

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI – CONSTANTINE  
FACULTE DES SCIENCES  
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre : .....  
N° de série : .....

**Mémoire**  
Présenté Pour l'obtention du diplôme de  
**MAGISTER EN PHYSIQUE**  
Option : **ENERGETIQUE**

Thème :

**ECOULEMENT INCOMPRESSIBLE SUR UN OBJET SOLIDE  
SOUS LA FORME D'UNE ELLIPSE**

Par

**BOUBEKRI MAHMOUD**

Soutenu le :

Devant le jury :

<u>Président</u>	: L. BAHY	Prof	Univ.Mentouri Constantine
<u>Rapporteur</u>	: M. AFRID	Prof	Univ.Mentouri Constantine
<u>Examineurs</u>	: Z. NEMOUCHI	Prof	Univ.Mentouri Constantine
	A. DJEMEL	Prof	Univ.Mentouri Constantine
	T. BOUFENDI	M.C	Univ.Mentouri Constantine



## **Introduction générale**

Les structures d'écoulement incompressible autour des corps non profilés occupent une place importante dans la physique des fluides dues à leur importance pratique dans les applications aérodynamiques et hydrodynamiques tels que les ailes d'avion, les sous-marins et les missiles...etc. Dans la majorité des recherches effectuées, le cylindre à section circulaire a été le modèle de base des corps non profilés et est devenu la configuration conforme pour étudier de tels écoulements externes.

Quand un corps non profilé est placé dans un écoulement uniforme, dont la vitesse est tout à fait petite entraînant un nombre de Reynolds de l'ordre de quelques unités, il se produit un décollement dans la couche limite qui se développe sur sa paroi. Alors, les effets dissipatifs dus à la viscosité du fluide tendent à envahir l'écoulement. Ce mouvement se traduit par la formation des structures tourbillonnaires appelées : tourbillons ou vortex qui a été décrit et dessiné dès le **XV<sup>ème</sup>** siècle par le célèbre scientifique italien **Leonardo da Vinci** cité dans l'article de **Hartog [1]**. Lors de ce phénomène, le fluide semble quitter la paroi pour s'enrouler autour d'un axe qui constitue le coeur du tourbillon. Les filets fluides sont alors animés d'une rotation très rapide dont une des manifestations les plus dramatique est la tornade. Pour une valeur critique du nombre de Reynolds, l'écoulement cesse d'être stationnaire et la vitesse du fluide est dépendante du temps : les tourbillons se détachent périodiquement en aval de l'écoulement. Ils forment alors une rangée double de tourbillons, appelée allée de **Bénard-Von Karman**. Elle peut être observée jusqu'à de très grands nombres de Reynolds dans des écoulements océanographiques ou atmosphériques, derrière des îles ou des obstacles de grande taille (paquebots, sous-marins...). En 1878 **Strouhal [1]** édite une formule pour déterminer la fréquence de ce détachement de vortex, basé seulement sur les observations. En 1911 **Von Karman [1]** fait une analyse de stabilité des vortex et dérive le modèle géométrique. C'était la première recherche théorique sur le sujet dont le sillage de vortex porte son nom : le sillage de Von Karman. Dans le présent travail, on s'intéresse aux cylindres elliptiques qui sont des géométries plus générales, pouvant tendre vers la plaque ou le cylindre selon leurs allongements. Les paramètres géométriques tels que le rapport des axes et l'angle d'attaque peuvent considérablement influencer la structure du sillage.

# **Chapitre 1**

## **Etude bibliographique**

## 1. Etude bibliographique

Dans ce chapitre nous présentons une synthèse bibliographique effectuée dans le domaine des écoulements de fluide autour d'obstacles profilés. Il apparaît que les travaux entrepris sont très riches et variés et discernent des études expérimentales et des études théoriques de type analytiques et numériques.

### 1.1 Etudes théoriques

#### 1.1.1 Etudes analytiques

**H. Yano** et **A. Kieda** [6] présentent une méthode approximative pour résoudre les équations linéarisées d'Ossen pour l'écoulement stationnaire bidimensionnel d'un fluide visqueux incompressible sur un cylindre elliptique incliné à faible nombre de Reynolds. Deux valeurs de l'allongement sont considérées dans cette étude  $AR=10$  et  $2$ . Le nombre de Reynolds varie entre  $0.1$  et  $5$ . L'angle d'attaque est :  $\alpha = 0^\circ, 45^\circ$  et  $90^\circ$ . Ils montrent que les coefficients de traînée et de portance ont des valeurs maximum à  $\alpha = 90^\circ$  et  $\alpha = 45^\circ$  respectivement.

**A. Umemura et al.** [7] utilisent la méthode des expansions asymptotiques assorties pour fournir une description détaillée du champ d'écoulement près d'un cylindre elliptique placé dans un écoulement uniforme à faible nombre de Reynolds (écoulement de Stokes). Les paramètres fixés dans cette étude sont l'angle d'attaque  $\alpha = 90^\circ$  et le nombre de Reynolds  $Re=0.1$  alors que l'excentricité de l'ellipse  $\varepsilon$  est variée. Ils ont constaté aussi que la distribution de pression est conforme à celle d'un cylindre circulaire pour  $\varepsilon < 0.7071$  et que pour  $\varepsilon > 0.7071$ , la pression maximum était indépendante du point de stagnation ( $h = 270^\circ$ ).

**S. J. D. D'alessio** et **F. W. Chapman** [17] étudiés analytiquement et numériquement l'écoulement bidimensionnel instable d'un fluide incompressible visqueux sur un cylindre elliptique incliné qui est uniformément accéléré à partir du repos. L'allongement de cylindre est  $2$  et l'angle d'inclinaison égale à  $45^\circ$ . Les résultats sont présentés pour les cas de  $Re=100$  et  $Re=1000$ . Deux méthodes de calcul sont employées dans cette étude. La première est une méthode analytique qui prend la forme d'une série d'expansion où une expansion est effectuée

dans les puissances du temps  $t$ , et de paramètre  $I = \sqrt{\frac{8t}{\text{Re}}}$ . La deuxième est numérique basée sur la méthode de la différence finie et la méthode spectrale pour résoudre les équations de Navier-Stokes. La comparaison entre les résultats des deux méthodes concernant les coefficients de traînée et de portance et le coefficient de pression démontre que pour des faibles valeurs du temps et de grands nombres de Reynolds les deux méthodes de résolution sont en bon accord. Quand le temps progresse l'accord entre les deux méthodes s'affaiblit.

**W. A. Khan et al. [19]** étudient le transfert thermique et l'écoulement incompressible sur un cylindre elliptique. La méthode intégrale de Von Karman-Pohlhausen est employée pour résoudre l'équation de la quantité de mouvement et l'équation d'énergie. Le nombre de Reynolds varie entre  $10^2$  et  $10^5$ . L'allongement d'ellipse est  $AR=2, 3, \text{ et } 4$ . Ils ont constaté que le coefficient de traînée est inférieur à celui obtenu pour des cylindres circulaires alors que le coefficient de transfert thermique moyen est plus élevé pour les cylindres elliptiques que pour les cylindres circulaires.

### 1.1.2 Etudes numériques

**H. J. Lugt [8]** étudie la rotation des cylindres elliptiques dans un écoulement visqueux et incompressible. Le problème est résolu numériquement par la méthode des différences finies. L'excentricité de l'ellipse est  $\varepsilon=0.1$  et  $0.6$ . Le paramètre de rotation du cylindre est définie par :

$$S = \frac{\bar{\Omega} d}{2U_\infty}, \text{ où } \bar{\Omega} \text{ est la vitesse angulaire moyenne et } d \text{ la distance focale. Dans cette étude les}$$

valeurs utilisés pour  $S$  sont  $1, 0.5, 0.25, 0.167$  et les valeurs de nombre de Reynolds sont :  $169, 200$  et  $400$ . Cette étude montre que le comportement du vortex au niveau du bord de fuite du cylindre est dépendant de la valeur de rotation. Le détachement prématuré du vortex (pour  $S$  petit) et le détachement retardé du vortex (pour  $S$  grand) ont comme conséquence un écoulement asymétrique après le bord de fuite.

**R. Mittal et S. Balachandar [10]** présentent une étude qui simule l'écoulement incompressible sur des cylindres elliptiques tridimensionnelle et bidimensionnelle en se basant sur la méthode spectrale. Le rapport des axes  $AR=2$ , le nombre de Reynolds  $Re=525$  et les valeurs de l'angle d'attaque dans cette étude sont  $a=0^\circ$  et  $a=45^\circ$ . Le coefficient de traînée calculé par le biais d'une simulation tridimensionnelle rivalise mieux avec la valeur expérimentale que celui qui

### Symboles Grecs

$e, h$	Coordonnées elliptiques
$r$	Masse volumique, $\frac{Kg}{m^3}$
$j$	Potentiel de vitesse
$n$	Viscosité cinématique, $\frac{m^2}{s}$
$l, m$	Fonctions de condition aux limites
$\Gamma$	Aspect des axes = $\frac{B}{A}$
$a$	Angle d'attaque

### Indices

$c$	Relatif à la position de la face d'un volume fini typique
$p$	Fait référence au nœud P d'un volume fini typique
$n, s, e, w$	Fait référence aux faces d'un volume fini typique respectivement nord, sud, est, ouest
$N, S, E, W$	Fait référence aux nœuds entourant un volume fini typique respectivement nord, sud, est, ouest

### Exposants

$*$	Variable adimensionnelle
$t$	Désigne l'instant $t$
$t+\Delta t$	Désigne l'instant $t+\Delta t$
$t-\Delta t$	Désigne l'instant $t-\Delta t$

- Pour  $Re = 175$  et  $Re = 200$  : le modèle de détachement périodique de vortex est changé considérablement. Le régime symétrique de sillage diminue avec une production d'un modèle de détachement périodique secondaire de vortex.
- pour  $Re = 250$  : le détachement périodique secondaire ne se produit plus dans les paires des vortex.

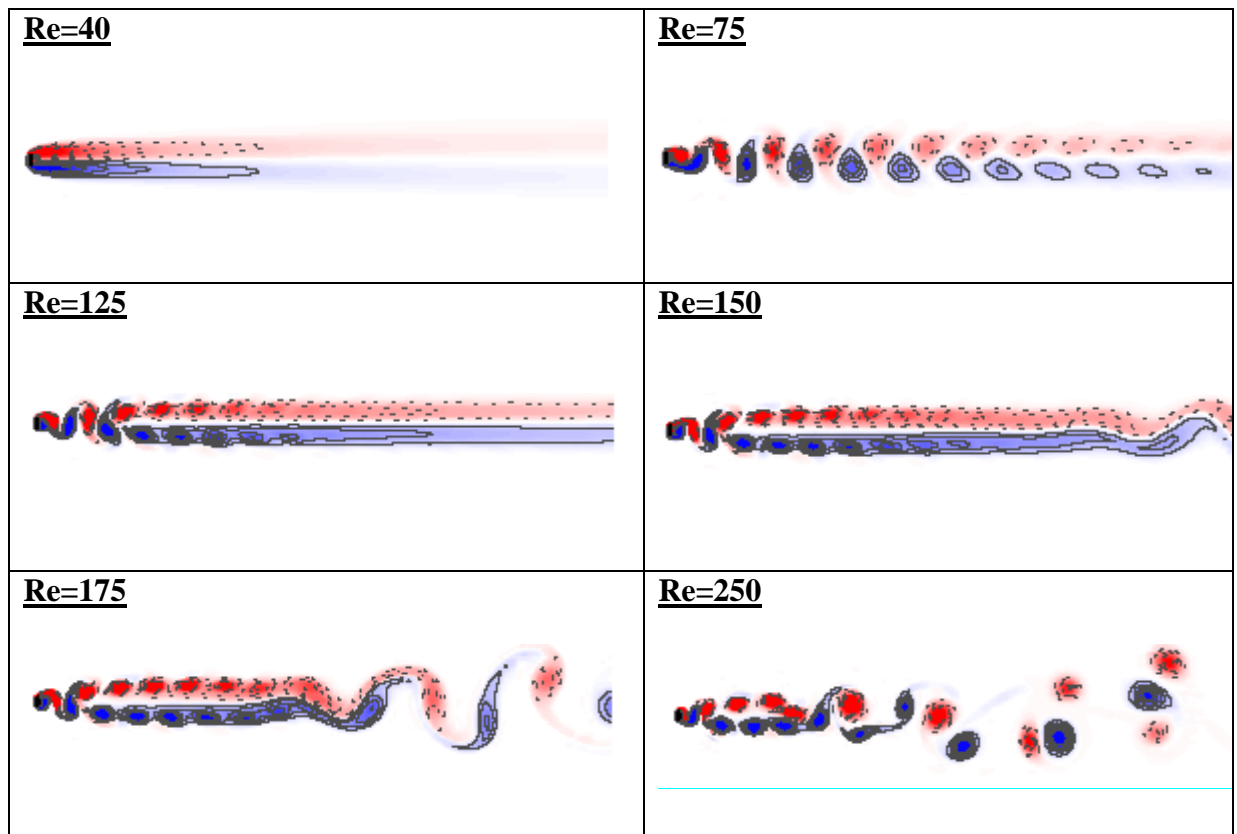


Figure 1.1 : Les différents régimes de l'écoulement derrière un cylindre elliptique [12].

S. J. D. D'Allesio et S. Kocabiyik [13] ont étudié numériquement l'écoulement d'un fluide incompressible visqueux autour d'un cylindre elliptique incliné. Le cylindre effectue des oscillations transversales. L'étude est basée sur la méthode des différences finies et la méthode spectrale pour résoudre les équations de Navier Stokes. Le nombre de Reynolds et le rapport des axes sont fixés respectivement à  $Re = 10^3$  et  $AR=2$ . Deux angles d'attaque ont été considérés dans cette étude :  $\alpha = 45^\circ$  et  $\alpha = 90^\circ$ . Ils examinent l'effet de l'augmentation du rapport de



# **Références**

vitesse sur la structure du sillage aussi bien que les forces hydrodynamiques agissant sur le cylindre. La dynamique de vortex derrière le cylindre est affectée par l'accélération du cylindre. Le coefficient de traînée  $C_D$  et le coefficient de portance  $C_L$  varient avec la fréquence du cylindre dans tous les cas considéré dans cette étude.

L'utilisation du spectre de fréquence pour analyser les structures de sillage est une meilleure méthode pour faire apparaître les différents régimes d'écoulement par rapport à celle obtenue par la méthode de visualisation d'écoulement. Elle permet une définition plus précise de ces régimes.

L'étude des régimes d'écoulement incompressible bidimensionnelle sur un cylindre elliptique verticale est numériquement considérée par **S. A. Johnson *et al.*** [16, 18]. Les deux paramètres variables dans cette recherche sont l'allongement AR et le nombre de Reynolds Re. Les diverses simulations ont été effectuées pour AR compris entre 1.00 et 100 pour le nombre de Reynolds entre 75 et 175. L'analyse du spectre de fréquence de la vitesse horizontale par la transformation de Fourier rapide **FFT** montre la présence des fréquences secondaires et tertiaires dans la région éloignée du sillage. Les résultats prouvent que lorsque le nombre de Reynolds est augmenté et/ou l'allongement est diminué les plus basses fréquences situées dans la région éloignée du sillage deviennent plus dominantes. Ils définissent cinq structures d'écoulement qui ont des limites claires selon le spectre de fréquence le long de ligne centrale du sillage :

- § La non fréquence ( $f_0$ ).
- § La fréquence primaire ( $f_1$ ).
- § La fréquence secondaire sans l'interaction ( $f_{2ni}$ ).
- § La fréquence secondaire ( $f_2$ ).
- § Régimes de basse fréquence ( $f_l$ ).

Le régime  $f_0$  n'est pas discuté dans cet article. Le régime  $f_1$  se compose du modèle de détachement périodique de Von Karman. Dans le régime  $f_{2ni}$  un détachement périodique transitoire se présente loin du sillage. Le régime  $f_2$  est caractérisé par le détachement périodique secondaire. Le régime  $f_l$  de basse fréquence est défini par la présence d'une structure de basse fréquence ( $f < 0.03$  dans l'analyse de spectre de fréquence). Pour AR= 4 les fréquences changent de régime  $f_1$  en régime  $f_l$  avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Pour Re=75, seulement une fréquence est présente, cette fréquence est la fréquence primaire du détachement de vortex de Von Karman, qui s'est délabré à  $x = 40$  ndu (unité non dimensionnelle). Pour Re = 100, la fréquence secondaire est présente loin du sillage. Pour Re = 125 l'amplitude de la fréquence

secondaire est plus grande. Quand le nombre de Reynolds est augmenté à 150, la fréquence dominante loin du sillage est une fréquence harmonique de basse fréquence et il y a une plus large bande de fréquence loin de la région de sillage, indiquant qu'aucun modèle régulier de détachement n'est présent. Pour  $Re = 175$ , trois fréquences dominantes sont présentes : entre  $x = 0$  et  $x = 12$ , la fréquence primaire est la fréquence la plus dominante due au détachement de vortex. Au dessus de  $x = 12$ , les vortex s'effondrent l'un sur l'autre dû à l'influence de la fréquence secondaire. La fréquence tertiaire devient dominante au dessus de  $x = 70$ . Toutes les fréquences secondaires et les fréquences tertiaires sont des fréquences harmoniques.

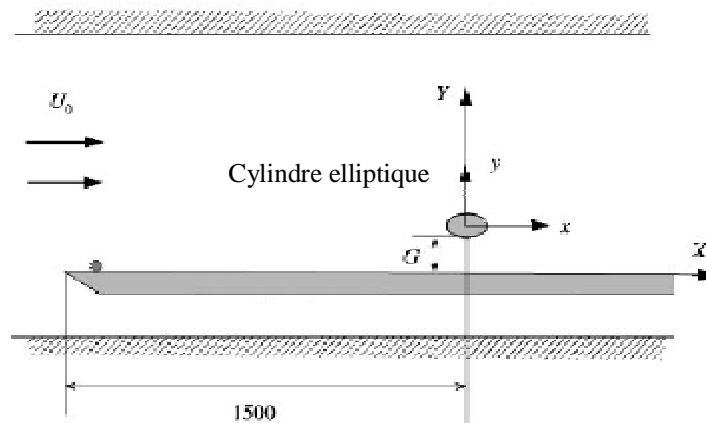
## 1.2 Etudes expérimentales

**G. B. Schubauer [2,3]** fait des expériences pour déterminer la distribution de la vitesse dans la couche limite laminaire sur la surface d'un cylindre elliptique avec le rapport des axes égale à 3. Il a constaté que la séparation de la couche limite sur la surface du cylindre dépend presque complètement de la distribution de vitesse dans la région de l'écoulement potentiel en dehors de la couche limite. Il a obtenu un bon accord avec la méthode approximative, développée par Pohlhausen. La même méthode approximative a été employée par **H. Schlichting [4]** et **K. Schröder [5]** pour calculer des paramètres de couche limite pour les cylindres elliptiques de rapports d'axe différents.

**Ota et al. [9]** ont étudié expérimentalement l'écoulement de fluide et le transfert de chaleur à partir d'un cylindre elliptique avec les rapports d'axes 2 et 3. Ils ont trouvé que le coefficient de transfert thermique est plus élevé que celui obtenu pour les cylindres circulaires avec la même circonférence et les coefficients de traînée sont très inférieurs que ceux obtenus par les cylindres circulaires.

Une étude expérimentale est faite par **J. H. Choi** et **S. J. Lee [11]** pour déterminer les caractéristiques d'écoulement incompressible autour d'un cylindre elliptique. L'expérience a été exécutée dans un tunnel d'air (figure 1.2). Un cylindre elliptique ayant un rapport d'axe  $AR=2$ , placé près d'une plaque plane a été enfoncé dans une couche limite turbulente dont l'épaisseur est plus grande que les dimensions du cylindre. Pour la comparaison, la même expérience a été effectuée pour un cylindre circulaire ayant la même taille verticale. Le nombre de Reynolds basé sur la taille de la section transversale de cylindre était 14000. Le détachement de vortex se produit dans le sillage derrière le cylindre elliptique quand le rapport d'espace  $\frac{G}{B}$  ( $G$  représente

la distance entre la base du cylindre et la plaque, B étant le petit axe de cylindre) est plus grand que la valeur critique : 0.4. Le rapport critique d'espace est plus grand que celui d'un cylindre circulaire ayant la même taille verticale. Avec le rapport d'espace décroissant la fréquence de détachement du vortex diminue abruptement pour le cas du cylindre elliptique. La déviation dans la distribution de pression sur le cylindre elliptique en ce qui concerne le rapport d'espace est beaucoup plus petite que celle du cylindre circulaire. Cette tendance est plus dominante sur l'extrados du cylindre que sur l'intrados. Le coefficient de traînée du cylindre elliptique est environ la moitié de celui du cylindre circulaire pour tous les rapports d'espace examinés dans cette étude.



**Figure 1.2 : Schéma de l'expérience [11].**

**T. L. Chng *et al.* [14]** ont fait une étude expérimentale pour déterminer les différents régimes d'écoulement derrière une cylindre elliptique de rapport des axes  $AR=3.25$ . La technique de vélocimétrie d'image (**PIV**) est employée dans cette étude. Le cylindre effectue un mouvement sinusoïdal avec différentes valeurs de l'amplitude variant entre  $q_0 = 20^\circ$  jusqu'à  $60^\circ$ . La fréquence réduite  $k$  des oscillations du cylindre est définie par la formule :  $k = \frac{f c}{2U_\infty}$  où  $f$  est la

fréquence des oscillations,  $c$  la distance focale et  $U_\infty$  la vitesse uniforme de l'écoulement. Le nombre de Reynolds est fixé à  $Re=1000$ . Les résultats prouvent que le rapport de la vitesse maximum du cylindre elliptique à celui de la vitesse uniforme est le paramètre principal qui régit l'écoulement. Quand ce rapport est petit, comme dans le cas  $k = 0.1$ , l'écoulement montre des caractéristiques conformes à un écoulement stationnaire à 0-vortex autour d'un profil. Quand ce

rapport est grand  $k = 0.5$ , l'écoulement est caractérisé par la formation d'une rangée de vortex de Von Karman.

Dans un autre travail **J. H. Choi** et **S. J. Lee** [15] ont effectué la même expérience présentée antérieurement [11] mais avec des angles d'attaque différents. Les angles d'attaque considérés dans cette étude pour étudier l'interaction entre la couche limite turbulente et le sillage de cylindre sont :  $\alpha = -5^\circ$  et  $0^\circ, 5^\circ$ . Lorsque l'angle d'attaque change, la fréquence de détachement des vortex diminue graduellement et la pression maximale sur la surface de cylindre se déplace vers le bord de fuite. Aux angles d'attaque positifs, la pression minimum sur la plaque se déplace en aval légèrement, tandis qu'elle se déplace en amont pour des angles d'attaque négatifs.

### 1.3 Conclusion et objectif de notre travail

L'étude bibliographique montre que beaucoup d'auteurs se sont intéressés à l'étude théorique et expérimentale de l'écoulement incompressible visqueux sur une ellipse. Plusieurs régimes d'écoulement selon l'allongement géométrique, le nombre de Reynolds et les conditions aux limites ont été analysés. Dans le présent travail, on étudie numériquement l'écoulement incompressible et bidimensionnel sur un profil elliptique. L'écoulement sur l'ellipse dépend du rapport d'aspect géométrique de l'ellipse et du nombre de Reynolds. Si on fixe le rapport d'aspect, la variation du nombre de Reynolds (à partir d'une faible valeur) entraîne plusieurs régimes de l'écoulement. Dans cette étude on s'intéresse à la recherche des différents régimes de l'écoulement en fonction du paramètre de contrôle qui sera le nombre de Reynolds. Le rapport des axes est fixé à  $AR=3.5$  et le nombre de Reynolds varie entre :  $10 \leq Re \leq 280$ .

Dans le premier chapitre, on présente une synthèse des travaux scientifiques concernant l'écoulement sur des objets solides à section elliptique qui fait ressortir l'importance scientifique et industrielle du sujet. En outre, on pourra à l'issue de cette recherche donner l'orientation à prendre dans le développement de cette étude et de pouvoir situer notre contribution.

Le second chapitre contient une description du système et sa modélisation mathématique. Il s'agit donc de l'établissement des équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement écrites sous forme adimensionnelle dans un repère de coordonnées elliptiques. Ces équations seront complétées avec les conditions initiales et aux limites appropriées au problème.

La résolution par voie numérique de ce système d'équations fera l'objet du troisième chapitre. On commencera par présenter les aspects et les détails du maillage du domaine physique. Ensuite, on détaillera la discrétisation de l'ensemble des équations de conservation et des conditions aux limites par la méthode des volumes finis. Cette discrétisation sera en second ordre dans l'espace et dans le temps.

La partie relative aux résultats de cette étude constitue le quatrième chapitre. Une comparaison avec les résultats numériques obtenus par **S.A.Johnson *et al.* [12]** sera discutée. Dans cette partie, On présente, en premier lieu, la structure de l'écoulement non visqueux pour la validation du code de calcul puis on représenté Les résultats de notre étude concernent la structure de divers régimes de l'écoulement visqueux pour le cas spécifique  $AR=3.5$  et un domaine de variation du nombre de Reynolds compris entre 10 et 280 ( $10 \leq Re \leq 280$ ). On fera apparaître le champ de pression, les variations temporelles de vitesse et les variations de coefficient de pression et le coefficient de frottement local.

Enfin une conclusion générale sur ce travail sera présentée au cinquième chapitre.

# **Chapitre 2**

## **Modélisation mathématique**

## 2. Modélisation mathématique

### 2.1 Géométrie du système

On considère un écoulement bidimensionnel en régime laminaire d'un fluide newtonien incompressible autour d'un corps solide de forme elliptique. La figure 2.1 représente la géométrie du système étudié. L'ellipse est mise à un angle d'attaque nulle ( $\alpha=0$ ) par rapport à l'écoulement uniforme. Ce problème sera modélisé par les équations différentielles aux dérivées partielles de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Bien qu'il soit possible d'utiliser les équations modélisantes dans un système de coordonnées cartésiennes  $(x,y)$ , nous avons choisi les coordonnées elliptiques  $(\varepsilon,\eta)$  qui semblent, naturellement, les mieux adaptées à la géométrie considérée. La taille et la forme du domaine elliptique sont fixées par les valeurs de  $e$  des ellipses intérieure et extérieure ( $e_i = 0.2939$  pour l'ellipse intérieure et  $e_e = 3$  pour l'ellipse extérieure) alors que la coordonnée  $h$  varie entre 0 et  $2p$ .

### 2.2 Les coordonnées elliptiques

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées elliptiques s'effectue à l'aide des relations suivantes :

$$\begin{aligned} X &= a \cosh(e) \cos(h) \\ Y &= a \sinh(e) \sin(h) \end{aligned} \quad (2-1)$$

L'angle  $\eta$  est mesuré à partir de l'axe horizontal de l'ellipse dans le sens anti-horaire et  $a$  définit la distance focale.

