ces écoulements comme étant une partie dans l'étude globale des systèmes dynamiques. C'est le cas pour les études numériques de **P.S. Marcus** et **L.S. Tuckerman** [6] et de **P. Manneville** et **L.S. Tuckerman** [7].

Ces études mettent l'accent sur la construction et l'interprétation des diagrammes de bifurcation de l'écoulement de Couette sphérique. En effet, ces études tentent d'établir les différentes bifurcations qui gouvernent les transitions qui se produisent entre les différents modes d'écoulements obtenus pour la géométrie sphérique. L'écoulement de Couette sphérique est considéré comme étant plus complet que celui de Couette-Taylor (écoulement entre deux cylindres de longueur finie ou infinie) ou encore celui entre deux disques en rotation. En effet, au niveau de la région équatoriale, l'écoulement de Couette sphérique est analogue à celui de Couette Taylor. Au niveau des pôles, il est analogue à celui entre deux disques en rotation. Donc, l'écoulement de Couette sphérique devra exhiber une variété plus riche de phénomènes hydrodynamiques.

Les paramètres de contrôle de l'écoulement de Couette sphérique sont le nombre de Reynolds, le nombre de Rossby et le rapport d'aspect β qui est égal à $b = \frac{R_2 - R_1}{R_1}$. Les deux sphères peuvent être en co-rotation ou en contra-rotation. Néanmoins, la configuration la plus étudiée est celle où le nombre de Rossby est nul. Cette configuration correspond à une sphère intérieure en rotation et une sphère extérieure immobile, plus connue sous l'appellation rotor-stator. Dans ce qui suit, sauf autre indication, et pour une raison de commodité on se référera à cette dernière configuration, seule considérée dans ce mémoire, par l'appellation *écoulement de Couette sphérique*. Cette configuration qui paraît à première vue simple, donne lieu quand on fait varier les paramètres de contrôles, à des phénomènes physiques très intéressants et très variés.

L'écoulement de Couette sphérique, est la superposition d'un écoulement principal et d'un écoulement secondaire. L'écoulement principal consiste en la rotation autour de l'axe azimutal, cette dernière est induite par la rotation différentielle et visqueuse des deux sphères. L'écoulement secondaire consiste en une circulation dans le plan méridional, induite par les forces centrifuges, relativement plus importantes, près de l'équateur. Les effets de ces forces centrifuges sont plus connus sous le nom d'effets d'*Ekman* ou *Ekman pumping*. Il a été établi (notamment par les études numériques de **G. Schrauf** [5] et expérimentales de **M. Wimmer** [4]) que la perte de stabilité de l'écoulement de Couette sphérique dépend de la

valeur du rapport d'aspect β , et des conditions initiales de l'écoulement. En effet, les études expérimentales de **M. Wimmer** [4], ont démontré que les modes d'écoulement ne dépendaient pas que du nombre de Reynolds, mais aussi du rapport d'aspect β ainsi que de la manière d'accélérer la sphère intérieure. On trouve dans la bibliographie, qu'à cet effet, les rapports d'aspects ont été classés en trois catégories distinctes. Ce classement, qui n'est pas rigoureux, a été établi en fonction de la manière dont se manifeste l'instabilité; quand le seuil de stabilité est dépassé. Ces trois catégories sont, selon l'article de **P.S. Marcus** et **L.S. Tuckerman** [6] : les entrefers minces ($b \leq 0.12$), les entrefers moyens ($0.12 < b \leq 0.24$) et enfin les larges entrefers ($b > 0.24$). Bien qu'il n'existe pas de délimitation "officielle" entre la catégorie des moyens et larges entrefers, un consensus semble se dégager. En effet, la limite $b \approx 0.24$ semble être retenue, pour être la limite supérieure des moyens entrefers. Toutefois, **G. Dumas** [8], place cette limite supérieure à $b \approx 0.3$.

Pour les minces et moyens entrefers (qui est la catégorie la plus étudiée expérimentalement et numériquement), la première instabilité se présente sous la forme de vortex au niveau de la région équatoriale. Ces vortex sont dits vortex de Taylor, et se manifestent dans l'écoulement secondaire. Si l'écoulement secondaire contient un vortex par hémisphère l'écoulement secondaire est dit écoulement 1-vortex. Si l'écoulement secondaire contient deux vortex par hémisphère, il est dit écoulement 2-vortex. L'écoulement subcritique, sans vortex de Taylor, est constitué de deux cellule de circulation (deux grand vortex, un par hémisphère). Il est dit écoulement basique ou plus communément : écoulement 0-vortex.

Dans le cas des entrefers larges, la première instabilité se manifeste par une brisure de la symétrie spatiale. Des ondes spirales non symétriques par rapport à l'axe de rotation apparaissent au sein de l'écoulement. Ces ondulations possèdent des bras spiraux, dont le nombre m dépend du nombre de Reynolds. Dans l'étude expérimentale de **M. Junk** et **C. Egbers** [9], pour $b = 0.33$ des bras spiraux possédant un nombre d'onde azimutal $m = 4$, $m = 5$ et $m = 6$ ont été obtenus. Tandis que pour le cas $b = 0.5$ des ondulations spirales avec $m = 3$, $m = 4$ et $m = 5$ existent. Une autre forme d'instabilité existe pour les larges entrefers. En effet, si on induit de petites perturbations, (expérimentalement réalisée en faisant tourner la sphère extérieure pour une petite durée); on obtient des vortex de Taylor. **M. Junk** et **C. Egbers** [9], ont obtenus un vortex de Taylor par hémisphère pour $b = 0.25$ et $Re = 520$, et deux vortex de Taylor par hémisphère pour $b = 0.25$ et $Re = 900$.

Le cas le plus étudié dans la catégorie des moyens entrefers est celui de $b = 0.18$. Les études expérimentales de **M. Wimmer** [4], et numériques de **P.S. Marcus** et **L.S. Tuckerman** [6] et **R.J. Yang** et **W.J. Luo** [10], lui ont été consacrées. Ces études ont permis une plus grande compréhension des bifurcations de l'écoulement, pour cette catégorie des entrefers. Avant toute transition vers un écoulement supercritique, un pincement des lignes de courant se produit dans chaque hémisphère. Ce pincement résulte de la création d'un point de stagnation dans chaque hémisphère. Une région de lignes de courant fermées, se forme au sein de l'écoulement secondaire, suite à la création du pincement. Cette région attachée à la cellule de circulation principale, possède le même sens de rotation que cette dernière. L'écoulement ainsi décrit est dit écoulement 0-vortex avec pincements.

Pour $b = 0.18$, deux écoulements supercritiques (axisymétriques et symétriques par rapport à l'équateur) existent : l'écoulement 1-vortex et l'écoulement 2-vortex. Parmi les transitions qui peuvent se produire entre les modes d'écoulements, la transition 0-1 vortex brise la symétrie équatoriale de l'écoulement 0-vortex. Cette symétrie est reprise par l'écoulement 1-vortex. L'écoulement 2-vortex peut être obtenu par une accélération rapide de la sphère intérieure, à partir de l'état 0-vortex. Les études numériques, notamment celle de **P.S. Marcus** et **L.S. Tuckerman** [6] (qui va être détaillée plus loin), montrent que les écoulements 0-vortex et 2-vortex se trouvent sur la même branche de stabilité. Ainsi, à partir de l'écoulement 0-vortex, et en augmentant le nombre de Reynolds l'écoulement subit une transition vers l'écoulement 2-vortex (en passant par la création des pincements). Si on accélère la sphère intérieure d'une manière lente, la transition 0-1 vortex se produit, quand le nombre de Reynolds critique est atteint. $Re_c \approx 651$, pour le cas $b = 0.18$.

Durant la transition 0-1 vortex l'écoulement n'est pas symétrique par rapport à l'équateur. Donc, il y a une différence quand la sphère intérieure est accélérée rapidement ou lentement. C'est la manifestation de la dépendance par rapport aux conditions initiales, de l'écoulement de Couette sphérique. La transition dans les écoulements de Couette sphérique dépend aussi des conditions initiales. **M. Wimmer** [4], a été le premier à observer, expérimentalement cette dépendance. Il a remarqué, que l'état d'équilibre de l'écoulement dépend (en plus du nombre de Reynolds et du rapport d'aspect) de l'historique de l'écoulement. En particulier de la manière d'accélération de la sphère intérieure.

Par exemple, **J.P. Bonnet** et **A.T. Requefort** [11] ont montré que si on augmente le nombre de Reynolds de 0 à 1500, pour $\beta = 0.15$, on trouve un écoulement 0-vortex. Tandis que s'ils

augmentent le nombre de Reynolds de 0 à 900, ils obtiennent un écoulement 0-vortex, puis en augmentant le nombre de Reynolds à 1500, ils obtiennent un écoulement 2-vortex. Cette dépendance peut être comprise en dessinant le diagramme de bifurcation. Ce diagramme est construit comme suit : l'axe vertical représente le mode de l'écoulement, l'axe horizontal est celui du nombre de Reynolds. Une attention particulière, dans la construction de ce diagramme, est donnée à la nature stable ou instable des écoulements.

A partir des études numériques, notamment celle de **P.S. Marcus** et **L.S. Tuckerman** [6], il a été établi que la branche d'équilibre 0-2 vortex (schématisée dans le diagramme de bifurcation sur la figure 1.1) est linéairement instable aux perturbations non symétriques par rapport à l'équateur. Cette instabilité se manifeste quand le nombre de Reynolds est compris dans l'intervalle: $(651 < Re < 775)$ pour le cas $b = 0.18$. La limite inférieure de cet intervalle correspond au nombre de Reynolds critique donnant naissance à l'écoulement 1-vortex. Cet intervalle indique la plage (en terme du nombre de Reynolds) où la branche 0-2 vortex est linéairement instable. Donc si les perturbations (non symétriques par rapport à l'équateur) auraient le temps de se développer, quand le nombre de Reynolds appartient à cet intervalle, l'écoulement 1-vortex se produit. C'est le cas d'une accélération lente de la sphère intérieure.

D'autre part, si l'accélération de la sphère intérieure est trop rapide, les perturbations (non symétriques par rapport à l'équateur) n'ont pas le temps de se développer et l'écoulement 0-vortex subit une transition vers l'écoulement 2-vortex. L'écoulement dans ce cas suit la courbe 0-2 vortex, figure 1.1. L'intervalle dans lequel l'équilibre 0-2 vortex est instable est limité par deux bifurcations de type fourche, supercritique à la limite supérieure, et subcritique à la limite inférieure. Les solutions instables sont asymétriques par rapport à l'équateur. L'écoulement 1-vortex est créé suite à une bifurcation nœud – col (*saddle node bifurcation*). Cette bifurcation se fait à un nombre de Reynolds légèrement inférieur à celui de la transition 0-2 vortex. Pour le cas $b = 0.18$ cette valeur est $Re = 645$.

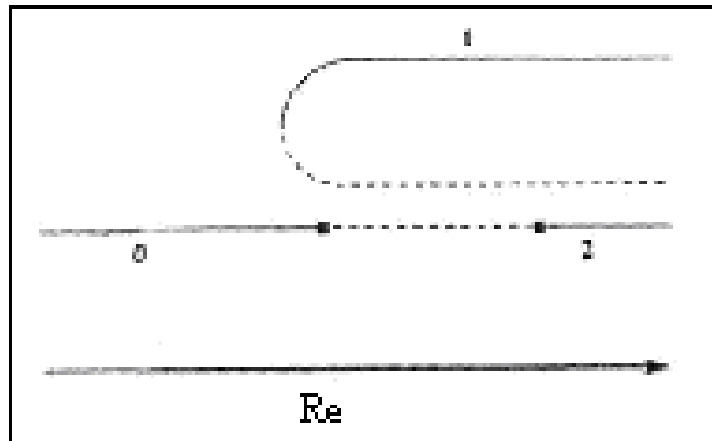


Figure 1.1 : Représentation schématique du diagramme de bifurcation pour le rapport d'entrefer $b = 0.18$. Les lignes solides représentent des solutions stables, les lignes en pointillées représentent des solutions instables. Les numéros indiquent le nombre de vortex de Taylor par hémisphère.

L'un des articles remarquables, qui constitue une référence concernant la catégorie des entrefers moyens (type rotor – stator), est celui de **P.S. Marcus** et **L.S. Tuckerman** [6]. Cet article brille par de nombreux aspects, il traite des modes d'écoulements permanents obtenus, ainsi que des transitions entre ces modes. Pour valider les résultats obtenus par notre code numérique, on a considéré les résultats obtenus dans cet article [6], comme référence. Les détails de cette validation numérique seront exposés dans le chapitre 4.

Dans cet article, qui se divise en deux parties, les écoulements sont décrits en détail, en plus d'une analyse de la variation du moment angulaire et de l'énergie cinétique de l'écoulement. Les auteurs ont détaillé les transitions entre les différents modes d'écoulements obtenus. Le cas étudié celui de $\beta = 0.18$ et $600 \leq Re \leq 900$. Cette configuration a permis l'obtention des écoulements suivants: l'écoulement 0-vortex à $Re = 600$. L'écoulement 0-vortex avec pincements à $Re = 650$. L'écoulement 1-vortex à $Re = 900$. Et enfin, l'écoulement 2-vortex à $Re = 900$.

Dans la deuxième partie de l'article [6], les transitions entre ces différents modes d'écoulements sont détaillées. La méthode numérique est la méthode pseudo-spectrale. Pour la discrétisation dans la direction radiale, les fonctions utilisées sont les polynômes de Chebyshev au nombre de 32. Pour la direction azimutale les fonctions utilisées sont trigonométriques sinusoïdales au nombre de 128. Pour l'intégration temporelle la méthode

d'Adams–Bashforth a été utilisée pour les termes non linéaires et celle implicite de Crank–Nicholson pour les termes visqueux (termes diffusifs). Cette étude englobe aussi une étude de la stabilité linéaire, pour pouvoir obtenir les modes instables. Les auteurs ont construit un diagramme de bifurcation qui permet de comprendre les transitions entre les modes d'écoulement et comment obtenir ces transitions. Ce diagramme a été établi en illustrant le moment angulaire des modes d'écoulement en fonctions du nombre de Reynolds. Les auteurs ont obtenu les transitions suivantes:

La transition 0-2 vortex, a été obtenue en commençant avec un écoulement de Stokes (obtenu pour $Re = 0$), puis en augmentant le Reynolds à 800. Cette transition se fait d'une façon symétrique.

La transition 1-0 vortex: on commence par un écoulement 1-vortex obtenu pour $Re = 645$, puis on diminue le nombre de Reynolds à 644. Les deux vortex (un dans chaque hémisphère) durant cette transition, diminue en taille jusqu'à disparaître.

La transition 0-1 vortex : cette transition a été obtenue en commençant avec un écoulement 0-vortex obtenu pour $Re = 650$, puis en augmentant le nombre de Reynolds à 700. Cette transition brise la symétrie équatoriale.

La transition 2-1 vortex: on commence avec un écoulement permanent 2-vortex (obtenu pour $Re = 800$, puis on diminue le nombre de Reynolds à 750. Cette transition est asymétrique par rapport à l'équateur.

G. Schrauf [5], a étendu son étude de la bifurcation au plan (Re, b) , c'est-à-dire que le nombre de Reynolds et le rapport d'aspect sont variables. Dans son étude numérique, il a discrétisé les équations modélisantes en utilisant les différences centrées du second ordre. Il a prédit que l'écoulement 0-vortex n'est plus instable, vis-à-vis des perturbations axisymétriques, pour $b > 0.24$. Au delà de cette limite, l'écoulement basique (0-vortex) reste stable aux perturbations axisymétriques. L'écoulement supercritique avec des vortex de Taylor ne peut être obtenu, qu'en introduisant des conditions initiales particulières. La solution avec des vortex de Taylor, devient donc instable vis-à-vis des perturbations tridimensionnelles pour toute valeur du nombre de Reynolds. Donc les vortex de Taylor ne peuvent plus apparaître. **G. Schrauf** [5], a estimé cette limite à $b \approx 0.45 - 0.48$. En plus, **Schrauf** [5] a étudié les transitions de l'écoulement de Couette sphérique vers l'écoulement 1-vortex pour différentes valeurs du rapport d'aspect ($0.10 < \beta < 0.25$) et pour un nombre de

Reynolds couvrant l'intervalle $[400,1500]$. Il a montré que cette transition dépendait fortement de la valeur de β .

Il a obtenu numériquement, que pour $(b < b_B)$ avec $(0.2315 < b_B < 0.2320)$, l'écoulement perd sa stabilité 0-vortex et devient un écoulement 1-vortex. L'hypothèse considérée par **Schrauf** [5] est que cette transition est due à une bifurcation, qui brise la symétrie de l'écoulement. Si $(b_B < b < b_F)$ avec $(b_F \approx 0.45 - 0.48)$, l'écoulement 1-vortex est stable. Dans le cas où $(b > b_F)$ l'auteur a montré que l'écoulement ne développe pas de vortex de Taylor. Les valeurs b_B et b_F sont déterminées numériquement en déterminant la région d'instabilité de l'écoulement principal, et la région d'existence de l'écoulement 1-vortex. Cette étude constitue une introduction pour le cas des larges entrefers. Dans cette catégorie, quand on atteint le nombre de Reynolds critique, l'instabilité qui est connue sous le nom d'instabilité des larges entrefers (*wide gap instability*) se manifeste.

Contrairement aux entrefers minces et moyens, peu d'études numériques et expérimentales ont été dédiées aux cas des larges entrefers. Comme déjà mentionner, plus haut, l'écoulement 0-vortex pour cette catégorie, est stable vis-à-vis des perturbations axisymétriques. Donc, on n'observe pas de solutions avec des vortex de Taylor pour les larges entrefers. Les études expérimentales de **I.M. Yavorskaya** et **Yu.N. Belayev** [12], ont porté sur les cas $b = 0.398$, $b = 0.54$, $b = 1.0$ et $b = 1.33$. **C. Egbers** et **P. Wulf** [13], ont mené une étude expérimentale pour les deux cas $b = 0.33$ et $b = 0.5$. Il ressort de ces études, les caractéristiques suivantes : l'écoulement 0-vortex est linéairement instables aux perturbations tridimensionnelles. L'écoulement supercritique consiste en la présence d'ondulations spirales équidistantes. Ces dernières s'étendent, dans chaque hémisphère, de l'équateur vers les pôles. Ces ondulations possèdent des bras spiraux, avec un nombre d'onde m . Ce nombre dépend de la valeur du rapport d'aspect. Expérimentalement, d'après l'étude de **M. Junk** et **C. Egbers** [9], $m = 6$ pour $b = 0.33$, $m = 5$ pour $b = 0.5$ et $m = 4$ pour $b = 1.0$. La disposition en ondulations spirales est présente dans les deux hémisphères, mais cette configuration n'est pas symétrique par rapport à l'équateur.

Quand le nombre de Reynolds augmente, le nombre m décroît. Par exemple $m = 4$ et 3 pour $b = 0.5$. Si le nombre de Reynolds augmente d'avantage, l'écoulement devient turbulent. Dans la figure 1.2, on peut distinguer ces ondes (ou ondulations) spirales.

Une autre étude expérimentale qui concerne la catégorie des larges entrefers est celle menée par **Schmidt, Egbers et Rath** [14]. Cette étude est basée sur des techniques de visualisation et de mesure que sont le LDV (Laser Doppler Velocimetry) et le PIV (Particle Image Velocimetry). Les auteurs ont exploré le cas $b = 1.0$, ils ont obtenu un écoulement supercritique symétrique par rapport à l'équateur.

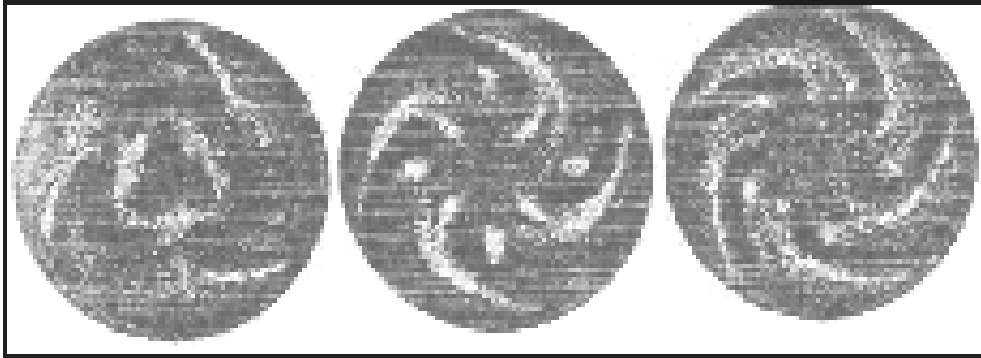


Figure 1.2 : visualisations de l'écoulement pour la catégorie des larges entrefers pour le cas de $b = 0.5$. On note des bras spiralés avec $m = 5$ (Re=1320), $m = 4$ (Re=1575) et $m = 3$ (Re=1680).

L'instabilité se manifeste quand ($489 < Re < 493$), sous la forme d'ondes spirales, comme c'est le cas pour l'étude de **M. Junk et C. Egbers** [9]. Pour $Re = 489$, le nombre d'onde azimutal est $m = 3$. Tandis que pour $Re = 505$, $m = 2$. Une autre étude numérique consacrée à cette catégorie, est l'étude menée par **M. Junk, R. Hollerbach et C. Egbers** [15]. Cette étude numérique utilise la méthode spectrale. Cette méthode consiste en la représentation du champ de vitesse sous forme poloidale-toroidale. Ensuite une expansion en polynômes de Legendre est opérée dans les directions polaire et azimutale. Une expansion en polynômes de Chebyshev pour la direction radiale. L'intégration temporelle suit la méthode de Rung-Kutta. Les auteurs ont trouvé, en étudiant l'intervalle ($0.28 < b < 0.3$) que le nombre d'onde azimutal qui correspond à l'apparition de l'instabilité m_c diminue quand b augmente. Pour le cas ($b = 0.498$) $m_c = 5$ et l'écoulement est asymétrique aussi bien par rapport à l'équateur, que par rapport à l'axe de rotation. Quand les auteurs ont augmenté le nombre de Reynolds, ils ont trouvé que le mode d'écoulement change d'une telle manière que m_c diminue chaque fois d'une unité.

En ce qui concerne la catégorie des minces entrefers, le nombre des vortex de Taylor par hémisphère, peut être largement supérieur à deux paires. **F. Bartels** [16] a obtenu numériquement un cas avec 3 paires de vortex, pour $b = 0.15$ et $Re = 1500$. Dans son étude numérique, il utilise la méthode des différences finies du second ordre, et un schéma implicite pour la variation temporelle avec une erreur d'ordre deux. L'une des particularités, des écoulements qui se produisent pour cette catégorie et que le nombre des vortex de Taylor par hémisphère peut être très grand, comparé aux deux autres catégories.

F. Bartels [14] a trouvé que pour le cas de $b = 0.025$ et $Re = 14000$ on obtient entre 13 et 16 vortex par hémisphère. L'étude de **G. Dumas** [8] a porté (en ce qui concerne la catégorie des minces entrefers), sur le cas $b = 0.06$. Cette étude a permis la validation de son code pseudo-spectral pour la catégorie des larges entrefers. Les résultats rapportés dans son étude [8] ont été comparés à ceux obtenus expérimentalement par **K. Nakabayashi** [17]. La première instabilité obtenue dans les deux études (numérique et expérimentale), est sous la forme d'une paire de vortex dits vortex spiral de Taylor-Görtler. Les axes des vortex de Taylor-Görtler ne sont pas parallèles à l'équateur. Le nombre de Reynolds critique correspondant à l'instabilité est $Re_c \approx 166$. Le nombre maximum de vortex spiraux de Taylor-Görtler obtenu par les deux études est de six vortex par hémisphère.

Bien que la plus part des écoulements observés dans la configuration sphérique sont symétriques par rapport à l'axe de rotation (axisymétriques) et aussi par rapport à l'équateur, ceci n'exclut pas la présence d'écoulements asymétriques. Ces écoulements ont été notamment obtenus expérimentalement et numériquement par **Bühler** [18]. On note aussi dans les études numériques de **R. Hollerbach** [19] la présence d'un écoulement asymétrique 1-vortex qui est semblable à l'état 1-vortex mais avec la particularité que l'un des deux vortex est plus grand que l'autre et qu'il se trouve au niveau de l'équateur. Ce cas a été obtenu pour les paramètres $b = 0.336$ et $Re = 1390$. Un écoulement asymétrique 2-vortex a été obtenu par **R.J. Yang** et **W.J. Luo** [10], pour les paramètres $b = 0.18$ et $Re = 1000$.

Ce chapitre nous a donc permis d'introduire l'écoulement de Couette sphérique, à travers les différentes catégories du rapport d'aspect et des instabilités qu'il permet de mettre en évidence. Le chapitre 2, sera celui de la modélisation mathématique du problème. Le chapitre 3 servira à expliquer les détails de la résolution numérique et englobera aussi la

discrétisation des équations modélisantes. C'est dans le chapitre 4 que seront exposés la validation des résultats obtenus par notre code de calcul, ainsi que les résultats numériques obtenus pour le cas spécifique qu'on a étudié. Ce cas correspond à $b = 0.17$ et $650 \leq Re \leq 3000$. Les résultats seront discutés dans le chapitre 4. Le dernier chapitre, le chapitre 5 porte les conclusions de notre travail numérique et sur les perspectives qu'il ouvre pour de futures études.

2. Modélisation mathématique.

2.1 Description du problème.

Dans ce chapitre on cherche à modéliser les phénomènes hydrodynamiques résultants de l'écoulement laminaire d'un fluide visqueux entre deux sphères concentriques de rayons R_1, R_2 respectivement. La sphère intérieure est en rotation avec une vitesse angulaire constante Ω_1 , la sphère extérieure est statique. Le nombre de Reynolds basé sur la vitesse de la sphère interne est $Re = \frac{\Omega_1 R_1^2}{\nu}$, ν étant la viscosité dynamique du fluide considéré.

Le problème physique posé par la configuration précédente est décrit par les équations aux dérivées partielles de continuité et des quantités de mouvement, dites Equations de Navier – Stokes, ainsi que par leurs conditions initiales et aux limites. Ces équations seront écrites dans les coordonnées sphériques, ce qui permettra une meilleure analyse des résultats et une facilité de calcul étant donné la nature géométrique du domaine de travail. Un schéma descriptif du système à étudier est donné figure 2.1.

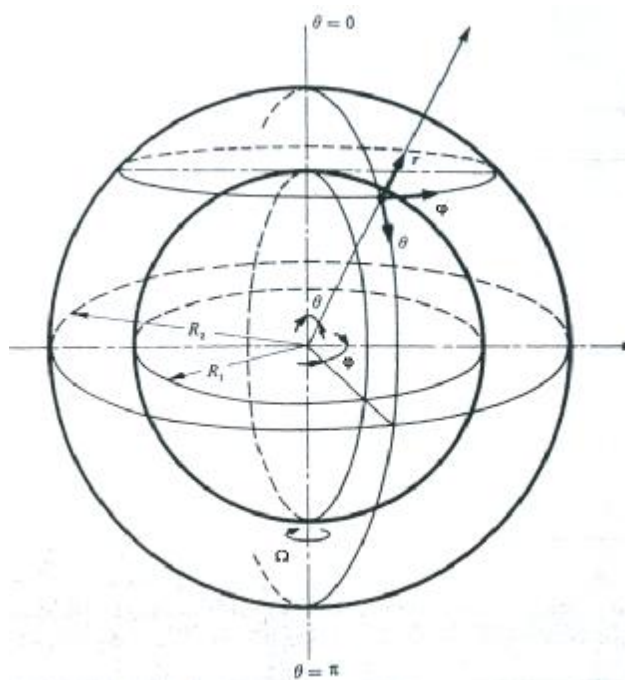


Figure 2.1: schéma du problème.

Avec:

$$R_1 \leq r \leq R_2$$

$$0 \leq q \leq p$$

$$0 \leq j \leq 2p$$

Pour $t > 0$,

2.2 Modèle mathématique.

$$\text{A } t = 0, U = V = W = 0$$

Pour $t > 0$:

2.2.1 L'équation de la continuité.

Pour un écoulement incompressible, l'équation de la continuité en coordonnées sphériques se présente sous la forme suivante:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial q} (V \sin q) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial f} (W) = 0$$

U, V, W étant les composantes radiale, méridionale et azimutale de la vitesse.

2.2.2 L'équation de la quantité de mouvement.

2.2.2.1 Equation de la quantité de mouvement suivant r.

$$\begin{aligned} r \left[\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U U) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial q} (U V \sin q) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial f} (U W) \right. \\ \left. - \frac{v^2}{r} - \frac{w^2}{r} \right] = m \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left(\sin q \frac{\partial U}{\partial q} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 q} \frac{\partial^2 U}{\partial f^2} - \frac{2U}{r^2} \right. \\ \left. - \frac{2}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial q} (V \sin q) - \frac{2}{r^2 \sin q} \frac{\partial W}{\partial f} \right] - \frac{\partial P}{\partial r} \end{aligned}$$

2.2.2.2 Equation de quantité de mouvement suivant q .

$$\begin{aligned} r \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U V) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial q} (V V \sin q) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial f} (V W) + \frac{U V}{r} \right. \\ \left. - \frac{W^2 \cot q}{r} \right] = m \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left(\sin q \frac{\partial V}{\partial q} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 q} \frac{\partial^2 V}{\partial f^2} \right. \\ \left. - \frac{V}{r^2 \sin^2 q} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial q} - \frac{2 \cot q}{r^2 \sin q} \frac{\partial W}{\partial f} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial q} \end{aligned}$$

2.2.2.3 Equation de mouvement suivant f .

$$r \left[\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U W) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial q} (V W \sin q) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial f} (W W) + \frac{U W}{r} + \frac{W V}{r} \cot q \right] = m \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left(\sin q \frac{\partial W}{\partial q} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 q} \frac{\partial^2 W}{\partial f^2} + \frac{2}{r^2 \sin q} \frac{\partial U}{\partial f} + \frac{2 \cot q}{r^2 \sin q} \frac{\partial V}{\partial f} - \frac{W}{r^2 \sin q} \right] - \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial P}{\partial f}$$

2.2.3 Les conditions aux limites du problème.

$$\text{A } r=R_1, \quad U = V = 0, \quad W = \Omega_1 R_1 \sin q$$

$$\text{A } r=R_2, \quad U = V = W = 0$$

$$\text{A } q = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q} = V = \frac{\partial W}{\partial q} = 0$$

$$\text{A } q = p, \quad \frac{\partial U}{\partial q} = V = \frac{\partial W}{\partial q} = 0$$

En plus de ces conditions aux limites, il y a les conditions de périodicité qui sont:

$$U(r, q, f) = U(r, q, f + 2p)$$

$$V(r, q, f) = V(r, q, f + 2p)$$

$$W(r, q, f) = W(r, q, f + 2p)$$

2.2.4 Adimensionnalisation des variables.

On va réécrire les équations modélisantes et les conditions aux limites en utilisant les variables adimensionnelles suivantes :

$$r^* = \frac{r}{R_1} \quad \text{Distance radiale dimensionnelle}$$

$$u^* = \frac{U}{\Omega_1 R_1} \quad \text{Vitesse radiale adimensionnelle}$$

$$v^* = \frac{V}{\Omega_1 R_1} \quad \text{Vitesse méridionale adimensionnelle}$$

$$w^* = \frac{W}{\Omega_1 R_1} \quad \text{Vitesse azimutale adimensionnelle}$$

$$\text{Re} = \frac{\Omega_1 R_1^2}{n} \quad \text{Nombre de Reynolds}$$

$$t^* = \frac{R_1}{\Omega_1 R_1} \quad \text{Temps adimensionnel}$$

$$P^* = \frac{P - P_0}{r (\Omega_1 R_1)^2} \quad \text{Pression adimensionnelle}$$

2.2.5 Réécriture des équations sous forme adimensionnelle.

Donc après l'introduction de ces variables adimensionnelles, le problème se posera sous la forme adimensionnelle suivante, on omet d'écrire l'exposant * pour des raisons de commodité:

$$\text{A } t = 0, U = V = W = 0$$

Pour $t > 0$,

2.2.5.1 Equation de la continuité.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial q} (V \sin q) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial f} (W) = 0$$

2.2.5.2 Composante radiale de l'équation de la quantité de mouvement.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U U) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial q} (U V \sin q) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial f} (U W) - \frac{V^2}{r} - \frac{W^2}{r} = \\ & \text{Re} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left(\sin q \frac{\partial U}{\partial q} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 q} \frac{\partial^2 U}{\partial f^2} - \frac{2U}{r^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{2}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial q} (V \sin q) - \frac{2}{r^2 \sin q} \frac{\partial W}{\partial f} \right] - \frac{\partial P}{\partial r} \end{aligned}$$

2.2.5.3 Composante polaire de l'équation de la quantité de mouvement.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U V) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial q} (V V \sin q) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial f} (V W) + \frac{U V}{r} - \frac{W^2 \cot q}{r} = \\ & \text{Re} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left(\sin q \frac{\partial V}{\partial q} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 q} \frac{\partial^2 V}{\partial f^2} - \frac{V}{r^2 \sin^2 q} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial q} \right. \\ & \quad \left. - \frac{2 \cot q}{r^2 \sin q} \frac{\partial W}{\partial f} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial q} \end{aligned}$$

2.2.5.4 Composante azimutale de l'équation de la quantité de mouvement.

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U W) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial q} (V W \sin q) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial f} (W W) + \frac{U W}{r} \\ + \frac{W V}{r} \cot q = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left(\sin q \frac{\partial W}{\partial q} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 q} \frac{\partial^2 W}{\partial f^2} \right. \\ \left. + \frac{2}{r^2 \sin q} \frac{\partial U}{\partial f} + \frac{2 \cot q}{r^2 \sin q} \frac{\partial V}{\partial f} - \frac{W}{r^2 \sin q} \right] - \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial P}{\partial f} \end{aligned}$$

2.2.6 Les conditions aux limites adimensionnelles.

$$\text{A } r=1, \quad U = V = 0, \quad W = \sin q$$

$$\text{A } r=1.17, \quad U = V = W = 0$$

$$\text{A } q = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q} = V = \frac{\partial W}{\partial q} = 0$$

$$\text{A } q = p, \quad \frac{\partial U}{\partial q} = V = \frac{\partial W}{\partial q} = 0$$

3. Résolution Numérique.

Dans ce chapitre on va exposer les différentes étapes suivies pour la résolution numérique des équations différentielles modélisantes. On exposera la méthode numérique utilisée, la discrétisation du domaine de calcul et des équations modélisantes. On introduira ensuite, les différents algorithmes utilisés pour résoudre les systèmes d'équations discrétisées obtenues.

Comme précédemment introduit dans le chapitre de la modélisation mathématique, l'écoulement de Couette sphérique est gouverné par l'équation de continuité et les équations de conservation de la quantité de mouvement (les équations de Navier–Stokes) et leurs conditions initiales et aux limites. Ces équations ne possèdent pas de solutions analytiques, donc on utilisera une méthode numérique pour leur résolution.

3.1 Méthode numérique.

Selon **J.M. Huré** et **D. Pelat** [20], on regroupe sous le terme générique de méthodes numériques, toutes les techniques de calcul qui permettent de résoudre de manière exacte ou, le plus souvent, de manière approchée un problème donné. Une méthode numérique met en œuvre une certaine procédure, une série d'opérations, généralement en très grand nombre, que l'on transcrita ensuite dans un langage de programmation. Les équations différentielles expriment un principe de conservation d'une variable, dite variable dépendante.

Le but recherché par l'utilisation d'une méthode numérique est donc la détermination de ces variables dépendantes dans le domaine à étudier. Une des classes des méthodes numériques, est celles dites méthodes de discrétisation. Les méthodes numériques de discrétisation, reposent sur le principe du remplacement des informations continues contenues dans la solution exacte des équations différentielles (qu'on ne peut obtenir analytiquement), par des valeurs discrètes. On obtiendra donc les valeurs de la variable dépendante, localisées dans des points discrets appelés nœuds. Ces nœuds résultent du découpage du domaine de calcul. Donc le principe de discrétisation est appliqué à la fois aux équations et au domaine à étudier.

3.2 Méthode des volumes finis.

Notre choix s'est porté sur la méthode des volumes finis. Ce choix est motivé par la géométrie du problème qui n'est pas complexe, et par les capacités de calculs dont on dispose. Ces deux critères sont généralement les critères qui imposent le choix d'une méthode numérique. La méthode des volumes finis a été développée pour résoudre les problèmes de conduction de chaleur et d'écoulement des fluides, elle est décrites en détailles dans le livre de **S.V. Patankar** [21].

Le principe de base de la méthode des volumes finis est de fractionner le domaine physique en un nombre de volumes dits volume de contrôle, ensuite d'intégrer les équations de conservation dans chaque volume de contrôle. Le résultat de cette intégration, dans le domaine de calcul, sera sous la forme d'équations algébriques, dites équations discrétisées. Donc la variable dépendante sera représentée par sa valeur moyenne dans chaque volume de contrôle. Toutefois, l'intégration des équations différentielles implique de connaître comment la variable dépendante varie entre les volumes de contrôle, c'est-à-dire de connaître sa valeur aux interfaces de ces volumes. Pour cela on adoptera un profil ou une formule d'interpolation, dans notre cas on a choisi les différences centrées d'ordre deux. Le système des équations discrétisées sera résolu en utilisant des algorithmes de résolution. Un des avantages non négligeable de la méthode des volumes finis et que les équations discrétisées obtenue expriment le principe de conservation de la variable dépendante dans chaque volume de contrôle. Ainsi que dans chaque groupe de volume de contrôle et bien sur dans tout le domaine de calcul. Car en part des équations différentielles, qui expriment le principe de conservation dans un volume infinitésimal. Donc, on a la garantie que le principe de conservation est satisfait dans chaque volume de contrôle.

3.3 Discrétisation du domaine physique.

Le domaine physique sera discrétisé dans la direction radiale, polaire et azimutale. Donc notre domaine de calcul consistera en un nombre de volumes de contrôle. Chaque volume de contrôle entoure un nœud, et chaque volume de contrôle est entouré dans les trois directions par d'autres volumes, dits voisins. Le volume de contrôle est séparé de ces voisins par des faces, deux pour chaque direction. Sauf pour le cas des volumes qui se trouvent sur les limites du domaine de calcul, qui peuvent avoir moins de six faces. Les voisins de chaque volume de contrôle se trouvent, soit

dans la direction positive de l'axe des coordonnées soit dans la direction négative. Un volume de contrôle typique est illustré sur la figure 3.1.

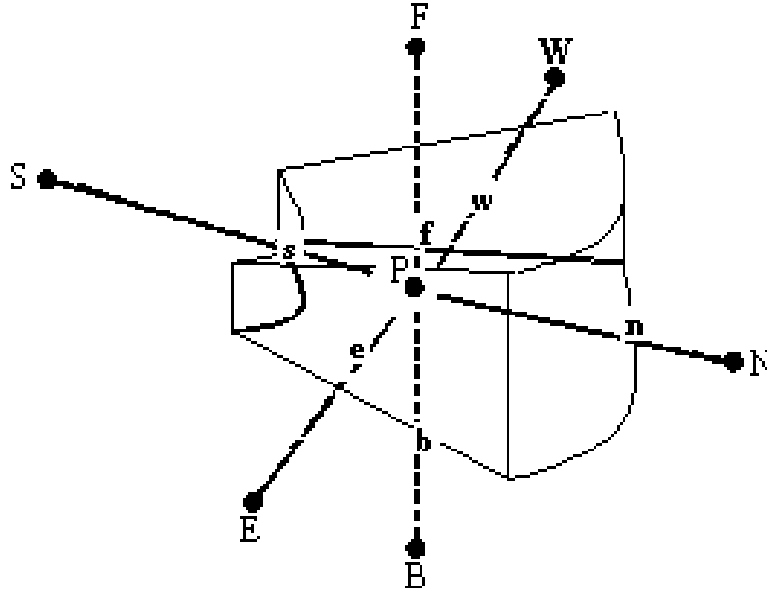


Figure 3.1: Volume de contrôle typique.

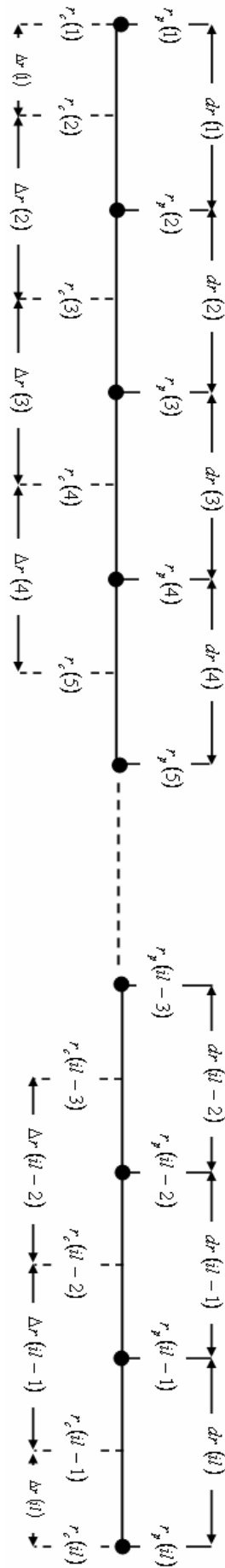
3.3.1 Le maillage typique.

Le maillage obtenu par la discrétisation du domaine de calcul dans les trois directions est dit maillage typique. Dans les nœuds de ce maillage typique seront stockées les valeurs des quantités physiques scalaires telles la pression, la masse volumique ou la concentration.

Ce maillage est décrit comme suit : le point de référence, qui se trouve au centre du volume de contrôle (appelé aussi nœud) est noté P . Dans la direction radiale, le nœud P aura à sa droite (sens positif de la direction radiale) le nœud N et à sa gauche (sens négatif de la direction radiale) le nœud S . Ainsi, les nœuds seront représentés par des lettres en majuscules, et les faces que se partagent les volumes en lettres minuscules. Ainsi, la face que partage le volume de contrôle typique avec son voisin de droite est notée n , celle avec son voisin de gauche est notée s . Pour la direction polaire, les nœuds voisins sont F pour dans la direction polaire positive, et B pour la direction négative. Les faces seront la face f dans la direction positive, et b dans la

direction négative. Enfin, pour ce qui est de la direction azimutale, dans le sens positif le nœud voisin sera noté E , et la face qui le sépare du nœud P sera notée e . Dans le sens négatif le nœud voisin sera W et la face qui le sépare du nœud P sera notée w . Les distances entre deux nœuds successifs et les faces de chaque volume fini obéissent à une nomenclature précise.

Les distances entre deux nœuds successifs sont précédées par la lettre d et ont pour indice la lettre de la face qui sépare les deux nœuds. Quant à la distance entre les deux faces du volume fini, elle est précédée par un Δ , et possède comme indice la lettre du nœud qui sépare les deux faces en question. Un exemple est donné pour chaque direction sur les figures 3.2, 3.3 et 3.4.



