

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Frères Mentouri Constantine 1

Faculté des Sciences Exactes

Département de Physique

N° d'ordre : 146/DS/2019

Série : 17/Phy/2019

Thèse

présentée par :

Mourad Guenouche

Pour obtenir le Diplôme de Docteur en Sciences

Spécialité : **Physique Théorique**

Thème :

**Déflexion de la lumière et temps de retard à l'échelle cosmologique, Génération et
interprétation de solutions stationnaires en théorie d'Einstein-Maxwell**

soutenue le : 10/10/2019

devant le jury composé de :

Président	A. Bachkhaznadj	Prof	Université Frères Mentouri Constantine 1
Rapporteur	S. R. Zouzou	Prof	Université Frères Mentouri Constantine 1
Co-Rapporteur	G. Clément	CR1	Université Savoie Mont Blanc LAPTh CNRS
Examineur	A. Boucharab	M.C.A	Université Badji Mokhtar Annaba
Examineur	K-E. Boudjema	M.C.A	Université Abbes Laghrour Khenchela

A la mémoire de mes parents, à la mémoire de mon frère Djaber.

Remerciements

Un grand merci à M. Zouzou Sami Ryad d'avoir accepté de diriger ma thèse après avoir été mon encadreur de magister et mon professeur au DES et au DEA de Physique Théorique. Il a su orienter judicieusement mon travail tout en me laissant la liberté de faire mes propres choix. Je lui suis reconnaissant pour sa confiance et sa disponibilité, l'aide qu'il m'a apportée et les conseils pertinents tout au long de ce travail.

Un grand merci également à M. Clément Gérard pour son engagement dans le co-encadrement de ma thèse ainsi que de m'avoir accueilli au sein du Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique Théorique en France et de m'avoir offert la possibilité d'achever ma thèse dans de si bonnes conditions. Travailler à ses côtés a été pour moi une expérience très enrichissante et très fructueuse. Je lui suis reconnaissant pour sa patience, sa gentillesse, sa disponibilité, ses suggestions éclairées et ses pertinentes critiques.

Enfin, je remercie les membres du jury, M. Bachkhaznadj Abdelmalik de l'Université Constantine 1, pour en avoir accepté la présidence, M. Boudjemaa Kheir-Eddine de l'Université Abbes Laghrour de Khenchela et M. Bouchareb Adel de l'Université Badji Mokhtar d'Annaba, pour avoir accepté de juger le travail de cette thèse de Doctorat.

Table des matières

Introduction générale	5
I Déflexion de la lumière et temps de retard à l'échelle cosmologique	13
1 Modèle de Kottler	14
1.1 Forme d'une métrique statique à symétrie sphérique	15
1.2 Métrique de Kottler	17
1.3 Géodésiques des photons dans un champ de Kottler	21
1.4 Contribution de la constante cosmologique à la déflexion des photons dans un champ de Kottler	24
1.4.1 Géométrie de l'espace-temps de Kottler et équation du mouvement .	24
1.4.2 déflexion de la lumière	28
1.5 Temps de retard dans un champ de Kottler	31
1.5.1 Application au système lentille-quasar SDSS J1004+4112	39
2 Modèle de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) en Cosmo- logie	44
2.1 Principe cosmologique	44
2.2 Equation de Friedmann	46
2.3 Propagation des photons dans le modèle de FLRW	50

3	Modèle d'Einstein-Straus à courbure spatiale nulle (cas plat $k = 0$)	53
3.1	Raccordement de la solution de FLRW avec la solution de Kottler	54
3.2	Géodésiques et déflexion de la lumière	60
3.2.1	Géodésiques de la lumière entre la sphère de Schücking et la Terre .	64
3.2.2	Géodésiques de la lumière à l'intérieur de la sphère de Schücking . .	72
3.2.3	Géodésiques de la lumière entre la source et la sphère de Schücking .	80
3.2.3.1	Temps de retard	84
3.3	Application au système lentille-quasar SDSS J1004+4112	88
4	Modèle d'Einstein-Straus à courbure spatiale positive (cas sphérique $k =$	
1)		92
4.1	Raccordement de la solution de FLRW avec la solution de Kottler	92
4.2	Géodésiques et déflexion de la lumière	98
4.2.1	Géodésiques de la lumière entre la sphère de Schücking et la Terre .	99
4.2.2	Géodésiques de la lumière à l'intérieur de la sphère de Schücking . .	108
4.2.3	Géodésiques de la lumière entre la source et la sphère de Schücking .	114
4.2.3.1	Temps de retard	117
4.3	Application au système lentille-quasar SDSS J1004+4112	121
II Génération et interprétation de solutions stationnaires en théorie		
d'Einstein-Maxwell		124
5	Les équations d'Einstein-Maxwell dans le cas stationnaire	125
5.1	Les équations d'Einstein-Maxwell à 4 dimensions	125
5.2	Vecteurs de Killing	126
5.3	Réduction des équations d'Einstein-Maxwell à 3 dimensions	127
5.4	La symétrie $SU(2,1)$ du modèle sigma (Kinnersley)	129

6	Génération de solutions en rotation	131
6.1	La transformation finie de Geroch $\Pi_\alpha^{-1}\mathcal{R}(\Omega)\Pi_\alpha$	131
6.2	Solution initiale non statique et neutre	136
6.3	Solution initiale non statique et non neutre	138
6.3.1	Application à la solution de Kerr-Newman	141
7	La solution de Reissner-Nordström-NUT	147
7.1	Charge gravimagnétique et corde de Misner	148
7.2	Régularité, trous noirs et wormholes	150
7.2.1	Régularité	150
7.2.2	Trou noir	151
7.2.3	Wormhole	152
7.3	Equations de la géodésique: Intégrales premières	153
7.4	Vecteurs de Killing et variables angulaires	155
8	Analyse du mouvement géodésique	160
8.1	Mouvement angulaire	160
8.2	Mouvement temporel	166
8.3	Les orbites complètes	167
8.3.1	Le potentiel radial	167
8.3.2	Géodésiques de genre temps	168
8.3.2.1	Diffusion	174
8.3.2.2	Mouvement fini (états liés)	180
8.3.3	Géodésiques de genre lumière	182
8.4	Déviations géodésiques	188
8.4.1	Forces de marée gravitationnelles et traversabilité	188
9	Mouvement d'une particule chargée	192
9.1	Généralités	192

9.2	Orbites circulaires dans le cas magnétique de masse nulle	195
9.2.1	Mouvement dans le cas $b^2 = n^2$	196
9.2.2	Mouvement dans le cas général	199
9.2.2.1	Orbites circulaires avec $r = 0$	200
9.2.2.2	Orbites circulaires avec $r = r_{\pm}$	201
10	Le problème de la causalité	204
10.1	Introduction	204
10.2	Absence de géodésiques fermées de genre temps ou de genre lumière	205
10.3	Lignes d'univers fermées d'une particule chargée dans le cas magnétique de masse nulle	208
10.3.1	Mouvement dans le cas $b^2 = n^2$	209
10.3.2	Mouvement dans le cas général	210
10.3.2.1	Orbites circulaires avec $r = 0$	211
10.3.2.2	Orbites circulaires avec $r = r_{\pm}$	212
10.3.3	Propriété de causalité faible	213
	Conclusion générale	215
	A Potentiels d'Ernst	223
	B Tenseur métrique de Reissner-Nordström-NUT	225
	C Orbites circulaires avec $r = r_{\pm}$	229
	Bibliographie	232

Introduction générale

Cette thèse de Doctorat se compose de deux parties distinctes, bien que s’inscrivant toutes deux dans le domaine de la gravitation et de la cosmologie. La première partie sera consacrée à l’étude de l’effet de lentille gravitationnelle à grande échelle, tandis que la seconde partie traitera des problèmes liés à quelques solutions stationnaires des équations d’Einstein-Maxwell.

La cosmologie moderne a vu le jour en 1917, lorsque Einstein commença à réfléchir aux conséquences de sa théorie de la relativité générale, en introduisant la fameuse constante cosmologique dans l’Univers qu’il considérait statique dans son ensemble [1]. Suite à la découverte de la récession apparente des galaxies par Hubble en 1929 [2], il est désormais établi que l’Univers est plutôt dynamique en expansion. Le fait que ce soit la relativité générale qui soit pertinente pour décrire l’évolution de l’Univers provient de ce que la gravitation est la seule interaction effective à grande échelle.

Comme il est bien connu, la déflexion de la lumière et le temps de retard figurent parmi les principales prédictions de la relativité générale. A l’occasion d’une éclipse totale du Soleil en 1919, Eddington avait expérimentalement confirmé que la lumière est attirée gravitationnellement à proximité du soleil avant d’arriver sur Terre [3]. En mesurant avec une grande précision l’angle de déflexion, le résultat était en accord parfait avec ce que prévoit la relativité générale. En conséquence, cette lumière parcourt un trajet plus long que ce qu’elle ferait en l’absence du soleil. Ceci se traduit par un temps de retard baptisé “effet Shapiro”, du nom de celui qui l’avait découvert en 1964 [4], et l’avait observé en 1968

entre la Terre et Mercure en enregistrant un retard de 120 microsecondes [5]. Dans ce cas, on dit que le soleil, ou toute autre étoile, agit comme une micro-lentille gravitationnelle.

Quant aux grandes structures de l'Univers, tels que les galaxies (ou amas de galaxies), il s'agit de l'effet de lentille gravitationnelle fort (strong lensing) ou faible (weak lensing). Dans cette thèse, c'est l'effet de lentille gravitationnelle fort qui nous intéresse. La lumière provenant des sources d'arrière-plan est fortement déviée par le corps massif, modifiant ainsi la manière dont ces sources sont vues depuis la Terre et pouvant donner lieu à l'apparition d'images multiples, à l'exemple des systèmes lentille-quasar G2237+0305 (appelé croix d'Einstein) et SDSS J1004+4112. Le nombre et la forme de ces images dépendent de la géométrie du corps massif ainsi que de la position de la source par rapport à la ligne de visée (axe observateur-corps massif). En outre, d'après les mesures observationnelles, le temps de retard induit entre les différentes images peut s'étaler sur plusieurs années.

L'enjeu principal de cette première partie de thèse est l'étude de l'effet de lentille gravitationnelle fort dans le cadre du modèle non statique d'Einstein-Straus (Swiss-cheese model) [6], et ensuite la confrontation des résultats obtenus aux données observationnelles. Le choix de ce modèle est essentiellement motivé par le fait qu'il soit applicable aussi bien à grande échelle qu'à petite échelle. Autrement dit, c'est un modèle sophistiqué qui tient compte à la fois de l'expansion de l'Univers à l'échelle galactique et du fait que les petites échelles, telles que les échelles planétaire et atomique, ne sont pas affectées par la dite expansion. Ce modèle résulte du raccordement de la métrique non statique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW en abrégé) à l'extérieur d'une vacuole (sphère de Schücking) avec la métrique statique de Kottler (ou Schwarzschild-de Sitter) à l'intérieur de celle-ci. L'effet de lentille gravitationnelle ne se produit qu'à l'intérieur de la vacuole.

Une deuxième motivation pour cet intérêt est la grande polémique concernant la dépendance ou non de la déflexion de la lumière en la constante cosmologique. Avant les travaux de Rindler et d'Ishak, l'avis général des cosmologues était que l'angle de déflexion

de la lumière passant au voisinage d'une masse statique à symétrie sphérique est indépendant de la constante cosmologique [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]. Cette croyance est basée sur l'argument que la constante cosmologique disparaît accidentellement de l'équation de la géodésique pour des particules non massives. En septembre 2007, Rindler et Ishak ont corrigé cette croyance en soulignant qu'il ne suffisait pas de considérer uniquement l'équation de la géodésique, mais que la métrique elle-même doit aussi être prise en compte [15]. Le point de vue de Rindler et d'Ishak n'a pas été unanimement accepté. Il s'en est suivi une large controverse autour de la question de savoir si la constante cosmologique modifie ou non la courbure de la lumière. On répondra à cette question dans le cadre du modèle d'Einstein-Straus.

Dans le chapitre un, on commencera par dériver la métrique de Kottler dont on fera usage pour extraire les équations du mouvement des photons, puis on mettra tout en œuvre pour arriver à l'expression de l'angle de déflexion totale que doit subir un photon lors de son passage près d'un corps massif. C'est ici qu'on se penchera sur la question de savoir si cette déflexion sera affectée par la présence de la constante cosmologique. Dans toute la suite de cette partie de thèse, on s'intéressera tout particulièrement à une situation typique de deux photons (deux images de la source) émis par une source, l'un après l'autre, déviés par une lentille et enfin reçus sur Terre sous des angles de réception bien connus. Sur la base de quelques hypothèses simplificatrices relatives au modèle de Kottler, on déterminera des expressions analytiques pour la déflexion des deux photons ainsi que pour le temps de retard de l'un par rapport à l'autre. En fait, le système lentille-quasar SDSS J1004+4112, évoqué plus haut, constitue un cas d'école pour estimer la masse de la lentille, la déflexion et le temps de retard. On terminera ce chapitre par appliquer nos résultats à ce système-là. Ce chapitre sera conçu avec l'idée d'exploiter ses résultats pour le modèle d'Einstein-Straus.

Le chapitre deux sera dédié au modèle de FLRW. Faute d'utiliser tous ses éléments, on se contentera de rappeler ceux dont on aura besoin pour la suite. Ces éléments sont essentiels et bien connus dans le modèle standard de cosmologie Λ CDM (cosmological constant-cold

dark matter). On parlera du principe cosmologique, de la métrique isotrope et homogène, de l'équation de Friedmann ainsi que de la propagation des photons. L'intégration des premier et deuxième chapitres sera également faite dans le but de rendre le manuscrit autosuffisant.

Après, on sera en mesure d'aborder l'étude de la déflexion de la lumière et du temps de retard dans le cadre du modèle d'Einstein-Straus en renonçant à toutes les hypothèses simplificatrices adoptées dans le modèle de Kottler à l'exception de l'hypothèse de sphéricité. Nous avons en fait trois variantes pour la métrique d'Einstein-Straus (6 variantes si on prend en considération une constante cosmologique nulle), qui correspondent aux trois variantes de la métrique FLRW: Cas d'une courbure spatiale nulle (espace plat), d'une courbure spatiale positive (sphère) et d'une courbure spatiale négative (pseudosphère). Nous nous limiterons toutefois ici à examiner successivement le cas plat puis le cas sphérique seulement. Les deux cas sont proches de la réalité et intéressent beaucoup la communauté des cosmologues.

Le cas plat sera examiné dans le chapitre trois. On commencera par raccorder la métrique de FLRW plate avec la métrique de Kottler, afin de construire la métrique d'Einstein-Straus plate. Ensuite, comme ce sont les conditions finales sur Terre qui sont données, on intégrera à reculons et partiellement les géodésiques de la lumière, de la Terre jusqu'à la vacuole, à l'intérieur de la vacuole puis de la vacuole jusqu'à la source. A ce stade, dans un premier temps, on fera usage de la géométrie d'Euclide pour arriver à nos fins. Dans un deuxième temps, on développera, pour traiter le même problème, une seconde méthode générale, basée uniquement sur l'intégration des équations différentielles. Bien entendu, cette méthode nous servira pour les modèles non plats. Vu la complexité du modèle, il pourrait s'avérer difficile d'établir une expression analytique pour le temps de retard. Pour cela, on présentera deux méthodes, une méthode de calcul direct, et une méthode que l'on nommera "méthode de calcul par différence". Cette dernière fonctionnera plus fiablement et permettra d'aboutir à une expression semi-analytique. La contribution de la constante

cosmologique à la déflexion de la lumière et au temps de retard sera également investiguée dans les deux versions du modèle. Comme à l'accoutumée, à la fin de ce chapitre, on concrétisera les résultats obtenus par une application au système lentille-quasar SDSS J1004+4112, tout en les comparant aux résultats du modèle de Kottler.

Par analogie avec ce qui précède, on abordera dans le chapitre quatre l'étude de la déflexion de la lumière et du temps de retard dans le cadre du même modèle mais en considérant une courbure spatiale positive. La métrique d'Einstein-Straus sphérique sera obtenue en raccordant la métrique de FLRW sphérique avec celle de Kottler. Ici, seule la mise en œuvre de la méthode d'intégration des équations différentielles, développée au troisième chapitre, sera pertinente. En particulier, une étude suivant les valeurs du facteur d'échelle sur Terre pourrait être envisagée en vue de comparer les résultats au cas plat et mettre l'accent sur l'effet de la courbure de l'espace. Ceci sera mis en évidence lors de l'application au système lentille-quasar SDSS J1004+4112 à la fin de ce chapitre.

La seconde partie de cette thèse répond à un autre problème intitulé, génération et interprétation de solutions stationnaires en théorie d'Einstein-Maxwell, et comporte deux volets. Le premier volet, relevant de la physique mathématique, concerne une extension de la méthode de génération de solutions en rotation par transformation finie de Geroch. L'objet du second volet portera sur une étude détaillée des propriétés géométriques et physiques d'une solution particulière des équations d'Einstein-Maxwell, la solution de Brill.

Les équations d'Einstein-Maxwell à quatre dimensions dans le cas stationnaire admettent le groupe $SU(2, 1)$ comme groupe de symétrie [16, 17]. Au moyen des transformations du groupe $SU(2, 1)$, des solutions monopolaires asymptotiquement minkowskiennes peuvent être reliées entre elles, telles que la génération de la solution électriquement chargée de Reissner Nordström [18, 19, 20] à partir de la solution électriquement neutre de Schwarzschild [21]. Cependant, les mêmes transformations ne permettent pas toutes seules de retrouver des solutions monopolaire-dipolaires, telles que celle de Kerr, à partir des solutions monopolaires, telles que celle de Schwarzschild. Cela est en partie imputable au fait

que la solution de Schwarzschild est à symétrie sphérique avec un seul vecteur de Killing ∂_t , alors que celle de Kerr est seulement à symétrie axiale avec deux vecteurs de Killing ∂_t et ∂_φ qui commutent entre eux.

En 1972, Geroch a montré qu'on peut combiner à l'infini des transformations infinitésimales du groupe $SU(2,1)$, associé à la réduction dimensionnelle par rapport à un vecteur de Killing donné, avec des transformations linéaires infinitésimales dans l'espace à deux dimensions engendré par ∂_t et ∂_φ [23]. Inspiré du travail de Geroch, Clément a mis au point, en 1998, une méthode afin de générer des solutions en rotation à partir des solutions statiques [24]. Cette méthode consiste à appliquer à une solution initiale statique asymptotiquement minkowskienne la combinaison d'une transformation particulière Π du groupe $SU(2,1)$, d'une transformation linéaire de coordonnées \mathcal{R} à un paramètre Ω agissant sur une solution intermédiaire non asymptotiquement minkowskienne, puis de la transformation inverse de Π . Le caractère asymptotiquement minkowskien est préservé par cette combinaison de transformations. Cette combinaison étant un cas particulier des transformations de Geroch.

Au chapitre cinq, après avoir introduit la méthode de Killing, on présentera succinctement, la réduction des équations couplées d'Einstein-Maxwell stationnaires à un modèle sigma autogravitant à trois dimensions, équivalentes aux équations aux dérivées partielles intégrables pour les potentiels complexes d'Ernst [25, 26].

Au chapitre six, on rappellera la méthode de génération de solutions en rotation susmentionnée. Ensuite, on cherchera à généraliser cette méthode en composant la transformation Π de $SU(2,1)$ initialement utilisée avec une dualité continue électromagnétique, c'est-à-dire une rotation d'un angle α dans le plan complexe des $\vec{E} + i\vec{B}$. Le but est de savoir si les solutions en rotation ainsi générées dépendent effectivement du paramètre α . Si oui, cette généralisation aurait pu avoir des applications fructueuses.

La solution de Brill, obtenue en 1964 [27], est la solution de Reissner-Nordström en présence du paramètre NUT (RN-NUT en abrégé) découvert par Newman, Unti, et Tamburino

en 1963 [28]. C'est la solution stationnaire asymptotiquement minkowskienne à symétrie sphérique la plus générale des équations d'Einstein-Maxwell. Elle dépend de quatre paramètres correspondant aux charges électrique, magnétique, graviélectrique (ou masse), et gravimagnétique (ou charge NUT). Si la somme des carrés des charges électrique et magnétique est suffisamment grande et si de plus la charge NUT n'est pas nulle, l'espace-temps de RN-NUT ne présente pas d'horizons ni de singularités, à l'exception de la corde de Misner qui correspond à une singularité de coordonnée, et possède une topologie du type wormhole (trou de ver) avec deux régions distinctes à l'infini de genre espace. En raison de problèmes d'interprétation liés à l'existence de cette corde de Misner (analogue gravitationnel de la corde de Dirac), cette solution a été peu étudiée dans le cas général, et ce uniquement dans le cas où elle présente des horizons. Les espaces-temps du type wormhole ont fait l'objet de nombreuses recherches théoriques, mais on considère généralement que cette topologie ne peut être supportée que par une source de matière exotique (ne respectant pas la condition d'énergie positive). L'existence théorique de la solution wormhole RN-NUT constitue donc un contre-exemple qui mérite d'être étudié de façon plus approfondie.

Dans le chapitre sept, on commencera par donner la forme de la métrique de RN-NUT et rappeler ses principales propriétés, la charge NUT et la corde de Misner. On discutera brièvement sa régularité et sa topologie du type trou noir et du type wormhole. Ensuite, on intégrera partiellement les équations de la géodésique en faisant recours à la méthode des vecteurs de Killing.

Dans le chapitre huit, on analysera les géodésiques de genre temps et de genre lumière dans l'espace-temps de RN-NUT. Une question d'un intérêt physique fondamental se pose à ce propos: Ces géodésiques sont-elles complètes? Si oui, la solution est régulière. Pour répondre à cette question, on s'attachera à résoudre les équations du mouvement angulaire. Ensuite, on discutera le mouvement temporel puis le mouvement radial (les orbites complètes): Etats liés, états de diffusion (réflexion et transmission). La déviation géodésique dans cet espace-temps y sera également étudiée.

Etant donné qu'on traite avec une solution chargée, il est naturel de considérer aussi le mouvement d'une particule d'épreuve chargée sous l'action de la force de Lorentz. On commencera au chapitre neuf par intégrer les équations du mouvement de la particule chargée, en suivant le même raisonnement que pour la particule neutre. Ensuite, on considérera uniquement la version magnétique de masse nulle de la solution RN-NUT afin d'examiner les orbites circulaires.

Une région d'espace-temps de RN-NUT contient des courbes fermées de genre temps (closed timelike curves CTCs), que l'on associe généralement à la possibilité de violations de causalité. Cette question fera l'objet du dernier chapitre dix, que l'on étudiera dans le cas magnétique de masse nulle.

Nous clôturerons cette thèse par une conclusion générale contenant quelques perspectives.

Première partie

Déflexion de la lumière et temps de retard à l'échelle cosmologique

Chapitre 1

Modèle de Kottler

Le champ gravitationnel créé par des distributions de masse à symétrie sphérique est d'une très grande importance en cosmologie. Notons qu'il existe un équivalent du théorème de Gauss en relativité générale: Le champ gravitationnel à l'extérieur d'une distribution de masse à symétrie sphérique ne dépend que de la masse totale et non du détail de la distribution de masse. Il se trouve d'ailleurs que la toute première solution des équations d'Einstein dans le vide obtenue par Karl Schwarzschild en 1916 [21], juste quelques semaines après la publication de la théorie de la relativité générale par Albert Einstein, correspond au cas statique avec symétrie sphérique.

En présence de la constante cosmologique, la métrique de Schwarzschild est remplacée par celle de Kottler [7], qui se réduit à celle de de Sitter [29] dans un espace-temps vide, ce qui motive l'appellation métrique de Schwarzschild-de Sitter également utilisée pour désigner la métrique de Kottler. En fait, nous verrons par la suite que l'étude d'une telle métrique conduit à un univers fini avec un rayon de l'ordre de $\sqrt{3/\Lambda}$. Comme l'intuition le suggère, un Λ positif atténue l'effet de la gravitation à travers l'angle de déflexion et le temps de retard.

1.1 Forme d'une métrique statique à symétrie sphérique

Commençons d'abord par déterminer la forme la plus générale d'une métrique statique isotrope à l'extérieur d'une distribution de masse à symétrie sphérique, c'est-à-dire dans une région où le tenseur énergie-impulsion est nul, $T_{\mu\nu} = 0$.

On peut toujours trouver un système de coordonnées quasi-minkowskien de telle manière que l'élément de ligne prenne la forme suivante

$$d\tau^2 = F(r)dt^2 - C(r)d\vec{r} \cdot d\vec{r} - D(r)(\vec{r} \cdot d\vec{r})^2 - 2E(r)dt(\vec{r} \cdot d\vec{r}), \quad (1.1)$$

où

$$r = \|\vec{r}\|. \quad (1.2)$$

En se plaçant dans le système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) associé au système de coordonnées quasi-cartésiennes (x, y, z)

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned} \quad (1.3)$$

l'élément de ligne $d\tau^2$ peut s'écrire sous la forme

$$d\tau^2 = F(r)dt^2 - D(r)r^2 dr^2 - C(r)(dr^2 + r^2 d\Omega^2) - 2E(r)dt dr, \quad (1.4)$$

avec

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (1.5)$$

Faisons le choix d'un nouveau temps t' lié à t par la relation

$$t' = t + \Phi(r), \quad (1.6)$$

ce qui correspond à une resynchronisation des horloges, avec Φ une fonction arbitraire de r . L'élément de ligne $d\tau^2$ s'écrit alors

$$d\tau^2 = F(r)dt'^2 + \left(F(r)\frac{d\Phi}{dr} + 2E(r)r \right) \frac{d\Phi}{dr} dr^2 - D(r)r^2 dr^2 - C(r)(dr^2 + r^2 d\Omega^2) - 2 \left(F(r)\frac{d\Phi}{dr} + E(r)r \right) dt' dr. \quad (1.7)$$

Choisissons Φ de telle manière à faire disparaître le terme en $dt' dr$. Nous avons

$$\frac{d\Phi}{dr} = - \frac{rE(r)}{F(r)}, \quad (1.8)$$

et $d\tau^2$ se simplifie alors en

$$d\tau^2 = F(r)dt'^2 - G(r)dr^2 - C(r)(dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (1.9)$$

avec

$$G(r) = r^2 \left(D(r) + \frac{E(r)^2}{F(r)} \right). \quad (1.10)$$

Introduisons maintenant une nouvelle coordonnée radiale définie par

$$r'^2 = r^2 C(r). \quad (1.11)$$

Il s'ensuit que

$$dr = \left(\frac{r}{2} \frac{dC}{dr} + C(r) \right)^{-1} \frac{r' dr'}{r}, \quad (1.12)$$

et $d\tau^2$ prend alors la forme

$$d\tau^2 = B(r')dt'^2 - A(r')dr'^2 - r'^2 d\Omega^2, \quad (1.13)$$

avec

$$B(r') = F(r), \quad A(r') = \left(1 + \frac{G(r)}{C(r)}\right) \left(1 + \frac{r^2}{2C(r)} \frac{dC}{dr}\right)^{-2}. \quad (1.14)$$

En réappelant dans un but de commodité t' et r' t et r respectivement, (1.13) peut s'écrire comme

$$d\tau^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2d\Omega^2. \quad (1.15)$$

L'expression (1.15) est appelée forme standard d'une métrique statique à symétrie sphérique. Il s'agit maintenant d'obtenir les fonctions de r , $A(r)$ et $B(r)$, en appliquant les équations d'Einstein, ce qui déterminera complètement la métrique de Schwarzschild-de Sitter.

1.2 Métrique de Kottler

Nous souhaitons déterminer la forme d'une métrique statique isotrope à l'extérieur d'une distribution de masse à symétrie sphérique, en présence de la constante cosmologique Λ .

En comparant (1.15) à

$$ds^2 = -g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu, \quad (1.16)$$

on déduit les composantes non nulles du tenseur métrique dans le système de coordonnées (t, r, θ, φ)

$$g_{tt} = -B(r), \quad g_{rr} = A(r), \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta. \quad (1.17)$$

Déterminons les fonctions $A(r)$ et $B(r)$ en appliquant les équations d'Einstein, qui prennent, en présence de la constante cosmologique Λ , la forme générale

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.18)$$

où G , $R_{\mu\nu}$, R et $T_{\mu\nu}$ désignent respectivement la constante universelle de la gravitation

(ou constante de Newton), le tenseur de Ricci, le scalaire de Ricci et le tenseur énergie-impulsion. A l'extérieur de la source, $T_{\mu\nu} = 0$, les équations d'Einstein (1.18) se réduisent alors à

$$R_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu}. \quad (1.19)$$

Si $\Lambda \neq 0$, cette équation est incompatible avec l'hypothèse d'un espace-temps plat à l'infini. En effet pour une métrique de Minkowski $R_{\mu\nu} = 0$, ce qui impliquerait $\Lambda = 0$. Le tenseur de Ricci s'exprime en termes des symboles de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ comme

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\lambda\eta}^\lambda. \quad (1.20)$$

Donc, on doit calculer au préalable les symboles de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, qui ont pour expression

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{g^{\lambda\rho}}{2} \left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right), \quad (1.21)$$

où $g^{\mu\nu}$ est le tenseur métrique inverse, qui est diagonal comme l'est le tenseur métrique,

$$g^{tt} = -1/B(r), \quad g^{rr} = 1/A(r), \quad g^{\theta\theta} = 1/r^2, \quad g^{\varphi\varphi} = 1/(r^2 \sin^2 \theta). \quad (1.22)$$

On obtient alors, pour les symboles de Christoffel non nuls, les expressions suivantes

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t &= \frac{B'(r)}{2B(r)}, & \Gamma_{tt}^r &= \frac{B'(r)}{2A(r)}, & \Gamma_{rr}^r &= \frac{A'(r)}{2A(r)}, \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{r}{A(r)}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -\frac{r}{A(r)} \sin^2 \theta, & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = 1/r, \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi r}^\varphi = 1/r, & \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cot \theta. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Les seules composantes non nulles du tenseur de Ricci sont les composantes diagonales, qui

ont comme expressions

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= -\frac{B''(r)}{2A(r)} + \frac{B'(r)}{4A(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{B'(r)}{rA(r)}, \\
R_{rr} &= \frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{B'(r)}{4B(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{A'(r)}{rA(r)}, \\
R_{\theta\theta} &= \frac{1}{A(r)} - \frac{r}{2A(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} - \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - 1, \\
R_{\varphi\varphi} &= R_{\theta\theta} \sin^2 \theta,
\end{aligned} \tag{1.24}$$

où $' = d/dr$. Par conséquent, les équations d'Einstein s'écrivent

$$\frac{B''(r)}{2A(r)} - \frac{B'(r)}{4A(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) + \frac{B'(r)}{rA(r)} = -\Lambda B(r), \tag{1.25}$$

$$\frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{B'(r)}{4B(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{A'(r)}{rA(r)} = -\Lambda A(r), \tag{1.26}$$

$$\frac{1}{A(r)} - \frac{r}{2A(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} - \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - 1 = -\Lambda r^2. \tag{1.27}$$

Remarquons que les composantes $\theta\theta$ et $\varphi\varphi$ des équations d'Einstein sont identiques. Ceci est une conséquence de la symétrie sphérique. En combinant les composantes tt et rr des équations d'Einstein, (1.25) et (1.26), on obtient

$$\frac{R_{tt}}{B(r)} + \frac{R_{rr}}{A(r)} = -\frac{1}{rA(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) = \Lambda - \Lambda = 0. \tag{1.28}$$

D'où

$$A(r)B(r) = K, \tag{1.29}$$

où K est une constante à déterminer. L'équation (1.27) se réduit alors à

$$\frac{d}{dr}[rB(r)] = K(1 - \Lambda r^2). \tag{1.30}$$

D'où, par intégration,

$$B(r) = K \left(1 - \frac{s}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right), \quad (1.31)$$

où s est une deuxième constante à déterminer. Pour r suffisamment petit B devient

$$B(r) \simeq K \left(1 - \frac{s}{r} \right). \quad (1.32)$$

Il nous reste maintenant à déterminer les constantes K et s . Pour cela, considérons la limite d'un champ faible, statique, créé par une distribution de masse non relativiste, auquel cas on a la relation suivante (on peut se référer à [30])

$$g_{tt} \simeq -[1 + 2\phi(r)], \quad (1.33)$$

où ϕ est le potentiel gravitationnel de Newton qui, à une distance r suffisamment petite du centre de la distribution de masse à symétrie sphérique, est donné par

$$\phi = -\frac{GM}{r}. \quad (1.34)$$

En comparant à (1.33), le résultat obtenu dans l'approximation pour un champ faible, il vient que

$$K = 1, \quad s = 2GM, \quad (1.35)$$

ce qui détermine complètement la métrique de Kottler qui prend alors la forme

$$ds^2 = B(r)dt^2 - B(r)^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad B(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2. \quad (1.36)$$

Il est facile de voir que la métrique de Kottler présente, en plus de la singularité $r = s = 2GM$ (rayon de Schwarzschild), pour r suffisamment petit, une deuxième singularité de coordonnées, en $r = \sqrt{3/\Lambda}$, pour r suffisamment grand. En outre, l'équation (1.18) avec un Λ positif donne lieu, même en l'absence de masse, à une accélération radiale $\Lambda r/3$, très

petite dans la mesure où Λ est faible, de l'ordre de 10^{-52} m^{-2} [31].

Nous allons étudier dans le cadre de la solution de Kottler l'effet de la constante cosmologique sur la déflexion de la lumière ainsi que sur le temps de retard pour une distribution de masse à symétrie sphérique.

1.3 Géodésiques des photons dans un champ de Kottler

En vertu de l'isotropie, le mouvement se fait dans un plan, qu'on peut prendre comme le plan équatorial, $\theta = \pi/2$. L'équation (1.36) se simplifie alors en

$$d\tau^2 = B(r)dt^2 - B(r)^{-1}dr^2 - r^2d\varphi^2, \quad B(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2. \quad (1.37)$$

Puisque l'intervalle d'espace-temps pour un photon est de genre lumière, $d\tau^2 = 0$, on doit utiliser un paramètre affine autre que τ . Notons p un tel paramètre. Les équations de la géodésique s'écrivent alors

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \quad (1.38)$$

où $\dot{} = d/dp$. En utilisant les expressions des symboles de Christoffel, (1.23), on obtient

$$\ddot{t} + \frac{B'(r)}{B(r)} \dot{t}\dot{r} = 0, \quad (1.39)$$

$$\ddot{r} + \frac{1}{2}B(r)B'(r)\dot{t}^2 - \frac{1}{2}\frac{B'(r)}{B(r)}\dot{r}^2 - rB(r)\dot{\varphi}^2 = 0, \quad (1.40)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} = 0. \quad (1.41)$$

En divisant (1.39) et (1.41) par \dot{t} et $\dot{\varphi}$ respectivement et sachant que $B'(r) = \dot{B}(r)/\dot{r}$, on arrive à

$$\frac{d}{dp} \ln \dot{t} = \frac{d}{dp} \ln \frac{1}{B(r)}, \quad (1.42)$$

$$\frac{d}{dp} \ln \dot{\varphi} = \frac{d}{dp} \ln \frac{1}{r^2}. \quad (1.43)$$

Par intégration, chacune des équations (1.42) et (1.43) donne une constante du mouvement. L'une des deux constantes, celle résultant de l'intégration de (1.42), pourrait être absorbée dans une redéfinition du paramètre affine p . Redéfinissons p de telle manière que la solution de (1.42) soit

$$\dot{t} = 1/B(r). \quad (1.44)$$

L'équation (1.43) s'intègre alors pour donner

$$\dot{\varphi} = J/r^2, \quad (1.45)$$

avec J une constante du mouvement ayant l'interprétation d'un moment angulaire par unité de masse. En substituant les expressions de \dot{t} et $\dot{\varphi}$ dans l'équation (1.40) et en multipliant par $2\dot{r}/B(r)$, il vient que

$$2\frac{\dot{r}\ddot{r}}{B(r)} - \frac{\dot{B}(r)\dot{r}^2}{B(r)^2} - 2J^2\frac{\dot{r}}{r^3} + \frac{\dot{B}(r)}{B(r)^2} = 0, \quad (1.46)$$

ou encore

$$\frac{d}{dp} \left(\frac{\dot{r}^2}{B(r)} + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} \right) = 0. \quad (1.47)$$

D'où

$$\frac{\dot{r}^2}{B(r)} + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} = -E, \quad (1.48)$$

avec E une troisième constante du mouvement à déterminer, jouant le rôle d'une énergie par unité de masse. De (1.48), on tire une expression pour \dot{r}^2 ,

$$\dot{r}^2 = 1 - B(r)(E + J^2/r^2). \quad (1.49)$$

A l'aide des expressions de \dot{t} et de $\dot{\varphi}$, $d\tau^2$ peut s'exprimer en termes de dp^2 comme

$$d\tau^2 = E dp^2. \quad (1.50)$$

Pour un photon $d\tau^2 = 0$, et par conséquent E doit s'annuler,

$$E = 0. \quad (1.51)$$

L'équation (1.49) se simplifie alors en

$$\dot{r} = \pm \sqrt{1 - J^2 B(r)/r^2}. \quad (1.52)$$

En faisant usage des expressions de \dot{r} et $\dot{\varphi}$, on peut obtenir une expression pour $dr/d\varphi$,

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \pm r \sqrt{\frac{r^2}{J^2} - B(r)}. \quad (1.53)$$

L'expression de $dr/d\varphi$, (1.53), doit s'annuler au péri-lens, $r = r_P$ (distance d'approche minimale du photon), ce qui donne

$$J = r_P / \sqrt{B(r_P)}. \quad (1.54)$$

En substituant dans l'équation (1.53), on obtient l'expression

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{1}{u(r)}, \quad u(r) = r \sqrt{\frac{r^2}{r_P^2} - 1} \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_P} \left(\frac{r_P}{r} + \frac{r}{r + r_P} \right)}, \quad (1.55)$$

dans laquelle la constante cosmologique s'élimine accidentellement.

De la même manière, en faisant maintenant usage des expressions de \dot{t} et \dot{r} , et compte tenu de l'expression de J , on obtient une expression pour dt/dr ,

$$\frac{dt}{dr} = \frac{\dot{t}}{\dot{r}} = \pm \frac{1}{v(r)}, \quad v(r) = \frac{B(r)}{\sqrt{B(r_P)}} \sqrt{1 - \frac{r_P^2}{r^2}} \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_P} \left(\frac{r_P}{r} + \frac{r}{r + r_P} \right)}. \quad (1.56)$$

1.4 Contribution de la constante cosmologique à la déflexion des photons dans un champ de Kottler

Dans le but de comprendre la nature de l'énergie sombre, qui serait responsable de l'expansion accélérée de l'Univers [32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39], il est intéressant d'étudier le rôle de la constante cosmologique.

Jusqu'à tout récemment la croyance générale était que la constante cosmologique n'a pas d'effet sur la déflexion de la lumière par une distribution de masse à symétrie sphérique. Cette croyance a comme origine le fait que la constante cosmologique disparaît dans l'équation de la trajectoire $\varphi(r)$. Rindler et Ishak [15] ont corrigé cette croyance générale: La constante cosmologique a un effet sur la déflexion de la lumière par une distribution de masse M à symétrie sphérique. Le travail de Rindler et Ishak a été fait dans le cadre des hypothèses suivantes:

1. La terre et la source sont au repos par rapport à la lentille.
2. Les masses de la terre et de la source sont négligeables par rapport à la masse de la lentille.

Dans ce qui suit, nous allons étudier l'effet de la constante cosmologique sur la courbure d'un rayon lumineux, lors de son passage à proximité d'une distribution de masse à symétrie sphérique.

1.4.1 Géométrie de l'espace-temps de Kottler et équation du mouvement

Avant d'aller plus loin, considérons un espace euclidien à trois dimensions. Dans les coordonnées cylindriques, l'élément de ligne au carré dl^2 s'écrit

$$dl^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2. \tag{1.57}$$

Considérons maintenant une surface à deux dimensions à symétrie cylindrique $z = z(r)$ plongée dans l'espace euclidien à trois dimensions. L'élément de ligne dl^2 s'écrit alors

$$dl^2 = \left[\left(\frac{dz}{dr} \right)^2 + 1 \right] dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (1.58)$$

Compte tenu de (1.36), la métrique spatiale de Kottler pour un mouvement restreint dans le plan équatorial, $\theta = \pi/2$, se simplifie en

$$dl^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (1.59)$$

Au voisinage de la distribution de masse où $\Lambda r^2 \ll GM/r$, dl^2 est approximé par la métrique spatiale de Schwarzschild

$$dl^2 \simeq \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (1.60)$$

En comparant à (1.58), on obtient

$$dz = \pm dr \sqrt{\frac{2GM}{r - 2GM}}. \quad (1.61)$$

Cette dernière équation s'intègre, pour donner

$$z(r)^2 = 8GM(r - 2GM), \quad (1.62)$$

avec le choix d'une constante d'intégration de telle manière que z s'annule en $r = 2GM$. C'est l'équation de la paraboloïde de Flamm. Loin de la distribution de masse où $GM/r \ll \Lambda r^2$, la métrique spatiale (1.59) est approximée par la métrique spatiale de de Sitter

$$dl^2 = \left(1 - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (1.63)$$

En comparant à (1.58), on en déduit que

$$dz = \pm dr \sqrt{\frac{\Lambda r^2}{3 - \Lambda r^2}}, \quad (1.64)$$

qui s'intègre grâce à un changement de variable approprié pour donner

$$z^2 + r^2 = 3/\Lambda, \quad (1.65)$$

avec le choix d'une constante d'intégration de telle manière que z s'annule en $r = \sqrt{3/\Lambda}$. C'est l'équation d'une sphère de rayon $\sqrt{3/\Lambda}$.

En faisant le changement de variable $r = 1/x$ dans l'expression (1.53), qui reste la même aussi bien pour Kottler que pour Schwarzschild, on obtient, après dérivation par rapport à φ , une équation orbitale pour la trajectoire du photon, dans laquelle la constante cosmologique est éliminée,

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} + x = 3GMx^2. \quad (1.66)$$

Ce résultat donne à penser que la constante cosmologique, en dépit de sa présence dans la métrique de Kottler, n'a pas d'effet sur la déflexion de la lumière. Ce fut l'argument avancé par plusieurs auteurs [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]. Néanmoins, nous allons montrer que malgré l'absence de Λ dans (1.66) la constante cosmologique influe sur la déflexion de la lumière, la raison étant que c'est la métrique qui détermine les observations réelles qui peuvent être effectuées.

Le membre de droite de l'équation (1.66) est une petite correction relativiste. Par exemple, pour une trajectoire à l'extérieur du Soleil ou frôlant le Soleil, nous avons

$$\frac{3GM}{r} = \frac{3s}{2r} \lesssim \frac{3s}{2R_\odot} \cong 10^{-6}, \quad (1.67)$$

où s et R_\odot sont respectivement les rayons de Schwarzschild et du Soleil. A l'ordre zéro,

l'équation (1.66) admet comme solution

$$x = \frac{1}{r} = \frac{\sin \varphi}{b}. \quad (1.68)$$

Cette équation représente un rayon lumineux non dévié par le champ gravitationnel, avec b le paramètre d'impact indiqué sur la Fig. 1-1. En introduisant cette solution dans l'équation (1.66), il vient

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} + x = \frac{3GM}{2b^2} [1 - \cos(2\varphi)], \quad (1.69)$$

qui admet pour solution

$$x = \frac{1}{r} = \frac{GM}{2b^2} [3 + \cos(2\varphi)]. \quad (1.70)$$

On rappelle que la solution d'une équation du type

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} + x = \sum_i A_i \cos(\omega_i \varphi), \quad (1.71)$$

est

$$x = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi + \sum_i \frac{A_i}{1 - \omega_i^2} \cos(\omega_i \varphi). \quad (1.72)$$

En combinant les deux solutions, on obtient au premier ordre de la perturbation

$$\frac{1}{r} = \frac{\sin \varphi}{b} + \frac{GM}{2b^2} [3 + \cos(2\varphi)]. \quad (1.73)$$

En faisant tendre r vers l'infini ce qui correspond à faire tendre φ vers une valeur φ_∞ très petite, on obtient

$$\varphi_\infty = -2GM/b. \quad (1.74)$$

L'angle de déflexion totale dans le cas de Schwarzschild est alors

$$\Delta\varphi = |2\varphi_\infty| \simeq 4GM/b. \quad (1.75)$$

Cependant, l'expression (1.75) n'est plus valable dans l'espace-temps de Kottler dans lequel le rayon r est toujours inférieur à la singularité $\sqrt{3/\Lambda}$.

On peut se convaincre facilement que la distance d'approche minimale $r = r_P$ correspond à $\varphi = \pi/2$. Donc

$$\frac{1}{r_P} = \frac{1}{b} + \frac{GM}{b^2}. \quad (1.76)$$

1.4.2 déflexion de la lumière

Afin de calculer l'angle de déflexion, on utilise la formule invariante pour le cosinus d'un angle entre deux directions de coordonnées d et δ comme le montre la Fig. 1-1 [15],

$$\cos \psi = \frac{g_{ij}d^i\delta^j}{\sqrt{g_{ij}d^i d^j} \sqrt{g_{ij}\delta^i \delta^j}}, \quad (1.77)$$

où les $g_{\mu\nu}$ correspondent, dans notre cas, à la métrique spatiale (1.59). Nous avons alors

$$g_{rr} = B(r)^{-1} = \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1}, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2. \quad (1.78)$$

Dérivons maintenant (1.73) par rapport à φ pour obtenir

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r^2}{b} \left[\frac{GM}{b} \sin(2\varphi) - \cos \varphi \right] \equiv A(r, \varphi). \quad (1.79)$$

Donc, nous avons, sachant que d est la direction de l'orbite et δ la direction de la coordonnée $\varphi = \text{const}$,

$$d = (dr, d\varphi) = \left(\frac{dr}{d\varphi}, 1 \right) d\varphi, \quad d\varphi < 0, \quad (1.80)$$

$$\delta = (\delta r, 0) = (1, 0)\delta r. \quad (1.81)$$

En substituant dans (1.77), on obtient

$$\cos \psi = \left[1 + B(r)r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (1.82)$$

ou bien

$$\tan \psi = \sqrt{B(r)r} \left| \frac{d\varphi}{dr} \right|. \quad (1.83)$$

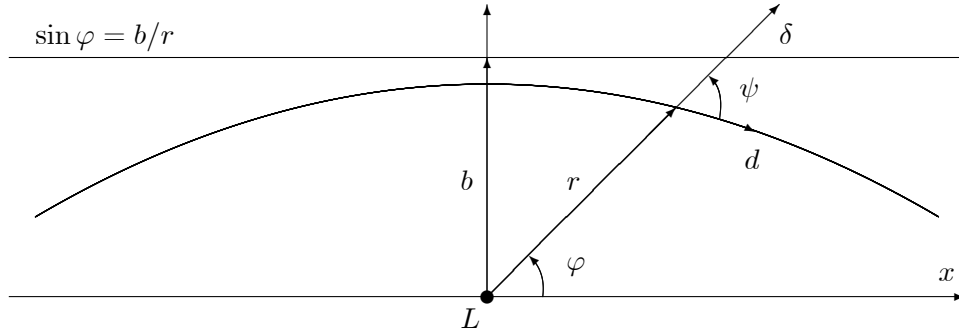


Fig. 1-1 Le graphe de l'équation (1.73) sur le plan équatorial. La moitié de l'angle de déviation est $\psi - \varphi = \varepsilon$ [15].

L'angle de déflexion totale est défini par

$$\Delta\varphi = 2\varepsilon = 2(\psi - \varphi). \quad (1.84)$$

Dans le cas où $\varphi = 0$, on obtient successivement à partir des équations (1.73) et (1.79)

$$r = \frac{b^2}{2GM}, \quad (1.85)$$

et

$$|A| = \frac{b^3}{(2GM)^2}. \quad (1.86)$$

Il s'ensuit que

$$\Delta\varphi = 2\psi_0 \simeq \frac{4GM}{b} \left[1 - 2 \left(\frac{GM}{b} \right)^2 - \frac{\Lambda}{24} \left(\frac{b^2}{GM} \right)^2 \right]. \quad (1.87)$$

Cette formule est très importante en Cosmologie. Elle donne l'angle de déflexion totale que subit un photon lors de son passage près d'un objet massif, dans le cas où la source et l'observateur sont loin de cet objet. Dans l'espace de Schwarzschild, il suffit, pour obtenir cet angle, de faire tendre r vers l'infini dans l'équation (1.73), ce qui n'est pas permis dans l'espace de Kottler, puisque comme on l'a dit r ne peut pas excéder la valeur de l'horizon $\sqrt{3/\Lambda}$. La seule valeur caractéristique de r dans ce cas est celle qui correspond à $\varphi = 0$, $r = b^2/2GM$. Pour les autres valeurs, il n'y a pas une déflexion significative supplémentaire., Il est clair que pour $\Lambda = 0$, l'angle de déflexion totale dans le cas de Schwarzschild, d'après l'expression (1.87), est bien atteint au premier ordre (on rappelle ici que b est relié à r_P par la relation (1.76) et l'angle de déflexion de Schwarzschild a la même expression à l'ordre le plus bas en termes de b ou de r_P). Comme prévu, d'après (1.87), un Λ positif diminue l'angle de déflexion et s'oppose de ce fait à la gravitation.

Bien entendu, la contribution de la constante cosmologique Λ sur la déflexion de la lumière est très faible. On sait d'après les observations que la valeur mesurée de Λ est de l'ordre de 10^{-52} m^{-2} . Pour cette valeur de Λ , le rapport des deux termes dans le membre de droite de (1.87), pour un rayon lumineux frôlant le Soleil, est de l'ordre de 10^{28} .

En conclusion nous avons montré que lorsque la géométrie de l'espace-temps de Kottler est prise en compte, la constante cosmologique Λ contribue effectivement à la déflexion de la lumière.

1.5 Temps de retard dans un champ de Kottler

Le biangle est l'un des plus belles caractéristiques de la géométrie riemannienne. Le premier biangle a été observé par I. I. Shapiro en 1968 [5]. Ses vertex sont la Terre et Mercure, avec un temps de voyage τ de 10 mins environ, et un temps de retard de $120 \mu s$, pour un photon rasant le Soleil. Ici nous nous intéressons à un biangle d'ordre cosmologique, $\tau \simeq 10^{10}$ ans.

La présence d'une masse déforme la géométrie à son voisinage, et les rayons lumineux répondent à cette déformation en se courbant d'autant plus qu'ils passent à proximité de cette masse. Ce phénomène, qui a comme origine le couplage entre matière et courbure, constitue un excellent test de la théorie d'Einstein.

Dans cette section, nous allons faire usage des équations (1.55) et (1.56) pour étudier la déflexion que subissent deux photons lors de leur passage à proximité d'une masse sphérique L (lentille) et le temps de retard que met l'un des photon par rapport à l'autre. Ces deux photons proviennent d'une source S supposée distante de r_S du centre de L , et arrivent sur Terre E supposée distante de r_E du centre de L (Fig. 1-2). En général, deux photons, qui suivent des trajectoires différentes, n'arrivent pas en même temps sur Terre. On notera α_E et α'_E les angles que font les deux photons à leur réception sur Terre avec l'axe lentille-Terre et α_S et α'_S les angles qu'ils font à leur émission par la source avec l'axe lentille-source. Soit r_P et r'_P respectivement les distances d'approche minimales des photons α_E et α'_E de la lentille, désignés sous le nom des péri-lens. On se limitera à des cas où r_P est très petit devant r_E et r_S , $r_P/r_E \ll 1$, $r_P/r_S \ll 1$, conditions réalisées en pratique dans les expériences de déflexion de la lumière.

Choisissons l'axe polaire du système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) de telle manière que la Terre soit caractérisée par $\varphi = \varphi_E = \pi$. La Terre aussi bien que la source font partie de la trajectoire du photon (respectivement points de départ et d'arrivée) et sont par conséquent également contenues dans le plan équatorial $\theta = \pi/2$ et donc caractérisées par $(r, \varphi) = (r_S, \varphi_S)$ pour la source et $(r, \varphi) = (r_E, \varphi_E = \pi)$ pour la Terre.

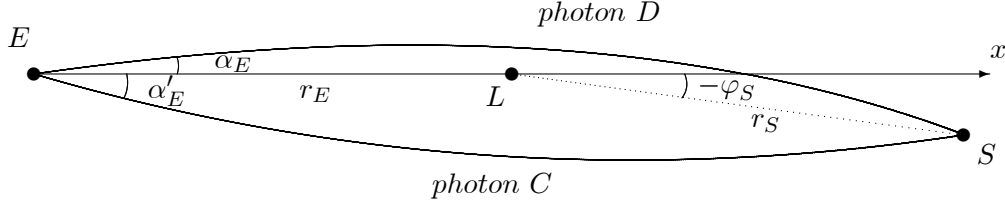


Fig. 1-2 Deux rayons lumineux émis par une source S et courbés sous l'effet gravitationnel d'une distribution de masse sphérique isolée, la lentille L , et reçus sur Terre E sous les angles α_E et α'_E .

L'expressions de $d\varphi/dr$ est donnée par (1.55),

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{1}{u(r)}, \quad u(r) = r \sqrt{\frac{r^2}{r_P^2} - 1} \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_P} \left(\frac{r_P}{r} + \frac{r}{r + r_P} \right)}. \quad (1.88)$$

Etant donné que l'angle φ augmente lorsque le photon α_E du chemin du haut se rapproche de la lentille de r_S à r_P ($d\varphi/dr < 0$), ainsi que lorsqu'il s'éloigne de r_P à r_E ($d\varphi/dr > 0$), l'intégrale du membre de droite de (1.88) le long de la trajectoire peut ainsi être scindée comme suit, pour donner l'angle total que fait le photon de la source jusqu'à la Terre,

$$\pi - \varphi_S = \int_{r_P}^{r_E} \frac{dr}{u(r)} + \int_{r_P}^{r_S} \frac{dr}{u(r)}. \quad (1.89)$$

En faisant usage des intégrales

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} &= \arcsin z, \\ \int \frac{zdz}{\sqrt{1-z^2}} &= -\sqrt{1-z^2}, \\ \int \frac{dz}{(z+1)\sqrt{1-z^2}} &= -\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}, \end{aligned} \quad (1.90)$$

avec $z = r_P/r$, le calcul de (1.89) donne au premier ordre dans le rapport du rayon de Schwarzschild au péri-lens $2GM/r_P$

$$\begin{aligned}
-\varphi_S \simeq & -\arcsin \frac{r_P}{r_E} - \arcsin \frac{r_P}{r_S} + \frac{GM}{r_P} \left(\sqrt{1 - \frac{r_P^2}{r_E^2}} + \sqrt{\frac{r_E - r_P}{r_E + r_P}} + \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{r_P^2}{r_S^2}} + \sqrt{\frac{r_S - r_P}{r_S + r_P}} \right). \tag{1.91}
\end{aligned}$$

Pour le chemin du bas $d\varphi/dr$ est positif sur le trajet de r_S à r'_P , et est négatif sur le trajet de r'_P à r_E . Il en résulte alors que

$$\pi + \varphi'_S = \int_{r'_P}^{r_E} \frac{dr}{u'(r)} + \int_{r'_P}^{r_S} \frac{dr}{u'(r)}, \tag{1.92}$$

qui donne au premier ordre en $2GM/r'_P$

$$\begin{aligned}
-\varphi'_S \simeq & \arcsin \frac{r'_P}{r_E} + \arcsin \frac{r'_P}{r_S} - \frac{GM}{r'_P} \left(\sqrt{1 - \frac{r_P'^2}{r_E^2}} + \sqrt{\frac{r_E - r'_P}{r_E + r'_P}} + \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{r_P'^2}{r_S^2}} + \sqrt{\frac{r_S - r'_P}{r_S + r'_P}} \right). \tag{1.93}
\end{aligned}$$

Les angles de coordonnées ϵ_E , ϵ'_E , ϵ_S et ϵ'_S sont définis par

$$\begin{aligned}
\tan \epsilon_E &= r_E |d\varphi/dr(r_E)| = r_E/u(r_E), \\
\tan \epsilon'_E &= r_E |d\varphi'/dr(r_E)| = r_E/u'(r_E), \\
\tan \epsilon_S &= r_S |d\varphi/dr(r_S)| = r_S/u(r_S), \\
\tan \epsilon'_S &= r_S |d\varphi'/dr(r_S)| = r_S/u'(r_S). \tag{1.94}
\end{aligned}$$

Si nous nous limitons au cas où les angles de coordonnées sont très petits devant l'unité,

quelques secondes d'arc ($\simeq 10^{-5}$), nous avons à l'ordre le plus bas

$$\begin{aligned}
\epsilon_E &\simeq \tan \epsilon_E = r_E/u(r_E) \simeq (r_E^2/r_P^2 - 1)^{-1/2} \simeq r_P/r_E = y_E, \\
\epsilon'_E &\simeq \tan \epsilon'_E = r_E/u'(r_E) \simeq (r_E^2/r_P'^2 - 1)^{-1/2} \simeq r'_P/r_E = y'_E, \\
\epsilon_S &\simeq \tan \epsilon_S = r_S/u(r_S) \simeq (r_S^2/r_P^2 - 1)^{-1/2} \simeq r_P/r_S = y_S, \\
\epsilon'_S &\simeq \tan \epsilon'_S = r_S/u'(r_S) \simeq (r_S^2/r_P'^2 - 1)^{-1/2} \simeq r'_P/r_S = y'_S.
\end{aligned} \tag{1.95}$$

Il s'ensuit que

$$x = r_P/r'_P \simeq \epsilon_E/\epsilon'_E, \quad r_P \simeq \epsilon_E r_E, \quad r'_P \simeq \epsilon'_E r_E. \tag{1.96}$$

Déterminons maintenant les relations qui lient les angles de coordonnées ϵ_E , ϵ'_E , ϵ_S et ϵ'_S aux angles physiques α_E , α'_E , α_S et α'_S respectivement, en faisant usage de l'expression (1.83) obtenue dans la sous-section précédente 1.4.2,

$$\begin{aligned}
\alpha_E &\simeq \tan \alpha_E = r_E \sqrt{B(r_E)}/u(r_E) \simeq \epsilon_E \sqrt{1 - \Lambda r_E^2/3}, \\
\alpha'_E &\simeq \tan \alpha'_E = r_E \sqrt{B(r_E)}/u'(r_E) \simeq \epsilon'_E \sqrt{1 - \Lambda r_E^2/3}, \\
\alpha_S &\simeq \tan \alpha_S = r_S \sqrt{B(r_S)}/u(r_S) \simeq \epsilon_S \sqrt{1 - \Lambda r_S^2/3}, \\
\alpha'_S &\simeq \tan \alpha'_S = r_S \sqrt{B(r_S)}/u'(r_S) \simeq \epsilon'_S \sqrt{1 - \Lambda r_S^2/3},
\end{aligned} \tag{1.97}$$

où on a négligé les termes d'ordre $2GM/r_E$ et $2GM/r_S$. Il s'ensuit que

$$x \simeq \alpha_E/\alpha'_E, \quad r_P \simeq \alpha_E r_E / \sqrt{1 - \Lambda r_E^2/3}, \quad r'_P \simeq \alpha'_E r_E / \sqrt{1 - \Lambda r_E^2/3}. \tag{1.98}$$

Nous pouvons alors simplifier davantage les expressions de φ_S et φ'_S , en utilisant (1.95) et

(1.97), ce qui donne

$$\begin{aligned}
-\varphi_S &\simeq +\frac{4GM}{\epsilon_E r_E} - \epsilon_E(1 + r_E/r_S) \simeq +\frac{4GM\sqrt{1 - \Lambda r_E^2/3}}{\alpha_E r_E} - \alpha_E \frac{1 + r_E/r_S}{\sqrt{1 - \Lambda r_E^2/3}}, \\
-\varphi'_S &\simeq -\frac{4GM}{\epsilon'_E r_E} + \epsilon'_E(1 + r_E/r_S) \simeq -\frac{4GM\sqrt{1 - \Lambda r_E^2/3}}{\alpha'_E r_E} + \alpha'_E \frac{1 + r_E/r_S}{\sqrt{1 - \Lambda r_E^2/3}}. \quad (1.99)
\end{aligned}$$

Etant donné que les deux photons partent du même point, la source, on doit avoir $\varphi_S = \varphi'_S$.

