

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mentouri-Constantine
Faculté des Sciences Exactes
Département de Physique

N° d'Ordre :.....
Série :.....

Mémoire

Présenté pour obtenir le diplôme de
magister en Physique

Spécialité
Physique théorique

THEME

**AU-DELA DU MODELE STANDARD ET
APPLICATIONS**

Par
MENIGHER Hafid

Soutenu le:17/10/2007

Devant le jury:

Président	: Mr A. Benslama	Prof. Univ. Constantine
Rapporteur	: Mr N. Mebarki	Prof. Univ. Constantine
Examineur	: Mr A. Boudine	M.C. C.U. Oum el Bouaghi
Examineur	: Mme O. Benabbes-Sahli	M.C. Univ. Constantine
Examineur	: Mlle Z. Belghobsi	M.C. Univ. Jijel

Table des matières

Introduction	1
1 Le Modèle Standard de Glashow-Weinberg et Salam (GWS) :	6
1.1 Le groupe de jauge $SU(2) \otimes U(1)$:	7
1.2 Brisure spontanée de la symétrie et le mécanisme de Higgs :	8
1.2.1 Le groupe $U(1)$ (abélien) :	8
1.2.2 Le groupe non abélien $SU(2)$:	13
1.3 Le modèle standard $SU_I(2) \otimes U_Y(1)$:	17
1.3.1 Brisure spontanée de la symétrie(SSB) :	19
1.3.2 Mécanisme de Higgs :	20
2 Le Modèle Standard dans La Géométrie Non-Commutative :	24
2.1 Introduction :	24
2.2 La Géométrie Espace-Temps Non-commutative :	25
2.2.1 Formalisme Mathématique :	25
2.2.2 Autres propriétés du produit star($*$) :	26
2.2.3 L'opérateur de Weyl :	27
2.3 Théorie de jauge sur l'espace-temps non-commutatif :	30
2.4 Lagrangien du Modèle Standard Non-Commutatif (MSNC) :	33
3 Applications physiques	38
Conclusion	57

Annexes	58
Bibliographie	61

Dédicace

A mon père Salah

A ma mère Oumessad

A ma soeur Habiba

A mon frère Hammoud

A mon collègue Skander

A tous mes collègues

Je dédie ce modeste travail..

Remerciements

Avant tout, je remercie le bon Dieu pour tout puissant qui m'a aidé à terminer ce travail.

Je tiens à remercier mes parents qui sont fatigués à cause de moi.

Je tiens à remercier mon directeur de Mémoire, Monsieur N. Mebarki professeur à l'université de Mentouri-constantine, qui a bien voulu être le rapporteur de ce travail, je le remercie de son soutien constant qu'il m'a apporté tout au long de mes travaux de recherche.

Je tiens à remercier l'ensemble des membres de jury :

Monsieur A. Benslama professeur à l'université de Mentouri-constantine qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance.

Monsieur A. Boudine maître de conférence au C.U Oum el Bouaghi, Mme O. Benabbes-Sahli maître de conférence à l'université de Mentouri-constantine et Mlle Z. Belghobsi maître de conférence à l'université de Jijel d'avoir accepté de faire partie du jury et de juger ce travail.

Je tiens à remercier mon frère Hammoud magister en mathématiques à l'université Mentouri-constantine qui m'a aidé à accomplir ce travail.

Finalement je tiens à remercier mon collègue Talab-hacin Skander qui m'a aidé beaucoup.

L'étudiant Hafid MENIGHER

Introduction

Durant le dernier siècle, la physique fondamentale a vécu deux révolutions qui ont changé les concepts et la vision de la mécanique classique Newtonienne décrivant les lois de la nature (principes : loi fondamentale de la dynamique, inertie, action et réaction) se sont la relativité (restreinte et générale) inventée par Einstein et la mécanique quantique inventée et développée par des imminents physiciens tels que Bohr, Heisenberg, Schrödinger, Pauli, Dirac, et d'autres.

Parmi les principes les plus importants en mécanique quantique, Le principe d'incertitude d'Heisenberg qui énonce que la position et la vitesse d'une particule ne peuvent pas être mesurées en même temps avec une très grande précision. En fait, ce principe est une conséquence immédiate des relations de commutations canoniques entre les variables x_i, p_i avec $i = \overline{1, 3}$ qui deviennent des observables dans l'espace d'Hilbert ($x_i \rightarrow \hat{x}_i$ et $p_i \rightarrow \hat{p}_i$) et forment une algèbre non-commutative $[\hat{x}_i, \hat{p}_i] = i\hbar\delta_{ij}$.

Le mélange de la mécanique quantique et la relativité restreinte a induit la mécanique quantique relativiste ou la notion de l'anti-matière a pris naissance. Le développement de la théorie des champs et le formalisme de la deuxième quantification ainsi que la renormalisation et la théorie des groupes (groupes de Lie) ont contribué à la construction des théories de jauge qui ont réussi à expliquer les trois forces connues : électromagnétique, faible et forte avec des prédictions plus au moins compatibles avec l'expérience (sauf peut être le problème de la particule Higgs). Malgré ce succès apparent et même leur unification, il reste beaucoup de choses inexplicables. En effet, l'unification des interactions électromagnétiques et faibles achevée par les physiciens Glashow, Weinberg et Abdussalam ne peut pas expliquer :

- Le problème d'existence du boson de Higgs.
 - L'origine des masses des particules.
 - Les trois générations des particules (pour quoi trois générations?).
 - La violation de CP.
 - Baryogenèses.
- et d'autres problèmes.

Pour y remédier ou comprendre ces problèmes, les physiciens ont emprunter plusieurs voies au delà du modèle standard notamment :

- Le modèle technicouleur.
- Extra dimensions, théorie des cordes et supercordes, M-theory.
- La supersymétrie et supergravité.
- Espace et géométrie non-commutative.

Mais le problème le plus important est l'unification de la gravitation avec les trois autres forces. Jusqu'à présent on a pas pu formulé une théorie quantique microscopique prédictive de la gravitation et par conséquent le programme de l'unification reste incomplet. Peut être la solution vient du fait qu'à l'échelle microscopique notre espace-temps est non-commutatif ou les coordonnées de la position \hat{x}_μ anti-commutent, par exemple ; ils vérifient des relations de commutations du type :

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\theta_{\mu\nu}, \mu = \nu = \overline{0, 3} \quad (1)$$

La géométrie de notre espace pose en général des problèmes en physique car il n'existe pas une description unique. Dans l'esprit de la relativité générale, l'espace et le temps forment un objet quadridimensionnel dont la courbure est donnée par la distribution de masse. Quand un objet massif se déplace, la courbure change ; la géométrie est un objet dynamique. Au contraire la mécanique quantique, et plus généralement la théorie quantique des champs, suppose la donnée a priori d'un espace dans lequel évoluent des champs. Pour avoir une image, la théorie des champs prend l'espace pour scène, alors qu'en relativité la scène elle-même participe à l'action. La contradiction est d'autant plus flagrante que chacune de ces théories est valide et vérifiée avec précision dans son domaine d'application : la gravitation pour la relativité ; les interactions électromagnétiques, faibles et fortes pour la théorie quantique des champs et théories de

jauge. Cette double approche de la géométrie n'est pas forcément scandaleuse. Rien n'interdit à deux descriptions de cohabiter, tant que la cohabitation est harmonieuse. Mais les phénomènes qui relèvent à la fois de la mécanique quantique et de la gravitation, comme le tout début de l'univers dans la théorie du big-bang, ou l'effondrement gravitationnel d'une étoile passée une certaine échelle, brisent cette harmonie. L'hypothèse répandue au jour d'aujourd'hui est, qu'à tout petite échelle, aucune des descriptions géométriques classiques n'est valable. La structure géométrique intime de l'espace-temps n'est pas connue. Et la mécanique quantique suggère que l'hypothèse du continu n'est pas justifiée. On estime que cette structure intime devrait être visible à des échelles de l'ordre de l'échelle de Planck . La géométrie non-commutative, en étendant les concepts géométriques usuels de manière compatible à la fois avec la relativité générale et avec la mécanique quantique, propose des outils mathématiques pour appréhender la géométrie à cette échelle. Actuellement, aucune théorie ne décrit l'univers à cet ordre de précision. Parmi les candidats au titre de la théorie de la gravitation quantique, aucun n'a jusqu'à présent franchi avec succès le cap de la vérification expérimentale. Une approche naturelle consiste à quantifier le champ gravitationnel comme les autres champs, mais la théorie obtenue est non renormalisable, c'est à dire sans intérêt physique et ou les divergences obtenus sont non controlables et ne peuvent pas être régularisés. Néanmoins cette optique, amener la relativité à la théorie des champs, reste valable et a suscité des travaux considérables qui, dans les raffinements les plus récents, aboutissent à la théorie des cordes et la supersymétrie. L'unification est obtenue mais aux prix d'hypothèses physiques fortes : l'espace-temps est à dimensions supérieures à quatres(26, 10) et (à cause de la supersymétrie,il existe deux fois plus de particules que celles connues jusqu'à présent (à chaque particule connue correspond un partenaire supersymétrique). Pour l'instant, aucune de ces hypothèses n'a été vérifiée. Cette approche de l'unification considère comme secondaire la nature proprement géométrique de la relativité générale. Pour d'autres au contraire le caractère dynamique de la géométrie constitue l'apport essentiel de la relativité générale et toute la question est, précisément, d'adapter cette dynamique géométrique au contexte quantique. En clair, il s'agit d'affranchir la théorie quantique des champs d'un espace donné a priori. On parle de la théorie des champs "background independant", telle la "loop quantum gravity". Malheureusement cette théorie pour l'instant ne propose pas de tests expérimentaux . La foi en "l'unification par la géométrie" se heurte à notre mauvaise compréhension de la

théorie des champs. En effet, autant la relativité générale a une interprétation géométrique simple, autant ce que dit la mécanique quantique de la géométrie nécessite des éclaircissements. Comment définir un point de l'espace en mécanique quantique ? Ou plus exactement comment donner une signification physique à la notion de point ? Une manière simple consiste à appeler point l'endroit occupé par une particule à un instant donné. Mais à supposer que l'on connaisse avec précision un point, les relations d'incertitude de Heisenberg indiquent que l'on ne peut connaître avec précision la position de la particule à un autre instant. Autrement dit, si une particule permet de définir un point, elle ne permet pas d'en définir un autre. Bien sur, on peut considérer plusieurs particules au même instant dont on connaît les positions avec précision, et on définit ainsi plusieurs points. Mais pour savoir comment ces points s'arrangent les uns par rapport aux autres, pour faire la géométrie, il faut pouvoir mesurer des distances. Pour ce faire, il faut qu'un même objet, par exemple l'une des particules, occupe à un instant donné le point A, et à un autre instant le point B. Connaissant sa vitesse, on mesure son temps de vol et l'on en déduit la distance. Mais plus on saura avec précision que la particule occupe le point A à l'instant t , moins on pourra être sûr qu'elle occupe le point B à l'instant suivant. La mécanique quantique suggère de raisonner sur des valeurs moyennes. Le point est alors défini comme la valeur moyenne à un instant donné de l'observable position appliquée sur l'état représentant la particule. On opère ainsi un changement de point de vue important : le point n'est plus défini en tant qu'objet abstrait de la géométrie, c'est un objet algébrique, la valeur moyenne d'un opérateur sur un état. Or les mathématiciens savent traduire en langage algébrique les propriétés géométriques d'un espace. Plus précisément, les propriétés géométriques (essentiellement la topologie, la mesure et la métrique) d'un espace ont une traduction algébrique dans l'ensemble des fonctions, à valeur complexe, définies sur cet espace.

La géométrie non-commutative est une adaptation du dictionnaire qui permet de passer "d'algèbre commutative" à "espace" en remplaçant, partout où il y a lieu, le mot commutatif par non-commutatif. Evidemment les choses ne sont pas si simples. Abandonner la commutativité implique de profonds changements dans les définitions du dictionnaire, et requiert même la création de notions nouvelles. L'investissement mathématique est lourd mais le jeu en vaut la chandelle car on peut alors accéder à de nouveaux types "d'espaces non-commutatifs" ou des phénomènes physiques trouvent une interprétation géométrique qu'ils n'avaient pas jusque là.

Par exemple le champ de Higgs apparait comme le coefficient d'une métrique dans une dimension supplémentaire, discrète, qui rend compte des degrés de liberté internes (spin ou isospin) d'une particule.

Dans ce mémoire on considère le modèle standard électrofaible minimal [1]–[35] construit sur un espace-temps non-commutatif. On présentera les transformations de jauge non-commutative des différents champs dynamiques ainsi que leurs Seiberg-Witten maps. Les différents secteurs du lagrangian résultants avec de nouvelles interactions ont été également discutés et les diagrammes de Feynmann correspondants ont été obtenus. Comme application du modèle standard non-commutatif minimal, on a calculé des amplitudes de transition et sections efficaces de quelques processus physiques qui peuvent être importants pour le test de la non-commutativité de l'espace-temps au delà du modèle standard et constitue un signal d'une nouvelle physique dans le prochain collisionneur des particules LHC (Large Hadronic Collider) [2], [7], [8], [13], [15], [16] et [21] et donner une explication plus au moins convaincantes des problèmes et phénomènes où le modèle standard a échoué.

Chapitre 1

Le Modèle Standard de Glashow-Weinberg et Salam (GWS) :

La description commune des interaction électromagnétiques et faibles par une seule théorie est certainement un des plus grands succès des sciences physiques dans ce siècle. Le modèle proposé par Glashow, Salam et Weinberg dans les années soixantes a été testé durant les 40 dernières années. La découverte des courants faibles neutres et la production des bosons vectoriels intermédiaires (W_{\pm} et Z_0), avec les propriétés attendus ont augmentés notre confiance dans ce modèle. Jusqu'à présent, il n'y a aucune expérience qui contredit les prédictions du modèle standard. La description de l'interaction électrofaible est implémentée par une théorie de jauge se basant sur le groupe $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, qui est spontanément brisé via le mécanisme de Higgs. Les champs de matière leptons et quarks sont organisés en familles, avec des fermions left-handed appartenant à des isodoublets faibles cependant les composantes right-handed se transforment comme des isosingulets faibles. Les bosons vectoriels W_{\pm} , Z_0 et γ , qui véhiculent les interactions sont introduits via le couplage minimal avec les champs de matière. L'ingrédient essentiel du modèle est le potentiel scalaire qui a été ajouté au Lagrangien pour générer les masses des bosons vectoriels et les fermions d'une manière invariante de jauge à travers le mécanisme de Higgs. Le champ scalaire restant fait parti du spectre physique. C'est la seule

particule du modèle standard qui attend la confirmation expérimentale.

Le modèle standard développé par les trois physiciens Glashow, Weinberg et Abdusalam est un modèle d'unification des forces électromagnétiques et faibles. La théorie qui décrit les particules et leurs interactions, c'est une théorie des champs quantiques renormalisable ou les infinis et divergences qui viennent du calcul perturbatif et corrections radiatives d'ordre supérieur sont régularisés et absorbés dans les différents observables de la théorie (masse, couplage etc.), libre des anomalies et se base sur l'invariance par rapport aux transformations de jauge locale du groupe de Lie $SU(2) \otimes U(1)$.

Sachant que les interactions faibles sont à courte portée, les médiateurs ou les bosons de jauge de cette interaction doivent avoir une masse ce qui contredit le théorème de Goldstone qui énonce que si une théorie est invariante par rapport à une symétrie continue, les médiateurs de l'interaction qui se base sur cette symétrie doivent avoir des masses nulles. En d'autres termes l'interaction en question est de portée infinie. Pour résoudre ce problème, on a deux solutions ; soit qu'on ajoute un terme de masse de ces bosons de jauge à la main et dans ce cas la théorie devienne non renormalisable et on ne peut pas contrôler les divergences générées par le calcul d'ordre supérieur. Une deuxième solution qui préserve la renormalisabilité de la théorie (démontrée par t'Hooft) est de briser la symétrie spontanément et d'utiliser le mécanisme de Higgs.

1.1 Le groupe de jauge $SU(2) \otimes U(1)$:

Le groupe (produit tensoriel) de Lie $SU(2) \otimes U(1)$ est la base du modèle standard de GWS, c'est un groupe de Lie d'ordre $r = 3 + 1$ et de rang $l = 2 + 1$. Donc, il y a trois générateurs pour $SU(2)$ et un générateur pour $U(1)$.

Les leptons et les quarks (champs de matière) se répartissent selon la représentation fondamentale et les bosons de jauge (champs de forces) selon la représentation adjointe.

1.2 Brisure spontanée de la symétrie et le mécanisme de Higgs :

1.2.1 Le groupe $U(1)$ (abélien) :

Soit le Lagrangien qui décrit le champ de matière complexe φ en interaction avec le champ de force A_μ :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{YM} + (D^\mu \varphi)^* (D_\mu \varphi) - V(\varphi, \varphi^*) \quad (1.1)$$

où le terme de Yang-Mills \mathcal{L}_{YM} est donné par :

$$\frac{-1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \mathcal{L}_{YM} \quad (1.2)$$

avec le tenseur $F_{\mu\nu}$ et la dérivée covariante D_μ définis telles que :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.3)$$

$$D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + ig A_\mu \varphi \quad (1.4)$$

Ici g représente le couplage et le potentiel $V(\varphi, \varphi^*)$ a comme expression :

$$V(\varphi, \varphi^*) = \mu^2 \varphi^* \varphi + \frac{\lambda}{4} (\varphi^* \varphi)^2; \lambda > 0 \text{ et } \mu \text{ arbitraire} \quad (1.5)$$

Il est à noter que le Lagrangien \mathcal{L} est invariant sous les transformations infinitésimales de jauge globales suivantes :

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= -ig\varepsilon\varphi \\ \delta\varphi^* &= ig\varepsilon\varphi^* \end{aligned} \quad (1.6)$$

où $\varepsilon \neq \varepsilon(x)$ est un paramètre réel(constant). En réalité, ce qui est important en physique se sont les transformations de jauge locales. D'ailleurs la forme du Lagrangien \mathcal{L} avec la dérivée covariante et le terme de Yang-Mills a été imposée en exigeant l'invariance locale où le paramètre

de transformation ε depend de l'espace-temps $\varepsilon = \varepsilon(x)$. C'est le principe qui nous permet d'introduire l'interaction d'une manière dynamique. Ces transformations sont :

$$\begin{aligned}\delta\varphi &= -ig\varepsilon(x)\varphi \\ \delta\varphi^* &= ig\varepsilon(x)\varphi^* \\ \delta A_\mu &= \frac{1}{g}\partial_\mu\varepsilon(x)\end{aligned}\tag{1.7}$$

Définissons maintenant ce qu'on appelle l'état du vide $\varphi_0 = \langle \varphi \rangle_0$. Il est obtenu en minimisant le potentiel par rapport au champ $\varphi(x)$:

$$\left. \frac{\partial V(\varphi, \varphi^*)}{\partial \varphi} \right|_{\varphi_0} = \left. \frac{\partial V(\varphi, \varphi^*)}{\partial \varphi^*} \right|_{\varphi_0} = 0\tag{1.8}$$

On remarque qu'il y a deux cas, selon le signe de μ^2 :

i) Pour $\mu^2 > 0$:

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial V(\varphi, \varphi^*)}{\partial \varphi} &= \mu^2\varphi^* + \frac{\lambda}{2}(\varphi^*\varphi)\varphi^* = 0 \\ \frac{\partial V(\varphi, \varphi^*)}{\partial \varphi^*} &= \mu^2\varphi + \frac{\lambda}{2}(\varphi\varphi^*)\varphi = 0\end{aligned} \right\} \implies \varphi = \varphi^* = 0\tag{1.9}$$

Donc l'état du vide est :

$$\varphi_0 = \langle \varphi \rangle_0 = \varphi_0^* = \langle \varphi^* \rangle_0 = 0\tag{1.10}$$

Dans ce cas l'état du vide à une symétrie exacte (pas de brisure de la symétrie), et il est invariant sous la transformation de jauge locale :

$$\begin{aligned}\delta\varphi_0 &= -ig\varepsilon(x)\varphi_0 = 0 \\ \delta\varphi_0^* &= +ig\varepsilon(x)\varphi_0^* = 0\end{aligned}\tag{1.11}$$

ii) pour $\mu^2 < 0$:

on obtient :

$$\frac{\partial V(\varphi, \varphi^*)}{\partial \varphi} = 0 \implies (\mu^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi^* \varphi) \varphi^* = 0 \implies \begin{cases} \varphi^* = 0 \\ \varphi^* \varphi = |\varphi|^2 = \frac{-2\mu^2}{\lambda} \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial V(\varphi, \varphi^*)}{\partial \varphi^*} = 0 \implies (\mu^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi^* \varphi) \varphi = 0 \implies \begin{cases} \varphi = 0 \\ \varphi^* \varphi = |\varphi|^2 = \frac{-2\mu^2}{\lambda} \end{cases} \quad (1.13)$$

Si on pose :

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2, \quad \varphi_1 \text{ et } \varphi_2 \in \mathbb{R} \quad (1.14)$$

On déduit de l'équation (1.12) :

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = \frac{-2\mu^2}{\lambda} \quad (1.15)$$

Remarquez que l'équation(1.15) représente l'équation d'un cercle de rayon :

$$R = \sqrt{\frac{-2\mu^2}{\lambda}} \quad (1.16)$$

C'est à dire il y a une dégénérescence de l'état du vide, et la symétrie est brisée spontanément. En effet :

$$\delta\varphi(x) = \delta\varphi_1(x) + i\delta\varphi_2(x) \quad (1.17)$$

avec :

$$\begin{cases} \delta\varphi_1(x) = g\varepsilon(x)\varphi_2(x) \\ \delta\varphi_2(x) = -g\varepsilon(x)\varphi_1(x) \end{cases} \quad (1.18)$$

et d'après l'équation(1.13), on a :

$$(\varphi_1^0)^2 + (\varphi_2^0)^2 = \frac{-2\mu^2}{\lambda} \quad (1.19)$$

Donc :

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } \varphi_1^0 = 0 \implies \varphi_2^0 \neq 0 \\ \text{si } \varphi_2^0 = 0 \implies \varphi_1^0 \neq 0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \delta\varphi_1^0 = g\varepsilon(x)\varphi_2^0; \delta\varphi_1^0 = 0 \text{ mais } g\varepsilon(x)\varphi_2^0 \neq 0 \\ \delta\varphi_2^0 = -g\varepsilon(x)\varphi_1^0; \delta\varphi_2^0 = 0 \text{ mais } g\varepsilon(x)\varphi_1^0 \neq 0 \end{array} \right. \quad (1.20)$$

et l'état du vide dans ce cas n'est pas invariant sous les transformations de jauge locales. Par conséquent, la symétrie du système(Lagrangien) n'est pas la symétrie du vide.

Brisure spontanée de la symétrie(SSB) :

On fait un choix de l'état du vide(on brise la symétrie spontanément) :

$$\varphi_1^0 = 0 \text{ et } \varphi_2^0 = \sqrt{\frac{-2\mu^2}{\lambda}} \quad (1.21)$$

En générant une petite fluctuation φ autour de l'état du vide φ_0 , on peut écrire :

$$\varphi' = \varphi_0 + \varphi \quad (1.22)$$

où :

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2 \quad (1.23)$$

Le Lagrangien bosonique \mathcal{L} est réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{-1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \partial_\mu\varphi_1\partial^\mu\varphi_1 + \partial_\mu\varphi_2\partial^\mu\varphi_2 + g^2A_\mu A^\mu\varphi_1^2 + g^2A_\mu A^\mu\varphi_2^2 \\ & + g^2A_\mu A^\mu\varphi_0^2 - 2g\varphi_0A^\mu\partial_\mu\varphi_2 + 2g\partial^\mu\varphi_1A_\mu\varphi_2 - 2g\partial^\mu\varphi_2A_\mu\varphi_1 \\ & + 2g^2A_\mu A^\mu\varphi_0\varphi_1 - \varphi_1^2(\mu^2 + \frac{3}{2}\lambda\varphi_0^2) - \varphi_2^2(\mu^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi_0^2) - \frac{\lambda}{4}(\varphi_0^4 + \varphi_1^4 + \varphi_2^4) \\ & - 2(\frac{\lambda}{2}\varphi_0\varphi_1^3 + \frac{\lambda}{2}\varphi_0^3\varphi_1 + \mu^2\varphi_0\varphi_1) - \frac{\lambda}{2}\varphi_1^2\varphi_2^2 - \lambda\varphi_0\varphi_1\varphi_2^2 - \mu^2\varphi_0^2 \end{aligned} \quad (1.24)$$

On remarque que ce Lagrangien contient un terme non physique $-2g\varphi_0A^\mu\partial_\mu\varphi_2$, et par conséquent, il n'est pas diagonalisé et le champ φ_2 décrit une particule scalaire réelle sans masse ou particule de Goldstone. En outre, le nombre de degrés de liberté n'est pas conservé avant

et après la brisure de la symétrie.

Mécanisme de Higgs :

Le mécanisme de Higgs est une méthode utilisée pour éliminer les particules de Goldstone, diagonaliser le Lagrangien (le rendre physique) et rétablir la conservation des degrés de liberté. En redéfinissant les champs de jauge $A_\mu(x)$ en faisant la transformation suivante :

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = B_\mu(x) = A_\mu(x) + \alpha \partial_\mu \xi(x) \quad (1.25)$$

avec :

$$\alpha = \frac{-\sqrt{\lambda}}{2gm} \quad (1.26)$$

($m^2 = -\mu^2$) et travaillant dans la jauge ou :

$$\partial_\mu \xi(x) = 0 \quad (1.27)$$

Donc le champs scalaire se transforme comme :

$$\varphi(x) = e^{\frac{i\xi}{\varphi_0}} (\varphi_0 + \varphi_1 + i\varphi_2) \quad (1.28)$$

En posant :

$$\eta(x) = \varphi_1 + i\varphi_2 \quad (1.29)$$

Le tenseur électromagnétique reste invariant :

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = F_{\mu\nu} \quad (1.30)$$

et la dérivée covariante devient :

$$\begin{aligned} D_\mu \varphi &= (\partial_\mu \eta(x) - igB_\mu \eta(x)) e^{\frac{i\xi(x)}{\varphi_0}} \\ (D^\mu \varphi)^* &= (\partial^\mu \eta(x) + igB^\mu \eta(x)) e^{\frac{-i\xi(x)}{\varphi_0}} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Donc :

$$(D_\mu\varphi)(D^\mu\varphi)^* = \partial_\mu\eta(x)\partial^\mu\eta(x) + g^2 B_\mu B^\mu (\varphi_0 + \eta(x))^2 \quad (1.32)$$

et :

$$(\varphi\varphi^*)^2 = \varphi_0^4 + \eta^4(x) + 4\varphi_0^3\eta(x) + 6\varphi_0^2\eta^2(x) + 4\varphi_0\eta^3(x) \quad (1.33)$$

et par conséquent le potentiel $V(\varphi, \varphi^*)$ prend la forme :

$$V(\varphi, \varphi^*) = \frac{\varphi_0^2\mu^2}{4} - \mu^2\eta^2(x) + \frac{\lambda}{4}\varphi_0\eta^3(x) + \frac{\lambda}{16}\eta^4(x) \quad (1.34)$$

Après l'application du mécanisme de Higgs, le Lagrangien \mathcal{L} du secteur bosonic est donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \partial_\mu\eta(x)\partial^\mu\eta(x) + \mu^2\eta^2(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + g^2\varphi_0^2 B_\mu B^\mu - \frac{\varphi_0^2\mu^2}{4} \\ & + g^2 B_\mu B^\mu \eta^2(x) + 2g^2 B_\mu B^\mu \varphi_0 \eta(x) - \frac{\lambda}{4}\varphi_0\eta^4(x) - \frac{\lambda}{16}\eta^4(x) \end{aligned} \quad (1.35)$$

Donc, on obtient un champ scalaire $\eta(x)$ avec masse non nulle associé à une particule appelée particule de Higgs et le boson de jauge $B_\mu(x)$ qui a acquiert une masse $\frac{g\varphi_0}{\sqrt{2}}$.

1.2.2 Le groupe non abélien $SU(2)$:

Soit la densité Lagrangienne :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{-1}{4}F_{\mu\nu}^k F^{\mu\nu k} + (\partial_\mu\varphi^{+a} - \frac{i}{2}g\varphi^{+b}(\tau_k)_{ab}A_\mu^k)(\partial_\mu\varphi^a + \frac{i}{2}g(\tau_k)_{ab}\varphi^b A_\mu^k) \\ & - \mu^2(\varphi^{+a}\varphi^a) - \frac{\lambda}{4}(\varphi^{+a}\varphi^a)^2 \end{aligned} \quad (1.36)$$

où $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ représente le doublet des particules scalaires complexes sous l'action du potentiel :

$$V(\varphi, \varphi^+) = \mu^2(\varphi^{+a}\varphi^a) + \frac{\lambda}{4}(\varphi^{+a}\varphi^a)^2 \quad (1.37)$$

et le tenseur antisymétrique $F_{\mu\nu}^k$ tel que :

$$F_{\mu\nu}^k = \partial_\mu A_\nu^k - \partial_\nu A_\mu^k + g f_{klm} A_\mu^l A_\nu^m, \quad k = \overline{1, 3} \quad (1.38)$$

f_{klm} sont les constantes de structure et g le couplage (A_μ^k sont les champs de Yang-Mills).

Dans ce cas la dérivée covariante des champs scalaires est définies par :

$$\begin{aligned} D_\mu \varphi^a &= \partial_\mu \varphi^a + \frac{i}{2} g (\tau_k)_{ab} \varphi^b A_\mu^k \\ D_\mu \varphi^{+a} &= \partial_\mu \varphi^{+a} - \frac{i}{2} g (\tau_k)_{ab} \varphi^{+b} A_\mu^k \end{aligned} \quad (1.39)$$

avec les transformations de jauge locales qui laisse le Lagrangien invariant :

$$\begin{aligned} \delta \varphi^a &= -\frac{i}{2} g \varepsilon_k(x) (\tau_k)_{ab} \varphi^b \\ \delta \varphi^{+a} &= \frac{i}{2} g \varepsilon_k(x) (\tau_k)_{ab} \varphi^{+b} \end{aligned} \quad (1.40)$$

$\varepsilon_k(x)$ sont des paramètres réels ($k = \overline{1, r}$ ou r est l'ordre du groupe de Lie $SU(2)$).

L'état du vide est défini tel que :

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi^a} = 0 \text{ et } \frac{\partial V}{\partial \varphi^{+a}} = 0 \quad (1.41)$$

Comme dans le cas du groupe de Lie abélien $U(1)$, si $\mu^2 > 0$, on trouve que la symétrie du système ou de la densité Lagrangienne est la même que l'état du vide (invariance exacte). Par contre dans le cas $\mu^2 < 0$, on a :

$$\frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi^a} = 0 \implies \varphi^{+a} = 0, \text{ où } \sum_{a=1}^2 |\varphi^a|^2 = \frac{-2\mu^2}{\lambda} \quad (1.42)$$

avec :

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

et :

$$\varphi^1 = \varphi_1^1 + i\varphi_2^1; \varphi^2 = \varphi_1^2 + i\varphi_2^2 \quad (1.44)$$

Notez que les composantes de l'état du vide constitue un cercle de rayon $\frac{-2\mu^2}{\lambda}$ c-à-d le vide est dégénéré. Si on fait un choix de l'état du vide il n'y aura pas d'invariance par rapport aux transformations de jauge locales du groupe de Lie $SU(2)$ et la symétrie sera brisée spontanément (la symétrie du système n'est pas la symétrie du vide).

Brisure spontanée de la symétrie (SSB) :

Pour être plus explicite, dans le cas où $\mu^2 < 0$, on peut choisir l'état du vide comme suit :

$$\langle \varphi^a \rangle_0 = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} m \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; m^2 = -\mu^2 \quad (1.45)$$

Comme dans le cas du groupe $U(1)$, on fait une perturbation $\eta^a(x)$ autour de l'état du vide ; donc :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \langle \varphi^a \rangle_0 + \eta^a(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2\mu}{\sqrt{\lambda}} + \sigma(x) - i\tau_k \theta^k(x) \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \varphi^+(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\frac{2\mu}{\sqrt{\lambda}} + \sigma(x) + i\tau_k \theta^k(x) \right) \end{aligned} \quad (1.46)$$

En remplaçant dans le Lagrangien précédent on trouve :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{-1}{4} (\partial_\mu A_\nu^k - \partial_\nu A_\mu^k)^2 + \frac{1}{2\lambda} g^2 \mu^2 A_\mu^k A^{\mu k} + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \mu^2 \sigma^2(x) + \\ &\frac{1}{2} \partial_\mu \theta^k \partial^\mu \theta^k + \frac{1}{2\sqrt{2}} g \mu \partial_\mu \theta^k A_\mu^k + \frac{1}{2\sqrt{2}} g^2 \sigma^2 A_\mu^k A^{\mu k} + \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \mu g^2 \sigma A_\mu^k A^{\mu k}, k = \overline{1, 3} \end{aligned} \quad (1.47)$$

Notons qu'après cette brisure spontanée de la symétrie, le Lagrangien acquiert un terme non physique de la forme $\frac{1}{2\sqrt{2}} g \mu \partial_\mu \theta^k A_\mu^k$, et l'apparition des bosons de Goldstone $\theta^k(x)$ avec une masse nulle ainsi qu'un champ scalaire réel $\sigma(x)$ massif. Donc, on a des degrés de liberté en plus et notre système n'est pas physique.

Le mécanisme de Higgs :

En faisant la transformation :

$$B_\mu^k = A_\mu^k + \frac{\sqrt{\lambda}}{2\mu g} \partial_\mu \theta^k \quad (1.48)$$

et travaillons dans la jauge ou :

$$\partial_\mu \theta^k = 0 \quad (1.49)$$

On peut démontrer facilement que :

$$(D_\mu \varphi^a)(D_\mu \varphi^a)^+ = \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2\lambda} g^2 \mu^2 B_\mu^k B^{\mu k} + \frac{1}{2\sqrt{2}} g^2 B_\mu^k B^{\mu k} \sigma^2 + \sqrt{\frac{2}{\lambda}} g^2 \mu B_\mu^k B^{\mu k} \sigma \quad (1.50)$$

Et le potentiel prendra la forme :

$$V(\varphi^a, \varphi^{+a}) = \frac{\lambda}{16} \sigma^4(x) + \frac{1}{4} \varphi_0^2 \mu^2 + \frac{1}{4} \varphi_0 \lambda \sigma^3(x) - \mu^2 \sigma^2(x) \quad (1.51)$$

Finalement, Le Lagrangien physique est $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$. Avec :

$$\mathcal{L}_0 = \frac{-1}{4} (\partial_\mu B_\nu^k - \partial_\nu B_\mu^k)^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma(x) \partial^\mu \sigma(x) - \mu^2 \sigma^2(x) + \frac{1}{2\lambda} g^2 \mu^2 B_\mu^k B^{\mu k} \quad (1.52)$$

et :

$$\mathcal{L}_I = \frac{1}{2\sqrt{2}} g^2 B_\mu^k B^{\mu k} \sigma^2(x) - \sqrt{\frac{2}{\lambda}} g^2 \mu B_\mu^k B^{\mu k} \sigma(x) + \frac{1}{4} \varphi_0^2 \mu^2 - \frac{1}{4} \varphi_0 \lambda \sigma^3(x) - \frac{\lambda}{16} \sigma^4(x) \quad (1.53)$$

Il est à noter que les particule de Goldstone sont disparues et l'apparission du terme de masse pour les bosons de jauge B_μ^k . Donc, les trois états associés aux bosons de Goldstone se sont transformés en trois composantes longitudinales des champs vectoriels qui sont devenus massifs. La particule associée au champ scalaire $\sigma(x)$ est la particule de Higgs.

1.3 Le modèle standard $SU_I(2) \otimes U_Y(1)$:

Le modèle standard des interactions électrofaibles(ou modèle de Weinberg-Salam et Glashow) est un modèle d'unification des interactions électromagnétiques et faibles. Le plus souvent, on introduit aussi les interactions fortes.

Les particules élémentaires constituantes du modèle standard sont au nombre de 16(si on inclue pas les interactions fortes) :

- ⊗ 4 bosons de spin 1 qui sont les particules de force et qui représentent les bosons vectoriels des différentes interactions :
 - Les W^+ et W^- (les bosons vectoriels chargés) médiateurs des interactions faibles.
 - Le Z^0 (boson scalaire neutre) médiateur des interactions faibles.
 - Le photon γ médiateur des interactions électromagnétiques.
- ⊗ 12 fermions de spin 1/2 qui sont les particules de matière divisées en deux catégories :
 - 6 quarks et leurs anti-quarks qui constituent les composantes des hadrons.
 - 6 leptons et leurs anti-leptons.