Les facteurs d'échelle (appelés aussi les coefficients métriques) sont  $h_1$  et  $h_2$  :

$$\begin{aligned} h_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial e}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial e}\right)^2} = a\sqrt{\sinh^2(e) + \sin^2(h)} \\ h_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial h}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial h}\right)^2} = a\sqrt{\sinh^2(e) + \sin^2(h)} \end{aligned} \quad (2-2)$$

Les dérivées partielles des facteurs d'échelle  $h_1$  et  $h_2$  par rapport à  $e$  et  $h$  sont :



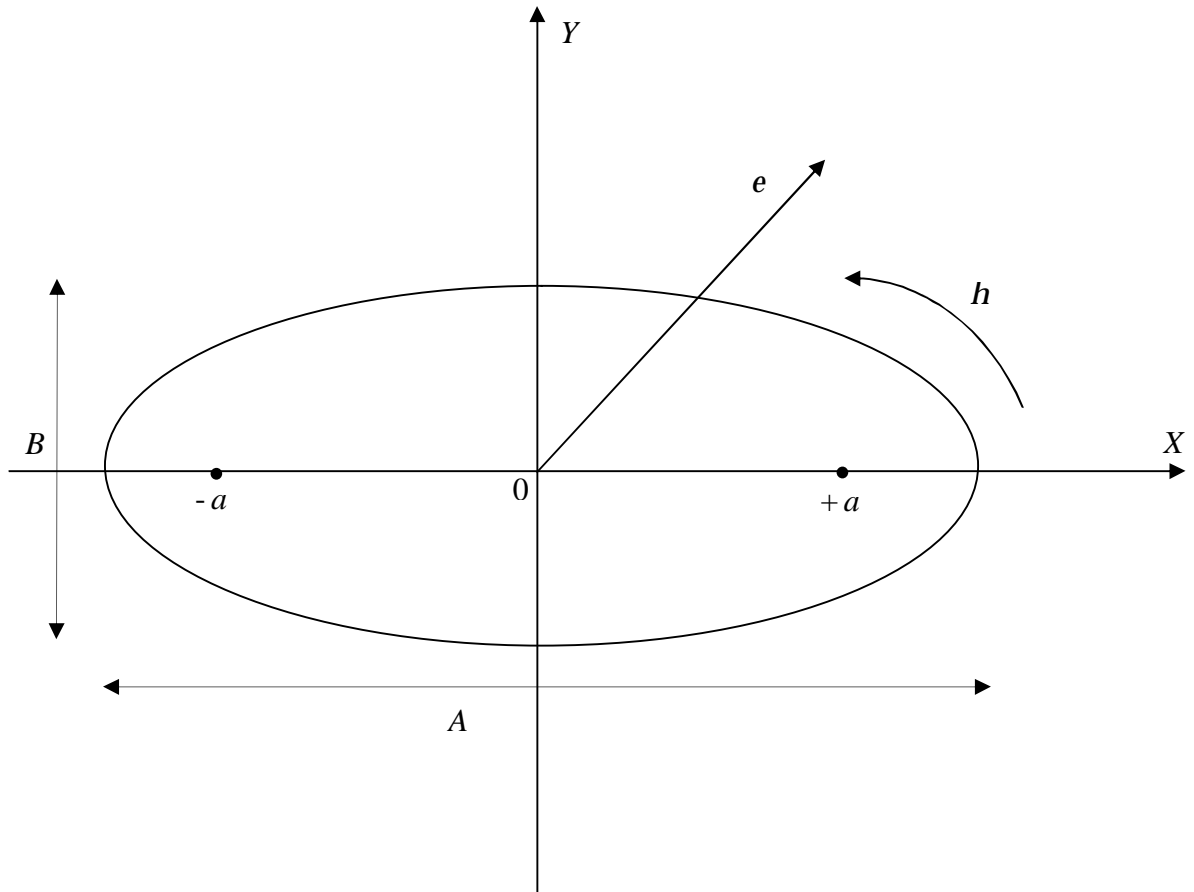


Figure 2-1 : Schéma du système

$$\frac{\partial h_1}{\partial e} = \frac{\partial h_2}{\partial e} = \frac{\sinh(e) \cosh(e)}{\sqrt{\sinh^2(e) + \sin^2(h)}}$$

(2-3)

$$\frac{\partial h_1}{\partial h} = \frac{\partial h_2}{\partial h} = \frac{\sin(h) \cos(h)}{\sqrt{\sinh^2(e) + \sin^2(h)}}$$

Le déterminant de Jacobien de la transformation est :

$$|J(e, h)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial e} & \frac{\partial X}{\partial h} \\ \frac{\partial Y}{\partial e} & \frac{\partial Y}{\partial h} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \sinh(e) \cos(h) & -a \cosh(e) \sin(h) \\ a \cos(e) \sin(h) & a \sinh(e) \cos(h) \end{vmatrix} = a^2 (\sinh^2(e) + \sin^2(h))$$

$$|J(e, h)| = h_1 h_2 \quad (2-4)$$

Un élément infinitésimal de surface elliptique  $dX dY$  serait donné par :

$$dX dY = |J(e, h)| de dh \quad (2-5)$$

$$dX dY = h_1 h_2 de dh$$

Les relations entre les vitesses cartésiennes et les vitesses elliptiques sont :

$$U = \frac{1}{\sqrt{h_1 h_2}} [a \sinh(e) \cos(h) V_e - a \cosh(e) \sin(h) V_h] \quad (2-6)$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{h_1 h_2}} [a \cosh(e) \sin(h) V_e + a \sinh(e) \cos(h) V_h]$$

Le rapport des axes :

$$AR = \frac{A}{B} = \frac{1}{\tanh(e_i)} \quad (2-7)$$

## 2. 3 Le modèle mathématique

### 2. 3.1 Les hypothèses de travail

Les hypothèses simplificatrices appliquées dans notre étude sont les suivantes :

- le fluide est incompressible
- le régime est laminaire
- l'écoulement est bidimensionnel
- les propriétés physiques sont supposées constantes  $(r, m)$

### 2. 3.2 Equations de conservation

L'écoulement autour l'ellipse est gouverné par les équations de continuité et de conservation de la quantité de mouvement qui s'expriment de la forme suivante :

A  $t^* = 0$  , on a :

$$V_e = V_h = P = 0 \quad (2-8)$$

A  $t^* \neq 0$  , on a :

# **Introduction générale**

**Ø Equation de continuité**

$$\frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial e} (h_2 V_e) + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial h} (h_1 V_h) = 0 \quad (2-9)$$

**Ø Equation de quantité de mouvement suivant  $\varepsilon$  :**

$$\begin{aligned} r \frac{\partial V_e}{\partial t} + \frac{r}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial e} (h_2 V_e V_e) + \frac{r}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial h} (h_1 V_h V_e) + r \frac{V_e V_h}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial h} - r \frac{V_h^2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial e} = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial P}{\partial e} + \\ \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial h} \left[ m \frac{\partial V_e}{\partial h} \right] + \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial e} \left[ m \frac{\partial V_e}{\partial e} \right] - \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial h} \left[ m \frac{V_e}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right] + \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial e} \left[ m \frac{V_h}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right] + \\ \frac{m}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h}{h_2} \right) + \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e}{h_1} \right) \right] \frac{\partial h_1}{\partial h} + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial h} \left[ m h_1 \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h}{h_2} \right) \right] - \frac{2m}{h_1 h_2} \left[ \frac{1}{h_2} \frac{\partial V_h}{\partial h} + \frac{V_e}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial e} \right] \frac{\partial h_2}{\partial e} \end{aligned} \quad (2-10)$$

**Ø Equation de quantité de mouvement suivant  $\eta$  :**

$$\begin{aligned} r \frac{\partial V_h}{\partial t} + \frac{r}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_2 V_e V_h)}{\partial e} + \frac{r}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_1 V_h V_h)}{\partial h} - \frac{r}{h_1 h_2} V_e^2 \frac{\partial h_1}{\partial h} + \frac{r}{h_1 h_2} V_h V_e \frac{\partial h_2}{\partial e} = -\frac{1}{h_2} \frac{\partial P}{\partial h} + \\ \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial e} \left[ m \frac{\partial V_h}{\partial e} \right] + \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial h} \left[ m \frac{V_e}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial e} \right] - \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial e} \left[ m \frac{V_h}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial e} \right] + \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial e} \left[ m \frac{\partial V_h}{\partial e} \right] + \\ \frac{m}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h}{h_2} \right) + \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e}{h_1} \right) \right] \frac{\partial h_2}{\partial e} + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial e} \left[ m h_2 \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e}{h_1} \right) \right] - \frac{2m}{h_1 h_2} \left[ \frac{1}{h_1} \frac{\partial V_e}{\partial e} + \frac{V_h}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right] \frac{\partial h_1}{\partial h} \end{aligned} \quad (2-11)$$

**2. 3.3 Conditions aux limites**

Dans le présent travail on considère deux types d'écoulement : l'écoulement non visqueux qui est effectuée la validation numérique de nos résultats et l'écoulement visqueux qui est le but de notre étude.

**▼ L'écoulement non visqueux :**

Dans ce cas tous les termes qui sont multipliés par  $\frac{1}{\text{Re}}$  dans les équations modélisantes sont supprimés.

Suivant  $h$  on a la condition de périodicité :

$$V_e(e, 0) = V_e(e, 2p) \quad (2-12)$$

$$V_h(e, 0) = V_h(e, 2p)$$

$$\text{A } e = e_i, V_e = \frac{\partial V_h}{\partial e} = 0 \quad (2-13)$$

$$\text{A } e = e_e,$$

On utilise le potentiel complexe  $j$  de l'écoulement potentiel autour une ellipse pour obtenir les composantes de la vitesse [20] :

$$j = -a U_\infty \frac{m(e)}{I(e_i)} \cosh(e) \cos(h) \quad (2-14)$$

Avec :

$$I(e) = \frac{\cosh(e)}{\sinh^2(e)} + \ln\left(\tanh\left(\frac{e}{2}\right)\right) \quad (2-15)$$

$$m(e) = -\frac{1}{\cosh(e)} \left[ 1 + \cosh(e) \cdot \ln\left(\tanh\left(\frac{e}{2}\right)\right) \right] \quad (2-16)$$

Et :

$$\frac{d}{de} (m \cosh(e)) = -I \sinh(e) \quad (2-17)$$

Les composantes de la vitesse se calculent à partir de  $j$  par les formules :

$$V_e = \frac{1}{h_1} \frac{\partial j}{\partial e}$$

$$V_h = \frac{1}{h_2} \frac{\partial j}{\partial h}$$

Donc :

$$V_e = \frac{aU_\infty}{h_1} \left[ 1 - \frac{I(e)}{I(e_i)} \right] \sinh(e) \cos(h) = \frac{U_\infty}{\sqrt{\sinh^2(e) + \sin^2(h)}} \left[ 1 - \frac{I(e)}{I(e_i)} \right] \sinh(e) \cos(h) \quad (2-18)$$

$$V_h = -\frac{aU_\infty}{h_2} \left[ 1 + \frac{m(e)}{I(e_i)} \right] \cosh(e) \sin(h) = -\frac{U_\infty}{\sqrt{\sinh^2(e) + \sin^2(h)}} \left[ 1 + \frac{m(e)}{I(e_i)} \right] \cosh(e) \sin(h)$$

### ▼ L'écoulement visqueux

Suivant  $h$  on a la condition de périodicité :

$$V_e(e,0) = V_e(e,2p) \quad (2-19)$$

$$V_h(e,0) = V_h(e,2p)$$

$$A e = e_i, V_e = V_h = 0 \quad (2-20)$$

$$A e = e_e :$$

Les composantes de la vitesse elliptique sont obtenues des équations suivantes :

$$V_e = \frac{U_\infty}{\sqrt{\sinh^2(e) + \sin^2(h)}} \left[ 1 - \frac{I(e)}{I(e_i)} \right] \sinh(e) \cos(h) \quad (2-21)$$

$$V_h = -\frac{U_\infty}{\sqrt{\sinh^2(e) + \sin^2(h)}} \left[ 1 + \frac{m(e)}{I(e_i)} \right] \cosh(e) \sin(h)$$

### 2.4 Forme adimensionnelle des équations

Pour mettre le système précédent sous forme adimensionnelle nous avons normalisé :

- La vitesse suivant  $\varepsilon$  :  $V_e^* = \frac{V_e}{U_\infty}$
- La vitesse suivant  $\eta$  :  $V_h^* = \frac{V_h}{U_\infty}$
- La vitesse suivant  $X$  :  $U^* = \frac{U}{U_\infty}$
- La vitesse suivant  $Y$  :  $V^* = \frac{V}{U_\infty}$
- Les facteurs d'échelle :  $h_1^* = \frac{h_1}{2a}$  et  $h_2^* = \frac{h_2}{2a}$

- Le temps : 
$$t^* = \frac{t}{\left(\frac{2a}{U_\infty}\right)}$$
- La pression: 
$$P^* = \frac{P - P_0}{\left(\frac{1}{2}\right)\rho U_\infty^2}$$
- Le nombre de Reynolds : 
$$Re = \frac{2aU_\infty}{n}$$

### 2. 4.1 Equations de conservation adimensionnelles

A  $t^* = 0$ , on a :

$$V_e^* = V_h^* = P^* = 0 \quad (2-22)$$

Pour  $t^* > 0$  : on a les équations adimensionnelles suivantes :

Ø L'équation de continuité :

$$\frac{1}{h_1^* h_2^*} \frac{\partial (h_2^* V_e^*)}{\partial e} + \frac{1}{h_1^* h_2^*} \frac{\partial (h_1^* V_h^*)}{\partial h} = 0 \quad (2-23)$$

Ø L'équation de quantité de mouvement suivant  $e$  :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V_e^*}{\partial t^*} + \frac{1}{h_1^* h_2^*} \frac{\partial (h_2^* V_e^* V_e^*)}{\partial e} + \frac{1}{h_1^* h_2^*} \frac{\partial (h_1^* V_h^* V_e^*)}{\partial h} - \frac{1}{h_1^* h_2^*} V_h^{*2} \frac{\partial h_2^*}{\partial e} + \frac{1}{h_1^* h_2^*} V_h^* V_e^* \frac{\partial h_1^*}{\partial h} = \\ & \left[ \frac{2}{h_1^* h_2^*} \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{\partial V_e^*}{\partial e} \right) + \frac{1}{h_1^* h_2^*} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{\partial V_e^*}{\partial h} \right) - \frac{1}{h_1^* h_2^*} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e^* \partial h_1^*}{h_1^* \partial h} \right) + \frac{2}{h_1^* h_2^*} \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h^* \partial h_1^*}{h_1^* \partial h} \right) \right] \\ & - \frac{1}{h_1^*} \frac{\partial P^*}{\partial e} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{1}{h_1^* h_2^*} \frac{\partial}{\partial h} \left( h_1^* \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h^*}{h_2^*} \right) \right) + \frac{1}{h_1^* h_2^*} \left( \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h^*}{h_2^*} \right) + \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_h^*}{h_1^*} \right) \right) \frac{\partial h_1^*}{\partial h} \right. \\ & \left. - \frac{2}{h_1^* h_2^*} \left( \frac{1}{h_1^*} \frac{\partial V_h^*}{\partial h} + \frac{V_e^*}{h_1^* h_2^*} \frac{\partial h_2^*}{\partial e} \right) \frac{\partial h_2^*}{\partial e} \right] \quad (2-24) \end{aligned}$$

Ø L'équation de quantité de mouvement suivant  $h$  :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V_h^*}{\partial t^*} + \frac{1}{h_1^* h_2^*} \frac{\partial (h_2^* V_e^* V_h^*)}{\partial e} + \frac{1}{h_1^* h_2^*} \frac{\partial (h_1^* V_h^* V_h^*)}{\partial h} - \frac{1}{h_1^* h_2^*} V_e^{*2} \frac{\partial h_1^*}{\partial h} + \frac{1}{h_1^* h_2^*} V_h^* V_e^* \frac{\partial h_2^*}{\partial e} = \\
& \left[ \begin{aligned}
& \frac{1}{h_1^* h_2^*} \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{\partial V_h^*}{\partial e} \right) + \frac{2}{h_1^* h_2^*} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{\partial V_h^*}{\partial h} \right) - \frac{1}{h_1^* h_2^*} \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h^*}{h_2^*} \frac{\partial h_2^*}{\partial e} \right) + \frac{2}{h_1^* h_2^*} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e^*}{h_2^*} \frac{\partial h_2^*}{\partial e} \right) \\
& - \frac{1}{h_2^*} \frac{\partial P^*}{\partial h} + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{1}{h_1^* h_2^*} \frac{\partial}{\partial e} \left( h_2^* \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e^*}{h_1^*} \right) \right) + \frac{1}{h_1^* h_2^*} \left( \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h^*}{h_2^*} \right) + \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e^*}{h_1^*} \right) \right) \frac{\partial h_2^*}{\partial e} \right. \\
& \left. - \frac{2}{h_1^* h_2^*} \left( \frac{1}{h_1^*} \frac{\partial V_e^*}{\partial e} + \frac{V_h^*}{h_1^* h_2^*} \frac{\partial h_1^*}{\partial h} \right) \frac{\partial h_1^*}{\partial h} \right]
\end{aligned} \right] \quad (2-25)
\end{aligned}$$

## 2.4.2 Les conditions aux limites adimensionnelles

### ▼ L'écoulement non visqueux :

Suivant  $h$  on a la condition de périodicité :

$$V_e^*(e, 0) = V_e^*(e, 2p) \quad (2-26)$$

$$V_h^*(e, 0) = V_h^*(e, 2p)$$

$$\text{A } e = e_i, V_e^* = \frac{\partial V_h^*}{\partial e} = 0, \quad (2-27)$$

A  $e = e_e$ , les composantes de la vitesse elliptique sont obtenues des équations non dimensionnelles suivantes:

$$V_e^* = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2(e) + \sin^2(h)}} \left[ 1 - \frac{I(e)}{I(e_i)} \right] \sinh(e) \cos(h) \quad (2-28)$$

$$V_h^* = - \frac{1}{\sqrt{\sinh^2(e) + \sin^2(h)}} \left[ 1 + \frac{m(e)}{I(e_i)} \right] \cosh(e) \sin(h)$$

### ▼ L'écoulement visqueux :

Suivant  $h$  on a la condition de périodicité :



$$V_e^*(e,0) = V_e^*(e,2p) \quad (2-29)$$

$$V_h^*(e,0) = V_h^*(e,2p)$$

$$A e = e_i, V_e^* = V_h^* = 0 \quad (2-30)$$

$$A e = e_e,$$

Les composantes de la vitesse elliptique adimensionnelles sont :

$$V_e^* = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2(e) + \sin^2(h)}} \left[ 1 - \frac{l(e)}{l(e_i)} \right] \sinh(e) \cos(h) \quad (2-31)$$

$$V_h^* = -\frac{1}{\sqrt{\sinh^2(e) + \sin^2(h)}} \left[ 1 + \frac{m(e)}{l(e_i)} \right] \cosh(e) \sin(h)$$

# **Chapitre 3**

## **Résolution numérique**

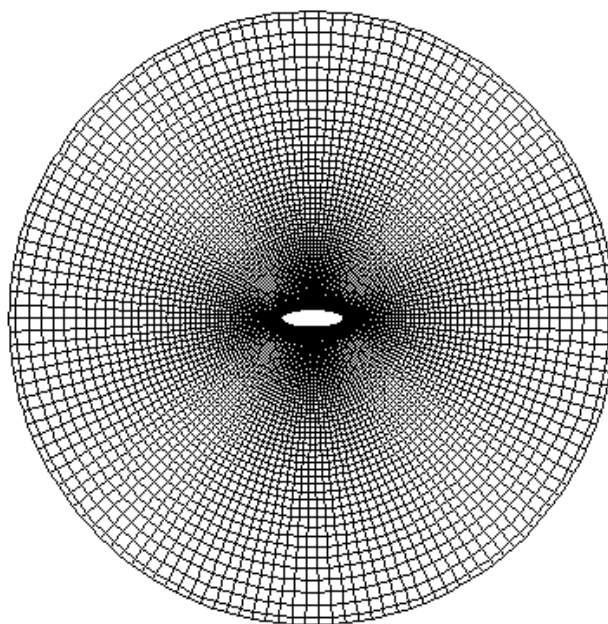
### 3. Résolution numérique

#### 3.1 La méthode numérique de résolution

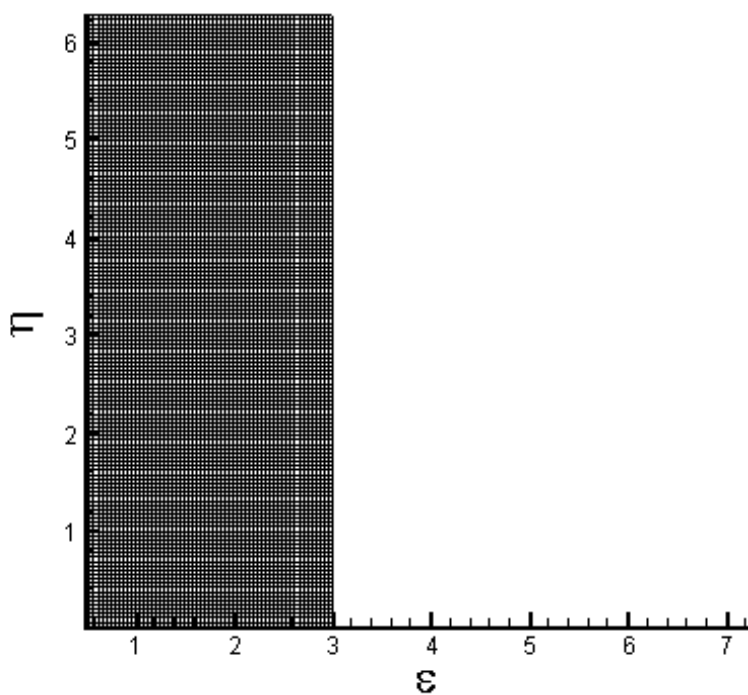
Le problème de l'écoulement incompressible et bidimensionnel, autour d'un cylindre elliptique est modélisé, comme cela a été vu dans le chapitre 2, par les équations différentielles aux dérivées partielles de conservation de masse et de quantité de mouvement, dans les coordonnées elliptiques. La résolution de ces équations est souvent très difficile et les méthodes analytiques suffisent rarement à obtenir les solutions désirées. On utilise donc des méthodes numériques telles que celles des différences finies, des volumes finis, ou des éléments finis. Pour la résolution de notre problème nous avons choisi la méthode des volumes finis car cette dernière s'adapte facilement pour notre géométrie. Cette méthode est basée sur la discrétisation du domaine physique en un certain nombre de volumes constituant le domaine de calcul, dans lequel seront discrétisées les équations modélisantes. Suivant la procédure recommandée par **S. Patankar [21]**, les variables scalaires telles que la pression et la température seront stockées dans les nœuds alors que les variables vectorielles telles que les composantes des vitesses seront stockées dans les faces des volumes finis.

##### 3.1.1 Maillage :

On rappelle qu'une géométrie elliptique peut être traitée dans un repère cartésien comme aussi dans un repère elliptique qui seraient différents de part leur maillage. Dans le repère cartésien il serait, automatiquement, non uniforme. La figure 3.1 montre qu'au voisinage de la paroi le maillage est plus affiné et qu'il s'élargit au fur et à mesure que l'on s'éloigne. Dans un repère elliptique, la particularité réside dans l'uniformité du maillage ( $\Delta\varepsilon = \Delta\eta$ ) comme l'illustre la figure 3.2. Cet aspect géométrique du maillage est très avantageux car il permet une discrétisation spatiale du second ordre avec l'utilisation du schéma des différences centrées; On précise aussi que le maillage dans l'espace cartésien permet un calcul plus précis des gradients importants des variables calculés dans les zones affinées. Le domaine elliptique utilisé dans cette étude est limité entre  $e_i = 0.29389$  et  $e_e = 3$  et divisé en  $62 \times 142$  volumes uniformes, dans les directions  $\varepsilon$  et  $\eta$  respectivement. Dans la figure 3.3, on illustre un volume de contrôle typique du maillage où le point P est au centre de ce volume. Ce volume est entouré de quatre volumes où sont centrés les points **N**, **S**, **E** et **W**. Les faces du volume fini typique sont dénommées **e**, **w**, **n** et **s**.



**Figure 3.1 : le maillage dans le domaine physique selon un repère cartésien**



**Figure 3.2 : le maillage du domaine de calcul selon un repère elliptique.**

## Remerciements

*J'adresse mes plus vifs remerciements à Mr : M.Afrid, professeur à l'université Mentouri, qui m'a proposé ce sujet et n'a pas cessé de me guider pour la réalisation, jusqu'à la phase finale de rédaction de ce manuscrit.*

*Je tiens à remercier le docteur L.Bahi pour m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence du jury de ma thèse.*

*Je tiens à remercier également le docteur T.Boufendi maître de conférence à l'université Mentouri et le docteur Z.Nemouchi professeur à l'université Mentouri, le docteur A.Djemel professeur à l'université Mentouri d'avoir accepté d'être membre de jury.*

*Je tiens à remercier ma famille et en particulier ma mère, mon père et ma sœur Nassima de m'avoir aidée dans mon travail, et de m'avoir tout soutenue durant toutes mes études.*

*En fin, je remercie tous ceux qui m'ont aidée et soutenue de près ou loin.*

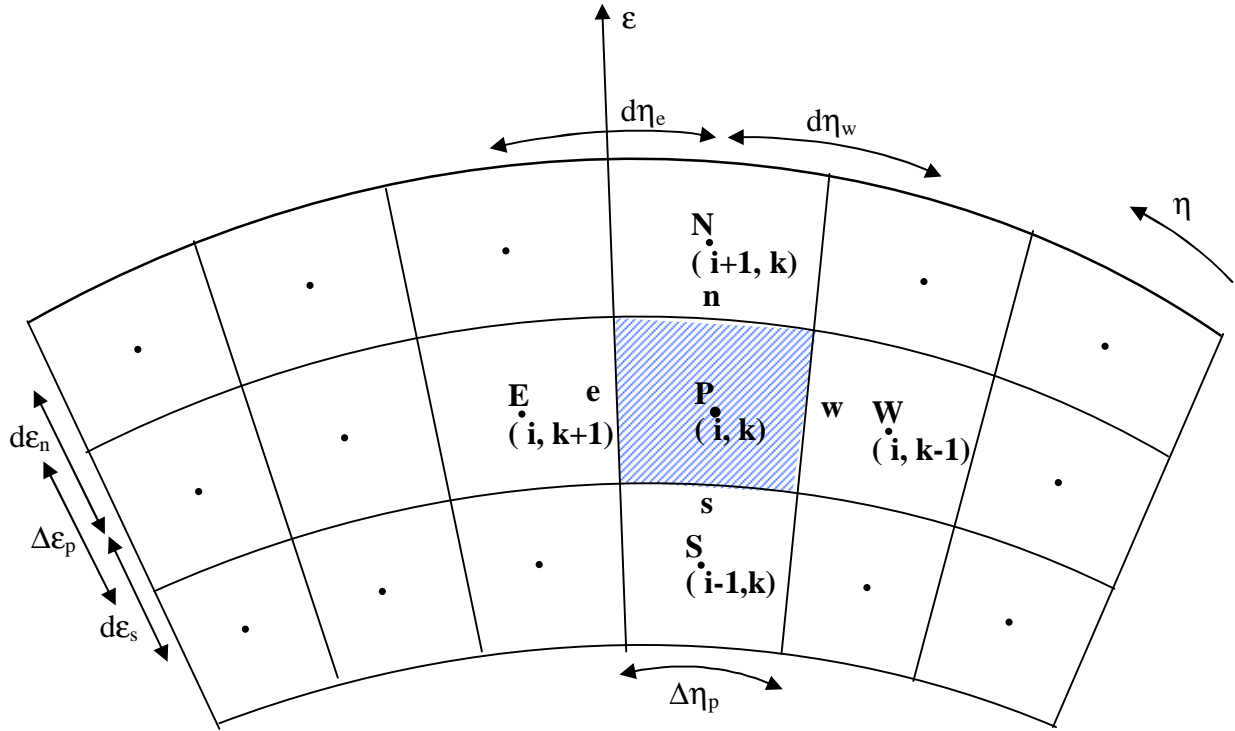


Figure 3.3 : Représentation schématique du maillage avec un volume de contrôle typique

### 3.2 La discrétisation des équations

#### 3.2.1 La discrétisation temporelle au second ordre

Avec le développement en séries de Taylor d'une variable  $f$  dépendante du temps, on obtient :

$$f^t = f^{t+\Delta t} - \Delta t \frac{\partial f^{t+\Delta t}}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 f^{t+\Delta t}}{\partial t^2} + 0(\Delta t)^2 \quad (3-1)$$

$$f^{t-\Delta t} = f^{t+\Delta t} - 2\Delta t \frac{\partial f^{t+\Delta t}}{\partial t} + \frac{(2\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 f^{t+\Delta t}}{\partial t^2} + 0(\Delta t)^2 \quad (3-2)$$

On multiplie la relation (3-1) par 4, et on fait la différence entre le produit et la relation (3-2) pour obtenir :

$$4f^t - f^{t-\Delta t} = 3f^{t+\Delta t} - 2\Delta t \frac{\partial f^{t+\Delta t}}{\partial t} + 0(\Delta t)^2$$

Ou :

$$\frac{\partial f^{t+\Delta t}}{\partial t} = \frac{3f^{t+\Delta t} - 4f^t + f^{t-\Delta t}}{2\Delta t} + 0(\Delta t)^2$$

Et donc, la discrétisation de la variation temporelle locale avec une erreur de troncature d'ordre 2 (de l'ordre de  $(\Delta t)^2$ ) est :

$$\frac{\partial f^{t+Dt}}{\partial t} = \frac{3f^{t+Dt} - 4f^t + f^{t-Dt}}{2Dt} \quad (3-3)$$

On multiplie la relation (3.1) par 2, puis on fait la différence entre le produit et la relation (3-2), et on obtient :

$$f^{t+\Delta t} = 2f^t - f^{t-\Delta t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 f^{t+\Delta t}}{\partial t^2} + O(\Delta t)^2$$

L'approximation de la variable  $f^{t+\Delta t}$  avec une erreur de troncature d'ordre deux est :

$$f^{t+\Delta t} = 2f^t - f^{t-\Delta t} \quad (3-4)$$

Cette discrétisation porte le nom d'**Adam-Bashforth**.

### 3.2.2 La discrétisation spatiale au second ordre

Nous pouvons démontrer que le schéma des différences centrées, utilisé pour la discrétisation des dérivées spatiales d'une variable, est d'ordre deux (figure 3-4). Il suffit de faire cette démonstration pour la dérivée première de la variable  $\phi$  par rapport à  $\varepsilon$  en utilisant le développement en séries de Taylor de la variable  $f$  :

$$f_p = f_n - l \left. \frac{\partial f}{\partial e} \right|_n + \frac{l^2}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial e^2} \right|_n - \frac{l^3}{6} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial e^3} \right|_n + \dots \quad (3-5)$$

$$f_N = f_n + l \left. \frac{\partial f}{\partial e} \right|_n + \frac{l^2}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial e^2} \right|_n + \frac{l^3}{6} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial e^3} \right|_n + \dots \quad (3-6)$$

On fait la différence entre (3-6) et (3-5), on obtient :

$$f_N - f_p = 2l \left. \frac{\partial f}{\partial e} \right|_n + \frac{l^3}{3} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial e^3} \right|_n \quad (3-7)$$

Sachant que pour un maillage uniforme :  $l = \frac{de_n}{2}$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial e} \right|_n \approx \frac{f_N - f_p}{de_n} - \frac{1}{24} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial e^3} \right|_n (de)^2 \quad (3-8)$$

Et donc avec une erreur de troncature d'ordre  $(de)^2$  on écrit :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial e} \right|_n \approx \frac{f_N - f_P}{d e_n} \tag{3-9}$$

On utilise une discrétisation temporelle avec une erreur de troncature de l'ordre de  $(\Delta t)^2$  et une discrétisation spatiale avec une erreur de troncature de l'ordre de  $(\Delta e)^2$  et  $(\Delta h)^2$ . Tous les termes advectifs et tous les termes diffusifs (à part les deux premiers termes diffusifs des membres de droite dans les équations de Navier-Stokes (2-24) et (2-25)) sont discrétisés selon Adam-Bashforth et les différences centrées. Tandis que les gradients de pression et les deux premiers termes diffusifs sont spatialement discrétisés selon les différences centrées; mais ils sont évalués, sans approximation, au temps  $t + \Delta t$ .

