

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE FRERES MENTOURI CONSTANTINE 1  
FACULTE DES SCIENCES EXACTES DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° de Série : .....

N° d'ordre : .....

## **THESE**

Présentée pour obtenir le diplôme de Doctorat 3<sup>ème</sup> Cycle en Physique

Spécialité : Energies Renouvelables

## **THEME**

**Contribution à l'intensification des transferts thermiques  
par un nanofluide dans un échangeur thermique à tube  
elliptique coaxial**

PAR

**BOUZERZOUR Abdeslem**

**Soutenue le : 20 / 10 / 2020**

Devant le jury :

|              |     |                        |                                                 |
|--------------|-----|------------------------|-------------------------------------------------|
| Présidente : | Pr. | <b>CHAKER Abla</b>     | <b>Université frères Mentouri Constantine 1</b> |
| Rapporteur : | Pr. | <b>DJEZZAR Mahfoud</b> | <b>Université frères Mentouri Constantine 1</b> |
| Examineurs : | Pr. | <b>RAHMANI Ahmed</b>   | <b>Université d'Oum El Bouaghi</b>              |
|              | Dr. | <b>TAYEBI Tahar</b>    | <b>Université de Bordj Bou Arreridj</b>         |

## Dédicaces

*A mes parents qui sont la lumière de ma vie.*

*A mes chères sœurs Zineb et Nour-el-Houda.*

*A M. DJEZZAR qui a été un deuxième père pendant toutes ces années.*

*A tous mes enseignants et mes collègues.*

*A Oussama, Ismahene, Yousra et Achref.*

*A tous les membres de ma famille, grands et petits.*

*A tous mes amis.*

## Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier très chaleureusement et à exprimer toute ma gratitude à mon directeur de thèse, Monsieur **Mahfoud DJEZZAR**, Professeur à l'Université frères Mentouri Constantine 1, pour ses efforts, ses orientations ainsi que la qualité du savoir qu'il m'a inculqué, sans oublier son temps précieux ainsi que sa disponibilité permanente, sa contribution primordiale et ses idées originales qui ont servi à enrichir le contenu de cette thèse.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à Madame **Abla CHAKER**, Professeur à l'Université frères Mentouri Constantine 1, qui a bien voulu présider mon jury de thèse, malgré ses nombreuses occupations.

Je remercie également Monsieur **Ahmed RAHMANI**, Professeur à l'Université d'Oum El Bouaghi qui m'a fait l'honneur d'examiner cette thèse et de participer à mon jury de soutenance, je lui adresse ma sincère gratitude.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur **Tahar TAYEBI**, Maître de Conférences à l'Université de Bordj Bou Arreridj, pour son aide appréciable, qui m'a permis de faire aboutir mon projet de thèse et d'avoir accepté de faire partie de mon jury d'examen.

Tous mes remerciements vont également, à toute personne ayant aidé de près ou de loin à l'achèvement de ce travail.

## Nomenclature

|                    |                                                                                     |
|--------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $a$                | Diffusivité thermique [ $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ ]                                |
| $A_1, A_2$         | Grands axes des cylindres elliptiques interne et externe [m]                        |
| $B_1, B_2$         | Petits axes des cylindres elliptiques interne et externe [m]                        |
| $c_p$              | Chaleur spécifique à pression constante [ $\text{J}.\text{kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ] |
| $e_1, e_2$         | Excentricités des cylindres elliptiques interne et externe                          |
| $g$                | Accélération du champ de la pesanteur [ $\text{m}.\text{s}^{-2}$ ]                  |
| $H$                | Coefficient métrique dimensionnel [m]                                               |
| $Nu$               | Nombre de <i>Nusselt</i> local                                                      |
| $\overline{Nu}$    | Nombre de <i>Nusselt</i> moyen                                                      |
| $Pr$               | Nombre de <i>Prandtl</i>                                                            |
| $Ra$               | Nombre de <i>Rayleigh</i>                                                           |
| $S_\Omega$         | Terme de source                                                                     |
| $T$                | Température dimensionnelle [K]                                                      |
| $V_x, V_y$         | Composantes de la vitesse suivant $x$ et $y$ [ $\text{m}.\text{s}^{-1}$ ]           |
| $V_\eta, V_\theta$ | Composantes de la vitesse suivant $\eta, \theta$ [ $\text{m}.\text{s}^{-1}$ ]       |
| $x, y$             | Coordonnées Cartésiennes [m]                                                        |

### ***Symboles grecques***

|                 |                                                                              |
|-----------------|------------------------------------------------------------------------------|
| $\alpha$        | Angle d'inclinaison [ $^\circ$ ]                                             |
| $\beta$         | Coefficient de dilatation thermique à pression constante [ $\text{K}^{-1}$ ] |
| $\Gamma_\Omega$ | Coefficient adimensionnel de diffusion                                       |
| $\eta, \theta$  | Coordonnées elliptiques                                                      |
| $\lambda$       | Conductivité thermique [ $\text{W}.\text{m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ]            |
| $\mu$           | Viscosité Dynamique [ $\text{kg}.\text{m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ ]              |
| $\nu$           | Viscosité cinématique [ $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ ]                         |
| $\rho$          | Masse volumique [ $\text{kg}.\text{m}^{-3}$ ]                                |
| $\sigma$        | Distance focale [m]                                                          |
| $\tau$          | Tenseur des contraintes visqueuses                                           |
| $\phi$          | Fraction volumique des nanoparticules                                        |
| $\psi$          | Fonction du courant [ $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ ]                           |
| $\omega$        | Vorticité [ $\text{s}^{-1}$ ]                                                |

$\Omega$  Fonction générale

***Indices***

$c$  Froid

$f$  Fluide

$h$  Chaud

$nf$  Nanofluide

$s$  Nanoparticule solide

$1$  Interne

$2$  Externe

***Exposant***

$*$  Paramètre adimensionnel

## Liste des figures

|                                                                                                                                                                                                          |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figure 2.1 Section droite du système .....                                                                                                                                                               | 10 |
| Figure 2.2 Les différents cas de chauffage partiel de la paroi interne .....                                                                                                                             | 10 |
| Figure 2.3 Schéma des coordonnées elliptiques $(\eta, \theta)$ .....                                                                                                                                     | 15 |
| Figure 3.1 Représentation du domaine physique et du domaine de calcul .....                                                                                                                              | 20 |
| Figure 3.2 Volume de contrôle typique.....                                                                                                                                                               | 21 |
| Figure 4.1 Comparaison d'isothermes et de lignes de courant pour $e_1=0.8$ , $e_2=0.6$ et $Ra=10^5$ entre Réf. [49] (a) et nos résultats (b).....                                                        | 37 |
| Figure 4.2 Comparaison des variations des nombres de <i>Nusselt</i> moyen de la paroi interne en fonction du nombre de <i>Rayleigh</i> entre Réf. [49] et nos résultats .....                            | 37 |
| Figure 4.3 Isothermes pour différents nombres de <i>Rayleigh</i> et différentes fractions volumiques - 1 <sup>er</sup> cas de chauffage [65] .....                                                       | 40 |
| Figure 4.4 Lignes de courant pour différents nombres de <i>Rayleigh</i> et différentes fractions volumiques - 1 <sup>er</sup> cas de chauffage [65] .....                                                | 41 |
| Figure 4.5 Variation des nombres de <i>Nusselt</i> locaux sur la paroi interne pour différents nombres de <i>Rayleigh</i> et différentes fractions volumiques - 1 <sup>er</sup> cas de chauffage .....   | 42 |
| Figure 4.6 Variation du nombre de <i>Nusselt</i> moyen en fonction du nombre de <i>Rayleigh</i> pour différentes fractions volumiques - 1 <sup>er</sup> cas de chauffage [65] .....                      | 42 |
| Figure 4.7 Isothermes pour différents nombres de <i>Rayleigh</i> et différentes fractions volumiques - 2 <sup>ème</sup> cas de chauffage [65] .....                                                      | 45 |
| Figure 4.8 Lignes de courant pour différents nombres de <i>Rayleigh</i> et différentes fractions volumiques pour - 2 <sup>ème</sup> cas de chauffage [65] .....                                          | 46 |
| Figure 4.9 Variation des nombres de <i>Nusselt</i> locaux sur la paroi interne pour différents nombres de <i>Rayleigh</i> et différentes fractions volumiques - 2 <sup>ème</sup> cas de chauffage.....   | 47 |
| Figure 4.10 Variation du nombre de <i>Nusselt</i> moyen sur en fonction du nombre de <i>Rayleigh</i> pour différentes fractions volumiques - 2 <sup>ème</sup> cas de chauffage [65].....                 | 47 |
| Figure 4.11 Isothermes pour différents nombres de <i>Rayleigh</i> et différentes fractions volumiques - 3 <sup>ème</sup> cas de chauffage [65] .....                                                     | 50 |
| Figure 4.12 Lignes de courant pour différents nombres de <i>Rayleigh</i> et différentes fractions volumiques - 3 <sup>ème</sup> cas de chauffage [65].....                                               | 51 |
| Figure 4.13 Variation des nombres de <i>Nusselt</i> locaux sur la paroi interne pour différents nombres de <i>Rayleigh</i> et différentes fractions volumiques - 3 <sup>ème</sup> cas de chauffage ..... | 52 |
| Figure 4.14 Variation du nombre de <i>Nusselt</i> moyen en fonction du nombre de <i>Rayleigh</i> pour différentes fractions volumiques - 3 <sup>ème</sup> cas de chauffage [65].....                     | 52 |

|                                                                                                                                                                                    |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figure 4.15 Comparaison des nombres de <i>Nusselt</i> moyens sur la paroi interne pour les trois cas de chauffage partiel considérés .....                                         | 53 |
| Figure 4.16 Isothermes pour différents nombres de <i>Rayleigh</i> et différentes fractions volumiques - $\alpha = 0^\circ$ .....                                                   | 55 |
| Figure 4.17 Lignes de courant pour différents nombres de <i>Rayleigh</i> et différentes fractions volumiques - $\alpha = 0^\circ$ .....                                            | 56 |
| Figure 4.18 Isothermes pour différents nombres de <i>Rayleigh</i> et différentes fractions volumiques - $\alpha = 10^\circ$ .....                                                  | 58 |
| Figure 4.19 Lignes de courant pour différents nombres de <i>Rayleigh</i> et différentes fractions volumiques - $\alpha = 10^\circ$ .....                                           | 59 |
| Figure 4.20 Isothermes pour différents nombres de <i>Rayleigh</i> et différentes fractions volumiques - $\alpha = 45^\circ$ .....                                                  | 60 |
| Figure 4.21 Lignes de courant pour différents nombres de <i>Rayleigh</i> et différentes fractions volumiques - $\alpha = 45^\circ$ .....                                           | 61 |
| Figure 4.22 Isothermes pour différents nombres de <i>Rayleigh</i> et différentes fractions volumiques - $\alpha = 60^\circ$ .....                                                  | 62 |
| Figure 4.23 Lignes de courant pour différents nombres de <i>Rayleigh</i> et différentes fractions volumiques - $\alpha = 60^\circ$ .....                                           | 63 |
| Figure 4.24 Isothermes pour différents nombres de <i>Rayleigh</i> et différentes fractions volumiques - $\alpha = 90^\circ$ .....                                                  | 64 |
| Figure 4.25 Lignes de courant pour différents nombres de <i>Rayleigh</i> et différentes fractions volumiques - $\alpha = 90^\circ$ .....                                           | 65 |
| Figure 4.26 Comparaison des variations des nombres de <i>Nusselt</i> locaux pour différents angles d'inclinaison .....                                                             | 66 |
| Figure 4.27 Variation du nombre de <i>Nusselt</i> moyen en fonction de l'angle de l'inclinaison pour différents nombre de <i>Rayleigh</i> et différentes fractions volumiques..... | 67 |
| Figure 4.28 Isothermes et lignes de courant pour différents nanofluides utilisés pour $\alpha=90^\circ$ , $Ra=10^5$ et $\phi=0.08$ .....                                           | 68 |
| Figure 4.29 Variations du nombre du <i>Nusselt</i> moyen pour différents nanofluides utilisés .....                                                                                | 68 |

## Liste des tableaux

|                                                                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tableau 3.1 les coefficients diffusifs et les termes sources correspondant aux variables $\Omega$ ....    | 25 |
| Tableau 4.1 Propriétés physiques des différentes nanoparticules utilisées.....                            | 35 |
| Tableau 4.2 Variation du nombre de Nusselt moyen de la paroi interne, en fonction du nombre de nœuds..... | 36 |
| Tableau 4.3 Comparaison du nombre de Nusselt moyen des références [2] et [11] avec nos résultats.....     | 36 |

# Table des matières

|                                                                                                               |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Dédicaces .....                                                                                               | i   |
| Remerciements .....                                                                                           | ii  |
| Nomenclature .....                                                                                            | iii |
| Liste des figures .....                                                                                       | v   |
| Liste des tableaux .....                                                                                      | vii |
| Introduction Générale.....                                                                                    | 1   |
| Chapitre 1 Recherche bibliographique .....                                                                    | 2   |
| Chapitre 2 Analyse théorique.....                                                                             | 9   |
| 1. Description du problème.....                                                                               | 10  |
| 2. Les propriétés thermo-physiques du nanofluide.....                                                         | 11  |
| 3. Hypothèses simplificatrices .....                                                                          | 11  |
| 4. Equations relatives à l'écoulement.....                                                                    | 12  |
| 4.1. Formulation vectorielle.....                                                                             | 12  |
| 4.2. Formulation en coordonnées cartésiennes.....                                                             | 13  |
| 4.3. Elimination du terme de pression de l'équation de quantité de mouvement.....                             | 14  |
| 4.4. Introduction des coordonnées elliptiques .....                                                           | 15  |
| 4.5. Adimensionalisation .....                                                                                | 17  |
| 4.5.1. Equations adimensionnelles .....                                                                       | 17  |
| 4.5.2. Formulation des conditions aux limites adimensionnelles.....                                           | 18  |
| 4.6. Coefficients d'échange de chaleur.....                                                                   | 18  |
| 4.6.1. Nombre de <i>Nusselt</i> local .....                                                                   | 18  |
| 4.6.2. Nombre de <i>Nusselt</i> moyen .....                                                                   | 18  |
| Chapitre 3 Formulation numérique .....                                                                        | 19  |
| 1. Introduction.....                                                                                          | 20  |
| 2. Méthode de résolution numérique .....                                                                      | 20  |
| 3. Volume élémentaire d'intégration .....                                                                     | 20  |
| 4. Discrétisation de l'équation générale de transfert d'une variable $\Omega$ dans le volume de contrôle..... | 21  |
| 5. Discrétisation de l'équation de vorticité.....                                                             | 25  |
| 5.1. Discrétisation des conditions aux limites de vorticité .....                                             | 28  |
| 6. Discrétisation de l'équation d'énergie.....                                                                | 29  |
| 6.1. Discrétisation des conditions aux limites de la température.....                                         | 30  |
| 7. Discrétisation de l'équation de la fonction de courant.....                                                | 30  |
| 7.1. Discrétisation des Conditions aux limites de la fonction de courant.....                                 | 31  |

|                                                                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 8. Discrétisation des composantes de la vitesse.....                                                                    | 31 |
| 9. Processus de calcul .....                                                                                            | 31 |
| Chapitre 4 Résultats et discussions .....                                                                               | 34 |
| 1. Introduction.....                                                                                                    | 35 |
| 2. Etude de maillage.....                                                                                               | 35 |
| 3. Validation numérique.....                                                                                            | 36 |
| 4. Résultats et discussions.....                                                                                        | 38 |
| 4.1. Première partie : paroi interne chauffée partiellement .....                                                       | 38 |
| 4.1.1. 1 <sup>er</sup> cas : chauffage partiel du haut et du bas de la paroi interne.....                               | 38 |
| 4.1.2. 2 <sup>ème</sup> cas : chauffage partiel du côté gauche et du côté droit de la paroi interne .                   | 43 |
| 4.1.3. 3 <sup>ème</sup> cas : chauffage partiel sur le quart haut droit et le quart bas gauche de la paroi interne..... | 48 |
| 4.1.4. Comparaison entre les trois cas de chauffage .....                                                               | 53 |
| 4.2. Deuxième partie : Effet de la variation de l'angle d'inclinaison $\alpha$ .....                                    | 54 |
| 4.3. Troisième partie : comparaison entre les différents types de nanofluide .....                                      | 67 |
| Conclusion générale .....                                                                                               | 69 |
| Références bibliographiques .....                                                                                       | 70 |

## Introduction Générale

L'émergence des nanofluides comme un alternatif aux fluides de base, vu leurs capacités à améliorer les transferts de chaleur, a pris une grande importance avec une croissance exponentielle de travaux sur ce sujet ces dernières années. Plusieurs paramètres ont été mis en évidence afin d'évaluer les performances thermiques ainsi que les propriétés thermo-physiques des nanofluides injectés dans divers types de cavités fermées ainsi que dans les espaces annulaires, ces derniers qui ont une large présence dans les domaines d'engineering tels que les échangeurs de chaleur, les installations solaires thermiques ou encore l'industrie nucléaire.

Dans ce travail de thèse on s'intéresse aux performances thermo-hydrauliques d'un nanofluide au sein d'un échangeur thermique coaxial elliptique où se produit une convection naturelle. Cette étude est réalisée à l'aide d'un code de calcul aux volumes finis, développé afin de déterminer l'effet des différents paramètres sur la structure de l'écoulement, les distributions de la température et sur le taux de transfert de chaleur, qui est représenté par les profils des nombres de *Nusselt* locaux et moyens.

Le manuscrit de cette thèse est composé de quatre chapitres. Dans le premier chapitre, nous avons présenté une revue des travaux antérieurs qui ont traité la convection naturelle dans les espaces annulaires elliptiques remplis par des fluides basiques puis ceux qui traitent la convection entraînée par des nanofluides au seins de différentes formes d'enceintes en arrivant aux études qui ont traité la convection naturelle dans les espaces partiellement chauffés en présence des nanofluides. Cette étude bibliographique, nous a permis de situer notre travail et de dégager la problématique à laquelle nous nous intéressons.

Le deuxième chapitre est dédié au modèle physique, on y présente les hypothèses simplificatrices, les équations en coordonnées cartésiennes, leurs conditions aux limites, Leurs écritures en coordonnées elliptiques et également leurs adimensionalisations.

Dans le troisième chapitre, nous avons exposé la méthode des volumes finis utilisée pour la discrétisation des équations de la chaleur et celle du mouvement qui sont de type parabolique ainsi qu'une méthode aux différences centrées pour discrétiser l'équation de la fonction de courant qui est de type elliptique. Les équations ainsi obtenues sont résolues par une méthode itérative avec coefficients de sous-relaxation successive.

Dans le quatrième chapitre, après avoir fait un test sur le maillage et la validation de notre code de calcul avec des résultats issus de la littérature, nous l'avons consacré aux résultats et leurs discussions, qui ont été présentés en trois parties, la première partie des résultats traite l'effet du chauffage partiel en imposant trois conditions pariétales thermiques différentes. La deuxième partie traite la convection naturelle dans un système à orientation variable. Et la dernière partie montre une comparaison entre les performances des différents types de nanofluides.

Nous terminons ce travail par une conclusion générale qui synthétise les principaux résultats.

***Chapitre 1***  
***Recherche bibliographique***

L'exploration des "routes vers le chaos" a montré que les enceintes délimitées par deux cylindres elliptiques horizontaux sont particulièrement intéressantes à cause des rétrécissements suffisamment prononcés opposés au mouvement du fluide, ou des écoulements multicellulaires même aux faibles valeurs du nombre de *Rayleigh* peuvent être observés. Dans ce cadre plusieurs recherches [1-7] ont été effectuées, où l'intensification de la convection naturelle entraînée par l'augmentation des tourbillons a été détectée. **Djezzar et al [8]** ont considéré l'approximation de *Boussinesq* pour étudier la convection thermique naturelle entraînée par l'échauffement d'air dans un espace annulaire situé entre deux cylindres elliptiques coaxiaux soumis à un gradient de température. L'observation de l'effet de l'excentricité du tube elliptique interne sur la conductivité thermique équivalente du fluide pour un nombre de *Grashof* variant de  $10^3$  à  $2.10^5$ , a montré que les transferts de chaleur s'uniformisent mieux dans l'espace le plus large (l'excentricité la plus grande). Dans une seconde investigation, **Djezzar et al [9]**, ont examiné l'effet de l'angle d'inclinaison du système  $\alpha$  ( $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ) sur le transfert convectif pour différents nombres de *Rayleigh* ( $10^3$ – $5.10^5$ ). Ils ont noté que la conduction thermique est le mode dominant du transfert pour les valeurs basses du nombre de *Rayleigh* tandis que le meilleur coefficient de transfert est obtenu quand le système est vertical ( $\alpha=90^\circ$ ). **Bouras et al [10;11]** ont pris le même espace annulaire formé par deux cylindres elliptiques maintenus isothermes, l'interne chaud et l'externe froid, en considérant l'influence du nombre de *Rayleigh* et de *Prandtl* sur la convection naturelle thermique dans un premier temps et la convection naturelle double-diffusive (chaleur-masse) dans un deuxième temps. Les résultats obtenus montrent que l'augmentation du nombre de *Rayleigh* intensifie le transfert convectif considérablement. L'effet du nombre de *Prandtl* est négligeable pour  $Ra=10^2$ , alors que son augmentation, engendre une intensification du transfert pour les nombres de *Rayleigh* les plus élevés. En gardant les mêmes conditions thermiques et remplaçant le cylindre intérieur par un carré, **Bouras et al [12]** ont testé l'influence du nombre de *Rayleigh* sur la convection naturelle thermique. Conformément aux résultats précédents, l'augmentation de nombre de *Rayleigh* augmente les nombres de *Nusselt*, moyen et local, et améliore le transfert convectif. **Boulechfar et al [13]** ont évalué les performances de la convection thermosolutale dans un milieu poreux confiné entre un cylindre elliptique intérieur chaud et un autre extérieur froid. L'influence des basses valeurs du nombre de *Rayleigh-Darcy*, où la flottabilité thermique est à l'origine de l'écoulement a été examinée, ainsi que les effets des différents rapports de flottabilité pour le cas de la flottabilité coopérante. La transition du mode de transfert conductif vers le mode convectif se fait en augmentant le nombre de *Rayleigh-Darcy*. Pour un nombre de *Rayleigh-Darcy* constant, l'effet de l'excentricité du cylindre elliptique interne ( $e=0.55$ ,  $0.688$ ,  $0.86$ ,  $0.9$ ,  $0.999$ ) sur le transfert par convection naturelle au sein d'un milieu poreux est étudié par **Boulechfar et al [14]**. Il a été constaté que le transfert est bien meilleur quand l'espace entre les deux cylindres elliptiques est plus large.

En 1995 **Choi [15]** a donné le nom 'nanofluide' à une nouvelle classe des fluides caloporteurs dont la conductivité thermique est sensée être supérieure et par conséquence le transfert thermique devient meilleur, en comparaison avec les fluides classiques. Les nanofluides sont des mélanges colloïdaux de particules solides de tailles nanométriques (1-100 nm) dispersées dans un fluide de base tel que l'eau, les huiles ou l'éthylène-glycole. Ces nanoparticules utilisées peuvent être de nature métallique (*Cu*, *Ag*, *Fe*, *Au*, *Ti*), des oxydes des métaux ( $Al_2O_3$ , *CuO*,

*SiO*, *TiO*) ou des nanotubes de carbone (simple-feuillet ‘*SWCNT*’ ou multi-feuillets ‘*MWCNT*’) où leurs effets sur les propriétés thermo-physiques du fluide ont été le sujet de plusieurs études numériques et expérimentales [16-28] ainsi que leurs comportements, thermique et cinétique, dans différents types de cavités. **Tayebi et al** [29-32] ont conduit plusieurs recherches sur la convection naturelle au sein d’une cavité carrée remplie par un nanofluide. Ils ont examiné [29;30], l’effet du mode d’échauffement de la paroi inférieure, en considérant une température uniforme, une température sinusoïdale ou une température linéairement variée. L’augmentation du nombre de *Rayleigh* ou de la fraction volumique de *Cu/Eau* a donné un transfert thermique bien meilleur surtout dans le cas d’une température constante imposée. En remplaçant le cuivre par des nanotubes de Carbone [31], une nouvelle condition thermique a été introduite sur la paroi inférieure où la température varie selon une loi en puissances de l’axe des abscisses. Pour une puissance **n** et un nombre de *Rayleigh* donnés, le nombre de *Nusselt* moyen a augmenté proportionnellement à la fraction volumique, au contraire, la réduction dans la valeur de **n** a donné un nombre de *Nusselt* moyen plus élevé, pour une fraction volumique donnée. Dans une autre étude [32], en imposant une température sinusoïdale sur la paroi verticale gauche de l’enceinte carrée, la convection naturelle produite au sein d’un nanofluide hybride (*Cu-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/Eau*) est étudiée pour différentes valeurs du nombre de *Rayleigh* et de la fraction volumique. La comparaison avec les performances de l’*Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/Eau* montre que le nanofluide hybride favorise le plus, le transfert de chaleur. **Azzouz et al** [33] ont considéré une cavité carrée remplie par le nanofluide *Cu/Eau* et inclinée d’un angle  $\alpha=45^\circ$ , une paroi est chauffée périodiquement, celle qui lui est opposée est maintenue isotherme froide, alors que les deux autres parois étant adiabatiques. La convection naturelle qui se produit a été étudiée en régime laminaire et transitoire et conformément aux recherches précédentes il a été constaté aussi que l’augmentation du nombre de *Grashof* et celle de la fraction volumique améliorent la convection naturelle. **Yahiaoui et al** [34;35] ont fait une étude comparative de la convection naturelle laminaire et permanente, dans trois enceintes fermées différentes (enceinte carrée, enceinte à parois horizontales concaves et parois verticales convexes et une dernière enceinte dont les parois horizontales sont convexes et celles verticales sont concaves), remplies d’un nanofluide *Cu/Eau*. Ils ont considéré pour les trois enceintes trois conditions pariétales thermiques différentes, pour différents nombres de *Rayleigh* ( $10^3$ - $10^5$ ) et différentes fractions volumiques (0–20%). Les résultats numériques obtenus montrent que le taux du transfert thermique augmente à la fois avec l’augmentation de la fraction volumique et du nombre de *Rayleigh*. Il a été observé que l’enceinte carrée est celle où les transferts thermiques s’uniformisent le mieux. **Benkhedda et al** [36;37] ont simulé la convection mixte dans un espace annulaire circulaire tridimensionnel en utilisant des nanofluides, conventionnel (*Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/Eau* et *TiO<sub>2</sub>/Eau*) et hybride (*Ag-TiO<sub>2</sub>/Eau*). En imposant une chaleur uniforme sur le tube extérieur alors que celui intérieur est adiabatique, pour différentes valeurs de la fraction volumique, les résultats montrent qu’un passage de la convection forcée vers la convection mixte se produit en augmentant le nombre de *Grashof* où le transfert thermique devient plus intense. Ainsi, l’hybridation de l’*Ag* et le *TiO<sub>2</sub>* a donné des performances thermiques bien meilleures. L’effet de la forme des nanoparticules sur le nombre de *Nusselt* et le coefficient de friction a été étudié par **Benkhedda et al** [38] pour la convection forcée dans un tube horizontal chauffé par une température constante. Quatre différentes formes de nanoparticule (sphère, cylindre, plaquette et lame) ont été considérées pour différentes fractions volumiques et

différents nombres de *Reynolds*. Pour les nanofluides usuels et hybride ( $TiO_2/Eau$  et  $Ag-TiO_2/Eau$  respectivement), le coefficient de friction a changé proportionnellement à la fraction volumique mais inversement au nombre de *Reynolds*, sa plus grande valeur est obtenue en utilisant les nanoparticules en forme de plaquettes. De son côté le nombre de *Nusselt* a augmenté à chaque fois que l'un des paramètres considérés est augmenté où les nanoparticules en forme de lames ont donné la meilleure augmentation au contraire à celles en forme sphérique. **Benzeggouta et al [39]** ont traité un problème tridimensionnel de la convection au sein d'un tube circulaire horizontal en considérant l'effet d'ajout des nanoparticules ( $Al_2O_3$  ou  $Cu$ ) au fluide de base (*Eau*) pour un nombre de *Reynolds*  $Re=300$  et un nombre de *Grashof*  $Gr=0$  pour la convection forcée ou  $Gr=5.10^5$  pour la convection mixte. Ils ont trouvé que le ratio de transfert thermique s'accroît en comparaison avec l'usage de l'eau pure. Tandis que, l'effet de la fraction volumique sur le nombre de *Nusselt* axial est négligeable dans le cas de la convection forcée, au contraire, pour la convection mixte, le *Nusselt* axial est amélioré considérablement. **Tayebi et al [40;41]** ont considéré un espace annulaire excentrique formé par deux cylindres circulaires horizontaux où la paroi interne est chauffée par une température uniforme alors que la paroi externe est maintenue froide. Pour un nombre de *Rayleigh* et une *fraction volumique* variables, une comparaison des performances du transfert thermique convectif naturel entraîné par un fluide de base (*Eau*), un nanofluide ( $Cu/Eau$  ou  $Al_2O_3/Eau$ ) ou un nanofluide Hybride ( $Cu-Al_2O_3/Eau$ ) a été faite. Un renforcement du transfert de chaleur autour du cylindre intérieur est observé en ajoutant les nanoparticules solides au fluide de base. Alors que les performances fournies par le  $Cu-Al_2O_3/Eau$  sont bien meilleures que celles de  $Al_2O_3/Eau$ .

**Alawi et al [42]** ont utilisé FLUENT pour simuler la convection naturelle produite à l'aide d'un nanofluide entre un tube plat elliptique chauffé par un flux constant et localisé au milieu d'une conduite cylindrique verticale maintenue froide. Le nombre de *Nusselt* moyen augmente à chaque fois en augmentant le nombre de *Rayleigh*, l'angle d'orientation  $\alpha$  ( $0^\circ-90^\circ$ ) du tube intérieur ou le rapport de rayon hydraulique (5, 7.5, 10). **Dawood et al [43-45]** ont réalisé plusieurs recherches sur la convection mixte, dans un espace annulaire tridimensionnel entre deux cylindres, l'extérieur étant circulaire et l'intérieure étant elliptique, dont un flux de chaleur constant est imposé. Différents types d'oxydes métalliques ( $Al_2O_3$ ,  $CuO$ ,  $SiO_2$ ,  $ZnO$ ) avec différentes tailles de nanoparticules (20, 40, 60 et 80 nm) et différentes fractions volumiques (0.5–4%) dispersées dans différents fluides de bases (*Eau*, *Glycérine*, *Huile de moteur*, *l'Éthylène-Glycole*) pour différents nombres de *Reynolds* ( $200 \leq Re \leq 1000$  pour le régime laminaire, et  $4000 \leq Re \leq 10,000$  pour le régime turbulent) sont testés. Pour tous les cas le nombre de *Nusselt* a augmenté avec l'augmentation du nombre de *Reynolds* ou la fraction volumique, mais l'augmentation de taille des nanoparticules a provoqué un effet inverse. Le meilleur transfert a été observé en utilisant le  $SiO_2/glycérine$ . **Sheikholeslami et al [46;47]** ont fait appel à la méthode des 'volumes de contrôle/éléments finis' (*CVFEM*) pour résoudre le problème de la convection naturelle produite au sein d'un nanofluide  $Cu/Eau$ , confiné entre un cylindre elliptique maintenu chaud à une température constante, situé à l'intérieur d'un autre cylindre circulaire maintenu froid. Différents paramètres ont été pris en considération pour distinguer deux études différentes. Dans la première [46], ils ont testé l'effet du nombre de *Rayleigh*, de la fraction volumique et de l'angle d'orientation du cylindre elliptique intérieur, où les résultats montrent que le nombre de *Nusselt* a augmenté avec chacun des paramètres considérés. Dans

la seconde étude [47], ils ont utilisé un milieu poreux, exposé à un champ magnétique, où l'effet de l'excentricité du cylindre elliptique, ainsi que la longueur de son axe majeur pour différents nombres de *Rayleigh*, différents nombres de *Hartmann* et différentes fractions volumiques ont été examinés. L'augmentation de la longueur de l'axe majeur du tube elliptique et le nombre de *Rayleigh* ont participé à l'amélioration du transfert thermique, alors que, l'excentricité et le nombre de *Hartmann* l'ont fait réduire. L'effet de l'ajout des nanoparticules est plus prononcé en augmentant les forces de *Lorentz*. **Tayebi et al [48-51]** ont réalisé plusieurs travaux sur la convection naturelle dans un espace annulaire, situé entre deux cylindres elliptiques confocaux d'axes horizontaux, rempli par un nanofluide. Dans une première étude [48], ils ont utilisé un nanofluide hybride (*Cu-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/eau*), les cylindres intérieur et extérieur étant maintenus chaud et froid respectivement. Pour des nombres de *Rayleigh* ( $10^3-3.10^5$ ) et des fractions volumiques (0-0,12), les résultats obtenus montrent un meilleur transfert de chaleur en utilisant le *Cu-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/eau* à titre de comparaison avec l'usage d'*Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/Eau*. Pour la deuxième étude [49], en gardant les mêmes paramètres utilisés précédemment, ils ont examiné l'influence de l'excentricité du tube elliptique intérieur (0.7, 0.8, 0.9) sur le transfert thermique entraîné par le *Cu/Eau*. Ils ont trouvé que l'effet de la fraction volumique sur l'intensité du transfert de chaleur apparaît mieux pour les petites excentricités (espace annulaire plus mince) alors que l'effet du nombre de *Rayleigh* apparaît mieux pour les grandes excentricités (espace annulaire plus large). En remplaçant les nanoparticules de cuivre par les nanotubes de carbone (*CNT*), une nouvelle étude [50] a été conduite en imposant un flux de chaleur constant sur la paroi interne. En augmentant le nombre de *Rayleigh* jusqu'à  $10^6$ , le transfert est plus amplifié à cause de la domination de la convection naturelle et l'ajout des nanotubes est plus efficace. Dans une autre étude [51], ils ont repris le premier problème étudié [48], en considérant cette fois-ci une génération d'entropie au sein de l'espace annulaire. Dans ce cas aussi, l'augmentation du nombre de *Rayleigh* ou de la *fraction volumique* a amélioré le flux convectif, le taux de transfert de chaleur ainsi que la génération d'entropie thermique et frictionnelle. Notant que l'irréversibilité thermique est le générateur principal d'entropie pour les faibles valeurs de *Rayleigh*, alors que, pour les valeurs élevées l'entropie est produite essentiellement à cause d'irréversibilité frictionnelle.