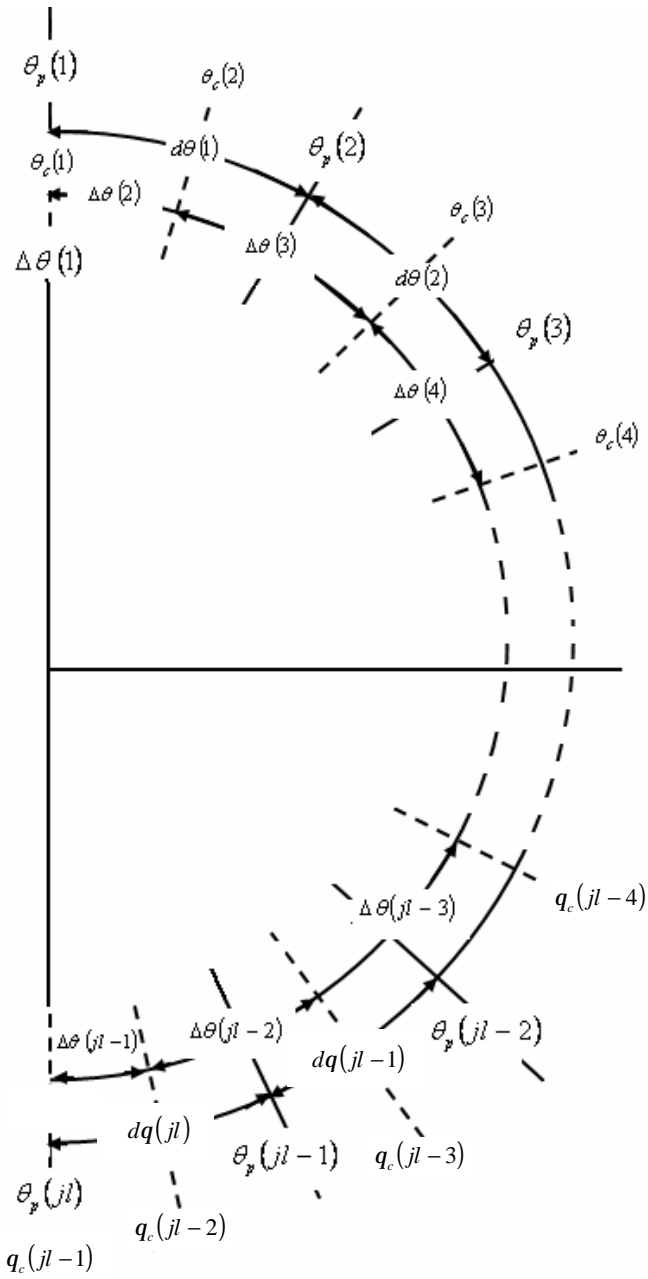


Figure 3.3 : Discrétisation dans la direction polaire.

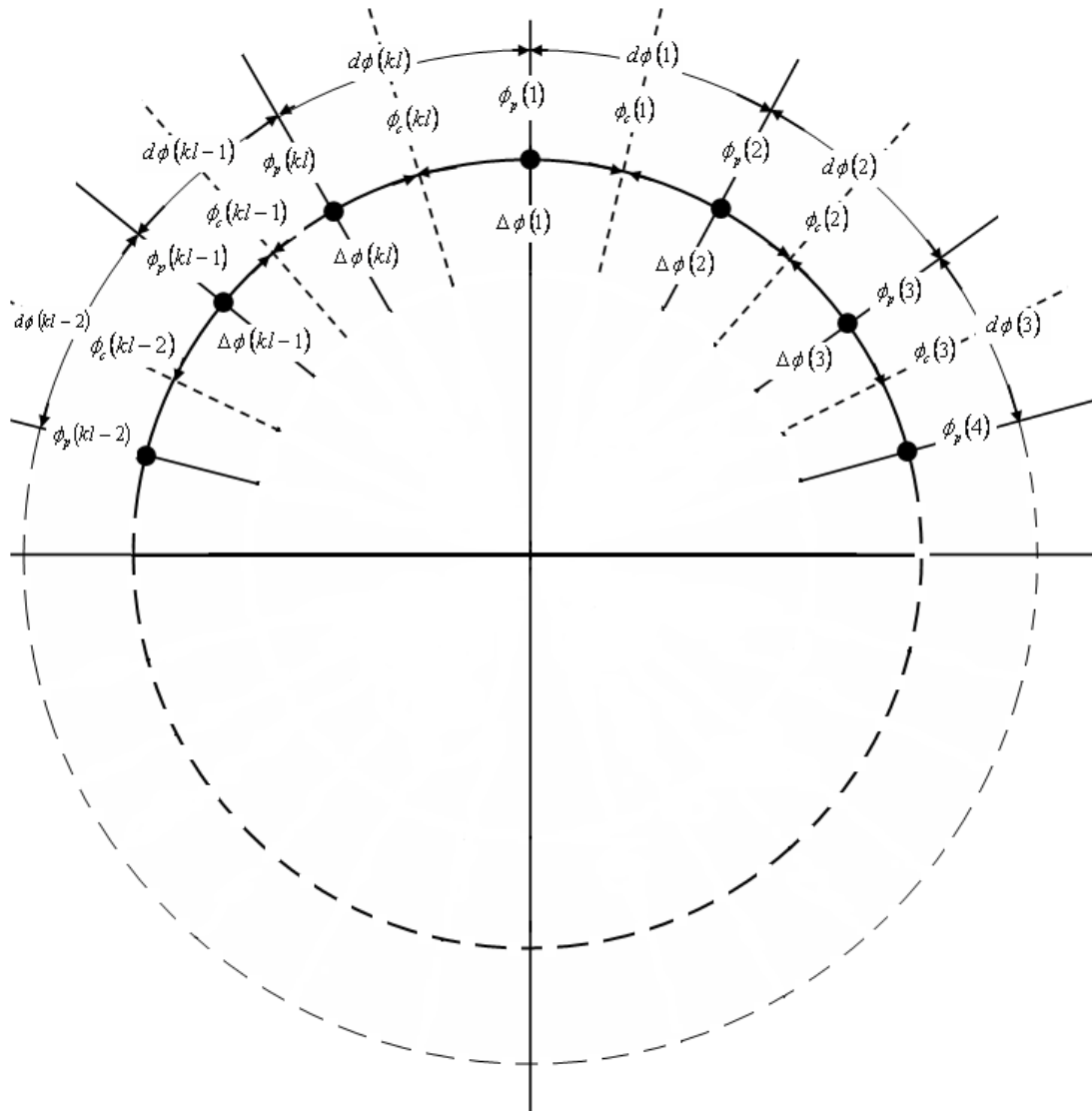


Figure 3.4 : Discrétisation dans la direction azimutale.

Dans notre cas, on a découpé le domaine physique en 32 nœuds dans la direction radiale, 249 nœuds dans la direction polaire et 32 nœuds dans la direction azimutale. Donc le maillage utilisé est un maillage $32 \times 249 \times 32$, ce qui correspond à un nombre total de 254 976 nœuds. La figure 3.5, illustre le domaine de calcul discrétisé.

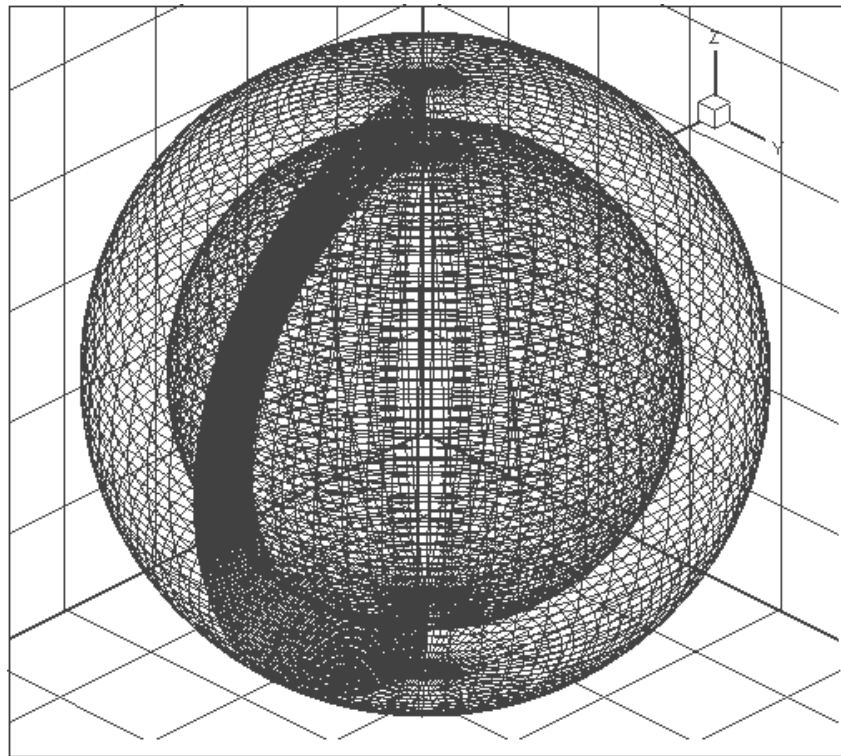


Figure 3.5 : Le domaine de calcul discrétisé.

Le découpage du domaine physique en volumes a donc donné lieu à un maillage typique. Ce maillage sera projeté sur les plans $r-q$ et $r-f$ pour une meilleure visualisation, et pour que la nomenclature expliquée plus haut soit plus claire. Les figures 3.6, 3.7 et 3.8 illustrent le maillage dans les plans $r-q, r-f$ ainsi que les nomenclatures des distances radiales, polaires et azimutales.

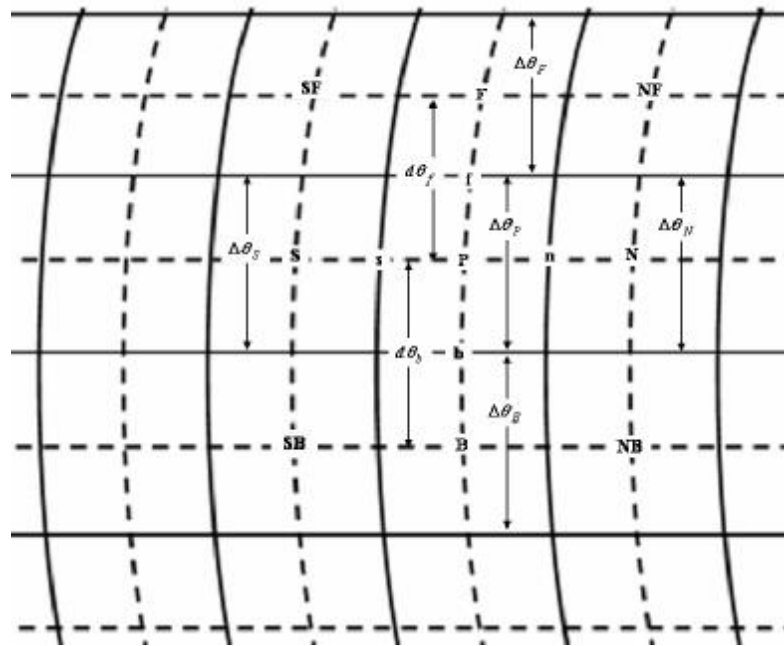


Figure 3.6 : Maillage typique dans le plan $r - q$, nomenclature des distances polaires.

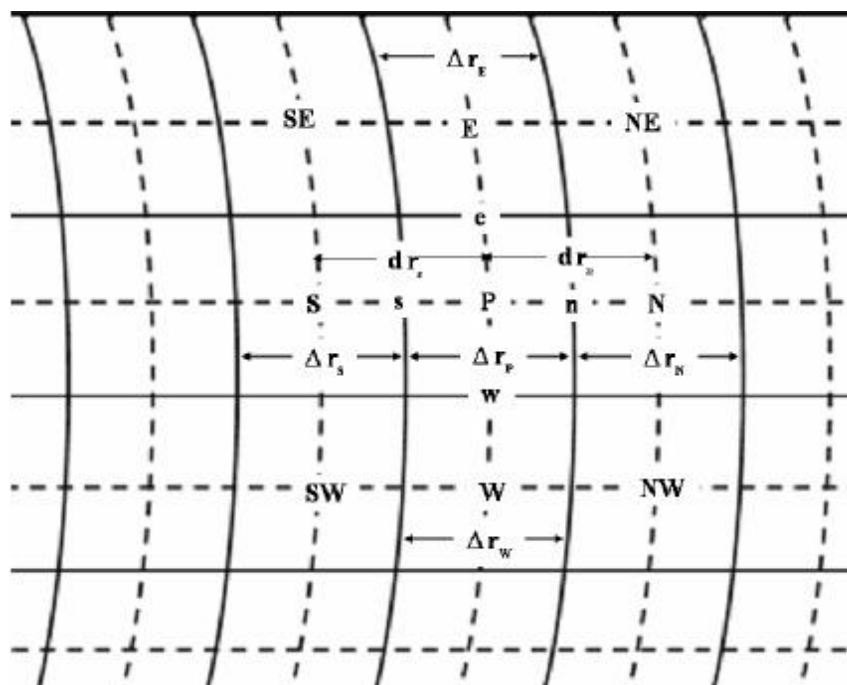


Figure 3.7 : Maillage typique dans la surface $r - f$, nomenclature des distances radiales.

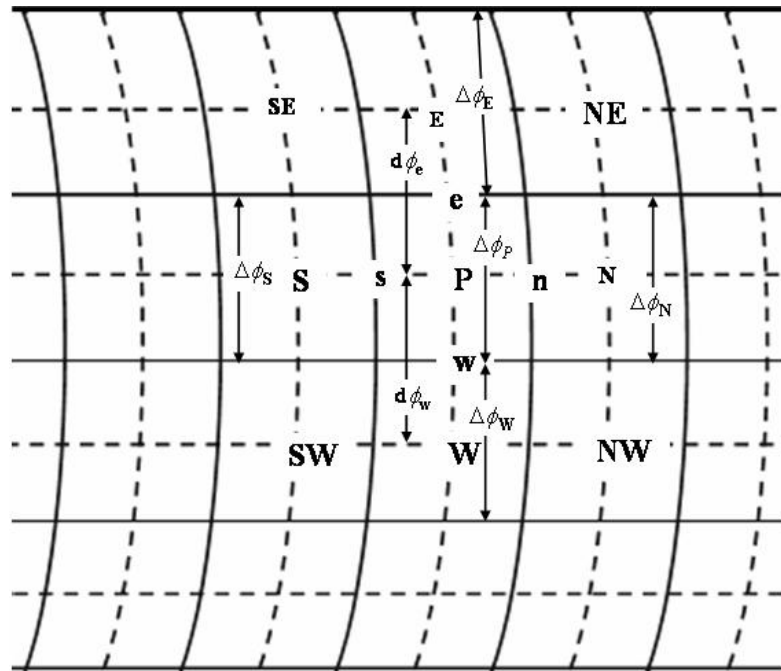


Figure 3.8: Maillage typique dans la surface $r - f$, nomenclature des distances azimutale.

L'utilisation de la méthode des volumes finis donne comme résultats la valeur nodale de la variable dépendante. C'est-à-dire la valeur de la variable dépendante dans chaque nœud du maillage. Notre résolution numérique de l'équation de la continuité et de la conservation du moment donne lieu à la détermination simultanée de la pression et du champ de vitesse. Donc, on aura recherché deux variables la pression et les composantes de la vitesse.

L'utilisation d'un même maillage, en l'occurrence le maillage typique pour l'obtention de ces deux variables donne lieu à des résultats erronés et physiquement inacceptables, deux exemples sont discutés dans le livre de **S.V. Patankar** [21]. Pour contourner cette difficulté, on utilise un maillage pour le stockage de la pression et un autre maillage pour le stockage des composantes du champ de vitesse. Ici, la notion de stockage exprime la localisation des quantités physique. Le maillage qui sera utilisé pour le calcul des composantes du champ de vitesse est dit décalé.

En fait, l'idée de base du maillage décalé, est de stocker les composantes de la vitesse sur les faces des volumes de contrôle. Le maillage sera donc décalé dans la direction

radiale pour la détermination de la vitesse radiale. Il sera décalé dans la direction polaire pour la détermination de la vitesse polaire et enfin, dans la direction azimutale pour l'obtention de la vitesse azimutale. Arbitrairement on a choisi de décaler le maillage dans la direction positive des axes. Le décalage du maillage typique fait que les composantes de la vitesse se trouvent localisées dans les nœuds du maillage décalé, qui sont en fait les faces du maillage typique. C'est une simple translation opérée pour les besoins du calcul.

3.3.2 Maillage décalé.

Les vitesses seront stockées dans les faces des volumes de contrôle, c'est-à-dire dans les faces du maillage non décalé. Le maillage sera décalé, par convention, selon le sens positif des axes. Un décalage radial sera opéré pour la discrétisation de l'équation de quantité de mouvement radiale. Un décalage dans la direction polaire sera nécessaire pour la discrétisation de la composante polaire de l'équation de quantité de mouvement. Enfin, on décalera le maillage typique dans la direction azimutale pour la discrétisation de la composante azimutale de l'équation de quantité de mouvement.

Quand on décale le maillage dans la direction radiale, les notations des points du nouveau maillage décalé ainsi que des faces, portent l'indice u . Quant au décalage suivant la direction polaire, on note les points et les faces avec un indice v . Le décalage dans la direction azimutale sera accompagné d'une notation avec l'indice w . Le décalage du maillage typique dans les trois directions sera représenté, dans la section 3.4 de ce chapitre.

3.4 Discrétisation des équations.

La discrétisation des équations différentielles modélisantes implique l'évaluation des différentes dérivées spatiales et temporelles, de la variable dépendante. L'évaluation de ces dérivées implique de connaître comment la variable dépendante varie dans le temps et dans l'espace. Pour ce faire, on adopte différentes approximations dites schémas de variations.

3.4.1 Discrétisation temporelle.

Cette discrétisation concerne la variation temporelle de tous les termes contenus dans les équations de Navier Stokes et dans l'équation de continuité.

3.4.1.1 Traitement des dérivées temporelles.

Les dérivées temporelles dans les équations de Navier Stokes seront discrétisées au second ordre. Cette discrétisation se fait selon le schéma obtenu de la manière suivante:

Considérons le développement de Taylor d'ordre deux, de la variable dépendante f au temps t :

$$f^t = f^{t+\Delta t} - \frac{\Delta t}{1!} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|^{t+\Delta t} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|^{t+\Delta t} + o(\Delta t)^3 \quad (3.1)$$

Maintenant, considérons le développement de Taylor toujours d'ordre deux, mais cette fois au temps $t - \Delta t$:

$$f^{t-\Delta t} = f^{t+\Delta t} - \frac{2\Delta t}{1!} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|^{t+\Delta t} + \frac{(2\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|^{t+\Delta t} + o(\Delta t)^3 \quad (3.2)$$

On multiplie l'équation (3.1) par 4, puis on retranche l'équation (3.2) du résultat obtenu. On obtient l'équation suivante:

$$4f^t - f^{t-\Delta t} = 3f^{t+\Delta t} - 2\Delta t \frac{\partial f}{\partial t} \Big|^{t+\Delta t} + o(\Delta t)^3 \quad (3.3)$$

Donc, la valeur de la dérivée temporelle au temps $t + \Delta t$ est donnée par l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial t} \Big|^{t+\Delta t} \approx \frac{3f^{t+\Delta t} - 4f^t + f^{t-\Delta t}}{2\Delta t} + o(\Delta t)^2 \quad (3.4)$$

L'erreur de troncature est d'ordre deux.

3.4.1.2 Traitement des termes convectifs et non linéaires.

Les termes convectifs et non linéaires seront discrétisés temporellement au second ordre. Le schéma de discrétisation est obtenu comme suit :

Considérons le développement de Taylor de la variable dépendante d'ordre un, au temps t :

$$f^t = f^{t+\Delta t} - \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} \Big|^{t+\Delta t} + o(\Delta t)^2 \quad (3.5)$$

Considérons maintenant le développement de Taylor, d'ordre un de la variable dépendante mais au temps $t - \Delta t$:

$$f^{t-\Delta t} = f^{t+\Delta t} - 2\Delta t \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|^{t+\Delta t} + o(\Delta t)^2 \quad (3.6)$$

On multiplie l'équation (3.5) par (-2) , puis on additionne l'équation résultante et l'équation (3.6). On obtient l'équation qui nous donne l'expression de la variable dépendante au temps $t + \Delta t$:

$$f^{t+\Delta t} = 2f^t - f^{t-\Delta t} + o(\Delta t)^2 \quad (3.7)$$

Cette expression sera utilisée pour l'évaluation des termes convectifs et non linéaires. L'erreur de troncature est d'ordre deux.

3.4.1.3 Traitement des termes diffusifs et de pression.

Les termes de pression ainsi que les termes diffusifs seront évalués directement au temps $t + \Delta t$.

A ce stade, les différents termes contenus dans l'équation de continuité et dans les équations de Navier Stokes, possèdent un schéma de discrétisation temporelle. Tous les termes seront donc évalués temporellement avec une erreur de troncature d'ordre deux.

3.4.2 Discrétisation spatiale.

Pour assurer une bonne représentation spatiale de la variable dépendante, représentation qui doit être physiquement acceptable, on doit faire un choix quand à la variation spatiale de cette variable. En effet, lors de l'évaluation des intégrales des équations différentielles dans les volumes de contrôle, on aura besoin de connaître comment déterminer la variable dépendante aux interfaces des volumes de contrôle. Donc il faut adopter un schéma qui décrira la variation spatiale de la variable dépendante.

On a choisit dans cette étude le schéma des *différences centrées*. Ce choix implique que la valeur de la variable dépendante f à l'interface sera : la somme de la valeur de f au noeud à droite (ou dans le sens positive de l'axe de variation) et de la valeur

de f au nœud à gauche (ou dans le sens négatif de l'axe de variation) divisée par deux. Les termes, droite et gauche font référence à la position des nœuds par rapport à l'interface considérée.

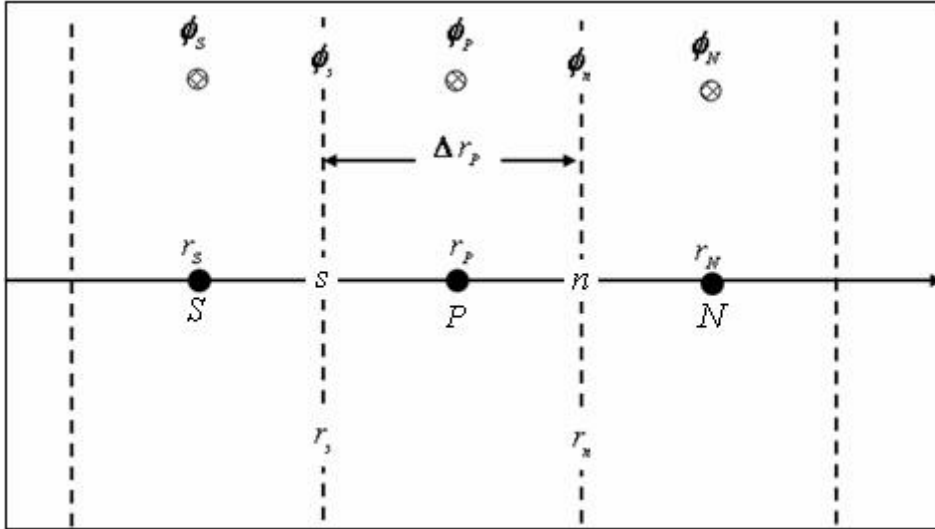


Figure 3.9: Maillage unidimensionnel pour le calcul de la valeur de la variable dépendante à l'interface.

En exemple, considérons le cas unidimensionnel de la figure 3.9. On cherche à déterminer la valeur de la variable dépendante à l'interface n . Le développement de Taylor au premier ordre, de f (la variable dépendante de référence) au nœud N est donné par la formule suivante:

$$f_N = f_n + \frac{\Delta r_p}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_n + o(\Delta r)^2 \quad (3.8)$$

Le développement de Taylor au premier ordre de f au nœud P est donné par l'équation suivante:

$$f_P = f_n - \frac{\Delta r_p}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_n + o(\Delta r)^2 \quad (3.9)$$

On fait l'addition des équations (3.8) et (3.9), et on obtient après réarrangement la formule suivante pour f_n :

$$f_n = \frac{f_P + f_N}{2} + o(\Delta r)^2 \quad (3.10)$$

L'erreur de troncature est d'ordre deux. C'est la formule (3.10) qui servira à évaluer la valeur de la variable dépendante aux interfaces.

En ce qui concerne l'évaluation de la dérivée spatiale à l'interface, elle est égale à la valeur de f au nœud à droite moins la valeur de f au nœud à gauche; divisée par la distance qui sépare les deux nœuds se trouvant de part et d'autre de l'interface considérée. Comme exemple considérons le cas unidimensionnel de la figure 3.10, où on cherche à évaluer la valeur de la dérivée suivant la direction radiale de f à l'interface n .

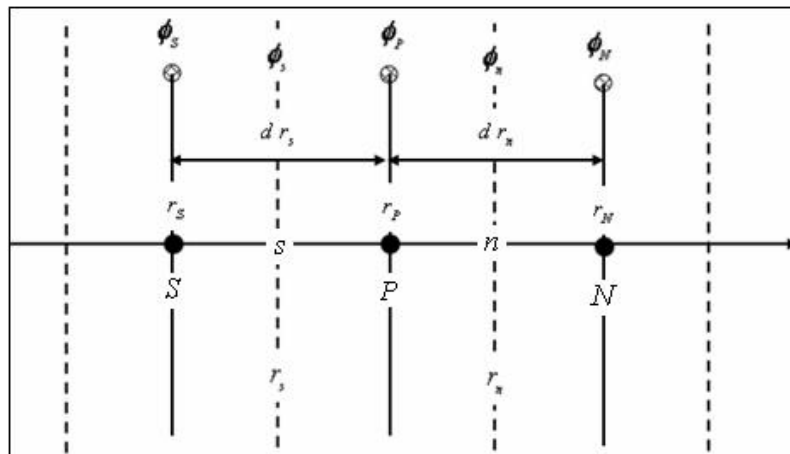


Figure 3.10: Maillage unidimensionnel pour le calcul de la valeur de la dérivée radiale de la variable dépendante à l'interface.

On reconsidère les équations (3.8),(3.9). On multiplie l'équation (3.9) par le signe (-),

puis on réarrange l'équation résultante et on obtient la formule suivante pour $\left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_n$:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_n = \frac{f_N - f_P}{d r_n} + o(\Delta r)^2 \quad (3.11)$$

L'erreur de troncature est d'ordre deux. C'est donc la formule donnée par l'équation (3.11) qui sera utilisée pour l'évaluation des dérivées spatiales (suivant une direction donnée) de la variable dépendante considérée, aux interfaces des volumes de contrôle.

3.5 Discrétisation des équations modélisantes.

- En ce qui concerne la discrétisation temporelle, on adopte la convention suivante en ce qui concerne l'exposant de chaque terme discrétisé:
 - Les termes au temps $t - \Delta t$ porteront l'exposant $t - \Delta t$.
 - Les termes au temps t porteront l'exposant t .
 - Les termes au temps $t + \Delta t$ porteront l'exposant $t + \Delta t$.
- $\frac{1}{Re} = \frac{n}{\Omega_1 R_1^2}$, avec: Ω_1 est la vitesse de rotation angulaire de la sphère intérieure, R_1 est le rayon de la sphère intérieure et n étant le viscosité cinématique. Re étant le nombre de Reynolds.

3.5.1 Discrétisation de l'équation de continuité.

L'équation de continuité sera discrétisée dans un volume de contrôle typique, il est montré sur la Figure 3.2.

$$\int_s^n \int_b^f \int_w^e \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial q} (V \sin q) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial W}{\partial f} \right] r^2 \sin q dr dq df = 0$$

Les vitesses seront évaluées au temps $t + \Delta t$:

$$\int_s^n \int_b^f \int_w^e \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U^{t+\Delta t}) r^2 \sin q dr dq df = \left(r_n^2 U_n^{t+\Delta t} - r_s^2 U_s^{t+\Delta t} \right) \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p$$

$$\int_s^n \int_b^f \int_w^e \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial q} (V^{t+\Delta t} \sin q) r^2 \sin q dr dq df = \left(V_f \sin q_f^{t+\Delta t} - V_b \sin q_b^{t+\Delta t} \right) \Delta r_p \Delta f_p$$

$$\int_s^n \int_b^f \int_w^e \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial (W)^{t+\Delta t}}{\partial f} r^2 \sin q dr dq df = \left(W_e^{t+\Delta t} - W_w^{t+\Delta t} \right) r_p \Delta r_p \Delta q_p$$

L'équation de continuité discrétisée, s'écrit sous la forme:

$$\begin{aligned} & \left(r_n^2 U_n^{t+\Delta t} - r_s^2 U_s^{t+\Delta t} \right) \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p + \left(V_f^{t+\Delta t} \sin q_f - V_b^{t+\Delta t} \sin q_b \right) \Delta r_p \Delta f_p \\ & + \left(W_e^{t+\Delta t} - W_w^{t+\Delta t} \right) r_p \Delta r_p \Delta q_p = 0 \end{aligned}$$

3.5.2 Discrétisation de la composante radiale de l'équation de quantité de mouvement.

Les figures 3.11 et 3.12 illustrent le maillage, décalé radialement, dans les plans $r - q$ et $r - f$; respectivement. Nous procéderons à la discrétisation de la composante radiale de l'équation de quantité de mouvement terme par terme.

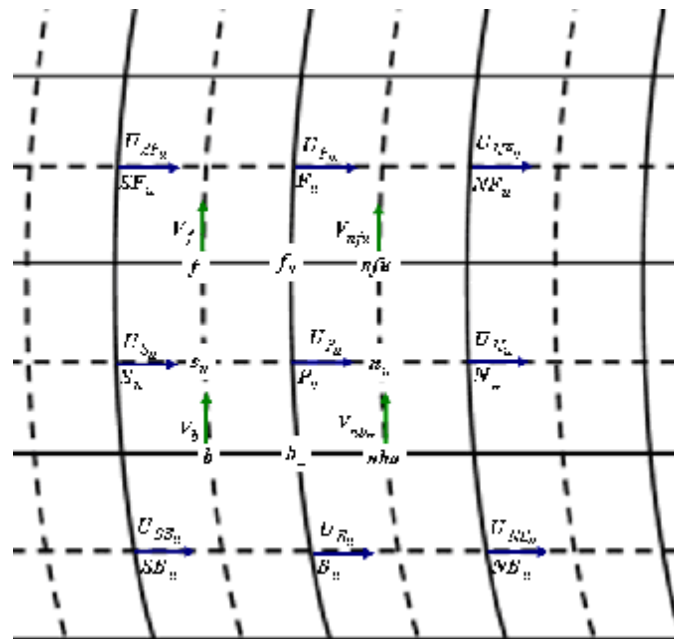


Figure 3.11 : Maillage décalé suivant la direction radiale, plan $r - q$.

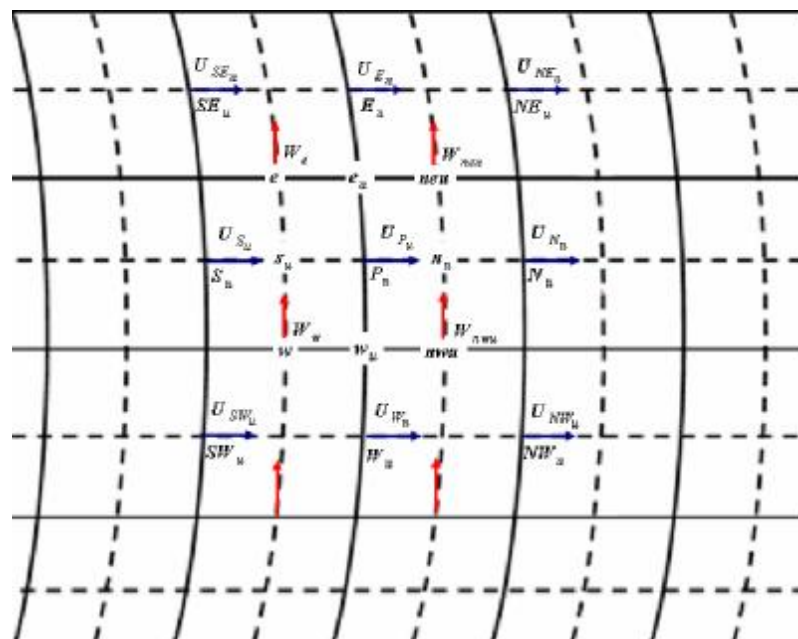


Figure 3.12 : Maillage décalé suivant la direction radiale, surface $r - f$.

3.5.2.1 Discrétisation du terme temporel.

$$\begin{aligned}
\int_{s_w}^n \int_{b_t}^f \int_{t}^{t+\Delta t} \frac{\partial U}{\partial t} r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt &= U_{P_u} \Big|_t^{t+\Delta t} r_{P_u}^2 \sin q_P \, dr_n \, \Delta q_P \, \Delta f_P \\
&= \frac{3U_{P_u}^{t+\Delta t} - 4U_{P_u}^t + U_{P_u}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_n^2 \sin q_P \, dr_n \, \Delta q_P \, \Delta f_P
\end{aligned}$$

3.5.2.2 Discrétisation des termes convectifs.

$$\begin{aligned}
\int_{s_u}^{n_u} \int_{f_u}^{e_u} \int_{w_u}^{t+\Delta t} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 U U \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt &= \\
\left[2 \left(r^2 U U \right)_{n_u}^t - 2 \left(r^2 U U \right)_{s_u}^t \right] \sin q_P \Delta q_P \Delta f_P - \left[\left(r^2 U U \right)_{n_u}^{t-\Delta t} - \left(r^2 U U \right)_{s_u}^{t-\Delta t} \right] \sin q_P \Delta q_P \Delta f_P \\
= \left[2 \left(r_{n_u}^2 U_{n_u}^t U_{n_u}^t - r_{s_u}^2 U_{s_u}^t U_{s_u}^t \right) - \left(r_{n_u}^2 U_{n_u}^{t-\Delta t} U_{n_u}^{t-\Delta t} - r_{s_u}^2 U_{s_u}^{t-\Delta t} U_{s_u}^{t-\Delta t} \right) \right] \sin q_P \Delta q_P \Delta f_P \\
= \frac{1}{2} r_{n_u}^2 \left(U_{N_u}^t + U_{P_u}^t \right)^2 \sin q_P \Delta q_P \Delta f_P - \frac{1}{2} r_{s_u}^2 \left(U_{S_u}^t + U_{P_u}^t \right)^2 \sin q_P \Delta q_P \Delta f_P \\
- \frac{1}{4} r_{n_u}^2 \left(U_{N_u}^{t-\Delta t} + U_{P_u}^{t-\Delta t} \right)^2 \sin q_P \Delta q_P \Delta f_P + \frac{1}{4} r_{s_u}^2 \left(U_{S_u}^{t-\Delta t} + U_{P_u}^{t-\Delta t} \right)^2 \sin q_P \Delta q_P \Delta f_P
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{s_u}^{n_u} \int_{f_u}^{e_u} \int_{w_u}^{t+\Delta t} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q} (U V) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt &= \\
\left[2(U V)_{f_u}^t - 2(U V)_{b_u}^t \right] r_{P_u} \sin q_P \, dr_n \, \Delta f_P - \left[(U V)_{f_u}^{t-\Delta t} - (U V)_{b_u}^{t-\Delta t} \right] r_{P_u} \sin q_P \, dr_n \, \Delta f_P \\
= \left[2 \left(U_{f_u}^t V_{f_u}^t - U_{b_u}^t V_{b_u}^t \right) - \left(U_{f_u}^{t-\Delta t} V_{f_u}^{t-\Delta t} - U_{b_u}^{t-\Delta t} V_{b_u}^{t-\Delta t} \right) \right] r_{P_u} \, dr_n \, \sin q_P \, \Delta f_P \\
= \frac{1}{2} \left(U_{F_u}^t + U_{P_u}^t \right) \left(V_f^t + V_{nfu}^t \right) r_n \, dr_n \, \sin q_P \, \Delta f_P \\
- \frac{1}{2} \left(U_{P_u}^t + U_{B_u}^t \right) \left(V_b^t + V_{nbu}^t \right) r_n \, dr_n \, \sin q_P \, \Delta f_P \\
- \frac{1}{4} \left(U_{F_u}^{t-\Delta t} + U_{P_u}^{t-\Delta t} \right) \left(V_f^{t-\Delta t} + V_{nfu}^{t-\Delta t} \right) r_n \, dr_n \, \sin q_P \, \Delta f_P \\
+ \frac{1}{4} \left(U_{P_u}^{t-\Delta t} + U_{B_u}^{t-\Delta t} \right) \left(V_b^{t-\Delta t} + V_{nbu}^{t-\Delta t} \right) r_n \, dr_n \, \sin q_P \, \Delta f_P
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial f} (U W) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
& \left[2 (UW)_{e_u}^t - 2 (UW)_{w_u}^t \right] r_{P_u} \, dr_n \, \Delta q_P - \left[(UW)_{e_u}^{t-\Delta t} - (UW)_{w_u}^{t-\Delta t} \right] r_{P_u} \, dr_n \, \Delta q_P \\
& = \left[2 \left(U_{e_u}^t \, W_{e_u}^t - U_{w_u}^t \, W_{w_u}^t \right) - \left(U_{e_u}^{t-\Delta t} \, W_{e_u}^{t-\Delta t} - U_{w_u}^{t-\Delta t} \, W_{w_u}^{t-\Delta t} \right) \right] r_{P_u} \, dr_n \, \Delta q_P \\
& = \frac{1}{2} \left(U_{E_u}^t + U_{P_u}^t \right) \left(W_{neu}^t + W_e^t \right) r_n \, dr_n \, \Delta q_P \\
& - \frac{1}{2} \left(U_{P_u}^t + U_{W_u}^t \right) \left(W_{nwu}^t + W_w^t \right) r_n \, dr_n \, \Delta q_P \\
& - \frac{1}{4} \left(U_{E_u}^{t-\Delta t} + U_{P_u}^{t-\Delta t} \right) \left(W_{neu}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t} \right) r_n \, dr_n \, \Delta q_P \\
& + \frac{1}{4} \left(U_{P_u}^{t-\Delta t} + U_{W_u}^{t-\Delta t} \right) \left(W_{nwu}^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} \right) r_n \, dr_n \, \Delta q_P
\end{aligned}$$

3.5.2.3 Discrétisation des autres termes à gauche.

$$\begin{aligned}
& \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} - \left(\frac{V^2}{r} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
& - 2 \left(V_{P_u}^2 \right)^t r_{P_u} \sin q_P \, dr_n \, \Delta q_P \, \Delta f_P + \left(V_{P_u}^2 \right)^{t-\Delta t} r_{P_u} \sin q_P \, dr_n \, \Delta q_P \, \Delta f_P \\
& = - 2 \left[\frac{V_{nfu}^t + V_b^t + V_f^t + V_{nbu}^t}{4} \right]^2 r_n \sin q_P \, dr_n \, \Delta q_P \, \Delta f_P \\
& + \left[\frac{V_{nfu}^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t} + V_f^{t-\Delta t} + V_{nbu}^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 r_n \sin q_P \, dr_n \, \Delta q_P \, \Delta f_P
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} - \left(\frac{W^2}{r} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
& - 2 \left(W_{P_u}^2 \right)^t r_{P_u} \sin q_P \, dr_n \, \Delta q_P \, \Delta f_P + \left(W_{P_u}^2 \right)^{t-\Delta t} r_{P_u} \sin q_P \, dr_n \, \Delta q_P \, \Delta f_P
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2 \left[\frac{W_{neu}^t + W_e^t + W_w^t + W_{nwu}^t}{4} \right]^2 r_n \sin q_P dr_n \Delta q_P \Delta f_P \\
&\quad + \left[\frac{W_{neu}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} + W_{nwu}^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 r_n \sin q_P dr_n \Delta q_P \Delta f_P
\end{aligned}$$

3.5.2.4 Discrétisation des termes diffusifs.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\text{Re}} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) r^2 \sin q dr dq df dt = \\
&\frac{1}{\text{Re}} \left[\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right)_{n_u}^{t+\Delta t} - \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right)_{s_u}^{t+\Delta t} \right] \sin q_P \Delta q_P \Delta f_P \\
&= \frac{1}{\text{Re}} \left[r_{n_u}^2 \left(\frac{U_{N_u}^{t+\Delta t} - U_{P_u}^{t+\Delta t}}{\Delta r_N} \right) - r_{s_u}^2 \left(\frac{U_{P_u}^{t+\Delta t} - U_{S_u}^{t+\Delta t}}{\Delta r_P} \right) \right] \sin q_P \Delta q_P \Delta f_P \\
&\frac{1}{\text{Re}} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left(\sin q \frac{\partial U}{\partial q} \right) r^2 \sin q dr dq df dt = \\
&\frac{1}{\text{Re}} \left[\left(\sin q \frac{\partial U}{\partial q} \right)_{f_u}^{t+\Delta t} - \left(\sin q \frac{\partial U}{\partial q} \right)_{b_u}^{t+\Delta t} \right] dr_n \Delta f_P \\
&= \frac{1}{\text{Re}} \left[\sin q_{f_u} \left(\frac{U_{F_u}^{t+\Delta t} - U_{P_u}^{t+\Delta t}}{dq_f} \right) - \sin q_{b_u} \left(\frac{U_{P_u}^{t+\Delta t} - U_{B_u}^{t+\Delta t}}{dq_b} \right) \right] dr_n \Delta f_P \\
&\frac{1}{\text{Re}} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2 \sin^2 q} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial f^2} \right) r^2 \sin q dr dq df dt = \\
&\frac{1}{\text{Re}} \left[\left(\frac{1}{\sin q} \frac{\partial U}{\partial f} \right)_{e_u}^{t+\Delta t} - \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\partial U}{\partial f} \right)_{w_u}^{t+\Delta t} \right] dr_n \Delta q_P \\
&= \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{\sin q_P} \left(\frac{U_{E_u}^{t+\Delta t} - U_{P_u}^{t+\Delta t}}{df_e} \right) - \frac{1}{\sin q_P} \left(\frac{U_{P_u}^{t+\Delta t} - U_{W_u}^{t+\Delta t}}{df_w} \right) \right] dr_n \Delta q_P \\
&- \frac{2}{\text{Re}} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{U}{r^2} \right) r^2 \sin q dr dq df dt = -\frac{2}{\text{Re}} U_{P_u}^{t+\Delta t} \sin q_P dr_n \Delta q_P \Delta f_P
\end{aligned}$$

3.5.2.5 Discrétisation des autres termes à droite.

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\text{Re}} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \frac{2}{\sin q} \frac{\partial}{\partial q} (V \sin q) r^2 \sin q \, d r \, d q \, d f \, d t = \\
& -\frac{2}{\text{Re}} \left[2 (V \sin q)_{f_u}^t - 2 (V \sin q)_{b_u}^t \right] d r_n \, \Delta f_P \\
& + \frac{2}{\text{Re}} \left[(V \sin q)_{f_u}^{t-\Delta t} - (V \sin q)_{b_u}^{t-\Delta t} \right] d r_n \, \Delta f_P \\
& = -\frac{2}{\text{Re}} \left[\left(V_f^t + V_{nf_u}^t \right) \sin q_{f_u} - \left(V_{nb_u}^t + V_b^t \right) \sin q_{b_u} \right] d r_n \, \Delta f_P \\
& + \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(V_f^{t-\Delta t} + V_{nf_u}^{t-\Delta t} \right) \sin q_{f_u} - \left(V_{nb_u}^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t} \right) \sin q_{b_u} \right] d r_n \, \Delta f_P \\
& -\frac{1}{\text{Re}} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \frac{2}{r^2 \sin q} \frac{\partial W}{\partial f} r^2 \sin q \, d r \, d q \, d f \, d t = \\
& -\frac{2}{\text{Re}} \left[(2W)_{e_u}^t - (2W)_{w_u}^t \right] d r_n \, \Delta q_P + \frac{2}{\text{Re}} \left[(W)_{e_u}^{t-\Delta t} - (W)_{w_u}^{t-\Delta t} \right] d r_n \, \Delta q_P \\
& = -\frac{4}{\text{Re}} \left[\left(W_e^t + W_{neu}^t \right) - \left(W_{nwu}^t + W_w^t \right) \right] d r_n \, \Delta q_P \\
& + \frac{2}{\text{Re}} \left[\left(W_e^{t-\Delta t} + W_{neu}^{t-\Delta t} \right) - \left(W_{nwu}^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} \right) \right] d r_n \, \Delta q_P
\end{aligned}$$

3.5.2.6 Discrétisation du terme de pression.

$$\begin{aligned}
\int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} -\frac{\partial P}{\partial r} r^2 \sin q \, d r \, d q \, d f \, d t & = \left(P_{n_u}^{t+\Delta t} - P_{s_u}^{t+\Delta t} \right) r_{P_u}^2 \sin q_p \, \Delta q_p \, \Delta f_p \\
& = \left(P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t} \right) r_{P_u}^2 \sin q_p \, \Delta q_p \, \Delta f_p
\end{aligned}$$