D'où une relation entre r_E , r_S , α_E , α'_E , Λ et M ,

$$1 + r_E/r_S \simeq \frac{4GM(1 - \Lambda r_E^2/3)}{\alpha_E \alpha'_E r_E}. \quad (1.100)$$

Par conséquent, la masse qui donne l'égalité $\varphi_S = \varphi'_S$ est donnée par

$$M \simeq \frac{\alpha_E \alpha'_E r_E (1 + r_E/r_S)}{4G(1 - \Lambda r_E^2/3)}, \quad (1.101)$$

et

$$-\varphi_S = -\varphi'_S \simeq \frac{1 + r_E/r_S}{\sqrt{1 - \Lambda r_E^2/3}} (\alpha'_E - \alpha_E). \quad (1.102)$$

L'objectif maintenant est de calculer le temps de retard propre que met le photon α_E par rapport à α'_E [40],

$$\Delta\tau = \sqrt{B(r_E)}\Delta t = \sqrt{B(r_E)}[(t_E - t_S) - (t'_E - t'_S)], \quad (1.103)$$

où t_E , t'_E , t_S et t'_S sont les temps de réception et d'émission des photons α_E et α'_E .

L'expression de dt/dr est donnée par (1.56),

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{v(r)}, \quad v(r) = \frac{B(r)}{\sqrt{B(r_P)}} \sqrt{1 - \frac{r_P^2}{r^2}} \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_P} \left(\frac{r_P}{r} + \frac{r}{r + r_P} \right)}. \quad (1.104)$$

Pour le chemin du haut dt/dr est négatif sur la partie de la trajectoire de r_S à r_P et est positif sur la partie de la trajectoire de r_P à r_E . C'est également le cas pour le chemin du bas: dt/dr est négatif de r_S à r'_P et est positif de r'_P à r_E . Ceci nous permet d'écrire les temps de trajet des deux photons comme

$$\begin{aligned} t_E - t_S &= \int_{r_P}^{r_E} \frac{dr}{v(r)} + \int_{r_P}^{r_S} \frac{dr}{v(r)}, \\ t'_E - t'_S &= \int_{r'_P}^{r_E} \frac{dr}{v'(r)} + \int_{r'_P}^{r_S} \frac{dr}{v'(r)}. \end{aligned} \quad (1.105)$$

Le temps de retard du photon du haut par rapport au photon du bas est défini par

$$\begin{aligned} \Delta t &= (t_E - t_S) - (t'_E - t'_S) \\ &= \left(\int_{r_P}^{r_E} \frac{dr}{v(r)} - \int_{r'_P}^{r_E} \frac{dr}{v'(r)} \right) + \left(\int_{r_P}^{r_S} \frac{dr}{v(r)} - \int_{r'_P}^{r_S} \frac{dr}{v'(r)} \right). \end{aligned} \quad (1.106)$$

Déterminons d'abord le temps qui s'écoule pendant la propagation du photon α_E de r_P à r_E . Une intégration au premier ordre en $\delta = 2GM/r_P$ donne

$$\begin{aligned} \int_{r_P}^{r_E} \frac{dr}{v(r)} &= \int_{r_P}^{r_E} \frac{\sqrt{B(r_P)}}{B(r)\sqrt{1-r_P^2/r^2}} \left[1 - \delta \left(\frac{r_P}{r} + \frac{r}{r+r_P} \right) \right]^{-1/2} dr \\ &\simeq r_P \sqrt{B(r_P)} \left(I_{E1} + \frac{\delta}{2} I_{E2} + \frac{\delta}{2} I_{E3} + \delta I_{E4} \right), \end{aligned} \quad (1.107)$$

où les intégrales I_{E1} , I_{E2} , I_{E3} et I_{E4} sont définies par

$$I_{E1} = \int_{y_E}^1 \frac{dy}{(y^2 - \lambda^2)\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}} \operatorname{arctanh} \left(\frac{\lambda}{y_E} \sqrt{\frac{1-y_E^2}{1-\lambda^2}} \right), \quad (1.108)$$

$$I_{E2} = \int_{y_E}^1 \frac{y dy}{(y^2 - \lambda^2)\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{1-y_E^2}{1-\lambda^2}}, \quad (1.109)$$

$$\begin{aligned}
I_{E3} &= \int_{y_E}^1 \frac{dy}{y^2(1+y)\sqrt{1-y^2}} \\
&= \frac{-1}{2(1-\lambda^2)} \left[\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \ln \frac{\left(1 + \sqrt{1-\lambda^2} \sqrt{1-y_E^2}\right)^2 - \lambda^2 y_E^2}{\epsilon_E^2 - \lambda^2} + \frac{1}{\lambda \sqrt{1-\lambda^2}} \times \right. \\
&\quad \left. \ln \left(\frac{y_E - \lambda}{y_E + \lambda} \frac{1 + \sqrt{1-\lambda^2} \sqrt{1-y_E^2} + \lambda y_E}{1 + \sqrt{1-\lambda^2} \sqrt{1-y_E^2} - \lambda y_E} \right) - 2 \frac{\sqrt{1-y_E^2}}{1-y_E} \right], \quad (1.110)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
I_{E4} &= \int_{y_E}^1 \frac{y^3 dy}{(y^2 - \lambda^2)^2 \sqrt{1-y^2}} \\
&= \frac{1}{2(1-\lambda^2)} \left(\frac{2-\lambda^2}{\sqrt{1-\lambda^2}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{1-y_E^2}{1-\lambda^2}} + \lambda^2 \frac{\sqrt{1-y_E^2}}{y_E^2 - \lambda^2} \right), \quad (1.111)
\end{aligned}$$

avec $y = r_P/r$, $y_E = r_P/r_E > \lambda$, $\lambda = \sqrt{\Lambda/3} r_P \ll 1$.

Le même raisonnement que pour chemin du haut mène dans le cas du chemin du bas à des expressions analogues, à condition que y , y_E et λ soient respectivement remplacés par $y' = r'_P/r$, $y'_E = r'_P/r_E$ et $\lambda' = \sqrt{\Lambda/3} r'_P$.

Pour évaluer $t_E - t'_E$, on doit soustraire des nombres gigantesques qui sont presque identiques. En développant séparément les quatre intégrales, on obtient après un long calcul [40]

$$\int_{r_P}^{r_E} \frac{dr}{v(r)} - \int_{r'_P}^{r'_E} \frac{dr}{v'(r)} \simeq \Delta_{E1} + GM\Delta_{E2} + GM\Delta_{E3} + 2GM\Delta_{E4}, \quad (1.112)$$

avec

$$\begin{aligned}
\Delta_{E1} &= r_P \sqrt{B(r_P)} I_{E1} - r'_P \sqrt{B(r'_P)} I'_{E1} \\
&\simeq GM \left(\frac{x^{-2} - 1}{\delta} y_E - \frac{1-x}{\lambda} \operatorname{arctanh} \frac{\lambda}{y_E} - \delta \frac{1-x^2}{4\lambda} \operatorname{arctanh} \frac{\lambda}{y_E} \right), \quad (1.113)
\end{aligned}$$

$$\Delta_{E2} = \sqrt{B(r_P)} I_{E2} - \sqrt{B(r'_P)} I'_{E2} \simeq -\ln x, \quad (1.114)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{E3} &= \sqrt{B(r_P)} I_{E3} - \sqrt{B(r'_P)} I'_{E3} \\ &\simeq \frac{1-x}{\lambda} \operatorname{arctanh} \frac{\lambda}{y_E} + \ln x - \delta \frac{1-x^2}{2\lambda} \operatorname{arctanh} \frac{\lambda}{y_E}, \end{aligned} \quad (1.115)$$

$$\Delta_{E4} = \sqrt{B(r_P)} I_{E4} - \sqrt{B(r'_P)} I'_{E4} \simeq -\ln x, \quad (1.116)$$

et $x = r_P/r'_P$. D'où

$$\int_{r_P}^{r_E} \frac{dr}{v(r)} - \int_{r'_P}^{r'_E} \frac{dr}{v'(r)} \simeq GM \left(\frac{1-x^2}{\delta} y_E - 3\delta \frac{x^{-2}-1}{4\lambda} \operatorname{arctanh} \frac{\lambda}{y_E} - 2\ln x \right). \quad (1.117)$$

De même, en répétant la même procédure, on obtient pour $t_S - t'_S$ l'expression suivante

$$\int_{r_P}^{r_S} \frac{dr}{v(r)} - \int_{r'_P}^{r'_S} \frac{dr}{v'(r)} \simeq GM \left(\frac{1-x^2}{\delta} y_S - 3\delta \frac{x^{-2}-1}{4\lambda} \operatorname{arctanh} \frac{\lambda}{y_S} - 2\ln x \right), \quad (1.118)$$

avec $y_S = r_P/r_S$. En faisant usage de ces deux dernières expressions, le temps de retard (1.106) peut alors s'exprimer en termes de M , Λ , r_E , r_S , r_P et r'_P comme

$$\begin{aligned} \Delta t &\simeq \frac{r_P'^2 - r_P^2}{2} \left(\frac{1}{r_E} + \frac{1}{r_S} \right) + 4GM \ln \frac{r'_P}{r_P} - 3 \frac{r_P'^2 - r_P^2}{8r_P'^2} \left(\frac{2GM}{r_P} \right)^2 \times \\ &\quad \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \left(\operatorname{arctanh} \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} r_E \right) + \operatorname{arctanh} \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} r_S \right) \right). \end{aligned} \quad (1.119)$$

En tenant compte de (1.98) et (1.100), on obtient à partir de (1.119) le temps propre de retard (1.103) en termes de Λ , r_E , r_S , α_E et α'_E ,

$$\begin{aligned} \Delta \tau &\simeq 2GM \sqrt{1 - \frac{\Lambda}{3} r_E^2} \left\{ 2 \ln \frac{\alpha'_E}{\alpha_E} + \left(\frac{\alpha'_E}{\alpha_E} - \frac{\alpha_E}{\alpha'_E} \right) \left[1 - \frac{3(r_E^{-1} + r_S^{-1})}{16} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \left(\operatorname{arctanh} \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} r_E \right) + \operatorname{arctanh} \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} r_S \right) \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.120)$$

où la masse M est donnée par (1.101). Donc, si on se donne a priori les valeurs de Λ , r_E ,

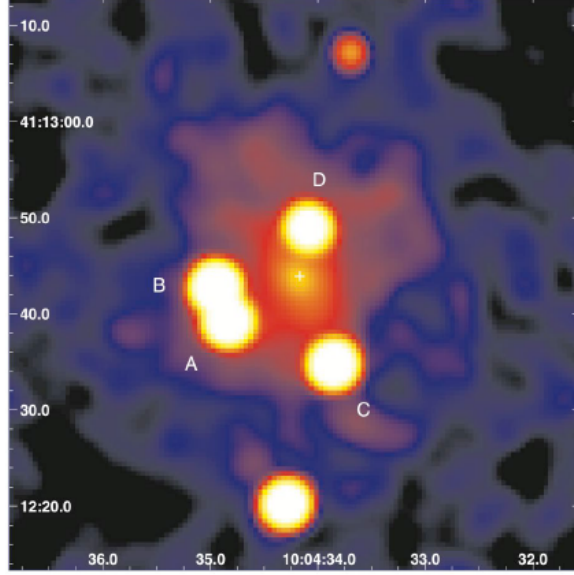


Fig. 1-3 Images multiples du quasar SDSS J1004+4112. SDSS (Sloan Digital Sky Survey).

r_S , α_E et α'_E , on pourrait calculer le temps propre de retard du photon α_E par rapport au photon α'_E . L'angle de déflexion $-\varphi_S$ et le temps de retard s'annulent, comme prévu, dans le cas où $\alpha_E = \alpha'_E$ pour des raisons de symétrie. Dans la limite $\Lambda = 0$ (cas de Schwarzschild), le temps de retard (1.120) se réduit à

$$\Delta\tau \simeq 2GM \left[2 \ln \frac{\alpha'_E}{\alpha_E} + \left(\frac{\alpha'_E}{\alpha_E} - \frac{\alpha_E}{\alpha'_E} \right) \left(1 - \frac{3(r_E + r_S)^2}{16r_E r_S} \right) \right]. \quad (1.121)$$

1.5.1 Application au système lentille-quasar SDSS J1004+4112

La Fig. 1-3 montre cinq points pratiquement identiques, qui présentent, par analyse spectroscopique, la même luminosité et le même spectre électromagnétique, avec $z_S = 1.734$ comme red-shift. Il s'agit de cinq mirages d'un même quasar qui se trouve en réalité à des millions d'années-lumière au-delà d'un amas de galaxies. Cet amas de galaxies, visible via les rayons X à $z_L = 0.68$ comme red-shift, a servi dans ce cas de lentille gravitationnelle

(indiqué par une croix au centre de l'image) [41, 42, 43, 44, 45]. On s'intéresse uniquement aux images C et D , avec $\alpha'_E = 10'' \pm 10\%$ et $\alpha_E = 5'' \pm 10\%$ respectivement, qui présentent en vérité un effet de lentille gravitationnel fort (strong lensing), un temps de retard de $\Delta\tau > 7.7$ ans comme limite inférieure [44]. On suppose que l'amas de galaxies est sphérique, malgré le fait que la présence de cinq images implique forcément que l'amas de galaxies ne l'est pas.

Pour des raisons numériques, on utilise un système d'unités où les temps sont mesurés en astrosecondes (as), les distances en astromètres (am) et les masses en astrogrammes (ag) avec

$$\begin{aligned} 1 \text{ as} &= 4.34 \cdot 10^{17} \text{ s} = 13.8 \text{ Gyr}, \\ 1 \text{ am} &= 1.30 \cdot 10^{26} \text{ m} = 4221 \text{ Mpc}, \\ 1 \text{ ag} &= 6.99 \cdot 10^{51} \text{ kg} = 3.52 \cdot 10^{21} M_\odot. \end{aligned} \tag{1.122}$$

Dans ce système d'unités, on a

$$c = 1 \text{ am as}^{-1}, \quad 8\pi G = 1 \text{ am}^3 \text{ as}^{-2} \text{ ag}^{-1}, \quad H_0 = 1 \text{ as}^{-1}, \tag{1.123}$$

où H_0 est la constante de Hubble.

Utilisons le modèle Λ CDM plat avec $\Lambda = 0.77 \cdot 3 \text{ am}^{-2} \pm 20\%$ pour convertir respectivement les redshifts z_L et z_S en distances d'aire $d_L = r_E$ et d_S par rapport à la Terre (la méthode de calcul est présentée dans le deuxième et troisième chapitre (sections 2.3 et 3.2)), en utilisant l'Ansätze [40]

$$d_S = \frac{r_E + r_S}{\sqrt{1 - \Lambda r_S^2/3}}. \tag{1.124}$$

On détermine alors la masse de l'amas de galaxies à l'aide de l'expression (1.101) pour les valeurs maximales '+', centrales ' ± 0 ' et minimales '-' de la constante cosmologique et

des angles α_E et α'_E .

Une fois que la masse M est déterminée, on calcule l'angle polaire de coordonnée φ_S et le temps de retard du photon α_E par rapport au photon α'_E , en utilisant respectivement les expressions (1.99) et (1.120). On a aussi étudié le cas de schwarzschild qui correspond à une constante cosmologique nulle ($\Lambda = 0$). Les résultats sont consignés dans les tableaux 1.1, 1.2, 1.3 et 1.4.

Les résultats obtenus peuvent être résumés comme suit

$$\begin{aligned} 3.26 \cdot 10^{13} M_\odot &\leq M \leq 7.02 \cdot 10^{13} M_\odot, \\ 8.82'' &\leq -\varphi_S \leq 17.69'', \\ 13.19 \text{ ans} &\leq \Delta\tau \leq 29.00 \text{ ans}, \end{aligned} \tag{1.125}$$

en présence de la constante cosmologique et

$$\begin{aligned} 2.28 \cdot 10^{13} M_\odot &\leq M \leq 3.41 \cdot 10^{13} M_\odot, \\ 8.30'' &\leq -\varphi_S \leq 15.41'', \\ 10.60 \text{ ans} &\leq \Delta\tau \leq 19.58 \text{ ans}, \end{aligned} \tag{1.126}$$

en l'absence de la constante cosmologique.

On s'attend à ce que la constante cosmologique atténue l'effet de la gravitation mais, d'après les résultats obtenus, on constate qu'une augmentation de Λ de 20% augmente l'angle de déflexion $-\varphi_S$ de 4% environ. Cela s'explique, entre autres, par le fait que cette variation entraîne en contrepartie une augmentation importante de 20% environ de la masse ajustée de l'amas de galaxies. Par ailleurs, la valeur moyenne de la masse,

$$M = 4.83_{-1.57}^{+2.19} \cdot 10^{13} M_\odot, \tag{1.127}$$

est bien compatible avec la valeur observée $M = 5.0_{-1.0}^{+1.0} \cdot 10^{13} M_\odot$ [41, 42], tandis qu'en

l'absence de la constante cosmologique (modèle de Schwarzschild), elle ne l'est pas. En outre, les valeurs obtenues pour le temps de retard sont compatibles avec la limite inférieure observationnelle $\Delta\tau > 7.7$ [44].

$\alpha'_E \pm 10\%$	+	+	+	± 0	± 0	± 0	-	-	-
$\alpha_E \pm 10\%$	+	± 0	-	+	± 0	-	+	± 0	-
$M [10^{13} M_\odot]$	7.02	6.38	5.75	6.38	5.80	5.22	5.75	5.22	4.70
$-\varphi_S [''']$	14.97	16.33	17.69	12.25	13.61	14.97	9.53	10.89	12.25
$\Delta\tau [\text{ans}]$	27.30	28.31	29.00	21.35	22.56	23.47	15.79	17.17	18.27

Tab. 1.1 Valeur maximale de Λ : $\Lambda = 0.77 \cdot 3 \text{ am}^{-2} + 20\%$.

$\alpha'_E \pm 10\%$	+	+	+	± 0	± 0	± 0	-	-	-
$\alpha_E \pm 10\%$	+	± 0	-	+	± 0	-	+	± 0	-
$M [10^{13} M_\odot]$	5.64	5.13	4.62	5.13	4.67	4.20	4.62	4.20	3.78
$-\varphi_S [''']$	14.30	15.60	16.90	11.70	13.00	14.30	9.10	10.40	11.70
$\Delta\tau [\text{ans}]$	24.76	25.70	26.34	19.35	20.46	21.30	14.31	15.56	16.57

Tab. 1.2 Valeur centrale de Λ : $\Lambda = 0.77 \cdot 3 \text{ am}^{-2}$.

$\alpha'_E \pm 10\%$	+	+	+	± 0	± 0	± 0	-	-	-
$\alpha_E \pm 10\%$	+	± 0	-	+	± 0	-	+	± 0	-
$M [10^{13} M_\odot]$	4.85	4.41	3.97	4.41	4.01	3.61	3.97	3.61	3.26
$-\varphi_S [''']$	13.87	15.13	16.39	11.35	12.61	13.87	8.82	10.09	11.35
$\Delta\tau [\text{ans}]$	22.84	23.71	24.32	17.85	18.88	19.66	13.19	14.35	15.29

Tab. 1.3 Valeur minimale de Λ : $\Lambda = 0.77 \cdot 3 \text{ am}^{-2} - 20\%$.

$\alpha'_E \pm 10\%$	+	+	+	± 0	± 0	± 0	-	-	-
$\alpha_E \pm 10\%$	+	± 0	-	+	± 0	-	+	± 0	-
$M [10^{13} M_\odot]$	3.41	3.10	2.79	3.10	2.81	2.53	2.79	2.53	2.28
$-\varphi_S ["]$	13.04	14.22	15.41	10.67	11.85	13.04	8.30	9.48	10.67
$\Delta\tau [\text{ans}]$	18.37	19.08	19.58	14.35	15.18	15.82	10.60	11.54	12.30

Tab. 1.4 $\Lambda = 0$.

Chapitre 2

Modèle de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) en Cosmologie

La cosmologie concerne l'étude des grandes structures de l'Univers, de leurs lois, de leurs origines et de leurs évolutions, ainsi que des modèles qui en permettent la compréhension. Puisque les propriétés de l'espace-temps sont déterminées, d'après la relativité générale, par son contenu matériel, la difficulté de construire un modèle cosmologique consiste à trouver la structure riemannienne compatible avec le contenu de l'Univers dans son ensemble et avec les phénomènes physiques qui s'y déroulent.

2.1 Principe cosmologique

La plupart des modèles utilisés en cosmologie font l'hypothèse d'un espace homogène et isotrope.

Précisons la signification de l'homogénéité et de l'isotropie. Par homogénéité, on entend que tous les points de l'espace jouent le même rôle. Autrement dit, il n'existe pas de point

privilegié. Par isotropie, on entend que toutes les directions autour de tout point de l'espace sont équivalentes. On peut montrer qu'en vérité l'isotropie ainsi définie (isotropie autour de chaque point) entraîne l'homogénéité.

On dit des modèles qui font l'hypothèse d'un espace homogène et isotrope qu'ils satisfont au principe cosmologique. Le principe cosmologique implique de fortes contraintes sur la métrique d'espace-temps. On peut montrer qu'il existe un système de coordonnées, dites coordonnées comobiles, de telle manière que les dix composantes indépendantes du tenseur métrique se réduisent à une seule fonction de t (t désignant la coordonnée temporelle) $a(t)$, appelée facteur d'échelle, avec un paramètre discret. Plus précisément, on peut toujours pour un Univers satisfaisant au principe cosmologique, faire le choix d'un système de coordonnées (t, r, θ, φ) de telle manière que le carré de l'intervalle d'espace-temps ds^2 prenne la forme

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (2.1)$$

où

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (2.2)$$

avec l'indice discret k pouvant prendre les valeurs $+1$, 0 et -1 , qui correspondent respectivement à une sphère, à un espace euclidien et à une pseudo-sphère, tous à trois dimensions.

Si on fait le choix d'une nouvelle coordonnée radiale χ liée à r via

$$r = \Sigma(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & k = +1 \\ \chi & k = 0 \\ \sinh \chi & k = -1 \end{cases}, \quad (2.3)$$

alors l'élément de ligne (2.1) peut être réécrit comme

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 [d\chi^2 + \Sigma(\chi)^2 d\Omega^2]. \quad (2.4)$$

2.2 Equation de Friedmann

La seule fonction inconnue dans (2.1) ou (2.4) est le facteur d'échelle $a(t)$, qui peut être déterminé par application des équations d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

en l'absence de la constante cosmologique Λ , et

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

en présence de la constante cosmologique Λ . Les équations d'Einstein (2.5) et (2.6) peuvent être respectivement réécrites comme

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^\lambda{}_\lambda \right), \quad (2.7)$$

et

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^\lambda{}_\lambda \right) - \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.8)$$

Ceci nous amène au calcul du tenseur de Ricci et du scalaire de courbure, lesquels requièrent à leur tour le calcul des symboles de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ qui s'expriment en fonction du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et du tenseur métrique inverse $g^{\mu\nu}$, (1.21).

A partir de (2.1), on peut tirer les composantes du tenseur métrique dans le système de coordonnées (t, r, θ, φ)

$$g_{tt} = -1, \quad g_{rr} = a^2/(1 - kr^2), \quad g_{\theta\theta} = a^2r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = a^2r^2 \sin^2 \theta, \quad (2.9)$$

et du tenseur métrique inverse, qui sont ici immédiates, vu que le tenseur métrique est

diagonal

$$g^{tt} = -1, \quad g^{rr} = (1 - kr^2)/a^2, \quad g^{\theta\theta} = 1/(a^2 r^2), \quad g^{\varphi\varphi} = 1/(a^2 r^2 \sin^2 \theta). \quad (2.10)$$

Le calcul des symboles de Christoffel donne pour les composantes non nulles

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^t &= aa_t/(1 - kr^2), & \Gamma_{\theta\theta}^t &= aa_t r^2, & \Gamma_{\varphi\varphi}^t &= aa_t r^2 \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{tr}^r &= \Gamma_{rt}^r = a_t/a, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r(1 - kr^2), & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{t\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta t}^\theta = a_t/a, & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = 1/r, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{t\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi t}^\varphi = a_t/a, & \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi r}^\varphi = 1/r, & \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cot \theta, \end{aligned} \quad (2.11)$$

où l'indice t désigne la dérivation par rapport au temps. En utilisant l'expression du tenseur de Ricci (1.20), on obtient

$$\begin{aligned} R_{tt} &= 3a_{tt}/a, & R_{rr} &= -(aa_{tt} + 2a_t^2 + 2k)/(1 - kr^2), \\ R_{\theta\theta} &= -r^2(aa_{tt} + 2a_t^2 + 2k), & R_{\varphi\varphi} &= -r^2 \sin^2 \theta (aa_{tt} + 2a_t^2 + 2k). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Le scalaire de courbure R se calcule par contraction du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

ce qui donne, en utilisant les expressions des composantes (2.12) du tenseur de Ricci,

$$R = -6(a_{tt}a + a_t^2 + k)/a^2. \quad (2.14)$$

Pour écrire les équations d'Einstein, on a également besoin d'une forme pour le tenseur énergie-impulsion. On modélise généralement l'Univers par un fluide parfait dont les molécules sont les galaxies ou les amas de galaxies. La forme générale du tenseur énergie-

impulsion $T_{\mu\nu}$ d'un fluide parfait avec densité ρ et pression p est donnée par

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (2.15)$$

où U_μ désigne la 4-vitesse du fluide. Vu qu'on travaille dans un système de coordonnées comobiles, seule la composante temporelle de U_μ est non nulle

$$U_\mu(U_t, 0, 0, 0). \quad (2.16)$$

Comme

$$U_\mu U^\mu = -1, \quad (2.17)$$

et vu que le tenseur métrique est diagonal avec $g^{tt} = -1$, on a

$$U_t^2 = 1. \quad (2.18)$$

Comme U_t est obligatoirement positif, on a

$$U_t = 1. \quad (2.19)$$

Il est à remarquer que nous obtenons deux équations indépendantes qui correspondent aux composantes tt et rr du tenseur de Ricci, et qui s'écrivent respectivement comme

$$a_t^2 - \frac{1}{3}(8\pi G\rho + \Lambda)a^2 = -k, \quad (2.20)$$

et

$$2a_{tt}a + a_t^2 + (8\pi Gp - \Lambda)a^2 = -k. \quad (2.21)$$

Du fait de l'isotropie de l'espace, (2.8) produit la même équation (2.21) pour $\mu = \nu = \theta$ et pour $\mu = \nu = \varphi$. Ces équations ont été obtenues par Friedmann en 1922 dans le cas d'une

pression nulle $p = 0$ [46], puis généralisées pour une pression non nulle par Lemaître en 1927 [47]. En prenant la différence des deux équations (2.20) et (2.21) on obtient

$$\frac{a_{tt}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.22)$$

Cette équation nous permet de voir que pour Λ négligeable, dans un univers à contenu matériel, c'est-à-dire tel que $\rho + 3p > 0$, l'expansion est décélérée. Il reste à résoudre le problème de la dépendance de la pression en la densité. Pour cela, il nous faut encore une équation d'état $p = p(\rho)$, ce qui suppose une forme particulière de matière dominant l'Univers, autrement dit, la connaissance des diverses formes possibles d'énergie dans l'Univers. En prenant une combinaison linéaire particulière des équations (2.20) et (2.21) (les équations (2.20) et (2.21) sont multipliées respectivement par -3 et 1), on obtient

$$\frac{a_{tt}}{a} - \frac{a_t^2}{a^2} - \frac{k}{a^2} + 4\pi G(\rho + p) = 0. \quad (2.23)$$

La dérivation de (2.20) par rapport au temps nous donne

$$4\pi G\rho_t = 3\frac{a_t}{a} \left(\frac{a_{tt}}{a} - \frac{a_t^2}{a^2} - \frac{k}{a^2} \right). \quad (2.24)$$

En combinant (2.23) et (2.24), on obtient l'équation de conservation

$$\rho_t + 3\frac{a_t}{a}(\rho + p) = 0. \quad (2.25)$$

C'est bel et bien le résultat que donne la composante temporelle de l'équation de conservation du tenseur énergie-impulsion,

$$D_\nu T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{;\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu T^{\rho\nu} + \Gamma_{\nu\rho}^\nu T^{\mu\rho} = 0. \quad (2.26)$$

L'équation (2.25) est équivalente à

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) + p \frac{d}{dt} a^3 = 0. \quad (2.27)$$

Si l'Univers est dominé par la matière non relativiste, $p \ll \rho$, (2.27) mène alors à

$$\rho \propto 1/a^3. \quad (2.28)$$

Pour un univers dominé par la matière relativiste tel que les photons, $p = \rho/3$, (rayonnement du corps noir), (2.27) mène à

$$\rho \propto 1/a^4. \quad (2.29)$$

Pour un univers dominé par l'énergie du vide, la densité ρ serait indépendante du temps et (2.25) donnerait alors

$$p = -\rho. \quad (2.30)$$

2.3 Propagation des photons dans le modèle de FLRW

Ici, nous considérons les trajectoires des photons qui voyagent de galaxies lointaines vers nous, à l'origine. Ce problème est particulièrement simple car on doit seulement imposer $ds^2 = 0$. Considérons un photon émis à $(t, \chi, \theta, \varphi)$ puis détecté à l'origine $(t_0, \chi_0 = 0, \theta_0, \varphi_0)$ sur Terre. Ceci implique que $t_0 > t$. Prenons le cas d'un chemin radial, ce qui signifie que $\theta = \theta_0$ et $\varphi = \varphi_0$. L'équation (2.4) se réduit alors à

$$0 = ds^2 = dt^2 - a(t)^2 d\chi^2, \quad (2.31)$$

ce qui donne

$$\frac{d\chi}{dt} = \pm \frac{1}{a(t)}. \quad (2.32)$$

Comme le photon se rapproche du détecteur, $d\chi$ est forcément négatif et on doit choisir parmi les deux possibilités (2.32) celle avec un signe moins. Donc,

$$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{1}{a(t)}. \quad (2.33)$$

En intégrant (2.33), on obtient

$$\chi(t) = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.34)$$

où $\chi(t)$ représente la distance géodésique du photon entre le point d'émission et l'origine sur Terre. Si on est en possession de l'expression de $a(t)$, on peut alors évaluer $\chi(t)$ pour un instant donné t . Pour des galaxies émettrice et réceptrice suffisamment proches de telle manière qu'on puisse négliger la variation de $a(t)$ entre l'instant d'émission et l'instant de réception du photon, (2.34) se simplifie en

$$a_0\chi = t_0 - t, \quad (2.35)$$

qui dit simplement que le temps de vol est égal à la distance parcourue par un photon, dans un système d'unités où c vaut 1.

La relation (2.34) permet également d'accéder au décalage spectral. Considérons un premier photon émis à l'instant t par une galaxie ou un amas de galaxie et reçu sur Terre à l'instant t_0 . Considérons un deuxième photon émis à l'instant $t + 1/\nu$ où ν est la fréquence du rayonnement à l'émission. Ce deuxième photon sera reçu sur Terre à un instant $t_0 + 1/\nu_0$ avec ν_0 la fréquence à la réception. Comme la distance géodésique est la même pour les deux photons, nous avons

$$\chi(t) = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t+1/\nu}^{t_0+1/\nu_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t+1/\nu}^t \frac{dt}{a(t)} + \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0+1/\nu_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.36)$$

En négligeant la variation de $a(t)$ sur les intervalles $(t, t + 1/\nu)$ et $(t_0, t_0 + 1/\nu_0)$, on obtient

$$\nu/\nu_0 = a_0/a, \quad (2.37)$$

ou, comme les fréquences et les longueurs d'onde sont inversement proportionnelles,

$$\lambda_0/\lambda = a_0/a. \quad (2.38)$$

Le décalage spectral z est défini comme

$$1 + z = \lambda_0/\lambda. \quad (2.39)$$

D'où,

$$1 + z = a_0/a. \quad (2.40)$$

Si $z > 0$, on parle de décalage spectral vers le rouge ou redshift et si $z < 0$, on parle de décalage spectral vers le bleu ou blueshift.

Pour obtenir χ en fonction du décalage spectral z , on fait le changement de variables $dt = da/a_t$ dans (2.34). On obtient alors

$$\chi(z) = \int_{\frac{a_0}{1+z}}^{a_0} \frac{da}{aa_t}, \quad (2.41)$$

où a_t est donné par l'équation de Friedmann (2.20). Cette expression (2.41) est utile car c'est le décalage spectral d'une galaxie qui est observé et non pas l'instant d'émission du photon.

Chapitre 3

Modèle d'Einstein-Straus à courbure spatiale nulle (cas plat $k = 0$)

Quand on étudie les petites régions de l'Univers, on ne peut pas utiliser l'hypothèse de la distribution isotrope et homogène de la matière. La métrique dans une telle région, dans laquelle il y a une perturbation dans la distribution de matière, diffère de la métrique de FLRW (2.1). Le plus connu des modèles construits pour ces régions est celui d'Einstein-Straus [6] et aussi les modèles caractérisés par la métrique de McVittie [48, 49]. Dans de tels modèles, les galaxies ou les amas de galaxies (lentille) seront représentés par une condensation de matière plongée dans un fluide parfait. Le modèle d'Einstein-Straus est plus adapté à l'étude d'une seule condensation à symétrie sphérique placée au centre d'une sphère vide régie par la solution de Kottler. C'est un modèle à vacuole. La vacuole étant immergée dans un fluide parfait décrit par la métrique de FLRW.

Le modèle d'Einstein-Straus permet de s'affranchir des hypothèses utilisées par Rindler et Ishak [52]. On permet à l'observateur et à la source de se déplacer par rapport à la lentille

et les masses des autres amas de galaxies sont incluses sous forme d'une poussière isotrope et homogène. La métrique d'Einstein-Straus est une solution des équations d'Einstein qui raccorde la solution de Kottler à l'intérieur du rayon de Schücking [50] avec la solution de FLRW à l'extérieur.

On se limitera dans ce chapitre à la métrique de FLRW en présence de la constante cosmologique, dans le cas plat, $k = 0$. Commençons par redémontrer le résultat de Schücker [51] concernant le Jacobien de la transformation de passage des coordonnées de Friedmann aux coordonnées de Schwarzschild.

3.1 Raccordement de la solution de FLRW avec la solution de Kottler

Désignons par (T, r, θ, φ) les coordonnées de Schwarzschild et par $(t, \chi, \theta, \varphi)$ les coordonnées de Friedmann. Les éléments de ligne de la métrique de Kottler et de la métrique de FLRW s'écrivent alors respectivement comme

$$ds^2 = B(r)dT^2 - B(r)^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad B(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2, \quad (3.1)$$

et

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2(d\chi^2 + \chi^2d\Omega^2), \quad (3.2)$$

où le facteur d'échelle $a(t)$ est fourni par l'équation de Friedmann (2.20) pour un espace plat ($k = 0$) qui, dans les unités (1.122) où $8\pi G = 1 \text{ am}^3 \text{ as}^{-2} \text{ ag}^{-1}$ (1.123), se simplifie en

$$\frac{da}{dt} = a\sqrt{\frac{\rho + \Lambda}{3}}, \quad (3.3)$$

pour un Univers en expansion ($da/dt > 0$).

Dans un univers dominé par la matière non relativiste, $p \ll \rho$, nous avons la relation

(2.28), $\rho \propto 1/a^3$, qui nous permet d'écrire

$$\rho a^3/3 = \rho_0 a_0^3/3 = A, \quad (3.4)$$

où A est une constante. L'équation de Friedmann devient alors

$$\frac{da}{dt} = f(a) = \sqrt{\frac{A}{a} + \frac{\Lambda}{3}a^2}. \quad (3.5)$$

Utilisons la définition de la constante de Hubble

$$H_0 = \frac{a_t(0)}{a_0}, \quad (3.6)$$

ce qui nous permet d'obtenir dans le système d'unités choisi (1.122) où $H_0 = 1 \text{ as}^{-1}$ (1.123),

$$a_t(0) = a_0. \quad (3.7)$$

En remplaçant ce résultat dans l'équation de Friedmann (3.5) pour $t = 0$, on trouve

$$\rho_0 = 3 - \Lambda, \quad A = (1 - \Lambda/3)a_0^3. \quad (3.8)$$

Les deux solutions de Kottler et de FLRW sont raccordées sur la sphère de Schücking caractérisée par un rayon constant $\chi_{Schü}$,

$$r_{Schü}(T) = a(t)\chi_{Schü}, \quad r \leq r_{Schü}, \quad \chi \geq \chi_{Schü}. \quad (3.9)$$

La masse centrale M doit être égale à la densité de la poussière multipliée par le volume de la sphère de Schücking

$$M = \frac{4}{3}\pi r_{Schü}^3 \rho = 4\pi A \chi_{Schü}^3. \quad (3.10)$$

D'où on tire une expression pour le rayon de Schücking $\chi_{Schü}$,

$$\chi_{Schü} = \left(\frac{M}{4\pi A} \right)^{1/3}. \quad (3.11)$$

Il est utile de définir $B_{Schü}$ et $C_{Schü}$ respectivement comme

$$B_{Schü} = B(r_{Schü}) = 1 - \left(\frac{A}{a} + \frac{\Lambda}{3} a^2 \right) \chi_{Schü}^2, \quad (3.12)$$

et

$$C_{Schü} = \sqrt{1 - B_{Schü}}. \quad (3.13)$$

Nous allons partir des coordonnées de Friedmann (t, χ) et faire deux transformations de coordonnées successives: $(t, \chi) \rightarrow (a, \chi) \rightarrow (b, r)$. Nous allons également partir des coordonnées de Schwarzschild (T, r) et faire une transformation de coordonnées: $(T, r) \rightarrow (b, r)$. Autrement dit, nous allons passer des coordonnées de Friedmann (t, χ) et de Schwarzschild (T, r) au système de coordonnées (b, r) , ce qui nous permettra de raccorder les deux solutions de Friedmann et de Kottler.

La métrique de FLRW (3.2) s'écrit dans le système de coordonnées (a, χ) comme

$$ds^2 = \frac{da^2}{f(a)^2} - a^2 d\chi^2 - a^2 \chi^2 d\Omega^2. \quad (3.14)$$

Faisons un deuxième changement de système de coordonnées $(a, \chi) \rightarrow (b, r)$ de telle manière que le facteur devant $d\Omega^2$ se réduise à r^2

$$a = \Phi(b, r), \quad \chi = r/\Phi(b, r), \quad (3.15)$$

avec la condition aux limites, qu'en le rayon de Schücking, l'ancienne coordonnée de temps

coïncide avec la nouvelle coordonnée de temps

$$a = b = \Phi(b, b\chi_{Schü}). \quad (3.16)$$

Dans le système de coordonnées (b, r) la métrique de FLRW (3.14) s'écrit alors comme

$$\begin{aligned} ds^2 &= -g_{bb}^F db^2 - g_{rr}^F dr^2 - 2g_{br}^F dbdr - r^2 d\Omega^2 \\ &= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial b}\right)^2 \left(\frac{1}{C_1^2} - \frac{r^2}{\Phi^2}\right) db^2 - \left[\left(1 - \frac{r}{\Phi} \frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{C_1^2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2\right] dr^2 \\ &\quad + 2 \frac{\partial\Phi}{\partial b} \left[\frac{r}{\Phi} \left(1 - \frac{r}{\Phi} \frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial\Phi}{\partial r}\right] dbdr - r^2 d\Omega^2, \end{aligned} \quad (3.17)$$

avec

$$C_1 = \sqrt{A/\Phi + \Lambda\Phi^2/3}. \quad (3.18)$$

On veut que la métrique (3.17) soit diagonale, c'est-à-dire $g_{br}^F = 0$, ce qui donne

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = -\frac{r}{\Phi} \frac{C_1^2}{B_1}, \quad B_1 = 1 - \left(\frac{A}{\Phi^3} + \frac{\Lambda}{3}\right) r^2. \quad (3.19)$$

L'élément de ligne ds^2 se simplifie alors en

$$ds^2 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial b}\right)^2 \frac{B_1}{C_1^2} db^2 - \frac{1}{B_1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (3.20)$$

En dérivant Φ par rapport à b , et compte tenu de (3.16), on obtient en $\chi = \chi_{Schü}$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial b} \Big|_{Schü} = 1 - \frac{\partial\Phi}{\partial r} \Big|_{Schü} \chi_{Schü} = \frac{1}{B_{Schü}}. \quad (3.21)$$

Considérons maintenant la solution de Kottler et faisons un changement de coordonnées: $(T, r) \rightarrow (b, r)$ avec

$$\frac{dT}{db} = \Psi(b). \quad (3.22)$$

Nous pouvons écrire la métrique de Kottler (3.1) dans le système de coordonnées (b, r, θ, φ) comme

$$\begin{aligned} ds^2 &= -g_{bb}^K db^2 - g_{rr}^K dr^2 - r^2 d\Omega^2 \\ &= B\Psi(b)^2 db^2 - B^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

C'est dans ce système de coordonnées, (b, r, θ, φ) , qu'on raccorde de manière continue les deux solutions de FLRW et de Kottler sur la sphère de Schücking

$$g_{bb}^F|_{Schü} = g_{bb}^K|_{Schü}, \quad g_{rr}^F|_{Schü} = g_{rr}^K|_{Schü}. \quad (3.24)$$

On peut facilement montrer que

$$B_1|_{Schü} = B_{Schü}, \quad C_1|_{Schü} = \frac{C_{Schü}}{\chi_{Schü}}. \quad (3.25)$$

La relation (3.24) implique alors que

$$\Psi(b) = \frac{\chi_{Schü}}{B_{Schü} C_{Schü}}. \quad (3.26)$$

En faisant un usage répété de la dérivée d'une fonction composée, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial T} &= \frac{\partial t}{\partial a} \frac{\partial \Phi}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial T}, & \frac{\partial t}{\partial r} &= \frac{\partial t}{\partial a} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \\ \frac{\partial \chi}{\partial T} &= \frac{\partial \chi}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial T}, & \frac{\partial \chi}{\partial r} &= \frac{1}{\Phi} - \frac{r}{\Phi^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

En faisant $\chi = \chi_{Schü}$ dans (3.27), on obtient le Jacobien de la transformation de coordon-

nées $(T, r) \rightarrow (t, \chi)$ sur la sphère de Schücking,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial t}{\partial T} \right|_{Schü} &= 1, & \left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{Schü} &= -\frac{C_{Schü}}{B_{Schü}}, \\ \left. \frac{\partial \chi}{\partial T} \right|_{Schü} &= -\frac{C_{Schü}}{a}, & \left. \frac{\partial \chi}{\partial r} \right|_{Schü} &= \frac{1}{aB_{Schü}}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

ou sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{C_{Schü}}{B_{Schü}} \\ -\frac{C_{Schü}}{a} & \frac{1}{aB_{Schü}} \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Le Jacobien de la transformation inverse $(t, \chi) \rightarrow (T, r)$ n'est autre que l'inverse de la matrice (3.29), dont le calcul donne

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{B_{Schü}} & a\frac{C_{Schü}}{B_{Schü}} \\ C_{Schü} & a \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

D'où,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{Schü} &= \frac{1}{B_{Schü}}, & \left. \frac{\partial T}{\partial \chi} \right|_{Schü} &= a\frac{C_{Schü}}{B_{Schü}}, \\ \left. \frac{\partial r}{\partial t} \right|_{Schü} &= C_{Schü}, & \left. \frac{\partial r}{\partial \chi} \right|_{Schü} &= a. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Pour comparer la coordonnée temporelle de Friedmann t , à celle de Schwarzschild T , en $\chi = \chi_{Schü}$, on considère la courbe paramétrée $T = p$, avec $r = b\chi_{Schü}$, $\theta = \pi/2$ et $\varphi = 0$. Sa 4-vitesse est

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial p} &= 1, \\ \frac{\partial r}{\partial p} &= \frac{dr}{db} \frac{db}{dT} \Big|_{Schü} \frac{dT}{dp} = \chi_{Schü} \frac{1}{\Psi(b)} \cdot 1 = B_{Schü} C_{Schü}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

dans les coordonnées de Schwarzschild et

$$\begin{aligned}\frac{\partial t}{\partial p} &= \frac{\partial t}{\partial T} \Big|_{Sch\ddot{u}} \frac{dT}{dp} + \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{Sch\ddot{u}} \frac{dr}{dp} = 1 \cdot 1 - \frac{C_{Sch\ddot{u}}}{B_{Sch\ddot{u}}} B_{Sch\ddot{u}} C_{Sch\ddot{u}} = B_{Sch\ddot{u}}, \\ \frac{d\chi}{dp} &= \frac{\partial \chi}{\partial T} \Big|_{Sch\ddot{u}} \frac{dT}{dp} + \frac{\partial \chi}{\partial r} \Big|_{Sch\ddot{u}} \frac{dr}{dp} = -\frac{C_{Sch\ddot{u}}}{a_{Sch\ddot{u}}} \cdot 1 + \frac{1}{a B_{Sch\ddot{u}}} B_{Sch\ddot{u}} C_{Sch\ddot{u}} = 0, \quad (3.33)\end{aligned}$$

dans les coordonnées de Friedmann. On en déduit la relation

$$\frac{dt}{dT} \Big|_{Sch\ddot{u}} = \frac{dt}{dp} \frac{dp}{dT} = B_{Sch\ddot{u}}. \quad (3.34)$$

On peut remarquer que le raccordement des solutions de FLRW et de Kottler n'est possible que si

1. Les deux solutions de FLRW et de Kottler correspondent à la même constante cosmologique Λ .
2. Si nous voulons interpréter la masse centrale comme la masse d'un amas de galaxie, $M \simeq 10^{14} M_{\odot}$, il faut alors satisfaire à une hiérarchie pour les échelles de longueur, le rayon de Schwarzschild $s \simeq 10^{-9}$ am, le rayon typique d'un amas $r_{cluster} \simeq 10^{-3}$ am, le rayon de Schücking $r_{Sch\ddot{u}} \simeq 10^{-3}$ am, la distance typique entre amas $D_{cluster} \simeq 10^{-3}$ am et le rayon de de Sitter $r_{dS} \simeq 1$ am,

$$s < r_{cluster} < r_{Sch\ddot{u}} < D_{cluster}, \quad r_{Sch\ddot{u}} < r_{dS}. \quad (3.35)$$

3.2 Géodésiques et déflexion de la lumière

Comme ce sont les conditions finales sur Terre qui sont connues, il semble plus pratique de considérer deux photons qui sont émis par une source S à différents instants $t_S \neq t'_S$, suivent des trajectoires différentes et sont reçus sur Terre E simultanément à $t_E = t'_E$ avec des angles α_E et α'_E . Comme le montre la Fig. 3-1, ces deux photons, durant leur propagation dans l'espace-temps plat de Friedmann, pénètrent dans la sphère de Schücking

(vacuole), aux instants t_{SchuS} et t'_{SchuS} respectivement, où ils sont déviés par une lentille L à des distances d'approche minimales r_P et r'_P (péri-lens) respectivement, qui sont beaucoup plus grandes que le rayon de Schwarzschild ($s = 2GM$), puis quittent la sphère de Schücking aux instants t_{SchuE} et t'_{SchuE} respectivement. Dans le cas concret auquel on appliquera notre calcul, à savoir le système lentille-quasar SDSS J1004+4112, le rapport du rayon de Schwarzschild $2GM/r_P$ au péri-lens est de l'ordre de 10^{-5} , ce qui fait que les termes d'ordre supérieur peuvent être sûrement négligés.

Les géodésiques seront intégrées par morceaux: Pour la solution plate de FLRW avec une constante cosmologique $\Lambda = 0.77 \cdot 3 \text{ am}^{-2} \pm 20\%$ et densité de poussière $\rho_0 = 3 - \Lambda$ (3.8), et pour la solution de Kottler. Elles seront raccordées sur la sphère de Schücking en utilisant le Jacobien et le Jacobien inverse calculés précédemment. On déterminera le facteur d'échelle $a(t)$ analytiquement à partir de l'équation de Friedmann (3.5), qui peut se réécrire comme

$$dt = \frac{da}{f(a)}, \quad f(a) = \sqrt{A/a + \Lambda a^2/3}. \quad (3.36)$$

L'intégration de cette dernière avec la condition finale sur Terre $t(a = a_0) = 0$ se fait facilement pour donner l'expression du temps cosmique $t(a)$ (la fonction inverse du facteur d'échelle)

$$t(a) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \left(\operatorname{arcsinh} \frac{(a/a_0)^{3/2}}{\sqrt{3/\Lambda - 1}} - \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \right). \quad (3.37)$$

En inversant (3.37), on obtient l'expression du facteur d'échelle

$$a(t) = a_0 \left(\frac{3}{\Lambda} - 1 \right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t + \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \right). \quad (3.38)$$

Il vaut la peine de noter que ceci est équivalent à déterminer $a(t)$ à partir de l'équation du second ordre (2.21)

$$2aa_{tt} + a_t^2 = \Lambda a^2, \quad (3.39)$$

avec les deux conditions finales a_0 et $a_t(0) = a_0$ (3.7).

Dans la limite $\Lambda = 0$, les solutions $t(a)$ et $a(t)$ se réduisent à

$$t(a) = \frac{2}{3} \left[\left(\frac{a}{a_0} \right)^{3/2} - 1 \right], \quad (3.40)$$

$$a(t) = a_0 \left(\frac{3}{2} t + 1 \right)^{2/3}. \quad (3.41)$$

Ce sont les mêmes résultats qu'on obtient en faisant $\Lambda = 0$ dans (3.5).

Ceci d'une part. D'autre part, les géodésiques de Friedmann sont facilement intégrables vu que les photons suivent des lignes droites dans les coordonnées polaires (χ, θ, φ) . Dans la solution de Kottler, les géodésiques sont intégrées analytiquement au premier ordre en le rapport du rayon de Schwarzschild au péri-lens $2GM/r_P$.

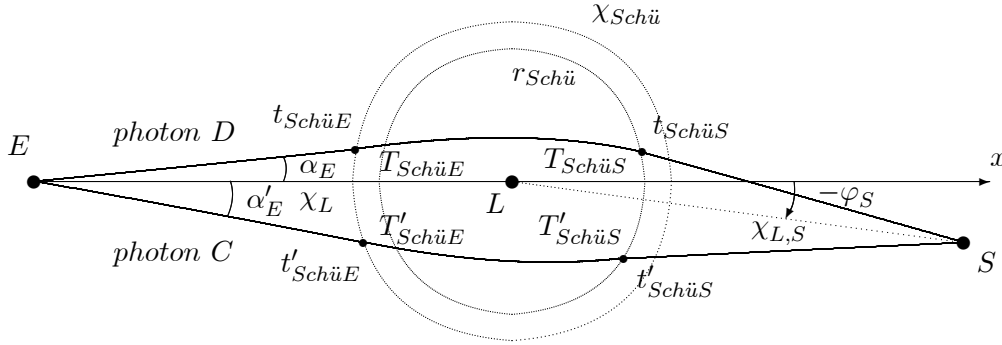


Fig. 3-1 Deux rayons lumineux déviés sous l'effet de la gravitation à l'intérieur de la sphère de Schücking.

La distance géodésique $\chi(t)$ est fournie par intégration numérique de l'équation radiale (2.33), $d\chi/dt = -1/a(t)$, où a est donné par l'expression (3.38). Il convient de noter que l'équation (2.33) peut être résolue analytiquement pour donner une fonction hypergéométrique. Comme $a(t)$ est une fonction positive du temps, ceci garantit que la distance géodésique $\chi(t)$ est une fonction décroissante du temps, avec son inverse noté $t(\chi)$.

En prenant l'origine des distances en la position de la Terre $\chi(t_E = 0) = 0$, les distances

géodésiques Terre-lentille χ_L et Terre-source χ_S sont données par

$$\chi_L = \int_{0t_L}^0 \frac{dt}{a(t)}, \quad \chi_S = \int_{0t_S}^0 \frac{dt}{a(t)}, \quad (3.42)$$

où les temps ${}^0t_L = t({}^0a_L)$ et ${}^0t_S = t({}^0a_S)$ sont calculés en fonction des facteurs d'échelle 0a_L et 0a_S qui sont à leur tour calculés en utilisant la définition du redshift (2.40), $1+z = a_0/a$,

$${}^0a_L = \frac{a_0}{1+z_L}, \quad {}^0a_S = \frac{a_0}{1+z_S}. \quad (3.43)$$

Ainsi χ_L et χ_S seront calculés respectivement pour des valeurs données de z_L et z_S . Ces résultats (3.42) sont équivalents à (2.41).

Puisque ce sont les conditions finales qui sont données, on intégrera à reculons dans le temps, dt , dT et dp seront alors négatifs, avec p un paramètre affine.

Avant d'aller plus loin, intégrons l'équation de Friedmann de la Terre jusqu'à la source sans déflexion [51]. Prenons l'origine, $\chi = 0$, en la lentille et définissons le plan contenant la Terre, la lentille et la source par $\theta = \pi/2$. Notre condition finale (sur Terre) en $p = 0$ est

$$\begin{aligned} t &= 0, & \chi &= \chi_L, & \varphi &= \pi, \\ \dot{t} &= 1, & \dot{\chi} &= \frac{1}{a_0}, & \dot{\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Notons que pour obtenir les conditions finales $\dot{\chi} = 1/a_0$ et $\dot{\varphi} = 0$, on utilise le fait que la métrique de FLRW dans le plan $\theta = \pi/2$ se réduit à

$$\dot{t}^2/a^2 = \dot{\chi}^2 + \chi^2\dot{\varphi}^2. \quad (3.45)$$

En utilisant la définition du redshift (2.40), $1+z = a_0/a$, ainsi que les expressions (3.37), (3.42) et celle du rayon de Schücking (3.11), en adoptant comme valeur de la masse $M = 5 \cdot 10^{13} M_\odot$, on obtient les résultats consignés dans le Tab. 3.1, où on a pris, sans perte de généralité, $a_0 = 1$ am et utilisé le système d'unités (1.122). Notons que ${}^0\chi_{L,S}$ est la distance

lentille-source et est donnée par ${}^0\chi_{L,S} = \chi_S - \chi_L$. Si on veut maintenant prendre l'origine

	Terre, χ_L	$\chi_{Schü}$	Lentille	$\chi_{Schü}$	Source, ${}^0\chi_{L,S}$
z	0		0.68		1.734
0t [as]	0	-0.4556	-0.4566	-0.4576	-0.7372
χ	0.5905	0.0017	0	0.0017	0.5942

Tab. 3.1 Cas sans déflexion avec la lentille comme origine des distances.

	Terre	${}^0\chi_{E,SchüE}$	Lentille, χ_L	${}^0\chi_{E,SchüS}$	Source, χ_S
z	0		0.68		1.734
0t [as]	0	-0.4556	-0.4566	-0.4576	-0.7372
χ	0	0.5888	0.5905	0.5922	1.1847

Tab. 3.2 Cas sans déflexion avec la Terre comme origine des distances.

des χ sur Terre, il suffit de translater les valeurs de χ , et on obtient le Tab. 3.2.

3.2.1 Géodésiques de la lumière entre la sphère de Schücking et la Terre

Intégrons maintenant la trajectoire du photon α_E entre la Terre et la sphère de Schücking en utilisant les symboles de Christoffel (2.11) de la métrique de FLRW dans le plan $\theta = \pi/2$,

$$\begin{aligned}\Gamma_{\chi\chi}^t &= aa_t, & \Gamma_{\varphi\varphi}^t &= aa_t\chi^2, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\chi &= -\chi, \\ \Gamma_{t\chi}^\chi &= \Gamma_{\chi t}^\chi = a_t/a, & \Gamma_{t\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi t}^\varphi = a_t/a, & \Gamma_{\chi\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi\chi}^\varphi = 1/\chi.\end{aligned}\quad (3.46)$$

On obtient alors les équations des géodésiques (1.38)

$$\ddot{t} + aa_t(\dot{\chi}^2 + \chi^2\dot{\varphi}^2) = 0, \quad (3.47)$$

$$\ddot{\chi} + 2\frac{a_t}{a}\dot{t}\dot{\chi} - \chi\dot{\varphi}^2 = 0, \quad (3.48)$$

$$\ddot{\varphi} + 2\left(\frac{a_t}{a}\dot{t} + \frac{\dot{\chi}}{\chi}\right)\dot{\varphi} = 0. \quad (3.49)$$

On note qu'ici il n'est pas nécessaire d'intégrer la deuxième équation.

Pour définir les conditions finales en $p = 0$, nous utilisons le fait que l'angle de coordonnée $\arctan|\chi\dot{\varphi}/\dot{\chi}|$ coïncide avec l'angle physique α_E ,

$$\alpha_E = \arctan|\chi\dot{\varphi}/\dot{\chi}|. \quad (3.50)$$

On note que les conditions finales pour $\dot{\chi}$ et $\dot{\varphi}$ sont obtenues immédiatement en faisant usage de l'équation (3.45) et de la définition (3.50), en retenant les expressions qui correspondent à un signe positif car dans cette région χ et φ augmentent au fur et à mesure que t (ou p) augmente,

$$\begin{aligned} t = 0, \quad \chi &= \chi_L, \quad \varphi = \pi, \\ \dot{t} = 1, \quad \dot{\chi} &= \frac{\cos \alpha_E}{a_0}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\sin \alpha_E}{a_0 \chi_L}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

En remplaçant (3.45) dans l'équation (3.47), et sachant que $a_t = \dot{a}/\dot{t}$, on obtient

$$\frac{d}{dp} \ln \dot{t} = \frac{d}{dp} \ln \frac{1}{a}, \quad (3.52)$$

qui s'intègre, en tenant compte des conditions finales (3.51), pour donner

$$\dot{t} = a_0/a(t). \quad (3.53)$$

En remplaçant dans (3.49), on obtient

$$\frac{d}{dp} \ln \dot{\varphi} = \frac{d}{dp} \ln \frac{1}{a^2 \chi^2}, \quad (3.54)$$

qui s'intègre, en tenant compte des conditions finales, pour donner

$$\dot{\varphi} = \frac{a_0 \chi_P}{a^2 \chi^2}, \quad \chi_P = \chi_L \sin \alpha_E. \quad (3.55)$$

En remplaçant \dot{t} par son expression, (3.53), dans (3.47), il vient que

$$a^2 = a_0 / \sqrt{\dot{\chi}^2 + \chi^2 \dot{\varphi}^2}. \quad (3.56)$$

En remplaçant a^2 par son expression (3.56) dans (3.55) et en tenant compte du fait que χ et φ sont positivement proportionnels, il vient que

$$d\varphi = \frac{\chi_P}{\chi^2} \frac{d\chi}{g(\chi)}, \quad g(\chi) = \sqrt{1 - \chi_P^2 / \chi^2}, \quad (3.57)$$

qui s'intègre, en tenant compte des conditions finales, pour donner

$$\varphi = \pi - \arcsin \frac{\chi_P}{\chi} + \alpha_E, \quad (3.58)$$

ou

$$\chi = \frac{\chi_P}{\sin(\varphi - \alpha_E)}. \quad (3.59)$$

L'instant $t_{SchüE}$ où le photon α_E sort de la sphère de Schücking en se dirigeant vers la Terre est donné par

$$t_{SchüE} = t(\chi_{E,SchüE}), \quad (3.60)$$

où $\chi_{E,SchüE}$ est la distance entre le point de sortie de la sphère de Schücking du photon α_E , et la Terre. On peut facilement montrer que cette distance s'écrit en termes de χ_L , $\chi_{Schü}$ et $\varphi_{SchüE}$ comme

$$\chi_{E,SchüE} = \chi(t_{SchüE}) = \sqrt{\chi_L^2 + \chi_{Schü}^2 + 2\chi_L\chi_{Schü} \cos \varphi_{SchüE}}, \quad (3.61)$$

avec (3.58)

$$\varphi_{SchüE} = \pi - \arcsin \frac{\chi_P}{\chi_{Schü}} + \alpha_E. \quad (3.62)$$

En remplaçant $\chi_{E,SchüE}$ par son expression dans (3.60), on déduit $t_{SchüE}$ par résolution

numérique de l'équation (2.33), ce qui nous permet de calculer la 4-vitesse du photon à la sortie de la sphère de Schücking compte tenu de (3.53), (3.55) et (3.57),

$$\dot{t}_{SchüE} = \frac{a_0}{a_{SchüE}}, \quad \dot{\chi}_{SchüE} = \frac{a_0 g_{Schü}}{a_{SchüE}^2}, \quad \dot{\varphi}_{SchüE} = \frac{a_0 \chi_P}{r_{SchüE}^2}, \quad (3.63)$$

avec $g_{Schü} = g(\chi_{Schü})$ et $r_{SchüE} = a_{SchüE} \chi_{Schü}$.