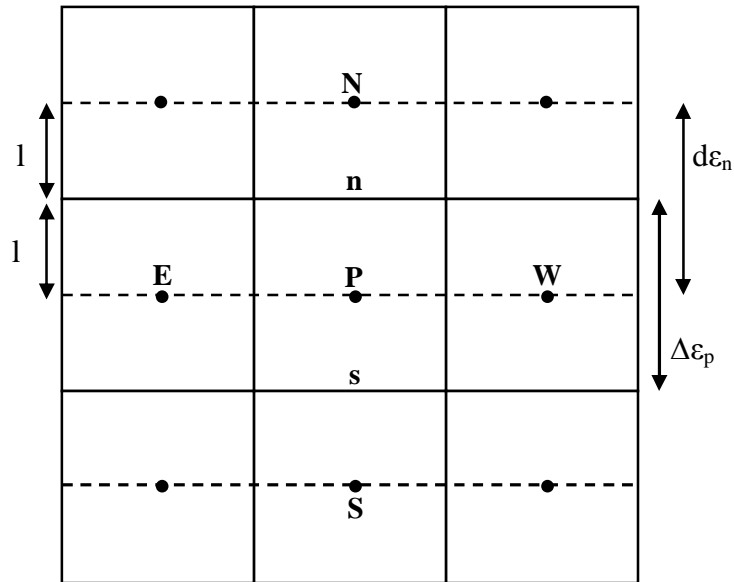


Figure 3-4 : Vue du maillage projeté dans le plan (e,h).

### 3.3 Discrétisation des équations modélisantes

Pour simplifier l'écriture, on élimine les étoiles dans les exposants des variables non dimensionnelles.

#### 3.3.1 Discrétisation de l'équation de continuité

Les termes de l'équation de continuité sont intégrés dans le volume de contrôle typique (figure : 3.4) comme suit :



$$\int_s^n \int_w^e \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial e} (h_2 V_e) + \frac{\partial}{\partial h} (h_1 V_h) \right] h_1 h_2 \, de \, dh = 0$$

$$\int_s^n \int_w^e \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (h_2 V_\varepsilon) \Big|^{t+\Delta t} + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_1 V_\eta) \Big|^{t+\Delta t} \right] d\varepsilon \, d\eta = 0$$

$$\left[ (h_2 V_e^{t+\Delta t})_n - (h_2 V_e^{t+\Delta t})_s \right] \Delta h_p + \left[ (h_1 V_h^{t+\Delta t})_e - (h_1 V_h^{t+\Delta t})_w \right] \Delta e_p = 0 \quad (3-10)$$

Avec :

$$h_1|_n = \sqrt{\sinh^2(e_c(i)) + \sin^2(h_p(k))} \quad h_1|_s = \sqrt{\sinh^2(e_c(i-1)) + \sin^2(h_p(k))}$$

$$h_2|_e = \sqrt{\sinh^2(e_p(i)) + \sin^2(h_c(k))} \quad h_2|_w = \sqrt{\sinh^2(e_p(i)) + \sin^2(h_c(k-1))}$$

### 3.3.2 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant $e$

Les termes de l'équation de quantité de mouvement sont intégrés dans le volume de contrôle décalé dans la direction  $\varepsilon$  (figure 2-5):

#### 3.3.2.1 Discrétisation du terme temporel

$$\bullet \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial t} h_1 h_2 \, d\varepsilon \, d\eta = \int_{wu}^{nu} \int_{wu}^{eu} \left[ \frac{3V_\varepsilon^{t+\Delta t} - 4V_\varepsilon^t + V_\varepsilon^{t-\Delta t}}{2\Delta t} \right] h_1 h_2 \, d\varepsilon \, d\eta$$

$$= \left[ \frac{3V_{\varepsilon pu}^{t+\Delta t} - 4V_{\varepsilon pu}^t + V_{\varepsilon pu}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} \right] h_{pu}^2 \, d\varepsilon_p \, \Delta \eta_p$$

Avec :

$$(h_1 h_2)_{pu} = \sinh^2(e_c(i)) + \sin^2(h_p(k))$$

## 3.3.2.2 Discrétisation des termes convectifs

$$\begin{aligned}
& \bullet \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_2 V_e V_e)}{\partial e} h_1 h_2 \, de \, dh = \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{\partial(h_2 V_e V_e)}{\partial e} \, de \, dh \\
& = 2 \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \left. \frac{\partial(h_2 V_e V_e)}{\partial e} \right|^t \, de \, dh - \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \left. \frac{\partial(h_2 V_e V_e)}{\partial e} \right|^{t-\Delta t} \, de \, dh \\
& = 2 \left[ (h_2 V_e^t V_e^t)_{nu} - (h_2 V_e^t V_e^t)_{su} \right] dh_p - \left[ (h_2 V_e^{t-\Delta t} V_e^{t-\Delta t})_{nu} - (h_2 V_e^{t-\Delta t} V_e^{t-\Delta t})_{su} \right] dh \\
& = B_1
\end{aligned}$$

Avec :

$$V_e|_{nu} = \frac{V_{eNU} + V_{ePU}}{2}$$

$$V_e|_{su} = \frac{V_{eSU} + V_{ePU}}{2}$$

$$h_2|_{nu} = \sqrt{\sinh^2(e_p(i+1)) + \sin^2(h_p(k))}$$

$$h_2|_{su} = \sqrt{\sinh^2(e_p(i)) + \sin^2(h_p(k))}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 V_h V_e)}{\partial h} h_1 h_2 \, de \, dh = \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{\partial(h_1 V_h V_e)}{\partial h} \, de \, dh \\
& = 2 \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \left. \frac{\partial(h_1 V_h V_e)}{\partial h} \right|^t \, de \, dh - \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \left. \frac{\partial(h_1 V_h V_e)}{\partial h} \right|^{t-\Delta t} \, de \, dh \\
& = 2 \left[ (h_1 V_\eta^t V_\varepsilon^t)_{eu} - (h_1 V_\eta^t V_\varepsilon^t)_{wu} \right] d\varepsilon_n - \left[ (h_1 V_\eta^{t-\Delta t} V_\varepsilon^{t-\Delta t})_{eu} - (h_1 V_\eta^{t-\Delta t} V_\varepsilon^{t-\Delta t})_{wu} \right] d\varepsilon_n \\
& = B_2
\end{aligned}$$

Avec :

$$V_e|_{eu} = \frac{V_{eEU} + V_{ePU}}{2}$$

$$V_e|_{wu} = \frac{V_{eWU} + V_{ePU}}{2}$$

$$V_h|_{eu} = \frac{V_{hNV} + V_{hPV}}{2}$$

$$V_h|_{wu} = \frac{V_{hWV} + V_{hNWV}}{2}$$

$$h_1|_{eu} = \sqrt{\sinh^2(e_c(i)) + \sin^2(h_c(k))}$$

$$h_1|_{wu} = \sqrt{\sinh^2(e_c(i)) + \sin^2(h_c(k-1))}$$

$$\bullet - \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{1}{h_1 h_2} V_h^2 \frac{\partial h_2}{\partial e} h_1 h_2 de dh = - \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} V_h^2|^{t+\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial e} de dh$$

$$= -2 \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} V_h^2|^{t} \frac{\partial h_2}{\partial e} de dh + \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} V_h^2|^{t-\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial e} de dh$$

$$= -2 \left( V_h^t V_h^t \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{PU} de_n Dh_p + \left( V_h^{t-Dt} V_h^{t-Dt} \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{PU} de_n Dh_p$$

$$= B_3$$

Avec :

$$V_h|_{PU} = \frac{1}{4} [V_{hNV} + V_{hNWV} + V_{hWV} + V_{hPV}]$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial e} \Big|_{PU} = \frac{\sinh(e_c(i)) \cosh(e_c(i))}{\sqrt{\sinh^2(e_c(i)) + \sin^2(h_p(k))}}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{1}{h_1 h_2} V_h V_e \frac{\partial h_1}{\partial h} h_1 h_2 \, de \, dh = \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} (V_e V_h)^{t+\Delta t} \frac{\partial h_1}{\partial h} \, de \, dh \\
& = 2 \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} (V_e V_h)^t \frac{\partial h_1}{\partial h} \, de \, dh - \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} (V_e V_h)^{t-\Delta t} \frac{\partial h_1}{\partial h} \, de \, dh \\
& = 2 \left( V_e^t V_h^t \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{PU} \cdot de_n \cdot \Delta h_p - \left( V_e^{t-\Delta t} V_h^{t-\Delta t} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{PU} de_n \Delta h_p \\
& = B_4
\end{aligned}$$

Avec :

$$\left. \frac{\partial h_1}{\partial h} \right|_{PU} = \frac{\sin(h_p(k)) \cos(h_p(k))}{\sqrt{\sinh^2(e_c(i)) + \sin^2(h_p(k))}}$$

### 3.3.2.3 Discrétisation des deux premier termes diffusifs et du terme de pression

$$\begin{aligned}
& \bullet - \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{1}{h_1} \frac{\partial P}{\partial e} h_1 h_2 \, de \, dh = - \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} h_2 \frac{\partial P}{\partial e} \Big|^{t+\Delta t} \, de \, dh \\
& = -h_2 \Big|_{PU} \cdot (P_N^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t}) \cdot \Delta h_p
\end{aligned}$$

Avec :

$$h_2 \Big|_{PU} = \sqrt{\sinh^2(e_c(i)) + \sin^2(h_p(k))}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{1}{R_e} \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left( \frac{\partial V_\epsilon}{\partial \epsilon} \right) h_1 h_2 \, d\epsilon \, d\eta = \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{2}{R_e} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left( \frac{\partial V_\epsilon}{\partial \epsilon} \right) \Big|^{t+\Delta t} \, d\epsilon \, d\eta \\
& = \frac{2}{R_e} \left[ \left. \frac{\partial V_\epsilon}{\partial \epsilon} \right|_{nu}^{t+\Delta t} - \left. \frac{\partial V_\epsilon}{\partial \epsilon} \right|_{su}^{t+\Delta t} \right] \Delta \eta_p
\end{aligned}$$

Avec :

$$\left. \frac{\partial V_e}{\partial e} \right|_{nu} = \frac{V_{eNU} - V_{ePU}}{De_N}$$

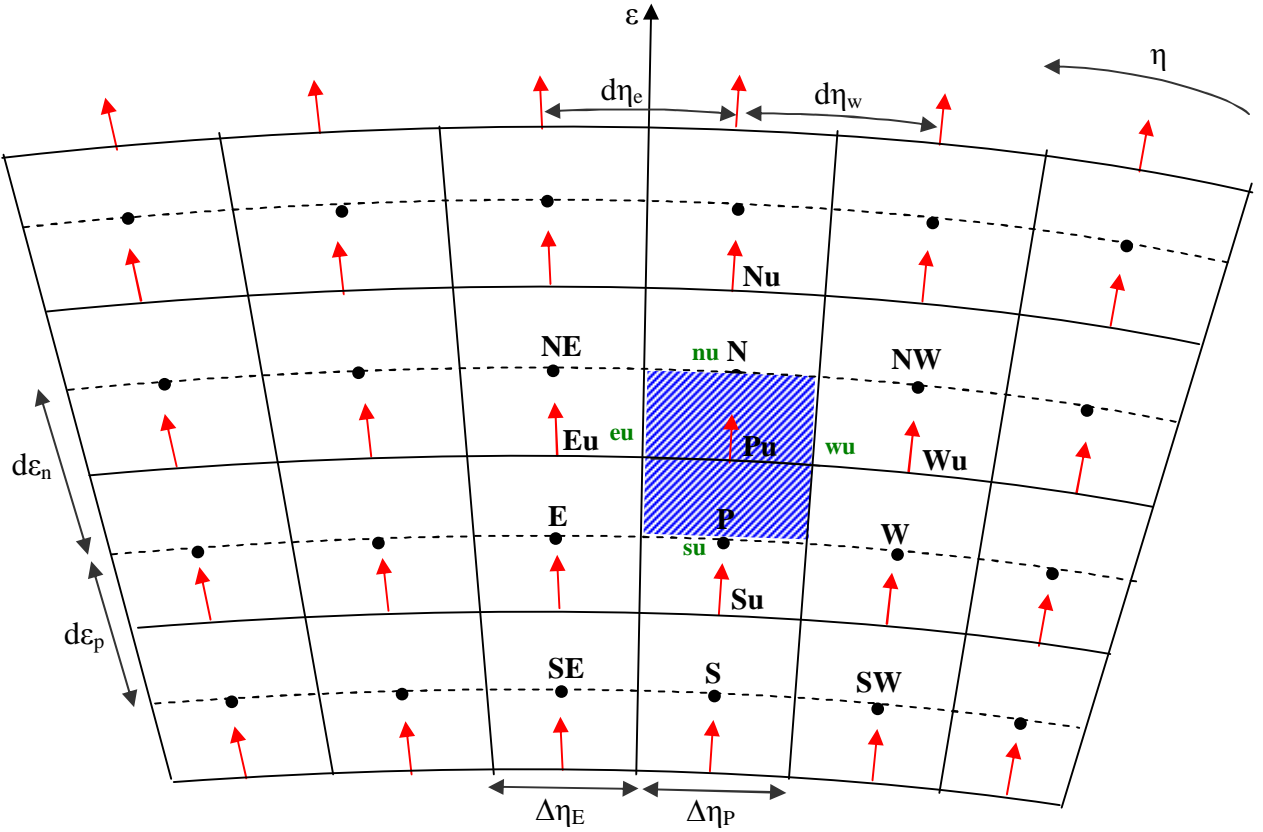


Figure 3-5 : le maillage décalé suivant  $\epsilon$

$$\left. \frac{\partial V_e}{\partial e} \right|_{su} = \frac{V_{ePU} - V_{eSU}}{De_p}$$

$$\bullet \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{1}{R_e} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{\partial V_e}{\partial h} \right) \cdot h_1 h_2 \, de \, dh = \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{1}{R_e} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{\partial V_e}{\partial h} \right)^{t+\Delta t} \, de \, dh$$

$$= \frac{1}{R_e} \left[ \left. \frac{\partial V_e}{\partial h} \right|_{eu}^{t+\Delta t} - \left. \frac{\partial V_e}{\partial h} \right|_{wu}^{t+\Delta t} \right] de_n$$

Avec :

$$\left. \frac{\partial V_e}{\partial h} \right|_{eu} = \frac{V_{eEU} - V_{ePU}}{dh_e}$$

$$\left. \frac{\partial V_e}{\partial h} \right|_{wu} = \frac{V_{ePU} - V_{eWU}}{dh_w}$$

### 3.3.2.4 Discrétisation des autres termes

$$\begin{aligned} & \bullet \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{2}{R_e} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right) h_1 h_2 \, de \, dh = \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{2}{R_e} \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)^{t+\Delta t} \, de \, dh \\ & = 2 \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{2}{R_e} \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)^t \, de \, dh - \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{2}{R_e} \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial e} \right)^{t-\Delta t} \, de \, dh \\ & = \frac{4}{R_e} \left[ \left( \frac{V_h^t}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{nu} - \left( \frac{V_h^t}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{su} \right] \Delta h_p - \frac{2}{R_e} \left[ \left( \frac{V_h^{t-\Delta t}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{nu} - \left( \frac{V_h^{t-\Delta t}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{su} \right] \Delta h_p \\ & = B_5 \end{aligned}$$

Avec :

$$V_h \Big|_{nu} = \frac{V_{hNV} + V_{hWNV}}{2}$$

$$V_h \Big|_{su} = \frac{V_{hPV} + V_{hWV}}{2}$$

$$\left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{nu} = \frac{\sin(h_p(k)) \cos(h_p(k))}{\sinh^2(e_p(i+1)) + \sin^2(h_p(k))}$$

$$\left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{su} = \frac{\sin(h_p(k)) \cos(h_p(k))}{\sinh^2(e_p(i)) + \sin^2(h_p(k))}$$

$$\bullet - \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{2}{R_e} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right) h_1 h_2 \, de \, dh = - \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{2}{R_e} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)^{t+\Delta t} \, de \, dh$$

$$= -2 \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{2}{R_e} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)^t \, de \, dh + \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{2}{R_e} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial e} \right)^{t-\Delta t} \, de \, dh$$

$$= -\frac{4}{R_e} \left[ \left( \frac{V_e^t}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{eu} - \left( \frac{V_e^t}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{wu} \right] de_n + \frac{2}{R_e} \left[ \left( \frac{V_e^{t-\Delta t}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{eu} - \left( \frac{V_e^{t-\Delta t}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{wu} \right] de_n$$

$$= B_6$$

Avec :

$$V_e|_{eu} = \frac{V_{eEU} + V_{ePU}}{2}$$

$$V_e|_{wu} = \frac{V_{ePU} + V_{eWU}}{2}$$

$$\left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{eu} = \left[ \frac{\sin(h_c(k)) \cos(h_c(k))}{\sinh^2(e_c(i)) + \sin^2(h_c(k))} \right]$$

$$\left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{wu} = \left[ \frac{\sin(h_c(k-1)) \cos(h_c(k-1))}{\sinh^2(e_c(i)) + \sin^2(h_c(k-1))} \right]$$

$$\bullet \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial e} \left( h_1 \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h}{h_2} \right) \right)^{t+\Delta t} h_1 h_2 \, de \, dh = \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial e} \left( h_1 \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h}{h_2} \right) \right)^{t+\Delta t} \, de \, dh$$

$$= 2 \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial e} \left( h_1 \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h}{h_2} \right) \right)^t \, de \, dh - \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial e} \left( h_1 \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h}{h_2} \right) \right)^{t-\Delta t} \, de \, dh$$

$$= \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( h_1 \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h^t}{h_2} \right) \right)_{eu} - \left( h_1 \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h^t}{h_2} \right) \right)_{wu} \right] de_n - \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( h_1 \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h^{t-\Delta t}}{h_2} \right) \right)_{eu} - \left( h_1 \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h^{t-\Delta t}}{h_2} \right) \right)_{wu} \right] de_n$$

$$= B_7$$

Avec :

$$\left( h_1 \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h}{h_2} \right) \right)_{eu} = (h_1)_{eu} \cdot \left[ \frac{\left( \frac{V_h}{h_2} \right)_{NV} - \left( \frac{V_h}{h_2} \right)_{PV}}{de_n} \right]$$

$$\left( h_1 \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h}{h_2} \right) \right)_{eu} = \frac{\sqrt{\sinh^2(e_C(i)) + \sin^2(h_C(k))}}{\sqrt{\sinh^2(e_P(i+1)) + \sin^2(h_C(k))}} \frac{V_h(i+1, k)}{de(i)}$$

$$\frac{\sqrt{\sinh^2(e_C(i)) + \sin^2(h_C(k-1))}}{\sqrt{\sinh^2(e_P(i)) + \sin^2(h_C(k-1))}} \frac{V_h(i, k)}{de(i)}$$

$$\bullet \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{1}{Re} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h}{h_2} \right)^{t+\Delta t} \frac{\partial h_1}{\partial h} h_1 h_2 de dh = \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h}{h_2} \right)^{t+\Delta t} \frac{\partial h_1}{\partial h} de dh$$

$$= 2 \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h}{h_2} \right)^t \frac{\partial h_1}{\partial h} de dh - \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h}{h_2} \right)^{t-\Delta t} \frac{\partial h_1}{\partial h} de dh$$

$$= \frac{2}{Re} \left( \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{PU} \left[ \left( \frac{V_h^t}{h_2} \right)_{nu} - \left( \frac{V_h^t}{h_2} \right)_{su} \right] \Delta h_p - \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial h_2}{\partial h} \right)_{PU} \left[ \left( \frac{V_h^{t-\Delta t}}{h_2} \right)_{nu} - \left( \frac{V_h^{t-\Delta t}}{h_2} \right)_{su} \right] \Delta h_p$$

$$= B_8$$

Avec :

$$V_h|_{nu} = \frac{V_{hNV} + V_{hWNV}}{2}$$

$$V_h|_{su} = \frac{V_{hPV} + V_{hWV}}{2}$$

$$\left( \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{PU} = \frac{\sin(h_p(k)) \cdot \cos(h_p(k))}{\sqrt{\sinh^2(e_p(i)) + \sin^2(h_p(k))}}$$

$$\left( \frac{1}{h_2} \right)_{nu} = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2(e_p(i+1)) + \sin^2(h_p(k))}}$$

$$\left( \frac{1}{h_2} \right)_{su} = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2(e_p(i)) + \sin^2(h_p(k))}}$$

$$\bullet \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{1}{Re} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e}{h_1} \right)^{t+\Delta t} \frac{\partial h_1}{\partial h} h_1 h_2 de dh = \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e}{h_1} \right)^{t+\Delta t} \frac{\partial h_1}{\partial h} de dh$$



$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e}{h_1} \right)^t \frac{\partial h_1}{\partial h} de dh - \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e}{h_1} \right)^{t-\Delta t} \frac{\partial h_1}{\partial h} de dh \\
 &= \frac{2}{Re} \left( \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{PU} \left[ \left( \frac{V_e^t}{h_1} \right)_{eu} - \left( \frac{V_h^t}{h_1} \right)_{wu} \right] de_n - \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{PU} \left[ \left( \frac{V_e^{t-\Delta t}}{h_1} \right)_{eu} - \left( \frac{V_e^{t-\Delta t}}{h_1} \right)_{wu} \right] de_n \\
 &= B_9
 \end{aligned}$$

Avec :

$$V_e|_{eu} = \frac{V_{ePU} + V_{eEU}}{2}$$

$$V_e|_{wu} = \frac{V_{ePU} + V_{eWU}}{2}$$

$$\left( \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{PU} = \frac{\sin(h_p(k)) \cdot \cos(h_p(k))}{\sqrt{\sinh^2(e_p(i)) + \sin^2(h_p(k))}}$$

$$\left( \frac{1}{h_1} \right)_{eu} = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2(e_c(i)) + \sin^2(h_c(k))}}$$

$$\left( \frac{1}{h_1} \right)_{wu} = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2(e_c(i)) + \sin^2(h_c(k-1))}}$$

$$\bullet - \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{2}{Re} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial V_h}{\partial h} \right)^{t+\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial e} h_1 h_2 de dh = - \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{2}{Re} \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial V_h}{\partial h} \right)^{t+\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial e} de dh$$

$$= -2 \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{2}{Re} \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial V_h}{\partial h} \right)^t \frac{\partial h_2}{\partial e} de dh + \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{2}{Re} \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial V_h}{\partial h} \right)^{t-\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial e} de dh$$

$$= -\frac{4}{Re} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{PU} \left[ (V_h^t)_{eu} - (V_h^t)_{wu} \right] de_n + \frac{2}{Re} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{PU} \left[ (V_h^{t-\Delta t})_{eu} - (V_h^{t-\Delta t})_{wu} \right] de_n$$

$$= B_{10}$$

Avec :

$$\left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{PU} = \frac{\sinh(e_c(i)) \cosh(e_c(i))}{\sinh^2(e_c(i)) + \sin^2(h_p(k))}$$

$$(V_h)_{eu} = \frac{V_{hPV} + V_{hNV}}{2}$$

$$(V_h)_{wu} = \frac{V_{hWV} + V_{hWNV}}{2}$$

$$\begin{aligned} & \bullet - \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{2}{\text{Re } h_1 h_2} \frac{1}{\left( \frac{V_e}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)^{t+\Delta t}} \frac{\partial h_2}{\partial e} h_1 h_2 \, de \, dh = - \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{2}{\text{Re } h_1 h_2} \frac{1}{\left( \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)^2} V_e \Big|^{t+\Delta t} \, de \, dh \\ & = -2 \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{2}{\text{Re } h_1 h_2} \frac{1}{\left( \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)^2} V_e \Big|^t \, de \, dh + \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{2}{\text{Re } h_1 h_2} \frac{1}{\left( \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)^2} V_e \Big|^{t-\Delta t} \, de \, dh \\ & = - \frac{4}{\text{Re}} \left( \left( \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)^2 \frac{V_e^t}{h_1 h_2} \right)_{PU} \, de_n \, \Delta h_p + \frac{2}{\text{Re}} \left( \left( \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)^2 \frac{V_e^{t-\Delta t}}{h_1 h_2} \right)_{PU} \, de_n \, \Delta h_p \\ & = B_{11} \end{aligned}$$

Avec :

$$\left( \frac{1}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)^2 \right)_{PU} = \frac{\sinh^2(e_c(i)) \cosh^2(e_c(i))}{[\sinh^2(e_c(i)) + \sin^2(h_p(k))]^2}$$

Les termes intégrés sont réarrangés dans une équation de discrétisation algébrique sous la forme suivant :

$$A_P V_{ePU}^{t+\Delta t} = A_E V_{eEU}^{t+\Delta t} + A_W V_{eWU}^{t+\Delta t} + A_N V_{eNU}^{t+\Delta t} + A_S V_{eSU}^{t+\Delta t} + S + (P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t})(h_2)_{PU} \Delta h_p$$

(3-11)

Avec :

$$A_P = A_N + A_S + A_E + A_W + \frac{3(h_1 h_2)_{PU} \, de_n \, dh_{PU}}{2\Delta t}$$

$$A_N = \frac{2}{\text{Re}} \left[ \frac{\Delta h_p}{\Delta e_N} \right]$$

$$A_S = \frac{2}{\text{Re}} \left[ \frac{\Delta h_p}{\Delta e_p} \right]$$

$$A_E = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{de_n}{dh_e} \right]$$

$$A_W = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{de_n}{dh_w} \right]$$

$$S = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 + B_7 + B_8 + B_9 + B_{10} + B_{11} + \left[ \frac{4V_{ePU}^t - V_{ePU}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} \right] (h_1 h_2)_{PU} de_n \Delta h_p \quad (3-12)$$

Avec

$$B_1 = 2 \left[ (h_2 V_e^t V_e^t)_{nu} - (h_2 V_e^t V_e^t)_{su} \right] dh_p - \left[ (h_2 V_e^{t-\Delta t} V_e^{t-\Delta t})_{nu} - (h_2 V_e^{t-\Delta t} V_e^{t-\Delta t})_{su} \right] dh$$

$$B_2 = 2 \left[ (h_1 V_h^t V_e^t)_{eu} - (h_1 V_h^t V_e^t)_{wu} \right] de_n - \left[ (h_1 V_h^{t-\Delta t} V_e^{t-\Delta t})_{eu} - (h_1 V_h^{t-\Delta t} V_e^{t-\Delta t})_{wu} \right] de_n$$

$$B_3 = -2 \left( V_h^t V_h^t \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{PU} \cdot de_n \cdot \Delta h_p + \left( V_h^{t-\Delta t} V_h^{t-\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{PU} de_n \Delta h_p$$

$$B_4 = 2 \left( V_e^t V_h^t \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{PU} \cdot de_n \cdot \Delta h_p - \left( V_e^{t-\Delta t} V_h^{t-\Delta t} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{PU} de_n \Delta h_p$$

$$B_5 = \frac{4}{R_e} \left[ \left( \frac{V_h^t}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{nu} - \left( \frac{V_h^t}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{su} \right] \Delta h_p - \frac{2}{R_e} \left[ \left( \frac{V_h^{t-\Delta t}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{nu} - \left( \frac{V_h^{t-\Delta t}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{su} \right] \Delta h_p$$

$$B_7 = -\frac{4}{R_e} \left[ \left( \frac{V_e^t}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{eu} - \left( \frac{V_e^t}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{wu} \right] de_n + \frac{2}{R_e} \left[ \left( \frac{V_e^{t-\Delta t}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{eu} - \left( \frac{V_e^{t-\Delta t}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{wu} \right] de_n$$

$$B_8 = \frac{2}{\text{Re}} \left( \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{PU} \left[ \left( \frac{V_h^t}{h_2} \right)_{nu} - \left( \frac{V_h^t}{h_2} \right)_{su} \right] \Delta h_p - \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial h_2}{\partial h} \right)_{PU} \left[ \left( \frac{V_h^{t-\Delta t}}{h_2} \right)_{nu} - \left( \frac{V_h^{t-\Delta t}}{h_2} \right)_{su} \right] \Delta h_p$$

$$B_9 = \frac{2}{\text{Re}} \left( \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{\text{PU}} \left[ \left( \frac{V_e^t}{h_1} \right)_{\text{eu}} - \left( \frac{V_h^t}{h_1} \right)_{\text{wu}} \right] d\mathbf{e}_n - \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{\text{PU}} \left[ \left( \frac{V_e^{t-\Delta t}}{h_1} \right)_{\text{eu}} - \left( \frac{V_h^{t-\Delta t}}{h_1} \right)_{\text{wu}} \right] d\mathbf{e}_n$$

$$B_{10} = -\frac{4}{\text{Re}} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{\text{PU}} \left[ (V_h^t)_{\text{eu}} - (V_h^t)_{\text{wu}} \right] d\mathbf{e}_n + \frac{2}{\text{Re}} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{\text{PU}} \left[ (V_h^{t-\Delta t})_{\text{eu}} - (V_h^{t-\Delta t})_{\text{wu}} \right] d\mathbf{e}_n$$

$$B_{11} = -\frac{4}{\text{Re}} \left( \left( \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)^2 \frac{V_e^t}{h_1 h_2} \right)_{\text{PU}} d\mathbf{e}_n \Delta h_p + \frac{2}{\text{Re}} \left( \left( \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)^2 \frac{V_e^{t-\Delta t}}{h_1 h_2} \right)_{\text{PU}} d\mathbf{e}_n \Delta h_p$$

### 3.3.3 Discrétisation d'équations de quantité de mouvement Suivant $h$

Les termes de l'équation de quantité de mouvement sont intégrés dans le volume de contrôle décalé dans la direction suivant  $\eta$  (figure 3-6) :

#### 3.3.3.1 Discrétisation du terme temporel

$$\begin{aligned} \bullet \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{\partial V_h}{\partial t} h_1 h_2 de dh &= \int_{wv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \left[ \frac{3V_h^{t+\Delta t} - 4V_h^t + V_h^{t-\Delta t}}{2\Delta t} \right] h_1 h_2 de dh \\ &= \left[ \frac{3V_{h_{pu}}^{t+\Delta t} - 4V_{h_{pu}}^t + V_{h_{pu}}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} \right] h_{pv}^2 \Delta e_p dh_e \end{aligned}$$