On réécrit l'équation de quantité de mouvement ainsi discrétisée sous la forme suivante, cette forme est dite forme générale:

$$\begin{aligned}
A_{P_u} U_{P_u}^{t+\Delta t} & = A_{N_u} U_{N_u}^{t+\Delta t} + A_{S_u} U_{S_u}^{t+\Delta t} + A_{F_u} U_{F_u}^{t+\Delta t} + A_{B_u} U_{B_u}^{t+\Delta t} \\
& + A_{E_u} U_{E_u}^{t+\Delta t} + A_{W_u} U_{W_u}^{t+\Delta t} + S_u
\end{aligned}$$

Les coefficients A_i seront:

$$\begin{aligned}
A_{P_u} &= \frac{3}{2\Delta t} r_n^2 \sin q_p dr_n \Delta q_p \Delta f_p + \frac{1}{\text{Re} \Delta r_N} \frac{r_N^2}{\Delta r_N} \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p + \frac{1}{\text{Re} \Delta r_P} \frac{r_P^2}{\Delta r_P} \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p \\
&+ \frac{1}{\text{Re}} \frac{\sin q_f}{dq_f} dr_n \Delta f_p + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\sin q_b}{dq_b} dr_n \Delta f_p \\
&+ \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{dr_n \Delta q_p}{\sin q_p df_e} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{dr_n \Delta q_p}{\sin q_p df_w} \right) + \frac{2}{\text{Re}} \sin q_p dr_n \Delta q_p \Delta f_p \\
A_{N_u} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{r_N^2}{\Delta r_N} \right) \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p \\
A_{S_u} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{r_P^2}{\Delta r_P} \right) \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p \\
A_{F_u} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\sin q_f}{dq_f} \right) dr_n \Delta f_p \\
A_{B_u} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\sin q_b}{dq_b} \right) dr_n \Delta f_p \\
A_{E_u} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{dr_n \Delta q_p}{\sin q_p df_e} \right) \\
A_{W_u} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{dr_n \Delta q_p}{\sin q_p df_w} \right) \\
S_u &= \frac{4U_{P_u}^t}{2\Delta t} r_n^2 \sin q_p dr_n \Delta q_p \Delta f_p - \frac{U_{P_u}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_n^2 \sin q_p dr_n \Delta q_p \Delta f_p \\
&- \frac{1}{2} r_N^2 \left(U_{N_u}^t + U_{P_u}^t \right)^2 \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p + \frac{1}{2} r_P^2 \left(U_{S_u}^t + U_{P_u}^t \right)^2 \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p \\
&+ \frac{1}{4} r_N^2 \left(U_{N_u}^{t-\Delta t} + U_{P_u}^{t-\Delta t} \right)^2 \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p - \frac{1}{4} r_P^2 \left(U_{S_u}^{t-\Delta t} + U_{P_u}^{t-\Delta t} \right)^2 \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p \\
&- \frac{1}{2} \left(U_{F_u}^t + U_{P_u}^t \right) \left(V_f^t + V_{nfu}^t \right) r_n dr_n \sin q_p \Delta f_p \\
&+ \frac{1}{2} \left(U_{P_u}^t + U_{B_u}^t \right) \left(V_b^t + V_{nbu}^t \right) r_n dr_n \sin q_p \Delta f_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \left(U_{F_u}^{t-\Delta t} + U_{P_u}^{t-\Delta t} \right) \left(V_f^{t-\Delta t} + V_{nf_u}^{t-\Delta t} \right) r_n dr_n \sin q_P \Delta f_P \\
& - \frac{1}{4} \left(U_{P_u}^{t-\Delta t} + U_{B_u}^{t-\Delta t} \right) \left(V_b^{t-\Delta t} + V_{nb_u}^{t-\Delta t} \right) r_n dr_n \sin q_P \Delta f_P \\
& - \frac{1}{2} \left(U_{E_u}^t + U_{P_u}^t \right) \left(W_{neu}^t + W_e^t \right) r_n dr_n \Delta q_P \\
& + \frac{1}{2} \left(U_{P_u}^t + U_{W_u}^t \right) \left(W_{nwu}^t + W_w^t \right) r_n dr_n \Delta q_P \\
& + \frac{1}{4} \left(U_{E_u}^{t-\Delta t} + U_{P_u}^{t-\Delta t} \right) \left(W_{neu}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t} \right) r_n dr_n \Delta q_P \\
& - \frac{1}{4} \left(U_{P_u}^{t-\Delta t} + U_{W_u}^{t-\Delta t} \right) \left(W_{nwu}^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} \right) r_n dr_n \Delta q_P \\
& + 2 \left[\frac{V_{nf_u}^t + V_{nb_u}^t + V_f^t + V_b^t}{4} \right]^2 r_n \sin q_P dr_n \Delta q_P \Delta f_P \\
& - \left[\frac{V_{nf_u}^{t-\Delta t} + V_{nb_u}^{t-\Delta t} + V_f^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 r_n \sin q_P dr_n \Delta q_P \Delta f_P \\
& + 2 \left[\frac{W_{neu}^t + W_e^t + W_w^t + W_{nwu}^t}{4} \right]^2 r_n \sin q_P dr_n \Delta q_P \Delta f_P \\
& - \left[\frac{W_{neu}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} + W_{nwu}^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 r_n \sin q_P dr_n \Delta q_P \Delta f_P \\
& - \frac{2}{\text{Re}} \left[V_{nf_u}^t + V_f^t \right] \sin q_f dr_n \Delta f_P + \frac{2}{\text{Re}} \left[V_{nb_u}^t + V_b^t \right] \sin q_b dr_n \Delta f_P \\
& + \frac{1}{\text{Re}} \left[V_{nf_u}^{t-\Delta t} + V_f^{t-\Delta t} \right] \sin q_f dr_n \Delta f_P - \frac{1}{\text{Re}} \left[V_{nb_u}^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t} \right] \sin q_b dr_n \Delta f_P \\
& - \frac{4}{\text{Re}} \left[\left(W_e^t + W_{neu}^t \right) - \left(W_{nwu}^t + W_w^t \right) \right] dr_n \Delta q_P \\
& + \frac{2}{\text{Re}} \left[\left(W_e^{t-\Delta t} + W_{neu}^{t-\Delta t} \right) - \left(W_{nwu}^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} \right) \right] dr_n \Delta q_P \\
& + (P_P - P_N) r_n^2 \sin q_P \Delta q_P \Delta f_P
\end{aligned}$$

3.5.3 Discrétisation de la composante polaire de l'équation de quantité de mouvement.

Les figures 3.13 et 3.14 illustrent le maillage décalé dans la direction polaire, dans les plans $r - q$ et $q - f$ respectivement.

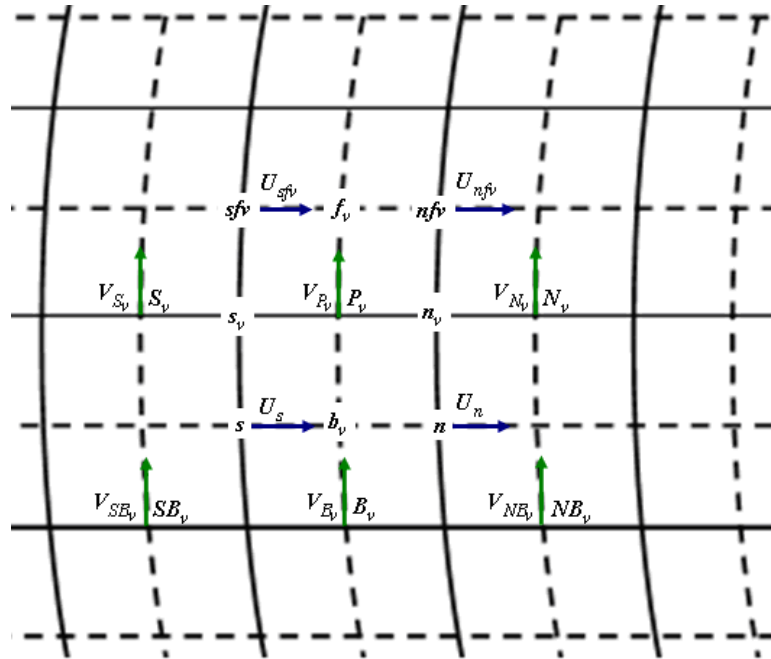


Figure 3.13 : Maillage décalé suivant la direction polaire, plan $r - q$.

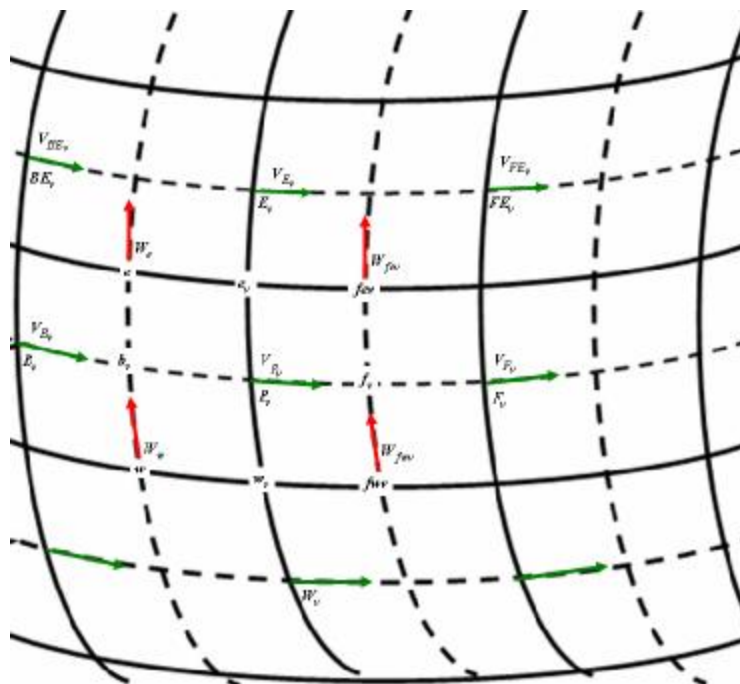


Figure 3.14 : Maillage décalé suivant la direction méridionale, surface $q - f$.

3.5.3.1 Discrétisation du terme temporel.

$$\begin{aligned} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial V}{\partial t} r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt &= V_{P_v} \Big|_t^{t+\Delta t} r_{P_v}^2 \sin q_f \Delta r_p \, dq_f \Delta f_p \\ &= \frac{3V_{P_v}^{t+\Delta t} - 4V_{P_v}^t + V_{P_v}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_p^2 \sin q_f \Delta r_p \, dq_f \Delta f_p \end{aligned}$$

3.5.3.2 Discrétisation des termes convectifs.

$$\begin{aligned} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 U V \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt &= \\ \left[2 \left(r^2 U V \right)_{n_v}^t - 2 \left(r^2 U V \right)_{s_v}^t \right] \sin q_f \, dq_f \Delta f_p - \left[\left(r^2 U V \right)_{n_v}^{t-\Delta t} - \left(r^2 U V \right)_{s_v}^{t-\Delta t} \right] \sin q_f \, dq_f \Delta f_p \\ &= \left(2 r_{n_v}^2 U_{n_v}^t V_{n_v}^t - 2 r_{s_v}^2 U_{s_v}^t V_{s_v}^t \right) \sin q_f \, dq_f \Delta f_p - \left(r_{n_v}^2 U_{n_v}^{t-\Delta t} V_{n_v}^{t-\Delta t} - r_{s_v}^2 U_{s_v}^{t-\Delta t} V_{s_v}^{t-\Delta t} \right) \sin q_f \, dq_f \Delta f_p \\ &= \frac{1}{2} r_n^2 \left(U_n^t + U_{nfv}^t \right) \left(V_{N_v}^t + V_{P_v}^t \right) \sin q_f \, dq_f \Delta f_p \\ &\quad - \frac{1}{2} r_s^2 \left(U_s^t + U_{sfv}^t \right) \left(V_{S_v}^t + V_{P_v}^t \right) \sin q_f \, dq_f \Delta f_p \\ &\quad - \frac{1}{4} r_n^2 \left(U_n^{t-\Delta t} + U_{nfv}^{t-\Delta t} \right) \left(V_{N_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t} \right) \sin q_f \, dq_f \Delta f_p \\ &\quad + \frac{1}{4} r_s^2 \left(U_s^{t-\Delta t} + U_{sfv}^{t-\Delta t} \right) \left(V_{S_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t} \right) \sin q_f \, dq_f \Delta f_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q} \left(V V \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt &= \\ \left[2(VV)_{f_v}^t - 2(VV)_{b_v}^t \right] r_{P_v} \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p - \left[(VV)_{f_v}^{t-\Delta t} - (VV)_{b_v}^{t-\Delta t} \right] r_{P_v} \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p \\ &= \left[\left(2 V_{f_v}^t V_{f_v}^t - 2 V_{b_v}^t V_{b_v}^t \right) - \left(V_{f_v}^{t-\Delta t} V_{f_v}^{t-\Delta t} - V_{b_v}^{t-\Delta t} V_{b_v}^{t-\Delta t} \right) \right] r_{P_v} \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p \\ &= \frac{1}{2} \left(V_{F_v}^t + V_{P_v}^t \right)^2 r_p \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p - \frac{1}{2} \left(V_{P_v}^t + V_{B_v}^t \right)^2 r_p \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p \\ &\quad - \frac{1}{4} \left(V_{F_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t} \right)^2 r_p \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p + \frac{1}{4} \left(V_{P_v}^{t-\Delta t} + V_{B_v}^{t-\Delta t} \right)^2 r_p \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial f} (V W) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
& \left[2 (VW)_{e_v}^t - 2 (VW)_{w_v}^t \right] r_{P_v} \Delta r_P \, dq_f - \left[(VW)_{e_v}^{t-\Delta t} - (VW)_{w_v}^{t-\Delta t} \right] r_{P_v} \Delta r_P \, dq_f \\
& = \left[\left(2V_{f_v}^t W_{f_v}^t - 2V_{w_v}^t W_{w_v}^t \right) - \left(V_{f_v}^{t-\Delta t} W_{f_v}^{t-\Delta t} - V_{w_v}^{t-\Delta t} W_{w_v}^{t-\Delta t} \right) \right] r_P \Delta r_P \, dq_f \\
& = \frac{1}{2} \left(V_{E_v}^t + V_{P_v}^t \right) \left(W_{fev}^t + W_e^t \right) r_P \Delta r_P \, dq_f - \frac{1}{2} \left(V_{P_v}^t + V_{W_v}^t \right) \left(W_w^t + W_{fww}^t \right) r_P \Delta r_P \, dq_f \\
& \quad - \frac{1}{4} \left(V_{E_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t} \right) \left(W_{fev}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t} \right) r_P \Delta r_P \, dq_f \\
& \quad + \frac{1}{4} \left(V_{P_v}^{t-\Delta t} + V_{W_v}^{t-\Delta t} \right) \left(W_w^{t-\Delta t} + W_{fww}^{t-\Delta t} \right) r_P \Delta r_P \, dq_f
\end{aligned}$$

3.5.3.3 Discrétisation des autres termes à gauche.

$$\begin{aligned}
& \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{U V}{r} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
& 2 \left(U_{P_v}^t V_{P_v}^t \right) r_{P_v} \sin q_f \Delta r_p \, dq_f \Delta f_p - \left(U_{P_v}^{t-\Delta t} V_{P_v}^{t-\Delta t} \right) r_{P_v} \sin q_f \Delta r_p \, dq_f \Delta f_p = \\
& = 2 \left[\left(\frac{U_{nfv}^t + U_{sfv}^t + U_s^t + U_n^t}{4} \right) V_{P_v}^t \right] r_p \sin q_f \Delta r_p \, dq_f \Delta f_p \\
& \quad - \left[\left(\frac{U_{nfv}^{t-\Delta t} + U_{sfv}^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t} + U_n^{t-\Delta t}}{4} \right) V_{P_v}^{t-\Delta t} \right] r_p \sin q_f \Delta r_p \, dq_f \Delta f_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} - \left(W^2 \frac{\cot q}{r} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
& -2 \left(W_{P_v}^2 \right) r_{P_v} \cos q_f \Delta r_p \, dq_f \Delta f_p + \left(W_{P_v}^2 \right)^{t-\Delta t} r_{P_v} \cos q_f \Delta r_p \, dq_f \Delta f_p \\
& = -2 \left[\frac{W_{fev}^t + W_e^t + W_w^t + W_{fww}^t}{4} \right]^2 r_p \cos q_f \Delta r_p \, dq_f \Delta f_p \\
& \quad + \left[\frac{W_{fev}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} + W_{fww}^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 r_p \cos q_f \Delta r_p \, dq_f \Delta f_p
\end{aligned}$$

3.5.3.4 Discrétisation des termes diffusifs.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
 & \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right)_{n_v}^{t+\Delta t} - \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right)_{s_v}^{t+\Delta t} \right] \sin q_f \, d q_f \, \Delta f_p \\
 & = \frac{1}{\text{Re}} \left[r_{n_v}^2 \left(\frac{V_{N_v}^{t+\Delta t} - V_{P_v}^{t+\Delta t}}{d r_n} \right) - r_{s_v}^2 \left(\frac{V_{P_v}^{t+\Delta t} - V_{S_v}^{t+\Delta t}}{d r_n} \right) \right] \sin q_f \, d q_f \, \Delta f_p \\
 & \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left(\sin q \frac{\partial V}{\partial q} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
 & \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(\sin q \frac{\partial V}{\partial q} \right)_{f_v}^{t+\Delta t} - \left(\sin q \frac{\partial V}{\partial q} \right)_{b_v}^{t+\Delta t} \right] \Delta r_p \, \Delta f_p \\
 & = \frac{1}{\text{Re}} \left[\sin q_{f_v} \left(\frac{V_{F_v}^{t+\Delta t} - V_{P_v}^{t+\Delta t}}{\Delta q_F} \right) - \sin q_{b_v} \left(\frac{V_{P_v}^{t+\Delta t} - V_{B_v}^{t+\Delta t}}{\Delta q_P} \right) \right] \Delta r_p \, \Delta f_p \\
 & \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2 \sin^2 q} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial f^2} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
 & \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(\frac{1}{\sin q} \frac{\partial V}{\partial f} \right)_{e_v}^{t+\Delta t} - \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\partial V}{\partial f} \right)_{w_v}^{t+\Delta t} \right] \Delta r_p \, d q_f \\
 & = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{\sin q_f} \left(\frac{V_{E_v}^{t+\Delta t} - V_{P_v}^{t+\Delta t}}{d f_e} \right) - \frac{1}{\sin q_f} \left(\frac{V_{P_v}^{t+\Delta t} - V_{W_v}^{t+\Delta t}}{d f_w} \right) \right] \Delta r_p \, d q_f
 \end{aligned}$$

3.5.3.5 discrétisation des autres termes à droite.

$$- \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{V}{r^2 \sin^2 q} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = - \frac{1}{\text{Re} \sin q_f} V_{P_v}^{t+\Delta t} \Delta r_p \, d q_f \, \Delta f_p$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\text{Re}} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial q} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
& \frac{2}{\text{Re}} \left[\left(2U_{f_v}^t - 2U_{b_v}^t \right) \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p - \left(U_{f_v}^{t-\Delta t} - U_{b_v}^{t-\Delta t} \right) \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p \right] \\
& = \frac{4}{\text{Re}} \left[\left(\frac{U_{nf_v}^t + U_{sf_v}^t}{2} \right) - \left(\frac{U_n^t + U_s^t}{2} \right) \right] \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p \\
& - \frac{2}{\text{Re}} \left[\left(\frac{U_{nf_v}^{t-\Delta t} + U_{sf_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \left(\frac{U_n^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p \\
& - \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{2 \cot q}{r^2} \frac{\partial W}{\partial f} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
& - \frac{2}{\text{Re}} \left(2W_{e_v}^t - 2W_{w_v}^t \right) \cot q_f \Delta r_p \, dq_f + \frac{2}{\text{Re}} \left(W_{e_v}^{t-\Delta t} - W_{w_v}^{t-\Delta t} \right) \cot q_f \Delta r_p \, dq_f \\
& = - \frac{4}{\text{Re}} \left[\left(\frac{W_{fev}^t + W_e^t}{2} \right) - \left(\frac{W_{fwv}^t + W_w^t}{2} \right) \right] \cot q_f \Delta r_p \, dq_f \\
& + \frac{2}{\text{Re}} \left[\left(\frac{W_{fev}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t}}{2} \right) - \left(\frac{W_{fwv}^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \cot q_f \Delta r_p \, dq_f
\end{aligned}$$

3.5.3.6 Discrétisation du terme de pression.

$$\begin{aligned}
\int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial P}{\partial q} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt & = - \left(P_{f_v}^{t+\Delta t} - P_{b_v}^{t+\Delta t} \right) r_{p_v} \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p \\
& = \left(P_P^{t+\Delta t} - P_F^{t+\Delta t} \right) r_p \sin q_f \Delta r_p \Delta j_p
\end{aligned}$$

Ensuite on réécrit l'équation de quantité de mouvement ainsi discrétisée sous la forme généralisée:

$$\begin{aligned}
A_{P_v} V_{P_v}^{t+\Delta t} & = A_{N_v} V_{N_v}^{t+\Delta t} + A_{S_v} V_{S_v}^{t+\Delta t} + A_{F_v} V_{F_v}^{t+\Delta t} + A_{B_v} V_{B_v}^{t+\Delta t} \\
& + A_{E_v} V_{E_v}^{t+\Delta t} + A_{W_v} V_{W_v}^{t+\Delta t} + S_v
\end{aligned}$$

Les coefficients A_i seront:

$$\begin{aligned}
A_{P_v} &= \frac{3V_{P_v}^{t+\Delta t}}{2\Delta t} r_p^2 \sin q_f \Delta r_p d q_f \Delta f_p \\
&+ \frac{1}{\text{Re}} \frac{r_n^2}{d r_n} \sin q_f d q_f \Delta f_p + \frac{1}{\text{Re}} \frac{r_s^2}{d r_s} \sin q_f d q_f \Delta f_p \\
&+ \frac{1}{\text{Re}} \frac{\sin q_F}{\Delta q_F} \Delta r_p \Delta f_p + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\sin q_P}{\Delta q_P} \Delta r_p \Delta f_p \\
&+ \frac{1}{\text{Re}} \frac{\Delta r_p d q_p}{\sin q_f d f_e} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\Delta r_p d q_p}{\sin q_f d f_w} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\Delta r_p d q_f \Delta f_p}{\sin q_f}
\end{aligned}$$

$$A_{N_v} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{r_n^2}{d r_n} \sin q_f d q_f \Delta f_p \right)$$

$$A_{S_v} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{r_s^2}{d r_s} \sin q_f d q_f \Delta f_p \right)$$

$$A_{F_v} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\sin q_F}{\Delta q_F} \Delta r_p \Delta f_p \right)$$

$$A_{B_v} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\sin q_P}{\Delta q_P} \Delta r_p \Delta f_p \right)$$

$$A_{E_v} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\Delta r_p d q_p}{\sin q_f d f_e} \right)$$

$$A_{W_v} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\Delta r_p d q_p}{\sin q_f d f_w} \right)$$

$$\begin{aligned}
S_v &= \frac{2V_{P_v}^t}{\Delta t} r_p^2 \sin q_f \Delta r_p d q_f \Delta f_p - \frac{V_{P_v}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_p^2 \sin q_f \Delta r_p d q_f \Delta f_p \\
&- \frac{1}{2} r_n^2 \left[U_{nf_v}^t + U_n^t \right] \left[V_{N_v}^t + V_{P_v}^t \right] \sin q_f d q_f \Delta f_p \\
&+ \frac{1}{2} r_s^2 \left[U_{sf_v}^t + U_s^t \right] \left[V_{S_v}^t + V_{P_v}^t \right] \sin q_f d q_f \Delta f_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} r_n^2 \left[U_{nfv}^{t-\Delta t} + U_n^{t-\Delta t} \right] \left[V_{N_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t} \right] \sin q_f d q_f \Delta f_p \\
& - \frac{1}{4} r_s^2 \left[U_{sfv}^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t} \right] \left[V_{S_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t} \right] \sin q_f d q_f \Delta f_p \\
& - \frac{1}{2} \left[V_{F_v}^t + V_{P_v}^t \right]^2 r_p \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p + \frac{1}{2} \left[V_{P_v}^t + V_{B_v}^t \right]^2 r_p \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p \\
& + \frac{1}{4} \left[V_{F_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t} \right]^2 r_p \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p - \frac{1}{4} \left[V_{P_v}^{t-\Delta t} + V_{B_v}^{t-\Delta t} \right]^2 r_p \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p \\
& - \frac{1}{2} \left[V_{E_v}^t + V_{P_v}^t \right] \left[W_{fev}^t + W_e^t \right] r_p \Delta r_p d q_f \\
& + \frac{1}{2} \left[V_{P_v}^t + V_{W_v}^t \right] \left[W_{fww}^t + W_w^t \right] r_p \Delta r_p d q_f \\
& + \frac{1}{4} \left[V_{E_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t} \right] \left[W_{fev}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t} \right] r_p \Delta r_p d q_f \\
& - \frac{1}{4} \left[V_{P_v}^{t-\Delta t} + V_{W_v}^{t-\Delta t} \right] \left[W_{fww}^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} \right] r_p \Delta r_p d q_f \\
& - 2 \left[\left(\frac{U_{nfv}^t + U_{sfv}^t + U_s^t + U_n^t}{4} \right) V_{P_v}^t \right] r_p \sin q_f \Delta r_p d q_f \Delta f_p \\
& + \left[\left(\frac{U_{nfv}^{t-\Delta t} + U_{sfv}^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t} + U_n^{t-\Delta t}}{4} \right) V_{P_v}^{t-\Delta t} \right] r_p \sin q_f \Delta r_p d q_f \Delta f_p \\
& - 2 \left[\frac{W_{fev}^t + W_e^t + W_w^t + W_{fww}^t}{4} \right]^2 r_p \cos q_f \Delta r_p d q_f \Delta f_p \\
& + \left[\frac{W_{fev}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} + W_{fww}^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 r_p \cos q_f \Delta r_p d q_f \Delta f_p \\
& + \frac{2}{\text{Re}} \left[\left(U_{nfv}^t + U_{sfv}^t \right) - \left(U_n^t + U_s^t \right) \right] \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p \\
& - \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(U_{nfv}^{t-\Delta t} + U_{sfv}^{t-\Delta t} \right) - \left(U_n^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t} \right) \right] \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p \\
& - \frac{2}{\text{Re}} \left[\left(W_{fev}^t + W_e^t \right) - \left(W_{fww}^t + W_w^t \right) \right] \cot q_f \Delta r_p d q_f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(W_{fev}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t} \right) - \left(W_{fwv}^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} \right) \right] \cot q_f \Delta r_p dq_f \\
 & + \left(P_P^{t+\Delta t} - P_F^{t+\Delta t} \right) r_p \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p
 \end{aligned}$$

3.5.4 Discrétisation de la composante azimutale de l'équation de quantité de mouvement.

Les figures 4.15 et 4.16 illustrent le maillage décalé dans la direction azimutale, dans les surfaces $r - f$ et $q - f$, respectivement.

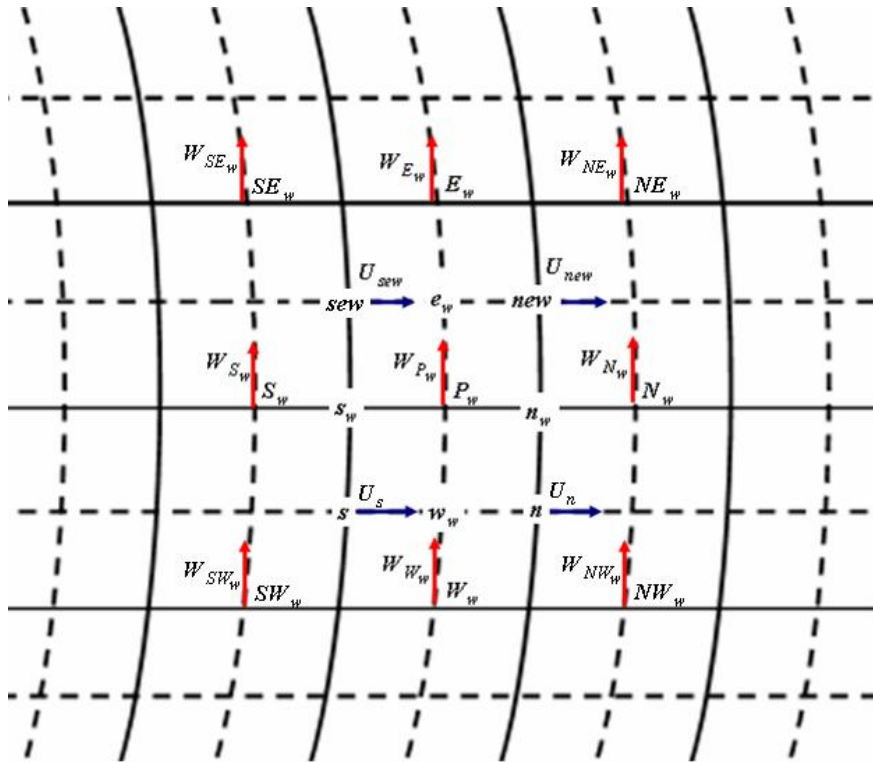


Figure 3.15 : Maillage décalé suivant la direction azimutale, surface $r - f$.

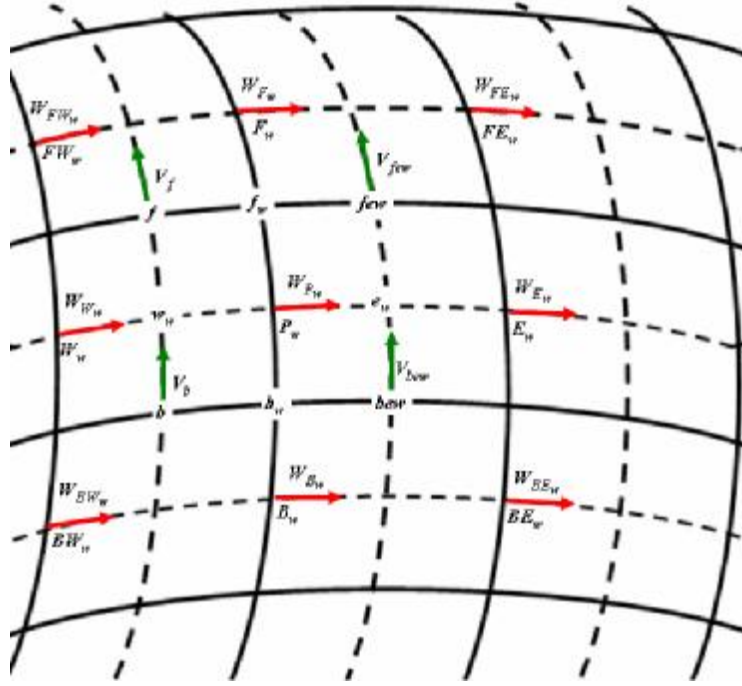


Figure 3.16 : Maillage décalé suivant la direction azimutale, surface $q - f$.

La composante azimutale de l'équation de quantité de mouvement sera discrétisée dans le maillage décalé terme par terme, spatialement et temporellement.

3.5.4.1 Discrétisation du terme temporel.

$$\int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{e_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = W_{P_w} \Big|_t^{t+\Delta t} r_{P_w}^2 \sin q_e \Delta r_p \Delta q_p \, df_e$$

$$= \frac{3W_{P_w}^{t+\Delta t} - 4W_{P_w}^t + W_{P_w}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_P^2 \sin q_e \Delta r_p \Delta q_p \, df_e$$

3.5.4.2 Discrétisation des termes convectifs.

$$\int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{e_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 U W \right) \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt =$$

$$\left[2 \left(r^2 U W \right)_{n_w}^t - 2 \left(r^2 U W \right)_{s_w}^t \right] \sin q_e \Delta q_p \, df_e - \left[\left(r^2 U W \right)_{n_w}^{t-\Delta t} - \left(r^2 U W \right)_{s_w}^{t-\Delta t} \right] \sin q_e \Delta q_p \, df_e$$

$$= \left[\left(2r_{n_w}^2 U_{n_w}^t W_{n_w}^t - 2r_{s_w}^2 U_{s_w}^t W_{s_w}^t \right) - \left(r_{n_w}^2 U_{n_w}^{t-\Delta t} W_{n_w}^{t-\Delta t} - r_{s_w}^2 U_{s_w}^{t-\Delta t} W_{s_w}^{t-\Delta t} \right) \right] \sin q_e \Delta q_p \, df_e$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 r_{n_w}^2 \left(\frac{U_{new}^t + U_n^t}{2} \right) \left(\frac{W_{P_w}^t + W_{N_w}^t}{2} \right) \sin q_e \Delta q_p df_e \\
 &- 2 r_{s_w}^2 \left(\frac{U_{sew}^t + U_s^t}{2} \right) \left(\frac{W_{P_w}^t + W_{S_w}^t}{2} \right) \sin q_e \Delta q_p df_e \\
 &- r_{n_w}^2 \left(\frac{U_{new}^{t-\Delta t} + U_n^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{W_{P_w}^{t-\Delta t} + W_{N_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \sin q_e \Delta q_p df_e \\
 &+ r_{s_w}^2 \left(\frac{U_{sew}^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{W_{P_w}^{t-\Delta t} + W_{S_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \sin q_e \Delta q_p df_e
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q} VW \right) r^2 \sin q dr dq df dt = \\
 &= \left[2(VW)_{f_w}^t - 2(VW)_{b_w}^t \right] r_{p_w} \sin q_e \Delta r_p df_e - \left[(VW)_{f_w}^{t-\Delta t} - (VW)_{b_w}^{t-\Delta t} \right] r_{p_w} \sin q_e \Delta r_p df_e \\
 &= \left[\left(2V_{f_w}^t W_{f_w}^t - 2V_{b_w}^t W_{b_w}^t \right) - \left(V_{f_w}^{t-\Delta t} W_{f_w}^{t-\Delta t} - V_{b_w}^{t-\Delta t} W_{b_w}^{t-\Delta t} \right) \right] r_p \sin q_e \Delta r_p df_e \\
 &= 2 \left(\frac{V_{few}^t + V_f^t}{2} \right) \left(\frac{W_{F_w}^t + W_{P_w}^t}{2} \right) r_p \sin q_e \Delta r_p df_e \\
 &- 2 \left(\frac{V_{bew}^t + V_b^t}{2} \right) \left(\frac{W_{P_w}^t + W_{B_w}^t}{2} \right) r_p \sin q_e \Delta r_p df_e \\
 &- \left(\frac{V_{few}^{t-\Delta t} + V_f^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{W_{F_w}^{t-\Delta t} + W_{P_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) r_p \sin q_e \Delta r_p df_e \\
 &+ \left(\frac{V_{bew}^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{W_{P_w}^{t-\Delta t} + W_{B_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) r_p \sin q_e \Delta r_p df_e
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{s_W}^{n_W} \int_{b_W}^{f_W} \int_{w_W}^{e_W} \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial f} W W \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
 & \left[2(WW)_{e_W}^t - 2(WW)_{w_W}^t \right] r_{p_W} \Delta r_p \Delta q_p - \left[(WW)_{e_W}^{t-\Delta t} - (WW)_{w_W}^{t-\Delta t} \right] r_{p_W} \Delta r_p \Delta q_p \\
 & = \left[\left(2W_{e_W}^t W_{e_W}^t - 2W_{w_W}^t W_{w_W}^t \right) - \left(W_{e_W}^{t-\Delta t} W_{e_W}^{t-\Delta t} - W_{w_W}^{t-\Delta t} W_{w_W}^{t-\Delta t} \right) \right] r_p \Delta r_p \Delta q_p \\
 & = \left\{ 2 \left(\frac{W_{E_W}^t + W_{P_W}^t}{2} \right)^2 - 2 \left(\frac{W_{P_W}^t + W_{W_W}^t}{2} \right)^2 \right\} r_p \Delta r_p \Delta q_p \\
 & - \left\{ \left(\frac{W_{E_W}^{t-\Delta t} + W_{P_W}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 - \left(\frac{W_{P_W}^{t-\Delta t} + W_{W_W}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 \right\} r_p \Delta r_p \Delta q_p
 \end{aligned}$$

3.5.4.3 Discrétisation des autres termes à gauche.

$$\begin{aligned}
 & \int_{s_W}^{n_W} \int_{b_W}^{f_W} \int_{w_W}^{e_W} \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{U W}{r} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
 & = \left[2(UW)_{R_W}^t - (UW)_{R_W}^{t-\Delta t} \right] r_{p_W} \sin q_e \Delta r_p \Delta q_p \, df_e \\
 & = 2 \left[\left(\frac{U_{new}^t + U_{sew}^t + U_s^t + U_n^t}{4} \right) W_{R_W}^t \right] r_p \sin q_e \Delta r_p \Delta q_p \, df_e \\
 & - \left[\left(\frac{U_{new}^{t-\Delta t} + U_{sew}^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t} + U_n^{t-\Delta t}}{4} \right) W_e^t \right] r_p \sin q_e \Delta r_p \Delta q_p \, df_e
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{s_W}^{n_W} \int_{b_W}^{f_W} \int_{w_W}^{e_W} \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{VW}{r} \cot q \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
 & \left[2(VW)_{R_W}^t - (VW)_{R_W}^{t-\Delta t} \right] \cot q_e r_{p_W} \sin q_e \Delta r_p \Delta q_p \, df_e \\
 & = 2 \left(\frac{V_{few}^t + V_f^t + V_b^t + V_{bew}^t}{4} \right) W_{R_W}^t \cot q_e r_p \sin q_p \Delta r_p \Delta q_p \, df_e \\
 & - \left(\frac{V_{few}^{t-\Delta t} + V_f^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t} + V_{bew}^{t-\Delta t}}{4} \right) W_{R_W}^{t-\Delta t} \cot q_e r_p \sin q_p \Delta r_p \Delta q_p \, df_e
 \end{aligned}$$

3.5.4.4 Discrétisation des termes diffusifs.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial W}{\partial r} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
 & \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(r^2 \frac{\partial W}{\partial r} \right)_{n_w}^{t+\Delta t} - \left(r^2 \frac{\partial W}{\partial r} \right)_{s_w}^{t+\Delta t} \right] \sin q_e \, \Delta q_p \, df_e \\
 & = \frac{1}{\text{Re}} \left[r_{n_w}^2 \left(\frac{W_{N_w}^{t+\Delta t} - W_{P_w}^{t+\Delta t}}{dr_n} \right) - r_{s_w}^2 \left(\frac{W_{P_w}^{t+\Delta t} - W_{S_w}^{t+\Delta t}}{dr_s} \right) \right] \sin q_e \, \Delta q_p \, df_e \\
 & \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left(\sin q \frac{\partial W}{\partial q} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
 & \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(\sin q \frac{\partial W}{\partial q} \right)_{f_w}^{t+\Delta t} - \left(\sin q \frac{\partial W}{\partial q} \right)_{b_w}^{t+\Delta t} \right] \Delta r_p \, df_e \\
 & = \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(\frac{W_{F_w}^{t+\Delta t} - W_{P_w}^{t+\Delta t}}{dq_f} \right) \sin q_{f_w} - \left(\frac{W_{P_w}^{t+\Delta t} - W_{B_w}^{t+\Delta t}}{dq_b} \right) \sin q_{b_w} \right] \Delta r_p \, df_e \\
 & \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2 \sin^2 q} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial f^2} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
 & \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(\frac{1}{\sin q} \frac{\partial W}{\partial f} \right)_{e_w}^{t+\Delta t} - \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\partial W}{\partial f} \right)_{w_w}^{t+\Delta t} \right] \Delta r_p \, \Delta q_p \\
 & = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{\sin q_{e_w}} \left(\frac{W_{E_w}^{t+\Delta t} - W_{P_w}^{t+\Delta t}}{\Delta f_E} \right) - \frac{1}{\sin q_{w_w}} \left(\frac{W_{P_w}^{t+\Delta t} - W_{W_w}^{t+\Delta t}}{\Delta f_P} \right) \right] \Delta r_p \, \Delta q_p
 \end{aligned}$$

3.5.4.5 Discrétisation des autres termes à droite.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \frac{2}{r^2 \sin q} \left(\frac{\partial U}{\partial f} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
 & \frac{2}{\text{Re}} \left[\left(2U_{e_w}^t - 2U_{w_w}^t \right) - \left(U_{e_w}^{t-\Delta t} - U_{w_w}^{t-\Delta t} \right) \right] \Delta r_p \, \Delta q_p
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{\text{Re}} \left[\left(\frac{U_{new}^t + U_{sew}^t}{2} \right) - \left(\frac{U_n^t + U_s^t}{2} \right) \right] \Delta r_P \Delta q_P \\
&\quad - \frac{2}{\text{Re}} \left[\left(\frac{U_{new}^{t-\Delta t} + U_{sew}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \left(\frac{U_n^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta r_P \Delta q_P \\
&\quad \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \frac{2 \cot q}{r^2 \sin q} \left(\frac{\partial V}{\partial f} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
&= \frac{2}{\text{Re}} \left[\left(2V_{e_w}^t - 2V_{w_w}^t \right) - \left(V_{e_w}^{t-\Delta t} - V_{w_w}^{t-\Delta t} \right) \right] \cot q_e \Delta r_P \Delta q_P \\
&= \frac{4}{\text{Re}} \left[\left(\frac{V_{few}^t + V_{bew}^t}{2} \right) - \left(\frac{V_f^t + V_b^t}{2} \right) \right] \cot q_e \Delta r_P \Delta q_P \\
&\quad - \frac{2}{\text{Re}} \left[\left(\frac{V_{few}^{t-\Delta t} + V_{bew}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \left(\frac{V_f^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \cot q_e \Delta r_P \Delta q_P \\
&\quad - \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{W}{r^2 \sin^2 q} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{\sin q_e} \right) W_{P_w}^{t+\Delta t} \Delta r_P \Delta q_P \, df_e
\end{aligned}$$

3.5.4.6 Discrétisation du terme de pression.

$$\begin{aligned}
- \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{1}{r \sin q} \frac{\partial P}{\partial f} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt &= - [P_{e_w} - P_{w_w}] r_{P_w} \Delta r_P \Delta q_P \\
&= [P_E^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t}] r_P \Delta r_P \Delta q_P
\end{aligned}$$

Ensuite on réécrit l'équation de quantité de mouvement ainsi discrétisée sous la forme généralisée:

$$\begin{aligned}
A_{P_w} W_{P_w}^{t+\Delta t} &= A_{N_w} W_{N_w}^{t+\Delta t} + A_{S_w} W_{S_w}^{t+\Delta t} + A_{F_w} W_{F_w}^{t+\Delta t} + A_{B_w} W_{B_w}^{t+\Delta t} \\
&\quad + A_{E_w} W_{E_w}^{t+\Delta t} + A_{W_w} W_{W_w}^{t+\Delta t} + S_w
\end{aligned}$$