On définit γ_{FE} comme le plus petit angle physique entre la direction du photon et la direction dirigée vers la lentille en le point de sortie du photon de la sphère de Schücking,

$$\gamma_{FE} = \arctan \left| \chi_{Schü} \frac{\dot{\varphi}_{SchüE}}{\dot{\chi}_{SchüE}} \right| = \pi - \varphi_{SchüE} + \alpha_E = \arcsin \frac{\chi_P}{\chi_{Schü}}. \quad (3.64)$$

Pour intégrer la trajectoire du photon α'_E pour le chemin du bas, on suit la même démarche que précédemment. Seules les conditions finales diffèrent avec π remplacé par $-\pi$ et α_E remplacé par $-\alpha'_E$,

$$\begin{aligned} t = 0, \quad \chi = \chi_L, \quad \varphi = -\pi, \\ t = 1, \quad \dot{\chi} = \frac{\cos \alpha'_E}{a_0}, \quad \dot{\varphi} = -\frac{\sin \alpha'_E}{a_0 \chi_L}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Avec les conditions finales ci-dessus, les équations de la géodésique (3.47), (3.48) et (3.49) s'intègrent en

$$\dot{t} = \frac{a_0}{a}, \quad \dot{\varphi} = -\frac{a_0 \chi'_P}{a^2 \chi^2}, \quad \varphi = -\pi + \arcsin \frac{\chi'_P}{\chi} - \alpha'_E, \quad (3.66)$$

avec

$$\chi'_P = \chi_L \sin \alpha'_E. \quad (3.67)$$

On en tire

$$\chi = -\frac{\chi'_P}{\sin(\varphi + \alpha'_E)}. \quad (3.68)$$

L'instant $t'_{SchüE}$ où le photon α'_E sort de la sphère de Schücking en se dirigeant vers la

Terre est donné par

$$t'_{SchüE} = t(\chi'_{E,SchüE}), \quad (3.69)$$

où $\chi'_{E,SchüE}$ est la distance entre la Terre et le point de sortie du photon α'_E de la sphère de Schücking,

$$\chi'_{E,SchüE} = \chi(t'_{SchüE}) = \sqrt{\chi_{E,L}^2 + \chi_{Schü}^2 + 2\chi_L\chi_{Schü} \cos \varphi'_{SchüE}}, \quad (3.70)$$

avec

$$\varphi'_{SchüE} = -\pi + \arcsin \frac{\chi'_P}{\chi_{Schü}} - \alpha'_E. \quad (3.71)$$

On verra ci-dessus que le temps $t'_{SchüE}$ peut se calculer en termes de $t_{SchüE}$ via une expression analytique approchée. Dans l'approximation $\alpha_E \ll 1$ et $\alpha'_E \ll 1$, les distances $\chi_{E,SchüE}$ et $\chi'_{E,SchüE}$ peuvent s'écrire comme

$$\begin{aligned} \chi_{E,SchüE} &\simeq (\chi_L - \chi_{Schü}) \left(1 + \frac{\chi_L}{2\chi_{Schü}} \alpha_E^2 \right), \\ \chi'_{E,SchüE} &\simeq (\chi_L - \chi_{Schü}) \left(1 + \frac{\chi_L}{2\chi_{Schü}} \alpha_E'^2 \right). \end{aligned} \quad (3.72)$$

D'autre part, nous avons grâce à la relation (2.33), $d\chi/dt = -1/a$,

$$\chi'_{E,SchüE} - \chi_{E,SchüE} = - \int_{t_{SchüE}}^{t'_{SchüE}} \frac{dt}{a(t)} \simeq \frac{t_{SchüE} - t'_{SchüE}}{a_{SchüE}}, \quad (3.73)$$

car le facteur d'échelle a ne varie de manière significative que sur des intervalles de temps cosmologiques. En utilisant (3.72), on obtient

$$t_{SchüE} - t'_{SchüE} \simeq \frac{1}{2} a_{SchüE} \frac{\chi_L(\chi_L - \chi_{Schü})}{\chi_{Schü}} (\alpha_E'^2 - \alpha_E^2). \quad (3.74)$$

Connaissant la valeur de $t_{SchüE}$ à partir de (3.60), on peut déduire la valeur de $t'_{SchüE}$ de cette expression approchée. Le membre de droite de (3.74) est clairement positif pour

$\alpha'_E > \alpha_E$, ce qui signifie que le photon du chemin du bas quitte la vacuole avant celui du chemin du haut.

La 4-vitesse du photon α'_E au point de sortie de la sphère de Schücking est

$$\dot{t}'_{SchüE} = \frac{a_0}{a'_{SchüE}}, \quad \dot{\chi}'_{SchüE} = \frac{a_0 g'_{Schü}}{a'^2_{SchüE}}, \quad \dot{\varphi}'_{SchüE} = -\frac{a_0 \chi'_P}{r'^2_{SchüE}}, \quad (3.75)$$

avec $g'_{Schü} = g'(\chi_{Schü}) = \sqrt{1 - \chi'^2_P / \chi^2_{Schü}}$ et $r'_{SchüE} = a'_{SchüE} \chi_{Schü}$.

On définit de même γ'_{FE} comme le plus petit angle physique entre la direction du photon α'_E et la direction dirigée vers la lentille en le point de sortie du photon de la sphère de Schücking,

$$\gamma'_{FE} = \arctan \left| \chi_{Schü} \frac{\dot{\varphi}'_{SchüE}}{\dot{\chi}'_{SchüE}} \right| = \pi + \varphi'_{SchüE} + \alpha'_E = \arcsin \frac{\chi'_P}{\chi_{Schü}}. \quad (3.76)$$

On peut déterminer les temps $t_{SchüE}$ et $t'_{SchüE}$ autrement, sans utiliser la géométrie d'Euclide (espace plat) pour calculer la distance $\chi_{E,SchüE}$. C'est de cette méthode qu'on fera usage au chapitre suivant où la géométrie de l'espace est non plate (courbe). De (3.59), on a

$$d\chi = -\chi_P \frac{\cos(\varphi - \alpha_E)}{\sin^2(\varphi - \alpha_E)} d\varphi. \quad (3.77)$$

En remplaçant (3.59) et (3.77) dans la métrique de Friedmann,

$$\left(\frac{dt}{a} \right)^2 = d\chi^2 + \chi^2 d\varphi^2, \quad (3.78)$$

on obtient

$$\frac{dt}{a} = \frac{\chi_P d\varphi}{\sin^2(\varphi - \alpha_E)}, \quad (3.79)$$

où on a tenu compte du fait que pour la trajectoire du haut φ augmente au cours du temps.

Par intégration de l'équation (3.79), on trouve

$$\begin{aligned}
\int_{t_{SchüE}}^0 \frac{dt}{a(t)} &= \chi_{E,SchüE} \\
&= \chi_P \int_{\varphi_{SchüE}}^{\pi} \frac{d\varphi}{\sin^2(\varphi - \alpha_E)} \\
&= \chi_P \left[\cot \alpha_E - \cot \left(\arcsin \frac{\chi_P}{\chi_{Schü}} \right) \right] \\
&= \sqrt{\chi_L^2 - \chi_P^2} - \sqrt{\chi_{Schü}^2 - \chi_P^2}, \tag{3.80}
\end{aligned}$$

où on a remplacé $\varphi_{SchüE}$ par son expression (3.62) et exprimé l'angle α_E en termes de χ_P et χ_L (3.55). L'équation obtenue (3.80) peut nous fournir le temps $t_{SchüE}$ par intégration numérique du membre de gauche. En suivant la même démarche que précédemment, on trouve pour le temps $t'_{SchüE}$

$$\int_{t'_{SchüE}}^0 \frac{dt}{a(t)} = \chi'_{E,SchüE} = \sqrt{\chi_L^2 - \chi_P'^2} - \sqrt{\chi_{Schü}^2 - \chi_P'^2}. \tag{3.81}$$

Dans l'approximation $\alpha_E \ll 1$ et $\alpha'_E \ll 1$, les expressions (3.80) et (3.81) se simplifient aux expressions déjà obtenues, (3.72),

$$\int_{t_{SchüE}}^0 \frac{dt}{a(t)} \simeq (\chi_L - \chi_{Schü}) \left(1 + \frac{\chi_L}{2\chi_{Schü}} \alpha_E^2 \right), \tag{3.82}$$

$$\int_{t'_{SchüE}}^0 \frac{dt}{a(t)} \simeq (\chi_L - \chi_{Schü}) \left(1 + \frac{\chi_L}{2\chi_{Schü}} \alpha_E'^2 \right), \tag{3.83}$$

où on a remplacé χ_P et χ_P' par leurs expressions respectives (3.55) et (3.67).

Nous obtenons, en utilisant le Jacobien inverse (3.31) ainsi que l'expression de γ_{FE} , la 4-vitesse au point de sortie du photon α_E de la sphère de Schücking dans les coordonnées

de Schwarzschild,

$$\begin{aligned}\dot{T}_{SchüE} &= \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{SchüE} \dot{t}_{SchüE} + \left. \frac{\partial T}{\partial \chi} \right|_{SchüE} \dot{\chi}_{SchüE} = a_0 \frac{1 + C_{SchüE} g_{Schü}}{a_{SchüE} B_{SchüE}}, \\ \dot{r}_{SchüE} &= \left. \frac{\partial r}{\partial t} \right|_{SchüE} \dot{t}_{SchüE} + \left. \frac{\partial r}{\partial \chi} \right|_{SchüE} \dot{\chi}_{SchüE} = a_0 \frac{C_{SchüE} + g_{Schü}}{a_{SchüE}},\end{aligned}\quad (3.84)$$

avec $C_{SchüE} = C_{Schü}(t_{SchüE})$ et $B_{SchüE} = B_{Schü}(t_{SchüE})$ (3.12).

On définit γ_{KE} comme le plus petit angle de coordonnée entre la direction du photon α_E et la direction dirigée vers la lentille en le point de sortie du photon α_E de la sphère de Schücking. Compte tenu des expressions de γ_{FE} et $\dot{r}_{SchüE}$ on a

$$\gamma_{KE} = \arctan \left| r_{SchüE} \frac{\dot{\varphi}_{SchüE}}{\dot{r}_{SchüE}} \right| = \arctan \frac{\chi_P}{\chi_{Schü}(C_{SchüE} + g_{Schü})}. \quad (3.85)$$

La 4-vitesse au point de sortie du photon α'_E de la sphère de Schücking dans les coordonnées de Schwarzschild est

$$\begin{aligned}\dot{T}'_{SchüE} &= \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|'_{SchüE} \dot{t}'_{SchüE} + \left. \frac{\partial T}{\partial \chi} \right|'_{SchüE} \dot{\chi}'_{SchüE} = a_0 \frac{1 + C'_{SchüE} g'_{Schü}}{a'_{SchüE} B'_{SchüE}}, \\ \dot{r}'_{SchüE} &= \left. \frac{\partial r}{\partial t} \right|'_{SchüE} \dot{t}'_{SchüE} + \left. \frac{\partial r}{\partial \chi} \right|'_{SchüE} \dot{\chi}'_{SchüE} = a_0 \frac{C'_{SchüE} + g'_{Schü}}{a'_{SchüE}},\end{aligned}\quad (3.86)$$

avec $C'_{SchüE} = C_{Schü}(t'_{SchüE})$ et $B'_{SchüE} = B_{Schü}(t'_{SchüE})$ (3.12).

On définit γ'_{KE} comme le plus petit angle de coordonnée entre la direction du photon α'_E et la direction dirigée vers la lentille en le point de sortie du photon de la sphère de Schücking. On montre que

$$\gamma'_{KE} = \arctan \left| r_{SchüE'} \frac{\dot{\varphi}'_{SchüE}}{\dot{r}'_{SchüE}} \right| = \arctan \frac{\chi'_P}{\chi_{Schü}(C'_{SchüE} + g'_{Schü})}. \quad (3.87)$$

3.2.2 Géodésiques de la lumière à l'intérieur de la sphère de Schücking

Pour intégrer la trajectoire du photon α_E à l'intérieur de la sphère de Schücking nous avons besoin des symboles de Christoffel de la métrique de Kottler dans le plan $\theta = \pi/2$, déjà calculés dans le premier chapitre (1.23),

$$\begin{aligned}\Gamma_{Tr}^T &= \Gamma_{rT}^T = -\Gamma_{rr}^r = \frac{B'(r)}{2B(r)}, & \Gamma_{TT}^r &= B(r)B'(r)/2, \\ \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi r}^\varphi = 1/r, & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -rB(r).\end{aligned}\tag{3.88}$$

Il en découle les mêmes équations de la géodésique (1.39), (1.40) et (1.41) (en remplaçant t par T)

$$\begin{aligned}\ddot{T} + \frac{B'(r)}{B(r)} \dot{T}\dot{r} &= 0, \\ \ddot{r} + \frac{1}{2}B(r)B'(r)\dot{T}^2 - \frac{1}{2}\frac{B'(r)}{B(r)}\dot{r}^2 - rB(r)\dot{\varphi}^2 &= 0, \\ \ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} &= 0,\end{aligned}\tag{3.89}$$

qui s'intègrent partiellement pour donner des expressions analogues à (1.44), (1.45), (1.52), (1.56) et (1.55),

$$\dot{T} = \frac{1}{B(r)}, \quad \dot{r} = \pm \sqrt{1 - \frac{r_P^2}{r^2} \frac{B(r)}{B(r_P)}}, \quad \dot{\varphi} = \frac{r_P}{r^2 \sqrt{B(r_P)}},\tag{3.90}$$

où r_P est le péri-lens, distance d'approche minimale du photon α_E . Ce péri-lens peut être approximé par

$$r_P \simeq r_{SchüE} \sin \gamma_{KE} - GM,\tag{3.91}$$

qui s'obtient en développant le petit angle de coordonnée γ_{KE} (3.85) au premier ordre en le rapport de rayon de Schwarzschild au péri-lens $2GM/r_P$ ($\simeq 10^{-5}$), en utilisant les expressions de \dot{r} et de $\dot{\varphi}$ (3.90).

Nous avons une expression identique à (1.88),

$$d\varphi = \pm \frac{dr}{u(r)}, \quad u(r) = r \sqrt{\frac{r^2}{r_P^2} - 1} \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_P} \left(\frac{r_P}{r} + \frac{r}{r + r_P} \right)}, \quad (3.92)$$

qui peut être utilisée pour déterminer l'angle que fait le photon α_E du point d'entrée dans la vacuole au point de sortie. En effet, l'intégrale du membre de droite de (3.92) peut se décomposer en deux intégrales, sachant que $d\varphi/dr$ est positif sur le trajet de r_P à $r_{SchüE}$ et est négatif de $r_{SchüS}$ à r_P ,

$$\varphi_{SchüE} - \varphi_{SchüS} = \int_{r_P}^{r_{SchüE}} \frac{dr}{u(r)} + \int_{r_P}^{r_{SchüS}} \frac{dr}{u(r)}. \quad (3.93)$$

L'expression précédente s'intègre facilement, en utilisant les intégrales (1.90), pour donner au premier ordre en $2GM/r_P$

$$\begin{aligned} \varphi_{SchüS} \simeq \varphi_{SchüE} - \pi + \arcsin \frac{r_P}{r_{SchüE}} + \arcsin \frac{r_P}{r_{SchüS}} - \frac{GM}{r_P} & \left(\sqrt{1 - \frac{r_P^2}{r_{SchüE}^2}} + \right. \\ & \left. \sqrt{1 - \frac{r_P^2}{r_{SchüS}^2}} + \sqrt{\frac{r_{SchüE} - r_P}{r_{SchüE} + r_P}} + \sqrt{\frac{r_{SchüS} - r_P}{r_{SchüS} + r_P}} \right), \end{aligned} \quad (3.94)$$

où $\varphi_{SchüE}$ est donné par (3.62). Remarquons que pour calculer l'angle $\varphi_{SchüS}$ nous avons besoin de déterminer $r_{SchüS}$, ce qui revient à déterminer le facteur d'échelle $a_{SchüS}$ au point d'entrée dans la vacuole et donc déterminer le temps $t_{SchüS}$ de Friedmann.

Nous avons également une expression identique à (1.104) (en remplaçant t par T),

$$dT = \pm \frac{dr}{v(r)}, \quad v(r) = \frac{B(r)}{\sqrt{B(r_P)}} \sqrt{1 - \frac{r_P^2}{r^2}} \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_P} \left(\frac{r_P}{r} + \frac{r}{r + r_P} \right)}. \quad (3.95)$$

Pour déterminer le temps de trajet du photon α_E du point d'entrée dans la vacuole au point de sortie, nous utilisons le fait que dT/dr est négatif de $r_{SchüS}$ à r_P , et est positif sur le trajet de r_P à $r_{SchüE}$, (la même remarque vaut également pour le chemin du bas:

dT/dr est positif sur le trajet de r'_P à $r'_{SchüE}$, et est négatif de $r'_{SchüS}$ à r'_P). Il s'ensuit que l'intégrale du membre de droite de (3.95) se décompose comme suit

$$T_{SchüE} - T_{SchüS} = \int_{r_P}^{r(t_{SchüE})} \frac{dr}{v(r)} + \int_{r_P}^{r(t_{SchüS})} \frac{dr}{v(r)}. \quad (3.96)$$

On peut dériver une autre expression pour ce temps de trajet $T_{SchüE} - T_{SchüS}$ en utilisant (3.34),

$$T_{SchüE} - T_{SchüS} = \int_{t_{SchüS}}^{t_{SchüE}} \frac{dt}{B_{Schü}(t)}. \quad (3.97)$$

En combinant (3.96) et (3.97), en sachant que $r(t_{Schü}) = a(t_{Schü})\chi_{Schü}$, on obtient

$$\int_{t_{SchüS}}^{t_{SchüE}} \frac{dt}{B_{Schü}(t)} - \int_{r_P}^{a(t_{SchüS})\chi_{Schü}} \frac{dr}{v(r)} = \int_{r_P}^{a(t_{SchüE})\chi_{Schü}} \frac{dr}{v(r)}. \quad (3.98)$$

On ajuste alors numériquement la valeur de $t_{SchüS}$ de telle manière à assurer l'égalité des deux membres de la relation précédente, en utilisant bien entendu la solution exacte pour le facteur d'échelle, (3.38), et l'expression approchée pour le péri-lens r_P , (3.91).

De même, pour le photon α'_E , le péri-lens s'écrit à l'ordre $2GM/r'_P$ comme

$$r'_P \simeq r'_{SchüE} \sin \gamma'_{KE} - GM. \quad (3.99)$$

Pour déterminer l'angle que fait le photon α'_E du point d'entrée dans la vacuole au point de sortie, nous suivons le même raisonnement que pour le photon α_E , en faisant usage de l'expression (3.92) et en tenant compte du fait que $d\varphi/dr$ est positif sur le trajet de $r'_{SchüS}$ à r'_P et est négatif de r'_P à $r'_{SchüE}$. Il vient que

$$\varphi'_{SchüS} - \varphi'_{SchüE} = \int_{r'_P}^{r'_{SchüE}} \frac{dr}{u'(r)} + \int_{r'_P}^{r'_{SchüS}} \frac{dr}{u'(r)}, \quad (3.100)$$

où la fonction $u'(r)$ est définie par une expression analogue à (3.92) à condition que r_P soit

remplacé par r'_P ,

$$u'(r) = \pm \frac{dr}{d\varphi} = r \sqrt{\frac{r^2}{r_P'^2} - 1} \sqrt{1 - \frac{2GM}{r'_P} \left(\frac{r'_P}{r} + \frac{r}{r + r'_P} \right)}. \quad (3.101)$$

Nous obtenons alors au premier ordre en $2GM/r'_P$

$$\begin{aligned} \varphi'_{SchüS} \simeq \varphi'_{SchüE} + \pi - \arcsin \frac{r'_P}{r'_{SchüE}} - \arcsin \frac{r'_P}{r'_{SchüS}} + \frac{GM}{r'_P} \left(\sqrt{1 - \frac{r_P'^2}{r_{SchüE}'^2}} + \right. \\ \left. \sqrt{1 - \frac{r_P'^2}{r_{SchüS}'^2}} + \sqrt{\frac{r'_{SchüE} - r'_P}{r'_{SchüE} + r'_P}} + \sqrt{\frac{r'_{SchüS} - r'_P}{r'_{SchüS} + r'_P}} \right). \end{aligned} \quad (3.102)$$

Le temps $t'_{SchüS}$ est déterminé en combinant les deux équations

$$T'_{SchüE} - T'_{SchüS} = \int_{r'_P}^{r(t'_{SchüE})} \frac{dr}{v'(r)} + \int_{r'_P}^{r(t'_{SchüS})} \frac{dr}{v'(r)}, \quad (3.103)$$

$$T'_{SchüE} - T'_{SchüS} = \int_{t'_{SchüS'}}^{t'_{SchüE}} \frac{dt}{B_{Schü}(t)}, \quad (3.104)$$

qui s'obtiennent respectivement en faisant usage de (3.95) et de (3.34), où la fonction $v'(r)$ est définie par une expression analogue à (3.95) à condition que r_P soit remplacé par r'_P ,

$$v'(r) = \pm \frac{dr}{dT} = \frac{B(r)}{\sqrt{B(r'_P)}} \sqrt{1 - \frac{r_P'^2}{r^2}} \sqrt{1 - \frac{2GM}{r'_P} \left(\frac{r'_P}{r} + \frac{r}{r + r'_P} \right)}, \quad (3.105)$$

ce qui donne

$$\int_{t'_{SchüS}}^{t'_{SchüE}} \frac{dt}{B_{Schü}(t)} - \int_{r'_P}^{a(t'_{SchüS})\chi_{Schü}} \frac{dr}{v'(r)} = \int_{r'_P}^{a(t'_{SchüE})\chi_{Schü}} \frac{dr}{v'(r)}. \quad (3.106)$$

Le temps $t'_{SchüS}$ est déterminé numériquement en ajustant sa valeur de telle manière à assurer l'égalité précédente.

Le temps $t'_{SchüS}$ peut également être calculé en termes de $t_{SchüS}$ via une expression

analytique approchée. Pour cela, on procède comme suit: On a, en utilisant (3.34),

$$\begin{aligned} T_{SchüE} - T'_{SchüE} &= \int_{t'_{SchüE}}^{t_{SchüE}} \frac{dt}{B_{Schü}(t)} \simeq \frac{t_{SchüE} - t'_{SchüE}}{B_{SchüE}}, \\ T_{SchüS} - T'_{SchüS} &= \int_{t'_{SchüS}}^{t_{SchüS}} \frac{dt}{B_{Schü}(t)} \simeq \frac{t_{SchüS} - t'_{SchüS}}{B_{SchüS}}, \end{aligned} \quad (3.107)$$

où on a utilisé le fait que le $B_{Schü}$ ne varie de manière significative que sur des échelles de temps cosmologiques avec $B_{SchüS} = B_{Schü}(t_{SchüS})$. On en déduit que

$$T_{SchüE} - T'_{SchüE} - (T_{SchüS} - T'_{SchüS}) \simeq \frac{t_{SchüE} - t'_{SchüE}}{B_{SchüE}} - \frac{t_{SchüS} - t'_{SchüS}}{B_{SchüS}}. \quad (3.108)$$

L'expression (3.103) peut être décomposée selon

$$T'_{SchüE} - T'_{SchüS} = \int_{r'_P}^{r_{SchüE}} \frac{dr}{v'(r)} + \int_{r'_P}^{r_{SchüS}} \frac{dr}{v'(r)} - \left(\int_{r'_{SchüE}}^{r_{SchüE}} \frac{dr}{v'(r)} + \int_{r'_{SchüS}}^{r_{SchüS}} \frac{dr}{v'(r)} \right). \quad (3.109)$$

On peut écrire

$$\int_{r'_{SchüE}}^{r_{SchüE}} \frac{dr}{v'(r)} = \frac{r_{SchüE} - r'_{SchüE}}{v'_{SchüE}}, \quad (3.110)$$

$$\int_{r'_{SchüS}}^{r_{SchüS}} \frac{dr}{v'(r)} = \frac{r_{SchüS} - r'_{SchüS}}{v'_{SchüS}}, \quad (3.111)$$

en utilisant toujours le fait que $v'(r)^{-1}$ ne varie de manière appréciable que sur des échelles cosmologiques avec $v'_{SchüE} = v'(r_{SchüE})$ et $v'_{SchüS} = v'(r_{SchüS})$. Ceci d'une part. D'autre part, nous avons, en intégrant l'équation de Friedmann

$$\begin{aligned} a_{SchüE} - a'_{SchüE} &= \int_{t'_{SchüE}}^{t_{SchüE}} f(a) dt \simeq f_{SchüE}(t_{SchüE} - t'_{SchüE}), \\ a_{SchüS} - a'_{SchüS} &= \int_{t'_{SchüS}}^{t_{SchüS}} f(a) dt \simeq f_{SchüS}(t_{SchüS} - t'_{SchüS}), \end{aligned} \quad (3.112)$$

avec $f_{SchüE} = f(a_{SchüE})$ et $f_{SchüS} = f(a_{SchüS})$. Alors les expressions (3.110) et (3.111) se

transforment, sachant que $r = a\chi_{Schü}$, en

$$\begin{aligned}\int_{r_{SchüE}}^{r'_{SchüE}} \frac{dr}{v'(r)} &= \frac{\chi_{Schü}}{v'_{SchüE}} f_{SchüE} (t'_{SchüE} - t_{SchüE}), \\ \int_{r_{SchüS}}^{r'_{SchüS}} \frac{dr}{v'(r)} &= \frac{\chi_{Schü}}{v'_{SchüS}} f_{SchüS} (t'_{SchüS} - t_{SchüS}).\end{aligned}\quad (3.113)$$

En substituant dans (3.109), puis en faisant la différence avec (3.96), on obtient compte tenu du résultat (3.108),

$$\begin{aligned}\frac{t_{SchüE} - t'_{SchüE}}{B_{SchüE}} - \frac{t_{SchüS} - t'_{SchüS}}{B_{SchüS}} &= \frac{f_{SchüE} \chi_{Schü}}{v'_{SchüE}} (t_{SchüE} - t'_{SchüE}) + \\ &\frac{f_{SchüS} \chi_{Schü}}{v'_{SchüS}} (t_{SchüS} - t'_{SchüS}) + \\ &\Delta T_K,\end{aligned}\quad (3.114)$$

avec

$$\Delta T_K = \int_{r_P}^{r_{SchüE}} \frac{dr}{v(r)} + \int_{r_P}^{r_{SchüS}} \frac{dr}{v(r)} - \left(\int_{r'_P}^{r_{SchüE}} \frac{dr}{v'(r)} + \int_{r'_P}^{r_{SchüS}} \frac{dr}{v'(r)} \right). \quad (3.115)$$

On peut interpréter l'intégrale ΔT_K comme la différence des temps de trajet entre le photon α_E et un photon imaginaire partant du même point que le photon α_E , $r_{SchüS}$, dévié par la lentille au péri-lens r'_P et enfin arrivant au même point que le photon α_E , $r_{SchüE}$. Cette intégrale peut être calculée à partir d'une intégrale quasiment identique à une intégrale intervenant dans l'expression du temps de retard dans le cadre de la métrique de Kottler (1.119). Il suffit de remplacer dans (1.119) r_E par $r_{SchüE}$ et r_S par $r_{SchüS}$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\Delta T_K \simeq &\frac{r_P'^2 - r_P^2}{2} \left(\frac{1}{r_{SchüE}} + \frac{1}{r_{SchüS}} \right) + 4GM \ln \frac{r'_P}{r_P} - 3 \left(\frac{2GM}{r_P} \right)^2 \frac{r_P'^2 - r_P^2}{8r_P'^2} \times \\ &\sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \left[\operatorname{arctanh} \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} r_{SchüE} \right) + \operatorname{arctanh} \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} r_{SchüS} \right) \right].\end{aligned}\quad (3.116)$$

On tire de (3.114) l'expression de $t'_{SchüS} - t_{SchüS}$,

$$t'_{SchüS} - t_{SchüS} = \frac{\Delta T_K + \left(\frac{f_{SchüE} \chi_{Schü}}{v'_{SchüE}} - \frac{1}{B_{SchüE}} \right) (t_{SchüE} - t'_{SchüE})}{\frac{f_{SchüS} \chi_{Schü}}{v'_{SchüS}} + \frac{1}{B_{SchüS}}}. \quad (3.117)$$

Ainsi, la connaissance de $t_{SchüS}$ permet de déduire $t'_{SchüS}$ où $t_{SchüE} - t'_{SchüE}$ est donné par (3.74). Il convient aussi de remarquer que le photon du chemin du bas pénètre dans la vacuole après celui du chemin du haut, mais quitte la vacuole le premier. Certes, cela est dû au fait que le photon du chemin du haut subit plus fortement l'effet gravitationnel puisqu'il passe le plus près de la lentille ($r_P < r'_P$) comme montré sur la Fig. 3-1.

La 4-vitesse au point d'entrée du photon dans la sphère de Schücking est définie en coordonnées de Schwarzschild, d'après l'expression (3.90), comme

$$\dot{T}_{SchüS} = \frac{1}{B_{SchüS}}, \quad \dot{r}_{SchüS} = -\sqrt{1 - \frac{r_P^2 B_{SchüS}}{r_{SchüS}^2 B(r_P)}}, \quad \dot{\varphi}_{SchüS} = \frac{r_P}{r_{SchüS}^2 \sqrt{B(r_P)}}, \quad (3.118)$$

où on a retenu le signe moins pour la vitesse radiale $\dot{r}_{SchüS}$, puisque dans cette région r diminue au cours du temps lorsque le photon α_E se rapproche de la lentille et le signe plus pour la vitesse angulaire $\dot{\varphi}_{SchüS}$ puisque l'angle φ croît avec le temps. En utilisant le Jacobien (3.28), la 4-vitesse s'écrit dans les coordonnées de Friedmann comme

$$\begin{aligned} \dot{t}_{SchüS} &= \frac{\partial t}{\partial T} \Big|_{SchüS} \dot{T}_{SchüS} + \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{SchüS} \dot{r}_{SchüS} \\ &= \frac{1}{B_{SchüS}} \left(1 + C_{SchüS} \sqrt{1 - \frac{r_P^2 B_{SchüS}}{r_{SchüS}^2 B(r_P)}} \right), \\ \dot{\chi}_{SchüS} &= \frac{\partial \chi}{\partial T} \Big|_{SchüS} \dot{T}_{SchüS} + \frac{\partial \chi}{\partial r} \Big|_{SchüS} \dot{r}_{SchüS} \\ &= \frac{-1}{a_{SchüS} B_{SchüS}} \left(C_{SchüS} + \sqrt{1 - \frac{r_P^2 B_{SchüS}}{r_{SchüS}^2 B(r_P)}} \right). \end{aligned} \quad (3.119)$$

Pour le photon α'_E , la 4-vitesse au point d'entrée dans la sphère de Schücking est

$$\dot{T}'_{SchüS} = \frac{1}{B'_{SchüS}}, \quad \dot{r}'_{SchüS} = -\sqrt{1 - \frac{r'^2_P B'_{SchüS}}{r'^2_{SchüS} B(r'_P)}}, \quad \dot{\varphi}'_{SchüS} = -\frac{r'_P}{r'^2_{SchüS} \sqrt{B(r'_P)}}, \quad (3.120)$$

en coordonnées de Schwarzschild où les signes moins viennent du fait que r et φ décroissent au cours du temps lorsque le photon se rapproche de la lentille. Cette 4-vitesse s'écrit dans les coordonnées de Friedmann, grâce au Jacobien (3.28), comme

$$\begin{aligned} \dot{t}'_{SchüS} &= \frac{\partial t}{\partial T} \Big|_{SchüS} \dot{T}'_{SchüS} + \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{SchüS} \dot{r}'_{SchüS} \\ &= \frac{1}{B'_{SchüS}} \left(1 + C'_{SchüS} \sqrt{1 - \frac{r'^2_P B'_{SchüS}}{r'^2_{SchüS} B(r'_P)}} \right), \\ \dot{\chi}'_{SchüS} &= \frac{\partial \chi}{\partial T} \Big|_{SchüS} \dot{T}'_{SchüS} + \frac{\partial \chi}{\partial r} \Big|_{SchüS} \dot{r}'_{SchüS} \\ &= \frac{-1}{a'_{SchüS} B'_{SchüS}} \left(C'_{SchüS} + \sqrt{1 - \frac{r'^2_P B'_{SchüS}}{r'^2_{SchüS} B(r'_P)}} \right). \end{aligned} \quad (3.121)$$

On définit au point d'entrée dans la sphère de Schücking l'angle γ_{FS} comme le plus petit angle physique entre la direction du photon α_E et la direction dirigée vers la lentille,

$$\begin{aligned} \gamma_{FS} &= \arctan \left| \chi_{Schü} \frac{\dot{\varphi}'_{SchüS}}{\dot{\chi}'_{SchüS}} \right| \\ &= \arctan \left[\frac{r_P B_{SchüS}}{r_{SchüS} \sqrt{B(r_P)}} \left(C_{SchüS} + \sqrt{1 - \frac{r^2_P B_{SchüS}}{r^2_{SchüS} B(r_P)}} \right)^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (3.122)$$

On définit au point d'entrée dans la sphère de Schücking l'angle γ'_{FS} comme le plus

petit angle physique entre la direction du photon α'_E et la direction dirigée vers la lentille,

$$\begin{aligned}\gamma'_{FS} &= \arctan \left| \chi_{Schü} \frac{\dot{\varphi}'_{SchüS}}{\dot{\chi}'_{SchüS}} \right| \\ &= \arctan \left[\frac{r'_P B'_{SchüS}}{r'_{SchüS} \sqrt{B(r'_P)}} \left(C'_{SchüS} + \sqrt{1 - \frac{r'^2_P B'_{SchüS}}{r'^2_{SchüS} B(r'_P)}} \right)^{-1} \right].\end{aligned}\quad (3.123)$$

3.2.3 Géodésiques de la lumière entre la source et la sphère de Schücking

Ici, on s'intéresse à la région qui contient la source. Dans le triangle formé par la source, la lentille et le point d'entrée dans la sphère de Schücking, nous avons la relation

$$\frac{\sin \alpha_S}{\chi_{Schü}} = \frac{\sin(\pi - \gamma_{FS})}{\chi_{L,S}},\quad (3.124)$$

où $\chi_{L,S}$ est la distance géodésique entre la lentille et la source, approximée par

$$\chi_{L,S} = \chi_S - \chi_L,\quad (3.125)$$

du fait que l'angle de déflexion $-\varphi_S$ est de l'ordre de quelques secondes d'arc ($\simeq 10^{-5}$). Ceci d'une part. D'autre part, comme il est bien connu, la somme des angles d'un triangle vaut π . Il en résulte que

$$\alpha_S = \varphi_S - \varphi_{SchüS} + \gamma_{FS}.\quad (3.126)$$

En reportant dans (3.124), on obtient une expression pour l'angle φ_S ,

$$\varphi_S = \varphi_{SchüS} + \arcsin \frac{\chi_{Schü} \sin \gamma_{FS}}{\chi_{L,S}} - \gamma_{FS}.\quad (3.127)$$

En procédant de manière similaire à celle utilisée pour obtenir l'expression de φ_S , on obtient pour φ'_S l'expression

$$\varphi'_S = \varphi'_{SchüS} - \arcsin \frac{\chi_{Schü} \sin \gamma'_{FS}}{\chi_{L,S}} + \gamma'_{FS}.\quad (3.128)$$

On peut aussi déterminer l'angle φ_S autrement sans utiliser des propriétés de la géométrie d'Euclide (espace plat). Cette technique de calcul nous servira plus tard pour les modèles non plats. On intègre de façon analogue à la partie Terre-sphère de Schücking les deux équations de la géodésique

$$\ddot{t} + aa_t(\dot{\chi}^2 + \chi^2\dot{\varphi}^2) = 0, \quad (3.129)$$

$$\ddot{\varphi} + 2\left(\frac{a_t}{a}\dot{t} + \frac{\dot{\chi}}{\chi}\right)\dot{\varphi} = 0, \quad (3.130)$$

entre la sphère de Schücking et la source, avec les conditions finales au point d'entrée dans la sphère de Schücking,

$$\begin{aligned} t &= t_{SchüS}, & \chi &= \chi_{Schü}, & \varphi &= \varphi_{SchüS}, \\ \dot{t} &= \dot{t}_{SchüS}, & \dot{\chi} &= \dot{\chi}_{SchüS}, & \dot{\varphi} &= \dot{\varphi}_{SchüS}, \end{aligned} \quad (3.131)$$

où le temps $t_{SchüS}$ s'obtient par intégration numérique de l'équation (3.98), $\dot{t}_{SchüS}$, $\varphi_{SchüS}$ et $\dot{\varphi}_{SchüS}$ sont donnés par (3.119), (3.94) et (3.118) respectivement. En remplaçant (3.45) dans l'équation (3.129), avec $a_t = \dot{a}/\dot{t}$, on obtient

$$\ddot{t}/\dot{t} = -\dot{a}/a, \quad (3.132)$$

ou encore

$$\frac{d}{dp} \ln \dot{t} = \frac{d}{dp} \ln \frac{1}{a}. \quad (3.133)$$

D'où, par intégration de (3.133),

$$\dot{t} = E/a, \quad (3.134)$$

avec E une constante définie par

$$E = \dot{t}_{SchüS} a_{SchüS} = \frac{a_{SchüS}}{B_{SchüS}} \left(1 + C_{SchüS} \sqrt{1 - \frac{r_P^2 B_{SchüS}}{r_{SchüS}^2 B(r_P)}} \right), \quad (3.135)$$

où on a tenu compte des conditions finales (3.131). L'équation (3.130) peut s'écrire comme

$$\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} = -2 \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\chi}}{\chi} \right), \quad (3.136)$$

ou encore

$$\frac{d}{dp} \ln \dot{\varphi} = \frac{d}{dp} \ln \frac{1}{a^2 \chi^2}. \quad (3.137)$$

L'équation (3.137) s'intègre, en tenant compte des conditions finales (3.131), pour donner

$$\dot{\varphi} = \frac{J}{a^2 \chi^2}, \quad (3.138)$$

avec J une constante définie par

$$J = \dot{\varphi}_{Schüs} r_{Schüs}^2 = r_P / \sqrt{B(r_P)}. \quad (3.139)$$

En remplaçant \dot{t} par son expression, (3.134), dans (3.45), on trouve

$$a^2 = E / \sqrt{\dot{\chi}^2 + \chi^2 \dot{\varphi}^2}. \quad (3.140)$$

En reportant ce résultat (3.140) dans l'expression (3.138), il vient que

$$\sqrt{1 - \left(\frac{J/E}{\chi} \right)^2} \dot{\varphi} = - \frac{J/E}{\chi} \frac{\dot{\chi}}{\chi}, \quad (3.141)$$

où on a tenu compte du fait que la distance géodésique χ diminue au fur et à mesure que l'angle φ augmente. L'équation (3.141) peut s'écrire aussi comme

$$\frac{d\varphi}{dp} = \frac{d}{dp} \frac{J/E}{\chi} / \sqrt{1 - \left(\frac{J/E}{\chi} \right)^2}. \quad (3.142)$$

En tenant compte des conditions finales (3.131), l'équation (3.142) s'intègre en

$$\varphi = \varphi_{SchüS} + \arcsin \frac{J/E}{\chi} - \gamma, \quad (3.143)$$

avec γ une constante donnée par

$$\gamma = \arcsin \frac{J/E}{\chi_{Schü}}. \quad (3.144)$$

Par conséquent, l'angle φ_S est donné par l'expression

$$\varphi_S = \varphi_{SchüS} + \arcsin \frac{J/E}{\chi_{L,S}} - \gamma. \quad (3.145)$$

On peut facilement vérifier que les deux expressions de φ_S , (3.127) et (3.145), sont équivalentes,

$$J/E \equiv \chi_{Schü} \sin \gamma_{FS}, \quad \gamma \equiv \gamma_{FS}. \quad (3.146)$$

Pour intégrer la trajectoire du chemin du bas, on suit le même raisonnement que pour le chemin du haut. Seules les conditions finales diffèrent avec J remplacé par $-J'$,

$$\begin{aligned} t &= t'_{SchüS}, & \chi &= \chi_{Schü}, & \varphi &= \varphi'_{SchüS}, \\ \dot{t} &= \dot{t}'_{SchüS}, & \dot{\chi} &= \dot{\chi}'_{SchüS}, & \dot{\varphi} &= \dot{\varphi}'_{SchüS}. \end{aligned} \quad (3.147)$$

On trouve

$$\dot{t} = E'/a, \quad \dot{\varphi} = -\frac{J'}{a^2 \chi^2}, \quad \varphi = \varphi'_{SchüS} - \arcsin \frac{J'/E'}{\chi} + \gamma', \quad (3.148)$$

avec E' , J' et γ' des constantes définies par

$$\begin{aligned}
E' &= \dot{t}'_{Schüs} a'_{Schüs} = \frac{a'_{Schüs}}{B'_{Schüs}} \left(1 + C'_{Schüs} \sqrt{1 - \frac{r'_P{}^2 B'_{Schüs}}{r'_{Schüs}{}^2 B(r'_P)}} \right) \\
J' &= -\dot{\varphi}'_{Schüs} r'^2_{Schüs} = r'_P / \sqrt{B(r'_P)}, \\
\gamma' &= \arcsin \frac{J'/E'}{\chi_{Schü}}.
\end{aligned} \tag{3.149}$$

D'où, l'expression de φ'_S ,

$$\varphi'_S = \varphi'_{Schüs} - \arcsin \frac{J'/E'}{\chi_{L,S}} + \gamma', \tag{3.150}$$

qui est équivalente à (3.128),

$$J'/E' \equiv \chi_{Schü} \sin \gamma'_{FS}, \quad \gamma \equiv \gamma'_{FS}. \tag{3.151}$$

Les angles φ_S et φ'_S doivent être égaux du fait que les deux photons sont émis par la même source. Parmi tous les paramètres intervenant dans le calcul de ces angles, l'égalité $\varphi_S = \varphi'_S$ ne peut être assurée que pour une valeur particulière de la masse, comme nous allons voir dans la prochaine section. Une fois la masse correcte déterminée, nous pourrions passer au calcul du temps de retard.

3.2.3.1 Temps de retard

Dans cette partie, on cherche à calculer le temps de retard, c'est-à-dire à déterminer la différence des temps de vol des photons α_E et α'_E définie par

$$\Delta t = (t_E - t_S) - (t'_E - t'_S) = t'_S - t_S, \tag{3.152}$$

où on a tenu compte du fait que les deux photons arrivent sur Terre au même instant, $t_E = t'_E = 0$. Ceci est équivalent à déterminer les temps d'émission t_S et t'_S des deux

photons α_E et α'_E ,

$$t_S = t(\chi_{S,Schüs}), \quad t'_S = t(\chi'_{S,Schüs}), \quad (3.153)$$

par intégration de l'équation (2.33), $d\chi/dt = -1/a$, avec les conditions

$$\chi(t_{Schüs}) = 0, \quad \chi(t'_{Schüs}) = 0, \quad (3.154)$$

où $\chi_{S,Schüs}$ et $\chi'_{S,Schüs}$ sont respectivement les distances entre la source et chacun des points d'entrée dans la sphère de Schücking. On peut démontrer que ces distances s'écrivent en termes de $\chi_{L,S}$, $\chi_{Schü}$, $\varphi_{Schüs}$, $\varphi'_{Schüs}$, et φ_S comme

$$\begin{aligned} \chi_{S,Schüs} &= \chi(t_S) = \sqrt{\chi_{L,S}^2 + \chi_{Schü}^2 - 2\chi_{L,S}\chi_{Schü} \cos(\varphi_{Schüs} - \varphi_S)}, \\ \chi'_{S,Schüs} &= \chi(t'_S) = \sqrt{\chi_{L,S}^2 + \chi_{Schü}^2 - 2\chi_{L,S}\chi_{Schü} \cos(\varphi'_{Schüs} - \varphi_S)}. \end{aligned} \quad (3.155)$$

Le temps t'_S peut se calculer en termes de t_S via une expression analytique approchée. Pour cela, on procède comme suit: Dans l'approximation $\varphi_{Schüs} - \varphi_S \ll 1$ et $|\varphi'_{Schüs} - \varphi_S| \ll 1$ ($\simeq 10^{-2}$), les distances $\chi_{S,Schüs}$ et $\chi'_{S,Schüs}$ peuvent s'écrire comme

$$\begin{aligned} \chi_{S,Schüs} &\simeq \chi_{L,S} - \chi_{Schü} + \frac{1}{2} \frac{(\varphi_{Schüs} - \varphi_S)^2}{\chi_{Schü}^{-1} - \chi_{L,S}^{-1}}, \\ \chi'_{S,Schüs} &\simeq \chi_{L,S} - \chi_{Schü} + \frac{1}{2} \frac{(\varphi'_{Schüs} - \varphi_S)^2}{\chi_{Schü}^{-1} - \chi_{L,S}^{-1}}. \end{aligned} \quad (3.156)$$

Ceci d'une part. D'autre part, nous avons grâce à la relation (2.33), $d\chi/dt = -1/a$,

$$\begin{aligned} \chi_{S,Schüs} &= - \int_{t_{Schüs}}^{t_S} \frac{dt}{a(t)} = - \int_{t'_S}^{t_S} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_{Schüs}}^{t'_S} \frac{dt}{a(t)}, \\ \chi'_{S,Schüs} &= - \int_{t'_{Schüs}}^{t'_S} \frac{dt}{a(t)}. \end{aligned} \quad (3.157)$$

D'où

$$\chi'_{S,Schüs} - \chi_{S,Schüs} = \int_{t_{Schüs}}^{t'_{Schüs}} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_S}^{t'_S} \frac{dt}{a(t)} \simeq \frac{t'_{Schüs} - t_{Schüs}}{a_{Schüs}} - \frac{t'_S - t_S}{a_S}, \quad (3.158)$$

où on a utilisé le fait que a ne varie de façon significative que sur des échelles de temps cosmologiques avec $a_S = a(t_S)$. Par conséquent, on obtient, compte tenu de (3.156), l'expression du temps de retard du photon α_E par rapport au photon α'_E ,

$$\Delta t = t'_S - t_S \simeq a_S \left[\frac{t'_{Schüs} - t_{Schüs}}{a_{Schüs}} - \frac{1}{2} \frac{(\varphi'_{Schüs} - \varphi_S)^2 - (\varphi_{Schüs} - \varphi_S)^2}{\chi_{Schüs}^{-1} - \chi_{L,S}^{-1}} \right], \quad (3.159)$$

où $t'_{Schüs} - t_{Schüs}$ est donné par (3.117).

Comme attendu, on peut facilement vérifier que si $\alpha_E = \alpha'_E$, l'angle de déflexion $-\varphi_S$ et le temps de retard s'annulent pour des raisons de symétrie.

Comme précédemment, on peut déterminer les temps t_S et t'_S en procédant de manière différente, sans utiliser les propriétés de la géométrie d'Euclide (3.155). De (3.143) on tire l'expression de χ ,

$$\chi = \frac{J/E}{\sin(\varphi - \gamma)}. \quad (3.160)$$

D'où, par dérivation de (3.160), l'expression

$$d\chi = -\frac{J \cos(\varphi - \gamma)}{E \sin^2(\varphi - \gamma)} d\varphi. \quad (3.161)$$

En remplaçant (3.160) et (3.161) dans (3.78), on obtient

$$\frac{dt}{a} = \frac{J}{E} \frac{d\varphi}{\sin^2(\varphi - \gamma)}, \quad (3.162)$$

où on a tenu compte que pour la trajectoire du haut φ augmente au cours du temps. On

trouve par intégration de l'équation (3.162),

$$\begin{aligned}
\int_{t_S}^{t_{Schüs}} \frac{dt}{a} &= \chi_{S,Schüs} \\
&= \frac{J}{E} \int_{\varphi_S}^{\varphi_{Schüs}} \frac{d\varphi}{\sin^2(\varphi - \gamma)} \\
&= \frac{J}{E} [\cot(\varphi_S - \gamma) - \cot(\varphi_{Schüs} - \gamma)] \\
&= \sqrt{\chi_{L,S}^2 - (J/E)^2} - \sqrt{\chi_{Schü}^2 - (J/E)^2}, \tag{3.163}
\end{aligned}$$

où on a remplacé l'angle φ_S et la constante γ par leurs expressions, (3.145) et (3.144). On remarque que comme prévu, on a obtenu un résultat similaire à (3.80) à condition que χ_L et χ_P soient respectivement remplacés par $\chi_{L,S}$ et J/E . Le même raisonnement donne pour le chemin du bas

$$\int_{t'_S}^{t'_{Schüs}} \frac{dt}{a} = \chi'_{S,Schüs} = \sqrt{\chi_{L,S}^2 - (J'/E')^2} - \sqrt{\chi_{Schü}^2 - (J'/E')^2}. \tag{3.164}$$

Finalement, les équations obtenues (3.163) et (3.164) nous fournissent respectivement les temps t_S et t'_S par intégration numérique de chacun des deux membres de gauche.

Dans l'approximation $\varphi_{Schüs} - \varphi_S \ll 1$ et $|\varphi'_{Schüs} - \varphi_S| \ll 1$ ($\simeq 10^{-2}$), on a

$$(J/E)^2 \simeq \left(\frac{\varphi_{Schüs} - \varphi_S}{\chi_{Schü}^{-1} - \chi_{L,S}^{-1}} \right)^2, \tag{3.165}$$

$$(J'/E')^2 \simeq \left(\frac{\varphi'_{Schüs} - \varphi_S}{\chi_{Schü}^{-1} - \chi_{L,S}^{-1}} \right)^2. \tag{3.166}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\int_{t_S}^{t_{Schüs}} \frac{dt}{a} &\simeq \chi_{L,S} - \chi_{Schü} + \frac{1}{2} \frac{(\varphi_{Schüs} - \varphi_S)^2}{\chi_{Schü}^{-1} - \chi_{L,S}^{-1}}, \\
\int_{t'_S}^{t'_{Schüs}} \frac{dt}{a} &\simeq \chi_{L,S} - \chi_{Schü} + \frac{1}{2} \frac{(\varphi'_{Schüs} - \varphi_S)^2}{\chi_{Schü}^{-1} - \chi_{L,S}^{-1}}, \tag{3.167}
\end{aligned}$$

qui sont les mêmes formules déjà obtenues (3.156).

En résumé, le photon du chemin du haut, après avoir été le premier émis par la source $t'_S > t_S$ (3.159), pénètre également en premier dans la vacuole $t'_{SchüS} > t_{SchüS}$ (3.117), mais il en sort le dernier $t_{SchüE} > t'_{SchüE}$ (3.74) de telle manière à arriver sur Terre en même temps que le photon du chemin du bas $t_E = t'_E = 0$.

3.3 Application au système lentille-quasar SDSS J1004+4112

On termine ce chapitre par appliquer nos résultats au système lentille-quasar SDSS J1004 + 4112 caractérisé par

$$\alpha = 5'' \pm 10\%, \quad \alpha' = 10'' \pm 10\%, \quad z_L = 0.68, \quad z_S = 1.734. \quad (3.168)$$

Les distances Terre-Lentille χ_L et Terre-Source χ_S sont calculées à partir de (3.42) avec $\Lambda = 0.77 \cdot 3 \text{ am}^{-2} \pm 20\%$.

Comme nous l'avons déjà dit plus haut, on fait varier la masse de l'amas de galaxie M jusqu'à ce que l'égalité $\varphi_S = \varphi'_S$ soit satisfaite, pour les valeurs maximale '+', centrale ' ± 0 ' et minimale '-' de la constante cosmologique ainsi que pour les angles α_E et α'_E , avec le choix, sans perte de généralité, d'une valeur $a_0 = 1 \text{ am}$. On a de plus traité le cas d'une constante cosmologique nulle, $\Lambda = 0$. Les résultats sont consignés dans les tableaux 3.3, 3.4, 3.5 et 3.6.

Une fois que l'angle polaire de coordonnée φ_S et la masse M appropriée sont déterminés, on calcule le temps de retard du photon α_E par rapport au photon α'_E , en utilisant la méthode de calcul par différence.

On peut résumer les résultats obtenus comme suit

$$\begin{aligned}
1.46 \cdot 10^{13} M_{\odot} &\leq M \leq 2.20 \cdot 10^{13} M_{\odot}, \\
6.32'' &\leq -\varphi_S \leq 13.74'', \\
6.59 \text{ ans} &\leq \Delta t \leq 12.76 \text{ ans},
\end{aligned} \tag{3.169}$$

en présence de la constante cosmologique et

$$\begin{aligned}
1.36 \cdot 10^{13} M_{\odot} &\leq M \leq 2.03 \cdot 10^{13} M_{\odot}, \\
8.30'' &\leq -\varphi_S \leq 15.42'', \\
6.04 \text{ ans} &\leq \Delta t \leq 11.29 \text{ ans},
\end{aligned} \tag{3.170}$$

en l'absence de la constante cosmologique.

La méthode du calcul par différence nous a permis d'obtenir des temps de retard concevables dont la variation en fonction de Λ est monotone, comme on le voit directement sur les tableaux. Cependant cette propriété n'est pas respectée si on utilise la méthode du calcul direct.

Maintenant, comme on peut s'y attendre, une augmentation de Λ de 20% diminue l'angle de déflexion $-\varphi_S$ de 8% environ, puisque, contrairement au modèle de Kottler, cette variation ne fait qu'augmenter ou diminuer la masse de l'amas de galaxies de 1% environ. Ceci est en accord avec l'affirmation de Rindler et Ishak [15, 52]. Mais, en même temps, la valeur de la masse est presque trois fois plus petite que la masse observationnelle et celle obtenue dans le modèle de Kottler (1.127),

$$M = 1.81_{-0.35}^{+0.39} \cdot 10^{13} M_{\odot}. \tag{3.171}$$

Les valeurs obtenues de l'angle de déflexion et du temps de retard sont également petites devant celles du modèle de Kottler, mais nos prédictions pour le temps de retard sont

toujours compatibles avec la limite inférieure observationnelle $\Delta\tau > 7.7$ [44].

Il vaut la peine de mentionner ici le résultat de Kawano et Oguri $\Delta t_{CD} \lesssim 10.14$ ans [45] obtenu dans un modèle qui tient compte de la non-sphéricité de la lentille pour inclure les images A et B mais avec une constante cosmologique nulle.

$\alpha_E \pm 10\%$	+	+	+	± 0	± 0	± 0	-	-	-
$\alpha'_E \pm 10\%$	+	± 0	-	+	± 0	-	+	± 0	-
$M[10^{13}M_\odot]$	2.18	1.98	1.78	1.98	1.80	1.62	1.78	1.62	1.46
$-\varphi_S['']$	9.94	8.13	6.32	10.84	9.03	7.23	11.74	9.93	8.13
$\Delta t[\text{ans}]$	11.80	9.17	6.74	12.34	9.75	7.37	12.76	10.24	7.90

Tab. 3.3 Valeur maximale de Λ : $\Lambda = 0.77 \cdot 3 \text{ am}^{-2} + 20\%$.

$\alpha_E \pm 10\%$	+	+	+	± 0	± 0	± 0	-	-	-
$\alpha'_E \pm 10\%$	+	± 0	-	+	± 0	-	+	± 0	-
$M[10^{13}M_\odot]$	2.20	2.00	1.80	2.00	1.82	1.64	1.80	1.64	1.48
$-\varphi_S['']$	10.97	8.98	6.98	11.97	9.97	7.98	12.96	10.97	8.97
$\Delta t[\text{ans}]$	11.75	9.14	6.72	12.27	9.71	7.34	12.67	10.18	7.87

Tab. 3.4 Valeur centrale de Λ : $\Lambda = 0.77 \cdot 3 \text{ am}^{-2}$.

$\alpha_E \pm 10\%$	+	+	+	± 0	± 0	± 0	-	-	-
$\alpha'_E \pm 10\%$	+	± 0	-	+	± 0	-	+	± 0	-
$M[10^{13}M_\odot]$	2.18	1.98	1.78	1.98	1.80	1.62	1.78	1.62	1.46
$-\varphi_S['']$	11.63	9.51	7.40	12.68	10.57	8.46	13.74	11.63	9.51
$\Delta t[\text{ans}]$	11.52	8.96	6.59	12.02	9.52	7.20	12.40	9.97	7.71

Tab. 3.5 Valeur minimale de Λ : $\Lambda = 0.77 \cdot 3 \text{ am}^{-2} - 20\%$.

$\alpha_E \pm 10\%$	+	+	+	± 0	± 0	± 0	-	-	-
$\alpha'_E \pm 10\%$	+	± 0	-	+	± 0	-	+	± 0	-
$M[10^{13}M_\odot]$	2.03	1.84	1.66	1.84	1.68	1.51	1.66	1.51	1.36
$-\varphi_S['']$	13.05	10.67	8.30	14.23	11.86	9.49	15.42	13.05	10.67
$\Delta t[\text{ans}]$	10.52	8.19	6.04	10.97	8.70	6.59	11.29	9.10	7.05

Tab. 3.6 $\Lambda = 0$.

Chapitre 4

Modèle d'Einstein-Straus à courbure spatiale positive (cas sphérique $k = 1$)

Nous allons nous intéresser dans ce chapitre au modèle d'Einstein-Straus en présence d'une constante cosmologique mais en considérant cette fois-ci une courbure spatiale positive, $k = 1$, pour la métrique de FLRW. Commençons par raccorder les métriques de FLRW et de Kottler sur la sphère de Schücking en calculant le Jacobien de la transformation des coordonnées de Friedmann aux coordonnées de Schwarzschild.

4.1 Raccordement de la solution de FLRW avec la solution de Kottler

La métrique de Kottler en coordonnées (T, r, θ, φ) (3.1)

$$ds^2 = B(r)dT^2 - B(r)^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad B(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2, \quad (4.1)$$

s'applique à l'intérieur d'une vacuole de rayon $r_{Schü}(T)$ centrée autour d'une distribution de masse M à symétrie sphérique (la lentille) avec

$$r \leq r_{Schü}. \quad (4.2)$$

La métrique de FLRW en coordonnées $(t, \chi, \theta, \varphi)$ pour un espace sphérique ($k = 1$) (2.4)

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2(d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2), \quad (4.3)$$

décrit la géométrie de l'espace-temps à l'extérieur de la vacuole,

$$\chi \geq \chi_{Schü}, \quad (4.4)$$

où le facteur d'échelle $a(t)$ est déterminé par intégration numérique de l'équation de Friedmann (2.20)

$$\frac{da}{dt} = f(a), \quad f(a) = \sqrt{\frac{A}{a} + \frac{\Lambda}{3}a^2 - k}, \quad (4.5)$$

avec A une constante donnée par (3.4)

$$A = \rho a^3/3 = \rho_0 a_0^3/3, \quad (4.6)$$

pour un univers dominé par la matière non relativiste.

Dans le système d'unités (1.122) où H_0 vaut 1 as^{-1} (1.123), on a toujours les relations $H_0 = a_t(0)/a_0$ (3.6) et $a_t(0) = a_0$ (3.7). Il s'ensuit, d'après (4.5), que

$$\rho_0 = 3 - \Lambda + 3\Omega_{k0}, \quad \Omega_{k0} = ka_0^{-2} = a_0^{-2}, \quad A = (1 - \Lambda/3)a_0^3 + ka_0, \quad (4.7)$$

où les paramètres Ω_{k0} et a_0 représentent respectivement la densité de courbure actuelle de l'espace et le facteur d'échelle actuel.