Avec :

$$(h_1 h_2)_{pv} = \sinh^2(e_p(i)) + \sin^2(h_c(k))$$

#### 3.3.3.2 Discrétisation des termes convectifs

$$\begin{aligned} \bullet \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_1 V_h V_h)}{\partial h} h_1 h_2 de dh &= \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{\partial (h_1 V_h V_h)}{\partial h} \Big|^{t+Dt} de dh \\ &= 2 \int_{su}^{nu} \int_{wu}^{eu} \frac{\partial (h_1 V_h V_h)}{\partial h} \Big|^t de dh - \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{\partial (h_1 V_h V_h)}{\partial h} \Big|^{t-Dt} de dh \\ &= 2 \left[ (h_1 V_h^t V_h^t)_{ev} - (h_1 V_h^t V_h^t)_{wv} \right] \Delta e_p - \left[ (h_1 V_h^{t-\Delta t} V_h^{t-\Delta t})_{eu} - (h_1 V_h^{t-\Delta t} V_h^{t-\Delta t})_{wv} \right] \Delta e_p \\ &= C_1 \end{aligned}$$

Avec :

$$V_h|_{ev} = \frac{V_{hPV} + V_{hEV}}{2}$$

$$V_h|_{wv} = \frac{V_{hPV} + V_{hEV}}{2}$$

$$h_1|_{ev} = \sqrt{\sinh^2(e_p(i)) + \sin^2(h_p(k+1))}$$

$$h_1|_{wv} = \sqrt{\sinh^2(e_p(i)) + \sin^2(h_p(k))}$$

$$\begin{aligned} & \bullet \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_2 V_h V_e)}{\partial e} h_1 h_2 de dh = \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{\partial(h_2 V_h V_e)}{\partial e} \Big|^{t+\Delta t} de dh \\ & = 2 \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{\partial(h_2 V_h V_e)}{\partial e} \Big|^t de dh - \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{\partial(h_2 V_h V_e)}{\partial e} \Big|^{t-\Delta t} de dh \\ & = 2 \left[ (h_2 V_h^t V_e^t)_{nv} - (h_2 V_h^t V_e^t)_{sv} \right] dh_e - \left[ (h_2 V_h^{t-\Delta t} V_e^{t-\Delta t})_{nv} - (h_2 V_h^{t-\Delta t} V_e^{t-\Delta t})_{sv} \right] dh_p \\ & = C_2 \end{aligned}$$

Avec :

$$V_e|_{nv} = \frac{V_{eEU} + V_{ePU}}{2}$$

$$V_e|_{sv} = \frac{V_{eESU} + V_{eSU}}{2}$$

$$V_h|_{nv} = \frac{V_{hNV} + V_{hPV}}{2}$$

$$V_h|_{sv} = \frac{V_{hPV} + V_{hSV}}{2}$$

$$h_2|_{nv} = \sqrt{\sinh^2(e_c(i)) + \sin^2(h_c(k))}$$

$$h_2|_{sv} = \sqrt{\sinh^2(e_c(i-1)) + \sin^2(h_c(k))}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet - \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{1}{h_1 h_2} V_e^2 \frac{\partial h_1}{\partial h} h_1 h_2 de dh = - \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} V_e^2 \Big|^{t+\Delta t} \frac{\partial h_1}{\partial h} de dh \\
& = -2 \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} V_e^2 \Big|^t \frac{\partial h_1}{\partial h} de dh + \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} V_e^2 \Big|^{t-\Delta t} \frac{\partial h_1}{\partial h} de dh \\
& = -2 \left( V_e^t V_e^t \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{Pv} \Delta e_p dh_p + \left( V_e^{t-\Delta t} V_e^{t-\Delta t} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{Pv} \Delta e_p dh_p \\
& = C_3
\end{aligned}$$

Avec :

$$V_e \Big|_{Pv} = \frac{1}{4} [V_{ePU} + V_{eEU} + V_{eSU} + V_{eESU}]$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial h} \Big|_{Pv} = \frac{\sinh(h_c(k)) \cosh(h_c(k))}{\sqrt{\sinh^2(e_p(i)) + \sin^2(h_c(k))}}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{1}{h_1 h_2} V_h V_e \frac{\partial h_2}{\partial e} h_1 h_2 de dh = \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} (V_e V_h) \Big|^{t+\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial e} de dh \\
& = 2 \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} (V_e V_h) \Big|^t \frac{\partial h_2}{\partial e} de dh - \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} (V_e V_h) \Big|^{t-\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial e} de dh \\
& = 2 \left( V_e^t V_h^t \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{Pv} \Delta e_p dh_e + \left( V_e^{t-\Delta t} V_h^{t-\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{Pv} \Delta e_p dh_e \\
& = C_4
\end{aligned}$$

Avec :

$$\frac{\partial h_2}{\partial e} \Big|_{Pv} = \frac{\sinh(e_p(i)) \cos(e_p(i))}{\sqrt{\sinh^2(e_p(i)) + \sin^2(h_c(k))}}$$

**3.3.3.3 Discrétisation des deux premier termes diffusifs et du terme de pression**

$$\bullet - \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{1}{h_2} \frac{\partial P}{\partial h} h_1 h_2 \, de \, dh = - \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} h_1 \frac{\partial P}{\partial h} \Big|^{t+\Delta t} \, de \, dh$$

$$= -h_1 \Big|_{P_V} \left( P_E^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t} \right) \cdot \Delta e_P$$

Avec :

$$h_1 \Big|_{P_V} = \sqrt{\sinh^2(e_P(i)) + \sin(h_C(k))}$$

$$\bullet \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{1}{R_e} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{\partial V_h}{\partial e} \right) h_1 h_2 \, de \, dh = \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{1}{R_e} \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{\partial V_h}{\partial e} \right) \Big|^{t+\Delta t} \, de \, dh$$

$$= \frac{1}{R_e} \left[ \frac{\partial V_h}{\partial e} \Big|_{nv}^{t+\Delta t} - \frac{\partial V_h}{\partial e} \Big|_{sv}^{t+\Delta t} \right] dh_e$$

Avec :

$$\frac{\partial V_h}{\partial e} \Big|_{nv} = \frac{V_{e_{NV}} - V_{e_{PV}}}{de_n}$$

$$\frac{\partial V_h}{\partial e} \Big|_{sv} = \frac{V_{e_{PV}} - V_{e_{SV}}}{de_P}$$

$$\bullet \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{1}{R_e} \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{\partial V_h}{\partial h} \right) h_1 h_2 \, de \, dh = \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{2}{R_e} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{\partial V_h}{\partial h} \right) \Big|^{t+\Delta t} \, de \, dh$$

$$= \frac{2}{R_e} \left[ \frac{\partial V_h}{\partial h} \Big|_{ev}^{t+\Delta t} - \frac{\partial V_h}{\partial h} \Big|_{wv}^{t+\Delta t} \right] \Delta e_P$$

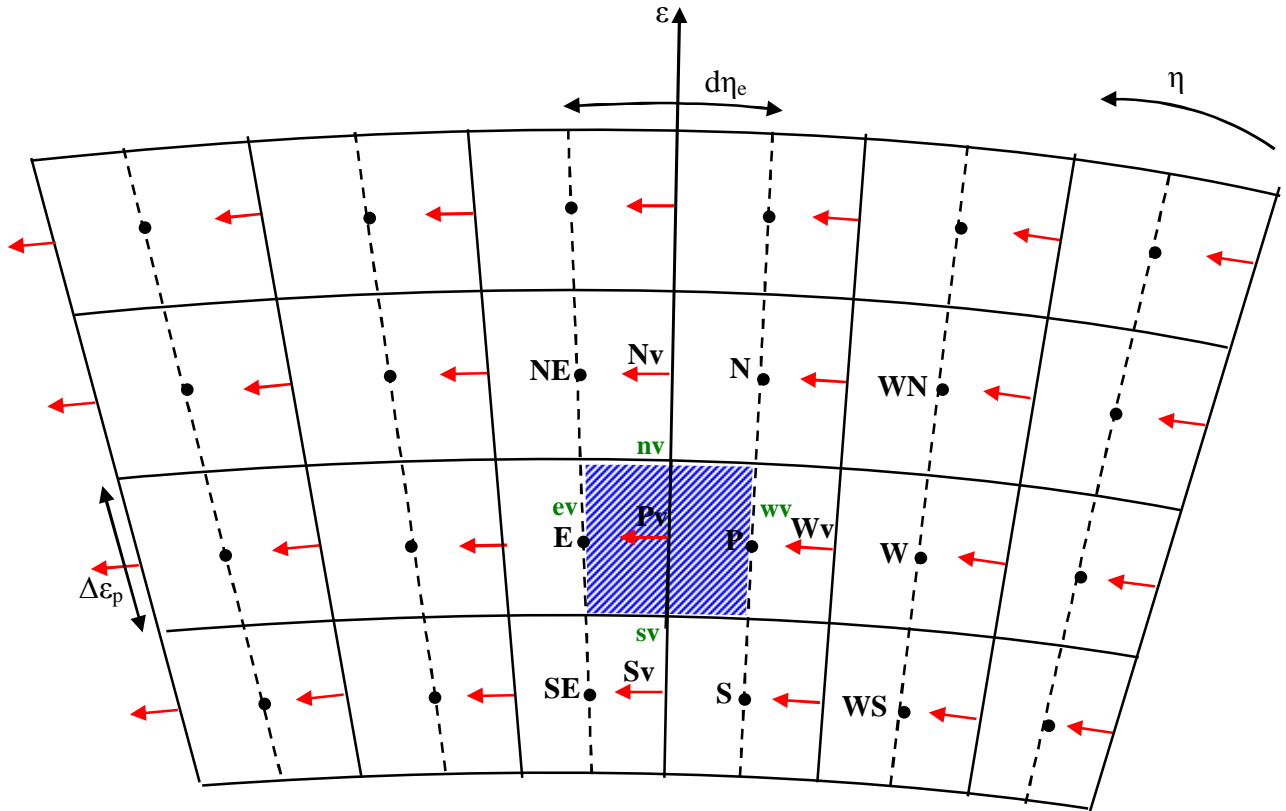


Figure 3.6 : le maillage décalé suivant  $\eta$

Avec :

$$\left. \frac{\partial V_e}{\partial h} \right|_{ev} = \frac{V_{eEV} - V_{ePV}}{Dh_e}$$

$$\left. \frac{\partial V_e}{\partial h} \right|_{wv} = \frac{V_{ePV} - V_{eWV}}{Dh_w}$$

### 3.3.3.4 Discrétisation des autres termes

$$\begin{aligned} & \bullet \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{2}{R_e} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\epsilon}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \epsilon} \right) h_1 h_2 \, d\epsilon \, d\eta = \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{2}{R_e} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\epsilon}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \epsilon} \right)^{t+\Delta t} \, d\epsilon \, d\eta \\ & = 2 \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{2}{R_e} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)^t \, de \, dh - \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{2}{R_e} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)^{t-\Delta t} \, de \, dh \end{aligned}$$



$$= \frac{4}{R_e} \left[ \left( \frac{V_e^t}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{ev} - \left( \frac{V_e^t}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{wv} \right] \Delta e_P - \frac{2}{R_e} \left[ \left( \frac{V_e^{t-\Delta t}}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{ev} - \left( \frac{V_e^{t-\Delta t}}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{wv} \right] \Delta e_P$$

$$= C_5$$

Avec :

$$V_e|_{ev} = \frac{V_{eEU} + V_{eESU}}{2}$$

$$V_e|_{wv} = \frac{V_{ePU} + V_{eSU}}{2}$$

$$\left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{ev} = \left[ \frac{\sinh(e_P(i)) \cosh(e_P(i))}{\sinh^2(e_P(i)) + \sin^2(h_P(k+1))} \right]$$

$$\left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{wv} = \left[ \frac{\sinh(e_P(i)) \cosh(e_P(i))}{\sinh^2(e_P(i)) + \sin^2(h_P(k))} \right]$$

$$\bullet - \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{2}{R_e} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial h} \right) h_1 h_2 \, de \, dh = - \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{2}{R_e} \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial h} \right)^{t+\Delta t} \, de \, dh$$

$$= -2 \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{2}{R_e} \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial h} \right)^t \, de \, dh + \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{2}{R_e} \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial h} \right)^{t-\Delta t} \, de \, dh$$

$$= -\frac{4}{R_e} \left[ \left( \frac{V_h^t}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial h} \right)_{nv} - \left( \frac{V_h^t}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{sv} \right] dh_e + \frac{2}{R_e} \left[ \left( \frac{V_h^{t-\Delta t}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{nv} - \left( \frac{V_h^{t-\Delta t}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{sv} \right] dh_e$$

$$= C_6$$

Avec :

$$V_h|_{nv} = \frac{V_{eNV} + V_{ePV}}{2}$$

$$V_h|_{sv} = \frac{V_{ePV} + V_{eSV}}{2}$$

$$\left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{nv} = \left[ \frac{\sinh(e_c(i)) \cosh(e_c(i))}{\sinh^2(e_c(i)) + \sin^2(h_c(k))} \right]$$

$$\left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{wv} = \left[ \frac{\sinh(e_c(i-1)) \cosh(e_c(i-1))}{\sinh^2(e_c(i-1)) + \sin^2(h_c(k))} \right]$$

$$\begin{aligned} & \bullet \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial e} \left( h_2 \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e}{h_1} \right) \right)^{t+\Delta t} h_1 h_2 \cdot de dh = \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial e} \left( h_2 \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e}{h_1} \right) \right)^{t+\Delta t} de dh \\ & = 2 \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial e} \left( h_2 \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e}{h_1} \right) \right)^t de dh - \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial e} \left( h_1 \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_h}{h_1} \right) \right)^{t-\Delta t} de dh \\ & = \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( h_2 \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e^t}{h_1} \right) \right)_{nv} - \left( h_2 \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e^t}{h_1} \right) \right)_{sv} \right] dh_e - \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( h_2 \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e^{t-\Delta t}}{h_1} \right) \right)_{nv} - \left( h_2 \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e^{t-\Delta t}}{h_1} \right) \right)_{sv} \right] dh_e \\ & = C_7 \end{aligned}$$

Avec :

$$\left( h_2 \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e}{h_1} \right) \right)_{nv} = (h_2)_{nv} \left[ \frac{\left( \frac{V_e}{h_2} \right)_{EU} - \left( \frac{V_h}{h_2} \right)_{PU}}{dh_e} \right]$$

$$\left( h_2 \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e}{h_1} \right) \right)_{nv} = \sqrt{\frac{\sinh^2(e_c(i)) + \sin^2(h_p(k+1))}{\sinh^2(e_p(i+1)) + \sin^2(h_p(k+1))}} \frac{V_h(i, k+1)}{dh(k+1)} -$$

$$\sqrt{\frac{\sinh^2(e_c(i)) + \sin^2(h_c(k-1))}{\sinh^2(e_p(i)) + \sin^2(h_c(k))}} \frac{V_h(i, k)}{dh(k+1)}$$

$$\left( h_2 \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e}{h_1} \right) \right)_{sv} = (h_2)_{sv} \left[ \frac{\left( \frac{V_e}{h_2} \right)_{ESU} - \left( \frac{V_h}{h_2} \right)_{PU}}{dh_e} \right]$$

$$\left( h_2 \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e}{h_1} \right) \right)_{sv} = \sqrt{\frac{\sinh^2(e_c(i-1)) + \sin^2(h_p(k+1))}{\sinh^2(e_c(i-1)) + \sin^2(h_p(k+1))}} \frac{V_h(i-1, k+1)}{dh(k-1)} \\ - \sqrt{\frac{\sinh^2(e_c(i)) + \sin^2(h_c(k-1))}{\sinh^2(e_p(i)) + \sin^2(h_c(k))}} \frac{V_h(i-1, k)}{dh(k-1)}$$

$$\bullet \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{1}{Re} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h}{h_2} \right)^{t+\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial e} h_1 h_2 de dh = \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h}{h_2} \right)^{t+\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial e} de dh \\ = 2 \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h}{h_2} \right)^t \frac{\partial h_2}{\partial e} de dh - \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{V_h}{h_2} \right)^{t-\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial e} de dh \\ = \frac{2}{Re} \left( \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{PV} \left[ \left( \frac{V_h^t}{h_2} \right)_{nv} - \left( \frac{V_h^t}{h_2} \right)_{sv} \right] dh_e - \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{PV} \left[ \left( \frac{V_h^{t-\Delta t}}{h_2} \right)_{nv} - \left( \frac{V_h^{t-\Delta t}}{h_2} \right)_{sv} \right] dh_e \\ = C_8$$

Avec :

$$V_h|_{nv} = \frac{V_{hPV} + V_{hNV}}{2}$$

$$V_h|_{sv} = \frac{V_{hPV} + V_{hSV}}{2}$$

$$\left( \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{PV} = \frac{\sinh(e_p(i)) \cosh(e_p(i))}{\sqrt{\sinh^2(e_p(i)) + \sin^2(h_c(k))}}$$

$$\left( \frac{1}{h_2} \right)_{nv} = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2(e_c(i)) + \sin^2(h_c(k))}}$$

$$\left( \frac{V_h}{h_2} \right)_{sv} = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2(e_c(i-1)) + \sin^2(h_c(k))}}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e}{h_1} \right)^{t+\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial e} h_1 h_2 \, de \, dh = \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e}{h_1} \right)^{t+\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial e} \, de \, dh \\
& = 2 \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e}{h_1} \right)^t \frac{\partial h_2}{\partial e} \, de \, dh - \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e}{h_1} \right)^{t-\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial e} \, de \, dh \\
& = \frac{2}{\text{Re}} \left( \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{pv} \left[ \left( \frac{V_e^t}{h_1} \right)_{ev} - \left( \frac{V_h^t}{h_1} \right)_{wv} \right] \Delta e_p - \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{pv} \left[ \left( \frac{V_e^{t-\Delta t}}{h_1} \right)_{ev} - \left( \frac{V_e^{t-\Delta t}}{h_1} \right)_{wv} \right] \Delta e_p \\
& = C_9
\end{aligned}$$

Avec :

$$V_e|_{ev} = \frac{V_{eESU} + V_{eEU}}{2}$$

$$V_e|_{wv} = \frac{V_{hPU} + V_{hSU}}{2}$$

$$\left( \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{pv} = \frac{\sinh(e_p(i)) \cosh(e_p(i))}{\sqrt{\sinh^2(e_p(i)) + \sin^2(h_c(k))}}$$

$$\left( \frac{1}{h_2} \right)_{ev} = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2(e_p(i)) + \sin^2(h_p(k+1))}}$$

$$\left( \frac{V_h}{h_2} \right)_{sv} = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2(e_p(i)) + \sin^2(h_p(k))}}$$

$$\bullet - \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{2}{\text{Re}} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial V_e}{\partial e} \right)^{t+\Delta t} \frac{\partial h_1}{\partial h} h_1 h_2 \, de \, dh = - \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{2}{\text{Re}} \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial V_e}{\partial e} \right)^{t+\Delta t} \frac{\partial h_1}{\partial h} \, de \, dh$$

$$= -2 \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{2}{\text{Re}} \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial V_e}{\partial e} \right)^t \frac{\partial h_1}{\partial h} \, de \, dh + \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{2}{\text{Re}} \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial V_e}{\partial e} \right)^{t-\Delta t} \frac{\partial h_1}{\partial h} \, de \, dh$$

$$= -\frac{4}{\text{Re}} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{pv} \left[ (V_e^t)_{nv} - (V_e^t)_{sv} \right] dh_e + \frac{2}{\text{Re}} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{pv} \left[ (V_e^{t-\Delta t})_{nv} - (V_e^{t-\Delta t})_{sv} \right] dh_e$$

$$= C_{10}$$

Avec

$$\left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{Pv} = \frac{\sinh(h_C(k)) \cosh(h_C(k))}{\sinh^2(e_P(i)) + \sin^2(h_C(k))}$$

$$(V_e)_{nv} = \frac{V_{ePU} + V_{eEU}}{2}$$

$$(V_e)_{sv} = \frac{V_{eSU} + V_{eESU}}{2}$$

$$\begin{aligned} & \bullet - \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{2}{\text{Re } h_1 h_2} \frac{1}{\left( \frac{V_h}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)^{t+\Delta t}} \frac{\partial h_1}{\partial h} h_1 h_2 \, de \, dh = - \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{2}{\text{Re } h_1 h_2} \frac{1}{\left( \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)^2} V_h \Big|^{t+\Delta t} \, de \, dh \\ & = -2 \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{2}{\text{Re } h_1 h_2} \frac{1}{\left( \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)^2} V_h \Big|^t \, de \, dh + \int_{sv}^{nv} \int_{wv}^{ev} \frac{2}{\text{Re } h_1 h_2} \frac{1}{\left( \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)^2} V_h \Big|^{t-\Delta t} \, de \, dh \\ & = - \frac{4}{\text{Re} \left( \left( \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)^2 \frac{V_h^t}{h_1 h_2} \right)_{Pv}} \Delta e_p \, dh_e + \frac{2}{\text{Re} \left( \left( \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)^2 \frac{V_h^{t-\Delta t}}{h_1 h_2} \right)_{Pv}} \Delta e_p \, dh_e \\ & = C_{11} \end{aligned}$$

Avec :

$$\left( \frac{1}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)^2 \right)_{Pv} = \frac{\sinh^2(h_C(k)) \cosh^2(h_C(k))}{[\sinh^2(e_P(i)) + \sin^2(h_C(k))]^2}$$

Les termes intégrés sont réarrangés dans une équation de discrétisation algébrique sous la forme suivant :

$$A_P V_{hPv}^{t+\Delta t} = A_E V_{hEv}^{t+\Delta t} + A_W V_{hWv}^{t+\Delta t} + A_N V_{hNv}^{t+\Delta t} + A_S V_{hSv}^{t+\Delta t} + S' + (P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t})(h_1)_{Pv} \Delta h_P \quad (3-13)$$

Avec :

$$A_P = A_N + A_S + A_E + A_W \frac{3(h_1 h_2)_{Pv} \Delta e_p \, dh_e}{2\Delta t}$$

$$A_N = \frac{1}{\text{Re} \left[ \frac{dh_e}{de_n} \right]}$$

$$A_s = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{dh_e}{de_s} \right]$$

$$A_E = \frac{2}{\text{Re}} \left[ \frac{\Delta e_p}{\Delta h_e} \right] \quad (3-14)$$

$$A_w = \frac{2}{\text{Re}} \left[ \frac{\Delta e_n}{\Delta h_w} \right]$$

$$S' = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6 + C_7 + C_8 + C_9 + C_{10} + C_{11} + \left[ \frac{4V_{hPv}^t - V_{hPv}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} \right] (h_1 h_2)_{Pv} \Delta e_p dh_e$$

Avec

$$C_1 = 2 \left[ (h_1 V_h^t V_h^t)_{ev} - (h_1 V_h^t V_h^t)_{wv} \right] \Delta e_p - \left[ (h_1 V_h^{t-\Delta t} V_h^{t-\Delta t})_{eu} - (h_1 V_h^{t-\Delta t} V_h^{t-\Delta t})_{wv} \right] \Delta e_p$$

$$C_2 = 2 \left[ (h_2 V_h^t V_e^t)_{nv} - (h_2 V_h^t V_e^t)_{sv} \right] dh_e - \left[ (h_2 V_h^{t-\Delta t} V_e^{t-\Delta t})_{nv} - (h_2 V_h^{t-\Delta t} V_e^{t-\Delta t})_{sv} \right] dh_p$$

$$C_3 = -2 \left( V_e^t V_e^t \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{Pv} \Delta e_p dh_p + \left( V_e^{t-\Delta t} V_e^{t-\Delta t} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{Pv} \Delta e_p dh_p$$

$$C_4 = 2 \left( V_e^t V_h^t \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{Pv} \Delta e_p dh_e + \left( V_e^{t-\Delta t} V_h^{t-\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{Pv} \Delta e_p dh_e$$

$$C_5 = \frac{4}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{V_e^t \partial h_2}{h_2 \partial e} \right)_{ev} - \left( \frac{V_e^t \partial h_2}{h_2 \partial e} \right)_{wv} \right] \Delta e_p - \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{V_e^{t-\Delta t} \partial h_2}{h_2 \partial e} \right)_{ev} - \left( \frac{V_e^{t-\Delta t} \partial h_2}{h_2 \partial e} \right)_{wv} \right] \Delta e_p$$

$$C_6 = -\frac{4}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{V_h^t \partial h_2}{h_2 \partial h} \right)_{nv} - \left( \frac{V_h^t \partial h_1}{h_1 \partial h} \right)_{sv} \right] dh_e + \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{V_h^{t-\Delta t} \partial h_1}{h_1 \partial h} \right)_{nv} - \left( \frac{V_h^{t-\Delta t} \partial h_1}{h_1 \partial h} \right)_{sv} \right] dh_e$$

$$C_7 = \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( h_2 \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e^t}{h_1} \right) \right)_{nv} - \left( h_2 \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e^t}{h_1} \right) \right)_{sv} \right] dh_e - \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( h_2 \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e^{t-\Delta t}}{h_1} \right) \right)_{nv} - \left( h_2 \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{V_e^{t-\Delta t}}{h_1} \right) \right)_{sv} \right] dh_e$$

$$C_8 = \frac{2}{\text{Re}} \left( \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{Pv} \left[ \left( \frac{V_h^t}{h_2} \right)_{nv} - \left( \frac{V_h^t}{h_2} \right)_{sv} \right] dh_e - \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{Pv} \left[ \left( \frac{V_h^{t-\Delta t}}{h_2} \right)_{nv} - \left( \frac{V_h^{t-\Delta t}}{h_2} \right)_{sv} \right] dh_e$$

$$C_9 = \frac{2}{\text{Re}} \left( \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{\text{PV}} \left[ \left( \frac{V_e^t}{h_1} \right)_{\text{ev}} - \left( \frac{V_h^t}{h_1} \right)_{\text{wv}} \right] \Delta e_P - \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial h_2}{\partial e} \right)_{\text{PV}} \left[ \left( \frac{V_e^{t-\Delta t}}{h_1} \right)_{\text{ev}} - \left( \frac{V_e^{t-\Delta t}}{h_1} \right)_{\text{wv}} \right] \Delta e_P$$

$$C_{10} = -\frac{4}{\text{Re}} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{\text{PV}} \left[ (V_e^t)_{\text{nv}} - (V_e^t)_{\text{sv}} \right] dh_e + \frac{2}{\text{Re}} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)_{\text{PV}} \left[ (V_e^{t-\Delta t})_{\text{nv}} - (V_e^{t-\Delta t})_{\text{sv}} \right] dh_e$$

$$C_{11} = -\frac{4}{\text{Re}} \left( \left( \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)^2 \frac{V_h^t}{h_1 h_2} \right)_{\text{PV}} \Delta e_P dh_e + \frac{2}{\text{Re}} \left( \left( \frac{\partial h_1}{\partial h} \right)^2 \frac{V_h^{t-\Delta t}}{h_1 h_2} \right)_{\text{PV}} \Delta e_P dh_e$$

### 3.3.4 Discrétisation des conditions aux limites

#### 3.3.4.1 le cas de l'écoulement non visqueux

Ø Au surface de l'ellipse ( $e = e_i$ )

Pour  $V_e$  :

On a :  $V_e = 0$

$$A_P = 1, \quad A_E = A_W = A_N = A_S = 0$$

$$S = 0$$

Pour  $V_h$  :

On a :  $\frac{\partial V_h}{\partial e} = 0$

$$A_P = A_N = 1, \quad A_W = A_E = A_S = 0$$

$$S = 0$$

Ø A la frontière externe ( $e = e_e$ )

Pour  $V_e = 0$  :

$$A_P = 1, \quad A_E = A_W = A_N = A_S = 0$$

$$S = \frac{\sinh(e_e) \cos(h)}{h_1^*} \left[ 1 - \frac{I(e_e)}{I(e_i)} \right]$$

Pour  $V_h$  :

$$A_P = 1, \quad A_E = A_W = A_N = A_S = 0$$

$$S' = -\frac{\cosh(e_e) \sin(h)}{h_2^*} \left[ 1 + \frac{m(e_e)}{I(e_i)} \right]$$

### 3.3.4.2 le cas de l'écoulement visqueux

Ø Sur la surface de l'ellipse ( $e = e_i$ )

Pour  $V_e$  et  $V_h$  :

On a :  $V_e = V_h = 0$

$$A_p = 1, \quad A_E = A_W = A_N = A_S = 0$$

$$S = S' = 0$$

Ø A la frontière externe ( $e = e_e$ )

Pour  $V_e = 0$  :

$$A_p = 1, \quad A_E = A_W = A_N = A_S = 0$$

$$S = \frac{\sinh(e_e) \cos(h)}{h_1^*} \left[ 1 - \frac{I(e)}{I(e_i)} \right]$$

Pour  $V_h$  :

$$A_p = 1, \quad A_E = A_W = A_N = A_S = 0$$

$$S' = -\frac{\cosh(e_e) \sin(h)}{h_2^*} \left[ 1 + \frac{m(e)}{I(e_i)} \right]$$

### 3.3.5 L'équation de discrétisation de la pression

On met les équations de discrétisation de quantité de mouvement sous la forme :

$$V_{ePU} = V_{en} = \hat{V}_{en} + d_n (P_P - P_N)$$

$$V_{eSU} = V_{es} = \hat{V}_{es} + d_s (P_S - P_P)$$

$$V_{hPV} = V_{he} = \hat{V}_{he} + d_e (P_P - P_E)$$

$$V_{hWV} = V_{hw} = \hat{V}_{hw} + d_w (P_W - P_P)$$

(3-15)



Les pseudo vitesses :  $\hat{V}_{en}^{t+\Delta t}$ ,  $\hat{V}_{es}^{t+\Delta t}$ ,  $\hat{V}_{he}^{t+\Delta t}$  et  $\hat{V}_{hw}^{t+\Delta t}$  sont les composantes de vitesse déterminées avec des sources qui ne contiennent pas les termes de pression, et sont données par les expressions suivantes :

$$\hat{V}_{en}^{t+\Delta t} = \frac{\sum A_i V_{ei}^{t+\Delta t} + S}{A_p} = \frac{A_E V_{eEU}^{t+\Delta t} + A_W V_{eWU}^{t+\Delta t} + A_N V_{eNU}^{t+\Delta t} + A_S V_{eSU}^{t+\Delta t} + S}{A_p}$$

$$\hat{V}_{es}^{t+\Delta t} = \frac{\sum A_i V_{ei}^{t+\Delta t} + S}{A_s} = \frac{A_E V_{eEU}^{t+\Delta t} + A_W V_{eWU}^{t+\Delta t} + A_N V_{eNU}^{t+\Delta t} + A_S V_{eSU}^{t+\Delta t} + S}{A_s}$$

$$\hat{V}_{he}^{t+\Delta t} = \frac{\sum A_i V_{hi}^{t+\Delta t} + S'}{A_p} = \frac{A_E V_{hEV}^{t+\Delta t} + A_W V_{hWV}^{t+\Delta t} + A_N V_{hNV}^{t+\Delta t} + A_S V_{hSV}^{t+\Delta t} + S'}{A_p}$$

$$\hat{V}_{hw}^{t+\Delta t} = \frac{\sum A_i V_{hi}^{t+\Delta t} + S'}{A_w} = \frac{A_E V_{hEV}^{t+\Delta t} + A_W V_{hWV}^{t+\Delta t} + A_N V_{hNV}^{t+\Delta t} + A_S V_{hSV}^{t+\Delta t} + S'}{A_w}$$

Les coefficients des termes de pression sont :

$$d_n = \frac{h_2|_{PU} \Delta h_p}{A_p}$$

$$d_s = \frac{h_2|_{PU} \Delta h_p}{A_s}$$

$$d_e = \frac{h_1|_{PV} \Delta e_p}{A_p}$$

$$d_w = \frac{h_1|_{PV} \Delta e_p}{A_w}$$

Pour obtenir une équation de discrétisation de la pression on remplace les équations des vitesses (3-15) dans l'équation de continuité discrétisée (3-10):

$$\left[ (h_2)_n \left( \hat{V}_{en}^{t+\Delta t} + d_n (P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}) \right) - (h_2)_s \left( \hat{V}_{es}^{t+\Delta t} + d_s (P_S^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t}) \right) \right] \Delta h_p +$$

$$\left[ (h_1)_e \left( \hat{V}_{he}^{t+\Delta t} + d_e (P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}) \right) - (h_1)_w \left( \hat{V}_{hw}^{t+\Delta t} + d_w (P_W^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t}) \right) \right] \Delta e_p = 0$$

D'où :

$$A_p P_P^{t+\Delta t} = A_N P_N^{t+\Delta t} + A_S P_S^{t+\Delta t} + A_E P_E^{t+\Delta t} + A_W P_W^{t+\Delta t} + S'' \quad (3-16)$$

Avec :

$$A_N = (h_2)_n d_n \Delta h_P$$

$$A_S = (h_2)_s d_s \Delta h_P$$

$$A_E = (h_1)_e d_e \Delta e_P$$

$$A_W = (h_1)_w d_w \Delta e_P \quad (3-17)$$

$$S'' = \left( (h_2)_s \cdot \hat{V}_{e_s}^{t+\Delta t} - (h_2)_n \cdot \hat{V}_{e_n}^{t+\Delta t} \right) \Delta h_P + \left( (h_1)_w \cdot \hat{V}_{h_w}^{t+\Delta t} - (h_1)_e \cdot \hat{V}_{h_e}^{t+\Delta t} \right) \Delta e_P \quad (3-18)$$

Avec un champ de vitesse estimé on peut calculer les pseudo vitesse, utilisé dans la source (3-18) et obtenir une estimation du champ de pression  $P^*$ . On utilise cette estimation de pression dans les équations (3-11), (3-13) pour obtenir une estimation du champ de vitesse  $(V_e^*, V_h^*)$  :

$$A_n V_{e_n}^* = \sum A_i V_{e_i}^* + a_n (P_P^* - P_N^*)$$

$$A_s V_{e_s}^* = \sum A_i V_{e_i}^* + a_s (P_S^* - P_P^*)$$

$$A_e V_{h_e}^* = \sum A_i V_{h_i}^* + a_e (P_P^* - P_E^*)$$

$$A_w V_{h_w}^* = \sum A_i V_{h_i}^* + a_w (P_W^* - P_P^*)$$

(3-19)

En utilisant l'équation de pression (3-16) pour déterminer le champ de pression qui permettra le calcul du champ de vitesse. Cependant, ce champ n'a pas les valeurs exactes satisfaisant les critères de convergence, mais des vitesses qualifiées d'initiales.