Les coefficients A_i seront:

$$\begin{aligned}
 A_{P_w} = & \frac{3}{2\Delta t} r_p^2 \sin q_e \Delta r_p \Delta q_p df_e + \frac{g_1 r_n^2}{d r_n} \sin q_e \Delta q_p df_e + \frac{g_1 r_s^2}{d r_s} \sin q_e \Delta q_p df_e \\
 & + \frac{g_1 \sin q_f}{d q_f} \Delta r_p df_e + \frac{g_1 \sin q_b}{d q_b} \Delta r_p df_e + \frac{g_1}{\sin q_e \Delta f_E} \Delta r_p \Delta q_p + \frac{g_1}{\sin q_e \Delta f_P} \Delta r_p \Delta q_p \\
 & + \frac{g_1}{\sin q_e} \Delta r_p \Delta q_p df_e
 \end{aligned}$$

$$A_{N_w} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{r_n^2}{d r_n} \sin q_e \Delta q_p df_e \right)$$

$$A_{S_w} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{r_s^2}{d r_s} \sin q_e \Delta q_p df_e \right)$$

$$A_{F_w} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\sin q_f}{d q_f} \Delta r_p df_e \right)$$

$$A_{B_w} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\sin q_b}{d q_b} \Delta r_p df_e \right)$$

$$A_{E_w} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{\sin q_e \Delta f_E} \Delta r_p \Delta q_p \right)$$

$$A_{W_w} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{\sin q_e \Delta f_P} \Delta r_p \Delta q_p \right)$$

$$s_w = \frac{4 W_{P_w}^t}{2 \Delta t} r_p^2 \sin q_e \Delta r_p \Delta q_p df_e - \frac{W_{P_w}^{t-\Delta t}}{2 \Delta t} r_p^2 \sin q_e \Delta r_p \Delta q_p df_e$$

$$- \frac{1}{2} r_{n_w}^2 \left(U_{new}^t + U_n^t \right) \left(W_{P_w}^t + W_{N_w}^t \right) \sin q_e \Delta q_p df_e$$

$$+ \frac{1}{2} r_{s_w}^2 \left(U_{s_w}^t + U_s^t \right) \left(W_{P_w}^t + W_{S_w}^t \right) \sin q_e \Delta q_p df_e$$

$$+ \frac{1}{4} r_{n_w}^2 \left(U_{new}^{t-\Delta t} + U_n^{t-\Delta t} \right) \left(W_{P_w}^{t-\Delta t} + W_{N_w}^{t-\Delta t} \right) \sin q_e \Delta q_p df_e$$

$$- \frac{1}{4} r_{s_w}^2 \left(U_{s_w}^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t} \right) \left(W_{P_w}^{t-\Delta t} + W_{S_w}^{t-\Delta t} \right) \sin q_e \Delta q_p df_e$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \left(V_{few}^t + V_f^t \right) \left(W_{F_w}^t + W_{P_w}^t \right) r_p \sin q_e \Delta r_p df_e \\
& + \frac{1}{2} \left(V_{bew}^t + V_b^t \right) \left(W_{P_w}^t + W_{B_w}^t \right) r_p \sin q_e \Delta r_p df_e \\
& + \frac{1}{4} \left(V_{few}^{t-\Delta t} + V_f^{t-\Delta t} \right) \left(W_{F_w}^{t-\Delta t} + W_{P_w}^{t-\Delta t} \right) r_p \sin q_e \Delta r_p df_e \\
& - \frac{1}{4} \left(V_{bew}^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t} \right) \left(W_{P_w}^{t-\Delta t} + W_{B_w}^{t-\Delta t} \right) r_p \sin q_e \Delta r_p df_e \\
& - \left[\frac{1}{2} \left(W_{E_w}^t + W_{P_w}^t \right)^2 - \frac{1}{2} \left(W_{P_w}^t + W_{W_w}^t \right)^2 \right] r_p \Delta r_p \Delta q_p \\
& + \left[\frac{1}{4} \left(W_{E_w}^{t-\Delta t} + W_{P_w}^{t-\Delta t} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(W_{P_w}^{t-\Delta t} + W_{W_w}^{t-\Delta t} \right)^2 \right] r_p \Delta r_p \Delta q_p \\
& - \frac{1}{2} \left(U_{new}^t + U_{sew}^t + U_s^t + U_n^t \right) W_{P_w}^t r_p \sin q_e \Delta r_p \Delta q_p df_e \\
& + \frac{1}{4} \left(U_{new}^{t-\Delta t} + U_{sew}^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t} + U_n^{t-\Delta t} \right) W_e^t r_p \sin q_e \Delta r_p \Delta q_p df_e \\
& - \frac{1}{2} \left(V_{few}^t + V_f^t + V_b^t + V_{bew}^t \right) W_{P_w}^t \cot q_e r_p \sin q_p \Delta r_p \Delta q_p df_e \\
& + \frac{1}{4} \left(V_{few}^{t-\Delta t} + V_f^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t} + V_{bew}^{t-\Delta t} \right) W_{P_w}^{t-\Delta t} \cot q_e r_p \sin q_p \Delta r_p \Delta q_p df_e \\
& + \frac{2}{\text{Re}} \left[\left(U_{new}^t + U_{sew}^t \right) - \left(U_n^t + U_s^t \right) \right] \Delta r_p \Delta q_p \\
& - \frac{2}{\text{Re}} \left[\left(U_{new}^{t-\Delta t} + U_{sew}^{t-\Delta t} \right) - \left(U_n^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t} \right) \right] \Delta r_p \Delta q_p \\
& + \frac{2}{\text{Re}} \left[\left(V_{few}^t + V_{bew}^t \right) - \left(V_f^t + V_b^t \right) \right] \cot q_e \Delta r_p \Delta q_p \\
& - \frac{2}{\text{Re}} \left[\left(V_{few}^{t-\Delta t} + V_{bew}^{t-\Delta t} \right) - \left(V_f^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t} \right) \right] \cot q_e \Delta r_p \Delta q_p \\
& + \left[P_E^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t} \right] r_p \Delta r_p \Delta q_p
\end{aligned}$$

3.5.5 Discrétisation des conditions aux limites.

3.5.5.1 Pour U. Les conditions aux limites en ce qui concerne la vitesse radiale sont:

$$\begin{cases} A \ r=1, \ U=0 \\ A \ r=1.17, \ U=0 \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \quad q=0, \quad \frac{\partial U}{\partial q} = 0 \\ A \quad q = p, \quad \frac{\partial U}{\partial q} = 0 \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Ce qui s'exprimera en termes de coefficients de la manière suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_P(1, j, k) = 1 \\ S_C(1, j, k) = 0 \\ A_P(il-1, j, k) = 1 \\ S_C(il-1, j, k) = 0 \\ A_P(i, 1, k) = 1 \\ A_F(i, 1, k) = 1 \\ A_P(i, jl, k) = 1 \\ A_B(i, jl, k) = 1 \end{array} \right. \quad (3.14)$$

3.5.5.2 Pour V. Les conditions aux limites en ce qui concerne la vitesse méridionale sont:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \quad r=1, \quad V = 0 \\ A \quad r=1.17, \quad V = 0 \end{array} \right. \quad (3.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \quad q = 0, \quad V = 0 \\ A \quad q = p, \quad V = 0 \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Ce qui s'exprimera en termes de coefficients de la manière suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_P(1, j, k) = 1 \\ S_C(1, j, k) = 0 \\ A_P(il, j, k) = 1 \\ S_C(il, j, k) = 0 \\ A_P(i, 1, k) = 1 \\ S_C(i, 1, k) = 0 \\ A_P(i, jl-1, k) = 1 \\ S_C(i, jl-1, k) = 0 \end{array} \right. \quad (3.17)$$

3.5.5.3 Pour W. Les conditions aux limites en ce qui concerne la vitesse azimutale sont:

$$\begin{cases} A & r=1, \quad W = \sin q \\ A & r=1.17, \quad W = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\begin{cases} A & q=0, \quad \frac{\partial W}{\partial q} = 0 \\ A & q=p, \quad \frac{\partial W}{\partial q} = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Ce qui s'exprimera en termes de coefficients de la manière suivante:

$$\begin{cases} A_p(1, j, k) = 1 \\ S_c(1, j, k) = r_p(1) \sin q_p(j) \\ A_p(il-1, j, k) = 1 \\ S_c(il-1, j, k) = 0 \\ A_p(i, 1, k) = 1 \\ A_f(i, 1, k) = 1 \\ A_p(i, jl-1, k) = 1 \\ A_B(i, jl-1, k) = 1 \end{cases} \quad (3.20)$$

3.6 Equation de discrétisation de la pression.

Après la discrétisation des équations de continuité et de la quantité de mouvements radiale, méridionale et azimutale; on doit obtenir une équation de discrétisation pour la pression. Sans équation de la pression, on ne peut résoudre les équations discrétisées obtenues.

Les équations de quantités de mouvement discrétisées, peuvent s'écrire sous la forme:

$$a_n U_n = \sum a_i U_i + b_u + (P_N - P_p) A_n$$

$$a_s U_s = \sum a_i U_i + b_u + (P_p - P_s) A_s$$

$$a_f V_f = \sum a_i V_i + b_v + (P_f - P_p) A_f \quad (3.21)$$

$$a_b V_b = \sum a_i V_i + b_v + (P_p - P_B) A_b$$

$$a_e W_e = \sum a_i W_i + b_w + (P_E - P_p) A_e$$

$$a_w W_w = \sum a_i W_i + b_w + (P_p - P_w) A_w$$

L'indice i indique les points voisins du point considéré (dans les trois directions), les termes b_u , b_v et b_w sont les termes des sources contenant les termes autres que ceux de la pression, ce dernier étant le troisième terme à droite dans chaque équation du système (3.21). On peut réécrire le système (3.21) sous la forme:

$$\begin{aligned} U_n &= \hat{U}_n + d_n (P_N - P_p) \\ U_s &= \hat{U}_s + d_s (P_p - P_S) \\ V_f &= \hat{V}_f + d_f (P_F - P_p) \\ V_b &= \hat{V}_b + d_b (P_p - P_B) \\ W_e &= \hat{W}_e + d_e (P_E - P_p) \\ W_w &= \hat{W}_w + d_w (P_p - P_w) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Les vitesses $\hat{U}_n, \hat{U}_s, \hat{V}_f, \hat{V}_b, \hat{W}_e, \hat{W}_w$, sont dites pseudo-vitesses, elles sont définies comme suit:

$$\begin{aligned} \hat{U}_n &= \frac{\sum a_i U_i + b_u}{a_n} \\ \hat{U}_s &= \frac{\sum a_i U_i + b_u}{a_s} \\ \hat{V}_f &= \frac{\sum a_i V_i + b_v}{a_f} \\ \hat{V}_b &= \frac{\sum a_i V_i + b_v}{a_b} \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\hat{W}_e = \frac{\sum a_i W_i + b_w}{a_w}$$

$$\hat{W}_w = \frac{\sum a_i W_i + b_w}{a_w}$$

On considère l'équation de continuité qui a été intégrée dans un volume de contrôle typique, non décalé. Elle est sous la forme:

$$\begin{aligned} & \left(r_n^2 U_n^{t+\Delta t} - r_s^2 U_s^{t+\Delta t} \right) \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p + \left(V_f^{t+\Delta t} \sin q_f - V_b^{t+\Delta t} \sin q_b \right) \Delta r_p \Delta f_p \\ & + \left(\hat{W}_e^{t+\Delta t} - \hat{W}_w^{t+\Delta t} \right) r_p \Delta r_p \Delta q_p = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

On remplace les vitesses présentes dans cette équation par leurs définitions (3.22). On obtient l'équation suivante:

$$\begin{aligned} & r_n^2 \left[\hat{U}_n + d_n (P_N - P_P) \right] \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p - r_s^2 \left[\hat{U}_s + d_s (P_P - P_S) \right] \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p \\ & + \left[\hat{V}_f + d_f (P_F - P_P) \right] \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p - \left[\hat{V}_b + d_b (P_P - P_B) \right] \sin q_b \Delta r_p \Delta f_p \\ & + \left[\hat{W}_e + d_e (P_E - P_P) \right] r_p \Delta r_p \Delta q_p - \left[\hat{W}_w + d_w (P_P - P_W) \right] r_p \Delta r_p \Delta q_p = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

On simplifie cette équation sous la forme:

$$\begin{aligned} & \left(r_n^2 \hat{U}_n - r_s^2 \hat{U}_s \right) \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p + \left(\hat{V}_f \sin q_f - \hat{V}_b \sin q_b \right) \Delta r_p \Delta f_p \\ & + \left(\hat{W}_e - \hat{W}_w \right) r_p \Delta r_p \Delta q_p + r_n^2 d_n (P_N - P_P) \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p \\ & - r_s^2 d_s (P_P - P_S) \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p + d_f \sin q_f (P_F - P_P) \Delta r_p \Delta f_p \\ & - d_b \sin q_b (P_P - P_B) \Delta r_p \Delta f_p \\ & + d_e (P_E - P_P) r_p \Delta r_p \Delta q_p - d_w (P_P - P_W) r_p \Delta r_p \Delta q_p = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Ce qui nous intéresse est de trouver une équation pour la pression sous la forme:

$$\begin{aligned}
A_P P_P^{t+\Delta t} &= A_N P_N^{t+\Delta t} + A_S P_S^{t+\Delta t} + A_F P_F^{t+\Delta t} + A_B P_B^{t+\Delta t} \\
&+ A_E P_E^{t+\Delta t} + A_W P_W^{t+\Delta t} + S
\end{aligned} \tag{3.27}$$

A partir de l'équation (3.26) on détermine les coefficients $A_P, A_N, A_S, A_F, A_B, A_E, A_W$ ainsi que le terme source comme suit :

$$\begin{aligned}
A_N &= r_n^2 d_n \sin q_P \Delta q_P \Delta f_P \\
A_S &= r_s^2 d_s \sin q_P \Delta q_P \Delta f_P \\
A_F &= d_f \sin q_f \Delta r_P \Delta f_P \\
A_B &= d_b \sin q_b \Delta r_P \Delta f_P \\
A_E &= d_e r_P \Delta r_P \Delta q_P \\
A_W &= d_w r_P \Delta r_P \Delta q_P \\
A_P &= A_N + A_S + A_F + A_B + A_E + A_W
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
S &= \left(r_s^2 \hat{U}_s - r_n^2 \hat{U}_n \right) \sin q_P \Delta q_P \Delta f_P + \left(\hat{V}_b \sin q_b - \hat{V}_f \sin q_f \right) \Delta r_P \Delta f_P \\
&+ \left(\hat{W}_w - \hat{W}_e \right) r_P \Delta r_P \Delta q_P
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Donc, si on connaît le champ de vitesse on pourra calculer la pression, de l'équation (3.27). Dans notre cas, les champs de pression et de vitesse sont à déterminer. Pour résoudre l'équation de la pression (et ainsi obtenir le champ de vitesse) on utilise un champ de vitesse estimé, qui sera introduit comme suit:

$$\begin{aligned}
a_n U_n^* &= \sum a_i U_i^* + b_u + \left(P_N^* - P_P^* \right) A_n \\
a_s U_s^* &= \sum a_i U_i^* + b_u + \left(P_P^* - P_S^* \right) A_s \\
a_f V_f^* &= \sum a_i V_i^* + b_v + \left(P_F^* - P_P^* \right) A_f \\
a_b V_b^* &= \sum a_i V_i^* + b_v + \left(P_P^* - P_B^* \right) A_b
\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$a_e W_e^* = \sum a_i W_i^* + b_w + (P_E^* - P_P^*) A_e$$

$$a_w W_w^* = \sum a_i W_i^* + b_w + (P_P^* - P_W^*) A_w$$

Les estimations des vitesses et des pressions auront une étoile * comme exposant. Les équations du système (3.30) indiquent que les estimations des vitesses sont reliées aux estimations des pressions. On suppose que la valeur de la vitesse (ainsi que celle de la pression) sera égale à une estimation plus une correction:

$$U = U^* + U'$$

$$V = V^* + V'$$

$$W = W^* + W' \tag{3.31}$$

$$P = P^* + P'$$

Les corrections porte une prime comme exposant. L'équation (3.31) s'étendra à toutes les composantes de la vitesse et donnera lieu aux équations:

$$U_n = U_n^* + U_n'$$

$$U_s = U_s^* + U_s'$$

$$V_f = V_f^* + V_f'$$

$$V_b = V_b^* + V_b' \tag{3.32}$$

$$W_e = W_e^* + W_e'$$

$$W_w = W_w^* + W_w'$$

Pour obtenir les équations contenant les corrections, on soustrait le système (3.30) du système (3.22), on obtient:

$$a_n U_n' = \sum a_i U_i' + (P_N' - P_P') A_n$$

$$a_s U_s' = \sum a_i U_i' + (P_P' - P_S') A_s$$

$$a_f V_f' = \sum a_i V_i' + (P_F' - P_P') A_f \tag{3.33}$$

$$a_b V'_b = \sum a_i V'_i + (P'_P - P'_B) A_b$$

$$a_e W'_e = \sum a_i W'_i + (P'_E - P'_P) A_e$$

$$a_w W'_w = \sum a_i W'_i + (P'_P - P'_W) A_w$$

Une approximation justifiée par **S.V. Patankar** [21], consiste à négliger les sommes $\sum a_i U'_i$, $\sum a_i V'_i$ et $\sum a_i W'_i$. Donc, les corrections des vitesses ne seront fonctions que des corrections de la pression, comme suit:

$$\begin{aligned} a_n U'_n &= (P'_N - P'_p) A_n \\ a_s U'_s &= (P'_P - P'_S) A_s \\ a_f V'_f &= (P'_F - P'_p) A_f \\ a_b V'_b &= (P'_P - P'_B) A_b \\ a_e W'_e &= (P'_E - P'_P) A_e \\ a_w W'_w &= (P'_P - P'_W) A_w \end{aligned} \tag{3.34}$$

Le système (3.34) exprime de façon claire, que les corrections des vitesses sont directement liées aux corrections des pressions. Les relations entre les vitesses et leurs corrections sont donc comme suit:

$$\begin{aligned} U_n &= U_n^* + d_n (P'_N - P'_P) \\ U_s &= U_s^* + d_s (P'_P - P'_S) \\ V_f &= V_f^* + d_f (P'_F - P'_P) \\ V_b &= V_b^* + d_b (P'_P - P'_B) \\ W_e &= W_e^* + d_e (P'_E - P'_P) \\ W_w &= W_w^* + d_w (P'_P - P'_W) \end{aligned} \tag{3.35}$$

Les vitesses ainsi définies dans le système (3.35) doivent satisfaire l'équation de continuité (3.24). En introduisant ces vitesses dans l'équation de continuité, on obtient l'équation:

$$\begin{aligned}
& r_n^2 \left(U_n^* - d_n (P'_N - P'_P) \right) \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p - r_s^2 \left(U_s^* - d_s (P'_P - P'_S) \right) \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p \\
& + \left(V_f^* - d_f (P'_F - P'_P) \right) \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p - \left(V_b^* - d_b (P'_P - P'_B) \right) \sin q_b \Delta r_p \Delta f_p \\
& + \left(W_e^* - d_e (P'_E - P'_P) \right) r_p \Delta r_p \Delta q_p - \left(W_w^* - d_w (P'_P - P'_W) \right) r_p \Delta r_p \Delta q_p = 0
\end{aligned}
\tag{3.36}$$

Cette équation permet l'obtention d'une équation de discrétisation de la correction de la pression comme suit:

$$A_p P'_P = A_n P'_n + A_s P'_s + A_f P'_f + A_b P'_b + A_e P'_e + A_w P'_w + S' \tag{3.37}$$

On note que les coefficients de l'équation (3.37) sont les mêmes que les coefficients de l'équation (3.27). Mais la source n'est pas la même, elle est égale à:

$$\begin{aligned}
S = & \left(r_s^2 U_s^* - r_n^2 U_n^* \right) \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p + \left(V_b^* \sin q_b - V_f^* \sin q_f \right) \Delta r_p \Delta f_p \\
& + \left(W_w^* - W_e^* \right) r_p \Delta r_p \Delta q_p
\end{aligned}
\tag{3.38}$$

Donc pour trouver les corrections de la pression on résout le système représenté par l'équation (3.37). Ensuite, on utilise ces corrections pour déterminer les corrections des vitesses.

3.7 Résolution des équations algébriques ou équations discrétisées.

La discrétisation des équations modélisantes donne lieu à un système d'équations algébriques. Ce système s'écrit, sous forme matricielle, comme suivant:

$$[A] \{X\} = \{b\} \tag{3.39}$$

[A] Matrice des coefficients, ces éléments sont connus. Cette matrice possède la particularité d'être une matrice heptagonale, c'est-à-dire qu'elle ne contient que sept entrées, la diagonale, trois entrées sur diagonales et trois entrées sous diagonales.

{X} Vecteur des inconnus.

$\{b\}$ Vecteur de charge, ses éléments sont connus.

Pour une résolution itérative de ce système d'équation, on utilise la méthode de balayage, expliquée par **S.V. Patankar** [21], avec l'algorithme de Thomas et l'algorithme tri-diagonal cyclique. Cette méthode itérative converge plus vite que les autres méthodes itératives telles que la méthode de Gauss-Seidel [21].

3.8 La méthode de balayage.

Soit le système, d'équations algébriques, représenté par l'équation de discrétisation suivante:

$$A_P f_P = A_N f_N + A_S f_S + A_F f_F + A_B f_B + A_E f_E + A_W f_W + S \quad (3.40)$$

La matrice des coefficients de ce système est heptagonale.

Ce système est transformé, momentanément, en le système suivant:

$$A_P f_P = A_N f_N + A_S f_S + S^* \quad (3.41)$$

Avec:

$$S^* = A_F f_F + A_B f_B + A_E f_E + A_W f_W + S \quad (3.42)$$

La matrice des coefficients du système (3.41) est tri-diagonale. Ce système d'équations peut être résolu par l'algorithme de Thomas, qui sera exposé ultérieurement. La solution obtenue est notée f^* .

La deuxième étape du balayage commence par la considération du système:

$$A_P f_P = A_F \Phi f_F + A_B f_B + S^{**} \quad (3.43)$$

Avec:

$$S^{**} = A_N f_N^* + A_S \Phi f_S^* + A_E f_E^* + A_W f_W^* + S \quad (3.44)$$

La matrice des coefficients du système (3.43) est tri-diagonale, et le système peut être résolu par l'algorithme de Thomas. La solution obtenue est notée f^{**} .

Finalement, la troisième (dernière) étape du balayage commence par la considération du système:

$$A_P f_P = A_E f_E + A_W f_W + S^{***} \quad (3.45)$$

Avec:

$$S^{***} = A_N f_N^{**} + A_S f_S^{**} + A_F f_F^{**} + A_B f_B^{**} + S \quad (3.46)$$

La matrice des coefficients du système (3.45) est tri diagonale; mais elle contient un élément non nul à la fin de sa première ligne et un autre élément non nul au début de sa dernière ligne. C'est une matrice tri diagonale cyclique. Et donc, le système (3.45) peut être résolu par l'algorithme tri diagonal cyclique, qui sera présenté plus tard. La solution obtenue, par l'algorithme tri diagonal cyclique est notée f^{***} . Cette dernière est la solution obtenue après les trois balayages, suivant r , q et f . Elle représente la solution obtenue après une itération des trois balayages.

3.9 Algorithme de Thomas.

Cet algorithme est appelé aussi TDMA (Tri Diagonal Matrix Algorithm). Il est utilisé pour résoudre un système d'équations tri diagonal:

$$[A] \{f\} = \{b\} \quad (3.47)$$

Avec :

$[A]$ Matrice des coefficients.

$\{f\}$ Vecteur des inconnues.

$\{b\}$ Vecteur de charge.

La matrice $[A]$, doit être tri diagonale. La méthode utilisée pour résoudre ce système d'équations est l'algorithme de Thomas présenté ci-dessous:

Soit le système tri diagonal d'équations algébriques:

$$a_i f_i = b_i f_{i+1} + c_i f_{i-1} + d_i \quad (3.48)$$

a_i, b_i, c_i et d_i sont des coefficients, f_{i+1} est la valeur de la variable dépendante dans le point à droite du point i , f_{i-1} est la valeur de la variable dépendante dans le point à gauche du point i . Cette forme relie donc la variable dépendante au point P aux points qui lui sont adjacents. Si le premier point est 1 et le nombre de point est N , on doit (nécessairement) avoir:

$$c_1 = 0 \text{ et } b_N = 0 \quad (3.49)$$

Soit la relation de récurrence:

$$f_i = P_i f_{i+1} + Q_i \quad (3.50)$$

Cette relation avec (3.48), entraîne deux autres relations de récurrence:

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (3.51)$$

$$Q_i = \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (3.52)$$

Avec:

$$P_1 = \frac{b_1}{a_1} \text{ et } Q_1 = \frac{d_1}{a_1} \quad (3.53)$$

Ces deux paramètres sont connus. Aussi il est facile de démontrer que:

$$P_N = 0 \text{ et } T_N = Q_N \quad (3.54)$$

Récapitulation des étapes de calcul de l'algorithme de Thomas:

- 1- Calcul de P_1 et Q_1 de l'équation (3.53).
- 2- Utiliser les équations (3.51) et (3.52) pour obtenir les P_i et Q_i pour $i = 1, \dots, N$.
- 3- Poser $T_N = Q_N$.
- 4- Utiliser l'équation (3.50), $i = N-1, N-2, \dots, 1$ pour obtenir $f_{N-1}, f_{N-2}, \dots, f_1$.

Cet algorithme est très efficace et converge rapidement.

3.10 Algorithme tri diagonal cyclique.

La solution d'un système, d'équations algébriques, tri diagonal cyclique est un peut plus compliquée que celle du système tri diagonal simple.

Un système d'équations tri diagonal cyclique est représenté par l'équation indicielle suivante:

$$a_k f_k = b_k f_{kkk} + c_k f_{kk} + d_k \quad (3.55)$$

$$k = 1, 2, \dots, KL$$

avec:

$$kkk = \begin{cases} k+1, & \text{si } k \neq KL \\ 1, & \text{si } k = KL \end{cases}$$

$$kk = \begin{cases} k-1, & \text{si } k \neq 1 \\ KL, & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

Tous les éléments a_k , b_k , c_k et d_k sont supposés connus.

On introduit la relation de récurrence suivante:

$$f_k = E_k f_{kkk} + F_k f_{kl} + G_k \quad (3.56)$$

$$k = 1, 2, \dots, kl - 1$$

$$E_1 = \frac{b_1}{a_1}, F_1 = \frac{c_1}{a_1} \text{ et } G_1 = \frac{d_1}{a_1}$$

Cette relation est aussi vrai pour kk :

$$f_{kk} = E_{kk} f_k + F_{kk} f_{KL} + G_{kk} \quad (3.57)$$

En remplaçant (3.57) dans (3.55) on obtient:

$$f_k = \left[\frac{b_k}{a_k - c_k E_{kk}} \right] f_{kkk} + \left[\frac{c_k F_{kk}}{a_k - c_k E_{kk}} \right] f_{KL} + \left[\frac{c_k G_{kk} + d_k}{a_k - c_k E_{kk}} \right] \quad (3.58)$$

(3.56) est (3.58) sont identiques et on obtient trois nouvelles relations de récurrence:

$$E_k = \frac{b_k}{a_k - c_k E_{kk}}, F_k = \frac{c_k F_{kk}}{a_k - c_k E_{kk}} \text{ et } G_k = \frac{d_k + c_k G_{kk}}{a_k - c_k E_{kk}}, k = 2, 3, \dots, Kl - 1$$

Connaissant E_1, F_1 et G_1 , on calcule, avec les relations de récurrence précédentes, tous les E_k, F_k et $G_k, k = 2, 3, \dots, Kl - 1$

Pour calculer les $f_k, k = Kl - 1, Kl - 2, Kl - 3, \dots, 3, 2, 1$, avec la relation de récurrence (3.56), il nous faut la valeur de f_{kl} qui sera déterminée dans ce qui suit.

De l'équation (3.55) on a:

$$a_{KL} f_{KL} = b_{KL} f_1 + c_{KL} f_{KL-1} + d_{KL}$$

Cette équation est réécrite sous la forme:

$$P_1 f_{KL} = Q_1 f_1 + c_{KL} f_{KL-1} + R_1 \quad (3.59)$$

avec:

$$P_1 = a_{KL}, Q_1 = b_{KL} \text{ et } R_1 = d_{KL}$$

D'après (3.56):

$$f_1 = E_1 f_2 + F_1 f_{KL} + G_1$$

Cette équation est utilisée dans (3.59) et on obtient:

$$[P_1 - Q_1 F_1] f_{KL} = [Q_1 E_1] f_2 + c_{KL} f_{KL-1} + [R_1 + Q_1 G_1], \text{ qui est écrite:}$$

$$P_2 f_{KL} = Q_2 f_2 + c_{KL} f_{KL-1} + R_2$$

Aussi de l'équation (3.56), on a:

$$f_2 = E_2 f_3 + F_2 f_{KL} + G_2$$

Cette équation est utilisée dans la précédente et il vient:

$$[P_2 - Q_2 F_2] f_{KL} = [Q_2 E_2] f_3 + c_{KL} f_{KL-1} + [R_2 + Q_2 G_2]$$

qui est réécrite:

$$P_3 f_{KL} = Q_3 f_3 + c_{KL} f_{KL-1} + R_3$$

Et on remplace f_3 en fonction de f_4 et f_{kl} , en utilisant l'équation (3.56)...etc.

Cette procédure est continuée jusqu'à l'obtention de l'équation:

$$P_{KL-1} f_{KL} = Q_{KL-1} f_{KL-1} + c_{KL} f_{KL-1} + R_{KL-1} = [Q_{KL-1} + c_{KL}] f_{KL-1} + R_{KL-1}$$

(3.60)

On peut constater facilement que nous avons trois nouvelles relations de récurrence:

$$P_k = P_{k-1} - Q_{k-1} F_{k-1}$$

$$Q_k = Q_{k-1} E_{k-1}$$

$$R_k = R_{k-1} + Q_{k-1} G_{k-1}$$

Connaissant P_1 , Q_1 et R_1 , on calcule tous les P_k , Q_k et R_k , $k = 2, \dots, KL-1$.

Reconsidérons l'équation (3.60):

$$P_{KL-1} \varphi_{KL} = [Q_{KL-1} + c_{KL}] \varphi_{KL-1} + R_{KL-1}$$

Avec l'équation (3.56) on a:

$$f_{KL-1} = E_{KL-1} f_{KL} + F_{KL-1} f_{KL} + G_{KL-1} = [E_{KL-1} + F_{KL-1}] f_{KL} + G_{KL-1}$$

Cette équation est utilisée dans (3.60) et il vient:

$$P_{KL-1} f_{KL} = [Q_{KL-1} + c_{KL}] ([E_{KL-1} + F_{KL-1}] f_{KL} + G_{KL-1}) + R_{KL-1}$$

cette équation donne la valeur de Φ_{KL} :

$$f_{KL} = \frac{[Q_{KL-1} + c_{KL}] G_{KL-1} + R_{KL-1}}{P_{KL-1} - [Q_{KL-1} + c_{KL}] [E_{KL-1} + F_{KL-1}]} \quad (3.61)$$

Finalement, le calcul de f_{KL} permet, avec l'utilisation de l'équation (3.56), le calcul des f_k , $k = KL-1, KL-2, KL-3, \dots, 3, 2, 1$

Les étapes précédentes résument l'algorithme Tri Diagonal Cyclique.

3.11 Algorithme SIMPLER.

Cet algorithme est une version révisée de l'algorithme SIMPLE. Il est utilisé pour la solution séquentielle des systèmes d'équations de discrétisation des vitesses et de la

pression. L'idée de base de cet algorithme consiste en l'utilisation d'une initialisation du champ de vitesse, qui après son introduction dans l'équation de pression et sa résolution donnera un champ de pression estimé. Ce champ de pression sera introduit dans les équations de discrétisation des trois composantes de la vitesse et qui donnera un champ de vitesse estimé après leur résolution. Ce champ de vitesse estimé ainsi obtenu, sera utilisé pour l'obtention de la correction de la pression, qui à son tour servira à corriger le champ de vitesse. Ce champ de vitesse corrigé sera utilisé, à nouveau comme champ de vitesse initial, et les étapes précédentes sont poursuivies jusqu'à atteindre la convergence.

Les étapes à suivre sont résumé comme suit:

- 1- Initialiser le champ de vitesse U, V, W .
- 2- Calculer les coefficients des équations de discrétisation de U, V et W .
- 3- Calculer les pseudo vitesses \hat{U}, \hat{V} et \hat{W} des équations (3.23) par un calcul direct, en utilisant le champ de vitesse initial.
- 4- Utiliser les pseudo vitesses pour calculer la source de l'équation de discrétisation de la pression, équation (3.27).
- 5- Résoudre l'équation de discrétisation de la pression est ainsi obtenir une estimation du champ de pression.
- 6- Utiliser cette estimation du champ de pression pour calculer les sources des équations de discrétisation de U, V , et W .
- 7- Résoudre les équations de discrétisation de U, V et W ; ainsi on obtient un champ de vitesse estimé.
- 8- On utilise le champ de vitesse estimé obtenu pour calculer la source de l'équation de discrétisation de P' . C'est-à-dire la source de l'équation de discrétisation de la correction de la pression, équation (3.37).
- 9- Résoudre l'équation de discrétisation de P' et ainsi obtenir le champ de la correction de la pression.
- 10- Corriger le champ de vitesse en utilisant les corrections de la pression, équations (3.34).
- 11- Vérifier l'atteinte de la convergence selon le critère de convergence choisit, si cette convergence est atteinte on arrête les calculs. Si la convergence n'est pas atteinte on reprend les calculs de l'étape 2, jusqu'à la convergence.

Le critère de convergence dans notre cas est l'atteinte du régime permanent. Une fois le régime stationnaire obtenu, on s'attend à ce que le bilan global de la quantité de mouvement soit satisfait; et on obtient aussi l'égalité des moments (par rapport à l'axe vertical des sphères) des forces exercées sur les surfaces des deux sphères.

3.12 Equation de la vorticité.

Dans notre étude numérique, en plus d'analyser l'écoulement en calculant le champ de vitesse et de pression, on calcul la vorticité azimuthale de l'écoulement. La vorticité offre un outil supplémentaire pour l'analyse de l'écoulement. Il est donc utile de présenter la définition de la vorticité.

3.12.1 Définition.

La vorticité est un vecteur qui mesure l'intensité de la rotation angulaire locale. Mathématiquement, elle est défini comme étant le rotationnel du vecteur vitesse.

$$\mathbf{\dot{w}} = \nabla \times \mathbf{\dot{V}} \quad (3.62)$$

Le vecteur vorticité $\mathbf{\dot{w}}$, possède trois composantes: une composante radiale w_r , une composante polaire w_q et une composante azimuthale w_f . Ces composantes s'écrivent dans les coordonnées sphériques comme suit :

$$\begin{aligned} w_r &= \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial (W \sin q)}{\partial q} - \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial V}{\partial f} \\ w_q &= \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial U}{\partial f} - \frac{1}{r} \frac{\partial (rW)}{\partial r} \\ w_f &= \frac{1}{r} \frac{\partial (rV)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial q} \end{aligned} \quad (3.63)$$

Le vecteur de la vorticité sera sous la forme :

$$\mathbf{\dot{w}} = w_r \mathbf{\dot{e}}_r + w_q \mathbf{\dot{e}}_q + w_f \mathbf{\dot{e}}_f \quad (3.64)$$

La vorticité nous fourni des informations sur l'écoulement, c'est un miroir du mouvement du fluide. Par exemple, si le fluide subi un étirement (ou une contraction) la vorticité augmente (ou diminue) le long de l'axe d'extension. Si le fluide est incliné (ou dévié) suivant une direction, la vorticité est déviée dans la même direction.

3.12.2 Equation de transfert de la vorticité.

L'équation de transfert de la vorticité azimutale est obtenue en appliquant l'opérateur rotationnel à l'équation de conservation du moment de l'écoulement. Cette équation est très importante en mécanique des fluides. Elle est l'équivalent pour la vorticité des équations de Navier-Stokes pour la vitesse. L'équation de transport s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{W}}}{\partial t} + (\mathbf{V} \bullet \nabla \mathbf{W}) = (\mathbf{W} \bullet \nabla \mathbf{V}) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{W} \quad (3.65)$$

Le premier terme de l'équation (3.65) est le terme de variation temporelle de la vorticité. Le deuxième terme est le terme convectif. Le premier terme à droite représente le taux de déformation des lignes de vorticité. Le dernier terme à droite est le terme de diffusion visqueuse de la vorticité.

3.12.3 Equation de transfert de la vorticité azimutale dans les coordonnées sphériques.

Comme on utilise les coordonnées sphériques pour écrire nos équations modélisantes, on doit aussi écrire l'équation de transport de la vorticité dans les coordonnées sphériques. On se limitera à la composante azimutale de la vorticité.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w_f}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 U w_f)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial (\sin q V w_f)}{\partial q} + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial (W w_f)}{\partial f} = \\ & \left[\frac{1}{r \sin q} \frac{\partial (W \sin q)}{\partial q} - \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial V}{\partial f} \right] \frac{\partial W}{\partial r} + \left[\frac{1}{r \sin q} \frac{\partial U}{\partial f} - \frac{1}{r} \frac{\partial (rW)}{\partial r} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial q} + \\ & \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (rV)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial q} \right] \left[\frac{1}{r \sin q} \frac{\partial W}{\partial f} + \frac{U}{r} + \frac{V \cot q}{r} \right] + \\ & \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial w_f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\partial (\sin q w_f)}{\partial q} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 q} \frac{\partial^2 w_f}{\partial f^2} + \right. \\ & \left. \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{2}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial f} \left(\frac{1}{r \sin q} \frac{\partial (W \sin q)}{\partial q} - \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial V}{\partial f} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{2 \cot q}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial f} \left(\frac{1}{r \sin q} \frac{\partial U}{\partial f} - \frac{1}{r} \frac{\partial (rW)}{\partial r} \right) \right] \right] \end{aligned}$$

(3.66)

Si en plus l'écoulement est permanent et axisymétrique $\left(\frac{\partial}{\partial t}(\) = 0, \frac{\partial}{\partial f}(\) = 0\right)$,

comme on le verra dans le chapitre des résultats, la composante azimutale de l'équation de la vorticité se réduit à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 U w_f)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial(\sin q V w_f)}{\partial q} = \\ & \left[\frac{1}{r \sin q} \frac{\partial(W \sin q)}{\partial q} \right] \frac{\partial W}{\partial r} + \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial(rW)}{\partial r} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial q} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(rV)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial q} \right] \left[\frac{U}{r} + \frac{V \cot q}{r} \right] + \\ & \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial w_f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\partial(\sin q w_f)}{\partial q} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.67)$$

3.12.4 Calcul de la vorticité azimutale.

La troisième équation du système (3.63), sera utilisée pour l'obtention de la composante azimutale de la vorticité. Les vitesses obtenues après la résolution des équations discrétisées seront injectées dans l'équation (3.63) pour obtenir la vorticité azimutale. Les vitesses seront considérées à l'intersection des faces, précisément au point f_u illustré sur la figure 3.11, qui représente le maillage décalé suivant la direction radiale, dans le plan $(r - q)$.

3.13 Calcul du Torque.

Le taux de changement temporel du moment cinétique est nul. Donc, la somme des torques appliqués à l'entrefer est nulle, il en résulte que le torque appliqué sur la sphère extérieure est égal, en valeur absolue, au torque appliqué sur la sphère intérieure. On calcul dans cette partie le torque appliqué sur la sphère intérieure et le torque appliqué sur la sphère intérieure, par le fluide.

La contrainte de cisaillement (ou contrainte tangentielle) adimensionnelle t_{rf} est la composante azimutale de la force exercée sur la surface (seule considérée dans notre cas), dont la normale est orientée suivant la direction radiale. Cette contrainte s'écrit dans les coordonnées sphériques sous la forme suivante :

$$t_{rf} = t_{fr} = \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{r} \right) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial U}{\partial f} \right] \quad (3.68)$$

La force élémentaire appliquée est égale à la contrainte multipliée par l'élément de surface :

$$dF = t_{rf} ds = \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{r} \right) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial U}{\partial f} \right] r^2 \sin q dq df \quad (3.69)$$

La relation entre le torque et la force appliquée à la surface (soit de la sphère intérieure soit extérieure) est comme suit :

$$dT = r' \times dF \quad (3.70)$$

$$\text{Avec: } r' = r \sin q \quad (3.71)$$

L'écoulement est axisymétrique, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de variation suivant la direction azimutale donc $\frac{\partial U}{\partial f} = 0$. Donc l'équation (3.70) devient :

$$dT = \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{r} \right) \right] r^4 \sin^2 q dq df \quad (3.72)$$

Pour calculer le torque appliqué sur la sphère intérieure, on somme dans la direction polaire et azimutale. A la sphère intérieure le torque sera égale à :

$$T_{\text{int}} = \sum_{j=1}^{jl} \sum_{k=1}^{kl} \left[\frac{1}{dr(1)} \left(\frac{W(2, j, k)}{r_P(2)} - \frac{W(1, j, k)}{r_P(1)} \right) \right] r_P^4(i) \sin^2 q_P(j) \quad (3.73)$$

Pour ce qui est du torque appliqué à la sphère extérieure, il sera égale à :

$$T_{\text{ext}} = \sum_{j=1}^{jl} \sum_{k=1}^{kl} \left[\frac{1}{dr(il-1)} \left(\frac{W(il, j, k)}{r_P(il)} - \frac{W(il-1, j, k)}{r_P(il-1)} \right) \right] r_P^4(i) \sin^2 q_P(j) \quad (3.74)$$

Pour calculer ces les deux torques représentés par les équations (3.73) et (3.74), on opère un développement de Taylor de la vitesse azimutale, du second ordre.

Note:

Lors de nos calculs des torques à la sphère intérieure et extérieure, pour chacun des nombres de Reynolds considérés, ces derniers ne sont pas égaux comme ils devraient l'être. Toutefois ces deux moments cinétiques sont très proches. Ceci est dû au fait que le calcul numérique du torque est très sensible à la densité radiale du maillage.

3.14 Calcul de l'énergie cinétique moyenne.

Pour nous permettre une comparaison entre les résultats qu'on obtiendra pour différents nombres de Reynolds, on calculera l'énergie cinétique moyenne de l'écoulement. Elle sera la somme des énergies cinétiques dans tous les volumes de contrôles, divisées par le volume du domaine de calcul. L'énergie cinétique de tout les volume de contrôle est :

$$E_c = \sum_{i=1}^{il} \sum_{j=1}^{jl} \sum_{k=1}^{kl} \frac{1}{2} \left[U^2(i, j, k) + V^2(i, j, k) + W^2(i, j, k) \right] r_P^2(i) \sin q_P(j) \Delta r_P(i) \Delta q_P(j) \Delta f(k) \quad (3.75)$$

Donc l'énergie cinétique moyenne de tout l'écoulement sera égale à :

$$E_{KIN} = \frac{E_c}{Vol} \quad (3.76)$$

Vol étant le volume total du domaine de calcul. Donc pour déterminer la valeur de l'énergie cinétique de tous les volumes de contrôles, on calcul d'abord le champs de vitesse (après la résolution des équations modélisantes) puis on remplace les vitesses calculées dans l'équation (3.75). Il est à noter que les vitesses calculées sont adimensionnelles et par conséquent l'énergie cinétique calculée à partir de ces vitesses sera aussi adimensionnelle.

4. Résultats et discussion.

Dans ce chapitre on expose les résultats de notre étude. Ces résultats concernent un écoulement entre deux sphères concentriques en rotation, configuration rotor-stator. Le cas spécifique de $b = 0.17$ et $650 \leq Re \leq 3000$ est considéré. Le maillage utilisé est $32 \times 294 \times 32$, ce qui correspond à 32 points dans la direction radiale, 249 points dans la direction polaire et 32 points dans la direction azimutale. Ce qui fait que le maillage contient au total 254 976 points. Pour effectuer les calculs itératifs, on utilise un PC Pentium IV, disposant d'une RAM de 128 Mo et d'un processeur ayant une vitesse égale à 2.70 Mhz. Le temps moyen de convergence d'un cas typique est de 70 heures. Le pas de temps utilisé $\Delta t = 10^{-3}$ est le même pour tout les cas considérés.

4.1 Validation numérique.

Pour valider les résultats obtenus par notre code de calcul, on a reproduit les résultats obtenus par **P.S. Marcus** et **L.S. Tuckerman** [6]. Les auteurs ont étudié le cas de $b = 0.18$ et $Re < 1300$. Pour $b = 0.18$ et $Re = 600$, les auteurs ont obtenu un écoulement 0-vortex (dans sa forme symétrique). La figure 4.1 illustre l'écoulement secondaire dans le plan méridional, que les auteurs ont obtenu. La figure 4.2 illustre les contours à vitesse angulaire azimutale constante. Ces deux figures sont tirées de l'article de **P.S. Marcus** et **L.S. Tuckerman** [6], et serviront à établir une comparaison avec les résultats obtenus par notre code de calcul.