On raccorde la métrique de Kottler (4.1) à la métrique de Friedmann (4.3) sur le rayon

constant de Schücking,

$$r_{Schü}(T) = a(t) \sin \chi_{Schü}. \quad (4.8)$$

La masse M s'exprime en termes du rayon de Schücking, compte tenu de (4.6) et (4.8), comme

$$M = \frac{4}{3} \pi r_{Schü}^3 \rho = 4\pi A \sin^3 \chi_{Schü}, \quad (4.9)$$

qui donne

$$\chi_{Schü} = \arcsin \left[\left(\frac{M}{4\pi A} \right)^{1/3} \right]. \quad (4.10)$$

Donc, on a sur la sphère de Schücking

$$B_{Schü} = B(r_{Schü}) = 1 - \left(\frac{A}{a} + \frac{\Lambda}{3} a^2 \right) \sin^2 \chi_{Schü}. \quad (4.11)$$

Pour raccorder les deux solutions, on procède de manière similaire au cas plat. On va passer des coordonnées de Friedmann (t, χ) et de Schwarzschild (T, r) au nouveau système de coordonnées (b, r) .

Réécrivons d'abord la métrique de FLRW dans le système de coordonnées (a, χ) ,

$$ds^2 = \frac{da^2}{f(a)^2} - a^2 d\chi^2 - a^2 \sin^2 \chi d\Omega^2. \quad (4.12)$$

On transforme le facteur $a^2 \sin^2 \chi$ devant $d\Omega^2$ en r^2 sous le changement de coordonnées $(a, \chi) \rightarrow (b, r)$,

$$a = \Phi(b, r), \quad \sin \chi = r/\Phi(b, r), \quad (4.13)$$

avec la condition aux limites, qu'en le rayon de Schücking, l'ancienne coordonnée de temps coïncide avec la nouvelle coordonnée de temps,

$$a = b = \Phi(b, b \sin \chi_{Schü}). \quad (4.14)$$

La métrique de FLRW devient alors

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -g_{bb}^F db^2 - g_{rr}^F dr^2 - 2g_{br}^F dbdr - r^2 d\Omega^2 \\
&= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial b}\right)^2 \left(\frac{1}{C_1^2} - \frac{1}{1-r^2/\Phi^2} \frac{r^2}{\Phi^2}\right) db^2 - \left[\frac{1}{1-r^2/\Phi^2} \left(1 - \frac{r}{\Phi} \frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{C_1^2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2\right] dr^2 \\
&\quad + 2\frac{\partial\Phi}{\partial b} \left[\frac{1}{1-r^2/\Phi^2} \frac{r}{\Phi} \left(1 - \frac{r}{\Phi} \frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial\Phi}{\partial r}\right] dbdr - r^2 d\Omega^2,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

avec

$$C_1 = \sqrt{\frac{A}{\Phi} + \frac{\Lambda}{3}\Phi^2 - 1}. \tag{4.16}$$

On veut que le terme mixte soit nul (métrique diagonale), c'est-à-dire que $g_{br}^F = 0$. Ceci se traduit par

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = -\frac{r}{\Phi} \frac{C_1^2}{B_1}, \quad B_1 = 1 - \left(\frac{A}{\Phi^3} + \frac{\Lambda}{3}\right) r^2. \tag{4.17}$$

La métrique de FLRW prend alors la forme

$$ds^2 = \frac{1}{1-r^2/\Phi^2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial b}\right)^2 \frac{B_1}{C_1^2} db^2 - \frac{1}{B_1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \tag{4.18}$$

En dérivant (4.14) par rapport à b , on obtient en $\chi = \chi_{Schü}$

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial b}\right|_{Schü} = 1 - \left.\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_{Schü} \sin\chi_{Schü} = \frac{\cos^2\chi_{Schü}}{B_{Schü}}. \tag{4.19}$$

Considérons maintenant la solution de Kottler (4.1). Passons des coordonnées (T, r) aux coordonnées (b, r) en posant

$$\frac{dT}{db} = \Psi(b). \tag{4.20}$$

La métrique de Kottler se réécrit alors en coordonnées (b, r, θ, φ) comme

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -g_{bb}^K db^2 - g_{rr}^K dr^2 - r^2 d\Omega^2 \\
&= B\Psi(b)^2 db^2 - \frac{1}{B} dr^2 - r^2 d\Omega^2.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Raccordons maintenant les deux solutions de FLRW (4.18) et de Kottler (4.21) dans ce système de coordonnées, (b, r, θ, φ) , de manière continue sur la sphère de Schücking et pour des temps arbitraires. Ceci est équivalent à écrire

$$g_{bb}^F|_{Schü} = g_{bb}^K|_{Schü}, \quad g_{rr}^F|_{Schü} = g_{rr}^K|_{Schü}. \quad (4.22)$$

On peut montrer facilement que

$$B_1|_{Schü} = B_{Schü}, \quad C_1|_{Schü} = \frac{C_{Schü}}{\tan \chi_{Schü}}, \quad (4.23)$$

où on définit $C_{Schü}$ comme

$$C_{Schü} = \sqrt{1 - \frac{B_{Schü}}{\cos^2 \chi_{Schü}}}. \quad (4.24)$$

Il résulte des relations (4.22) que

$$\Psi(b) = \frac{\sin \chi_{Schü}}{B_{Schü}(b)C_{Schü}(b)}. \quad (4.25)$$

Un usage répété de la dérivée d'une fonction composée donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial T} &= \frac{\partial t}{\partial a} \frac{\partial \Phi}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial T}, & \frac{\partial t}{\partial r} &= \frac{\partial t}{\partial a} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \\ \frac{\partial \chi}{\partial T} &= \frac{\partial \chi}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial T}, & \frac{\partial \chi}{\partial r} &= \frac{1}{\cos \chi} \left(\frac{1}{\Phi} - \frac{r}{\Phi^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

D'où le Jacobien de la transformation de coordonnées $(T, r) \rightarrow (t, \chi)$ en le rayon de Schücking $\chi = \chi_{Schü}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial T} \Big|_{Schü} &= \cos \chi_{Schü}, & \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{Schü} &= -\frac{C_{Schü} \cos \chi_{Schü}}{B_{Schü}}, \\ \frac{\partial \chi}{\partial T} \Big|_{Schü} &= -\frac{C_{Schü} \cos \chi_{Schü}}{a}, & \frac{\partial \chi}{\partial r} \Big|_{Schü} &= \frac{\cos \chi_{Schü}}{a B_{Schü}}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

ou sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \cos \chi_{Schü} & -\frac{C_{Schü} \cos \chi_{Schü}}{B_{Schü}} \\ -\frac{C_{Schü} \cos \chi_{Schü}}{a} & \frac{\cos \chi_{Schü}}{a B_{Schü}} \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Le Jacobien de la transformation inverse $(t, \chi) \rightarrow (T, r)$ est donné par l'inverse de la matrice (4.28), c'est-à-dire par

$$\begin{pmatrix} \frac{\cos \chi_{Schü}}{B_{Schü}} & \frac{a C_{Schü} \cos \chi_{Schü}}{B_{Schü}} \\ C_{Schü} \cos \chi_{Schü} & a \cos \chi_{Schü} \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

ou, en explicitant,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{Schü} &= \frac{\cos \chi_{Schü}}{B_{Schü}}, & \left. \frac{\partial T}{\partial \chi} \right|_{Schü} &= \frac{a C_{Schü} \cos \chi_{Schü}}{B_{Schü}}, \\ \left. \frac{\partial r}{\partial t} \right|_{Schü} &= C_{Schü} \cos \chi_{Schü}, & \left. \frac{\partial r}{\partial \chi} \right|_{Schü} &= a \cos \chi_{Schü}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Pour comparer le temps de Friedmann t au temps de Kottler T sur la sphère de Schü-cking $\chi = \chi_{Schü}$, on considère la courbe paramétrée, $T = p$, $r = b \sin \chi_{Schü}$ ($\theta = \pi/2$ et $\varphi = 0$). Sa 4-vitesse est donnée dans les coordonnées de Schwarzschild par

$$\frac{dT}{dp} = 1, \quad \frac{dr}{dp} = \frac{dr}{db} \frac{db}{dT} \Big|_{Schü} \frac{dT}{dp} = \sin \chi_{Schü} \frac{1}{\Psi(b)} \cdot 1 = B_{Schü} C_{Schü}, \quad (4.31)$$

et dans les coordonnées de Friedmann par

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dp} &= \left. \frac{\partial t}{\partial T} \right|_{Schü} \frac{dT}{dp} + \left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{Schü} \frac{dr}{dp} \\ &= \cos \chi_{Schü} \cdot 1 - \frac{C_{Schü}}{B_{Schü}} \cos \chi_{Schü} B_{Schü} C_{Schü} \\ &= \frac{B_{Schü}}{\cos \chi_{Schü}}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\chi}{dp} &= \left. \frac{\partial\chi}{\partial T} \right|_{Sch\ddot{u}} \frac{dT}{dp} + \left. \frac{\partial\chi}{\partial r} \right|_{Sch\ddot{u}} \frac{dr}{dp} \\
&= -\frac{C_{Sch\ddot{u}}}{a} \cos \chi_{Sch\ddot{u}} \cdot 1 + \frac{\cos \chi_{Sch\ddot{u}}}{a B_{Sch\ddot{u}}} B_{Sch\ddot{u}} C_{Sch\ddot{u}} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Finalement, on déduit la relation

$$\left. \frac{dt}{dT} \right|_{Sch\ddot{u}} = \frac{dt}{dp} \frac{dp}{dT} = \frac{B_{Sch\ddot{u}}}{\cos \chi_{Sch\ddot{u}}}, \tag{4.34}$$

qui permet de passer du temps de Friedmann au temps de Schwarzschild et inversement.

4.2 Géodésiques et déflexion de la lumière

En présence de la constante cosmologique et d'une courbure spatiale non nulle, des solutions analytiques exactes de l'équation de Friedmann (4.5) pour le temps cosmique $t(a)$ peuvent être obtenues en termes des intégrales elliptiques de deuxième et de troisième espèce dont la fonction inverse, le facteur d'échelle $a(t)$, n'est pas connue. Néanmoins, on peut alternativement procéder à une résolution numérique. Nous allons donc déterminer le facteur d'échelle $a(t)$ par intégration numérique de l'équation de Friedmann avec la condition finale $a(t = 0) = a_0$. Nous utiliserons toujours la valeur de la constante cosmologique $\Lambda = 0.77 \cdot 3 \text{ am}^{-2} \pm 20\%$ et la densité de poussière (4.7) $\rho_0 = 3 - \Lambda + 3a_0^{-2}$.

Afin de déterminer les distances géodésiques Terre-lentille χ_L et Terre-source χ_S , on doit également résoudre numériquement l'équation radiale (2.33)

$$d\chi = -\frac{dt}{a(t)}. \tag{4.35}$$

Mais, le membre de droite de cette équation dépend de la solution $a(t)$ de l'équation de Friedmann qui n'est pas connue. On peut contourner ce problème en introduisant la

fonction $f(a)$ via l'équation de Friedmann $dt = da/f(a)$ (4.5),

$$\chi(z) = \int_{\frac{a_0}{1+z}}^{a_0} \frac{da}{af(a)}, \quad (4.36)$$

où nous avons utilisé la formule du redshift $1+z = a_0/a$ et pris l'origine $\chi(z=0) = 0$ sur Terre. Ainsi χ_L et χ_S sont donnés respectivement par

$$\chi_L = \chi(z_L) = \int_{\frac{a_0}{1+z_L}}^{a_0} \frac{da}{af(a)}, \quad \chi_S = \chi(z_S) = \int_{\frac{a_0}{1+z_S}}^{a_0} \frac{da}{af(a)}. \quad (4.37)$$

Comme ce sont les conditions finales à l'arrivée sur Terre qui sont données, on intégrera les géodésiques à reculons dans le temps. On déterminera d'abord $t_{SchüE}$ et $t'_{SchüE}$, puis $t_{SchüS}$ et $t'_{SchüS}$ pour calculer l'angle φ_S et finalement t_S et t'_S pour le calcul du temps de retard (Fig. 4-1).

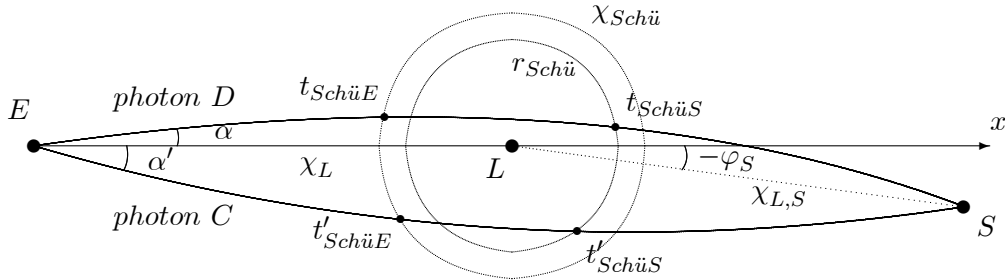


Fig. 4-1 Les trajectoires des deux photons sont déviées par la courbure spatiale à l'extérieur de la vacuole.

4.2.1 Géodésiques de la lumière entre la sphère de Schücking et la Terre

Dans cette région, la trajectoire du photon est régie par la métrique de FLRW pour un espace courbe (4.3). Les symboles Christoffel non nuls correspondants dans le plan

équatorial $\theta = \pi/2$ sont (2.11)

$$\begin{aligned}\Gamma_{\chi\chi}^t &= aa_t, & \Gamma_{\varphi\varphi}^t &= aa_t \sin^2 \chi, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\chi &= -\sin \chi \cos \chi, \\ \Gamma_{t\chi}^\chi &= \Gamma_{\chi t}^\chi = a_t/a, & \Gamma_{t\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi t}^\varphi = a_t/a, & \Gamma_{\chi\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi\chi}^\varphi = \cot \chi.\end{aligned}\quad (4.38)$$

Les équations de la géodésique s'écrivent alors

$$\ddot{t} + aa_t(\dot{\chi}^2 + \sin^2 \chi \dot{\varphi}^2) = 0, \quad (4.39)$$

$$\ddot{\chi} + 2\frac{a_t}{a}\dot{t}\dot{\chi} - \sin \chi \cos \chi \dot{\varphi}^2 = 0, \quad (4.40)$$

$$\ddot{\varphi} + 2\left(\frac{a_t}{a}\dot{t} + \cot \chi \dot{\chi}\right)\dot{\varphi} = 0. \quad (4.41)$$

On note qu'ici que comme le cas plat, il n'est pas nécessaire d'intégrer la deuxième équation.

Le photon du chemin du haut α_E arrivera sur Terre avec les conditions finales ($p = 0$)

$$\begin{aligned}t &= 0, & \chi &= \chi_L, & \varphi &= \pi, \\ \dot{t} &= 1, & \dot{\chi} &= \frac{1}{a_0 \sqrt{1 + \cos^2 \chi_L \tan^2 \alpha_E}}, & \dot{\varphi} &= \frac{\cot \chi_L \tan \alpha_E}{a_0 \sqrt{1 + \cos^2 \chi_L \tan^2 \alpha_E}},\end{aligned}\quad (4.42)$$

où on a utilisé le fait que l'angle physique α_E coïncide avec l'angle de coordonnée

$$\alpha_E = \arctan \left| r_E \frac{d\varphi}{dr(r_E)} \right| = \arctan \left| \tan \chi_L \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\chi}} \right|_E, \quad (4.43)$$

ainsi que l'expression de la métrique de FLRW pour un photon ($ds = 0$),

$$\dot{t}^2/a^2 = \dot{\chi}^2 + \sin^2 \chi \dot{\varphi}^2. \quad (4.44)$$

Il convient de noter que pour déterminer ces conditions finales, on a tenu compte du fait que χ et φ entre la Terre et la sphère de Schücking sont des fonctions croissantes du temps t .

En utilisant (4.44), l'équation (4.39) se réduit à

$$\frac{d}{dp} \ln \dot{t} = \frac{d}{dp} \ln \frac{1}{a}, \quad (4.45)$$

qui s'intègre, en tenant compte des conditions finales (4.42), pour donner

$$\dot{t} = a_0/a(t). \quad (4.46)$$

L'équation (4.41) peut se réécrire comme

$$\frac{d}{dp} \ln \dot{\varphi} = \frac{d}{dp} \ln \frac{1}{a^2 \sin^2 \chi}, \quad (4.47)$$

qui s'intègre, en tenant compte des conditions finales (4.42), pour donner

$$\dot{\varphi} = \frac{a_0 \chi_P}{a^2 \sin^2 \chi}, \quad (4.48)$$

où χ_P est une constante définie par

$$\chi_P = \frac{\cos \chi_L \sin \chi_L \tan \alpha_E}{\sqrt{1 + \cos^2 \chi_L \tan^2 \alpha_E}}. \quad (4.49)$$

L'expression (4.44) devient, en utilisant l'expression de \dot{t} (4.46),

$$a_0/a^2 = \sqrt{\dot{\chi}^2 + \sin^2 \chi \dot{\varphi}^2}. \quad (4.50)$$

En substituant ce dernier résultat dans l'expression de $\dot{\varphi}$ (4.48), on obtient, sachant que χ entre la Terre et la sphère de Schücking croît avec φ ,

$$d\varphi = \frac{\chi_P}{\sin^2 \chi} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - \chi_P^2/\sin^2 \chi}}, \quad (4.51)$$

qui se simplifie, en posant

$$x = \frac{\chi_P \cot \chi}{\sqrt{1 - \chi_P^2}}, \quad (4.52)$$

en

$$d\varphi = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (4.53)$$

Donc, compte tenu des conditions finales (4.42), l'intégration de (4.53) donne

$$\varphi = \pi - \arcsin \frac{\chi_P \cot \chi}{\sqrt{1 - \chi_P^2}} + \beta, \quad (4.54)$$

où β est une constante définie par

$$\beta = \arcsin \frac{\chi_P \cot \chi_L}{\sqrt{1 - \chi_P^2}}. \quad (4.55)$$

D'où

$$\varphi_{SchüE} = \pi - \arcsin \frac{\chi_P \cot \chi_{Schü}}{\sqrt{1 - \chi_P^2}} + \beta. \quad (4.56)$$

Dans le cas plat, la distance parcourue par le photon entre le point de sortie de la vacuole et le point d'arrivée sur Terre, notée par $\chi_{E,SchüE}$ (ou $\chi'_{E,SchüE}$), est calculée au moyen de certaines propriétés de la géométrie Euclidienne qui ne sont plus valables dans un espace courbe, où les distances géodésiques ne sont plus des lignes droites (Fig. 4-1). La même remarque vaut pour la distance parcourue par le photon entre la source et son point d'entrée dans la vacuole ($\chi_{S,SchüS}$ et $\chi'_{S,SchüS}$). Pour cette raison, nous avons développé une méthode basée uniquement sur les équations différentielles, qui reste valable aussi bien pour un espace plat que pour un espace courbe (ou pseudo-courbe).

Maintenant, nous allons établir l'équation qui relie la variable χ au facteur d'échelle a .

Nous avons d'après (4.44) (ou (4.50)) l'équation

$$\frac{dt}{a} = \sqrt{d\chi^2 + \sin^2 \chi d\varphi^2}, \quad (4.57)$$

qui se transforme, compte tenu de l'équation de Friedmann (4.5) et de l'expression (4.51), en

$$\frac{da}{af(a)} = \frac{d\chi}{g(\chi)}, \quad g(\chi) = \sqrt{1 - \chi_P^2 / \sin^2 \chi}, \quad (4.58)$$

sachant que χ entre la Terre et la sphère de Schücking augmente au cours du temps. Cette dernière équation se simplifie encore, en utilisant le changement de variable

$$x = \frac{\cos \chi}{\sqrt{1 - \chi_P^2}}, \quad (4.59)$$

en

$$\frac{da}{af(a)} = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (4.60)$$

qui s'intègre en

$$\int_{a_{SchüE}}^{a_0} \frac{da}{af(a)} = \arcsin \frac{\cos \chi_{Schü}}{\sqrt{1 - \chi_P^2}} - \arcsin \frac{\cos \chi_L}{\sqrt{1 - \chi_P^2}}. \quad (4.61)$$

On détermine la valeur de $a_{SchüE}$ par intégration numérique du membre de gauche de (4.61) et ensuite la valeur de $t_{SchüE}$ par intégration numérique de l'équation de Friedmann (4.5), c'est-à-dire

$$t_{SchüE} = \int_{a_0}^{a_{SchüE}} \frac{da}{f(a)}. \quad (4.62)$$

Nous rappelons qu'une équation reliant la variable φ au temps peut être établie de la même manière que précédemment et sert à déduire la valeur de $t_{SchüE}$ en utilisant l'angle polaire au point de sortie de la vacuole (4.56).

La 4-vitesse du photon à la sortie de la sphère de Schücking, compte tenu de (4.46),

(4.48) et (4.58), est

$$\dot{t}_{SchüE} = \frac{a_0}{a_{SchüE}}, \quad \dot{\chi}_{SchüE} = \frac{a_0 g_{Schü}}{a_{SchüE}^2}, \quad \dot{\varphi}_{SchüE} = \frac{a_0 \chi_P}{r_{SchüE}^2}, \quad (4.63)$$

en coordonnées de Friedmann avec $g_{Schü} = g(\chi_{Schü})$ et $r_{SchüE} = a_{SchüE} \sin \chi_{Schü}$. Cette 4-vitesse s'écrit, grâce au Jacobien inverse (4.30), en coordonnées de Schwarzschild comme

$$\begin{aligned} \dot{T}_{SchüE} &= \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{SchüE} \dot{t}_{SchüE} + \left. \frac{\partial T}{\partial \chi} \right|_{SchüE} \dot{\chi}_{SchüE} \\ &= a_0 \cos \chi_{Schü} \frac{1 + C_{SchüE} g_{Schü}}{a_{SchüE} B_{SchüE}}, \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} \dot{r}_{SchüE} &= \left. \frac{\partial r}{\partial t} \right|_{SchüE} \dot{t}_{SchüE} + \left. \frac{\partial r}{\partial \chi} \right|_{SchüE} \dot{\chi}_{SchüE} \\ &= a_0 \cos \chi_{Schü} \frac{C_{SchüE} + g_{Schü}}{a_{SchüE}}, \end{aligned} \quad (4.65)$$

avec $C_{SchüE} = C_{Schü}(t_{SchüE})$ (4.24) et $B_{SchüE} = B_{Schü}(t_{SchüE})$ (4.11).

On définit γ_{KE} comme le plus petit angle de coordonnée entre la direction du photon α_E et la direction dirigée vers la lentille en le point de sortie du photon de la sphère de Schücking,

$$\gamma_{KE} = \arctan \left| r_{SchüE} \frac{\dot{\varphi}_{SchüE}}{\dot{r}_{SchüE}} \right| = \arctan \frac{\chi_P (C_{SchüE} + g_{Schü})^{-1}}{\cos \chi_{Schü} \sin \chi_{Schü}}. \quad (4.66)$$

Pour intégrer la trajectoire du photon α'_E , on suit le même raisonnement que pour la trajectoire du photon α_E . Les conditions finales sur Terre sont obtenues en remplaçant π par $-\pi$ et α_E par $-\alpha'_E$,

$$\begin{aligned} t = 0, \quad \chi = \chi_L, \quad \varphi = -\pi, \\ \dot{t} = 1, \quad \dot{\chi} = \frac{1}{a_0 \sqrt{1 + \cos^2 \chi_L \tan^2 \alpha'_E}}, \quad \dot{\varphi} = -\frac{\cot \chi_L \tan \alpha'_E}{a_0 \sqrt{1 + \cos^2 \chi_L \tan^2 \alpha'_E}}, \end{aligned} \quad (4.67)$$

ce qui permet d'intégrer les équations de la géodésique (4.39) et (4.41) pour obtenir

$$\dot{t} = \frac{a_0}{a(t)}, \quad \dot{\varphi} = -\frac{a_0 \chi'_P}{a^2 \sin^2 \chi}, \quad \varphi = -\pi + \arcsin \frac{\chi'_P \cot \chi}{\sqrt{1 - \chi'^2_P}} - \beta', \quad (4.68)$$

où χ'_P et β' sont des constantes définies par

$$\chi'_P = \frac{\cos \chi_L \sin \chi_L \tan \alpha'_E}{\sqrt{1 + \cos^2 \chi_L \tan^2 \alpha'_E}}, \quad \beta' = \arcsin \frac{\chi'_P \cot \chi_L}{\sqrt{1 - \chi'^2_P}}. \quad (4.69)$$

D'où,

$$\varphi'_{SchüE} = -\pi + \arcsin \frac{\chi'_P \cot \chi_{Schü}}{\sqrt{1 - \chi'^2_P}} - \beta'. \quad (4.70)$$

De même, l'équation qui relie la variable χ au facteur d'échelle a s'obtient en faisant usage des solutions (4.68), l'équation de Friedmann (4.5) et (4.44),

$$\frac{da}{af(a)} = \frac{d\chi}{g'(\chi_{Schü})}, \quad g'(\chi) = \sqrt{1 - \chi'^2_P / \sin^2 \chi}, \quad (4.71)$$

qui s'intègre, en utilisant le même changement de variable (4.59), pour donner

$$\int_{a'_{SchüE}}^{a_0} \frac{da}{af(a)} = \arcsin \frac{\cos \chi_{Schü}}{\sqrt{1 - \chi'^2_P}} - \arcsin \frac{\cos \chi_L}{\sqrt{1 - \chi'^2_P}}. \quad (4.72)$$

On détermine la valeur de $a'_{SchüE}$ par intégration numérique du membre de gauche de (4.72), puis la valeur de $t'_{SchüE}$ par intégration numérique de l'équation de Friedmann (4.5),

$$t'_{SchüE} = \int_{a_0}^{a'_{SchüE}} \frac{da}{f(a)}. \quad (4.73)$$

Cependant, on peut procéder de manière différente sans calcul numérique supplémentaire, comme dans le cas plat, pour obtenir le temps $t'_{SchüE}$. La méthode consiste à déterminer $t'_{SchüE}$ par différence avec $t_{SchüE}$ via une expression analytique approchée. Les

équations (4.61) et (4.72) peuvent se réécrire respectivement comme

$$\int_{t_{SchüE}}^0 \frac{dt}{a(t)} = \chi_{E,SchüE}, \quad (4.74)$$

$$\int_{t'_{SchüE}}^0 \frac{dt}{a(t)} = \chi'_{E,SchüE}, \quad (4.75)$$

avec

$$\chi_{E,SchüE} = \arcsin \frac{\cos \chi_{Schü}}{\sqrt{1 - \chi_P^2}} - \arcsin \frac{\cos \chi_L}{\sqrt{1 - \chi_P^2}}, \quad (4.76)$$

$$\chi'_{E,SchüE} = \arcsin \frac{\cos \chi_{Schü}}{\sqrt{1 - \chi_P'^2}} - \arcsin \frac{\cos \chi_L}{\sqrt{1 - \chi_P'^2}}. \quad (4.77)$$

En combinant (4.74) et (4.75), on trouve

$$\chi'_{E,SchüE} - \chi_{E,SchüE} = \int_{t'_{SchüE}}^{t_{SchüE}} \frac{dt}{a(t)} \simeq \frac{t_{SchüE} - t'_{SchüE}}{a_{SchüE}}, \quad (4.78)$$

où on a utilisé le fait que le facteur d'échelle a ne varie de manière significative que sur des échelles de temps cosmologiques. Une approximation plausible pourrait être faite dans la limite où les péri-lens sont très petits devant l'unité, $\chi_P \ll 1$ et $\chi_P' \ll 1$ (de l'ordre de 10^{-6} dans notre cas). On obtient au deuxième ordre en χ_P et χ_P' , compte tenu des expressions de $\chi_{E,SchüE}$ et de $\chi'_{E,SchüE}$, (4.76) et (4.77),

$$\chi'_{E,SchüE} - \chi_{E,SchüE} \simeq \frac{1}{2} (\cot \chi_{Schü} - \cot \chi_L) (\chi_P'^2 - \chi_P^2). \quad (4.79)$$

Ceci d'une part. D'autre part, dans l'approximation $\alpha_E \ll 1$ et $\alpha_E' \ll 1$, on a, en combinant les expressions de χ_P et χ_P' , (4.49) et (4.69),

$$\chi_P'^2 - \chi_P^2 \simeq \cos^2 \chi_L \sin^2 \chi_L (\alpha_E'^2 - \alpha_E^2). \quad (4.80)$$

En remplaçant $\chi_P'^2 - \chi_P^2$ par son expression (4.80) dans (4.79), on obtient

$$\chi'_{E,SchüE} - \chi_{E,SchüE} \simeq \frac{1}{2} \cos^2 \chi_L \sin^2 \chi_L (\cot \chi_{Schü} - \cot \chi_L) (\alpha_E'^2 - \alpha_E^2) \quad (4.81)$$

$$\simeq \frac{1}{2} \cos^2 \chi_L \frac{\sin \chi_L \sin(\chi_L - \chi_{Schü})}{\sin \chi_{Schü}} (\alpha_E'^2 - \alpha_E^2). \quad (4.82)$$

D'où alors, d'après (4.78),

$$t_{SchüE} - t'_{SchüE} \simeq \frac{1}{2} a_{SchüE} \cos^2 \chi_L \frac{\sin \chi_L \sin(\chi_L - \chi_{Schü})}{\sin \chi_{Schü}} (\alpha_E'^2 - \alpha_E^2). \quad (4.83)$$

Donc, la donnée de la valeur de $t_{SchüE}$, (4.62), permet de déduire la valeur de $t'_{SchüE}$ à partir de cette expression approchée. Si $\alpha_E' > \alpha_E$, le photon du chemin du bas quitte la vacuole avant celui du chemin du haut, comme dans le cas plat. La valeur du facteur d'échelle en $t'_{SchüE}$, $a'_{SchüE} \equiv a(t'_{SchüE})$, se calcule par intégration numérique de l'équation (4.73).

La 4-vitesse du photon à la sortie de la sphère de Schücking compte tenu de (4.68) est

$$\dot{t}'_{SchüE} = \frac{a_0}{a'_{SchüE}}, \quad \dot{\chi}'_{SchüE} = \frac{a_0 g'_{Schü}}{a'^2_{SchüE}}, \quad \dot{\varphi}'_{SchüE} = -\frac{a_0 \chi'_P}{r'^2_{SchüE}}, \quad (4.84)$$

en coordonnées de Friedmann avec $g'_{Schü} = g'(\chi_{Schü})$ et $r'_{SchüE} = a'_{SchüE} \sin \chi_{Schü}$. Cette 4-vitesse s'écrit, grâce au Jacobien inverse (4.30), en coordonnées de Schwarzschild comme

$$\begin{aligned} \dot{T}'_{SchüE} &= \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{SchüE} \dot{t}'_{SchüE} + \left. \frac{\partial T}{\partial \chi} \right|_{SchüE} \dot{\chi}'_{SchüE} \\ &= a_0 \cos \chi_{Schü} \frac{1 + C'_{SchüE} g'_{Schü}}{a'_{SchüE} B'_{SchüE}}, \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned} \dot{r}'_{SchüE} &= \left. \frac{\partial r}{\partial t} \right|_{SchüE} \dot{t}'_{SchüE} + \left. \frac{\partial r}{\partial \chi} \right|_{SchüE} \dot{\chi}'_{SchüE} \\ &= a_0 \cos \chi_{Schü} \frac{C'_{SchüE} + g'_{Schü}}{a'_{SchüE}}, \end{aligned} \quad (4.86)$$

avec $C'_{SchüE} = C_{Schü}(t'_{SchüE})$ (4.24) et $B'_{SchüE} = B_{Schü}(t'_{SchüE})$ (4.11).

On définit γ'_{KE} comme le plus petit angle de coordonnée entre la direction du photon “ α_E ” et la direction dirigée vers la lentille en le point de sortie du photon de la sphère de Schücking,

$$\gamma'_{KE} = \arctan \left| r'_{SchüE} \frac{\dot{\varphi}'_{SchüE}}{\dot{r}'_{SchüE}} \right| = \arctan \frac{\chi_P (C'_{SchüE} + g'_{Schü})^{-1}}{\cos \chi_{Schü} \sin \chi_{Schü}}. \quad (4.87)$$

4.2.2 Géodésiques de la lumière à l’intérieur de la sphère de Schücking

A l’intérieur de la sphère de Schücking, où s’applique la métrique de Kottler, nous n’irons pas plus loin dans des détails menant aux mêmes résultats déjà discutés au chapitre précédent dans le cas plat. Ce que nous allons faire, c’est calculer les facteurs d’échelle $a_{SchüS}$ et $a'_{SchüS}$, puis leurs temps correspondants $t_{SchüS}$ et $t'_{SchüS}$ aux points d’entrée dans la sphère de Schücking en prenant en considération les conditions finales aux points de sortie de la sphère de Schücking qui sont maintenant entièrement déterminées. Les expressions utilisées sont très proches de celles obtenues dans le cas plat, au point que même certaines d’entre-elles préservent la même forme à l’exception de celles qui dérivent de la relation entre le temps de Schwarzschild et celui de Friedmann (4.34).

Les équations partiellement intégrées de la géodésique, dans l’espace-temps de Kottler, ont la même forme que dans le cas plat (3.90),

$$\dot{T} = \frac{1}{B(r)}, \quad \dot{r} = \pm \sqrt{1 - \frac{r_P^2}{r^2} \frac{B(r)}{B(r_P)}}, \quad \dot{\varphi} = \frac{r_P}{r^2 \sqrt{B(r_P)}}, \quad (4.88)$$

où r_P est le péri-lens et est donné par une expression approchée analogue à (3.91),

$$r_P \simeq r_{SchüE} \sin \gamma_{KE} - GM. \quad (4.89)$$

Le temps de trajet du photon α_E à l’intérieur de la vacuole, du point d’entrée au point

de sortie, peut être obtenu en utilisant l'équation bien connue (3.95)

$$dT = \pm \frac{dr}{v(r)}, \quad v(r) = \frac{B(r)}{\sqrt{B(r_P)}} \sqrt{1 - \frac{r_P^2}{r^2}} \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_P} \left(\frac{r_P}{r} + \frac{r}{r + r_P} \right)}, \quad (4.90)$$

qui résulte immédiatement de l'élimination du paramètre affine entre \dot{T} et \dot{r} (4.88). L'intégrale du membre de droite de (4.90) peut être divisée en deux intégrales, étant donné que r décroît au cours du temps de $r_{SchüS}$ à r_P alors qu'il croît de r_P à $r_{SchüE}$,

$$T_{SchüE} - T_{SchüS} = \int_{r_P}^{r_{SchüE}} \frac{dr}{v(r)} + \int_{r_P}^{r_{SchüS}} \frac{dr}{v(r)}, \quad (4.91)$$

où $r_{SchüE}$ et $r_{SchüS}$ sont reliés à $a_{SchüE}$ et à $a_{SchüS}$ respectivement, par la condition de raccordement (4.8).

Une autre expression pour ce temps de trajet peut être obtenue en utilisant la relation entre le temps de Schwarzschild et celui de Friedmann (4.34),

$$T_{SchüE} - T_{SchüS} = \cos \chi_{Schü} \int_{t_{SchüS}}^{t_{SchüE}} \frac{dt}{B_{Schü}(t)}, \quad (4.92)$$

qui est équivalente à

$$T_{SchüE} - T_{SchüS} = \cos \chi_{Schü} \int_{a_{SchüS}}^{a_{SchüE}} \frac{da}{B_{Schü}(a)f(a)}, \quad (4.93)$$

car $dt = da/f(a)$. Il s'ensuit de (4.91) et (4.93) que

$$\int_{r_P}^{a_{SchüE} \sin \chi_{Schü}} \frac{dr}{v(r)} + \int_{r_P}^{a_{SchüS} \sin \chi_{Schü}} \frac{dr}{v(r)} = \cos \chi_{Schü} \int_{a_{SchüS}}^{a_{SchüE}} \frac{da}{B_{Schü}(a)f(a)}, \quad (4.94)$$

ce qui nous permet d'obtenir $a_{SchüS}$ par intégration numérique. Il faut ensuite intégrer numériquement l'équation de Friedmann pour obtenir $t_{SchüS}$,

$$t_{SchüS} = \int_{a_0}^{a_{SchüS}} \frac{da}{f(a)}. \quad (4.95)$$

En suivant le même raisonnement que pour la trajectoire du photon α_E , on obtient pour la trajectoire du photon α'_E des formules similaires. Le temps $t'_{SchüS}$ est déterminé par intégration numérique de l'équation de Friedmann,

$$t'_{SchüS} = \int_{a_0}^{a'_{SchüS}} \frac{da}{f(a)}, \quad (4.96)$$

où le facteur d'échelle $a'_{SchüS}$ est fourni en résolvant numériquement l'équation

$$\int_{r'_P}^{a'_{SchüE} \sin \chi_{Schü}} \frac{dr}{v'(r)} + \int_{r'_P}^{a'_{SchüS} \sin \chi_{Schü}} \frac{dr}{v'(r)} = \cos \chi_{Schü} \int_{a'_{SchüS}}^{a'_{SchüE}} \frac{da}{B_{Schü}(a)f(a)}, \quad (4.97)$$

où la fonction $v'(r)$ est définie par une expression analogue à (4.90) à condition que r_P soit remplacé par r'_P , qui est donné par une expression approchée analogue à (3.99),

$$r'_P \simeq r'_{SchüE} \sin \gamma'_{KE} - GM. \quad (4.98)$$

Cependant, nous pouvons éviter de calculer numériquement $t'_{SchüS}$ en suivant la même méthode d'approximation décrite au chapitre précédent dans le cas plat. Le temps $t'_{SchüS}$ pourrait être déterminé par différence avec $t_{SchüS}$ via une expression analytique approchée. D'abord, grâce à la relation entre le temps de Schwarzschild T et le temps de Friedmann t (4.34), on peut exprimer la différence des temps de trajet des deux photons à l'intérieur de la vacuole comme

$$\begin{aligned} T_{SchüE} - T_{SchüS} - (T'_{SchüE} - T'_{SchüS}) &= \cos \chi_{Schü} \int_{t'_{SchüE}}^{t_{SchüE}} \frac{dt}{B_{Schü}(t)} \\ &\quad - \cos \chi_{Schü} \int_{t'_{SchüS}}^{t_{SchüS}} \frac{dt}{B_{Schü}(t)} \\ &\simeq \cos \chi_{Schü} \frac{t_{SchüE} - t'_{SchüE}}{B_{SchüE}} \\ &\quad - \cos \chi_{Schü} \frac{t_{SchüS} - t'_{SchüS}}{B_{SchüS}}, \end{aligned} \quad (4.99)$$

où nous avons utilisé le fait que $B_{Schü}$ ne varie sensiblement que sur des intervalles de temps cosmologiques avec $B_{SchüS} = B_{Schü}(t_{SchüS})$. Nous pouvons également utiliser (4.90) pour écrire cette différence de temps de trajet comme

$$T_{SchüE} - T_{SchüS} - (T'_{SchüE} - T'_{SchüS}) = \Delta T_K + \int_{r'_{SchüE}}^{r_{SchüE}} \frac{dr}{v'(r)} + \int_{r'_{SchüS}}^{r_{SchüS}} \frac{dr}{v'(r)}, \quad (4.100)$$

où nous avons décomposé les intégrales pour produire l'expression suivante

$$\Delta T_K = \int_{r_P}^{r_{SchüE}} \frac{dr}{v(r)} + \int_{r_P}^{r_{SchüS}} \frac{dr}{v(r)} - \left(\int_{r'_P}^{r_{SchüE}} \frac{dr}{v'(r)} + \int_{r'_P}^{r_{SchüS}} \frac{dr}{v'(r)} \right). \quad (4.101)$$

Le résultat de cette intégrale est analogue à celui obtenu dans le chapitre précédent (3.116),

$$\begin{aligned} \Delta T_K \simeq & \frac{r_P'^2 - r_P^2}{2} \left(\frac{1}{r_{SchüE}} + \frac{1}{r_{SchüS}} \right) + 4GM \ln \frac{r_P'}{r_P} - 3 \left(\frac{2GM}{r_P} \right)^2 \frac{r_P'^2 - r_P^2}{8r_P'^2} \times \\ & \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \left[\operatorname{arctanh} \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} r_{SchüE} \right) + \operatorname{arctanh} \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} r_{SchüS} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.102)$$

qui est presque identique à une expression déjà impliquée dans le calcul du temps de retard dans le cadre de la solution Kottler à condition que r_E et r_S soient remplacés respectivement par $r_{SchüE}$ et $r_{SchüS}$ (1.119).

De plus, comme nous travaillons sur des échelles de longueur et de temps plus petites que les échelles cosmologiques,

$$\int_{r'_{SchüE}}^{r_{SchüE}} \frac{dr}{v'(r)} \simeq \frac{r_{SchüE} - r'_{SchüE}}{v'_{SchüE}}, \quad \int_{r'_{SchüS}}^{r_{SchüS}} \frac{dr}{v'(r)} \simeq \frac{r_{SchüS} - r'_{SchüS}}{v'_{SchüS}}, \quad (4.103)$$

et, en utilisant l'équation de Friedmann,

$$\begin{aligned} r_{SchüE} - r'_{SchüE} &= (a_{SchüE} - a'_{SchüE}) \sin \chi_{Schü} \\ &\simeq f_{SchüE} \sin \chi_{Schü} (t_{SchüE} - t'_{SchüE}), \end{aligned} \quad (4.104)$$

$$\begin{aligned} r_{SchüS} - r'_{SchüS} &= (a_{SchüS} - a'_{SchüS}) \sin \chi_{Schü} \\ &\simeq f_{SchüS} \sin \chi_{Schü} (t_{SchüS} - t'_{SchüS}), \end{aligned} \quad (4.105)$$

avec $v'_{SchüE} = v'(r_{SchüE})$, $v'_{SchüS} = v'(r_{SchüS})$, $f'_{SchüE} = f(a'_{SchüE})$ et $f'_{SchüS} = f(a'_{SchüS})$.

En utilisant ceci avec (4.102), (4.100) et (4.99), nous obtenons donc

$$t'_{SchüS} - t_{SchüS} \simeq \frac{\Delta T_K + \left(\frac{f_{SchüE} \sin \chi_{Schü}}{v'_{SchüE}} - \frac{\cos \chi_{Schü}}{B_{SchüE}} \right) (t_{SchüE} - t'_{SchüE})}{\frac{f_{SchüS} \sin \chi_{Schü}}{v'_{SchüS}} + \frac{\cos \chi_{Schü}}{B_{SchüS}}}. \quad (4.106)$$

Ainsi, la connaissance de $t_{SchüS}$ permet de déduire $t'_{SchüS}$ sachant que $t_{SchüE} - t'_{SchüE}$ est donné par (4.83). La même remarque que pour le cas plat vaut ici pour le cas courbe: Malgré que le photon du chemin du haut précède celui du chemin du bas pour arriver à la vacuole, le photon du chemin du bas sort de la vacuole le premier, puisque le photon du chemin du haut subit plus fortement l'effet gravitationnel ($r_P < r'_P$) comme montré sur la Fig. 4-1.

On doit également calculer les angles $\varphi_{SchüS}$ et $\varphi'_{SchüS}$ ainsi que les 4-vitesses avec lesquels les deux photons pénètrent dans la vacuole, dont on a besoin pour la section suivante. Il faudrait utiliser l'équation bien connue (3.92)

$$d\varphi = \pm \frac{dr}{u(r)}, \quad u(r) = r \sqrt{\frac{r^2}{r_P^2} - 1} \sqrt{1 - \frac{M}{4\pi r_P} \left(\frac{r_P}{r} + \frac{r}{r + r_P} \right)}, \quad (4.107)$$

qui découle de (4.88), où la constante cosmologique disparaît accidentellement. Etant donné que l'angle φ augmente lorsque le photon du haut se rapproche ou s'éloigne de la lentille,

l'intégrale du membre de droite de (4.107) le long de la trajectoire peut être décomposée comme suit,

$$\varphi_{SchüE} - \varphi_{SchüS} = \int_{r_P}^{r_{SchüE}} \frac{dr}{u(r)} + \int_{r_P}^{r_{SchüS}} \frac{dr}{u(r)}, \quad (4.108)$$

et donne au premier ordre en $2GM/r_P$

$$\begin{aligned} \varphi_{SchüS} \simeq \varphi_{SchüE} - \pi + \arcsin \frac{r_P}{r_{SchüE}} + \arcsin \frac{r_P}{r_{SchüS}} - \frac{GM}{r_P} \left(\sqrt{1 - \frac{r_P^2}{r_{SchüE}^2}} + \right. \\ \left. \sqrt{1 - \frac{r_P^2}{r_{SchüS}^2}} + \sqrt{\frac{r_{SchüE} - r_P}{r_{SchüE} + r_P}} + \sqrt{\frac{r_{SchüS} - r_P}{r_{SchüS} + r_P}} \right), \end{aligned} \quad (4.109)$$

où $\varphi_{SchüE}$ est donné par (4.56). De la même manière, on obtient pour la trajectoire du bas,

$$\begin{aligned} \varphi'_{SchüS} \simeq \varphi'_{SchüE} + \pi - \arcsin \frac{r'_P}{r'_{SchüE}} - \arcsin \frac{r'_P}{r'_{SchüS}} + \frac{GM}{r'_P} \left(\sqrt{1 - \frac{r'^2_P}{r'^2_{SchüE}}} + \right. \\ \left. \sqrt{1 - \frac{r'^2_P}{r'^2_{SchüS}}} + \sqrt{\frac{r'_{SchüE} - r'_P}{r'_{SchüE} + r'_P}} + \sqrt{\frac{r'_{SchüS} - r'_P}{r'_{SchüS} + r'_P}} \right), \end{aligned} \quad (4.110)$$

où $\varphi_{SchüE}$ est donné par (4.70). Compte tenu de (4.88), les deux 4-vitesse des photons α_E et α'_E aux points d'entrée dans la vacuole sont respectivement

$$\dot{T}_{SchüS} = \frac{1}{B_{SchüS}}, \quad \dot{r}_{SchüS} = -\sqrt{1 - \frac{r_P^2 B_{SchüS}}{r_{SchüS}^2 B(r_P)}}, \quad \dot{\varphi}_{SchüS} = \frac{r_P}{r_{SchüS}^2 \sqrt{B(r_P)}}, \quad (4.111)$$

et

$$\dot{T}'_{SchüS} = \frac{1}{B'_{SchüS}}, \quad \dot{r}'_{SchüS} = -\sqrt{1 - \frac{r'^2_P B'_{SchüS}}{r'^2_{SchüS} B(r'_P)}}, \quad \dot{\varphi}'_{SchüS} = \frac{-r'_P}{r'^2_{SchüS} \sqrt{B(r'_P)}}, \quad (4.112)$$

en coordonnées de Schwarzschild, où nous avons pris en compte le fait que r décroît au cours du temps puisque les deux photons s'approchent de la lentille, tandis que φ croît au cours du temps pour le photon α_E et décroît pour le photon α'_E , avec $C_{SchüS} = C_{Schü}(t_{SchüS})$,

$C'_{SchüS} = C_{Schü}(t'_{SchüS})$ (4.24), $B_{SchüS} = B_{Schü}(t_{SchüS})$ et $B'_{SchüS} = B_{Schü}(t'_{SchüS})$ (4.11).

Ces deux 4-vitesse se transforment, grâce au Jacobien (4.27), en coordonnées de Friedmann en

$$\begin{aligned} \dot{t}_{SchüS} &= \frac{\partial t}{\partial T} \Big|_{SchüS} \dot{T}_{SchüS} + \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{SchüS} \dot{r}_{SchüS} \\ &= \frac{\cos \chi_{Schü}}{B_{SchüS}} \left(1 + C_{SchüS} \sqrt{1 - \frac{r_P^2 B_{SchüS}}{r_{SchüS}^2 B(r_P)}} \right), \end{aligned} \quad (4.113)$$

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_{SchüS} &= \frac{\partial \chi}{\partial T} \Big|_{SchüS} \dot{T}_{SchüS} + \frac{\partial \chi}{\partial r} \Big|_{SchüS} \dot{r}_{SchüS} \\ &= \frac{-\cos \chi_{Schü}}{a_{SchüS} B_{SchüS}} \left(C_{SchüS} + \sqrt{1 - \frac{r_P^2 B_{SchüS}}{r_{SchüS}^2 B(r_P)}} \right), \end{aligned} \quad (4.114)$$

pour la trajectoire du haut et,

$$\begin{aligned} \dot{t}'_{SchüS} &= \frac{\partial t}{\partial T} \Big|'_{SchüS} \dot{T}'_{SchüS} + \frac{\partial t}{\partial r} \Big|'_{SchüS} \dot{r}'_{SchüS} \\ &= \frac{\cos \chi_{Schü}}{B'_{SchüS}} \left(1 + C'_{SchüS} \sqrt{1 - \frac{r_P'^2 B'_{SchüS}}{r_{SchüS}'^2 B(r'_P)}} \right), \end{aligned} \quad (4.115)$$

$$\begin{aligned} \dot{\chi}'_{SchüS} &= \frac{\partial \chi}{\partial T} \Big|'_{SchüS} \dot{T}'_{SchüS} + \frac{\partial \chi}{\partial r} \Big|'_{SchüS} \dot{r}'_{SchüS} \\ &= \frac{-\cos \chi_{Schü}}{a'_{SchüS} B'_{SchüS}} \left(C'_{SchüS} + \sqrt{1 - \frac{r_P'^2 B'_{SchüS}}{r_{SchüS}'^2 B(r'_P)}} \right), \end{aligned} \quad (4.116)$$

pour la trajectoire du bas.

4.2.3 Géodésiques de la lumière entre la source et la sphère de Schücking

Encore une fois, dans cette région dans laquelle règne la métrique de Friedmann, nous devons suivre la même procédure que précédemment dans la sous-section 4.2.1. On intègre les géodésiques de Friedmann (4.39) et (4.41) pour le chemin du haut en tenant compte

des conditions finales au point d'entrée dans la sphère de Schücking,

$$\begin{aligned} t &= t_{SchüS}, & \chi &= \chi_{Schü}, & \varphi &= \varphi_{SchüS}, \\ \dot{t} &= \dot{t}_{SchüS}, & \dot{\chi} &= \dot{\chi}_{SchüS}, & \dot{\varphi} &= \dot{\varphi}_{SchüS}. \end{aligned} \quad (4.117)$$

Une combinaison appropriée de (4.44) et (4.39) permet d'obtenir

$$\frac{d}{dp} \ln \dot{t} = \frac{d}{dp} \ln \frac{1}{a}, \quad (4.118)$$

qui s'intègre en tenant compte des conditions finales (4.117) pour donner

$$\dot{t} = E/a, \quad (4.119)$$

avec E une constante définie par

$$E = \dot{t}_{SchüS} a_{SchüS} = \frac{a_{SchüS} \cos \chi_{Schü}}{B_{SchüS}} \left(1 + C_{SchüS} \sqrt{1 - \frac{r_P^2 B_{SchüS}}{r_{SchüS}^2 B(r_P)}} \right). \quad (4.120)$$

L'équation (4.41) se simplifie, en remplaçant \dot{t} par son expression (4.119), en

$$\frac{d}{dp} \ln \dot{\varphi} = \frac{d}{dp} \ln \frac{1}{a^2 \sin^2 \chi}, \quad (4.121)$$

qui s'intègre compte tenu des conditions finales (4.117) pour donner

$$\dot{\varphi} = \frac{J}{a^2 \sin^2 \chi}, \quad (4.122)$$

où la constante J est définie par

$$J = \dot{\varphi}_{SchüS} a_{SchüS}^2 \sin^2 \chi_{Schü} = \frac{r_P}{\sqrt{B(r_P)}}. \quad (4.123)$$

En remplaçant l'expression de \dot{t} (4.119) dans (4.44), on obtient,

$$a^2 = E/\sqrt{\dot{\chi}^2 + \sin^2 \chi \dot{\varphi}^2}. \quad (4.124)$$

En substituant ce dernier résultat dans l'expression de $\dot{\varphi}$ (4.122), on trouve,

$$\sqrt{1 - \frac{(J/E)^2}{\sin^2 \chi}} \dot{\varphi} = -\frac{J/E}{\sin^2 \chi} \dot{\chi}, \quad (4.125)$$

en tenant compte du fait que pour la trajectoire du haut χ diminue au fur et à mesure que φ augmente. L'équation (4.125) se réduit, en utilisant le changement de variable

$$x = \frac{(J/E) \cot \chi}{\sqrt{1 - (J/E)^2}}, \quad (4.126)$$

à

$$d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (4.127)$$

qui par intégration, compte tenu des conditions finales (4.117), donne

$$\varphi = \varphi_{SchüS} + \arcsin \frac{(J/E) \cot \chi}{\sqrt{1 - (J/E)^2}} - \gamma, \quad (4.128)$$

avec la constante

$$\gamma = \arcsin \frac{(J/E) \cot \chi_{Schü}}{\sqrt{1 - (J/E)^2}}. \quad (4.129)$$

On en déduit alors l'expression de l'angle φ_S

$$\varphi_S = \varphi_{SchüS} + \arcsin \frac{(J/E) \cot \chi_{L,S}}{\sqrt{1 - (J/E)^2}} - \gamma, \quad (4.130)$$

où la distance géodésique $\chi_{L,S}$ entre la lentille et la source est donnée par une expression approchée analogue à (3.125),

$$\chi_{L,S} \simeq \chi_S - \chi_L, \quad (4.131)$$

du fait que l'angle de déflexion $-\varphi_S$ est de l'ordre de quelques secondes d'arc ($\simeq 10^{-5}$).

Le même raisonnement que pour le chemin du photon α_E donne pour le chemin du photon α'_E l'expression

$$\varphi = \varphi'_{SchüS} - \arcsin \frac{(J'/E') \cot \chi}{\sqrt{1 - (J'/E')^2}} + \gamma', \quad (4.132)$$

où les constantes E' , J' et γ' sont définies par

$$E' = \dot{t}'_{SchüS} a'_{SchüS} = \frac{a'_{SchüS} \cos \chi_{Schü}}{B'_{SchüS}} \left(1 + C'_{SchüS} \sqrt{1 - \frac{r_P'^2 B'_{SchüS}}{r_{SchüS}'^2 B(r'_P)}} \right), \quad (4.133)$$

$$J' = -\dot{\varphi}'_{SchüS} r_{SchüS}'^2 = \frac{r'_P}{\sqrt{B(r'_P)}}, \quad (4.134)$$

$$\gamma' = \arcsin \frac{(J'/E') \cot \chi_{Schü}}{\sqrt{1 - (J'/E')^2}}. \quad (4.135)$$

Par conséquent, l'expression de l'angle φ'_S est

$$\varphi'_S = \varphi'_{SchüS} - \arcsin \frac{(J'/E') \cot \chi_{L,S}}{\sqrt{1 - (J'/E')^2}} + \gamma'. \quad (4.136)$$

En général, les angles φ_S et φ'_S ne sont pas égaux. Pour satisfaire à l'égalité $\varphi_S = \varphi'_S$ qui correspond au fait que les deux photons partent du même point, la source, on ajuste la masse M . En d'autres termes, on fait varier la masse M jusqu'à ce que les deux angles φ_S et φ'_S coïncident. Une fois que la masse M appropriée et l'angle φ_S sont déterminés, on passe à la détermination du temps de retard.

4.2.3.1 Temps de retard

Le temps de retard du photon α_E par rapport au photon α'_E est défini par

$$\Delta t = (t_E - t_S) - (t'_E - t'_S) = t'_S - t_S, \quad (4.137)$$

avec $t_E = t'_E = 0$. Donc, cela revient à déterminer les temps d'émission des deux photons, t_S et t'_S . Pour ce faire, il faut d'abord calculer les distances parcourues par les photons entre la source et leurs points d'entrée dans la vacuole, $\chi_{S,Schüs}$ et $\chi'_{S,Schüs}$.

Commençons par établir l'équation qui lie la variable χ au facteur d'échelle a pour la trajectoire du haut. L'équation (4.57),

$$\frac{dt}{a} = \sqrt{d\chi^2 + \sin^2 \chi d\varphi^2}, \quad (4.138)$$

devient, en faisant usage de (4.125) et en tenant compte du fait que χ entre la source et la sphère the Schücking diminue au cours du temps t ,

$$\frac{dt}{a} = -\frac{d\chi}{h(\chi)}, \quad h(\chi) = \sqrt{1 - (J/E)^2 / \sin^2 \chi}, \quad (4.139)$$

qui est équivalent à

$$\frac{da}{af(a)} = -\frac{d\chi}{h(\chi)}. \quad (4.140)$$

Cette équation se simplifie, grâce au changement de variable

$$x = \frac{\cos \chi}{\sqrt{1 - (J/E)^2}}, \quad (4.141)$$

en

$$\frac{da}{af(a)} = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (4.142)$$

qui s'intègre facilement pour donner

$$\int_{a_S}^{a_{Schüs}} \frac{da}{af(a)} = \arcsin \frac{\cos \chi_{Schü}}{\sqrt{1 - (J/E)^2}} - \arcsin \frac{\cos \chi_{L,S}}{\sqrt{1 - (J/E)^2}}. \quad (4.143)$$

Comme prévu, ce résultat est similaire à (4.61) à condition que χ_L et χ_P soient respectivement remplacés par $\chi_{L,S}$ et J/E . On détermine alors par intégration numérique la valeur du facteur d'échelle à l'instant d'émission du photon a_S et ensuite la valeur de t_S par

intégration numérique de l'équation de Friedmann (4.5),

$$t_S = \int_{a_0}^{a_S} \frac{da}{f(a)}. \quad (4.144)$$

De la même manière, on trouve pour le chemin du bas l'équation

$$\int_{a'_S}^{a'_{Schüs}} \frac{da}{af(a)} = \arcsin \frac{\cos \chi_{Schü}}{\sqrt{1 - (J'/E')^2}} - \arcsin \frac{\cos \chi_{L,S}}{\sqrt{1 - (J'/E')^2}}, \quad (4.145)$$

qui permet de calculer numériquement la valeur du facteur d'échelle à l'instant d'émission du photon a'_S et ensuite la valeur de t'_S par intégration numérique de l'équation de Friedmann (4.5),

$$t'_S = \int_{a_0}^{a'_S} \frac{da}{f(a)}. \quad (4.146)$$

On peut également déterminer le temps t'_S par différence via une expression analytique approchée en termes du temps t_S . Les équations (4.143) et (4.145) peuvent s'écrire comme

$$\int_{t_S}^{t_{Schüs}} \frac{dt}{a(t)} = \chi_{S,Schüs}, \quad (4.147)$$

$$\int_{t'_S}^{t'_{Schüs}} \frac{dt}{a(t)} = \chi'_{S,Schüs}, \quad (4.148)$$

avec

$$\chi_{S,Schüs} = \arcsin \frac{\cos \chi_{Schü}}{\sqrt{1 - (J/E)^2}} - \arcsin \frac{\cos \chi_{L,S}}{\sqrt{1 - (J/E)^2}}, \quad (4.149)$$

$$\chi'_{S,Schüs} = \arcsin \frac{\cos \chi_{Schü}}{\sqrt{1 - (J'/E')^2}} - \arcsin \frac{\cos \chi_{L,S}}{\sqrt{1 - (J'/E')^2}}. \quad (4.150)$$

En combinant (4.147) et (4.148), on trouve

$$\chi'_{S,Schüs} - \chi_{S,Schüs} = \int_{t_{Schüs}}^{t'_{Schüs}} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_S}^{t'_S} \frac{dt}{a(t)} \simeq \frac{t'_{Schüs} - t_{Schüs}}{a_{Schüs}} - \frac{t'_S - t_S}{a_S}, \quad (4.151)$$

où on a utilisé le fait que le facteur d'échelle a ne varie de manière significative que sur des échelles de temps cosmologiques. Ceci d'une part. D'autre part, on a au deuxième ordre en J/E et J'/E' ($\simeq 10^{-6}$), compte tenu des expressions de $\chi_{E,SchüE}$ et de $\chi'_{E,SchüE}$, (4.149) et (4.150),

$$\chi'_{S,SchüS} - \chi_{S,SchüS} \simeq \frac{1}{2}(\cot \chi_{Schü} - \cot \chi_{L,S})[(J'/E')^2 - (J/E)^2]. \quad (4.152)$$

Ceci d'une part. D'autre part, on a en combinant (4.130) et (4.136) dans la même approximation,

$$(J'/E')^2 - (J/E)^2 \simeq \frac{(\varphi'_{SchüS} - \varphi_S)^2 - (\varphi_{SchüS} - \varphi_S)^2}{(\cot \chi_{Schü} - \cot \chi_{L,S})^2}, \quad (4.153)$$

où $\varphi_{SchüS} - \varphi_S$ et $|\varphi'_{SchüS} - \varphi_S|$ sont de l'ordre de 10^{-2} . En remplaçant $(J'/E')^2 - (J/E)^2$ par son expression (4.153) dans (4.152), on obtient

$$\chi'_{S,SchüS} - \chi_{S,SchüS} \simeq \frac{1}{2} \frac{(\varphi'_{SchüS} - \varphi_S)^2 - (\varphi_{SchüS} - \varphi_S)^2}{\cot \chi_{Schü} - \cot \chi_{L,S}}. \quad (4.154)$$

D'où alors, d'après (4.151), l'expression du temps de retard

$$\Delta t = t'_S - t_S \simeq a_S \left[\frac{t'_{SchüS} - t_{SchüS}}{a_{SchüS}} - \frac{1}{2} \frac{(\varphi'_{SchüS} - \varphi_S)^2 - (\varphi_{SchüS} - \varphi_S)^2}{\cot \chi_{Schü} - \cot \chi_{L,S}} \right]. \quad (4.155)$$

En résumé, le photon du chemin du haut, après avoir été le premier émis par la source $t'_S > t_S$ (4.155), pénètre également en premier dans la vacuole $t'_{SchüS} > t_{SchüS}$ (4.106), mais il en sort le dernier $t_{SchüE} > t'_{SchüE}$ (4.83) de telle manière à arriver sur Terre en même temps que le photon du chemin du bas $t_E = t'_E = 0$.