Les leptons sont répartis dans des représentations fondamentales du groupe de Lie $SU(2)$ comme suit :

Des doublets : $\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}$ et des singuliers : e_R , μ_R , τ_R et ils sont divisés en trois familles(génération).

Chaque doublet de ces particules possède une polarisation gauche (L) ou droite(R). Si on dénote par :

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L = L^a \\ R &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_R = e_R^- = R^a \end{aligned} \quad (1.54)$$

Par ce que les expériences ont montré que les neutrinos avec une polarisation droite n'existe pas.

Le Lagrangien du modèle standard invariant globalement par rapport au groupe de Lie $SU_{I_W}(2) \otimes U_{Y_W}(1)$ a la forme :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \partial_\mu \varphi^{*a} \partial^\mu \varphi^a + i \overline{R^a} \gamma_\mu \partial^\mu R^a + i \overline{L^a} \gamma_\mu \partial^\mu L^a - h \overline{L^a} \varphi^a R^a - h \overline{R^{*a}} \varphi^a L^a \\
& + m^2 \varphi^{*a} \varphi^a - \frac{\lambda}{4} (\varphi^{*a} \varphi^a)^2
\end{aligned} \tag{1.55}$$

$\varphi(x)$ est un champ scalaire complexe de matière se transformant selon le groupe de Lie $SU_{I_W}(2) \otimes U_{Y_W}(1)$.

Les transformations de jauge locales des champs $\varphi(x)$ sont :

$$\begin{aligned}
SU_{I_W}(2) : \delta \varphi^a &= -ig I_W (\sigma^k)_{ab} \varepsilon_k \varphi^b \\
U_Y(1) : \delta \varphi^a &= -ig' Y_W \varepsilon_k \varphi^{*a}
\end{aligned} \tag{1.56}$$

où : $I_W = 1/2$ est l'isospin faible et $Y_W = 1$ représente l'hypercharge faible.

Pour les champs de matière L et R , on a les transformations de jauge suivantes :

$$SU_{I_W}(2) : \delta L^a = -ig I_W (\tau^k)_{ab} \varepsilon^k L^b; I_W = 1/2 \tag{1.57}$$

$$\delta R = 0 \tag{1.58}$$

$$U_Y(1) : \delta L^a = +ig' \varepsilon_4 Y_W L^a, Y_W = -1 \tag{1.59}$$

$$\delta R = -ig' \varepsilon_4 Y_W R, Y_W = -2 \tag{1.60}$$

Le Lagrangien invariant par rapport aux transformations de jauge globales du groupe de Lie $SU_{I_W}(2) \otimes U_Y(1)$ prend la forme :

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^a \partial^\mu \varphi^{+a} + i \overline{R} \gamma_\mu \partial^\mu R + i \overline{L^a} \gamma_\mu \partial^\mu L^a - h \overline{L^a} \varphi^a R - h \overline{R^*} \varphi^a L^a + m^2 \varphi^{+a} \varphi^a - \frac{\lambda}{4} (\varphi^{+a} \varphi^a)^2 \tag{1.61}$$

Le Lagrangien invariant par rapport aux transformations de jauge locales est obtenu en remplaçant ∂_μ par D_μ , et ajouter le terme de Yang-Mills, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \frac{-1}{4}F_{\mu\nu}^k F^{\mu\nu k} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (\partial_\mu \varphi^a + \frac{i}{2}g(\tau_k)_{ab}\varphi^b A_\mu^k + ig'\varphi^a A_\mu)(\partial^\mu \varphi^{+a} \\
& - \frac{i}{2}g\varphi^{+b}(\tau_k)_{ab}A^{\mu k} - ig'\varphi^{+a}A^\mu) + i\bar{R}\gamma_\mu(\partial^\mu R - 2ig'RA^\mu) + i\bar{L}^a\gamma_\mu(\partial^\mu L^a \\
& - \frac{i}{2}g(\tau_k)_{ab}L^b A^{\mu k} - ig'L^a A^\mu) - h\bar{L}^a\varphi^a R - h\bar{R}^*\varphi^a L^a + m^2\varphi^{+a}\varphi^a - \frac{\lambda}{4}(\varphi^{+a}\varphi^a)^2
\end{aligned} \tag{1.62}$$

Remarquez que les bosons vectoriels A_μ et A_μ^k ont des masse nulles. Pour générer des masses aux médiateurs des interactions faibles, on doit briser la symétrie $SU_{I_W}(2)$.

On doit briser la symétrie de jauge spontanément et procéder selon le mécanisme de Higgs.

1.3.1 Brisure spontanée de la symétrie(SSB) :

En suivant la procédure de la section précédente et si on prend le choix du champ de matière suivant :

$$\varphi(x) = \left[\sqrt{\frac{2}{\lambda}}m + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma(x) - i\tau_k\theta^k) \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.63}$$

et travaillons dans la jauge ou $\partial_\mu\theta^k = 0.$, le Lagrangien total s'écrit comme :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I. \tag{1.64}$$

($\mathcal{L}_0 \equiv$ Lagrangien libre, $\mathcal{L}_I \equiv$ Lagrangien d'interaction) avec :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0 = & -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^k - \partial_\nu A^{\mu k})(\partial^\mu A^{\nu k} - \partial^\nu A^{\mu k}) - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A^\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\
& + \frac{1}{2}\partial_\mu \sigma(x)\partial_\mu \sigma(x) - m^2 \sigma^2(x) + \frac{2m^2}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda}g^2 m^2 A_\mu^k A^{\mu k} + \frac{1}{2\lambda}g'^2 m^2 A_\mu A^\mu \\
& + \frac{1}{2}\partial_\mu \theta^k \partial^\mu \theta_k - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}gm\partial_\mu \theta^k A^{\mu k} + \frac{1}{\lambda}gg' m^2 A_\mu^3 A^\mu + i\overline{L^1}\gamma_\mu \partial^\mu L^1 + i\overline{L^2}\gamma_\mu \partial^\mu L^2 \\
& + i\overline{R}\gamma_\mu \partial^\mu R - \sqrt{\frac{2}{\lambda}}mh\overline{L^2}R - \sqrt{\frac{2}{\lambda}}mh\overline{R^*}L^2
\end{aligned} \tag{1.65}$$

(λ et h sont les constantes d'interaction des bosons scalaires). et :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_I = & \frac{-1}{4}g\epsilon_{klm}(A_\mu^l A_\nu^m - A^{\mu l} A^{\nu m})(\partial_\mu A_\nu^k - \partial_\nu A_\mu^k) + \frac{1}{4}g^2 A_\mu^l A_\nu^m A^{\mu l} A^{\nu m} \\
& + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}g^2 m\sigma A_\mu^k A^{\mu k} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}g'^2 m\sigma A_\mu A^\mu + \frac{1}{8}g^2 \sigma^2 A_\mu^k A^{\mu k} + \frac{1}{2}g'^2 \sigma^2 A_\mu A^\mu \\
& + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}gg'm\sigma A_\mu^3 A^\mu + \frac{1}{4}gg'\sigma^2 A_\mu^3 A^\mu + g'\overline{R}\gamma_\mu R A^\mu + \frac{1}{2}g'\overline{L^1}\gamma_\mu L^1 A^{\mu 3} \\
& - \frac{1}{2}g'\overline{L^2}\gamma_\mu L^2 A^{\mu 3} + \frac{1}{2}g'\overline{L^2}\gamma_\mu L^1 (A^{\mu 1} - iA^{\mu 2}) + \frac{1}{2}g'\overline{L^1}\gamma_\mu L^2 (A^{\mu 1} + iA^{\mu 2}) \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}}h\sigma\overline{L^2}R - \frac{1}{\sqrt{2}}h\sigma\overline{R^*}L^2 - \frac{1}{2}m\sqrt{\lambda}\sigma^3 - \frac{\lambda}{16}\sigma^4
\end{aligned} \tag{1.66}$$

1.3.2 Mécanisme de Higgs :

Notons que à cause des termes non physiques tels que $A_\mu^3 A^\mu$, on est obligé de diagonaliser le Lagrangien \mathcal{L} . En effet, faisons les transformations suivantes :

$$\begin{cases} W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 \pm iA_\mu^2) \\ Z_\mu = A_\mu^3 \cos \theta_w - A_\mu \sin \theta_w \\ B_\mu = A_\mu^3 \sin \theta_w + A_\mu \cos \theta_w \end{cases} \tag{1.67}$$

θ_w est un angle de mixage appelé angle de Weinberg et définit comme :

$$\begin{aligned}\cos \theta_w &= \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \\ \sin \theta_w &= \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}\end{aligned}$$

Après un calcul direct, on obtient l'expression du Lagrangien $\mathcal{L}' = \mathcal{L}'_0 + \mathcal{L}'_I$. Avec :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_0 &= \frac{-1}{2}(\partial_\mu W_\nu^* - \partial_\nu W_\mu^*)(\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu) + \frac{1}{\lambda}g^2m^2W_\mu^*W_\mu - \frac{1}{4}(\partial_\mu Z_\nu \\ &\quad - \partial_\nu Z_\mu)(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) + \frac{1}{2\lambda}m^2(g^2 + g'^2)Z_\mu Z^\mu - \frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma(x)\partial^\mu\sigma(x) - m^2\sigma^2(x) + ie^-\gamma_\mu\partial_\mu e - \sqrt{\frac{2}{\lambda}}hme^-e + i\bar{\nu}\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}\partial_\mu\nu\end{aligned}\quad (1.68)$$

($e(x)$ et $\nu(x)$ representent les champs de l'électron et le neutrino respectivement) et :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_1 &= \frac{-i}{\sqrt{g^2 + g'^2}}g^2W_\mu^*W_\nu(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) - \frac{i}{\sqrt{g^2 + g'^2}}gg'W_\mu^*W_\nu(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) \\ &\quad + \frac{ig^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(W_\nu^*\partial_\nu W_\mu - W_\nu\partial_\nu W_\mu^* + W_\nu\partial_\mu W_\nu^* - W_\nu^*\partial_\mu W_\nu)\tau_\mu \\ &\quad + \frac{igg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(W_\nu^*\partial_\nu W_\mu - W_\nu\partial_\nu W_\mu^* + W_\nu\partial_\mu W_\nu^* - W_\nu^*\partial_\mu W_\nu)B_\mu - \frac{1}{2}g^2W_\mu^*W_\mu W_\nu^*W_\nu \\ &\quad + \frac{1}{2}g^2W_\mu^*W_\mu^*W_\nu W_\nu - \frac{1}{g^2 + g'^2}g^4W_\mu^*W_\mu Z_\nu Z_\nu + \frac{1}{g^2 + g'^2}g^4W_\mu^*W_\nu Z_\mu Z_\nu \\ &\quad - \frac{g^2g'^2}{g^2 + g'^2}W_\mu^*W_\mu B_\nu B_\nu + \frac{g^2g'^2}{g^2 + g'^2}W_\mu^*W_\mu Z_\nu B_\nu + \frac{g^2g'^2}{g^2 + g'^2}W_\mu^*W_\nu Z_\mu B_\nu \\ &\quad + \frac{g^3g'}{g^2 + g'^2}W_\mu^*W_\nu Z_\nu B_\nu + \frac{g^2m\sigma}{\sqrt{\lambda}}W_\mu^*W_\mu + \frac{m(g^2 + g'^2)}{2\sqrt{\lambda}}\sigma Z_\mu Z_\mu + \frac{1}{4}g^2\sigma^2W_\mu^*W_\mu \\ &\quad + \frac{g^2 + g'^2}{8}\sigma^2 Z_\mu Z_\mu + \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}e^-\gamma_\mu e B_\mu - \frac{1}{2\sqrt{2}}g\bar{\nu}\gamma_\mu(1 + \gamma_5)eW_\mu^* \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{2}}ge^-\gamma_\mu(1 + \gamma_5)\nu W_\mu - \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{4}\bar{\nu}\gamma_\mu(1 + \gamma_5)\nu Z_\mu + \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{4}e^-\gamma_\mu(\gamma_5 \\ &\quad + \frac{g^2 - 3g'^2}{g^2 + g'^2})eZ_\mu - \sqrt{2}he^-e - \frac{1}{2}m\sqrt{\lambda}\sigma^3 - \frac{1}{16}\lambda\sigma^4\end{aligned}\quad (1.69)$$

Ce Lagrangien contient :

- Deux champs vectoriels $W_\mu^\pm(x)$ avec une masse $M_w = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}gm$.
- Un champ vectoriel neutre $Z_\mu(x)$ avec une masse $M_Z = \sqrt{\frac{g^2+g'^2}{\lambda}}m$.
- Un champ électromagnétique $B_\mu(x)$ sans masse.
- Un champ scalaire réel $\sigma(x)$ (Higgs) avec une masse $M_H = \sqrt{2}m$.
- Un électron de masse $m_e = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}hm$.
- Un neutrino polarisé à gauche $\nu_l(x)$ avec une masse nulle.
- Les termes d'interactions :
- Effet électromagnétique associé aux électrons :

$$\mathcal{L}_I^e = -ee^-(x)\gamma_\mu e^-(x)B_\mu(x) \quad (1.70)$$

on déduit donc :

$$e = -\frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = -g \cos \theta_w \quad (1.71)$$

- Les courants faibles chargés :

$$\mathcal{L}_I^W = \frac{-1}{2\sqrt{2}}g\bar{\nu}(x)\gamma_\mu(1 + \gamma_5)e(x)W_\mu^*(x) + cc \quad (1.72)$$

- En comparant avec la théorie de Fermi, on déduit que :

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} \quad (1.73)$$

ou G_F est constante de Fermi. Il est à noter que les masses des bosons de jauge $W_\mu^\pm(x)$ et $Z_\mu(x)$ sont liées par la relation :

$$\rho = \frac{M_W^2}{M_Z^2 \cos^2 \theta_W} = 1 \quad (1.74)$$

En effet on peut écrire le Lagrangien du modèle standard sous la forme :

$$\mathcal{L}_{MS} = \mathcal{L}_{jauge} + \mathcal{L}_{fermions} + \mathcal{L}_{Higgs} + \mathcal{L}_{Yukawa}$$

$$\mathcal{L}_{jauge} = \frac{-1}{4} \text{tr}(W_{\mu\nu}W^{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \text{tr}(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{fermions} = & i \sum_{i=e,\mu,\tau} \bar{L}_L^i D_L^L L_L^i + i \sum_{i=e,\mu,\tau} \bar{e}_R^i D_R^L e_R^i + i \sum_{i=u,c,t} \bar{Q}_L^i D_L^Q Q_L^i + i \sum_{i=u,c,t} \bar{u}_R^i D_R^Q u_L^i \\ & + i \sum_{i=d,s,b} \bar{d}_R^i D_R^Q d_L^i \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{Higgs} = (D^H \Phi)^* D^H \Phi - V(\Phi)$$

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = - \sum_{i=e,\mu,\tau} \kappa_i \bar{L}_L^i \Phi R_R^i - hc + \text{les termes de quarks analogues}$$

Chapitre 2

Le Modèle Standard dans La Géométrie Non-Commutative :

2.1 Introduction :

L'idée des espaces non-commutatifs est très ancienne même au début de la construction du formalisme mathématique de la théorie quantique (première quantification) et Théorie des Champs quantique (deuxième quantification) ou a été argumenté qu'on devrait introduire une échelle fondamentale qui détermine la précision sur les coordonnées d'espace. H. Snyder était le premier à formuler mathématiquement ces idées. Il a introduit les coordonnées non-commutatifs et par conséquent une incertitude sur les coordonnées d'espace se manifeste directement et d'une manière naturelle. Le succès de control des divergences qui se manifestent dans le calcul radiatif d'ordres supérieurs et les méthodes de régularisation ainsi que le programme de renormalisation ont fait de telle sorte que les recherches sur l'utilisation de la noncommutativité de l'espace-temps ont été presque oubliés. Cependant, quand le problème de non renormalisabilité et la quantification de la gravitation surgit, il est devenu presque indispensable qu'il faut peut être changer les concepts habituels d'espace-temps (commutativité, continuité, différentiabilité etc.).

L'application de ces idées de la non commutativité de l'espace-temps aux théories des champs et théories de jauge et l'équivalent au cas commutatif en utilisant le produit star et Seiberg-Witten Maps, permet la construction des extensions du modèle standard et la découverte d'autres interaction.

2.2 La Géométrie Espace-Temps Non-commutative :

La géométrie espace-temps non-commutative est une géométrie où les coordonnées de l'espace et le temps ne commutent pas. Probablement, elle est une géométrie microscopique qui se manifeste à très haute énergie. Elle est en quelque sorte la généralisation de la géométrie classique (macroscopique) qu'on connaît (Euclidienne, Minkowskienne, Riemannienne etc.).

Cette géométrie base sur les relations non-commutatives et canoniques des coordonnées de l'espace-temps \hat{x}_μ et leurs moments conjugués \hat{p}_μ ou :

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] \neq 0 \quad (2.1)$$

et avec :

$$\begin{aligned} [\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] &= i\theta_{\mu\nu} \\ [\hat{x}_\mu, \hat{p}_\nu] &= i\hbar g_{\mu\nu} \\ [\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ici $\theta_{\mu\nu} = -\theta_{\nu\mu}$ est une matrice antisymétrique qui représente la non-commutativité de l'espace-temps et a une dimension de $[L]^2$.

2.2.1 Formalisme Mathématique :

A travers ce travail de recherche, on utilise le plus souvent le produit $*$ (star) de Moyal. Pour illustrer quelques propriétés de ce produit, on considère deux champs génériques (fonctions ordinaires) φ_1 et φ_2 alors :

$$\varphi(\hat{x})\varphi(\hat{x}) = \varphi_1(x) * \varphi_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{\mu_1\nu_1} \dots \theta^{\mu_n\nu_n}}{(-2i)^n n!} (\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \varphi_1)(\partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_n} \varphi_2) \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}
(\varphi_1 * \varphi_2)(x) &= e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_{x\mu}\partial_{y\nu}} \varphi_1(x)\varphi_2(y) \Big|_{x=y} \\
&= \varphi_1(x) e^{\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu} \varphi_2(x) \\
&= \varphi_1(x)\varphi_2(x) + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi_1\partial_\nu\varphi_2 + \mathcal{O}(\theta^2)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

comme exemple :

$$e^{ikx} * e^{iqx} = e^{i(k+q)x} e^{-\frac{i}{2}k\theta q} \tag{2.5}$$

où $k\theta q = k^\mu q^\nu \theta_{\mu\nu}$. En plus :

$$\int d^n x (\varphi_1 * \varphi_2)(x) = \int d^n x (\varphi_2 * \varphi_1)(x) = \int d^n x \varphi_1(x)\varphi_2(x) \tag{2.6}$$

(x^μ est la coordonnée commutative). Dans la limite classique $\theta_{\mu\nu} \rightarrow 0$, on revient à l'espace-temps ordinaire(commutatif).

2.2.2 Autres propriétés du produit star(*) :

Dans ce qui va suivre, on va illustrer quelques autres propriétés fondamentales du produit star :

1- Le produit star est non-commutatif :

$$\varphi_2 * \varphi_1 \neq \varphi_1 * \varphi_2 \tag{2.7}$$

2- Le produit star est associatif :

$$\varphi_1 * (\varphi_2 * \varphi_3) = (\varphi_1 * \varphi_2) * \varphi_3 \tag{2.8}$$

3- Complexe conjugué :

$$(\varphi_1 * \varphi_2)^{cc} = \varphi_2^{cc} * \varphi_1^{cc} \tag{2.9}$$

4-Permutation cyclique :

$$\int d^D x (\varphi_1 * \varphi_2 * \varphi_3) = \int d^D x (\varphi_3 * \varphi_1 * \varphi_2) = \int d^D x (\varphi_2 * \varphi_3 * \varphi_1) \quad (2.10)$$

et qui peut être généraliser à :

$$\int d^D x (\varphi_1 * \varphi_2 * \dots * \varphi_n)(x) = \int d^D x (\varphi_n * \varphi_1 * \dots * \varphi_{n-1})(x) \quad (2.11)$$

5-Règle de Leibniz :

$$\partial_\mu (\varphi_1 * \varphi_2) = \partial_\mu \varphi_1 * \varphi_2 + \varphi_1 * \partial_\mu \varphi_2 \quad (2.12)$$

2.2.3 L'opérateur de Weyl :

Toute fonction $\varphi(x)$ peut être décrite par sa transformée de Fourier $\tilde{\varphi}(k)$:

$$\tilde{\varphi}(k) = \int d^D x e^{-ik_j x^j} \varphi(x) \quad (2.13)$$

avec :

$$\tilde{\varphi}(-k) = \tilde{\varphi}(k)^* \quad (2.14)$$

L'idée d'introduire des opérateurs de Weyl $\hat{w}[\varphi]$ est une technique utilisée pour décrire et formuler la Mécanique Quantique à partir de l'espace de phase de la Mécanique Classique. En fonction de la transformée de Fourier, on peut écrire :

$$\hat{w}[\varphi] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{\varphi}(k) e^{ik_j \hat{x}^j} \quad (2.15)$$

Notez que l'opérateur $\hat{w}[\varphi]$ est hermitien si $\varphi(x)$ est réelle. La relation précédente peut être réécrite comme suit :

$$\hat{w}[\varphi] = \int d^D x \varphi(x) \hat{\Delta}(x) \quad (2.16)$$

où $\hat{\Delta}(x)$ est un opérateur hermitien donné par :

$$\hat{\Delta}(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik_j \hat{x}^j} e^{-ik_j x^j} \quad (2.17)$$

On peut aussi introduire la dérivée des opérateurs à travers une dérivation linéaire anti-hermitienne $\hat{\partial}_i$ définie par les relations de commutations suivantes :

$$\begin{aligned} [\hat{\partial}_i, \hat{x}^j] &= \delta_i^j \\ [\hat{\partial}_i, \hat{\partial}_j] &= 0 \\ [\hat{\partial}_i, \hat{\Delta}(x)] &= -\partial_i \hat{\Delta}(x) \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$[\hat{\partial}_i, \hat{w}[\varphi]] = \int d^D x \partial_i \varphi(x) \hat{\Delta}(x) = \hat{w}[\partial_i \varphi] \quad (2.19)$$

et :

$$e^{\nu^i \hat{\partial}_i} \hat{\Delta}(x) e^{-\nu^i \hat{\partial}_i} = \hat{\Delta}(x + \nu) \quad (2.20)$$

Il est à noter que les propriétés précédentes impliquent que toute trace cyclique Tr définie sur l'algèbre des opérateurs de Weyl est indépendante de $x \in \mathbb{R}^D$. Comme illustration et utilisation du produit de Weyl on a :

$$Tr \hat{\Delta}(x) = 1 \quad (2.21)$$

$$Tr \hat{w}[\varphi] = \int d^D x \varphi(x) \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}(x) \hat{\Delta}(y) &= \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} e^{i(k+k')_j \hat{x}^j} e^{\frac{-i}{2} \theta^{jl} k_j k'_l} e^{-ik_j x^j - ik'_l y^l} \\ &= \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \int d^D z e^{i(k+k')_j z^j} \hat{\Delta}(z) e^{\frac{-i}{2} \theta^{jl} k_j k'_l} e^{-ik_j x^j - ik'_l y^l} \\ &= \frac{1}{\pi^D |\det \theta|} \int d^D z \hat{\Delta}(x) e^{-2i(\theta^{-1})_{ij} (x-z)^i (y-z)^j} \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$Tr \hat{\Delta}(x) \hat{\Delta}(y) = \delta^D(x - y) \quad (2.24)$$

et :

$$\varphi(x) = Tr(\hat{w}[\varphi]\hat{\Delta}(x)) \quad (2.25)$$

Maintenant si on considère le produit de deux opérateurs de Weyl $\hat{w}[\varphi_1]$ et $\hat{w}[\varphi_2]$ correspondant aux fonctions $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$.

Les équations précédentes nous permettent d'écrire :

$$Tr(\hat{w}[\varphi_1]\hat{w}[\varphi_2]\hat{\Delta}(x)) = \frac{1}{\pi^D |\det \theta|} \iint d^D y d^D z \varphi_1(y) \varphi_2(z) e^{-2i(\theta^{-1})_{ij}(x-y)^i(x-z)^j} \quad (2.26)$$

et en utilisant le fait que :

$$\tilde{\varphi}(k) = \int d^D x e^{-ik_j x_j} \varphi(x) \quad (2.27)$$

et :

$$\hat{w}[\varphi] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{\varphi}(k) e^{ik_j \hat{x}^j} \quad (2.28)$$

ainsi que la relation de Baker-Cambell-Hausdorff :

$$e^{ik_j \hat{x}^j} e^{ik'_j \hat{x}^j} = e^{\frac{-i}{2} \theta^{lm} k_l k'_m} e^{i(k+k')_j \hat{x}^j} \quad (2.29)$$

on obtient :

$$\hat{w}[\varphi_1]\hat{w}[\varphi_2] = \hat{w}[\varphi_1 * \varphi_2] \quad (2.30)$$

par conséquent :

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) * \varphi_2(x) &= \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \tilde{\varphi}_1(k) \tilde{\varphi}_2(k' - k) e^{\frac{-i}{2} \theta^{jl} k_j k'_l} e^{ik'_m \hat{x}^m} \\ &= \varphi_1(x) e^{\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_j \theta^{jl} \overrightarrow{\partial}_l} \varphi_2(x) \\ &= \varphi_1(x) \varphi_2(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \theta^{j_1 l_1} \dots \theta^{j_n l_n} \partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} \varphi_1(x) \partial_{l_1} \dots \partial_{l_n} \varphi_2(x) \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$[\hat{x}^j, \hat{\varphi}(x)] = i\theta^{jl}\partial_l\varphi(x) \quad (2.32)$$

$$[\hat{\varphi}_1(x), \hat{\varphi}_2(x)] = 2i\varphi_1(x) \sin\left(\frac{1}{2}\overleftarrow{\partial}_j\theta^{jl}\overrightarrow{\partial}_l\right)\varphi_2(x) \quad (2.33)$$

$$\varphi_1(x) * \varphi_2(x) + \varphi_2(x) * \varphi_1(x) = 2\varphi_1(x) \cos\left(\frac{1}{2}\overleftarrow{\partial}_j\theta^{jl}\overrightarrow{\partial}_l\right)\varphi_2(x) \quad (2.34)$$

$$\varphi_1(x_1) * \dots * \varphi_n(x_n) = \prod_{a \prec b} \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{jl}\frac{\partial}{\partial x_a^j}\frac{\partial}{\partial x_b^l}\right)\varphi_1(x_1)\dots\varphi_n(x_n) \quad (2.35)$$

$$Tr(\hat{w}[\varphi_1]\dots\hat{w}[\varphi_n]) = \int d^D x \varphi_1(x_1) * \dots * \varphi_n(x_n) \quad (2.36)$$

et :

$$\int d^D x \varphi_1(x) * \varphi_2(x) = \int d^D x \varphi_1(x)\varphi_2(x) \quad (2.37)$$

2.3 Théorie de jauge sur l'espace-temps non-commutatif :

Pour résoudre le problème de la charge en géométrie non-commutative en utilisant autres que les groupes unitaires $U(N)$ les groupes unitaires unimodulaires $SU(N)$ ou orthogonaux $SO(N)$ et pour conserver la forme des transformations de jauge des différents champs dynamiques, on est obligé de travailler avec les Seiberg-Witten maps de ces champs ($\hat{\psi}[\psi, V]$, $\hat{V}_\mu[V]$ etc..).

Les champs de fermions $\hat{\psi}$ et de jauge \hat{V}_μ non-commutatifs(Seiberg-Witten) sont donnés par les expressions suivantes :

$$\hat{\psi} = \hat{\psi}[\psi, V] = \psi - \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}V_\alpha\partial_\beta\psi + \frac{i}{8}\theta^{\alpha\beta}[V_\alpha, V_\beta]\psi + \mathcal{O}(\theta^2) \quad (2.38)$$

et :

$$\hat{V}_\mu = \hat{V}_\mu[V] = V_\mu + \frac{1}{4}\theta^{\alpha\beta} \{\partial_\alpha V_\mu + F_{\alpha\mu}, V_\beta\} + \mathcal{O}(\theta^2) \quad (2.39)$$

où ψ et V_μ^a ($V_\mu = V_\mu^a T_a$; et les T_a représentent les générateurs du groupe de Lie) sont les champs de fermions et de jauge ordinaires.

La forme générale du terme cinétique des bosons de jauge est donnée par :

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{2} \sum_{\mathfrak{R}} C_{\mathfrak{R}} Tr(\mathfrak{R}(\hat{F}_{\mu\nu}) * \mathfrak{R}(\hat{F}^{\mu\nu})) \quad (2.40)$$

où le champ non-commutatif $\hat{F}_{\mu\nu}$ a comme expression :

$$\begin{aligned} \hat{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \hat{V}_\nu - \partial_\nu \hat{V}_\mu - i[\hat{V}_\mu, * \hat{V}_\nu] \\ &= F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta} \{F_{\mu\alpha}, F_{\nu\beta}\} - \frac{1}{4}\theta^{\alpha\beta} \{V_\alpha, (\partial_\beta + D_\beta)F_{\mu\nu}\} + \mathcal{O}(\theta^2) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Ici Tr est la trace sur les éléments du groupe de Lie utilisé, \mathfrak{R} dénote la représentation (en général c'est la représentation adjointe) et $C_{\mathfrak{R}}$ les différents couplages. La courbure ou le tenseur antisymétrique $F_{\mu\nu}$ est donné par :

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T_a = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu - i[V_\mu, V_\nu] \quad (2.42)$$

et sa dérivée covariante $D_\rho F_{\mu\nu}$:

$$D_\rho F_{\mu\nu} = \partial_\rho F_{\mu\nu} - i[V_\rho, F_{\mu\nu}] \quad (2.43)$$

ψ	$\mathfrak{R}_\psi(V_\mu)$
$e_R^{(i)}$	$-g' A_\mu$
$L_L^{(i)} = \begin{pmatrix} \nu_L^{(i)} \\ e_L^{(i)} \end{pmatrix}$	$-\frac{1}{2}g' A_\mu + g B_\mu^a T_L^a$
$u_R^{(i)}$	$\frac{2}{3}g' A_\mu + g_s G_\mu^b T_S^b$
$d_R^{(i)}$	$-\frac{1}{3}g' A_\mu + g_s G_\mu^b T_S^b$
$Q_L^{(i)} = \begin{pmatrix} u_L^{(i)} \\ d_L^{(i)} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{6}g' A_\mu + g B_\mu^a T_L^a + g_s G_\mu^b T_S^b$

Tableau1 : représente les combinaisons champs de jauge qui rentrent dans les expressions des dérivées covariantes des différents fermions dans le Modèle Standard Non-Commutatif.

Pour le modèle standard des interactions fortes et électrofaibles(voire Tableau1), le champs V_μ représente en fait une combinaison linéaire du potentiel de jauge pour le groupe de Lie $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$:

$$V_\mu(x) = g' A_\mu(x) Y + g \sum_{a=1}^3 B_\mu^a(x) T_L^a + g_s \sum_{b=1}^8 G_\mu^b(x) T_s^b \quad (2.44)$$

(g' , g et g_s ainsi que Y , T_L^a et T_s^b , et $A_\mu(x)$, $B_\mu^a(x)$ et $G_\mu^b(x)$ sont les couplages, générateurs des groupes de Lie et les bosons de jauge liés aux interactions électromagnétiques, faibles et fortes respectivement). Il est à noter que les coefficients $C_{\mathfrak{R}}$ dans les termes cinétiques sont soumis aux contraintes :

$$\frac{1}{g_I^2} = \sum_{\mathfrak{R}} C_{\mathfrak{R}} \text{Tr}(\mathfrak{R}(T_I^a) \mathfrak{R}(T_I^a)) = \text{Tr} \frac{1}{G^2} (T_I^a T_I^a) \quad (2.45)$$

où g_I symbolise les constantes de couplage ordinaires g' , g , g_s et T_I^a les générateurs des différents groupes de Lie $U_Y(1)$, $SU_L(2)$ et $SU_C(3)$ respectivement (Y, L, C dénotent l'hypercharge, left handed et couleur respectivement).

Il est à noter que la trace dans les termes cinétiques pour les bosons de jauge n'est pas unique, elle dépend du choix de la représentation. En outre, dans ce qui suit et à cause des contraintes de la géométrie non-commutative on travaille sur l'algèbre de Lie enveloppante au lieu de l'algèbre de Lie elle même. Comme illustration la forme générale du Lagrangien de Yang-Mills \mathcal{L}_{jauge} , prend la forme :

$$\mathcal{L}_{jauge} = \frac{-1}{2} \text{Tr} \frac{1}{G^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \theta^{\rho\sigma} \text{Tr} \frac{1}{G^2} [(\frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F_{\mu\nu} - F_{\rho\mu} F_{\sigma\nu}) F^{\mu\nu}] + \mathcal{O}(\theta^2) \quad (2.46)$$

2.4 Lagrangien du Modèle Standard Non-Commutatif (MSNC) :

Le Lagrangien du MSNC (le Modèle Standard Non-Commutatif) est construit à partir du Lagrangien du MS (Modèle Standard) classique comme suit : le produit normal des différents champs dans le Lagrangien est remplacé par le produit de Moyal avec l'ordering de Weyl et les champs de matière et de jauge sont remplacés par leurs Seiberg-Witten maps. Dans la limite où le paramètre de la non commutativité s'annule, on retrouve le modèle standard ordinaire.

Des simplifications directes en suivant la prescription précédente donnent le Lagrangien du modèle standard non-commutative (MSNC) suivant :

$$\mathcal{L}_{MSNC} = \mathcal{L}_{jauge} + \mathcal{L}_{fermions} + \mathcal{L}_{Higgs} + \mathcal{L}_{Yukawa} \quad (2.47)$$

où :

$$\mathcal{L}_{fermions} = \sum_{i=1}^3 [\bar{L}_L^{(i)} * (i\hat{\mathcal{D}}\hat{L}_L^{(i)}) + \bar{Q}_L^{(i)} * (i\hat{\mathcal{D}}\hat{Q}_L^{(i)}) + \bar{e}_R^{(i)} * (i\hat{\mathcal{D}}\hat{e}_R^{(i)}) + \bar{U}_R^{(i)} * (i\hat{\mathcal{D}}\hat{U}_R^{(i)}) + \bar{d}_R^{(i)} * (i\hat{\mathcal{D}}\hat{d}_R^{(i)})] \quad (2.48)$$

$$\mathcal{L}_{Higgs} = h_0^+(\hat{D}_\mu\hat{\Phi}) * h_0(\hat{D}^\mu\hat{\Phi}) - \mu^2 h_0^+(\hat{\Phi}) * h_0(\hat{\Phi}) - \lambda h_0^+(\hat{\Phi}) * h_0(\hat{\Phi}) * h_0^+(\hat{\Phi}) * h_0(\hat{\Phi}) \quad (2.49)$$

et :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yukawa} = & - \sum_{i,j=1}^3 [G_e^{(ij)}(\bar{L}_L^{(i)} * h_e(\hat{\Phi}) * \hat{e}_R^{(j)}) + G_e^{+(ij)}(\bar{e}_R^{(i)} * h_e(\hat{\Phi})^+ + \hat{L}_L^{(j)}) + G_u^{(ij)}(\bar{Q}_L^{(i)} * h_u(\hat{\Phi}_c) * \hat{U}_R^{(j)}) \\ & + G_u^{(ij)}(\bar{U}_R^{(i)} * h_u(\hat{\Phi}_c)^+ * \hat{Q}_L^{(j)}) + G_d^{(ij)}(\bar{Q}_L^{(i)} * h_d(\hat{\Phi}) * \hat{d}_R^{(j)}) + G_d^{+(ij)}(\bar{d}_R^{(i)} * h_d(\hat{\Phi})^+ * \hat{Q}_L^{(j)})] \end{aligned} \quad (2.50)$$

/	$SU(3)_c$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	$U(1)_e$	T_3
$e_R^{(i)}$	1	1	-1	-1	0
$L_L^{(i)} = \begin{pmatrix} \nu_L^{(i)} \\ e_L^{(i)} \end{pmatrix}$	1	2	-1/2	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$
$u_R^{(i)}$	3	1	2/3	2/3	0
$d_R^{(i)}$	3	1	-1/3	-1/3	0
$Q_L^{(i)} = \begin{pmatrix} u_L^{(i)} \\ d_L^{(i)} \end{pmatrix}$	3	2	1/6	$\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$
$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$	1	2	1/2	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$
W^+, W^-, Z	1	3	0	$(\pm 1, 0)$	$(\pm 1, 0)$
A	1	1	0	0	0
G^b	8	1	0	0	0

Tableau2 : Les champs et leurs répartitions et représentations selon les groupes de Lie du Modèle Standard. ($i = \overline{1,3}$ dénote les indices de génération).