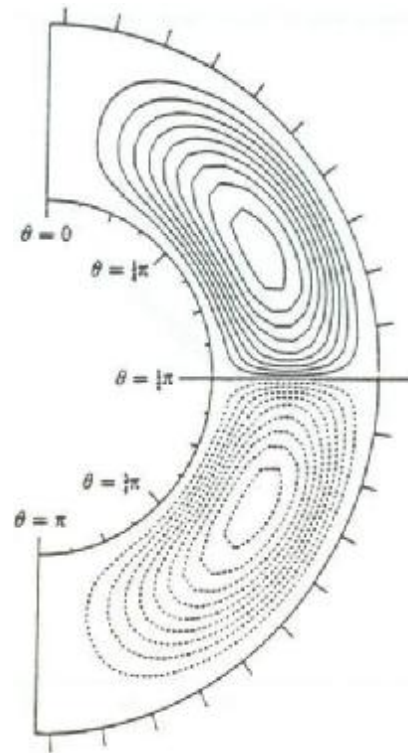


Figure 4.1: Ecoulement secondaire dans le plan $r - q$, pour le cas de $Re = 600$ et $b = 0.18$.

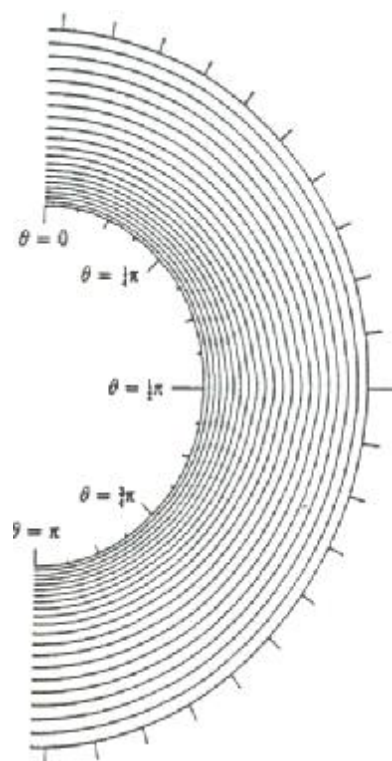


Figure 4.2: Contours à vitesse azimutale constante de l'écoulement 0-vortex.

Remarque: Il est à noter que la largeur de l'entrefer dans les figures 4.1 et 4.2 a été exagérée par les auteurs pour une meilleure visualisation. En effet, les auteurs expliquent dans leur article [6], qu'au lieu de tracer le rayon r dans l'intervalle $[1, 1+b]$ ils l'ont tracé dans l'intervalle $[1, 2]$.

En introduisant les mêmes paramètres dans notre code de calcul, à savoir $b = 0.18$ et $Re = 600$, on a également obtenu un écoulement 0-vortex. La figure 4.3 illustre l'écoulement secondaire dans le plan méridional, qu'on a obtenu. Sur la figure 4.4, on a représenté les contours à vitesse azimutale constante.

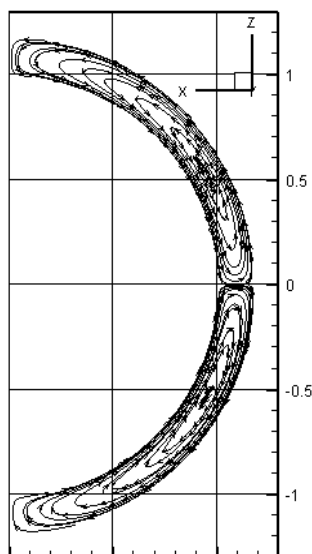


Figure 4.3: L'écoulement secondaire dans le plan méridional, obtenu par notre code de calcul. Cas de $b = 0.18$ et $Re = 600$.

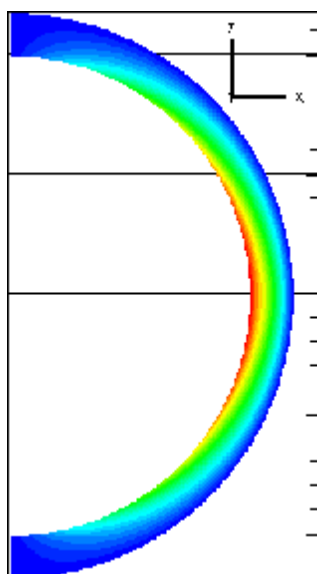


Figure 4.4: Contours à vitesse azimutale constante dans le plan méridional.

4.1.1 Comparaison.

On comparant la figure 4.1 et la figure 4.3, on note les similitudes suivantes entre notre écoulement et celui de **P.S. Marcus** et **L.S. Tuckerman** obtenu dans l'article [6]:

- Les deux écoulements secondaires présentent la même configuration, c'est-à-dire qu'ils sont tout les deux des écoulements 0-vortex. Cette configuration est caractérisée par la présence, dans le plan méridional, de deux cellules de circulation de part et d'autre de l'équateur.
- Les deux écoulements sont axisymétriques et symétriques par rapport à l'équateur.
- Les deux cellules de circulation principales dont se composent les deux écoulements (notre écoulement et celui de l'article de référence) sont en contra rotation.
- Les deux cellules de circulations, soit pour notre écoulement ou pour celui des auteurs, ont le même sens de rotation. Une rotation anti-horaire pour l'hémisphère nord, et une rotation dans le sens horaire pour l'hémisphère sud.
- Aussi bien pour l'écoulement de l'article de référence que pour notre écoulement, il y a un écoulement radial sortant au niveau de l'équateur. Cet écoulement radial sépare les deux cellules de circulation principales.

Ces remarques concernent les similitudes entre les deux écoulements secondaires, dans le plan méridional. En ce qui concerne la distribution méridionale de la vitesse azimutale, on note les similitudes suivantes:

- Les contours de la vitesse azimutale constante présentent de très légères ondulations au niveau de l'équateur.
- La variation de la vitesse azimutale pour l'écoulement obtenu dans l'article de référence. A savoir que la vitesse azimutale atteint sa valeur maximale au niveau de l'équateur près de la sphère intérieure. Radialement, la vitesse azimutale diminue en allant de la sphère intérieure vers la sphère extérieure. C'est ce que les auteurs précisent dans leur article [6], ce qui n'est pas claire sur la figure 4.2, puisque les auteurs n'ont fourni aucune légende. Ainsi, à l'issu de cette comparaison entre l'écoulement de référence et l'écoulement qu'a généré notre code de calcul, on peut dire que notre code de calcul a réussi à reproduire qualitativement, le résultat obtenu par **P.S. Marcus** et **L.S. Tuckerman**.

4.1.2 Écoulement à très faible nombre de Reynolds – Écoulement de Stokes.

D'autre part, en utilisant notre code de calcul numérique on a réussi à reproduire l'écoulement de Stokes. L'écoulement de Stokes est celui obtenu pour de très faibles valeurs du nombre de Reynolds. On fixe le nombre de Reynolds à $Re = 1$, le pas de temps à $\Delta t = 10^{-5}$. L'écoulement secondaire obtenu est illustré sur la figure 4.5.

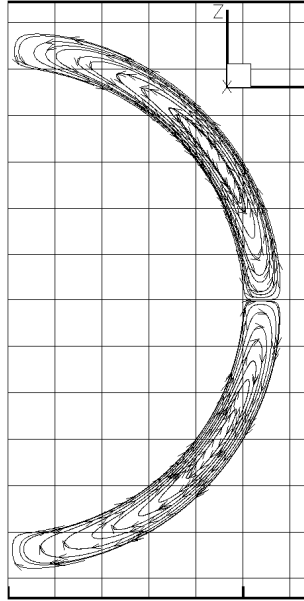


Figure 4.5: Écoulement secondaire dans le plan méridional. Cas de $b = 0.17$ et $Re = 1$.

Cet écoulement présente une configuration type écoulement 0-vortex. Il se compose de deux cellules de circulation principales. Ces deux cellules sont en contra-rotation et séparées au niveau de l'équateur par un écoulement radial sortant. On compare cet écoulement, du moins qualitativement, avec celui obtenu par **P.S. Marcus** et **L.S. Tuckerman** [6], pour $Re \rightarrow 0$ et $b = 0.18$. L'écoulement que les auteurs ont obtenu est un écoulement 0-vortex, les lignes de courant dans le plan méridional sont illustrées sur la figure 4.6. La comparaison qualitative, entre notre résultat et celui de **Tuckerman** et **Marcus** [6], nous permet de valider notre résultat. Donc en reproduisant cet écoulement pour $Re = 1$, on a démontré que notre code de calcul peut obtenir des solutions pour de faibles nombres de Reynolds sans que la solution ne diverge.

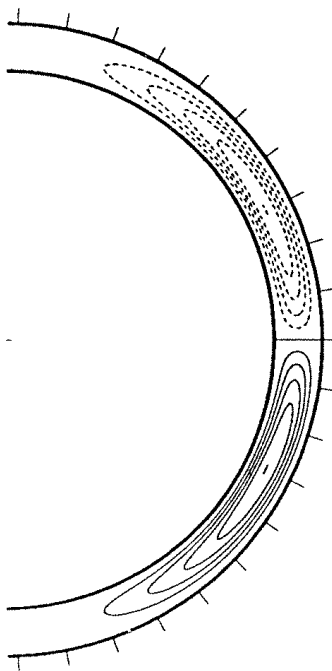


Figure 4.6: Écoulement de Stokes obtenu par Tuckerman et Marcus.

4.1.3 Reproduction de la transition 0-1 Vortex.

En utilisant notre code de calcul, on a essayé de reproduire la transition 0-1 vortex décrite par **P.S. Marcus** et **L.S. Tuckerman** dans leur article [6], pour le cas $b = 0.18$. Cette transition s'effectue selon les auteurs comme suit:

Ils commencent les calculs avec le cas de $Re = 650$, après l'atteinte du régime permanent ils obtiennent un écoulement 0-vortex. Ensuite, les auteurs augmentent le nombre de Reynolds à la valeur $Re=700$, l'écoulement obtenu est l'écoulement 1-vortex (qui contient en plus des deux cellules de circulation un vortex par hémisphère). La transition obtenue par les auteurs est illustrée sur la figure 4.7. On a reproduit les mêmes étapes que les auteurs en utilisant les mêmes paramètres à savoir pour $b = 0.18$ obtenir l'écoulement 0-vortex à $Re = 650$. Puis augmenter le nombre de Reynolds à la valeur $Re = 700$, et on a obtenu l'écoulement 1-vortex. La figure 4.8 illustre deux des étapes de la transition 0-1 vortex qu'on a obtenu.

Une remarque est cependant à faire, le maillage qu'on a utilisé pour obtenir cette transition est $52*300*52$.

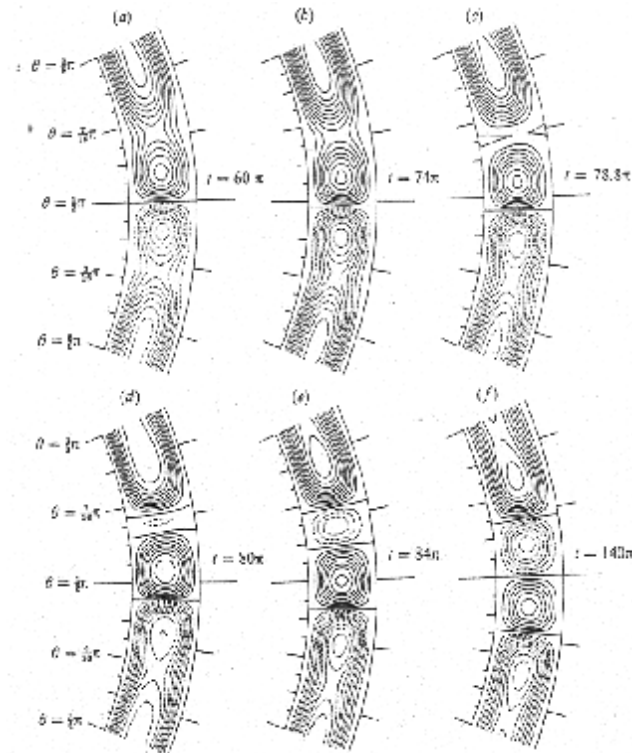


Figure 4.7: Etapes de la transition 0-1 vortex obtenue par P.S. Marcus et L.S. Tuckerman pour le cas de $b = 0.18$.

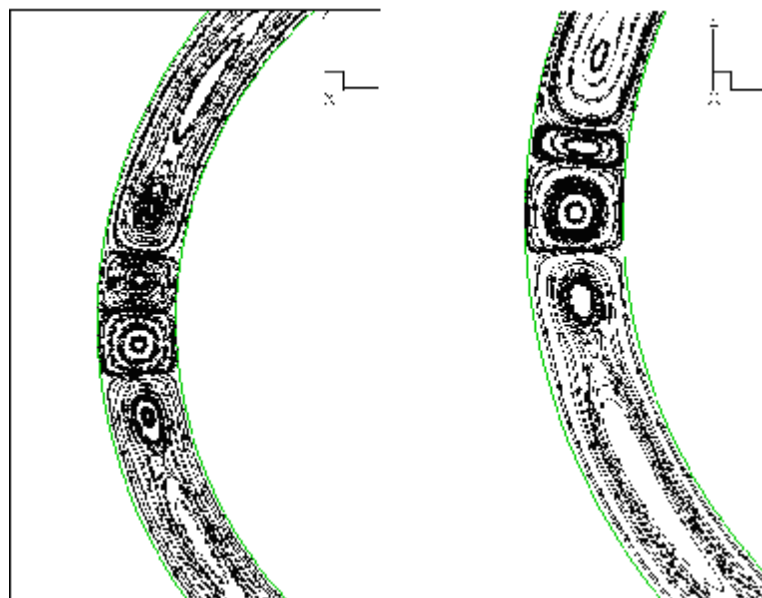


Figure 4.8: Deux des étapes de la transition 0-1 Vortex. Dans la figure à droite, le premier vortex est développé, tandis que le second vortex est très petit. Dans la figure à gauche, les deux vortex semblent avoir la même taille. Le deuxième vortex a augmenté en taille.

4.2 Procédure de calcul.

On peut adopter deux approches différentes quand on travaille avec un code de calcul numérique.

4.4.1 Procédure 1.

1.1 Pour un nombre de Reynolds donné on commence la simulation numérique en utilisant un champ de vitesse initial nul. On fait marcher le code jusqu'à la convergence de la solution.

1.2 On augmente le nombre de Reynolds (ou on le diminue) en utilisant comme champ de vitesse initial le champs de vitesse obtenu précédemment (de l'étape 1.1).

4.4.2 Procédure 2.

2.1 Pour un nombre de Reynolds donné on commence la simulation numérique en utilisant un champs de vitesse initial nul. On fait marcher le code jusqu'à la convergence de la solution.

2.2 On augmente le nombre de Reynolds (ou on le diminue) sans utiliser comme champ de vitesse initial le champs de vitesse obtenu précédemment. On utilise un champ initial de vitesse nul.

En ce qui nous concerne on a suivi la procédure 1, tout au long de cette étude.

4.3 Exposé des résultats obtenus.

4.3.1 Le cas de $Re = 650$.

Les figures 4.9 (A), (B) et (C) illustrent la variation temporelle des vitesses radiale, méridionale et azimutale, jusqu'au temps $t=50$. Le calcul de l'écoulement a nécessité 69 heures de calcul (temps d'horloge).

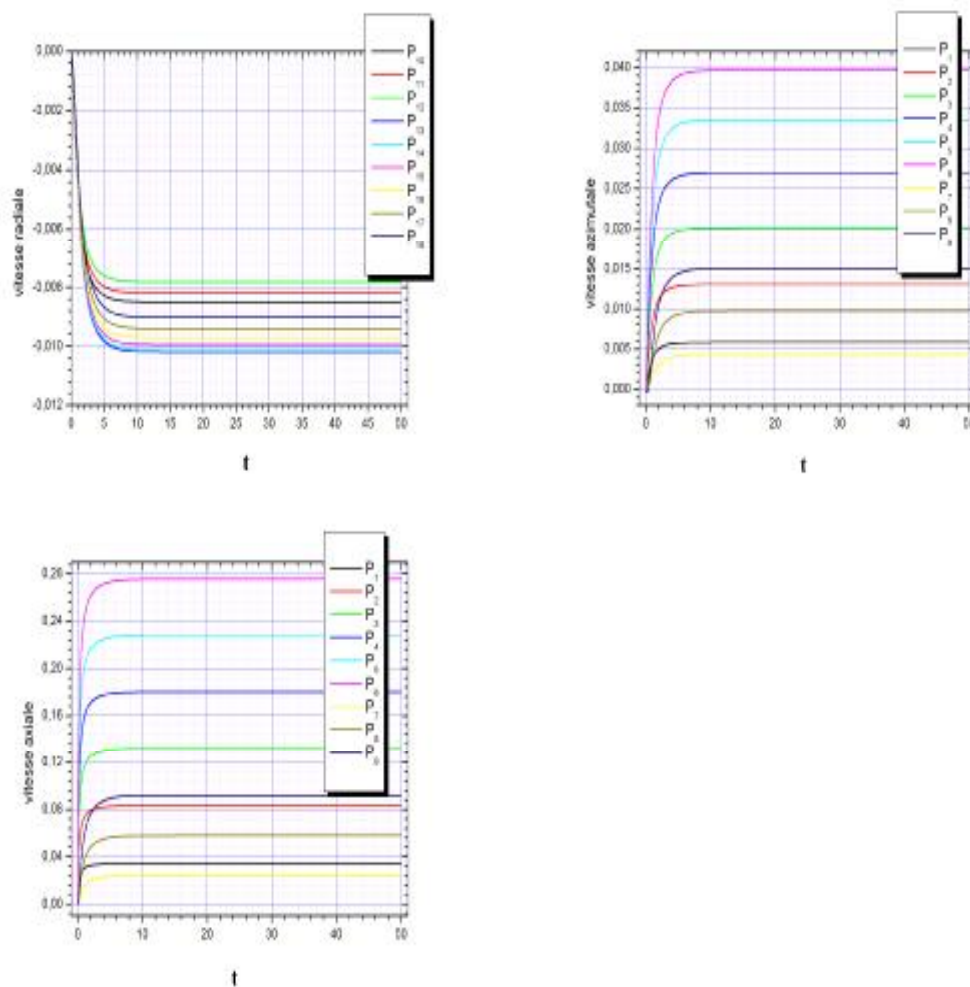


Figure 4.9: Variation temporelle de la vitesse. (A) variation temporelle de la vitesse radiale, (B) variation temporelle de la vitesse polaire, (C) variation temporelle de la vitesse azimutale.

Ces figures montrent clairement que le régime permanent est atteint. On remarque sur les figure 4.9 (A), (B) et (C), que les vitesses deviennent constantes dans le temps après un temps relativement court. Ce temps correspond à $t = 9$ pour ce qui est des vitesses radiales, $t = 10$ pour les vitesses méridionales et $t = 11$ pour ce qui est des vitesses azimutales.

L'écoulement obtenu est tridirectionnel, il est composé d'un écoulement principal qui n'est autre que la rotation suivant la direction azimutale, et d'un écoulement secondaire dans le plan méridional. La figure 4.10 illustre la distribution méridionale de la vitesse azimutale. Comme la distribution de la vitesse azimutale est

axisymétrique, on peut choisir n'importe quelle valeur de l'angle f . La distribution méridionale de la vitesse azimutale présente aussi une symétrie par rapport à l'équateur. Les contours à vitesse azimutale constante sont des arcs pseudo circulaires.

La vitesse azimutale maximale (égale à 1) est localisée au point $r = 1, q = p/2$, sur la sphère intérieure. La vitesse azimutale est nulle aux pôles et sur la surface de la sphère extérieure. Radialement, la vitesse azimutale diminue en allant de la sphère intérieure vers la sphère extérieure. Suivant la direction q , la vitesse azimutale diminue en allant de l'équateur vers les pôles.

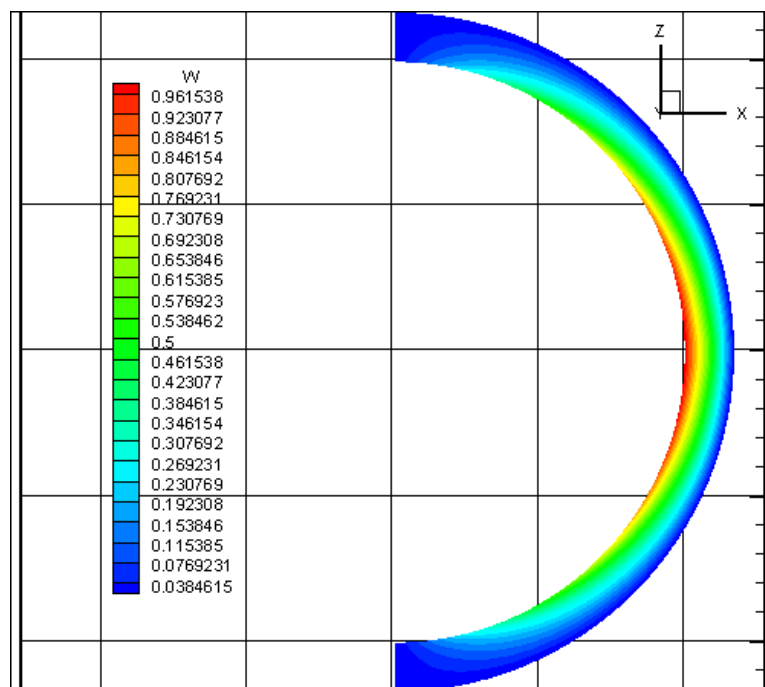


Figure 4.10: Distribution de la vitesse azimutale dans un plan méridien.

La figure 4.11 illustre l'iso tac $W=0.5$. Cette iso tac est sous la forme d'une sphère tronquée près des pôles, elle présente une protubérance infinitésimale au niveau de l'équateur, due à l'écoulement radial sortant.

Pour visualiser l'écoulement secondaire, on rapporte sur la figure 4.12 les lignes de courant de l'écoulement méridional, qui représentent la projection de l'écoulement dans le plan (r, q) . La vitesse méridionale est partout tangente à ces lignes de courant. L'écoulement secondaire, se présente sous la forme d'une cellule de

circulation par hémisphère, dite cellule de circulation principale. Cet écoulement est labellisé écoulement 0-vortex. Il a été obtenu par **P.S. Marcus** et **L.S. Tuckerman** [6], pour $b = 0.18$ et $Re = 600$, ainsi que par **R.J. Yang** et **W.J. Luo** [10], pour $b = 0.18$ et $Re = 600$.

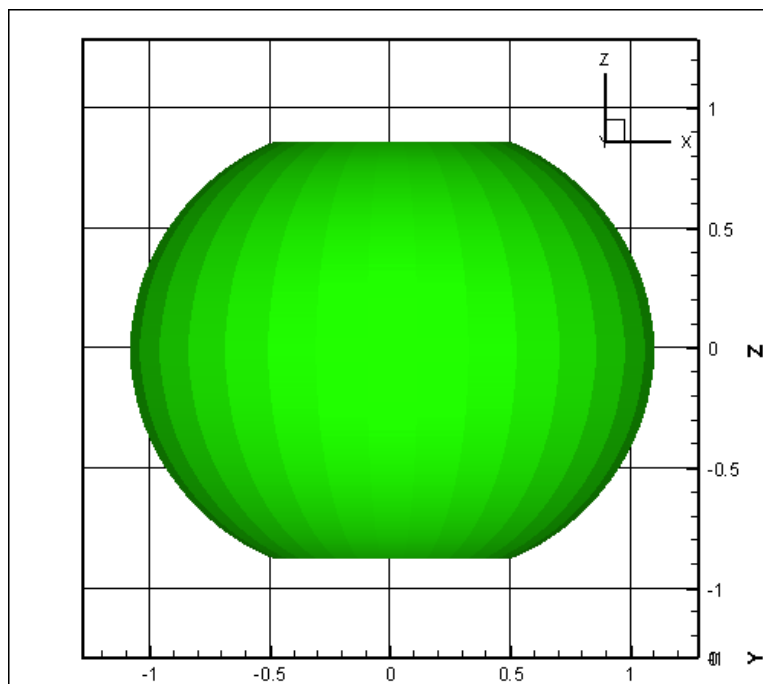


Figure 4.11: Iso tac $W=0.5$

Les cellules de circulation sont contrarotatives. En effet, la cellule de circulation nord tourne dans le sens anti-horaire, la cellule sud tourne dans le sens horaire. L'écoulement secondaire présente une axisymétrie et une symétrie par rapport à l'équateur.

La physique de l'écoulement méridional est expliquée comme suit : quand la sphère intérieure est en mouvement, le fluide est déplacé radialement de la sphère intérieure vers la sphère extérieure, sous l'action des forces centrifuges qui sont plus importantes au niveau de l'équateur. Le fluide remonte ensuite le long de la sphère extérieure de l'équateur vers les pôles.

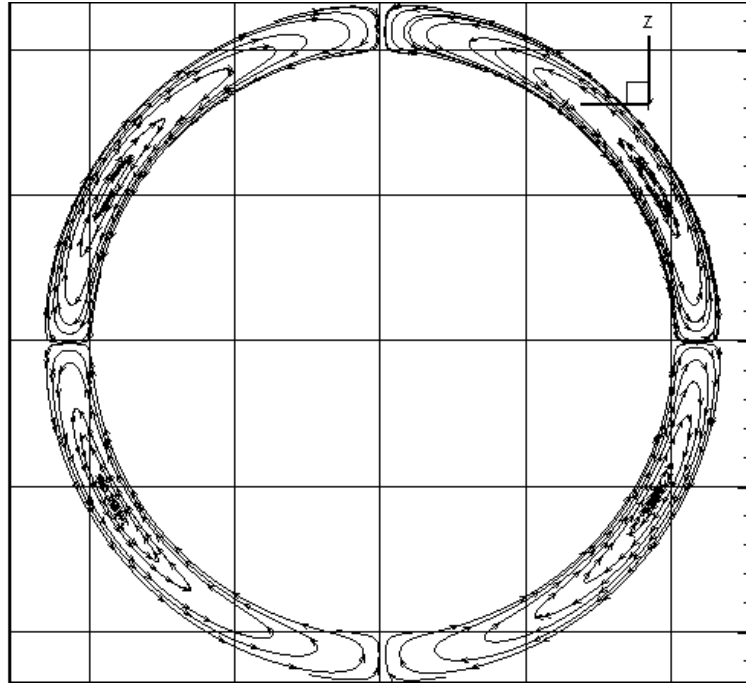


Figure 4.12: Lignes de courant de l'écoulement 0-vortex dans le plan méridional.

Aux niveaux des pôles, le fluide retourne vers l'équateur le long de la sphère intérieure. Ce mouvement donne à la cellule de circulation le sens de rotation anti-horaire dans l'hémisphère nord. Le même phénomène se passe dans l'hémisphère sud et donne le sens de rotation horaire à la cellule de circulation sud. Le fluide qui descend de l'hémisphère nord (le long de la sphère intérieure) et le fluide qui remonte de l'hémisphère sud (le long de la sphère intérieure) se rencontre, sous l'effet de la rotation de la sphère intérieure, au niveau de l'équateur. Cette rencontre crée un écoulement radial important à ce niveau. Cet écoulement est dit sortant car il s'étend, au niveau de l'équateur, de la sphère intérieure vers la sphère extérieure. Toutefois, les deux cellules de circulation n'interagissent pas et donc, le fluide se trouvant dans l'hémisphère nord ne se mélange pas avec celui de l'hémisphère sud. On a calculé la vitesse méridionale qui est un indicateur de l'intensité de l'écoulement. La valeur maximale du module de la vitesse méridionale pour ce cas est $V_{mer_{MAX}} = 7,1363.10^{-2}$.

La figure 4.13 illustre la distribution méridionale de la pression de l'écoulement. La valeur maximale de la pression, $P_{Max} = 0.0568$, se trouve près de la sphère extérieure au niveau de l'équateur, et la pression minimale se trouve près de la sphère intérieure

$P_{Min} = -0.06466$. Donc la variation maximale de la pression est $\Delta P = P_{Max} - P_{Min} = 0.1214$. La pression diminue radialement en allant de la sphère extérieure vers la sphère intérieure. Suivant la direction polaire, la pression diminue en allant de l'équateur vers les pôles.

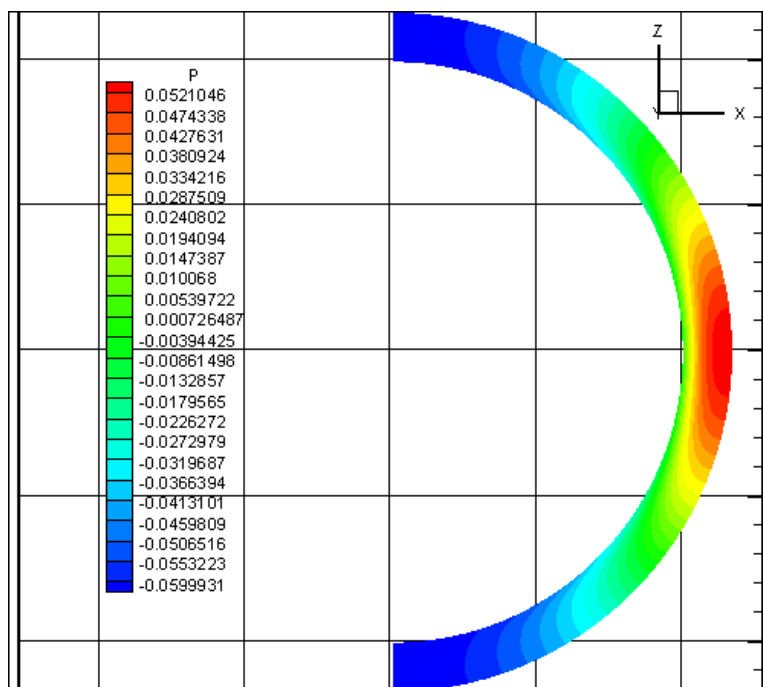


Figure 4.13: Variation méridionale de la pression.

La pression maximale se trouve au niveau de l'équateur, sur la sphère extérieure, est dû au fait que l'écoulement radial (qui est sortant) est important à ce niveau. Cet écoulement fait en sorte que le fluide est poussé de la sphère intérieure vers la sphère extérieure. Cette dernière représente un obstacle et le fluide se trouve donc comprimé, ce qui fait que la pression exercée par le fluide, à ce niveau, est maximale.

La figure 4.14 illustre la distribution méridionale de la vorticité azimutale dans l'hémisphère nord. Les parois des deux sphères sont des zones à haute vorticité positive dans l'hémisphère nord, et négative dans l'hémisphère sud. Loin de l'équateur et des pôles la vorticité est négative dans l'hémisphère nord et positive dans l'hémisphère sud. Comme les deux cellules principales des deux hémisphères sont contra-rotatives, donc si à un certain endroit la vorticité d'une hémisphère est positive, celle de l'autre hémisphère à l'endroit symétrique doit être négative à cause du

changement du signe des gradients des vitesses. Ce qui explique la distribution de la vorticité azimuthale, sur la figure 4.14.

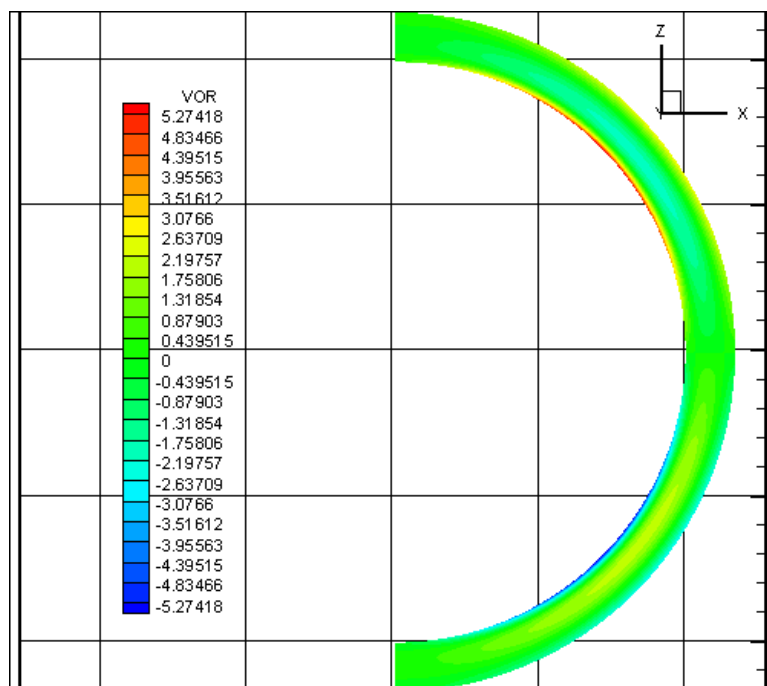


Figure 4.14: Variation méridionale de la vorticité azimuthale.

La vorticité est une mesure la rotation solide locale, elle est positive ou négative suivant le sens de cette rotation locale de la particule fluide vis-à-vis des axes des coordonnées. Donc, une vorticité azimuthale positive, veut dire que la rotation solide locale de la particule fluide, se fait dans le sens positif de l'angle f . Dans le cas de la distribution méridionale de la vorticité azimuthale représentée sur la figure 4.14, la vorticité azimuthale est négative (loin de l'équateur et du pôle), dans l'hémisphère nord. Ce qui indique que dans cette hémisphère, la rotation solide locale des particules fluides, se fait dans le sens négatif de l'angle f . Dans l'hémisphère sud, la vorticité azimuthale (loin de l'équateur et du pôle) est positive. Ce qui indique que dans cette hémisphère, la rotation solide locale des particules fluides, se fait dans le sens positif de l'angle f . Les contours à vorticité azimuthale constante sont des cercles suivant l'angle f . Les parois des deux sphères sont des zones à haute vorticité, ceci s'explique par le fait que ces endroits sont les seuls endroits où il y a génération de vorticité.

Dans l'hémisphère nord, la variation spatiale de la vorticité azimutale est plus importante loin du pôle nord et de l'équateur. Loin de ces endroits, près de la sphère intérieure la vorticité est maximale et positive. Elle diminue et elle change de signe, et devient négative, en allant vers le milieu de l'entrefer. Puis elle augmente, avec un autre changement de signe, en allant vers la sphère extérieure. La figure 4.15 illustre la variation radiale de la vorticité pour trois angles polaires $q = 1.5644$, $q = 0.7886$ et $q = 0.1272$. L'angle, $q = 1.5644$, se trouve juste au dessus de l'équateur. La vorticité à ce niveau est presque nulle, comme c'est le cas pour l'angle $q = 0.1272$ qui se trouve près du pôle nord. L'angle $q = 0.7886$, se trouve à mi latitude.

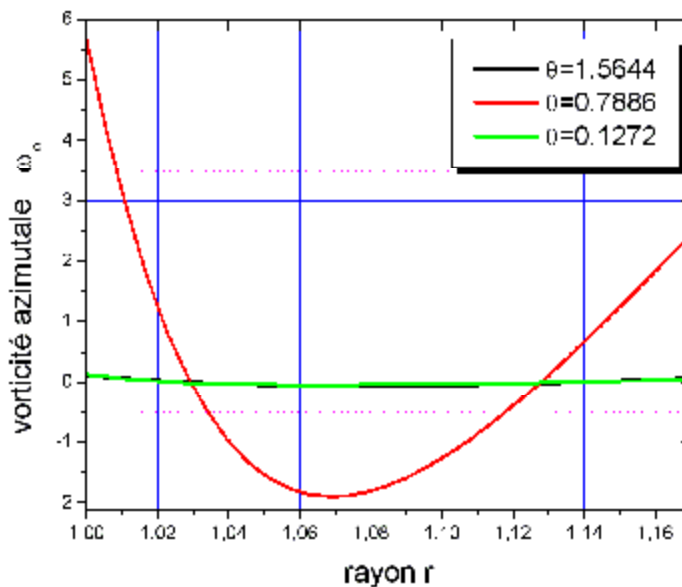


Figure 4.15: Variation radiale de la vorticité azimutale dans l'hémisphère nord pour les angles polaires $q = 1.5644$, $q = 0.7886$ et $q = 0.1272$.

Dans l'hémisphère sud, pareillement à l'hémisphère nord, la variation spatiale de la vorticité azimutale est plus importante loin du pôle et de l'équateur. La figure 4.16 qui illustre la variation radiale de la vorticité pour les angles $q = 1.5772$, $q = 2.3530$ et $q = 3.1416$. L'angle $q = 1.5772$ se trouve juste en dessous de l'équateur, et l'angle $q = 3.1416$ se trouve au niveau du pôle sud. Pour ces derniers, la vorticité est presque nulle. Loin du pôle sud et de l'équateur, la vorticité à la paroi intérieure est maximale et négative, elle augmente en allant vers le milieu de

l'entrefer. Elle change de signe, elle devient positive. Puis elle diminue et change encore une fois de signe. Elle est négative et continue à diminuer jusqu'à la sphère extérieure.

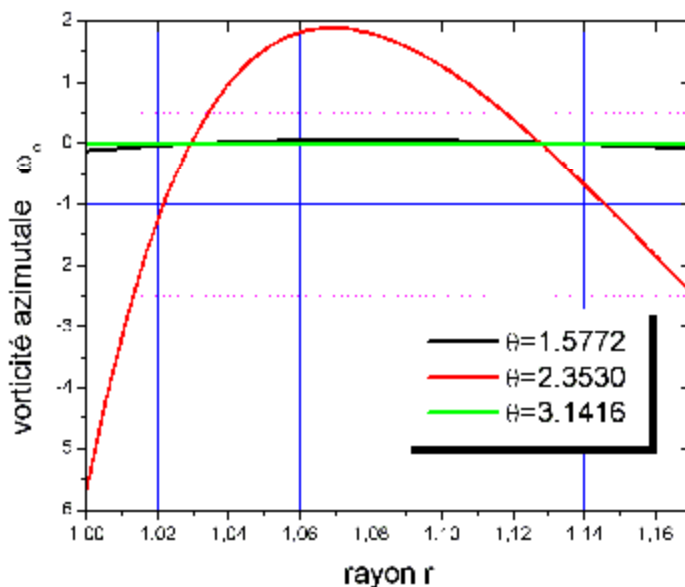


Figure 4.16: Variation radiale de la vorticité azimutale dans l'hémisphère sud pour les angles polaires $q = 1.5772$, $q = 2.3530$ et $q = 3.1416$.

La variation maximale de la vorticité azimutale pour cet écoulement est $\Delta Vor_{MAX} = Vor_{MAX} - Vor_{MIN} = 11.4274$.

L'énergie cinétique de l'écoulement est $E_c = 9,487.10^{-2}$.

Le moment angulaire moyen de rotation est $t = 72.8278$.

4.3.2 Le cas de $Re = 700$.

Le calcul de cet écoulement a nécessité 69 heures. La figure 4.17 illustre la variation temporelle de la vitesse radiale. Après un temps $t = 5$ de variation, la vitesse radiale ne change plus dans le temps. Les variations des vitesses polaires et azimutales deviennent aussi constantes après un court temps de variation. Donc, il y a établissement du régime permanent.

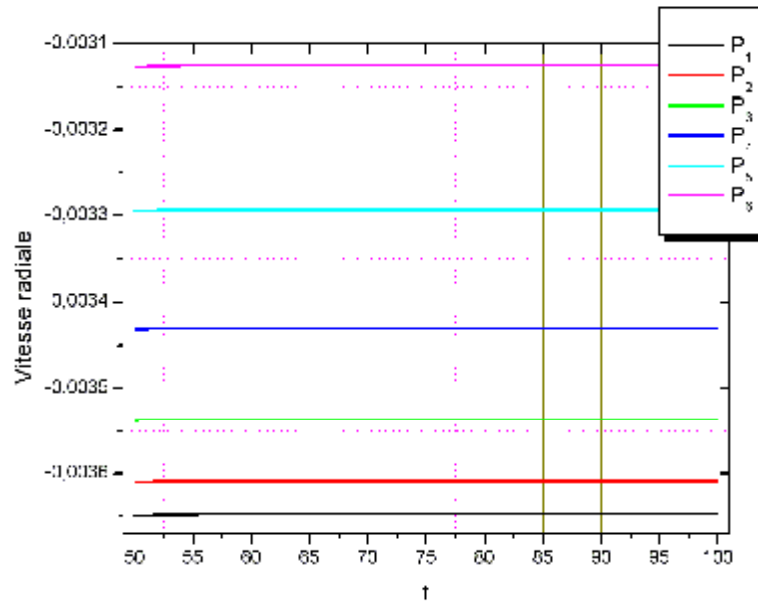


Figure 4.17: Variation temporelle de la vitesse radiale.

Sur la figure 4.18 la distribution méridionale de la vitesse azimutale est représentée. Radialement, la vitesse azimutale diminue en allant de la sphère intérieure vers la sphère extérieure. Suivant la direction polaire, elle diminue en allant de l'équateur vers les pôles. Au niveau de l'équateur, on note la présence de courbures, (ou ondulations ou encore déformations), dans la distribution méridionale de la vitesse azimutale. Ces courbures sont plus claires sur la figure 4.19, qui représente les détails de la distribution méridionale de la vitesse azimutale, dans l'intervalle polaire $1.2465 < q < 1.8315$. En comparant la distribution méridionale de la vitesse azimutale du cas du $Re=650$ et celui du $Re=700$, on note que les ondulations n'étaient pas présentes pour le cas du $Re=650$. Les ondulations sont l'effet de l'écoulement radial sortant (présent au niveau de l'équateur) sur l'écoulement principal. Donc l'écoulement radial sortant, au niveau de l'équateur, est devenu plus important du fait de l'augmentation du nombre de Reynolds. Ceci s'explique par le fait que la vitesse de rotation de la sphère intérieure a augmenté (Le nombre de Reynolds étant lié à la vitesse de la rotation, $Re = (\Omega_1 R_1^2) / \nu$), et par conséquent; le déplacement radial du fluide au niveau de l'équateur (sous l'effet de la rotation de la sphère intérieure) est devenu plus important.

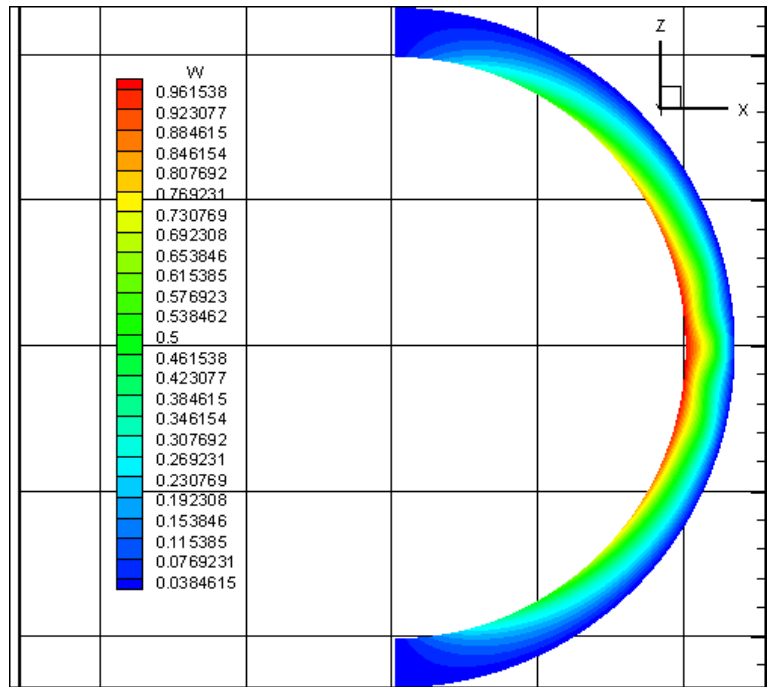


Figure 4.18: Distribution méridionale de la vitesse azimutale.