4.3 Application au système lentille-quasar SDSS J1004+4112

Dans cette dernière étape, nous appliquons nos résultats au système lentille-quasar SDSS J1004+4112 caractérisé par

$$\alpha = 5'' \pm 10\%, \quad \alpha' = 10'' \pm 10\%, \quad z_L = 0.68, \quad z_S = 1.734. \quad (4.156)$$

Les distances Terre-lentille χ_L et Terre-source χ_S sont calculées à partir de (4.37) avec $\Lambda = 0.77 \cdot 3 \text{ am}^{-2} \pm 20\%$.

On fait le choix d'une valeur $a_0 = 5 \text{ am}$ pour le facteur d'échelle sur Terre et on ajuste la masse M afin d'obtenir l'égalité $\varphi_S = \varphi'_S$, pour les valeurs maximale '+', centrale ' ± 0 ' et minimale '-' de Λ ainsi que pour α_E et α'_E . Une fois que l'angle polaire de coordonnée φ_S et la masse M appropriée sont déterminés, on calcule le temps de retard du photon α_E par rapport au photon α'_E , en utilisant la méthode de calcul par différence. Les résultats sont consignés dans les tableaux 4.1, 4.2, 4.3. Le cas d'une constante cosmologique nulle, $\Lambda = 0$, a également été étudié Tab. 4.4.

Les résultats obtenus peuvent être résumés comme suit

$$1.43 \cdot 10^{13} M_\odot \leq M \leq 2.16 \cdot 10^{13} M_\odot, \quad (4.157)$$

$$6.70'' \leq -\varphi_S \leq 13.35'', \quad (4.158)$$

$$6.52 \text{ ans} \leq \Delta t \leq 12.44 \text{ ans}, \quad (4.159)$$

en présence de la constante cosmologique et

$$1.34 \cdot 10^{13} M_\odot \leq M \leq 2.00 \cdot 10^{13} M_\odot, \quad (4.160)$$

$$8.27'' \leq -\varphi_S \leq 15.36'', \quad (4.161)$$

$$5.95 \text{ ans} \leq \Delta t \leq 11.12 \text{ ans}, \quad (4.162)$$

en l'absence de la constante cosmologique.

Comme on le voit directement sur les tableaux, une constante cosmologique croissante dans sa barre d'erreur entraîne une diminution de l'angle de déflexion, en accord avec l'affirmation de Rindler et Ishak.

Les tableaux (4.5) et (4.6) montrent comment la masse, l'angle de déflexion et le temps de retard varient en fonction des différentes valeurs du facteur d'échelle actuel a_0 , en prenant les valeurs centrales de Λ , α_E et α'_E . Contrairement au cas du modèle d'Einstein-Straus plat dans lequel les résultats restent les mêmes quelle que soit la valeur du facteur d'échelle actuel, les résultats obtenus dans le cas du modèle d'Einstein-Straus sphérique indiquent que la masse, l'angle de déflexion et le temps de retard diminuent considérablement au fur et à mesure que le facteur d'échelle actuel a_0 diminue au-dessous d'une valeur limite proche de 7 am (correspondant à une densité de courbure actuelle $\Omega_{k0} \simeq 0.02$), alors qu'au-dessus de cette valeur limite, les résultats deviennent indépendants de a_0 et compatibles avec le cas plat. Idem pour toutes les valeurs possibles de Λ , α_E et α'_E dans leurs barres d'erreur. Il convient de noter que ni la valeur de a_0 ni celle de Λ ne peuvent faire coïncider les angles φ_{SS} , bien qu'elles aient un effet sur l'angle de déflexion et le temps de retard.

$\alpha \pm 10\%$	+	+	+	± 0	± 0	± 0	-	-	-
$\alpha' \pm 10\%$	+	± 0	-	+	± 0	-	+	± 0	-
$M[10^{13}M_\odot]$	2.14	1.95	1.75	1.95	1.77	1.59	1.75	1.59	1.43
$-\varphi_S['']$	9.99	8.17	6.35	10.89	9.08	7.26	11.80	9.99	8.17
$\Delta t[\text{ans}]$	11.52	8.95	6.58	12.04	9.52	7.19	12.44	9.99	7.71

Tab. 4.1 Valeur maximale de Λ : $\Lambda = 0.77 \cdot 3 \text{ am}^{-2} + 20\%$, $a_0 = 5 \text{ am}$.

$\alpha \pm 10\%$	+	+	+	± 0	± 0	± 0	-	-	-
$\alpha' \pm 10\%$	+	± 0	-	+	± 0	-	+	± 0	-
$M[10^{13}M_\odot]$	2.16	1.97	1.77	1.97	1.79	1.61	1.77	1.61	1.45
$-\varphi_S['']$	10.95	8.96	6.97	11.95	9.96	7.97	12.95	10.95	8.96
$\Delta t[\text{ans}]$	11.47	8.92	6.56	11.98	9.48	7.17	12.36	9.94	7.68

Tab. 4.2 Valeur centrale de Λ : $\Lambda = 0.77 \cdot 3 \text{ am}^{-2}$, $a_0 = 5 \text{ am}$.

$\alpha \pm 10\%$	+	+	+	± 0	± 0	± 0	-	-	-
$\alpha' \pm 10\%$	+	± 0	-	+	± 0	-	+	± 0	-
$M[10^{13}M_{\odot}]$	2.14	1.95	1.75	1.95	1.77	1.59	1.75	1.59	1.43
$-\varphi_S[']$	11.59	9.48	7.38	12.64	10.54	8.43	13.70	11.59	9.48
$\Delta t[\text{ans}]$	11.27	8.77	6.46	11.76	9.32	7.05	12.13	9.75	7.55

Tab. 4.3 Valeur minimale de Λ : $\Lambda = 0.77 \cdot 3 \text{ am}^{-2} - 20\%$, $a_0 = 5 \text{ am}$.

$\alpha \pm 10\%$	+	+	+	± 0	± 0	± 0	-	-	-
$\alpha' \pm 10\%$	+	± 0	-	+	± 0	-	+	± 0	-
$M[10^{13}M_{\odot}]$	2.00	1.82	1.64	1.82	1.65	1.49	1.64	1.49	1.34
$-\varphi_S[']$	12.99	10.63	8.27	14.18	11.81	9.45	15.36	12.99	10.63
$\Delta t[\text{ans}]$	10.36	8.07	5.95	10.80	8.57	6.49	11.12	8.96	6.94

Tab. 4.4 $\Lambda = 0$, $a_0 = 5 \text{ am}$.

$a_0[\text{am}]$	0.1	0.3	0.5	0.7	1	2	3	4	5	6
$M[10^{13}M_{\odot}]$	0.04	0.29	0.62	0.91	1.22	1.62	1.73	1.77	1.79	1.80
$-\varphi_S[']$	4.03	6.64	8.05	8.82	9.38	9.85	9.93	9.95	9.96	9.96
$\Delta t[\text{years}]$	0.17	1.30	2.90	4.40	6.08	8.44	9.10	9.36	9.48	9.55

Tab. 4.5 $\Lambda = 0.77 \cdot 3 \text{ am}^{-2}$, $\alpha_E = 5''$, $\alpha'_E = 10''$.

$a_0[\text{am}]$	7	8	9	10	11	12	15	19	30	100
$M[10^{13}M_{\odot}]$	1.80	1.81	1.81	1.81	1.81	1.82	1.82	1.82	1.82	1.82
$-\varphi_S[']$	9.97	9.97	9.97	9.97	9.97	9.97	9.97	9.97	9.97	9.97
$\Delta t[\text{years}]$	9.59	9.62	9.64	9.65	9.66	9.67	9.69	9.70	9.71	9.71

Tab. 4.6 $\Lambda = 0.77 \cdot 3 \text{ am}^{-2}$, $\alpha_E = 5''$, $\alpha'_E = 10''$.

Deuxième partie

Génération et interprétation de solutions stationnaires en théorie d'Einstein-Maxwell

Chapitre 5

Les équations d'Einstein-Maxwell dans le cas stationnaire

Dans la théorie de la relativité générale, une région de l'espace-temps contenant un champ électromagnétique est régie par les équations d'Einstein-Maxwell. On dit qu'un champ d'Einstein-Maxwell est stationnaire s'il existe un champ de vecteurs de Killing $\xi_\mu(x)$ de genre temps, ce qui permet d'avoir, par un choix judicieux du système de coordonnées, des composantes $g_{\mu\nu}$ du tenseur métrique indépendantes du temps.

5.1 Les équations d'Einstein-Maxwell à 4 dimensions

Les équations couplées de Maxwell (sans source) et d'Einstein peuvent être dérivées de l'action d'Einstein-Maxwell (en unités gravitationnelles, $G = 1$, pour la gravitation et en unités de Gauss pour l'électromagnétisme)

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{|g|} (-R + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}), \quad (5.1)$$

où $F_{\mu\nu}$ est le tenseur antisymétrique champ électromagnétique,

$$F_{\mu\nu} = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (5.2)$$

où D_μ est la dérivée covariante associée à la métrique,

$$D_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho A_\rho. \quad (5.3)$$

Le tenseur énergie-impulsion

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{4\pi} \left(g^{\rho\sigma} F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) \quad (5.4)$$

(où S_m est l'action matérielle) est de trace nulle, $T \equiv g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 0$. Il en résulte que les équations d'Einstein-Maxwell s'écrivent

$$D_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\nu (\sqrt{|g|} F^{\mu\nu}) = 0, \quad (5.5)$$

$$R_\mu^\nu = 2 \left(F_{\mu\rho} F^{\nu\rho} - \frac{1}{4} \delta_\mu^\nu F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right). \quad (5.6)$$

5.2 Vecteurs de Killing

La méthode de Killing est une méthode rigoureuse pour la détermination des invariances d'une métrique sous certaines symétries données. On dit qu'une métrique $g_{\mu\nu}(x)$ est invariante sous la transformation

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu, \quad (5.7)$$

si

$$g_{\rho\sigma}(x) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} g_{\mu\nu}(x'). \quad (5.8)$$

Si on passe à la forme infinitésimale

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon \xi^\mu(x), \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad (5.9)$$

la condition d'invariance (5.8) se réduit, au premier ordre en ε , à

$$\xi^\mu \partial_\mu g_{\rho\sigma} + g_{\mu\sigma} \partial_\rho \xi^\mu + g_{\rho\nu} \partial_\sigma \xi^\nu = 0, \quad (5.10)$$

avec $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$, la dérivée partielle par rapport à la coordonnée x^μ . En utilisant $\xi_\mu = g_{\mu\nu} \xi^\nu$, (5.10) se réécrit sous une forme covariante comme

$$D_\mu \xi_\nu + D_\nu \xi_\mu = 0. \quad (5.11)$$

Les ξ^μ sont les composantes du vecteur de Killing associé à la transformation. Ce vecteur de Killing permet de construire un champ vectoriel défini par l'opérateur dérivation

$$\xi^\mu(x) \partial_\mu. \quad (5.12)$$

5.3 Réduction des équations d'Einstein-Maxwell à 3 dimensions

Comme on l'a déjà dit, l'espace-temps stationnaire admet un champ de vecteurs de Killing $\xi^\mu(x)$ de genre temps,

$$|\xi|^2 \equiv g_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu < 0. \quad (5.13)$$

Dans un tel espace-temps, le tenseur métrique se décompose en un scalaire d'espace $g_{00} = -f$ (potentiel gravi-électrique), un vecteur d'espace $g_{0i} = -f\omega_i$ (ω_i potentiel vecteur gravi-magnétique appelé aussi champ vectoriel de Kaluza-Klein) et un tenseur d'espace $g_{ij} = f^{-1}h_{ij} - f\omega_i\omega_j$, avec $i, j = 1, 2, 3$ et les champs f , ω_i ainsi que la métrique réduite h_{ij} sont

exprimés en termes des coordonnées d'espace x^i . La métrique s'écrit sous forme compacte comme [53, 17]

$$ds^2 = -f(dt - \omega_i dx^i)^2 + f^{-1}h_{ij}dx^i dx^j. \quad (5.14)$$

Cette décomposition est appelée aussi “réduction de Kaluza-Klein” par analogie avec la réduction de 5 à 4 dimensions. Le champ électromagnétique se décompose aussi en un champ électrique et un champs magnétique

$$E_i = -F_{i0}, \quad B_i = F_{i0}^* = \epsilon_{ijk}F^{jk}, \quad (5.15)$$

qui, en l'absence de source matérielle ($\text{rot}\vec{B} = 0$), dérivent des potentiels scalaires v et u ,

$$\vec{E} = -\nabla v, \quad \vec{B} = \nabla u. \quad (5.16)$$

Donc

$$F_{i0} = \partial_i v, \quad F^{ij} = fh^{-1/2}\epsilon^{ijk}\partial_k u. \quad (5.17)$$

La composante vectorielle d'espace des équations d'Einstein, d'après (5.6), est

$$R_0^i = 2F_{0j}F^{ij}, \quad (5.18)$$

où le membre de gauche

$$R_0^i = -\frac{1}{2}f[\nabla \wedge (f^2 \nabla \wedge \vec{\omega})]^i, \quad (5.19)$$

et le membre de droite

$$2F_{0j}F^{ij} = 2f(\nabla u \wedge \nabla v)^i = f[\nabla \wedge (u\nabla v - v\nabla u)]^i. \quad (5.20)$$

Donc, l'équation (5.18) s'intègre par

$$-f^2 h^{-1/2} h_{ij} \epsilon^{jkl} \partial_k \omega_l + 2(u\partial_i v - v\partial_i u) = \partial_i \chi, \quad (5.21)$$

où χ est le potentiel de twist. Notons que les potentiels scalaires f , χ , v et u peuvent être regroupés en deux potentiels complexes, dits potentiels d'Ernst,

$$\mathcal{E} = f - |\psi|^2 + i\chi, \quad \psi = v + iu. \quad (5.22)$$

Les équations d'Einstein-Maxwell restantes se réduisent aux équations d'Ernst [25, 26]

$$f\nabla^2\mathcal{E} = \nabla\mathcal{E} \cdot (\nabla\mathcal{E} + 2\psi^*\nabla\psi), \quad (5.23)$$

$$f\nabla^2\psi = \nabla\psi \cdot (\nabla\mathcal{E} + 2\psi^*\nabla\psi), \quad (5.24)$$

$$f^2 R_{ij}(h) = \text{Re} \left[\frac{1}{2} \mathcal{E}_{,(i} \mathcal{E}_{,j)}^* + 2\psi \mathcal{E}_{,(i} \psi_{,j)}^* - 2\mathcal{E} \psi_{,(i} \psi_{,j)}^* \right], \quad (5.25)$$

avec, $i \equiv \partial_i$, $(i, j) \equiv (ij + ji)/2$. Les produits scalaires et le Laplacien sont calculés à partir de la métrique réduite h_{ij} .

5.4 La symétrie $SU(2, 1)$ du modèle sigma (Kinnersley)

Les équations d'Ernst (5.23), (5.24) et (5.25) sont invariantes sous un ensemble de huit transformations, $(\mathcal{E}, \psi) \longrightarrow (\mathcal{E}', \psi')$, qui changent les potentiels d'Ernst sans modifier le membre de gauche de (5.25), donc la métrique réduite h_{ij} à trois dimensions. Ces transformations engendrent le groupe $SU(2, 1)$ [16]. Certaines de ces transformations sont des transformations de jauge généralisées (transformations de coordonnées ne modifiant pas la métrique réduite h_{ij} et transformations de jauge électromagnétiques), trois seulement (symétries cachées) permettent d'engendrer une solution vraiment nouvelle à partir d'une solution initiale donnée (e.g. la solution chargée de Reissner-Nordström à partir de la solution neutre de Schwarzschild).

Une représentation plus simple à utiliser est la représentation de Kinnersley [54]. On

introduit trois potentiels complexes, U , V et W , reliés aux potentiels d'Ernst par

$$\mathcal{E} = \frac{U - W}{U + W}, \quad \psi = \frac{V}{U + W}, \quad (5.26)$$

conduisant à

$$f = \operatorname{Re} \mathcal{E} + |\psi|^2 = \frac{|U|^2 + |V|^2 - |W|^2}{|U + W|^2}. \quad (5.27)$$

La redondance de cette paramétrisation (trois potentiels complexes = six potentiels réels, au lieu de quatre initialement) n'est qu'apparente, les potentiels de Kinnersley n'étant définis par (5.26) qu'à une dilatation complexe

$$(U, V, W) \rightarrow \zeta(U, V, W), \quad \zeta \in \mathbb{C}, \quad (5.28)$$

près. On montre alors que le groupe $SU(2, 1)$ à huit générateurs agit linéairement sur le "spineur" (U, V, W) , laissant la norme $|U|^2 + |V|^2 - |W|^2$ et la métrique réduite $d\sigma^2 \equiv h_{ij} dx_i dx_j$ invariantes.

Chapitre 6

Génération de solutions en rotation

Notre étude dans ce chapitre concerne une extension de la méthode de génération de solutions en rotation par transformation finie de Geroch [23], en introduisant un paramètre supplémentaire α associé à la dualité électromagnétique. Nous voulons savoir si les solutions en rotations ainsi générées dépendent de façon significative du paramètre α (si par exemple elles possèdent un moment quadripolaire). Pour cela, nous allons traiter cette question dans quelques espaces-temps, statique, non statique, neutre et non neutre.

6.1 La transformation finie de Geroch $\Pi_\alpha^{-1}\mathcal{R}(\Omega)\Pi_\alpha$

Les transformations du groupe $SU(2, 1)$ ne permettent pas de relier directement une solution statique, monopolaire (telle que la solution à symétrie sphérique de Schwarzschild) à une solution en rotation uniforme, avec moment dipolaire (telle que la solution à symétrie axiale de Kerr).

Cependant, le groupe de Geroch permet de combiner à l'infini des transformations infinitésimales de $SU(2, 1)$ (associé à la réduction dimensionnelle par rapport à un vecteur

de Killing donné) avec des transformations linéaires infinitésimales dans l'espace à deux dimensions engendré par deux vecteurs de Killing ∂_t et ∂_φ .

Une méthode permettant de générer une solution en rotation à partir d'une solution statique a été formulée par Clément en 1998 [24]. Cette méthode combine une certaine transformation Π de $SU(2, 1)$ avec une transformation de coordonnées $\mathcal{R}(\Omega)$ (passage à un repère tournant à la vitesse angulaire Ω) agissant sur une solution intermédiaire non asymptotiquement plate. L'application de la transformation inverse Π^{-1} va conduire à une solution asymptotiquement plate. Cette combinaison de transformations $\Pi^{-1}\mathcal{R}(\Omega)\Pi$ étant un cas particulier des transformations de Geroch.

Si la solution initiale est asymptotiquement plate et monopolaire, donc asymptotique à la solution de Schwarzschild,

$$ds^2 = -(1 - 2m/r)dt^2 + (1 - 2m/r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad A = 0, \quad (6.1)$$

où les potentiels d'Ernst sont de la forme (5.26) avec $U = r/m - 1$, $V = 0$ et $W = 1$, la transformation

$$\Pi : \begin{cases} U \rightarrow -V \\ V \rightarrow U \\ W \rightarrow W \end{cases} \quad (6.2)$$

donne une solution non asymptotiquement plate (chapeauté), plus précisément asymptotique à la solution de Bertotti-Robinson,

$$d\hat{s}^2 = m^2 \left[(x^2 - 1)d\tau^2 - \frac{dx^2}{x^2 - 1} - \frac{dy^2}{1 - y^2} - (1 - y^2)d\varphi^2 \right], \quad \hat{A} = mxd\tau, \quad (6.3)$$

avec $\tau = m^{-1}t$, $x = r/m - 1$ et $y = \cos\theta$. Ensuite, le passage au repère tournant défini par

$$\mathcal{R}(\Omega) : d\varphi = d\varphi' + \Omega dt, \quad (6.4)$$

préserve toujours le caractère asymptotiquement Bertotti-Robinson de la solution obtenue (pour une solution initiale électrostatique, le passage à ce repère tournant induit un champ magnétique). L'application de la transformation inverse Π^{-1} permet d'obtenir à la fin une solution asymptotiquement plate avec en général un moment dipolaire magnétique et un moment dipolaire gravimagnétique, c'est-à-dire un moment angulaire.

Nous allons généraliser cette méthode en considérant une famille de transformations à un paramètre α , $\Pi_\alpha^{-1}\mathcal{R}(\Omega)\Pi_\alpha$, et ainsi établir les formes les plus générales des potentiels d'Ernst de la solution en rotation.

Commençons dans une première étape par la transformation linéaire complexe

$$\Pi_\alpha : \begin{cases} U \rightarrow -e^{i\alpha}V \\ V \rightarrow e^{-i\alpha}U \\ W \rightarrow W \end{cases}, \quad (6.5)$$

qui transforme, en utilisant (5.26), les potentiels d'Ernst (\mathcal{E}, ψ) d'une métrique initiale donnée (asymptotiquement plate) en $(\hat{\mathcal{E}}, \hat{\psi})$ d'une métrique chapeauté (non asymptotiquement plate) via les expressions suivantes (5.26)

$$\hat{\mathcal{E}} = \frac{\hat{U} - \hat{W}}{\hat{U} + \hat{W}} = -\frac{1 - \mathcal{E} + 2e^{i\alpha}\psi}{1 - \mathcal{E} - 2e^{i\alpha}\psi}, \quad \hat{\psi} = \frac{\hat{V}}{\hat{U} + \hat{W}} = e^{-i\alpha} \frac{1 + \mathcal{E}}{1 - \mathcal{E} - 2e^{i\alpha}\psi}, \quad (6.6)$$

avec une métrique réduite invariante,

$$\hat{h}_{ij} = h_{ij}. \quad (6.7)$$

Pour illustrer la procédure à suivre, prenons la forme générale d'une métrique stationnaire axisymétrique écrite en coordonnées de Weyl (x^1, x^2, φ) ,

$$d\hat{s}^2 = -\hat{f}(dt - \hat{\omega}d\varphi)^2 + \hat{f}^{-1}(\gamma_{mn}dx^m dx^n + \rho^2 d\varphi^2), \quad (6.8)$$

avec

$$\hat{\omega}_i dx^i = \hat{\omega}(x^1, x^2) d\varphi, \quad \rho_{,m}{}^{;m} = 0, \quad m, n = 1, 2. \quad (6.9)$$

Les coordonnées cylindriques ($x^1 = \rho, x^2 = z, \varphi$) que nous allons travailler avec sont un cas particulier des coordonnées de Weyl. Les fonctions de la métrique \hat{f} (5.22) et $\hat{\omega}$ (5.21) sont calculés à partir des potentiels $\hat{\mathcal{E}}$ et $\hat{\psi}$,

$$\hat{f} = \text{Re } \hat{\mathcal{E}} + |\hat{\psi}|^2, \quad (6.10)$$

$$\tilde{\partial}_m \hat{\omega} = -\rho \hat{f}^{-2} \text{Im}(\partial_m \hat{\mathcal{E}} + 2\hat{\psi}^* \partial_m \hat{\psi}), \quad (6.11)$$

avec

$$\tilde{\partial}_m = \gamma^{-1/2} \gamma_{mn} \epsilon^{np} \partial_p. \quad (6.12)$$

Dans une deuxième étape, appliquons sur la solution “chapeauté” la transformation de coordonnées \mathcal{R} (6.4) qui permet de passer à un repère tournant à la vitesse Ω . La métrique (6.8) se transforme en une nouvelle métrique (qui est toujours non asymptotiquement plate) avec les fonctions [24]

$$\hat{f}' = \hat{f}[(1 - \Omega \hat{\omega})^2 - \Omega^2 \rho^2 \hat{f}^{-2}], \quad (6.13)$$

$$(1 + \Omega \hat{\omega}') \hat{f}' = (1 - \Omega \hat{\omega}) \hat{f}, \quad (6.14)$$

$$\hat{f}'^{-1} \gamma'_{mn} = \hat{f}^{-1} \gamma_{mn}, \quad \rho' = \rho. \quad (6.15)$$

Les composantes transformées correspondantes du champ électromagnétique sont

$$F'_{m0} = F_{m0} + \Omega F_{m3}, \quad F'_{m3} = F_{m3}, \quad (6.16)$$

ce qui donne, en faisant usage des relations (5.17), le potentiel d’Ernst

$$\partial_m \hat{\psi}' = \partial_m \hat{v}' + i \partial_m \hat{u}' = [(1 - \Omega \hat{\omega}) \partial_m + i \Omega \rho \hat{f}^{-1} \tilde{\partial}_m] \hat{\psi}. \quad (6.17)$$

Cette équation (6.17) s'intègre pour donner

$$\hat{\psi}' = (1 - \Omega\hat{\omega})\hat{\psi} + i\Omega\hat{\phi}, \quad (6.18)$$

où le potentiel dual d'Ernst $\hat{\phi}$ (qui s'obtient aussi par intégration de la deuxième équation d'Ernst (5.24)) est défini par

$$\partial_m \hat{\phi} = \rho \hat{f}^{-1} \tilde{\partial}_m \hat{\psi} - i \hat{\psi} \partial_m \hat{\omega}. \quad (6.19)$$

En utilisant les expressions de \hat{f}' (6.13) et de $\hat{\psi}'$ (6.18), on en déduit la partie réelle de $\hat{\mathcal{E}}'$,

$$\text{Re } \hat{\mathcal{E}}' = \hat{f}' - |\hat{\psi}'|^2 = (1 - \Omega\hat{\omega})^2 \text{Re } \hat{\mathcal{E}} - 2\Omega(1 - \Omega\hat{\omega}) \text{Im}(\hat{\phi}^* \hat{\psi}) - \Omega^2(\rho^2 \hat{f}^{-1} + |\hat{\phi}|^2). \quad (6.20)$$

On trouve, après calcul (Annexe A), pour la partie imaginaire de $\hat{\mathcal{E}}'$ l'expression

$$\text{Im } \hat{\mathcal{E}}' = (1 - \Omega\hat{\omega})^2 \text{Im } \hat{\mathcal{E}} + 2\Omega[\hat{\mathcal{G}} + (1 - \Omega\hat{\omega}) \text{Re}(\hat{\psi}^* \hat{\phi})], \quad (6.21)$$

où la nouvelle fonction $\hat{\mathcal{G}}$ est reliée au potentiel dual d'Ernst $\hat{\mathcal{F}}$,

$$\partial_m \hat{\mathcal{F}} = \rho \hat{f}^{-1} \tilde{\partial}_m \hat{\mathcal{E}} - i \hat{\mathcal{E}} \partial_m \hat{\omega}, \quad (6.22)$$

par

$$\partial_m \hat{\mathcal{G}} = (1 - \Omega\hat{\omega}) \text{Re } \partial_m (\hat{\mathcal{F}} + z) + \Omega \text{Im}[\rho^2 \hat{f}^{-2} (\partial_m \hat{\mathcal{E}}/2 + \hat{\psi}^* \partial_m \hat{\psi}) - \hat{\phi}^* \partial_m \hat{\phi}]. \quad (6.23)$$

Il s'ensuit que l'expression du potentiel $\hat{\mathcal{E}}'$ prend la forme suivante

$$\hat{\mathcal{E}}' = (1 - \Omega\hat{\omega})^2 \hat{\mathcal{E}} - \Omega^2(\rho^2 \hat{f}^{-1} + |\hat{\phi}|^2) + 2i\Omega[\hat{\mathcal{G}} + (1 - \Omega\hat{\omega}) \hat{\psi}^* \hat{\phi}]. \quad (6.24)$$

Dans une troisième étape, nous allons appliquer la transformation inverse Π_α^{-1} pour

transformer les potentiels d'Ernst $(\hat{\mathcal{E}}', \hat{\psi}')$ en (\mathcal{E}', ψ') d'une solution finale asymptotiquement plate, via les expressions suivantes

$$\mathcal{E}' = -\frac{1 - \hat{\mathcal{E}}' - 2e^{i\alpha}\hat{\psi}'}{1 - \hat{\mathcal{E}}' + 2e^{i\alpha}\hat{\psi}'}, \quad \psi' = e^{-i\alpha} \frac{1 + \hat{\mathcal{E}}'}{1 - \hat{\mathcal{E}}' + 2e^{i\alpha}\hat{\psi}'}. \quad (6.25)$$

6.2 Solution initiale non statique et neutre

Nous allons montrer dans ce qui suit que pour une solution initiale non statique (ou statique) et électriquement neutre, le paramètre α n'a pas d'effet sur la solution finale.

Une solution non statique ($f, \omega \neq 0$) et neutre ($\psi = 0$) est caractérisée par

$$\mathcal{E} = f + i\chi, \quad (6.26)$$

où le potentiel de twist χ est défini par

$$\partial_m \chi = -f^2 \rho^{-1} \tilde{\partial}_m \omega. \quad (6.27)$$

La transformation Π_α (6.6) donne les nouveaux potentiels $(\hat{\psi}, \hat{\mathcal{E}})$,

$$\hat{\mathcal{E}} = -1, \quad \hat{\psi} = e^{-i\alpha} \hat{\psi}_0, \quad (6.28)$$

où $\hat{\psi}_0$ ne dépend pas du paramètre α et est donné par

$$\hat{\psi}_0 = \frac{1 + \mathcal{E}}{1 - \mathcal{E}}. \quad (6.29)$$

D'où on tire les nouvelles fonctions de la métrique $(\hat{f}, \hat{\omega})$ indépendantes du paramètre α ,

$$\hat{f} = \hat{f}_0 = |\hat{\psi}_0|^2 - 1, \quad \hat{\omega} = \hat{\omega}_0, \quad (6.30)$$

avec $\hat{\omega}_0$ donné par

$$\tilde{\partial}_m \hat{\omega}_0 = -2\hat{f}_0^{-2} \rho \operatorname{Im}(\hat{\psi}_0^* \partial_m \hat{\psi}_0). \quad (6.31)$$

Le potentiel dual (6.22) ne dépend pas non plus de α tandis que $\hat{\phi}$ (6.19) n'en dépend que trivialement par une transformation de dualité électromagnétique,

$$\hat{\mathcal{F}} = -i\hat{\omega}_0, \quad \hat{\phi} = e^{-i\alpha} \hat{\phi}_0, \quad (6.32)$$

où $\hat{\phi}_0$ est défini par

$$\partial_m \hat{\phi}_0 = \rho \hat{f}_0^{-1} \tilde{\partial}_m \hat{\psi}_0 - i\hat{\psi}_0 \partial_m \hat{\omega}_0. \quad (6.33)$$

Le passage à un repère en rotation, par application de la transformation \mathcal{R} (6.4), transforme, d'après (6.13) et (6.14), les fonctions de la métrique (\hat{f} , $\hat{\omega}$) en

$$\hat{f}' = \hat{f}'_0 = \hat{f}_0 [(1 - \Omega \hat{\omega}_0)^2 - \Omega^2 \rho^2 \hat{f}_0^{-2}], \quad (6.34)$$

$$\hat{\omega}' = \hat{\omega}'_0 = \frac{\hat{\omega}_0 (1 - \Omega \hat{\omega}_0) + \Omega \rho^2 \hat{f}_0^{-2}}{(1 - \Omega \hat{\omega}_0)^2 - \Omega^2 \rho^2 \hat{f}_0^{-2}}, \quad (6.35)$$

qui sont indépendants du paramètre α . Les potentiels d'Ernst ($\hat{\psi}$, $\hat{\mathcal{E}}$) se sont transformés, d'après (6.18) et (6.24), en

$$\hat{\psi}' = e^{-i\alpha} \hat{\psi}'_0, \quad \hat{\psi}'_0 = (1 - \Omega \hat{\omega}_0) \hat{\psi}_0 + i\Omega \hat{\phi}_0, \quad (6.36)$$

$$\hat{\mathcal{E}}' = \hat{\mathcal{E}}'_0 = -(1 - \Omega \hat{\omega}_0)^2 - \Omega^2 (\rho^2 \hat{f}_0^{-1} + |\hat{\phi}_0|^2) + 2i\Omega [\hat{\mathcal{G}} + (1 - \Omega \hat{\omega}_0) \hat{\psi}_0^* \hat{\phi}_0], \quad (6.37)$$

où le potentiel $\hat{\mathcal{E}}'$ est indépendant du paramètre α et la fonction $\hat{\mathcal{G}}$ (6.23) est donnée par

$$\partial_m \hat{\mathcal{G}} = (1 - \Omega \hat{\omega}_0) \partial_m z + \Omega \operatorname{Im}(\rho^2 \hat{f}_0^{-2} \hat{\psi}_0^* \partial_m \hat{\psi}_0 - \hat{\phi}_0^* \partial_m \hat{\phi}_0). \quad (6.38)$$

La transformation finale Π_α^{-1} (6.25) donne les potentiels d'Ernst de la solution finale

$$\mathcal{E}' = -\frac{1 - \hat{\mathcal{E}}'_0 - 2\hat{\psi}'_0}{1 - \hat{\mathcal{E}}'_0 + 2\hat{\psi}'_0}, \quad \psi' = e^{-i\alpha} \frac{1 + \hat{\mathcal{E}}'_0}{1 - \hat{\mathcal{E}}'_0 + 2\hat{\psi}'_0}, \quad (6.39)$$

On remarque que le potentiel \mathcal{E}' est indépendant du paramètre α tandis que le potentiel ψ' n'en dépend que trivialement par une transformation de dualité électromagnétique. Il vaut aussi la peine de noter que la nouvelle solution n'est pas neutre, mais on peut toujours éliminer la charge électrique par une transformation appropriée (e.g. dans le cas de la solution initiale statique de type Schwarzschild, l'élimination de la charge électrique se fait par le biais d'une dilatation du temps conduisant à une solution finale en rotation de type Kerr [24]).

6.3 Solution initiale non statique et non neutre

Toutes les solutions connues explicitement des équations d'Einstein-Maxwell dépendent seulement de deux potentiels. Nous allons supposer de plus que les potentiels d'Ernst complexes sont liés linéairement, $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\psi)$, ce qui est le cas de beaucoup de solutions connues. Dans le cas général, on ne peut rien dire, les formules étant trop compliquées.

Nous allons montrer, contrairement à la solution électriquement neutre, que pour une solution initiale non neutre la solution finale dépend effectivement du paramètre α . Dans le cas particulier de la solution non statique de Kerr-Newman, l'effet de ce paramètre se présente sous forme d'une charge gravimagnétique NUT (Newman, Unti et Tamburino).

Les potentiels d'Ernst correspondant à une métrique non statique ($f, \omega \neq 0$) et non neutre ($\psi \neq 0$) sont

$$\mathcal{E} = f - |\psi|^2 + i\chi, \quad \psi = v + iu. \quad (6.40)$$

Nous allons nous intéresser à une classe de solutions dépendant d'un potentiel complexe ψ

lié linéairement au potentiel \mathcal{E} par la relation (telle que $\mathcal{E}(\infty) = 1$ et $\psi(\infty) = 0$)

$$\mathcal{E} = 1 - 2k\psi, \quad (6.41)$$

où $k = e^{i\eta}|k|$ est un paramètre complexe.

La transformation Π_α (6.6) donne

$$\hat{\psi} = e^{-i\alpha}\lambda\hat{\psi}_0, \quad \hat{\mathcal{E}} = 1 - 2\lambda k = \text{const}, \quad (6.42)$$

où $\hat{\psi}_0$ (indépendant de α) et λ sont donnés par

$$\hat{\psi}_0 = \psi^{-1} - k, \quad \lambda^{-1} = k - e^{i\alpha}. \quad (6.43)$$

On en tire

$$\hat{f} = |\lambda|^2 \hat{f}_0, \quad \text{Re } \hat{\mathcal{E}} = |\lambda|^2(1 - |k|^2), \quad \text{Im } \hat{\mathcal{E}} = \hat{\chi} = -2|k||\lambda|^2 \sin(\alpha - \eta), \quad \hat{\omega} = |\lambda|^{-2} \hat{\omega}_0, \quad (6.44)$$

où \hat{f}_0 et $\hat{\omega}_0$ ne dépendent pas de α et sont définis par

$$\hat{f}_0 = f|\psi|^{-2}, \quad \tilde{\partial}_m \hat{\omega}_0 = -2\rho \hat{f}_0^{-2} \text{Im}(\hat{\psi}_0^* \partial_m \hat{\psi}_0). \quad (6.45)$$

Le calcul des potentiels duals (6.19) et (6.22) donne

$$\hat{\phi} = e^{-i\alpha} \lambda^{*-1} \hat{\phi}_0, \quad \hat{\mathcal{F}} = -i|\lambda|^{-2} \hat{\mathcal{E}} \hat{\omega}_0, \quad (6.46)$$

où $\hat{\phi}_0$ ne dépend pas de α et est défini par

$$\partial_m \hat{\phi}_0 = \rho \hat{f}_0^{-1} \tilde{\partial}_m \hat{\psi}_0 - i \hat{\psi}_0 \partial_m \hat{\omega}_0. \quad (6.47)$$

Le passage à un repère en rotation, \mathcal{R} (6.4), donne pour les fonctions de la métrique les

expressions

$$\hat{f}' = |\lambda|^2 \hat{f}_0 [(1 - \Omega_\lambda \hat{\omega}_0)^2 - \Omega_\lambda^2 \rho^2 \hat{f}_0^{-2}], \quad (6.48)$$

$$\hat{\omega}' = |\lambda|^{-2} \frac{\hat{\omega}_0 - \Omega_\lambda (\hat{\omega}_0^2 - \rho^2 \hat{f}_0^{-2})}{(1 - \Omega_\lambda \hat{\omega}_0)^2 - \Omega_\lambda^2 \rho^2 \hat{f}_0^{-2}}, \quad (6.49)$$

où, dans un but de commodité, on a posé

$$\Omega_\lambda = \Omega |\lambda|^{-2}. \quad (6.50)$$

La métrique réduite γ'_{mn} (6.15) dépend de α ,

$$\gamma'_{mn} = [(1 - \Omega_\lambda \hat{\omega}_0)^2 - \Omega_\lambda^2 \rho^2 \hat{f}_0^{-2}] \gamma_{mn}, \quad (6.51)$$

mais seulement par une renormalisation du paramètre Ω ($\Omega \rightarrow \Omega_\lambda$). Les potentiels d'Ernst (6.18) et (6.24) prennent les formes suivantes

$$\hat{\psi}' = \lambda e^{-i\alpha} [(1 - \Omega_\lambda \hat{\omega}_0) \hat{\psi}_0 + i \Omega_\lambda \hat{\phi}_0], \quad (6.52)$$

$$\hat{\mathcal{E}}' = (1 - \Omega_\lambda \hat{\omega}_0)^2 \hat{\mathcal{E}} - |\lambda|^2 \Omega_\lambda^2 (\rho^2 \hat{f}_0^{-1} + |\hat{\phi}_0|^2) + 2i |\lambda|^2 \Omega_\lambda [\hat{\mathcal{G}} + (1 - \Omega_\lambda \hat{\omega}_0) \hat{\psi}_0^* \hat{\phi}_0], \quad (6.53)$$

avec (6.23)

$$\partial_m \hat{\mathcal{G}} = (1 - \Omega_\lambda \hat{\omega}_0) \partial_m [z - 2|k| \hat{\omega}_0 \sin(\alpha - \eta)] + \Omega_\lambda \text{Im}(\hat{\phi}_0 \partial_m \hat{\phi}_0^* + \rho^2 \hat{f}_0^{-2} \hat{\psi}_0^* \partial_m \hat{\psi}_0). \quad (6.54)$$

Contrairement aux résultats obtenus précédemment dans le cas de la solution neutre, il est à remarquer ici que le paramètre α apparaît explicitement, à l'occasion des termes en λ (6.43), dans les expressions des potentiels $\hat{\psi}'$ et $\hat{\mathcal{E}}'$. Ensuite, la solution finale que nous allons obtenir par application de la transformation inverse Π_α^{-1} va aussi dépendre du paramètre α .

6.3.1 Application à la solution de Kerr-Newman

Les potentiels d'Ernst qui correspondent à la solution de Kerr-Newman en coordonnées sphéroïdales prolates sont donnés par

$$\mathcal{E} = \frac{\mu(px - iqy) - m}{\mu(px - iqy) + m}, \quad \psi = \frac{e}{\mu(px - iqy) + m}, \quad (6.55)$$

avec

$$\mu^2 = m^2 - e^2, \quad q = a/\mu, \quad p^2 + q^2 = 1, \quad (6.56)$$

où $a = J/m$ est le moment angulaire par unité de masse. Donc, les potentiels d'Ernst ψ et \mathcal{E} sont liés linéairement par (6.41) avec

$$k = m/e. \quad (6.57)$$

Les coordonnées sphéroïdales prolates sont reliées aux coordonnées canoniques de Weyl et aux coordonnées de Boyer-Lindquist (r, θ) par

$$\rho^2 = \mu^2 p^2 (x^2 - 1)(1 - y^2), \quad z = \mu p x y, \quad \mu p x = r - m, \quad y = \cos \theta. \quad (6.58)$$

On en tire les expressions des fonctions de la métrique

$$f = \frac{\mu^2 F(x, y)}{(\mu p x + m)^2 + \mu^2 q^2 y^2}, \quad \omega = \frac{q(1 - y^2)}{\mu F(x, y)} [e^2 - 2m(\mu p x + m)], \quad (6.59)$$

où on a défini la fonction $F(x, y)$ comme

$$F(x, y) = p^2 x^2 + q^2 y^2 - 1. \quad (6.60)$$

Le calcul des γ_{mn} de la métrique réduite donne

$$\gamma_{11} = \frac{\mu^2 F(x, y)}{x^2 - 1}, \quad \gamma_{22} = \frac{\mu^2 F(x, y)}{1 - y^2}. \quad (6.61)$$

La transformation Π_α (6.6) donne (6.42), (6.44) et (6.46),

$$\hat{\psi} = e^{-i\alpha} \lambda \hat{\psi}_0, \quad \hat{\mathcal{E}} = 1 - 2\lambda m/e, \quad (6.62)$$

$$\hat{f} = |\lambda|^2 \hat{f}_0, \quad \hat{\omega} = |\lambda|^{-2} \hat{\omega}_0, \quad (6.63)$$

$$\hat{\phi} = e^{-i\alpha} \lambda^{*-1} \hat{\phi}_0, \quad \hat{\mathcal{F}} = -i|\lambda|^{-2} \hat{\mathcal{E}} \hat{\omega}_0, \quad (6.64)$$

avec

$$\hat{\psi}_0 = \mu(px - iqy)/e, \quad \hat{f}_0 = \mu^2 F(x, y)/e^2. \quad (6.65)$$

Le calcul de $\hat{\omega}_0$ (6.45) et $\hat{\phi}_0$ (6.45) donne après intégration

$$\hat{\omega}_0 = e^2 \frac{q(1-y^2)}{\mu F(x, y)}, \quad \hat{\phi}_0 = -(ey + i\hat{\psi}_0 \hat{\omega}_0) = -ep \frac{p(x^2-1)y + iqx(1-y^2)}{F(x, y)}. \quad (6.66)$$

Le passage à un repère en rotation \mathcal{R} (6.4) donne les nouvelles fonctions de la métrique (6.48) et (6.49),

$$\hat{f}' = |\lambda|^2 \mu'^2 F'(x, y)/e^2, \quad \hat{\omega}' = |\lambda|^{-2} e^2 \frac{q'(1-y^2)}{\mu' F'(x, y)}, \quad (6.67)$$

où on a défini cette fois-ci une fonction $F'(x, y)$ par

$$F'(x, y) = p'^2 x^2 + q'^2 y^2 - 1, \quad (6.68)$$

avec les nouveaux paramètres

$$p'^2 = \beta^{-2} p^2, \quad q'^2 = \beta^{-2} (1 + \nu)^2 q^2, \quad p'^2 + q'^2 = 1, \quad (6.69)$$

$$\mu'^2 = \mu^2 \beta^2, \quad \beta^2 = p^2 + (1 + \nu)^2 q^2, \quad \nu = e^2 \Omega_\lambda / a. \quad (6.70)$$

Les nouveaux γ'_{mn} de la métrique (6.15) dépendent du paramètre α et sont donnés par

$$\gamma'_{mn} = \beta^2 \frac{F'(x, y)}{F(x, y)} \gamma_{mn}. \quad (6.71)$$

D'où les composantes non nulles,

$$\gamma'_{11} = \frac{\mu'^2 F'(x, y)}{x^2 - 1}, \quad \gamma'_{22} = \frac{\mu'^2 F'(x, y)}{1 - y^2}. \quad (6.72)$$

Le nouveau potentiel d'Ernst est (6.52)

$$\hat{\psi}' = e^{-i\alpha} \lambda (\hat{\psi}_0 - i\Omega |\lambda|^{-2} e y) = e^{-i\alpha} \lambda \mu' (p' x - i q' y) / e. \quad (6.73)$$

La partie réelle du potentiel $\hat{\mathcal{E}}'$ peut s'exprimer en termes de la partie réelle de $\hat{\mathcal{E}}$ et est constante,

$$\text{Re } \hat{\mathcal{E}}' = \hat{f}' - |\hat{\psi}'|^2 = \beta^2 \text{Re } \hat{\mathcal{E}} = -\mu'^2 |\lambda|^2 / e^2. \quad (6.74)$$

La partie imaginaire du potentiel $\hat{\mathcal{E}}'$ (6.21) est

$$\text{Im } \hat{\mathcal{E}}' = 2|\lambda|^2 \{-k(1 - \Omega_\lambda \hat{\omega}_0)^2 \sin \alpha + \Omega_\lambda [\hat{\mathcal{G}} - (1 - \Omega_\lambda \hat{\omega}_0) z]\}, \quad (6.75)$$

où la fonction $\hat{\mathcal{G}}$ est donnée par (6.54),

$$\partial_m \hat{\mathcal{G}} = (1 - \Omega_\lambda \hat{\omega}_0) \partial_m (z - 2k \hat{\omega}_0 \sin \alpha) + \Omega_\lambda \text{Im}(\hat{\phi}_0 \partial_m \hat{\phi}_0^* + \rho^2 \hat{f}_0^{-2} \hat{\psi}_0^* \partial_m \hat{\psi}_0). \quad (6.76)$$

Le calcul du deuxième terme de cette dernière, en tenant compte des expressions de $\hat{\psi}_0$, de \hat{f}_0 (6.65), de $\hat{\phi}_0$ et de $\hat{\omega}_0$ (6.66), donne

$$\text{Im}(\hat{\phi}_0 \partial_m \hat{\phi}_0^* + \rho^2 \hat{f}_0^{-2} \hat{\psi}_0^* \partial_m \hat{\psi}_0) = -z \partial_m \hat{\omega}_0. \quad (6.77)$$

Il s'ensuit que la fonction $\hat{\mathcal{G}}$ s'intègre facilement pour donner

$$\hat{\mathcal{G}} = (1 - \Omega_\lambda \hat{\omega}_0) [k \Omega_\lambda^{-1} (1 - \Omega_\lambda \hat{\omega}_0) \sin \alpha + z] + \text{const.} \quad (6.78)$$

En reportant dans (6.75), on obtient pour la partie imaginaire du potentiel constant $\hat{\mathcal{E}}$ une valeur constante arbitraire qu'on peut choisir égale à la partie imaginaire du potentiel constant $\hat{\mathcal{E}}$,

$$\text{Im } \hat{\mathcal{E}}' = \text{Im } \hat{\mathcal{E}} = -2k|\lambda|^2 \sin \alpha. \quad (6.79)$$

D'où

$$\hat{\mathcal{E}}' = \hat{\mathcal{E}} - 2\Omega(a + e^2\Omega_\lambda/2) = -|\lambda|^2(\mu'^2/e^2 + 2ik \sin \alpha). \quad (6.80)$$

Les potentiels d'Ernst obtenus, tous calculs faits, par application de la transformation finale Π_α^{-1} (6.25) sont ceux de la solution de Kerr-Newman-NUT [55],

$$\mathcal{E}' = \frac{\mu'(p'x - iq'y) - (m' - in')}{\mu'(p'x - iq'y) + (m' - in')}, \quad \psi' = \frac{e' + ig'}{\mu'(p'x - iq'y) + (m' - in')}, \quad (6.81)$$

où e' , g' , m' et n' sont respectivement les nouvelles charges électrique, magnétique, graviélectrique (ou masse) et gravimagnétique (ou charge NUT) exprimées en fonction des anciennes charges électrique et graviélectrique par

$$e' = e + e\Omega(a + e^2\Omega|\lambda|^{-2}/2)(k \cos \alpha - 1), \quad g' = m\Omega(a + e^2\Omega|\lambda|^{-2}/2) \sin \alpha, \quad (6.82)$$

$$m' = m + e\Omega(a + e^2\Omega|\lambda|^{-2}/2)(k - \cos \alpha), \quad n' = e\Omega(a + e^2\Omega|\lambda|^{-2}/2) \sin \alpha, \quad (6.83)$$

où le paramètre α intervient dans toutes ces expressions avec (6.43)

$$|\lambda|^{-2} = (k - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha. \quad (6.84)$$

On peut montrer facilement que les charges électrique, magnétique et gravimagnétique

ainsi que la masse m' sont liées par les relations

$$\mu'^2 = m'^2 + n'^2 - e'^2 - g'^2, \quad (6.85)$$

$$(m' - m)^2 + n'^2 = (e' - e)^2 + g'^2. \quad (6.86)$$

On en tire les parties réelle et imaginaire de \mathcal{E}' ,

$$\operatorname{Re} \mathcal{E}' = \frac{\mu'^2(p'^2x^2 + q'^2y^2) - (m'^2 + n'^2)}{(\mu'p'x + m')^2 + (\mu'q'y + n')^2}, \quad (6.87)$$

$$\chi' = \operatorname{Im} \mathcal{E}' = \frac{2\mu'(n'p'x - m'q'y)}{(\mu'p'x + m')^2 + (\mu'q'y + n')^2}. \quad (6.88)$$

La fonction de la métrique f' est

$$f' = \frac{\mu'^2 F'(x, y)}{(\mu'p'x + m')^2 + (\mu'q'y + n')^2}. \quad (6.89)$$

La fonction de la métrique ω' est donnée par

$$\tilde{\partial}_m \omega' = -\rho f'^{-2} \operatorname{Im}(\partial_m \mathcal{E}' + 2\psi'^* \partial_m \psi'). \quad (6.90)$$

Le comportement asymptotique des potentiels d'Ernst au voisinage de l'infini est le suivant

$$\mathcal{E}' \simeq 1 - 2\frac{m' - in'}{r'} - 2i(m' - in')\frac{(a + e^2\Omega_\lambda) \cos \theta + n'}{r'^2} + \dots, \quad (6.91)$$

$$\psi' \simeq \frac{e' + ig'}{r'} + i(e' + ig')\frac{(a + e^2\Omega_\lambda) \cos \theta + n'}{r'^2} + \dots, \quad (6.92)$$

avec $\mu'p'x = \mu px = r' - m'$ et $r' = r + m' - m$.

Notons que cette méthode de génération de solutions par application de la transformation combinée $\Pi^{-1}\mathcal{R}(\Omega)\Pi$ est exploitée à la base pour générer des solutions en rotation à partir des solutions statiques [24]. Bien qu'il existe d'autres transformations pour générer des solutions avec une charge NUT, la transformation généralisée à un paramètre α ,

$\Pi_\alpha^{-1}\mathcal{R}(\Omega)\Pi_\alpha$, constitue une nouvelle méthode pour la génération de solutions NUT à partir des solutions non neutres.

Chapitre 7

La solution de Reissner-Nordström-NUT

La solution stationnaire à symétrie sphérique la plus générale est celle de Brill obtenue en 1964 [27], qui dépend de quatre paramètres correspondant aux charges électrique, magnétique, graviélectrique (ou masse) et gravimagnétique (ou NUT). Cette solution se réduit à celle de Reissner-Nordström dyonique en l'absence de la charge NUT et à celle de Taub-NUT [56, 28] en l'absence des charges électrique et magnétique, ce qui motive l'appellation métrique de Reissner-Nordström-NUT (en abrégé RN-NUT).

En l'absence du moment angulaire $a = 0$ ($q = 0$), la solution de Kerr-Newman-NUT (6.81) coïncide avec celle de Reissner-Nordström-NUT. Donc, les potentiels d'Ernst de la solution de RN-NUT s'écrivent (en éliminant pour simplifier la notation')

$$\mathcal{E} = \frac{r - 2m + in}{r - in}, \quad \psi = \frac{e + ig}{r - in}. \quad (7.1)$$

D'où la solution de RN-NUT

$$ds^2 = -f(r)[dt - \omega(\theta)d\varphi]^2 + f(r)^{-1}dr^2 + (r^2 + n^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (7.2)$$

$$A = \Phi(r)[dt - \omega(\theta)d\varphi], \quad (7.3)$$

où A est le potentiel électromagnétique associé, avec

$$f(r) = \frac{(r - m)^2 + b^2}{r^2 + n^2}, \quad \omega(\theta) = 2n(\cos\theta + C), \quad \Phi(r) = \frac{g}{2n} + \frac{er - gn}{r^2 + n^2}, \quad (7.4)$$

où C est une constante d'intégration et

$$b^2 = -\mu^2 = e^2 + g^2 - m^2 - n^2. \quad (7.5)$$

Dans ce qui suit, on examine de façon approfondie les propriétés géométriques et physiques de la solution de RN-NUT, dans le cas où celle-ci ne présente pas d'horizons mais a une topologie du type "wormhole" (trou de ver) avec deux régions distinctes à l'infini de genre espace, et montrer qu'elle est régulière (géodésiques complètes) et que le wormhole RN-NUT est bien traversable. Concernant les courbes fermées de genre temps (CTC) qui sont possibles dans le cas d'une solution avec une charge NUT, et qui pourraient conduire à des violations de la causalité, on montre que le mouvement d'une particule en chute libre est causale aussi bien pour une particule neutre que pour une particule chargée (venant de l'infini).

7.1 Charge gravimagnétique et corde de Misner

Le terme croisé en $dt d\varphi$ proportionnel à la charge NUT n de la métrique (7.2) présente une singularité connue sous le nom de corde de Misner [57], analogue gravitationnel à la corde de Dirac dans le cas du monopole magnétique qui a été postulé par Dirac en 1931 [58] dans le cadre de la théorie classique de l'électromagnétisme.

Dirac est parti de la remarque que les équations de Maxwell prennent des formes symétriques pour les deux champs électrique et magnétique,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \mu_0 \rho, \quad \nabla \wedge \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (7.6)$$

Dans le vide ($\rho = 0, \vec{j} = 0$) ces équations, en utilisant les unités $\varepsilon_0 \mu_0 = c^{-2} = 1$, deviennent symétriques dans l'échange $\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$. Dirac a donc proposé que, par analogie avec le champ coulombien, il pourrait exister une charge magnétique g ponctuelle comme l'électron, donc un seul pôle (contrairement à un aimant qui possède deux pôles opposés), qui génère un champ magnétique radial $\vec{B} = -gr^{-3}\vec{r}$. En intégrant en coordonnées sphériques l'équation $\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$, on obtient le potentiel vecteur

$$A_\varphi = -g(\cos \theta + C). \quad (7.7)$$

Ce potentiel est singulier sur le demi-axe des z négatifs (le demi-axe $\theta = \pi$) pour $C = -1$ ou sur le demi-axe des z positifs (le demi-axe $\theta = 0$) pour $C = 1$. Pour d'autres valeurs de C (e.g. $C = 0$), il y a deux singularités. Ces (ou ce) demi-axes sont la corde de Dirac qui relie le monopole magnétique à l'infini.

Il en est de même pour le champ de Kaluza-Klein $\vec{\omega}(\vec{x})$, analogue au potentiel vecteur magnétique $\vec{A}(\vec{x})$. Pour $C = -1$, la singularité au pôle nord $\theta = 0$ est absente tandis que la singularité au pôle sud en $\theta = \pi$ disparaît sous la transformation de coordonnées $t \rightarrow t' = t - 4n\varphi$. Etant donné que la coordonnée φ est périodique avec $\Delta\varphi = 2\pi$, alors pour faire disparaître la singularité, Misner a proposé d'imposer la périodicité de la coordonnée temporelle [57] avec la période $\Delta t = 8\pi n$ (on peut suivre le même raisonnement pour $C = 1$). Néanmoins, cette condition pose des problèmes! Premièrement, elle donne lieu à l'apparition des courbes fermées de genre temps (CTC) (voir chapitre 10) partout dans l'espace-temps et deuxièmement, la continuation analytique, dans le cas du trou noir, à travers les deux horizons ne peut pas être réalisée.

Une deuxième interprétation alternative, afin de rendre la corde de Misner inobservable, était d'abandonner l'idée de la condition de périodicité de la coordonnée temporelle et considérer la corde de Misner comme une source matérielle singulière du moment angulaire (une sorte de défaut topologique). Ce point de vue a été suggéré par Bonnor et autres [59, 60, 61]. Etant donné que cette singularité (corde de Misner) est toujours présente, on croyait [62] que les géodésiques s'arrêtent sur les axes polaires et que l'espace-temps de ce fait n'est pas géodésiquement complet.

En raison de problèmes d'interprétation liés à l'existence de cette corde, la solution de RN-NUT a été peu étudiée dans le cas général, et ce uniquement dans le cas où elle présente des horizons. Pourtant, si cette charge NUT n'est pas nulle, l'espace-temps de RN-NUT ne présente pas de singularité (à l'exception de la corde de Misner qui correspond à une singularité de coordonnées). Nous verrons plus loin qu'il est géodésiquement complet. Si de plus la somme des carrés des charges électrique et magnétique est suffisamment grande, cet espace-temps ne présente pas non plus d'horizon.