Donc, pour converger vers l'écoulement exact, il faut corriger le champ initial, et par conséquent, chaque variable s'écrit comme suit :

$$V_e = V_e^* + V_e'$$

$$V_h = V_h^* + V_h' \quad (3-20)$$

$$P = P^* + P'$$

$V_e'$ ,  $V_h'$ ,  $P'$  : Les corrections de la vitesse suivant  $e$ , la vitesse suivant  $h$  et la correction de pression respectivement.

$$\begin{aligned}
A_n V'_{en} &= \sum A_i V'_{ei} + a_n (P'_P - P'_N) \\
A_s V'_{es} &= \sum A_i V'_{ei} + a_s (P'_S - P'_P) \\
A_e V'_{he} &= \sum A_i V'_{hi} + a_e (P'_P - P'_E) \\
A_w V'_{hw} &= \sum A_i V'_{hi} + a_w (P'_W - P'_P)
\end{aligned} \tag{3-21}$$

D'après **S.Patankar** [21] et comme approximation on peut éliminer les termes  $\sum A_i V'_{ei}$ ,  $\sum A_i V'_{hi}$  on obtient :

$$\begin{aligned}
V'_{en} &= d_n (P'_P - P'_N) \\
V'_{es} &= d_s (P'_S - P'_P) \\
V'_{he} &= d_e (P'_P - P'_E) \\
V'_{hw} &= d_w (P'_W - P'_P)
\end{aligned} \tag{3-22}$$

Et donc le champ de vitesse s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
V_{en} &= V_{en}^* + d_n (P'_P - P'_N) \\
V_{es} &= V_{es}^* + d_s (P'_S - P'_P) \\
V_{ee} &= V_{ee}^* + d_e (P'_P - P'_E) \\
V_{ew} &= V_{ew}^* + d_w (P'_W - P'_P)
\end{aligned} \tag{3-23}$$

Le champ de vitesse dans le système (3-23) doit satisfaire l'équation de continuité. En introduisant ce champ de vitesse dans l'équation de continuité, on obtient l'équation de correction de pression discrétisée suivante :

$$A_P P'_P = A_N P'_N + A_S P'_S + A_E P'_E + A_W P'_W + S''' \tag{3-24}$$

Les coefficients  $A_P, A_N, A_S, A_E, A_W$  sont les même que ceux de l'équation de pression (3-16) mais la

Source  $S'''$  c'est :

$$S''' = \left( (h_2)_s V_{es}^* - (h_2)_n V_{en}^* \right) \Delta h_p + \left( (h_1)_w V_{hw}^* - (h_1)_e V_{he}^* \right) \Delta e_p$$

### 3.4 Solution des systemes d'équations de discrétisation par la méthode de balayage

Les systèmes d'équations linéaires de discrétisation sont résolus par la méthode de balayage [21] utilisant l'algorithme de Thomas et l'algorithme de Thomas cyclique. A partir des conditions initiales, la marche dans le temps continue jusqu'à l'obtention d'un régime stationnaire ou un régime avec une variation temporelle oscillatoire établie.

#### 3.4.1 La méthode de balayage

On peut mettre le système des équations de discrétisation (3-10), (3-12) sous la forme matricielle, comme suivant :

$$[A]\{\Phi\} = \{B\} \quad (3-25)$$

En notation indicielle le système se présente sous la forme suivant :

$$A_p(i, k)F_{i, k} = A_N(i, k)F_{i+1, k} + A_S(i, k)F_{i-1, k} + A_E(i, k)F_{i, k+1} + A_W(i, k)F_{i, k-1} + S(i, k) \quad (3-26)$$

Les coefficients  $A$  sont des matrices pentagonales. Ce système est transformé en un système à matrice tri diagonale dans chaque direction.

Suivant  $e$  :

$$A_p \Phi_p = A_N \Phi_N + A_S \Phi_S + S^* \quad (3-27)$$

Avec :

$$S^* = A_E \Phi_E + A_W \Phi_W + S \quad (3-28)$$

Ce système d'équations peut être résolu par l'algorithme de Thomas. La solution obtenue est notée  $\Phi^*$ .

Suivant  $h$  :

$$A_p \Phi_p = A_E \Phi_E + A_W \Phi_W + S^{**} \quad (3-29)$$

Avec :

$$S^{**} = A_N \Phi_N + A_S \Phi_S + S \quad (3-30)$$

Ce système d'équations peut être résolu par l'algorithme tri diagonal cyclique. La solution obtenue est notée  $\Phi^{**}$ . cette dernière est la solution obtenue après les deux balayages.

### 3.4.1.1 L'algorithme de Thomas

Cet algorithme consiste à transformer la matrice tri diagonale en une matrice bi diagonale. On peut mettre le système d'équations (3-27) et (3-29) sous la forme :

$$a_i \Phi_i = b_i \Phi_{i+1} + c_i \Phi_{i-1} + d_i \quad (3-31)$$

$a_i, b_i$  et  $c_i$  sont des coefficients,  $d_i$  comprend les termes de source. On suppose que la relation entre  $\Phi_i$  et  $\Phi_{i+1}$  (relation de récurrence) est :

$$\Phi_i = P_i \Phi_{i+1} + Q_i \quad (3-32)$$

Donc :

$$\Phi_{i-1} = P_{i-1} \Phi_i + Q_{i-1} \quad (3-33)$$

La substitution de (3-33) dans l'équation (3-31) donne :

$$a_i \Phi_i = b_i \Phi_{i-1} + c_i (P_{i-1} \Phi_i + Q_{i-1}) + d_i \quad (3-34)$$

Donc :

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (3-35)$$

$$Q_i = \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (3-36)$$

Par définition :

$$c_i = 0, b_{il} = 0 \quad (3-37)$$

On doit avoir :

$$P_{il} = 0 \quad (3-38)$$

Avec :

$$P_1 = \frac{b_1}{a_1} \quad (3-39)$$

$$Q_1 = \frac{d_1}{a_1} \quad (3-40)$$

D'après (3-32) et (3-38), on trouve :

$$Q_{il} = \Phi_{il} \quad (3-41)$$

Les étapes de l'algorithme de thomas sont :

1- calcul de  $P_1$  et  $Q_1$

2- calcul  $P_i$  et  $Q_i$  par les équations (3-39) et (3-40)

3-obtenir les différentes valeurs de la variable  $\Phi_i$  par l'utilisation de l'équation (3-32)

### 3.5 L'algorithme SIMPLER

On utilise l'algorithme SIMPLER pour la solution séquentielle des équations de discrétisation des vitesses et de la pression [21]. L'algorithme est constitué des étapes suivantes :

- 1)- initialiser une estimation de champ de vitesse  $V_\varepsilon, V_\eta$  au temps (t) et (t- $\Delta t$ ).
- 2)- calculer les coefficients des équations de discrétisation de  $V_\varepsilon, V_\eta$ .
- 3)- calculer les pseudo vitesses  $\hat{V}_e, \hat{V}_h$  par les équations de discrétisation des quantités de mouvement sans les termes de pression.
- 4)- utiliser les pseudo vitesse pour calculer la source de l'équation de pression.
- 5)- résoudre le système d'équation de pression et obtenir une estimation de pression  $P^*$ .
- 6)- utiliser la pression estimée  $P^*$  pour calculer le champ de vitesse estimé  $V_e^*, V_h^*$ .
- 7)- utiliser le champ de vitesse pour calculer la source de l'équation de pression est obtenir une correction de pression  $P'$ .
- 8)- résoudre l'équation de correction de pression et corriger le champ de vitesse.
- 9)- s'il n'y pas de convergence retourner à l'étape 2.

### 3.6 Structure du code de calcul

Le code de calcul est constitué d'un programme principal en langage Fortran77, utilisant les sous-routines suivantes :

**Mesh** : calcule tous les paramètres du maillage.

**Init** : initialise le champ de vitesses.

**Zerout** : mettre a zéro les coefficients d'une équation de discrétisation avant leur évaluation pour éviter l'interférence entre les différentes équations de discrétisation.

**Masse** : calcule les coefficients de l'équation discrétisée de l'équation de continuité.

**Emom**: calcule les coefficients de l'équation discrétisée de l'équation de la conservation de quantité de mouvement suivant la direction  $\varepsilon$ .

**Tmom**: calcule les coefficients de l'équation discrétisée de l'équation de la conservation de quantité de mouvement suivant la direction  $\eta$ .

**Tsweep**: établit le balayage suivant la direction  $\eta$ .

**Esweep**: établit le balayage suivant la direction  $\varepsilon$ .

**Bdryu**: calcule les conditions aux limites de la vitesse suivant  $\varepsilon$ .

**Bdryv**: calcule les conditions aux limites de la vitesse suivant  $\eta$ .

**Bdryp**: calcule les conditions aux limites de pression.

**Tdma**: résolution par l'algorithme de Thomas.

**Tdmacy** : résolution par l'algorithme tri diagonale cyclique.

# **Chapitre 4**

## **Résultats et discussion**



## 4. Résultats et discussion

Dans ce chapitre on présente les résultats de notre étude concernant les régimes d'écoulement visqueux et incompressible, bidimensionnel sur un cylindre elliptique. En premier lieu on considère, pour la validation du code de calcul, le cas de l'écoulement non visqueux où la répartition de la vitesse est analytiquement connue. Dans la deuxième partie on expose les résultats de l'écoulement visqueux avec le cas  $AR=3.5$  et Reynolds entre 10 et 280 et on fait la comparaison avec les résultats numériques obtenus par **S. A. Johnson *et al.* [12]**. Tous les cas sont effectués pour un pas de temps  $\Delta t = 10^{-3}$  avec un nombre total d'itérations atteignant  $4.310^6$  itérations. Pour exécuter les calculs itératifs, on a utilisé un PC Pentium 4 avec un processeur d'une fréquence de 2.8 GHz et une mémoire RAM de 250 Mo. Pour la représentation graphique de nos résultats on a utilisé les logiciels de graphisme **ORIGIN 6.0** et **TECPLOT 9.0**.

### 4.1 L'écoulement non-visqueux

#### 4.1.1 Validation du code de la simulation numérique

L'écoulement sans frottement ou l'écoulement non visqueux sur une ellipse est classique et connu. Dans la référence [22] la distribution de la vitesse autour de l'ellipse est donnée en fonction de l'angle  $b$  et l'aspect des axes  $\Gamma$  :

$$\frac{u_e}{u_\infty} = (1 + \Gamma)\cos(\beta) \quad (4-1)$$

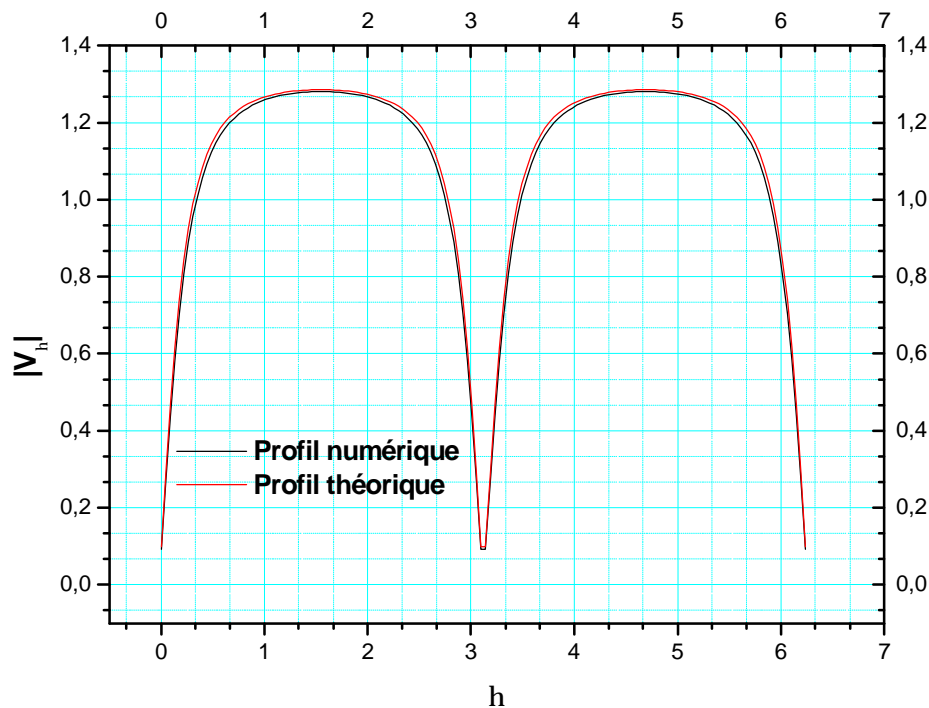
$$\text{Avec } b = \arctg\left(\frac{dX}{dY}\right) \text{ et } \Gamma = \frac{B}{A}$$

En effectuant les transformations de cet angle  $b$  en coordonnées elliptiques ainsi que les différences d'orientation de l'angle  $b$  par rapport à  $h$ , on peut comparer le profil cité avec notre résultat. La figure 4.1 compare les deux profils des vitesses, analytique et numérique. Ils sont en très bon accord, validant ainsi notre code.

# Sommaire

## Nomenclature

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1 Etude bibliographique</b>	<b>2</b>
1.1 Etudes théoriques .....	2
1.1.1 Etudes analytiques .....	2
1.1.2 Etudes numériques .....	3
1.2 Etudes expérimentales .....	7
1.3 Conclusion et objectif de notre travail .....	9
<b>Chapitre 2 Modélisation mathématique</b>	<b>11</b>
2.1 Géométrie du système .....	11
2.2 Les coordonnées elliptiques .....	11
2.3 Le modèle mathématique .....	13
2.3.1 Les hypothèses de travail .....	13
2.3.2 Equations de conservation .....	13
2.3.3 Conditions aux limites .....	14
2.4 Forme adimensionnelle des équations .....	16
2.4.1 Equations de conservation adimensionnelles .....	17
2.4.2 Les conditions aux limites adimensionnelles .....	18
<b>Chapitre 3 Résolution numérique</b>	<b>20</b>
3.1 La méthode numérique de résolution .....	20
3.1.1 Maillage .....	20
3.2 La discrétisation des équations .....	22
3.2.1 La discrétisation temporelle au second ordre .....	22
3.2.2 La discrétisation spatiale au second ordre .....	23
3.3 Discrétisation des équations modélisantes .....	24
3.3.1 Discrétisation de l'équation de continuité .....	24
3.3.2 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant $e$ .....	25
3.3.2.1 Discrétisation du terme temporel .....	25
3.3.2.2 Discrétisation des termes convectifs .....	26
3.3.2.3 Discrétisation des deux premier termes diffusifs et du terme de pression ..	28
3.3.2.4 Discrétisation des autres termes .....	30



**Figure 4.1 : La variation de la valeur absolue de la vitesse à la surface de l'ellipse pour  $\varepsilon_i=0.29389$ .**

#### 4.1.2 Structure de l'écoulement

La figure 4.2 illustre une représentation vectorielle du champ de vitesse. Suffisamment loin de l'ellipse, l'écoulement est horizontal et uniforme. L'écoulement suit le profil de l'ellipse et on voit que près de la surface la vitesse subit des variations circonférentielles importantes. Elle est nulle au bord d'attaque et au bord de fuite et atteint son maximum aux points correspondant à

l'épaisseur maximale de l'ellipse ( $h = \frac{p}{2}$  et  $h = \frac{3p}{2}$ ). La figure 4.3 est un agrandissement de ce

champ de vitesse autour de l'ellipse. Dans les deux figures, on a représenté les vecteurs de vitesse avec un saut de 3 pour la clarté de la représentation graphique.

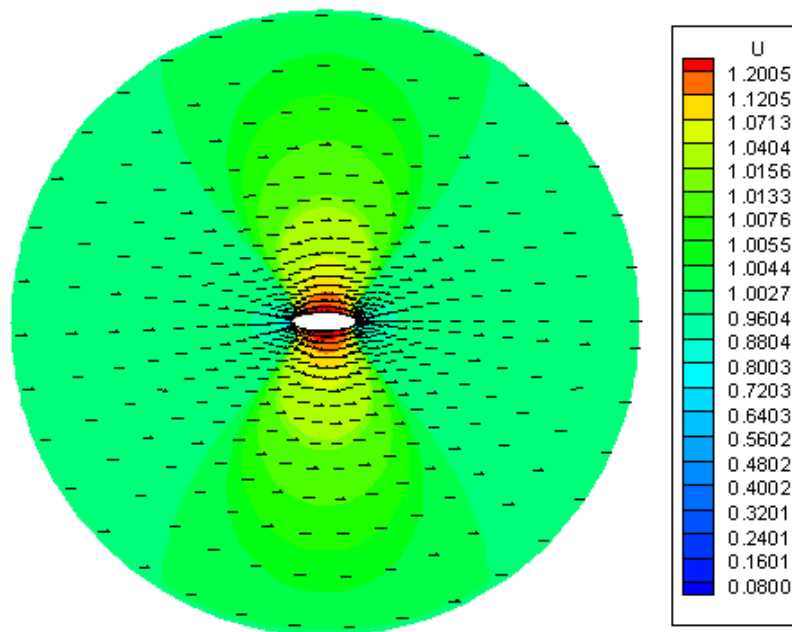


Figure 4.2 : Le champ d'écoulement autour de l'ellipse

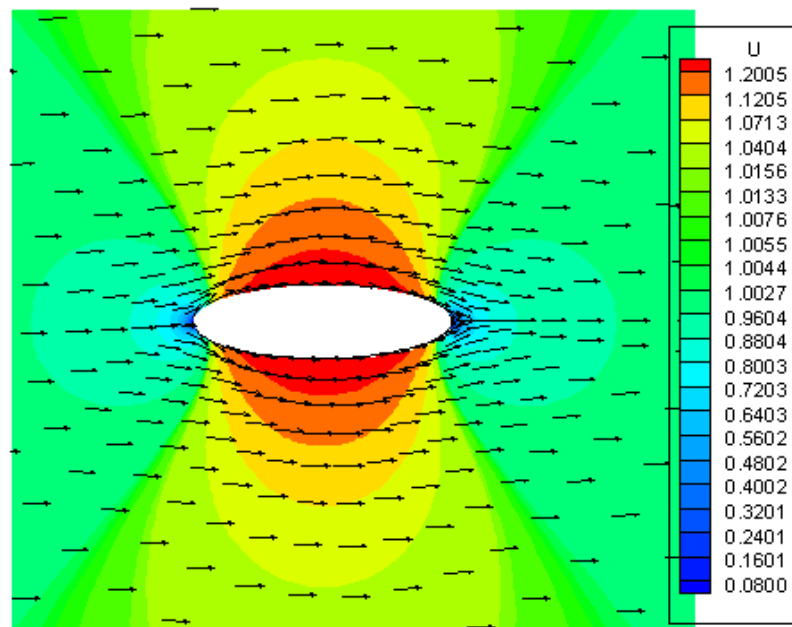


Figure 4.3 : Agrandissement du champ d'écoulement autour de l'ellipse

### 4.1.3 Le champ de pression

Sur la figure 4.4, on représente la distribution spatiale de la pression. Les variations spatiales importantes sont, comme prévu, localisées près de l'ellipse. Le champ de pression est symétrique par rapport aux axes de l'ellipse. La pression maximale est au bord d'attaque et au bord de fuite. Du bord d'attaque elle diminue suivant la direction circonférentielle jusqu'à l'axe vertical de l'ellipse. A partir de cette position elle augmente jusqu'au bord de fuite. Comme la vitesse et la pression sont liées par l'équation de Bernoulli, on voit que la vitesse augmente aux endroits à faible pression et diminue dans les zones à haute pression. La figure 4.5 est un agrandissement autour de l'ellipse. La variation du coefficient de pression sur la surface de l'ellipse (figure 4.6) montre que la valeur maximale  $C_p=1$  est au bord d'attaque et au bord de fuite et atteint sa valeur minimale  $C_p=-0.7$  aux points de l'épaisseur maximale de l'ellipse  $h = \frac{p}{2}$  et  $h = \frac{3p}{2}$ .

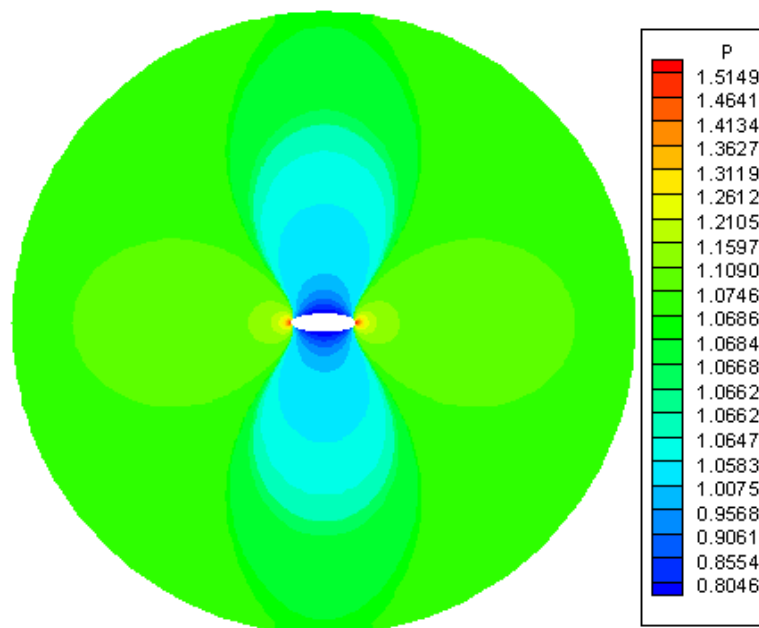


Figure 4.4 : Le champ de pression autour de l'ellipse.

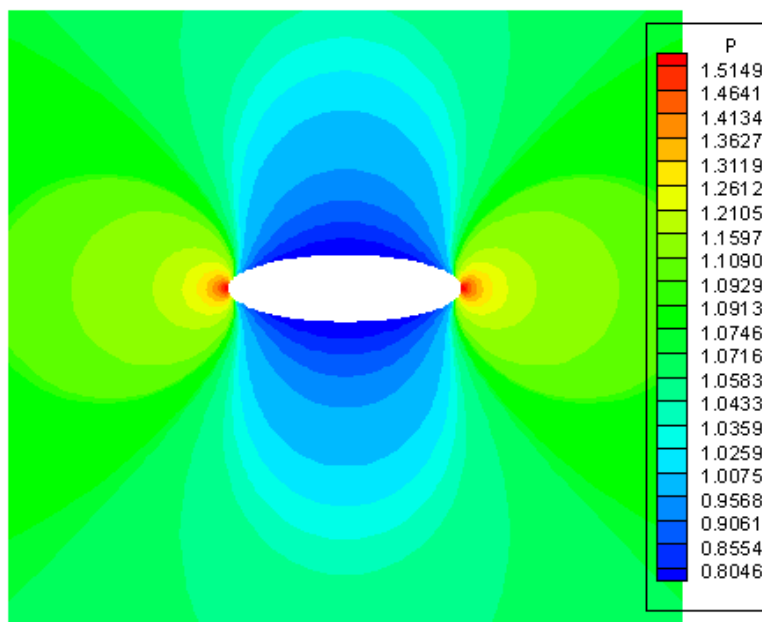


Figure 4.5 : Agrandissement du champ de pression autour de l'ellipse.

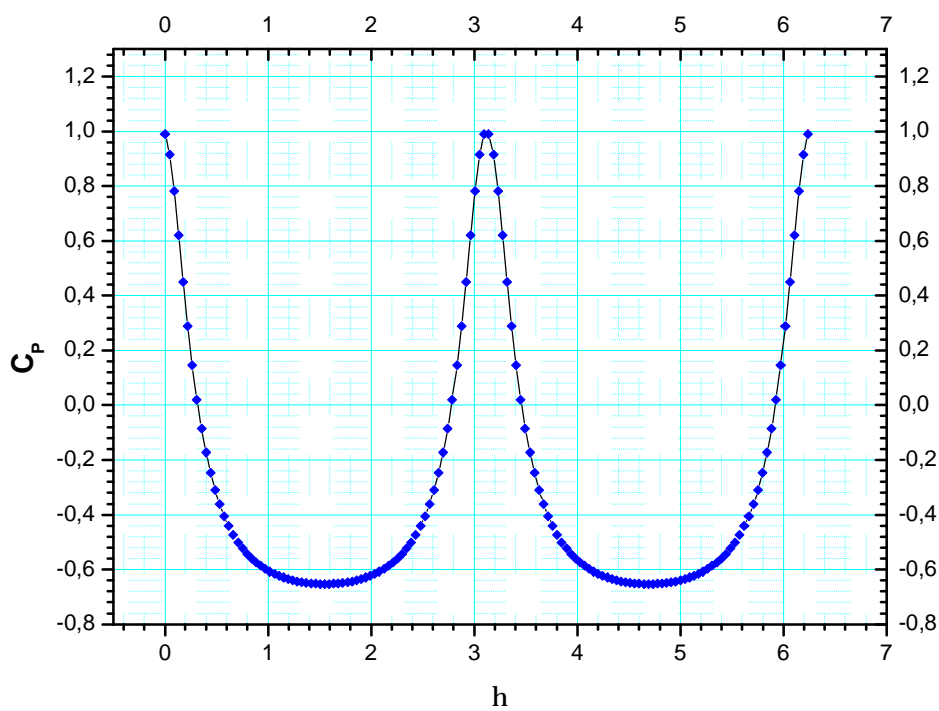


Figure 4.6 : La variation de coefficient de pression

## 4.2 L'écoulement visqueux

Ce cas est plus réaliste parce qu'il tient compte des frottements visqueux. Ces derniers sont surtout considérables près de la paroi solide comme prévu par la théorie de la couche limite [23]. Plusieurs structures derrière l'ellipse, en régime permanent et en régime transitoire, sont possibles. Ces régimes sont qualitativement similaires à celui du cas de l'écoulement visqueux sur un cylindre circulaire. Dans les références [24, 25] les différentes structures du sillage en fonction de nombre de Reynolds sont illustrées.