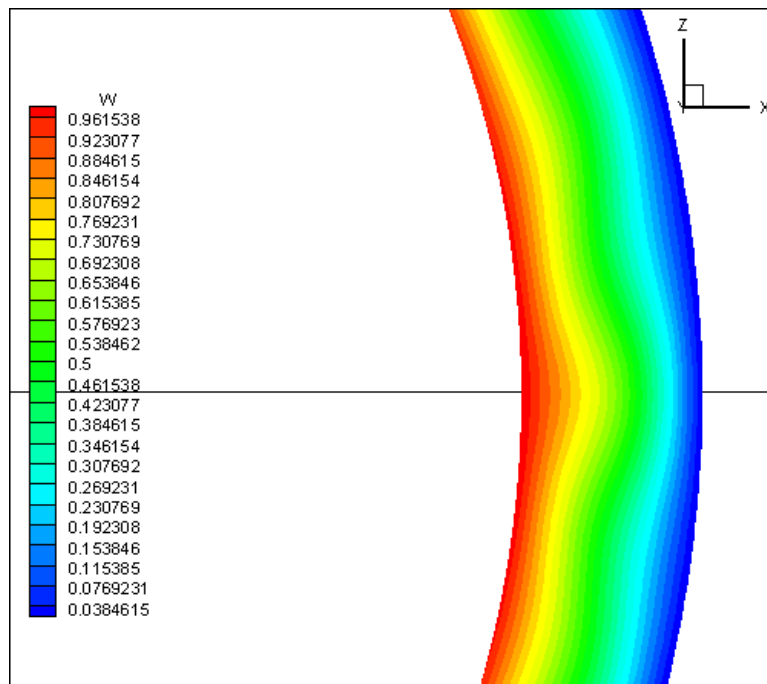


Figure 4.19: Détails de la distribution méridionale de la vitesse azimutale pour l'intervalle polaire $1.2465 < q < 1.8315$.

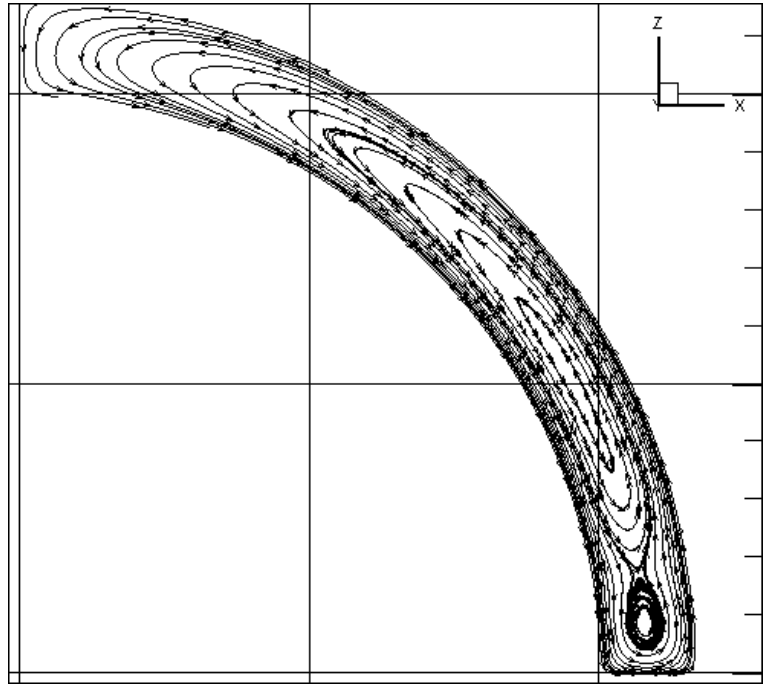


Figure 4.20: Lignes de courant de l'écoulement secondaire dans l'hémisphère nord.

L'écoulement secondaire est sous la forme de deux cellules de circulation principales; une cellule dans chaque hémisphère, il est illustré sur la figure 4.20. Ces deux cellules sont séparées au niveau de l'équateur par un écoulement radial sortant. Le sens de circulation des deux cellules principales n'a pas subi de changement par rapport au cas précédent. L'écoulement secondaire, dans l'hémisphère nord, est illustré sur la figure 4.21.

Apparemment, l'écoulement secondaire pour ce cas est semblable à l'écoulement secondaire du cas précédent (celui du $Re=650$). Néanmoins, on note sur la figure 4.21 qui illustre les détails de l'écoulement secondaire dans l'hémisphère nord, que les lignes de courant se croisent. Ce croisement des lignes de courant est dit pincement; et l'écoulement est dit écoulement 0-vortex avec pincements. Suite à ce croisement, une région fermée de ligne de courant se développe au sein de chaque cellule de circulation principale. Cette région possède le même sens de rotation que la cellule de circulation principale. C'est **J.P. Bonnet** et **A.T. Requefort** [11] qui ont employé, pour la première fois, cette appellation de "*pincements*". L'écoulement a été obtenu dans les études numériques de **R.J. Yang** et **W.J Luo** [10] (pour $\beta=0.18$ et $Re=700$) et **P.S. Marcus** et **L.S. Tuckerman** [6] (pour $\beta=0.18$ et $Re=650$). Les pincements

dans les lignes de courant de l'écoulement méridional sont observés pour les cas des petits et moyens entrefers selon **P.S. Marcus** et **L.S. Tuckerman** [6].

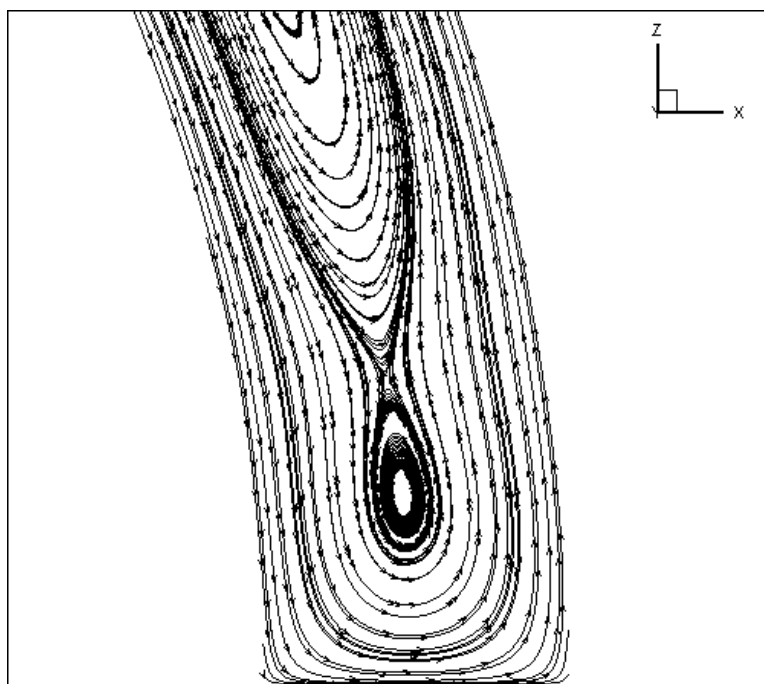


Figure 4.21: Détails des lignes de courant de l'écoulement secondaire dans l'hémisphère nord, couvrant l'intervalle $1.2846 < q < 1.57$.

Les pincements peuvent être seuls, comme c'est le cas pour cet écoulement, ou bien être accompagnés par des vortex de Taylor. D'autre part, contrairement aux vortex de Taylor (comme il sera mentionné plus loin dans cette étude) ces pincements ne sont pas accompagnés d'un écoulement radial (sortant ou entrant) comme celui se trouvant au niveau de l'équateur. En plus de l'absence d'écoulement radial, la cellule de circulation principale cache la présence des pincements, ce qui rend leur observation expérimentale difficile, selon **G. Dumas** [8]. Donc, l'obtention "numérique" des pincements est d'une grande importance. Comme on le verra plus loin, ces pincements sont les précurseurs des vortex de Taylor. La valeur maximale de la vitesse méridionale de cet écoulement est $V_{mer_{Max}} = 7,5531 \cdot 10^{-2}$. Elle a subi une augmentation par rapport à l'écoulement 0-vortex ($V_{mer_{MAX}} = 7,1363 \cdot 10^{-2}$). Cette augmentation est due à l'augmentation des vitesses radiales et polaires.

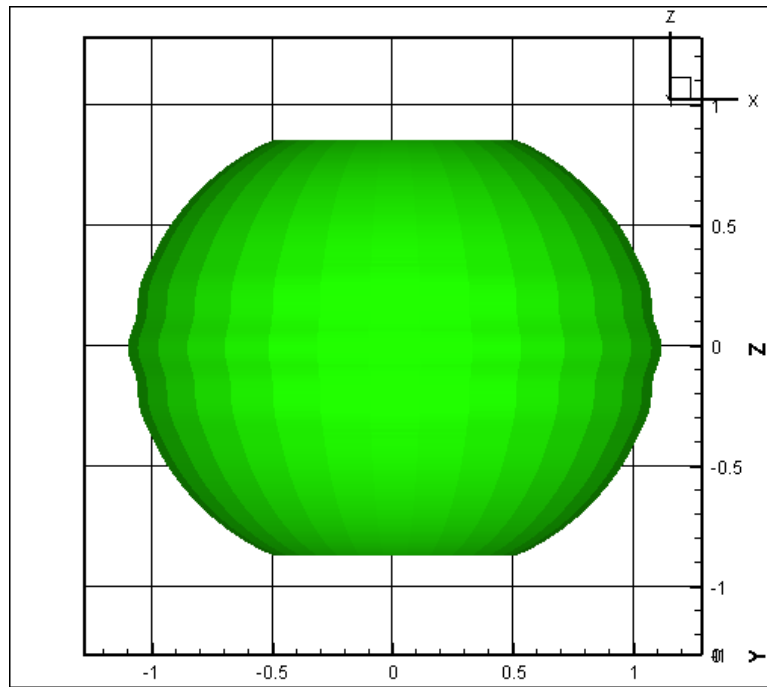


Figure 4.22: L'iso tac $W=0.5$.

On rapporte sur la figure 4.22 l'iso tac $W=0.5$. Au niveau de l'équateur, il y a une légère protubérance. Cette dernière est sortante, elle indique qu'à cet endroit l'écoulement radial sortant est important.

La figure 4.23 illustre la distribution méridionale de la pression. La variation maximale de la pression est $\Delta P = P_{Max} - P_{Min} = 0.1215$. En comparaison avec le cas 0-vortex, il n'y a pas augmentation de la variation maximale de la pression. Les variations radiale et polaire de la pression sont pareilles au cas précédent.

La distribution méridionale de la vorticité azimutale dans l'hémisphère nord est illustrée dans la figure 4.24. La vorticité importante se trouve sur les parois des deux sphères. Loin de l'équateur et des pôles, la vorticité ne varie pas. Dans l'hémisphère nord, la vorticité maximale est positive et se trouve sur la sphère intérieure. La variation radiale de la vorticité, dans l'hémisphère nord, est illustrée sur la figure 4.25, pour trois angles polaires. L'angle $q = 1.5136$ se trouve au dessus de l'équateur. L'angle $q = 0.9158$ se trouve à mi hauteur et l'angle $q = 0.1272$ se trouve près du pôle nord. Sur la sphère intérieure la vorticité est maximale et positive, elle diminue en allant vers la sphère extérieure. Elle change ensuite de signe, elle devient négative et

continue à diminuer. Puis la vorticité azimutale augmente, puis change encore une fois de signe et continue à augmenter, jusqu'à la sphère extérieure.

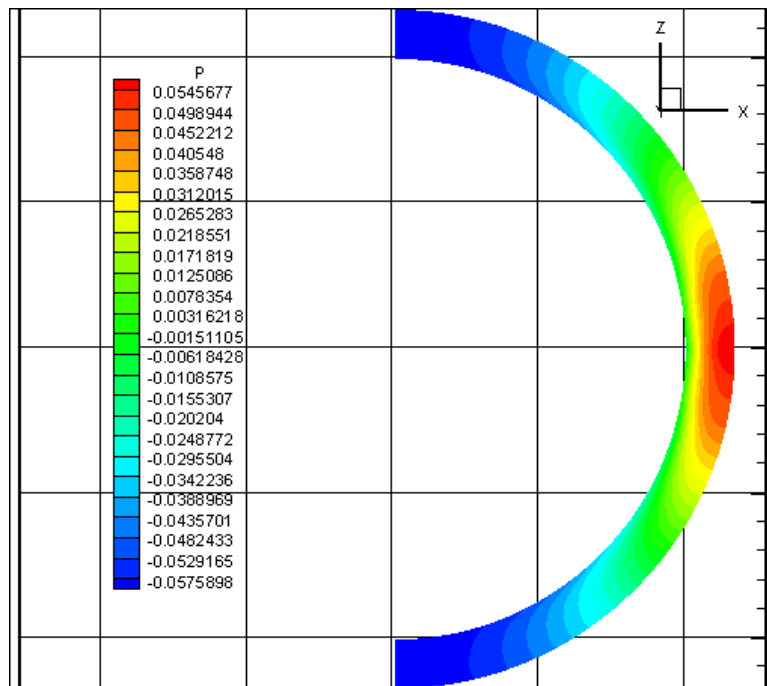


Figure 4.23: Distribution méridionale de la pression.

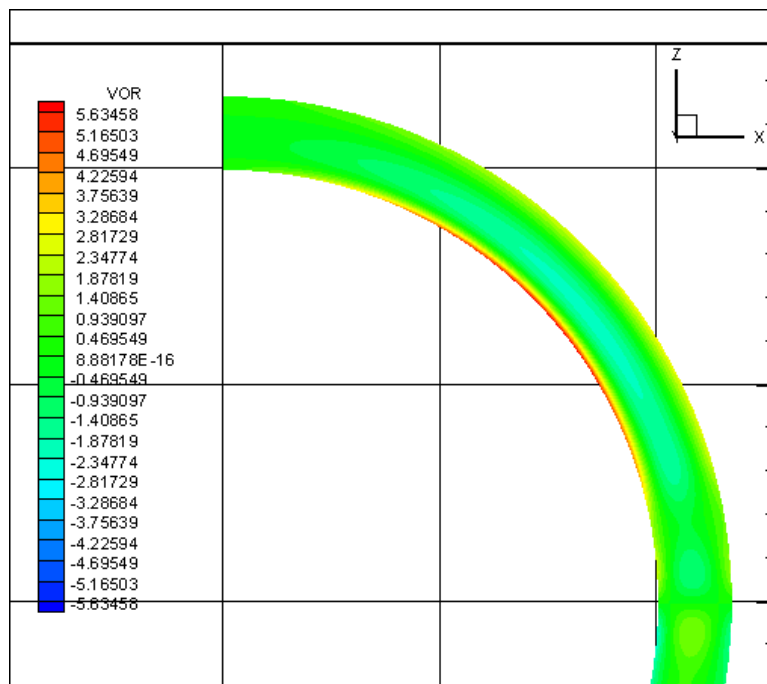


Figure 4.24 : Distribution méridionale de la vorticité azimutale dans l'hémisphère nord.

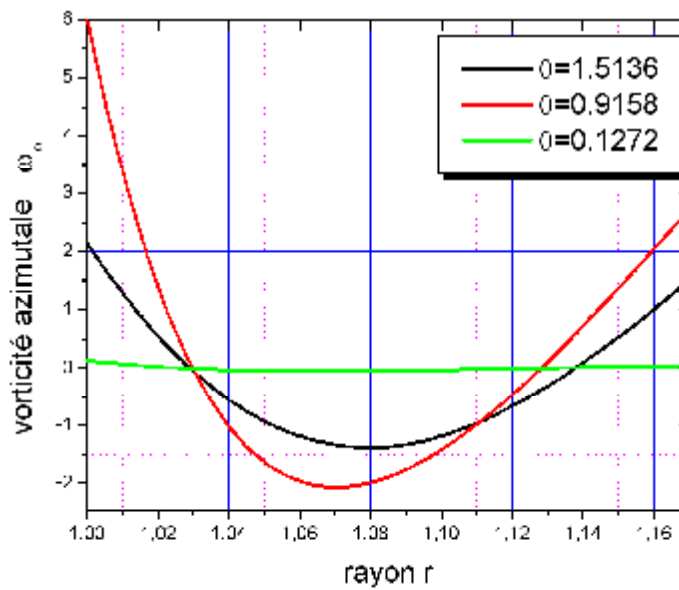


Figure 4.25: Variation radiale de la vorticité azimutale dans l'hémisphère nord, pour les angles polaires $q = 1.5136, q = 0.9158$ et $q = 0.1272$.

La distribution de la vorticité azimutale dans l'hémisphère sud est comme suit : la vorticité azimutale est importante aux parois des deux sphères et est négative. La variation radiale de la vorticité à ce niveau est comme suit : la vorticité est importante et négative à la paroi intérieure, elle augmente et change de signe au milieu de l'entrefer. Ensuite, la vorticité azimutale diminue et change encore de signe. Elle continue à augmenter lorsqu'on atteint la paroi extérieure.

Loin de l'équateur et des pôles, la variation spatiale de la vorticité azimutale n'est pas importante. La variation radiale de la vorticité azimutale, dans l'hémisphère sud, de trois angles polaires $q = 1.6153, q = 1.8570$ et $q = 3.1416$; se trouvant en dessous de l'équateur, à mi hémisphère et près du pôle sud est représentée sur la figure 4.26.

La valeur du moment angulaire moyen de rotation est $t = 74.4464$, il a subi une augmentation par rapport au cas précédent. Quant à l'énergie cinétique moyenne de l'écoulement elle égale à $9,4896.10^{-2}$.

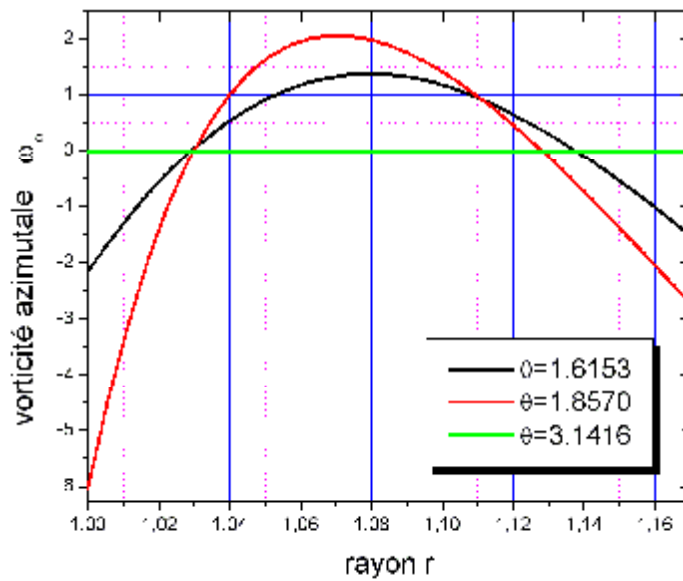


Figure 4.26: Variation radiale de la vorticité azimutale dans l'hémisphère sud, pour les angles polaires $q = 1.6153, q = 1.8570$ et $q = 3.1416$.

4.3.3 Le cas de $Re = 800$.

L'écoulement pour ce cas a été obtenu après 52 heures de calcul. La figure 4.27 illustre la distribution méridionale de la vitesse azimutale.

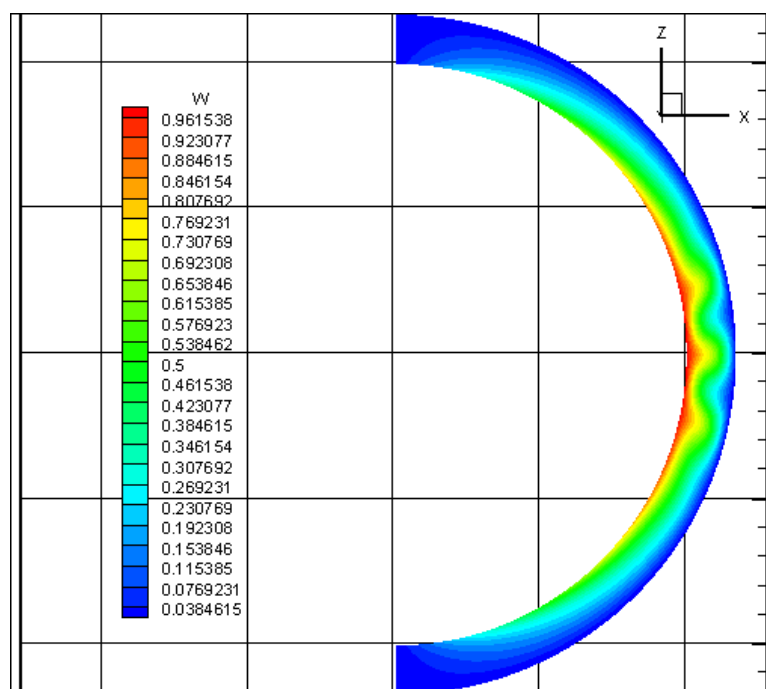


Figure 4.27: Distribution méridionale de la vitesse azimutale.

Les variations, radiale et polaire, de la vitesse azimutale pour ce cas sont semblables aux cas précédents (le cas du $Re=650$ et du $Re=700$). C'est-à-dire que la vitesse azimutale diminue radialement en allant de la sphère intérieure vers la sphère extérieure. Suivant l'angle polaire, elle diminue en allant de l'équateur vers les pôles. On note que l'ondulation présente au niveau de l'équateur s'est accentuée. Elle plus prononcée, plus visible, que pour le cas précédent (celui du $Re=700$). On observe aussi, des ondulations équidistantes de l'équateur, dans chaque hémisphère. Les deux observations précédentes, nous donnent deux informations sur cet écoulement : l'écoulement radial sortant au niveau de l'équateur s'est accentué (il est devenu plus important), et il y a présence d'un écoulement radial sortant supplémentaire, dans chaque hémisphère.

La figure 4.28, illustre les lignes de courant de l'écoulement dans le plan méridional. Pour chaque hémisphère, l'écoulement secondaire se compose d'une cellule de circulation et de deux vortex. Le vortex qui se trouve juste au dessus de l'équateur est dit premier vortex. L'autre vortex est dit deuxième vortex (la même appellation est retenue pour l'hémisphère sud). Les deux vortex qui se trouvent de part et d'autre de l'équateur sont séparés par un écoulement radial sortant.

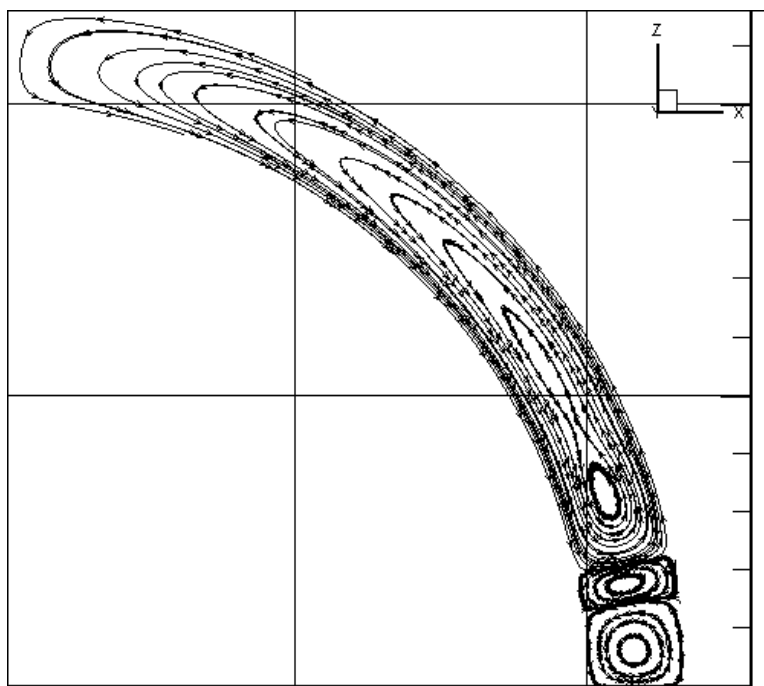


Figure 4.28: Ecoulement secondaire dans l'hémisphère nord.

Tandis que, les deux vortex de chaque hémisphère sont séparés par un écoulement radial entrant. On note aussi que, le deuxième vortex de chaque hémisphère est séparé de la cellule de circulation par un écoulement radial sortant. La figure 4.29 illustre les deux vortex de l'hémisphère nord, ainsi qu'une partie de la cellule de circulation principale. Sur cette figure, on note que le sens de rotation du premier vortex est anti-horaire, que le deuxième vortex tourne dans le sens horaire. La cellule de circulation tourne dans le sens anti-horaire.

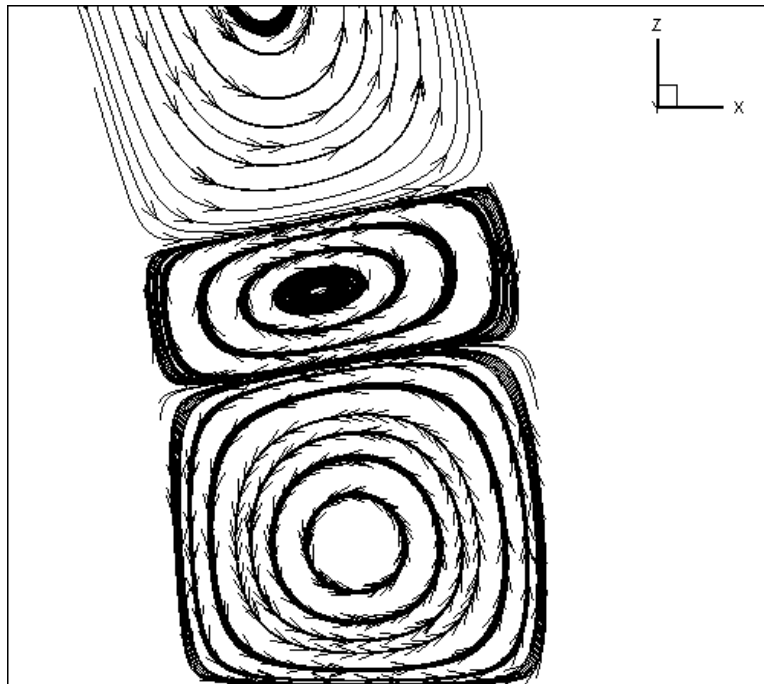


Figure 4.29: Détails de l'écoulement secondaire dans l'hémisphère nord.

Donc, la figure 4.28, confirme le fait (relevé d'après la distribution méridionale de la vitesse azimutale, figure 4.27) qu'il y a un écoulement radial sortant supplémentaire, qui se trouve entre le deuxième vortex et la cellule de circulation principale, dans chaque hémisphère. Si on agrandit la figure 4.27, on note aussi que l'effet de l'écoulement radial entrant entre les deux vortex de chaque hémisphère, est visible sur la distribution méridionale de la vitesse azimutale. Les détails des ondulations sont rapportés sur la figure 4.30, qui illustre une partie de la distribution méridionale de la vitesse azimutale. Cette partie couvre l'intervalle polaire $1.2846 < \theta < 1.5772$. En observant la figure 4.30, du côté de la sphère extérieure à mi hauteur, on note une ondulation allant de la sphère extérieure vers la sphère intérieure. Cette ondulation ou

déformation est produite par l'écoulement radial entrant (qui se trouve entre les deux vortex de l'hémisphère nord).

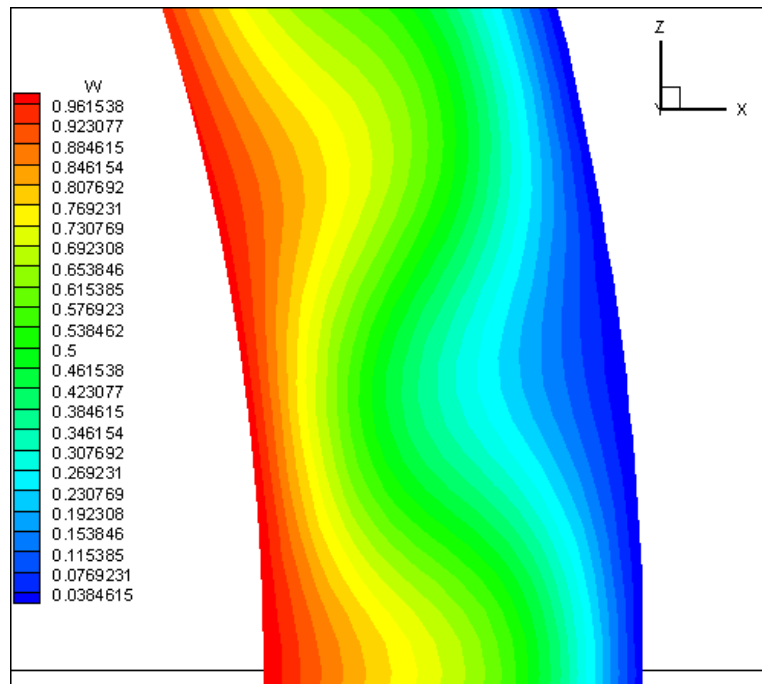


Figure 4.30 : Agrandissement de la distribution méridionale de la vitesse azimutale couvrant l'intervalle polaire $1.2846 < q < 1.5772$.

L'écoulement secondaire illustré sur la figure 4.28, est dit écoulement 2-vortex. Cet écoulement a été obtenu par **P. S. Marcus** et **L.S. Tuckerman** [6] pour $b = 0.18$ et $Re = 900$. Les deux vortex de chaque hémisphère sont dits vortex de Taylor. En effet, selon **P. S. Marcus** et **L.S. Tuckerman** [6], un vortex de Taylor doit être séparé de la cellule de circulation, et accompagné par un écoulement radial, qu'il soit entrant ou sortant. C'est pourquoi le pincement, qu'on a obtenu pour le cas du $Re = 700$, n'est pas considéré comme un vortex de Taylor. En effet, le pincement appartient toujours à la cellule de circulation et n'est pas accompagné par un écoulement radial. Il apparaît clairement sur la figure 4.29, que le premier vortex est plus grand que le second vortex. Ceci est dû au fait que le premier vortex est sujet à une plus grande force centrifuge, qui tend à l'élargir. En effet, le premier vortex couvre un angle polaire $\Delta q = 0.1332$, tandis que le deuxième vortex couvre un angle polaire $\Delta q = 0.0615$. Une analyse des résultats obtenus, par le code numérique, indique que le deuxième vortex est plus intense que le premier. En effet, la valeur maximale du module de la vitesse méridionale pour le premier vortex

($Vmer_{MAX} = 3,4009.10^{-2}$) est plus importante que celle du deuxième vortex ($Vmer_{MAX} = 5,3249.10^{-2}$).

La figure 4.31 illustre l'iso tac $W=0.5$, où on note que les ondulations visibles sur l'iso tac $W=0.5$ pour le cas du $Re = 700$, sont plus prononcées. Elles se sont transformées en protubérances bien visibles au niveau de l'équateur, et à une distance égale en dessus et en dessous de ce dernier.

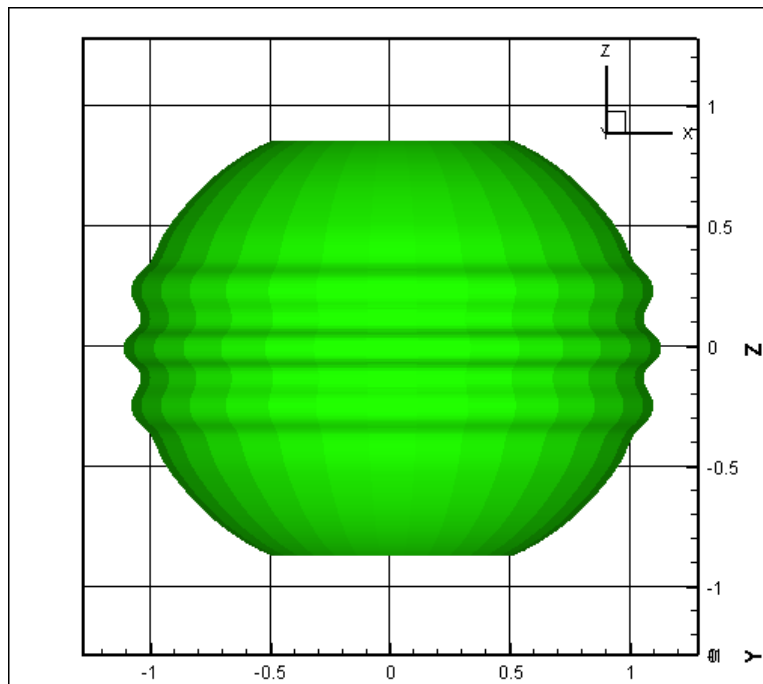


Figure 4.31: Iso tac $W=0.5$.

L'écoulement radial au niveau de l'équateur déplace le fluide de la sphère intérieure vers la sphère extérieure. Ce qui donne cette forme sortante à la protubérance au niveau de l'équateur. La même remarque est faite pour l'écoulement radial sortant, entre le second vortex et la cellule de circulation principale. Quant à l'écoulement radial entrant, entre les deux vortex de chaque hémisphère, il déplace le fluide de la sphère extérieure vers la sphère intérieure. Ce mouvement du fluide fait que la protubérance à ce niveau est entrante.

La figure 4.32 illustre la distribution méridionale de la pression de l'écoulement. La variation maximale de la pression pour ce cas est $\Delta P = 0.1184$. Qualitativement, les variations radiale et polaire de la pression pour ce cas sont pareilles à celles observées

pour les cas précédents (cas du $Re=650$ et du $Re=700$). On note toutefois une légère diminution de la valeur de la variation maximale de la pression.

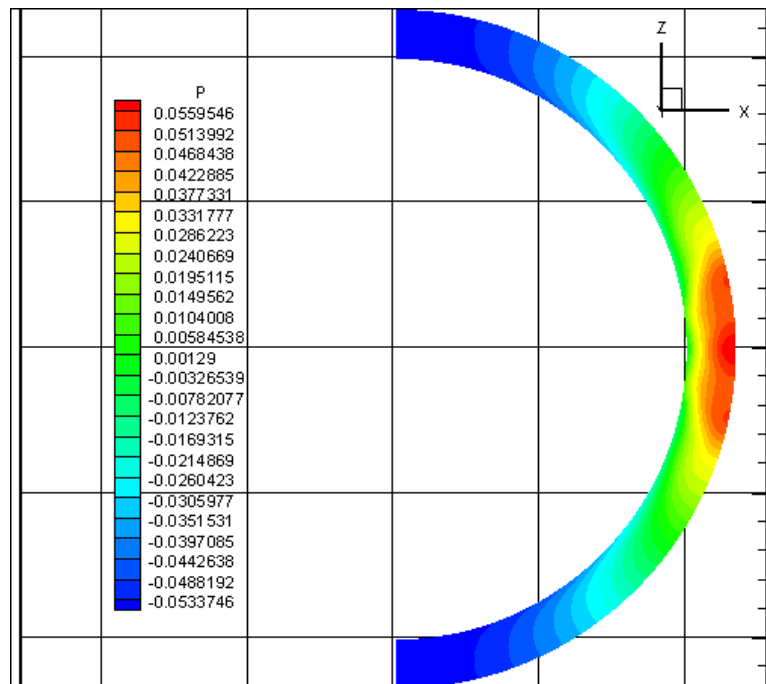


Figure 4.32: Distribution méridionale de la pression.

Un agrandissement de la figure 4.32, nous permet de constater que la distribution méridionale de la pression est affectée, au niveau de l'équateur, par l'écoulement radial sortant. En effet, sur la figure 4.32, on observe une déformation au niveau de l'équateur.

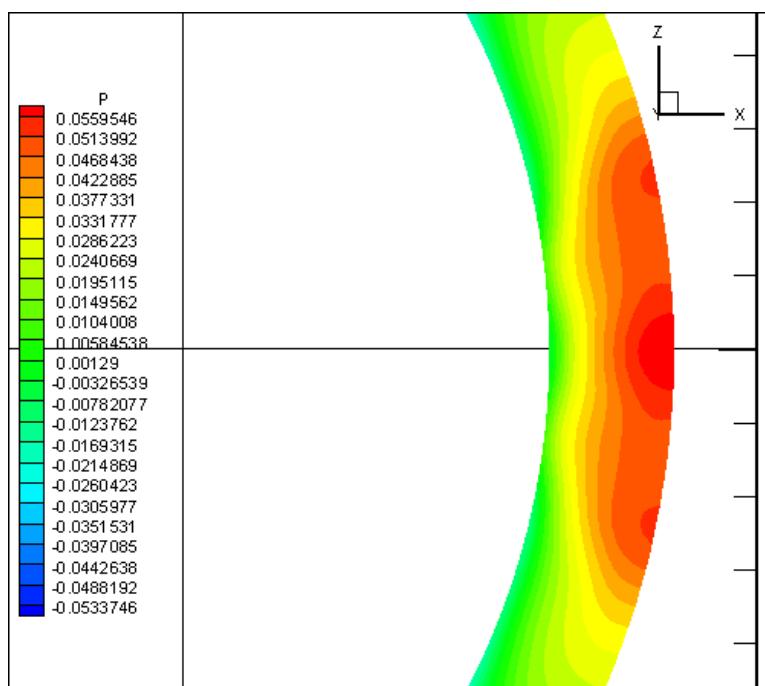


Figure 4.33 : Distribution méridionale de la pression couvrant l'intervalle polaire $1.1447 < q < 2.0096$.

La distribution méridionale de la vorticité azimutale pour l'hémisphère nord est rapportée sur la figure 4.34.

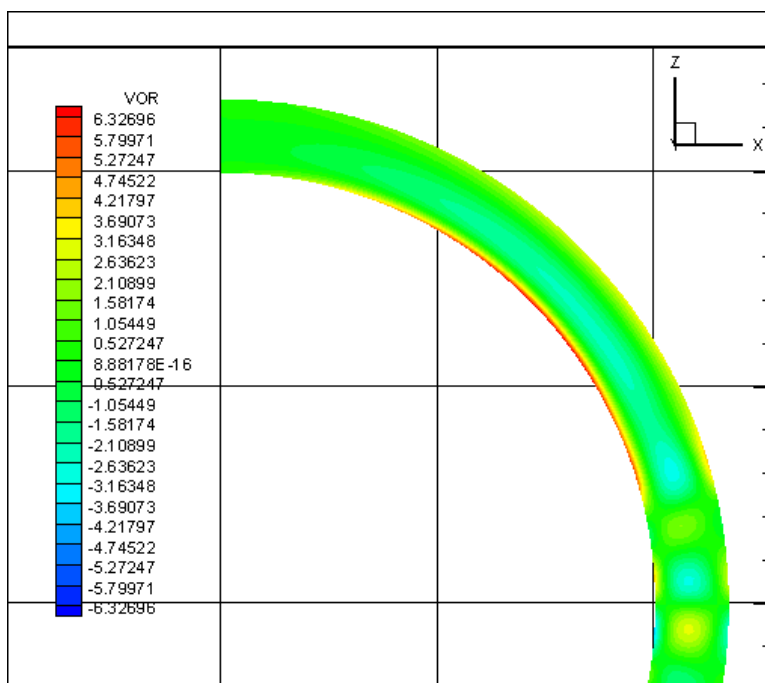


Figure 4.34: Distribution méridionale de la vorticité azimutale dans l'hémisphère nord.

La distribution méridionale de la vorticité a subi un grand changement par rapport aux cas précédents. Les parois des deux sphères sont toujours des régions à hautes vorticité. On décrira les variations; radiale et polaire de la vorticité, d'abord dans l'hémisphère nord, puis dans l'hémisphère sud.

Hémisphère nord.

Au niveau de la sphère intérieure, et en allant de l'équateur vers le pôle nord; on trouve successivement : une région à vorticité positive, une région à vorticité négative et une autre région à vorticité importante et positive. Cette distribution est plus claire sur la figure 4.35.

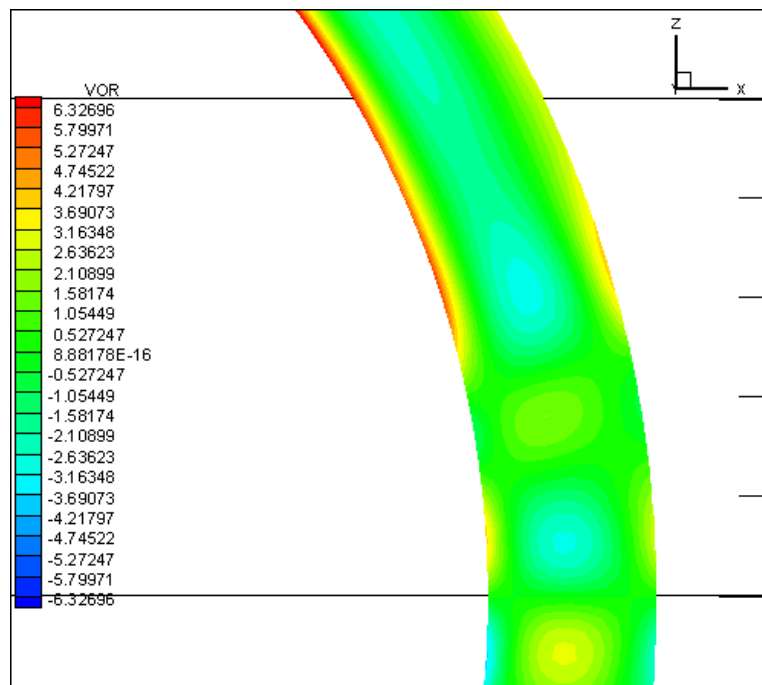


Figure 4.35 : Distribution méridionale de la vorticité azimuthale couvrant l'angle polaire $0.9412 < q < 1.6535$.

Au milieu de l'entrefeuille, en allant de l'équateur vers le pôle nord, il y a d'abord une région de vorticité négative, suivie d'une région à vorticité positive (pas assez claire sur la figure 4.35 du fait que c'est une faible vorticité, elle doit avoir la couleur entre le jaune clair et le vert), puis une autre région à vorticité négative. Cette dernière occupe un angle polaire plus important que les deux régions précédentes.

Radialement la vorticité azimuthale subit deux sortes de variation, en fonction de l'angle polaire considéré. Si on se trouve dans les latitudes ou à la limite de la sphère

intérieure la vorticité est positive la variation de la vorticité suit la variation radiale suivante: d'abord la vorticité est positive sur la sphère intérieure, elle diminue en allant vers le centre de l'entrefers, ensuite elle change de signe et devient négative. Puis elle augmente, change de signe pour devenir positive et continue à augmenter jusqu'à la limite de la sphère extérieure. Cette variation est illustrée sur la figure 4.36, pour les deux angles polaires $q = 1.5263$ et $q = 0.9921$.

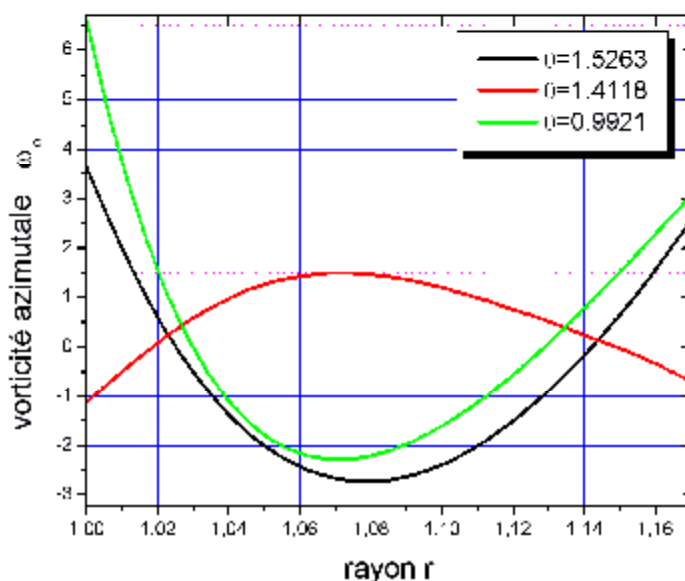


Figure 4.36 : variation radiale de la vorticité azimutale dans l'hémisphère nord pour les angles polaires $q = 1.5263$, $q = 1.4118$ et $q = 0.9921$.