7.2 Régularité, trous noirs et wormholes

7.2.1 Régularité

Nous allons nous intéresser aux trous noirs et wormholes (leurs définitions seront données dans les prochaines sous-sections 7.2.2 et 7.2.3) en présence du paramètre NUT, plus précisément dans un espace-temps caractérisé par la métrique de RN-NUT. Remarquons tout d'abord que contrairement à la solution de Schwarzschild (ou RN) la solution de RN-NUT, pour une charge NUT non nulle $n \neq 0$, n'a pas de singularité centrale en $r = 0$. En

effet, le calcul direct du scalaire de Kretschmann révèle que

$$\begin{aligned}
R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} &= \frac{8e'^4}{(r^2+n^2)^4} + \frac{48}{(r^2+n^2)^6} \{(m^2-n^2)[r^6-15n^2r^4+15n^4r^2-n^6] - \\
&2mr[(e'^2-6n^2)r^4-10(e'^2-2n^2)n^2r^2+(5e'^2-6n^2)n^4] + \\
&e'^2[(e'^2-10n^2)r^4-2(3e'^2-10n^2)n^2r^2+(e'^2-2n^2)n^4]\}, \quad (7.8)
\end{aligned}$$

qui, en $r = 0$, prend une valeur finie,

$$R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{8e'^4 + 48[(e'^2 - n^2)^2 - m^2n^2]}{n^8}, \quad (7.9)$$

où nous avons posé

$$e'^2 = e^2 + g^2. \quad (7.10)$$

En raison de l'absence de la singularité centrale, la solution de RN-NUT peut être considérée comme une régularisation de la solution RN.

7.2.2 Trou noir

Un trou noir est une région de l'espace-temps où la gravité est si forte que rien ne peut s'en échapper par un certain horizon appelé "horizon des évènements". Dans le cas du trou noir de Schwarzschild, l'horizon des évènements est donné par les zéros de la composante g_{tt} de la métrique de Schwarzschild (6.1) et correspond donc à la surface $r = 2m$ (rayon de Schwarzschild). Donc nous avons deux régions distinctes et déconnectées causalement, la région $r > 2m$ où les particules peuvent aller jusqu'à l'infini et la région $r < 2m$ où les particules sont piégées quelle que soit leur direction d'émission.

Dans le cas de la solution de RN-NUT, pour $b^2 < 0$ ($m^2 + n^2 > e^2 + g^2$), donc $\mu^2 > 0$, le potentiel gravitationnel newtonien

$$-g_{tt} = f(r) = \frac{(r-m)^2 - \mu^2}{r^2 + n^2}, \quad (7.11)$$

a deux zéros, donc le trou noir de RN-NUT a (à l'instar du trou noir de RN) deux horizons extérieur et intérieur en $r_{\pm} = m \pm \mu$. Pour $b^2 = 0$ ($m^2 + n^2 = e^2 + g^2$) le trou noir de RN-NUT a (à l'instar du trou noir de RN extrême) un double horizon en $r_{\pm} = m$.

7.2.3 Wormhole

Un wormhole est une région de l'espace-temps sous forme d'un cou (une gorge) cylindrique reliant deux nappes asymptotiquement plates symétriques et distinctes. Le wormhole est dit traversable [63] si un observateur peut passer sans problème d'une nappe à l'autre. En particulier, l'espace-temps doit être géodésiquement complet. Morris et Thorne [63] ont montré que ces wormholes ne peuvent être supportés que par une source de matière exotique ne respectant pas la condition d'énergie positive. e.g. le wormhole d'Ellis [64]

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (r^2 + n^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (7.12)$$

qui est une solution des équations d'Einstein avec un champ scalaire fantôme.

En revanche, l'existence théorique de la solution wormhole RN-NUT constitue un contre-exemple qui mérite d'être étudié. En effet, elle est soutenue par un champ de Maxwell qui ne requiert pas la présence d'une matière exotique.

Pour $b^2 > 0$ ($m^2 + n^2 < e^2 + g^2$), donc

$$-g_{tt} = f(r) = \frac{(r - m)^2 + b^2}{r^2 + n^2} > 0, \quad (7.13)$$

la solution de RN-NUT décrit un wormhole (lorentzien) reliant deux régions asymptotiques ($r \rightarrow \pm\infty$) par un cou de surface minimum égale à $4\pi n^2$ en $r = 0$. Remarquons le cas pour $f(r) = 0$ ($m = 0, b^2 = n^2$) où la métrique ressemble à celle d'Ellis (7.12) et aussi le cas $n^2 = 0$ où la solution de RN-NUT se réduit à la solution de RN avec une singularité nue.

7.3 Equations de la géodésique: Intégrales premières

Les équations de la géodésique s'écrivent

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \quad (7.14)$$

où nous avons noté $\dot{} = d/d\tau$ et τ un paramètre affine. Donc, on doit calculer au préalable les symboles de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ (Annexe B) qui ont pour expression

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{g^{\lambda\rho}}{2} \left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right), \quad (7.15)$$

où $g^{\mu\nu}$ (Annexe B) sont les composantes contravariantes de la métrique inverse de RN-NUT (7.2). Il s'ensuit que les équations des géodésiques (7.14) s'écrivent [65]

$$\ddot{t} - \dot{\omega}\dot{\varphi} + \frac{\dot{f}(\dot{t} - \omega\dot{\varphi})}{f} + 2\omega \left[\frac{r\dot{r}\dot{\varphi}}{r^2 + n^2} + \frac{\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}}{\sin\theta} - \frac{nf(\dot{t} - \omega\dot{\varphi})\dot{\theta}}{(r^2 + n^2)\sin\theta} \right] = 0, \quad (7.16)$$

$$\ddot{r} + \frac{f(r)\dot{f}(\dot{t} - \omega\dot{\varphi})^2}{2\dot{r}} - \frac{\dot{f}\dot{r}}{2f} - rf(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2) = 0, \quad (7.17)$$

$$\ddot{\theta} + 2\frac{r\dot{r}\dot{\theta} + nf(\dot{t} - \omega\dot{\varphi})\sin\theta\dot{\varphi}}{r^2 + n^2} - \sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 = 0, \quad (7.18)$$

$$\ddot{\varphi} + 2 \left[\frac{r\dot{r}\dot{\varphi}}{r^2 + n^2} + \frac{\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}}{\sin\theta} - \frac{nf(\dot{t} - \omega\dot{\varphi})\dot{\theta}}{(r^2 + n^2)\sin\theta} \right] = 0. \quad (7.19)$$

Ces équations sont les mêmes équations obtenues en faisant usage des équations de Lagrange

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0, \quad (7.20)$$

où \mathcal{L} est le lagrangien défini par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad (7.21)$$

c'est-à-dire

$$2\mathcal{L} = -f(r)[\dot{t} - \omega(\theta)\dot{\varphi}]^2 + f(r)^{-1}r^2 + (r^2 + n^2)(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2). \quad (7.22)$$

Remarquons qu'ici t et φ sont des variables cycliques ($\partial\mathcal{L}/\partial t = \partial\mathcal{L}/\partial\varphi = 0$) déterminant chacune d'elle une intégrale première issue de l'équation (7.20). La première équation est

$$\frac{d}{d\tau}\{f(r)[\dot{t} - \omega(\theta)\dot{\varphi}]\} = 0, \quad (7.23)$$

qui s'intègre par

$$f(r)[\dot{t} - \omega(\theta)\dot{\varphi}] = E, \quad (7.24)$$

où E est une constante d'intégration jouant le rôle d'une énergie par unité de masse. La deuxième équation est

$$\frac{d}{d\tau}[2nE \cos \theta + (r^2 + n^2) \sin^2 \theta \dot{\varphi}] = 0, \quad (7.25)$$

où nous avons utilisé (7.24). L'intégration de cette équation donne

$$\dot{\varphi} = \frac{L_z(\theta)}{(r^2 + n^2) \sin^2 \theta}, \quad L_z(\theta) = J_z - 2nE \cos \theta, \quad (7.26)$$

où J_z est une deuxième constante d'intégration choisie comme la composante suivant l'axe des z du moment angulaire total \vec{J} lié au moment orbital \vec{L} que nous allons discuter dans la section suivante. Le résultat (7.24) nous permet de réécrire l'équation (7.18), après l'avoir multiplié par $r^2 + n^2$, comme

$$\frac{d}{d\tau}[(r^2 + n^2)\dot{\theta}] = (r^2 + n^2) \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 - 2nE \sin \theta \dot{\varphi}. \quad (7.27)$$

On peut choisir le paramètre affine τ tel que

$$2\mathcal{L} = \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = \varepsilon, \quad (7.28)$$

au long de la géodésique avec $\varepsilon = -1, 0$ ou 1 , respectivement pour des géodésiques de genre temps, de genre lumière ou de genre espace. On en déduit immédiatement l'équation,

$$\frac{\dot{r}^2 - E^2}{f(r)} + (r^2 + n^2)(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) = \varepsilon. \quad (7.29)$$

Nous allons maintenant relier, en utilisant la méthode de Killing, les variables angulaires entre elles par une relation précise, ce qui permet de les éliminer de l'équation (7.29) et ainsi établir une équation radiale s'écrivant uniquement en fonction de r et ses dérivées.

7.4 Vecteurs de Killing et variables angulaires

La métrique de RN-NUT admet quatre vecteurs de Killing, un vecteur $\xi(t)$ (invariance dans le temps) associé aux translations temporelles et trois vecteurs $\xi(x)$, $\xi(y)$ et $\xi(z)$ (invariance dans l'espace) associés respectivement aux rotations autour des axes ox , oy et oz générant le groupe $O(3)$ qui caractérise la symétrie sphérique. Ces vecteurs de Killing sont donnés (sans démonstration) par $\xi(t) = \xi^\mu(x)\partial_\mu$ (5.12),

$$\xi(t) = \partial_t \quad (7.30)$$

$$\xi(x) = -\frac{2n(1 + C \cos \theta) \cos \varphi}{\sin \theta} \partial_t - \sin \varphi \partial_\theta - \cot \theta \cos \varphi \partial_\varphi, \quad (7.31)$$

$$\xi(y) = -\frac{2n(1 + C \cos \theta) \sin \varphi}{\sin \theta} \partial_t + \cos \varphi \partial_\theta - \cot \theta \sin \varphi \partial_\varphi, \quad (7.32)$$

$$\xi(z) = 2nC \partial_t + \partial_\varphi. \quad (7.33)$$

Les trois vecteurs de Killing de genre espace obéissent aux relations de commutations suivantes

$$[\xi(x), \xi(y)] = \xi(z), \quad [\xi(y), \xi(z)] = \xi(x), \quad [\xi(z), \xi(x)] = \xi(y). \quad (7.34)$$

Ces trois invariances sous le groupe des rotations $O(3)$ conduisent à la conservation du moment angulaire total \vec{J} dont ses composantes sont, tous calculs faits, données par $J_i = \xi^\mu u_\mu$ avec $u_\mu = g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu$,

$$J_x = -(r^2 + n^2)(\sin \varphi \dot{\theta} + \cos \theta \sin \theta \cos \varphi \dot{\varphi}) + 2n \sin \theta \cos \varphi E, \quad (7.35)$$

$$J_y = (r^2 + n^2)(\cos \varphi \dot{\theta} - \cos \theta \sin \theta \sin \varphi \dot{\varphi}) + 2n \sin \theta \sin \varphi E, \quad (7.36)$$

$$J_z = (r^2 + n^2) \sin^2 \theta \dot{\varphi} + 2nE \cos \theta. \quad (7.37)$$

Il est facile de voir, d'après les expressions (7.35), (7.36) et (7.37), que le moment angulaire total \vec{J} peut s'exprimer comme la somme des deux vecteurs, le moment angulaire orbital \vec{L} et le moment angulaire de spin \vec{S} ,

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}. \quad (7.38)$$

Le moment angulaire orbital \vec{L} (par unité de masse) est défini par sa formule usuelle à condition que r^2 soit remplacé par $r^2 + n^2$,

$$\vec{L} = (r^2 + n^2) \hat{r} \wedge \dot{\hat{r}}, \quad (7.39)$$

où \hat{r} est le vecteur unitaire en coordonnées sphériques,

$$\hat{r} = \vec{r}/r = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \quad (7.40)$$

avec les composantes

$$L_x = -(r^2 + n^2)(\sin \varphi \dot{\theta} + \cos \theta \sin \theta \cos \varphi \dot{\varphi}), \quad (7.41)$$

$$L_y = (r^2 + n^2)(\cos \varphi \dot{\theta} - \cos \theta \sin \theta \sin \varphi \dot{\varphi}), \quad (7.42)$$

$$L_z = (r^2 + n^2) \sin^2 \theta \dot{\varphi}, \quad (7.43)$$

à partir desquelles on calcule le carré du moment angulaire orbital l^2 ,

$$l^2 = \vec{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = (r^2 + n^2)^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2). \quad (7.44)$$

Le moment angulaire de spin \vec{S} est perpendiculaire au moment angulaire orbital et est défini par

$$\vec{S} = 2nE\hat{r}, \quad (7.45)$$

avec ses composantes

$$\begin{aligned} S_x &= 2n \sin \theta \cos \varphi E, \\ S_y &= 2n \sin \theta \sin \varphi E, \\ S_z &= 2nE \cos \theta, \end{aligned} \quad (7.46)$$

et

$$\vec{S}^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = 4n^2 E^2. \quad (7.47)$$

On en déduit le carré du moment angulaire total

$$J^2 = \vec{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = l^2 + 4n^2 E^2. \quad (7.48)$$

Donc l^2 défini par (7.44) est constant. Il découle de l'orthogonalité des deux moments angulaires \vec{L} et \vec{S} la relation

$$\vec{J} \cdot \hat{r} = 2nE, \quad (7.49)$$

ou encore

$$J_x \sin \theta \cos \varphi + J_y \sin \theta \sin \varphi + J_z \cos \theta = 2nE, \quad (7.50)$$

qui signifie que le mouvement de la particule, projeté sur une sphère $r = \text{const}$, se fait sur un cercle (parallèle) dont l'axe est dirigé suivant \vec{J} et dont la colatitute η est donnée par

$$\cos \eta = 2nE/J, \quad (J = |\vec{J}|). \quad (7.51)$$

En l'absence de la charge NUT ($n^2 = 0$), le mouvement a lieu dans le plan équatorial $\eta = \pi/2$ (cas de la solution de RN ou de Schwarzschild).

En particulier, si \vec{J} n'a qu'une composante J_z ($J_x = J_y = 0$), l'équation (7.50) devient

$$\cos \theta = 2nE/J_z. \quad (7.52)$$

Reportons le résultat (7.52) dans (7.26), ce dernier se simplifie à

$$\dot{\varphi} = \frac{J_z}{r^2 + n^2}. \quad (7.53)$$

Ces deux équations (7.53) et (7.52) décrivent le comportement des variables angulaires dans le cas où \vec{J} est dirigé suivant l'axe des z .

Insérons maintenant le résultat (7.44) dans l'équation (7.29), nous obtenons l'équation radiale

$$\dot{r}^2 + f(r) \left(\frac{l^2}{r^2 + n^2} - \varepsilon \right) = E^2. \quad (7.54)$$

Remarquons que cette équation est identique à l'équation du mouvement radial pour la métrique (7.2) en l'absence du terme $\omega(\theta)$. En particulier, pour $f(r) = 1$, elle décrit le

mouvement radial dans la géométrie d'Ellis (7.12).

Chapitre 8

Analyse du mouvement géodésique

Notre but ici est de montrer que toutes les géodésiques, y compris celles qui impactent la corde de Misner sont complètes et que cette corde n'est qu'apparente (transparente).

8.1 Mouvement angulaire

Supposons connue la solution $r(\tau)$ de l'équation radiale (7.54), une solution $\theta(\tau)$ de l'équation (7.44) pourrait être construite après avoir éliminé $\dot{\varphi}$ par son expression (7.26). Ensuite, cette solution sera utilisée pour obtenir la solution $\varphi(\tau)$ de l'équation (7.26).

Remplaçons $\dot{\varphi}$ par son expression (7.26) dans (7.44), nous obtenons

$$\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 = l^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta}, \quad (8.1)$$

où nous avons défini un nouveau paramètre λ par

$$d\tau = [r(\tau)^2 + n^2]d\lambda. \quad (8.2)$$

Posons

$$\xi = \cos \theta, \quad (8.3)$$

ceci permet de réécrire (8.1) comme

$$\left(\frac{d\xi}{d\lambda}\right)^2 = -J^2\xi^2 + 4nEJ_z\xi + l^2 - J_z^2 > 0, \quad (8.4)$$

où nous avons remplacé L_z par son expression (7.26) et utilisé (7.48). Supposons que $J \neq 0$ ($J = 0$ implique d'après (7.48) que $l = E = 0$) et résolvons l'équation (8.4). Le membre de droite de (8.4) est une équation de second degré dont le discriminant réduit D est non-négatif,

$$D = lJ_\perp \geq 0, \quad (8.5)$$

où nous avons défini

$$J_\perp^2 = J_x^2 + J_y^2 = J^2 - J_z^2. \quad (8.6)$$

Les deux points de rebroussement θ_\pm (zéros du membre de droite de (8.4)) sont

$$\cos \theta_\pm = \xi_\pm = J^{-2}(2nEJ_z \pm lJ_\perp). \quad (8.7)$$

L'équation (8.4) peut être mise sous la forme

$$\frac{d\xi}{\sqrt{l^2 J_\perp^2 J^{-4} - (\xi - 2nEJ_z J^{-2})^2}} = \pm J d\lambda, \quad (8.8)$$

et s'intègre facilement, en utilisant

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x, \quad (8.9)$$

pour donner [62]

$$\cos \theta(\lambda) = \xi = J^{-2}[2nEJ_z + lJ_\perp \cos(J\lambda)], \quad (8.10)$$

avec une constante d'intégration additive au paramètre λ dépendant des valeurs initiales de θ et λ . On remarque que les deux points de rebroussement θ_\pm de l'équation (8.4) définis

par (8.7) correspondent à $\cos(J\lambda) = \pm 1$ ($\lambda = k\pi/J$ et $k \in \mathbb{Z}$).

Vu que les constantes du mouvement intervenant dans (8.10) sont reliées par une décomposition orthogonale de \vec{J}^2 (7.48), il est plus commode de les formuler en termes des angles η (7.51) et ψ tels que

$$\begin{aligned} 2nE &= J \cos \eta, & l &= J \sin \eta, \\ J_z &= J \cos \psi, & J_\perp &= J \sin \psi, \end{aligned} \quad (8.11)$$

avec

$$0 \leq \eta \leq \pi/2, \quad 0 \leq \psi \leq \pi. \quad (8.12)$$

Alors l'équation (8.10) s'exprime en termes des angles η et ψ comme suit

$$\cos \theta(\lambda) = \cos \psi \cos \eta + \sin \psi \sin \eta \cos(J\lambda), \quad (8.13)$$

et les deux points de rebroussement (8.7) comme

$$\cos \theta_\pm = \cos(\psi \mp \eta), \quad (8.14)$$

qui s'écrivent explicitement comme

$$\theta_+ = \begin{cases} \psi - \eta, & \psi \geq \eta \\ \eta - \psi, & \eta \geq \psi \end{cases}, \quad \theta_- = \begin{cases} \psi + \eta, & \psi + \eta \leq \pi \\ 2\pi - \psi - \eta, & \psi + \eta \geq \pi \end{cases}. \quad (8.15)$$

Il s'ensuit que la trajectoire traverse la corde de Misner périodiquement en $\cos \theta_\pm = \pm 1$ seulement si

$$\psi = \eta \quad (J_z = 2nE, \quad J_\perp = l) \quad (8.16)$$

ou

$$\psi = \pi - \eta \quad (J_z = -2nE, \quad J_\perp = l). \quad (8.17)$$

Les seules trajectoires qui peuvent passer par les deux branches de la corde de Misner ($\theta = 0$ et π) sont celles avec

$$\psi = \eta = \pi/2 \quad (J_z = E = 0, \quad J = J_\perp = l), \quad (8.18)$$

ce qui donne, compte tenu de (7.24) et (7.26),

$$\dot{t} = \dot{\varphi} = 0. \quad (8.19)$$

La trajectoire peut aussi rester sur la corde de Misner en $\theta = 0$ ou π si (8.16) et (8.17) sont satisfaites par $\eta = 0$ ou π ($J = |J_z| = 2nE$).

Passons maintenant à la détermination de la solution $\varphi(\lambda)$. L'équation (7.26) se réécrit, compte tenu de (8.2),

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{1}{2} \left(\frac{J_z - 2nE}{1 - \cos\theta(\lambda)} + \frac{J_z + 2nE}{1 + \cos\theta(\lambda)} \right), \quad (8.20)$$

où $\cos\theta(\lambda)$ est donné par (8.10). En substituant $\cos\theta(\lambda)$ par son expression (8.13) (équivalente à (8.10)), nous pouvons réécrire encore (8.20) sous la forme

$$d\varphi = \left(\frac{\sigma_-}{1 + \sigma_-^2 \tan^2(J\lambda/2)} + \frac{\sigma_+}{1 + \sigma_+^2 \tan^2(J\lambda/2)} \right) \frac{Jd\lambda/2}{\cos^2(J\lambda/2)}, \quad (8.21)$$

avec

$$\sigma_\pm = \frac{\cos\psi \pm \cos\eta}{1 \pm \cos(\psi - \eta)} = \frac{2J(J_z \pm 2nE)}{(J_z \pm 2nE)^2 + (l \pm J_\perp)^2}, \quad (8.22)$$

ce qui permet de l'intégrer facilement, en utilisant l'intégrale

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x, \quad (8.23)$$

pour avoir [62]

$$\varphi - \varphi_0 = \arctan[\sigma_- \tan(J\lambda/2)] + \arctan[\sigma_+ \tan(J\lambda/2)], \quad (8.24)$$

où φ_0 est une constante d'intégration dépendant des valeurs initiales de φ et λ . Cette dernière équation se simplifie à

$$\varphi - \varphi_0 = \arctan \frac{2 \sin \eta \tan(J\lambda/2)}{\sin(\eta - \psi) - \sin(\eta + \psi) \tan^2(J\lambda/2)}, \quad (8.25)$$

c'est-à-dire

$$\varphi - \varphi_0 = \arctan \frac{Jl \sin(J\lambda)}{lJ_z \cos(J\lambda) - 2nEJ_\perp}. \quad (8.26)$$

Cette solution se réduit, pour des trajectoires traversant la branche nord de la corde de Misner (8.16), à

$$\varphi - \varphi_1 = \arctan \frac{J_z \tan(J\lambda/2)}{J}, \quad (8.27)$$

avec

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \operatorname{sgn} \tan(J\lambda/2) \pi/2. \quad (8.28)$$

L'équation (8.27) peut se réécrire après un certain calcul sous la forme, compte tenu de (8.10) avec $J_z = 2nE$ et $J_\perp = l$,

$$\sin(\varphi - \varphi_1) = \frac{2nE \tan(\theta/2)}{l}. \quad (8.29)$$

Ce résultat est en accord avec (7.49) qui devient dans ce cas

$$J_x \cos \varphi + J_y \sin \varphi = 2nE \tan(\theta/2), \quad (8.30)$$

ce qui donne par identification

$$J_x = -l \sin \varphi_1, \quad J_y = l \cos \varphi_1. \quad (8.31)$$

Une formule similaire à (8.27) est appliquée dans le cas de la branche sud de la corde de Misner (8.17) en remplaçant η par $\pi - \eta$ et $J\lambda$ par $J\lambda - \pi$ du fait que les pôles nord et sud sont traversés, selon l'expression (8.10), respectivement pour $\lambda = 2k\pi/J$ et $\lambda = 2(k+1)\pi/J$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Quand le paramètre λ varie sur une période, e.g. $\lambda \in [-\pi/J, \pi/J]$, l'argument de l'arctan du premier ou du second terme de (8.24) varie de $-\infty$ à $+\infty$ pour $J_z \pm 2nE > 0$, de $+\infty$ à $-\infty$ pour $J_z \pm 2nE < 0$ et est strictement nul pour $J_z \pm 2nE = 0$. Il en résulte que la variation de φ sur une période est

$$\Delta\varphi = \pi[\text{sgn}(J_z - 2nE) + \text{sgn}(J_z + 2nE)]. \quad (8.32)$$

Cela signifie que pour $J_z^2 > 4n^2E^2$ ($|\Delta\varphi| = 2\pi$) le parallèle \mathcal{C} tourne autour de la corde de Misner ($\theta = 0$ ou π), pour $J_z^2 < 4n^2E^2$ ($|\Delta\varphi| = 0$) \mathcal{C} ne tourne pas autour de la corde de Misner et pour $J_z = \pm 2nE$ ($|\Delta\varphi| = \pi$) \mathcal{C} passe par l'un des deux pôles nord ou sud comme indiqué plus haut.

Les deux points de rebroussement (8.15) coïncident si $\psi = 0$ ou $\eta = 0$. Cela entraîne deux cas possibles,

1. $\psi = 0$ ou π : Le vecteur constant \vec{J} est aligné avec l'axe des z , $\theta = \eta$ ou $\pi - \eta$,

$$\varphi - \varphi_0 = \pm J\lambda. \quad (8.33)$$

2. $\eta = 0$: Le moment angulaire orbital s'annule, $l = 0$, et le mouvement est purement radial, $\theta = \psi$,

$$\varphi - \varphi_0 = 0. \quad (8.34)$$

8.2 Mouvement temporel

Pour déterminer la solution temporelle $t(\tau)$, nous allons intégrer, comme auparavant, l'équation (7.24) par rapport au paramètre λ , en utilisant (8.2) et en éliminant $\dot{\varphi}$ par son expression (7.26). Nous voyons que la solution générale peut se décomposer en deux solutions radiale et angulaire (en θ) telles que

$$t(\lambda) = t_r(\lambda) + t_\theta(\lambda), \quad (8.35)$$

avec $t_r(\lambda)$ et $t_\theta(\lambda)$ respectivement définis par

$$\frac{dt_r}{d\lambda} = E \frac{r^2 + n^2}{f(r)}, \quad (8.36)$$

$$\frac{dt_\theta}{d\lambda} = 2n \frac{(\cos \theta + C)(J_z - 2nE \cos \theta)}{\sin^2 \theta}. \quad (8.37)$$

La solution de l'équation (8.36) dépend de la solution $r(\tau)$ qu'on suppose, comme pour le mouvement angulaire, connue. On s'intéresse ici à intégrer l'équation (8.37) qui peut être mise sous la forme

$$\frac{dt_\theta}{d\lambda} = 4n^2 E + n \left[\frac{(C+1)(J_z - 2nE)}{1 - \cos \theta(\lambda)} + \frac{(C-1)(J_z + 2nE)}{1 + \cos \theta(\lambda)} \right], \quad (8.38)$$

avec $\cos \theta(\lambda)$ donné par (8.10). Le même raisonnement que celui suivi pour obtenir la solution $\varphi(\lambda)$ (8.24) donne pour la solution $t_\theta(\lambda)$ dans l'intervalle $-\pi/J < \lambda < \pi/J$ [62],

$$t_\theta(\lambda) = 2n \left[2nE\lambda + (C+1) \arctan \left(\sigma_- \tan \frac{J\lambda}{2} \right) + (C-1) \arctan \left(\sigma_+ \tan \frac{J\lambda}{2} \right) \right], \quad (8.39)$$

avec σ_\pm donné par (8.22). On en déduit la variation de t_θ sur une période $2\pi/J$ de λ ,

$$\Delta t_\theta = 2\pi n [4nE/J + (C+1) \operatorname{sgn}(J_z - 2nE) + (C-1) \operatorname{sgn}(J_z + 2nE)]. \quad (8.40)$$

Ainsi, dans le cas où le parallèle ne tourne pas autour de la corde de Misner pour $J_z^2 < 4n^2E^2$, Δt_θ est négatif et est indépendant de C ,

$$\Delta t_\theta = -4\pi n(J - 2nE)/J = -4\pi n(1 - \cos \eta). \quad (8.41)$$

Dans la limite où les parallèles se contractent dans un point, $l = 0$ ($J = 2nE$ ou $\eta = 0$), le mouvement devient purement radial et la contribution angulaire s'annule.

8.3 Les orbites complètes

Dans cette section, nous allons étudier qualitativement le mouvement radial des géodésiques de genre temps et de genre lumière, en prenant certains cas particuliers simplifiant la géométrie du wormholes ($b^2 > 0$). Des solutions exactes $r(\tau)$ de l'équation radiale peuvent s'obtenir en termes de la fonction elliptique de Weierstrass [62].

8.3.1 Le potentiel radial

Réécrivons l'équation radiale (7.54) sous une forme familière comme

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + U(r) = E', \quad (8.42)$$

où

$$E' = E^2 + \varepsilon \quad (8.43)$$

est l'énergie non-relativiste effective et $U(r)$ est le potentiel effectif,

$$U(r) = f(r) \left(\frac{l^2}{r^2 + n^2} - \varepsilon \right) + \varepsilon = \varepsilon \frac{2mr - e'^2 + 2n^2}{r^2 + n^2} + l^2 \frac{(r - m)^2 + b^2}{(r^2 + n^2)^2}. \quad (8.44)$$

Sa dérivée peut être présentée généralement comme

$$U'(r) = \frac{P_4(r)}{(r^2 + n^2)^3}, \quad (8.45)$$

où $P_4(r)$ est un polynôme de quatrième degré ayant, selon les valeurs relatives des quatre paramètres m , n , e et g , deux ou quatre racines réelles. Il se réduit dans le cas d'une masse nulle ($m = 0$) ou d'une géodésique de genre lumière ($\varepsilon = 0$) à un polynôme d'ordre trois avec une ou trois racines réelles.

8.3.2 Géodésiques de genre temps

Dans le cas d'une géodésique de genre temps ($\varepsilon = -1$), pour une masse non nulle ($m \neq 0$) le potentiel est asymétrique sous la réflexion $r \rightarrow -r$. Nous allons supposer $m > 0$ qui correspond à une masse positive du point de vue d'un observateur situé à $r = +\infty$ et une masse négative du point de vue d'un observateur situé à $r = -\infty$. A l'infini en $r = \pm\infty$, le potentiel (8.44) s'annule mais change de signe pour $m > 0$. Il est négatif pour r positivement grand et est positif pour r négativement grand, autrement dit, sa dérivée s'annule au moins en deux points. Le potentiel admet un maximum en r_1 et un minimum en r_2 avec $r_1 < 0 < r_2$ correspondant respectivement aux positions d'équilibre instable et stable, ainsi qu'éventuellement deux autres extrema, maximum en r_3 et minimum en $r_4 > 0$ avec $r_2 < r_3 < r_4$ correspondant respectivement aux positions d'équilibre instable et stable, comme illustrés sur les Figs. 8-1 et 8-2. Le cas avec seulement deux extrema est représenté sur la Fig. 8-3.

Dans le cas particulier d'un moment orbital nul ($l = 0$) qui correspond à une trajectoire radiale, le potentiel se réduit à

$$U(r) = f(r) - 1 = -\frac{2mr - e'^2 + 2n^2}{r^2 + n^2}, \quad (8.46)$$

possédant deux extrema, un maximum positif $U_{\max} = U_-$ en $r = r_-$ et un minimum négatif

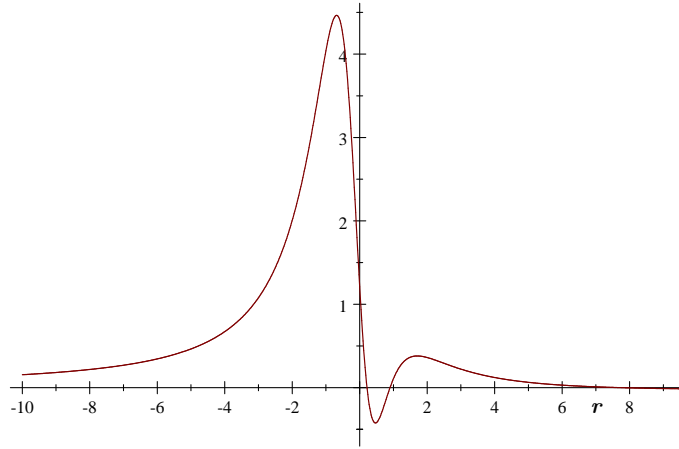


Fig. 8-1 Potentiel avec quatre extrema pour $n = 1$, $m = 0.4$, $l = 2.8$, et $b = 0.3$. Le minimum à $r = 16.23395$ n'est pas visible à cette échelle et est représenté séparément sur la Fig. 8-2.

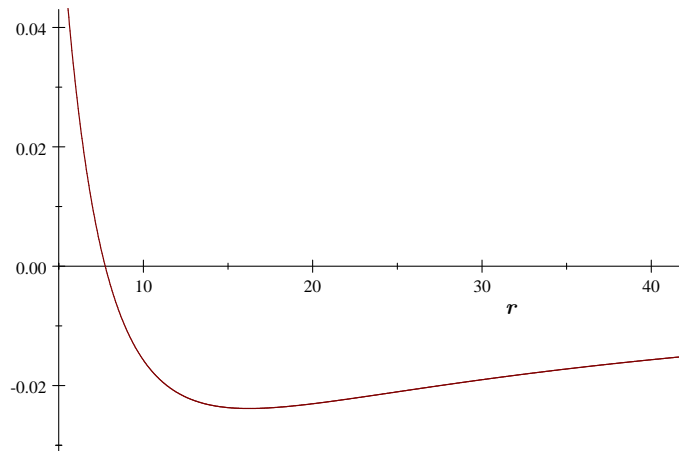


Fig. 8-2 Forme du puits de potentiel non-relativiste en $r = 16.23395$ de la Fig. 8-1 avec une résolution plus élevée.

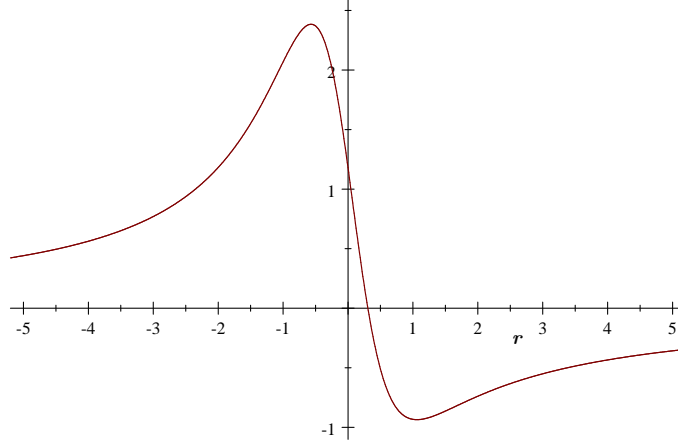


Fig. 8-3 Potentiel avec deux extrema pour $n = m = l = 1$ et $b = 0.3$.

$U_{\min} = U_+$ en $r = r_+$, donnés par

$$U_{\pm} = \mp \frac{\sqrt{e'^4 - 4n^2b^2}}{r_{\pm}^2 + n^2}, \quad r_{\pm} = \frac{e'^2 - 2n^2 \pm \sqrt{e'^4 - 4n^2b^2}}{2m}, \quad (8.47)$$

qui correspondent respectivement aux positions d'équilibre stable et instable (Fig. 8-4). Nous constatons que la courbe de ce potentiel ressemble à celle déjà obtenue pour un moment orbital non nul ($l \neq 0$) (Fig. 8-3).

Dans le cas du wormhole sans masse ($m = 0$), le potentiel devient symétrique sous la réflexion $r \rightarrow -r$,

$$U(r) = \frac{l^2(r^2 + b^2) + (b^2 - n^2)(r^2 + n^2)}{(r^2 + n^2)^2}, \quad (8.48)$$

admettant soit un seul extremum en $r = 0$, minimum ou maximum (Figs. 8-5 et 8-6),

$$U(0) = \frac{l^2b^2 + (b^2 - n^2)n^2}{n^4}, \quad (8.49)$$

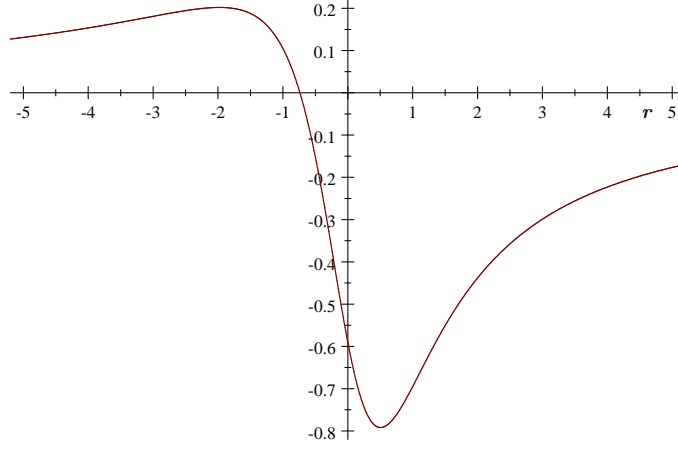


Fig. 8-4 Potentiel avec deux extrema pour $l = 0$, $n = 1$, $m = 0.4$ et $b = 0.5$.

soit trois extrema, un minimum en $r = 0$ et deux maxima positifs en $r = r_{\pm}$ (Fig. 8-7),

$$U(r_{\pm}) = \frac{(l^2 - n^2 + b^2)^2}{4l^2(n^2 - b^2)}, \quad r_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{n^2(n^2 - b^2) + l^2(n^2 - 2b^2)}{l^2 - n^2 + b^2}}, \quad (8.50)$$

sous la condition

$$b^2 \leq n^2 - b^2 < l^2, \quad (8.51)$$

ou bien

$$n^2 - b^2 < l^2 \leq n^2 \frac{n^2 - b^2}{2b^2 - n^2} \quad \text{et} \quad 0 < n^2 - b^2 < b^2. \quad (8.52)$$

Nous aurons des états de diffusion (réflexion ou transmission) ou des états liés suivant les valeurs de E' que peut posséder la particule par rapport aux valeurs minimale et maximale du potentiel, U_{\min} et U_{\max} . Dans le cas de figure où il n'y a qu'un seul maximum en r_1 et un seul minimum en r_2 , une particule d'énergie effective telle que

$$U_{\min} = U(r_2) < E' < 0$$

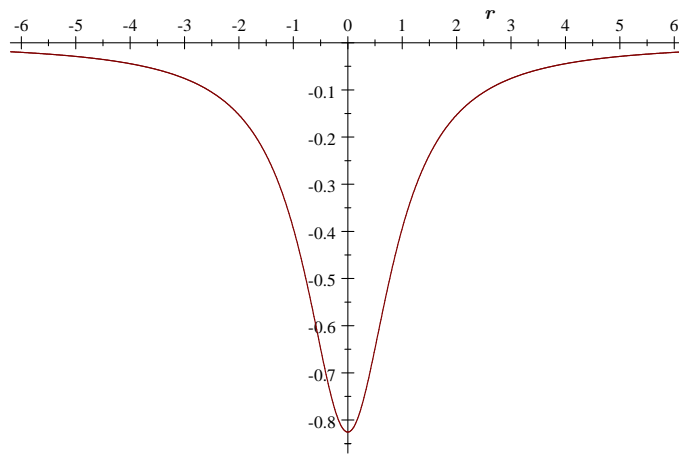


Fig. 8-5 Potentiel du wormhole sans masse $m = 0$ avec $n = 1$, $b = 0.4$ et $l = 0.3$.

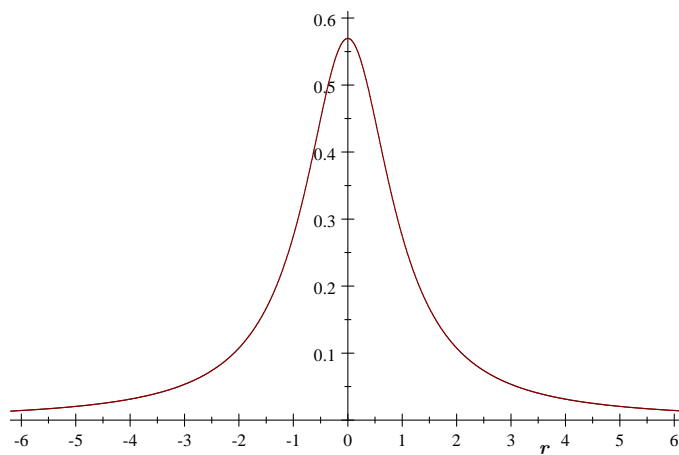


Fig. 8-6 Potentiel du wormhole sans masse $m = 0$ avec $n = 1$, $b = 1.2$ et $l = 0.3$.

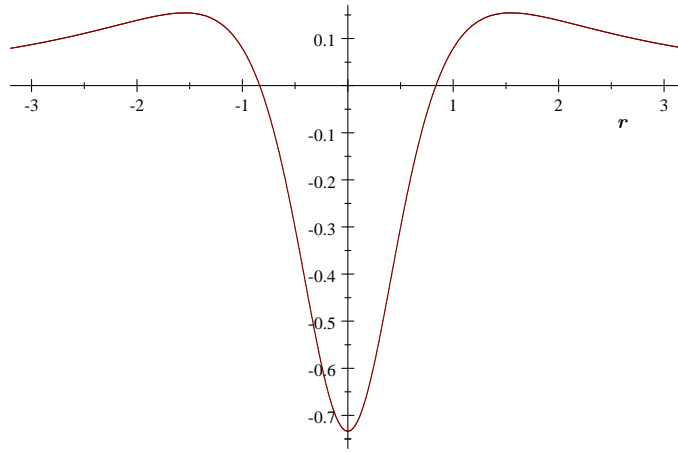


Fig. 8-7 Potentiel du wormhole sans masse $m = 0$ avec $n = 1$, $b = 0.3$ et $l = 1.4$.

se trouve placée dans un puits de potentiel autour de $r = r_2$ et oscille entre deux points de rebroussement (deux sphères). C'est un état lié. Si

$$0 < E' < U_{\max} = U(r_2), \quad (8.53)$$

la particule venant de $r = +\infty$ est réfléchiée vers $r = +\infty$ par la barrière de potentiel U_{\max} qui l'empêche d'approcher $r = r_1$, mais si

$$E' > U_{\max}, \quad (8.54)$$

la particule a une énergie suffisante pour franchir cette barrière et partir vers $r = -\infty$ (transmission).

8.3.2.1 Diffusion

Avant de procéder aux calculs, remplaçons dans l'équation (8.42) τ par λ qui lui est relié par (8.2). Il en résulte la relation

$$d\lambda = \frac{dr}{(r^2 + n^2)\sqrt{E' - U(r)}}. \quad (8.55)$$

Nous ne considérons ici que le cas d'une particule venant de $r = +\infty$.

Dans le cas de la réflexion ($0 < E' < U_{\max}$), la particule est réfléchiée en le point de rebroussement $r = r_0$ tel que

$$U(r_0) = E'. \quad (8.56)$$

Il s'ensuit que la variation totale du paramètre λ est

$$\Delta\lambda_{\text{réfl}} = 2 \int_{r_0}^{+\infty} \frac{dr}{(r^2 + n^2)\sqrt{E' - U(r)}}. \quad (8.57)$$

Dans le cas de la transmission de $-\infty$ à $+\infty$, la variation totale du paramètre λ est

$$\Delta\lambda_{\text{trans}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dr}{(r^2 + n^2)\sqrt{E' - U(r)}}, \quad (8.58)$$

avec

$$E' > E'_0 = U_{\max}. \quad (8.59)$$

Définissons le paramètre d'impact a par sa formule usuelle

$$a = l/\sqrt{E'}. \quad (8.60)$$

La section efficace de transmission est donnée par

$$\sigma_{\text{trans}} = \pi a_0^2 = \frac{\pi l^2}{U_{\max}}. \quad (8.61)$$

L'évaluation analytique des intégrales (8.57) et (8.58) s'avère très compliquée dans le cas général, mais nous allons nous limiter à deux cas limites: La limite non-relativiste (ou newtonienne) et la limite d'une charge NUT petite.

a) Commençons par la "limite non relativiste" qui s'obtient en prenant $m = 0$ avec $b^2 = n^2$, donc $f(r) = 1$, et $E' \ll 1$. Dans cette limite, le potentiel (8.44) se simplifie à

$$U(r) = \frac{l^2}{r^2 + n^2}, \quad (8.62)$$

conduisant, en prenant en considération (8.56) et (8.60), à

$$r_0^2 = a^2 - n^2. \quad (8.63)$$

Ce potentiel possède un seul maximum en $r = 0$, qui est

$$U_{\max} = U(0) = l^2/n^2. \quad (8.64)$$

Dans le cas de la réflexion, l'intégrale (8.57) se fait analytiquement pour donner

$$\Delta\lambda_{\text{réfl}} = \frac{2}{\sqrt{E'}} \int_{r_0}^{+\infty} \frac{dr}{\sqrt{(r^2 + n^2)(r^2 - r_0^2)}} = \frac{2}{l} K\left(\frac{n}{a}\right), \quad (8.65)$$

où K est une intégrale elliptique complète de première espèce. Dans le cas $\psi = 0$ (8.33) où le vecteur moment angulaire total \vec{J} est dirigé suivant l'axe des z , la variation angulaire totale de φ correspondante est

$$\Delta\varphi_{\text{réfl}} = J\Delta\lambda_{\text{réfl}} \simeq \frac{2}{\sin\theta} K\left(\frac{\sqrt{E'}}{2} \cot\theta\right), \quad (8.66)$$

où nous avons fait usage des relations (8.11) et supposé $E \simeq 1$ ($E' \ll 1$). Si $l = 2n \tan\theta$ est maintenu fixe dans la limite non-relativiste $E' \rightarrow 0$, ce qui correspond d'après (8.60) à

un paramètre d'impact a grand, le résultat (8.66) se réduit, en utilisant $K(0) = \pi/2$, à

$$\Delta\varphi_{\text{réfl}} = J\Delta\lambda_{\text{réfl}} \simeq \pi/\sin\theta. \quad (8.67)$$

Mais, si nous prenons la limite $E' \rightarrow 0$ en fixant le paramètre d'impact a à l'ordre de n , l'angle θ tend vers zéro et la particule d'épreuve tourne autour de l'axe polaire de nombreuses fois avant d'être diffusée vers l'infini.

Dans le cas de la transmission à travers le wormhole, de la condition (8.59), compte tenu de (8.64), nous en tirons

$$a < a_0 = n. \quad (8.68)$$

Donc, l'évaluation de l'intégrale (8.58) donne

$$\Delta\lambda_{\text{trans}} = \frac{2}{\sqrt{E'}} \int_0^{+\infty} \frac{dr}{\sqrt{(r^2 + n^2)(r^2 + n^2 - a^2)}} = \frac{2}{n\sqrt{E'}} K\left(\frac{a}{n}\right). \quad (8.69)$$

Si le vecteur \vec{J} est aligné avec l'axe des z (8.33), on aura, en utilisant $E \simeq 1$ et (8.11), une colatitude

$$\theta \simeq \frac{a\sqrt{E'}}{2n} \quad (8.70)$$

très petite. Ainsi, la particule effectue un nombre de tours grand mais fini,

$$\Delta\varphi_{\text{trans}} = J\Delta\lambda_{\text{trans}} \simeq \frac{4}{\sqrt{E'}} K\left(\frac{a}{n}\right). \quad (8.71)$$

En effet, le nombre de tours effectués pour une trajectoire radiale, $l = 0$ ($a = 0$), s'avère très grand,

$$\frac{\Delta\varphi_{\text{trans}}}{2\pi} \simeq \frac{1}{\sqrt{E'}}. \quad (8.72)$$

Ce résultat (8.72), qui n'a pas de sens pour une particule d'épreuve ponctuelle, résulte de la conservation du moment angulaire total (7.38) qui se réduit dans ce cas ($\vec{L} = 0$) au

moment angulaire de spin \vec{S} ,

$$\vec{J} = \vec{S}, \quad (8.73)$$

et peut être interprété en considérant un petit objet solide étendu. Cela signifie, par exemple, qu'une balle de tennis de rayon petit devant le rayon n de la gorge du wormhole va se déplacer en ligne droite de $-\infty$ à $+\infty$ à travers ce wormholes en pivotant de façon à effectuer $E'^{-1/2}$ tours à une vitesse angulaire valant

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{J}{r^2 + n^2} \simeq \frac{2n}{r^2 + n^2}, \quad (8.74)$$

qui atteint une valeur maximale en $r = 0$,

$$\dot{\varphi}_{\max} \simeq 2/n. \quad (8.75)$$

b) Traitons maintenant le cas de la “limite d’une charge NUT petite”, définie par $n^2 \ll m^2$ et $n^2 \ll b^2$, donc $b^2 + m^2 \simeq e'^2$. Dans cette limite, le potentiel (8.44) et sa dérivée peuvent être approximés respectivement par

$$U(r) \simeq \frac{-2mr^3 + (e'^2 + l^2)r^2 - 2ml^2r + l^2e'^2}{(r^2 + n^2)^2}, \quad (8.76)$$

$$U'(r) \simeq \frac{2r[mr^3 + (e'^2 + l^2)r^2 + 3ml^2r - 2l^2e'^2]}{(r^2 + n^2)^2}, \quad (8.77)$$

si $l \neq 0$. Evidemment, le potentiel admet un maximum relatif en $r = 0$,

$$E'_0 = U_{\max} = U(0) \simeq \begin{cases} l^2e'^2/n^4 & \text{si } l \neq 0 \\ e'^2/n^2 & \text{si } l = 0 \end{cases}, \quad (8.78)$$

et ce maximum est absolu car

$$U_{\max} - U(r) \geq 0. \quad (8.79)$$

On se propose d’étudier le cas de la réflexion seulement dans la limite $E' \rightarrow 0$ avec a

fixé, qui correspond à une trajectoire radiale vu que l , dans cette limite, devient négligeable, $l = a\sqrt{E'}$. Nous avons alors, de (8.44),

$$E' - U(r) \simeq -U(r) \simeq \frac{2mr - e'^2}{r^2 + n^2}, \quad (8.80)$$

qui s'annule (8.56) pour

$$r_0 \simeq \frac{e'^2}{2m}. \quad (8.81)$$

L'évaluation de l'intégrale (8.57) donne alors

$$\Delta\lambda_{\text{réfl}} \simeq \sqrt{2/m} \int_{r_0}^{+\infty} \frac{dr}{\sqrt{(r^2 + n^2)(r - r_0)}} = \frac{2\sqrt{2/m}}{(r_0^2 + n^2)^{1/4}} K \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + n^2}}} \right), \quad (8.82)$$

qui peut être approximé par

$$\Delta\lambda_{\text{réfl}} \simeq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{mr_0}} K \left(\frac{n}{2r_0} \right) \simeq \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{mr_0}} \left(1 + \frac{n^2}{16r_0^2} \right). \quad (8.83)$$

Nous aurons, si nous retenons que le terme d'ordre 1 en n ,

$$\Delta\lambda_{\text{réfl}} \simeq 2\pi/e'. \quad (8.84)$$

Ainsi, dans le cas où \vec{J} est aligné avec l'axe des z (8.33), nous trouvons un résultat petit mais non nul,

$$\frac{\Delta\varphi_{\text{réfl}}}{2\pi} = \frac{J\Delta\lambda_{\text{réfl}}}{2\pi} \simeq \frac{2n}{e'}, \quad (8.85)$$

où J est approximé par $2n$.

Passons maintenant à la transmission à travers la gorge du wormhole, qui se produit dans le cas extrême relativiste puisque E'_0 devient grand d'après (8.78) où $E' > E'_0 = U_{\text{max}}$

(8.59), à partir duquel nous utilisons (8.78) ($l \neq 0$) pour tirer,

$$a < n^2/e'. \quad (8.86)$$

Ceci d'une part. D'autre part, la colatitude, dans le cas $\psi = 0$ (8.33) où le vecteur moment angulaire total \vec{J} est dirigé suivant l'axe des z , est donnée approximativement par

$$\tan \theta \simeq \frac{a}{2n}. \quad (8.87)$$

Alors

$$\tan \theta < \frac{n}{2e'}. \quad (8.88)$$

Ainsi, nous pouvons procéder, dans cette limite relativiste extrême, à l'approximation suivante

$$E' - U(r) \simeq E' - \frac{E'_0 n^4}{(r^2 + n^2)^2} = E' \left[1 - \frac{a^2 e'^2}{(r^2 + n^2)^2} \right]. \quad (8.89)$$

Finalement, nous obtenons, après évaluation de l'intégrale (8.58),

$$\Delta\varphi_{\text{trans}} \simeq \frac{4n}{\sqrt{n^2 + ae'}} K \left(\sqrt{\frac{2ae'}{n^2 + ae'}} \right). \quad (8.90)$$

Ce résultat se réduit, pour un paramètre d'impact très petit (8.86) $a \ll n^2/e'$, c'est-à-dire pour un moment angulaire fini $l = a\sqrt{E'}$, à

$$\Delta\varphi_{\text{trans}} \simeq 2\pi. \quad (8.91)$$

Nous remarquons que ce résultat est aussi en accord avec l'hypothèse d'un petit objet solide étendu en mouvement radial ($l = 0$) à travers le wormhole de $-\infty$ à $+\infty$ mais avec une énergie extrême relativiste. Cet objet effectue autour lui-même exactement un tour et

atteint sa vitesse angulaire maximale en $r = 0$,

$$\dot{\varphi}_{\max} \simeq 2\sqrt{E'}/n. \quad (8.92)$$

8.3.2.2 Mouvement fini (états liés)

Dans le cas où le potentiel admet quatre extrema, nous distinguons, d'après les Figs. 8-1 et 8-2, deux types de puits de potentiel, relativiste et non relativiste (ou newtonien), correspondant respectivement aux minima en r_2 et r_4 avec

$$|U_{\min}| = |U(r_2)| \gg |U'_{\min}| = |U(r_4)|, \quad (8.93)$$

ainsi que deux barrières de potentiel correspondant aux maxima en r_1 et r_3 avec

$$U_{\max} = U(r_1) > U'_{\max} = U(r_3). \quad (8.94)$$

Il en résulte deux types d'état lié (orbites oscillant entre deux points de rebroussement), relativiste autour de r_2 se produisant lorsque

$$U_{\min} < E' < U'_{\max}, \quad (8.95)$$

correspondant aux particules de hautes énergies, et non relativiste autour de r_4 se produisant lorsque

$$U'_{\min} < E' < 0, \quad (8.96)$$

correspondant aux particules de faibles énergies, ainsi que deux types d'orbites stables, relativiste en r_2 d'énergie $E' = U_{\min}$ et non-relativiste en r_4 d'énergie $E' = U'_{\min} \simeq 0$.

Cette étude des états liés comporte, entre autres, le cas de figure avec seulement deux extrema (Fig. 8-3), comme nous l'avons déjà indiqué au premier paragraphe de cette sous-section (absence des extrema en r_3 et r_4). Donc, nous avons un seul type d'orbites circulaires

relativistes oscillant entre deux points de rebroussement autour de r_2 d'énergie telle que $U_{\min} < E' < 0$, ainsi qu'un seul type d'orbite stable relativiste en r_2 d'énergie $E' = U_{\min}$.

Comme nous l'avons déjà constaté, la même situation pour un moment orbital non nul ($l \neq 0$) avec seulement deux extrema, se présente également pour un moment orbital nul ($l = 0$) avec deux extrema (8.47). Nous obtenons ainsi pour l'orbite circulaire en r_+

$$E_+^2 = 1 + E'_+ = 1 + U_+ = f(r_+) = 1 - \frac{\sqrt{e'^4 - 4n^2b^2}}{r_+^2 + n^2}, \quad (8.97)$$

qui est évidemment positif pour $b^2 > 0$. A cette position d'équilibre stable, la vitesse angulaire à laquelle un petit objet tourne sur lui-même est donnée par

$$\dot{\varphi}_+ = \frac{J_+}{r_+^2 + n^2} = \frac{2nE_+}{r_+^2 + n^2} = \frac{2n}{r_+^2 + n^2} \left(1 - \frac{\sqrt{e'^4 - 4n^2b^2}}{r_+^2 + n^2} \right)^{1/2}. \quad (8.98)$$

Ces valeurs se réduisent dans la limite d'une charge NUT petite aux

$$r_+ \simeq \frac{e'^2}{m}, \quad U_+ \simeq -\frac{m^2}{e'^2}, \quad E_+ \simeq \frac{b}{e'} \quad \dot{\varphi}_+ \simeq \frac{2bm^2n}{e'^5}. \quad (8.99)$$

Le cas particulier d'un wormhole sans masse réduit le potentiel en une forme symétrique donnée par (8.48). Ici, nous avons deux situations. La première correspond aux orbites circulaires d'énergie $E'_0 = U(0)$ (8.49) au niveau de la gorge du wormhole,

$$E_0^2 = 1 + E'_0 = 1 + U(0) = \frac{(l^2 + n^2)b^2}{n^4}. \quad (8.100)$$

Ces orbites sont stables (Fig. 8-5) ou instables (Fig. 8-6), suivant que le signe de $U(0)$ est négatif (puits de potentiel) ou positif (barrière de potentiel). Il existe aussi des orbites oscillant entre deux points de rebroussement dans le puits de potentiel d'énergie telle que $U(0) < E' < 0$. Dans la deuxième situation, le puits de potentiel au niveau de la gorge du wormhole $U(0)$ se trouve placé entre deux barrières de potentiel symétriques $U(r_{\pm})$ (8.50),

au niveau desquelles, existent des orbites circulaires instables d'énergie $E'_{\pm} = U(r_{\pm})$,

$$E_{\pm}^2 = 1 + U(r_{\pm}) = \frac{(l^2 + n^2 - b^2)^2}{4l^2(n^2 - b^2)}. \quad (8.101)$$

En particulier, si $b^2 = 0$ ($e'^2 = m^2 + n^2$), le potentiel (8.44) admet un minimum absolu en $r_0 = m = \sqrt{e'^2 - n^2}$, $U(m) = -1 \leq U(r)$, correspondant aux orbites circulaires stables d'énergie $E'_0 = U(m)$,

$$E_0^2 = 1 + U(m) = 0. \quad (8.102)$$

Il s'ensuit que dans la limite $b^2 \ll m^2$, il existe des orbites circulaires stables en $r_0 \simeq m - b^2/2m$, avec

$$U(r_0) = \frac{(l^2 + e'^2)b^2}{e'^4} - 1, \quad (8.103)$$

une énergie et une vitesse angulaire propre

$$E_0^2 = 1 + U(r_0) \simeq \frac{(l^2 + e'^2)b^2}{e'^4}, \quad \dot{\varphi}_0 = \frac{J}{r_0^2 + n^2} \simeq \frac{l}{e'^2}. \quad (8.104)$$

8.3.3 Géodésiques de genre lumière

Pour un chemin du photon, le potentiel (8.44) est défini positif et est de la forme

$$U(r) = l^2 \frac{(r - m)^2 + b^2}{(r^2 + n^2)^2}, \quad (8.105)$$

admettant un ou trois extrema (Figs. 8-8 et 8-9) et qui s'annule dans le cas du mouvement radial ($l = 0$). Ici, nous allons limiter notre étude au cas d'une masse nulle ($m = 0$) réduisant le potentiel en une forme symétrique,

$$U(r) = l^2 \frac{r^2 + b^2}{(r^2 + n^2)^2}, \quad (8.106)$$

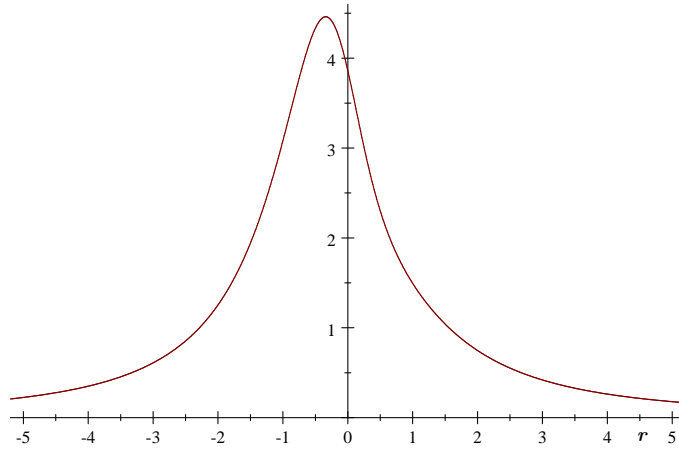


Fig. 8-8 Potentiel pour un photon avec $b = 0.8$, $n = 1$, $m = 0.3$ et $l = 2.3$.