### 4.2.1 Comparaison des résultats

Pour permettre la comparaison de nos résultats avec ceux de **S. A. Johnson *et.al*** [12] on introduit dans notre code de calcul les mêmes paramètres géométrique et dynamique utilisés dans la référence [12]. Ces paramètres sont :  $AR=2$ , deux valeurs de nombre de Reynolds : 40 et 45 et  $\alpha=90^0$ . Pour  $Re=45$  ils ont obtenu un écoulement transitoire caractérisé par le détachement périodique du vortex (figure 4.7). On a obtenu la même structure de l'écoulement pour cette valeur du nombre de Reynolds (figure 4.8) et le régime transitoire obtenu par notre code de calcul apparaît à partir de  $Re=37$ . Pour  $Re=40$ , les auteurs obtiennent un écoulement stationnaire symétrique avec deux vortex derrière le cylindre, comme cela est illustré dans la figure 4.9. Pour cette valeur nous obtenons qualitativement la même structure qui est obtenu avec  $Re=45$ . On obtient le régime stationnaire à  $Re \leq 30$  (figure 4.10). La différence entre nos résultats et les résultats des auteurs est liée par la nature des conditions aux limites utilisées dans les deux études. Les conditions aux limites utilisées par les auteurs sont celles du non glissement sur la surface de cylindre, une vitesse uniforme en amont et un gradient de vitesse nul en aval.

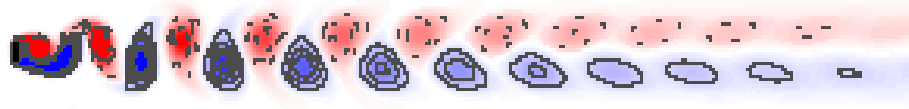


Figure 4.7 : détachement périodique du vortex pour  $AR=2$  et  $Re=45$  [12].

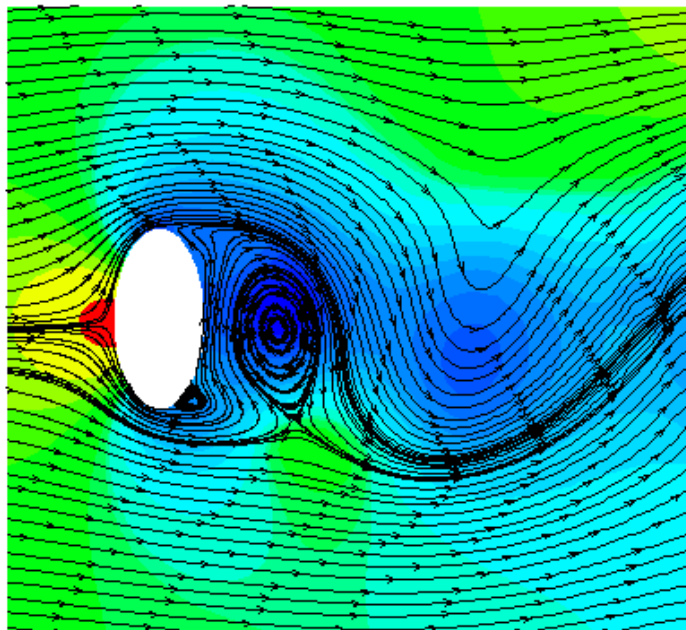


Figure 4.8 : Ecoulement transitoire obtenu par notre code de calcul pour  $AR=2$  et  $Re=37$ .





Figure 4.9 : Ecoulement stationnaire avec 2-vortex pour  $AR=2$  et  $Re=40$  [12].

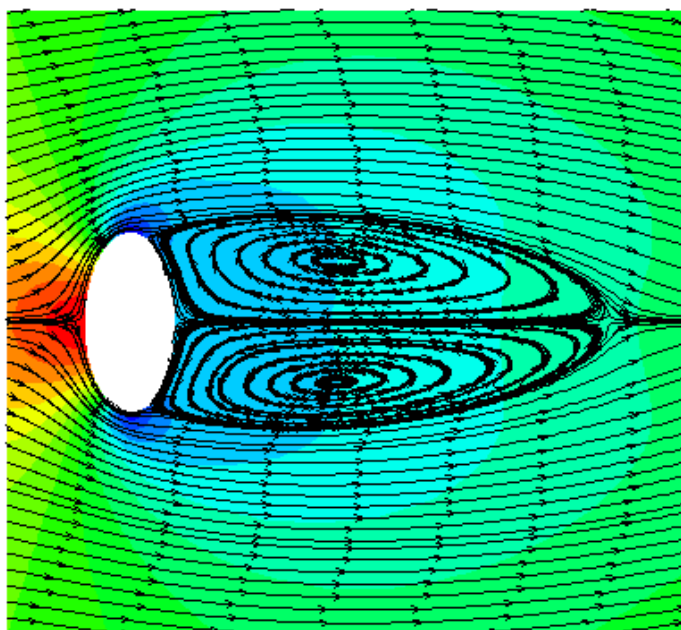


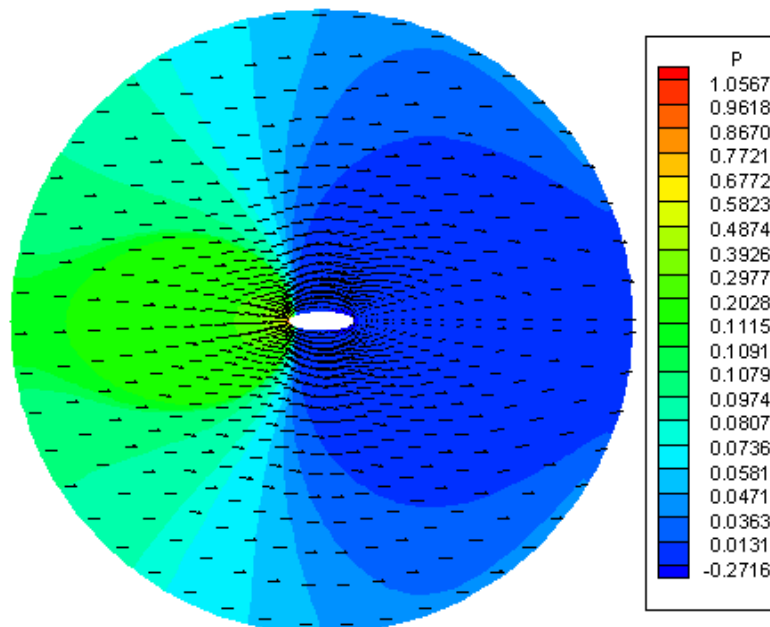
Figure 4.10 : Ecoulement stationnaire avec 2-vortex obtenu par notre code de calcul pour  $AR=2$  et  $Re=30$ .

## 4.2.2 Structure de l'écoulement

### 4.2.2.1 L'écoulement à $Re=10$

La figure 4.11 illustre le champ de pression et les vecteurs de vitesse autour de l'ellipse. On remarque que le champ de pression est symétrique par rapport à l'axe horizontal de l'ellipse. La pression maximale se localise au bord d'attaque et elle diminue suivant la direction de l'écoulement jusqu'au bord de fuite. L'observation générale indique que l'écoulement derrière l'ellipse est stationnaire et parfaitement symétrique avec 0-vortex. La figure 4.12 est un agrandissement autour de l'ellipse. La variation du coefficient de pression sur la surface de l'ellipse comme l'illustre la figure 4.13 montre que le maximum  $C_p=2.28$  est situé au bord d'attaque et diminue jusqu'à atteindre le minimum  $C_p=-0.741$  au bord de fuite.

La figure 4.14 illustre la variation du coefficient de frottement local sur la surface de l'ellipse. On constate que le  $C_f$  prend une valeur nulle au bord d'attaque ( $h=p$ ). A partir du bord d'attaque il augmente graduellement jusqu'au points  $\eta=2.828$  et  $\eta=3.43$  pour atteindre son maximum  $C_f=1.20$ . Puis il diminue jusqu'à  $C_f=0$  au bord de fuite.



**Figure 4.11 : Le champ de pression et les vecteurs de vitesse pour  $Re=10$**

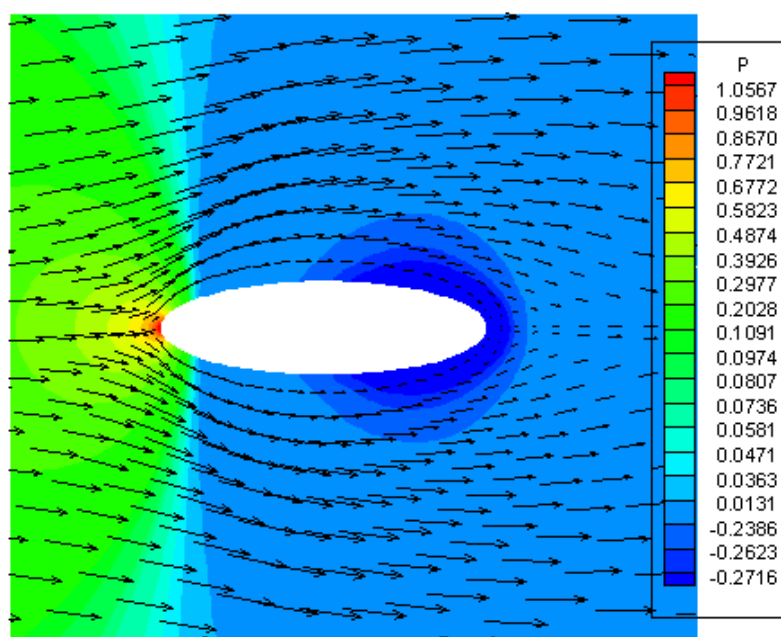


Figure 4.12 : Agrandissement du champ de pression et les vecteurs de vitesse pour  $Re=10$

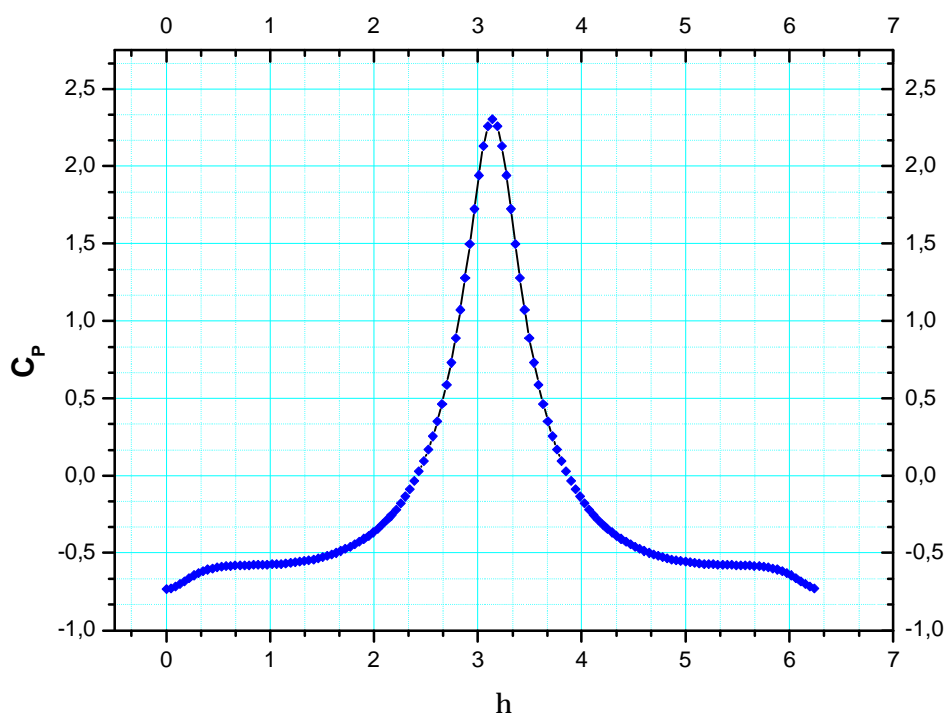


Figure 4.13 : Variation de coefficient de pression pour  $Re=10$

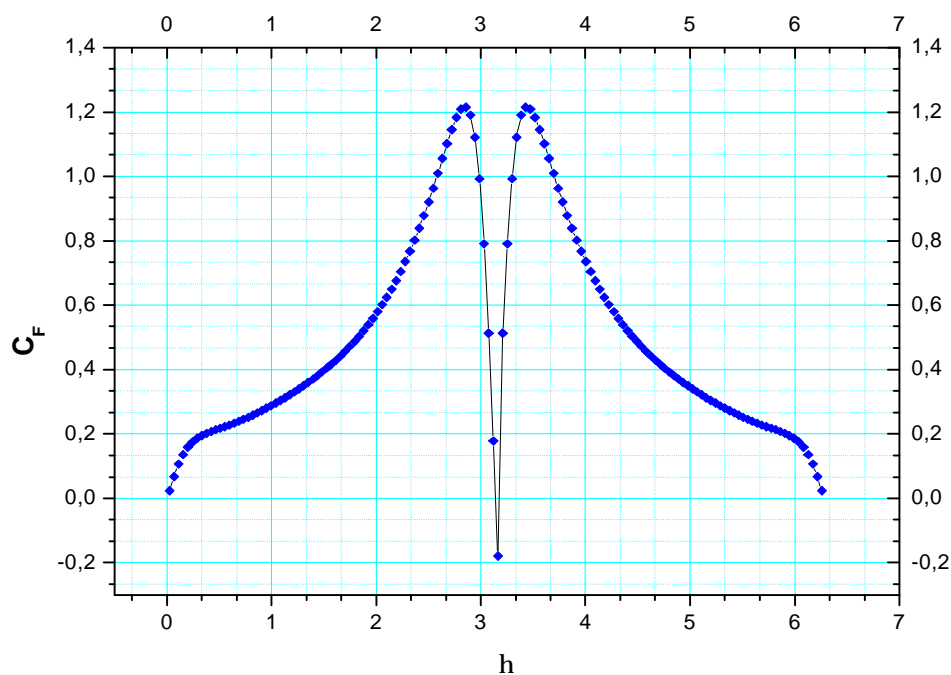


Figure 4.14 : Variation de coefficient de frottement local pour  $Re=10$

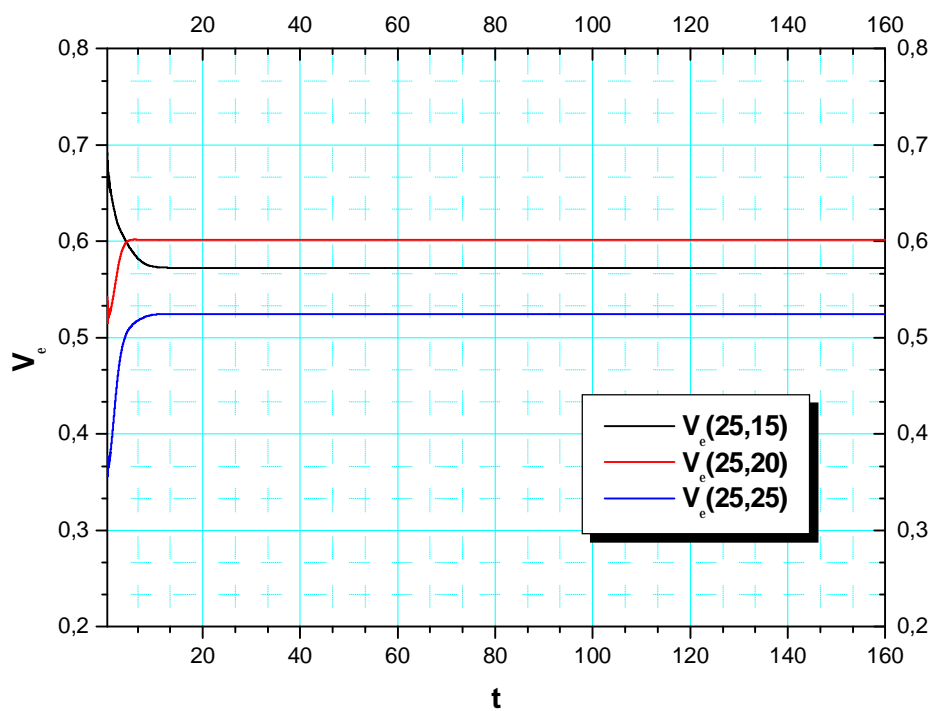


Figure 4.15 : Variation temporelle de la vitesse pour  $Re=10$

Dans La figure 4.15 on présente la variation temporelle de la vitesse pour quelques points du domaine. La figure montre l'existence d'un champ oscillatoire non harmonique pour des temps courts ( $t < 20$ ), mais plus on marche dans le temps, l'amplitude des oscillations s'amortit et s'annule quand l'écoulement atteint le régime permanent.

#### 4.2.2.2 L'écoulement à $Re=50$

On représente sur la figure 4.16 le champ de pression et quelques lignes de courant. On constate que l'écoulement est stationnaire et le champ de pression est symétrique par rapport à l'axe horizontal de l'ellipse. Un agrandissement de la figure 4.16 autour l'ellipse est illustrée dans la figure 4.17. On remarque dans cette figure la naissance de deux tourbillons localisés sur le bord de fuite de l'ellipse de dimensions très petites par rapport aux dimensions de l'ellipse. On peut justifier l'apparition de ces tourbillons à partir des considérations de couche limite. Il est connu que l'épaisseur de la couche limite augmente à partir du bord d'attaque. Cette couche limite subit un décollement quelque part sur la surface solide où le gradient de pression suivant la direction de l'écoulement est positif. A partir des points de décollement, des écoulements secondaires (des tourbillons contrarotatifs) se forment dans un domaine appelé le sillage [23]. Le sillage se propage à l'aval du bord de fuite par l'effet des contraintes visqueuses.

Dans notre cas les points de décollement sont  $\eta_1=0.211$  et  $\eta_2=6.028$ . Suivant la direction verticale, on constate que la courbure des lignes de courant est plus importante près de la surface de l'ellipse et diminue en s'éloignant de cette dernière. Suffisamment loin de cette surface l'écoulement est uniforme et horizontal. La variation spatiale de la pression est très importante autour de l'ellipse. La pression maximale se localise au bord d'attaque elle diminue suivant la direction de l'écoulement jusqu'aux points  $\eta=1.567$  et  $\eta=4.716$ . Entre ces points et le bord de fuite, elle augmente comme le montre la figure 4.18.

D'après la figure 4.18 on remarque que le coefficient de pression prend une valeur maximale  $C_p=1.403$  au bord d'attaque et diminue jusqu'à une valeur minimale  $C_p=-0.454$  aux point  $\eta=1.567$  dans la surface supérieure et  $\eta=4.716$  dans la surface inférieure. Entre ces points et le bord de fuite elle augmente jusqu'à  $C_p=-0.3$ .

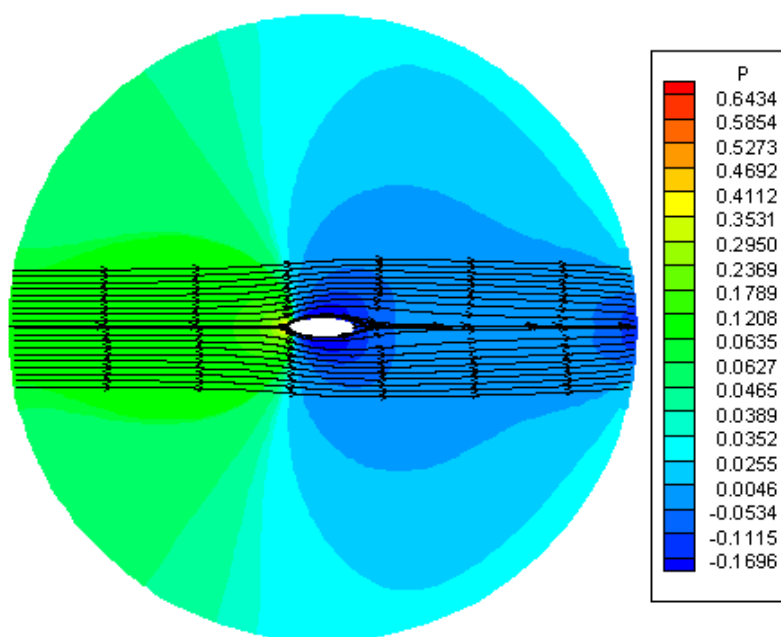


Figure 4.16 : Le champ de pression et les lignes de courant pour  $Re=50$

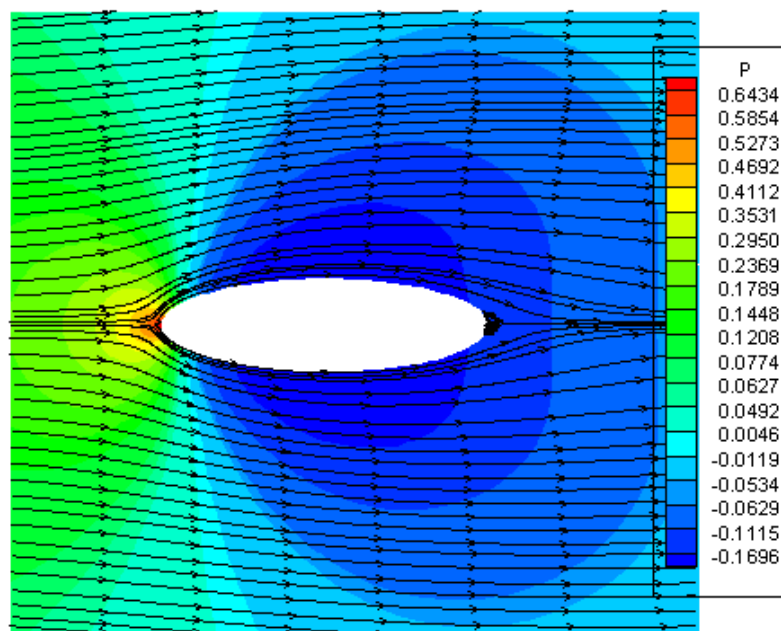
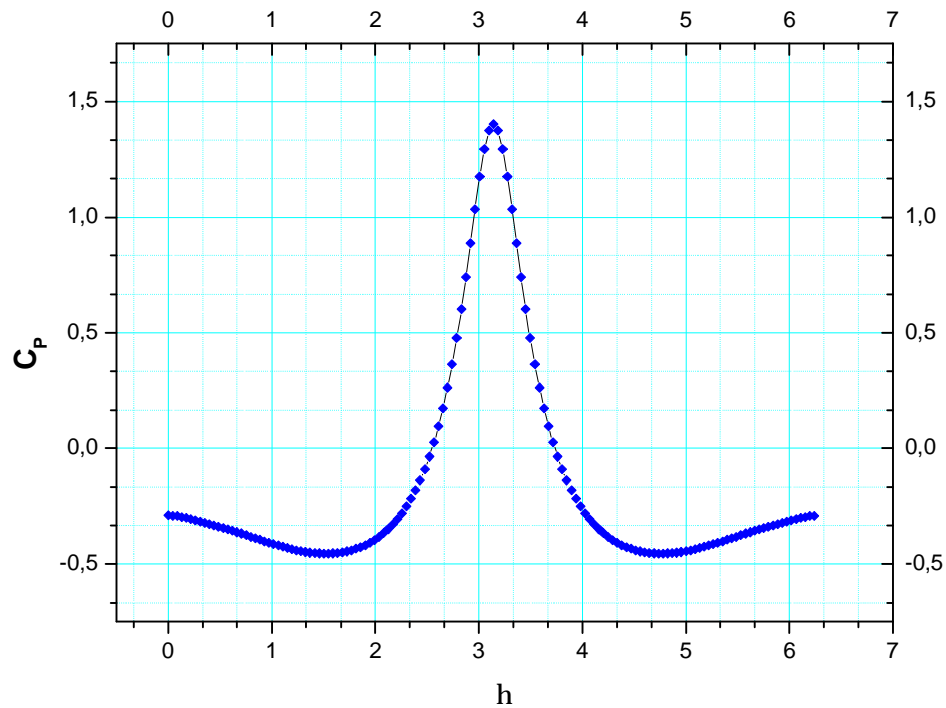


Figure 4.17 : Agrandissement du champ de pression et les lignes de courant pour  $Re=50$



**Figure 4.18 : Variation de coefficient de pression pour  $Re=50$**

Dans la figure 4.19 on présente les variations temporelles de la vitesse suivant la direction  $\varepsilon$  pour quelques points. Au début, on remarque de faibles variations de la vitesse jusqu'à  $t = 23$ . Pour des temps supérieures, les vitesses points seront stables et permanentes. Par conséquent l'écoulement est stable.

Sur la figure 4.20 on illustre la variation du coefficient de frottement local suivant la surface de l'ellipse. Au bord d'attaque ( $h = p$ ) le coefficient de frottement local est nul puis il augmente jusqu'à la valeur maximale  $C_f=0.552$  aux points  $\eta=2.852$  et  $\eta=3.431$ . Aux points  $\eta=0.211$  et  $\eta=6.028$ , qui désignent les points de décollement de la couche limite où le gradient de la vitesse égal à zéro le  $C_f$  est nul. Au-dessus de ces points où le gradient de vitesse est négatif le  $C_f$  prend la valeur minimale égale à  $C_f=-0.0032$  aux point  $\eta=0.073$  et  $\eta=6.154$ . Puis il augmente jusqu'au bord de fuite.

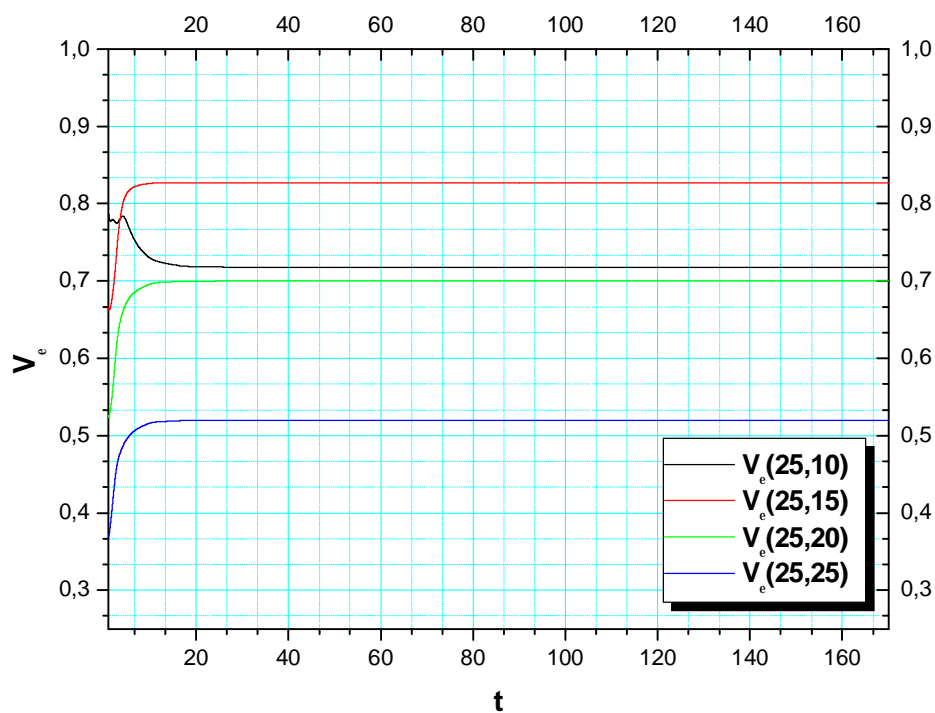


Figure 4.19 : Variation temporelle de la vitesse pour  $Re=50$

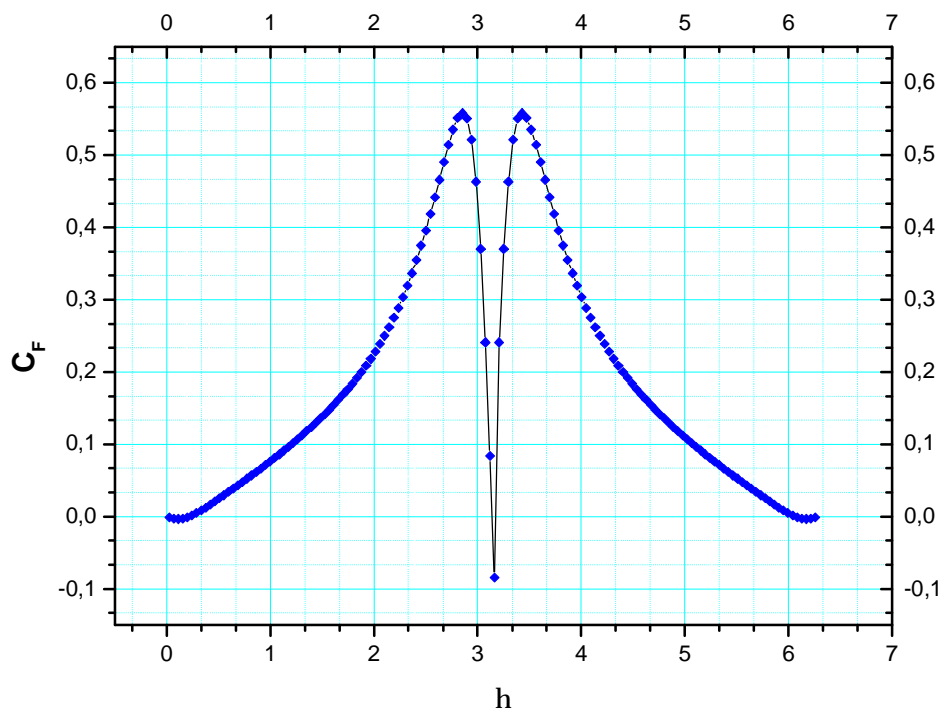


Figure 4.20 : Variation de coefficient de frottement local pour  $Re=50$



### 4.2.2.3 L'écoulement à $Re=150$

Avec l'augmentation du nombre de Reynolds jusqu'à  $Re=150$ , on trouve toujours un écoulement stationnaire et symétrique par rapport à l'axe horizontal de l'ellipse comme l'illustre les figures 4.21 et 4.22. Les points de décollement sont  $\eta=0.543$  et  $\eta=5.737$ . A partir de ces points les lignes de courant sont refermées sur elles-mêmes pour constituer deux tourbillons contrarotatifs et permanents de tailles égales, localisés entre les points de décollement et l'aval du bord de fuite. Ils sont enveloppés par les deux parties de l'écoulement latéral (sur les parties, supérieure et inférieure de l'ellipse) qui joignent à une distance égale  $a/2$ , à partir du centre de l'ellipse. Ce régime d'écoulement que nous avons obtenu a été auparavant obtenu qualitativement par **S. A. Johnson et al. [12]** pour  $AR=2$  et  $Re=40$ ,  $\alpha=90^\circ$ . On trouve toujours le même régime d'écoulement avec l'augmentation de nombre de Reynolds jusqu'à  $Re=200$ . On a remarqué que la longueur des tourbillons augmente avec l'augmentation de nombre de Reynolds.