**Oztop et Abu-Nada [52]** ont étudié le transfert de chaleur dû aux forces de flottabilité dans une enceinte rectangulaire remplie d'un nanofluide où la paroi gauche est chauffée partiellement. Les effets de la dimension du chauffage, sa position sur la paroi, le rapport de forme de l'enceinte et le type de nanoparticules utilisés sont examinés, pour un nombre de *Rayleigh*  $10^3 < Ra < 5 \times 10^5$  et une fraction volumique  $0 < \phi < 0.2$ . Les résultats obtenus montrent une augmentation du nombre de *Nusselt* moyen proportionnel à l'augmentation de la fraction volumique, le nombre de *Rayleigh* et la dimension du chauffage où cette augmentation est mieux prononcée en utilisant les nanoparticules de cuivre (*Cu*). Au contraire, le rapport de forme a donné un effet inverse sur le transfert de chaleur. **Pop et al [53]** ont pris en considération le modèle diphasique de *Buongiorno* pour déterminer l'effet de l'échauffement partiel du côté droit d'une cavité dont le côté gauche est ondulé et maintenu à une température inférieure pour un nombre de *Rayleigh* qui varie entre  $10^4$  et  $10^6$ , sur la convection naturelle. Les calculs réalisés, en considérant l'effet du mouvement *brownien* et l'effet *Soret*, montrent une amélioration du transfert de chaleur en augmentant le nombre de *Rayleigh* et en diminuant le

nombre des ondulations de la paroi. Le changement de la position du chauffage en hauteur sur la paroi mène aux différents comportements de l'écoulement où la meilleure performance est obtenue pour une position proche du bas de l'enceinte. **Celik et al [54]** ont considéré un canal vertical chauffé uniformément ou partiellement sur ces deux côtés. La simulation numérique de la convection laminaire mixte dans ce canal, avec l' $Al_2O_3/Eau$  comme fluide caloporteur, pour un nombre de *Richardson* ( $0,01 < Ri < 10$ ), un nombre de *Reynolds* ( $100 < Re < 500$ ), une *fraction volumique* ( $0 < \phi < 0,05$ ) et le nombre des parties chauffées sur chaque côté ( $1 < \text{parties chauffées} < 10$ ) a montré que l'ajout des nanoparticules augmente la valeur du nombre de *Nusselt* moyen et que cette augmentation dépend des nombres de *Reynolds*, de *Richardson* et des parties chauffées. **Guestal et al [55]** ont étudié le transfert de chaleur par convection naturelle dans une enceinte horizontale de forme circulaire en utilisant deux nanofluides ( $Cu/Eau$  et  $TiO_2/Eau$ ). Cette dernière est divisée en quatre parties égales, les deux parties latérales sont maintenues isothermes à une température froide, la partie supérieure est maintenue adiabatique, quant à la partie inférieure, elle est maintenue chaude entièrement pour un premier cas, et pour un deuxième cas seul 1/5 de cette partie est chauffé au centre et le reste est maintenu adiabatique. En augmentant le nombre de *Rayleigh* ( $10^3 - 10^6$ ), la fraction volumique ( $0 - 0,05$ ) ou la longueur de la partie chauffée, une amélioration du transfert de chaleur a été notée où l'usage du  $Cu/Eau$  donne une amélioration jusqu'au 15,7%. **Salari et al [56]** ont présenté une simulation numérique de la convection naturelle de deux fluides immiscibles (un gaz qui est l'air et un nanofluide qui est l' $Al_2O_3/Eau$ ) confinés dans une enceinte rectangulaire dont les parois latérales sont chauffées partiellement. Les effets de la longueur et la position de la partie chauffée plus le rapport de forme pour différentes fractions volumiques ( $0 < \phi < 0,2$ ) et différents nombres de *Rayleigh* ( $10^3 < Ra < 10^6$ ) sont analysés. Les nombres de *Nusselt*, moyen et local, ont augmenté proportionnellement aux nombre de *Rayleigh*, la fraction volumique et le rapport de forme mais inversement à la longueur du chauffage. **Alsabery et al [57]** ont utilisé le model diphasique non-homogène de *Buongiorno* pour étudier la convection naturelle dans une cavité carrée contenant un obstacle solide de forme carrée et remplie par un nanofluide en l'occurrence de l' $Al_2O_3/Eau$ . Une simulation numérique a été conduite pour un chauffage partiel de la paroi gauche où la longueur de la partie chauffée et la taille de l'obstacle intérieur sont examinés pour différents nombres de *Rayleigh* et différentes fractions volumique. Les résultats montrent que pour des valeurs basses du nombre de *Rayleigh* ( $10^3$ ), le transfert de chaleur s'est intensifié en augmentant la fraction volumique et la taille de l'obstacle, au contraire pour les nombres de *Rayleigh* élevés l'effet de ses paramètres s'inverse. **Ma et al [58]** ont introduit un nanofluide hybride composé de nanotubes de Carbone (*MWCNT*) et de l'oxyde de Fer ( $Fe_3O_4$ ) dispersé dans l'eau pour servir comme fluide caloporteur dans un canal de forme  $\tau$  dont la paroi supérieure est chauffée partiellement. La méthode de *Lattice-Boltzmann* est utilisée pour modéliser la convection forcée dans ce système sous l'influence d'un champ magnétique appliqué du côté droit du canal. En considérant le nombre de *Rayleigh*, le nombre de *Hartmann*, la fraction volumique et la position des deux parties chauffées sur la paroi supérieure, les résultats obtenus montrent que le mode de transfert de chaleur est significativement affecté par l'arrangement des chauffages, où une domination de la convection forcée est constatée quand le chauffage est appliqué à gauche de la paroi supérieure alors que quand il appliqué à droite c'est le mode de transfert conductif qui domine.

A l'issue de cette rétrospective sur les travaux de recherche qui ont contribué à la compréhension du phénomène de la convection naturelle via les nanofluides, où une amélioration des transferts de chaleur par convection naturelle dans différentes géométries a été observée. Ainsi que l'influence qu'apporte les espaces annulaires de forme elliptique sur ce type de transfert et l'intérêt d'imposer des chauffages partiels. Ceci illustre bien l'importance de ce phénomène qui continue à susciter une attention croissante, et nous permet de situer notre travail et de dégager notre problématique.

La majorité des travaux référentiels cités dans ce chapitre porte sur la convection naturelle dans des enceintes à différentes formes ou dans des espaces annulaires de forme circulaire essentiellement, remplies de nanofluides, soit chauffés entièrement ou partiellement. Les travaux sur les transferts de chaleur, au sein des espaces annulaires elliptiques, entraîné par les nanofluides restent trop limitées. La revue bibliographique considérée ici ne cite, à notre connaissance, aucun travail concernant l'étude de la convection naturelle au sein des nanofluides confinés dans un espace délimité par deux cylindres elliptiques où un chauffage partiel est considéré, ce qui a motivé cette investigation.

L'intérêt porté aussi, à nos géométries, est dû essentiellement aux avantages que présentent les espaces annulaires elliptiques ainsi que les nanofluides comme des alternatives intéressantes aux espaces annulaires de forme circulaire et les fluides de base, respectivement. Ceci peut générer un grand intérêt de tels systèmes dans différents domaines industriels tels que les échangeurs de chaleur, les panneaux solaires, la géothermie ou encore les industries nucléaires.

***Chapitre 2***  
***Analyse théorique***

## 1. Description du problème

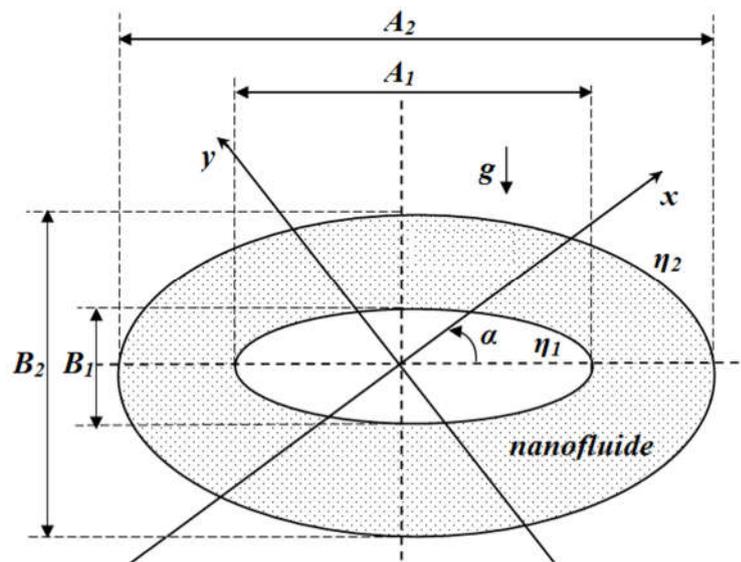


Figure 2.1 Section droite du système

On considère un espace annulaire, rempli d'un nanofluide newtonien, situé entre deux cylindres elliptiques confocaux d'axes horizontaux. La figure 2.1 représente une section droite du système, où se produit un transfert de chaleur par convection naturelle, dû au chauffage de la paroi interne, qui sera le sujet d'une étude numérique en examinant l'influence de différents paramètres tels que :

- Le nombre de *Rayleigh*  $Ra$  ( $10^3$  ;  $10^4$  ;  $10^5$ ).
- La fraction volumique du nanofluide  $\phi$  ( $0$  ;  $0.04$  ;  $0.08$ ).
- Le chauffage partiel de la paroi interne avec trois manières différentes où la longueur, des parties chauffées, est égale à la moitié du périmètre de la paroi interne (voir figure 2.2) :
  - 1<sup>er</sup> cas** : chauffage partiel du haut et du bas de la paroi.
  - 2<sup>ème</sup> cas** : chauffage du côté droit et du côté gauche de la paroi.
  - 3<sup>ème</sup> cas** : chauffage sur le quart haut droit et le quart bas gauche de la paroi.
- L'angle d'inclinaison du système  $\alpha$  ( $0^\circ$  ;  $10^\circ$  ;  $45^\circ$  ;  $60^\circ$  ;  $90^\circ$ ).
- Le type de nanoparticules utilisées ( $Cu$  ;  $Ag$  ;  $Al_2O_3$ ).

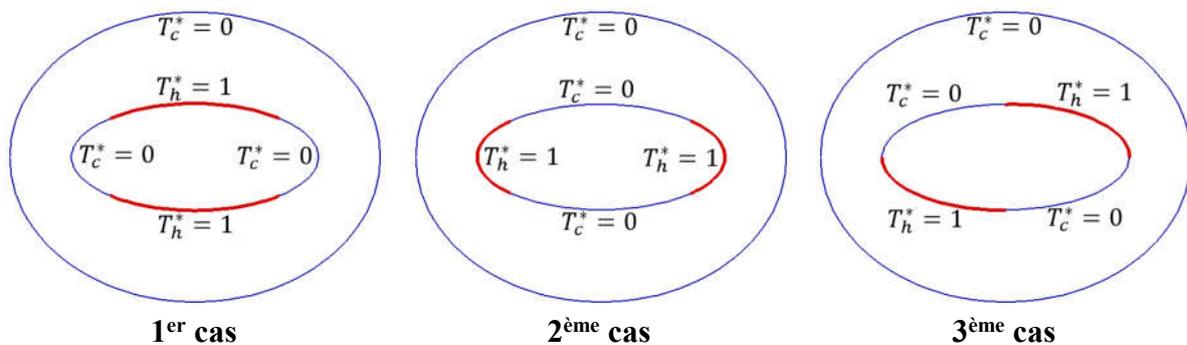


Figure 2.2 Les différents cas de chauffage partiel de la paroi interne

## 2. Les propriétés thermo-physiques du nanofluide

Pour déduire les propriétés thermo-physiques du nanofluide, on a opté pour le **modèle monophasique** qui considère que les particules solides en suspension sont très fines rendant leur fluidisation simple et sans effet de glissement assurant ainsi un équilibre thermique entre les phases solides et fluides. De ce fait, ce modèle traite le nanofluide comme un fluide homogène sur lequel sont appliqués les principes de conservation connus sauf qu'à la place des propriétés physiques du fluide il s'agira de considérer les propriétés thermo-physiques du nanofluide. En plus, ce modèle a beaucoup attiré l'attention des chercheurs pour les avantages qu'il présente : moins de consommation de temps de calcul et fiabilité des résultats obtenus.

En tenant compte des propriétés des deux phases, fluide et solide (tableau 4.1), les propriétés thermo-physiques du nanofluide sont considérées constantes. D'après plusieurs recherches [20 ; 21 ; 40 ; 49 ; 52] la masse volumique, la chaleur spécifique et le coefficient de dilatation sont donnés par les formules suivantes :

La masse volumique :

$$\rho_{nf} = \phi \rho_s + (1 - \phi) \rho_f \quad (2.1)$$

La chaleur spécifique à pression constante :

$$(\rho c_p)_{nf} = \phi (\rho c_p)_s + (1 - \phi) (\rho c_p)_f \quad (2.2)$$

Le coefficient de dilatation thermique :

$$(\rho \beta)_{nf} = \phi (\rho \beta)_s + (1 - \phi) (\rho \beta)_f \quad (2.3)$$

La viscosité dynamique effective est donnée par la formule de *Brinkman* [59] :

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1 - \phi)^{2.5}} \quad (2.4)$$

Le modèle de *Maxwell* [60] est utilisé pour déduire la conductivité thermique :

$$\lambda_{nf} = \lambda_f \frac{(\lambda_s + 2\lambda_f) - 2\phi(\lambda_f - \lambda_s)}{(\lambda_s + 2\lambda_f) + \phi(\lambda_f - \lambda_s)} \quad (2.5)$$

Où  $\phi$  la fraction volumique des nanoparticules, désigne le rapport du volume des nanoparticules sur le volume total (fluide + solide) :

$$\phi = \frac{\text{Volume solide}}{\text{Volume totale du nanofluide}}$$

## 3. Hypothèses simplificatrices

Les hypothèses simplificatrices retenues afin de réduire les équations gouvernantes du problème sont :

- L'écoulement est bidimensionnel.
- Le nanofluide est considéré newtonien et incompressible.

- L'écoulement est laminaire établi.
- Le travail, induit par les forces visqueuses et de pression, est négligeable.
- La dissipation visqueuse est négligeable.
- Le rayonnement thermique à l'intérieur du passage annulaire est négligeable.
- Les propriétés physiques du nanofluide sont constantes hormis la masse volumique qui obéit à l'**approximation de Boussinesq** dans le terme de la poussée d'*Archimède*. Cette variation est traduite par l'équation d'état :

$$\rho_{nf}^+ = \rho_{nf}(P, T) = \rho_{nf}(T) = \rho_{nf} - (\rho\beta)_{nf}(T - T_0) \quad (2.6)$$

$\beta_{nf}$ : Coefficient de dilatation thermique à pression constante.

$\rho_{nf}$ : Masse volumique de référence (constante).

$T_0$ : Température de référence (constante) associée à  $\rho_{nf}$ .

#### 4. Equations relatives à l'écoulement

Les relations nécessaires pour prédire l'évolution d'un écoulement monophasique au sein d'une géométrie donnée sont déduites des principes fondamentaux de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Les variables qui découlent dans le cas le plus général sont :

- Les deux composantes de la vitesse  $\vec{V}$ .
- La pression  $P$ .
- La température  $T$ .

Ces variables sont toutes en fonctions des coordonnées de l'espace et du temps ( $\Omega(x_i; t)$ ) pour les calculer il est nécessaire d'avoir une formulation du problème.

##### 4.1. Formulation vectorielle

L'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho_{nf}}{\partial t} + \text{div}(\rho_{nf} \vec{V}) = 0 \quad (2.7)$$

L'équation de quantité de mouvement :

$$\rho_{nf} \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} \right] = \rho_{nf}^+ \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P + \mu_{nf} \Delta \vec{V} \quad (2.8)$$

L'équation d'énergie :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) T = a_{nf} \Delta T \quad (2.9)$$

$\vec{V}$ : Vecteur vitesse d'écoulement.

$\vec{g}$ : Vecteur accélération de la pesanteur.

$P$  : Pression du nanofluide.

$T$  : Température du nanofluide.

$\mu_{nf}$  : Viscosité dynamique du nanofluide

$a_{nf}$  : Diffusivité thermique du nanofluide  $a_{nf} = \frac{\lambda_{nf}}{(\rho c_p)_{nf}}$

$\lambda_{nf}$  : Conductivité thermique du nanofluide.

$Cp_{nf}$  : chaleur spécifique à pression constante du nanofluide.

Pour le cas d'un écoulement permanent, laminaire et incompressible, dans le cadre de ***l'approximation de Boussinesq***, ces relations s'écrivent :

L'équation de continuité :

$$\text{div}(\vec{V}) = 0 \quad (2.10)$$

L'équation de quantité de mouvement :

$$(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} = \left[ 1 - \frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf}} (T - T_0) \right] \vec{g} - \frac{1}{\rho_{nf}} \overrightarrow{\text{grad}} P + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \Delta \vec{V}. \quad (2.11)$$

L'équation d'énergie :

$$(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{T} = a_{nf} \Delta T \quad (2.12)$$

#### 2.4.1- Formulation indicielle

L'équation de continuité :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (V_j) = 0 \quad (2.13)$$

L'équation de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_{nf} V_i V_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho_{nf}^+ g_i \quad (2.14)$$

$\tau_{ij}$  : Tenseur des contraintes visqueuses dont les éléments dépendent du taux de déformation du nanofluide soumis au champ de vitesse.

L'équation d'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\rho c_p)_{nf} T V_j \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda_{nf} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (2.15)$$

## 4.2. Formulation en coordonnées cartésiennes

Le problème étant bidimensionnel donc les équations s'écrivent respectivement en coordonnées cartésiennes :

L'équation de continuité :

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad (2.16)$$

L'équation de quantité de mouvement suivant x :

$$U \frac{\partial V_x}{\partial x} + V \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial P^+}{\partial x} + g \sin(\alpha) \frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf}} T_d + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right) \quad (2.17)$$

L'équation de quantité de mouvement suivant y :

$$U \frac{\partial V_y}{\partial x} + V \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial P^+}{\partial y} + g \cos(\alpha) \frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf}} T_d + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right) \quad (2.18)$$

L'équation d'énergie :

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = a_{nf} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.19)$$

$P^+ = P + \rho_{nf} gz$  : est la pression motrice.

### 4.3. Elimination du terme de pression de l'équation de quantité de mouvement

En dérivant les équations (1.13) et (1.14) respectivement par rapport à y et à x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial P^+}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left( g \sin(\alpha) \frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf}} T_d \right) + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial P^+}{\partial y} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left( g \cos(\alpha) \frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf}} T_d \right) + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

En soustrayant l'équation (2.20) de (2.21) et en utilisant l'équation de continuité ainsi que la définition de la fonction de vorticité  $\omega$ , nous obtenons :

$$V_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + V_y \frac{\partial \omega}{\partial y} = g \frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf}} \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \cos(\alpha) - \frac{\partial T}{\partial y} \sin(\alpha) \right] + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (2.22)$$

$$\omega = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial y} \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right) \quad (2.27)$$

En introduisant la fonction de courant  $\psi$ , de façon à vérifier l'équation de continuité on obtient :

$$\begin{cases} V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \omega = -\left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (2.28)$$

#### 4.4. Introduction des coordonnées elliptiques

Pour certains problèmes, l'usage d'un système de coordonnées quelconque non cartésien peut être d'un grand intérêt, pour calculer des écoulements autour des géométries complexes ou particulières. Donc, il est commode de définir un référentiel tel que les limites du système se traduisent par des valeurs constantes des coordonnées. Les coordonnées dites "*elliptiques*"  $(\eta, \theta)$  permettent, précisément dans notre cas d'obtenir ce résultat ou la paroi du cylindre elliptique intérieur est représentée par  $\eta = \eta_1 = \text{constante}$ , et celle du cylindre elliptique extérieur par  $\eta = \eta_2 = \text{constante}$ .

Dans ce système de coordonnées  $(\eta, \theta)$ , les surfaces  $\eta = \text{constantes}$  sont des cylindres elliptiques, les surfaces  $\theta = \text{constantes}$  sont des cylindres hyperboliques. Comme l'illustre la figure 2.3.

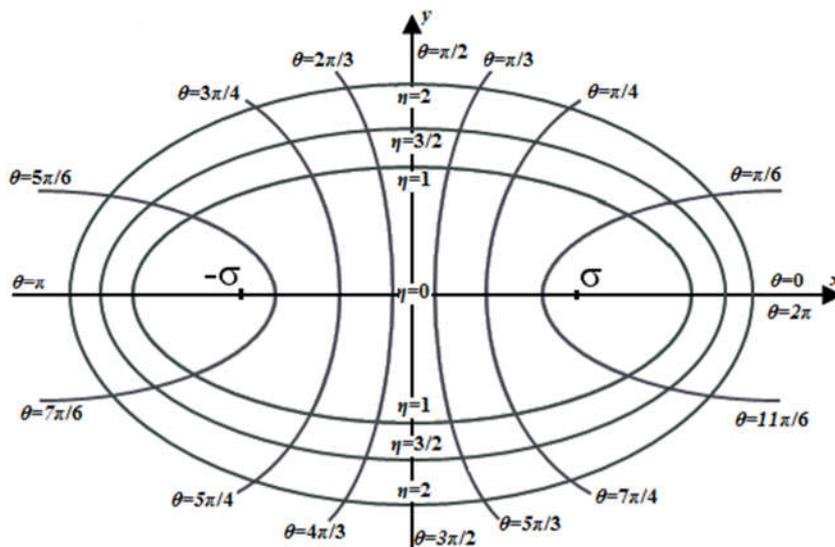


Figure 2.3 Schéma des coordonnées elliptiques  $(\eta, \theta)$

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées elliptiques s'effectue à l'aide des relations suivantes [61] :

$$\begin{cases} x = \sigma \cdot ch(\eta) \cdot \cos(\theta) \\ y = \sigma \cdot sh(\eta) \cdot \sin(\theta) \end{cases} \quad (2.29)$$

$\sigma$  : la distance focale calculée comme suit :

$$\sigma = \frac{A_1}{ch(\eta_1)} = \frac{B_1}{sh(\eta_1)} = \frac{A_2}{ch(\eta_2)} = \frac{B_2}{sh(\eta_2)} \quad (2.30)$$

Alors les équations (2.16), (2.19) et (2.22) qui régissent l'écoulement s'écrit en coordonnées elliptiques comme suit

L'équation de continuité :

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(HV_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(HV_\theta) = 0 \quad (2.31)$$

L'équation de vorticité :

$$\begin{aligned} \frac{V_\eta}{H} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{V_\theta}{H} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \frac{g}{H} \frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf}} \left\{ [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) - G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial T}{\partial \eta} \right. \\ \left. - [F(\eta, \theta) \sin(\alpha) + G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial T}{\partial \theta} \right\} + \frac{1}{H^2} \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

L'équation d'énergie :

$$V_\eta \frac{\partial T}{\partial \eta} + V_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} = a_{nf} \frac{1}{H} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.33)$$

Où  $H = \sigma [sh^2(\eta) + \sin^2(\theta)]^{1/2}$

$$\begin{cases} F(\eta, \theta) = \frac{sh(\eta) \cdot \cos(\theta)}{[sh^2(\eta) + \sin^2(\theta)]^{1/2}} \\ G(\eta, \theta) = \frac{ch(\eta) \cdot \sin(\theta)}{[sh^2(\eta) + \sin^2(\theta)]^{1/2}} \end{cases} \quad (2.34)$$

$V_\eta, V_\theta$  : composantes du vecteur vitesse suivant les directions  $\eta$  et  $\theta$  respectivement.

En introduisant la fonction de courant  $\psi$ , de façon à vérifier l'équation de continuité, on obtient :

$$\begin{cases} V_\eta = \frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ V_\theta = -\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \end{cases} \quad \text{et} \quad \omega = -\frac{1}{H^2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.35)$$

## 4.5. Adimensionalisation

L'adimensionalisation a pour avantage de simplifier les équations et généraliser les résultats.

En posant les quantités adimensionnelles suivantes :

$$H^* = \frac{H}{\sigma} ; V_\eta^* = V_\eta \frac{\sigma}{a_f} ; V_\theta^* = V_\theta \frac{\sigma}{a_f} ; \psi^* = \frac{\psi}{a_f} ; \omega^* = \omega \frac{\sigma^2}{a_f} ; T^* = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2} ; t^* = t \frac{a_f}{\sigma^2}$$

Et introduisant le nombre de *Rayleigh* et le nombre de *Prandtl* comme suit :

$$Ra = \frac{g \cdot \beta_f \cdot \Delta T \cdot \sigma^3}{\nu_f \cdot a_f} \quad \text{et} \quad Pr = \frac{\nu_f}{a_f}$$

### 4.5.1. Equations adimensionnelles

En portant les quantités adimensionnelles et les propriétés thermo-physiques du nanofluide définies précédemment dans les équations (2.31), (2.32), et (2.33) on obtient :

L'équation de continuité :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (H^* V_\eta^*) + \frac{\partial}{\partial \theta} (H^* V_\theta^*) = 0 \quad (2.36)$$

L'équation de vorticité :

$$\begin{aligned} H^* V_\eta^* \frac{\partial \omega^*}{\partial \eta} + H^* V_\theta^* \frac{\partial \omega^*}{\partial \theta} = H^* Pr Ra \left( \frac{1}{\frac{(1-\phi)\rho_f}{\phi\rho_s} + 1} \frac{\beta_p}{\beta_f} + \frac{1}{\frac{\phi\rho_s}{(1-\phi)\rho_f} + 1} \right) \\ \times \left\{ [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) - G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial T^*}{\partial \eta} - [F(\eta, \theta) \sin(\alpha) + G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right\} \\ + \frac{Pr}{(1-\phi)^{2.5} \left( (1-\phi) + \phi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} \left( \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned} \quad (2.37)$$

L'équation d'énergie :

$$H^* V_\eta^* \frac{\partial T^*}{\partial \eta} + H^* V_\theta^* \frac{\partial T^*}{\partial \theta} = \left[ \frac{\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f}}{(1-\phi) + \phi \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f}} \right] \left( \frac{\partial^2 T^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.38)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_\eta^* = \frac{1}{H^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} \\ V_\theta^* = -\frac{1}{H^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \omega^* = -\frac{1}{H^{*2}} \left( \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.39)$$

### 4.5.2. Formulation des conditions aux limites adimensionnelles

- Sur le cylindre elliptique extérieur ( $\eta=\eta_2=constante$ ) :

$$V_\eta^* = V_\theta^* = 0$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} = 0$$

$$T_2^* = T_c^* = 0$$

- Sur le cylindre elliptique intérieur ( $\eta=\eta_1=constante$ ) :

$$V_\eta^* = V_\theta^* = 0$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} = 0$$

La condition thermique pariétale sur le cylindre intérieur varie selon le cas étudié.

Dans la première partie : le cylindre est chauffé partiellement, la figure 2.2 montre les trois conditions pariétales thermiques différentes imposées, comme suit :

$$\text{Pour les parties chaudes : } T_1^* = T_h^* = 1$$

$$\text{Pour les parties froides : } T_1^* = T_c^* = 0$$

Dans la deuxième et la troisième partie où la paroi est entièrement chauffée en imposant une température constante:  $T_1^* = T_h^* = 1$

## 4.6. Coefficients d'échange de chaleur

### 4.6.1. Nombre de Nusselt local

En utilisant les définitions des températures adimensionnelles dans les deux conditions pariétales thermiques, il vient :

$$Nu = - \frac{1}{H^*} \frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f} \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \Big|_{\eta=cste} \quad (2.40)$$

### 4.6.2. Nombre de Nusselt moyen

Le nombre de *Nusselt* moyen s'exprime à partir de la relation suivante :

$$\overline{Nu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Nu d\theta \quad (2.41)$$

***Chapitre 3***  
***Formulation numérique***

## 1. Introduction

L'examen du système différentiel établi dans le chapitre précédent montre que cinq paramètres influencent le profil de notre écoulement dans l'espace annulaire, en maintenant le nombre de *Prandtl* constant, ce sont :

- Le nombre de *Rayleigh Ra*.
- La fraction volumique  $\phi$  du nanofluide utilisé.
- L'angle d'inclinaison  $\alpha$ .
- Les conditions pariétales thermiques.
- Le type des nanoparticules utilisées.

## 2. Méthode de résolution numérique

La forme finale du modèle mathématique est un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires qui ne peuvent être résolues analytiquement. Dans notre étude, on considère une solution numérique par la méthode des *volumes finis*. Cette méthode est très utilisée dans la résolution numérique des problèmes de transferts, elle est bien exposée par *Patankar* [62]. La figure 3.1 représente le domaine physique et le domaine de calcul.

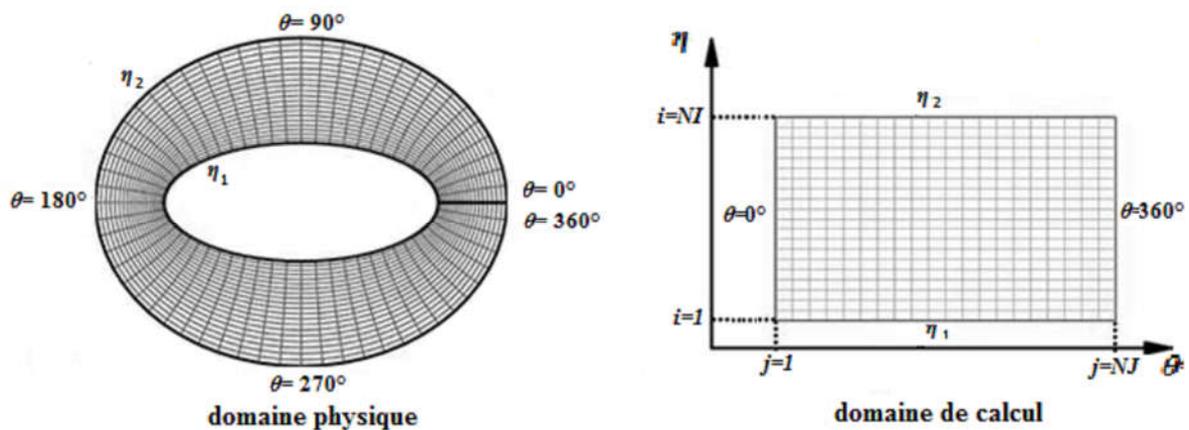


Figure 3.1 Représentation du domaine physique et du domaine de calcul

## 3. Volume élémentaire d'intégration

Le domaine physique est divisé en un nombre de volumes finis (volumes de contrôle) égaux à  $(H^{*2} \cdot \Delta\eta \cdot \Delta\theta \cdot 1)$  (le problème étant bidimensionnel on prend l'unité dans la direction  $\mathbf{z}$ ) où les variables (vorticité, température) sont stockées aux centres de ces volumes de contrôles.

Le centre d'un volume fini typique est un point  $P$ , et ses faces latérales *Est*, *Ouest*, *Nord* et *Sud*, sont localisées aux points :  $e$ ,  $w$ ,  $n$  et  $s$ .

Les points  $E$ ,  $W$ ,  $N$  et  $S$  sont les nœuds des quatre volumes de contrôles adjacents respectivement à l'*Est*, *Ouest*, *Nord* et *Sud* du volume de contrôle typique.

Pour un nœud principal  $P$ , les points  $E$  et  $W$  sont pris dans la direction  $\theta$ , tandis que  $N$  et  $S$  sont pris dans la direction  $\eta$ .

La figure 3.2 représente un volume fini typique et son voisinage dans un domaine de calcul.