Maintenant, si on se trouve à un angle polaire où la vorticité azimutale est négative sur la sphère intérieure, la variation radiale de la vorticité est comme suit : la vorticité négative à la sphère intérieure augmente, quand le rayon augmente. Puis elle change de signe et elle diminue, ensuite elle change encore une fois de signe et redevient négative. Elle continue à diminuer lorsqu'on atteint la sphère extérieure. Cette variation radiale est illustrée sur la figure 4.35, pour l'angle polaire $q = 1.4118$.

Hémisphère sud.

Au niveau de la sphère intérieure, on rencontre trois régions de vorticité qui se succèdent et s'alternent en signe. La première région, en allant vers le pôle sud est de vorticité négative. Au centre de l'entrefers, en allant vers le pôle sud, trois autres régions de vorticité se succèdent, elles sont alternées en signe. La première région possède une

vorticité positive. La distribution méridionale de la vorticité azimutale dans une partie de l'hémisphère sud est illustrée sur la figure 4.37.

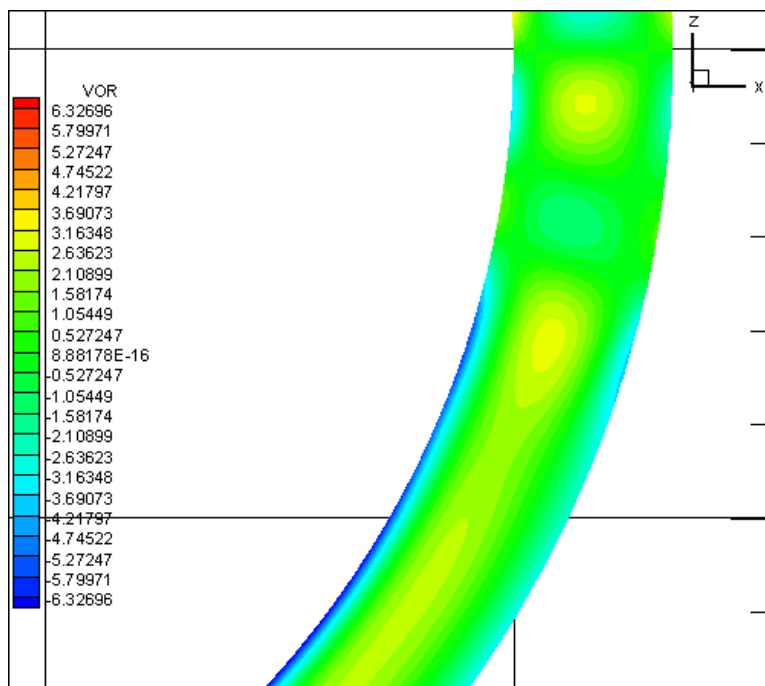


Figure 4.37 : Distribution méridionale de la vorticité azimutale couvrant l'intervalle polaire $1.5390 < q < 2.2385$.

La variation radiale de la vorticité azimutale, dans l'hémisphère sud est rapportée sur la figure 4.38.

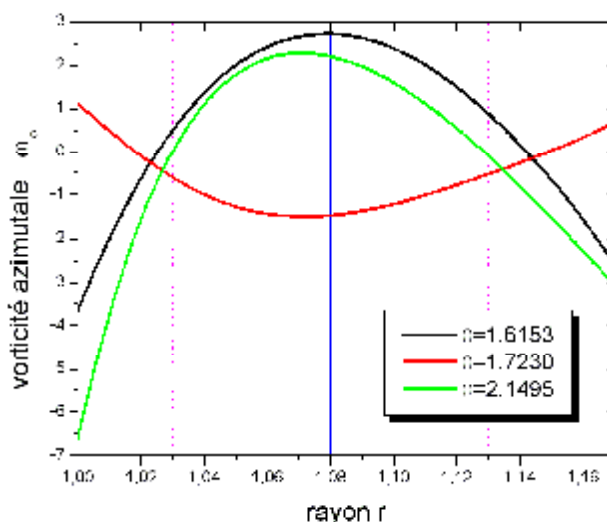


Figure 4.38 : Variation radiale de la vorticité azimutale dans l'hémisphère sud pour les angles polaires $q = 1.6153, q = 1.7230$ et $q = 2.1495$.

4.3.4 Le cas de $Re= 1000$.

Cet écoulement a été obtenu après 80 heures de calcul. Sur la figure 4.39 on rapporte la distribution méridionale de la vitesse azimutale.

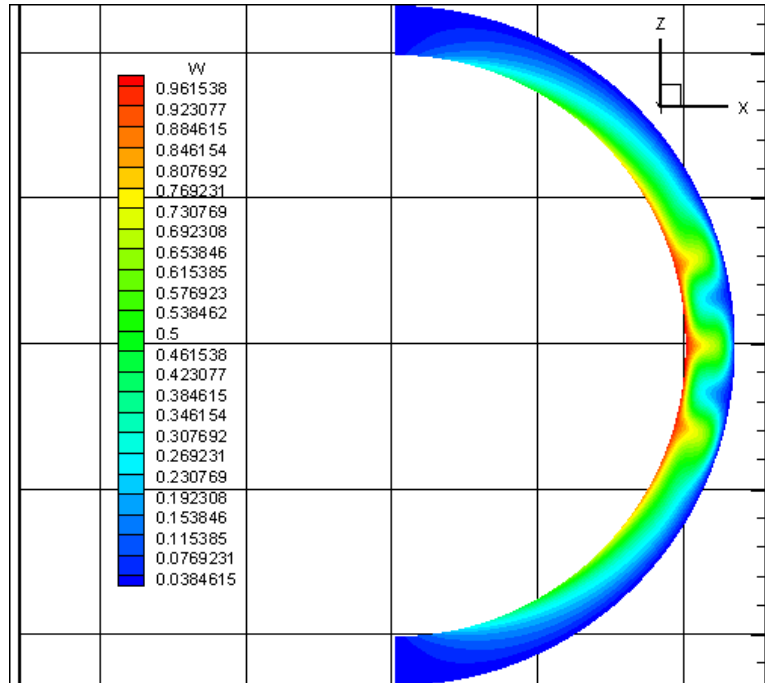


Figure 4.39: Variation méridionale de la vitesse azimutale.

Les ondulations, soit au niveau de l'équateur, soit à une égale distance de part et d'autre de ce dernier, sont plus claires, par rapport au cas précédent. Par rapport au cas précédent, l'effet de l'écoulement radial entrant (se trouvant entre les deux vortex de chaque hémisphère) est plus important. Sur la figure 4.40, on remarque clairement l'emplacement des écoulements suivants (grâce à leur effet sur l'écoulement principal): l'écoulement radial sortant au niveau de l'équateur, l'écoulement radial entrant entre les deux vortex et celui sortant entre le second vortex et la cellule de circulation, dans les deux hémisphères. Le fait, que l'influence des ces écoulements sur l'écoulement principal s'est accentuée, découle de l'augmentation du nombre de Reynolds. En effet, quand le nombre de Reynolds a augmenté, l'écoulement radial (qu'il soit entrant ou sortant) qui est entraîné par la rotation de la sphère intérieure, est devenu plus important. Car la sphère intérieure est pour ce cas entraînée par une vitesse plus grande que celle des cas précédents. Quant à la variation radiale et polaire de la vitesse azimutale, elle est pareille aux cas précédents.

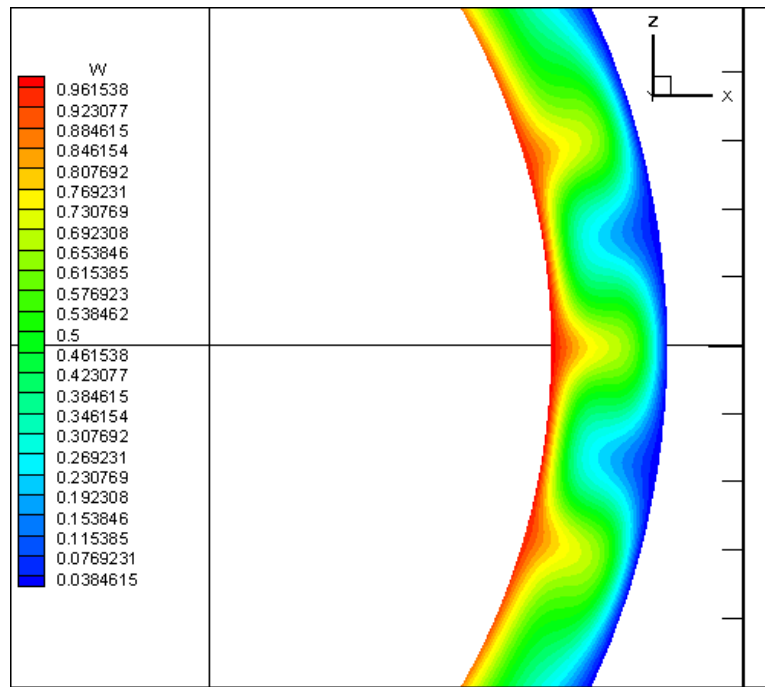


Figure 4.40 : Agrandissement de la distribution méridionale de la vitesse azimutale, couvrant l'intervalle polaire $1.1065 < q < 2.0478$.

L'écoulement secondaire, dans l'hémisphère nord, est rapporté sur la figure 4.41. Il se compose d'une cellule de circulation et de deux vortex, dans chaque hémisphère. Qualitativement donc, c'est la même configuration que pour l'écoulement précédant ($Re=800$). C'est le cas aussi en ce qui concerne le sens de rotation de la cellule de circulation et des deux vortex. Toutefois la taille ainsi que l'intensité des vortex ont augmenté. Le premier vortex couvre un angle polaire ($\Delta q = 0.1526$) plus grand que le second vortex ($\Delta q = 0.115$). En comparant avec le cas précédent du $Re=800$, on confirme que les vortex ont augmenté en taille. En effet pour $Re=800$, le premier vortex couvrait un angle $\Delta q = 0.1332$ et le second vortex un angle $\Delta q = 0.0615$. Le premier vortex est plus grand et plus intense que le deuxième vortex. En effet, la valeur maximale du module de la vitesse méridionale pour le premier vortex ($Vmer_{MAX} = 9,91.10^{-2}$) est plus importante que celle du deuxième vortex ($Vmer_{MAX} = 8,5609.10^{-2}$).

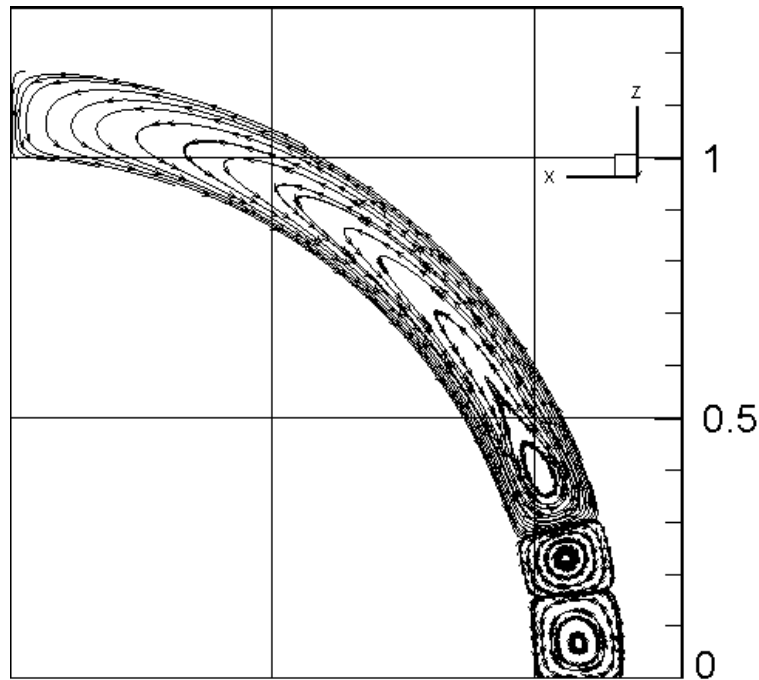


Figure 4.41: Lignes de courant de l'écoulement dans le plan méridional.

Quant à la valeur maximale du module de la vitesse méridionale pour tout l'écoulement ($V_{mer_Max} = 10.958.10^{-2}$), elle a subi une augmentation par rapport au cas précédent. Donc, l'écoulement s'intensifie en réponse à l'augmentation du nombre de Reynolds. Les vitesses méridionale et polaire, avec lesquelles le fluide est entraîné au sein de l'entrefers, deviennent plus importantes; du fait de l'augmentation de la vitesse de rotation de la sphère intérieure.

La figure 4.42, illustre l'iso tac $W=0.5$. Cette dernière comporte des protubérances de en plus en plus accentuées et prononcées. Ces protubérances marquent clairement l'emplacement de l'écoulement radial entrant au niveau de l'équateur. Ainsi que l'emplacement de l'écoulement radial entrant et sortant, respectivement, dans chaque hémisphère. L'analyse qui va suivre, confirmera par les chiffres la description ci-dessus. Les protubérances occupent l'intervalle $1.1948 < q < 1.3487$ dans l'hémisphère nord, l'intervalle $1.7925 < q < 1.9514$ dans l'hémisphère sud. Au niveau de l'équateur la protubérance occupe l'intervalle polaire $1.5115 < q < 1.6310$. On cherche le centre de chaque intervalle qu'occupent ces protubérances.

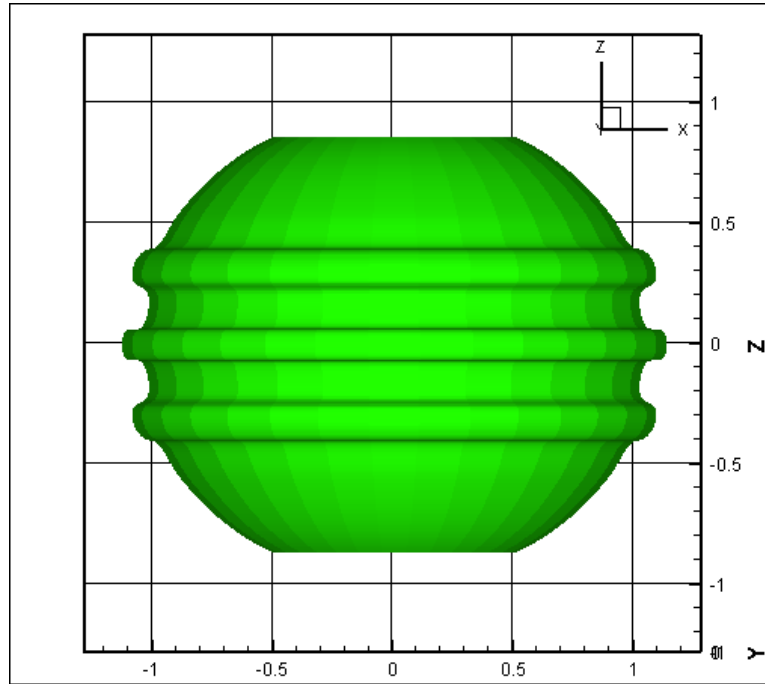


Figure 4.42: Iso tac $W=0.5$.

On trouve que ce centre est en fait l'emplacement de l'écoulement radial sortant se trouvant : entre la cellule de circulation et le deuxième vortex dans l'hémisphère nord, entre la cellule de circulation et le deuxième vortex dans l'hémisphère sud et entre les deux vortex (séparés par l'équateur); respectivement. En effet, l'écoulement radial entre la cellule de circulation et le deuxième vortex (hémisphère nord) se trouve à l'angle $q = 1.2706$, et le centre des protubérances à l'angle $q = 1.2717$. En ce qui concerne les protubérances au niveau de l'équateur leur centre se trouve à l'angle $q = 1.5712$ ce qui correspond à l'emplacement de l'écoulement radial sortant au niveau de l'équateur à l'angle $q = 1.57$. En ce qui concerne le centre des protubérances de l'hémisphère sud, il se trouve à l'angle $q = 1.8720$, l'écoulement radial se trouvant entre la cellule de circulation sud et le deuxième vortex se trouve à l'angle $q = 1.8427$. Donc, cette analyse confirme que les protubérances ne sont que l'effet de l'écoulement radial sur l'écoulement principal.

La figure 4.43 illustre la distribution méridionale de la pression. Cette dernière subit les mêmes variations (radiale et polaire) que les cas précédents. La variation maximale de la pression ($\Delta P = 0.1140$) est légèrement moins importante que celle du cas du $Re=800$.

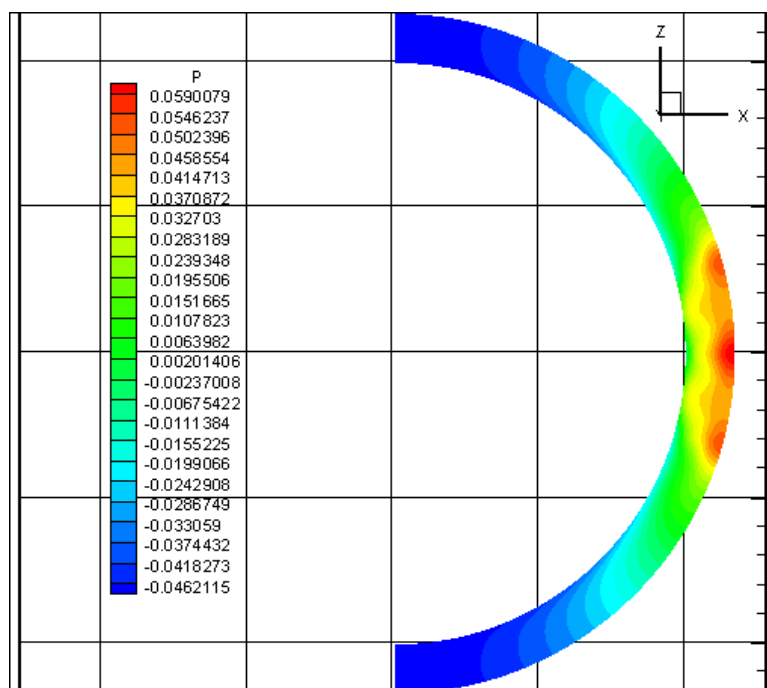


Figure 4.43: Distribution méridionale de la pression.

On note sur la figure 4.43, que la zone de haute pression qui occupait, dans le cas $Re=800$ une région accolée à la sphère extérieure (l'intervalle $1.5082 < q < 1.6325$), est maintenant répartie en trois régions de haute pression. Ces trois régions sont visibles sur la figure 4.44, qui illustre l'agrandissement de la distribution méridionale de la pression, pour une partie de l'hémisphère nord. Elles sont réparties comme suit : Une région au niveau de l'équateur ($1.5279 < q < 1.6129$), une région au dessus de l'équateur ($1.2679 < q < 1.3448$) et une région en dessous de l'équateur ($1.7959 < q < 1.8727$).

On détermine le centre de chaque intervalle polaire qu'occupe chaque région. Ce centre correspond à l'écoulement radial sortant au niveau de l'équateur et à l'écoulement radial sortant entre le second vortex et la cellule de circulation principale; respectivement. Le fluide déplacé de la sphère intérieure vers la sphère extérieure, (et en raison de l'augmentation de la vitesse de rotation de la sphère intérieure) exerce plus de pression sur la paroi de la sphère extérieure.

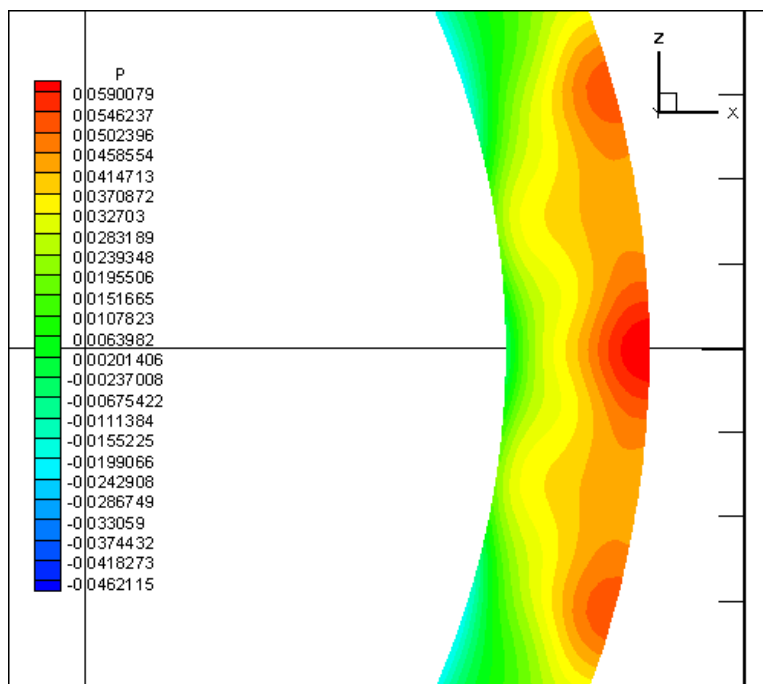


Figure 4.44: Distribution méridionale de la pression dans l'intervalle polaire $1.2083 < q < 1.9460$.

En effet, le tableau 4.1 montre la comparaison entre d'un côté le centre de chaque intervalle et d'un autre l'emplacement de l'écoulement radial sortant, soit au niveau de l'équateur, ou bien entre la cellule de circulation et le deuxième vortex (pour les deux hémisphères).

Entre deux régions de haute pression, en allant vers le centre de l'entrefer, on remarque une ondulation dans la distribution de la pression. Cette ondulation ou déformation est due à l'amplification de l'écoulement radial entrant, se trouvant entre les deux vortex de chaque hémisphère. L'angle polaire où se situent ces ondulations, pour les deux hémisphères, sont les mêmes angles polaires définissant l'emplacement de l'écoulement radial entrant entre les deux vortex (de chaque hémisphère). Le résultat est dans le tableau 4.2.

Tableau 4.1: Comparaison entre les centres de chaque intervalle des zones de hautes pression et l'emplacement de l'écoulement radial sortant à ces trois niveaux.

Centre de l'intervalle 1 $1.5279 < q < 1.6129$	1.5704	Écoulement radial sortant au niveau de l'équateur	1.57
Centre de l'intervalle 2 $1.2679 < q < 1.3448$	1.3063	Écoulement radial sortant entre la cellule de circulation et le 2 ^{ème} vortex (hémisphère nord)	1.2706
Centre de l'intervalle 3 $1.7959 < q < 1.8727$	1.8343	Écoulement radial sortant entre la cellule de circulation et le 2 ^{ème} vortex (hémisphère sud)	1.8427

Tableau 4.2: Comparaison entre les limites des zones de hautes pression et l'emplacement de l'écoulement radial entrant (entre les deux vortex) dans les deux hémisphères.

Limite de la zone de pression hémisphère nord	1.4247	Écoulement entrant entre les deux vortex, hémisphère nord	1.4178
Limite de la zone de pression hémisphère sud	1.7246	Écoulement entrant entre les deux vortex, hémisphère sud	1.7238

La distribution méridionale de la vorticité azimutale dans l'hémisphère nord est rapportée sur la figure 4.45.

Qualitativement la distribution méridionale de la vorticité azimutale pour ce cas est semblable à celle du cas précédent (cas du $Re=800$). La vorticité maximale pour cet écoulement ($Vor_{Max} = 8.274$) à toutefois augmenté, la variation maximale de la vorticité est égale à 16.5480.

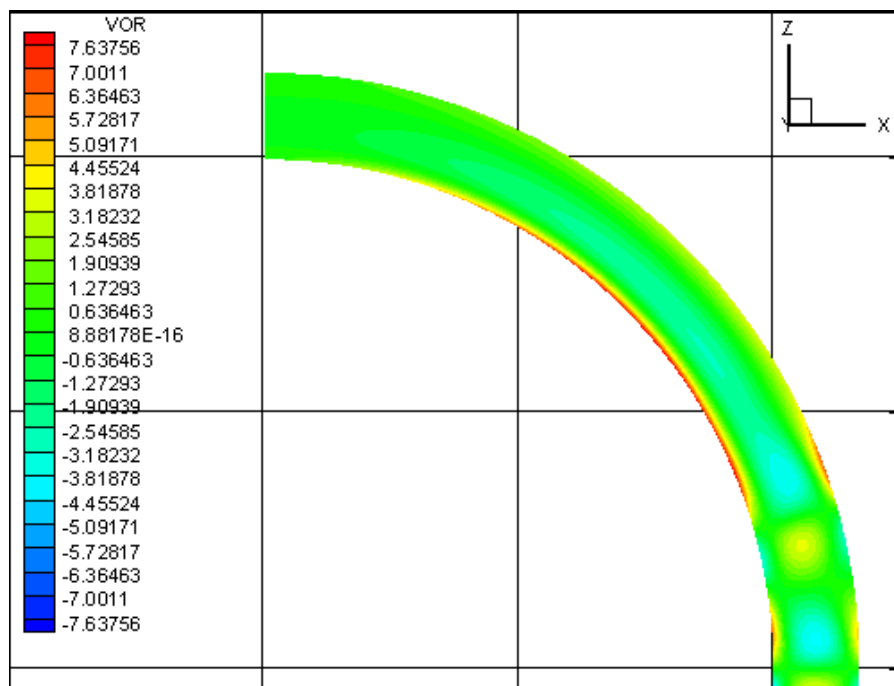


Figure 4.45 : Distribution méridionale de la vorticité azimutale dans l'hémisphère nord.

La variation radiale de la vorticité azimutale, dans l'hémisphère nord est illustrée sur la figure 4.46, pour les trois angles polaires $q = 1.5263$, $q = 1.3609$ et $q = 0.9539$. Cette variation radiale est la même que pour le cas précédent. Quant à l'hémisphère sud, la variation de la vorticité azimutale (pour les trois angles polaires $q = 1.6153$, $q = 1.7934$ et $q = 2.2004$) est illustrée sur la figure 4.47. Elle est semblable à celle du cas précédent, pour la même hémisphère.

La valeur moyenne du moment angulaire de rotation est égale à 104.0222. Le moment angulaire de rotation est plus important que pour le cas précédent. La valeur de l'énergie cinétique moyenne de l'écoulement est $E_c = 8,8535 \cdot 10^{-2}$.

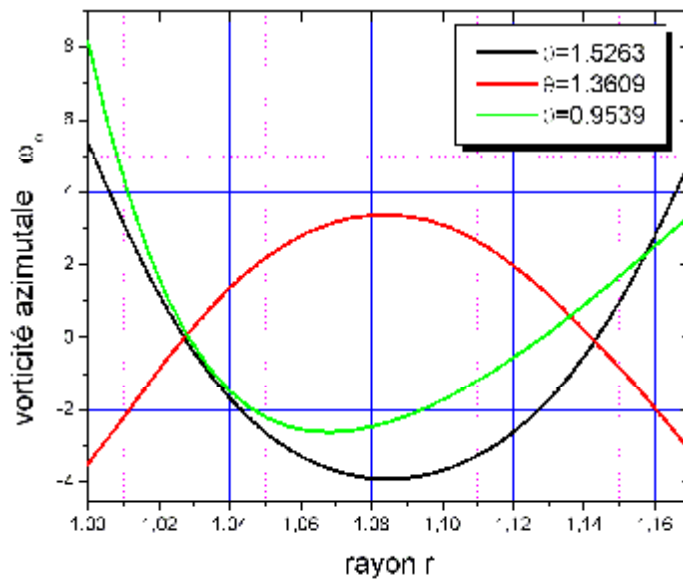


Figure 4.46: Variation radiale de la vorticité azimutale dans l'hémisphère nord, pour les angles polaires $q = 1.5263, q = 1.3609$ et $q = 0.9539$.

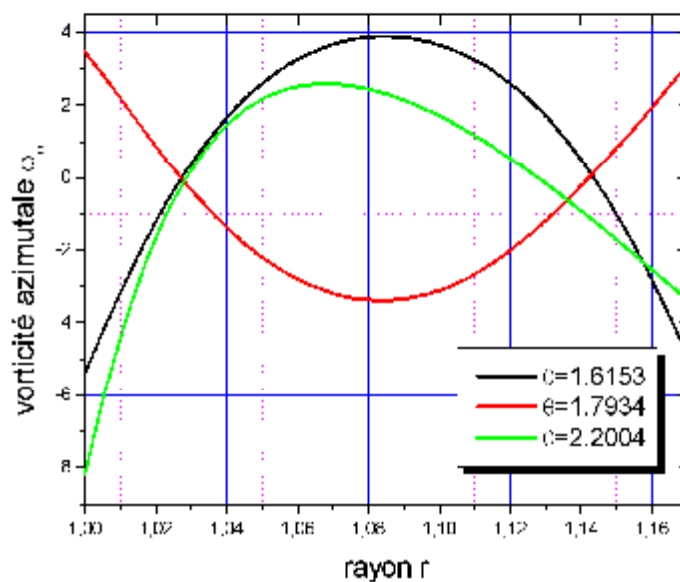


Figure 4.47: Variation radiale de la vorticité azimutale dans l'hémisphère sud, pour les angles polaires $q = 1.6153, q = 1.7934$ et $q = 2.2004$.

4.5.7 Le cas de $Re=2000$.

L'écoulement a été obtenu après 61 heures de calcul. L'écoulement secondaire obtenu, est rapporté sur la figure 4.48. Il se compose, pour chaque hémisphère, d'une cellule de circulation et de deux vortex de Taylor. Le sens de rotation des deux vortex et de la cellule principale, dans chaque hémisphère, est le même que pour le cas du $Re=800$ et du $Re=1000$.

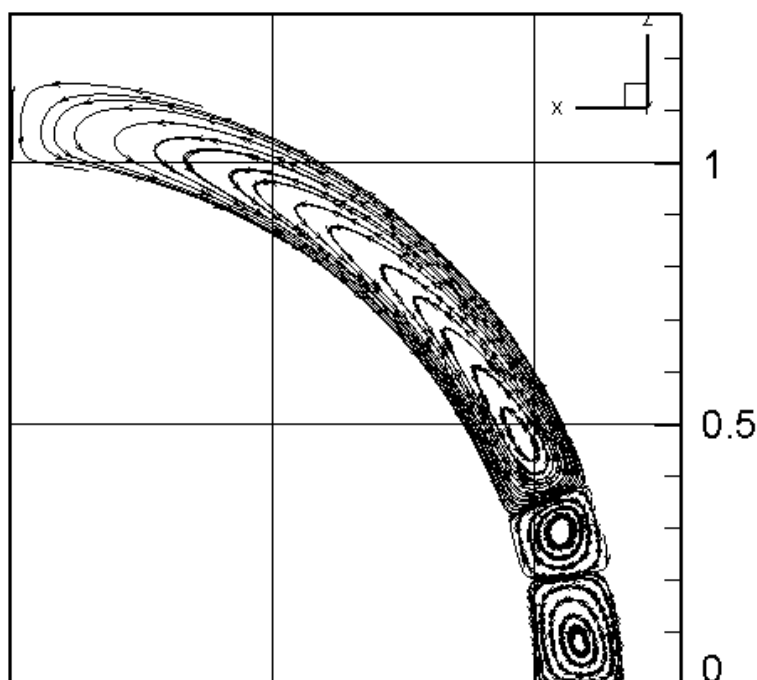


Figure 4.48: L'écoulement secondaire dans le plan méridional.

Donc, l'écoulement secondaire est qualitativement semblable aux écoulements secondaires obtenus pour les cas du $Re=800$ et du $Re=1000$. La taille des vortex a toutefois subi une augmentation. Le premier vortex couvre un angle polaire $\Delta q = 0.1836$ (qui était $\Delta q = 0.1526$ pour $Re=1000$ et $\Delta q = 0.1332$ pour $Re=800$). Le deuxième vortex couvre un angle polaire $\Delta q = 0.1179$ (qui était $\Delta q = 0.115$ pour $Re=1000$ et $\Delta q = 0.0615$ pour $Re=800$). L'intensité de chaque vortex, a subi une augmentation, par rapport aux cas précédents. Ceci est dû, toujours, au fait que la vitesse méridionale de l'écoulement ait augmenté. Cette augmentation est dû à l'augmentation de la vitesse de rotation de la sphère intérieure (suite à l'augmentation du nombre de Reynolds). Le premier vortex reste plus intense et plus grand que le deuxième vortex.

Le tableau 4.3 illustre les valeurs maximales des modules des vitesses méridionales, pour chaque vortex, pour les cas $Re=2000$, $Re=1000$ et $Re=800$.

Tableau 4.3: Valeurs maximales des modules de la vitesse méridionale, pour tout l'écoulement et des deux vortex pour les cas du $Re=800$, du $Re=1000$ et du $Re=2000$.

	$Vmer_{MAX}$ de l'écoulement	$Vmer_{MAX}$ du 1 ^{er} Vortex	$Vmer_{MAX}$ du 2 ^{ème} Vortex
Re=800	0.0834	$5,3249.10^{-2}$	$3,4009.10^{-2}$
Re=1000	0.1096	$9,91.10^{-2}$	$8,5609.10^{-2}$
Re=2000	0.1528	$13,7.10^{-2}$	$12,493.10^{-2}$

Une lecture du tableau 4.3, confirme qu'en augmentant le nombre de Reynolds, l'intensité de l'écoulement, ainsi que celle des vortex augmente.

La distribution méridionale de la vitesse azimutale est illustrée figure 4.49. L'intensification des écoulements dans la direction radiale, qu'ils soient sortants ou entrants, est visible sur cette distribution. En effet, en agrandissant la figure 4.49 (figure 4.50), on distingue clairement les emplacements des écoulements suivant la direction radiale. Ce qui est confirmé en observant la figure 4.51, de l'iso tac $W=0.5$. Sur cette figure, on note que les protubérances se sont éloignées les unes des autres. Ceci démontre que l'écoulement radial entrant se trouvant dans chaque hémisphère est devenu plus intense.

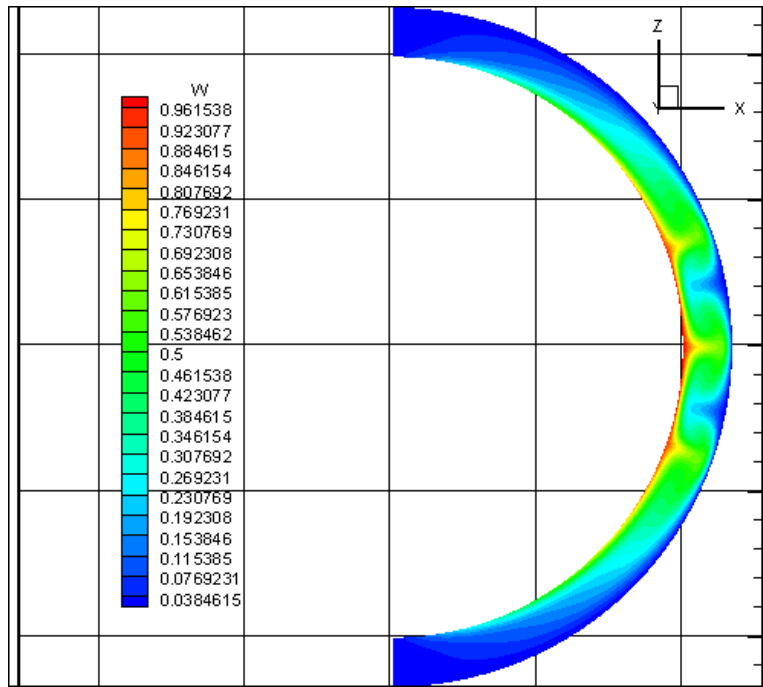


Figure 4.49: Distribution méridionale de la vitesse azimutale.

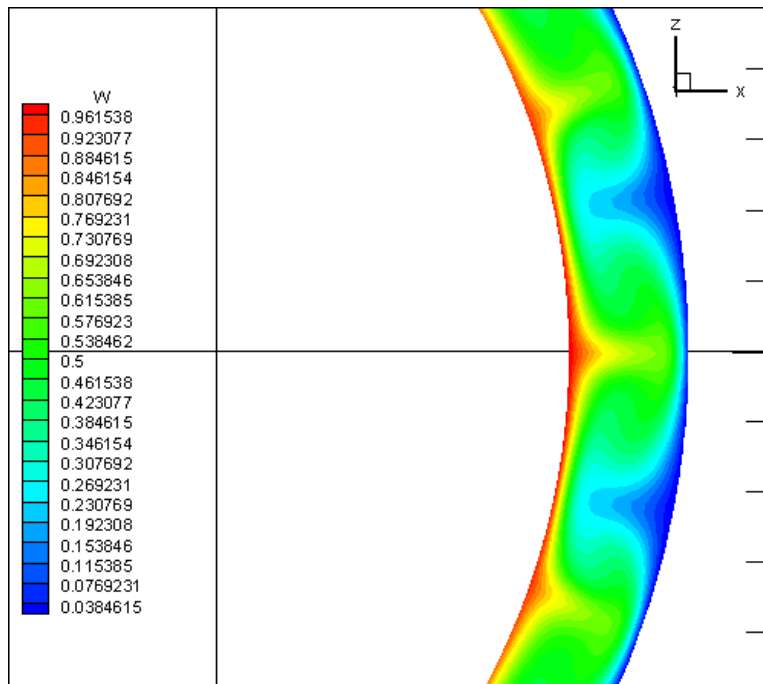


Figure 4.50: Agrandissement de la distribution méridionale de la vitesse azimutale dans l'intervalle polaire $1.1193 < q < 2.0223$.

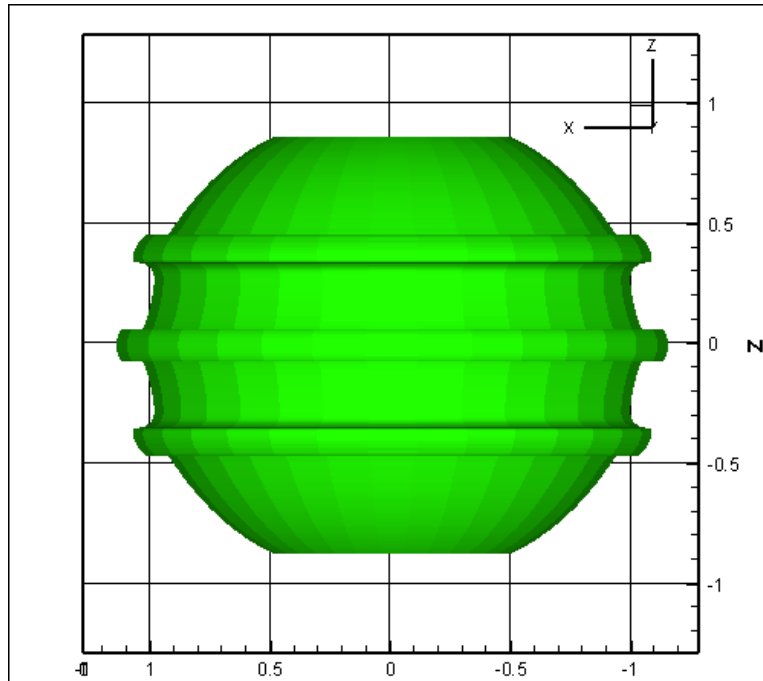


Figure 4.51: Iso surface $W=0.5$.

La figure 4.52 illustre la distribution méridionale de la pression. La valeur de la variation maximale non dimensionnelle de la pression est $\Delta P = 0.0985$.

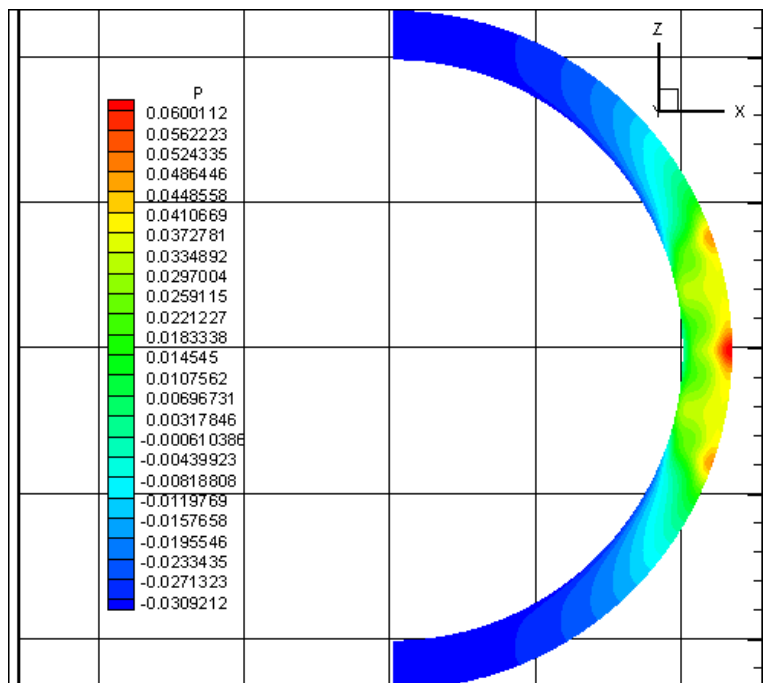


Figure 4.52 : Distribution méridionale de la pression.

On note sur la figure 4.53 qu'il y a trois zones de haute pression, accolées à la sphère extérieure. Sur la figure 4.54, (qui montre l'agrandissement de la distribution méridionale de la pression, dans l'intervalle polaire $1.0811 < \theta < 1.6662$), on observe clairement deux de ces zones à haute pression.

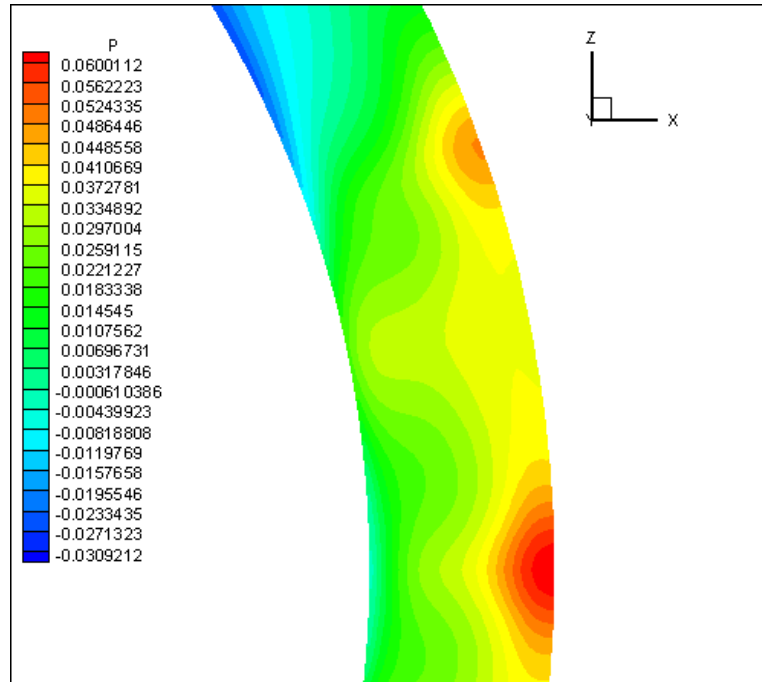


Figure 4.53 : Agrandissement de la distribution méridionale de la pression dans l'intervalle polaire $1.0811 < \theta < 1.6662$

L'intensification de l'effet centrifuge fait que l'écoulement radial (qu'il soit entrant ou sortant) s'intensifie. Le fluide est éjecté avec plus force sur la sphère extérieure. Ce qui fait que son impacte est centré dans une zone de faible envergure. Ce qui n'était pas le cas, par exemple, pour le cas du $Re=800$. En effet, dans la distribution méridionale de la pression pour le cas du $Re=800$, la zone de haute pression occupe un angle polaire largement plus important que celui qu'occupe cette zone pour le cas du $Re=2000$ (voir la figure 4.33 à titre de comparaison).

C'est pareil à ce qui se produit quand on injecte radialement un fluide; quand la vitesse du fluide est faible le fluide s'étale la surface d'impacte. Cependant, quand la vitesse du fluide est très élevée l'impact du fluide sur le mur se fait presque en un point.

La figure 4.55, illustre la distribution méridionale de la vorticité azimutale dans l'hémisphère nord. La distribution méridionale de la vorticité azimutale pour ce cas est qualitativement pareille aux cas précédents.