Les particules et leurs répartitions et représentations selon les groupes de Lie du Modèle Standard et/ou le Modèle Standard Non-Commutatif, sont données dans le tableau 2.

Dans les expressions précédentes des différents termes du Lagrangien total du Modèle Standard, on a utilisé les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
\overline{\hat{\psi}} &= \hat{\psi}^+ \gamma^0 \\
\hat{\psi}_L &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\hat{\psi} \\
\hat{\psi}_R &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\hat{\psi} \\
\hat{\Phi}_c &= i\tau_2 \hat{\Phi}^* \\
h_0(\hat{\Phi}) &= \hat{\Phi}[\hat{\Phi}, \frac{1}{2}g'A + gB^a T_L^a, 0] \\
h_\psi(\hat{\Phi}) &= \hat{\Phi}[\hat{\Phi}, \mathfrak{R}_{\psi_L}(V), \mathfrak{R}_{\psi_R}(V)] \\
h_\psi(\hat{\Phi}_c) &= \hat{\Phi}[\hat{\Phi}_c, \mathfrak{R}_{\psi_L}(V), \mathfrak{R}_{\psi_R}(V)]
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Les indices L et R dénotent les composantes gauches et droites standard, τ_2 la matrice de Pauli ordinaire, Les G_e, G_u et G_d les matrices de couplage de Yukawa et les indices $i, j = \overline{1,3}$ le numéro de génération.

Le champ de Higgs non-commutatif $\hat{\Phi}$ est donné par son Seiberg-Witten map suivant :

$$\hat{\Phi} \equiv \hat{\Phi}[\Phi, V] = +\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}V_\beta(\partial_\alpha\Phi - \frac{i}{2}V_\alpha\Phi) + \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\Phi - \frac{i}{2}V_\alpha\Phi) + \mathcal{O}(\theta^2) \quad (2.52)$$

$\hat{\Phi}$ est une fonctionnelle du champ de jauge V qui transforme d'une manière covariante sous les transformations de jauge non-commutatives :

$$\delta\hat{\Phi}[\Phi, V] = i\hat{\Lambda} * \hat{\Phi} \quad (2.53)$$

où $\hat{\Lambda}$ est le paramètre de jauge non-commutatif correspondant.

On peut facilement démontré pour le conjugué hermétique que :

$$\hat{\Phi}[\Phi, V]^+ = \hat{\Phi}[\Phi^+, V] \quad (2.54)$$

et que la dérivée covariante du champ de Higgs non-commutatif $\hat{\Phi}$ est donnée par :

$$\hat{D}_\mu\hat{\Phi} = \partial_\mu\hat{\Phi} - i\hat{V}_\mu * \hat{\Phi} \quad (2.55)$$

Dans le modèle standard minimal non-commutatif, on adopte que le Lagrangien du terme de jauge total pour le groupe de jauge du modèle standard(dénoté par $\mathcal{L}_{jauge}^{mMSNC}$) :

$$\mathcal{L}_{jauge}^{mMSNC} = \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{g'^2}Tr_1 + \frac{1}{g^2}Tr_2 + \frac{1}{g_s^2}Tr_3\right)\hat{F}_{\mu\nu} * \hat{F}^{\mu\nu} \quad (2.56)$$

est simplifié avec un choix adéquat pris sur une somme de trois traces sur les représentations des générateurs des groupes $U(1)$, $SU(2)$, $SU(3)$ et avec la matrice de l'hypercharge :

$$Y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

Dans ce choix, on peut montré que :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{jauge}^{mMSNC} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}A_{\mu\nu}A^{\mu\nu} + Tr B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + Tr G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\right) \\
&\quad + \frac{1}{4}g_s d^{abc}\theta^{\rho\sigma}\left(\frac{1}{4}G_{\rho\sigma}^a G_{\mu\nu}^b - G_{\rho\mu}^a G_{\sigma\nu}^b\right)G^{\mu\nu,c} + \mathcal{O}(\theta^2)
\end{aligned} \tag{2.58}$$

où $A_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}(= B_{\mu\nu}^a T_c^a)$ et $G_{\mu\nu}(= G_{\mu\nu}^a T_s^a)$ représentent les tenseurs de courbures des champs des groupes $U(1)$, $SU(2)$ et $SU(3)$, respectivement et sont données par :

$$\begin{aligned}
A_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\
B_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a + g\varepsilon^{abc} B_\mu^b B_\nu^c \\
G_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Dans la représentation fondamentales des groupes $SU(2)$ et $SU(3)$, on a :

$$T_L^a = \frac{\tau^a}{2} \text{ et } T_s^a = \frac{\lambda^a}{2} \tag{2.60}$$

(τ^a et λ^a sont les matrices de Pauli et Gell-Mann respectivement). La renormalisation est définie comme suit :

$$Tr(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}, Tr(\tau^a \tau^b \tau^c) = 2i\varepsilon^{abc}, Tr(\lambda^a \lambda^b \lambda^c) = 2(d^{abc} + if^{abc}) \tag{2.61}$$

Ici ε^{abc} est le tenseur antisymétrique de Levi-Cevita alors que f^{abc} et d^{abc} sont les constantes de structure totalement antisymétriques et symétriques du groupe non abélien $SU(3)$.

Il est à noter qu'à cause de la non commutativité de l'espace-temps de nouveaux termes(Vertex) ZZZ apparaissent ainsi que des corrections aux vertex du modèle standard ordinaire. En outre, la violation de la symmétrie de Lorentz est explicite.

Comme dans le cas ordinaire, les bosons électrofaibles de jauge (W^\pm, Z) physiques et le photon (A) sont donnés par :

$$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_\mu^1 \mp iB_\mu^2) \tag{2.62}$$

$$Z_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = -\sin\theta_w A_\mu + \cos\theta_w B_\mu^3 \tag{2.63}$$

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(gA_\mu + g'B_\mu^3) = \cos \theta_w A_\mu + \sin \theta_w B_\mu^3 \quad (2.64)$$

où la charge électrique e est : reliée aux autres couplages par les relations :

$$e = g \sin \theta_w = g' \cos \theta_w \quad (2.65)$$

(θ_w est l'angle de Weinberg).

Chapitre 3

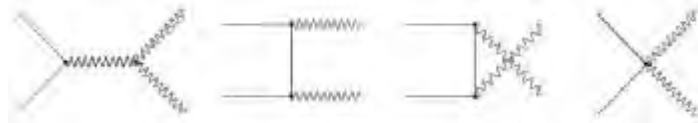
Applications physiques

Dans ce chapitre on va considérer le sous processus physique $f\bar{f} \rightarrow W^+W^-$ (f et \bar{f} dénotent des fermions et antifermions) qui contribue au processus physique $P + \bar{P} \rightarrow W^+W^-$ dans la production des bosons vectoriels W^+ et W^- au LHC ou autre collisionneurs des particules. Le calcul de l'amplitude de transition qui a une relation avec la section efficace physique a été fait dans le cadre du modèle standard non-commutatif minimal avec les vertex modifiés et les nouvelles interactions d'origine non-commutatif. Le but est de faire un calcul d'un processus physique du modèle standard dans le cadre de la géométrie non-commutative. Le but est de tester et voir la contribution de la correction non-commutative, sa forme et son comportement asymptotique.

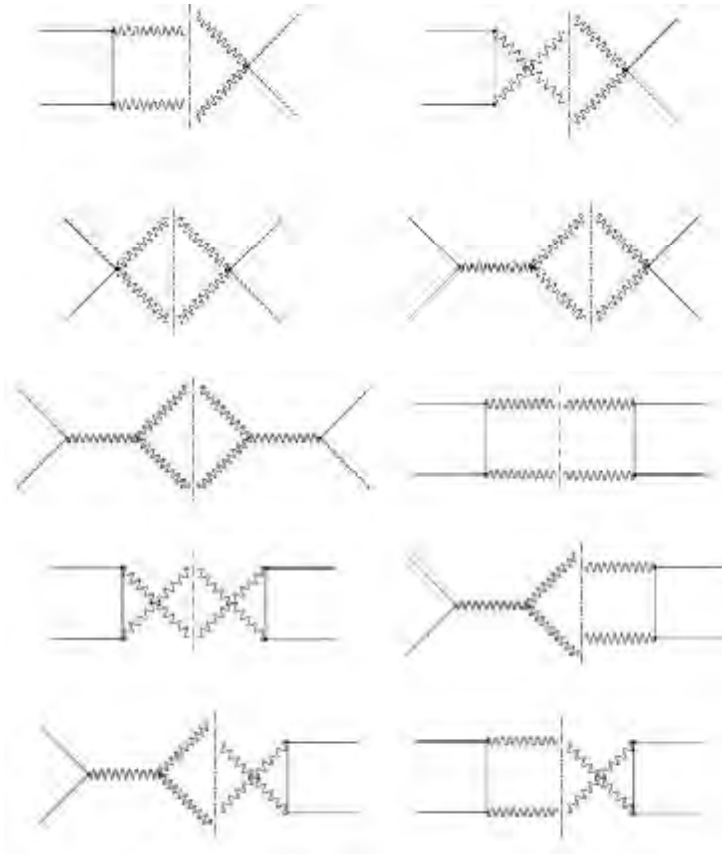
Pour le sous processus physique :

$$f\bar{f} \rightarrow W^+W^- \tag{3.1}$$

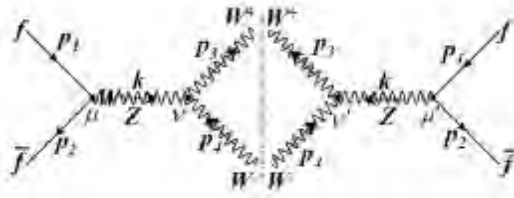
Les diagrammes de Feynman possibles qui contribuent dans le calcul de l'amplitude de transition sont :



A l'ordre de zéro approximation de Born (tree level) les diagrammes unitaires qui contribuent sont les suivants :



1- Contribution du premier diagramme unitaire :



L'amplitude du premier diagramme de Feynman M_1 et en utilisant les lois de Feynman modifiées (voire annexe B) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
 M_1 = & \bar{v}(p_2, s) \frac{ie}{\sin 2\theta_W} \left\{ (\gamma_\mu - \frac{i}{2} k^\alpha \theta_{\mu\alpha\beta} p_1^\beta) (c_{V,f} - c_{A,f} \gamma_5) - \frac{i}{2} \theta_{\mu\alpha} m_f [p_1^\alpha (c_{V,f} - c_{A,f} \gamma_5) \right. \\
 & \left. - p_2^\alpha (c_{V,f} + c_{A,f} \gamma_5)] \right\} u(p_1, s) \frac{i}{k^2 - M_Z^2} (-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{M_Z^2}) ie \cot \theta_W \{ g_{\nu\sigma} (k + p_4)_\rho
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -g_{\rho\sigma}(p_4 - p_3)_\nu - g_{\rho\nu}(p_3 + k)_\sigma + \frac{i}{2}M_W^2[\theta_{\nu\sigma}k_\rho + \theta_{\nu\rho}k_\sigma + g_{\nu\sigma}(\theta k)_\rho - g_{\sigma\rho}(\theta k)_\nu \\
& + g_{\rho\nu}(\theta k)_\sigma] - \frac{i}{4}M_Z^2[\theta_{\nu\sigma}(k + p_4)_\rho - \theta_{\sigma\rho}(p_4 - p_3)_\nu - \theta_{\rho\nu}(p_3 + k)_\sigma + 2g_{\nu\sigma}(\theta p_3)_\rho \\
& - 2g_{\sigma\rho}(\theta k)_\nu + 2g_{\rho\nu}(\theta p_4)_\sigma]\} \varepsilon^\rho(p_3) \varepsilon^{*\sigma}(p_4)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Ici $u(p_1, s)$ et $v(p_2, s)$ sont les spineurs des fermions et anti-fermions respectivement. Les couplages $c'_{V,f}$ et $c'_{A,f}$ sont les couplages vectoriels et axiaux des fermions avec les bosons de jauge Z . donnés par :

$$\begin{aligned}
c'_{V,f} &= T_{3,q_L} - 2Q_q \sin^2 \theta_w \\
c'_{A,f} &= T_{3,q_L}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

(T_{3,q_L} est la troisième composante de l'isospin du quark q). Les polarisations des bosons vectoriels sont dénotées par $\varepsilon^{\sigma'}(p)$.

On a introduit aussi les notations $(\theta k)_\sigma$ et $\theta_{\mu\alpha\beta}$ et qui sont définies comme :

$$(\theta k)_\sigma = \theta_{\sigma\mu} k^\mu \tag{3.4}$$

$$p\theta k = p^\sigma \theta_{\sigma\mu} k^\mu \tag{3.5}$$

et :

$$\theta_{\mu\alpha\beta} = \theta_{\mu\alpha}\gamma_\beta + \theta_{\beta\mu}\gamma_\alpha + \theta_{\alpha\beta}\gamma_\mu \tag{3.6}$$

le complexe conjugué de l'amplitude M_1 est :

$$\begin{aligned}
M_1^* &= \bar{u}(p_1, s) \left\{ \frac{i}{2} \theta_{\mu'\alpha'} m_f [p_1^{\alpha'} (c'_{V,f} - c'_{A,f} \gamma_5^+) - p_2^{\alpha'} (c'_{V,f} + c'_{A,f} \gamma_5^+)] + (\gamma_{\mu'}^+ \right. \\
& \left. + \frac{i}{2} k^{\alpha'} \theta_{\mu'\alpha'\beta'} p_1^{\beta'}) (c'_{V,f} - c'_{A,f} \gamma_5^+) \right\} v(p_2, s) \frac{-ie}{\sin 2\theta_W} \frac{-i}{k^2 - M_Z^2} (-g^{\mu'\nu'})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{k^{\mu'} k^{\nu'}}{M_Z^2} (-i) e \cot \theta_W \{ g_{\nu'\sigma'}(k+p_4)_{\rho'} - g_{\rho'\sigma'}(p_4-p_3)_{\nu'} - g_{\rho'\nu'}(p_3+k)_{\sigma'} \\
& - \frac{i}{2} M_W^2 [\theta_{\nu'\sigma'} k_{\rho'} + \theta_{\nu'\rho'} k_{\sigma'} + g_{\nu'\sigma'}(\theta k)_{\rho'} - g_{\sigma'\rho'}(\theta k)_{\nu'} + g_{\rho'\nu'}(\theta k)_{\sigma'}] \\
& + \frac{i}{4} M_Z^2 [\theta_{\nu'\sigma'}(k+p_4)_{\rho'} - \theta_{\sigma'\rho'}(p_4-p_3)_{\nu'} - \theta_{\rho'\nu'}(p_3+k)_{\sigma'} + 2g_{\nu'\sigma'}(\theta p_3)_{\rho'} \\
& - 2g_{\sigma'\rho'}(\theta k)_{\nu'} + 2g_{\rho'\nu'}(\theta p_4)_{\sigma'}] \} \varepsilon^{*\rho'}(p_3) \varepsilon^{\sigma'}(p_4)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Notons que jusqu'au premier ordre par rapport à θ , et en posant :

$$\Re_{\nu\sigma\rho}(\theta) = g_{\nu\sigma}(k+p_4)_\rho - g_{\rho\sigma}(p_4-p_3)_\nu - g_{\rho\nu}(p_3+k)_\sigma \tag{3.8}$$

et :

$$\begin{aligned}
\Im_{\nu\sigma\rho}(\theta) &= \frac{1}{2} M_W^2 [\theta_{\nu\sigma} k_\rho + \theta_{\nu\rho} k_\sigma + g_{\nu\sigma}(\theta k)_\rho - g_{\sigma\rho}(\theta k)_\nu + g_{\rho\nu}(\theta k)_\sigma] \\
& - \frac{1}{4} M_Z^2 [\theta_{\nu\sigma}(k+p_4)_\rho - \theta_{\sigma\rho}(p_4-p_3)_\nu - \theta_{\rho\nu}(p_3+k)_\sigma + 2g_{\nu\sigma}(\theta p_3)_\rho \\
& - 2g_{\sigma\rho}(\theta k)_\nu + 2g_{\rho\nu}(\theta p_4)_\sigma].
\end{aligned} \tag{3.9}$$

l'amplitude de transition prendra la forme :

$$M_1 = c_M^{\mu\nu} (-iM_{1\mu\nu}^1 + M_{1\mu\nu}^2 + M_{1\mu\nu}^3) \tag{3.10}$$

où :

$$c_M^{\mu\nu} = \frac{e^2 \cot \theta_W}{\sin 2\theta_W (k^2 - M_Z^2)} (-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{M_Z^2}) \tag{3.11}$$

$$k = p_3 + p_4 \tag{3.12}$$

et :

$$\begin{aligned}
M_{1\mu\nu}^1 &= \bar{v}(p_2, s) \gamma_\mu (c_{V,f} - c_{A,f} \gamma_5) u(p_1, s) \mathfrak{R}_{\nu\sigma\rho}(\theta) \varepsilon^\rho(p_3) \varepsilon^{*\sigma}(p_4) \\
M_{1\mu\nu}^2 &= \bar{v}(p_2, s) \gamma_\mu (c_{V,f} - c_{A,f} \gamma_5) u(p_1, s) \mathfrak{S}_{\nu\sigma\rho}(\theta) \varepsilon^\rho(p_3) \varepsilon^{*\sigma}(p_4) \\
M_{1\mu\nu}^3 &= \bar{v}(p_2, s) f_\mu(\theta) u(p_1, s) \mathfrak{R}_{\nu\sigma\rho}(\theta) \varepsilon^\rho(p_3) \varepsilon^{*\sigma}(p_4) \\
f_\mu(\theta) &= \frac{1}{2} k^\alpha \theta_{\mu\alpha\beta} p_1^\beta (c_{V,f} - c_{A,f} \gamma_5) + \frac{1}{2} \theta_{\mu\alpha} m_f [(c_{V,f} - c_{A,f} \gamma_5) - p_2^\alpha (c_{V,f} + c_{A,f} \gamma_5)] \quad (3.13)
\end{aligned}$$

On remarque que les termes $M_{1\mu\nu}^2 M_{1\mu'\nu'}^{*2}$, $M_{1\mu\nu}^3 M_{1\mu'\nu'}^{*2}$, et $M_{1\mu\nu}^3 M_{1\mu'\nu'}^{*3}$, rentrant dans le calcul de $M_1 M_1^*$ sont d'ordre θ^2 , et les termes $M_{1\mu\nu}^1 M_{1\mu'\nu'}^{*3}$, $M_{1\mu\nu}^3 M_{1\mu'\nu'}^{*1}$ sont nuls, et par conséquent ils peuvent être négligés. Concernant les autres termes, et si on dénote par :

$$c_M^{\mu\nu} c_{M^*}^{\mu'\nu'} M_{1\mu\nu}^1 M_{1\mu'\nu'}^{*1} = \bar{m}_1 \quad (3.14)$$

En remplaçant par les expressions précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{spin, pol} |\bar{m}_1|^2 &= \sum_{spin, pol} c_M^{\mu\nu} c_{M^*}^{\mu'\nu'} \mathfrak{R}_{\nu\sigma\rho}(\theta) \mathfrak{R}_{\nu'\sigma'\rho'}(\theta) \varepsilon^\rho(p_3) \varepsilon^{*\sigma}(p_4) \varepsilon^{*\rho'}(p_3) \varepsilon^{\sigma'}(p_4) \bar{v}(p_2, \\
&\quad s) \gamma_\mu (c_{V,f} - c_{A,f} \gamma_5) u(p_1, s) u^+(p_1, s) (c'_{V,f} - c'_{A,f} \gamma_5^+) \gamma_{\mu'}^+ [\bar{v}(p_2, s)]^+ \quad (3.15)
\end{aligned}$$

ou $\sum_{spin, pol}$ symbolise la somme sur les polarizations des particules à l'état final et faisant la moyenne sur tous les états de spins des particules à l'état initial. Notons que (voire annexe A) :

$$\sum_{pol} \varepsilon^\rho(p_3) \varepsilon^{*\sigma}(p_4) = -g^{\rho\sigma} + \frac{p_3^\rho p_4^\sigma}{M_W^2} \quad (3.16)$$

posant :

$$\begin{aligned}
C^{\mu\nu\mu'\nu'} &= c_M^{\mu\nu} c_{M^*}^{\mu'\nu'} \\
\mathfrak{R}_{\nu\sigma\rho\nu'\sigma'\rho'}(\theta) &= \mathfrak{R}_{\nu\sigma\rho}(\theta) \mathfrak{R}_{\nu'\sigma'\rho'}(\theta) \\
\varepsilon^{\rho\sigma\rho'\sigma'}(p_3, p_4) &= \varepsilon^\rho(p_3) \varepsilon^{*\sigma}(p_4) \varepsilon^{*\rho'}(p_3) \varepsilon^{\sigma'}(p_4) \quad (3.17)
\end{aligned}$$

et :

$$(uv)_{\mu\mu'} = \bar{v}(p_2, s)\gamma_\mu(c_{V,f} - c_{A,f}\gamma_5)u(p_1, s)u^+(p_1, s)(c'_{V,f} - c'_{A,f}\gamma_5^+)\gamma_{\mu'}^+[\bar{v}(p_2, s)]^+ \quad (3.18)$$

Donc on peut écrire l'expression de $\sum_{spin,pol} \bar{m}_1$ sous la forme compacte suivante :

$$\sum_{spin,pol} |\bar{m}_1|^2 = \sum_{spin,pol} C^{\mu\nu\mu'\nu'} \Re_{\nu\sigma\rho\nu'\sigma'\rho'}(\theta) \varepsilon^{\rho\sigma\rho'\sigma'}(p_3, p_4)(uv)_{\mu\mu'} \quad (3.19)$$

Après un très long calcul, et en utilisant les propriétés des matrices γ et l'introduction des variables de Mandelstam : s, t et u (voire annexe A).

On obtient le résultat :

$$\begin{aligned} \sum_{spin,pol} |\bar{m}_1|^2 = & (c_{V,f}^2 + c_{A,f}^2) \frac{e^4 \cot^2 \theta_W}{\sin^2 2\theta_W} \frac{1}{(s - M_Z^2)^2} \left\{ \frac{1}{16M_Z^4 M_W^4} (4s^6 + 2s(-4s^2 m_f^2 \right. \\ & + s^2(s(-5 + 2s) + (22 - 4s)m_f^2)M_W^2 - s(s(-13 + 4s) + (38 \\ & - 8s)m_f^2)M_W^4 - 2(4 + 9s)(s - 2m_f^2)M_W^6) - (s^2(6s^3 - 2st(t + u) \\ & + (9t - 5u)(t + u) + (-22t + 6u + 2s(-6s + 3t + u))m_f^2 - 4(-2 \\ & + s)m_f^4) - 4s(14s^3 + 2(7t - 3u)(t + u) - 2s^2(-6 + 3t + u) \\ & + s(13t^2 + 2t(11 + u) - u(6 + 11u)) + 4m_f^2(-9t - s(4 + 11s \\ & + 7t - 5u) + u + (4 + s)m_f^2))M_W^2 + (40s^3 + 4s^2(5 + 7t - 5u) \\ & + (t + u)(t + 3u) + 2s(3t(6 + 5t) + (-2 + 5t)u - 10u^2) - 2(3t \\ & + s(16 + 60s + 35t - 15u) + 5u)m_f^2 + 4(2 + 5s)m_f^4)M_W^4 - 2(3t \\ & + s(8 + 38s + 35t - 15u) + 5u - 4(2 + 23s)m_f^2)M_W^6 + 4(2 \\ & + 5s)M_W^8)M_Z^2 + (s(6t^2 + s(s(-4 + 31s) + 9t^2) + 4tu - (6 + 13s)u^2 \\ & - 2(8t + s(31s + 9t - 13u) - 4u)m_f^2 - 4(-1 + s)m_f^4) - 2(19s^3 \\ & + s^4 + 6t^2 + 2tu - 6u^2 - s(t(-8 + u) + u(4 + 3u)) + s^2(2t^2 \\ & + (-10 + u)(1 + u) + t(5 + 3u)) + (-2s^3 - s^2(34 + 7t + 5u) \\ & + s(4 + t + 7u) + 2(-t(7 + 2t) + (5 + t)u + u^2))m_f^2 + (2 - 4s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +6s^2 + 6t - 6u)m_f^4)M_W^2 + (14s^3 - 2t^3 - 6t^2(-2 + u) + 4t(11 \\
& +u) + 4u(1 + u)(-3 + 2u) + 2s(-18 + 2t^2 + 3t(-3 + u) + u + u^2) \\
& +s^2(t^2 - 2(-5 + u)u + t(14 + u)) + m_f^2(8(4 - 5t + 2u) + 12(t \\
& -u)(t + 2u) + s^2(-52 - 3t + 3u) - 2s(-4 + t^2 + (5 - 2u)u + t(7 \\
& +u)) + 6(2 - 3t + s(2 + t - u) + 3u^2)m_f^2))M_W^4 - (s^2(40 + 3t \\
& -3u) + 4(7 + 5t + u) - 12(t - u) + 2s(14 + 2t^2 + (5 - 4u)u \\
& +t(7 + 2u)) - 2(s(40 - 9t - 9u) + 4(t - u)(t + 2u) + 6(8 - 3t \\
& +3u))m_f^2 + 24(t - u)m_f^4)M_W^6 + 2(6 - 9t + 2s(7 + 3t - 3u) + 9u \\
& -4(4 + 3t - 3u)m_f^2)M_W^8)M_Z^4\} \tag{3.20}
\end{aligned}$$

De même, si on dénote le deuxième terme par :

$$\sum_{spin,pol} c_M^{\mu\nu} c_{M^*}^{\mu'\nu'} M_{1\mu\nu}^2 M_{1\mu'\nu'}^{*1} = \sum_{spin,pol} \bar{m}_2 \tag{3.21}$$

ce dernier s'écrira sous la forme :

$$\begin{aligned}
\sum_{spin,pol} \bar{m}_2 = & \sum_{spin,pol} c_M^{\mu\nu} c_{M^*}^{\mu'\nu'} \mathfrak{S}_{\nu\sigma\rho}(\theta) \mathfrak{R}_{\nu'\sigma'\rho'}(\theta) \varepsilon^\rho(p_3) \varepsilon^{*\sigma}(p_4) \varepsilon^{*\rho'}(p_3) \varepsilon^{\sigma'}(p_4) \bar{v}(p_2, s) \gamma_\mu(c_{V,f} \\
& - c_{A,f} \gamma_5) u(p_1, s) u^+(p_1, s) (c'_{V,f} - c'_{A,f} \gamma_5^+) \gamma_{\mu'}^+ [\bar{v}(p_2, s)]^+ \tag{3.22}
\end{aligned}$$

ou sous la forme compacte :

$$\sum_{spin,pol} \bar{m}_2 = \sum_{spin,pol} C^{\mu\nu\mu'\nu'} \mathfrak{S}_{\nu\sigma\rho\nu'\sigma'\rho'}^1(\theta) \varepsilon^{\rho\sigma\rho'\sigma'}(p_3, p_4) (uw)_{\mu\mu'} \tag{3.23}$$

tel que :

$$\mathfrak{S}_{\nu\sigma\rho\nu'\sigma'\rho'}^1(\theta) = \mathfrak{S}_{\nu\sigma\rho}(\theta) \mathfrak{R}_{\nu'\sigma'\rho'}(\theta) \tag{3.24}$$

Tout calcul fait, on obtient en fonction des variables de Mandelstam l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
\sum_{spin,pol} \bar{m}_2 = & (c_{V,f}^2 + c_{A,f}^2) \frac{e^4 \cot^2 \theta_W}{\sin^2 2\theta_W} \frac{1}{(s - M_Z^2)^2} \{ 64 M_W^4 M_Z^4 (-2 M_W^2 (M_W^6 M_Z^6 (4(3s^2 \\
& -t + u + s(3t + u) - (s(3 + 2t - 2u) + 2(-6 + 5t + 7u)) M_Z^2 \\
& - 8 M_W^8 (2s M_Z^2 - 3 M_Z^4) + s^2 (2s^3 (2 + s) + (-3s^3 + 2(t^2 - u^2) \\
& + s(-5t^2 - 4tu + u^2)) M_Z^2 - 3(s^2 + 3t^2 - 3u^2) M_Z^4 + 2 M_W^4 (26s^4 \\
& - 2(10s^3 - t^2 - s^2(13t - u) + u^2 + s(-3t + 2t^2 + 3u + 2tu)) M_Z^2 \\
& + ((2 + s)t^2 - (4 + 2s^2 + s(-20 + u) - 4u)u + 2t(-4 - 7s + s^2 \\
& + 3u)) M_Z^4) + s M_W^2 (-27s^4 + 2(3s^3 - 3t^2 + 3u^2 + s^2(-2 + 7t \\
& + u) + 2s(-t + 5t^2 + u + 3tu - 2u^2)) M_Z^2 + 2(6s^2 + 8t^2 - 2tu \\
& - 9u^2 + s(9t - t^2 + (-9 + u)u)) M_Z^4) - 2m_f^4 M_Z^2 (4s^3 + 4M_W^4 (2s \\
& - 3M_Z^2) + 3s M_W^2 (-4s + M_Z^2)) - 2m_f^2 (8M_W^6 (2s M_Z^2 - 3M_Z^4) \\
& + s^2 (2s^2 (2 + s) - (3s^2 - 2t + 2u + s(7t + u)) M_Z^2 - 3(s + 3u \\
& - 3t + M_Z^4) + 2M_W^4 (26s^3 - 2(14s^2 - t + u + s(3t + u)) M_Z^2 + (-6 \\
& + 5t + s(3 + t - u) + 7u) M_Z^4) + s M_W^2 (-27s^3 + 2(7s^2 - 3t \\
& + s(-2 + 13t - u) + 3u) M_Z^2 - 2(-7t + s(-6 + t - u) + 10u) M_Z^4)) \\
& + M_W^2 (4s^2 (-t + u) M_W^8 M_Z^2 + 16(t - u) m_f^4 M_W^2 M_Z^4 - 2M_W^6 M_Z^2 (-s(s^3 \\
& + 2s^2(t - u) + 24(-t + u) + s(-8 + t^2 - u^2)) + (s^9 + 56(-t \\
& + u)) M_Z^2 + s^2(-6s^3 + s(-8s + 9s^2 + t^2 - u^2)) M_Z^2 - 4(2s^2 - t^2 \\
& + u^2) M_Z^4) - 2s M_W^2 (s^3(-3 + 2s) + s(33s^2 + t^2 + s(-4 + t - u) \\
& - u^2)) M_Z^2 + 2(-17s^2 - 7t^2 + 2s(2 + t - u) + tu + 6u^2) M_Z^4) \\
& + 2M_W^4 (12s^4 - s(12s^3 + s^4 + 2s(t - u) + s^2(-44 + t^2 - u^2) \\
& + 12(-t^2 + u^2)) M_Z^2 + (-28s^2 + s^{10} + s(8 - 26t + 26u) + 28(-t^2 \\
& + u^2)) M_Z^4) - 2m_f^2 (-2s M_W^6 M_Z^2 (8 - s^2 + s(-t + u) s^7 M_W^2) + s^2 (-2s^2 \\
& + s(-8 + 9s + t - u) M_Z^2 - 4(2s - t + u) M_Z^4) + 2M_W^4 (12s^3 - s(-44s \\
& + s^3 + s^2(12 + t - u) + 12(-t + u)) M_Z^2 + (-28s + s^9 + 32(-t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +u))M_Z^4) + 2M_W^2(s^3 - 2s^4 + s^2(4 - 33s - t + u)M_Z^2 + (34s^2 \\
& + 13s(t - u) + 2(t^2 - u^2))M_Z^4))\} \tag{3.25}
\end{aligned}$$

D'une manière similaire, on peut mettre le troisième terme sous la forme :

$$\sum_{spin,pol} \bar{m}_3 = \sum_{spin,pol} c_M^{\mu\nu} c_{M^*}^{\mu\nu} M_{\mu\nu}^2 M_{\mu'\nu'}^{*2} \tag{3.26}$$

en remplaçant les expressions correspondantes, on aura :

$$\sum_{spin,pol} \bar{m}_3 = \sum_{spin,pol} C^{\mu\nu\mu'\nu'} \mathfrak{S}_{\nu\sigma\rho\nu'\sigma'\rho'}^2(\theta) \varepsilon^{\rho\sigma\rho'\sigma'}(p_3, p_4) (uv)_{\mu\mu'} \tag{3.27}$$

où :

$$\mathfrak{S}_{\nu\sigma\rho\nu'\sigma'\rho'}^2(\theta) = \mathfrak{R}_{\nu\sigma\rho}(\theta) \mathfrak{S}_{\nu'\sigma'\rho'}(\theta)$$

Après un long calcul on trouve que :

$$\sum_{spin,pol} \bar{m}_3 = - \sum_{spin,pol} \bar{m}_2$$

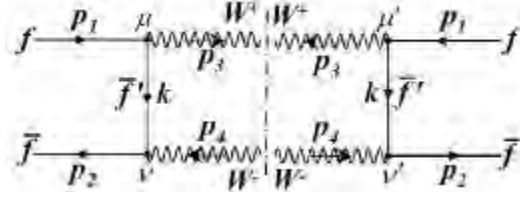
Donc la contribution du premier diagramme unitaire est donné par :

$$\sum_{spin,pol} |\bar{M}_1|^2 = \sum_{spin,pol} |\bar{m}_1|^2$$

puisque :

$$\sum_{spin,pol} \bar{m}_3 + \sum_{spin,pol} \bar{m}_2 = 0$$

2- Contribution du deuxième diagramme unitaire : la contribution du deuxième diagramme donne l'amplitude suivante :



$$\begin{aligned}
M_2 = & \bar{v}(p_2, s) A \left\{ [\gamma_\nu - \frac{i}{2} \theta_{\nu\alpha\beta} p_4^\alpha k^\beta] (1 - \gamma_5) - \frac{i}{2} \theta_{\nu\lambda} [B_1 k^\lambda (1 - \gamma_5) - B_2 k^\lambda (1 + \right. \\
& \left. \gamma_5)] \right\} \frac{-i}{\not{k} - m} A' \left\{ [\gamma_\mu - \frac{i}{2} \theta_{\mu\rho\sigma} p_3^\rho p_1^\sigma] (1 - \gamma_5) - \frac{i}{2} \theta_{\mu\eta} [B'_1 p_1^\eta (1 - \gamma_5) - B'_2 k^\eta (1 \right. \\
& \left. + \gamma_5)] \right\} u(p_1, s) \varepsilon^\mu(p_3) \varepsilon^{*\nu}(p_4)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