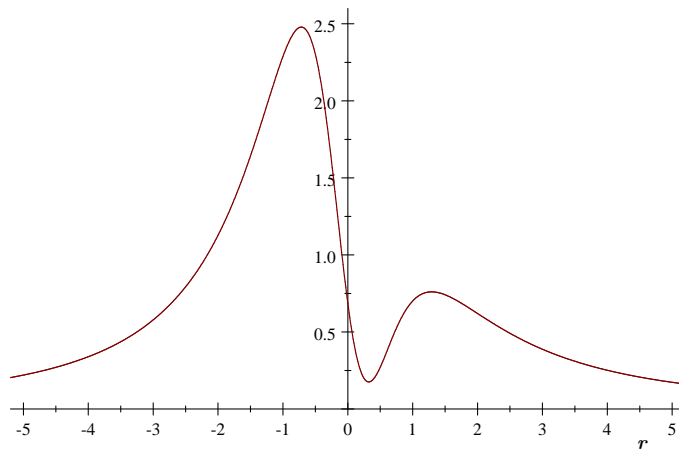


Fig. 8-9 Potentiel pour un photon avec $b = 0.2$, $n = 1$, $m = 0.3$ et $l = 2.3$.

caractérisée soit par trois extrema (Fig. 8-10), un minimum en $r = 0$,

$$U_{\min} = U(0) = l^2 b^2 / n^4, \quad (8.107)$$

et deux maxima en $r = r_{\pm}$,

$$U_{\max} = U(r_{\pm}) = \frac{l^2}{4(n^2 - b^2)} > U_{\min} = U(0), \quad r_{\pm} = \pm \sqrt{n^2 - 2b^2}, \quad (8.108)$$

sous la condition

$$n^2 > 2b^2, \quad (8.109)$$

soit par un seul maximum en $r = 0$ (Fig. 8-11),

$$U_{\max} = U(0) = l^2 b^2 / n^4, \quad (8.110)$$

sous la condition

$$n^2 \leq 2b^2. \quad (8.111)$$

Dans le premier cas, il existe une orbite circulaire stable au niveau de la gorge du wormhole en $r = 0$ (une sphère de rayon n et de surface égale à $4\pi n^2$) et des orbites circulaires instables en $r = r_{\pm}$ tandis que dans le deuxième cas l'orbite circulaire en $r = 0$ devient instable.

Considérons d'abord le cas de figure où il y a qu'un seul maximum en $r = 0$. Dans le cas de la réflexion (8.53), où nous avons d'après (8.60) et (8.110)

$$a^2 > n^4/b^2, \quad n^2 \leq 2b^2, \quad (8.112)$$

(8.57) s'intègre pour donner

$$\Delta\lambda_{\text{réfl}} = \frac{2}{\sqrt{E'}} \int_{r_0}^{+\infty} \frac{dr}{\sqrt{(r^2 - r_0^2)(r^2 + \alpha^2 - r_0^2)}} = \frac{2}{\alpha\sqrt{E'}} K \left(\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{\alpha^2}} \right), \quad (8.113)$$

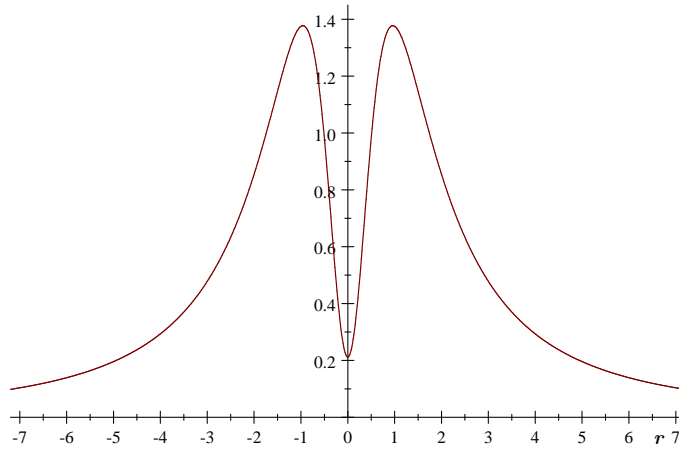


Fig. 8-10 Potentiel pour une masse nulle $m = 0$ avec les mêmes valeurs des paramètres prises pour la Fig. 8-9.

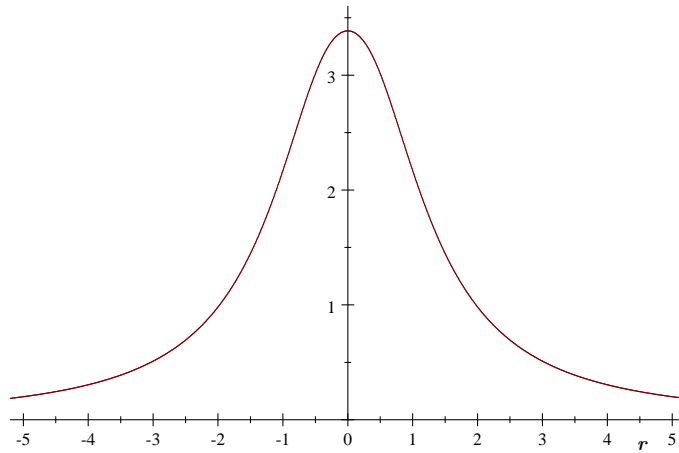


Fig. 8-11 Potentiel pour une masse nulle $m = 0$ avec les mêmes valeurs des paramètres prises pour la Fig. 8-8.

où r_0 (8.56) et α sont définis par,

$$r_0^2 = \frac{\alpha^2 + a^2}{2} - n^2, \quad \alpha = a[1 + 4(b^2 - n^2)/a^2]^{1/4}. \quad (8.114)$$

Par conséquent, nous trouvons dans le cas où \vec{J} ($J^2 = (4n^2 + a^2)E'$) n'a qu'une composante J_z (8.33),

$$\Delta\varphi_{\text{réfl}} = J\Delta\lambda_{\text{réfl}} = \frac{2\sqrt{4n^2 + a^2}}{\alpha} K \left(\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{\alpha^2}} \right). \quad (8.115)$$

Dans le cas de figure où il y a trois extrema, (8.108), la réflexion se produit lorsque $U(0) < E' < U(r_{\pm})$, ce qui donne, en utilisant (8.60),

$$4(n^2 - b^2) < a^2 < n^4/b^2, \quad n^2 > 2b^2. \quad (8.116)$$

Ensuite, l'intégration de (8.57) donne

$$\Delta\lambda_{\text{réfl}} = \frac{2}{\sqrt{E'}} \int_{r_0}^{+\infty} \frac{dr}{\sqrt{(r^2 - r_0^2)[r^2 - (\alpha^2 - r_0^2)]}} = \frac{2}{r_0\sqrt{E'}} K \left(\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{r_0^2}} \right). \quad (8.117)$$

Dans le cas où \vec{J} n'a qu'une composante J_z , nous obtenons alors

$$\Delta\varphi_{\text{réfl}} = \frac{2\sqrt{4n^2 + a^2}}{r_0} K \left(\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{r_0^2}} \right). \quad (8.118)$$

Le résultat (8.115) se réduit dans la limite non relativiste $b^2 = n^2$ ($\alpha = a$) à

$$\Delta\varphi_{\text{réfl}} = 2\sqrt{1 + \frac{4n^2}{a^2}} K \left(\frac{n}{a} \right), \quad (8.119)$$

ou encore, en utilisant les relation (8.11),

$$\Delta\varphi_{\text{réfl}} = \frac{2}{\sin\theta} K \left(\frac{\cot\theta}{2} \right), \quad (8.120)$$

avec, d'après (8.112),

$$\tan \theta > 1/2 \quad (a > n). \quad (8.121)$$

Examinons maintenant la transmission dans le cas où le potentiel admet un seul maximum. L'expression (8.58) s'intègre pour donner

$$\Delta\lambda_{\text{trans}} = \frac{2}{\sqrt{E'}} \int_0^{+\infty} \frac{dr}{\sqrt{(r^2 + r_0'^2)(r^2 + r_0'^2 - \alpha^2)}} = \frac{2}{r_0' \sqrt{E'}} K \left(\frac{\alpha}{r_0'} \right), \quad (8.122)$$

avec

$$r_0'^2 = n^2 - \frac{\alpha^2 + a^2}{2}, \quad (8.123)$$

et, d'après (8.54) et (8.110),

$$a^2 < n^4/b^2. \quad (8.124)$$

Dans le cas où \vec{J} n'a qu'une composante J_z , nous obtenons

$$\Delta\varphi_{\text{trans}} = J\Delta\lambda_{\text{trans}} = \frac{2\sqrt{4n^2 + a^2}}{r_0'} K \left(\frac{\alpha}{r_0'} \right), \quad (8.125)$$

qui donne dans la limite non relativiste $b^2 = n^2$

$$\Delta\varphi_{\text{trans}} = J\Delta\lambda_{\text{trans}} = 2\sqrt{\frac{4n^2 + a^2}{n^2 - a^2}} K \left(\frac{a}{\sqrt{n^2 - a^2}} \right), \quad (8.126)$$

qui se réduit pour un paramètre d'impact très petit (8.112) à

$$\Delta\varphi_{\text{trans}} = \frac{2}{\cos \theta} K \left(\frac{\cot \theta}{2} \right), \quad (8.127)$$

avec

$$\tan \theta \ll 1/2 \quad (a \ll n). \quad (8.128)$$

De même, pour les photons, on montre qu'il existe, dans la limite $b^2 \ll m^2$, des orbites

circulaires stables en $r_0 \simeq m$, d'énergie

$$E_0^2 = \frac{l^2 b^2}{e'^4}. \quad (8.129)$$

8.4 Déviation géodésique

La courbure de l'espace-temps se manifeste par la déviation d'une géodésique par rapport à une autre géodésique voisine (accélération relative). Considérons deux géodésiques $x^\mu(\tau)$ et $x'^\mu(\tau)$ infiniment voisines reliées entre elles par le vecteur séparation géodésique infinitésimal δx^μ ,

$$x'^\mu(\tau) = x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau). \quad (8.130)$$

L'évolution de δx^μ entre les deux géodésiques, ce que l'on appelle la déviation géodésique, est régie par l'équation de la déviation géodésique qui s'exprime en termes des composantes du tenseur de Riemann comme [66, 63]

$$\delta \ddot{x}^\mu = \frac{D^2 \delta x^\mu}{d\tau^2} = -R^\mu_{\rho\nu\sigma} u^\rho \delta x^\nu u^\sigma, \quad (8.131)$$

où $\delta \ddot{x}^\mu$ désigne la 4-accélération relative ou accélération de marée et $u^\mu = \dot{x}^\mu$. Par souci de simplicité, on ne discutera que les géodésiques radiales ($l = 0$) dans deux cas limites: La limite non relativiste et la limite d'une charge NUT petite.

8.4.1 Forces de marée gravitationnelles et traversabilité

Ayant connu l'équation de la déviation géodésique (8.131), nous sommes en mesure d'étudier qualitativement les accélérations de marée gravitationnelles que subit un observateur en chute libre à travers le wormhole. Pour une séparation δx purement spatiale entre deux points voisins de cet observateur dans son référentiel propre, nous avons

$$u_\mu \delta x^\mu = 0, \quad (8.132)$$

où $u_\mu = g_{\mu\nu}u^\nu$. Pour calculer les accélérations relatives longitudinale $\delta\ddot{r}$, transversale $\delta\ddot{\theta}$ et azimutale $\delta\ddot{\varphi}$, on utilise le fait que pour une géodésique radiale la 4-vitesse n'a que deux composantes non nulles, $\dot{t} = E/f$ et $\dot{r} = \sqrt{E^2 - f}$ ($\dot{\theta} = 0$, $\dot{\varphi} = 0$). Remarquons d'abord que l'équation (8.132) se réduit à

$$(g_{tt}\delta t + g_{t\varphi}\delta\varphi)\dot{t} + g_{rr}\dot{r}\delta r = 0, \quad (8.133)$$

ce qui donne, en utilisant les composantes du tenseur métrique,

$$\delta t - \omega\delta\varphi = \frac{\sqrt{E^2 - f}}{Ef}\delta r. \quad (8.134)$$

Ce résultat va nous permettre d'éliminer δt de l'équation de la déviation géodésique (8.131) pour obtenir

$$\begin{aligned} \delta\ddot{r} &= -R^r{}_{ttr}\dot{t}\dot{r}\delta t - R^r{}_{t\varphi r}\dot{t}\dot{r}\delta\varphi - R^r{}_{trt}\dot{t}^2\delta r \\ &= -\frac{(f-1)(3r^2 - n^2) + 4mr}{(r^2 + n^2)^2}\delta r, \end{aligned} \quad (8.135)$$

$$\begin{aligned} \delta\ddot{\theta} &= -(R^\theta{}_{t\theta t}\dot{t}^2 + R^\theta{}_{r\theta r}\dot{r}^2)\delta\theta \\ &= -\frac{r(r-m) - (r^2 - n^2)f}{(r^2 + n^2)^2}\delta\theta, \end{aligned} \quad (8.136)$$

$$\begin{aligned} \delta\ddot{\varphi} &= -(R^\varphi{}_{t\varphi t}\dot{t}^2 + R^\varphi{}_{r\varphi r}\dot{r}^2)\delta\varphi \\ &= -\frac{r(r-m) - (r^2 - n^2)f}{(r^2 + n^2)^2}\delta\varphi, \end{aligned} \quad (8.137)$$

où les composantes non nulles du tenseur de Riemann qui correspondent à la métrique RN-NUT sont présentées dans l'Annexe B. Il en découle qu'au niveau de la gorge du wormhole en $r = 0$, on obtient

$$\delta\ddot{r}(0) = \frac{e'^2 - 2n^2}{n^4}\delta r, \quad \delta\ddot{\theta}(0) = -\frac{e'^2 - n^2}{n^4}\delta\theta, \quad \delta\ddot{\varphi}(0) = -\frac{e'^2 - n^2}{n^4}\delta\varphi. \quad (8.138)$$

Si $e'^2 > 2n^2$, l'observateur sera donc étiré dans la direction radiale et compressé dans la direction transversale. La même situation se produit dans la limite d'une charge NUT petite mais les forces de marée deviennent trop importantes,

$$F_{radiale} \simeq F_{transverse} \simeq e'^2/n^4. \quad (8.139)$$

Si $n^2 < e'^2 < 2n^2$, il sera compressé dans les deux directions.

Dans la limite non relativiste $f(r) = 1$ ($m = 0$, $e'^2 = 2n^2$), l'observateur ne subit qu'une force de compression transversale,

$$\delta\ddot{r}(0) = 0, \quad \delta\ddot{\theta}(0) = -\frac{\delta\theta}{n^2}, \quad \delta\ddot{\varphi}(0) = -\frac{\delta\varphi}{n^2}. \quad (8.140)$$

En effet, on sais que dans cette limite, l'objet étendu ne subit qu'une accélération de marée centrifuge puisqu'il tombe à travers le wormhole avec une vitesse radiale constante $\dot{r} = E$ et une vitesse angulaire donnée par (8.74),

$$\varpi(r) = \frac{d\varphi}{d\tau} \simeq \frac{2n}{r^2 + n^2}. \quad (8.141)$$

Dans un espace plat, cette accélération serait donnée en coordonnées cylindriques (ρ, z) par

$$\ddot{\rho} = -\varpi^2(z)\rho \simeq -\frac{4n^2}{(r^2 + n^2)^2}\rho, \quad (8.142)$$

où nous avons supposé que le mouvement radial s'effectue suivant l'axe des z ($r \equiv z$) (le rayon de l'objet doit être petit devant le rayon de la gorge du wormhole n), donc en $r = 0$, $\ddot{\rho}/\rho = -4/n^2$. Dans le cas du wormhole de Brill, l'équation (8.140) montre que le signe est correct, mais le facteur numérique doit être divisé par 4. Si nous prenons, comme dans la référence [63], la valeur $\rho = 2$ m pour le rayon de l'objet et $|\ddot{\rho}| = 9.8 \text{ m s}^{-1}$ (l'accélération terrestre) comme ordre de grandeur d'une accélération supportable, nous trouvons donc au

niveau de la gorge en $r = 0$

$$\frac{|\ddot{\rho}|}{\rho}(0) \simeq \frac{1}{n^2} \simeq 5 \text{ s}^{-1}. \quad (8.143)$$

Il en découle une estimation pour la charge NUT $n \simeq 0.5 \text{ s}$ qui correspond à un rayon $n \simeq 1.5 \times 10^8 \text{ m}$ de la gorge d'un wormhole qui peut être traversé confortablement.

Chapitre 9

Mouvement d'une particule chargée

9.1 Généralités

Le mouvement non géodésique d'une particule massive chargée de masse m_c et de charge électrique e_c dans l'espace-temps de RN-NUT est décrit par le lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + \kappa A_\mu\dot{x}^\mu, \quad \kappa = e_c/m_c, \quad (9.1)$$

où le 4-potential électromagnétique A_μ n'a que deux composantes non nulles, $A_t = \Phi(r)$ et $A_\varphi = -\Phi(r)\omega(\theta)$ (7.3). Le lagrangien (9.1) devient

$$2\mathcal{L} = -f(r)[\dot{t} - \omega(\theta)\dot{\varphi}]^2 + 2\kappa\Phi(r)[\dot{t} - \omega(\theta)\dot{\varphi}] + f(r)^{-1}\dot{r}^2 + (r^2 + n^2)(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2). \quad (9.2)$$

Les variables t et φ sont des variables cycliques ($\partial\mathcal{L}/\partial t = \partial\mathcal{L}/\partial\varphi = 0$) permettant d'avoir, par application de (7.20), deux intégrales premières. La première équation correspondante

à t est

$$\frac{d}{d\tau}\{f(r)[\dot{t} - \omega(\theta)\dot{\varphi}] - \kappa\Phi(r)\} = 0, \quad (9.3)$$

qui s'intègre pour donner

$$f(r)[\dot{t} - \omega(\theta)\dot{\varphi}] = E + \kappa\Phi(r), \quad (9.4)$$

où E est une constante jouant le rôle d'une énergie par unité de masse. La deuxième équation correspondante à φ est

$$\frac{d}{d\tau}[2nE \cos \theta + (r^2 + n^2) \sin^2 \theta \dot{\varphi}] = 0, \quad (9.5)$$

où nous avons utilisé (9.4) pour éliminer le terme $\kappa\Phi(r)$. L'intégration de cette équation donne

$$\dot{\varphi} = \frac{J_z - 2nE \cos \theta}{(r^2 + n^2) \sin^2 \theta}, \quad (9.6)$$

où la constante J_z est interprétée comme la composante suivant l'axe des z du moment angulaire total \vec{J} par unité de masse. L'équation de Lagrange correspondante à la composante θ est

$$\frac{d}{d\tau}[(r^2 + n^2)\dot{\theta}] = (r^2 + n^2) \cos \theta \sin \theta \dot{\varphi}^2 - 2nE \sin \theta \dot{\varphi}, \quad (9.7)$$

où nous avons également utilisé (9.4) pour éliminer le terme $\kappa\Phi(r)$. Donc, les équations du mouvement angulaires sont les mêmes que pour une particule neutre tandis que l'équation (9.4) ne diffère de (7.24) que par le terme $\kappa\Phi(r)$. Ainsi, pour obtenir l'équation radiale, il suffit de remplacer la constante E dans (7.54) (avec $\varepsilon = -1$ pour une particule massive) par $E + \kappa\Phi(r)$ (9.4),

$$\dot{r}^2 + f(r) \left(\frac{l^2}{r^2 + n^2} + 1 \right) = \mathcal{E}(r)^2, \quad \mathcal{E}(r) = E + \kappa\Phi(r). \quad (9.8)$$

Idem pour la solution $t(\tau)$ du mouvement temporel qui, en intégrant (9.4) après avoir remplacé par (9.6), se décompose en deux composantes radiale et angulaire $t(\lambda) = t_r(\lambda) +$

$t_\theta(\lambda)$. On doit juste rajouter le terme $\kappa\Phi(r)$ à l'énergie E dans la partie radiale (8.36) tout en gardant la même partie angulaire (8.37),

$$\frac{dt_r}{d\lambda} = \frac{\mathcal{E}(r)(r^2 + n^2)}{f(r)}, \quad \mathcal{E}(r) = E + \kappa\Phi, \quad (9.9)$$

$$\frac{dt_\theta}{d\lambda} = 2n \frac{(\cos\theta + C)(J_z - 2nE \cos\theta)}{\sin^2\theta}. \quad (9.10)$$

Donc, la partie angulaire (9.10) s'intègre de la même façon que pour la particule neutre pour donner (8.39)

$$t_\theta(\lambda) = 2n \left[2nE\lambda + (C + 1) \arctan\left(\sigma_- \tan \frac{J\lambda}{2}\right) + (C - 1) \arctan\left(\sigma_+ \tan \frac{J\lambda}{2}\right) \right], \quad (9.11)$$

avec σ_\pm donné par (8.22) ainsi que (8.40)

$$\Delta t_\theta = 2\pi n [4nE/J + (C + 1)\text{sgn}(J_z - 2nE) + (C - 1)\text{sgn}(J_z + 2nE)]. \quad (9.12)$$

sur une période $2\pi/J$ de λ .

Revenons maintenant à l'équation radiale (9.8). Celle-ci peut être mise sous la forme

$$\dot{r}^2 + W(r) = 0, \quad (9.13)$$

où nous avons défini le potentiel effectif

$$W(r) = f(r) \left(\frac{l^2}{r^2 + n^2} + 1 \right) - \mathcal{E}(r)^2. \quad (9.14)$$

Ce potentiel peut être réécrit comme

$$W(r) = -[E - V_+(r)][E - V_-(r)], \quad (9.15)$$

où nous avons cette fois-ci introduit le potentiel V_{\pm} défini par

$$V_{\pm}(r) = -\kappa\Phi(r) \pm \sqrt{f(r) \left(\frac{l^2}{r^2 + n^2} + 1 \right)}, \quad (9.16)$$

auquel cas, pour une particule au repos $\dot{r}^2 = 0$, $E = V_+$ et la quantité $\mathcal{E}(r)$ est égale à l'énergie cinétique qui doit être strictement positive (on rappelle que $f > 0$ partout pour le wormhole),

$$\mathcal{E}(r) = E + \kappa\Phi(r) = \sqrt{\dot{r}^2 + f(r) \left(\frac{l^2}{r^2 + n^2} + 1 \right)} > 0. \quad (9.17)$$

Il s'ensuit que $E > V_-$ toujours et le mouvement de la particule correspond à $E > V_+$. Il est aussi à noter que les conditions d'existence des orbites circulaires $W(r) = W'(r) = 0$ correspondent aux conditions $V_+(r) = E$ et $V_+'(r) = 0$ qui ne contiennent pas des énergies négatives. Donc, nous pouvons considérer V_+ comme un potentiel radial effectif convenable pour l'étude des orbites circulaires.

9.2 Orbites circulaires dans le cas magnétique de masse nulle

Ne sachant pas effectuer le calcul dans le cas général, nous nous placerons dans le cas particulier d'une solution de RN-NUT sans masse, avec seulement une charge magnétique et une charge NUT,

$$m = 0, \quad e = 0. \quad (9.18)$$

Les fonctions $f(r)$ et $\Phi(r)$ de la solution de RN-NUT se réduisent aux

$$f(r) = \frac{\bar{r}^2 + \bar{g}^2 - 1}{\bar{r}^2 + 1}, \quad \Phi(r) = \frac{\bar{g} \bar{r}^2 - 1}{2\bar{r}^2 + 1}, \quad (9.19)$$

où nous avons posé

$$\bar{r} = r/n, \quad \bar{g} = g/n. \quad (9.20)$$

Notons aussi que les potentiels $V_+(r)$ et $W(r)$ deviennent symétriques sous la réflexion $r \rightarrow -r$. Pour plus de clarté, nous traiterons d'abord le cas particulier $-g_{tt} = f = 1$, et nous généraliserons ensuite.

9.2.1 Mouvement dans le cas $b^2 = n^2$

Ce cas implique que $f = 1$ et que la charge magnétique est reliée à la charge NUT par

$$g = \sqrt{2}n, \quad (9.21)$$

et que les fonctions $f(r)$ et $\Phi(r)$ (9.19) se réduisent aux

$$f(r) = 1, \quad \Phi(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{2}{\bar{r}^2 + 1} \right). \quad (9.22)$$

En conséquence, le potentiel $V_+(r)$ (9.16) devient

$$V_+(r) = \frac{-\kappa}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{2}{\bar{r}^2 + 1} \right) + \sqrt{\frac{\bar{l}^2}{\bar{r}^2 + 1} + 1}, \quad \bar{l} = l/n. \quad (9.23)$$

Pour $\kappa > 0$, l'équation $V'_+(r) = 0$ admet une seule racine en $r = 0$ correspondant à un seul maximum,

$$V_+(0) = \kappa/\sqrt{2} + \sqrt{\bar{l}^2 + 1}, \quad (9.24)$$

telle que montrée sur la Fig. 9-1 avec $V_+(0) > V_+(\infty) = 1 - \kappa/\sqrt{2}$. Ainsi, une particule de charge positive venant de l'infini sera transmise à travers le wormhole ou réfléchi par la barrière de potentiel suivant que son énergie est $E > V_+(0)$ ou $V_+(\infty) < E < V_+(0)$ et, au niveau de la gorge du wormhole en $r = 0$, les orbites circulaires d'énergie totale $E = V_+(0)$ et d'énergie cinétique

$$\mathcal{E}(0) = \sqrt{\bar{l}^2 + 1}, \quad (9.25)$$

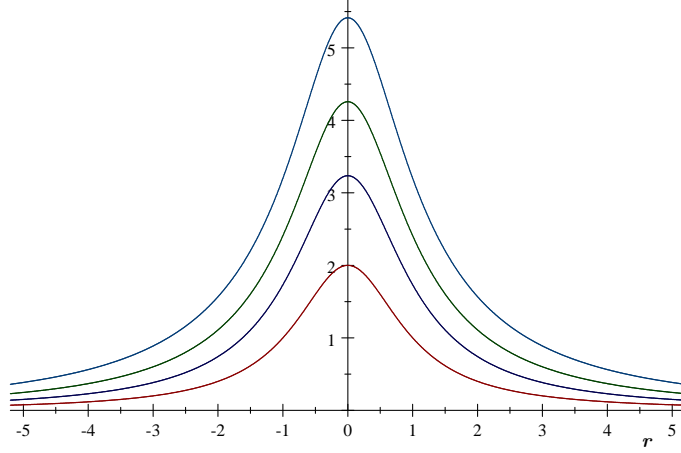


Fig. 9-1 Potentiel pour une particule de charge positive, $\kappa = \sqrt{2}$, avec $g = \sqrt{2}$, $n = 1$, et $l = 0$, 2, 3.1, 4.3 (de bas en haut).

sont instables.

Pour $\kappa < 0$, nous distinguons trois courbes différentes de V_+ correspondant aux trois domaines de variation du moment orbital l , comme illustrés sur la Fig. 9-2. Le premier domaine est

$$\bar{l}^2 \leq 2\sqrt{2}|\kappa|, \quad (9.26)$$

auquel cas la courbe admet un seul minimum $V_+(0)$ en $r = 0$ ($V_+(0) < V_+(\infty)$). Donc, une particule de charge négative soit elle est transmise à travers le wormhole si $E > V_+(\infty) = 1 + |\kappa|/\sqrt{2}$, soit elle oscille entre deux points de rebroussement (état lié) si $V_+(0) < E < V_+(\infty)$. Dans ce cas, il existe des orbites circulaires stables en $r = 0$. Dans le deuxième domaine

$$2\sqrt{2}|\kappa| < \bar{l}^2 < 2\sqrt{2}|\kappa| \left(\sqrt{1 + 2\kappa^2} + \sqrt{2}|\kappa| \right), \quad (9.27)$$

la courbe admet, en plus du minimum $V_+(0)$ en $r = 0$, deux autres maxima symétriques,

$$V_+(r_{\pm}) = \sqrt{2}|\kappa| \left(\frac{\bar{l}^2}{8\kappa^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\bar{l}^2} \right), \quad (9.28)$$

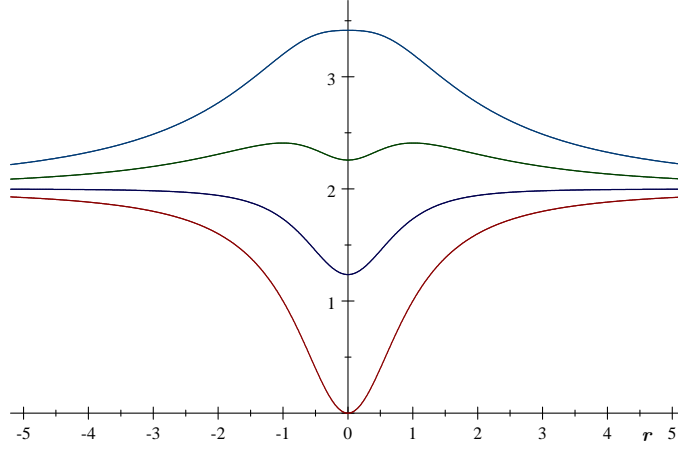


Fig. 9-2 Potentiel pour une particule de charge négative, $\kappa = -\sqrt{2}$, avec les mêmes valeurs des paramètres représentés sur la Fig. 9-1.

en

$$\bar{r}_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{8\kappa^2 \bar{l}^2}{\bar{l}^4 - 8\kappa^2} - 1}. \quad (9.29)$$

D'après la Fig. 9-2 nous aurons des états de diffusion pour $E > V_+(r_{\pm})$ (transmission) et $V_+(\infty) < E < V_+(r_{\pm})$ (réflexion pour $r > r_+$), et des états liés d'énergie telle que $V_+(0) < E < V_+(r_{\pm})$ ($r_- < r < r_+$). Dans ce cas, les orbites circulaires en $r = 0$ sont stables tandis que celles en r_{\pm} sont instables avec une énergie totale

$$E = V_+(r_{\pm}) = \sqrt{2}|\kappa| \left(\frac{\bar{l}^2}{8\kappa^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\bar{l}^2} \right) \quad (9.30)$$

et une énergie cinétique

$$\mathcal{E}(r_{\pm}) = E + \kappa\Phi(r_{\pm}) = \frac{\bar{l}^2}{2\sqrt{2}|\kappa|}. \quad (9.31)$$

Finalement, dans le domaine

$$\bar{l}^2 \geq 2\sqrt{2}|\kappa| \left(\sqrt{1 + \kappa^2} + \sqrt{2}|\kappa| \right), \quad (9.32)$$

les deux extrema en $r = r_{\pm}$ disparaissent et le minimum $V_+(0)$ en $r = 0$ devient un maximum. Donc, le mouvement de la particule chargée, dans ce domaine, est analogue à celui déjà étudié pour $\kappa > 0$.

9.2.2 Mouvement dans le cas général

Afin d'étudier le mouvement dans ce cas, il s'est avéré plus facile de travailler directement avec le potentiel $W(r)$ dans lequel la discussion des orbites circulaires dépend de la nature des points stationnaires de l'équation

$$W(r) = W'(r) = 0, \quad (9.33)$$

à savoir s'ils sont des minima ou maxima. Le potentiel (9.14) peut être mis sous la forme

$$W(r) = \frac{-A}{(\bar{r}^2 + 1)^2} + \frac{B}{\bar{r}^2 + 1} - C, \quad \bar{r} = r/n, \quad (9.34)$$

où nous avons remplacé $\mathcal{E}(r)$, $f(r)$ et $\Phi(r)$ par leurs expressions (9.8) et (9.19) et posé

$$A = \kappa^2 \bar{g}^2 - (\bar{g}^2 - 2) \bar{l}^2, \quad B = \bar{l}^2 + \bar{g}^2 - 2 + 2\kappa \bar{g} E_0, \quad C = E_0^2 - 1, \quad (9.35)$$

avec

$$E_0 = \mathcal{E}(\infty) = E + \kappa \bar{g}/2, \quad \bar{g} = g/n. \quad (9.36)$$

Nous pouvons invoquer sans perte de généralité la conjugaison de charge pour supposer $g > 0$, où le signe de $\kappa \bar{g}$ devient le signe de κ .

L'équation $W'(r) = 0$ admet deux racines, $r = 0$ et

$$\bar{r}_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{2A}{B} - 1}, \quad \frac{2A}{B} > 1. \quad (9.37)$$

Dans la suite, nous étudions les orbites circulaires successivement en $r = 0$ puis en $r = r_{\pm}$.

9.2.2.1 Orbites circulaires avec $r = 0$

Le potentiel en $r = 0$ est donné par

$$W(0) = (\bar{g}^2 - 1)(\bar{l}^2 + 1) - \mathcal{E}(0)^2, \quad (9.38)$$

avec

$$E = \mathcal{E}(0) + \kappa\bar{g}/2. \quad (9.39)$$

Remarquons tout d'abord que dans le cas du trou noir ou du trou noir extrême $g \leq n$ ($-n^2 < b^2 \leq 0$), le point $r = 0$ n'est non plus stationnaire, puisqu'alors $W(0) = (\bar{g}^2 - 1)(\bar{l}^2 + 1) - \mathcal{E}(0)^2 < 0$.

Dans le cas du wormhole $g > n$ ($b^2 > 0$), l'équation $W(0) = 0$ est équivalente à

$$\mathcal{E}(0) = \sqrt{\bar{g}^2 - 1}\sqrt{\bar{l}^2 + 1}. \quad (9.40)$$

L'orbite correspondante sera stable (minimum) ou instable (maximum), suivant que le signe de la dérivée seconde du potentiel,

$$W''(0) = 2\frac{2A - B}{n^2} = -2\frac{[1 + 2(\bar{g}^2 - 2)]\bar{l}^2 + \bar{g}^2 - 2 + 2\kappa\bar{g}\mathcal{E}(0)}{n^2}, \quad (9.41)$$

sera positif ou négatif. Il est clair que $W''(0) < 0$, si $\kappa > 0$ et $g \geq \sqrt{2}n$, donnant lieu à une orbite instable (pour $g = \sqrt{2}n$, nous retrouvons bien le résultat $\mathcal{E}(0) = \sqrt{\bar{l}^2 + 1}$ (9.25)). Une étude détaillée, selon la variation du moment orbital l par rapport au signe de κ et de $g - \sqrt{2}n$, pourrait être effectuée afin de définir les conditions d'existence des orbites stable et instable. Mais, en général, pour qu'il y ait une orbite stable, il faut que le moment orbital et le rapport charge sur masse satisfassent à l'inégalité

$$-\kappa > \frac{[1 + 2(\bar{g}^2 - 2)]\bar{l}^2 + \bar{g}^2 - 2}{2\bar{g}\mathcal{E}(0)}. \quad (9.42)$$

Il en résulte que si $\kappa > 0$, il faut que $g < \sqrt{2n}$ (Fig. 9-3). Evidemment, l'inégalité inverse de (9.42),

$$-\kappa < \frac{[1 + 2(\bar{g}^2 - 2)]\bar{l}^2 + \bar{g}^2 - 2}{2\bar{g}\mathcal{E}(0)}, \quad (9.43)$$

correspond à une orbite instable.

9.2.2.2 Orbites circulaires avec $r = r_{\pm}$

L'équation $W(r_{\pm}) = 0$ est

$$B^2 = 4AC, \quad (9.44)$$

ou encore

$$4(\bar{g}^2 - 2)\bar{l}^2 E_0^2 + 4\kappa\bar{g}(\bar{l}^2 + \bar{g}^2 - 2)E_0 + [\bar{l}^2 - (\bar{g}^2 - 2)]^2 + 4\kappa^2\bar{g}^2 = 0. \quad (9.45)$$

Il faut évidemment que le discriminant de (9.45),

$$\Delta = 4[\bar{l}^2 - (\bar{g}^2 - 2)]^2 A, \quad (9.46)$$

soit positif ou nul pour que les racines soient réelles. Ce discriminant n'est positif ou nul que si $A \geq 0$, c'est-à-dire que

$$\bar{g}^2 \kappa^2 \geq (\bar{g}^2 - 2)\bar{l}^2. \quad (9.47)$$

Ainsi, compte tenu de (9.44), la condition d'existence des deux extrema en r_{\pm} (9.37) s'écrit maintenant $0 < C < A$, ou encore

$$1 < E_0^2 < 1 + A. \quad (9.48)$$

Il en résulte que $W(\infty) = -C = 1 - E_0^2 < W(r_{\pm}) = 0$. Cela signifie que les extrema en r_{\pm} , s'ils existent, ne seront que des maxima correspondant aux orbites circulaires instables

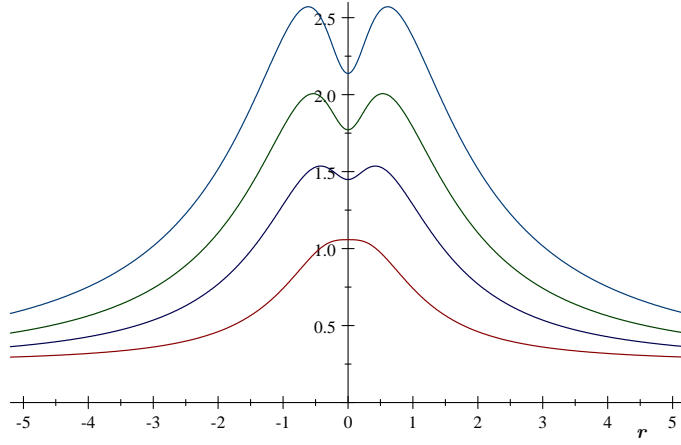


Fig. 9-3 Potentiel pour une particule de charge positive, $\kappa = \sqrt{2}$, avec $g = \sqrt{1.1}$ et les mêmes valeurs des paramètres représentés sur la Fig. 9-1.

(comme dans le cas $f = 1$). En effet, le calcul de $W''(r_{\pm})$ donne un résultat négatif,

$$W''(r_{\pm}) = -\frac{8\bar{r}_{\pm}^2 A}{n^2(\bar{r}_{\pm}^2 + 1)^4} \leq 0. \quad (9.49)$$

Ceci est en accord avec le fait que l'équation (9.45) n'est pas satisfaite si $\kappa > 0$ et $g \geq \sqrt{2}n$, qui donne lieu, d'après (9.41) où (9.43), à un maximum en $r = 0$.

Nous déterminerons la condition nécessaire et suffisante d'existence des orbites circulaires instables en $r = r_{\pm}$ au niveau de l'annexe C.

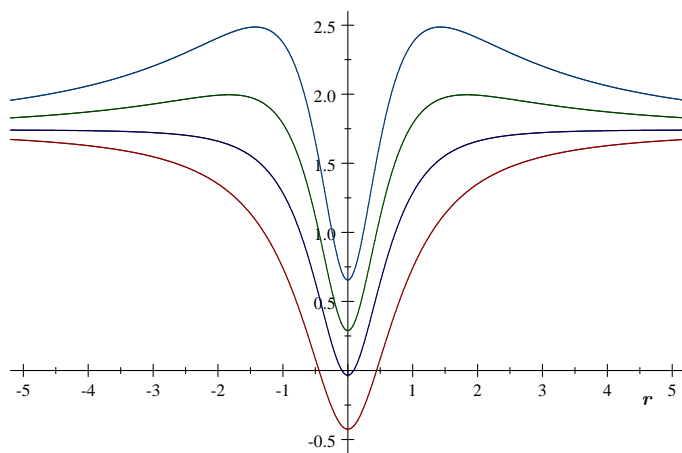


Fig. 9-4 Potentiel pour une particule de charge négative, $\kappa = -\sqrt{2}$, avec les mêmes valeurs des paramètres représentés sur la Fig. 9-3.

Chapitre 10

Le problème de la causalité

10.1 Introduction

La causalité est un principe selon lequel l'effet ne peut pas précéder la cause, en d'autres termes, une séquence d'événements successifs se produisent intuitivement suivant un ordre chronologique croissant $\Delta t > 0$ (flèche du temps). La solution de Gödel [67] des équations d'Einstein décrivant un univers en rotation, fut la première à violer ce principe car permettant mathématiquement l'existence des courbes fermées de genre temps (closed timelike curves CTCs), en ce sens qu'un observateur qui suit une trajectoire le long de cette courbe répète sa durée de vie encore et encore indéfiniment, ouvrant ainsi la possibilité à cet observateur de remonter dans son propre passé (voyage dans le temps). Certaines solutions des équations d'Einstein permettent également l'apparition des CTCs dans une région de l'espace-temps délimitée par un horizon appelé horizon de Cauchy (la limite entre cette région où les CTCs peuvent exister et le reste de l'espace-temps causal) mais, il a été montré que la condition d'énergie faible moyenne et les effets des fluctuations quantiques empêchent leur formation, une idée que Stephen Hawking a qualifiée de conjecture de protection chronologique [68]: *Les lois de la physique ne permettent pas l'apparition de courbes fermées de genre temps.*

D'autres solutions stationnaires des équations d'Einstein-Maxwell possédant des CTCs sont la solution de Taub-NUT [56, 28] et son extension électromagnétique, la solution de Reissner-Nordström-NUT (ou Brill). Celles-ci, comme nous l'avons indiqué à la section 7.1, sont caractérisées par une ou deux singularités de la corde de Misner qui peuvent être supprimées si le temps est identifié avec une période proportionnelle à la charge NUT [57] entraînant ainsi la création des CTCs partout dans l'espace-temps. Même si nous ne supposons pas cette périodicité (point de vue que nous avons adopté ici), il existe toujours des CTCs dans une région voisine de la corde de Misner.

10.2 Absence de géodésiques fermées de genre temps ou de genre lumière

Une géodésique fermée est un chemin sur lequel un observateur peut voyager et retourner, durant un laps de temps finie du paramètre affine τ (ou λ), à l'évènement qui coïncide avec son point de départ, autrement dit, toutes les coordonnées reprennent les mêmes valeurs (modulo 2π pour l'angle azimutal). Donc, le périmètre d'une géodésique fermée doit être un multiple entier de la période $\Delta\lambda = 2\pi/J$ du mouvement angulaire. Notre but ici est d'abord de montrer que ces géodésiques fermées n'existent pas dans l'espace-temps de RN-NUT dans le cas $|C| \leq 1$, aussi bien pour les particules massives ($\varepsilon = -1$) que pour les photons ($\varepsilon = 0$).

L'équation du mouvement radial (7.54) nous permet d'obtenir, à partir de la contribu-

tion radiale (8.36),

$$\begin{aligned}
\frac{dt_r}{d\lambda} &= E \frac{r^2 + n^2}{f(r)} \\
&= \frac{l^2 - \varepsilon(r^2 + n^2)}{E} + \frac{1}{Ef(r)(r^2 + n^2)} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 \\
&\geq \frac{l^2 - \varepsilon(r^2 + n^2)}{E} \\
&\geq \frac{l^2 - \varepsilon n^2}{E},
\end{aligned} \tag{10.1}$$

qui est une borne inférieure strictement positive ($\varepsilon = -1, 0$). On obtient, pour une variation de t_r au cours d'une période $2\pi/J$ de λ ,

$$\Delta t_r \geq 2\pi \frac{l^2 - \varepsilon n^2}{EJ}. \tag{10.2}$$

Pour $|C| \leq 1$, on peut écrire à partir de la contribution angulaire (8.40),

$$\Delta t_\theta \geq 4\pi n \left(\frac{2nE}{J} - 1 \right). \tag{10.3}$$

Cette borne inférieure est négative ou nulle car $J \geq 2nE$. Donc,

$$\Delta t = \Delta t_r + \Delta t_\theta \geq 2\pi \frac{J - 2nE - \varepsilon n^2/J}{E}. \tag{10.4}$$

Pour les géodésiques de genre temps ($\varepsilon = -1$), ce résultat est évidemment défini positif. Pour les géodésiques de genre lumière ($\varepsilon = 0$), ce résultat ne s'annule que si $J = 2nE$ ($l = 0$), ce qui donne $\Delta t_\theta \geq 0$, et $dt_r/d\lambda > 0$ (et donc aussi Δt_r) car dans ce cas $dr/d\lambda > 0$ (10.1). Ainsi, la borne inférieure négative de la partie angulaire (10.3) est compensée par la borne inférieure positive de la partie radiale. Nous déduisons alors que pour $|C| \leq 1$, toutes les géodésiques de genre temps ou de genre lumière sont causales (dirigées vers le futur).

Examinons maintenant le cas où $|C| > 1$ pour des géodésiques de genre lumière. D'après la sous-section 8.3.3, deux situations, avec $m = 0$, peuvent conduire à des orbites circulaires stables correspondant au minimum du potentiel $U_{\min} = l^2 b^2 / n^4 > 0$ en $r = 0$, ou instables correspondant aux maxima du potentiel $U_{\max} = l^2 / 4(n^2 - b^2)$ en $r = \pm \sqrt{n^2 - 2b^2}$ (ou $U_{\max} = l^2 b^2 / n^4$ dans le cas où le potentiel admet un seul maximum en $r = 0$). Dans la première situation, nous avons, en tenant compte de (8.36) et (7.54),

$$\frac{dt_r}{d\lambda} = l^2 \frac{E}{U(r)} \leq \frac{l^2 E}{U_{\min}} = \frac{n^4 E}{b^2}, \quad (10.5)$$

ce qui donne pour une période $\Delta\lambda = 2\pi/J$,

$$\Delta t_r \leq 2\pi \frac{n^4 E}{J b^2}, \quad J > 2nE \quad (l \neq 0),$$

qui est une borne supérieure strictement positive. D'autre part, la contribution angulaire (8.40) se réduit à

$$\Delta t_\theta = 4\pi n \left(\frac{2nE}{J} - |C| \right) \leq 0, \quad (10.6)$$

aussi bien pour les orbites traversant la branche sud de la corde de Misner $C > 1$ ($J_z < -2nE$) que pour les orbites traversant la branche nord de la corde de Misner $C < -1$ ($J_z > 2nE$). Il s'ensuit que

$$\Delta t \leq 4\pi n \left[\frac{2nE}{J} \left(1 + \frac{n^2}{4b^2} \right) - |C| \right],$$

ou encore, en utilisant le fait que $J > 2nE$,

$$\Delta t < 4\pi n \left(1 + \frac{n^2}{4b^2} - |C| \right). \quad (10.7)$$

On voit sur ce résultat que si la borne supérieure est strictement positive, $1 < |C| < 1 + n^2/4b^2$, les deux contributions angulaire négative (10.6) et radiale positive peuvent se

compenser pour donner $\Delta t = 0$ et donc une géodésique fermée de genre lumière. Cependant, pour $|C| \geq 1 + n^2/4b^2$, cette borne supérieure devient nulle ou négative donnant lieu à des géodésiques de genre lumière non causales dirigée vers le passé. Nous concluons que si $|C|$ est assez grand, il y a toujours des géodésiques fermées de genre lumière dans tout espace-temps de RN-NUT donné, et pour toute valeur donnée de $|C| > 1$, il y a des espaces-temps de RN-NUT avec des géodésiques fermées de genre lumière. Cette conclusion s'étend également au cas des géodésiques fermées de genre temps.

10.3 Lignes d'univers fermées d'une particule chargée dans le cas magnétique de masse nulle

Cette section vise à étudier la causalité des lignes d'univers des particules chargées, dont on a examiné leur mouvement dans le chapitre précédent 9, dans la solution particulière de RN-NUT sans masse et sans charge électrique, $m = 0$ et $e = 0$ (9.18). Nous allons voir que le mouvement circulaire d'une particule chargée peut être acausal. Puis nous montrerons dans la sous-section 10.3.3 que les lignes d'univers d'une particule chargée possèdent néanmoins une propriété de causalité faible. Dans ce cas, la contribution radiale (9.9) sur une période $\Delta\lambda = 2\pi/J$ d'un mouvement circulaire est donnée par

$$\Delta t_r = 2\pi \frac{\mathcal{E}(r)f(r)^{-1}(r^2 + n^2)}{J}, \quad (10.8)$$

qui est positif comme dans le cas d'une particule neutre en vertu de (9.17). D'autre part, nous avons toujours affaire à l'expression (10.3) obtenue dans le cas $|C| \leq 1$, vu que la contribution angulaire est la même aussi bien pour une particule chargée que pour une particule neutre (8.40). Il vient que

$$\Delta t(r) \geq 2\pi n \frac{f(r)^{-1}\mathcal{E}(r)(\bar{r}^2 + 1) + 4E - 2\bar{J}}{\bar{J}}, \quad (10.9)$$

où nous avons défini $\bar{J} = J/n$. Evidemment, le signe de la borne inférieure de $\Delta t(r)$ (10.9) ne dépend que du signe du numérateur. Posons

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(r) &= [f(r)^{-1}\mathcal{E}(r)(\bar{r}^2 + 1) + 4E]^2 - 4\bar{J}^2 \\ &= f(r)^{-2}\mathcal{E}(r)^2(\bar{r}^2 + 1)^2 + 8Ef(r)^{-1}\mathcal{E}(r)(\bar{r}^2 + 1) - 4\bar{l}^2,\end{aligned}\quad (10.10)$$

où nous avons utilisé $\bar{J}^2 = \bar{l}^2 + 4E^2$. Sachant que $\bar{J} > 2E$, $\Delta t(r)$ est positif si $\mathcal{N}(r)$ est positif.

10.3.1 Mouvement dans le cas $b^2 = n^2$

Concentrons-nous dans un premier temps sur le cas $b^2 = n^2$ déjà étudié dans la sous-section 9.2.1, c'est-à-dire, $g = \sqrt{2}n$ et $f = 1$. Pour une orbite circulaire au niveau de la gorge du wormhole en $r = 0$, l'expression (10.9) se réduit, compte tenu de (9.25), à

$$\Delta t(0) \geq 2\pi n \frac{\mathcal{E}(0) + 4E - 2\bar{J}}{\bar{J}}, \quad \mathcal{E}(0) = \sqrt{\bar{l}^2 + 1}.\quad (10.11)$$

L'expressions de E (9.24),

$$E = V_+(0) = \kappa/\sqrt{2} + \sqrt{\bar{l}^2 + 1},\quad (10.12)$$

permet de réduire (10.10) en

$$\mathcal{N}(0) = 5(\bar{l}^2 + 1) + 4\sqrt{2}\kappa\sqrt{\bar{l}^2 + 1} + 4,\quad (10.13)$$

qui peut être réécrit comme

$$\mathcal{N}(0) = 5 \left(\sqrt{\bar{l}^2 + 1} - \gamma_+ \right) \left(\sqrt{\bar{l}^2 + 1} - \gamma_- \right), \quad \gamma_{\pm} = -\frac{2\sqrt{2}}{5}\kappa \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{5}{2\kappa^2}} \right).\quad (10.14)$$

Il est clair que $\mathcal{N}(0)$ est strictement positif si $\kappa > 0$, qui, d'après la sous-section 9.2.1, correspond à une orbite circulaire instable. Si $\kappa < 0$, $\mathcal{N}(0)$ n'est négatif ou nul que si le moment orbital vérifie l'inégalité

$$\bar{l}^2 \leq \gamma_+^2 - 1, \quad |\kappa| \geq \frac{9}{4\sqrt{2}} \simeq 1.591, \quad (10.15)$$

où le domaine de valeurs permises de κ est déterminé par la condition $\gamma_+ \geq 1$ puisque $l^2 \geq 0$. Notons ici que $\gamma_- < 1$ quelque soit la valeur de κ dans le domaine $|\kappa| \geq \sqrt{5/2} \simeq 1.581$. Les lignes d'univers acausales correspondantes sont stables, comme nous pouvons le voir en comparant (10.13) ($\mathcal{N}(0) \leq 0$) à (9.41),

$$n^2 W''(0) > 3(\bar{l}^2 + 3), \quad \bar{g} = \sqrt{2}. \quad (10.16)$$

Concernant les orbites circulaires instables en $r = r_{\pm}$ du deuxième domaine (9.27), nous trouvons

$$\Delta t(r_{\pm}) \geq 2\pi n \frac{\mathcal{E}(r_{\pm})(\bar{r}_{\pm}^2 + 1) + 4E - 2\bar{J}}{\bar{J}}, \quad (10.17)$$

où r_{\pm} , $\mathcal{E}(r_{\pm})$ et E sont donnés respectivement par (9.29), (9.31) et (9.30). Après calcul de $\mathcal{N}(r_{\pm})$, le numérateur de (10.17) se révèle strictement positif,

$$\mathcal{N}(r_{\pm}) = \mathcal{E}(r_{\pm})^2(\bar{r}_{\pm}^2 + 1)^2 + 8E\mathcal{E}(r_{\pm})(\bar{r}_{\pm}^2 + 1) - 4\bar{l}^2 = 8\kappa^2 \bar{l}^2 \frac{\bar{l}^6 + 2(\bar{l}^2 + 4)(\bar{l}^4 - 8\kappa^2)}{(\bar{l}^4 - 8\kappa^2)^2} \quad (10.18)$$

(positif d'après (9.27)). Donc, les lignes d'univers instables correspondantes sont causales.

10.3.2 Mouvement dans le cas général

Etudions le signe de $\mathcal{N}(r)$ dans le cas général où la charge magnétique g peut prendre toutes les valeurs possibles, pour les orbites circulaires en $r = 0$ puis en $r = r_{\pm}$, déjà discutés dans la sous-section 9.2.2.

10.3.2.1 Orbites circulaires avec $r = 0$

Nous savons d'après la sous-section 9.2.2 que le point $r = 0$ n'est stationnaire que dans le cas du wormhole $g > n$ ($b^2 > 0$). Dans ce cas, compte tenu de (9.40), (10.9) devient

$$\Delta t(0) \geq 2\pi n \frac{f(0)^{-1}\mathcal{E}(0) + 4E - 2\bar{J}}{\bar{J}}, \quad f(0) = b^2/n^2 = \bar{g}^2 - 1, \quad \mathcal{E}(0) = \sqrt{\bar{g}^2 - 1}\sqrt{\bar{l}^2 + 1}. \quad (10.19)$$

En reportant l'expression de E (9.39) dans (10.10), nous trouvons

$$\mathcal{N}(0) = \frac{1 + 4f(0)}{f(0)}(\bar{l}^2 + 1) + 4\frac{\kappa\bar{g}}{\sqrt{f(0)}}\sqrt{\bar{l}^2 + 1} + 4, \quad (10.20)$$

qui peut être ramenée à la forme

$$\mathcal{N}(0) = \frac{1 + 4f(0)}{f(0)} \left(\sqrt{\bar{l}^2 + 1} - \gamma_- \right) \left(\sqrt{\bar{l}^2 + 1} - \gamma_+ \right), \quad (10.21)$$

avec

$$\gamma_{\pm} \equiv \frac{-2\kappa\bar{g}\sqrt{f(0)}}{1 + 4f(0)} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1 + 4f(0)}{\kappa^2\bar{g}^2}} \right). \quad (10.22)$$

Cela posé, il est à remarquer que si $\kappa > 0$, $\mathcal{N}(0)$ est défini positif, comme dans le cas particulier $g = \sqrt{2}n$ ($f = 1$), et alors $\Delta t(0) > 0$. Cela signifie que les lignes d'univers $r = 0$ stable ($n < g < \sqrt{2}n$) (9.42) ou instable (9.43) correspondantes sont causales. Maintenant, si $\kappa < 0$, $\mathcal{N}(0)$ n'est négatif ou nul que si le moment orbital satisfait à l'inégalité

$$\bar{l}^2 \leq \gamma_+^2 - 1, \quad |\kappa| \geq \frac{1 + 8f(0)}{4\bar{g}\sqrt{f(0)}} \geq \frac{\sqrt{2}}{\bar{g}} \quad (10.23)$$

(avec égalité pour $\bar{g} = 3/2\sqrt{2}$ ($f(0) = 1/8$)), où nous avons déterminé le domaine de valeurs permises de κ par la condition $\gamma_+ \geq 0$ car $\bar{l}^2 \geq 1$ et tenu compte du fait que, comme dans le cas $f = 1$, $\gamma_- < 1$ quelque soit la valeur de κ dans le domaine $|\kappa| \geq \sqrt{1 + 4f(0)}/\bar{g}$. Pour $\bar{g} = \sqrt{2}$, nous retrouvons le même résultat (10.15). Compte tenu de (10.21) ($\mathcal{N}(0) \leq 0$) et

(9.41),

$$n^2 W''(0) > 3[\bar{l}^2 + 1 + 2(\bar{g}^2 - 1)] > 0 \quad (10.24)$$

(qui redonne le résultat (10.16) pour $\bar{g} = \sqrt{2}$), ce qui signifie que les lignes d'univers acausales satisfaisant (10.23) sont stables.

10.3.2.2 Orbites circulaires avec $r = r_{\pm}$

L'expression (10.9) est

$$\Delta t(r_{\pm}) \geq 2\pi n \frac{f(r_{\pm})^{-1} \mathcal{E}(r_{\pm})(\bar{r}_{\pm}^2 + 1) + 4E - 2\bar{J}}{\bar{J}}, \quad (10.25)$$

qui, en faisant usage des expressions de $f(r_{\pm})$, de $\mathcal{E}(r_{\pm})$ (C.8) et de h (C.7),

$$f(r_{\pm}) = \frac{\bar{r}_{\pm}^2 + \bar{g}^2 - 1}{\bar{r}_{\pm}^2 + 1}, \quad \mathcal{E}(r_{\pm}) = \frac{\bar{r}_{\pm}^2 + 1 + \bar{l}^2}{\bar{r}_{\pm}^2 + 1} h, \quad h^2 = \frac{\bar{r}_{\pm}^2 + \bar{g}^2 - 1}{\bar{r}_{\pm}^2 + \bar{l}^2 + 1} > 0, \quad (10.26)$$

se simplifie en

$$\Delta t(r_{\pm}) \geq 2\pi n \frac{h^{-1}(\bar{r}_{\pm}^2 + 1) + 4E - 2\bar{J}}{\bar{J}}. \quad (10.27)$$

L'expression de (10.10) également se simplifie en

$$\mathcal{N}(r_{\pm}) = \frac{1}{h^2}(\bar{r}_{\pm}^2 + 1)^2 + \frac{8E}{h}(\bar{r}_{\pm}^2 + 1) - 4\bar{l}^2, \quad (10.28)$$

ou encore en utilisant l'expression de E (C.9),

$$E = \frac{(2 + \bar{l}^2)h^2 + \bar{g}^2}{4h}, \quad (10.29)$$

$$\mathcal{N}(r_{\pm}) = \frac{1}{h^2}(\bar{r}_{\pm}^2 + 1)^2 + 2 \frac{(2 + \bar{l}^2)h^2 + \bar{g}^2}{h^2}(\bar{r}_{\pm}^2 + 1) - 4\bar{l}^2. \quad (10.30)$$

Pour étudier le signe de $\mathcal{N}(r_{\pm})$, remplaçons d'abord \bar{l}^2 par son expression tirée de (C.6),

$$\bar{l}^2 = \frac{(1 - h^2)(\bar{r}_{\pm}^2 + 1) + \bar{g}^2 - 2}{h^2}. \quad (10.31)$$

Nous obtenons

$$\mathcal{N}(r_{\pm}) = \frac{1}{h^2}(\bar{r}_{\pm}^2 + 1)^2 + 2\frac{(4 + \bar{l}^2)h^2 + \bar{g}^2 - 2}{h^2}(\bar{r}_{\pm}^2 + 1) - 4\frac{\bar{g}^2 - 2}{h^2}. \quad (10.32)$$

Simplifions maintenant, en faisant usage de l'expression de h (10.26), $\mathcal{N}(r)$ peut finalement se mettre sous la forme

$$\mathcal{N}(r_{\pm}) = \frac{\bar{r}_{\pm}^4 + 2\bar{g}^2\bar{r}_{\pm}^2 + 3}{h^2} + 2(\bar{l}^2 + 3)\bar{r}_{\pm}^2 + 6,$$

qui est évidemment définie positive. Cela veut dire que le numérateur de (10.25) est strictement positif et donc $\Delta t(r_{\pm}) \geq 0$. Pour $g = \sqrt{2}n$, nous retrouvons bien les résultats (9.29) et (10.18) où h est donné par (C.2), $h = 2\sqrt{2}|\kappa|/\bar{l}^2$. Donc, les lignes d'univers instables en $r = r_{\pm}$ sont causales.