Soit :  $i$  : indice des nœuds suivant  $\eta$  ( $1 < i < NI$ )

$j$  : indice des nœuds suivant  $\theta$  ( $1 < j < NJ$ )

$NI$  : le nombre de point suivant  $\eta$ .

$NJ$  : le nombre de point suivant  $\theta$ .

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \Delta\eta = \frac{\eta_{NI} - \eta_1}{NI - 1} \\ \Delta\theta = \frac{\theta_{NJ} - \theta_1}{NJ - 1} \end{cases}$$

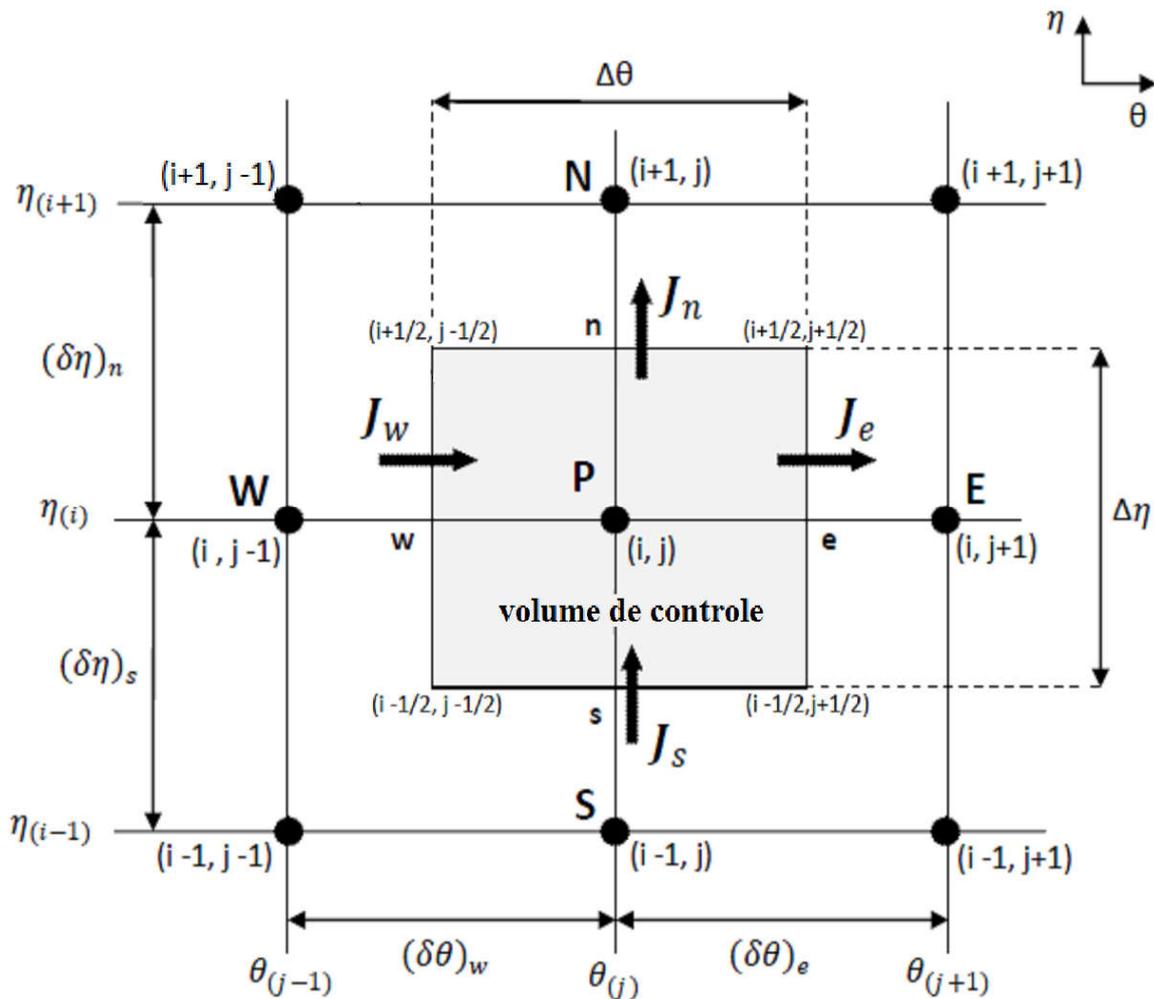


Figure 3.2 Volume de contrôle typique

#### 4. Discrétisation de l'équation générale de transfert d'une variable $\Omega$ dans le volume de contrôle

Pour illustrer la discrétisation des équations de transfert par la méthode des *volumes finis*, on considère l'équation de transfert sous sa forme générale pour un régime permanent :

$$H^{*2} \frac{\partial \Omega}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( H^* V_{\eta}^* \Omega - \Gamma_{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( H^* V_{\theta}^* \Omega - \Gamma_{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right) = S_{\Omega} \quad (3.1)$$

$\Omega$  : Fonction générale

$\Gamma_\Omega$  : Coefficient adimensionnel de diffusion

$S_\Omega$  : Terme de source

L'équation de discrétisation d'une variable  $\Omega$  est obtenue par l'intégration de son équation de conservation dans un volume fini typique. Ci-après, on présente un cas de discrétisation d'une équation de transfert de  $\Omega$ .

$$\int_0^1 \left[ \iiint_{w_s}^{e_n} \int_{t^*}^{t^*+\Delta t^*} H^{*2} \frac{\partial \Omega}{\partial t^*} dt.d\eta.d\theta \right] dz + \int_0^1 \left[ \iiint_{w_s}^{e_n} \int_{t^*}^{t^*+\Delta t^*} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( H^* V_\eta^* \Omega - \Gamma_\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \right) dt.d\eta.d\theta \right] dz$$

$$+ \int_0^1 \left[ \iiint_{w_s}^{e_n} \int_{t^*}^{t^*+\Delta t^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( H^* V_\theta^* \Omega - \Gamma_\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right) dt.d\eta.d\theta \right] dz = \int_0^1 \left[ \iiint_{w_s}^{e_n} \int_{t^*}^{t^*+\Delta t^*} S_\Omega dt.d\eta.d\theta \right] dz \quad (3.2)$$

Pour la discrétisation spatiale, le schéma de la loi de puissance (Power-Law) est utilisé pour approcher les variations de  $\Omega$  entre les points du maillage. Ce schéma qui est le schéma le plus recommandé pour les problèmes de convection-diffusion présente l'avantage d'être inconditionnellement stable, [62]. Posons :

$$\begin{cases} J_\eta = H^* V_\eta^* \Omega - \Gamma_\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \\ J_\theta = H^* V_\theta^* \Omega - \Gamma_\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \end{cases} \quad (3.3)$$

$J_\eta$  et  $J_\theta$  : Les flux totaux  $\left\{ \text{convectif} \left[ H^* V_\eta^* \Omega \right] \text{ plus diffusif} \left[ \Gamma_\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right] \right\}$ .

En portant ces valeurs dans l'équation (3.1), on obtient :

$$H^{*2} \frac{\partial \Omega}{\partial t^*} + \frac{\partial J_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial J_\theta}{\partial \theta} = S_\Omega \quad (3.4)$$

L'intégration de l'équation (3.4) dans le volume de contrôle de la *Figure 3.2* donne :

$$\left( \Omega_p - \Omega_p^0 \right) \frac{H^{*2} \Delta \eta \Delta \theta \cdot 1}{\Delta t^*} + (J_n - J_s) + (J_e - J_w) = \overline{S_\Omega} \Delta V \quad (3.5)$$

$J_n, J_s, J_e$  et  $J_w$  : Les valeurs des flux totaux aux interfaces du volume de contrôle.

$\overline{S_\Omega}$  : La valeur moyenne de  $S_\Omega$  dans ce volume de contrôle élémentaire. Ce terme peut généralement être linéarisé en fonction de  $\Omega_p$  (au nœud  $P$ ) et se mettre sous la forme :

$$\overline{S_\Omega} = S_0 + S_p \Omega_p \quad \text{avec} \quad \begin{cases} S_p < 0 \\ S_0 = \text{constant (ne dépend pas de } \Omega_p) \end{cases} \quad (3.6)$$

En intégrant aussi l'équation de continuité (2.36) dans le volume élémentaire :

$$\int_0^1 \left[ \iiint_{w_s}^{e_n} \int_{t^*}^{t^*+\Delta t^*} \frac{\partial}{\partial \eta} (H^* V_\eta^*) d\eta d\theta \right] dz + \int_0^1 \left[ \iiint_{w_s}^{e_n} \int_{t^*}^{t^*+\Delta t^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (H^* V_\theta^*) d\eta d\theta \right] dz = 0$$

Posons :  $\begin{cases} F_\eta = H^* V_\eta^* \\ F_\theta = H^* V_\theta^* \end{cases}$ , on obtient :

$$(F_n - F_s) + (F_e - F_w) = 0 \quad (3.7)$$

$F_n, F_s, F_e$  et  $F_w$ : Les débits massiques (termes de convection) à travers les surfaces de ce volume.

$$\begin{cases} F_n = (H^* V_\eta^*)_n \Delta\theta & ; & F_e = (H^* V_\theta^*)_e \Delta\eta \\ F_s = (H^* V_\eta^*)_s \Delta\theta & ; & F_w = (H^* V_\theta^*)_w \Delta\eta \end{cases} \quad (3.8)$$

Prenons en considération l'équation (3.6), en multipliant l'équation (3.7) par la fonction  $\Omega_P$  et en soustrayant l'équation obtenue de l'équation (3.5), il vient :

$$\begin{aligned} (\Omega_P - \Omega_P^0) \frac{H^{*2} \Delta\eta \Delta\theta \cdot 1}{\Delta t^*} + (J_n - F_n \Omega_P) - (J_s - F_s \Omega_P) \\ + (J_e - F_e \Omega_P) - (J_w - F_w \Omega_P) = (S_0 + S_P \Omega_P) \Delta V \end{aligned} \quad (3.9)$$

D'après *Patankar* [62], on peut représenter les termes de l'équation (3.9) de la manière suivante :

$$\begin{cases} J_n - F_n \Omega_P = a_N (\Omega_P - \Omega_N) & ; & J_e - F_e \Omega_P = a_E (\Omega_P - \Omega_E) \\ J_s - F_s \Omega_P = a_S (\Omega_S - \Omega_P) & ; & J_w - F_w \Omega_P = a_W (\Omega_W - \Omega_P) \end{cases} \quad (3.10)$$

Introduisons ces valeurs dans l'équation (3.9) on obtient :

$$\begin{aligned} (\Omega_P - \Omega_P^0) \frac{H^{*2} \Delta\eta \Delta\theta \cdot 1}{\Delta t^*} + a_N (\Omega_P - \Omega_N) - a_S (\Omega_S - \Omega_P) \\ + a_E (\Omega_P - \Omega_E) - a_W (\Omega_W - \Omega_P) = (S_0 + S_P \Omega_P) \Delta V \end{aligned}$$

Ce qui nous amène enfin à l'équation de discrétisation :

$$a_P \Omega_P = a_N \Omega_N + a_S \Omega_S + a_E \Omega_E + a_W \Omega_W + b \quad (3.11)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + a_P^0 - S_P \Delta V \\ b = S_0 \Delta V + a_P^0 \Omega_P^0 \\ a_P^0 = \frac{H^{*2} \Delta\eta \Delta\theta \cdot 1}{\Delta t^*} \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\begin{cases} a_N = D_n A(|P_n|) + \|-F_n, 0\| & ; & a_E = D_e A(|P_e|) + \|-F_e, 0\| \\ a_S = D_s A(|P_s|) + \|F_s, 0\| & ; & a_W = D_w A(|P_w|) + \|F_w, 0\| \end{cases} \quad (3.13)$$

La fonction  $A(|P|)$  est donnée par la loi de puissance (*Power-Law*), comme suit [62] :

$$A(|P|) = 0, (1 - 0.1|P|)^5$$

$D_n, D_s, D_e$  et  $D_w$  : Les termes diffusifs définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_n = \frac{(\Gamma_\Omega)_n \Delta\theta}{(\delta\eta)_n} \quad ; \quad D_e = \frac{(\Gamma_\Omega)_e \Delta\eta}{(\delta\theta)_e} \\ D_s = \frac{(\Gamma_\Omega)_s \Delta\theta}{(\delta\eta)_s} \quad ; \quad D_w = \frac{(\Gamma_\Omega)_w \Delta\eta}{(\delta\theta)_w} \end{array} \right.$$

$(\delta\eta)_n, (\delta\eta)_s, (\delta\eta)_e$  et  $(\delta\eta)_w$  : sont les pas d'intégration, qui peuvent être égaux ou non aux pas de calcul  $\Delta\eta$  et  $\Delta\theta$  respectivement. Ils sont choisis constants et égaux aux  $\Delta\eta$  et  $\Delta\theta$ . Considérons que les interfaces  $e, w, n$  et  $s$  sont aux milieux entre les nœuds  $(P, E), (P, W), (P, N)$  et  $(P, S)$  respectivement donc les grandeurs précédentes s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_n = \frac{(\Gamma_\Omega)_n \Delta\theta}{\Delta\eta} \quad ; \quad D_e = \frac{(\Gamma_\Omega)_e \Delta\eta}{\Delta\theta} \\ D_s = \frac{(\Gamma_\Omega)_s \Delta\theta}{\Delta\eta} \quad ; \quad D_w = \frac{(\Gamma_\Omega)_w \Delta\eta}{\Delta\theta} \end{array} \right. \quad (3.14)$$

$P_n, P_s, P_e$  et  $P_w$  : Les nombres de *Péclet* définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_n = \frac{F_n}{D_n} \quad ; \quad P_e = \frac{F_e}{D_e} \\ P_s = \frac{F_s}{D_s} \quad ; \quad P_w = \frac{F_w}{D_w} \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Parmi les conditions de convergence et de stabilité exigées par cette méthode, notons que dans l'équation (3.11) tous les coefficients doivent être positifs,  $S_p$  doit être négatif et le coefficient  $a_p$  doit être égal à la somme des autres coefficients plus  $a_p^0$  et  $(S_p \Delta V)$ .

La discrétisation précédente s'applique aux équations différentielles aux dérivées partielles de toutes les variables dépendantes. Dans notre cas  $\Omega$  est l'une de ces variables  $T^*$  ou  $\omega^*$ . Pour chaque variable, le coefficient de diffusion  $\Gamma_\Omega$  et la source  $S_\Omega$  sont définis en écrivant les équations de vorticité (2.37) et d'énergie (2.38) sous la forme générale de l'équation de transfert (3.1) comme suit :

L'équation de vorticité :

$$H^{*2} \frac{\partial \omega^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( H^* V_\eta^* \omega^* - \Gamma_{\omega^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( H^* V_\theta^* \omega^* - \Gamma_{\omega^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial \theta} \right) = S_{\omega^*} \quad (3.16)$$

L'équation d'énergie :

$$H^{*2} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( H^* V_\eta^* T^* - \Gamma_{T^*} \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( H^* V_\theta^* T^* - \Gamma_{T^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right) = S_{T^*} \quad (3.17)$$

Les coefficients de diffusion  $\Gamma_\Omega$  et les termes sources  $S_\Omega$  sont définis dans le Tableau 3.1

Tableau 3.1 les coefficients diffusifs et les termes sources correspondant aux variables  $\Omega$

| Equation | $\Omega$   | $\Gamma_\Omega$                                                                                           | $S_\Omega$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|----------|------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (3.16)   | $\omega^*$ | $\frac{Pr}{(1-\phi)^{2.5} \left( (1-\phi) + \phi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)}$                          | $H^* Pr Ra \left( \frac{1}{\frac{(1-\phi)\rho_f}{\phi\rho_s} + 1} \frac{\beta_p}{\beta_f} + \frac{1}{\frac{\phi\rho_s}{(1-\phi)\rho_f} + 1} \right) \times \left\{ \left[ F(\eta, \theta) \cos(\alpha) - G(\eta, \theta) \sin(\alpha) \right] \frac{\partial T^*}{\partial \eta} - \left[ F(\eta, \theta) \sin(\alpha) + G(\eta, \theta) \cos(\alpha) \right] \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right\}$ |
| (3.17)   | $T^*$      | $\left[ \frac{\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f}}{(1-\phi) + \phi \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f}} \right]$ | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |

## 5. Discrétisation de l'équation de vorticité

L'équation de vorticité (3.16) est intégrée dans le volume fini typique de dimension  $(H^{*2} \Delta\eta \Delta\theta)$ . En suivant les mêmes étapes de discrétisation, on obtient l'équation algébrique suivante :

$$\mathbf{a}_p \omega_p^* = \mathbf{a}_N \omega_N^* + \mathbf{a}_S \omega_S^* + \mathbf{a}_E \omega_E^* + \mathbf{a}_W \omega_W^* + b \quad (3.18)$$

Avec :  $S_p = 0$ , alors :

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_N + \mathbf{a}_S + \mathbf{a}_E + \mathbf{a}_W + \mathbf{a}_p^0$$

$$b = S_{\omega^*} \Delta V + \mathbf{a}_p^0 \omega_p^{*0}$$

$$b = (H^*)^3 Pr Ra \left( \frac{1}{\frac{(1-\phi)\rho_f}{\phi\rho_s} + 1} \frac{\beta_p}{\beta_f} + \frac{1}{\frac{\phi\rho_s}{(1-\phi)\rho_f} + 1} \right) \left\{ \left[ F(\eta, \theta) \cos(\alpha) - G(\eta, \theta) \sin(\alpha) \right] \frac{\partial T^*}{\partial \eta} - \left[ F(\eta, \theta) \sin(\alpha) + G(\eta, \theta) \cos(\alpha) \right] \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right\} \Delta\eta \Delta\theta + \mathbf{a}_p^0 (\omega^*)_p^0$$

$$\text{Où : } \begin{cases} \left. \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right|_{i,j} = \frac{T^*(i+1, j) - T^*(i-1, j)}{2\Delta\eta} \\ \left. \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right|_{i,j} = \frac{T^*(i, j+1) - T^*(i, j-1)}{2\Delta\theta} \end{cases}$$

$a_N$ ,  $a_S$ ,  $a_E$  et  $a_W$  : ont respectivement les mêmes expressions que dans le système (3.13) leur détermination nécessite la détermination des coefficients  $F_i$ ,  $D_i$ ,  $P_i$  ( $i=n,s,e,w$ ) en remplaçant les vitesses adimensionnelles  $V_\eta^*$  et  $V_\theta^*$  dans le système (3.8) par :

$$\begin{cases} V_\eta^* = \frac{1}{H^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} \\ V_\theta^* = -\frac{1}{H^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} \end{cases}, \text{ on obtient :}$$

$$\begin{cases} F_n = \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} \right)_n \Delta\theta & ; & F_e = \left( -\frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} \right)_e \Delta\eta \\ F_s = \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} \right)_s \Delta\theta & ; & F_w = \left( -\frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} \right)_w \Delta\eta \end{cases} \quad (3.19)$$

En appliquant une interpolation linéaire (*différence centrée*), et en tenant compte que les interfaces sont à mi-distance des nœuds on trouve :

$$\begin{cases} \psi_n^* = \frac{\psi^*(i+1, j) + \psi^*(i, j)}{2} & ; & \psi_e^* = \frac{\psi^*(i, j+1) + \psi^*(i, j)}{2} \\ \psi_s^* = \frac{\psi^*(i, j) + \psi^*(i-1, j)}{2} & ; & \psi_w^* = \frac{\psi^*(i, j) + \psi^*(i, j-1)}{2} \end{cases}$$

Le développement du gradient de la fonction de courant est établi d'après la démarche de *Nogotov* [63], comme suit :

Interface « n »

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} \right)_n &= \frac{\psi^*(i+1/2, j+1/2) - \psi^*(i+1/2, j-1/2)}{\Delta\theta} \\ \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} \right)_n &= \frac{1}{2\Delta\theta} \left[ \frac{\psi^*(i+1, j+1) + \psi^*(i+1, j)}{2} + \frac{\psi^*(i, j) + \psi^*(i, j+1)}{2} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2\Delta\theta} \left[ \frac{\psi^*(i+1, j-1) + \psi^*(i, j-1)}{2} + \frac{\psi^*(i, j) + \psi^*(i+1, j)}{2} \right] \\ \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} \right)_n &= \frac{\psi^*(i+1, j+1) + \psi^*(i, j+1) - \psi^*(i+1, j-1) - \psi^*(i, j-1)}{4\Delta\theta} \end{aligned}$$

Interface « s »

$$\left( \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} \right)_s = \frac{\psi^*(i-1/2, j+1/2) - \psi^*(i-1/2, j-1/2)}{\Delta\theta}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \theta}\right)_s = \frac{1}{2\Delta\theta} \left[ \frac{\psi^*(i, j+1) + \psi^*(i-1, j+1)}{2} + \frac{\psi^*(i, j) + \psi^*(i-1, j)}{2} \right]$$

$$- \frac{1}{2\Delta\theta} \left[ \frac{\psi^*(i, j-1) + \psi^*(i-1, j-1)}{2} + \frac{\psi^*(i, j) + \psi^*(i-1, j)}{2} \right]$$

$$\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \theta}\right)_s = \frac{\psi^*(i, j+1) + \psi^*(i-1, j+1) - \psi^*(i, j-1) - \psi^*(i-1, j-1)}{4\Delta\theta}$$

Interface « e »

$$\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \eta}\right)_e = \frac{\psi^*(i+1/2, j+1/2) - \psi^*(i-1/2, j+1/2)}{\Delta\eta}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \eta}\right)_e = \frac{1}{2\Delta\eta} \left[ \frac{\psi^*(i+1, j+1) + \psi^*(i+1, j)}{2} + \frac{\psi^*(i, j) + \psi^*(i, j+1)}{2} \right]$$

$$- \frac{1}{2\Delta\eta} \left[ \frac{\psi^*(i-1, j+1) + \psi^*(i-1, j)}{2} + \frac{\psi^*(i, j) + \psi^*(i, j+1)}{2} \right]$$

$$\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \eta}\right)_e = \frac{\psi^*(i+1, j+1) + \psi^*(i+1, j) - \psi^*(i-1, j+1) - \psi^*(i-1, j)}{4\Delta\eta}$$

Interface « w »

$$\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \eta}\right)_w = \frac{\psi^*(i+1/2, j-1/2) - \psi^*(i-1/2, j-1/2)}{\Delta\eta}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \eta}\right)_w = \frac{1}{2\Delta\eta} \left[ \frac{\psi^*(i+1, j+1) + \psi^*(i+1, j-1)}{2} + \frac{\psi^*(i, j-1) + \psi^*(i, j)}{2} \right]$$

$$- \frac{1}{2\Delta\eta} \left[ \frac{\psi^*(i-1, j) + \psi^*(i-1, j-1)}{2} + \frac{\psi^*(i, j-1) + \psi^*(i, j)}{2} \right]$$

$$\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \eta}\right)_w = \frac{\psi^*(i+1, j) + \psi^*(i+1, j-1) - \psi^*(i-1, j) - \psi^*(i-1, j-1)}{4\Delta\eta}$$

Et le système (3.19) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_n = \frac{1}{4} [\psi^*(i+1, j+1) + \psi^*(i, j+1) - \psi^*(i+1, j-1) - \psi^*(i, j-1)] \\ F_s = \frac{1}{4} [\psi^*(i, j+1) + \psi^*(i-1, j+1) - \psi^*(i, j-1) - \psi^*(i-1, j-1)] \\ F_e = \frac{1}{4} [\psi^*(i-1, j+1) + \psi^*(i-1, j) - \psi^*(i+1, j+1) - \psi^*(i+1, j)] \\ F_w = \frac{1}{4} [\psi^*(i-1, j-1) + \psi^*(i-1, j) - \psi^*(i+1, j-1) - \psi^*(i+1, j)] \end{array} \right. \quad (3.20)$$

D'après le tableau 3.1 :  $\Gamma_{\omega^*} = \frac{Pr}{(1-\phi)^{2.5} \left( (1-\phi) + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right)}$ , ce qui donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_n = D_s = \frac{Pr}{(1-\phi)^{2.5} \left( (1-\phi) + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right)} \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_e = D_w = \frac{Pr}{(1-\phi)^{2.5} \left( (1-\phi) + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right)} \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_n = \frac{1}{Pr} (1-\phi)^{2.5} \left( (1-\phi) + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right) F_n \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \quad ; \quad P_e = \frac{1}{Pr} (1-\phi)^{2.5} \left( (1-\phi) + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right) F_e \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ P_s = \frac{1}{Pr} (1-\phi)^{2.5} \left( (1-\phi) + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right) F_s \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \quad ; \quad P_w = \frac{1}{Pr} (1-\phi)^{2.5} \left( (1-\phi) + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right) F_w \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \end{array} \right.$$

Pour homogénéiser les notations dans l'équation (3.18), on symbolise les nœuds  $P$ ,  $W$ ,  $E$ ,  $N$  et  $S$  respectivement par :  $(i,j)$ ,  $(i,j-1)$ ,  $(i,j+1)$ ,  $(i+1,j)$ ,  $(i-1,j)$  (voir Figure 3.2) et les coefficients  $a_N$ ,  $a_S$ ,  $a_E$  et  $a_W$  sont pris aux nœuds  $(i,j)$ . Donc l'équation (3.18) peut s'écrire comme suit :

$$a_P \omega^*(i,j) = a_N \omega^*(i+1,j) + a_S \omega^*(i-1,j) + a_E \omega^*(i,j+1) + a_W \omega^*(i,j-1) + b \quad (3.21)$$

### 5.1. Discrétisation des conditions aux limites de vorticité

Pour déterminer la vorticité  $\omega^*$  sur les parois, nous utilisons la méthode élaborée par *Roach* [64], qui a exprimé  $\omega^*$  en fonction de  $\psi^*$  à l'aide d'un développement en série de *Taylor* comme suit

- Sur la paroi du cylindre elliptique intérieur ( $\eta = \eta_I$ )

$$\omega_1^* = -\frac{1}{H^{*2}} \left( \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta^2} \right)_{\eta=\eta_I}$$

Le développement en série de *Taylor* de la fonction de courant au voisinage de la paroi active intérieure ( $i=I, j$ ) donne :

$$\psi^*(2,j) = \psi^*(1,j) + \frac{\Delta\eta}{1!} \frac{\partial \psi^*(1,j)}{\partial \eta} + \frac{\Delta\eta^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi^*(1,j)}{\partial \eta^2} + \dots$$

Alors la vorticité sur cette paroi s'écrit :

$$\omega^*(1,j) = -\frac{1}{H^{*2}(1,j)} \left[ \frac{\psi^*(1,j+1) - 2\psi^*(1,j) + \psi^*(1,j-1)}{\Delta\theta^2} + \frac{2\psi^*(2,j) - 2\psi^*(1,j)}{\Delta\eta^2} \right]$$

- Sur la paroi du cylindre elliptique extérieur ( $\eta = \eta_{NI}$ )

De la même façon pour la paroi intérieure, la vorticité sur la paroi extérieure s'écrit :

$$\omega^*(NI, j) = -\frac{1}{H^{*2}(NI, j)} \left[ \frac{\psi^*(NI, j+1) - 2\psi^*(NI, j) + \psi^*(NI, j-1)}{\Delta\theta^2} + \frac{2\psi^*(NI-1, j) - 2\psi^*(NI, j)}{\Delta\eta^2} \right]$$

## 6. Discrétisation de l'équation d'énergie

L'équation de l'énergie (3.17) est intégrée dans le même volume de contrôle ( $H^{*2} \cdot \Delta\eta_p \cdot \Delta\theta_p$ ).

Après discrétisation, on obtient l'équation algébrique suivante :

$$\mathbf{a}_P T_P^* = \mathbf{a}_N T_N^* + \mathbf{a}_S T_S^* + \mathbf{a}_E T_E^* + \mathbf{a}_W T_W^* + b \quad (3.22)$$

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_N + \mathbf{a}_S + \mathbf{a}_E + \mathbf{a}_W + \mathbf{a}_P^0$$

$$b = \mathbf{a}_P^0 T_P^{*0} \text{ où } S_P = 0$$

Les coefficients  $a_i$  et  $F_i$  ont, respectivement, les mêmes expressions que dans les systèmes (3.13) et (3.20), les coefficients  $D_i$  et  $P_i$  sont déterminés à l'aide des systèmes (3.14) et (3.15), où :

$$\Gamma_{T^*} = \left[ \frac{\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f}}{(1-\phi) + \phi \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f}} \right], \text{ ce qui donne :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_n = D_s = \left[ \frac{\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f}}{(1-\phi) + \phi \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f}} \right] \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_e = D_w = \left[ \frac{\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f}}{(1-\phi) + \phi \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f}} \right] \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_n = F_n \left[ \frac{(1-\phi) + \phi \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f}}{\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f}} \right] \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_s = F_s \left[ \frac{(1-\phi) + \phi \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f}}{\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f}} \right] \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} P_e = F_e \left[ \frac{(1-\phi) + \phi \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f}}{\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f}} \right] \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ P_w = F_w \left[ \frac{(1-\phi) + \phi \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f}}{\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f}} \right] \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \end{array} \right.$$

Prenant la même notation utilisée pour homogénéiser l'équation (3.21), on peut écrire l'équation (3.22) comme suit :

$$a_p T^*(i, j) = a_N T^*(i+1, j) + a_S T^*(i-1, j) + a_E T^*(i, j+1) + a_W T^*(i, j-1) + b \quad (3.23)$$

### 6.1. Discrétisation des conditions aux limites de la température

- Sur la paroi du cylindre elliptique extérieur ( $\eta = \eta_{NI}$ ) la paroi est maintenue froide :

$$\begin{cases} a_p = 1 \\ a_E = a_W = a_N = a_S = 0 \\ a_p^0 = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

- Sur la paroi du cylindre elliptique intérieur ( $\eta = \eta_I$ )

**1<sup>ère</sup> partie** : paroi partiellement chauffée (voir figure 2.2)

$$\text{Pour les parties chaudes} \quad \begin{cases} a_p = 1 \\ a_E = a_W = a_N = a_S = 0 \\ a_p^0 = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Pour les parties froides} \quad \begin{cases} a_p = 1 \\ a_E = a_W = a_N = a_S = 0 \\ a_p^0 = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

**2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> parties** : paroi entièrement chauffée

$$\begin{cases} a_p = 1 \\ a_E = a_W = a_N = a_S = 0 \\ a_p^0 = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

## 7. Discrétisation de l'équation de la fonction de courant

Prenons l'équation de vorticité :

$$\omega^* = -\frac{1}{H^{*2}} \left( \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta^2} \right)$$

Réécrivons cette équation sous la forme

$$-H^{*2}(i, j) \omega^*(i, j) = \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \eta^2} \Big|_{i,j} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta^2} \Big|_{i,j}$$

Pour discrétiser cette équation nous utiliserons le développement en série de *Taylor*, ce qui donne :

$$-H^{*2}(i,j)\omega^*(i,j) = \frac{\psi^*(i+1,j) + \psi^*(i-1,j) - 2\psi^*(i,j)}{\Delta\eta^2} + \frac{\psi^*(i,j+1) + \psi^*(i,j-1) - 2\psi^*(i,j)}{\Delta\theta^2}$$

La fonction de courant au nœud  $P$  sera donc exprimée en fonction de celles aux nœuds  $W, N, E$  et  $S$  comme suit :

$$\psi^*(i,j) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\Delta\eta^2} + \frac{1}{\Delta\theta^2} \right]^{-1} \left[ H^{*2}(i,j)\omega^*(i,j) + \frac{\psi^*(i+1,j) + \psi^*(i-1,j)}{\Delta\eta^2} + \frac{\psi^*(i,j+1) + \psi^*(i,j-1)}{\Delta\theta^2} \right] \quad (3.24)$$

### 7.1. Discrétisation des Conditions aux limites de la fonction de courant

Prenant les conditions aux limites déterminées dans le chapitre précédent

- Sur la paroi du cylindre elliptique intérieur ( $\eta = \eta_I$ )

$$\left. \frac{\partial\psi^*}{\partial\eta} \right|_{1,j} = \frac{-3\psi^*(1,j) + 4\psi^*(2,j) - \psi^*(3,j)}{2\Delta\eta} = 0 \quad \text{alors :}$$

$$\psi^*(1,j) = \frac{4\psi^*(2,j) - \psi^*(3,j)}{3}$$

- Sur la paroi du cylindre elliptique extérieur ( $\eta = \eta_{NI}$ )

de la même façon on obtient :

$$\psi^*(NI,j) = \frac{4\psi^*(NI-1,j) - \psi^*(NI-2,j)}{3}$$

### 8. Discrétisation des composantes de la vitesse

Le schéma des *différences centrées* est utilisé pour discrétiser les composantes de vitesse adimensionnelles  $V_\eta^*$  et  $V_\theta^*$  comme suit :

$$V_\eta^* = \frac{1}{H^*(i,j)} \left. \frac{\partial\psi^*}{\partial\theta} \right|_{i,j} = \frac{1}{H^*(i,j)} \left[ \frac{\psi^*(i,j+1) - \psi^*(i,j-1)}{2\Delta\theta} \right]$$

$$V_\theta^* = \frac{-1}{H^*(i,j)} \left. \frac{\partial\psi^*}{\partial\eta} \right|_{i,j} = \frac{-1}{H^*(i,j)} \left[ \frac{\psi^*(i+1,j) - \psi^*(i-1,j)}{2\Delta\eta} \right]$$

### 9. Processus de calcul

Pour résoudre le système d'équations (3.21), (2.23) et (2.24) nous utilisons la méthode proposée par *E.F. NOGOTOV* [63]. En choisissant une méthode itérative à coefficients de relaxation, ces équations peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
(\omega^*)^{n+1}(i, j) = & (1 - \xi_{\omega^*}) (\omega^*)^n(i, j) + \frac{\xi_{\omega^*}}{a_p} \left[ a_E (\omega^*)^n(i, j+1) + a_W (\omega^*)^{n+1}(i, j-1) \right. \\
& \left. + a_N (\omega^*)^n(i+1, j) + a_S (\omega^*)^{n+1}(i-1, j) + b(i, j) \right] \quad (3.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(T^*)^{n+1}(i, j) = & (1 - \xi_{T^*}) (T^*)^n(i, j) + \frac{\xi_{T^*}}{a_p} \left[ a_E (T^*)^n(i, j+1) + a_W (T^*)^{n+1}(i, j-1) \right. \\
& \left. + a_N (T^*)^n(i+1, j) + a_S (T^*)^{n+1}(i-1, j) + b(i, j) \right] \quad (3.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\psi^*)^{n+1}(i, j) = & (1 - \xi_{\psi^*}) (\psi^*)^n(i, j) + \frac{\xi_{\psi^*}}{2} \left[ \frac{1}{\Delta \eta^2} + \frac{1}{\Delta \theta^2} \right]^{-1} \left[ H^{*2}(i, j) \omega^*(i, j) \right. \\
& \left. + \frac{(\psi^*)^n(i+1, j) + (\psi^*)^{n+1}(i-1, j)}{\Delta \eta^2} + \frac{(\psi^*)^n(i, j+1) + (\psi^*)^{n+1}(i, j-1)}{\Delta \theta^2} \right] \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Avec :  $n$  : nième itération.