On pose :

$$X_\nu = [\gamma_\nu - \frac{i}{2} \theta_{\nu\alpha\beta} p_4^\alpha k^\beta] (1 - \gamma_5) A \tag{3.29}$$

$$Y_\nu = \frac{i}{2} \theta_{\nu\lambda} [B_1 k^\lambda (1 - \gamma_5) - B_2 k^\lambda (1 + \gamma_5)] A \tag{3.30}$$

$$Z_\mu = [\gamma_\mu - \frac{i}{2} \theta_{\mu\rho\sigma} p_3^\rho p_1^\sigma] (1 - \gamma_5) A' \tag{3.31}$$

et :

$$T_\mu = \frac{i}{2} \theta_{\mu\eta} [B'_1 p_1^\eta (1 - \gamma_5) - B'_2 k^\eta (1 + \gamma_5)] A' \tag{3.32}$$

tel que :

$$\begin{aligned}
A &= \frac{ie}{2\sqrt{2} \sin \theta_W} \begin{pmatrix} V_{\bar{f}} \\ V_{\bar{f}'}^* \end{pmatrix} \\
A' &= \frac{ie}{2\sqrt{2} \sin \theta_W} \begin{pmatrix} V_f \\ V_{\bar{f}'}^* \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} m_{\bar{f}} \\ m_{\bar{f}'} \end{pmatrix}, B'_1 = \begin{pmatrix} m_{\bar{f}'} \\ m_f \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} m_{\bar{f}'} \\ m_{\bar{f}} \end{pmatrix}, B'_2 = \begin{pmatrix} m_f \\ m_{\bar{f}'} \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

avec :

$$V_f = \begin{bmatrix} 1 \text{ si } f \text{ est un lepton} \\ V_{CKM} \text{ si } f \text{ est un quark} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Donc M_2 peut se mettre sous la forme compacte :

$$M_2 = \bar{v}(p_2, s)(X_\nu + Y_\nu) \frac{-i}{\not{k} - m} (Z_\mu + T_\mu) u(p_1, s) \varepsilon^\mu(p_3) \varepsilon^{*\nu}(p_4) \quad (3.36)$$

le carré de l'amplitude $|\overline{M}_2|^2$ est donné par :

$$\begin{aligned} |\overline{M}_2|^2 &= \bar{v}(p_2, s)(X_\nu + Y_\nu) \frac{-i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2} (Z_\mu + T_\mu) u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) (Z_{\mu'} + T_{\mu'}) \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2} (X_{\nu'} \\ &\quad + Y_{\nu'}) [\bar{v}(p_2, s)]^\dagger \varepsilon^\mu(p_3) \varepsilon^{*\nu}(p_4)^\dagger \varepsilon^{*\mu'}(p_3) \varepsilon^{\nu'}(p_4) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Il peut être mis sous la forme de la somme de 16 termes :

$$\begin{aligned} |\overline{M}_2|^2 &= \frac{1}{k^2} \Lambda^{\mu\nu\mu'\nu'} \{ T_{\mu\nu\mu'\nu'}^1 + T_{\mu\nu\mu'\nu'}^2 + T_{\mu\nu\mu'\nu'}^3 + T_{\mu\nu\mu'\nu'}^4 + T_{\mu\nu\mu'\nu'}^5 + T_{\mu\nu\mu'\nu'}^6 \\ &\quad + T_{\mu\nu\mu'\nu'}^7 + T_{\mu\nu\mu'\nu'}^8 + T_{\mu\nu\mu'\nu'}^9 + T_{\mu\nu\mu'\nu'}^{10} + T_{\mu\nu\mu'\nu'}^{11} + T_{\mu\nu\mu'\nu'}^{12} + T_{\mu\nu\mu'\nu'}^{13} \\ &\quad + T_{\mu\nu\mu'\nu'}^{14} + T_{\mu\nu\mu'\nu'}^{15} + T_{\mu\nu\mu'\nu'}^{16} \} \end{aligned} \quad (3.38)$$

En travaillant à très haute énergie et en négligeant la masse des fermions m devant k , on peut écrire :

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu\mu'\nu'}^1 &= \bar{v}(p_2, s) X_\nu \not{k} Z_\mu u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) Z_{\mu'} \not{k} X_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^\dagger \\ T_{\mu\nu\mu'\nu'}^2 &= \bar{v}(p_2, s) X_\nu \not{k} Z_\mu u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) Z_{\mu'} \not{k} Y_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^\dagger \\ T_{\mu\nu\mu'\nu'}^3 &= \bar{v}(p_2, s) X_\nu \not{k} Z_\mu u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) T_{\mu'} \not{k} X_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^\dagger \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu\mu'\nu'}^4 &= \bar{v}(p_2, s) X_\nu \not{k} Z_\mu u(p_1, s) u^+(p_1, s) T_{\mu'} \not{k} Y_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^+ \\
T_{\mu\nu\mu'\nu'}^5 &= \bar{v}(p_2, s) Y_\nu \not{k} Z_\mu u(p_1, s) u^+(p_1, s) Z_{\mu'} \not{k} X_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^+ \\
T_{\mu\nu\mu'\nu'}^6 &= \bar{v}(p_2, s) Y_\nu \not{k} Z_\mu u(p_1, s) u^+(p_1, s) Z_{\mu'} \not{k} Y_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^+ \\
T_{\mu\nu\mu'\nu'}^7 &= \bar{v}(p_2, s) Y_\nu \not{k} Z_\mu u(p_1, s) u^+(p_1, s) T_{\mu'} \not{k} X_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^+ \\
T_{\mu\nu\mu'\nu'}^8 &= \bar{v}(p_2, s) Y_\nu \not{k} Z_\mu u(p_1, s) u^+(p_1, s) T_{\mu'} \not{k} Y_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^+ \\
T_{\mu\nu\mu'\nu'}^9 &= \bar{v}(p_2, s) X_\nu \not{k} T_\mu u(p_1, s) u^+(p_1, s) Z_{\mu'} \not{k} X_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^+ \\
T_{\mu\nu\mu'\nu'}^{10} &= \bar{v}(p_2, s) X_\nu \not{k} T_\mu u(p_1, s) u^+(p_1, s) Z_{\mu'} \not{k} Y_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^+ \\
T_{\mu\nu\mu'\nu'}^{11} &= \bar{v}(p_2, s) X_\nu \not{k} T_\mu u(p_1, s) u^+(p_1, s) T_{\mu'} \not{k} X_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^+ \\
T_{\mu\nu\mu'\nu'}^{12} &= \bar{v}(p_2, s) X_\nu \not{k} T_\mu u(p_1, s) u^+(p_1, s) T_{\mu'} \not{k} Y_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^+ \\
T_{\mu\nu\mu'\nu'}^{13} &= \bar{v}(p_2, s) Y_\nu \not{k} T_\mu u(p_1, s) u^+(p_1, s) Z_{\mu'} \not{k} X_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^+ \\
T_{\mu\nu\mu'\nu'}^{14} &= \bar{v}(p_2, s) Y_\nu \not{k} T_\mu u(p_1, s) u^+(p_1, s) Z_{\mu'} \not{k} Y_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^+ \\
T_{\mu\nu\mu'\nu'}^{15} &= \bar{v}(p_2, s) Y_\nu \not{k} T_\mu u(p_1, s) u^+(p_1, s) T_{\mu'} \not{k} X_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^+ \\
T_{\mu\nu\mu'\nu'}^{16} &= \bar{v}(p_2, s) Y_\nu \not{k} T_\mu u(p_1, s) u^+(p_1, s) T_{\mu'} \not{k} Y_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^+
\end{aligned} \tag{3.39}$$

où :

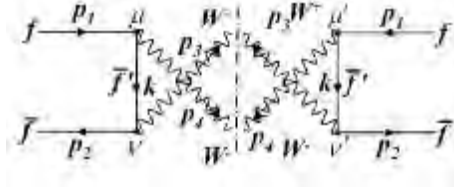
$$\Lambda^{\mu\nu\mu'\nu'} = \varepsilon^\mu(p_3) \varepsilon^{*\nu}(p_4) + \varepsilon^{*\mu'}(p_3) \varepsilon^{\nu'}(p_4) \tag{3.40}$$

Des calcul direct donne :

$$\begin{aligned}
\sum_{spin,pol} |\overline{M}_2|^2 &= \frac{32}{m_f^2} \left(\frac{s}{2} - m_f^2 + \frac{1}{t} (-m_f^2 + M_W^2 - t) \left(\frac{s}{2} - \frac{1}{2} (3m_f^2 + M_W^2 - u) \right) \right) \\
&+ \frac{1}{tm_f^2 M_W^2} (4m_f^8 + 4(-1 + s - 6t + 2u)M_W^6 - 4M_W^8 - 4m_f^6(-3 + s \\
&+ 3t + u - 5M_W^2) + 2m_f^4(-3s + 5t + 4st + 6t^2 - 3u + 2tu - 2(3 + s \\
&+ 13t + u)M_W^2 + 4M_W^4 + 2tM_W^2) + M_W^4(6t + 28t^2 + s(-2 + 24t) \\
&- 2u + 4tu + 4tM_W^2) + t(s^2 + 2st - 5t^2 + 2tu + 4t^2u - u^2 + 4tuM_W^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2M_W^2(t(s-t+6st-u+8tu)+t2(t+u)M_W^2) - 2m_f^2(t(3s-3t \\
& +2st+2t^2+u+6tu)-2(1+s-10t)M_W^4+14M_W^6+2(t+u)tM_W^2 \\
& -2M_W^2(2s-3t+4st+6t^2+2u+3tu+2tM_W^2))) \tag{3.41}
\end{aligned}$$

3- Contribution du troisième diagramme unitaire :



la contribution du troisième diagramme donne l'amplitude suivante :

$$\begin{aligned}
M_3 = & \bar{v}(p_2, s)A\{[\gamma_\nu - \frac{i}{2}\theta_{\nu\alpha\beta}p_3^\alpha k^\beta](1 - \gamma_5) - \frac{i}{2}\theta_{\nu\lambda}[B_1k^\lambda(1 - \gamma_5) - B_2k^\lambda(1 + \\
& \gamma_5)]\} \frac{-i}{\not{k} - m} A'\{[\gamma_\mu - \frac{i}{2}\theta_{\mu\rho\sigma}p_4^\rho p_1^\sigma](1 - \gamma_5) - \frac{i}{2}\theta_{\mu\eta}[B'_1p_1^\eta(1 - \gamma_5) - B'_2k^\eta(1 \\
& + \gamma_5)]\} u(p_1, s)\varepsilon^\nu(p_3)\varepsilon^{*\mu}(p_4) \tag{3.42}
\end{aligned}$$

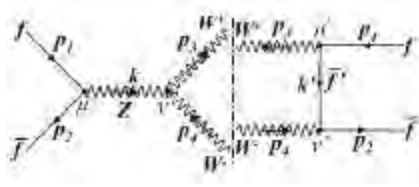
On remarque que si on fait un changement $t \rightarrow u$ et $u \rightarrow t$ dans le carré de l'amplitude de transition dans le deuxième diagramme unitaire on obtient le troisième diagramme unitaire.

Et par conséquent :

$$\begin{aligned}
\sum_{spin, pol} |\overline{M}_3|^2 = & \frac{32}{m_f^2}(\frac{s}{2} - m_f^2 + \frac{1}{u}(-m_f^2 + M_W^2 - u)(\frac{s}{2} - \frac{1}{2}(3m_f^2 + M_W^2 - t))) \\
& + \frac{1}{um_f^2 M_W^2}(4m_f^8 + 4(-1 + s - 6u + 2t)M_W^6 - 4M_W^8 - 4m_f^6(-3 + s \\
& + 3u + t - 5M_W^2) + 2m_f^4(-3s + 5u + 4su + 6u^2 - 3t + 2tu - 2(3 + s \\
& + 13u + t)M_W^2 + 4M_W^4 + 2uM_W^2) + M_W^4(6u + 28u^2 + s(-2 + 24u)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2t + 4tu + 4uM_W^2) + u(s^2 + 2su - 5u^2 + 2tu + 4u^2t - t^2 + 4tuM_W^2) \\
& -2M_W^2(u(s - u + 6su - t + 8tu) + u2(t + u)M_W^2) - 2m_f^2(u(3s - 3u \\
& + 2su + 2u^2 + t + 6tu) - 2(1 + s - 10u)M_W^4 + 14M_W^6 + 2(t + u)uM_W^2 \\
& - 2M_W^2(2s - 3u + 4su + 6u^2 + 2t + 3tu + 2uM_W^2))) \tag{3.43}
\end{aligned}$$

4- Contribution du quatrième diagramme unitaire :



la contribution du quatrième diagramme de Feynman unitaire est donnée par $M_1 M_2^*$ et après des simplifications directes elle peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}
M_1 M_2^* &= \frac{e^2 \cot \theta_W}{\sin 2\theta_W k'^2 (k^2 - M_Z^2)} \bar{v}(p_2, s) (M_{4\mu}^1 + M_{4\mu}^2) u(p_1, s) \left(-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{M_Z^2} \right) (M_{4\mu}^3 \\
&+ M_{4\mu}^4 + M_{4\mu}^5) u^+(p_1, s) (M_{4\mu'}^{*1} + M_{4\mu'}^{*2}) \not{k} (M_{4\nu'}^{*3} + M_{4\nu'}^{*4}) [\bar{v}(p_2, s)]^+ Y^{\rho\sigma\mu'\nu'} \tag{3.44}
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
M_{4\mu}^1 &= \left(\gamma_\mu - \frac{i}{2} k^\alpha \theta_{\mu\alpha\beta} p_1^\beta \right) (c_{v,f} - c_{A,f} \gamma_5) \\
M_{4\mu}^2 &= -\frac{i}{2} \theta_{\mu\alpha} m_f [p_1^\alpha (c_{v,f} - c_{A,f} \gamma_5) - p_2^\alpha (c_{v,f} + c_{A,f} \gamma_5)] \\
M_{4\mu}^3 &= g_{\mu\nu} (k + p_4)_\rho - g_{\sigma\rho} (p_4 - p_3)_\nu - g_{\rho\nu} (k + p_3)_\sigma \\
M_{4\mu}^4 &= \frac{i}{2} M_W^2 [\theta_{\nu\sigma} k_\rho + \theta_{\nu\rho} k_\sigma + g_{\nu\sigma} (\theta k)_\rho - g_{\sigma\rho} (\theta k)_\nu + g_{\rho\nu} (\theta k)_\sigma] \\
M_{4\mu}^5 &= -\frac{i}{4} M_Z^2 [\theta_{\nu\sigma} (k + p_4)_\rho - \theta_{\sigma\rho} (p_4 - p_3)_\nu - \theta_{\rho\nu} (p_3 + k)_\sigma \\
&+ 2g_{\nu\sigma} (\theta p_3)_\rho - 2g_{\sigma\rho} (\theta k)_\nu + 2g_{\rho\nu} (\theta p_4)_\sigma] \tag{3.45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{4\mu'}^{*1} &= \frac{i}{2}\theta_{\mu'\eta'}[B_1'p_1^{\eta'}(1-\gamma_5^+) - B_2'k^{\eta'}(1+\gamma_5^+)] \\
M_{4\mu'}^{*2} &= (1-\gamma_5^+)[\gamma_{\mu'}^+ + \frac{i}{2}\theta_{\mu'\rho'\sigma'}p_3^{\rho'}p_1^{\sigma'}] \\
M_{4\mu'}^{*3} &= \frac{i}{2}\theta_{\nu'\lambda'}[B_1k'^{\lambda'}(1-\gamma_5^+) - B_2p_2^{\lambda'}(1+\gamma_5^+)] \\
M_{4\mu'}^{*4} &= (1-\gamma_5^+)[\gamma_{\nu'}^+ + \frac{i}{2}\theta_{\nu'\alpha'\beta'}p_4^{\alpha'}k'^{\beta'}] \tag{3.46}
\end{aligned}$$

et :

$$Y^{\rho\sigma\mu'\nu'} = \varepsilon^\rho(p_3)\varepsilon^{*\sigma}(p_4)\varepsilon^{*\mu'}(p_3)\varepsilon^{\nu'}(p_4) \tag{3.47}$$

On remarque que tout les termes de $M_1M_2^*$ contient des termes en θ d'ordre 2 et/ou 3.
Donc :

$$M_1M_2^* = 0 \tag{3.48}$$

et par conséqent :

$$\sum_{spin,pol} M_1M_2^* = 0 \tag{3.49}$$

5- Contribution du cinquième diagramme unitaire :



la contribution du cinquième diagramme de Feynman unitaire est donnée par $M_1M_3^*$ et après des simplifications directes elle peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}
M_1M_3^* &= \frac{e^2 \cot \theta_W}{\sin 2\theta_W k'^2(k^2 - M_Z^2)} \bar{v}(p_2, s)(M_{5\mu}^1 +)u(p_1, s)(-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{M_Z^2})(M_{5\mu}^3 \\
&+ M_{5\mu}^4 + M_{5\mu}^5)u^+(p_1, s)(M_{5\mu'}^{*1} + M_{5\mu'}^{*2})\cancel{H}(M_{5\nu'}^{*3} + M_{5\nu'}^{*4})[\bar{v}(p_2, s)] + Y^{\rho\sigma\mu'\nu'} \tag{3.50}
\end{aligned}$$

tel que :

$$M_{5\mu}^1 = M_{4\mu}^1, M_{5\mu}^2 = M_{4\mu}^2, M_{5\mu}^3 = M_{4\mu}^3, M_{5\mu}^4 = M_{4\mu}^4 \text{ et } M_{5\mu}^5 = M_{4\mu}^5 \quad (3.51)$$

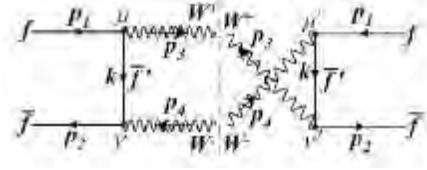
$$\begin{aligned} M_{5\mu'}^{*1} &= M_{4\mu'}^{*1} \text{ et } M_{5\mu'}^{*3} = M_{4\mu'}^{*3} \\ M_{5\mu'}^{*2} &= (1 - \gamma_5^+)[\gamma_{\mu'}^+ + \frac{i}{2}\theta_{\mu'\rho'\sigma'}p_4^{\rho'}p_1^{\sigma'}] \\ M_{5\mu'}^{*4} &= (1 - \gamma_5^+)[\gamma_{\nu'}^+ + \frac{i}{2}\theta_{\nu'\alpha'\beta'}p_3^{\alpha'}k'^{\beta'}] \end{aligned} \quad (3.52)$$

un calcul direct donne :

$$\sum_{spin, pol} M_1 M_3^* = 0 \quad (3.53)$$

par ce que les termes de $M_1 M_3^*$ contient des termes en θ d'ordre 2 et/ou 3.

6- Contribution du sixième diagramme unitaire :



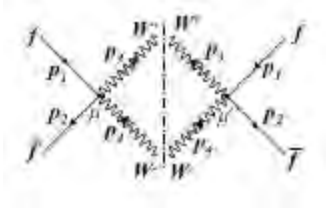
l'amplitude de transition de cet diagramme est donnée par :

$$\begin{aligned} M_2 M_3^* &= \bar{v}(p_2, s)(X_\nu + Y_\nu) \frac{-i}{\not{k} - m} (Z_\mu + T_\mu) u(p_1, s) u^+(p_1, s) (M_{5\mu'}^{*1} + M_{5\mu'}^{*2}) \not{k} (M_{5\nu'}^{*3} \\ &+ M_{5\nu'}^{*4}) [\bar{v}(p_2, s)]^+ \varepsilon^\mu(p_3) \varepsilon^{*\nu}(p_4) \varepsilon^{*\mu'}(p_3) \varepsilon^{\nu'}(p_4) \end{aligned} \quad (3.54)$$

après une simplification de calculs on obtien :

$$\sum_{spin, pol} M_2 M_3^* = 0 \quad (3.55)$$

7- Contribution du septième diagramme unitaire :



L'amplitude de transition du quatrième diagramme de Feynman M_4 est donnée par l'expression suivante :

$$M_4 = \bar{v}(p_2, s) \frac{-e^2}{8 \sin^2 \theta_W} [\theta_{\mu\nu\rho}(p_1^\rho + p_3^\rho)(1 - \gamma_5) + 2\theta_{\mu\nu} m_f] u(p_1, s) \varepsilon^\mu(p_3) \varepsilon^{*\nu}(p_4) \quad (3.56)$$

le carré de cette amplitude prend la forme :

$$\begin{aligned} |\overline{M_4}|^2 &= \bar{v}(p_2, s) \frac{-e^2}{8 \sin^2 \theta_W} [\theta_{\mu\nu\rho}(p_1^\rho + p_3^\rho)(1 - \gamma_5) + 2\theta_{\mu\nu} m_f] u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) [\theta_{\mu'\nu'\rho'}(p_1^{\rho'} \\ &+ p_3^{\rho'})(1 - \gamma_5^+) + 2\theta_{\mu'\nu'} m_f] [\bar{v}(p_2, s)]^\dagger \varepsilon^\mu(p_3) \varepsilon^{*\nu}(p_4) \varepsilon^{*\mu'}(p_3) \varepsilon^{\nu'}(p_4) \end{aligned} \quad (3.57)$$

Après la somme sur les polarisations des bosons vectoriels à l'état final et la moyenne sur les états de spins des particules initiales, on remarque que tout les termes sont de l'ordre 2 par rapport à θ .

$$\sum_{spin, pol} |\overline{M_4}|^2 = 0 \quad (3.58)$$

8- Contribution du huitième diagramme unitaire :



la contribution de ce diagramme unitaire est l'amplitude de cet processus est $M_1 M_4^*$. Un calcul simple en utilisant les lois de Feynman non-commutatives donne :

$$M_1 M_4^* = \frac{-e^4 \cot \theta_W}{8 \sin 2\theta_W \sin^2 \theta_W (k^2 - M_Z^2)} \bar{v}(p_2, s) X_\mu u(p_1, s) u^+(p_1, s) Y_{\mu'\nu'}(\theta) [\bar{v}(p_2, s)]^+ (-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{M_Z^2}) \mathfrak{R}_{\nu\sigma\rho}(\theta) \varepsilon^\rho(p_3) \varepsilon^{*\sigma}(p_4) \varepsilon^{\mu'}(p_3) \varepsilon^{*\nu'}(p_4) \quad (3.59)$$

où :

$$X_\mu = \gamma_\mu (c_{v,f} - c_{A,f} \gamma_5) \quad (3.60)$$

et :

$$Y_{\mu'\nu'}(\theta) = [\theta_{\mu'\nu'\rho'}(p_1^{\rho'} + p_3^{\rho'})(1 - \gamma_5^+) + 2\theta_{\mu'\nu'} m_f] \quad (3.61)$$

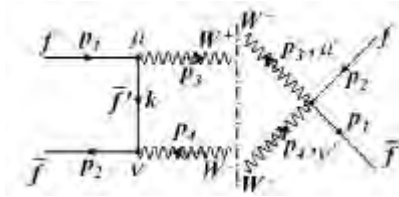
en remarquant que :

$$\sum_{spin} \bar{v}(p_2, s) X_\mu u(p_1, s) u^+(p_1, s) Y_{\mu'\nu'}(\theta) [\bar{v}(p_2, s)]^+ = 0 \quad (3.62)$$

alors :

$$\sum_{spin, pol} M_1 M_4^* = 0 \quad (3.63)$$

9- Contribution du neuvième diagramme unitaire :



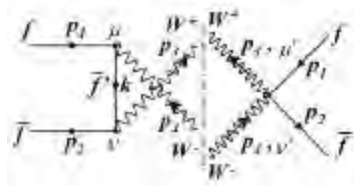
La contribution de ce diagramme unitaire de Feynman est donnée par $M_2 M_4^*$. Similairement au huitième diagramme unitaire et en utilisant le fait que :

$$\sum_{spin} \bar{v}(p_2, s) X_\mu u(p_1, s) u^+(p_1, s) Y_{\mu'\nu'}(\theta) [\bar{v}(p_2, s)]^+ = 0 \quad (3.64)$$

on obtient :

$$\sum_{spin,pol} M_2 M_4^* = 0 \quad (3.65)$$

10- Contribution du dixième diagramme unitaire :



la contribution de ce diagramme unitaire de Feynman est donnée par $M_3 M_4^*$. Tout calcul fait en utilisant les lois de Feynman modifiées, on obtient :

$$\sum_{spin,pol} M_3 M_4^* = 0 \quad (3.66)$$

la section efficace $\hat{\sigma}$ au niveau du sous processus $f\bar{f} \rightarrow W^+W^-$ est proportionnelle à la somme des termes qui proviennent des diagrammes unitaires de Feynman précédents. Pour le processus physique tel que $P + \bar{P} \rightarrow W^+W^-$ la section efficace σ s'écrit d'une manière formelle sous la forme :

$$\sigma = \int \int dx_a dx_b F_{\frac{a}{P}}(x_a, Q^2) F_{\frac{b}{\bar{P}}}(x_b, Q^2) \hat{\sigma} \quad (3.67)$$

ou a et b represents les fermions f et \bar{f} . Les fonctions $F_{\frac{a}{P}}(x_a, Q^2)$ et $F_{\frac{b}{\bar{P}}}(x_b, Q^2)$ sont les fonctions de distribution des partons a et b à l'intérieur des hadrons P et \bar{P} .

Conclusion :

A travers ce mémoire, nous avons présenté le modèle standard des interaction électrofaibles et discuté ses limites ainsi que les paramètres arbitraires dont souffre ce modèle. Après la construction du Lagrangien et présentation de la brisure spontanée de la symétrie et le mécanisme de Higgs ainsi que la répartition et représentation des différents champs dynamiques dans le modèle, et comme une solution pour résoudre certains problèmes, nous avons proposé une extension dans le contexte de la géométrie de l'espace-temps non-commutative. Nous avons discuté l'idée de la non commutativité de l'espace temps et de son importance et dire que peut être à l'échelle microscopique(très haute énergie) on a besoin d'une géométrie non-commutative; donc d'un nouveau formalisme mathématique et physique. En effet, on a présenté le formalisme mathématique nécessaire : Weyl ordering, le produit de Moyal, le mapping de Seiberg-Witten etc. Comme application, nous avons étendu le modèle standard avec inclusion des interactions fortes et expliquer les différents aspects de la théorie : violation de Lorentz, nouveaux vertex etc. Les différents termes du Lagrangien ont été obtenus explicitement ainsi que les différentes transformations de jauge non-commutative, les dérivées covariantes etc. En outre, les vertex modifiées ont été aussi obtenus. Dans cette extension du modèle standard, on a considéré le sous processus $fermion + antifermion \rightarrow W^+ + W^-$ ou sa contribution est très utile dans les collisions physiques telles que $proton + antiproton \rightarrow W^+ + W^-$ etc. Nous avons calculé les différentes amplitudes de transition avec ces lois de Feynman non-commutatives et expliquer comment elles peuvent intervenir dans les processus physiques et surtout elles peuvent être comme un test du modèle standard et la physique au delà de ce modèle.

Annexes

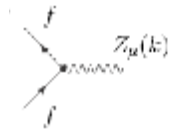
Annexe A : Propriétés des matrices γ :

- $\gamma^\mu q \not{b} \not{c} \gamma_\mu = 4ab.$
- $\not{a} \not{b} = 2ab - \not{b} \not{a}.$
- $\gamma^\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma_\mu = -2cba.$
- $Tr \gamma^5 = 0.$
- $Tr \gamma^5 \not{a} = 0.$
- $Tr \not{a} \not{b} = 4ab$
- $Tr \gamma^5 \not{a} \not{b} = 0$
- $Tr \not{a} \not{b} \not{c} = 0$
- $Tr \gamma^5 \not{a} \not{b} \not{c} = 0$
- $Tr \not{a} \not{b} \not{c} \not{d} = 4[(ab)(cd) - (ac)(bd) + (ad)(bc)]$
- $Tr \gamma^5 \not{a} \not{b} \not{c} \not{d} = 4i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$
- $Tr \gamma^5 \underbrace{\not{a} \not{b} \not{c} \dots \not{l}}_{n \text{ nombre}} = 0,$ si n est impaire.
- $Tr \gamma^\mu \gamma^\nu \not{a} \not{b} = 4[g^{\mu\nu}(ab) - a^\mu b^\nu + a^\nu b^\mu]$
- $Tr \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma = 4[g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}]$
- La trace d'un nombre impaire de matrices γ est nulle.

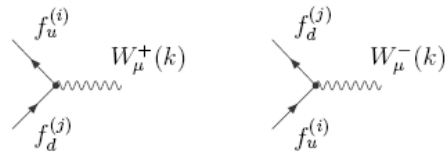
Les variables de mandelslam :

- $s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$
- $t = (p_1 - p_3)^2 = (p_4 - p_2)^2$
- $u = (p_1 - p_4)^2 = (p_3 - p_2)^2$
- $\sum_{pol} \varepsilon_\mu(p) \varepsilon_\nu^*(p) = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{M_v^2}$, v est le boson vecteur (W^\pm, Z)
- $\sum_{spin} u(p) \bar{u}(p) = \frac{\not{p} + m}{2m}$
- $\sum_{spin} v(p) \bar{v}(p) = \frac{\not{p} - m}{2m}$

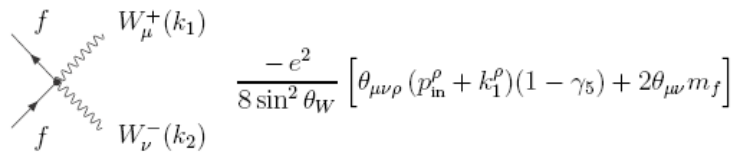
Annexe B : Diagrammes de Feynman



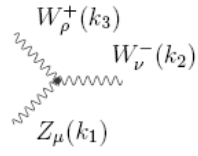
$$\frac{i e}{\sin 2\theta_W} \left\{ \left(\gamma_\mu - \frac{i}{2} k^\nu \theta_{\mu\nu\rho} \not{p}_m^\rho \right) (c_{V,f} - c_{A,f} \gamma_5) \right. \\ \left. - \frac{i}{2} \theta_{\mu\nu} m_f \left[\not{p}_m^\nu (c_{V,f} - c_{A,f} \gamma_5) - \not{p}_{out}^\nu (c_{V,f} + c_{A,f} \gamma_5) \right] \right\}$$



$$\frac{i e}{2\sqrt{2} \sin \theta_W} \left(\frac{V_f^{(ij)}}{V_f^{*(ij)}} \right) \left\{ \left[\gamma_\mu - \frac{i}{2} \theta_{\mu\nu\rho} k^\nu \not{p}_m^\rho \right] (1 - \gamma_5) \right. \\ \left. - \frac{i}{2} \theta_{\mu\nu} \left[\left(\frac{m_{f_u^{(i)}}}{m_{f_d^{(j)}}} \right) \not{p}_m^\nu (1 - \gamma_5) - \left(\frac{m_{f_d^{(j)}}}{m_{f_u^{(i)}}} \right) \not{p}_{out}^\nu (1 + \gamma_5) \right] \right\}$$



$$\frac{-e^2}{8 \sin^2 \theta_W} \left[\theta_{\mu\nu\rho} (p_m^\rho + k_1^\rho) (1 - \gamma_5) + 2\theta_{\mu\nu} m_f \right]$$



$$ie \cot \theta_W \left\{ g^{\mu\nu}(k_1 - k_2)^\rho + g^{\nu\rho}(k_2 - k_3)^\mu + g^{\rho\mu}(k_3 - k_1)^\nu \right. \\ \left. + \frac{i}{2} M_W^2 \left[\theta^{\mu\nu} k_1^\rho + \theta^{\mu\rho} k_1^\nu + g^{\mu\nu}(\theta k_1)^\rho - g^{\nu\rho}(\theta k_1)^\mu + g^{\rho\mu}(\theta k_1)^\nu \right] \right. \\ \left. - \frac{i}{4} M_Z^2 \left[\theta^{\mu\nu}(k_1 - k_2)^\rho + \theta^{\nu\rho}(k_2 - k_3)^\mu + \theta^{\rho\mu}(k_3 - k_1)^\nu \right. \right. \\ \left. \left. - 2g^{\mu\nu}(\theta k_3)^\rho - 2g^{\nu\rho}(\theta k_1)^\mu - 2g^{\rho\mu}(\theta k_2)^\nu \right] \right\}.$$

$$\frac{-e^2}{2 \sin^2 2\theta} \theta_{\mu\nu\rho} (k_1^\rho - k_2^\rho) (c_{V,f} - c_{A,f} \gamma_5)^2$$

$$\frac{e M_Z^2}{2 \sin 2\theta_W} \left[\theta^{\nu\rho}(k_1 - k_2)^\mu - \theta^{\nu\mu}(k_2 - k_3)^\rho - \theta^{\rho\mu}(k_3 - k_1)^\nu \right. \\ \left. - 2g^{\mu\nu}(\theta k_3)^\rho - 2g^{\nu\rho}(\theta k_1)^\mu - 2g^{\rho\mu}(\theta k_2)^\nu \right].$$

Bibliographie

- [1] A. Çatal and T. Dereli in “Non-commutative Geometry and the Higgs Masses”, Phys.Rev. D63 (2001) 075006, hep-th/0011084.
- [2] A. Alboteanu, T. Ohl and R. Rückl in “Collider Tests of the Non-Commutative Standard Model”, Proceedings of the International Europhysics Conference on High Energy Physics, 2005, Lisboa, Portugal, hep-ph/0511188.
- [3] B. Melić, K. Passek-Kumerički, J. Trampetić, P. Schupp, and M. Wohlgenannt in “The Standard Model on Non-Commutative Space-Time : Strong Interactions Included”, Eur.Phys.J. C42 (2005) 499-504, hep-ph/0503064.
- [4] P. Schupp and J. Trampetić in “The Noncommutative Standard Model and Forbidden Decays”, Invited talk at 9th Adriatic Meeting and Central European Symposia on Particle Physics and The Universe, Dubrovnik, Croatia, 4-14 Sep 2003, hep-ph/0405163.
- [5] J. W. Barrett and R. A. D. Martins in “Non-commutative geometry and the standard model vacuum”, J.Math.Phys. 47 (2006) 052305, hep-th/0601192.
- [6] X. Calmet, B. Jurčo, P. Schupp, J. Wess and M. Wohlgenannt in “The Standard Model on Non-Commutative Space-Time”, Eur. Phys. J. C23 (2002), 363-376, hep-ph/0111115.
- [7] T. Ohl and J. Reuter in “Testing the Noncommutative Standard Model at a Future Photon Collider”, hep-ph/0406098.
- [8] T. Ohl and J. Reuter in “Tests of the Noncommutative Standard Model at a Future Photon Collider”, Phys.Rev. D70 (2004) 076007, hep-ph/0407337.
- [9] B. Melić, K. Passek-Kumerički, J. Trampetić, P. Schupp, and M. Wohlgenannt in “The Standard Model on Non-Commutative Space-Time : Electroweak Currents and the Higgs Sector”, Eur.Phys.J. C42 (2005) 483-497, hep-ph/0502249.

- [10] S. Marčulescu in “Non-Commutative Extensions of the Standard Model”, hep-th/0508018.
- [11] M. Chaichian, P. Prešnajder, M. M. Sheikh-Jabbari, and A. Tureanu in “Noncommutative Standard Model : Model Building”, Eur.Phys.J. C29 (2003) 413-432, hep-th/0107055.
- [12] F. Cuypers in “Au-delà du Modèle Standard”, Lectures given at the Spring School on High Energy Physics, Ecole des Mines de Nantes, France, 14-25 April 1997, hep-ph/9706255.
- [13] R. A. McPherson in “Beyond the Standard Model, Experimental Summary”, University of Victoria, Victoria, B.C. Canada and Institute of Particle Physics Fellow, 2005.
- [14] V. Von and C. A. Stephan in “Noncommutative Geometry and the Standard Model of Particle Physics”, Institut für Theoretische Physik und Astrophysik Christian-Albrechts-Universität zu Kiel und Centre de Physique Théorique CNRS, Marseille, 2004.
- [15] Les Houches “Physics at TEV Colliders 2005 : Beyond the Standard Model Working Group : Summary Report”, hep-ph/0602198.
- [16] M. M. Najafabadi in “Semi-Leptonic Decay of a Polarized Top Quark in the Noncommutative Standard Model”, Phys.Rev. D74 (2006) 025021, hep-ph/0606017.
- [17] M. Wohlgenannt in “Introduction to a Non-Commutative Version of the Standard Model”, Plenary talk at XIV International Hutsulian Workshop, Chernivtsi (Ukraine), Oct 28 - Nov 2, 2002, hep-th/0302070.
- [18] J-P. Francoise, G. Naber and T. S. Tsun in “Noncommutative geometry and the standard model”, Contribution to Encyclopedia of Mathematical Physics, J.-P. Francoise, G. Naber & Tsou Sheung Tsun (eds.), Elsevier Science, hep-th/0310145.
- [19] F. J. Petriello in “The Higgs Mechanism in Non-commutative Gauge Theories”, Nucl.Phys. B601 (2001) 169-190, hep-th/0101109.
- [20] M. Burić , V. Radovanović and J. Trampetić in “The one-loop renormalization of the gauge sector in the noncommutative standard model”, hep-th/0609073.
- [21] M. W. Grinewald in “Experimental Tests of the Electroweak Standard Model at High Energies”, Institute for Physics, Humboldt University Berlin Germany,2004.
- [22] L. Le Bruyn in “Noncommutative Geometry”, Universiteit Antwerpen (UIA) Belgium,2005.