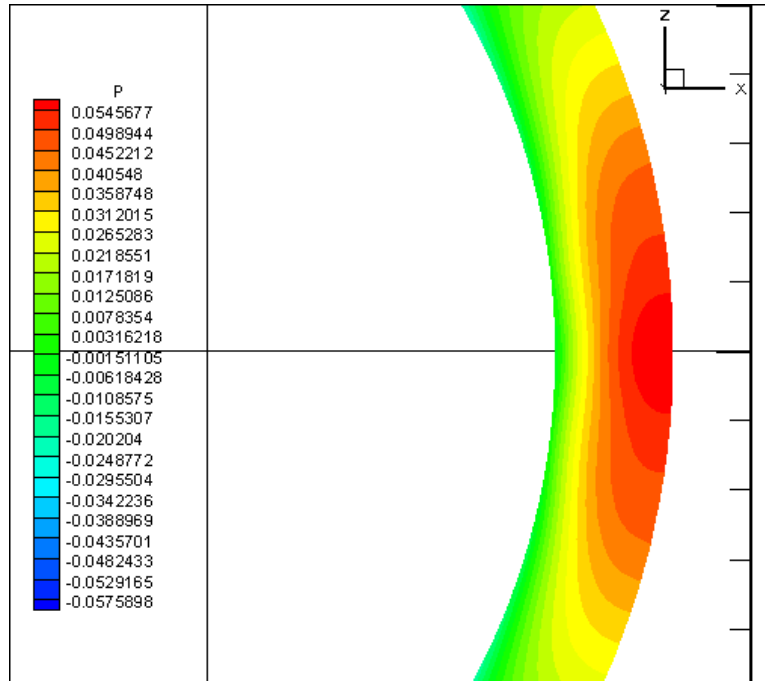


Figure 4.54 : Agrandissement de la distribution méridionale de la pression dans l'intervalle polaire $1.0811 < q < 1.6662$, pour le cas de $Re=700$.

Cependant, la vorticité azimutale maximale de tout l'écoulement a subi une augmentation. En effet, la valeur maximale de la vorticité azimutale pour ce cas ($Vor_{MAX} = 13.7470$) est plus importante que celles des cas précédents ($Vor_{MAX} = 8.2740$ pour $Re=1000$, $Vor_{MAX} = 6.8542$ pour $Re=800$). Les variations radiales de la vorticité, qu'elles soient pour l'hémisphère nord ou sud, sont qualitativement similaires aux variations radiales pour les cas précédents (celui notamment de $Re=1000$ et de $Re=800$). La figure 4.56, représente l'agrandissement de la figure 4.55. Par rapport au cas de $Re=1000$, la vorticité azimutale négative, se trouvant au dessus de l'équateur (hémisphère nord), a augmenté. Ce qui indique que l'intensité du premier vortex a augmenté. Même remarque pour la zone à vorticité azimutale positive qui se trouve à l'emplacement du deuxième vortex; et aussi pour la région de vorticité azimutale négative qui se trouve à l'emplacement de la cellule principale de rotation.

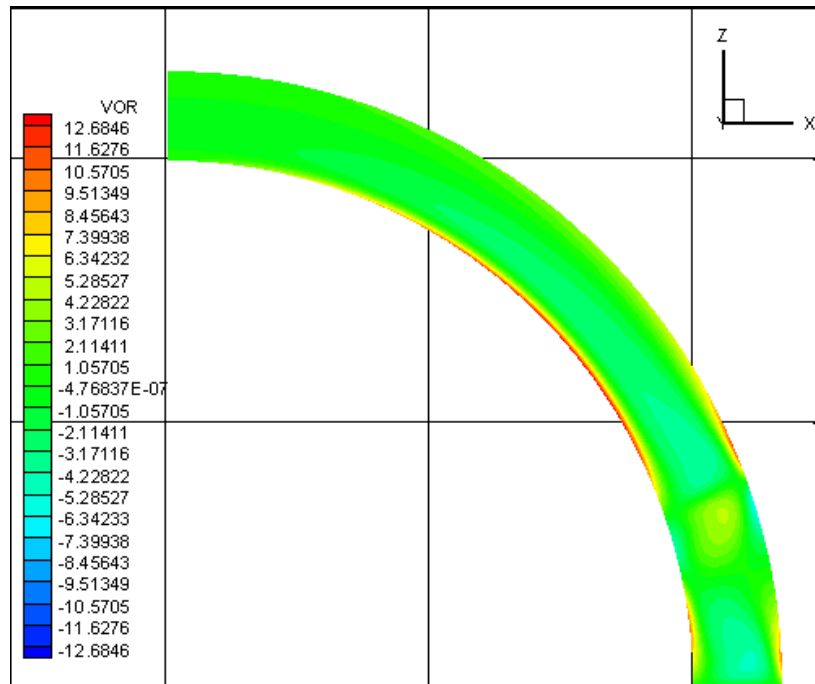


Figure 4.55: Distribution méridionale de la vorticité azimutale dans l'hémisphère nord.

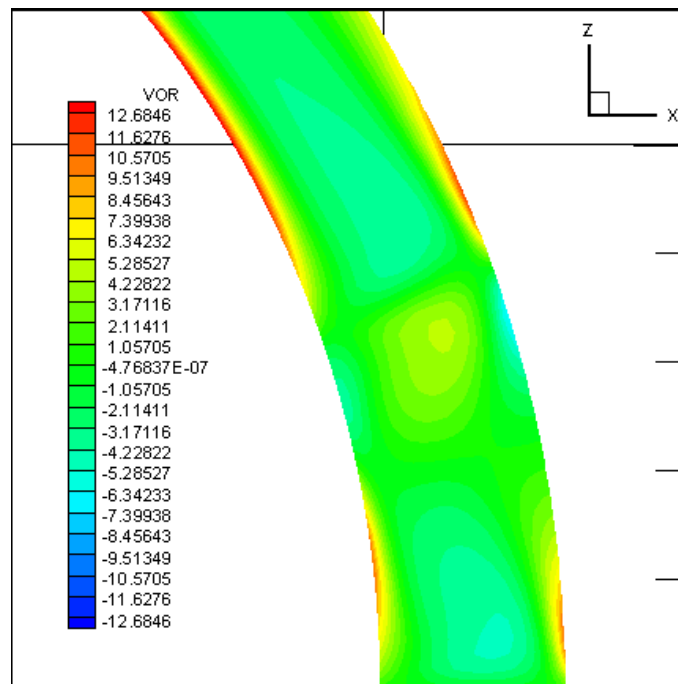


Figure 4.56: Détails de la distribution méridionale de la vorticité azimutale dans l'hémisphère nord.

La figure 4.57 illustre la variation radiale de la vorticité azimutale, dans l'hémisphère nord, pour les trois angles polaires $q = 1.5263$, $q = 1.2719$ et $q = 0.9666$. Cette variation est qualitativement similaire à celles des cas précédents.

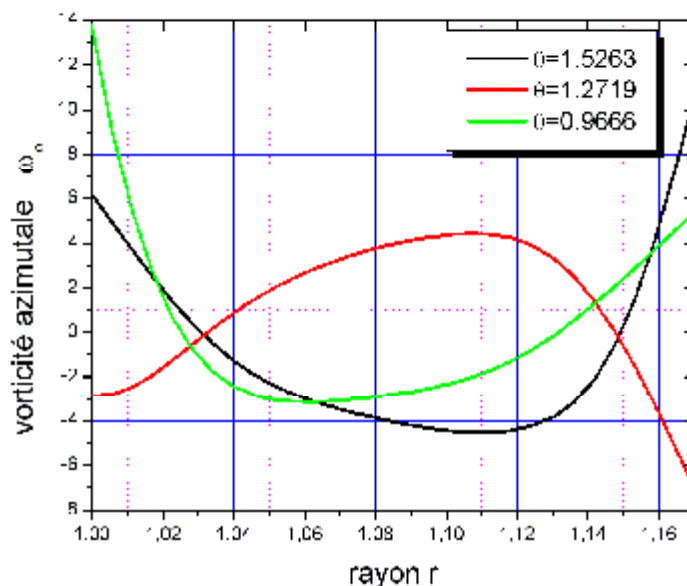


Figure 4.57: Variation radiale de la vorticité azimutale dans l'hémisphère nord pour les angles polaires $q = 1.5263$, $q = 1.2719$ et $q = 0.9666$.

Quant à la figure 4.58, elle illustre la variation radiale de la vorticité azimutale, dans l'hémisphère sud, pour les trois angles polaires $q = 1.6153$, $q = 1.8697$ et $q = 2.1749$. Qualitativement, cette variation est la même que celle des cas précédents.

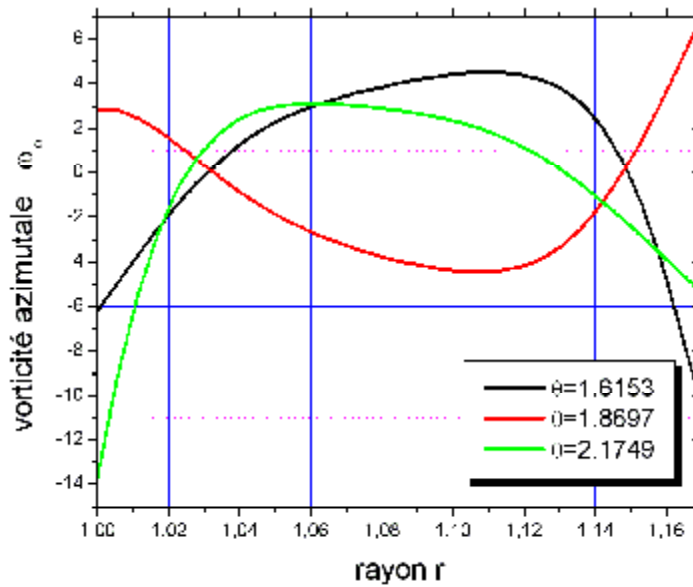


Figure 4.58: Variation radiale de la vorticité azimutale dans l'hémisphère sud pour les angles polaires $q = 1.6153$, $q = 1.8697$ et $q = 2.1749$.

La valeur moyenne du moment angulaire est $t = 159.2778$. La valeur moyenne de l'énergie cinétique pour cet écoulement est $E_c = 7,8288.10^{-2}$.

4.5.8 Le cas de $Re=3000$.

Ce cas est qualitativement similaire aux cas précédents, ceux dont l'écoulement secondaire est un écoulement 2-vortex. Un agrandissement des deux vortex et d'une partie de la cellule de circulation de l'hémisphère nord, est illustré sur la figure 4.59.

Le premier et le second vortex ont d'avantage gagné en taille et en intensité. Le premier vortex occupe l'intervalle polaire $\Delta q = 0.1908$. Le second vortex occupe l'intervalle polaire $\Delta q = 0.1272$. La variation de la taille du premier et du deuxième vortex en fonction du nombre de Reynolds est illustrée sur la figure 4.60. On note de la figure 4.60 que: la taille des deux vortex augmente, quand le nombre de Reynolds augmente; le premier vortex est toujours plus grand que le second. L'intensité de chaque vortex a augmenté pour ce cas, par rapport aux cas précédents. L'intensité du premier vortex ($Vmer_{MAX} = 0.1608$) est relativement plus grande que celle du deuxième vortex ($Vmer_{MAX} = 0.1481$).

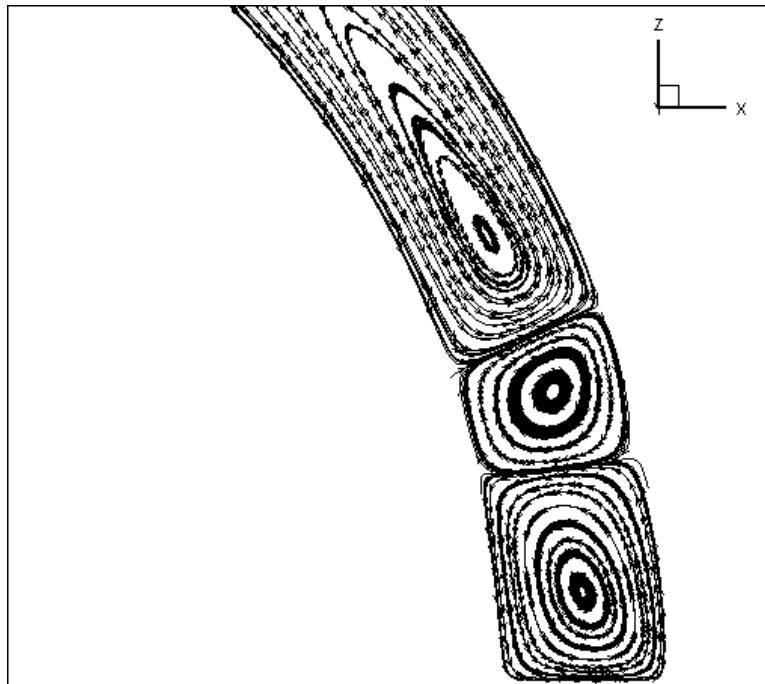


Figure 4.59 : Agrandissement de l'écoulement secondaire dans l'hémisphère nord.

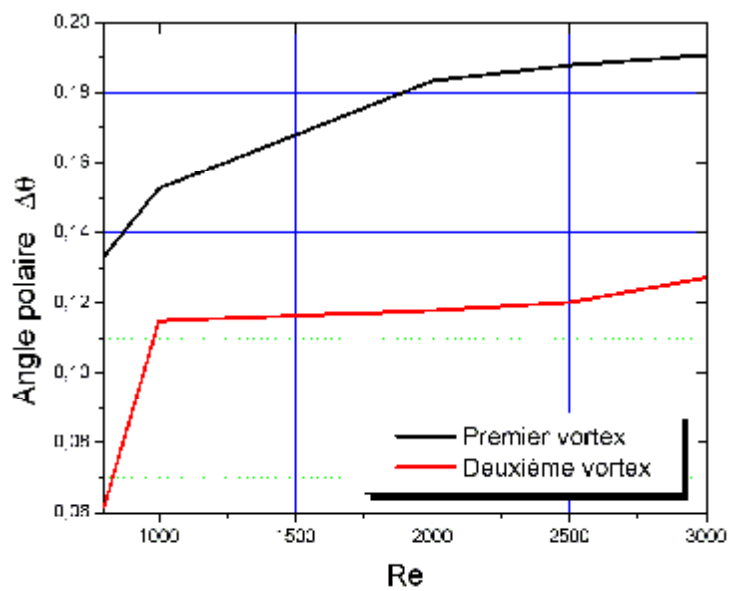


Figure 4.60 : Variation des tailles des deux vortex en fonction du nombre de Reynolds.

La figure 4.61, illustre la variation de l'intensité des deux vortex en fonction du nombre de Reynolds.

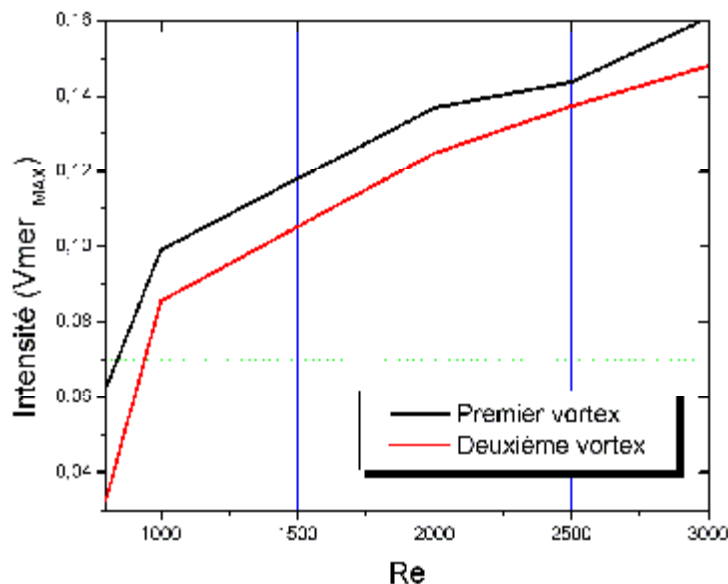


Figure 4.61 : Variation du module de la vitesse méridionale maximale, des deux vortex, en fonction du nombre de Reynolds.

De la figure 4.61, on note que l'intensité des deux vortex augmente quand le nombre de Reynolds augmente. Aussi, le premier vortex est toujours plus intense que le deuxième.

La figure 4.62, illustre la distribution méridionale de la vitesse azimutale. Qualitativement, la variation de la vitesse azimutale, dans les directions radiale et polaire; sont similaires aux cas précédents.

La figure 4.63, représente la distribution méridionale de la pression non dimensionnelle. La variation de la pression est qualitativement semblable à celles des cas précédents. On note clairement sur la figure 4.63, l'impact de l'écoulement radial sortant sur la sphère extérieure. En effet, la région à haute pression qui se trouve au niveau de l'équateur correspond à l'écoulement radial se trouvant à ce niveau. Deux autres régions, à haute pression, se trouvant de part et d'autre de l'équateur, correspondent à l'écoulement radial sortant entre le deuxième vortex et la cellule de circulation de chaque hémisphère.

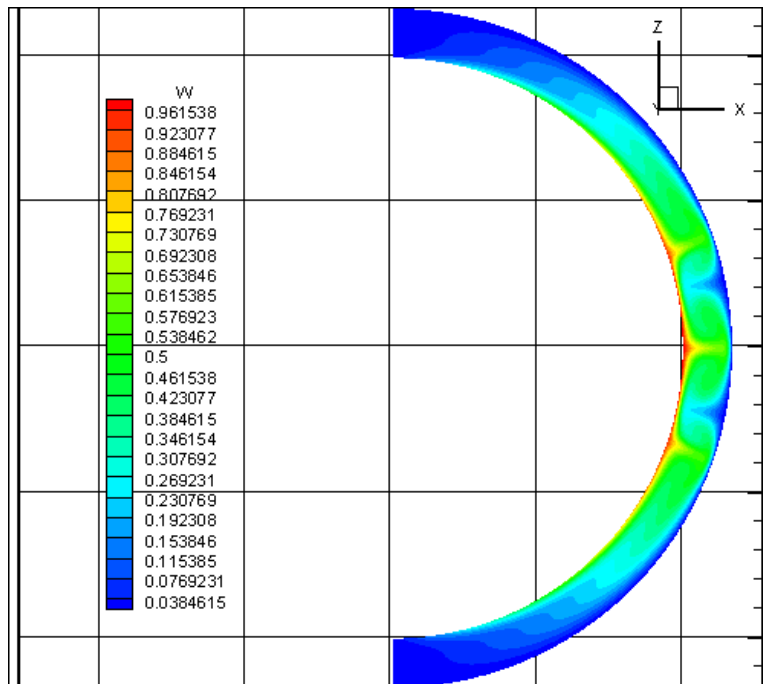


Figure 4.62 : Distribution méridionale de la vitesse azimutale.

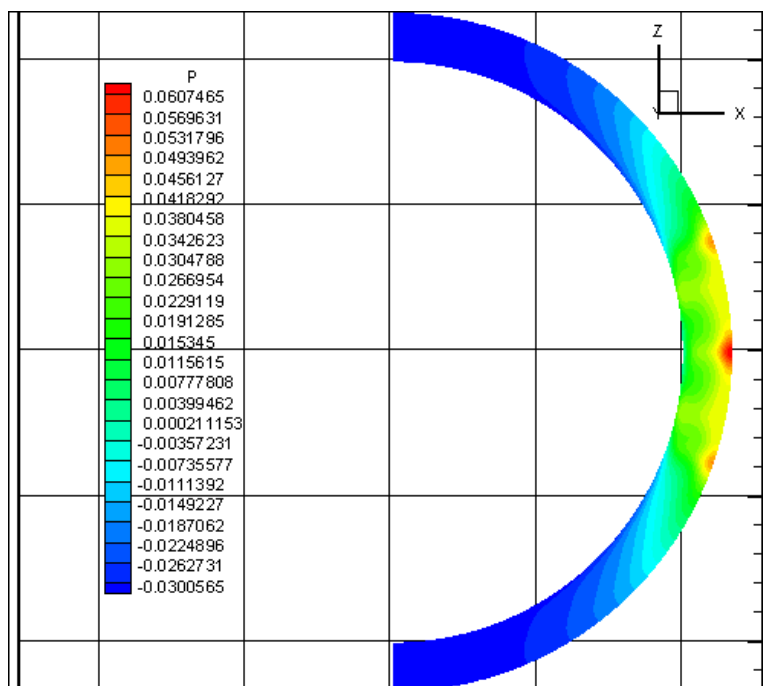


Figure 4.63 : Distribution méridionale de la pression.

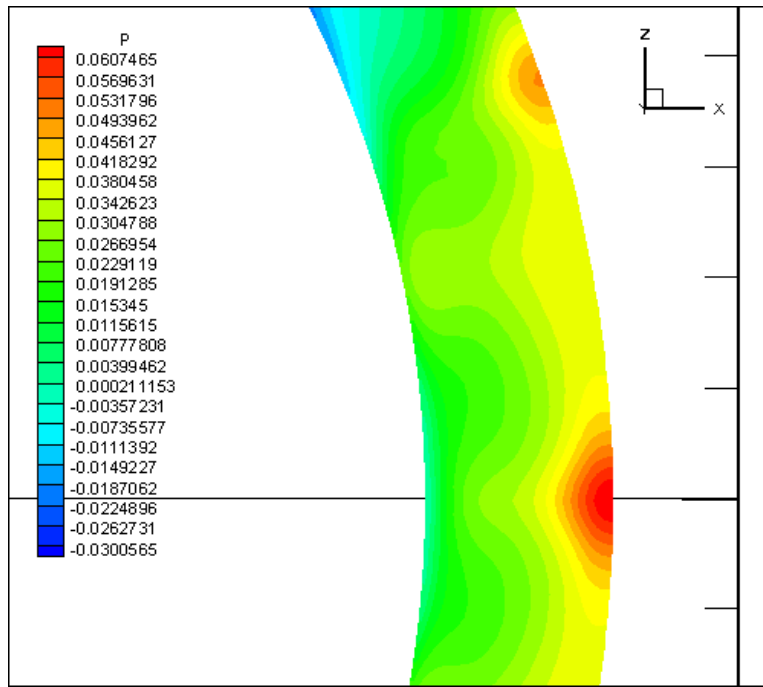


Figure 4.64 : Agrandissement de la distribution méridionale de la pression.

La figure 4.64, représente l'agrandissement de la distribution méridionale de la pression. On note que juste au dessus de l'équateur, au milieu de l'entrefer, les iso bares sont déformées, elles ont été déplacées vers la sphère intérieure. Ce déplacement résulte de l'action de l'écoulement radial entrant, qui se trouve entre les deux vortex de chaque hémisphère. Quant à la variation maximale de la pression pour ce cas $\Delta P_{MAX} = 9,8373.10^{-2}$. La figure 4.65 illustre la variation de ΔP_{MAX} en fonction du nombre de Reynolds.

On observe, que ΔP_{MAX} diminue quand le nombre de Reynolds augmente, jusqu'à $Re=2000$. Ensuite, quand le nombre de Reynolds augmente d'avantage, ΔP_{MAX} ne varie pas, elle devient constante jusqu'à $Re=3000$. Cependant il est facile de démontrer que pour un fluide donné et une sphère intérieure donnée, la variation maximale de la pression dimensionnelle est proportionnelle au produit du carré du nombre de Reynolds et de la variation maximale de la pression non dimensionnelle. Donc, la variation maximale de la pression dimensionnelle augmente avec le nombre de Reynolds.

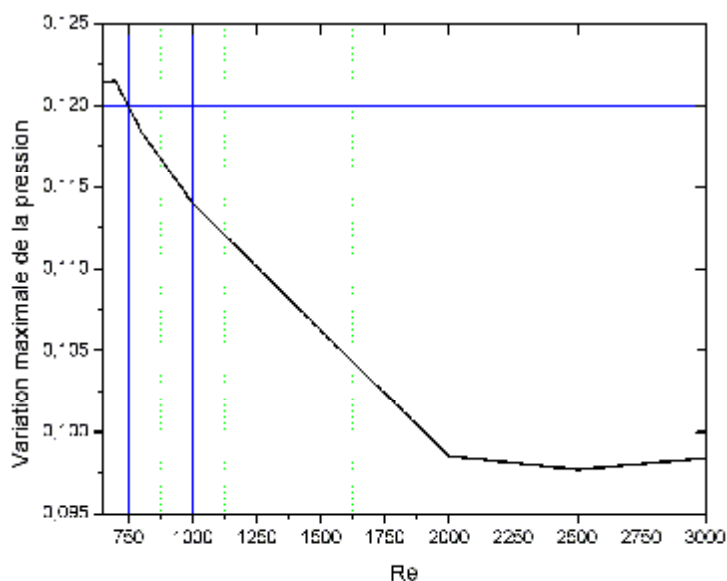


Figure 4.65 : Variation de la différence maximale de la pression adimensionnelle en fonction du nombre de Reynolds.

L'agrandissement de la distribution méridionale de la vorticité, est illustré sur la figure 4.66. Dans l'hémisphère nord, cette distribution est comme suit : en allant de l'équateur vers le pôle, une zone de vorticité négative, qui correspond au premier vortex. Une zone de vorticité positive, qui marque l'emplacement du deuxième vortex. Enfin, une zone de vorticité négative qui correspond à la cellule principale.

La vorticité azimutale maximale est égale à 16.8272. Cette valeur a augmenté en comparaison aux cas précédents. La figure 4.69, montre que la vorticité azimutale maximale augmente quand le nombre de Reynolds augmente. Ce résultat prévu est physiquement acceptable: l'augmentation du nombre de Reynolds est accomplie par l'accélération de la sphère intérieure qui entraîne une intensification de l'écoulement secondaire et de son aspect rotationnel. L'écoulement secondaire est plus rotationnel quand on augmente le nombre de Reynolds.

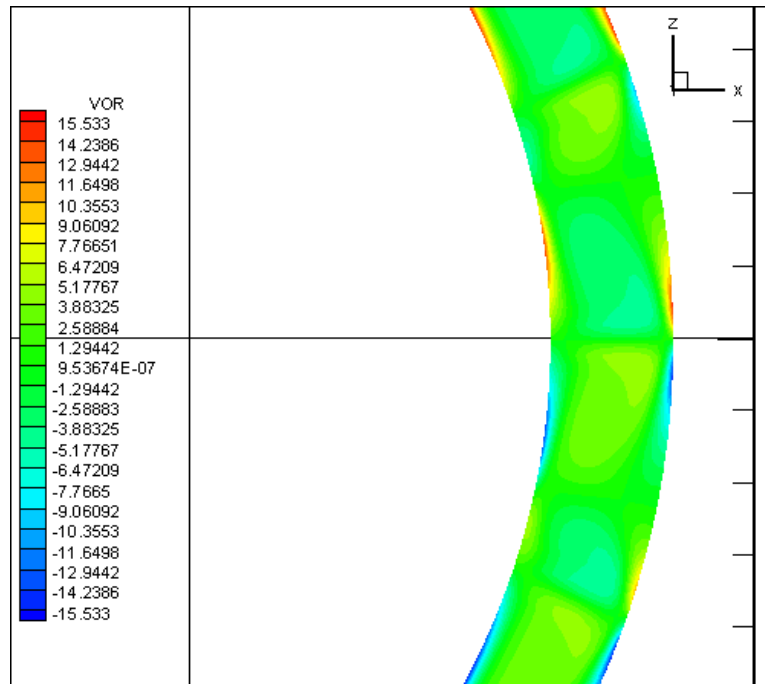


Figure 4.66 : Agrandissement de la distribution méridionale de la vorticité azimuthale.

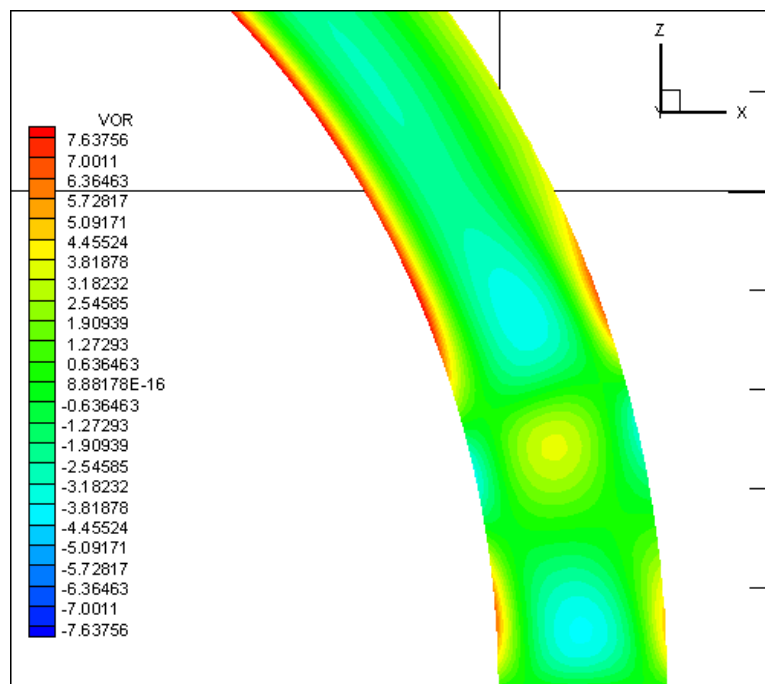


Figure 4.67 : Agrandissement de la distribution méridionale de la vorticité azimuthale, pour le cas de $Re=1000$.

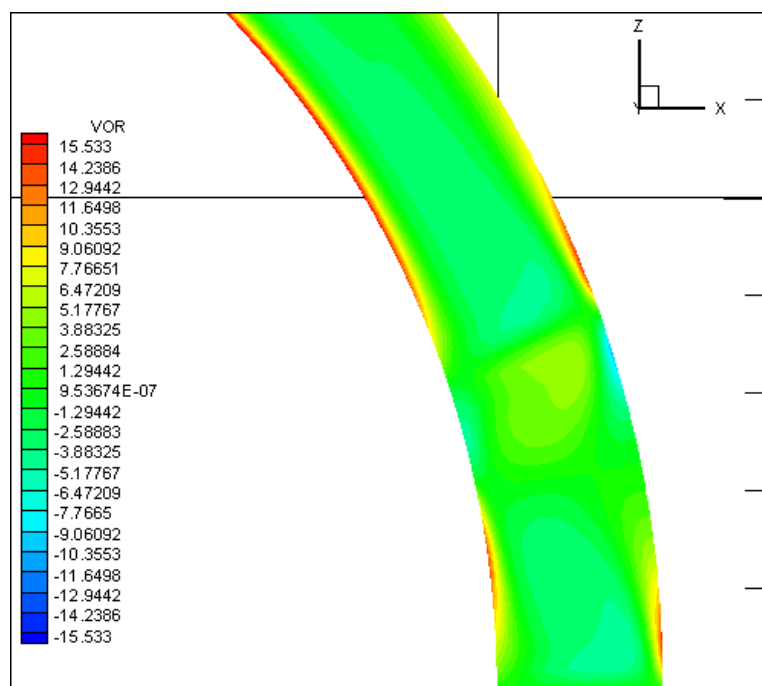


Figure 4.68 : Agrandissement de la distribution méridionale de la vorticité azimutale, pour le cas de $Re=3000$.

L'énergie cinétique (non dimensionnelle) moyenne de l'écoulement est $7,4360 \cdot 10^{-2}$, la figure 4.70 illustre la variation de l'énergie cinétique moyenne en fonction du nombre de Reynolds. L'énergie cinétique non dimensionnelle moyenne diminue, légèrement, quand le nombre de Reynolds augmente. Cependant il est facile de démontrer que pour un fluide donné et une sphère intérieure donnée, l'énergie cinétique moyenne dimensionnelle est proportionnelle au produit du carré du nombre de Reynolds et de l'énergie cinétique moyenne non dimensionnelle. Donc, l'énergie cinétique moyenne dimensionnelle augmente avec le nombre de Reynolds. Ce résultat est comme prévu et est physiquement acceptable.

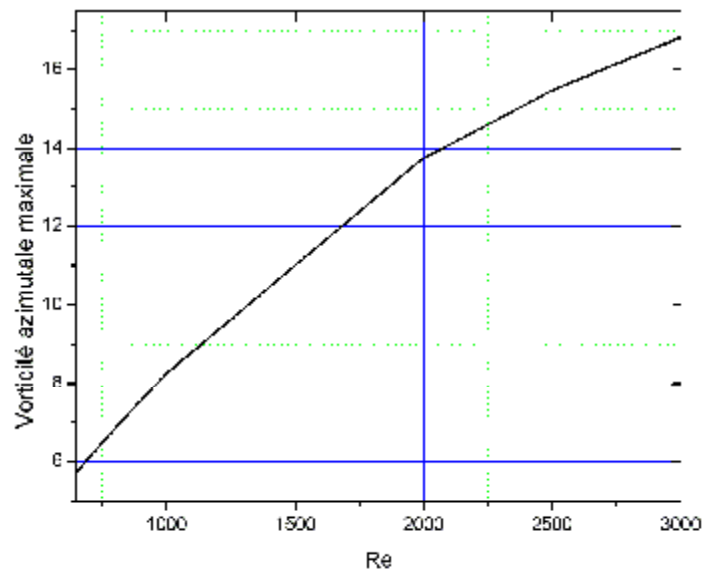


Figure 4.69 : Variation de la vorticité azimutale maximale en fonction du nombre de Reynolds.

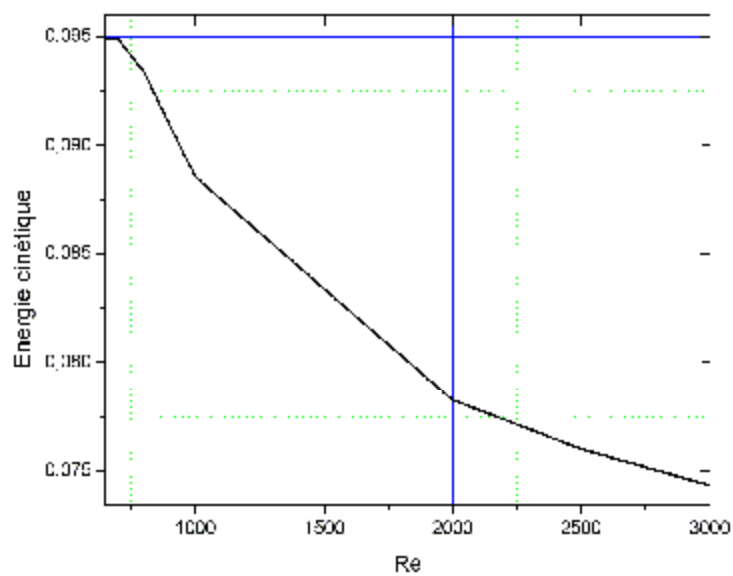


Figure 4.70 : Variation de l'énergie cinétique moyenne, non dimensionnelle, en fonction du nombre de Reynolds.

5. Conclusion et recommandations.

Dans ce mémoire on a étudié numériquement l'écoulement laminaire et visqueux d'un fluide newtonien entre deux sphères. La sphère intérieure est en rotation avec une vitesse angulaire constante Ω_1 , et la sphère extérieure est fixe. Le cas spécifique qu'on a considéré est celui avec un rapport d'aspect $b = (R_2 - R_1) / R_1 = 0.17$ et un nombre de Reynolds qui prend six valeurs appartenant à l'intervalle $[650, 3000]$. Le problème a été modélisé mathématiquement par les équations différentielles, aux dérivées partielles, de la conservation de masse et des trois quantités de mouvement.

La discrétisation des termes temporels dans les équations de Navier Stokes, est du second ordre. La discrétisation temporelle des termes convectifs et non linaires, est aussi du second ordre et suit le schéma d'Adam-Bashforth. Les termes diffusifs et de pression ont été évalués au temps $t + \Delta t$. Les dérivées spatiales ont été discrétisées en utilisant la méthode des différences centrées du second ordre.

La discrétisation des équations modélisantes a généré des systèmes d'équations algébriques dites équations de discrétisation. On a résolu séquentiellement ces systèmes d'équations de discrétisation en utilisant l'algorithme SIMPLER. Chaque système linéaire d'équations est résolu par la méthode itérative du balayage. La technique du balayage englobe l'utilisation de l'algorithme de Thomas (TDMA), dans la direction radiale et polaire, et l'utilisation de l'algorithme de Thomas cyclique (TDMAC) dans la direction azimutale.

Notre code de calcul a été testé en reproduisant deux résultats numériques obtenus dans l'étude numérique de **P.S. Marcus** et **L.S. Tuckerman** [6]. On a en effet obtenu l'écoulement 1-vortex, que les auteurs ont obtenu pour le cas de $Re=600$ et $b = 0.18$. On a aussi simulé la transition 0-1 vortex obtenu toujours dans l'étude numérique de **P.S. Marcus** et **L.S. Tuckerman** [6]. Notre code a aussi reproduit l'écoulement de Stokes pour $Re=1$ et $b = 0.17$. Après la validation numérique, on a donc choisi d'étudier le cas spécifique de $b = 0.17$ (qui appartient à la catégorie des entrefers moyens) et de faire varier le nombre de Reynolds pour qu'il prennent les valeurs : 650, 700, 800, 1000, 2000 et 3000. Pour chaque nombre de Reynolds

on a détaillé l'écoulement principal et secondaire obtenus, et décrit les distributions de la vitesse azimutale de la pression et de la vorticité. Pour permettre une comparaison entre les différents écoulements obtenus, pour chaque nombre de Reynolds, on a aussi calculé le moment angulaire appliqué par le fluide sur la sphère intérieure et le moment angulaire appliqué sur la sphère intérieure, ainsi que l'énergie cinétique moyenne.

Notre étude numérique a permis d'obtenir trois régimes d'écoulements différents. Ce sont les écoulements: écoulement 0-Vortex, écoulement 0-Vortex avec pincements et écoulement 2-Vortex, et ils sont répartis comme suit :

- Pour le cas de $Re=650$, l'écoulement obtenu est l'écoulement 0-vortex.
- Pour le cas de $Re=700$, l'écoulement obtenu est l'écoulement 0-vortex avec pincements.
- Pour les cas de $Re=800$, 1000 , 2000 et 3000 , l'écoulement obtenu est l'écoulement 2-vortex.

Les observations suivantes sont à faire, concernent les écoulements obtenus :

-Tous les écoulements qu'on a obtenus présentent une axisymétrie et une symétrie par rapport à l'équateur.

-Le nombre de Reynolds critique pour notre cas est supérieur à 700.

-Les pincements sont les précurseurs de l'apparition des vortex de Taylor, ces pincements se manifestent dans l'écoulement secondaire pour $Re=700$.

-L'augmentation du nombre de Reynolds provoque l'augmentation de la taille et de l'intensité des vortex. Elle provoque aussi une augmentation de la vorticité maximale et de la variation maximale de la pression. On note aussi une augmentation de la valeur du moment angulaire.

Donc, notre code numérique a permis de simuler numériquement trois régimes d'écoulements différents pour la géométrie sphérique et les paramètres spécifiques qu'on a choisi. Un plus à apporter à cette étude serait d'expliquer physiquement les phénomènes de transitions entre les différents régimes d'écoulement obtenus, ainsi qu'une étude de la bifurcation. Aussi, il serait intéressant d'étudier le cas où les deux sphères seraient en co-rotation ou en contra-rotation.

Comme perspectives, on peut considérer l'utilisation d'autres méthodes numériques, telles que les méthodes spectrales. Ainsi que la détermination du nombre de Reynolds critique (à partir duquel l'instabilité se manifeste) avec précision. Notre étude n'a concerné que le cas isotherme, il serait intéressant d'étendre cette étude aux cas où les deux sphères seraient sujet à un transfert de chaleur. La présence d'un champ magnétique pourrait aussi être considéré. L'écoulement de Couette sphérique qui a été l'objet de très nombreuses études numériques et

expérimentales, reste un sujet d'actualité, auquel plusieurs séminaires sont annuellement dédiés. Un compartiment dans la Station Spatiale Internationale, sera consacré à l'étude de la convection dans l'espace annulaire entre deux sphères sous l'influence d'un champ de force centrale. Cette expérimentation qui a aussi un côté numérique porte le nom de *GEOFLOW* [2].

Références

- [1] **Taylor, G. I.**, 1923, "Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders". *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **A223**, 289.
- [2] **Trakinov, V., Egbers C., and Hollerbach R.**, 2003, "The GEOFLOW-Experiment on ISS (Part II): Numerical Simulation". *Adv. Space Res.* Vol.32, No.2, pp.181-189.
- [3] **Hollerbach, R.**, 2000, "A spectral solution of the magneto-convection equations in spherical geometry" *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* 32, 773-797.
- [4] **Wimmer, M.**, 1976, "Experiments on a viscous fluid flow between concentric rotating spheres". *J. Fluid Mech.* 79, 317-335.
- [5] **Schrauf, G.**, 1986, "The first instability in spherical Taylor-Couette flow". *J. Fluid Mech.* 166, 287-303.
- [6] **Marcus, P.S., and Tuckerman, L.S.** 1987, "Simulation of flow between concentric rotating spheres. Part 1-steady states and Part 2-transitions". *J. Fluid Mech.* 185, 1-65.
- [7] **Manneville, P., and Tuckerman, L.S.**, 1987, "Phenomenological modeling of the first bifurcations of spherical Couette flow," *J. Physique.* 48, 1461-1469.
- [8] **Dumas, G.**, 1991, "Study of Spherical Couette Flow via 3-D Spectral Simulations: Large and Noarrow-Gap Flows and their Transitions". California Institute of Technology – Pasadena, California. In partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy.
- [9] **Junk M., and Egbers C.** Isothermal Spherical Couette flow
- [10] **Yang, R.-J., and Luo, W.-J.** 2004, "Flow bifurcation and Transition in a Gap Between Two-Rotating Spheres". *Journal of Mechanics*, Vol. 20, No.2, 95-105.
- [11] **Bonnet, J.P., and Alziary de Requefort T.**, 1976, "Ecoulement entre deux spheres concentriques en rotation". *J. Méc.* 15. 373-397.
- [12] **Yavorskaya, I.M., Belayaev, Yu.N., Monakhov, A.A, Astaf'eva, S.A., Scherbakov, N.D. Vvedenskaya,** 1980, "Stability, non-uniqueness and transition to turbulence in the flow between two rotating spheres". IUTAM-Symposium, Toronto, Canada.
- [13] **Wulf, P., Egbers, C., and Rath, H.J.** 1999, "Routes into chaos in wide gap spherical flow". *Phys. Fluids.* 11.1359-1372.
-

Références

- [14] **Schmidt, Jan-R., Egbers, C., and Rath Hans, J.** "Experiments on the isothermal flow in wide spherical gaps". 12th International Couette-Taylor Workshop, September 6-8, 2001, Evanston, IL USA.
- [15] **Junk, M., Hollerbach, R., and Egbers, C.** "Numerical investigation of the flow in wide spherical gaps". 12th International Couette-Taylor Workshop, September 6-8, 2001, Evanston, IL USA.
- [16] **Bartels, F.** 1982, "Taylor vortices between two concentric rotating spheres". *J. Fluid Mech.* 119, 1-25.
- [17] **Nakabayashi, K.** 1983, "Transition of Taylor-Görtler vortex flow in spherical Couette flow". *J. Fluid Mech.* 132, 209-230.
- [18] **Bühler, K.** 1990, "Symmetric and asymmetric Taylor vortex flow in spherical gaps". *Acta Mech.* 81, 3-38.
- [19] **Hollerbach, R.** 1998, "Time-dependent Taylor vortices in wide-gap spherical Couette flow". *Phys. Rev. Lett.* Vol 81, Number15. 3132-3135.
- [20] **Huré, J.M. et Pelat, D.,** 2002, "Méthodes Numériques: Eléments d'un premier parcours". DEA Astrophysique & Méthodes Associées, Ecole doctorale d'Ile-de-France – Université Paris 7 et 11, Observatoire de Paris
- [21] **Patankar, S.V.,** 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow". Mc-Graw Hill, New York, USA.
-