$\xi_r^*$ ,  $\xi_{\omega^*}^*$ ,  $\xi_{\psi^*}^*$  : sont les facteurs de relaxation. Leurs valeurs dépendent de la valeur du nombre de *Rayleigh*.

La résolution du système d'équation (3.25), (3.26) et (3.27), en utilisant le code de calcul, se fait comme suit :

1. Initialisation des valeurs de la température, de la vorticité et de la fonction de courant au sein du maillage.
2. Calcul de la distribution de la température.
3. Calcul de la vorticité.
4. Calcul de la distribution de la fonction de courant.
5. Le processus itératif est répété jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de changement significatif de la valeur de  $\psi^*$  par rapport au critère de convergence suivant :

$$\left| \frac{\max(\psi^*)^{n+1} - \max(\psi^*)^n}{\max(\psi^*)^{n+1}} \right| \leq 10^{-6}$$

6. Le même critère est utilisé pour la température.
7. Le même critère est utilisé pour la vorticité.
8. Calcul des composantes de la vitesse.
9. Stockage des valeurs de  $T^*$ ,  $\omega^*$  et  $\psi^*$ .



# *Chapitre 4*

## *Résultats et discussions*

## 1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter nos résultats avec leurs discussions, où nous présentons la distribution de la température par des isothermes et la structure de l'écoulement par des lignes de courant. Le taux de transfert de la chaleur au niveau des parois de l'espace annulaire sera présenté par les nombres de Nusselt locaux et moyens. Pour une meilleure représentation de ces résultats nous les avons divisés en trois parties.

La première partie traite la convection naturelle thermique dans un espace annulaire elliptique où la paroi interne est chauffée partiellement de trois manières différentes (figure 2.2), alors que la paroi externe est maintenues froide pour  $\alpha=0^\circ$ .

- 1<sup>er</sup> cas de chauffage partiel : le cylindre intérieur est chauffé partiellement de la même manière en haut et en bas.
- 2<sup>ème</sup> cas de chauffage partiel : le cylindre intérieur est chauffé partiellement de la même manière du côté gauche et du côté droit.
- 3<sup>ème</sup> cas de chauffage partiel : le cylindre intérieur est chauffé partiellement de la même manière en imposant une température constante sur le quart supérieur droit et le quart inférieur gauche.

Où la longueur, des parties chauffées, est égale à la moitié du périmètre de la paroi interne.

La deuxième partie concerne la convection naturelle dans le même espace annulaire où le cylindre intérieur est entièrement chauffé par une température constante imposée où l'effet de l'angle d'inclinaison du système est considéré pour des valeurs de  $\alpha$  égales à  $0^\circ, 10^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  et  $90^\circ$ .

Dans la troisième partie, une comparaison, entre l'effet de l'ajout des différents types des nanoparticules (leurs propriétés physique sont listées dans le tableau 4.1) au fluide de base au sein de notre espace annulaire, est établie pour  $\alpha=90^\circ$ ,  $Ra=10^5$  et  $\phi=0.08$ .

Tous les calculs sont effectués pour, les excentricités des cylindres, interne et externe,  $e_1=0.9$  et  $e_2=0.6$ , respectivement, un nombre de *Rayleigh*  $10^3 < Ra < 10^5$ , une fraction volumique  $0 < \phi < 0.08$  et un nombre de *Prandtl*  $Pr=6.2$  (de l'eau).

Tableau 4.1 Propriétés physiques des différentes nanoparticules utilisées

|                                           | $\rho$ [kg.m <sup>-3</sup> ] | $c_p$ [J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ] | $\lambda$ [W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ] | $\beta \times 10^{-5}$ [K <sup>-1</sup> ] |
|-------------------------------------------|------------------------------|----------------------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| Eau pure                                  | 997.1                        | 4179                                         | 0.613                                           | 21                                        |
| Cuivre (Cu)                               | 8933                         | 385                                          | 401                                             | 1.67                                      |
| Argent (Ag)                               | 10500                        | 235                                          | 429                                             | 1.89                                      |
| Alumine (Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ) | 3970                         | 765                                          | 46                                              | 0.75                                      |

## 2. Etude de maillage

Dans cette étude plusieurs maillages ont été utilisés arbitrairement pour voir leur effet sur les résultats obtenus pour un espace annulaire elliptique rempli par du *Cu/Eau* où la paroi interne

est chauffée entièrement par une température constante imposée pour toutes les gammes, des nombres de *Rayleigh* et les fractions volumiques, considérées quand  $\alpha=0^\circ$ . Le tableau 4.2 montre la variation du nombre de *Nusselt* moyen, en fonction du nombre de nœuds, ce qui nous a permis de choisir le maillage 51x101.

Tableau 4.2 Variation du nombre de *Nusselt* moyen de la paroi interne, en fonction du nombre de nœuds

| $Ra$   | $\phi$ | 11×21 | 21×41 | 31×61 | 41×81 | 51×101 | 61×121 |
|--------|--------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|
| $10^3$ | 0      | 2.14  | 2.11  | 2.10  | 2.10  | 2.10   | 2.10   |
| $10^3$ | 0.04   | 2.40  | 2.38  | 2.37  | 2.36  | 2.36   | 2.36   |
| $10^3$ | 0.08   | 2.69  | 2.66  | 2.65  | 2.65  | 2.64   | 2.64   |
| $10^4$ | 0      | 2.74  | 2.77  | 2.78  | 2.78  | 2.79   | 2.79   |
| $10^4$ | 0.04   | 3.10  | 3.14  | 3.15  | 3.15  | 3.16   | 3.16   |
| $10^4$ | 0.08   | 3.46  | 3.49  | 3.51  | 3.51  | 3.52   | 3.52   |
| $10^5$ | 0      | 4.96  | 4.93  | 4.94  | 4.95  | 4.95   | 4.95   |
| $10^5$ | 0.04   | 5.63  | 5.59  | 5.60  | 5.61  | 5.62   | 5.62   |
| $10^5$ | 0.08   | 6.27  | 6.24  | 6.25  | 6.26  | 6.27   | 6.27   |

### 3. Validation numérique

Nous avons comparé les résultats issus de notre code de calcul avec des résultats de travaux similaires disponibles dans la littérature. Pour le cas d'un espace annulaire elliptique rempli d'air, une comparaison quantitative avec les références [2] et [11] est réalisée (voir tableau 4.3). Ainsi que, la référence [49] est utilisée pour le cas d'un espace annulaire rempli par un nanofluide (*Cu/Eau*) (voir figure 4.1 et 4.2). Nous remarquons que quantitativement et qualitativement nos résultats et les leurs sont en très bon accord.

Tableau 4.3 Comparaison du nombre de *Nusselt* moyen des références [2] et [11] avec nos résultats

| $e_1$ | $e_2$ | $\alpha$   | $Ra$     | Paroi interne |           |               | Paroi externe |           |               |
|-------|-------|------------|----------|---------------|-----------|---------------|---------------|-----------|---------------|
|       |       |            |          | Réf. [2]      | Réf. [11] | Nos Résultats | Réf. [2]      | Réf. [11] | Nos Résultats |
| 0.9   | 0.4   | $0^\circ$  | $10^4$   | 3.53          | 3.49      | 3.55          | 1.19          | 1.14      | 1.11          |
| 0.86  | 0.4   | $90^\circ$ | $10^4$   | 3.68          | 3.72      | 3.78          | 1.35          | 1.37      | 1.41          |
| 0.86  | 0.4   | $90^\circ$ | $4.10^4$ | 5.34          | 5.20      | 5.23          | 1.93          | 1.85      | 1.87          |
| 0.68  | 0.4   | $90^\circ$ | $10^4$   | 2.66          | -         | 2.79          | 1.38          | -         | 1.40          |

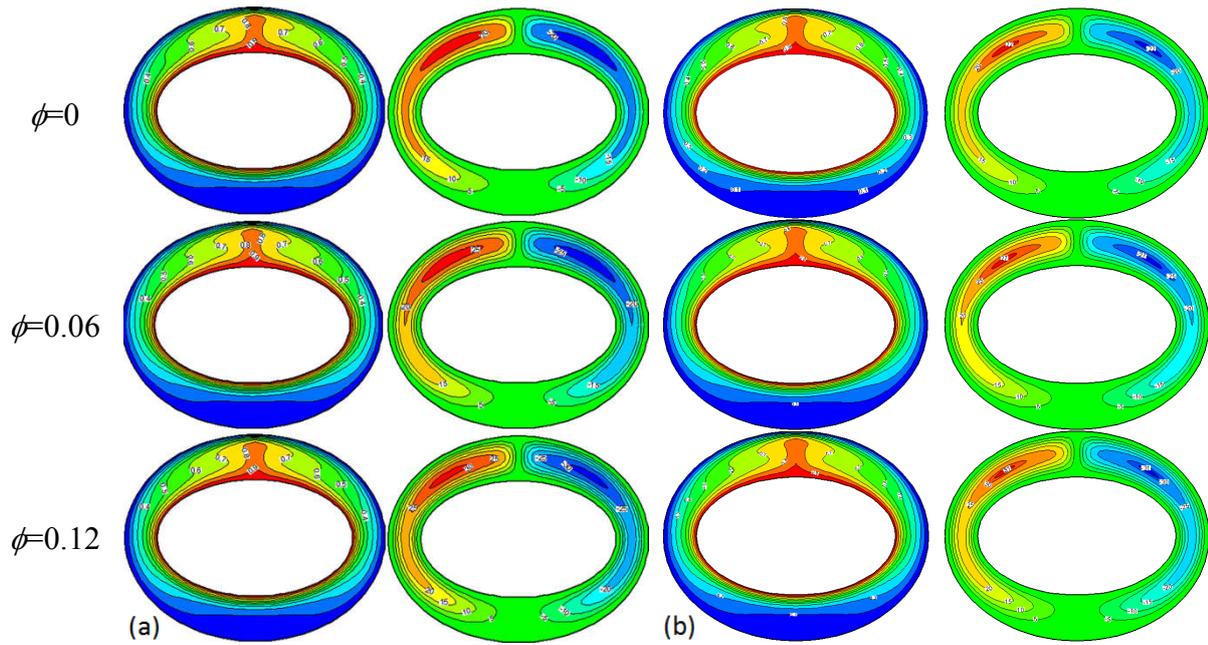


Figure 4.1 Comparaison d'isothermes et de lignes de courant pour  $e_1=0.8$ ,  $e_2=0.6$  et  $Ra=10^5$  entre Réf. [49] (a) et nos résultats (b)

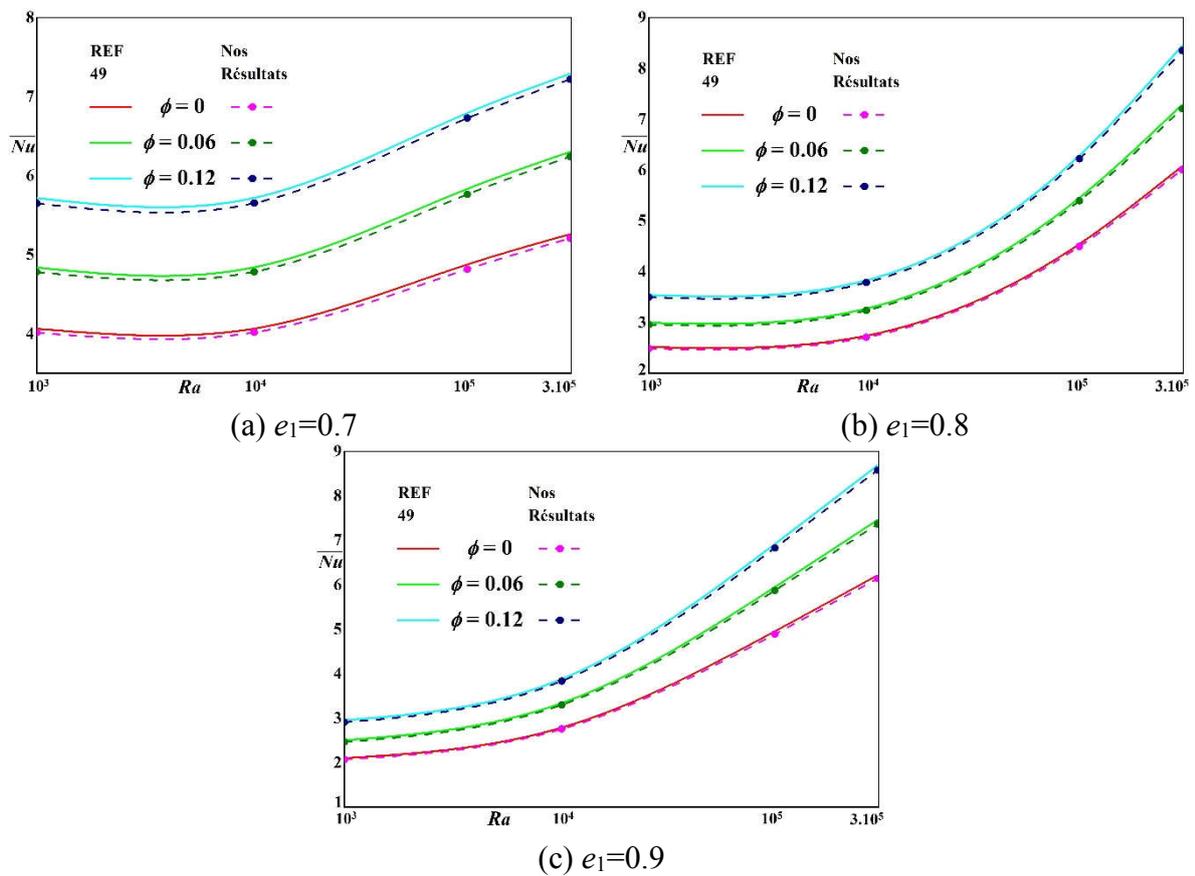


Figure 4.2 Comparaison des variations des nombres de *Nusselt* moyen de la paroi interne en fonction du nombre de *Rayleigh* entre Réf. [49] et nos résultats

## 4. Résultats et discussions

### 4.1. Première partie : paroi interne chauffée partiellement

#### 4.1.1. 1<sup>er</sup> cas : chauffage partiel du haut et du bas de la paroi interne

Les figures 4.3 et 4.4 montrent les isothermes et les lignes de courant, respectivement, pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh et différentes fractions volumiques, pour ce premier cas de chauffage, où le cylindre intérieur est chauffé partiellement de la même manière en haut et en bas.

Pour les valeurs basses du nombre de *Rayleigh* ( $Ra=10^3$ ) (voir figures 4.3.a), deux groupes de lignes isothermes presque parallèles se forment autour des parties chauffées, on remarque une décroissance de la température des deux parties chauffées de la paroi interne vers la paroi externe qui est maintenue froide. L'écoulement ici s'organise en un groupe de quatre vortex occupant tout l'espace annulaire et formé chacun d'un groupe de cellules concentriques (voir figures 4.4.a). Deux de ces vortex sont contrarotatifs dans la partie supérieure de l'espace annulaire et les deux autres (aussi contrarotatifs) sont dans la moitié inférieure. Les faibles valeurs maximales de la fonction de courant trouvées pour ce cas-là, ainsi que la distribution des lignes isothermes, traduisent que nous sommes en présence d'un régime d'écoulement pseudo-conductif.

En augmentant la valeur du nombre de Rayleigh ( $Ra=10^4$ ) (voir figures 4.3.b et 4.4.b), les isothermes dans la partie supérieure de l'espace annulaire se modifient pour adopter la forme d'un champignon, et l'écoulement s'organise en deux vortex contrarotatifs dans cette partie-là. Ce qui dénote que nous sommes en présence d'une convection naturelle naissante. Par contre, dans la partie inférieure de l'espace annulaire, les lignes isothermes qui restent parallèles autour de la partie chauffée traduisent une stratification thermique dans cette région où apparaissent deux cellules contrarotatives, les valeurs maximales de la fonction de courant restent ici relativement faibles.

Les lignes isothermes illustrant le cas où le nombre de Rayleigh ( $Ra=10^5$ ) (voir figures 4.3.c) montrent la prédominance de la convection naturelle comme mode de transfert de chaleur, ces lignes sont très serrées au niveau des parois ce qui signifie qu'il y existe une intensification du transfert de chaleur, alors que dans la partie basse de l'espace annulaire, l'absence d'isothermes signifie que nous sommes en présence d'une zone morte. L'écoulement devient bicellulaire (voir figures 4.4.c), formé de deux vortex dont les centres se déplacent vers le haut de notre espace annulaire libérant la partie basse (zone morte). Les valeurs maximales de la fonction de courant deviennent plus importantes (écoulement très intense).

En examinant l'effet de l'ajout des nanoparticules sur l'écoulement, les valeurs maximales de la fonction de courant diminuent quand les forces de viscosité dominent celles de la flottabilité et elles augmentent quand ce sont les forces de flottabilité qui dominent celles de la viscosité.

Les variations des nombres de *Nusselt* locaux sur la paroi intérieure partiellement chauffée par le haut et le bas (1<sup>er</sup> cas), sont illustrées sur la figure 4.5, pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh et de la fraction volumique.

Pour  $Ra=10^3$  (voir figure 4.5.a) les profils des nombres de Nusselt locaux correspondants aux valeurs 0, 0.04 et 0.08 de la fraction volumique ont les mêmes allures du fait que les distributions des isothermes sont presque identiques pour l'eau pure et le nanofluide, comme le montrent les (figures 4.3.a), ainsi le transfert thermique s'opère essentiellement par conduction.

Pour  $Ra=10^4$  et  $Ra=10^5$  (voir figures 4.5.b et 4.5.c), les écarts entre les valeurs des nombres de Nusselt locaux apparaissent mieux ici (les forces de flottabilité dominent les forces de viscosité), ceci nous permet de dire que nous obtenons une amélioration de transfert de chaleur par ajout des nanoparticules au fluide de base.

Nous remarquons aussi que pour toute la gamme, des nombres de Rayleigh, utilisée, les valeurs les plus élevées des nombres de Nusselt locaux sont obtenues pour la fraction volumique la plus importante, ceci d'une part, d'autre part les valeurs de ces nombres de Nusselt locaux atteignent leurs maximums sur les limites des parties chauffées, puis commencent à diminuer en allant vers le centre de celles-ci et vers l'entrefer horizontal pour devenir minimums.

Nous remarquons aussi, que les valeurs maximales qu'atteignent ces nombres de Nusselt locaux dans la moitié supérieure de notre espace annulaire, sont plus importantes que celles obtenues dans la moitié inférieure de ce dernier, ceci est dû au fait que les conditions pariétales thermiques imposées permettent d'obtenir un mouvement du fluide en haut de l'enceinte et une stratification thermique en bas de celle-ci.

La figure 4.6 montre les variations des nombres de *Nusselt* moyens, sur les parois, interne (a) et externe (b), pour différentes valeurs de la fraction volumique, pour le 1<sup>er</sup> cas du chauffage partiel. Il est constaté que pour une valeur donnée de la fraction volumique le nombre de Nusselt moyen augmente en fonction du nombre de *Rayleigh*, ceci d'une part, d'autre part, pour un nombre de *Rayleigh* donné le nombre de *Nusselt* moyen augmente aussi avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules.

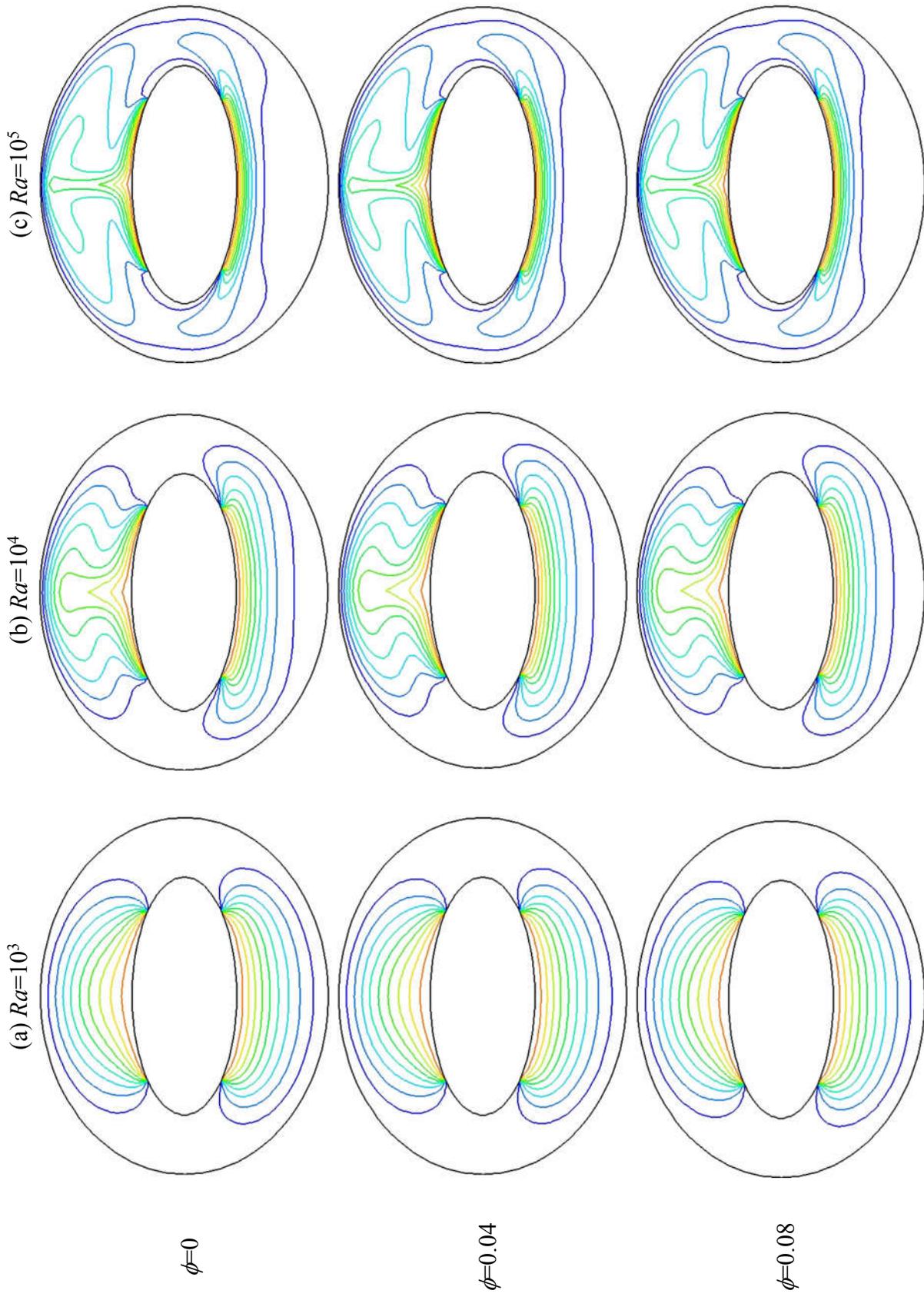


Figure 4.3 Isothermes pour différents nombres de *Rayleigh* et différentes fractions volumiques - 1<sup>er</sup> cas de chauffage [65]

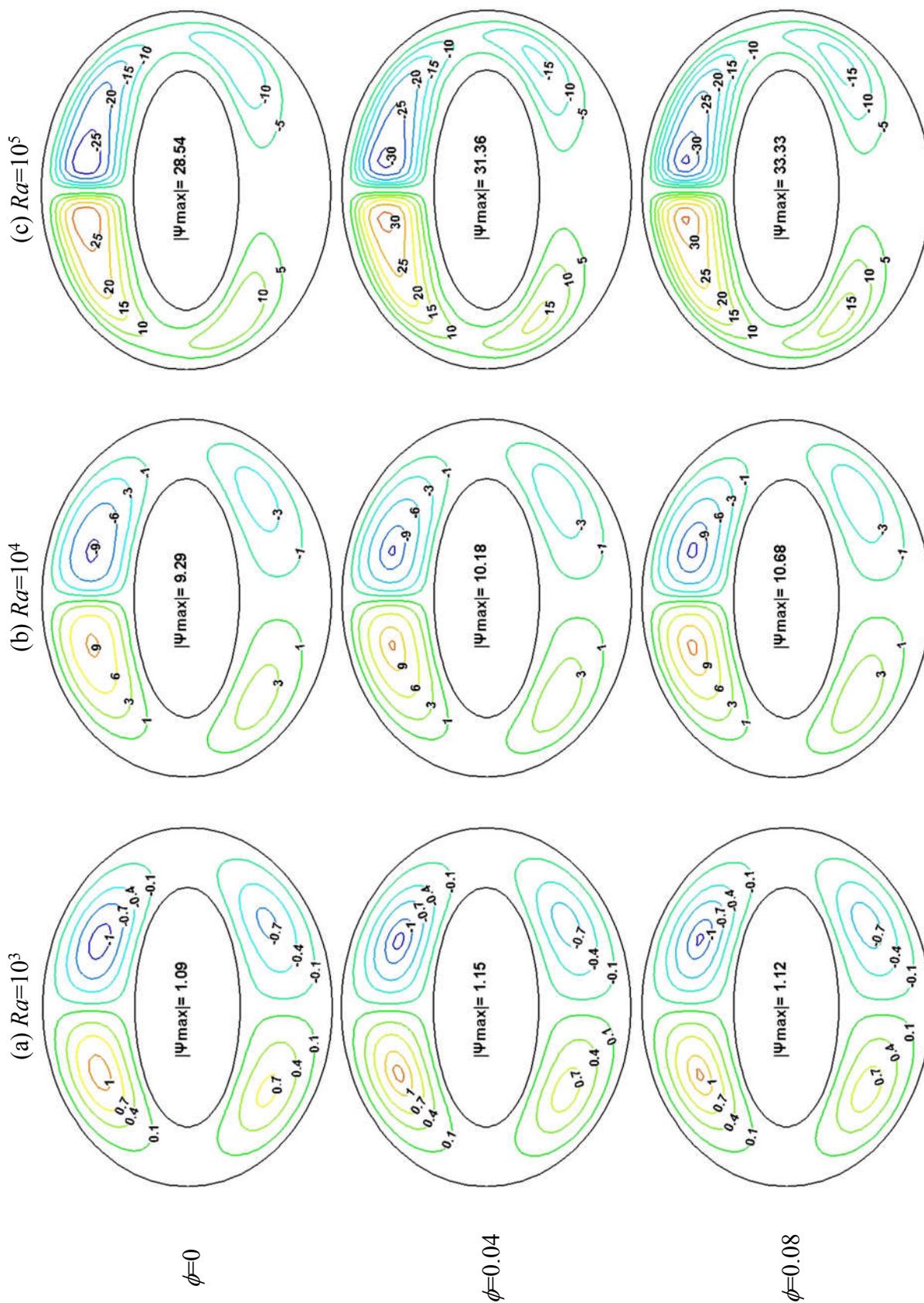


Figure 4.4 Lignes de courant pour différents nombres de *Rayleigh* et différentes fractions volumiques - 1<sup>er</sup> cas de chauffage [65]

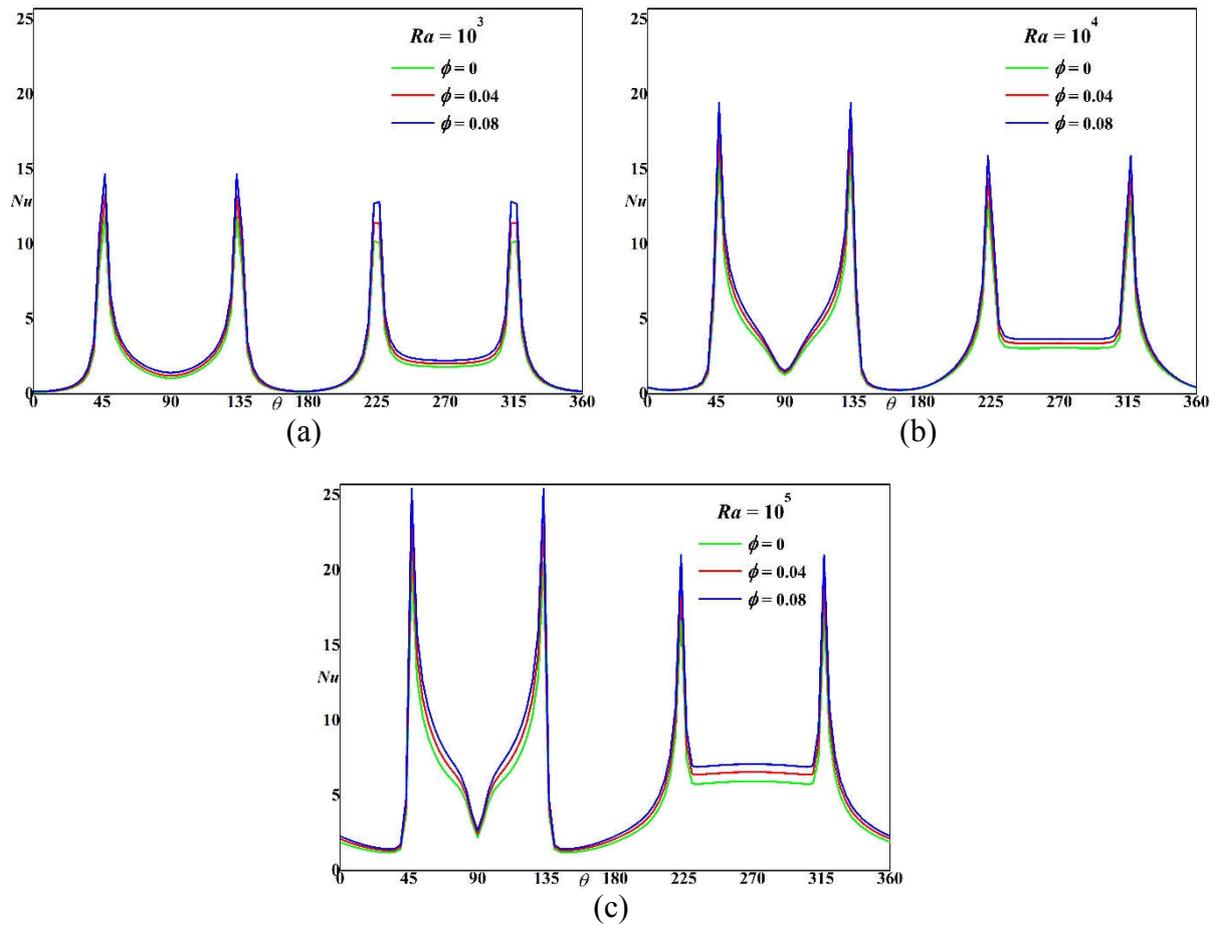


Figure 4.5 Variation des nombres de *Nusselt* locaux sur la paroi interne pour différents nombres de *Rayleigh* et différentes fractions volumiques - 1<sup>er</sup> cas de chauffage

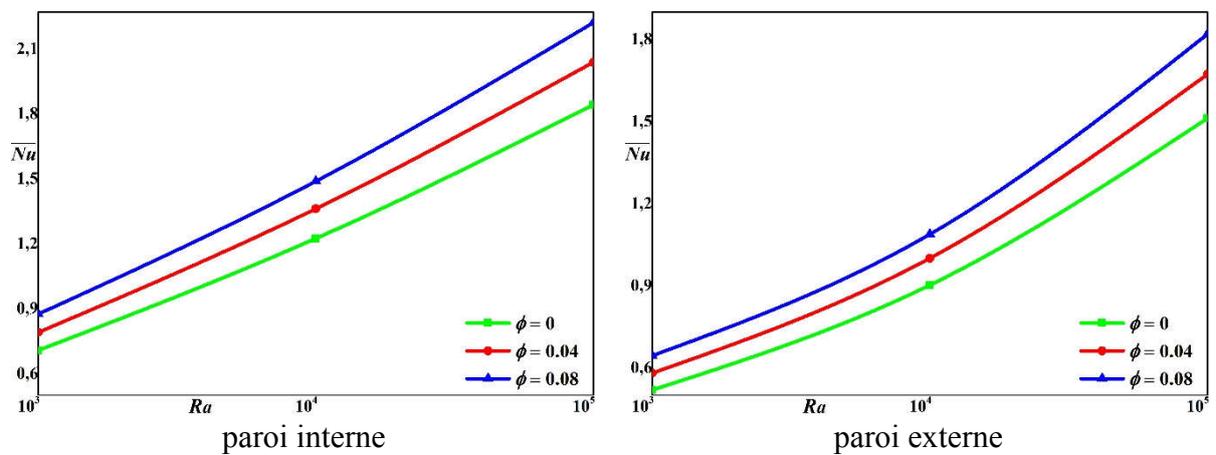


Figure 4.6 Variation du nombre de *Nusselt* moyen en fonction du nombre de *Rayleigh* pour différentes fractions volumiques - 1<sup>er</sup> cas de chauffage [65]

#### 4.1.2. 2<sup>ème</sup> cas : chauffage partiel du côté gauche et du côté droit de la paroi interne

Les figures 4.7 et 4.8 illustrent les isothermes et les lignes de courant, respectivement, pour différentes valeurs du nombre de *Rayleigh* et différentes fractions volumiques, pour ce deuxième cas de chauffage, où le cylindre intérieur est chauffé partiellement de la même manière du côté gauche et du côté droit.