- [23] J. M. Gracia-Bondía, J. C. Várilly and H. Figueroa in “Elements of Noncommutative Geometry”, Herbert Amann, University of Zürich.
- [24] J. Madore in “Introduction to Non-Commutative Geometry”, JHEP corfu98.
- [25] S. G. Avery in “Noncommutative Geometry”, Harvey Mudd college, 2004.
- [26] M. Wohlgenannt in “Non-Commutative Geometry and Physics”, Seminar talks given at the Universities Ivano-Frankivsk and Kamenets-Podolsk (Ukraine), hep-th/0602105.
- [27] A. Connes in “Non Commutative Geometry Year2000”, math.qa/0011193.
- [28] A. Connes in “Noncommutative Geometry”, Academic Press 1994, ISBN 0-12-185860-X.
- [29] F. Besnard in “Introduction à la géométrie non-commutative” 2003.
- [30] A. Micu and M. M. Sheikh-Jabbari in “Noncommutative ϕ^4 Theory at Two Loops”, JHEP 0101 (2001) 025, hep-th/0008057.
- [31] R. J. Szabo in “Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces”, Phys.Rept. 378 (2003) 207-299, hep-th/0109162.
- [32] W. Behr in “Noncommutative Gauge Theory beyond the Canonical Case”, hep-th/0511119.
- [33] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov in “Noncommutative Field Theory”, Rev.Mod.Phys. 73 (2001) 977-1029, hep-th/0106048.
- [34] S. F. Novaes in “Standard Model : An Introduction”, Proceedings of the X J. A. Swieca Summer School (World Scientific, Singapore, 2000), hep-ph/0001283.
- [35] C. Quigg in “The Electroweak Theory”, Flavor Physics for the Millennium : TASI 2000, edited by Jonathan L. Rosner (World Scientific, Singapore, 2001), pp. 3 - 67, hep-ph/0204104.
- [36] A. Pich in “The Standard Model of Electroweak Interactions”, Lectures given at the 2004 European School of High-Energy Physics, Sant Feliu de Guixols, Spain, 31 May - 11 June 2004, hep-ph/0502010.
- [37] L. Peak and K. Varvell in “The Physics of the Standard Model”, Lectures, june 2002.
- [38] P. Williams in “The Standard Model”, Lectures, December 2004.
- [39] R. Casalboni in “The Standard Model of Electroweak Interaction”, Lectures given at the Otranto School September 1997.

- [40] N. G. Deshpande in “A review of non-commutative gauge theories”, *Pramana journal of physics*, Vol. 60, No. 2.
- [41] K. Elsner in “Noncommutative Geometry : Calculation of the Standard Model Lagrangian”, *Mod. Phys. Lett. A*16(2001) 241-249, hep-th/0108222.

Résumé

Dans ce mémoire, on présente le modèle standard électrofaible minimal et les différents aspects physiques et mathématiques tels que la brisure spontanée de la symétrie et le mécanisme de Higgs. En suite, on construit le modèle standard minimal sur un espace-temps non-commutatif, on présentera les transformations de jauge non-commutatives et les Seiberg-Witten maps. Comme applications du modèle standard non-commutatif minimal, on calcule les amplitudes de transition de quelques processus physiques qui peuvent être importants pour le teste de la non commutativité de l'espace-temps au delà du modèle standard et qui constituent le signal d'une nouvelle physique dans le prochain collisionneur des particules LHC.

Les mots clés : brisure spontanée de la symétrie, mécanisme de Higgs, transformation de jauge, espace-temps non-commutatif, Seiberg-Witten maps, amplitudes de transition.

Abstract

In this work, we present the minimal electroweak standard model and the different physical and mathematical aspects such that the spontaneous symmetry breaking and the Higgs mechanism. After that, we construct the minimal standard model on a non-commutative space-time, we present the non-commutative gauge transformations and the Seiberg-Witten maps.

As applications of the minimal non-commutative standard model, we compute the transition amplitudes of some physical process which are important for the test of non commutativity of the space-time beyond the standard model and which constitute the signal for a new physics at the coming particles collider LHC.

Key Words : spontaneous symmetry breaking, Higgs mechanism, non-commutative space-time, Seiberg-Witten maps, transition amplitudes.

ملخص

في هذا العمل، قمنا بعرض النموذج المعياري الكهروضعيف و مختلف الجوانب الفيزيائية والرياضية حيث الإنكسار التلقائي للتناظر وآلية هيكرز، كما قمنا بعرض النموذج المعياري الكهروضعيف الأصغري في زمكان غير تبديلي و تحويلات العيار الغير تبديلية و تطبيقات سيار ويتن.

و كتطبيقات للنموذج المعياري الكهروضعيف الأصغري الغير تبديلي قمنا بحساب ساعات انتقال بعض العمليات الفيزيائية التي تبدو مهمة لاختبار لا تبديلية الزمكان في النموذج المعياري التي تشير إلى فيزياء جديدة في مصادم الجسيمات القادم LHC.

الكلمات المفتاحية: الإنكسار التلقائي للتناظر، آلية هيكرز، تحويلات العيار، زمكان غير تبديلي، تطبيقات سيار ويتن، ساعات انتقال.

Soyez Les Bienvenus

مرحباً بكم





Université Mentouri-Constantine
Faculté des Sciences Exactes
Département de Physique

Soutenance de mémoire de

Magister en Physique

Spécialité: Physique Théorique

Présenté par:

Menigher Hafid

Dirigé par:

Pr. N. Mebarki

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ:

قل سیروا فی الأَرْض فانظروا كيف بدأ
الخلق، ثم الله ينشئ النشأة الآخرة، إن الله على
كل شيء قدير.

سورة العنكبوت، الآية 20.

An aerial photograph of a city with a semi-transparent architectural model overlaid. The model shows various buildings, streets, and green spaces in a 3D perspective. The text is centered on a white rectangular area with a blue border.

*Au-delà du Modèle
Standard et Applications*

*Durant le dernier siècle, la physique fondamentale a vécu deux révolutions qui ont changé les concepts et la vision de la mécanique classique Newtonienne décrivant les lois de la nature, se sont la relativité (restreinte et générale) inventée par **Einstein** et la mécanique quantique inventée et développée par des imminents physiciens tels que **Bohr, Heisenberg, Schrödinger, Pauli, Dirac**, et d'autres.*

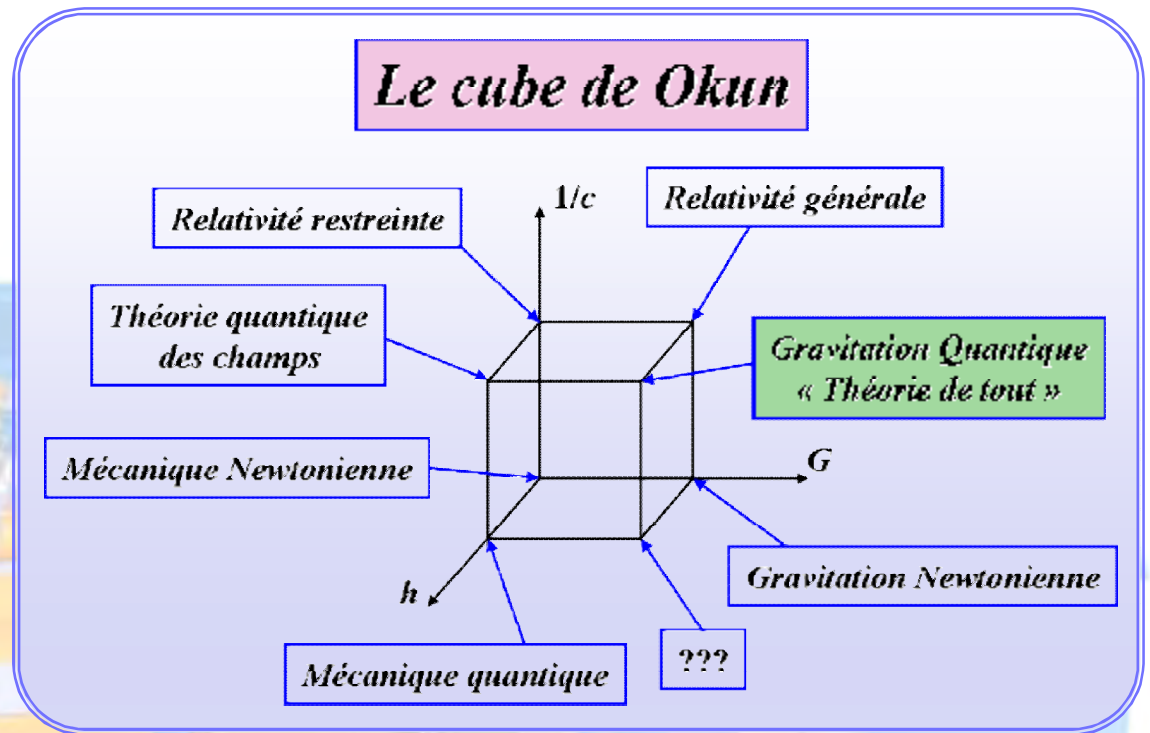
*Le mélange de la mécanique quantique et la relativité restreinte a induit la mécanique quantique relativiste. Le développement de la théorie des champs et le formalisme de la deuxième quantification ainsi que la renormalisation et la théorie des groupes (groupes de **Lie**) ont contribué à la construction des théories de jauge qui ont réussi à expliquer les trois forces connues: électromagnétique, faible et forte avec des prédictions plus au moins compatibles avec l'expérience.*

*L'unification des interactions électromagnétiques et faibles achevée par les physiciens **Glashow, Weinberg et Abdussalam** est une théorie de jauge basée sur le groupe de Lie **$SU(2) \otimes U(1)$** . Malgré ce succès apparent et même leur unification, il restent beaucoup de choses inexplicables. En effet, ne peut pas expliquer:*

- Le problème d'existence du boson de **Higgs**.*
- L'origine des masses des particules.*
- Les trois générations des particules.*
- La violation de CP.*
- Le problème de la gravitation.*
- Les grand différences de masse entre les particules.*
- Et d'autres problèmes.*

Pour y remédier ou comprendre ces problèmes, les physiciens ont emprunter plusieurs voies au-delà du modèle standard, notamment:

- *Quantum loop gravity.*
- *Le modèle technicouleur.*
- *Extra dimensions, théorie des cordes et super cordes, M-theory.*
- *La super symétrie et supergravité.*
- *Espace et géométrie non commutative.*
- *Modèle symétrique gauche droit.*
- *Et d'autres voies.*



Chapitre 1:

*Le Modèle standard de Glashow-Weinberg
et Abdussalam (GWS)*

Chapitre 2:

*Le Modèle Standard Dans La Géométrie
Non-Commutative*

Chapitre 3:

Applications Physiques

Chapitre 1:

Le Modèle standard de Glashow-Weinberg et Abdussalam (GWS)



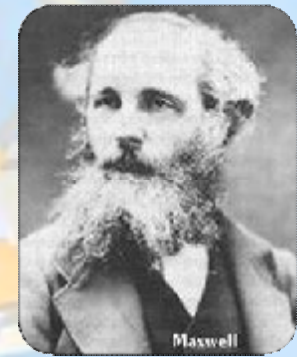
*Le **"Modèle Standard"** est le cadre théorique de la physique des particules. Élaboré dans les années **1970**, c'est une théorie quantique des champs (De nos jours, la théorie quantique des champs est utilisée dans tous les domaines en rapport avec la physique des hautes énergies) qui est naturellement compatible avec les principes de la mécanique quantique et de la relativité.*

Il rassemble toutes les connaissances théoriques, expérimentalement confirmées depuis, sur les constituants élémentaires de la matière et sur leurs interactions.

Il unifier l'interaction électromagnétique et l'interaction faible. L'idée de l'unification est plus qu'un siècle vieux.

*Dans la première moitié du **XIX** ème siècle, **Faraday** effectue de nombreuses expériences et montre que les champs électriques et magnétiques sont étroitement liés.*

*Mais c'est **Maxwell** qui pose en **1864** les bases mathématiques de la théorie Électro-magnétique; par les équations qui portent son nom, il montre comment les champs électriques et magnétiques sont générés.*



*Le Modèle Standard invoque l'hypercharge faible **Y_w** qui est juste un champ scalaire qui couple la charge électrique ordinaire, le groupe qui décrit ceci est **$U(1)$** .*

*Invoque aussi l'isospin faible **I_w** , mathématiquement est identique à cela le spin ordinaire est résumée par **$SU(2)$** .*

Le groupe de jauge $SU(2) \otimes U(1)$:

Le groupe de Lie (produit tensoriel) $SU(2) \otimes U(1)$ est la base du modèle standard de GWS, c'est un groupe de Lie d'ordre $r = 3+1$ et de rang $l = 2+1$.

Il y a trois générateurs pour $SU(2)$ correspond aux bosons intermédiaires vectoriels les médiateurs d'interaction faible, et un générateur pour $U(1)$ correspond au photon le médiateur du force électromagnétique.

Les champs de matière se répartissent selon la représentation fondamentale et les champs de forces selon la représentation adjointe.

Les Symétries :

Une notion qui a joué un rôle fondamental dans notre compréhension du monde à toutes les échelles est celle de la symétrie. En Physique toute notion de symétrie est fondée sur une hypothèse selon laquelle une variable n'est pas mesurable.

*Dès le début de siècle, le rôle de la symétrie devient fondamental en physique. Les deux théories de la relativité **d'Einstein** sont des théories de symétrie, globale et cinétique pour la relativité restreinte, locale et dynamique en relativité générale (les adjectifs globale et locale s'adressent à la dépendance de l'espace-temps).*

Le groupe abélien $U(1)$:

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{YM} + (D^\mu \varphi)^* (D_\mu \varphi) - V(\varphi, \varphi^*)$ **Lagrangien en phi 4.**

$$\frac{-1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \mathcal{L}_{YM} \text{ ou: } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + ig A_\mu \varphi$$

$$V(\varphi, \varphi^*) = \mu^2 \varphi^* \varphi + \frac{\lambda}{4} (\varphi^* \varphi)^2; \lambda > 0 \text{ et } \mu \text{ arbitraire}$$

C'est le potentiel le plus général qui soit invariant et renormalisable.

λ nécessairement positif puisqu'on souhaite avoir un état d'énergie la plus basse.

Le Lagrangien \mathcal{L} précédent est invariant sous les transformations infinitésimales de jauge globales ($\varepsilon \neq \varepsilon(x)$) suivantes:

$$\delta \varphi = -ig\varepsilon \varphi \text{ et: } \delta \varphi^* = ig\varepsilon \varphi^*$$

La symétrie de jauge n'est pas seulement une symétrie globale, elle doit être élevée au rang de symétrie locale ($\varepsilon = \varepsilon(x)$).

Les transformations de jauge dans ce cas sont:

$$\delta\varphi = -ig\varepsilon(x)\varphi \quad \delta\varphi^* = ig\varepsilon(x)\varphi^*$$

$$\text{et: } \delta A_\mu = \frac{1}{g}\partial_\mu\varepsilon(x)$$

N'importe quel système physique cherche toujours à minimiser son énergie libre, i.e cherche l'état fondamentale du système.

Donc on cherche l'état du vide du système, en terminologie de la théorie des champs le vide est l'état fondamentale du système.

On remarque qu'il y a deux cas, selon le signe de μ^2 :

Le cas $\mu^2 > 0$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V(\varphi, \varphi^*)}{\partial \varphi} &= \mu^2 \varphi^* + \frac{\lambda}{2} (\varphi^* \varphi) \varphi^* = 0 \\ \frac{\partial V(\varphi, \varphi^*)}{\partial \varphi^*} &= \mu^2 \varphi + \frac{\lambda}{2} (\varphi \varphi^*) \varphi = 0 \end{aligned} \right\} \implies \varphi = \varphi^* = 0$$

La symétrie du système est exacte, il n'y a pas de brisure de symétrie.

Le cas $\mu^2 < 0$:

$$\frac{\partial V(\varphi, \varphi^*)}{\partial \varphi} = 0 \implies \left(\mu^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi^* \varphi \right) \varphi^* = 0 \implies \begin{cases} \varphi^* = 0 \\ \varphi^* \varphi = |\varphi|^2 = \frac{-2\mu^2}{\lambda} \end{cases} (**)$$

On obtient le même résultat pour la dérivée: $\frac{\partial V(\varphi, \varphi^*)}{\partial \varphi^*}$

On pose: $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, φ_1 et $\varphi_2 \in \mathbb{R}$

On obtient à partir de l'équation (**): $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = \frac{-2\mu^2}{\lambda}$

Cette équation représente un cercle de rayon: $R = \sqrt{\frac{-2\mu^2}{\lambda}}$

C'est à dire il y a une dégénérescence de l'état du vide, et la symétrie est brisée spontanément.

On parle de brisure spontanée de symétrie lorsque les lois gouvernant l'évolution d'un système sont invariantes sous une certaine transformation, mais l'état fondamental (le vide en théorie des champs) ne respecte pas une telle invariance.

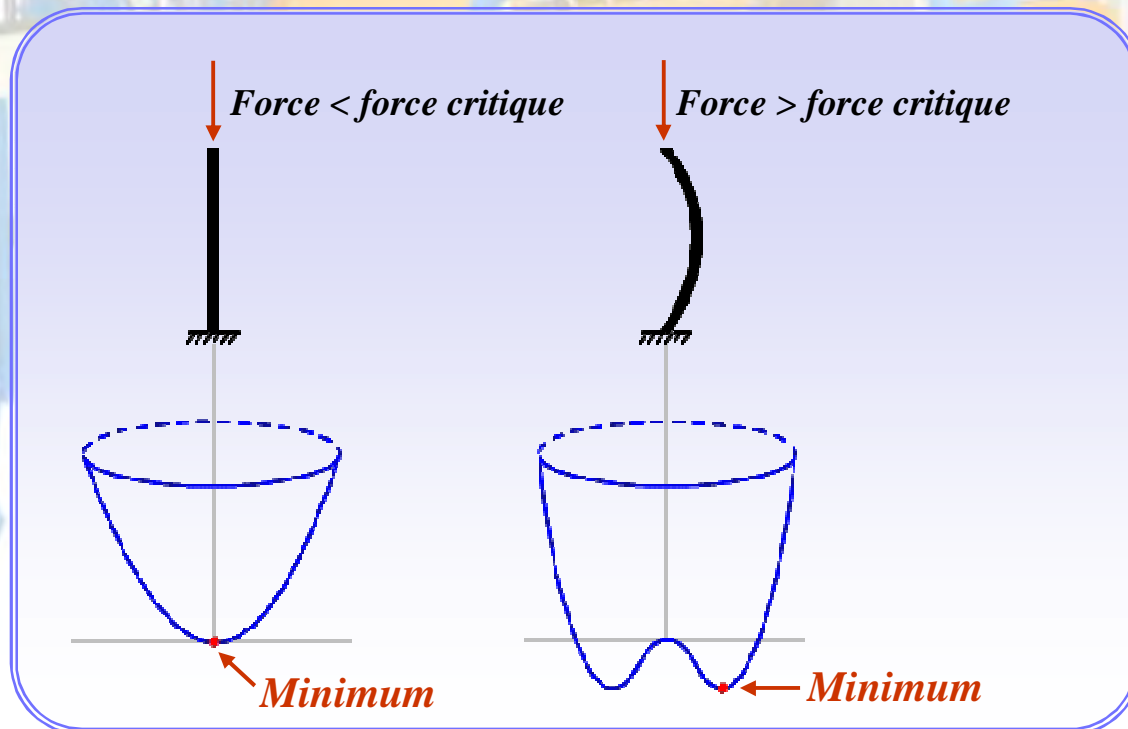
En effet: $\delta\varphi(x) = \delta\varphi_1(x) + i\delta\varphi_2(x)$

$$\text{et: } \begin{cases} \delta\varphi_1(x) = g\varepsilon(x)\varphi_2(x) \\ \delta\varphi_2(x) = -g\varepsilon(x)\varphi_1(x) \end{cases}$$

*d'après l'équation (**) on a: $(\varphi_1^0)^2 + (\varphi_2^0)^2 = \frac{-2\mu^2}{\lambda}$*

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } \varphi_1^0 = 0 \implies \varphi_2^0 \neq 0 \\ \text{si } \varphi_2^0 = 0 \implies \varphi_1^0 \neq 0 \end{array} \right\} \implies \begin{cases} \delta\varphi_1^0 = g\varepsilon(x)\varphi_2^0; \delta\varphi_2^0 = 0 \text{ mais } g\varepsilon(x)\varphi_2^0 \neq 0 \\ \delta\varphi_2^0 = -g\varepsilon(x)\varphi_1^0; \delta\varphi_1^0 = 0 \text{ mais } g\varepsilon(x)\varphi_1^0 \neq 0 \end{cases}$$

On peut facilement comprendre le mécanisme de brisure spontanée de symétrie en regardant le flambage d'une barre cylindrique d'acier. Si l'on pose la barre verticalement et qu'on agit avec une force de compression verticale, la barre se raccourcit légèrement. Le système est parfaitement symétrique par rapport à la rotation autour de la barre. Mais si la force dépasse une certaine valeur critique, il se produit un phénomène de flambage : la barre se tord dans une certaine direction et la situation qui en résulte n'est plus symétrique par rapport à la rotation.



Brisure spontanée de la symétrie (SSB) :

On fait un choix de l'état du vide: $\varphi_1^0 = 0$ et $\varphi_2^0 = \sqrt{\frac{-2\mu^2}{\lambda}}$
une petite fluctuation: $\varphi' = \varphi_0 + \varphi$ avec: $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$

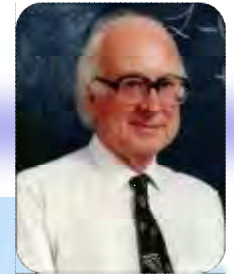
\mathcal{L} est réécrit sous la forme:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \frac{-1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \varphi_1 \partial^\mu \varphi_1 + \partial_\mu \varphi_2 \partial^\mu \varphi_2 + g^2 A_\mu A^\mu \varphi_1^2 + g^2 A_\mu A^\mu \varphi_2^2 \\ & + g^2 A_\mu A^\mu \varphi_0^2 - 2g\varphi_0 A^\mu \partial_\mu \varphi_2 + 2g\partial^\mu \varphi_1 A_\mu \varphi_2 - 2g\partial^\mu \varphi_2 A_\mu \varphi_1 \\ & + 2g^2 A_\mu A^\mu \varphi_0 \varphi_1 - \varphi_1^2 (\mu^2 + \frac{3}{2} \lambda \varphi_0^2) - \varphi_2^2 (\mu^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi_0^2) - \frac{\lambda}{4} (\varphi_0^4 + \varphi_1^4 + \varphi_2^4) \\ & - 2(\frac{\lambda}{2} \varphi_0 \varphi_1^3 + \frac{\lambda}{2} \varphi_0^3 \varphi_1 + \mu^2 \varphi_0 \varphi_1) - \frac{\lambda}{2} \varphi_1^2 \varphi_2^2 - \lambda \varphi_0 \varphi_1 \varphi_2^2 - \mu^2 \varphi_0^2\end{aligned}$$

$-2g\varphi_0 A^\mu \partial_\mu \varphi_2$, φ_2 décrit une particule scalaire réelle sans masse
ou particule de Goldstone.

*Le théorème de **Goldstone** stipule que dans toute situation de brisure spontanée de symétrie existe au moins un boson de **Goldstone** de masse nulle.*

Mécanisme de Higgs :



*Le mécanisme de **Higgs** est une méthode utilisée pour éliminer les particules de **Goldstone** et diagonaliser le Lagrangien.*

*D'une certaine façon l'origine du boson de **Higgs** remonte au début du **XX ème** siècle, lorsque des théoriciens comme **Lorentz** et **Poincaré** cherchaient à mieux comprendre la structure de la matière et surtout celle de l'électron.*

***Peter Higgs** proposa en **1964** l'existence d'une nouvelle particule de spin égal à **0** qui confère une masse aux bosons vecteurs. Ces particules acquièrent leur masse en interagissant avec le champ de **Higgs** créé par le boson de **Higgs**.*

En redéfinissant les champs de jauge $A_\mu(x)$ en faisant la transformation:

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = B_\mu(x) = A_\mu(x) + \alpha \partial_\mu \xi(x)$$

Avec: $\alpha = \frac{-\sqrt{\lambda}}{2gm}$ **et la jauge:** $\partial_\mu \xi(x) = 0$

le champs scalaire se transforme comme: $\varphi(x) = e^{\frac{i\xi}{\varphi_0}} (\varphi_0 + \varphi_1 + i\varphi_2)$

posons: $\eta(x) = \varphi_1 + i\varphi_2$

Le tenseur électromagnétique reste invariant $(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})$.

$$(D_\mu \varphi)(D^\mu \varphi)^* = \partial_\mu \eta(x) \partial^\mu \eta(x) + g^2 B_\mu B^\mu (\varphi_0 + \eta(x))^2$$

$$V(\varphi, \varphi^*) = \frac{\varphi_0^2 \mu^2}{4} - \mu^2 \eta^2(x) + \frac{\lambda}{4} \varphi_0 \eta^3(x) + \frac{\lambda}{16} \eta^4(x)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \partial_\mu \eta(x) \partial^\mu \eta(x) + \mu^2 \eta^2(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + g^2 \varphi_0^2 B_\mu B^\mu - \frac{\varphi_0^2 \mu^2}{4} \\ & + g^2 B_\mu B^\mu \eta^2(x) + 2g^2 B_\mu B^\mu \varphi_0 \eta(x) - \frac{\lambda}{4} \varphi_0 \eta^4(x) - \frac{\lambda}{16} \eta^4(x) \end{aligned}$$

Le groupe non abélien $SU(2)$:

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{4} F_{\mu\nu}^k F^{\mu\nu k} + (\partial_\mu \varphi^{+a} - \frac{i}{2} g \varphi^{+b} (\tau_k)_{ab} A_\mu^k) (\partial_\mu \varphi^a + \frac{i}{2} g (\tau_k)_{ab} \varphi^b A_\mu^k) - \mu^2 (\varphi^{+a} \varphi^a) - \frac{\lambda}{4} (\varphi^{+a} \varphi^a)^2$$

$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ représente le doublet des particules scalaires complexes sous l'action du potentiel.

$$F_{\mu\nu}^k = \partial_\mu A_\nu^k - \partial_\nu A_\mu^k + g f_{klm} A_\mu^l A_\nu^m, \quad k = \overline{1, 3}$$

$$D_\mu \varphi^a = \partial_\mu \varphi^a + \frac{i}{2} g (\tau_k)_{ab} \varphi^b A_\mu^k$$

$$\text{et: } D_\mu \varphi^{+a} = \partial_\mu \varphi^{+a} - \frac{i}{2} g (\tau_k)_{ab} \varphi^{+b} A_\mu^k$$

Les transformations de jauge locales:

$$\delta \varphi^a = -\frac{i}{2} g \varepsilon_k(x) (\tau_k)_{ab} \varphi^b$$

$$\delta \varphi^{+a} = \frac{i}{2} g \varepsilon_k(x) (\tau_k)_{ab} \varphi^{+b}$$

Même chose comme dans le cas du groupe de Lie abélien $U(1)$:

Si $\mu^2 > 0$: la symétrie exacte, pas d'invariance.

Dans le cas $\mu^2 < 0$: $\frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi^a} = 0 \implies \varphi^{+a} = 0$, où $\sum_{a=1}^2 |\varphi^a|^2 = \frac{-2\mu^2}{\lambda}$

Avec: $\varphi^1 = \varphi_1^1 + i\varphi_2^1$; $\varphi^2 = \varphi_1^2 + i\varphi_2^2$

Brisure spontanée de la symétrie (SSB):

On choisit l'état du vide comme suit: $\langle \varphi^a \rangle_0 = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} m \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $m^2 = -\mu^2$

On fait une perturbation $\eta^a(x)$ autour de l'état du vide:

$$\varphi(x) = \langle \varphi^a \rangle_0 + \eta^a(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2\mu}{\sqrt{\lambda}} + \sigma(x) - i\tau_k \theta^k(x) \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (0 \ 1) \left(\frac{2\mu}{\sqrt{\lambda}} + \sigma(x) + i\tau_k \theta^k(x) \right)$$

$$\mathcal{L}' = \frac{-1}{4}(\partial_\mu A_\nu^k - \partial_\nu A_\mu^k)^2 + \frac{1}{2\lambda}g^2\mu^2 A_\mu^k A^{\mu k} + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - \mu^2\sigma^2(x) +$$

$$\frac{1}{2}\partial_\mu\theta^k\partial^\mu\theta^k + \frac{1}{2\sqrt{2}}g\mu\partial_\mu\theta^k A_\mu^k + \frac{1}{2\sqrt{2}}g^2\sigma^2 A_\mu^k A^{\mu k} + \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\mu g^2\sigma A_\mu^k A^{\mu k}, k = \overline{1,3}$$

un terme non physique de la forme: $\frac{1}{2\sqrt{2}}g\mu\partial_\mu\theta^k A_\mu^k$

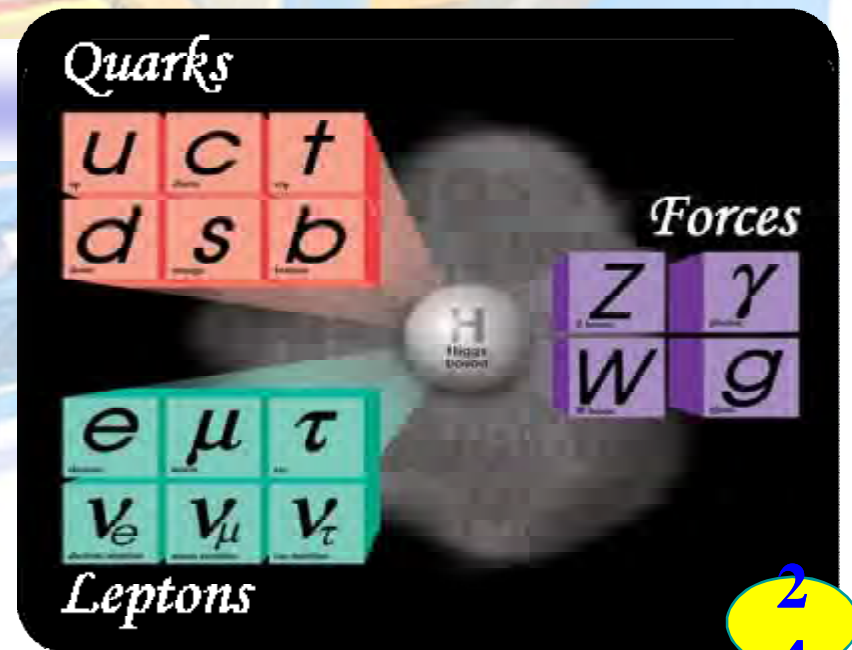
apparition des bosons de Goldstone $\theta^k(x)$ avec une masse nulle, et un champ scalaire réel $\sigma(x)$ massif.

Mécanisme de Higgs :

faisant la transformation:

$$B_\mu^k = A_\mu^k + \frac{\sqrt{\lambda}}{2\mu g}\partial_\mu\theta^k$$

et la jauge: $\partial_\mu\theta^k = 0$



$$(D_\mu \varphi^a)(D_\mu \varphi^a)^+ = \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2\lambda} g^2 \mu^2 B_\mu^k B^{\mu k} + \frac{1}{2\sqrt{2}} g^2 B_\mu^k B^{\mu k} \sigma^2 + \sqrt{\frac{2}{\lambda}} g^2 \mu B_\mu^k B^{\mu k} \sigma$$

le potentiel prendra la forme:

$$V(\varphi^a, \varphi^{+a}) = \frac{\lambda}{16} \sigma^4(x) + \frac{1}{4} \varphi_0^2 \mu^2 + \frac{1}{4} \varphi_0 \lambda \sigma^3(x) - \mu^2 \sigma^2(x)$$

le Lagrangien physique est: $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{-1}{4} (\partial_\mu B_\nu^k - \partial_\nu B_\mu^k)^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma(x) \partial^\mu \sigma(x) - \mu^2 \sigma^2(x) + \frac{1}{2\lambda} g^2 \mu^2 B_\mu^k B^{\mu k}$$

$$\mathcal{L}_I = \frac{1}{2\sqrt{2}} g^2 B_\mu^k B^{\mu k} \sigma^2(x) - \sqrt{\frac{2}{\lambda}} g^2 \mu B_\mu^k B^{\mu k} \sigma(x) + \frac{1}{4} \varphi_0^2 \mu^2 - \frac{1}{4} \varphi_0 \lambda \sigma^3(x) - \frac{\lambda}{16} \sigma^4(x)$$

*Les particule de **Goldstone** sont disparues et l'apparaissions du terme de masse pour les bosons de jauge B_ν^k . Donc, les trois états associés aux bosons de **Goldstone** se sont transformés en trois composantes longitudinales des champs vectoriels qui sont devenus massifs. La particule associée au champ scalaire $\sigma(x)$ est la particule de **Higgs**.*

Le modèle standard $SU(2) \otimes U(1)$:

Les particules élémentaires constituantes du modèle standard sont au nombre de **16** (si on inclue pas les interactions fortes):

- **4 bosons de spin 1** qui sont les particules de force et qui représentent les bosons vectoriels des différentes interactions:

- Les W^+ et W^- (les bosons vectoriels chargés) médiateurs des interactions faibles.

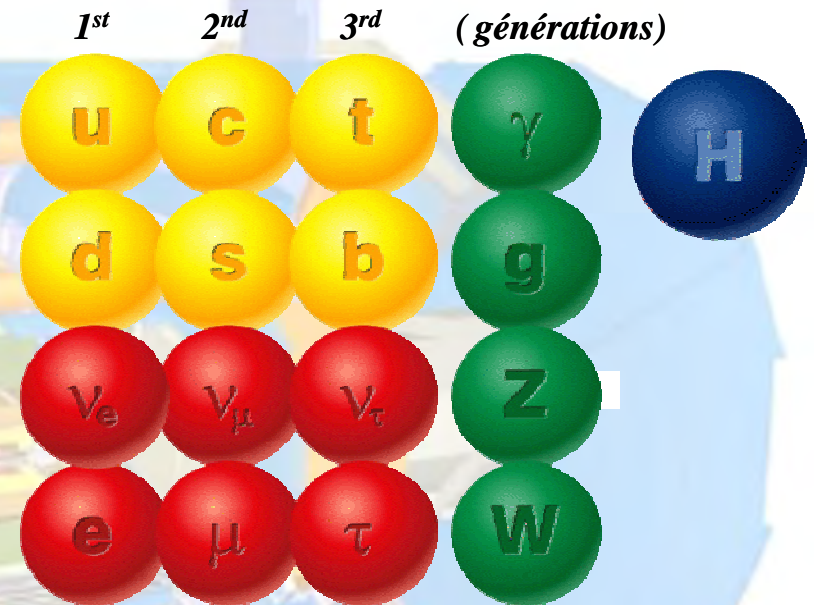
- Le Z^0 (boson scalaire neutre) médiateur des interactions faibles.

- Le photon γ médiateur des interactions électromagnétiques.

- **12 fermions de spin 1/2** qui sont les particules de matière divisées en deux catégories:

- **6 quarks** et leurs anti-quarks qui constituent les composantes des hadrons.

- **6 leptons** et leurs anti-leptons.



Les leptons sont répartis dans des représentations fondamentales du groupe de Lie $SU(2)$ comme suit:

des doublets: $\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}$

et des singuliers: e_R, μ_R, τ_R

*Chaque doublet de ces particules possède une polarisation gauche (**L**) ou droite (**R**):*

$$L = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L = L^a$$

$$R = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_R = e_R^- = R^a$$

L'expérience montrée que les neutrinos de polarisation droite n'existe pas.

Le Lagrangien du Modèle Standard est:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^{*a} \partial^\mu \varphi^a + i \bar{R}^a \gamma_\mu \partial^\mu R^a + i \bar{L}^a \gamma_\mu \partial^\mu L^a - h \bar{L}^a \varphi^a R^a - h \bar{R}^{*a} \varphi^a L^a + m^2 \varphi^{*a} \varphi^a - \frac{\lambda}{4} (\varphi^{*a} \varphi^a)^2$$

Les transformations de jauge sont: $SU_{IW}(2) : \delta \varphi^a = -ig I_W (\sigma^k)_{ab} \varepsilon_k \varphi^b$

$$U_Y(1) : \delta \varphi^a = -ig' Y_W \varepsilon_k \varphi^{*a}$$

*Le Lagrangien précédent est invariant par rapport aux transformations de jauge globales du groupe de **Lie**.*

*Pour les champs de matière **L et R**, on a les transformations de jauge suivantes: $SU_{I_W}(2) : \delta L^a = -ig I_W (\tau^k)_{ab} \varepsilon^k L^b; I_W = 1/2$*

$$\delta R = 0$$

$$U_Y(1) : \delta L^a = +ig' \varepsilon_4 Y_W L^a, Y_W = -1$$

$$\delta R = -ig' \varepsilon_4 Y_W R, Y_W = -2$$

Le Lagrangien invariant par rapport aux transformations de jauge locales est:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^k F^{\mu\nu k} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (\partial_\mu \varphi^a + \frac{i}{2} g (\tau_k)_{ab} \varphi^b A_\mu^k + ig' \varphi^a A_\mu) (\partial^\mu \varphi^{+a} \\ & - \frac{i}{2} g \varphi^{+b} (\tau_k)_{ab} A^{\mu k} - ig' \varphi^{+a} A^\mu) + i \bar{R} \gamma_\mu (\partial^\mu R - 2ig' R A^\mu) + i \bar{L}^a \gamma_\mu (\partial^\mu L^a \\ & - \frac{i}{2} g (\tau_k)_{ab} L^b A^{\mu k} - ig' L^a A^\mu) - h \bar{L}^a \varphi^a R - h \bar{R}^* \varphi^a L^a + m^2 \varphi^{+a} \varphi^a - \frac{\lambda}{4} (\varphi^{+a} \varphi^a)^2 \end{aligned}$$

mais les bosons vectoriels A_μ et A_μ^k ont des masse nulles sont apparaître.