Dans la figure 4.23 on illustre la distribution spatiale de la pression. On remarque la symétrie du champ de pression par rapport à l'axe horizontal de l'ellipse. Près de la limite du domaine de calcul, la pression est uniforme. Les variations spatiales importantes de la pression se localisent près de l'ellipse et dans la zone du sillage. La pression maximale est au bord d'attaque elle diminue graduellement jusqu'aux points  $\eta=0.543$  et  $\eta=5.737$ . Entre ces points et le bord de fuite elle augmente.

La variation du coefficient de pression sur la surface de l'ellipse est illustrée dans la figure 4.24. On constate que le maximum  $C_p=1.17$  se localise au bord d'attaque. Puis il diminue graduellement jusqu'à  $-0.441$  les points  $\eta=1.718$  et  $\eta=4.537$ . Entre ces points et le bord de fuite il augmente jusqu'à  $-0.2$ .

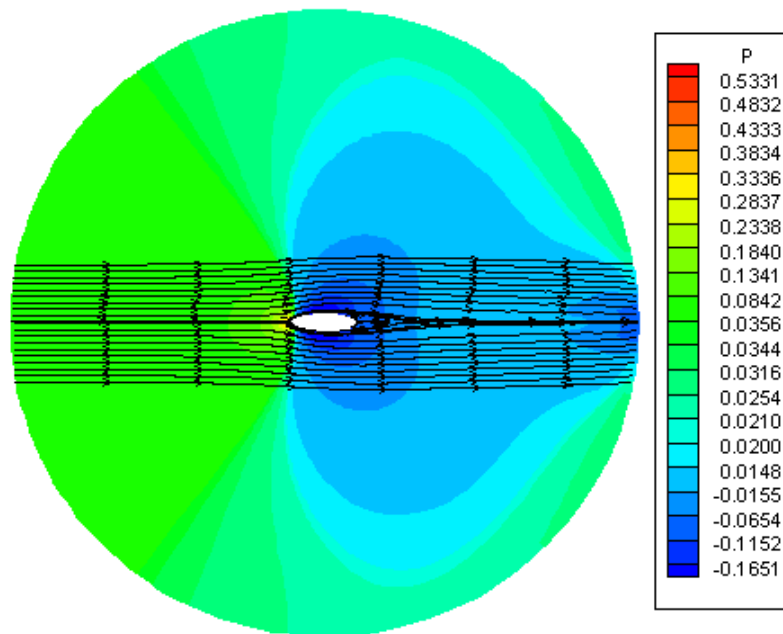


Figure 4.21 : Le champ de pression et les lignes de courant pour  $Re=150$

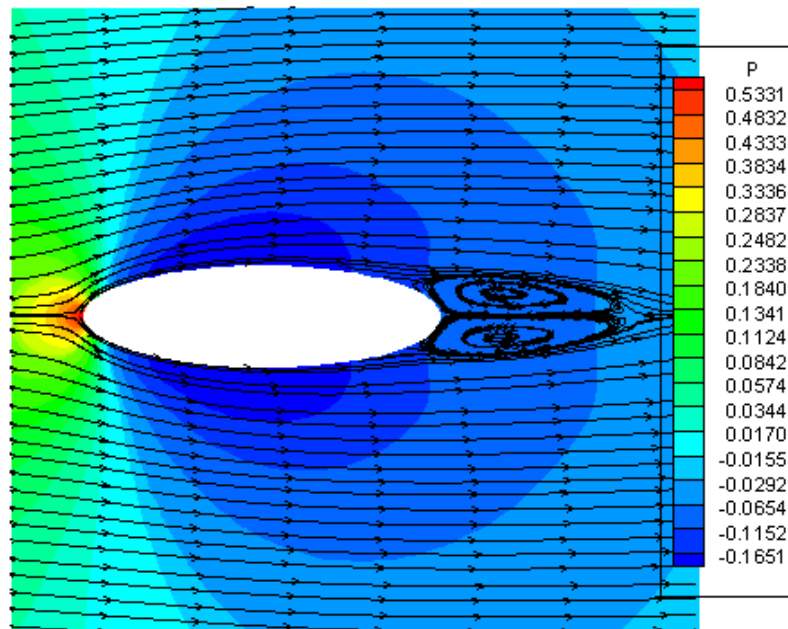
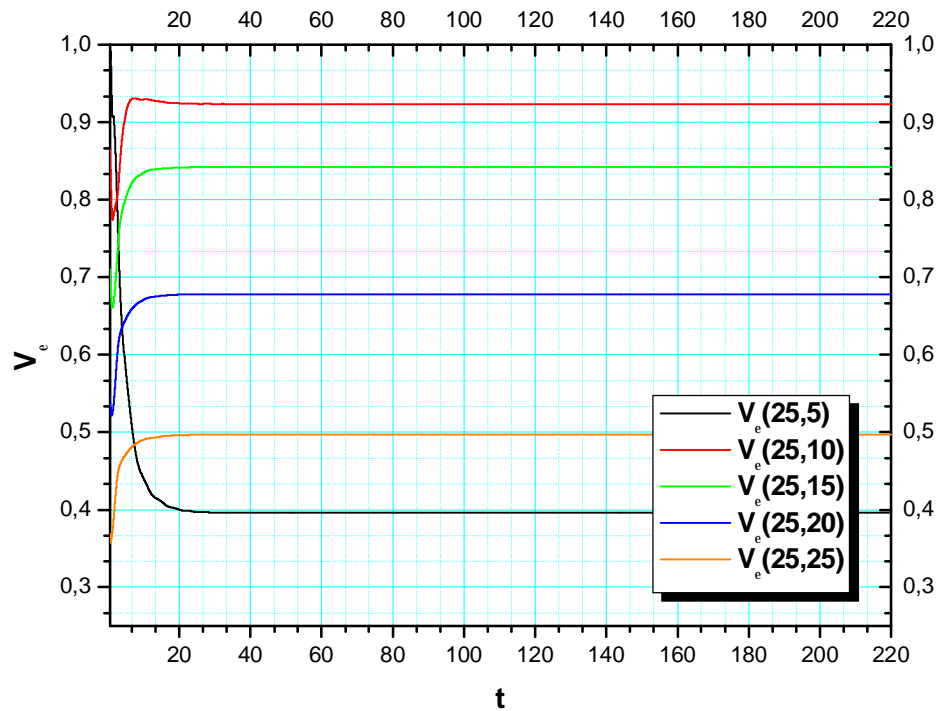


Figure 4.22 : Agrandissement du champ de pression et les lignes de courant pour  $Re=150$



**Figure 4.23 : Variation temporelle de la vitesse pour  $Re=150$ .**

Le champ de vitesse montre au début ( $t < 23$ ) un champ oscillatoire non harmonique. A partir de  $t = 23$  les oscillations s'amortissent et le champ de vitesse en tous points devient permanent, comme le montre la figure 4.23, et par conséquent le régime est stable.

Dans la figure 4.25 on présente la distribution du coefficient de frottement local sur la surface de l'ellipse. Il atteint son maximum ( $C_f=0.332$ ) aux points  $\eta=2.864$  et  $\eta=3.416$ , et diminue graduellement jusqu'à une valeur nulle aux points de décollement  $\eta=0.543$  et  $\eta=5.737$ . Il continue à diminuer pour atteindre son minimum ( $C_f=-0.011$ ) aux points  $\eta=0.175$  et  $\eta=6.097$ . Entre ces points et le bord de fuite il augmente. Au bord d'attaque le coefficient de frottement local est nul.

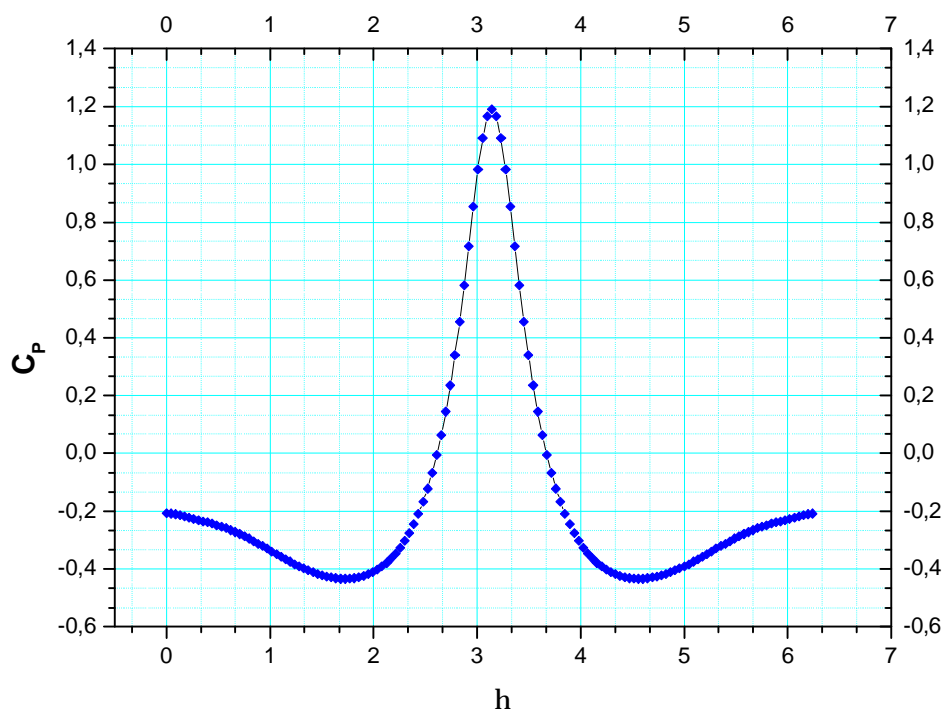


Figure 4.24 : Variation de coefficient de pression pour  $Re=150$

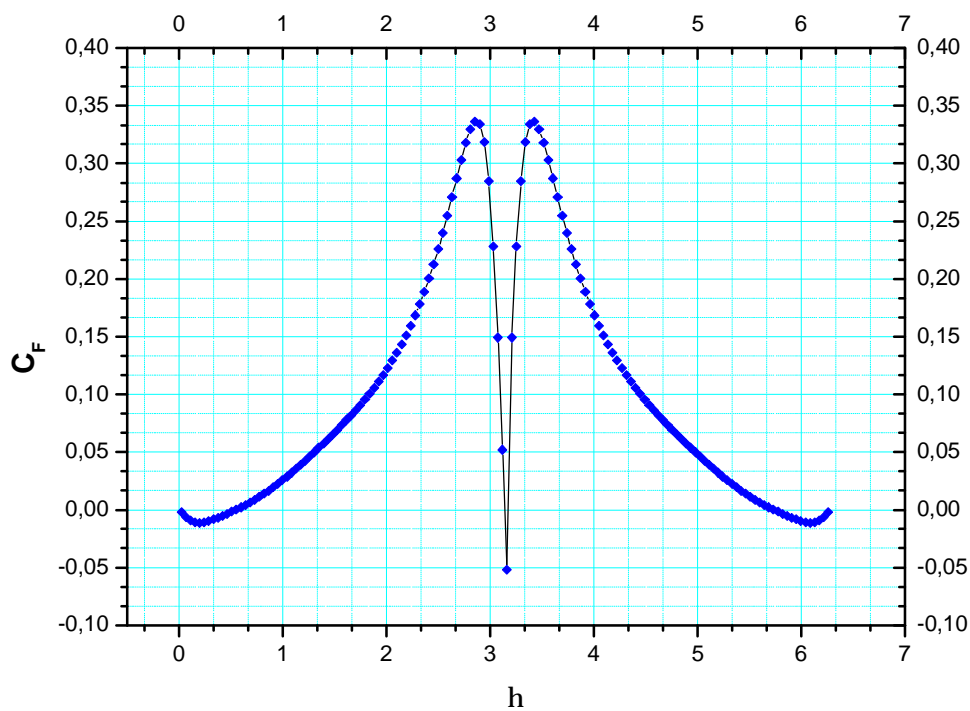


Figure 4.25 : Variation de coefficient de frottement local pour  $Re=150$

#### 4.2.2.4 L'écoulement à $Re=210$

La figure 4.26 représente le champ de pression et quelques lignes de courant à l'instant  $t=800$ . Un agrandissement de la figure autour de l'ellipse est illustré dans la figure 4.27. On remarque que l'écoulement dans la zone du sillage est asymétrique par rapport à l'axe horizontal de l'ellipse. Il est spatialement ondulé. Les deux tourbillons près du bord de fuite ont des tailles différentes : le tourbillon inférieur est plus grand. Après un temps  $t=900$  comme illustré dans la figure 4.28 on voit que le tourbillon supérieur est plus grand que le tourbillon inférieur, et on constate que les tourbillons sont alternés dans le temps. Ils forment ce qu'on appelle les tourbillons alternés de **Bénard-Von Karman**. Une explication du régime alterné est donnée par l'instabilité de la couche de cisaillement. Cette dernière est créée par la différence entre la vitesse extérieure au sillage et la vitesse d'écoulement dans la zone de sillage. Cette couche de cisaillement peut éventuellement suffisamment devenir instable [12] pour une valeur critique de nombre de Reynolds. L'instabilité de cette couche de cisaillement est responsable de l'apparition de ce régime instable. Ce régime d'écoulement que nous avons obtenu est qualitativement similaire à celui de la référence [25] pour le cas de cylindre circulaire à  $Re=53$ .

La pression maximale est au bord d'attaque. Le long de la surface de l'ellipse, la pression chute à partir du bord d'attaque jusqu'aux points  $\eta=1.774$  et  $\eta=4.481$ . Près du bord de fuite et à l'aval de cette dernière la distribution de la pression est asymétrique par rapport à l'axe horizontal de l'ellipse. En ce qui concerne le coefficient de pression (figure 4.31), il est maximum ( $C_p=1.142$ ) au bord d'attaque et diminue progressivement jusqu'à la valeur  $C_p=-0.436$  aux points  $\eta=1.774$  et  $\eta=4.481$ .

Dans la figure 4.32 on présente la distribution du coefficient de frottement local sur la surface de l'ellipse. Il atteint son maximum ( $C_f=0.286$ ) aux points  $\eta=2.864$  et  $\eta=3.431$ , et diminue graduellement jusqu'à une valeur nulle aux points de décollement  $\eta=0.640$  et  $\eta=5.640$ . Il continue à diminuer pour atteindre son minimum ( $C_f=-0.013$ ) aux points  $\eta=0.186$  et  $\eta=6.085$ . Entre ces points et le bord de fuite il augmente. Au bord d'attaque le coefficient de frottement local est nul.

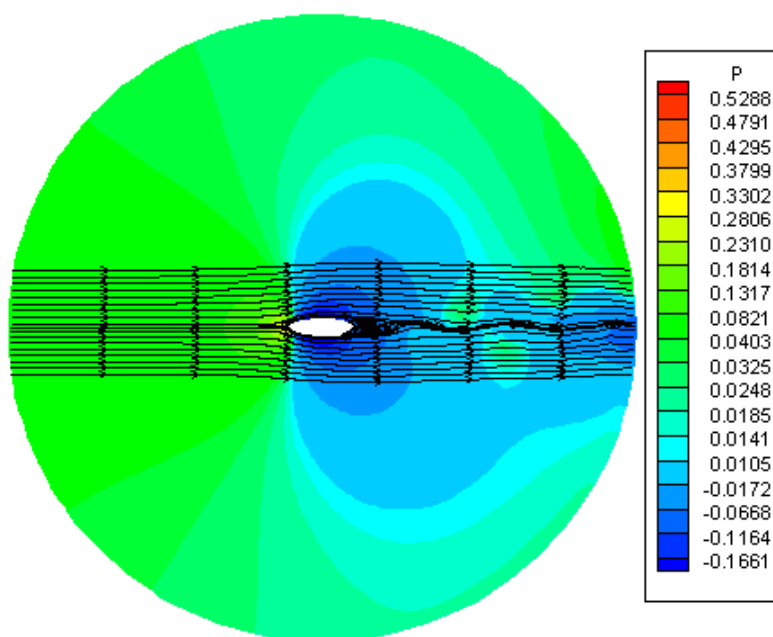


Figure 4.26 : Le champ de pression et les lignes de courant pour  $Re=210$  à  $t=800$

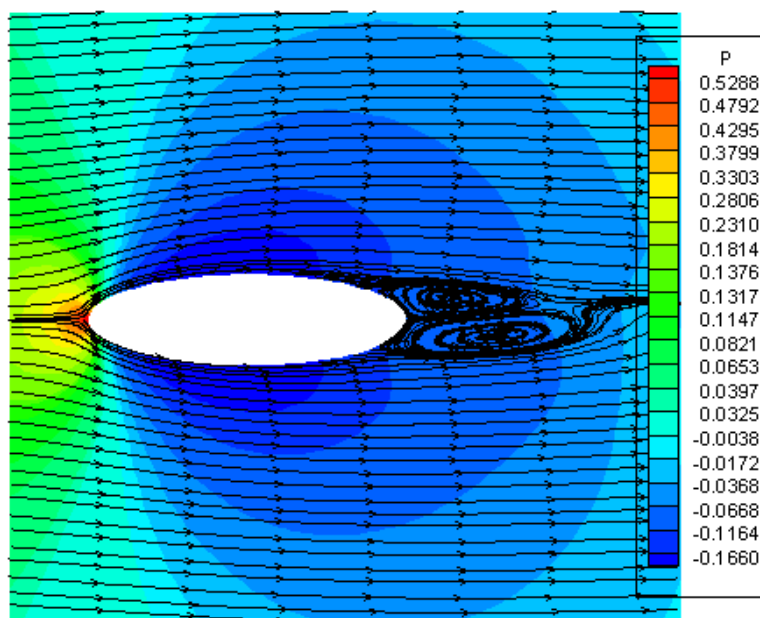
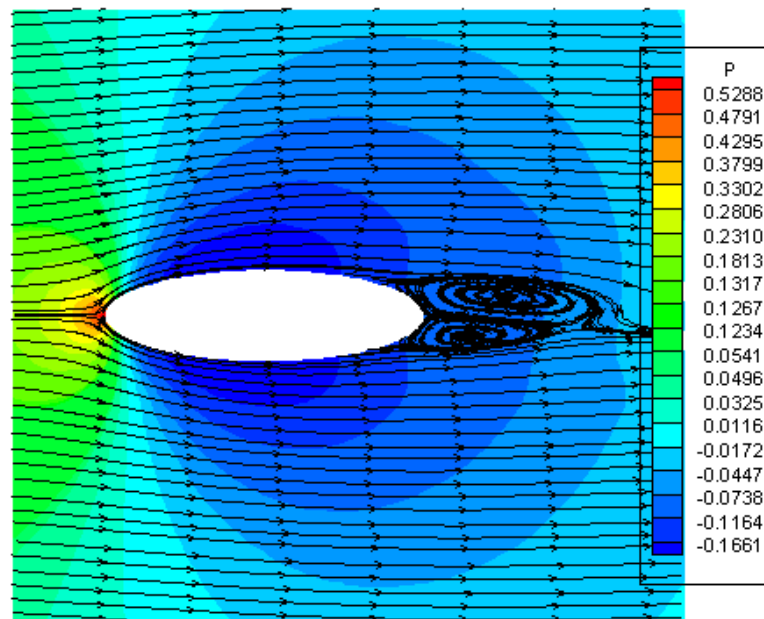


Figure 4.27 : Agrandissement du champ de pression et les lignes de courant pour  $Re=210$  à  $t=800$



**Figure 4.28 : Agrandissement du champ de pression et les lignes de courant pour  $Re=210$  à  $t=900$**

Dans la figure 4.29, on représente les variations temporelles de quelques vitesses près du bord de fuite. On remarque que les variations sont dépendantes du temps (oscillatoire). Pour s'assurer que les oscillations temporelles de l'écoulement sont physiques et non numériques, on a réduit le pas du temps de  $\Delta t = 10^{-3}$  à  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ , on a constaté que les oscillations ne sont pas amorties. Elles sont les mêmes avec les deux pas du temps. Les oscillations pour un temps inférieur à  $t = 900$  sont obtenues avec  $\Delta t = 10^{-3}$ , les autres sont obtenues avec  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$  qui illustrent clairement le mode instable de ce régime.

Pour déterminer la fréquence des oscillations harmoniques on a analysé le signal temporel de la vitesse  $V_x(5,5)$ . On a considéré le signal durant  $N$  pas du temps ( $N=2^{17}$ ) avec  $\Delta t = 10^{-3}$  et on a déterminé sa transformée de Fourier discrète et complexe. Cette transformée de Fourier est multipliée par une demi fois son complexe conjugué pour obtenir le spectre d'énergie ( $E$ ) du signal. Dans la figure 4.26, on présente le logarithme décimal de l'énergie normalisée par  $N^2$  en fonction de la fréquence  $f$ . Les pics du spectre de l'énergie normalisée correspondent aux énergies des fréquences dominantes. Le spectre de la figure 4.30 illustre l'aspect harmonique des oscillations avec la fréquence  $f=0.2075$ .

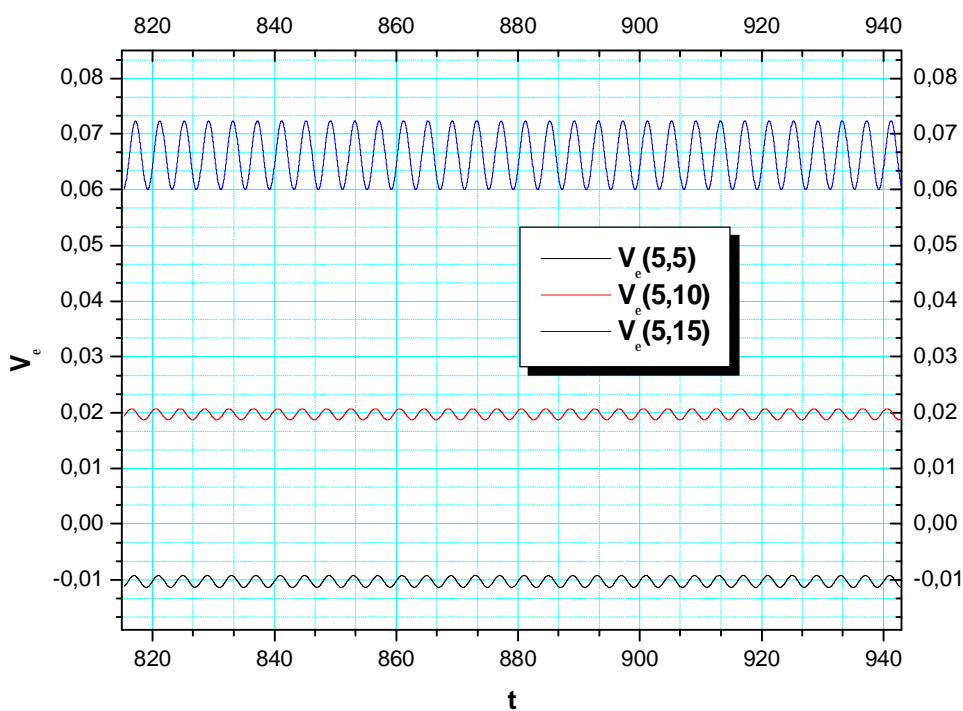


Figure 4.29 : Variation temporelle de la vitesse pour  $Re=210$

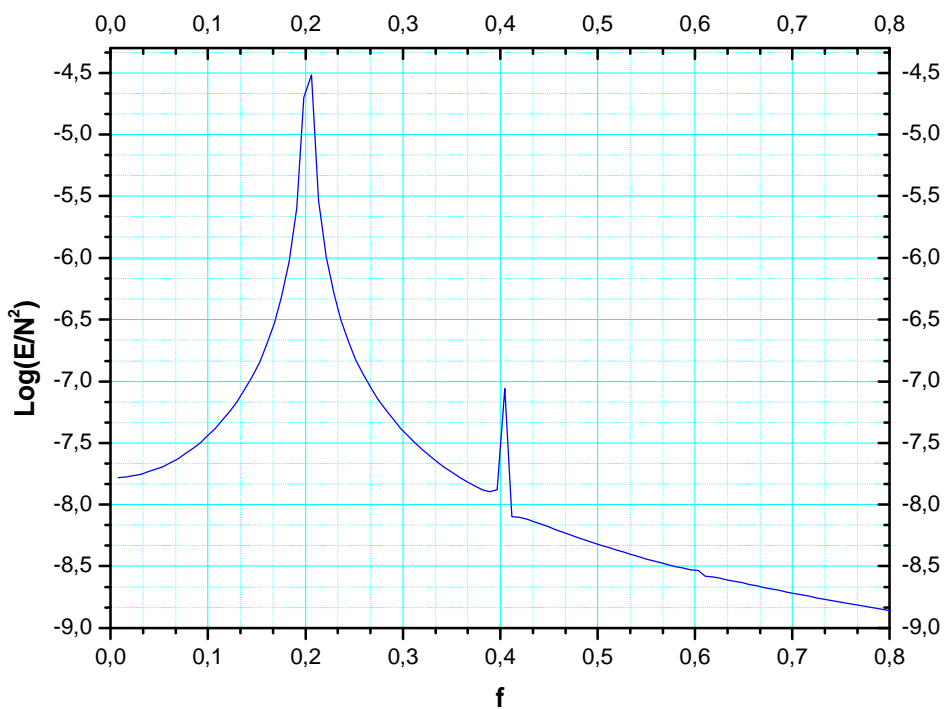


Figure 4.30 : Le spectre d'énergie pour  $Re=210$ .



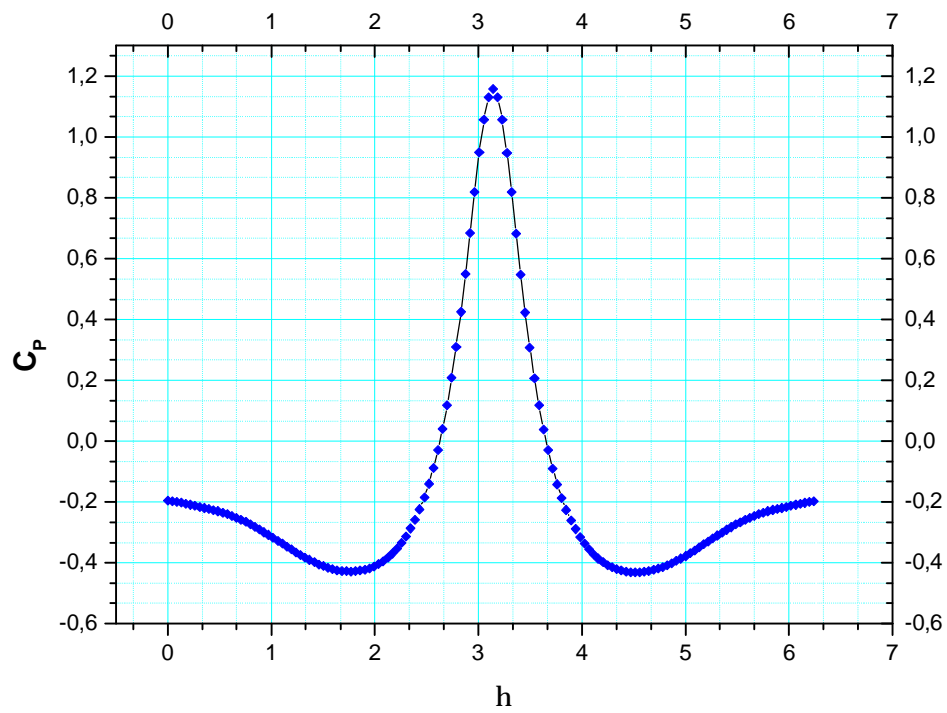


Figure 4.31 : Variation de coefficient de pression pour  $Re=210$

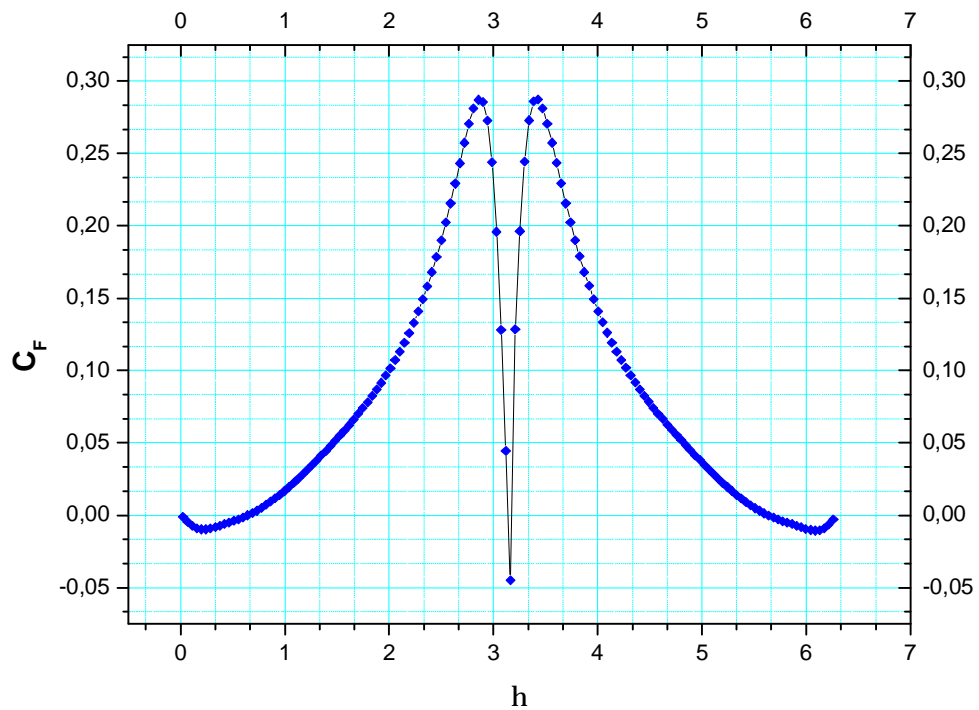


Figure 4.32 : Variation de coefficient de frottement local pour  $Re=210$ .