Pour de faibles valeurs du nombre de *Rayleigh* ( $Ra=10^3$ ), deux groupes de lignes isothermes presque parallèles et en forme d'haricots épousant la forme de l'entrefer de notre espace annulaire d'une part et d'autre, autour d'un axe de symétrie vertical fictif médian (voir figures 4.7.a). La température dans ce cas-là, diminue des parties chauffées de la paroi interne vers la paroi externe qui est maintenue froide. L'écoulement est formé principalement de deux vortex situés dans l'entrefer horizontal de part et d'autre de l'axe de symétrie vertical où existent les gradients de température (voir figures 4.8.a). Nous remarquons ici l'apparition de deux paires de cellules contrarotatives tournant très lentement dans les deux moitiés supérieure et inférieure de notre espace annulaire qui sont des zones mortes. Cette configuration dénote de la prédominance du mode pseudo-conductif.

En augmentant la valeur du nombre de *Rayleigh* ( $Ra=10^4$ ) (voir figures 4.7.b), les isothermes formées autour des parties chauffées se déforment légèrement vers la partie supérieure de l'espace annulaire, nous sommes en présence ici d'une convection naturelle naissante. Pour des valeurs plus élevées du nombre de *Rayleigh* ( $Ra=10^5$ ), la déformation des lignes isothermes est plus prononcée, dans ce cas (voir figures 4.7.c), et elles sont très serrées aux niveaux des parois formant l'entrefer horizontal d'une part et d'une autre de l'axe de symétrie fictif vertical et médian, ce qui dénote d'un transfert de chaleur très intense dans ces régions-là.

Pour ces mêmes valeurs du nombre de *Rayleigh* ( $Ra=10^4$  et  $Ra=10^5$ ), l'écoulement s'organise en quatre vortex occupant l'entrefer horizontal et la moitié supérieure de l'espace annulaire (voir figures 4.8.b et 4.8.c). Chaque vortex tourne dans le sens inverse de celui qui l'avoisine permettant ainsi une circulation du fluide au sein de l'espace annulaire, cette configuration ainsi que l'importance des valeurs maximales de la fonction de courant dénotent que nous sommes en présence d'un régime de convection naturelle dominante.

En examinant l'effet de l'ajout des nanoparticules sur l'écoulement, les valeurs maximales de la fonction de courant diminuent quand les forces de viscosité dominent celles de la flottabilité et elles augmentent quand ce sont les forces de flottabilité qui dominent celles de la viscosité.

Les variations des nombres de *Nusselt* locaux sur la paroi intérieure pour le deuxième cas de chauffage, où celle-ci est chauffée partiellement de la même manière du côté gauche et du côté droit, sont illustrées sur la figure 4.9, pour différentes valeurs du nombre de *Rayleigh* et de la fraction volumique.

Pour  $Ra=10^3$  (voir figure 4.9.a) les profils des nombres de *Nusselt* locaux correspondants aux valeurs 0, 0.04 et 0.08 de la fraction volumique ont les mêmes allures du fait que les distributions des isothermes sont presque identiques pour l'eau pure et le nanofluide, comme le montrent les figures 4.7.a ainsi le transfert thermique s'opère essentiellement par conduction. Dans ce cas-là, l'effet de l'ajout de nanoparticules commence à apparaître sur les variations du nombre de *Nusselt* local pour de faibles valeurs du nombre de *Rayleigh*, ceci est dû au fait que

les gradients de température sont imposés dans les régions de l'entrefer horizontal où les parois interne et externe sont très proches l'une de l'autre.

Pour  $Ra=10^4$  et  $Ra=10^5$  (figures 4.9.b et 4.9.c), les écarts entre les valeurs des nombres de *Nusselt* locaux deviennent de plus en plus importants ici, ils sont plus prononcés dans les régions de l'entrefer horizontal (parois proches), ceci nous permet de dire que nous obtenons une amélioration du transfert de chaleur par ajout des nanoparticules au fluide de base (les forces de flottabilité dominant les forces de viscosité).

Nous remarquons aussi que pour toute la gamme, des nombres de *Rayleigh*, utilisée, les valeurs les plus élevées des nombres de *Nusselt* locaux sont obtenues pour la fraction volumique la plus importante, ceci d'une part, d'autre part les valeurs de ces nombres de *Nusselt* locaux atteignent leurs maximums sur les limites des parties chauffées au niveau de l'entrefer horizontal, puis commencent à diminuer en allant vers l'axe de symétrie vertical de notre espace annulaire pour devenir minimums.

Nous remarquons aussi, que les valeurs maximales qu'atteignent ces nombres de *Nusselt* locaux dans la moitié supérieure de notre espace annulaire, sont plus importantes que celles obtenues dans la moitié inférieure de ce dernier, ceci est dû au fait que les conditions pariétales thermiques imposées là aussi sont symétriques par rapport à l'axe vertical et permettent d'obtenir un mouvement du fluide en haut de l'enceinte et une zone morte en bas de celle-ci.

La figure 4.10 montre les variations des nombres de *Nusselt* moyens, sur les parois, interne et externe, pour différentes valeurs de la fraction volumique, pour le deuxième cas du chauffage partiel. Il est constaté que pour une valeur donnée de la fraction volumique le nombre de *Nusselt* moyen augmente en fonction du nombre de *Rayleigh*, ceci d'une part, d'autre part, pour un nombre de *Rayleigh* donné le nombre de *Nusselt* moyen augmente aussi avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules.

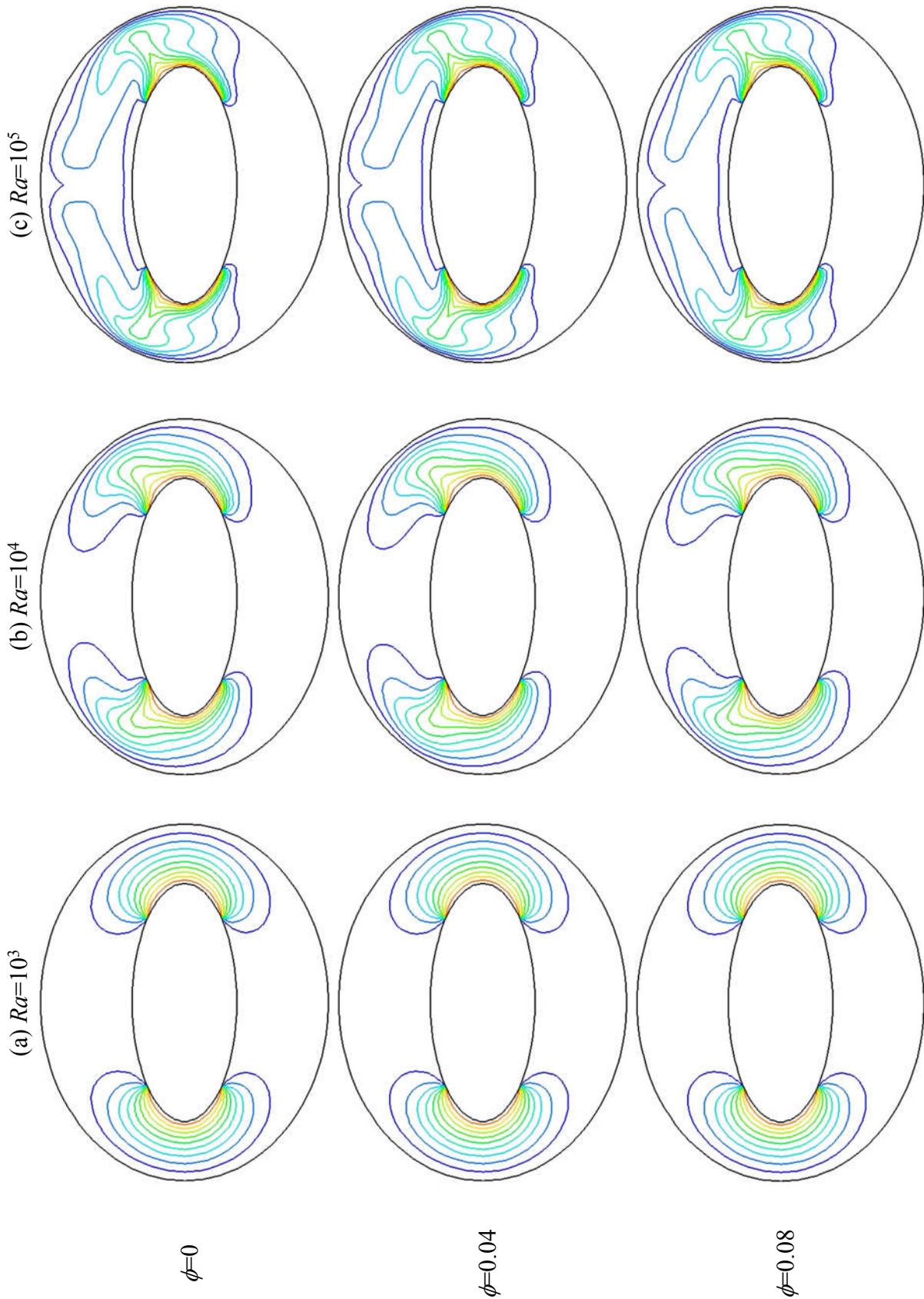


Figure 4.7 Isothermes pour différents nombres de *Rayleigh* et différentes fractions volumiques - 2<sup>ème</sup> cas de chauffage [65]

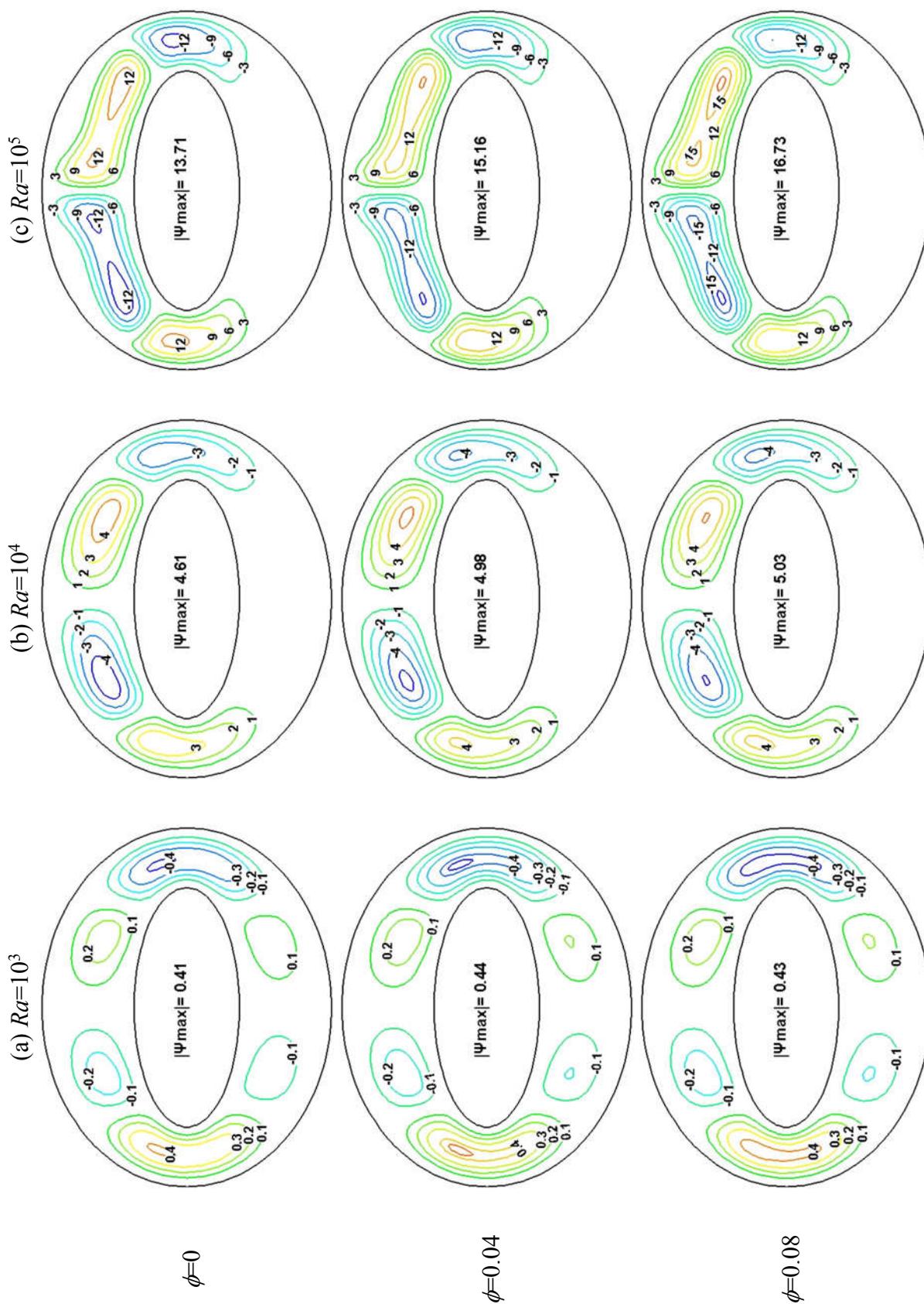


Figure 4.8 Lignes de courant pour différents nombres de Rayleigh et différentes fractions volumiques - 2<sup>ème</sup> cas de chauffage [65]

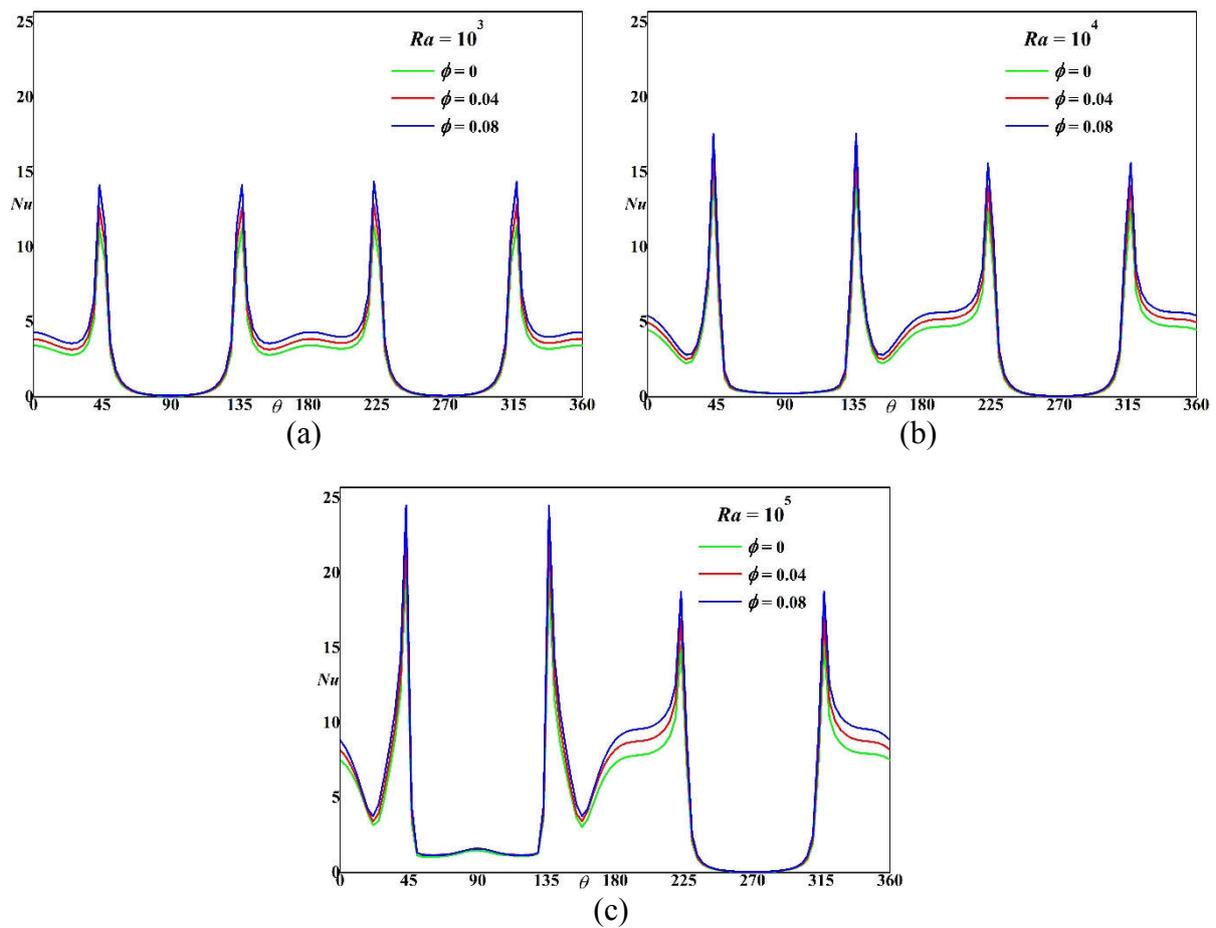


Figure 4.9 Variation des nombres de *Nusselt* locaux sur la paroi interne pour différents nombres de *Rayleigh* et différentes fractions volumiques - 2<sup>ème</sup> cas de chauffage

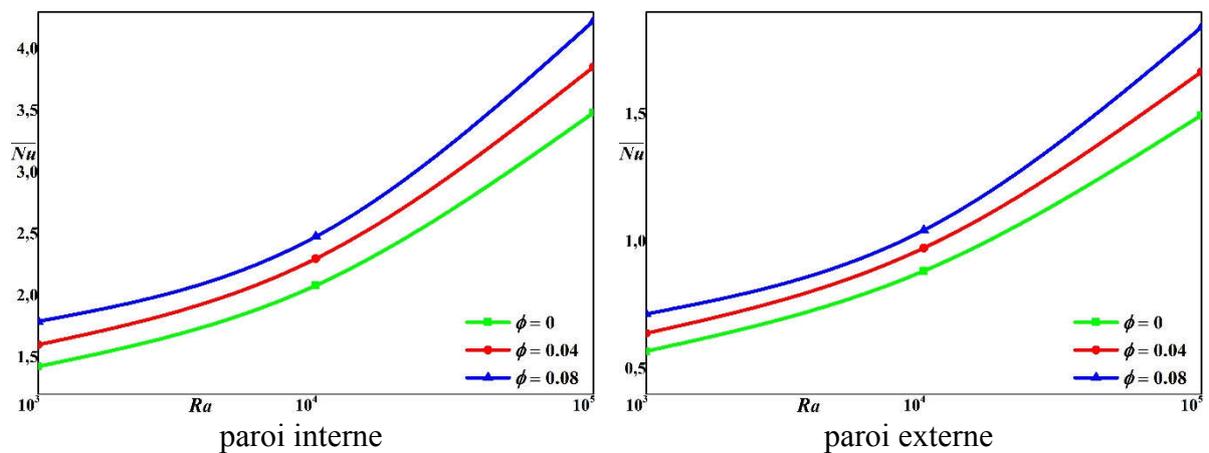


Figure 4.10 Variation du nombre de *Nusselt* moyen sur en fonction du nombre de *Rayleigh* pour différentes fractions volumiques - 2<sup>ème</sup> cas de chauffage [65]

### 4.1.3. 3<sup>ème</sup> cas : chauffage partiel sur le quart haut droit et le quart bas gauche de la paroi interne

Les figures 4.11 et 4.12 montrent les isothermes et les lignes de courant, respectivement, pour différentes valeurs du nombre de *Rayleigh* et différentes fractions volumiques, pour ce troisième cas de chauffage, où le cylindre intérieur est chauffé partiellement de la même manière en imposant une température constante sur le quart supérieur droit et le quart inférieur gauche de ce dernier.

Pour les valeurs basses du nombre de *Rayleigh* ( $Ra=10^3$ ), deux groupes de lignes isothermes presque parallèles se forment autour des parties chauffées (voir figures 4.11.a), avec une diminution de la température des deux parties chauffées de la paroi interne vers la paroi externe qui est maintenue froide. L'écoulement s'organise en un groupe de deux vortex occupant la moitié supérieure de l'espace annulaire et de deux cellules tournant très lentement dans la moitié inférieure de celui-ci (figures 4.12.a). C'est donc une pseudo-conduction qui s'installe ici.

En augmentant la valeur du nombre de *Rayleigh* ( $Ra=10^4$ ) (voir figures 4.11.b et 4.12.b), les isothermes formées autour de la partie chauffée supérieure droite se déforment vers le centre de la moitié supérieure de l'espace annulaire. Tandis que l'écoulement s'organise en un groupe de deux vortex occupant cette même partie-là, ce qui signifie la naissance d'une convection naturelle. Par contre, autour de la partie chauffée inférieure gauche, les lignes isothermes qui restent presque parallèles et l'écoulement qui s'organise en deux cellules contrarotatives, traduisent une stratification thermique dans la moitié inférieure de notre espace annulaire.

Les lignes isothermes illustrant le cas où le nombre de *Rayleigh* ( $Ra=10^5$ ) montrent la prédominance de la convection naturelle, comme mode de transfert de chaleur (voir figures 4.11.c), ces lignes sont très serrées au niveau des parois, ce qui signifie qu'il y existe une intensification de ce dernier. Les valeurs maximales de la fonction de courant deviennent plus importantes, l'écoulement est donc ici très intense et formé de deux vortex principaux contrarotatifs (voir figures 4.12.c), celui qui a un sens de rotation trigonométrique occupe presque toute la moitié supérieure de l'espace annulaire et l'autre s'installe du côté de la partie chauffée supérieure gauche. Alors que dans la partie basse de l'espace annulaire, l'absence d'isothermes et l'apparition d'une cellule de recirculation de faible intensité, sont relatives à une zone presque morte.

En examinant l'effet de l'ajout des nanoparticules sur l'écoulement, les valeurs maximales de la fonction de courant augmentent quand ce sont les forces de flottabilité qui dominent celles de viscosité et elles diminuent quand ces dernières dominent celles de la flottabilité.

Les variations des nombres de *Nusselt* locaux sur la paroi du cylindre intérieur, pour le troisième cas, où celui-ci est chauffé partiellement de la même manière en imposant une température constante sur le quart supérieur droit et le quart inférieur gauche, sont illustrées sur la figure 4.13, pour différentes valeurs du nombre de *Rayleigh* et de la fraction volumique.

Pour  $Ra=10^3$  et  $Ra=10^4$  (voir figure 4.13.a et 4.13.b), les profils des nombres de *Nusselt* locaux, correspondants aux valeurs 0, 0.04 et 0.08 de la fraction volumique, ont les mêmes allures du fait que les distributions des isothermes sont presque identiques pour l'eau pure et le nanofluide, comme le montrent les figures 4.11.a et 4.11.b des isothermes. Nous sommes ici en présence

d'un transfert thermique qui s'opère essentiellement par conduction pour  $Ra=10^3$  et une convection naturelle naissante pour  $Ra=10^4$ , en se référant aux courbes des lignes isothermes et des lignes de courant correspondantes (figures 4.11.a, 4.12.a, 4.11.b et 4.12.b).

Pour  $Ra=10^5$  (voir figure 4.13.c), les écarts entre les valeurs des nombres de *Nusselt* locaux deviennent de plus en plus importants ici, ils sont plus prononcés dans les régions chauffées, ceci nous permet de dire que nous obtenons une amélioration du transfert de chaleur par ajout des nanoparticules au fluide de base (les forces de flottabilité dominent les forces de viscosité).

Nous remarquons aussi que pour toute la gamme, des nombres de *Rayleigh*, utilisée, les valeurs les plus élevées des nombres de *Nusselt* locaux sont obtenues pour la fraction volumique la plus importante, ceci d'une part, d'autre part les valeurs de ces nombres de *Nusselt* locaux atteignent leurs maximums sur les limites des parties chauffées, puis commencent à diminuer en allant vers les parties non chauffées de la paroi interne pour devenir minimums.

La figure 4.14 montre les variations des nombres de *Nusselt* moyens, sur les parois, interne et externe, pour différentes valeurs de la fraction volumique, pour le 3<sup>ème</sup> cas du chauffage partiel. Il est constaté que pour une valeur donnée de la fraction volumique, le nombre de *Nusselt* moyen augmente en fonction du nombre de *Rayleigh*, ceci d'une part, d'autre part, pour un nombre de *Rayleigh* donné le nombre de *Nusselt* moyen augmente aussi avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules.

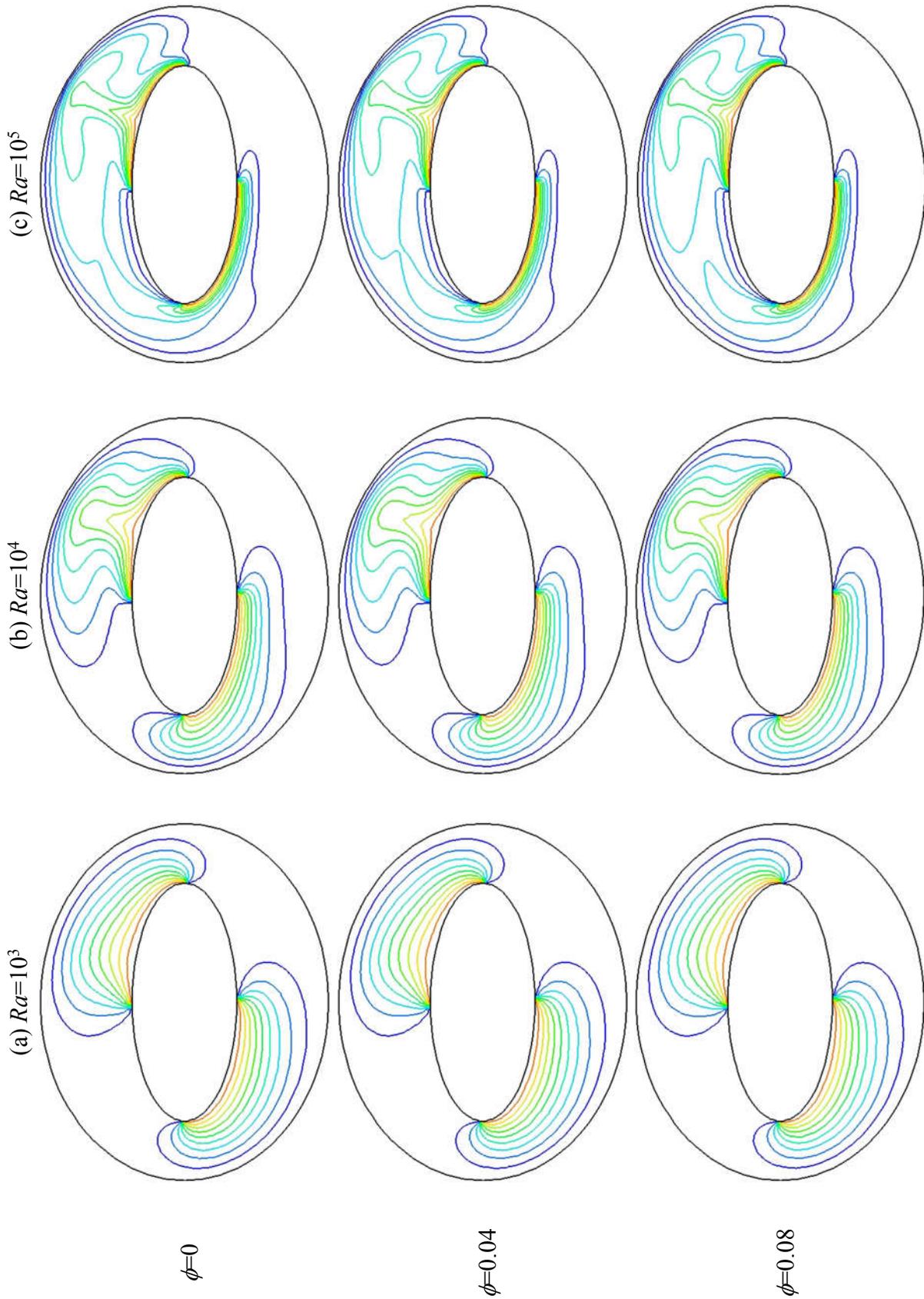


Figure 4.11 Isothermes pour différents nombres de *Rayleigh* et différentes fractions volumiques - 3<sup>ème</sup> cas de chauffage [65]

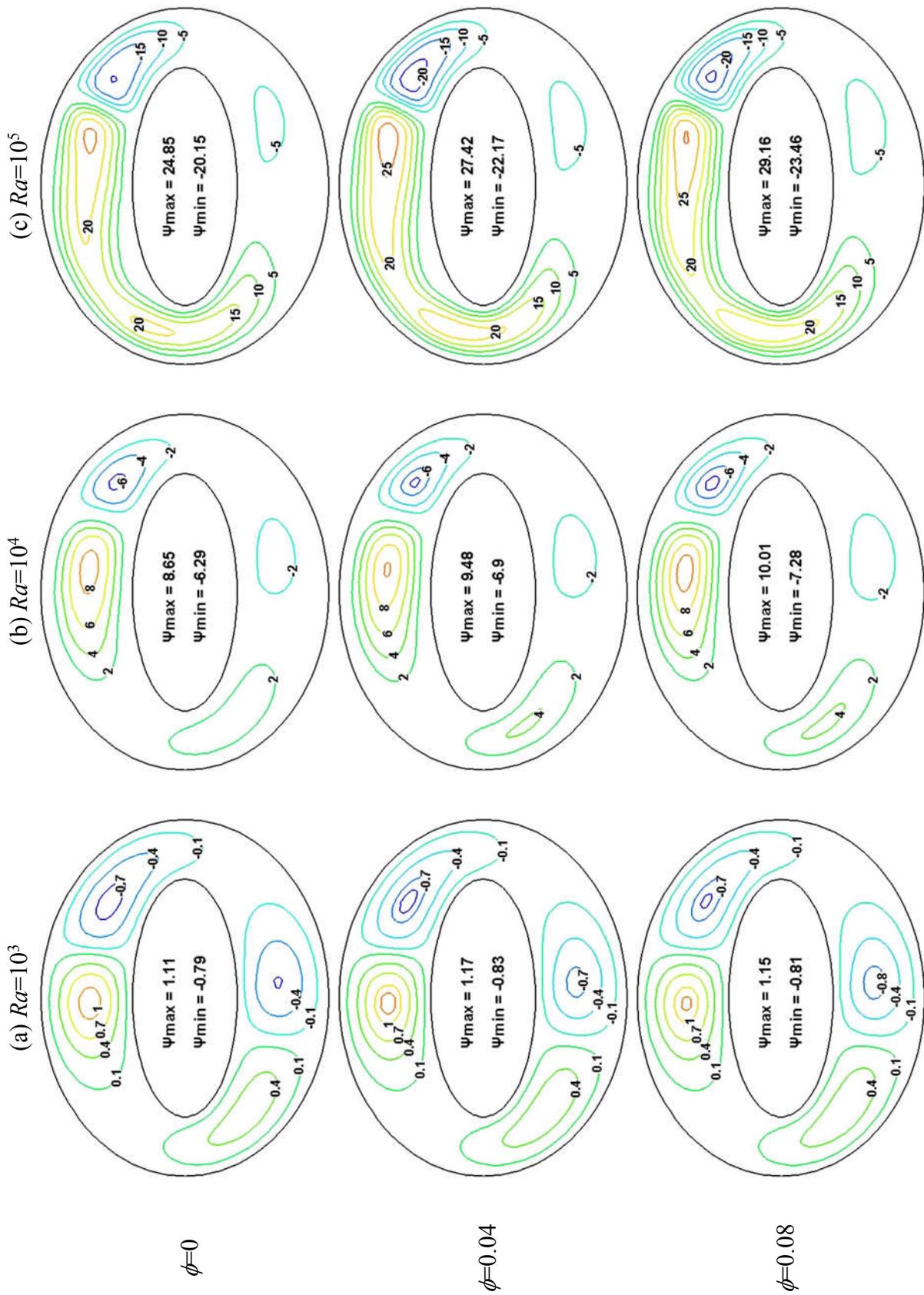


Figure 4.12 Lignes de courant pour différents nombres de *Rayleigh* et différentes fractions volumiques - 3<sup>ème</sup> cas de chauffage [65]