Brisure spontanée de la symétrie (SSB) :

Pour générer des masses aux médiateurs des interactions faibles, on doit briser la symétrie $SU_{I_w}(2)$.

on prend le choix suivant: $\varphi(x) = \left[\sqrt{\frac{2}{\lambda}} m + \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma(x) - i\tau_k \theta^k) \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

travaillons dans la jauge: $\partial_\mu \theta^k = 0$

le Lagrangien total: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^k - \partial_\nu A^{\mu k})(\partial^\mu A^{\nu k} - \partial^\nu A^{\mu k}) - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A^\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ & + \frac{1}{2}\partial_\mu \sigma(x)\partial^\mu \sigma(x) - m^2 \sigma^2(x) + \frac{2m^2}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda}g^2 m^2 A_\mu^k A^{\mu k} + \frac{1}{2\lambda}g'^2 m^2 A_\mu A^\mu \\ & + \frac{1}{2}\partial_\mu \theta^k \partial^\mu \theta_k - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}gm\partial_\mu \theta^k A^{\mu k} + \frac{1}{\lambda}gg'm^2 A_\mu^3 A^\mu + i\bar{L}^1 \gamma_\mu \partial^\mu L^1 + i\bar{L}^2 \gamma_\mu \partial^\mu L^2 \\ & + i\bar{R} \gamma_\mu \partial^\mu R - \sqrt{\frac{2}{\lambda}}mh\bar{L}^2 R - \sqrt{\frac{2}{\lambda}}mh\bar{R}^* L^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_I = & \frac{-1}{4} g \varepsilon_{klm} (A_\mu^l A_\nu^m - A^{\mu l} A^{\nu m}) (\partial_\mu A_\nu^k - \partial_\nu A_\mu^k) + \frac{1}{4} g^2 A_\mu^l A_\nu^m A^{\mu l} A^{\nu m} \\
& + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} g^2 m \sigma A_\mu^k A^{\mu k} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} g'^2 m \sigma A_\mu A^\mu + \frac{1}{8} g^2 \sigma^2 A_\mu^k A^{\mu k} + \frac{1}{2} g'^2 \sigma^2 A_\mu A^\mu \\
& + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} g g' m \sigma A_\mu^3 A^\mu + \frac{1}{4} g g' \sigma^2 A_\mu^3 A^\mu + g' \bar{R} \gamma_\mu R A^\mu + \frac{1}{2} g' \bar{L}^1 \gamma_\mu L^1 A^{\mu 3} \\
& - \frac{1}{2} g' \bar{L}^2 \gamma_\mu L^2 A^{\mu 3} + \frac{1}{2} g' \bar{L}^2 \gamma_\mu L^1 (A^{\mu 1} - i A^{\mu 2}) + \frac{1}{2} g' \bar{L}^1 \gamma_\mu L^2 (A^{\mu 1} + i A^{\mu 2}) \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}} h \sigma \bar{L}^2 R - \frac{1}{\sqrt{2}} h \sigma \bar{R}^* L^2 - \frac{1}{2} m \sqrt{\lambda} \sigma^3 - \frac{\lambda}{16} \sigma^4
\end{aligned}$$

λ et h sont les constantes d'interaction des bosons scalaires.

Mécanisme de Higgs :

à cause des termes non physiques tels que $A_\mu^3 A^\mu$ on est obligé de diagonaliser le Lagrangien \mathcal{L} .

faisons les transformations:
$$\left\{ \begin{array}{l} W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 \pm iA_\mu^2) \\ Z_\mu = A_\mu^3 \cos \theta_w - A_\mu \sin \theta_w \\ B_\mu = A_\mu^3 \sin \theta_w + A_\mu \cos \theta_w \end{array} \right.$$

θ_w est un angle de mixage appelé angle de **Weinberg**.

$$\sin \theta_w = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad \cos \theta_w = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

L'expression finale du Lagrangien est : $\mathcal{L}' = \mathcal{L}'_0 + \mathcal{L}'_I$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_0 = & \frac{-1}{2}(\partial_\mu W_\nu^* - \partial_\nu W_\mu^*)(\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu) + \frac{1}{\lambda}g^2 m^2 W_\mu^* W_\mu - \frac{1}{4}(\partial_\mu Z_\nu \\ & - \partial_\nu Z_\mu)(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) + \frac{1}{2\lambda}m^2(g^2 + g'^2)Z_\mu Z^\mu - \frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 \\ & + \frac{1}{2}\partial_\mu \sigma(x)\partial^\mu \sigma(x) - m^2 \sigma^2(x) + ie \gamma_\mu \partial_\mu e - \sqrt{\frac{2}{\lambda}}h m e e + i\bar{\nu}\gamma_\mu \frac{1+\gamma_5}{2}\partial_\mu \nu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_1 = & \frac{-i}{\sqrt{g^2 + g'^2}} g^2 W_\mu^* W_\nu (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) - \frac{i}{\sqrt{g^2 + g'^2}} g g' W_\mu^* W_\nu (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) \\
& + \frac{i g^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (W_\nu^* \partial_\nu W_\mu - W_\nu \partial_\nu W_\mu^* + W_\nu \partial_\mu W_\nu^* - W_\nu^* \partial_\mu W_\nu) \tau_\mu \\
& + \frac{i g g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (W_\nu^* \partial_\nu W_\mu - W_\nu \partial_\nu W_\mu^* + W_\nu \partial_\mu W_\nu^* - W_\nu^* \partial_\mu W_\nu) B_\mu - \frac{1}{2} g^2 W_\mu^* W_\mu W_\nu^* W_\nu \\
& + \frac{1}{2} g^2 W_\mu^* W_\mu^* W_\nu W_\nu - \frac{1}{g^2 + g'^2} g^4 W_\mu^* W_\mu Z_\nu Z_\nu + \frac{1}{g^2 + g'^2} g^4 W_\mu^* W_\nu Z_\mu Z_\nu \\
& - \frac{g^2 g'^2}{g^2 + g'^2} W_\mu^* W_\mu B_\nu B_\nu + \frac{g^2 g'^2}{g^2 + g'^2} W_\mu^* W_\mu Z_\nu B_\nu + \frac{g^2 g'^2}{g^2 + g'^2} W_\mu^* W_\nu Z_\mu B_\nu \\
& + \frac{g^3 g'}{g^2 + g'^2} W_\mu^* W_\nu Z_\nu B_\nu + \frac{g^2 m \sigma}{\sqrt{\lambda}} W_\mu^* W_\mu + \frac{m(g^2 + g'^2)}{2\sqrt{\lambda}} \sigma Z_\mu Z_\mu + \frac{1}{4} g^2 \sigma^2 W_\mu^* W_\mu \\
& + \frac{g^2 + g'^2}{8} \sigma^2 Z_\mu Z_\mu + \frac{g g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} e^- \gamma_\mu e B_\mu - \frac{1}{2\sqrt{2}} g \bar{\nu} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) e W_\mu^* \\
& - \frac{1}{2\sqrt{2}} g e^- \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu W_\mu - \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{4} \bar{\nu} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu Z_\mu + \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{4} e^- \gamma_\mu (\gamma_5 \\
& + \frac{g^2 - 3g'^2}{g^2 + g'^2}) e Z_\mu - \sqrt{2} h e^- e - \frac{1}{2} m \sqrt{\lambda} \sigma^3 - \frac{1}{16} \lambda \sigma^4
\end{aligned}$$

Ce Lagrangien contient:

Deux champs vectoriels $W_{\mu}^{\pm}(x)$ avec une masse $M_w = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}gm$.

Un champ vectoriel neutre $Z_{\mu}(x)$ avec une masse $M_Z = \sqrt{\frac{g^2 + g'^2}{\lambda}}m$.

Un champ électromagnétique $B_{\mu}(x)$ sans masse.

*Un champ scalaire réel $\sigma(x)$ (**Higgs**) avec une masse $M_H = \sqrt{2}m$.*

Un électron de masse $m_e = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}hm$.

Un neutrino polarisé à gauche $\nu_l(x)$ avec une masse nulle.

Les termes d'interactions :

Effet électromagnétique associé aux électrons:

$$\mathcal{L}_I^e = -e\bar{e}(x)\gamma_\mu e(x)B_\mu(x)$$

on déduit: $e = -\frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = -g \cos \theta_w$

Les courants faibles chargés:

$$\mathcal{L}_I^W = \frac{-1}{2\sqrt{2}}g\bar{\nu}(x)\gamma_\mu(1 + \gamma_5)e(x)W_\mu^*(x) + cc$$

En comparant avec la théorie de *Fermi*, on déduit que: $\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}$

G_F est constante de *Fermi*.

Les masses des bosons de jauge $W_\mu^\pm(x)$ et $Z_\mu(x)$ sont liées par la relation:

$$\rho = \frac{M_W^2}{M_Z^2 \cos^2 \theta_W} = 1$$

Le Lagrangien du Modèle Standard est:

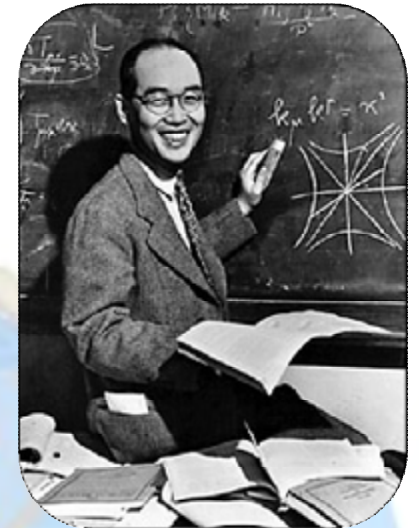
$$\mathcal{L}_{MS} = \mathcal{L}_{jauge} + \mathcal{L}_{fermions} + \mathcal{L}_{Higgs} + \mathcal{L}_{Yukawa}$$

ou:
$$\mathcal{L}_{jauge} = \frac{-1}{4} tr(W_{\mu\nu}W^{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} tr(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{fermions} = & i \sum_{i=e,\mu,\tau} \bar{L}_L^i D_L^L L_L^i + i \sum_{i=e,\mu,\tau} \bar{e}_R^i D_R^L e_R^i + i \sum_{i=u,c,t} \bar{Q}_L^i D_L^Q Q_L^i + i \sum_{i=u,c,t} \bar{u}_R^i D_R^Q u_R^i \\ & + i \sum_{i=d,s,b} \bar{d}_R^i D_R^Q d_L^i \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{Higgs} = (D^H \Phi)^* D^H \Phi - V(\Phi)$$

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = - \sum_{i=e,\mu,\tau} \kappa_i \bar{L}_L^i \Phi R_R^i - hc + \text{les termes de quarks analogues}$$



Yukawa

Chapitre 2:

Le Modèle Standard Dans La Géométrie Non- Commutative



La géométrie de notre espace pose en général des problèmes en physique car il n'existe pas une description unique. Dans l'esprit de la relativité générale, l'espace et le temps forment un objet quadridimensionnel dont la courbure est donnée par la distribution de masse. Quand un objet massif se déplace, la courbure change; la géométrie est un objet dynamique (même chose que le cas de la théorie du Big-bang et la théorie d'inflation cosmique). Au contraire la mécanique quantique, et plus généralement la théorie quantique des champs, suppose la donnée a priori d'un espace dans lequel évoluent des champs.

Tout ce qui précède semble graviter autour de la question suivante: est-ce que l'espace-temps est uniquement une structure géométrique formelle?

Les espaces non commutatifs ont une longue histoire; l'idée de coordonnées de l'espace-temps non commutatif est plus que demi siècle vieux, avec la découverte de la mécanique quantique par Heisenberg, la géométrie non commutative est apparaître.

H. Snyder était le premier qui formuler ces idées mathématiquement. L'approche vers la théorie des champs non commutative basée sur le produit star et Seiberg-Witten maps, permettre de généraliser le modèle standard de la physique des particules vers le cas de l'espace-temps non commutatif.

La géométrie non commutative est une géométrie analytique généralise les trois autres géométries; la géométrie Euclidienne qui est la base de la mécanique Newtonien, la géométrie Minkowskienne qui est la base de la relativité restreinte et la géométrie Riemannienne qui courbe l'espace-temps.

Elle a généralisée la géométrie Riemannienne avec un principe d'incertitude comme dans la mécanique quantique, ce principe d'incertitude est introduit par la non commutativité.

La géométrie non commutative est le monde non commutatif. Elle est basée sur les coordonnées non commutatives.

La géométrie non commutative est basée sur la fameuse relation: $[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] \neq 0$ (la 3^{ème} quantification).

tel que: $[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\theta_{\mu\nu}$

$$[\hat{x}_\mu, \hat{p}_\nu] = i\hbar g_{\mu\nu}$$

$$[\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] = 0$$

ou $\theta_{\mu\nu}$ est antisymétrique: $\theta_{\mu\nu} = -\theta_{\nu\mu}$

Formalisme Mathématique :

A travers ce travail de recherche, on utilise le plus souvent le produit * (star) de **Moyal**.

voici quelques propriétés de ce produit:

$$\varphi(\hat{x})\varphi(\hat{x}) = \varphi_1(x) * \varphi_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{\mu_1\nu_1} \dots \theta^{\mu_n\nu_n}}{(-2i)^n n!} (\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \varphi_1)(\partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_n} \varphi_2)$$

$$\begin{aligned} (\varphi_1 * \varphi_2)(x) &= e^{\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_{x\mu} \partial_{y\nu}} \varphi_1(x) \varphi_2(y) \Big|_{x=y} \\ &= \varphi_1(x) e^{\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_{\mu} \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_{\nu}} \varphi_2(x) \\ &= \varphi_1(x) \varphi_2(x) + \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \varphi_1 \partial_{\nu} \varphi_2 + \mathcal{O}(\theta^2) \end{aligned}$$

$$\int d^n x (\varphi_1 * \varphi_2)(x) = \int d^n x (\varphi_2 * \varphi_1)(x) = \int d^n x \varphi_1(x) \varphi_2(x)$$

$$\varphi_2 * \varphi_1 \neq \varphi_1 * \varphi_2$$

$$\varphi_1 * (\varphi_2 * \varphi_3) = (\varphi_1 * \varphi_2) * \varphi_3$$

$$(\varphi_1 * \varphi_2)^{cc} = \varphi_2^{cc} * \varphi_1^{cc}$$

$$\int d^D x (\varphi_1 * \varphi_2 * \varphi_3) = \int d^D x (\varphi_3 * \varphi_1 * \varphi_2) = \int d^D x (\varphi_2 * \varphi_3 * \varphi_1)$$

$$\int d^4 x (\varphi_1 * \varphi_2 * \dots * \varphi_n)(x) = \int d^4 x (\varphi_n * \varphi_1 * \dots * \varphi_{n-1})(x)$$

$$\partial_\mu (\varphi_1 * \varphi_2) = \partial_\mu \varphi_1 * \varphi_2 + \varphi_1 * \partial_\mu \varphi_2$$

L'opérateur de Weyl :

L'idée d'introduire les opérateurs de Weyl $\hat{w}[\varphi]$ est une technique utilisée pour décrire et formuler la mécanique quantique à partir de l'espace de phase de la mécanique classique.

$$\hat{w}[\varphi] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{\varphi}(k) e^{ik_j \hat{x}^j} \dots(1)$$

ou: $\tilde{\varphi}(k)$ est la transformée de **Fourier** de $\varphi(x)$:

$$\tilde{\varphi}(k) = \int d^D x e^{-ik_j x^j} \varphi(x) \dots(2)$$

l'opérateur $\hat{w}[\varphi]$ est hermitien si $\varphi(x)$ est réelle.

on peut écrire: $\hat{w}[\varphi] = \int d^D x \varphi(x) \hat{\Delta}(x)$

tel que $\hat{\Delta}(x)$ est un opérateur hermitien donné par:

$$\hat{\Delta}(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik_j \hat{x}^j} e^{-ik_j x^j}$$

On peut aussi introduire la dérivée des opérateurs à travers une dérivation linéaire anti-hermitienne $\hat{\partial}_i$ définie par les relations de commutations suivantes:

$$[\hat{\partial}_i, \hat{x}^j] = \delta_i^j \quad [\hat{\partial}_i, \hat{\partial}_j] = 0$$

$$[\hat{\partial}_i, \hat{\Delta}(x)] = -\partial_i \hat{\Delta}(x)$$

$$[\hat{\partial}_i, \hat{w}[\varphi]] = \int d^D x \partial_i \varphi(x) \hat{\Delta}(x) = \hat{w}[\partial_i \varphi]$$

$$e^{\nu^i \hat{\partial}_i} \hat{\Delta}(x) e^{-\nu^i \hat{\partial}_i} = \hat{\Delta}(x + \nu)$$

les propriétés précédentes impliquent que toute trace cyclique Tr définie sur l'algèbre des opérateurs de Weyl est indépendante de

• $x \in \mathbb{R}^D$

utilisation du produit de Weyl on a: $Tr \hat{\Delta}(x) = 1$

$$Tr \hat{w}[\varphi] = \int d^D x \varphi(x)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}(x) \hat{\Delta}(y) &= \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} e^{i(k+k')_j \hat{x}^j} e^{\frac{-i}{2} \theta^{jl} k_j k'_l} e^{-ik_j x^j - ik'_l y^l} \\ &= \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \int d^D z e^{i(k+k')_j z^j} \hat{\Delta}(z) e^{\frac{-i}{2} \theta^{jl} k_j k'_l} e^{-ik_j x^j - ik'_l y^l} \\ &= \frac{1}{\pi^D |\det \theta|} \int d^D z \hat{\Delta}(z) e^{-2i(\theta^{-1})_{ij} (x-z)^i (y-z)^j} \end{aligned}$$

$$\text{Tr} \hat{\Delta}(x) \hat{\Delta}(y) = \delta^D(x - y)$$

$$\varphi(x) = \text{Tr}(\hat{w}[\varphi] \hat{\Delta}(x))$$

si on considère le produit de deux opérateurs de Weyl:

$$\text{Tr}(\hat{w}[\varphi_1] \hat{w}[\varphi_2] \hat{\Delta}(x)) = \frac{1}{\pi^D |\det \theta|} \iint d^D y d^D z \varphi_1(y) \varphi_2(z) e^{-2i(\theta^{-1})_{ij}(x-y)^i(x-z)^j}$$

en utilisant (1), (2) et la relation de Baker-Cambell-Hausdorff:

$$e^{ik_j \hat{x}^j} e^{ik'_j \hat{x}^j} = e^{\frac{-i}{2} \theta^{lm} k_l k'_m} e^{i(k+k')_j \hat{x}^j}$$

$$\hat{w}[\varphi_1] \hat{w}[\varphi_2] = \hat{w}[\varphi_1 * \varphi_2]$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) * \varphi_2(x) &= \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \tilde{\varphi}_1(k) \tilde{\varphi}_2(k' - k) e^{\frac{-i}{2} \theta^{jl} k_j k'_l} e^{ik'_m \hat{x}^m} \\ &= \varphi_1(x) e^{\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_j \theta^{jl} \overrightarrow{\partial}_l} \varphi_2(x) \\ &= \varphi_1(x) \varphi_2(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \theta^{j_1 l_1} \dots \theta^{j_n l_n} \partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} \varphi_1(x) \partial_{l_1} \dots \partial_{l_n} \varphi_2(x) \end{aligned}$$

$$[\hat{x}^j, \hat{\varphi}(x)] = i\theta^{jl} \partial_l \varphi(x)$$

$$[\hat{\varphi}_1(x), \hat{\varphi}_2(x)] = 2i\varphi_1(x) \sin\left(\frac{1}{2} \overleftarrow{\partial}_j \theta^{jl} \overrightarrow{\partial}_l\right) \varphi_2(x)$$

$$\varphi_1(x) * \varphi_2(x) + \varphi_2(x) * \varphi_1(x) = 2\varphi_1(x) \cos\left(\frac{1}{2} \overleftarrow{\partial}_j \theta^{jl} \overrightarrow{\partial}_l\right) \varphi_2(x)$$

$$\varphi_1(x_1) * \dots * \varphi_n(x_n) = \prod_{a \prec b} \exp\left(\frac{i}{2} \theta^{jl} \frac{\partial}{\partial x_a^j} \frac{\partial}{\partial x_b^l}\right) \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n)$$

$$\text{Tr}(\hat{w}[\varphi_1] \dots \hat{w}[\varphi_n]) = \int d^D x \varphi_1(x_1) * \dots * \varphi_n(x_n)$$

$$\int d^D x \varphi_1(x) * \varphi_2(x) = \int d^D x \varphi_1(x) \varphi_2(x)$$

Théorie de jauge sur l'espace-temps non commutatif :

*Pour conserver la forme des transformations de jauge des différents champs dynamiques, on est obligé de travailler avec les **Seiberg-Witten maps** de ces champs ($\hat{\psi}[\psi, V], \hat{V}_\mu[V], \text{etc.}$).*

$$\hat{\psi} = \hat{\psi}[\psi, V] = \psi - \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}V_\alpha\partial_\beta\psi + \frac{i}{8}\theta^{\alpha\beta}[V_\alpha, V_\beta]\psi + \mathcal{O}(\theta^2)$$

$$\hat{V}_\mu = \hat{V}_\mu[V] = V_\mu + \frac{1}{4}\theta^{\alpha\beta}\{\partial_\alpha V_\mu + F_{\alpha\mu}, V_\beta\} + \mathcal{O}(\theta^2)$$

La forme générale du terme cinétique des bosons de jauge:

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{2} \sum_{\mathfrak{R}} C_{\mathfrak{R}} \text{Tr}(\mathfrak{R}(\hat{F}_{\mu\nu}) * \mathfrak{R}(\hat{F}^{\mu\nu}))$$

$$\begin{aligned} \text{où: } \hat{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \hat{V}_\nu - \partial_\nu \hat{V}_\mu - i[\hat{V}_\mu, * \hat{V}_\nu] \\ &= F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}\{F_{\mu\alpha}, F_{\nu\beta}\} - \frac{1}{4}\theta^{\alpha\beta}\{V_\alpha, (\partial_\beta + D_\beta)F_{\mu\nu}\} + \mathcal{O}(\theta^2) \end{aligned}$$

*Tr est la trace sur les éléments du groupe de **Lie** utilisé.*

\mathfrak{R} dénote la représentation et $C_{\mathfrak{R}}$ les différents couplages.

$F_{\mu\nu}$ le tenseur antisymétrique est:

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T_a = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu - i[V_\mu, V_\nu]$$

$$D_\rho F_{\mu\nu} = \partial_\rho F_{\mu\nu} - i[V_\rho, F_{\mu\nu}]$$

ψ	$\mathfrak{R}_\psi(V_\mu)$
$e_R^{(i)}$	$-g' A_\mu$
$L_L^{(i)} = \begin{pmatrix} \nu_L^{(i)} \\ e_L^{(i)} \end{pmatrix}$	$-\frac{1}{2}g' A_\mu + gB_\mu^a T_L^a$
$u_R^{(i)}$	$\frac{2}{3}g' A_\mu + g_s G_\mu^b T_S^b$
$d_R^{(i)}$	$-\frac{1}{3}g' A_\mu + g_s G_\mu^b T_S^b$
$Q_L^{(i)} = \begin{pmatrix} u_L^{(i)} \\ d_L^{(i)} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{6}g' A_\mu + gB_\mu^a T_L^a + g_s G_\mu^b T_S^b$

Le tableau suivant représente les combinaisons champs de jauge qui rentrent dans les expressions des dérivées covariantes des différents fermions dans le Modèle Standard Non Commutatif.

le champs V_μ représente une combinaison linéaire du potentiel de jauge tel que:

$$V_\mu(x) = g' A_\mu(x) Y + g \sum_{a=1}^3 B_\mu^a(x) T_L^a + g_s \sum_{b=1}^8 G_\mu^b(x) T_s^b$$

les coefficients $C_{\mathfrak{R}}$ dans les termes cinétiques sont soumis aux contraintes:

$$\frac{1}{g_I^2} = \sum_{\mathfrak{R}} C_{\mathfrak{R}} \text{Tr}(\mathfrak{R}(T_I^a) \mathfrak{R}(T_I^a)) = \text{Tr} \frac{1}{G^2} (T_I^a T_I^a)$$

g_I symbolise les constantes de couplage ordinaires.

T_I^a les générateurs des différents groupes de Lie.

la forme générale du Lagrangien de Yang-Mills $\mathcal{L}_{\text{jauge}}$ prend la forme:

$$\mathcal{L}_{\text{jauge}} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \frac{1}{G^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \theta^{\rho\sigma} \text{Tr} \frac{1}{G^2} \left[\left(\frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F_{\mu\nu} - F_{\rho\mu} F_{\sigma\nu} \right) F^{\mu\nu} \right] + \mathcal{O}(\theta^2)$$

Lagrangien du Modèle Standard Non Commutatif (MSNC) :

$$\mathcal{L}_{MSNC} = \mathcal{L}_{\text{jauge}} + \mathcal{L}_{\text{fermions}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$$

$$\mathcal{L}_{\text{jauge}} = \frac{-1}{2} \text{Tr} \frac{1}{G^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \theta^{\rho\sigma} \text{Tr} \frac{1}{G^2} \left[\left(\frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F_{\mu\nu} - F_{\rho\mu} F_{\sigma\nu} \right) F^{\mu\nu} \right] + \mathcal{O}(\theta^2)$$

$$\mathcal{L}_{\text{fermions}} = \sum_{i=1}^3 \left[\bar{\hat{L}}_L^{(i)} * (i \hat{\not{D}} \hat{L}_L^{(i)}) + \bar{\hat{Q}}_L^{(i)} * (i \hat{\not{D}} \hat{Q}_L^{(i)}) + \bar{\hat{e}}_R^{(i)} * (i \hat{\not{D}} \hat{e}_R^{(i)}) + \bar{\hat{U}}_R^{(i)} * (i \hat{\not{D}} \hat{U}_R^{(i)}) + \bar{\hat{d}}_R^{(i)} * (i \hat{\not{D}} \hat{d}_R^{(i)}) \right]$$

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = h_0^+ (\hat{D}_\mu \hat{\Phi}) * h_0 (\hat{D}^\mu \hat{\Phi}) - \mu^2 h_0^+ (\hat{\Phi}) * h_0 (\hat{\Phi}) - \lambda h_0^+ (\hat{\Phi}) * h_0 (\hat{\Phi}) * h_0^+ (\hat{\Phi}) * h_0 (\hat{\Phi})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = & - \sum_{i,j=1}^3 \left[G_e^{(ij)} (\bar{\hat{L}}_L^{(i)} * h_e(\hat{\Phi}) * \hat{e}_R^{(j)}) + G_e^{+(ij)} (\bar{\hat{e}}_R^{(i)} * h_e(\hat{\Phi})^+ + \hat{L}_L^{(j)}) + G_u^{(ij)} (\bar{\hat{Q}}_L^{(i)} * h_u(\hat{\Phi}_c) * \hat{U}_R^{(j)}) \right. \\ & \left. + G_u^{(ij)} (\bar{\hat{U}}_R^{(i)} * h_u(\hat{\Phi}_c)^+ * \hat{Q}_L^{(j)}) + G_d^{(ij)} (\bar{\hat{Q}}_L^{(i)} * h_d(\hat{\Phi}) * \hat{d}_R^{(j)}) + G_d^{+(ij)} (\bar{\hat{d}}_R^{(i)} * h_d(\hat{\Phi})^+ * \hat{Q}_L^{(j)}) \right] \end{aligned}$$

/	$SU(3)_c$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	$U(1)_e$	T_3
$e_R^{(i)}$	1	1	-1	-1	0
$L_L^{(i)} = \begin{pmatrix} \nu_L^{(i)} \\ e_L^{(i)} \end{pmatrix}$	1	2	-1/2	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$
$u_R^{(i)}$	3	1	2/3	2/3	0
$d_R^{(i)}$	3	1	-1/3	-1/3	0
$Q_L^{(i)} = \begin{pmatrix} u_L^{(i)} \\ d_L^{(i)} \end{pmatrix}$	3	2	1/6	$\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$
$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$	1	2	1/2	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$
W^+, W^-, Z	1	3	0	$(\pm 1, 0)$	$(\pm 1, 0)$
A	1	1	0	0	0
G^b	8	1	0	0	0

*Les champs et leurs répartition et représentations selon les groupes de **Lie** du Modèle Standard, $i = \overline{1,3}$ dénote les indices de générations.*

Dans les expressions précédentes des différents termes du Lagrangien on a utilisé les notations suivantes:

$$\bar{\hat{\psi}} = \hat{\psi}^+ \gamma^0$$

$$\hat{\psi}_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\hat{\psi}$$

$$\hat{\psi}_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\hat{\psi}$$

$$\hat{\Phi}_c = i\tau_2 \hat{\Phi}^*$$

$$h_0(\hat{\Phi}) = \hat{\Phi}[\Phi, \frac{1}{2}g'A + gB^a T_L^a, 0]$$

$$h_\psi(\hat{\Phi}) = \hat{\Phi}[\Phi, \mathfrak{R}_{\psi_L}(V), \mathfrak{R}_{\psi_R}(V)]$$

$$h_\psi(\hat{\Phi}_c) = \hat{\Phi}[\Phi_c, \mathfrak{R}_{\psi_L}(V), \mathfrak{R}_{\psi_R}(V)]$$

*Le champ de **Higgs** non commutatif $\hat{\Phi}$ est donné par son **Seiberg-Witten map**:*

$$\hat{\Phi} \equiv \hat{\Phi}[\Phi, V] = +\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}V_\beta(\partial_\alpha\Phi - \frac{i}{2}V_\alpha\Phi) + \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\Phi - \frac{i}{2}V_\alpha\Phi) + \mathcal{O}(\theta^2)$$

$\delta \hat{\Phi}[\Phi, V] = i \hat{\Lambda} * \hat{\Phi}$ transformation de jauge non commutative.

$\hat{\Lambda}$ est le paramètre de jauge non commutatif correspondant.

on peut démontré que: $\hat{\Phi}[\Phi, V]^+ = \hat{\Phi}[\Phi^+, V]$

la dérivée covariante du champ de Higgs non commutatif $\hat{\Phi}$

$$\hat{D}_\mu \hat{\Phi} = \partial_\mu \hat{\Phi} - i \hat{V}_\mu * \hat{\Phi}$$

$$\mathcal{L}_{jauge}^{mMSNC} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{g'^2} Tr_1 + \frac{1}{g^2} Tr_2 + \frac{1}{g_s^2} Tr_3 \right) \hat{F}_{\mu\nu} * \hat{F}^{\mu\nu}$$

$$Y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{jauge}^{mMSNC} = & -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} + Tr B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + Tr G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \right) \\ & + \frac{1}{4} g_s d^{abc} \theta^{\rho\sigma} \left(\frac{1}{4} G_{\rho\sigma}^a G_{\mu\nu}^b - G_{\rho\mu}^a G_{\sigma\nu}^b \right) G^{\mu\nu,c} + \mathcal{O}(\theta^2) \end{aligned}$$

$$A_{\mu\nu}, B_{\mu\nu} (= B_{\mu\nu}^a T_c^a) \text{ et } G_{\mu\nu} (= G_{\mu\nu} T_s^a)$$

*représentent les tenseurs de courbures des champs des groupes
données par:*

$$A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$B_{\mu\nu}^a = \partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a + g\varepsilon^{abc} B_\mu^b B_\nu^c$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c$$

$$T_L^a = \frac{\tau^a}{2} \text{ et } T_S^a = \frac{\lambda^a}{2}$$

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}, \text{Tr}(\tau^a \tau^b \tau^c) = 2i\varepsilon^{abc}, \text{Tr}(\lambda^a \lambda^b \lambda^c) = 2(d^{abc} + if^{abc})$$

$$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (B_\mu^1 \mp iB_\mu^2)$$

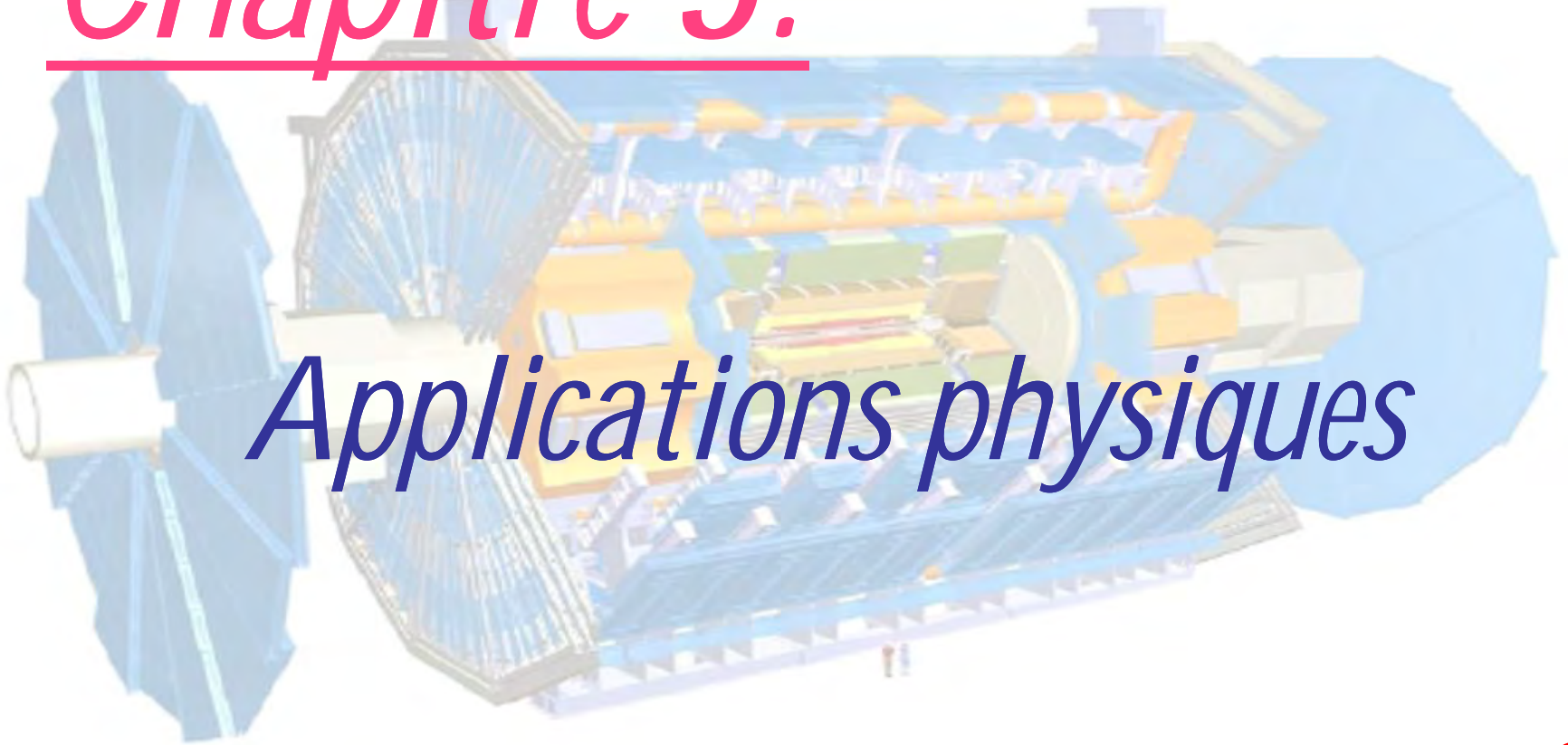
$$Z_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = -\sin \theta_w A_\mu + \cos \theta_w B_\mu^3$$

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (gA_\mu + g'B_\mu^3) = \cos \theta_w A_\mu + \sin \theta_w B_\mu^3$$

$$e = g \sin \theta_w = g' \cos \theta_w$$

Chapitre 3:

Applications physiques



$$f\bar{f} \rightarrow W^+ W^-$$

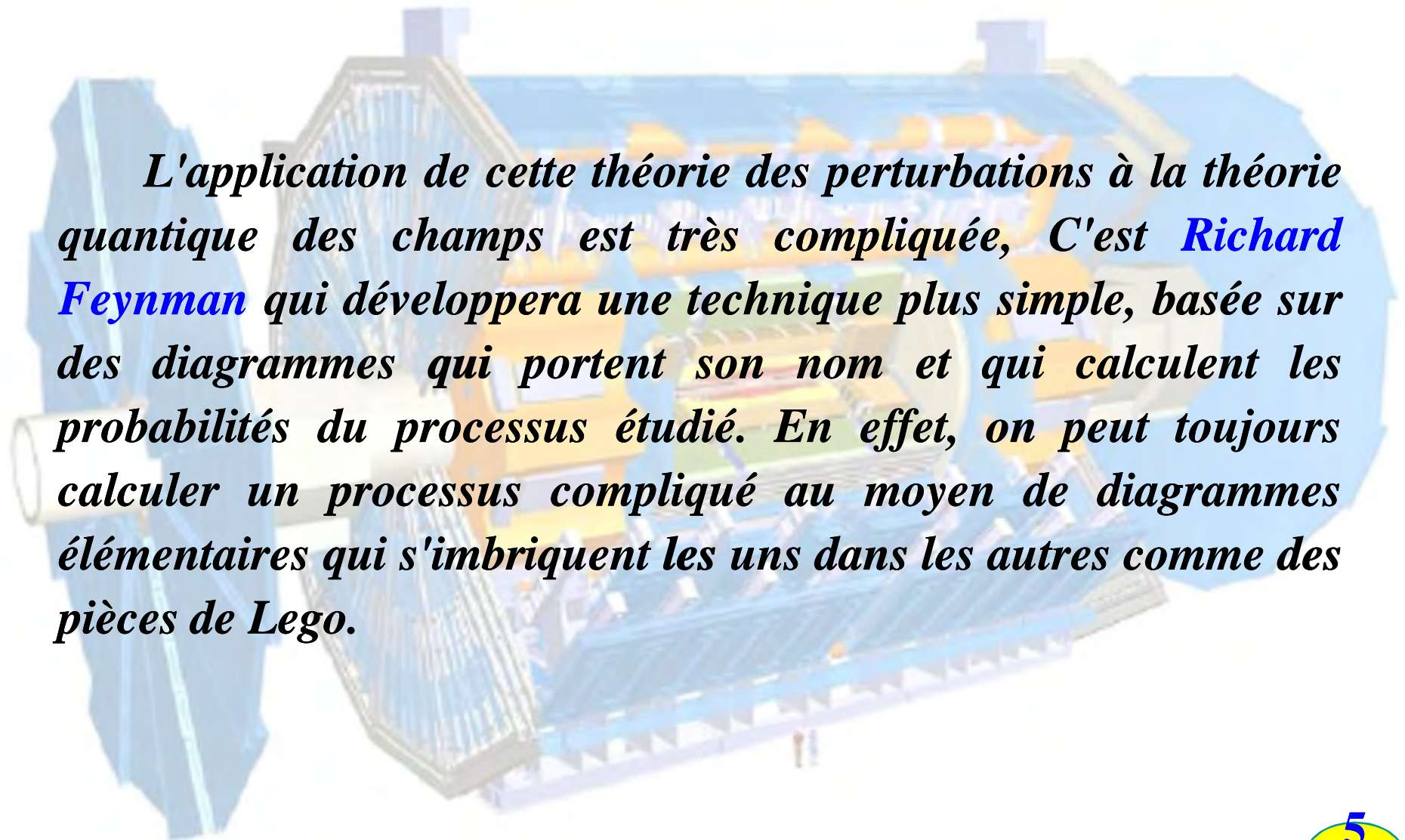
*Dans ce chapitre on va considérer le sous processus physique $f\bar{f} \rightarrow W^+ W^-$ qui contribue au processus physique $P + \bar{P} \rightarrow W^+ W^-$ dans la production des bosons vectoriels W^+ et W^- au **LHC** ou autre collisionneurs des particules.*

Le but est de faire un calcul d'un processus physique du modèle standard dans le cadre de la géométrie non commutative. Le but est de tester et voir la contribution de la correction non commutative, sa forme et son comportement asymptotique.