#### 4.2.2.5 L'écoulement à $Re=280$

On représente sur la figure 4.33 le champ de pression et quelques lignes de courant pour  $t=450$ . On remarque que l'écoulement dans la zone de sillage est asymétrique par rapport à l'axe horizontal de l'ellipse. L'amplitude des ondulations des lignes de courant devient plus forte que les ondulations du cas de  $Re=210$ . Un agrandissement de figure 4.33 est illustré dans la figure 4.34. Dans cette figure on remarque que les tourbillons se détachent, l'un après l'autre. Ce détachement résulte de l'instabilité de la couche de cisaillement comme présentée antérieurement. Ce régime apparaît à partir de  $Re=220$ .

La distribution spatiale de champ de pression est asymétrique par rapport à l'axe horizontal de l'ellipse. La zone à haute pression se trouve près du bord d'attaque. A partir de cette position, la pression diminue progressivement jusqu'aux points  $\eta=1.774$  et  $\eta=4.481$  où le  $C_p$  est égal à  $-0.45$ . Entre ces points et le bord de fuite elle augmente comme le montre la figure 4.35.

Le coefficient de pression  $C_p$  sur la surface de l'ellipse comme le montre la figure 3.35, atteint son maximum qui est  $1.13$ , sur le bord d'attaque, à partir de cette position le coefficient de pression subit une diminution importante jusqu'aux points  $\eta=1.774$  et  $\eta=4.481$ , où sa valeur est  $C_p=-0.45$ . Entre ces points et le bord de fuite le  $C_p$  augmente.

Sur la figure 4.36 on illustre la variation du coefficient de frottement local suivant la surface de l'ellipse. Au bord d'attaque le coefficient de frottement local est nul puis il augmente jusqu'à la valeur maximale  $C_f=0.25$  aux points  $\eta=2.864$  et  $\eta=3.416$ . Aux points  $\eta=0.737$  et  $\eta=5.530$ , qui désignent les points de décollement le  $C_f$  est nul. Au-dessus de ces points le  $C_f$  prend les valeurs minimales  $C_f=-0.0132$  au point  $\eta=0.129$  et  $C_f=-0.0067$  au point  $\eta=5.959$ . Puis il augmente jusqu'au bord de fuite. On voit dans la figure 4.32 que la variation de  $C_f$  près de bord de fuite est asymétrique.

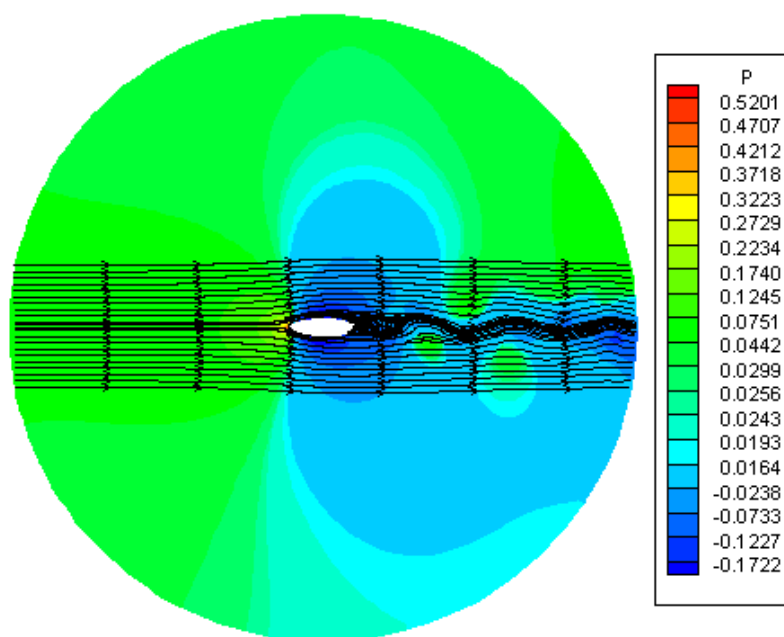


Figure 4.33 : Le champ de pression et les lignes de courant pour  $Re=280$  à  $t=450$

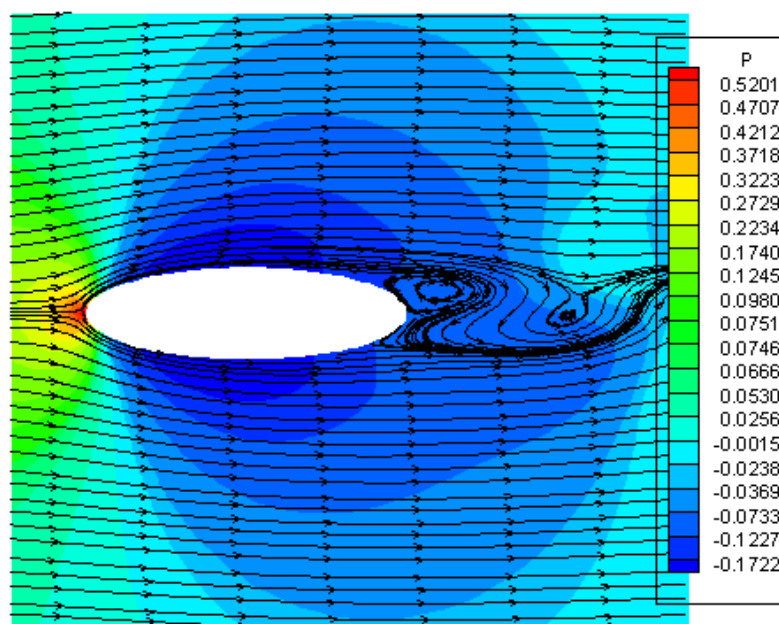


Figure 4.34 : Agrandissement du champ de pression et les lignes de courant pour  $Re=280$  à  $t=450$

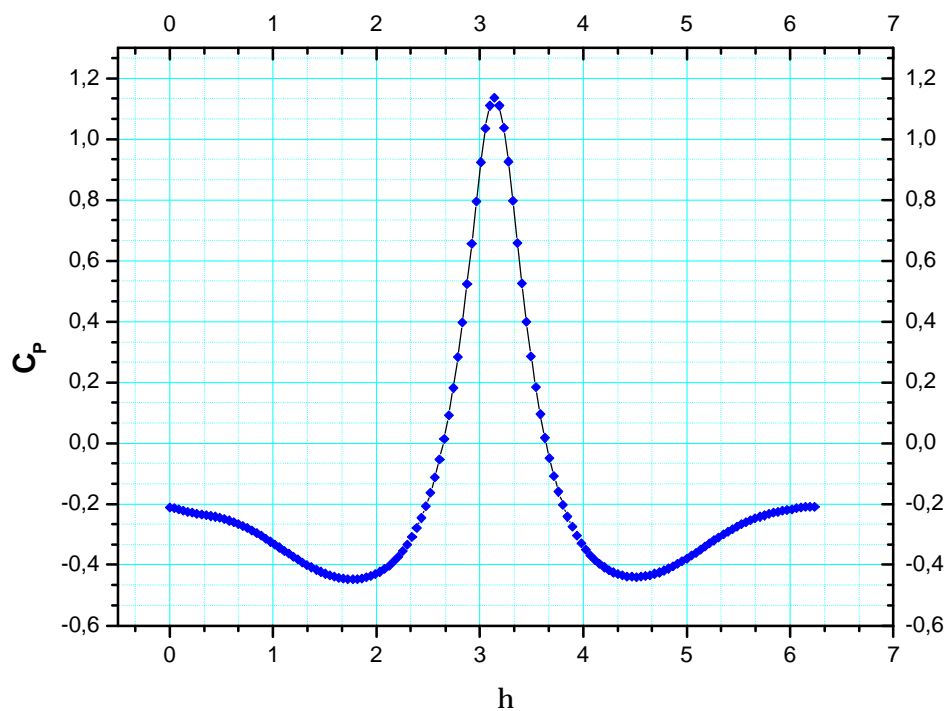


Figure 4.35 : Variation de coefficient de pression pour  $Re=280$

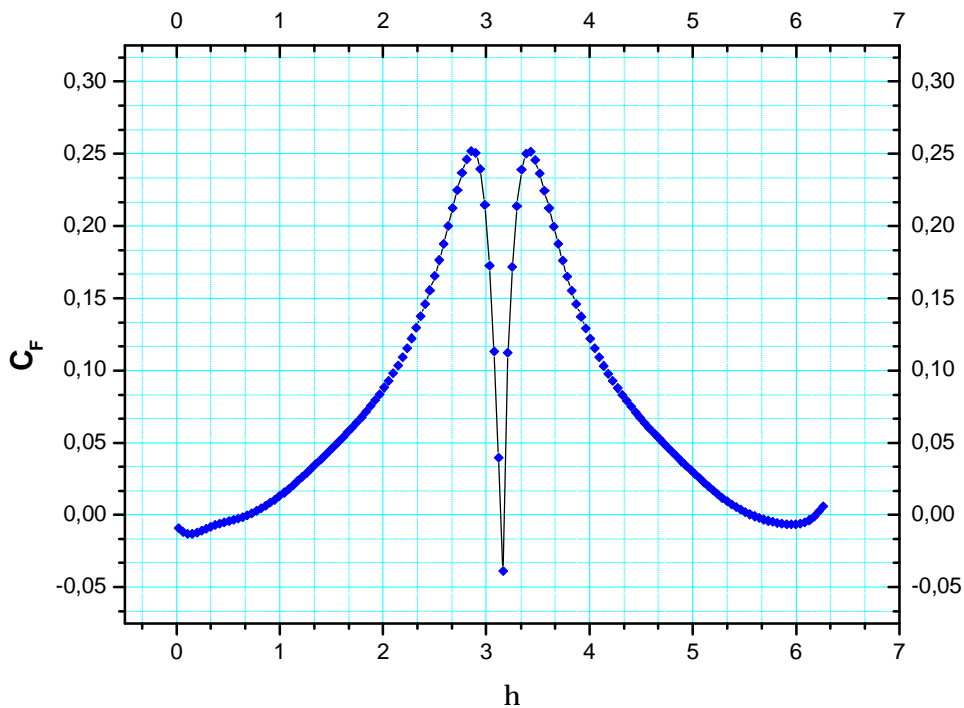
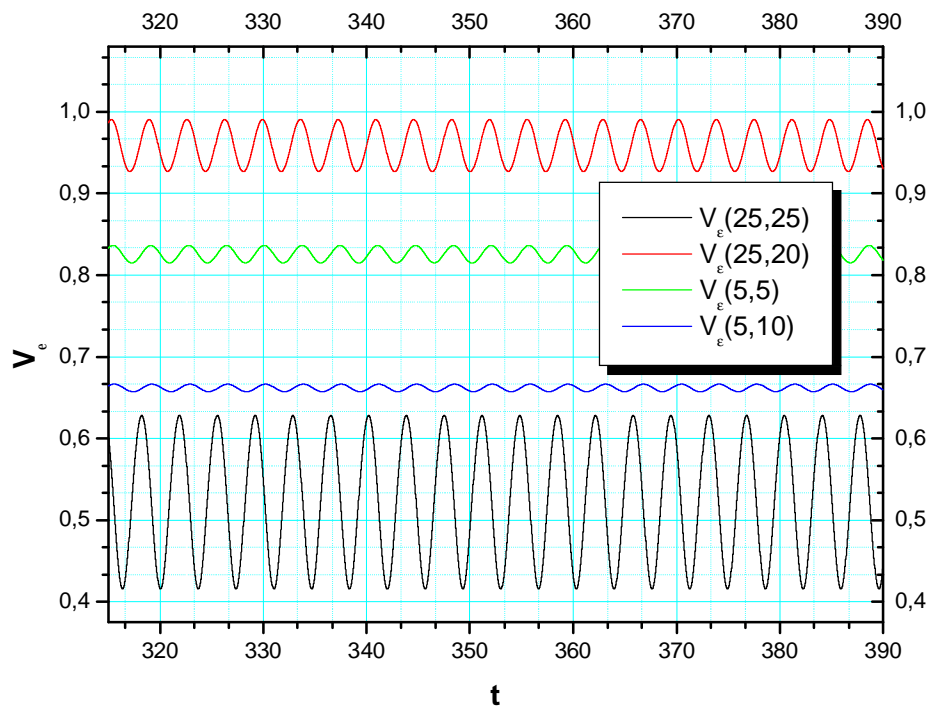


Figure 4.36 : Variation de coefficient de frottement local pour  $Re=280$

La variation temporelle de la vitesse de quelques points (figure 4.37) montre un champ oscillatoire harmonique, qui démontre l'aspect transitoire de ce régime. Avec la réduction du pas de temps de  $\Delta t = 10^{-3}$  à  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$  depuis  $t=370$  on remarque que les oscillations ne sont pas amorties : elles sont les mêmes avec les deux pas de temps, donc ces oscillations sont d'origine physique et non pas d'origine numérique.

L'analyse spectrale par la transformée rapide de Fourier de la vitesse  $V_\varepsilon(5,5)$  comme illustrée dans la figure 4.38 montre une fréquence dominante  $f=0.2748$  qui désigne le nombre de Strouhal.



**Figure 4.37 : Variation temporelle de la vitesse pour  $Re=280$ .**

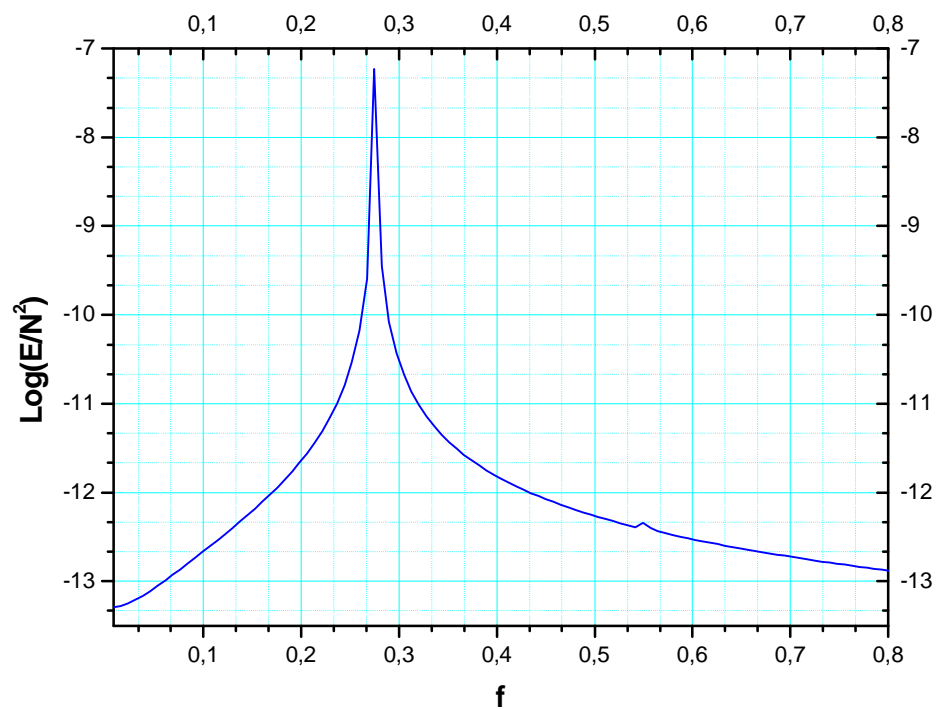


Figure 2.38 : Le spectre d'énergie pour  $Re=280$ .

# **Chapitre 5**

## **Conclusion**

3.3.3	Discrétisation d'équations de quantité de mouvement Suivant $h$ .....	36
3.3.3.1	Discrétisation du terme temporel .....	36
3.3.3.2	Discrétisation des termes convectifs .....	36
3.3.3.3	Discrétisation des deux premier termes diffusifs et du terme de pression .	39
3.3.3.4	Discrétisation des autres termes .....	40
3.3.4	Discrétisation des conditions aux limites .....	47
3.3.4.1	le cas de l'écoulement non visqueux .....	48
3.3.4.2	le cas de l'écoulement visqueux .....	48
3.3.5	L'équation de discrétisation de la pression .....	48
3.4	Solution des systemes d'équations de discrétisation par la méthode de balayage .....	52
3.4.1	La méthode de balayage .....	52
3.4.1.1	L'algorithme de Thomas .....	53
3.5	L'algorithme SIMPLER .....	54
3.6	Structure du code de calcul .....	54
	<b>Chapitre 4 Résultats et discussion</b>	<b>56</b>
4.1	L'écoulement non visqueux .....	56
4.1.1	Validation du code de la simulation numérique .....	56
4.1.2	Structure de l'écoulement .....	57
4.1.3	Le champ de pression .....	59
4.2	L'écoulement visqueux .....	61
4.2.1	Comparaison des résultats.....	61
4.2.2	Structure de l'écoulement .....	64
4.2.2.1	L'écoulement à $Re=10$ .....	64
4.2.2.2	L'écoulement à $Re=50$ .....	67
4.2.2.3	L'écoulement à $Re=150$ .....	71
4.1.2.4	L'écoulement à $Re=210$ .....	75
4.2.2.5	L'écoulement à $Re=280$ .....	80
	<b>Chapitre 5 Conclusion</b>	<b>85</b>
	<b>Références</b>	<b>87</b>
	<b>Résumé en arabe</b>	
	<b>Résumé en anglais</b>	
	<b>Résumé en français</b>	



## 5. Conclusion

Dans ce travail, on a étudié numériquement l'écoulement incompressible et visqueux, bidimensionnel autour d'un cylindre elliptique. On fixe le rapport des axes  $AR=3.5$  et on fait varier le nombre de Reynolds. Ce dernier prend les valeurs suivantes : 10, 40, 50, 90, 110, 150, 170, 200, 210, 220, 250, 280. L'écoulement est modélisé par les équations différentielles aux dérivées partielles de conservation de masse et de conservation des quantités de mouvement, dans les coordonnées elliptiques. Les conditions initiales sont celle de l'état statique. A la surface du cylindre elliptique, la condition de non glissement est imposée. À la limite externe du domaine de calcul, la vitesse de l'écoulement potentiel est imposée comme condition aux limites. La méthode des volumes finis est employée pour résoudre les équations du modèle mathématique. Le domaine physique est divisé en 62 points suivant la direction  $\epsilon$ , et 142 points suivant la direction  $\eta$ . On utilise des discrétisations des équations différentielles, spatiale et temporelle, d'ordre deux. On utilise l'algorithme SIMPLER pour la solution séquentielle des équations de discrétisation. Les systèmes d'équations linéaires de discrétisation sont résolus par la méthode de balayage utilisant l'algorithme de thomas et l'algorithme tri diagonal cyclique. A partir des conditions initiales, la marche dans le temps avec un pas du temps  $\Delta t = 10^{-3}$  continue jusqu'à l'obtention d'un régime stationnaire ou un régime avec une variation temporelle oscillatoire établie.

En premier lieu on considère le cas de l'écoulement non visqueux où la répartition de la vitesse est connue analytiquement pour la validation du code de calcul. Les deux profils des vitesses, analytique et numérique sont en très bon accord validant ainsi notre code. Les résultats de notre étude pour le cas  $AR=3.5$  et  $10 \leq R_e \leq 280$  fait apparaître quatre régime d'écoulement différents : écoulement stationnaire à 0-vortex, écoulement stationnaire à 2-vortex, écoulement instable à deux vortex alterné, écoulement instable avec détachement des vortex.

Pour  $10 \leq R_e \leq 40$  l'écoulement est stationnaire et symétrique par rapport à l'axe horizontal de l'ellipse avec 0-vortex. Pour  $50 \leq R_e \leq 200$  l'écoulement toujours stationnaire et symétrique avec l'apparition de deux vortex contra rotatifs dues au décollement de la couche limite. Ces vortex se localisent entre les points de décollement et le bord de fuite, et leur longueur augmente avec l'augmentation de nombre de Reynolds.

Avec l'augmentation du nombre de Reynolds à  $Re=210$  qui est la valeur critique où le régime instable commence à apparaître on obtient un écoulement asymétrique et spatialement ondulé dans la zone de sillage. Les deux vortex sont alternés dans le temps avec un nombre de Strouhal  $St=0.2075$ . A un nombre de Reynolds compris entre 220 et 280, le régime instable est devenu plus fort. Les vortex se détachent et forment ce qu'on appelle les vortex détachés de Bénard-Von Karman. Ce régime est caractérisé par un nombre de Strouhal  $St= 0.2748$ .

Comme perspectives, on peut considérer l'utilisation de l'analyse de spectre de fréquence pour faire apparaître les différents régimes d'écoulement par rapport à celle obtenue par la méthode de visualisation d'écoulement. Elle permet une définition plus précise de ces régimes.

## Références

- [1] **J. P. Den Hartog**, Recent technical manifestations of von Karman's vortex wake, Engineering: Proc N. A. S, Vol. 40, 1954.
- [2] **G. B. Schubauer**, Air Flow in a Separating Laminar Boundary Layer, Naca TR-527, Dec 1934.
- [3] **G. B. Schubauer**, Air Flow in the Boundary Layer of an Elliptic Cylinder, Naca TR-652, Aug 1939.
- [4] **H. Schlichting**, Boundary Layer Theory, 7th edition, McGraw-Hill, New York, 1979, Chap 10.
- [5] **K. Schröder**, A simple numerical method for the calculation of the laminar boundary layer, Naca TM-1317, Feb 1943.
- [6] **H. Yano, A. Kieda**, An approximate method for solving two-dimensional low-Reynolds-number flow past arbitrary cylindrical bodies, J. Fluid Mech. (1980), vol. 97, pp 157-179.
- [7] **A. Umemura, K. Takano, K. Shintani**, Low-Reynolds-number flow past an elliptic cylinder, J.Fluid Mech. (1983), vol 136, pp 277-289.
- [8] **H. J. Lugt**, Autorotation of an elliptic cylinder about an axis perpendicular to the flow, J.Fluid Mech. (1980), vol 99, part 4, pp 817-840.
- [9] **T. Ota, H. Nishiyama, Y. Taoka**, Heat Transfer and Flow Around an Elliptic Cylinder, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.27, No.10, 1984, pp.1771-1779.
- [10] **R. Mittal, S. Balachandar**, Direct Numerical Simulation of Flow Past Elliptic Cylinders, Journal of Computational Physics 124, 351-367 (1996), article № 0065.

- [11] **J. H. Choi, S. J. Lee**, Ground effect of flow around an elliptic cylinder in a turbulent boundary layer, *Journal of Fluids and Structures* (2000) 14, 697-709.
- [12] **S. A. Johnson, M. C. Thompson, K. Hourigan**, Flow Past Elliptical Cylinders at Low Reynolds Numbers, 14<sup>th</sup> Australasian Fluid Mechanics Conference, Adelaide University, Adelaide, Australia, 10-14 December 2001.
- [13] **S. J. D. D'Allesio, S. Kocabiyik**, Numerical simulation of the flow induced by a transversely oscillating inclined elliptic cylinder, *Journal of Fluids and Structures* (2001) 15, 691-715.
- [14] **T. L. Chng, T. T. Lim, J. Sorial, K. B. Lua, K. S. Yeo**, Flow Past An Impulsively Started Oscillating Elliptical Cylinder, 15<sup>th</sup> Australasian Fluid Mechanics Conference The University of Sydney, Sydney, Australia 13-17 December 2004.
- [15] **J. H. Choi, S. J. Lee**, Flow characteristics around an inclined elliptic cylinder in a turbulent boundary layer. *Journal of Fluids and Structures* (2001) 15, 1123-1135.
- [16] **S. A. Johnson, M. C. Thompson, K. Hourigan**, Low frequency unsteadiness in the wake of elliptical cylinders. Conference on bluff body wakes and vortex-induced vibrations (BBVIV3). Port Douglas, Australia. 17-20 December 2002.
- [17] **S. J. D. D'alessio, F. W. Chapman**, The initial flow past a uniformly accelerating inclined elliptic cylinder. *Canadian applied mathematics quarterly*. Volume 8, Number 3, Fall 2000.
- [18] **S. A. Johnson, M. C. Thompson, K. Hourigan**, Predicted low frequency structures in the wake of elliptical cylinders. *European Journal of Mechanics B/Fluids* 23 (2004) 229–239.
- [19] **W. A. Khan, J. R. Culham, M. M. Yovanovich**, Fluid Flow Around and Heat Transfer from Elliptical Cylinders: Analytical Approach. *Journal of thermophysics and heat transfer*. Vol 19, № 2, April–June 2005.
- [20] **G. Gontier**, *Mécanique des milieux déformables*. Dunod 1969.

- [21] **S. Patankar**, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. McGraw-Hill Book Company. 1980.
- [22] **T. Cebeci, P. Bradshaw**, Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer, Springer-Verlag. New York Inc. 1984, page 121.
- [23] **R. Comolet**, Mécanique expérimental des fluides. Tom II. 2<sup>ème</sup> édition, Masson, Paris.
- [24] **R. L. Panton**, Incompressible Flow, John Wiley & Sons. Inc. pages 384-401.
- [25] **G. K. Batchelor**, An introduction to fluid dynamics. Cambridge University Press. 1967. p 615.



## **Ecoulement Incompressible Sur Un Objet Solide Sous La Forme d'Une Ellipse**

Nous considérons la simulation numérique de l'écoulement incompressible et visqueux, bidimensionnel sur un cylindre elliptique. On fixe le rapport des axes à  $AR=3.5$  et on fait varier le nombre de Reynolds entre 10 et 280. L'écoulement est modélisé par les équations différentielles aux dérivées partielles de conservation de masse et de conservation des quantités de mouvement, dans les coordonnées elliptiques. La méthode des volumes finis est employée pour résoudre les équations de modèle mathématique. Les solutions numériques font apparaître quatre régimes d'écoulement différents autour de l'ellipse : pour Reynolds entre 10 et 40 l'écoulement est stationnaire avec 0-vortex. Pour le nombre de Reynolds entre 50 et 200, l'écoulement est stationnaire avec deux vortex contra-rotatifs dans le sillage dus au décollement de la couche limite. A  $Re=210$ , l'écoulement devient instable avec des oscillations harmoniques : Les deux vortex sont alternés dans le temps avec un nombre de Strouhal égal à 0.2075. Pour Reynolds entre 220 et 280 les vortex se détachent l'un après l'autre à cause de l'instabilité de la couche de cisaillement le nombre de Strouhal dans ce cas est égal à 0.2748.

**Mots clés :** cylindre elliptique/ volumes finis/ sillage/ tourbillon/ détachement des tourbillons/  
rapport des axes/ nombre de Strouhal.

## جريان منضغط حول جسم صلب ذو شكل اهليجي

في هذه الدراسة نهتم بالحل العددي لمسألة الجريان المنضغط و اللزج، ثنائي البعد حول اسطوانة اهليجية. نثبت نسبة المحاور للاسطوانة عند 3.5 ونغير عدد رينولدز بين 10 و 280 . النموذج الرياضي للجريان يتكون من معادلات انحفاظ كمية المادة و كمية الحركة. لحل نظام المعادلات غير الخطية، نستعمل طريقة الحجم المنتهية دقتها من الدرجة الثانية بالنسبة للفضاء والزمن. الحلول العددية تظهر أربعة أنماط مختلفة من الجريان حول الاسطوانة: من اجل عدد رينولدز بين 10 و 40 الجريان يكون مستقرا و متناظرا بالنسبة للمحور الأفقي للاسطوانة. من اجل عدد رينولدز بين 50 و 200 الجريان يكون مستقرا مع دوامتين خلف الاسطوانة نتيجة انفصال الطبقة الحدية. عند رينولدز يساوي 210 ، الجريان يصبح غير مستقر مع اهتزازات توافقية: الدوامتين متناوبتين في الزمن مع عدد ستروهل يساوي 0.2075. من اجل عدد رينولدز بين 220 و 280 الدوامتين تتفصلان الواحدة بعد الأخرى بسبب عدم استقرار طبقة القص. عدد ستروهل في هذه الحالة يساوي 0.2748.

**الكلمات المفتاحية:** اسطوانة اهليجية/ الحجم المنتهية/ الأثر/ دوامة/انفصال الدوامات/ عدد ستروهل.



## **Incompressible Flow on a Solid Object in the Shape of an Ellipse**

We consider the numerical simulation of the incompressible and viscous, two-dimensional flow on an elliptic cylinder. We fixed the aspect ratio at  $AR=3.5$  and one varies the Reynolds number between 10 and 280. The flow is modelled by the differential equations with the derivative partial of conservation of mass and conservation of the momentum, in the elliptic coordinates. The finite volumes method's employed for solved the equations of mathematical model. The numerical solutions have appears four mode of flow around the ellipse: for Reynolds between 10 and 40 the flow is stationary with 0-vortex. For the Reynolds number between 50 and 200, the flow is stationary with two vortices counter-rotary in the wake due to the separation of boundary layers. In  $Re=210$ , the flow becomes unstable with harmonic oscillations: The two vortices are alternate in time with a Strouhal number equal to 0.2075. For Reynolds between 220 and the 280 vortices are detached one after the other because of the instability of the shearing layer of the Strouhal number in this case equal to 0.2748.

**Keywords:** elliptic cylinder/ finite volumes/ wake/ vortex/ shedding vortex/ aspect ratio/ numbers of Strouhal.