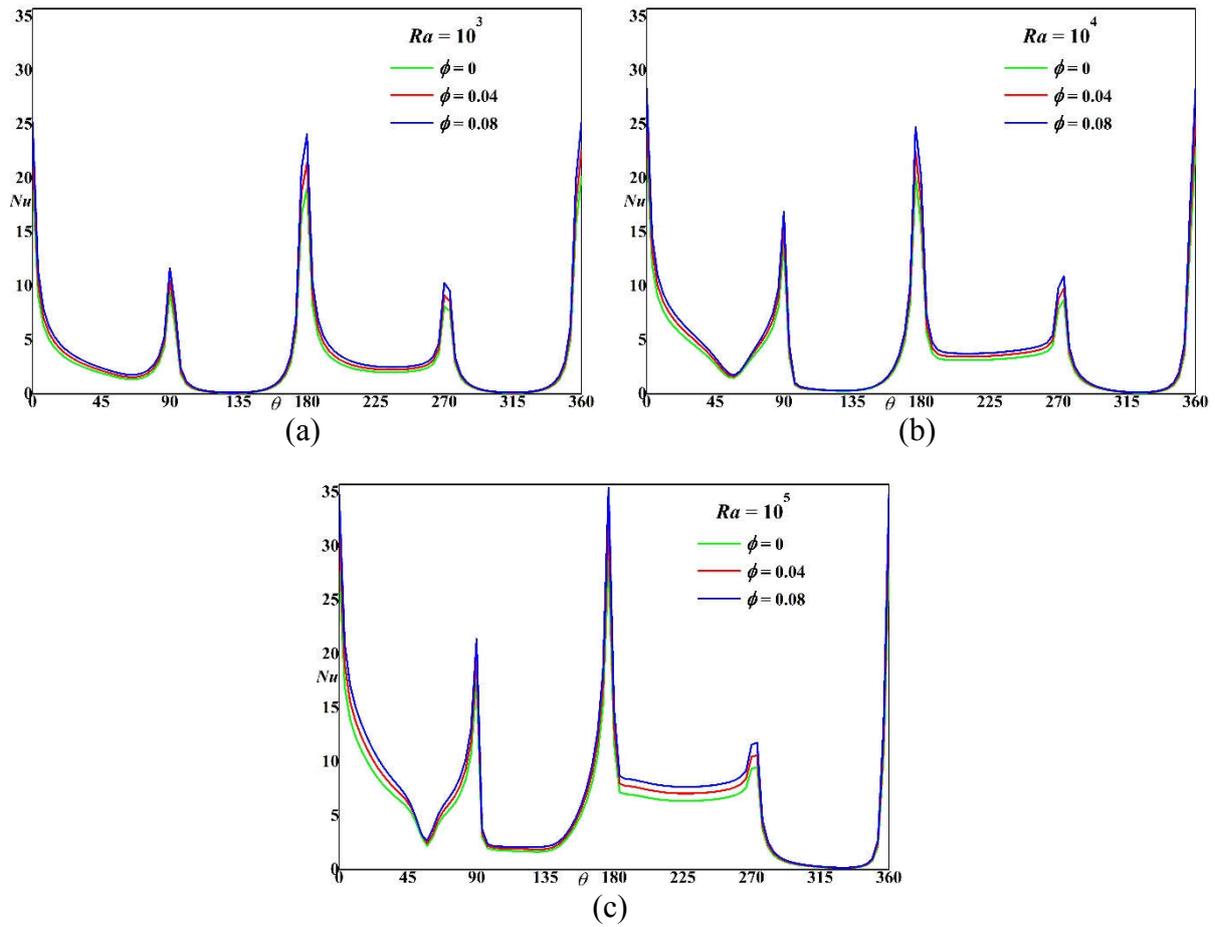


Figure 4.13 Variation des nombres de *Nusselt* locaux sur la paroi interne pour différents nombres de *Rayleigh* et différentes fractions volumiques - 3<sup>ème</sup> cas de chauffage

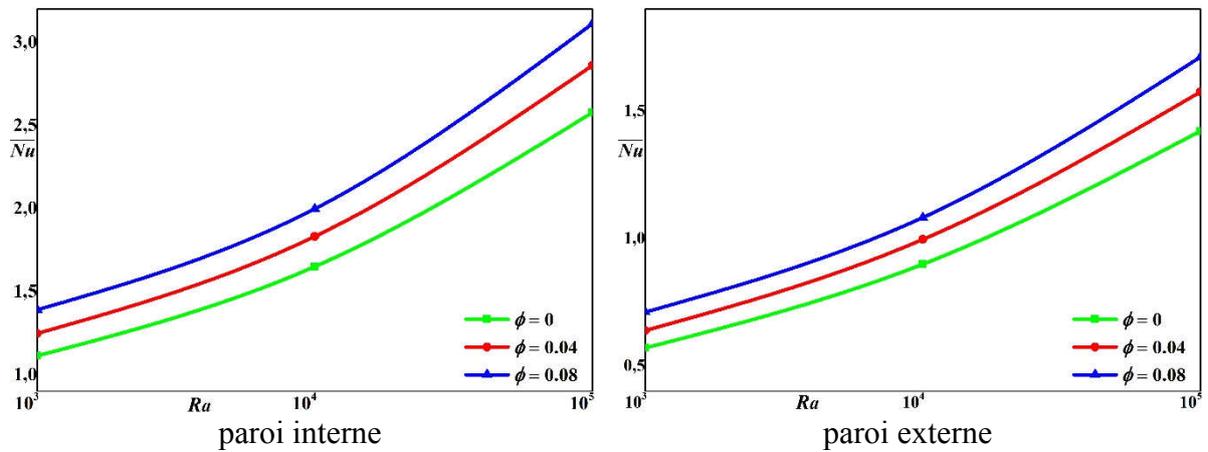


Figure 4.14 Variation du nombre de *Nusselt* moyen en fonction du nombre de *Rayleigh* pour différentes fractions volumiques - 3<sup>ème</sup> cas de chauffage [65]

#### 4.1.4. Comparaison entre les trois cas de chauffage

La figure 4.15 illustre une comparaison globale des nombres de *Nusselt* moyens qui examine les trois cas de chauffage partiel considérés, pour toute la gamme des nombres de *Rayleigh* ainsi que les différentes fractions volumiques utilisées.

En premier lieu, nous remarquons que les valeurs du nombre de *Nusselt* moyen augmentent avec l'augmentation du nombre de *Rayleigh* ainsi que celle de la fraction volumique.

Cette figure (4.15), nous permet de constater aussi, que les transferts de chaleur s'améliorent le plus, pour le 2<sup>ème</sup> cas de chauffage partiel considérée, c'est-à-dire, un chauffage partiel dans les régions situées dans l'entrefer horizontal.

Nous remarquons aussi, que l'effet de l'ajout des nanoparticules apparait mieux pour le 2<sup>ème</sup> cas de chauffage, même pour des valeurs du nombre de *Rayleigh*  $>10^3$ , là où les forces de flottabilité dominant de manière significative les forces de viscosité.

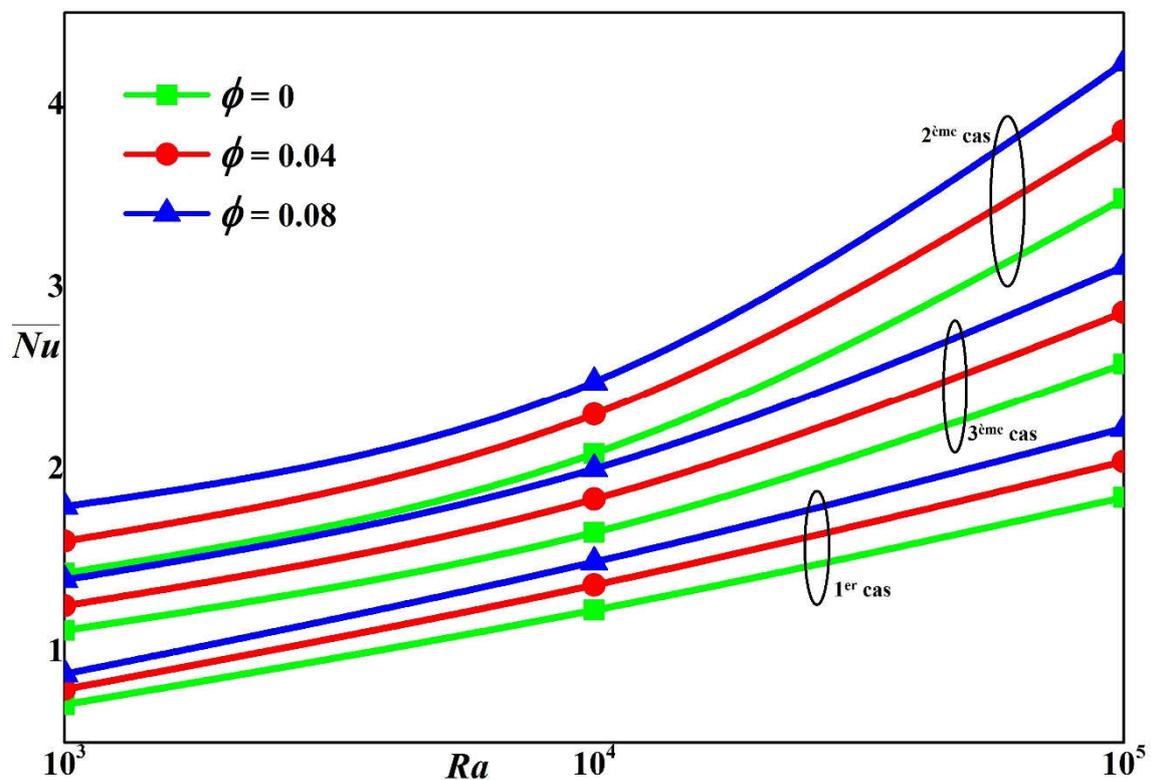


Figure 4.15 Comparaison des nombres de *Nusselt* moyens sur la paroi interne pour les trois cas de chauffage partiel considérés

## 4.2. Deuxième partie : Effet de la variation de l'angle d'inclinaison $\alpha$

### - Cas où l'angle d'inclinaison $\alpha=0^\circ$

Les figures 4.16 et 4.17 montrent les isothermes et les lignes de courant, respectivement, pour différentes valeurs du nombre de *Rayleigh* et différentes fractions volumiques, pour un angle d'inclinaison  $\alpha=0^\circ$ . Dans ce cas, et d'une manière générale, une symétrie de l'écoulement, par rapport à un plan fictif vertical médian, est observée.

Pour les valeurs basses du nombre de *Rayleigh* ( $Ra=10^3$ ), les lignes isothermes sont des courbes fermées concentriques parallèles entre-elles et qui adoptent la forme de notre espace annulaire (voir figures 4.16.a), la température ici diminue de la paroi interne chaude vers la paroi externe froide. Les valeurs maximales de la fonction de courant restent relativement faibles, les lignes de courant du fluide dont l'écoulement s'organise en deux cellules principales tournent très lentement dans des sens opposés (voir figures 4.17.a). Nous sommes donc en présence d'une pseudo-conduction qui domine le transfert thermique.

En augmentant la valeur du nombre de *Rayleigh* ( $Ra=10^4$ ), les isothermes commencent à adopter la forme de champignon dans la partie supérieure de l'espace annulaire (voir figures 4.16.b), ces lignes isothermes qui suivent le mouvement des particules de notre fluide nous informent qu'il y a dans ce cas-là une convection naturelle naissante.

En augmentant le nombre de *Rayleigh* ( $Ra=10^5$ ), la convection naturelle prend de l'ampleur, ceci est illustré par des lignes isothermes (voir figures 4.16.c), qui se modifient de plus en plus et deviennent très serrées au niveau des parois, ce qui signifie qu'il y existe une intensification du transfert de chaleur. Alors que, dans la partie basse de l'espace annulaire, les lignes isothermes restent parallèles entre-elles et épousent bien le profil du bas du cylindre elliptique interne, tout ceci nous amène à dire que nous sommes en présence d'une stratification thermique dans cette région-là.

Pour les nombres de *Rayleigh* plus élevées ( $Ra=10^4$ ) et ( $Ra=10^5$ ), l'écoulement devient plus intense, formé de deux vortex dont les centres se déplacent vers le haut de notre espace annulaire libérant la partie basse (zone morte) (voir figures 4.17.b et 4.17.c). Les valeurs maximales de la fonction de courant deviennent plus importantes (écoulement très intense).

En examinant l'effet de l'ajout des nanoparticules sur l'écoulement, les valeurs maximales de la fonction de courant augmentent en fonction de la fraction volumique ce qui dénote la domination des forces de flottabilité sur celles de la viscosité.

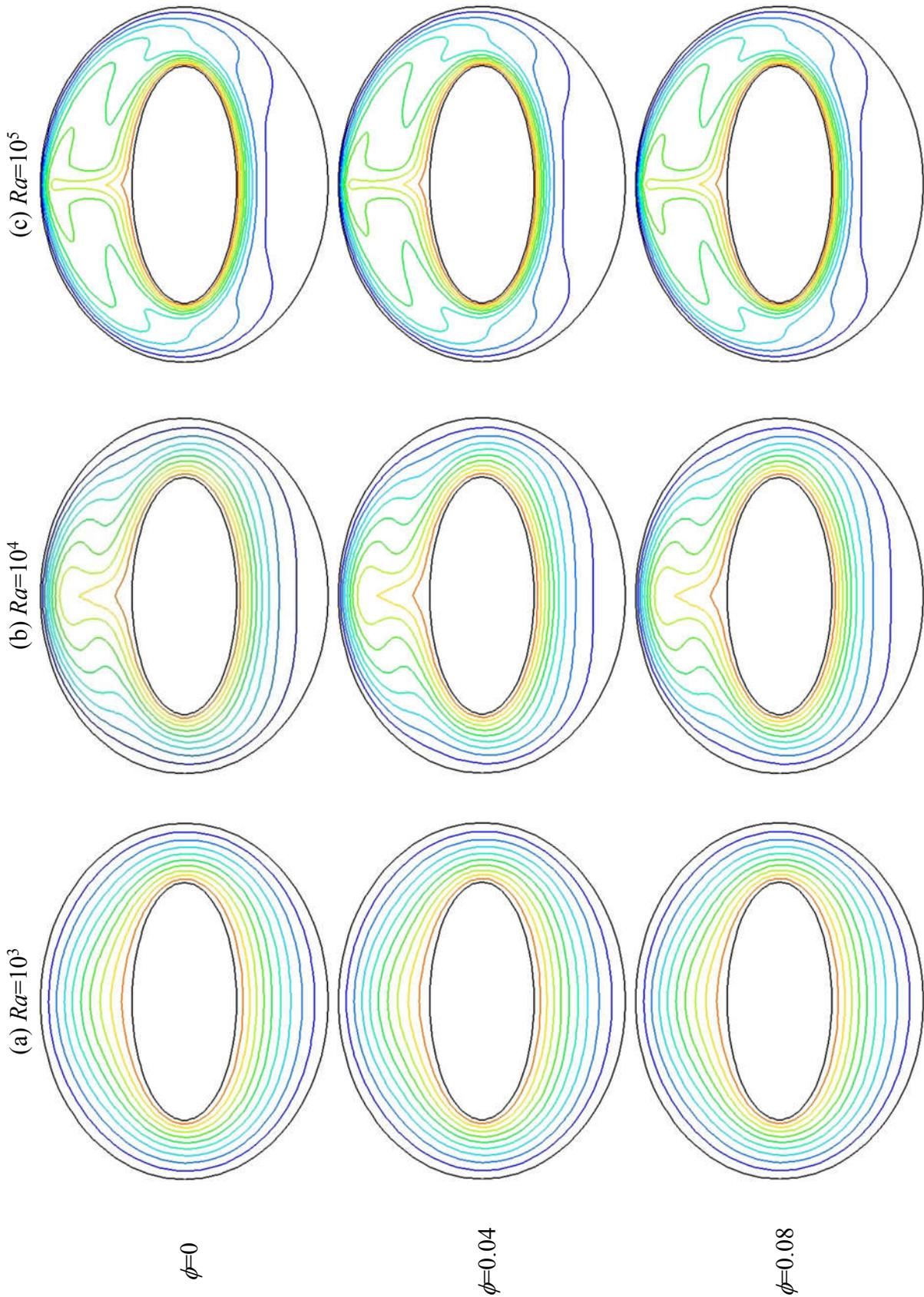


Figure 4.16 Isothermes pour différents nombres de *Rayleigh* et différentes fractions volumiques -  $\alpha = 0^\circ$

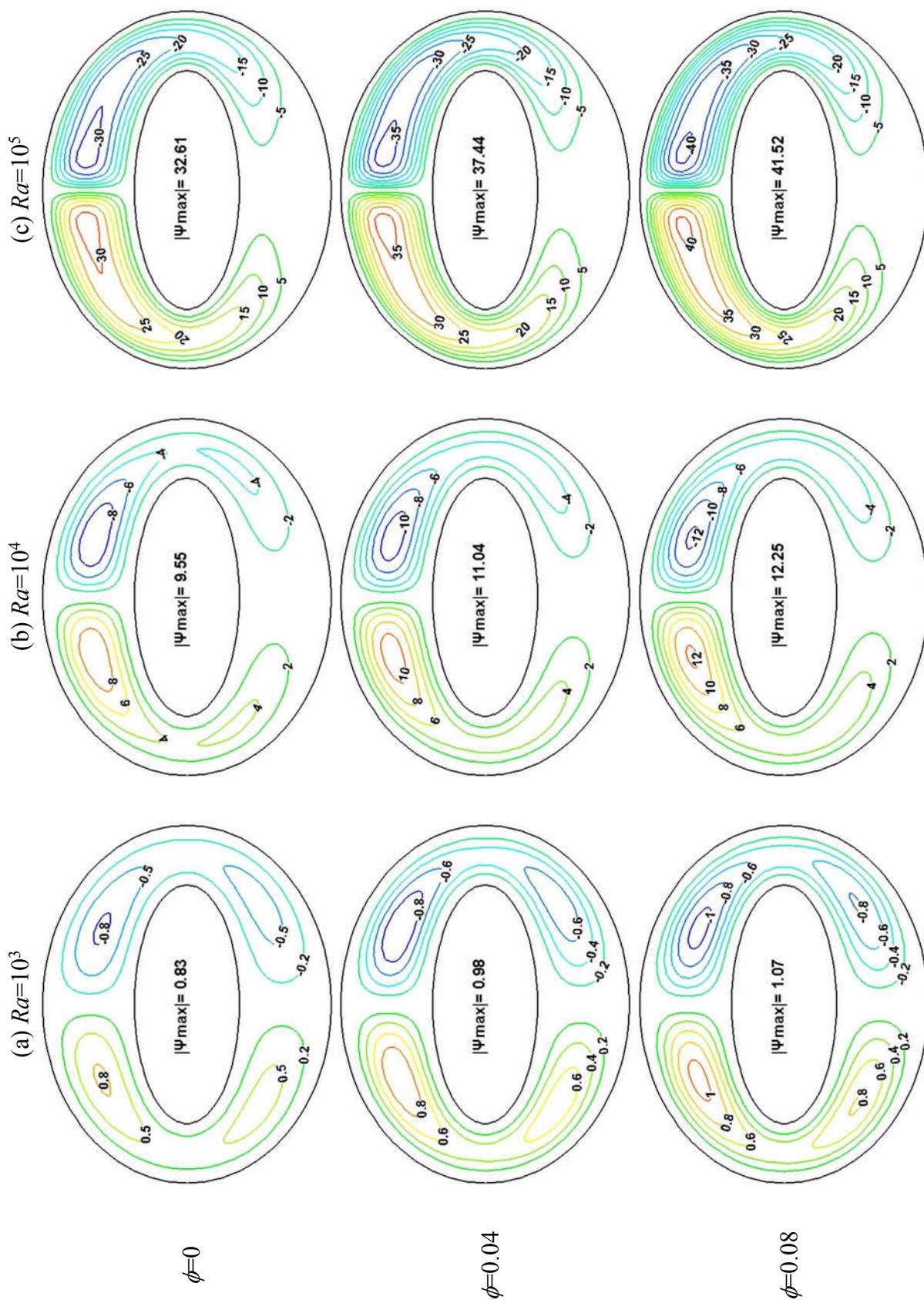


Figure 4.17 Lignes de courant pour différents nombres de Rayleigh et différentes fractions volumiques -  $\alpha = 0^\circ$

- **Cas où l'angle d'inclinaison  $\alpha \neq 0^\circ$  et  $\alpha \neq 90^\circ$**

Les figures 4.18, 4.19, 4.20, 4.21, 4.22 et 4.23 montrent les isothermes et les lignes de courant pour différentes valeurs du nombre de *Rayleigh* et différentes fractions volumiques, pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison  $\alpha$ .

Pour des valeurs de l'angle de l'inclinaison  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ , une détérioration de la symétrie par rapport à l'axe vertical fictif est observée. Le voisinage supérieur des deux vortex (région où les particules quittent la paroi chaude) se déplace toujours à droite et vers le haut de l'espace annulaire suivant l'inclinaison considérée.

L'augmentation du nombre de *Rayleigh* assure une intensification du transfert de chaleur où un passage d'une pseudo-conduction ( $Ra=10^3$ ) vers une convection naturelle ( $Ra=10^5$ ) comme mode de transfert dominant, les lignes isothermes des figures 4.18.c, 4.20.c et 4.22.c sont déformées et serrées près des parois.

L'effet de l'ajout des nanoparticules sur l'écoulement apparaît sur les valeurs maximales de la fonction de courant qui augmentent, ce que signifie que les forces de flottabilité dominent celles de la viscosité.

- **Cas où l'angle d'inclinaison  $\alpha=90^\circ$**

Les figures 4.24 et 4.25 montrent les isothermes et les lignes de courant pour différentes valeurs du nombre de *Rayleigh* et différentes fractions volumiques, pour un angle d'inclinaison  $\alpha=90^\circ$ . L'axe fictif vertical et médian (qui dans ce cas passe par les grands axes des ellipses) redevient un axe de symétrie. Les isothermes sont des courbes fermées presque parallèles et concentriques qui épousent le profil des parois pour  $Ra=10^3$ . Ces dernières se serrent, dans la région sommitale, pour des valeurs supérieures du nombre de *Rayleigh* ( $Ra=10^4$ ), ( $Ra=10^5$ ) dénotant que le transfert de chaleur s'intensifie.

Pour toute la gamme, des nombres de *Rayleigh*, utilisée, l'écoulement s'organise en deux cellules principales contrarotatives, tournants de part et d'autre d'un axe de symétrie vertical emportant les particules du fluide de la paroi chaude vers la paroi froide.

L'augmentation de la fraction volumique s'accompagne d'une augmentation de la valeur maximale de la fonction du courant, l'ajout des nanoparticules améliore donc le transfert de chaleur

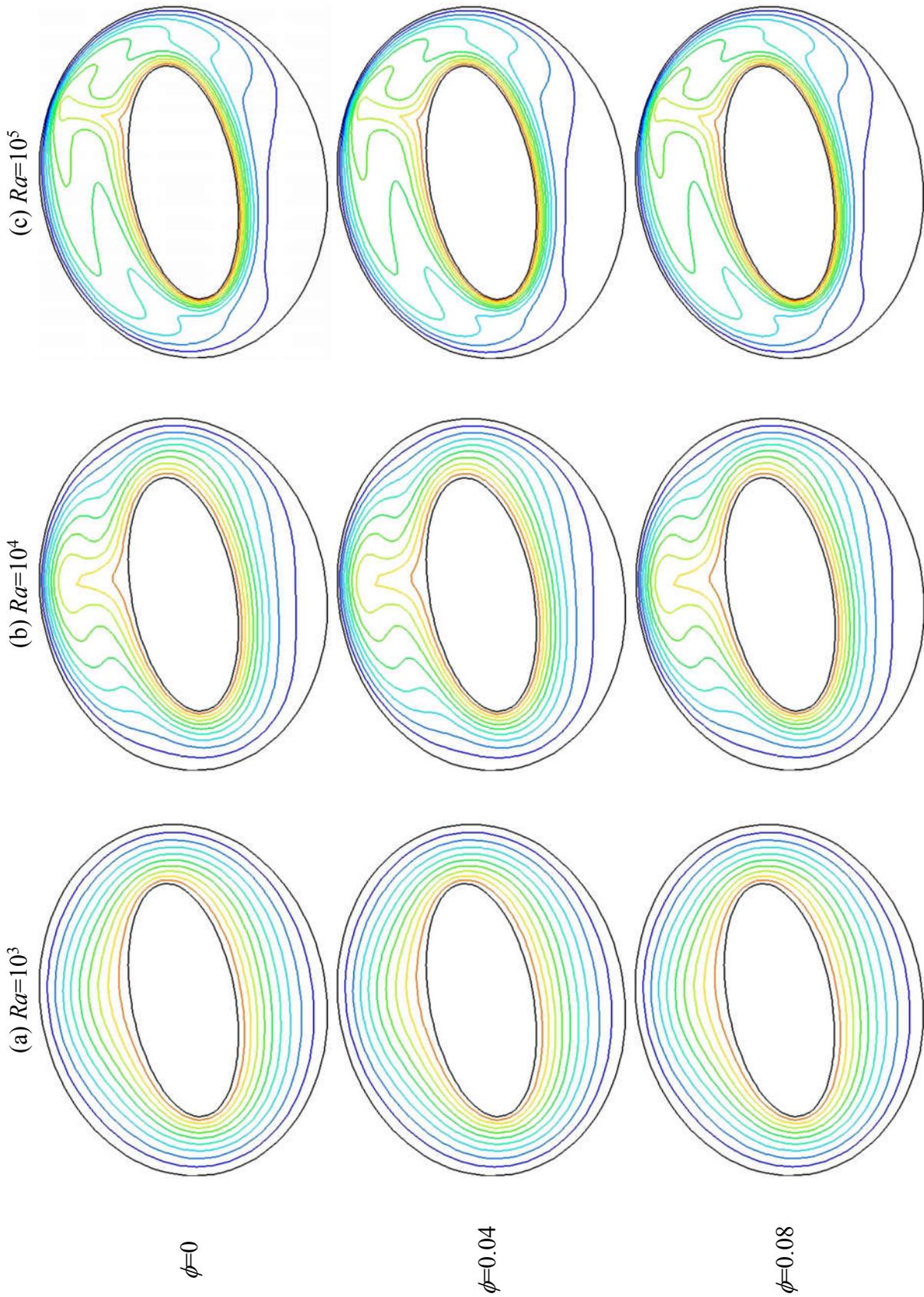


Figure 4.18 Isothermes pour différents nombres de Rayleigh et différentes fractions volumiques -  $\alpha = 10^\circ$

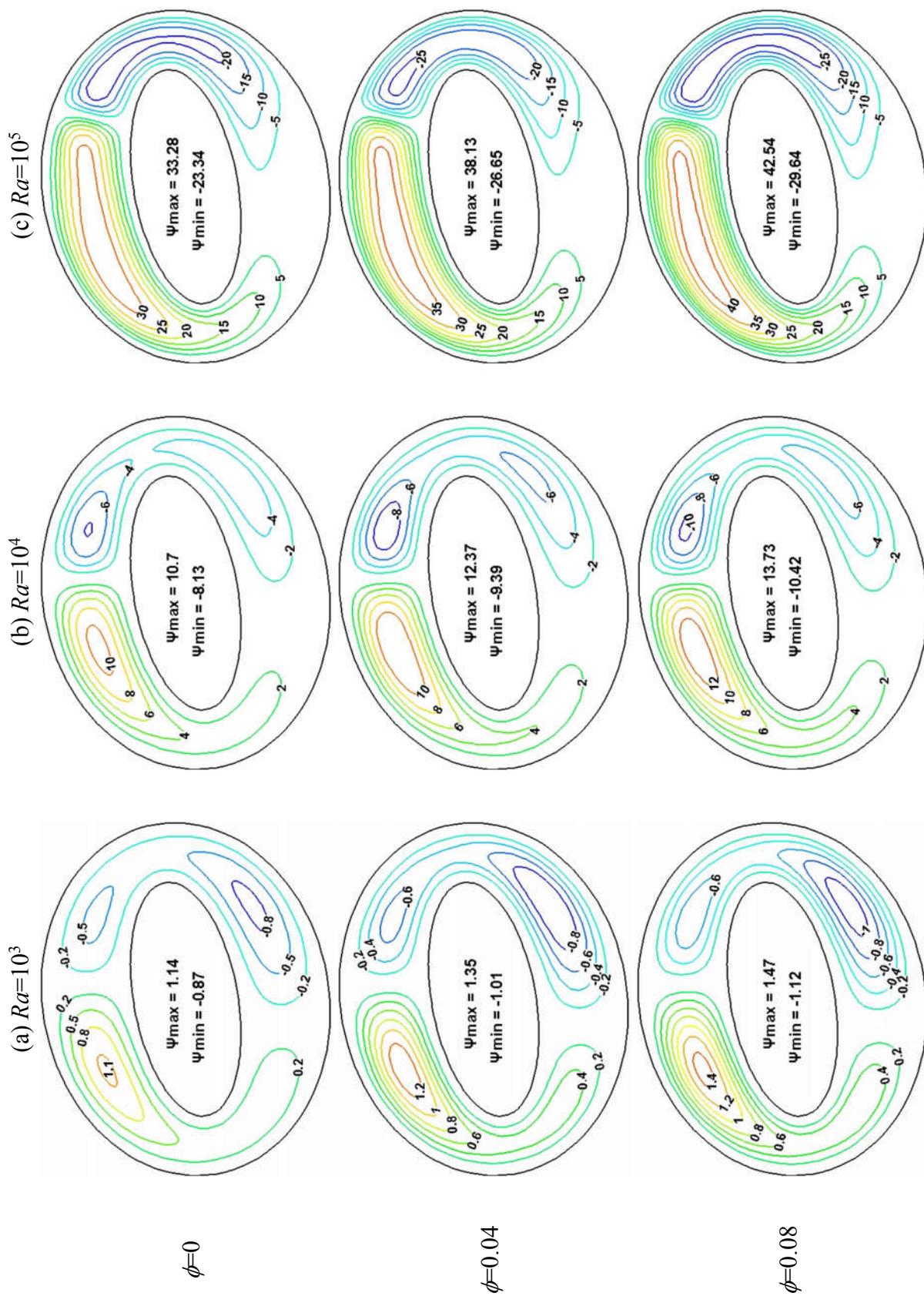


Figure 4.19 Lignes de courant pour différents nombres de *Rayleigh* et différentes fractions volumiques -  $\alpha = 10^\circ$