Nous ne pouvons pas décomposer en modes d'oscillation des systèmes ayant une infinité de degrés de liberté que si les particules décrites par le système n'interagissent pas entre elles.

D'un point de vue mathématique, on décrit les champs quantiques libres par des termes quadratiques, qu'on peut toujours écrire comme des modes d'oscillation harmonique. On quantifie le champ en identifiant la présence de n particules d'énergie donnée au fait que le mode d'oscillation de même énergie se trouve excité dans le n -ème niveau. Si l'on introduit des interactions, les choses se compliquent.

La théorie des perturbations offre cependant une résolution approximative à ce problème.

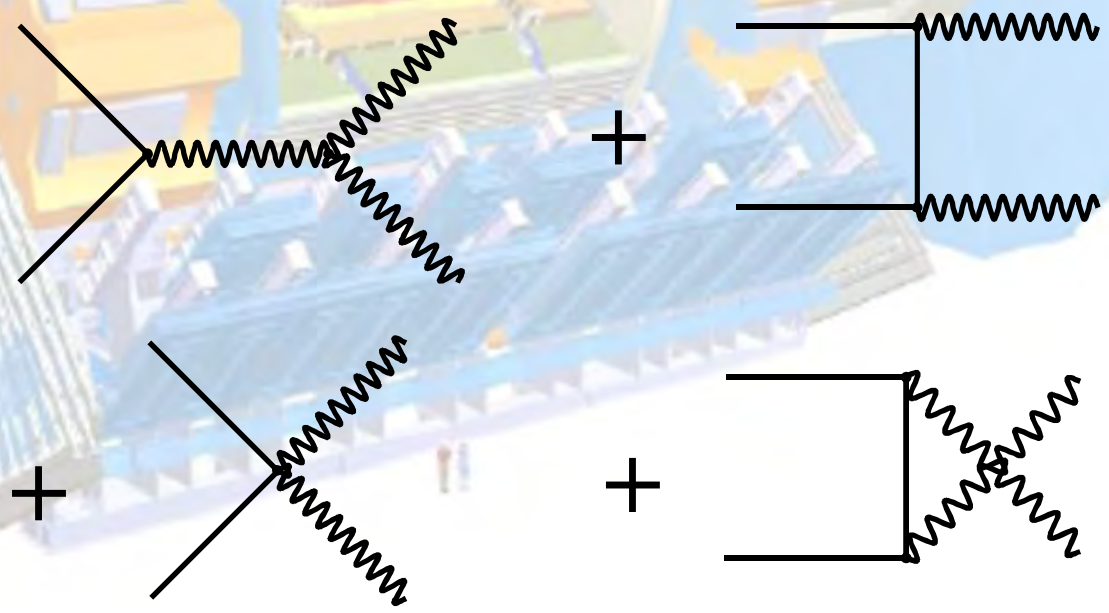


*L'application de cette théorie des perturbations à la théorie quantique des champs est très compliquée, C'est **Richard Feynman** qui développera une technique plus simple, basée sur des diagrammes qui portent son nom et qui calculent les probabilités du processus étudié. En effet, on peut toujours calculer un processus compliqué au moyen de diagrammes élémentaires qui s'imbriquent les uns dans les autres comme des pièces de Lego.*

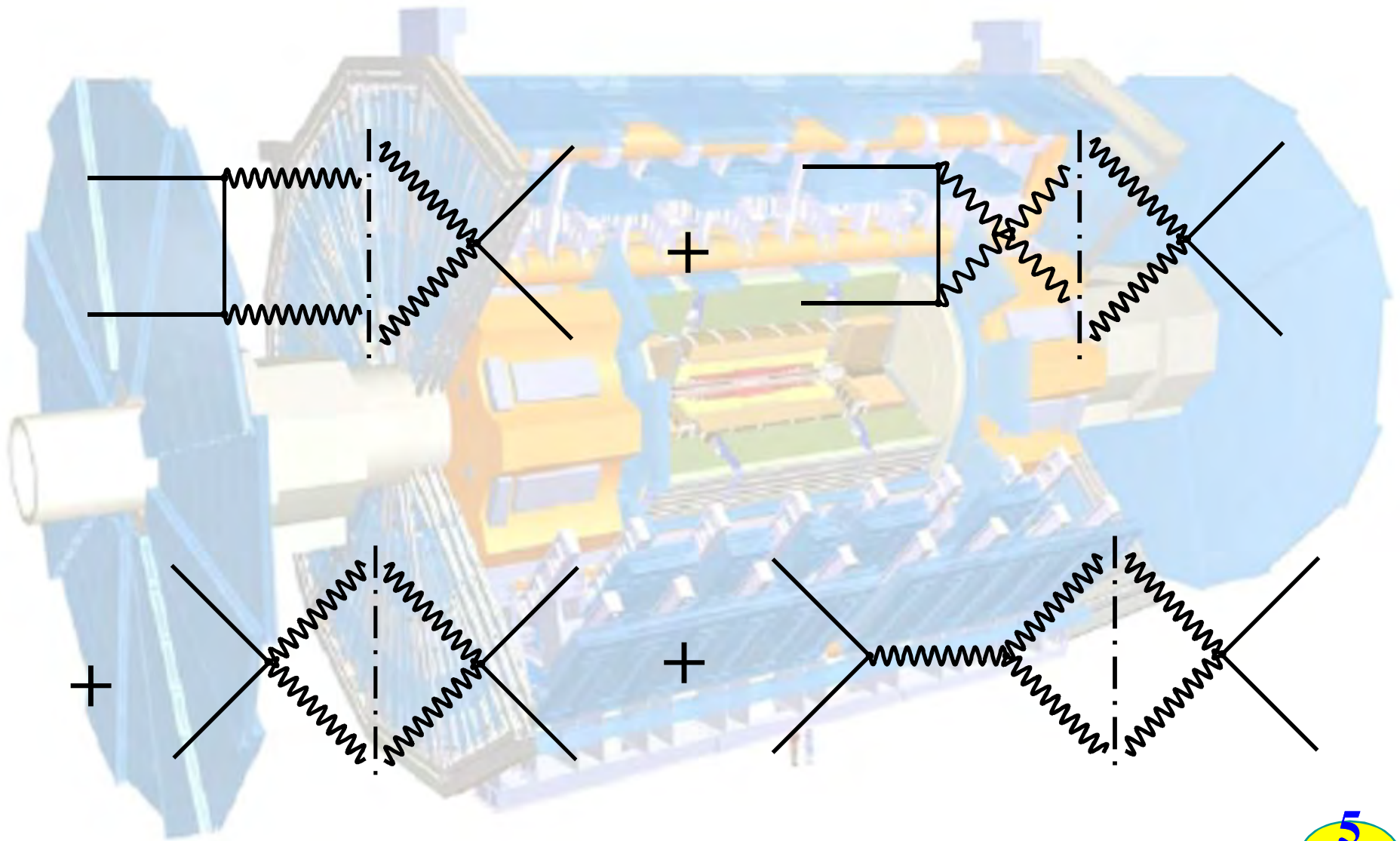
Diagrammes de Feynman

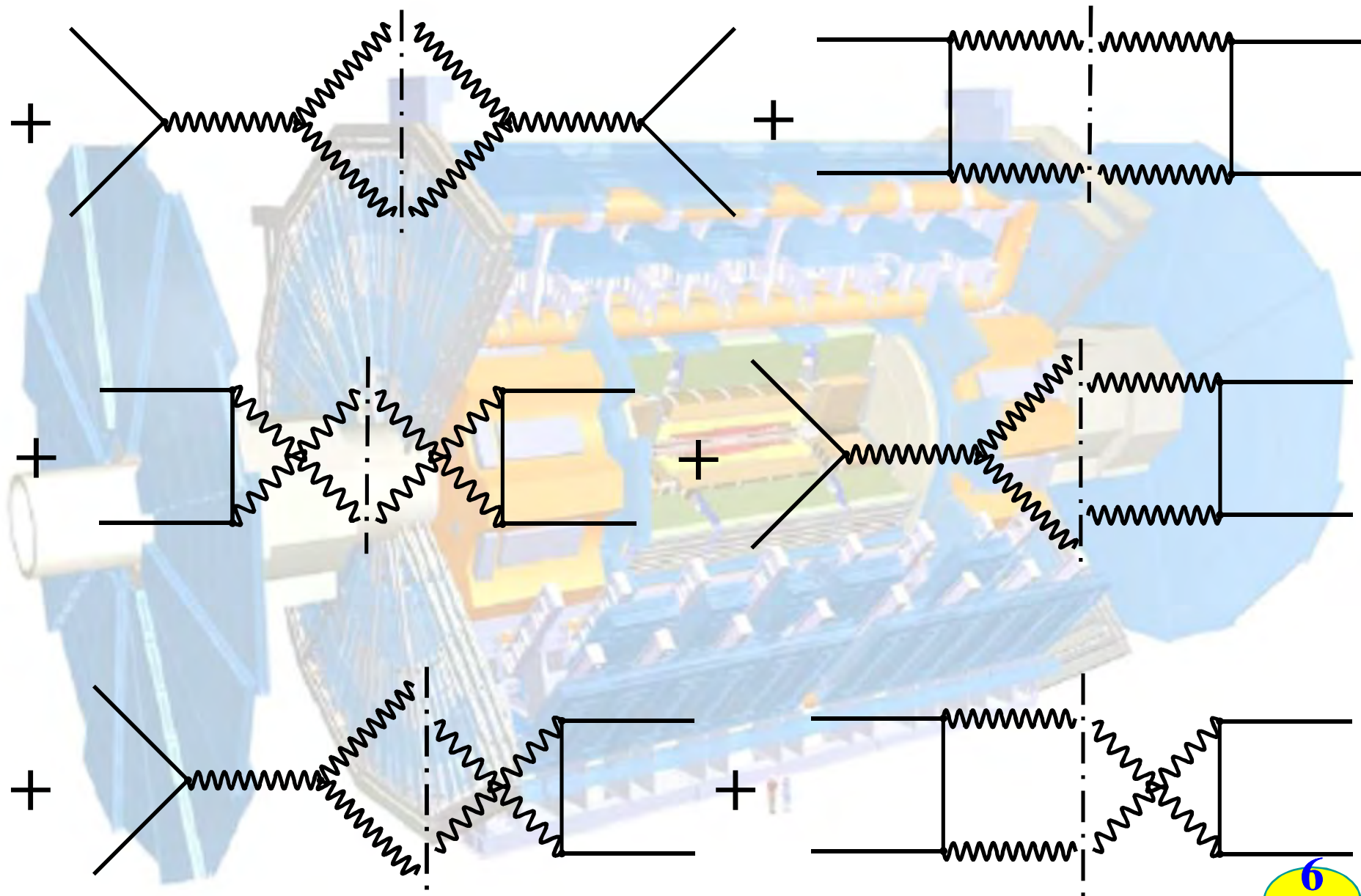
Un diagramme de **Feynman** est une représentation symbolique permettant de faire des calculs en théorie quantique des champs perturbative. Ces représentations, inventées par **Feynman** dans les années **1940**, permettent de visualiser les interactions entre les particules élémentaires.

Les diagrammes de **Feynman** possibles qui contribuent dans le calcul d'amplitude de transition de notre processus sont:

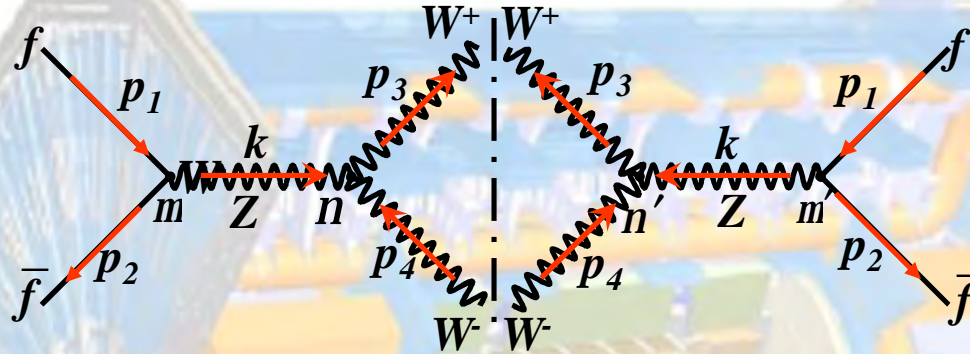


Les couplages possibles :





Contribution du premier diagramme :



L'amplitude du premier diagramme:

$$\begin{aligned}
 M_1 = & \bar{v}(p_2, s) \frac{ie}{\sin 2\theta_W} \left\{ (\gamma_\mu - \frac{i}{2} k^\alpha \theta_{\mu\alpha\beta} p_1^\beta) (c_{V,f} - c_{A,f} \gamma_5) - \frac{i}{2} \theta_{\mu\alpha} m_f [p_1^\alpha (c_{V,f} - c_{A,f} \gamma_5) \right. \\
 & \left. - p_2^\alpha (c_{V,f} + c_{A,f} \gamma_5)] \right\} u(p_1, s) \frac{i}{k^2 - M_Z^2} \left(-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{M_Z^2} \right) ie \cot \theta_W \{ g_{\nu\sigma} (k + p_4)_\rho \\
 & - g_{\rho\sigma} (p_4 - p_3)_\nu - g_{\rho\nu} (p_3 + k)_\sigma + \frac{i}{2} M_W^2 [\theta_{\nu\sigma} k_\rho + \theta_{\nu\rho} k_\sigma + g_{\nu\sigma} (\theta k)_\rho - g_{\sigma\rho} (\theta k)_\nu \\
 & + g_{\rho\nu} (\theta k)_\sigma] - \frac{i}{4} M_Z^2 [\theta_{\nu\sigma} (k + p_4)_\rho - \theta_{\sigma\rho} (p_4 - p_3)_\nu - \theta_{\rho\nu} (p_3 + k)_\sigma + 2g_{\nu\sigma} (\theta p_3)_\rho \\
 & - 2g_{\sigma\rho} (\theta k)_\nu + 2g_{\rho\nu} (\theta p_4)_\sigma] \} \varepsilon^\rho(p_3) \varepsilon^{*\sigma}(p_4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_1^* = & \bar{u}(p_1, s) \left\{ \frac{i}{2} \theta_{\mu'\alpha'} m_f [p_1^{\alpha'} (c'_{V,f} - c'_{A,f} \gamma_5^+) - p_2^{\alpha'} (c'_{V,f} + c'_{A,f} \gamma_5^+)] + (\gamma_{\mu'}^+ \right. \\
& + \frac{i}{2} k^{\alpha'} \theta_{\mu'\alpha'\beta'} p_1^{\beta'} (c'_{V,f} - c'_{A,f} \gamma_5^+) \left. \right\} v(p_2, s) \frac{-ie}{\sin 2\theta_W} \frac{-i}{k^2 - M_Z^2} (-g^{\mu'\nu'} \\
& + \frac{k^{\mu'} k^{\nu'}}{M_Z^2}) (-i) e \cot \theta_W \{ g_{\nu'\sigma'} (k + p_4)_{\rho'} - g_{\rho'\sigma'} (p_4 - p_3)_{\nu'} - g_{\rho'\nu'} (p_3 + k)_{\sigma'} \\
& - \frac{i}{2} M_W^2 [\theta_{\nu'\sigma'} k_{\rho'} + \theta_{\nu'\rho'} k_{\sigma'} + g_{\nu'\sigma'} (\theta k)_{\rho'} - g_{\sigma'\rho'} (\theta k)_{\nu'} + g_{\rho'\nu'} (\theta k)_{\sigma'}] \\
& + \frac{i}{4} M_Z^2 [\theta_{\nu'\sigma'} (k + p_4)_{\rho'} - \theta_{\sigma'\rho'} (p_4 - p_3)_{\nu'} - \theta_{\rho'\nu'} (p_3 + k)_{\sigma'} + 2g_{\nu'\sigma'} (\theta p_3)_{\rho'} \\
& - 2g_{\sigma'\rho'} (\theta k)_{\nu'} + 2g_{\rho'\nu'} (\theta p_4)_{\sigma'}] \} \varepsilon^{*\rho'}(p_3) \varepsilon^{\sigma'}(p_4)
\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés suivant :

$$(\theta k)_{\sigma} = \theta_{\sigma\mu} k^{\mu}$$

$$p\theta k = p^{\sigma} \theta_{\sigma\mu} k^{\mu}$$

$$\theta_{\mu\alpha\beta} = \theta_{\mu\alpha}\gamma_{\beta} + \theta_{\beta\mu}\gamma_{\alpha} + \theta_{\alpha\beta}\gamma_{\mu}$$

On remarque que les termes $M_{1\mu\nu}^2 M_{1\mu'\nu'}^{*2}$, $M_{1\mu\nu}^3 M_{1\mu'\nu'}^{*2}$ et $M_{1\mu\nu}^3 M_{1\mu'\nu'}^{*3}$ rentrant dans le calcul sont d'ordre θ^2 , et les termes $M_{1\mu\nu}^1 M_{1\mu'\nu'}^{*3}$, $M_{1\mu\nu}^3 M_{1\mu'\nu'}^{*1}$ sont nuls.

$$c_M^{\mu\nu} c_{M^*}^{\mu'\nu'} M_{1\mu\nu}^1 M_{1\mu'\nu'}^{*1} = \bar{m}_1$$

$$\sum_{spin,pol} |\bar{m}_1|^2 = \sum_{spin,pol} c_M^{\mu\nu} c_{M^*}^{\mu'\nu'} \mathfrak{R}_{\nu\sigma\rho}(\theta) \mathfrak{R}_{\nu'\sigma'\rho'}(\theta) \varepsilon^\rho(p_3) \varepsilon^{*\sigma}(p_4) \varepsilon^{*\rho'}(p_3) \varepsilon^{\sigma'}(p_4) \bar{v}(p_2, s) \gamma_\mu (c_{V,f} - c_{A,f} \gamma_5) u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) (c'_{V,f} - c'_{A,f} \gamma_5^+) \gamma_{\mu'}^+ [\bar{v}(p_2, s)]^+$$

$$\sum_{pol} \varepsilon^\rho(p_3) \varepsilon^{*\sigma}(p_4) = -g^{\rho\sigma} + \frac{p_3^\rho p_4^\sigma}{M_W^2}$$

$$C^{\mu\nu\mu'\nu'} = c_M^{\mu\nu} c_{M^*}^{\mu'\nu'}$$

$$\mathfrak{R}_{\nu\sigma\rho\nu'\sigma'\rho'}(\theta) = \mathfrak{R}_{\nu\sigma\rho}(\theta) \mathfrak{R}_{\nu'\sigma'\rho'}(\theta)$$

$$\varepsilon^{\rho\sigma\rho'\sigma'}(p_3, p_4) = \varepsilon^\rho(p_3) \varepsilon^{*\sigma}(p_4) \varepsilon^{*\rho'}(p_3) \varepsilon^{\sigma'}(p_4)$$

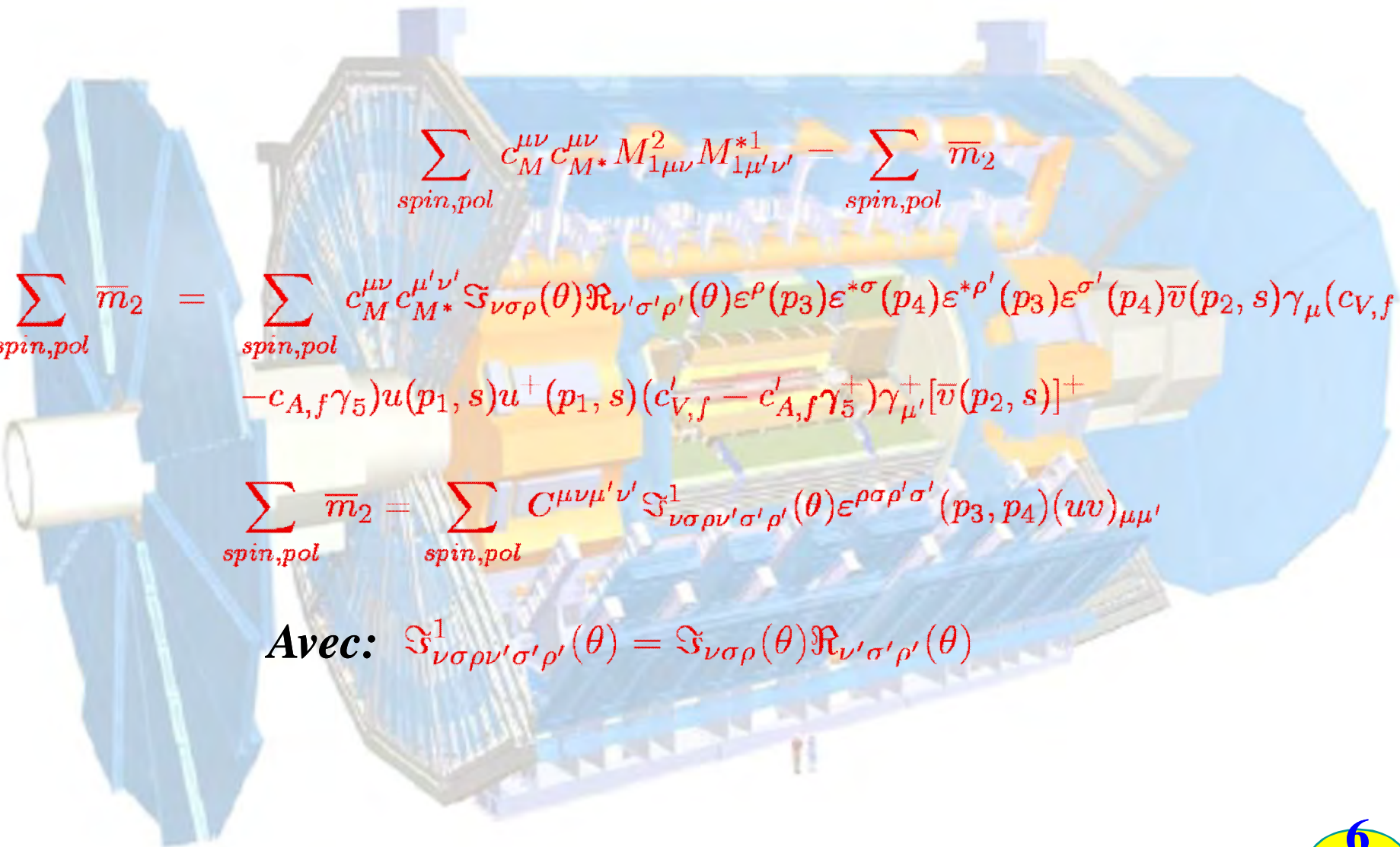
$$(uv)_{\mu\mu'} = \bar{v}(p_2, s) \gamma_\mu (c_{V,f} - c_{A,f} \gamma_5) u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) (c'_{V,f} - c'_{A,f} \gamma_5^+) \gamma_{\mu'}^+ [\bar{v}(p_2, s)]^+$$

$$\sum_{spin,pol} |\bar{m}_1|^2 = \sum_{spin,pol} C^{\mu\nu\mu'\nu'} \mathfrak{R}_{\nu\sigma\rho\nu'\sigma'\rho'}(\theta) \varepsilon^{\rho\sigma\rho'\sigma'}(p_3, p_4) (uv)_{\mu\mu'}$$

$$\mathfrak{R}_{\nu\sigma\rho}(\theta) = g_{\nu\sigma} (k + p_4)_\rho - g_{\rho\sigma} (p_4 - p_3)_\nu - g_{\rho\nu} (p_3 + k)_\sigma$$

$$\begin{aligned}
\sum_{spin,pol} |\bar{m}_1|^2 = & (c_{V,f}^2 + c_{A,f}^2) \frac{e^4 \cot^2 \theta_W}{\sin^2 2\theta_W} \frac{1}{(s - M_Z^2)^2} \left\{ \frac{1}{16M_Z^4 M_W^4} (4s^6 + 2s(-4s^2 m_f^2 \right. \\
& + s^2(s(-5 + 2s) + (22 - 4s)m_f^2)M_W^2 - s(s(-13 + 4s) + (38 \\
& - 8s)m_f^2)M_W^4 - 2(4 + 9s)(s - 2m_f^2)M_W^6) - (s^2(6s^3 - 2st(t + u) \\
& + (9t - 5u)(t + u) + (-22t + 6u + 2s(-6s + 3t + u))m_f^2 - 4(-2 \\
& + s)m_f^4) - 4s(14s^3 + 2(7t - 3u)(t + u) - 2s^2(-6 + 3t + u) \\
& + s(13t^2 + 2t(11 + u) - u(6 + 11u)) + 4m_f^2(-9t - s(4 + 11s \\
& + 7t - 5u) + u + (4 + s)m_f^2))M_W^2 + (40s^3 + 4s^2(5 + 7t - 5u) \\
& + (t + u)(t + 3u) + 2s(3t(6 + 5t) + (-2 + 5t)u - 10u^2) - 2(3t \\
& + s(16 + 60s + 35t - 15u) + 5u)m_f^2 + 4(2 + 5s)m_f^4)M_W^4 - 2(3t \\
& + s(8 + 38s + 35t - 15u) + 5u - 4(2 + 23s)m_f^2)M_W^6 + 4(2 \\
& + 5s)M_W^8)M_Z^2 + (s(6t^2 + s(s(-4 + 31s) + 9t^2) + 4tu - (6 + 13s)u^2 \\
& - 2(8t + s(31s + 9t - 13u) - 4u)m_f^2 - 4(-1 + s)m_f^4) - 2(19s^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +s^4 + 6t^2 + 2tu - 6u^2 - s(t(-8 + u) + u(4 + 3u)) + s^2(2t^2 \\
& + (-10 + u)(1 + u) + t(5 + 3u)) + (-2s^3 - s^2(34 + 7t + 5u) \\
& + s(4 + t + 7u) + 2(-t(7 + 2t) + (5 + t)u + u^2))m_f^2 + (2 - 4s \\
& + 6s^2 + 6t - 6u)m_f^4)M_W^2 + (14s^3 - 2t^3 - 6t^2(-2 + u) + 4t(11 \\
& + u) + 4u(1 + u)(-3 + 2u) + 2s(-18 + 2t^2 + 3t(-3 + u) + u + u^2) \\
& + s^2(t^2 - 2(-5 + u)u + t(14 + u)) + m_f^2(8(4 - 5t + 2u) + 12(t \\
& - u)(t + 2u) + s^2(-52 - 3t + 3u) - 2s(-4 + t^2 + (5 - 2u)u + t(7 \\
& + u)) + 6(2 - 3t + s(2 + t - u) + 3u^2)m_f^2))M_W^4 - (s^2(40 + 3t \\
& - 3u) + 4(7 + 5t + u) - 12(t - u) + 2s(14 + 2t^2 + (5 - 4u)u \\
& + t(7 + 2u)) - 2(s(40 - 9t - 9u) + 4(t - u)(t + 2u) + 6(8 - 3t \\
& + 3u))m_f^2 + 24(t - u)m_f^4)M_W^6 + 2(6 - 9t + 2s(7 + 3t - 3u) + 9u \\
& - 4(4 + 3t - 3u)m_f^2)M_W^8)M_Z^4\}
\end{aligned}$$



$$\sum_{spin,pol} c_M^{\mu\nu} c_{M^*}^{\mu\nu} M_{1\mu\nu}^2 M_{1\mu'\nu'}^{*1} = \sum_{spin,pol} \bar{m}_2$$

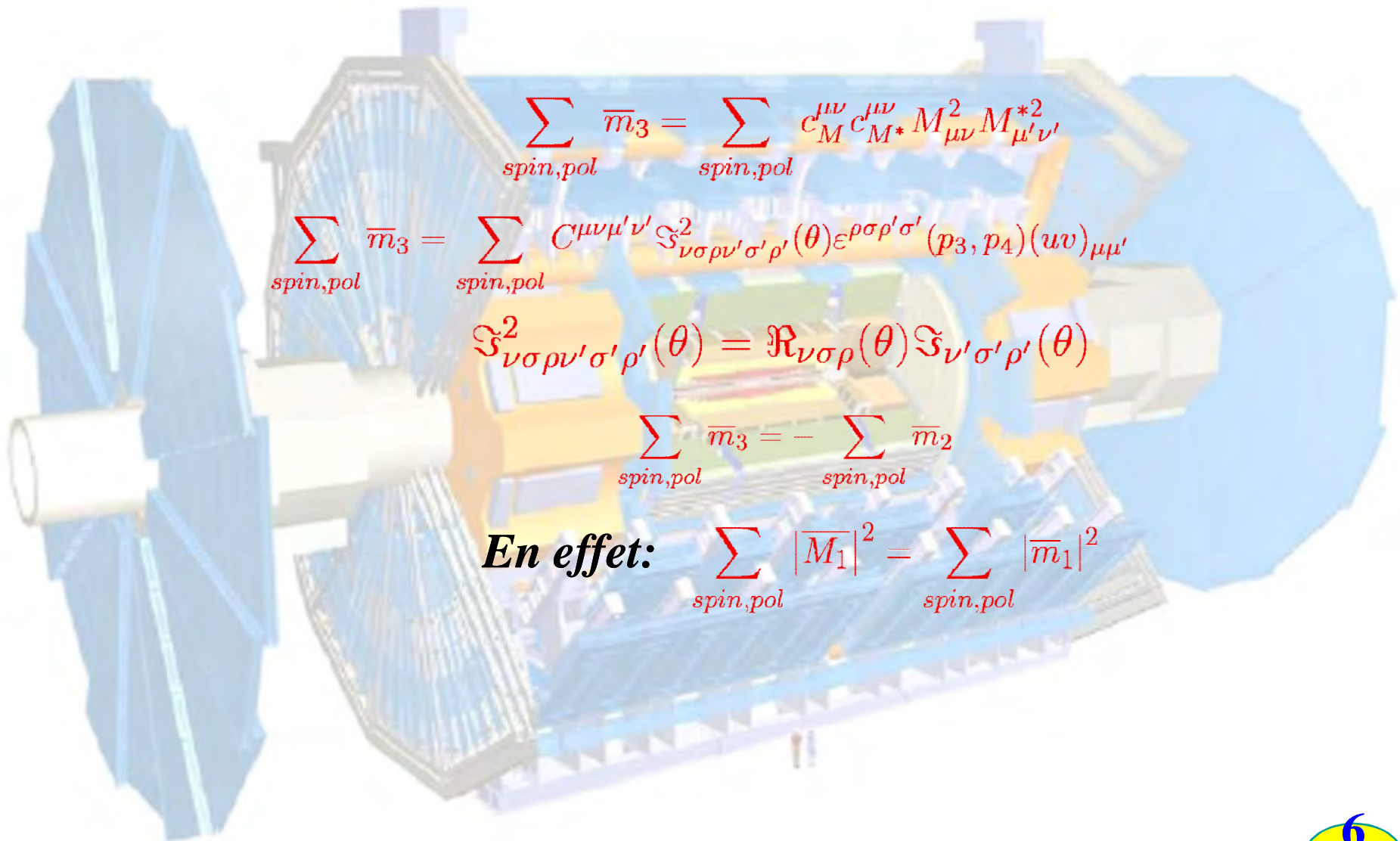
$$\sum_{spin,pol} \bar{m}_2 = \sum_{spin,pol} c_M^{\mu\nu} c_{M^*}^{\mu'\nu'} \mathfrak{S}_{\nu\sigma\rho}(\theta) \mathcal{R}_{\nu'\sigma'\rho'}(\theta) \varepsilon^\rho(p_3) \varepsilon^{*\sigma}(p_4) \varepsilon^{*\rho'}(p_3) \varepsilon^{\sigma'}(p_4) \bar{v}(p_2, s) \gamma_\mu (c_{V,f} - c_{A,f} \gamma_5) u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) (c'_{V,f} - c'_{A,f} \gamma_5^+) \gamma_{\mu'}^+ [\bar{v}(p_2, s)]^+$$

$$\sum_{spin,pol} \bar{m}_2 = \sum_{spin,pol} c^{\mu\nu\mu'\nu'} \mathfrak{S}_{\nu\sigma\rho\nu'\sigma'\rho'}^1(\theta) \varepsilon^{\rho\sigma\rho'\sigma'}(p_3, p_4) (uv)_{\mu\mu'}$$

Avec: $\mathfrak{S}_{\nu\sigma\rho\nu'\sigma'\rho'}^1(\theta) = \mathfrak{S}_{\nu\sigma\rho}(\theta) \mathcal{R}_{\nu'\sigma'\rho'}(\theta)$

$$\begin{aligned}
\sum_{spin,pol} \bar{m}_2 = & (c_{V,f}^2 + c_{A,f}^2) \frac{e^4 \cot^2 \theta_W}{\sin^2 2\theta_W} \frac{1}{(s - M_Z^2)^2} \{ 64M_W^4 M_Z^4 (-2M_W^2 (M_W^6 M_Z^6 (4(3s^2 \\
& -t + u + s(3t + u) - (s(3 + 2t - 2u) + 2(-6 + 5t + 7u))M_Z^2 \\
& - 8M_W^8 (2sM_Z^2 - 3M_Z^4) + s^2(2s^3(2 + s) + (-3s^3 + 2(t^2 - u^2) \\
& + s(-5t^2 - 4tu + u^2))M_Z^2 - 3(s^2 + 3t^2 - 3u^2)M_Z^4 + 2M_W^4 (26s^4 \\
& - 2(10s^3 - t^2 - s^2(13t - u) + u^2 + s(-3t + 2t^2 + 3u + 2tu))M_Z^2 \\
& + ((2 + s)t^2 - (4 + 2s^2 + s(-20 + u) - 4u)u + 2t(-4 - 7s + s^2 \\
& + 3u))M_Z^4) + sM_W^2 (-27s^4 + 2(3s^3 - 3t^2 + 3u^2 + s^2(-2 + 7t \\
& + u) + 2s(-t + 5t^2 + u + 3tu - 2u^2))M_Z^2 + 2(6s^2 + 8t^2 - 2tu \\
& - 9u^2 + s(9t - t^2 + (-9 + u)u))M_Z^4) - 2m_f^4 M_Z^2 (4s^3 + 4M_W^4 (2s \\
& - 3M_Z^2) + 3sM_W^2 (-4s + M_Z^2)) - 2m_f^2 (8M_W^6 (2sM_Z^2 - 3M_Z^4) \\
& + s^2(2s^2(2 + s) - (3s^2 - 2t + 2u + s(7t + u))M_Z^2 - 3(s + 3u \\
& - 3t + M_Z^4) + 2M_W^4 (26s^3 - 2(14s^2 - t + u + s(3t + u))M_Z^2 + (-6 \\
& + 5t + s(3 + t - u) + 7u)M_Z^4) + sM_W^2 (-27s^3 + 2(7s^2 - 3t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +s(-2 + 13t - u) + 3u)M_Z^2 - 2(-7t + s(-6 + t - u) + 10u)M_Z^4))) \\
& +M_W^2(4s^2(-t + u)M_W^8 M_Z^2 + 16(t - u)m_f^4 M_W^2 M_Z^4 - 2M_W^6 M_Z^2(-s(s^3 \\
& +2s^2(t - u) + 24(-t + u) + s(-8 + t^2 - u^2)) + (s^9 + 56(-t \\
& +u))M_Z^2 + s^2(-6s^3 + s(-8s + 9s^2 + t^2 - u^2))M_Z^2 - 4(2s^2 - t^2 \\
& +u^2)M_Z^4) - 2sM_W^2(s^3(-3 + 2s) + s(33s^2 + t^2 + s(-4 + t - u) \\
& -u^2))M_Z^2 + 2(-17s^2 - 7t^2 + 2s(2 + t - u) + tu + 6u^2)M_Z^4) \\
& +2M_W^4(12s^4 - s(12s^3 + s^4 + 2s(t - u) + s^2(-44 + t^2 - u^2) \\
& +12(-t^2 + u^2))M_Z^2 + (-28s^2 + s^{10} + s(8 - 26t + 26u) + 28(-t^2 \\
& +u^2))M_Z^4) - 2m_f^2(-2sM_W^6 M_Z^2(8 - s^2 + s(-t + u)s^7 M_W^2) + s^2(-2s^2 \\
& +s(-8 + 9s + t - u)M_Z^2 - 4(2s - t + u)M_Z^4) + 2M_W^4(12s^3 - s(-44s \\
& +s^3 + s^2(12 + t - u) + 12(-t + u))M_Z^2 + (-28s + s^9 + 32(-t \\
& +u))M_Z^4) + 2M_W^2(s^3 - 2s^4 + s^2(4 - 33s - t + u)M_Z^2 + (34s^2 \\
& +13s(t - u) + 2(t^2 - u^2))M_Z^4)))}
\end{aligned}$$



$$\sum_{spin,pol} \bar{m}_3 = \sum_{spin,pol} c_M^{\mu\nu} c_{M^*}^{\mu\nu} M_{\mu\nu}^2 M_{\mu'\nu'}^{*2}$$

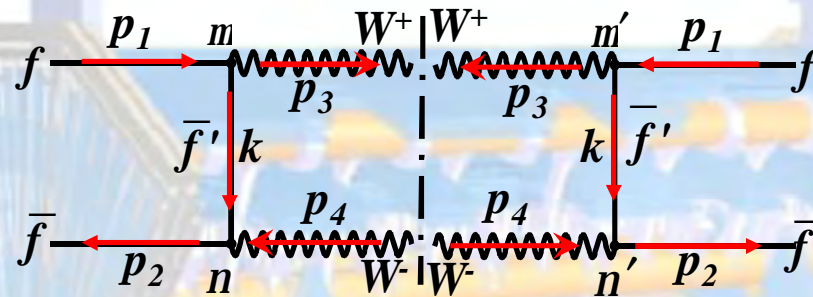
$$\sum_{spin,pol} \bar{m}_3 = \sum_{spin,pol} C^{\mu\nu\mu'\nu'} \mathfrak{S}_{\nu\sigma\rho\nu'\sigma'\rho'}^2(\theta) \epsilon^{\rho\sigma\rho'\sigma'}(p_3, p_4) (uv)_{\mu\mu'}$$

$$\mathfrak{S}_{\nu\sigma\rho\nu'\sigma'\rho'}^2(\theta) = \mathfrak{R}_{\nu\sigma\rho}(\theta) \mathfrak{S}_{\nu'\sigma'\rho'}(\theta)$$

$$\sum_{spin,pol} \bar{m}_3 = - \sum_{spin,pol} \bar{m}_2$$

En effet:
$$\sum_{spin,pol} |\bar{M}_1|^2 = \sum_{spin,pol} |\bar{m}_1|^2$$

Contribution du deuxième diagramme :



$$M_2 = \bar{v}(p_2, s) A \left\{ [\gamma_\nu - \frac{i}{2} \theta_{\nu\alpha\beta} p_4^\alpha k^\beta] (1 - \gamma_5) - \frac{i}{2} \theta_{\nu\lambda} [B_1 k^\lambda (1 - \gamma_5) - B_2 k^\lambda (1 + \gamma_5)] \right\} \frac{-i}{\not{k} - m} A' \left\{ [\gamma_\mu - \frac{i}{2} \theta_{\mu\rho\sigma} p_3^\rho p_1^\sigma] (1 - \gamma_5) - \frac{i}{2} \theta_{\mu\eta} [B'_1 p_1^\eta (1 - \gamma_5) - B'_2 k^\eta (1 + \gamma_5)] \right\} u(p_1, s) \varepsilon^\mu(p_3) \varepsilon^{*\nu}(p_4)$$

$$X_\nu = [\gamma_\nu - \frac{i}{2} \theta_{\nu\alpha\beta} p_4^\alpha k^\beta] (1 - \gamma_5) A$$

$$Y_\nu = \frac{i}{2} \theta_{\nu\lambda} [B_1 k^\lambda (1 - \gamma_5) - B_2 k^\lambda (1 + \gamma_5)] A$$

$$Z_\mu = [\gamma_\mu - \frac{i}{2} \theta_{\mu\rho\sigma} p_3^\rho p_1^\sigma] (1 - \gamma_5) A'$$

$$T_\mu = \frac{i}{2} \theta_{\mu\eta} [B'_1 p_1^\eta (1 - \gamma_5) - B'_2 k^\eta (1 + \gamma_5)] A'$$

$$A = \frac{ie}{2\sqrt{2}\sin\theta_W} \begin{pmatrix} V_{\bar{f}} \\ V_{\bar{f}'}^* \end{pmatrix}$$

$$A' = \frac{ie}{2\sqrt{2}\sin\theta_W} \begin{pmatrix} V_f \\ V_{f'}^* \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} m_{\bar{f}} \\ m_{\bar{f}'}^* \end{pmatrix}, B_1' = \begin{pmatrix} m_{\bar{f}'} \\ m_f \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} m_{\bar{f}'} \\ m_{\bar{f}} \end{pmatrix}, B_2' = \begin{pmatrix} m_f \\ m_{\bar{f}'}^* \end{pmatrix}$$

$$V_f = \begin{cases} 1 & \text{si } f \text{ est un lepton} \\ V_{CKM} & \text{si } f \text{ est un quark} \end{cases}$$

$$M_2 = \bar{v}(p_2, s)(X_\nu + Y_\nu) \frac{-i}{\not{k} - m} (Z_\mu + T_\mu) u(p_1, s) \varepsilon^\mu(p_3) \varepsilon^{*\nu}(p_4)$$

$$|\overline{M_2}|^2 = \bar{v}(p_2, s)(X_\nu + Y_\nu) \frac{-i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2} (Z_\mu + T_\mu) u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) (Z_{\mu'} + T_{\mu'}) \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2} (X_{\nu'} + Y_{\nu'}) [\bar{v}(p_2, s)]^\dagger \varepsilon^\mu(p_3) \varepsilon^{*\nu}(p_4) \varepsilon^{*\mu'}(p_3) \varepsilon^{\nu'}(p_4)$$

$$|\overline{M_2}|^2 = \frac{1}{k^2} \Lambda^{\mu\nu\mu'\nu'} \{ T_{\mu\nu\mu'\nu'}^1 + T_{\mu\nu\mu'\nu'}^2 + T_{\mu\nu\mu'\nu'}^3 + T_{\mu\nu\mu'\nu'}^4 + T_{\mu\nu\mu'\nu'}^5 + T_{\mu\nu\mu'\nu'}^6 + T_{\mu\nu\mu'\nu'}^7 + T_{\mu\nu\mu'\nu'}^8 + T_{\mu\nu\mu'\nu'}^9 + T_{\mu\nu\mu'\nu'}^{10} + T_{\mu\nu\mu'\nu'}^{11} + T_{\mu\nu\mu'\nu'}^{12} + T_{\mu\nu\mu'\nu'}^{13} + T_{\mu\nu\mu'\nu'}^{14} + T_{\mu\nu\mu'\nu'}^{15} + T_{\mu\nu\mu'\nu'}^{16} \}$$

$$T_{\mu\nu\mu'\nu'}^1 = \bar{v}(p_2, s) X_\nu \not{k} Z_\mu u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) Z_{\mu'} \not{k} X_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^\dagger$$

$$T_{\mu\nu\mu'\nu'}^2 = \bar{v}(p_2, s) X_\nu \not{k} Z_\mu u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) Z_{\mu'} \not{k} Y_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^\dagger$$

$$T_{\mu\nu\mu'\nu'}^3 = \bar{v}(p_2, s) X_\nu \not{k} Z_\mu u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) T_{\mu'} \not{k} X_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^\dagger$$

$$T_{\mu\nu\mu'\nu'}^4 = \bar{v}(p_2, s) X_\nu \not{k} Z_\mu u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) T_{\mu'} \not{k} Y_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^\dagger$$

$$T_{\mu\nu\mu'\nu'}^5 = \bar{v}(p_2, s) Y_\nu \not{k} Z_\mu u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) Z_{\mu'} \not{k} X_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^\dagger$$

$$T_{\mu\nu\mu'\nu'}^6 = \bar{v}(p_2, s) Y_\nu \not{k} Z_\mu u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) Z_{\mu'} \not{k} Y_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^\dagger$$

$$T_{\mu\nu\mu'\nu'}^7 = \bar{v}(p_2, s) Y_\nu \not{k} Z_\mu u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) T_{\mu'} \not{k} X_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^\dagger$$

$$T_{\mu\nu\mu'\nu'}^8 = \bar{v}(p_2, s) Y_\nu \not{k} Z_\mu u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) T_{\mu'} \not{k} Y_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^\dagger$$

$$T_{\mu\nu\mu'\nu'}^9 = \bar{v}(p_2, s) X_\nu \not{k} T_\mu u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) Z_{\mu'} \not{k} X_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^\dagger$$

$$T_{\mu\nu\mu'\nu'}^{10} = \bar{v}(p_2, s) X_\nu \not{k} T_\mu u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) Z_{\mu'} \not{k} Y_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^\dagger$$

$$T_{\mu\nu\mu'\nu'}^{11} = \bar{v}(p_2, s) X_\nu \not{k} T_\mu u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) T_{\mu'} \not{k} X_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^\dagger$$

$$T_{\mu\nu\mu'\nu'}^{12} = \bar{v}(p_2, s) X_\nu \not{k} T_\mu u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) T_{\mu'} \not{k} Y_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^\dagger$$

$$T_{\mu\nu\mu'\nu'}^{13} = \bar{v}(p_2, s) Y_\nu \not{k} T_\mu u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) Z_{\mu'} \not{k} X_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^+$$

$$T_{\mu\nu\mu'\nu'}^{14} = \bar{v}(p_2, s) Y_\nu \not{k} T_\mu u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) Z_{\mu'} \not{k} Y_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^+$$

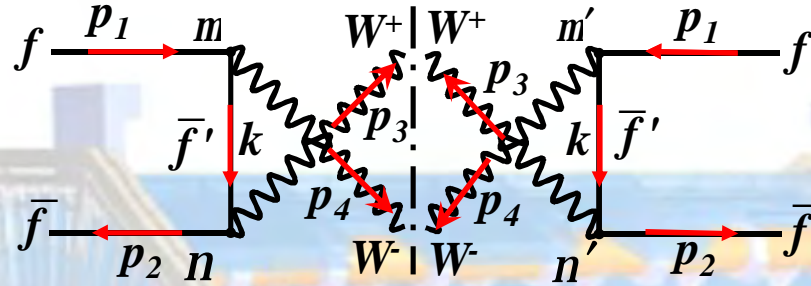
$$T_{\mu\nu\mu'\nu'}^{15} = \bar{v}(p_2, s) Y_\nu \not{k} T_\mu u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) T_{\mu'} \not{k} X_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^+$$

$$T_{\mu\nu\mu'\nu'}^{16} = \bar{v}(p_2, s) Y_\nu \not{k} T_\mu u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) T_{\mu'} \not{k} Y_{\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^+$$

Avec: $\Lambda^{\mu\nu\mu'\nu'} = \varepsilon^\mu(p_3) \varepsilon^{*\nu}(p_4) + \varepsilon^{*\mu'}(p_3) \varepsilon^{\nu'}(p_4)$

$$\begin{aligned} \sum_{spin, pol} |\overline{M}_2|^2 &= \frac{32}{m_f^2} \left(\frac{s}{2} - m_f^2 + \frac{1}{t} (-m_f^2 + M_W^2 - t) \left(\frac{s}{2} - \frac{1}{2} (3m_f^2 + M_W^2 - u) \right) \right. \\ &+ \frac{1}{tm_f^2 M_W^2} (4m_f^8 + 4(-1 + s - 6t + 2u)M_W^6 - 4M_W^8 - 4m_f^6(-3 + s \\ &+ 3t + u - 5M_W^2) + 2m_f^4(-3s + 5t + 4st + 6t^2 - 3u + 2tu - 2(3 + s \\ &+ 13t + u)M_W^2 + 4M_W^4 + 2tM_W^2) + M_W^4(6t + 28t^2 + s(-2 + 24t \\ &- 2u + 4tu + 4tM_W^2) + t(s^2 + 2st - 5t^2 + 2tu + 4t^2u - u^2 + 4tuM_W^2) \\ &- 2M_W^2(t(s - t + 6st - u + 8tu) + t^2(t + u)M_W^2) - 2m_f^2(t(3s - 3t \\ &+ 2st + 2t^2 + u + 6tu) - 2(1 + s - 10t)M_W^4 + 14M_W^6 + 2(t + u)tM_W^2 \\ &\left. - 2M_W^2(2s - 3t + 4st + 6t^2 + 2u + 3tu + 2tM_W^2)) \right) \end{aligned}$$

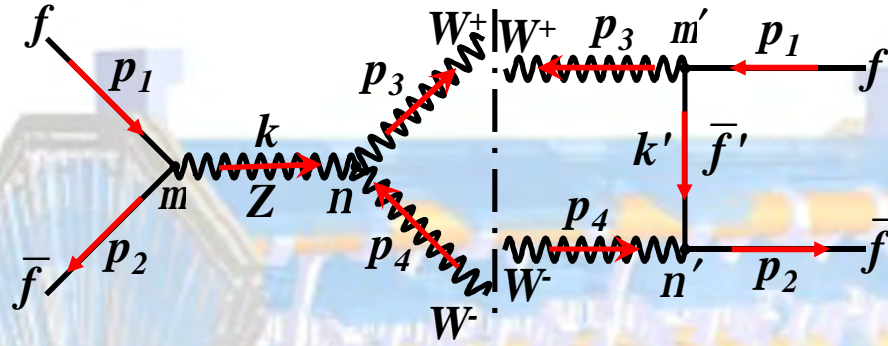
Contribution du troisième diagramme :



$$M_3 = \bar{v}(p_2, s) A \left\{ [\gamma_\nu - \frac{i}{2} \theta_{\nu\alpha\beta} p_3^\alpha k^\beta] (1 - \gamma_5) - \frac{i}{2} \theta_{\nu\lambda} [B_1 k^\lambda (1 - \gamma_5) - B_2 k^\lambda (1 + \gamma_5)] \right\} \frac{-i}{\not{k} - m} A' \left\{ [\gamma_\mu - \frac{i}{2} \theta_{\mu\rho\sigma} p_4^\rho p_1^\sigma] (1 - \gamma_5) - \frac{i}{2} \theta_{\mu\eta} [B'_1 p_1^\eta (1 - \gamma_5) - B'_2 k^\eta (1 + \gamma_5)] \right\} u(p_1, s) \varepsilon^\nu(p_3) \varepsilon^{*\mu}(p_4)$$

$$\sum_{spin, pol} |\overline{M}_3|^2 = \frac{32}{m_f^2} \left(\frac{s}{2} - m_f^2 + \frac{1}{u} (-m_f^2 + M_W^2 - u) \left(\frac{s}{2} - \frac{1}{2} (3m_f^2 + M_W^2 - t) \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{um_f^2 M_W^2} (4m_f^8 + 4(-1 + s - 6u + 2t) M_W^6 - 4M_W^8 - 4m_f^6 (-3 + s + 3u + t - 5M_W^2)) + 2m_f^4 (-3s + 5u + 4su + 6u^2 - 3t + 2tu - 2(3 + s + 13u + t) M_W^2 + 4M_W^4 + 2uM_W^2) + M_W^4 (6u + 28u^2 + s(-2 + 24u) - 2t + 4tu + 4uM_W^2) + u(s^2 + 2su - 5u^2 + 2tu + 4u^2 t - t^2 + 4tuM_W^2) - 2M_W^2 (u(s - u + 6su - t + 8tu) + u2(t + u)M_W^2) - 2m_f^2 (u(3s - 3u + 2su + 2u^2 + t + 6tu) - 2(1 + s - 10u)M_W^4 + 14M_W^6 + 2(t + u)uM_W^2 - 2M_W^2(2s - 3u + 4su + 6u^2 + 2t + 3tu + 2uM_W^2)) \right)$$

Contribution du quatrième diagramme :



$$M_1 M_2^* = \frac{e^2 \cot \theta_W}{\sin 2\theta_W k'^2 (k^2 - M_Z^2)} \bar{v}(p_2, s) (M_{4\mu}^1 + M_{4\mu}^2) u(p_1, s) \left(-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{M_Z^2} \right) (M_{4\mu}^3 + M_{4\mu}^4 + M_{4\mu}^5) u^+(p_1, s) (M_{4\mu'}^{*1} + M_{4\mu'}^{*2}) \not{k} (M_{4\nu'}^{*3} + M_{4\nu'}^{*4}) [\bar{v}(p_2, s)] + Y^{\rho\sigma\mu'\nu'}$$

$$Y^{\rho\sigma\mu'\nu'} = \varepsilon^\rho(p_3) \varepsilon^{*\sigma}(p_4) \varepsilon^{*\mu'}(p_3) \varepsilon^{\nu'}(p_4)$$

$$M_{4\mu}^1 = \left(\gamma_\mu - \frac{i}{2} k^\alpha \theta_{\mu\alpha\beta} p_1^\beta \right) (c_{v,f} - c_{A,f} \gamma_5)$$

$$M_{4\mu}^2 = -\frac{i}{2} \theta_{\mu\alpha} m_f [p_1^\alpha (c_{v,f} - c_{A,f} \gamma_5) - p_2^\alpha (c_{v,f} + c_{A,f} \gamma_5)]$$

$$M_{4\mu}^3 = g_{\mu\nu} (k + p_4)_\rho - g_{\sigma\rho} (p_4 - p_3)_\nu - g_{\rho\nu} (k + p_3)_\sigma$$

$$M_{4\mu}^4 = \frac{i}{2} M_W^2 [\theta_{\nu\sigma} k_\rho + \theta_{\nu\rho} k_\sigma + g_{\nu\sigma} (\theta k)_\rho - g_{\sigma\rho} (\theta k)_\nu + g_{\rho\nu} (\theta k)_\sigma]$$

$$M_{4\mu}^5 = -\frac{i}{4} M_Z^2 [\theta_{\nu\sigma} (k + p_4)_\rho - \theta_{\sigma\rho} (p_4 - p_3)_\nu - \theta_{\rho\nu} (p_3 + k)_\sigma$$

$$+ 2g_{\nu\sigma} (\theta p_3)_\rho - 2g_{\sigma\rho} (\theta k)_\nu + 2g_{\rho\nu} (\theta p_4)_\sigma]$$

$$M_{4\mu'}^{*1} = \frac{i}{2} \theta_{\mu'\eta'} [B_1 p_1^{\eta'} (1 - \gamma_5^+) - B_2 k'^{\eta'} (1 + \gamma_5^+)]$$

$$M_{4\mu'}^{*2} = (1 - \gamma_5^+) [\gamma_{\mu'}^+ + \frac{i}{2} \theta_{\mu'\rho'\sigma'} p_3^{\rho'} p_1^{\sigma'}]$$

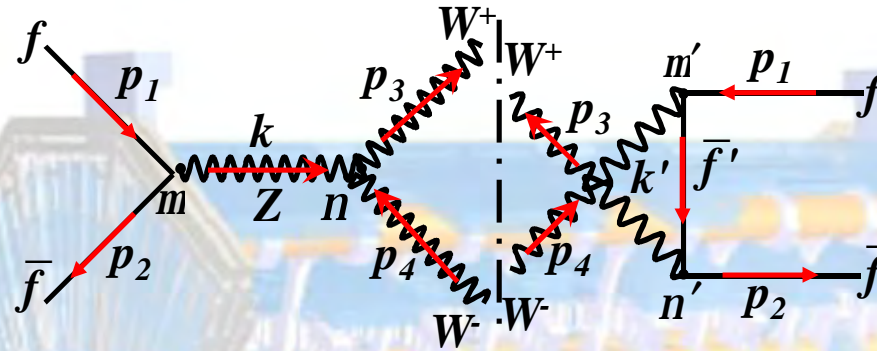
$$M_{4\mu'}^{*3} = \frac{i}{2} \theta_{\nu'\lambda'} [B_1 k'^{\lambda'} (1 - \gamma_5^+) - B_2 p_2^{\lambda'} (1 + \gamma_5^+)]$$

$$M_{4\mu'}^{*4} = (1 - \gamma_5^+) [\gamma_{\nu'}^+ + \frac{i}{2} \theta_{\nu'\alpha'\beta'} p_4^{\alpha'} k'^{\beta'}]$$

$$\sum_{spin, pol} M_1 M_2^* = 0$$

$\sum_{spin, pol} M_1 M_2^* = 0$, *car les termes de $M_1 M_2^*$ contient des termes en θ d'ordre 2 et /ou 3.*

Contribution du cinquième diagramme :



$$M_1 M_3^* = \frac{e^2 \cot \theta_W}{\sin 2\theta_W k'^2 (k^2 - M_Z^2)} \bar{v}(p_2, s) (M_{5\mu}^1 +) u(p_1, s) \left(-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{M_Z^2} \right) (M_{5\mu}^3 + M_{5\mu}^4 + M_{5\mu}^5) u^+(p_1, s) (M_{5\mu'}^{*1} + M_{5\mu'}^{*2}) \not{k} (M_{5\nu'}^{*3} + M_{5\nu'}^{*4}) [\bar{v}(p_2, s)]^+ Y^{\rho\sigma\mu'\nu'}$$

$$M_{5\mu}^1 = M_{4\mu}^1, \quad M_{5\mu}^2 = M_{4\mu}^2, \quad M_{5\mu}^3 = M_{4\mu}^3, \quad M_{5\mu}^4 = M_{4\mu}^4 \quad \text{et} \quad M_{5\mu}^5 = M_{4\mu}^5$$

$$M_{5\mu'}^{*1} = M_{4\mu'}^{*1} \quad \text{et} \quad M_{5\mu'}^{*3} = M_{4\mu'}^{*3}$$

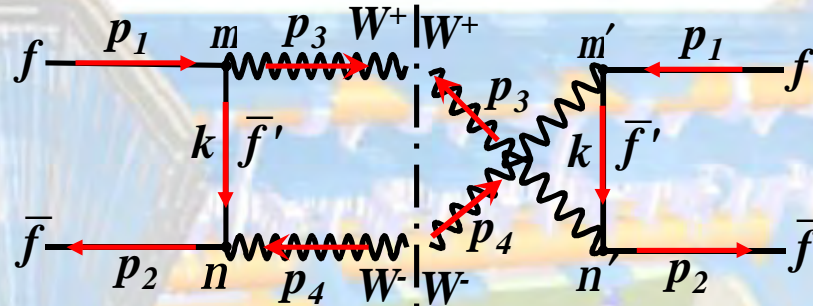
$$M_{5\mu'}^{*2} = (1 - \gamma_5^+) \left[\gamma_{\mu'}^+ + \frac{i}{2} \theta_{\mu'\rho'\sigma'} p_4^{\rho'} p_1^{\sigma'} \right]$$

$$M_{5\mu'}^{*4} = (1 - \gamma_5^+) \left[\gamma_{\nu'}^+ + \frac{i}{2} \theta_{\nu'\alpha'\beta'} p_3^{\alpha'} k'^{\beta'} \right]$$

$$\sum_{spin, pol} M_1 M_3^* = 0$$

$\sum_{spin, pol} M_1 M_3^* = 0$, puisque les termes de $M_1 M_3^*$ contient des termes en θ d'ordre 2 et /ou 3.

Contribution du sixième diagramme :



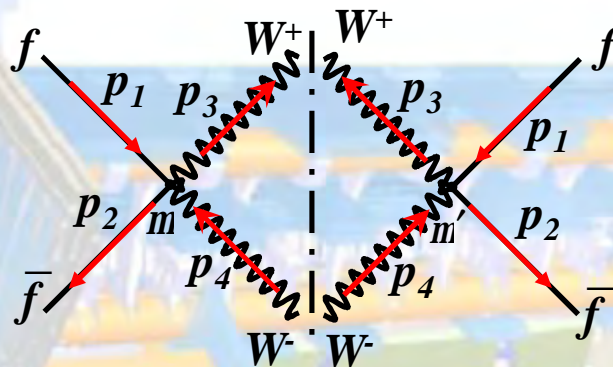
$$M_2 M_3^* = \bar{v}(p_2, s)(X_\nu + Y_\nu) \frac{-i}{\not{k} - m} (Z_\mu + T_\mu) u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) (M_{5\mu'}^{*1} + M_{5\mu'}^{*2}) \not{k} (M_{5\nu'}^{*3} + M_{5\nu'}^{*4}) [\bar{v}(p_2, s)]^\dagger \varepsilon^\mu(p_3) \varepsilon^{*\nu}(p_4) \varepsilon^{*\mu'}(p_3) \varepsilon^{\nu'}(p_4)$$

où X_ν, Y_ν, T_μ et Z_μ sont données par le deuxième diagramme.

et $M_{5\mu'}^{*1}, M_{5\mu'}^{*2}, M_{5\nu'}^{*3}$ et $M_{5\nu'}^{*4}$ sont données par le cinquième diagramme.

et on obtient:
$$\sum_{spin, pol} M_2 M_3^* = 0$$

Contribution du septième diagramme :



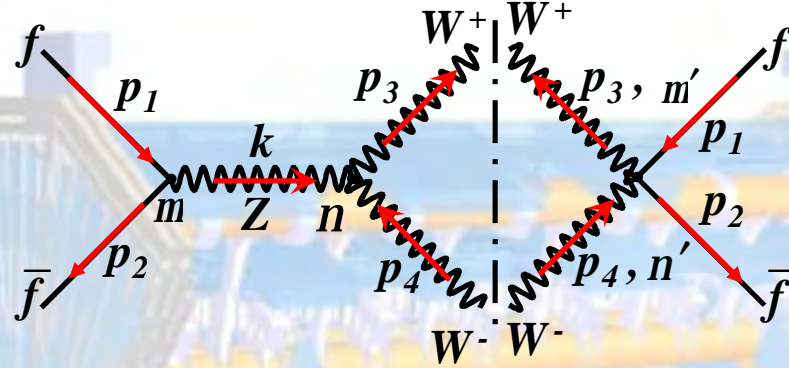
$$M_4 = \bar{v}(p_2, s) \frac{-e^2}{8 \sin^2 \theta_W} [\theta_{\mu\nu\rho} (p_1^\rho + p_3^\rho) (1 - \gamma_5) + 2\theta_{\mu\nu} m_f] u(p_1, s) \varepsilon^\mu(p_3) \varepsilon^{*\nu}(p_4)$$

$$|\overline{M}_4|^2 = \bar{v}(p_2, s) \frac{-e^2}{8 \sin^2 \theta_W} [\theta_{\mu\nu\rho} (p_1^\rho + p_3^\rho) (1 - \gamma_5) + 2\theta_{\mu\nu} m_f] u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) [\theta_{\mu'\nu'\rho'} (p_1^{\rho'} + p_3^{\rho'}) (1 - \gamma_5^+) + 2\theta_{\mu'\nu'} m_f] [\bar{v}(p_2, s)]^\dagger \varepsilon^\mu(p_3) \varepsilon^{*\nu}(p_4) \varepsilon^{*\mu'}(p_3) \varepsilon^{\nu'}(p_4)$$

$$\sum_{spin, pol} |\overline{M}_4|^2 = 0$$

$\sum_{spin, pol} |\overline{M}_4|^2 = 0$, car les termes de $|\overline{M}_4|^2$ sont d'ordre 2 de θ .

Contribution du huitième diagramme :



$$M_1 M_4^* = \frac{-e^4 \cot \theta_W}{8 \sin 2\theta_W \sin^2 \theta_W (k^2 - M_Z^2)} \bar{v}(p_2, s) X_\mu u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) Y_{\mu'\nu'}(\theta) [\bar{v}(p_2, s)]^\dagger (-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{M_Z^2}) \Re_{\nu\sigma\rho}(\theta) \varepsilon^\rho(p_3) \varepsilon^{*\sigma}(p_4) \varepsilon^{\mu'}(p_3) \varepsilon^{*\nu'}(p_4)$$

$$X_\mu = \gamma_\mu (c_{v,f} - c_{A,f} \gamma_5)$$

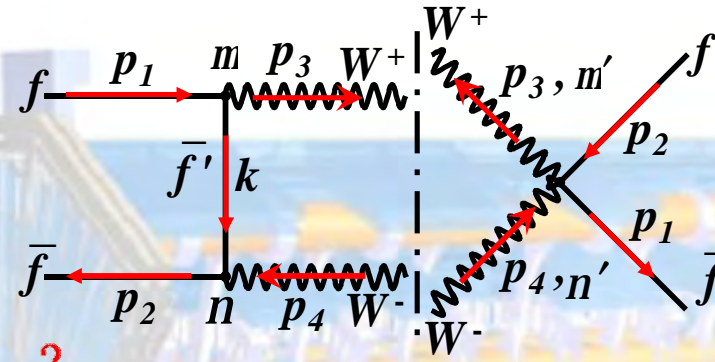
$$Y_{\mu'\nu'}(\theta) = [\theta_{\mu'\nu'\rho'} (p_1^{\rho'} + p_3^{\rho'}) (1 - \gamma_5^+) + 2\theta_{\mu'\nu'} m_f]$$

$$\Re_{\nu\sigma\rho}(\theta) = g_{\nu\sigma} (k + p_4)_\rho - g_{\rho\sigma} (p_4 - p_3)_\nu - g_{\rho\nu} (p_3 + k)_\sigma$$

$$\sum_{spin} \bar{v}(p_2, s) X_\mu u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) Y_{\mu'\nu'}(\theta) [\bar{v}(p_2, s)]^\dagger = 0$$

$$\sum_{spin, pol} M_1 M_4^* = 0$$

Contribution du neuvième diagramme :



$$M_2 M_4^* = \frac{e^2}{8k^2 \sin^2 \theta_w} \bar{v}(p_2, s) (X_\nu + Y_\nu) \not{k} (Z_\mu + T_\mu) u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) Y_{\mu'\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^+ \varepsilon^{\mu\nu\mu'\nu'}(p_3, p_4)$$

où: X_ν, Y_ν, T_μ et Z_μ sont données dans le deuxième diagramme.

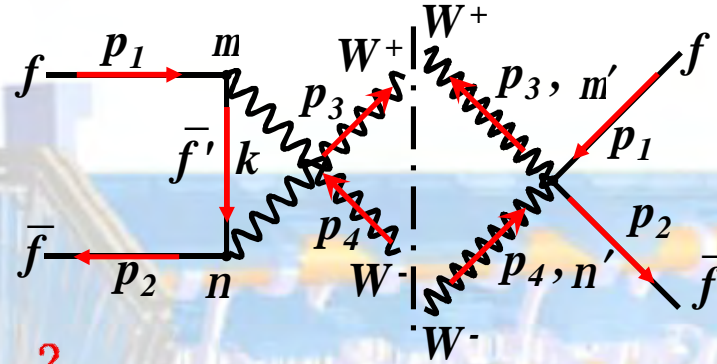
et: $Y_{\mu'\nu'}(\theta) = [\theta_{\mu'\nu'\rho'}(p_1^{\rho'} + p_3^{\rho'})(1 - \gamma_5^+) + 2\theta_{\mu'\nu'} m_f]$

$$\bar{v}(p_2, s) X_\mu \not{k} Z_\mu u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) Y_{\mu'\nu'}(\theta) [\bar{v}(p_2, s)]^+$$

$$\sum_{spin, pol} \bar{v}(p_2, s) X_\mu \not{k} Z_\mu u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) Y_{\mu'\nu'}(\theta) [\bar{v}(p_2, s)]^+ = 0$$

on obtient: $\sum_{spin, pol} M_2 M_4^* = 0$

Contribution du dixième diagramme :



$$M_3 M_4^* = \frac{e^2}{8k^2 \sin^2 \theta_w} \bar{v}(p_2, s) (X'_\nu + Y'_\nu) \not{K} (Z'_\mu + T'_\mu) u(p_1, s) u^\dagger(p_1, s) Y_{\mu'\nu'} [\bar{v}(p_2, s)]^+ \varepsilon^{\mu\nu\mu'\nu'}(p_3, p_4)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\mu'\nu'}(p_3, p_4) = \varepsilon^\nu(p_3) \varepsilon^{*\mu}(p_4) \varepsilon^{*\mu'}(p_3) \varepsilon^{\nu'}(p_4)$$

$$X'_\nu = \left[\gamma_\nu - \frac{i}{2} \theta_{\nu\alpha\beta} p_3^\alpha k^\beta \right] (1 - \gamma_5) A$$

$$Y'_\nu = \frac{i}{2} \theta_{\nu\lambda} [B_1 k^\lambda (1 - \gamma_5) - B_2 k^\lambda (1 + \gamma_5)] A$$

$$Z'_\mu = \left[\gamma_\mu - \frac{i}{2} \theta_{\mu\rho\sigma} p_4^\rho p_1^\sigma \right] (1 - \gamma_5) A'$$

$$T'_\mu = \frac{i}{2} \theta_{\mu\eta} [B'_1 p_1^\eta (1 - \gamma_5) - B'_2 k^\eta (1 + \gamma_5)] A'$$

$$\sum_{spin, pol} M_3 M_4^* = 0$$



Enfin l'amplitude de ce processus est la somme des amplitudes du premier, deuxième et troisième diagramme.

Donc on a discuté la non commutativité d'espace-temps et son importance, et on dit que peut-être à l'échelle des très hautes énergies la géométrie d'espace-temps est non commutative.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ:

الذين يذكرون الله قياما وقعودا وعلى
جنبهم ويتفكرون في خلق السماوات
والأرض، ربنا ما خلقت هذا باطلا سبحانه،
فنا عذاب النار.

سورة آل عمران، الآية 191.

Merci de votre attention

شكرا لانتباهكم