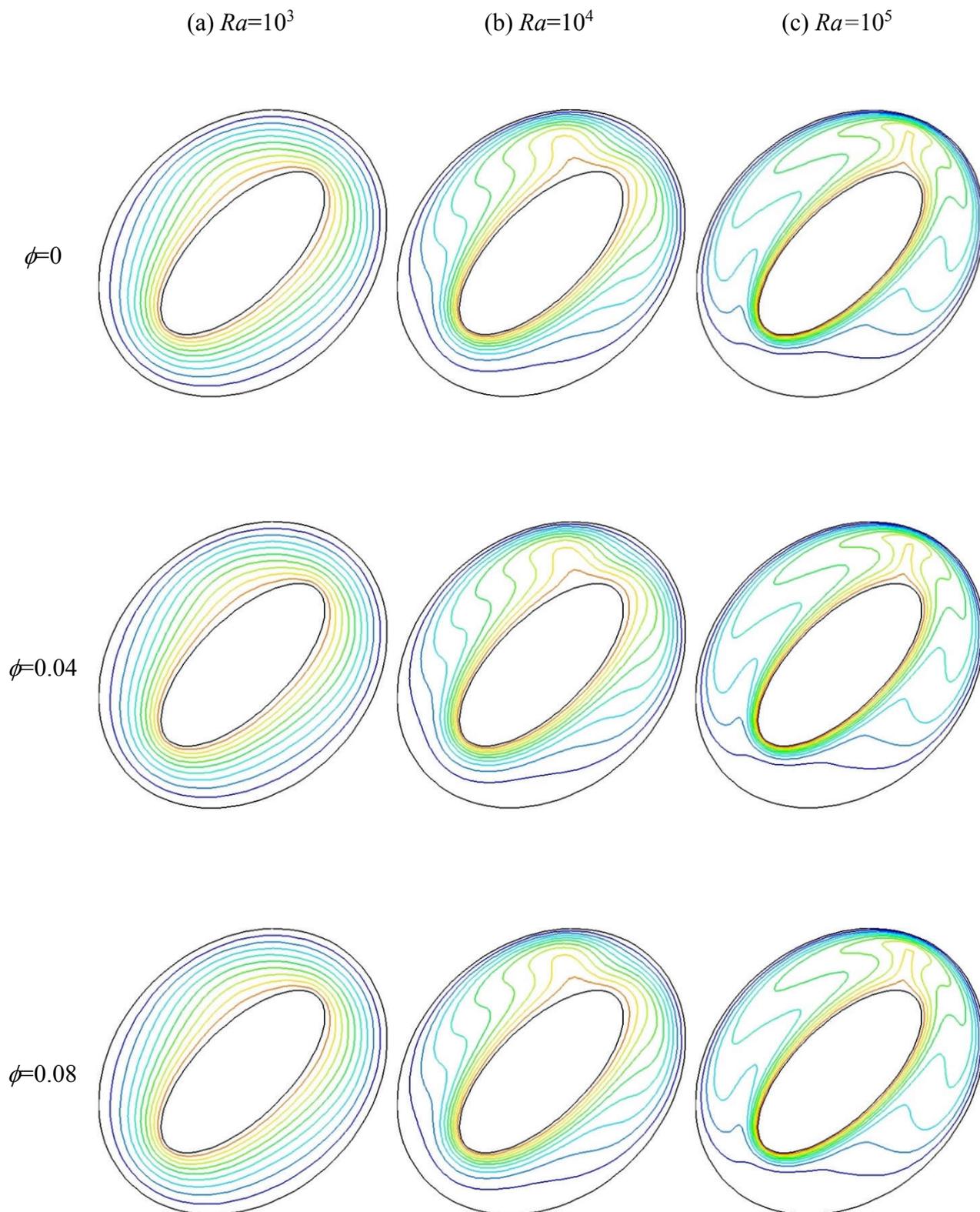


Figure 4.20 Isothermes pour différents nombres de *Rayleigh* et différentes fractions volumiques -  $\alpha = 45^\circ$

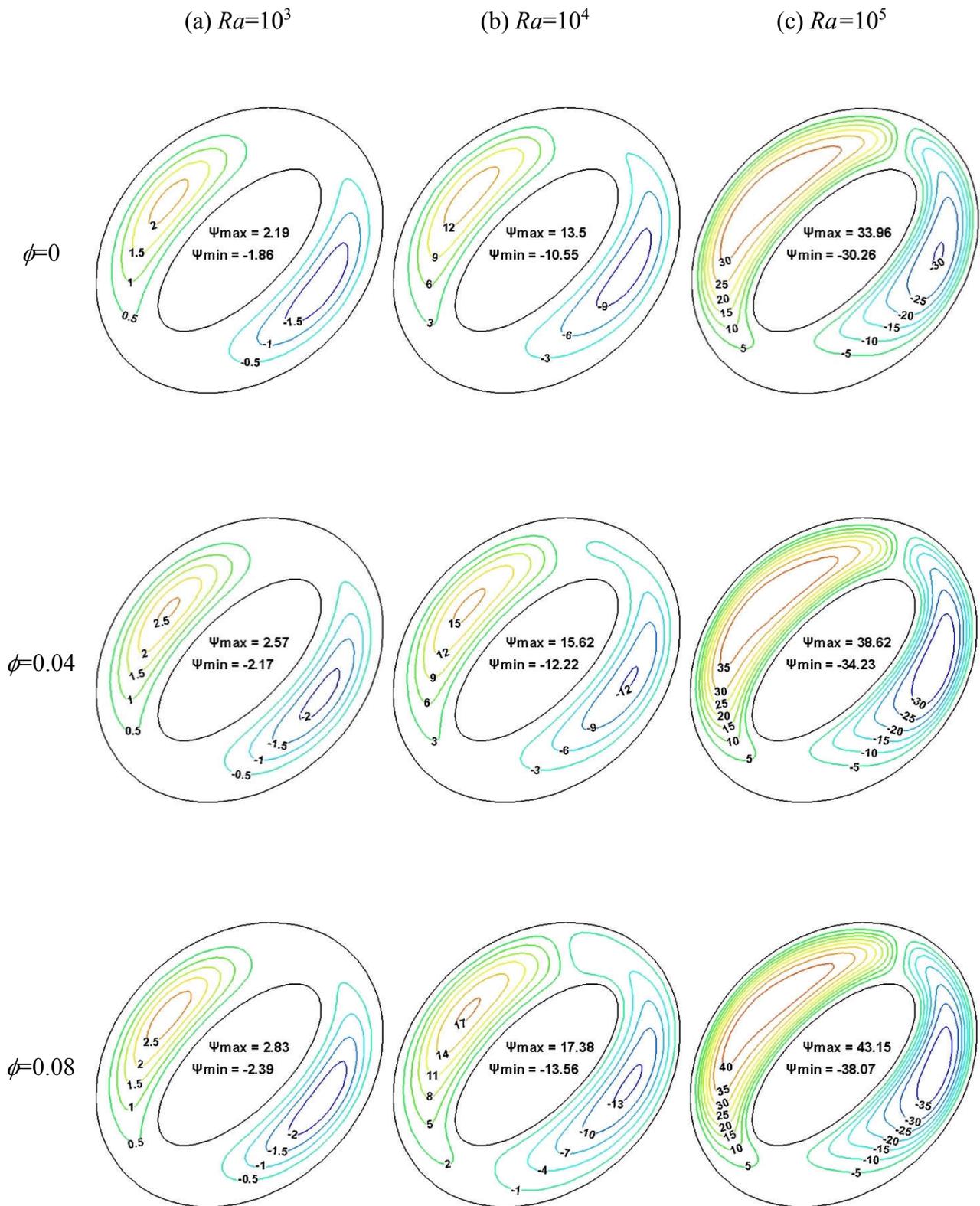


Figure 4.21 Lignes de courant pour différents nombres de Rayleigh et différentes fractions volumiques -  $\alpha = 45^\circ$

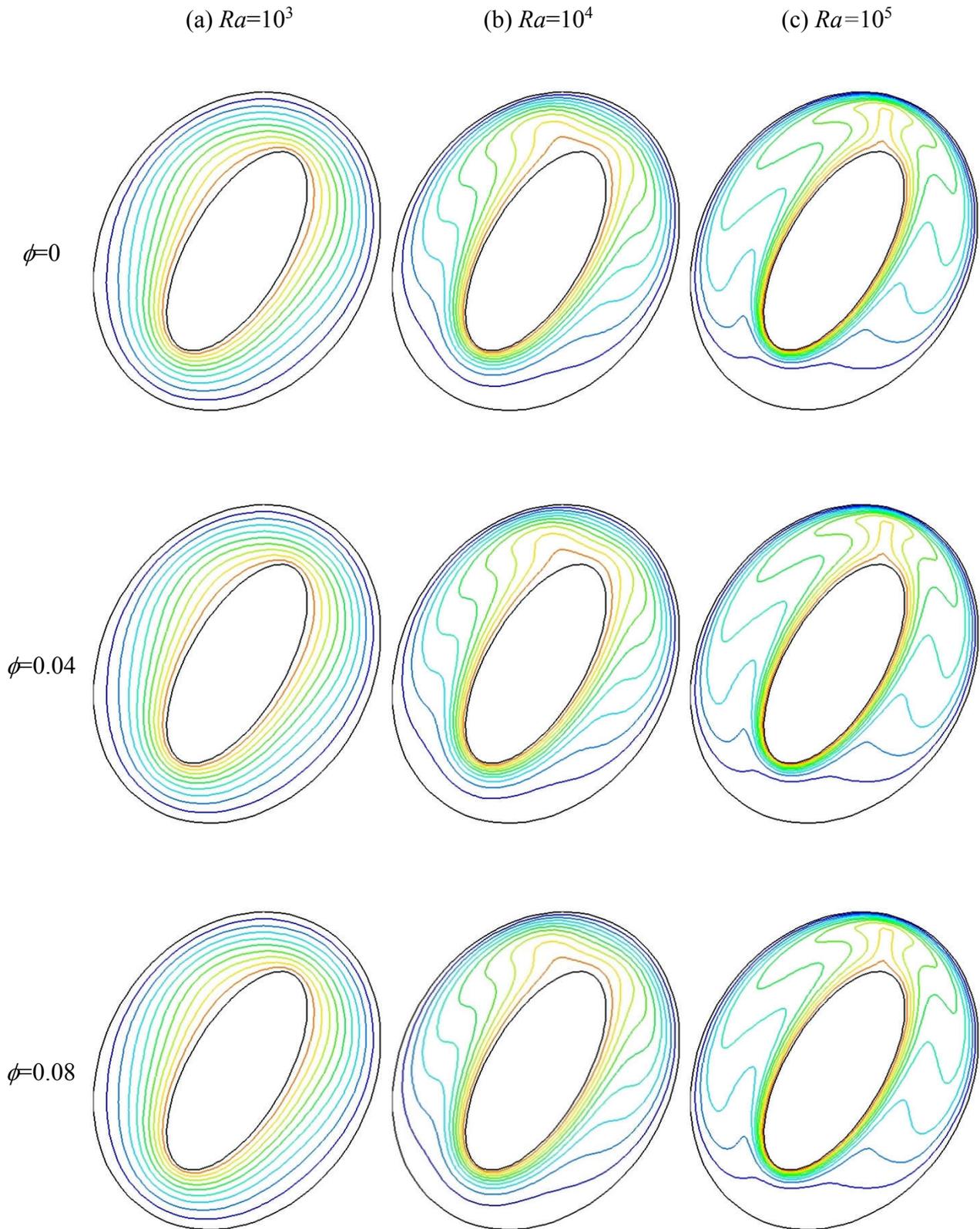


Figure 4.22 Isothermes pour différents nombres de *Rayleigh* et différentes fractions volumiques -  $\alpha = 60^\circ$

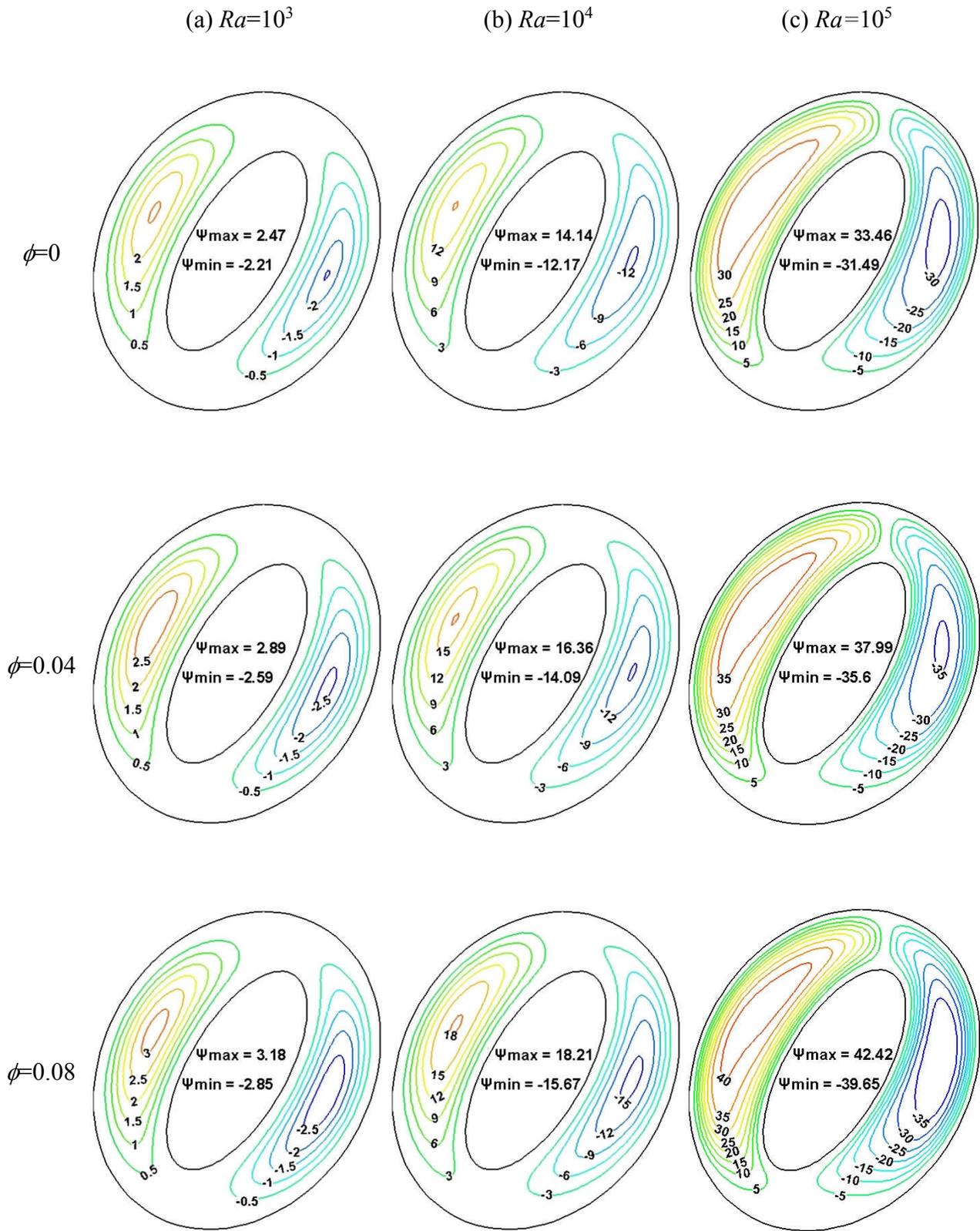


Figure 4.23 Lignes de courant pour différents nombres de Rayleigh et différentes fractions volumiques -  $\alpha = 60^\circ$

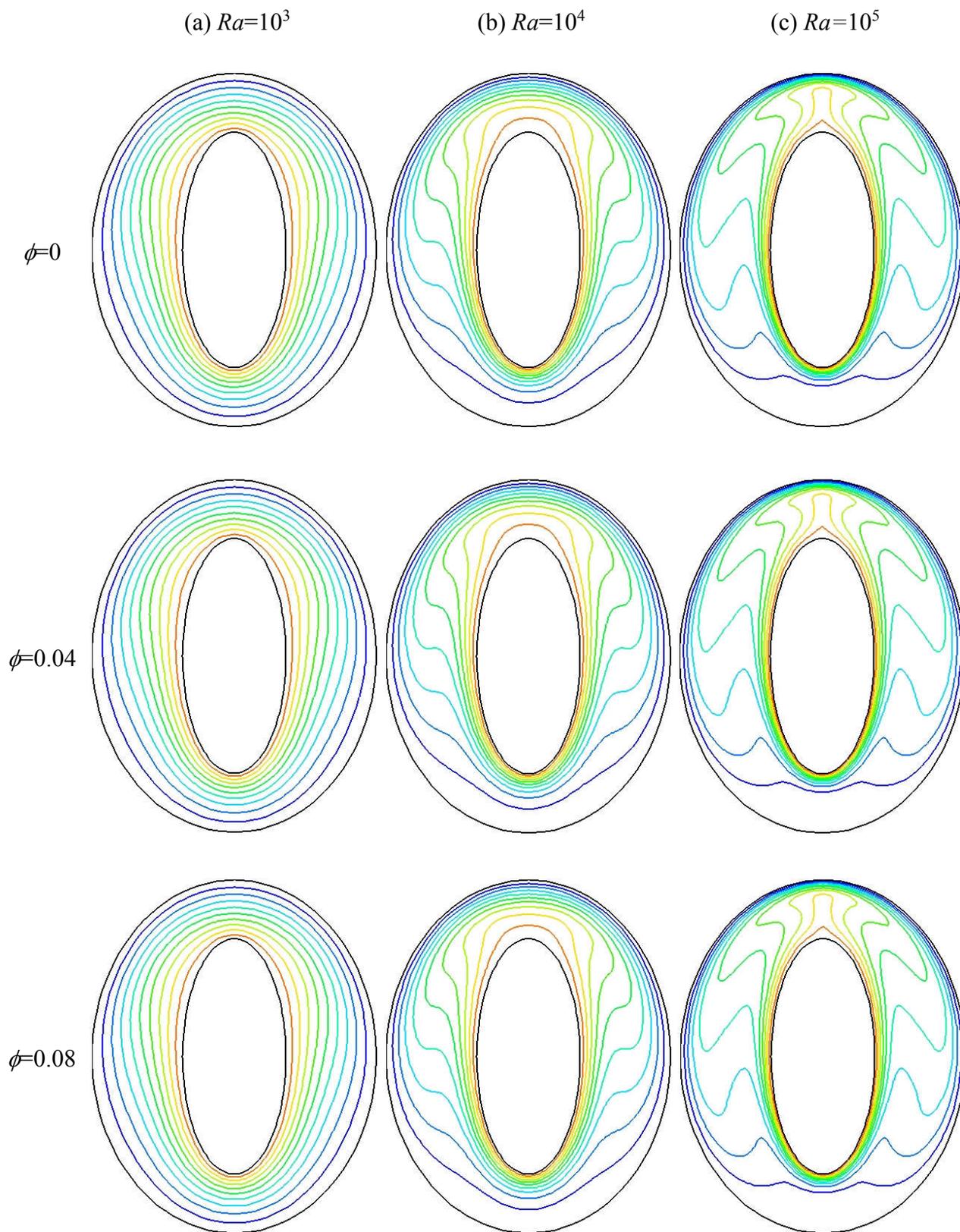


Figure 4.24 Isothermes pour différents nombres de Rayleigh et différentes fractions volumiques -  $\alpha = 90^\circ$

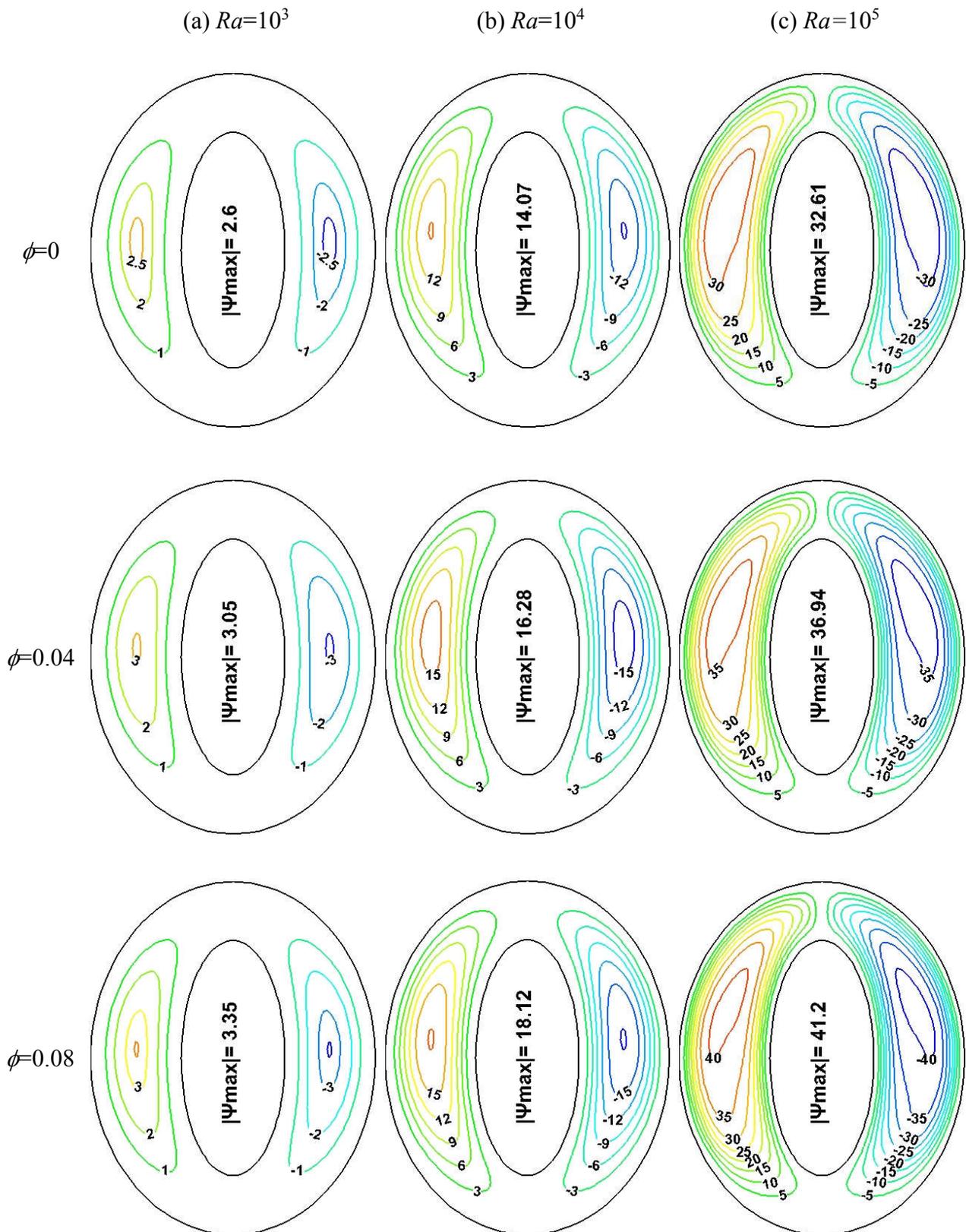


Figure 4.25 Lignes de courant pour différents nombres de Rayleigh et différentes fractions volumiques -  $\alpha = 90^\circ$

La figure 4.26 illustre les variations des nombres de *Nusselt* locaux sur la paroi chaude pour différents angles d'inclinaison  $\alpha$  quand  $Ra=10^5$  et  $\phi=0.08$ . Pour  $\alpha=0^\circ$  le minimum du nombre de *Nusselt* local est atteint à la position azimutale  $\theta=90^\circ$ , ce qui est en accord avec la figure 4.17.c qui montre que les deux vortex se rencontrent au milieu de la moitié supérieure de notre espace annulaire, en éloignant les particules du nanofluide de la paroi chauffée vers la paroi froide. Ainsi et pour le reste des angles d'inclinaison considérés, ce minimum est atteint à la position angulaire qui correspond au point de rencontre des deux vortex formés dans les régions, droite et gauche, de l'espace annulaire, ce qui reste en bon accord avec les figures 4.19.c, 4.21.c, 4.23.c et 4.25.c. Nous remarquons aussi que, les valeurs les plus élevées des nombres de *Nusselt* locaux correspondent à l'angle d'inclinaison le plus élevé, ceci est dû au fait que dans ces cas-là les rétrécissements de notre espace annulaire se rapprochent de plus en plus de l'axe vertical de symétrie.

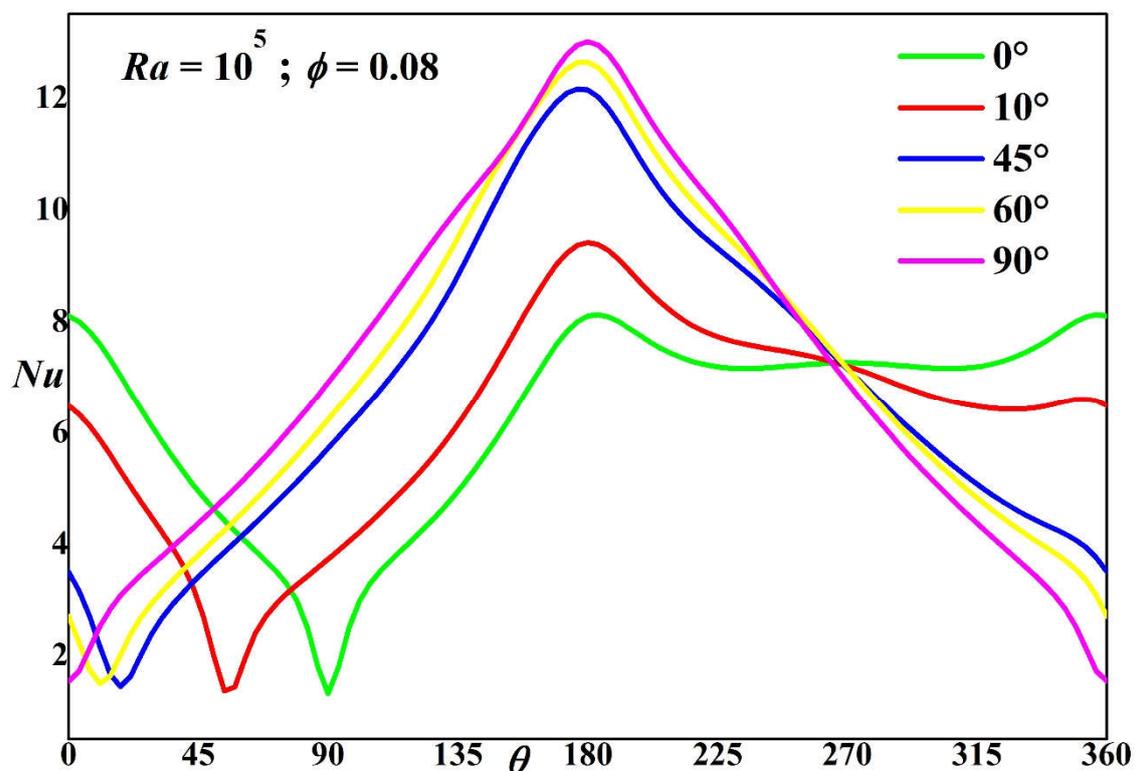


Figure 4.26 Comparaison des variations des nombres de *Nusselt* locaux pour différents angles d'inclinaison

La figure 4.27 montre les variations des nombres de *Nusselt* moyens, sur les parois, interne et externe, en fonction de l'angle de l'inclinaison  $\alpha$  pour différents nombre de *Rayleigh* et différentes valeurs de la fraction volumique. Il est constaté que pour un nombre de *Rayleigh* donné, le nombre de *Nusselt* moyen augmente en fonction de l'angle d'inclinaison, ceci d'une part, d'autre part, il augmente aussi avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules.

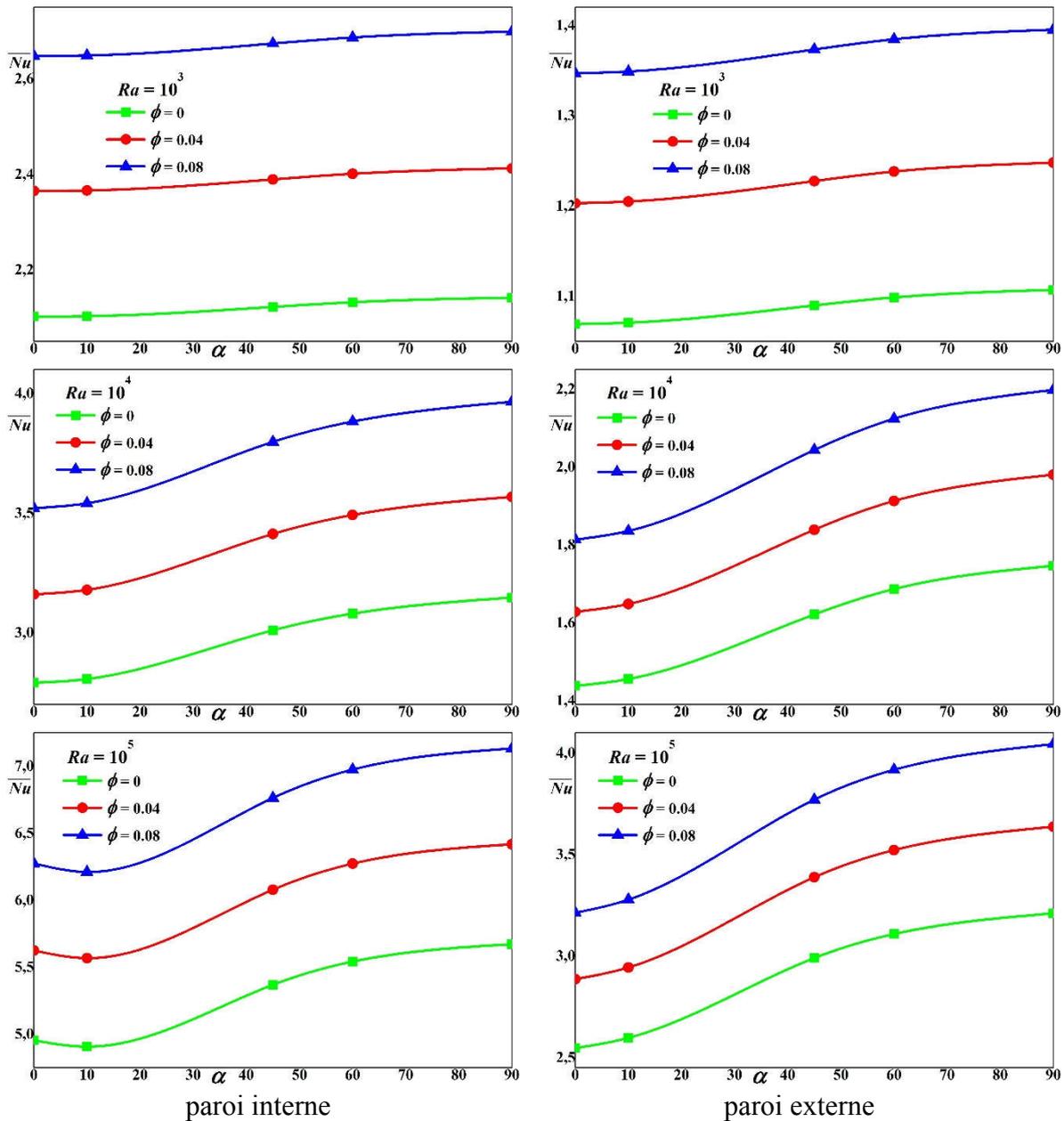


Figure 4.27 Variation du nombre de *Nusselt* moyen en fonction de l'angle de l'inclinaison pour différents nombre de *Rayleigh* et différentes fractions volumiques

### 4.3. Troisième partie : comparaison entre les différents types de nanofluide

Les figures 4.28 et 4.29 illustrent respectivement les isothermes et les lignes de courant pour différents nanofluides utilisés, ainsi que les variations des nombre de *Nusselt* moyens en fonction des fractions volumiques de ces derniers.

Quand  $\alpha=90^\circ$ ,  $Ra=10^5$  et  $\phi=0.08$ . Les distributions illustrées sur la figure 4.28 montrent que nous avons une symétrie par rapport à un axe fictif vertical et médian, avec deux vortex intenses contrarotatifs, qui occupent tout l'espace annulaire, pour ce qui est des lignes de courant, tandis que, les isothermes adoptent des formes de champignons dans la région sommitale de ce dernier. Ceci nous permet de dire que nous sommes en présence d'un mode de transfert convectif.

Les valeurs maximales de la fonction de courant qui augmentent au fur et à mesure qu'on ajoute des nanoparticules dénotent l'amélioration du transfert thermique en fonction de l'augmentation de la fraction volumique, ceci d'une part, d'autre part, nous constatons que ce sont les nanoparticules d'Argent (*Ag*) qui nous permettent d'obtenir une meilleure intensification de l'écoulement, suivi par celles du Cuivre (*Cu*) et finalement par celles de l'Alumine (*Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>*). Ce qui est confirmé par les variations du nombre de *Nusselt* moyen de la figure 4.29.

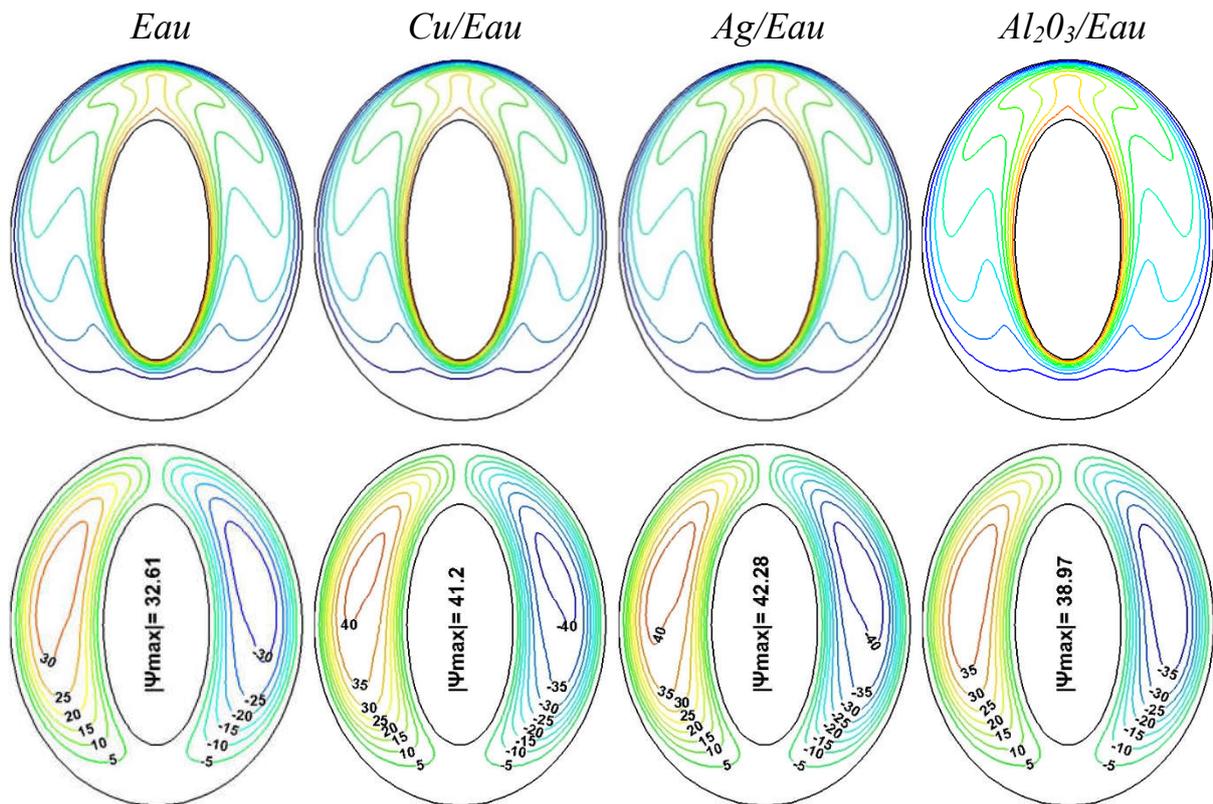


Figure 4.28 Isothermes et lignes de courant pour différents nanofluides utilisés pour  $\alpha=90^\circ$ ,  $Ra=10^5$  et  $\phi=0.08$

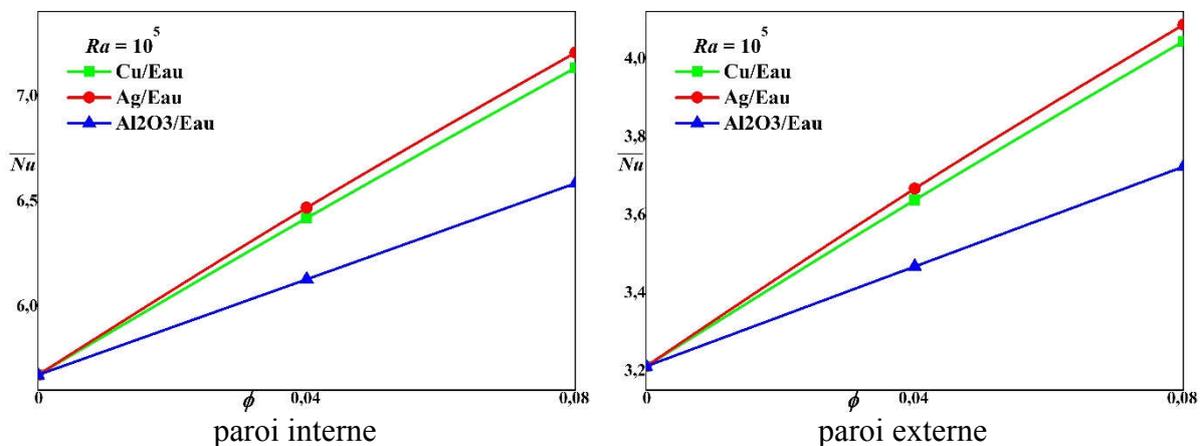


Figure 4.29 Variations du nombre de *Nusselt* moyen pour différents nanofluides utilisés

## Conclusion générale

Ce travail consiste en une contribution à l'étude de la convection naturelle bidimensionnelle laminaire de nanofluides confinés dans un échangeur thermique à tubes elliptiques coaxiaux, ces nanofluides sont considérés newtoniens et incompressibles. La paroi externe du tube elliptique est maintenue froide alors que celle interne est soumise à différentes conditions pariétales thermiques. Les effets de l'angle d'inclinaisons et du type de nanoparticules injectées, sont examinés pour des valeurs, du nombre de *Rayleigh* et de la fraction volumique, considérées. Les conclusions suivantes sont tirées :

- 1- Le deuxième cas du chauffage partiel (le cylindre intérieur est chauffé partiellement de la même manière du côté gauche et du côté droit) assure un échange de chaleur bien meilleur que celui obtenu par les deux autres cas de chauffage partiel.
- 2- Pour des nombre de *Rayleigh* élevés ( $Ra=10^4$  et  $Ra=10^5$ ) l'échange de chaleur devient meilleur, ce qui signifie la prédominance de la convection naturelle comme mode de transfert.
- 3- L'ajout des nanoparticules aux fluides de base améliore le transfert thermique pour toute la gamme des nombres de *Rayleigh* considérés.
- 4- Le nombre de *Nusselt* moyen augmente en fonction de l'augmentation de l'angle d'inclinaison.
- 5- Les nanoparticules d'Argent (*Ag*) dispersés dans l'eau, offrent des performances bien meilleures par rapport à celles du Cuivre (*Cu*) ou de l'alumine ( $Al_2O_3$ ).

Il serait donc intéressant de proposer comme suite à ce travail, une étude tridimensionnelle, et considérer la circulation d'un deuxième fluide à l'intérieur du tube elliptique interne, pour essayer par la suite de faire un dimensionnement d'un échangeur thermique qui fait intervenir plusieurs phénomènes physiques entre-autres (convection forcée, conduction...etc.).

## Références bibliographiques

- [1] W.C. Schreiber & S.N. Singh, **Natural Convection Between Confocal Horizontal Elliptical Cylinders**, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1985, Vol. 28(4), pp.807-822. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(85\)90231-5](https://doi.org/10.1016/0017-9310(85)90231-5).
- [2] M.M. Elshamy, M.N. Ozisik & J.P. Coulter, **Correlation for Laminar Natural Convection between Confocal Horizontal Elliptical Cylinders**, *Numerical Heat Transfer Part A: Applications*, 1990, Vol. 18(1), pp.95-112. <https://doi.org/10.1080/10407789008944785>.
- [3] C.H. Cheng & C.C. Chao, **Numerical Prediction of the Buoyancy-Driven Flow in the Annulus Between Horizontal Eccentric Elliptical Cylinders**, *Numerical Heat Transfer Part A: Applications*, 1996, Vol. 30(3), pp.283-303. <https://doi.org/10.1080/10407789608913841>.
- [4] J.P.B. Mota, I.A.A.C. Esteves, C.A.M. Portugal, J.M.S.S. Esperança & E. Saadjan, **Natural Convection Heat Transfer in Horizontal Eccentric Elliptic Annuli Containing Saturated Porous Media**, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2000, Vol. 43(24), pp.4367-4379. [https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(00\)00068-5](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(00)00068-5).
- [5] Y.D. Zhu, C. Shu, J. Qiu & J. Tani, **Numerical Simulation of Natural Convection Between Two Elliptical Cylinders Using DQ Method**, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2004, Vol. 47(4), pp.797-808. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2003.06.005>.
- [6] R.Y. Sakr, N.S. Berbish, A.A. Abd-Aziz & A.S. Hanafi, **Experimental and Numerical Investigation of Natural Convection Heat Transfer in Horizontal Elliptic Annuli**, *International Journal of Chemical Reactor Engineering*, 2008, Vol. 6(1). <https://doi.org/10.2202/1542-6580.1696>.
- [7] E.I. Eid, **Experimental Study of Free Convection in an Elliptical Annular Enclosure in Blunt and Slender Orientations**, *Heat and Mass Transfer*, 2011, Vol. 47(1), pp.81-91. <https://doi.org/10.1007/s00231-010-0678-3>.
- [8] M. Djezzar, A. Chaker & M. Dagenet, **Numerical Study of Bidimensional Steady Natural Convection in a Space Annulus Between Two Elliptic Confocal Ducts: Influence of the Internal Eccentricity**, *Revue des Energies Renouvelables (CDER)*, 2005, Vol. 8(1), pp.63-72.
- [9] M.Djezzar & M. Dagenet, **Natural Steady Convection in a Space Annulus between Two Elliptic Confocal Ducts: Influence of the Slope Angle**. *Journal of Applied Mechanics Transaction (ASME)*, 2006, Vol. 73(1), pp.88-95. <https://doi.org/10.1115/1.2041656>.
- [10] A. Bouras, M. Djezzar & C. Ghernoug, **Numerical Simulation of Natural Convection between two Elliptical Cylinders: Influence of Rayleigh Number and Prandtl Number**, *Energy Procedia*, 2013, Vol. 36(1), pp.788-797. <https://doi.org/10.1016/j.egypro.2013.07.091>.

- [11] A. Bouras, M. Djezzar, H. Naji & C. Ghernoug, **Numerical Computation of Double-Diffusive Natural Convective Flow within an Elliptic-Shape Enclosure**, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2014, Vol. 57(1), pp.183-192. <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2014.08.002>.
- [12] A. Bouras, D. Taloub, M. Djezzar & Z. Driss, **Natural Convective Heat Transfer from a Heated Horizontal Elliptical Cylinder to its Coaxial Square Enclosure**, *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, 2018, Vol.5(4), pp.379-385. <https://doi.org/10.18280/mmep.050415>.
- [13] H. Boulechfar & M. Djezzar, **Thermosolutal Natural Convection in Horizontal Elliptical Annulus Containing a Fluid-saturated Porous Medium: Effects of Aiding Buoyancy for Low Rayleigh-Darcy Number**, *Proceedings of The World Congress on Engineering*, 2014, Vol. 2, pp.1249-1256.
- [14] H. Boulechfar, M. Djezzar & A. Labed, **Effect of Eccentricity on Natural Convection in Fluid-Saturated Porous Media in an Elliptical Annulus**, *Mechanics & Industry*, 2015, Vol. 16(4), 403(7). <https://doi.org/10.1051/meca/2015015>.
- [15] S.U.S. Choi & J.A. Eastman, **Enhancing Thermal Conductivity Of Fluids With Nanoparticles**, *ASME: Fluids Engineering Division (FED)*, 1995, Vol. 231, pp. 99–105.
- [16] X. Wang, X. Xu & S.U.S. Choi, **Thermal Conductivity of Nanoparticle - Fluid Mixture**, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 1999, Vol. 13(4), pp.474-480. <https://doi.org/10.2514/2.6486>.
- [17] H.U. Kang, S.H. Kim & J.M. Oh, **Estimation of Thermal Conductivity of Nanofluid Using Experimental Effective Particle Volume**, *Experimental Heat Transfer*, 2006, Vol. 19(3), pp.181-191. <https://doi.org/10.1080/08916150600619281>.
- [18] V. Velagapudi, K.R. Konijeti & K.S.C. Aduru, **Empirical correlations to predict thermophysical and heat transfer characteristics of nanofluids**, *Thermal Science*, 2008, Vol. 12(2), pp.27-37. <https://doi.org/10.2298/TSCI0802027V>.
- [19] W. Duangthongsuk & S. Wongwises , **Effect of Thermophysical Properties Models on the Predicting of the Convective Heat Transfer Coefficient for Low Concentration Nanofluid**, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2008, Vol. 35(10), pp.1320-1326. <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2008.07.015>.
- [20] S. Kakaç & A. Pramuanjaroenkij, **Review of Convective Heat Transfer Enhancement with Nanofluids**, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2009, Vol. 52(13), pp.3187-3196. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2009.02.006>.
- [21] E. Abu-Nada, **Effects of Variable Viscosity and Thermal Conductivity of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-Water Nanofluid on Heat Transfer Enhancement in Natural Convection**, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2009, Vol. 30(4), pp.679-690. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2009.02.003>.

- [22] E. Abu-Nada, Z. Masoud, H.F. Oztop & A. Campo, **Effect of Nanofluid Variable Properties on Natural Convection in Enclosures**, *International Journal of Thermal Sciences*, 2010, Vol. 49(3), pp.479-491. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2009.09.002>.
- [23] I. Tavman, A. Turgut, M. Chirtoc, K. Hadjov, O. Fudym Et S. Tavman, **Experimental Study on Thermal Conductivity and Viscosity of Water-Based Nanofluids**, *Heat Transfer Research*, 2010, Vol. 41(3), pp.339-351. <https://doi.org/10.1615/HeatTransRes.v41.i3.100>.
- [24] M.H. Esfe, S. Saedodin & M. Mahmoodi, **Experimental Studies on The Convective Heat Transfer Performance and Thermophysical Properties of Mgo–Water Nanofluid Under Turbulent Flow**, *Experimental Thermal and Fluid Science*, 2014, Vol. 52, pp.68-78. <https://doi.org/10.1016/j.expthermflusci.2013.08.023>.
- [25] S.S. Ghadikolaei, M. Yassari, H. Sadeghi, Kh. Hosseinzadeh & D.D. Ganji, **Investigation on Thermophysical Properties of Tio<sub>2</sub>–Cu/H<sub>2</sub>O Hybrid Nanofluid Transport Dependent on Shape Factor in MHD Stagnation Point Flow**, *Powder Technology*, 2017, Vol. 322, pp.428-438. <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2017.09.006>.
- [26] P.K. Das, N. Islam, A.K. Santra & R. Ganguly , **Experimental Investigation of Thermophysical Properties of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>–Water Nanofluid: Role of Surfactants**, *Journal of Molecular Liquids*, 2017, Vol. 237, pp.304-312. <https://doi.org/10.1016/j.molliq.2017.04.099>.
- [27] O. Mahian, L. Kolsi, M. Amani, G. Ahmadi, C. Kleinstreuer, J.S. Marshall, M. Siavashi, H. Niazmand, S. Wongwises, T. Hayat & A. Kolanjiyil, **Recent Advances in Modeling and Simulation of Nanofluid Flows-Part I: Fundamentals and Theory**, *Physics Reports*, 2019, Vol. 790, pp.1-48. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2018.11.004>.
- [28] O. Mahian, L. Kolsi, M. Amani, P. Estellé, G. Ahmadi, C. Kleinstreuer, J.S. Marshall, R.A. Taylor, E. Abu-Nada, S. Rashidi, H. Niazmand, S. Wongwises, T. Hayat, A. Kasaeian & I. Pop, **Recent Advances in Modeling and Simulation of Nanofluid Flows-Part II: Applications**, *Physics Reports*, 2019, vol.791, pp.1–59. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2018.11.003>.
- [29] T. Tayebi, M. Djezzar & K. Saadaoui, **Effect of Sinusoidal Thermal Boundary Condition on Natural Convection in a Cavity Filled with Cu-Water Nanofluid**, *Journal of Nanofluids*, 2013, Vol. 2(2), pp.120-126. <https://doi.org/10.1166/jon.2013.1044>.
- [30] T. Tayebi & M. Djezzar, **Numerical Study of Natural Convection Flow in a Square Cavity with Linearly Heating on Bottom Wall Using Copper-Water Nanofluid**, *Journal of Nanofluids*, 2015, Vol. 4(1), pp.38-49. <https://doi.org/10.1166/jon.2015.1131>.
- [31] T. Tayebi, C. Ferhat, N.Rezig & M. Djezzar, **Free Convection in a Carbon Nanotube-Water Nanofluid Filled Enclosure with Power-Law Variation Wall Temperature**, *Journal of Nanofluids*, 2016, Vol. 5(4), pp. 531-542. <https://doi.org/10.1166/jon.2016.1245>.

- [32] T. Tayebi & A.J. Chamkha, **Buoyancy-Driven Heat Transfer Enhancement in a Sinusoidally Heated Enclosure Utilizing Hybrid Nanofluid**, *Computational Thermal Sciences: An International Journal*, 2017, Vol. 9(5), pp.405-421. <https://doi.org/10.1615/ComputThermalScien.2017019908>.
- [33] K. Azzouz, T. Tayebi & M. Djezzar, **Effect of Periodic Heating Conditions on Natural Convection in an Enclosure Filled with Copper-Water Nanofluid**, *Journal of Nanofluids*, 2019, Vol. 8(6), pp. 1281-1294. <https://doi.org/10.1166/jon.2019.1679>.
- [34] A. Yahiaoui, M. Djezzar & H. Naji, **Numerical Computation of Natural Convection Inside a Curved-Shape Nanofluid-Filled Enclosure with Nonuniform Heating of the Bottom Wall**, *International Journal of Modern Physics C*, 2019, Vol. 30(1), 1950006(23). <https://doi.org/10.1142/S0129183119500062>.
- [35] A. Yahiaoui, M. Djezzar & H. Naji, **Simulating of Heat Transfer Enhancement Via a Water-Based Nanofluid in Enclosures with Curved Side Walls**, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2019, Vol. 100, pp.118-132. <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2018.12.003>.
- [36] F. Benkhedda, T. Boufendi & S. Touahri, **Prediction of Nanofluid Forced and Mixed Convection Heat Transfer through an Annular Pipe**, *International Journal of Materials, Mechanics and Manufacturing*, 2017, Vol. 5(2), pp.87-91. <https://doi.org/10.18178/ijmmm.2017.5.2.296>.
- [37] F. Benkhedda, T. Boufendi & S. Touahri, **Laminar Mixed Convective Heat Transfer Enhancement by Using Ag-Tio<sub>2</sub>-Water Hybrid Nanofluid in a Heated Horizontal Annulus**, *Heat and Mass Transfer*, 2018, Vol. 54(9), pp.2799-2814. <https://doi.org/10.1007/s00231-018-2302-x>.
- [38] F. Benkhedda, T. Boufendi, T. Tayebi & A.J. Chamkha, **Convective Heat Transfer Performance of Hybrid Nanofluid in a Horizontal Pipe Considering Nanoparticles Shapes Effect**, *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 2019. <https://doi.org/10.1007/s10973-019-08836-y>.
- [39] O. Benzeggouta, T. Boufendi & S. Touahri, **Comparative Study of Fluid Flow and Heat Transfer Between Usual Fluids and Nanofluids in a Heated Horizontal Pipe**, *Journal of Thermal Science and Technology*, 2018, Vol.13(2), 17-00366(13). <https://doi.org/10.1299/jtst.2018jtst0027>.
- [40] T. Tayebi & M. Djezzar, A. Bouzerzour, K. Azzouz et Z.H. Khan, **Numerical Simulation of Natural Convection of Water Based Nanofluids in Horizontal Eccentric Cylindrical Annuli**, *Journal of Nanofluids*, 2016, Vol. 5(2), pp.253-263. <https://doi.org/10.1166/jon.2016.1211>.
- [41] T. Tayebi & A.J. Chamkha, **Natural Convection Enhancement in an Eccentric Horizontal Cylindrical Annulus Using Hybrid Nanofluids**, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 2017, Vol. 71(11), pp.1159-1173. <https://doi.org/10.1080/10407782.2017.1337990>.

- [42] O.A. Alawi, N.A.C. Sidik & H.K. Dawood, **Natural Convection Heat Transfer in Horizontal Concentric Annulus between Outer Cylinder and Inner Flat Tube Using Nanofluid**, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2014, Vol. 57, pp.65-71. <http://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2014.07.001>.
- [43] H.K. Dawood, H.A. Mohammed & K.M. Munisamy, **Heat Transfer Augmentation Using Nanofluids in an Elliptic Annulus with Constant Heat Flux Boundary Condition**, *Case Studies in Thermal Engineering*, 2014, Vol. 4, pp.32-41. <https://doi.org/10.1016/j.csite.2014.06.001>.
- [44] H.K. Dawood, H.A. Mohammed, N.A.C. Sidik & K.M. Munisamy, **Numerical Investigation on Heat Transfer and Friction Factor Characteristics of Laminar and Turbulent Flow in an Elliptic Annulus Utilizing Nanofluid**, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2015, Vol. 66, pp.148-157. <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2015.05.019>.
- [45] H.K. Dawood, H.A. Mohammed, N.A.C. Sidik, K.M. Munisamy & O.A. Alawi, **Heat Transfer Augmentation in Concentric Elliptic Annular by Ethylene Glycol Based Nanofluids**, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2017, Vol. 82, pp.29-39. <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2017.02.008>.
- [46] M.\_Sheikholeslami,\_R.\_Ellahi,\_M.\_Hassan\_&\_S.\_Soleimani, **A Study of Natural Convection Heat Transfer in a Nanofluid Filled Enclosure with Elliptic Inner Cylinder**, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 2014, Vol. 24(8), pp.1906-1927. <https://doi.org/10.1108/HFF-07-2013-0225>.
- [47] M. Sheikholeslami, Z. Ziabakhsh & D.D. Ganji, **Transport of Magnetohydrodynamic Nanofluid in a Porous Media**, *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 2017, Vol. 520, pp.201-212. <https://doi.org/10.1016/j.colsurfa.2017.01.066>.
- [48] T. Tayebi & A.J. Chamkha, **Free Convection Enhancement in an Annulus between Horizontal Confocal Elliptical Cylinders Using Hybrid Nanofluids**, *Numerical Heat Transfer Part A: Applications*, 2016, Vol. 70(10), pp.1141-1156. <https://doi.org/10.1080/10407782.2016.1230423>.
- [49] T. Tayebi, A.J. Chamkha, M. Djezzar & A. Bouzerzour, **Natural Convective Nanofluid Flow in an Annular Space Between Confocal Elliptic Cylinders**, *Journal of Thermal Science and Engineering Applications*, 2017, Vol. 9(1), 011010(9). <https://doi.org/10.1115/1.4034599>.
- [50] T. Tayebi, A.J. Chamkha & M. Djezzar, **Natural Convection of CNT-Water Nanofluid in an Annular Space Between Confocal Elliptic Cylinders with Constant Heat Flux on Inner Wall**, *Scientia Iranica : Transactions on Mechanical Engineering (B)*, 2019, Vol. 26(5), pp.2749-2883, <https://doi.org/10.24200/SCI.2018.21069>.

- [51] T. Tayebi & H.F. Oztop, **Entropy Production during Natural Convection of Hybrid Nanofluid in an Annular Passage Between Horizontal Confocal Elliptic Cylinders**, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2020, Vol. 171, 105378. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2019.105378>.
- [52] H.F. Oztop & E.Abu-Nada, **Numerical Study of Natural Convection in Partially Heated Rectangular Enclosures Filled with Nanofluids**, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2008, Vol. 29(5), pp.1326–1336. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2008.04.009>.
- [53] I. Pop, M. Sheremet & D. Cimpean, **Natural Convection in a Partially Heated Wavy Cavity Filled with a Nanofluid Using Buongiorno's Nanofluid Model**, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 2017, Vol. 27(4), pp.924-940. <https://doi.org/10.1108/HFF-12-2015-0529>.
- [54] H. Celik, M. Mobedi, O. Manca & B. Buonomo, **Enhancement of Heat Transfer in Partially Heated Vertical Channel Under Mixed Convection by Using Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> Nanoparticles**, *Heat Transfer Engineering*, 2018, Vol. 39(3), pp.229-240. <https://doi.org/10.1080/01457632.2017.1295738>.
- [55] M. Guestal, M. Kadja & M.T. Hoang, **Study of Heat Transfer by Natural Convection of Nanofluids in a Partially Heated Cylindrical Enclosure**, *Case Studies in Thermal Engineering*, 2018, Vol.11, pp.135–144. <https://doi.org/10.1016/j.csite.2018.01.008>.
- [56] M. Salari, E.H. Malekshah & M.H. Malekshah, **Natural Convection in a Rectangular Enclosure Filled by Two Immiscible Fluids of Air and Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-Water Nanofluid Heated Partially From Side Walls**, *Alexandria Engineering Journal*, 2018, Vol. 57(3), pp.1401-1412. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2017.07.004>.
- [57] A.I. Alsabery, M.H. Yazdi, A.A. Altawallbeh & I. Hashim, **Effects of Nonhomogeneous Nanofluid Model on Convective Heat Transfer in Partially Heated Square Cavity with Conducting Solid Block**, *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 2019, Vol. 136(4), pp.1489–1514. <https://doi.org/10.1007/s10973-018-7789-3>.
- [58] Y. Ma, R. Mohebbi, M. M. Rashidi & Z. Yang, **MHD Forced Convection of MWCNT–Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub>/Water Hybrid Nanofluid in a Partially Heated  $\tau$ -Shaped Channel Using LBM**, *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 2019, Vol. 136(4), pp.1723-1735. <https://doi.org/10.1007/s10973-018-7788-4>.
- [59] H.C. Brinkman, **The viscosity of concentrated suspensions and solutions**, *The Journal of Chemical Physics*, 1952, vol. 20(4), pp.571-571. <https://doi.org/10.1063/1.1700493>.
- [60] J.C. Maxwell, **A Treatise on Electricity and Magnetism**, Oxford University Press, Cambridge, UK, 1904, 2nd edition.
- [61] P. Moon & D.E. Spencer, **Field theory Handbook**, Springer Berlin Heidelberg, 2012. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-53060-9>.
- [62] S. V. Patankar, **Numerical Heat Transfer and fluid flow**, Mc Graw-Hill book Company, New York, 1980.

- [63] E. F. Nogotov, **Applications of Numerical Heat Transfer**, *Mc Graw-Hill book Company, New York*, 1978.
- [64] P.J. ROACHE, **Computational Fluid Dynamics**, *Hermosa publishers*, 1972. ISBN: 0-913478-05-9.
- [65] A. Bouzerzour, M. Djezzar, H.F. Oztop, T. Tayebi & N. Abu-Hamdeh, **Natural Convection in Nanofluid Filled and Partially Heated Annulus: Effect of Different Arrangements of Heaters**, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2020, Vol. 538, 122479. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.122479>

**عنوان:** المساهمة في تحسين الانتقال الحراري بواسطة مائع نانومتري داخل مبادل حراري ذو أنبوب محوري إهليلجي الشكل

**ملخص:** يقدم المؤلف في هذا البحث مساهمة في دراسة انتقال الحرارة بواسطة الحمل الحراري الطبيعي داخل حيز حلقي ثنائي الأبعاد محصور بين اسطوانتين إهليلجيتين، مليء بمائع نانوي نيوتوني غير قابل للانضغاط. في حين يتم إبقاء الأنبوب الخارجي بارداً عند درجة حرارة ثابتة، يخضع الأنبوب الداخلي إلى حالات مختلفة من التسخين. تأثيرات زاوية ميل الأنبوب ونوعية الجزيئات المضافة للسائل القاعدي، تم فحصها في ظل عدد رايلي ونسبة حجمية للمائع متغيرين. تم استخدام برنامج حاسوب يعتمد على طريقة الأحجام المحدودة في صياغة التدويم -دالة التيار من أجل حل معادلات الاستمرارية، كمية الحركة ومعادلة الطاقة المكتوبة في الإحداثيات الإهليلجية في إطار مقارنة بوسينيسك. تنقسم الدراسة إلى ثلاثة أجزاء من أجل عدد رايلي منحصر بين ( $10^3 < Ra < 10^5$ ) ونسبة حجمية للمائع النانوي منحصرة بين ( $0 < \phi < 0.08$ ). في الجزء الأول، يتم تسخين الجدار الداخلي للحيز الحلقي جزئياً مع كونه مملوءاً بمائع نانومتري يتكون من الماء وجزيئات النحاس بينما يظل الجدار الخارجي بارداً. وذلك بفرض ثلاث حالات مختلفة من التسخين السطحي الجزئي. أولاً، يتم تثبيت درجة حرارة في أعلى وأسفل الأسطوانة الداخلية. ثانياً، نفس درجة الحرارة مثبتة على يسار ويمين هذه الأسطوانة. وأخيراً، تثبيت الحرارة على ربعها الأيمن العلوي وربعها الأيسر السفلي. تحفظ الأجزاء المتبقية من الأسطوانة في جميع الحالات، باردة عند درجة حرارة معادلة لحرارة الأسطوانة الخارجية. في الجزء الثاني، نفس الفضاء الحلقي مملوء أيضاً بمائع نانومتري يتكون من جزيئات النحاس والماء اين يتم تثبيت درجة الحرارة على مستوى الجدارين، الداخلي ساخن والخارجي بارد، بينما يأخذ تأثير زاوية الميل  $\alpha$  بعين الاعتبار، اين تأخذ القيم التالية  $0^\circ$  و  $10^\circ$  و  $45^\circ$  و  $60^\circ$  و  $90^\circ$ . في الجزء الثالث تمت مقارنة فعالية عدد من الموائع نانومترية مختلفة، متمثلة في نحاس/ماء، فضة/ماء والألمنيوم المتأكسد/ماء، داخل الحيز الحلقي من أجل  $\alpha = 0^\circ$ . النتائج العديدة المحصل عليها والممثلة بالرسومات البيانية لعدد نوسيلت المتوسط والموضعي وكذلك من خلال خطوط الحرارة والتيارات المتساوية، والتي تبين بشكل أساسي أن إضافة الجسيمات النانومترية إلى المائع القاعدي يساهم في تحسين نقل الحرارة.

**الكلمات المفتاحية:** نقل الحرارة، الحمل الحراري الطبيعي، الحيز الحلقي الإهليلجي، صياغة التدويم-دالة التيار، مائع نانومتري، التسخين الجزئي.

**Title:** Contribution to the intensification of heat transfers by a nanofluid in a coaxial elliptical tube heat exchanger

**Abstract:** The author presents here, a contribution to the study of two-dimensional laminar natural convection of Newtonian incompressible nanofluids confined in coaxial elliptical tubes heat exchanger. The external wall is maintained cold while the internal wall is subjected to different parietal thermal conditions. The effects of inclination angle and the injected nanoparticles type are examined for considered, *Rayleigh* number and volume fraction, values. A numerical code with finite volumes method based on Vorticity-Stream function formulation is developed to resolve the continuity, momentum, and energy equations written in elliptic coordinates considering *Boussinesq* approximation. The study consists of three parts, for different *Rayleigh* numbers ( $10^3 < Ra < 10^5$ ) and volume fractions ( $0 < \phi < 0.08$ ). In the first part, the internal wall of the *Cu/Water* nanofluid filled annulus is partially heated while the external one is cold. Three different parietal thermal conditions are considered. In the first one, a constant temperature is imposed on the top and the bottom of the internal wall. Secondly, the same temperature is imposed on the right and left sides of this wall and finally, the right top and the left bottom of the wall are the heated areas. The areas kept cold in the three cases are at the same temperature as the external wall. For the second part, both walls of the *Cu/Water* filled annulus are kept at uniform temperatures, the internal hot and the external cold. The effect of the inclination angle  $\alpha$ , for values  $0^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  et  $90^\circ$ , is highlighted. A comparison of *Cu/Water*, *Ag/Water* and *Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/Water* performances in our annular space when  $\alpha=90^\circ$ , has been established for the third part. The obtained numerical results, presented as mean and local *Nusselt* numbers profiles as well as isotherms and streamlines contours, show that adding nanoparticles to base fluid contribute to heat transfer enhancement.

**Keywords:** *Heat transfers, Natural convection, Elliptical annular space, Vorticity-Stream function formulation, nanofluid, partial heating.*

**Résumé :** L'auteur présente ici une contribution à l'étude de la convection naturelle bidimensionnelle laminaire de nanofluides confinés dans un échangeur thermique à tubes elliptiques coaxiaux, ces nanofluides sont considérés newtoniens et incompressibles. La paroi externe du tube elliptique est maintenue froide alors que celle interne est soumise à différentes conditions pariétales thermiques. Les effets de l'angle d'inclinaison et du type de nanoparticules injectées, sont examinés pour des valeurs, du nombre de *Rayleigh* et de la fraction volumique, considérées. Un code de calcul aux volumes finis qui utilise la formulation vorticité-fonction de courant pour résoudre les équations de continuité, de quantité de mouvement, et de l'énergie, exprimées en coordonnées « dites » elliptiques, dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, est mis au point. L'étude se compose de trois parties, pour différents nombres de Rayleigh ( $10^3 < Ra < 10^5$ ) et différentes fractions volumiques ( $0 < \phi < 0.08$ ). Pour la première partie, la paroi interne de l'espace annulaire rempli du nanofluide Cu/Eau, est chauffée partiellement alors que la paroi externe est maintenue froide. Pour ce cas-là, trois cas de chauffage partiel ont été considérés, en premier lieu, une température constante est imposée en haut et en bas de la paroi interne. Deuxièmement, la même température est imposée à gauche et à droite de cette même paroi et enfin, c'est sur le quart haut droit et le quart bas gauche de la paroi que le chauffage est imposé. Les parties non chauffées du cylindre dans les trois cas sont maintenues froides à une température équivalente à celle-ci du cylindre externe. Pour la deuxième partie, l'espace annulaire est rempli aussi par du Cu/Eau où les deux parois sont maintenues à des températures uniformes, l'interne chaude et l'externe froide. L'effet de l'angle d'inclinaison, qui adopte les valeurs  $0^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  et  $90^\circ$ , est mis en évidence. Une comparaison, entre les performances des différents types de nanofluide en l'occurrence de *Cu/Eau*, *Ag/Eau* et *Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/Eau*, remplissant notre espace annulaire pour  $\alpha=90^\circ$ , est établie, pour la troisième partie. Les résultats numériques obtenus, présentés par les profils des nombres de Nusselt moyens et locaux ainsi que par les distributions d'isothermes et d'iso-courants, montrent essentiellement que l'ajout des nanoparticules au fluide de base contribue à l'amélioration du transfert de chaleur.

**Mots clés :** *Transferts de chaleur, Convection naturelle, Espace annulaire elliptique, Formulation vorticité-fonction de courant, nanofluide, chauffage partiel.*