10.3.3 Propriété de causalité faible

Nous venons de voir que certaines lignes d'univers d'une particule d'épreuve chargée, correspondant à des orbites circulaires stables, sont acausales. Mais ces possibles violations de causalité sont-elles observables? Dans une telle expérience de pensée, la particule d'épreuve est envoyée par un observateur situé à grande distance de la cible (ici la gorge du wormhole, c'est-à-dire la sphère minimale en $r = 0$). Cet observateur pourrait voir une violation de causalité si la particule lui revenait instantanément, ou pire, avant d'être partie. Autrement dit, nous pouvons énoncer un principe de causalité faible:

Les espaces-temps avec des courbes fermées de genre temps ne conduisent pas à des violations observables de causalité, si aucune ligne d'univers suivie par une particule chargée

venant de l'infini ne peut se refermer ou s'intersecter (c'est-à-dire repasser par le même point d'espace-temps).

Montrons maintenant que les lignes d'univers suivies par une particule chargée revenant à son point de départ r_1 respectent la causalité faible. La variation totale du paramètre λ ,

$$\Delta\lambda = 2 \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{(r^2 + n^2)\sqrt{-W(r)}}, \quad (10.33)$$

(où r_0 est le point de rebroussement avec $W(r_0) = 0$) devrait être un multiple entier de la période $2\pi/J$. Durant cette période, la contribution angulaire négative Δt_θ est donnée par (10.3). Pour r_1 suffisamment grand par rapport au rayon n de la gorge du wormhole, cette contribution négative sera facilement compensée par la contribution radiale positive qui est proportionnelle à la distance entre r_0 et r_1 ($dt_r/d\lambda \simeq E_0 r^2$). Cependant, cet argument ne tient pas si le point de rebroussement r_0 est proche de r_{\max} ($W'(r_0) \simeq 0$) puisqu'alors la contribution angulaire négative devient très grande et la particule chargée effectue un grand nombre de tours avant d'être diffusée vers l'infini. Donc, des violations de causalité ne pourraient apparaître dans le mouvement d'une particule venant de l'infini que si son énergie initiale était telle qu'elle pouvait approcher de près une orbite circulaire instable acausale.

Mais nous avons vu, aussi bien dans le cas particulier $b^2 = n^2$ que dans le cas général, que les seules orbites circulaires (correspondant à des lignes d'univers fermées pour lesquelles le laps de temps Δt peut s'annuler ou devenir négatif) où le mouvement est acausal sont stables ((10.16) et (10.24)), donc situées au fond d'un puits de potentiel et inaccessibles depuis l'infini. Il en résulte que (dans le cas magnétique de masse nulle) le mouvement d'une particule chargée ne peut jamais conduire à des violations observables de causalité.

Conclusion générale

Cette thèse de Doctorat comporte deux ensembles de travaux de recherche réalisés dans le cadre de la gravitation et la cosmologie. Il s'agit dans le premier ensemble de travaux d'une étude de la déflexion de la lumière et du temps de retard dans le cadre de deux modèles cosmologiques: Le modèle statique de Kottler (ou de Schwarzschild-de Sitter) et le modèle non statique d'Einstein-Straus en présence d'une courbure spatiale nulle et positive. Le second ensemble de travaux a trait aux solutions stationnaires des équations d'Einstein-Maxwell et est divisé en deux thèmes: Généralisation de la méthode de génération de solutions en rotation par transformation finie de Geroch et étude des propriétés géométriques et physiques de la solution de Reissner-Nordström-NUT dans le cas où celle-ci a une topologie du type wormhole sans horizons.

La constante cosmologique semble, de prime abord, ne pas avoir d'effet sur la déflexion de la lumière, du fait qu'elle se trouve éliminée de l'équation orbitale. Rindler et Ishak ont remis en cause cette croyance généralement admise jusqu'alors: Il faut tenir compte également de la métrique de Kottler elle-même dans le calcul de l'angle de déflexion. Une fois qu'elle est prise en compte, une relation entre l'angle de coordonnée et l'angle physique s'est mise en place pour réintroduire la constante cosmologique. Il est dès lors conclu qu'une constante cosmologique positive diminue effectivement l'angle de déflexion de la lumière.

Dans le chapitre un, on a d'abord dû reprendre les calculs de Rindler et d'Ishak après avoir intégré les équations de la géodésique dans le plan équatorial. La raison étant que la relation entre l'angle de coordonnée et l'angle physique est indispensable pour la suite.

Ensuite, on s'est focalisé sur l'étude de l'effet de lentille gravitationnelle fort causé par un amas de galaxies L sur deux photons (deux images) émis par une source S , typiquement un quasar, située en arrière plan. Les deux photons suivent des trajectoires différentes et arrivent sur Terre E sous des angles physiques observés α_E et α'_E après avoir été courbés par l'amas de galaxies. L'usage du modèle statique de Kottler suppose, en sus de la sphéricité de la lentille, deux autres hypothèses simplificatrices: La terre et la source sont considérées comme immobiles par rapport à la lentille et toutes les autres masses, y compris celles de la Terre et de la source, sont négligées à l'exception de la masse de la lentille. Dans le cadre de ces hypothèses, on a intégré, au premier ordre dans le rapport du rayon de Schwarzschild au péri-lens, les deux équations de la géodésique, pour l'angle $\varphi(r)$ et pour le temps $t(r)$, de la source jusqu'à la Terre. Des expressions analytiques pour l'angle de déflexion $-\varphi_S$ et pour le temps de retard $\Delta\tau$ sont subséquentement déterminées en faisant usage de la relation entre l'angle de coordonnée et l'angle physique. Cependant, l'application au système lentille-quasar SDSS J1004+4112 nécessite la détermination des distances de coordonnée lentille-Terre r_E et lentille-source r_S . On était alors dans l'obligation de faire appel, d'une part, à un élément externe à la solution de Kottler faisant partie du modèle dynamique standard de cosmologie Λ CDM plat, pour convertir les redshifts de la lentille z_L et de la source z_S en distances d'aire, et d'autre part, à un ansätze pour relier ces distances d'aire aux distances de coordonnée. En particulier, la masse estimée de l'amas de galaxies, compte tenu des barres d'erreur de la constante cosmologique Λ et des angles α_E et α'_E , concorde bien avec la masse observée. Mais en revanche, l'incertitude sur cette masse ne permet pas de vérifier le résultat de Rindler et Ishak. En l'occurrence, des valeurs pour le temps de retard ont été obtenues allant de 13.2 à 29 ans. Toute cette étude n'est vraiment pas nouvelle. Elle avait déjà été faite auparavant par Schücker dans ses travaux précurseurs.

Un modèle plus approprié à l'étude de l'effet de lentille gravitationnelle est celui d'Einstein-Straus qui combine la métrique homogène et isotrope de FLRW régnant à l'extérieur de

la sphère de Schücking avec la métrique de Kottler à l'intérieur de celle-ci. Le phénomène de lentille gravitationnelle ne se produit qu'à l'intérieur de la sphère de Schücking, ce qui permet, entre autres, d'expliquer le fait que l'expansion de l'Univers observée à l'échelle des galaxies et des amas de galaxies n'est pas visible à l'échelle planétaire ni à l'échelle atomique. Ce modèle permet de s'affranchir de nombre d'hypothèses adoptées par le modèle de Kottler. Seule l'hypothèse de sphéricité, qui est difficilement contournable, est maintenue. On permet à la Terre et à la source de se mouvoir par rapport à l'amas de galaxie (la lentille), les masses des autres amas sont incluses sous forme d'une poussière isotrope et homogène (principalement en matière noire CDM) et la Terre aussi bien que la source sont prises comobiles par rapport à la poussière.

Avant d'entreprendre le raccordement des deux métriques, on s'est trouvé alors dans l'obligation de faire, au chapitre deux, un détour sur la solution de FLRW. La métrique de FLRW dérive du principe cosmologique qui stipule qu'il n'existe pas de direction privilégiée et que tous les points d'espace sont équivalents. Ce principe est tellement fort que la métrique déterminée dans le cas général se réduit à une seule fonction dépendant uniquement de la coordonnée temporelle t , appelée facteur d'échelle $a(t)$ et déterminée via l'équation de Friedmann, ainsi que d'un indice discret k pouvant prendre trois valeurs 0, +1, et -1, qui correspondent respectivement aux espaces plat (courbure spatiale nulle), sphérique (courbure spatiale positive) et pseudosphérique (courbure spatiale négative).

On s'est limité à considérer successivement le modèle d'Einstein-Straus avec une courbure spatiale nulle au chapitre trois et le modèle d'Einstein-Straus avec une courbure spatiale positive au chapitre quatre. Le raccordement des métriques de FLRW (plate et sphérique) et de Kottler sur la sphère de Schücking, s'est fait au début de chaque chapitre. Ce raccordement, permet, via le Jacobien de la transformation des coordonnées de Friedmann aux coordonnées de Schwarzschild, d'avoir à notre disposition une relation entre les temps de Friedmann t et celui de Schwarzschild T .

Dans le cas plat, on a accessoirement utilisé, pour tout le processus de calcul, une so-

lution exacte de l'équation de Friedmann, à savoir le temps cosmique $t(a)$ et sa fonction inverse, le facteur d'échelle $a(t)$. Dans un premier temps, on a employé des éléments de la géométrie d'Euclide pour intégrer les géodésiques de type FLRW plat. Dans un deuxième temps, on a facultativement employé une seconde méthode exhaustive, méthode des équations différentielles, et retrouvé des résultats strictement identiques, ce qui montre la fiabilité de la méthode. C'est de cette méthode dont on s'est servie pour effectuer le calcul de la déflexion de la lumière et du temps de retard dans le cas sphérique. Mais ici, à défaut de connaître une solution analytique exacte pour le facteur d'échelle $a(t)$, on a procédé à la résolution numérique de l'équation de Friedmann.

Comme ce sont les conditions finales sur Terre qui sont données, on a procédé à l'intégration des géodésiques des deux photons à reculons, en synchronisant d'abord leurs arrivées sur Terre. On a intégré les géodésiques de type FLRW entre la Terre et la sphère de Schücking pour obtenir les conditions initiales de type FLRW à la sortie de la sphère de Schücking du côté de la Terre. Grâce à la relation de raccordement obtenue au préalable, on a converti ces conditions en conditions finales de type Kottler pour intégrer les géodésiques de type Kottler à l'intérieur de la sphère de Schücking. On a obtenu les conditions initiales de type Kottler à l'entrée de la sphère de Schücking du côté de la source, qu'on a converties, grâce à la relation de raccordement, en conditions finales de type FLRW pour intégrer les géodésiques de type FLRW entre la sphère de Schücking et la source. On a finalement obtenu les conditions initiales de type FLRW sur la source, entre autres l'angle de déflexion $-\varphi_S$ et les temps d'émission des deux photons t_S et t'_S qui importent pour le calcul du temps de retard $\Delta t = t'_S - t_S$. Nous avons baptisé cette méthode "méthode de calcul direct" car l'intégration des géodésiques des deux photons se fait séparément. Néanmoins, on a pu établir une expression semi-analytique approchée pour le temps de retard, en employant une seconde méthode plus fiable qu'on a dénommée "méthode de calcul par différence", où on a seulement besoin d'intégrer les géodésiques de l'un des deux photons et d'une certaine expression intervenant dans le calcul du temps de retard dans le modèle

de Kottler. La fiabilité de cette méthode s'explique par la dépendance monotone de Δt en la constante cosmologique Λ .

En appliquant nos résultats au même système lentille-quasar SDSS J1004+4112, l'incertitude sur la masse de l'amas de galaxies est minimisée de façon considérable (1% environ) aussi bien dans le cas plat que dans le cas sphérique du modèle d'Einstein-Straus (avec $a_0 = 5 \text{ am}$), ce qui, à la différence du modèle de Kottler, permet d'avoir des résultats en accord avec l'affirmation de Rindler et d'Ishak selon laquelle une constante cosmologique positive atténue la déflexion de la lumière. Cependant, les valeurs estimées de la masse ne sont pas compatibles avec la masse observée. Il est à noter aussi que pour le temps de retard, les valeurs estimées sont petites devant celles du modèle de Kottler, allant de 6.6 à 12.8 ans pour le cas plat [69].

Une étude suivant les valeurs du facteur d'échelle actuel a_0 , dans le cadre du modèle d'Einstein-Straus sphérique, a permis de voir l'écart par rapport au modèle d'Einstein-Straus plat [70]. Les résultats obtenus montrent que la déflexion de la lumière et le temps de retard diminuent considérablement lorsque le facteur d'échelle actuel devient de plus en plus petit devant une valeur limite de $9.1 \times 10^{26} \text{ m}$ (correspondant à une densité de courbure actuelle $\Omega_{k0} \simeq 0.02$) environ. Cela va à l'encontre du modèle d'Einstein-Straus plat auquel cas a_0 peut être fixé à n'importe quelle valeur sans perte de généralité. La même remarque vaut pour la masse de l'amas de galaxies. Cette dépendance en a_0 provient du terme de la densité de courbure dans l'équation de Friedmann qui s'annule dans le cas d'un espace plat ($k = 0$). Néanmoins, au-dessus de cette valeur limite ($\Omega_{k0} < 0.02$), l'effet de a_0 diminue de plus en plus jusqu'à s'annuler et les résultats coïncident parfaitement avec ceux du modèle d'Einstein-Straus plat.

Cette étude permettra aussi de conclure si les données observationnelles pourraient éventuellement discriminer les éventualités plate et sphérique.

Enfin, le sujet traité dans la première partie de cette thèse propose plusieurs pistes pour de futurs travaux de recherche:

1. Généraliser le calcul de la déflexion de la lumière et du temps de retard en incluant le cas d'une courbure négative ($k = -1$). Ici, on s'attend à ce que la valeur du facteur d'échelle actuel ait également un effet sur la déflexion de la lumière et le temps de retard dans le cadre du modèle d'Einstein-Straus avec une courbure négative.
2. Appliquer les résultats à d'autres systèmes lentille-quasar.
3. Inclure la solution de Kottler intérieure dans laquelle les photons pourraient traverser la distribution de masse [71].

Concernant le second ensemble de travaux, le premier thème lié à la génération de solutions en rotation est étudié dans le chapitre six. L'inclusion du nouveau paramètre α dans la transformation Π appartenant au groupe de symétrie $SU(2, 1)$ complique singulièrement les calculs formels dans le cadre du formalisme d'Ernst, qui ont pu permettre d'aboutir à une expression implicite générale de la solution en rotation, qui présente un intérêt sur le plan de la physique mathématique. Cette expression a permis de montrer que ce nouveau paramètre n'a pas d'effet dans le cas où la solution initiale est électriquement neutre. Dans le seul autre cas où les calculs explicites peuvent être menés à bout, celui où les potentiels complexes gravitationnel et électromagnétique sont reliés linéairement, la solution finale dépend bien de ce paramètre α . Dans le cas des solutions de type Kerr-Newman ou Reissner-Nordström, l'effet de ce paramètre se présente sous forme d'une charge NUT, d'où l'on reconnaît les solutions de Kerr-Newman-NUT ou de Reissner-Nordström-NUT. Cependant, ces travaux semblent montrer que cette généralisation ne serait qu'apparente, en ce sens que les solutions obtenues seraient seulement des transformées par $SU(2, 1)$ des solutions générées par la méthode primitive.

Le second thème est consacré à l'exploration approfondie de la solution de Reissner-Nordström avec une charge NUT dans le cas où elle possède une topologie du type wormhole sans singularités (singularité nue) ni horizon. En raison de cette charge gravimagnétique, cette solution est singulière le long d'une corde dite "corde de Misner" (singularité de coordonnée), à l'instar du monopôle magnétique de Dirac. Ce problème a fait l'objet de

nombreux travaux de recherche, notamment celui de Misner qui a suggéré d'imposer la condition de la périodicité du temps afin de rendre cette singularité inobservable [57]. Cependant, cette condition entraîne, entre autres, l'apparition des courbes fermées de genre temps (CTCs) partout dans l'espace-temps de RN-NUT. La persistance de cette singularité est à l'origine de l'opinion, longtemps répandue, que les espaces-temps avec une charge NUT sont géodésiquement incomplets.

Dans le chapitre sept, on s'est attelé à l'intégration et la séparation des équations de la géodésique, après avoir rappelé les principales propriétés de la solution de RN-NUT.

Au chapitre huit, lors de l'étude du mouvement géodésique, il est montré, sans supposer la périodicité du temps, que toutes les géodésiques, y compris celles qui impactent la corde de Misner, sont complètes, soulignant le fait que l'espace-temps de RN-NUT est bien géodésiquement complet [72, 73]. On a également étudié la déviation géodésique dans cet espace-temps.

Dans le chapitre neuf, on s'est proposé d'analyser le mouvement d'une particule d'épreuve chargée dans l'espace-temps de RN-NUT. Pour intégrer les équations du mouvement, on a procédé de la même façon que pour une particule d'épreuve neutre et il se trouve que la partie angulaire est identique. Ensuite, on a déterminé les orbites circulaires puis discuté leur stabilité dans le cas magnétique de masse nulle.

Enfin, un autre problème majeur des solutions avec une charge NUT est l'existence des courbes fermées de genres temps (CTCs) qui pourraient violer le principe de la causalité. On s'est attaqué à ce problème, dans le dernier chapitre dix. En s'appuyant sur les résultats des chapitres précédents, on est parvenu à montrer que le mouvement d'une particule neutre en chute libre est nécessairement causal [72, 73]. De même, on est arrivé à la même conclusion pour une particule chargée venant de l'infini dans le cas magnétique de masse nulle de l'espace-temps RN-NUT [74].

Ce second ensemble de travaux indique naturellement de nouvelles directions de recherche:

1. Examen de la question de la causalité dans l'espace temps de RN-NUT dans le cas général en présence des charges électrique et graviélectrique (masse) non nulles.
2. La généralisation aux espaces-temps en rotation (solution de Kerr-Newman-NUT), et éventuellement l'extension à des solutions analogues à d'autres théories de champs couplés à la gravitation comme la théorie Einstein-Maxwell-Dilaton-Axion (EMDA).

Annexe A

Potentiels d'Ernst

La dérivée partielle de la partie imaginaire du potentiel $\hat{\mathcal{E}}'$ a pour expression (5.21)

$$\partial_m \text{Im } \hat{\mathcal{E}}' = \partial_m \hat{\chi}' = -\rho^{-1} \hat{f}'^2 \tilde{\partial}_m \hat{\omega}' - 2 \text{Im}(\hat{\psi}'^* \partial_m \hat{\psi}'). \quad (\text{A.1})$$

Le calcul de la première quantité de (A.1), en utilisant (6.13), (6.14) et $\tilde{\partial}_m \rho = -\partial_m z$, donne a priori

$$-\rho^{-1} \hat{f}'^2 \tilde{\partial}_m \hat{\omega}' = 2\Omega(1 - \Omega\hat{\omega})(\rho \hat{f}^{-1} \tilde{\partial}_m \hat{f} + \partial_m z) - [(1 - \Omega\hat{\omega})^2 \hat{f}'^2 \rho^{-1} + \Omega^2 \rho] \tilde{\partial}_m \hat{\omega}. \quad (\text{A.2})$$

En faisant usage des relations (6.10) et (6.11), la première équation d'Ernst (5.23) peut se réécrire comme

$$\partial_m (\rho \hat{f}^{-1} \partial_m \hat{\mathcal{E}} + i \hat{\mathcal{E}} \tilde{\partial}_m \hat{\omega}) = 0, \quad (\text{A.3})$$

qui s'intègre, en définissant le potentiel dual d'Ernst $\hat{\mathcal{F}}$, par

$$\partial_m \hat{\mathcal{F}} = \rho \hat{f}^{-1} \tilde{\partial}_m \hat{\mathcal{E}} - i \hat{\mathcal{E}} \partial_m \hat{\omega}. \quad (\text{A.4})$$

Ceci d'une part. D'autre part, on peut écrire, en faisant usage des relations (6.10), (A.4) et (6.19),

$$\begin{aligned}\tilde{\partial}_m \hat{f} &= \tilde{\partial}_m (\text{Re } \hat{\mathcal{E}} + |\hat{\psi}|^2) \\ &= \rho^{-1} \hat{f} [\text{Re}(\partial_m \hat{\mathcal{F}} + 2\hat{\psi}^* \partial_m \hat{\phi}) - \text{Im } \hat{\mathcal{E}} \partial_m \hat{\omega}].\end{aligned}\quad (\text{A.5})$$

En remplaçant $\tilde{\partial}_m \hat{f}$ et $\tilde{\partial}_m \hat{\omega}$ par leurs expressions respectives (A.5) et (6.11) dans (A.2), cette dernière peut se réécrire à nouveau comme

$$\begin{aligned}-\rho^{-1} \hat{f}'^2 \tilde{\partial}_m \hat{\omega}' &= \partial_m [(1 - \Omega \hat{\omega})^2 \text{Im } \hat{\mathcal{E}}] + 2\Omega(1 - \Omega \hat{\omega}) \text{Re}[\partial_m(\hat{\mathcal{F}} + z) + 2\hat{\psi}^* \partial_m \hat{\phi}] \\ &\quad + \text{Im}[\Omega^2 \rho^2 \hat{f}^{-2} (\partial_m \hat{\mathcal{E}} + 2\hat{\psi}^* \partial_m \hat{\psi}) + 2(1 - \Omega \hat{\omega})^2 \hat{\psi}^* \partial_m \hat{\psi}].\end{aligned}\quad (\text{A.6})$$

Le calcul de la deuxième quantité de (A.1) donne

$$\begin{aligned}-2 \text{Im}(\hat{\psi}'^* \partial_m \hat{\psi}') &= -2 \text{Im}[(1 - \Omega \hat{\omega})^2 \hat{\psi}^* \partial_m \hat{\psi} + \Omega^2 \hat{\phi}^* \partial_m \hat{\phi}] \\ &\quad + 2\Omega \text{Re}\{\partial_m [(1 - \Omega \hat{\omega}) \hat{\phi}^* \hat{\psi}] - 2(1 - \Omega \hat{\omega}) \hat{\psi}^* \partial_m \hat{\phi}\}.\end{aligned}\quad (\text{A.7})$$

En reportant les deux quantités (A.6) et (A.7) dans (A.1), on obtient après intégration

$$\text{Im } \hat{\mathcal{E}}' = (1 - \Omega \hat{\omega})^2 \text{Im } \hat{\mathcal{E}} + 2\Omega[\hat{\mathcal{G}} + (1 - \Omega \hat{\omega}) \text{Re}(\hat{\psi}^* \hat{\phi})],\quad (\text{A.8})$$

où la nouvelle fonction $\hat{\mathcal{G}}$ est définie par

$$\partial_m \hat{\mathcal{G}} = (1 - \Omega \hat{\omega}) \text{Re } \partial_m(\hat{\mathcal{F}} + z) + \Omega \text{Im} \left[\rho^2 \hat{f}^{-2} \left(\frac{1}{2} \partial_m \hat{\mathcal{E}} + \hat{\psi}^* \partial_m \hat{\psi} \right) - \hat{\phi}^* \partial_m \hat{\phi} \right].\quad (\text{A.9})$$

Annexe B

Tenseur métrique de Reissner-Nordström-NUT

Les composantes $g^{\mu\nu}$ de la métrique inverse de RN-NUT (7.2) sont

$$g^{tt} = \frac{\omega(\theta)^2}{(r^2 + n^2) \sin^2 \theta} - \frac{1}{f(r)}, \quad g^{t\varphi} = g^{\varphi t} = \frac{\omega(\theta)}{(r^2 + n^2) \sin^2 \theta},$$
$$g^{rr} = f(r), \quad g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{(r^2 + n^2) \sin^2 \theta}, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2 + n^2}. \quad (\text{B.1})$$

Les symboles de Christoffel non nuls sont (7.15)

$$\Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{f'(r)}{2f(r)}, \quad \Gamma_{t\theta}^t = \Gamma_{\theta t}^t = -\frac{nf(r)\omega(\theta)}{(r^2 + n^2) \sin \theta}, \quad (\text{B.2})$$

$$\Gamma_{r\varphi}^t = \Gamma_{\varphi r}^t = \omega(\theta) \left(\frac{r}{r^2 + n^2} - \frac{f'(r)}{2f(r)} \right), \quad (\text{B.3})$$

$$\Gamma_{\theta\varphi}^t = \Gamma_{\varphi\theta}^t = n \sin \theta + \frac{\omega(\theta)}{\sin \theta} \left(\frac{nf(r)\omega}{r^2 + n^2} + \cos \theta \right), \quad \Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2} f(r) f'(r), \quad (\text{B.4})$$

$$\Gamma_{t\varphi}^r = \Gamma_{\varphi t}^r = -\frac{1}{2} f(r) f'(r) \omega, \quad \Gamma_{rr}^r = -\frac{f'(r)}{2f(r)}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -r f(r), \quad (\text{B.5})$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^r = f(r) \left(\frac{1}{2} f'(r) \omega(\theta)^2 - r \sin^2 \theta \right), \quad \Gamma_{t\varphi}^\theta = \Gamma_{\varphi t}^\theta = \frac{nf(r) \sin \theta}{r^2 + n^2}, \quad (\text{B.6})$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{r}{r^2 + n^2}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \left(\frac{2nf(r) \omega(\theta)}{r^2 + n^2} + \cos \theta \right), \quad (\text{B.7})$$

$$\Gamma_{t\theta}^\varphi = \Gamma_{\theta t}^\varphi = -\frac{nf(r)}{(r^2 + n^2) \sin \theta}, \quad \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{r}{r^2 + n^2}, \quad (\text{B.8})$$

$$\Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{nf(r) \omega(\theta)}{r^2 + n^2} + \cos \theta \right). \quad (\text{B.9})$$

où $' = d/dr$.

Les composantes non nulles du tenseur de Riemann sont

$$R^t_{tt\varphi} = -R^t_{t\varphi t} = -R^\varphi_{\varphi t\varphi} = R^\varphi_{\varphi\varphi t} = -\omega f \frac{r(r-m) - (r^2 - n^2)f}{(r^2 + n^2)^2}, \quad (\text{B.10})$$

$$R^t_{tr\theta} = -R^t_{t\theta r} = -R^t_{rt\theta} = R^t_{r\theta t} = -n\omega \frac{r(1-2f) - m}{(r^2 + n^2)^2 \sin \theta}, \quad (\text{B.11})$$

$$R^t_{rtr} = -R^t_{rrt} = -\frac{(f-1)(3r^2 - n^2) + 4mr}{f(r^2 + n^2)^2}, \quad (\text{B.12})$$

$$R^t_{r\theta\varphi} = -R^t_{r\varphi\theta} = n[\omega^2 f + 2(r^2 + n^2) \sin^2 \theta] \frac{r(1-2f) - m}{f(r^2 + n^2)^2 \sin \theta}, \quad (\text{B.13})$$

$$R^t_{\theta tr} = -R^t_{\theta rt} = R^\varphi_{\theta r\varphi} = -R^\varphi_{\theta\varphi r} = 2n\omega \frac{r(1-2f) - m}{(r^2 + n^2)^2 \sin \theta}, \quad (\text{B.14})$$

$$R^t_{\theta t\theta} = -R^t_{\theta\theta t} = R^r_{\theta r\theta} = -R^r_{\theta\theta r} = -\frac{r(r-m) - (r^2 - n^2)f}{r^2 + n^2}, \quad (\text{B.15})$$

$$R^t_{\theta r\varphi} = -R^t_{\theta\varphi r} = n[2\omega^2 f + (r^2 + n^2) \sin^2 \theta] \frac{r(1-2f) - m}{f(r^2 + n^2)^2 \sin \theta}, \quad (\text{B.16})$$

$$R^t_{\theta\theta\varphi} = -R^t_{\theta\varphi\theta} = -\omega \frac{r(2r-m) - 2(r^2 - 2n^2)f + n^2}{r^2 + n^2}, \quad (\text{B.17})$$

$$R^t_{\varphi t\varphi} = -R^t_{\varphi\varphi t} = [\omega^2 f - (r^2 + n^2) \sin^2 \theta] \frac{r(r-m) - (r^2 - n^2)f}{(r^2 + n^2)^2}, \quad (\text{B.18})$$

$$R^t_{\varphi r\theta} = -R^t_{\varphi\theta r} = n[\omega^2 f - (r^2 + n^2) \sin^2 \theta] \frac{r(1-2f) - m}{f(r^2 + n^2)^2 \sin \theta}, \quad (\text{B.19})$$

$$R^r_{ttr} = -R^r_{trt} = -f \frac{(f-1)(3r^2 - n^2) + 4mr}{(r^2 + n^2)^2}, \quad (\text{B.20})$$

$$R^r_{tr\varphi} = -R^r_{t\varphi r} = -R^r_{\varphi tr} = R^r_{\varphi rt} = -\omega f \frac{(f-1)(3r^2 - n^2) + 4mr}{(r^2 + n^2)^2}, \quad (\text{B.21})$$

$$R^r_{t\theta\varphi} = -R^r_{t\varphi\theta} = 2nf \frac{r(1-2f) - m}{r^2 + n^2} \sin \theta, \quad (\text{B.22})$$

$$R^r_{\theta t\varphi} = -R^r_{\theta\varphi t} = -R^r_{\varphi t\theta} = R^r_{\varphi\theta t} = nf \frac{r(1-2f) - m}{r^2 + n^2} \sin \theta, \quad (\text{B.23})$$

$$R^r_{\varphi r\varphi} = -R^r_{\varphi\varphi r} = -\frac{r(r-m) - (r^2 - n^2)f}{r^2 + n^2} \sin^2 \theta + \omega^2 f \frac{(f-1)(3r^2 - n^2) + 4mr}{(r^2 + n^2)^2}, \quad (\text{B.24})$$

$$R^r_{\varphi\theta\varphi} = -R^r_{\varphi\varphi\theta} = -3n\omega f \frac{r(1-2f) - m}{r^2 + n^2} \sin \theta, \quad (\text{B.25})$$

$$R^\theta_{tt\theta} = -R^\theta_{t\theta t} = R^\varphi_{tt\varphi} = -R^\varphi_{t\varphi t} = -f \frac{r(r-m) - (r^2 - n^2)f}{(r^2 + n^2)^2}, \quad (\text{B.26})$$

$$R^\theta_{tr\varphi} = -R^\theta_{t\varphi r} = -R^\theta_{r\varphi t} = R^\theta_{r\varphi t} = n \frac{r(1-2f) - m}{(r^2 + n^2)^2} \sin \theta, \quad (\text{B.27})$$

$$R^\theta_{t\theta\varphi} = -R^\theta_{t\varphi\theta} = -R^\theta_{\varphi t\theta} = R^\theta_{\varphi\theta t} = -\omega f \frac{r(r-m) - (r^2 - n^2)f}{(r^2 + n^2)^2}, \quad (\text{B.28})$$

$$R^\theta_{r\theta\theta} = -R^\theta_{r\theta r} = R^\varphi_{rr\varphi} = -R^\varphi_{r\varphi r} = \frac{r(r-m) - (r^2 - n^2)f}{f(r^2 + n^2)^2}, \quad (\text{B.29})$$

$$R^\theta_{\varphi tr} = -R^\theta_{\varphi rt} = -2n \frac{r(1-2f) - m}{(r^2 + n^2)^2} \sin \theta, \quad (\text{B.30})$$

$$R^\theta_{\varphi r\varphi} = -R^\theta_{\varphi\varphi r} = -3n\omega \frac{r(1-2f) - m}{(r^2 + n^2)^2} \sin \theta, \quad (\text{B.31})$$

$$R^\theta_{\varphi\theta\varphi} = -R^\theta_{\varphi\varphi\theta} = \omega^2 f \frac{r(r-m) - (r^2 - n^2)f}{(r^2 + n^2)^2} + \frac{r^2 + n^2 - (r^2 - 3n^2)f}{r^2 + n^2} \sin^2 \theta, \quad (\text{B.32})$$

$$R^\varphi_{tr\theta} = -R^\varphi_{t\theta r} = -R^\varphi_{r\theta t} = R^\varphi_{r\theta t} = -n \frac{r(1-2f) - m}{(n^2 + r^2)^2} \sin \theta, \quad (\text{B.33})$$

$$R^\varphi_{r\theta\varphi} = -R^\varphi_{r\varphi\theta} = R^\varphi_{\varphi r\theta} = -R^\varphi_{\varphi\theta r} = n\omega \frac{r(1-2f) - m}{(n^2 + r^2)^2} \sin \theta, \quad (\text{B.34})$$

$$R^\varphi_{\theta tr} = -R^\varphi_{\theta rt} = 2n \frac{r(1-2f) - m}{(n^2 + r^2)^2 \sin \theta}, \quad (\text{B.35})$$

$$R^\varphi_{\theta\theta\varphi} = -R^\varphi_{\theta\varphi\theta} = -\frac{r^2 + n^2 - (r^2 - 3n^2)f}{r^2 + n^2}. \quad (\text{B.36})$$

Les composantes non nulles du tenseur de Ricci sont

$$R_{tt} = R^r_{trt} + R^\theta_{t\theta t} + R^\varphi_{t\varphi t} = \frac{e^2 f}{(r^2 + n^2)^2}, \quad (\text{B.37})$$

$$R_{t\varphi} = R^t_{tt\varphi} + R^r_{tr\varphi} + R^\theta_{t\theta\varphi} + R^\varphi_{t\varphi\varphi} = -\frac{e^2 \omega f}{(r^2 + n^2)^2}, \quad (\text{B.38})$$

$$R_{rr} = R^t_{rtr} + R^\theta_{r\theta r} + R^\varphi_{r\varphi r} = -\frac{e^2 f}{(r^2 + n^2)^2}, \quad (\text{B.39})$$

$$R_{\theta\theta} = R^t_{\theta t\theta} + R^r_{\theta r\theta} + R^\varphi_{\theta\varphi\theta} = \frac{e^2}{n^2 + r^2}, \quad (\text{B.40})$$

$$R_{\varphi\varphi} = R^t_{\varphi t\varphi} + R^r_{\varphi r\varphi} + R^\theta_{\varphi\theta\varphi} = \frac{e^2}{n^2 + r^2} \left(\frac{\omega^2 f}{r^2 + n^2} + \sin^2 \theta \right). \quad (\text{B.41})$$

Annexe C

Orbites circulaires avec $r = r_{\pm}$

Cherchons maintenant la condition nécessaire et suffisante d'existence des orbites circulaires instables. Après avoir pris en compte la condition (9.48), on montre que l'équation (9.45) admet pour solution

$$E_0 = \frac{-\kappa\bar{g}(\bar{l}^2 + \bar{g}^2 - 2) - |\bar{l}^2 - (\bar{g}^2 - 2)|\sqrt{A}}{2(\bar{g}^2 - 2)\bar{l}^2} > 0. \quad (\text{C.1})$$

En notant

$$h = \frac{-\kappa\bar{g} + \text{sgn}[\bar{l}^2 - (\bar{g}^2 - 2)]\sqrt{A}}{\bar{l}^2}, \quad (\text{C.2})$$

qui est équivalent à

$$h = \frac{\bar{g}^2 - 2}{-\kappa\bar{g} - \text{sgn}[\bar{l}^2 - (\bar{g}^2 - 2)]\sqrt{A}}. \quad (\text{C.3})$$

L'énergie E_0 s'exprime alors en fonction de h comme

$$E_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h} + h \right), \quad (\text{C.4})$$

qui implique que h est positif, $h > 0$. Ensuite, de (C.2) et (C.3), nous pouvons tirer

$$-2\kappa\bar{g} = \bar{l}^2 h + \frac{\bar{g}^2 - 2}{h}, \quad 2\text{sgn}[\bar{l}^2 - (\bar{g}^2 - 2)]\sqrt{A} = \bar{l}^2 h - \frac{\bar{g}^2 - 2}{h}, \quad (\text{C.5})$$

ce qui nous permet de réexprimer les racines r_{\pm} (9.37) en termes de h comme

$$\bar{r}_{\pm}^2 = \frac{(\bar{l}^2 + 1)h^2 - (\bar{g}^2 - 1)}{1 - h^2}, \quad (\text{C.6})$$

d'où l'on déduit

$$h^2 = \frac{\bar{r}_{\pm}^2 + \bar{g}^2 - 1}{\bar{r}_{\pm}^2 + \bar{l}^2 + 1}. \quad (\text{C.7})$$

Il résulte de (C.5) que κ ne peut être que positif si $g < \sqrt{2n}$. Les énergies $\mathcal{E}(r_{\pm})$ et E deviennent

$$\mathcal{E}(r_{\pm}) = E + \kappa\Phi(r_{\pm}) = \frac{\bar{l}^2 - (\bar{g}^2 - 2)}{\bar{l}^2 h^2 - (\bar{g}^2 - 2)} h = \frac{\bar{r}_{\pm}^2 + 1 + \bar{l}^2}{\bar{r}_{\pm}^2 + 1} h > 0, \quad (\text{C.8})$$

$$E = E_0 - \frac{1}{2}\kappa\bar{g} = \frac{(2 + \bar{l}^2)h^2 + \bar{g}^2}{4h}. \quad (\text{C.9})$$

Pour déterminer les conditions d'existence nécessaires et suffisantes des orbites circulaires instables, nous utilisons le fait que $r_{\pm}^2 > 0$. Ainsi, nous montrons à partir de (C.6) (ou (C.7) que dans le cas du wormhole $g > n$ ($b^2 > 0$),

$$\sqrt{\frac{\bar{g}^2 - 1}{\bar{l}^2 + 1}} < h < 1, \quad \bar{l}^2 > \bar{g}^2 - 2, \quad (\text{C.10})$$

$$1 < h < \sqrt{\frac{\bar{g}^2 - 1}{\bar{l}^2 + 1}}, \quad \bar{l}^2 < \bar{g}^2 - 2. \quad (\text{C.11})$$

Finalement, en remplaçant h par son expression (C.2) en fonction de κ , ces deux conditions susmentionnées se réunissent en une seule,

$$\frac{[1 + 2(\bar{g}^2 - 2)]\bar{l}^2 + \bar{g}^2 - 2}{\sqrt{\bar{g}^2 - 1}\sqrt{\bar{l}^2 + 1}} < -2\kappa\bar{g} < \bar{l}^2 + \bar{g}^2 - 2. \quad (\text{C.12})$$

On voit facilement que κ doit être négatif pour $g > \sqrt{2n}$. L'inégalité à gauche de (C.12) est plus forte que la condition d'existence des racines (9.47). En effet, en élevant au carré,

nous obtenons

$$\left(\frac{[1 + 2(\bar{g}^2 - 2)]\bar{l}^2 + \bar{g}^2 - 2}{\sqrt{\bar{g}^2 - 1}\sqrt{\bar{l}^2 + 1}} \right)^2 - 4(\bar{g}^2 - 2)\bar{l}^2 = \frac{(\bar{l}^2 - \bar{g}^2 + 2)^2}{(\bar{g}^2 - 1)(\bar{l}^2 + 1)} > 0. \quad (\text{C.13})$$

Nous pouvons également nous assurer que la borne supérieure est toujours plus grande que la borne inférieure en vertu de l'identité

$$\bar{l}^2 + \bar{g}^2 - 2 - \frac{[1 + 2(\bar{g}^2 - 2)]\bar{l}^2 + \bar{g}^2 - 2}{\sqrt{\bar{g}^2 - 1}\sqrt{\bar{l}^2 + 1}} = \left(\sqrt{\bar{l}^2 + 1} - \sqrt{\bar{g}^2 - 1} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\bar{g}^2 - 1}\sqrt{\bar{l}^2 + 1}} \right). \quad (\text{C.14})$$

En particulier, si $-\kappa = l^2/gn = (g^2 - 2n^2)/gn$, on trouve $h = 1$, $E_0 = 1$, et $A = B = C = 0$, conduisant à $W(r) = 0$. Dans ce cas, la particule chargée peut suivre une orbite circulaire quelque soit la valeur du rayon r .

Dans le cas du trou noir et du trou noir extrême $g \leq n$ ($-n^2 \leq b^2 \leq 0$), $h^2 > 0$ implique, d'après (C.7), que

$$r_{\pm}^2 > r_h^2 = -b^2 = n^2 - g^2. \quad (\text{C.15})$$

Donc, les orbites circulaires doivent être à l'extérieur de l'horizon. Ensuite, de (C.7), le domaine de variation de h est

$$0 < h < 1, \quad (\text{C.16})$$

ce qui permet, en utilisant (C.5), de déterminer la condition d'existence de ces orbites,

$$-2\kappa\bar{g} < \bar{l}^2 - (2 - \bar{g}^2). \quad (\text{C.17})$$

Bibliographie

- [1] A. Einstein, *Kosmologische betrachtungen zur allgemeinen relativitätstheorie*, Albert Einstein, Akademie-Vorträge, Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften 1914–1932, 142 (1917).
- [2] E. Hubble, *A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae*, Proc. Nat. Acad. Sci. **15**, 168 (1929).
- [3] F. W. Dyson, A. S. Eddington, C. Davidson, *A determination of the deflection of light by the sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse of May 29, 1919*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A **220**, 291 (1920).
- [4] I. I. Shapiro, *Fourth test of general relativity*, Phys. Rev. Lett. **13**, 789 (1964).
- [5] I. I. Shapiro, et al., *Fourth test of general relativity: Preliminary results*, Phys. Rev. Lett. **21**, 266 (1968).
- [6] A. Einstein, E. G. Straus, *The influence of the expansion of space on the gravitation fields surrounding the individual star*, Rev. Mod. Phys. **17**, 120 (1945).
- [7] F. Kottler, *Über die physikalischen grundlagen der einsteinschen gravitationstheorie*, Ann. der Physik **361**, 401 (1918).
- [8] N. J. Islam, *The cosmological constant and classical tests of general relativity*, Phys. Lett. A **97**, 239 (1983).
- [9] W. H. C. Freire, V. B. Bezerra, J. A. S. Lima, *Cosmological constant, conical defect and classical tests of general relativity*, Gen. Rel. Grav. **33**, 1407 (2001).

- [10] K. Lake, *Bending of light and the cosmological constant*, Phys. Rev. D **65**, 087301 (2002).
- [11] A. W. Kerr, J. C. Hauck, B. Mashhoon, *Standard clocks, orbital precession and the cosmological constant*, Class. Quant. Grav. **20**, 2727 (2003).
- [12] V. Kagramanova, J. Kunz, C. Lammerzahl, *Solar system effects in Schwarzschild–de Sitter space–time*, Phys.Lett. B **634**, 465 (2006).
- [13] M. Sereno, Ph. Jetzer, *Solar and stellar system tests of the cosmological constant*, Phys. Rev. D **73**, 063004 (2006).
- [14] F. Finelli, M. Galaverni, A. Gruppuso, *Light bending as a probe of the nature of dark energy*, Phys.Rev. D **75**, 043003 (2007).
- [15] W. Rindler, M. Ishak, *Contribution of the cosmological constant to the relativistic bending of light revisited*, Phys. Rev. D **76**, 043006 (2007).
- [16] G. Neugebauer, D. Kramer, *Eine methode zur konstruktion stationärer Einstein-Maxwell-Felder*, Ann. der Physik **479**, 62 (1969).
- [17] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, E. Herlt, *Exact solutions of the Einstein’s field equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England (2003).
- [18] H. Reissner, *Über die eigengravitation des elektrischen felde nach der einsteinschen theorie*, Ann. der Physik **50**, 106 (1916).
- [19] H. Weyl, *Zur gravitationstheorie*. Ann. der Physik **54**, 117 (1917).
- [20] G. Nordström, *Een en ander over de energie van het zwaartekrachtsveld volgens de theorie van Einstein*, Verhandl. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., Afdel. Natuurk., Amsterdam. **26**, 1201 (1918).
- [21] K. Schwarzschild, *Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie*, Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math. Phys. Tech. 189 (1916).
- [22] R. P. Kerr, *Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics*, Phys. Rev. Lett. **11**, 237 (1963).

- [23] R. Geroch, *A method for generating new solutions of Einstein's equations. II*, Journ. Math. Phys. **13**, 394 (1972).
- [24] G. Clément, *From Schwarzschild to Kerr: Generating spinning Einstein–Maxwell fields from static fields*, Phys. Rev. D **57**, 4885 (1998).
- [25] F. J. Ernst, *New formulation of the axially symmetric gravitational field problem*, Phys. Rev. **167**, 1175 (1968).
- [26] F. J. Ernst, *New formulation of the axially symmetric gravitational field problem. II*, Phys. Rev. **172**, 1850 (1968).
- [27] D. R. Brill, *Electromagnetic fields in a homogeneous, nonisotropic Universe*, Phys. Rev. **133**, B845 (1964).
- [28] E. Newman, L. Tamburino, T. J. Unti, *Empty-space generalization of the Schwarzschild metric*, Journ. Math. Phys. **4**, 915 (1963).
- [29] W. de Sitter, *On the relativity of inertia: Remarks concerning Einstein's latest hypothesis*, Kon. Ned. Akad. Wet. Proc, **19**, 1217 (1917).
- [30] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*, Wiley & Sons. New York, (1972).
- [31] P. J. E. Peebles, B. Ratra, *The cosmological constant and dark energy*, Rev. Mod. Phys. **75**, 559 (2003).
- [32] A. G. Riess, et al., *Observational evidence from supernovae for an accelerating Universe and a cosmological constant*, Astron. Journ. **116**, 1009 (1998).
- [33] S. Perlmutter, et al., *Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae*, Astrophys. Journ. **517**, 565 (1999).
- [34] A. G. Riess, et al., *Type Ia supernova discoveries at $z > 1$ from the Hubble space telescope: Evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution*, Astrophys. Journ. **607**, 665 (2004).

- [35] C. L. Bennett, et al., *First-year Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: Preliminary maps and basic results*, *Astrophys. Journ. Suppl. Ser.* **148**, 1 (2003).
- [36] D. N. Spergel, et al., *First-year Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: Determination of cosmological parameters*, *Astrophys. Journ. Suppl. Ser.* **148**, 175 (2003).
- [37] U. Seljak, et al., *Cosmological parameter analysis including SDSS Ly α forest and galaxy bias: Constraints on the primordial spectrum of fluctuations, neutrino mass, and dark energy*, *Phys. Rev. D* **71**, 103515 (2005).
- [38] M. Tegmark, et al., *The three-dimensional power spectrum of galaxies from the sloan digital sky survey*, *Astrophys. Journ.* **606**, 702 (2004).
- [39] D. N. Spergel, et al., *Three-year Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: Implications for cosmology*, *Astrophys. Journ. Suppl.* **170**, 377 (2007).
- [40] T. Schücker, N. Zaimen, *Cosmological constant and time delay*, *Astron. Astrophys.* **484**, 103 (2008).
- [41] N. Inada, et al., *A gravitationally lensed quasar with quadruple images separated by 14.62 arcseconds*, *Nature* **426**, 810 (2003).
- [42] M. Oguri, et al., *Observations and theoretical implications of the large-separation lensed quasar SDSS J1004+4112*, *Astrophys. Journ.* **605**, 78 (2004).
- [43] N. Ota, et al., *Chandra observations of SDSS J1004+4112: Constraints on the lensing cluster and anomalous X-ray flux ratios of the quadruply imaged quasar*, *Astrophys. Journ.* **647**, 215 (2006).
- [44] J. Fohlmeister, C. S. Kochanek, E. E. Falco, C. W. Morgan, J. Wambsganss, *The rewards of patience: An 822 day time delay in the gravitational lens SDSS J1004+4112*, *Astrophys. Journ.* **676**, 761 (2008).

- [45] Y. Kawano, M. Oguri, *Time delays for the giant quadruple lensed SDSS J1004+4112: Prospects for determining the density profile of the lensing cluster*, Publ. Astron. Soc. Jap. **58**, 271 (2006).
- [46] A. Friedmann, *Über die Krümmung des Raumes*, Z. Phys. **10**, 377 (1922).
- [47] G. Lemaître, *Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques*, Ann. Soc. Sci. Brux A **47**, 49 (1927).
- [48] G. C. McVittie, *The mass-particle in an expanding Universe*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **93**, 325 (1933).
- [49] G. C. McVittie, *General relativity and cosmology*, Intern. Astrophys. Ser. London, Chapman & Hall, 2nd ed (1965).
- [50] E. Schücking, *Das Schwarzschildsche Linienelement und die Expansion des Weltalls*, Z. Phys. **137**, 595 (1954).
- [51] T. Schücker, *Strong lensing in the Einstein-Straus solution*, Gen. Rel. Grav. **41**, 1595 (2009).
- [52] M. Ishak, W. Rindler, J. Dossett, J. Moldenhauer, C. A. Allison, *A new independent limit on the cosmological constant/dark energy from the relativistic bending of light by galaxies and clusters of galaxies*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **388**, 1279 (2008).
- [53] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *The classical theory of fields*, Pergamon Press, Oxford (1962).
- [54] W. Kinnersley, *Generation of stationary Einstein-Maxwell fields*, Journ. Math. Phys. **14**, 651 (1973).
- [55] J. G. Miller, *Global analysis of the Kerr-Taub-NUT metric*, Journ. Math. Phys. **14**, 486 (1973).
- [56] A. H. Taub, *Empty space-times admitting a three parameter group of motions*, Ann. Math. **53**, 472 (1951).

- [57] C. W. Misner, *The flatter regions of Newman, Unti, and Tamburino's generalized Schwarzschild space*, Journ. Math. Phys. **4**, 924 (1963).
- [58] P. A. M. Dirac, *Quantised singularities in the electromagnetic field*, Proc. R. Soc. Lond. A **133**, 60 (1931).
- [59] W. B. Bonnor, *A new interpretation of the NUT metric in general relativity*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **66**, 145 (1969).
- [60] A. Sackfield, *Physical interpretation of NUT metric*, Proc. Math. Camb. Philos. Soc. **70**, 89 (1971).
- [61] V. S. Manko, E. Ruiz, *Physical interpretation of the NUT family of solutions*, Class. Quant. Grav. **22**, 3555 (2005).
- [62] V. Kagramanova, J. Kunz, E. Hackmann, C. Lammerzahl, *Analytic treatment of complete and incomplete geodesics in Taub-NUT space-times*, Phys. Rev. D **81**, 124044 (2010).
- [63] M. S. Morris, K. S. Thorne, *Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity*, Am. Journ. Phys. **56**, 395 (1988).
- [64] H. Ellis, *Ether flow through a drainhole: A particle model in general relativity*, Journ. Math. Phys. **14**, 104 (1973).
- [65] R. L. Zimmerman, B. Y. Shahir, *Geodesics for the NUT metric and gravitational monopoles*, Gen. Rel. Grav. **21**, 821 (1989).
- [66] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, San Francisco (1973).
- [67] K. Gödel, *An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation*, Rev. Mod. Phys. **21**, 447 (1949).
- [68] S. W. Hawking, *Chronology protection conjecture*, Phys. Rev. D **46**, 603 (1992).
- [69] K. E. Boudjemaa, M. Guenouche, S. R. Zouzou, *Time delay in the Einstein-Straus solution*, Gen. Rel. Grav. **43**, 1707 (2011).

- [70] M. Guenouche, S. R. Zouzou, *Deflection of light and time delay in closed Einstein-Straus solution*, Phys. Rev. D **98**, 123508 (2018).
- [71] T. Schücker, *Lensing in an interior Kottler solution*, Gen. Rel. Gravi. **42**, 1991 (2010).
- [72] G. Clément, D. Gal'tsov, M. Guenouche, *Rehabilitating space-times with NUTs*, Phys. Lett. B **750**, 591 (2015).
- [73] G. Clément, D. Gal'tsov et M. Guenouche, *NUT wormholes*, Phys. Rev. D **93**, 024048 (2016).
- [74] G. Clément, M. Guenouche, *Motion of charged particles in a NUTty Einstein-Maxwell spacetime and causality violation*, Gen. Rel. Grav. **50**, 60 (2018).

Deflection of light and time delay at the cosmological scale, Generation and interpretation of stationary solutions in Einstein-Maxwell theory

Abstract

The research work carried out in this doctoral thesis covers two separate topics. In the first topic, we have investigated strong gravitational lensing by a spherically symmetric mass distribution in the framework of two different cosmological models with a positive cosmological constant: The static Kottler (or Schwarzschild-de Sitter) model and the dynamic Einstein-Straus model in the case of flat space (null curvature) and closed space (positive curvature). The Einstein-Straus model consists of a Kottler vacuole embedded in an expanding Friedman-Lemaître-Robertson-Walker Universe. The deflection of light and the time delay have been computed in each model then applied to the lensed quasar SDSS J1004+4112. Unlike the case of Kottler model, the analysis of the deflection of light and time delay in both cases of flat and closed Einstein-Straus model have produced results which are in agreement with Rindler and Ishak's claim that a positive cosmological constant Λ attenuates the bending of light. On the other hand, it has been revealed, in the case of closed Einstein-Straus model, that the light bending and time delay decrease considerably as the present scale factor a_0 becomes smaller than a limit value about 9.1×10^{26} m ($\Omega_{k0} \simeq 0.02$) highlighting the potential impact of spatial positive curvature. This goes against the Einstein-Straus model in which case the results remain the same regardless of which value is chosen for the present scale factor. Nevertheless, above this limit value ($\Omega_{k0} < 0.02$), the obtained results are found to be indistinguishable from the flat case.

The second topic revolves around two parts. In the first part, we have generalized the generation method of rotating solutions by combining a finite $SU(2, 1)$ transformations with a finite coordinate transformation (finite Geroch transformation). This work seems to show that this generalization would only be apparent. In the second part, a number of problems associated with the Reissner-Nordström-NUT solution have been explored. We have analyzed in detail the geodesic motion and shown, without assuming time periodicity to make Misner strings unobservable, that the Reissner-Nordström-NUT spacetime is geodesically complete. Another unpleasant feature of spacetimes with NUTs is the presence of regions containing closed time-like curves. We have shown that among them there are no closed timelike or null geodesics, so the freely falling observers should not encounter causality violations. Considering the motion of electrically charged test particles in the massless magnetically charged Reissner-Nordström-NUT solution, we find that no worldline followed by an initially distant charged particle moving under the action of the Lorentz force can possibly close or self-intersect.

Key words General relativity, cosmology, light bending, time delay, cosmological constant, Einstein-Maxwell equations, $SU(2, 1)$ group, finite Geroch transformation, NUT parameter, Misner string, wormhole, closed time-like curves, causality.

انحراف الضوء و مدة التأخر على السلم الكسومولوجي، توليد و تفسير حلول مستقرة في نظرية أينشتاين-ماكسويل

ملخص

الأبحاث التي أجريت في أطروحة الدكتوراه هذه تدور حول موضوعين منفصلين يندرجان في إطار النسبية العامة و الكوسمولوجيا. يتناول الموضوع الأول المفعول القوي لعدسة الجاذبية الناجم عن توزيع كتلي ذو تناظر كروي ضمن نموذجين كونيين مختلفين و هذا في وجود ثابت كوسمولوجي موجب: النموذج الثابت لكوتلار (المسمى كذلك شفارزشيلد-دوسيتار) و النموذج الديناميكي لأينشتاين-ستروس في حالة الفضاء المسطح (ثابت انحناء معدوم) و الكروي (ثابت انحناء موجب). يتألف نموذج أينشتاين-ستروس من فحوة كروية الشكل تتحكم فيها مترية كوتلار مدججة داخل زمكان فريدمان-ماتر-روبرتسون-ولكر. تم حساب انحراف الضوء و مدة التأخر في كل نموذج على حدة ثم طبقنا النتائج على نظام معين لعدسة-كوآزار يحمل اسم SDSS J1004+4112، مع إيلاء اهتمام خاص بنموذج أينشتاين-ستروس لأنه يأخذ بعين الاعتبار توسع الكون على مستوى المجرات و مجموعات المجرات و حقيقة أن أبعاد الأنظمة الكوكبية والذرية لا تتأثر بالتوسع المذكور. خلافا لنموذج كوتلار، النتائج المتحصل عليها في كل من نموذجي أينشتاين-ستروس المسطح و الكروي تتفق مع ما توصلنا إليه ريندلار و إسحاق أن زاوية انحراف الضوء تتناقص بوجود ثابت كوسمولوجي موجب. هذا من جهة. من جهة أخرى، و من أجل تسليط الضوء حول التأثير المحتمل لانحناء الفضاء الموجب على انحراف الضوء و مدة التأخر في نموذج أينشتاين-ستروس الكروي، قمنا بدراسة الظاهرة بتغيير قيمة عامل السلم الحالي a_0 . أظهرت النتائج أن انحراف الضوء و مدة التأخر ينخفضان بشكل ملحوظ عندما يصبح عامل السلم الحالي صغيراً أمام قيمة حرجة تبلغ حوالي $9.1 \times 10^{26} \text{m}$ (أي حوالي $\Omega_{k0} \approx 0.02$ بالنسبة لكثافة الإنحناء الحالية). هذا يتعارض مع نموذج أينشتاين-ستروس المسطح و الذي تظل النتائج فيه كما هي بغض النظر عن القيمة التي يأخذها عامل السلم الحالي. رغم ذلك، عندما نتجاوز هذه القيمة الحرجة (أي $\Omega_{k0} < 0.02$)، فإن النتائج تصبح متطابقة تماماً مع الحالة المسطحة لنموذج أينشتاين-ستروس.

الموضوع الثاني يتعلق بتوليد و تفسير حلول مستقرة لمعادلات أينشتاين-ماكسويل و ينقسم بدوره إلى جزئين. خلال الجزء الأول، قمنا بتعميم طريقة توليد الحلول الدوارة بتطبيق تحويلات منتهية لجزء مرتبط بمجموعة $SU(2,1)$ و تحويل إحداثيات خطي. لكن هذا التعميم يبدو ظاهرياً، على أساس أن الحلول الناتجة يمكن الحصول عليها بتحويلات $SU(2,1)$ فقط. أما في الجزء الثاني قمنا بدراسة معمقة لحل رايسنر-نوردستروم-نوت دون افتراض دورية الوقت للتخلص من وتر ميسنر، وبينا على عكس الاعتقاد السائد أن المسارات لا تتوقف عند هذا الوتر، و بالتالي يكون الزمكان كاملاً جيوديزيكيًا. كذلك يتميز زمكان رايسنر-نوردستروم-نوت، كغيره من الزمكانات التي تضم شحنة نوت، بوجود منطقة تحتوي على منحنيات زمنية مغلقة والتي ترتبط بشكل عام بإمكانية حدوث انتهاكات لمبدأ السببية. قمنا بدراسة هذه المشكلة واستنتجنا أن حركة الجسيمات المحايدة في السقوط الحر هي حتماً سببية (لا توجد منحنيات جيوديزيكية مغلقة زمنية أو ضوئية). أما بخصوص حركة الجسيمات المشحونة كهربائياً فقد عالجانها في الحالة المغناطيسية بدون كتلة لمترية رايسنر-نوردستروم-نوت، و تحصلنا على نتيجة ضعيفة نوعاً ما بحيث إذا أتت هذه الجسيمات المشحونة من الملائمة، فإن الخطوط الكونية لا تتقاطع و لا يمكن لها أن تكون مغلقة.

كلمات مفاتيح النسبية العامة، الكوسمولوجيا، انحراف الضوء، مدة التأخر، الثابت الكوسمولوجي، معادلات أينشتاين-ماكسويل، مجموعة

$SU(2,1)$ ، تحويل Geroch المنتهي، شحنة نوت، وتر ميسنر، وورمهول، المنحنيات الزمنية المغلقة، مبدأ السببية.

Résumé

Les travaux de recherches réalisés dans cette thèse de Doctorat s'articulent autour de deux sujets distincts bien que s'inscrivant dans le cadre de la relativité générale et de la cosmologie. Le premier sujet traite de l'effet de lentille gravitationnelle fort causé par une distribution de masse à symétrie sphérique dans le cadre de deux modèles cosmologiques en présence d'une constante cosmologique positive: Le modèle statique de Kottler (ou Schwarzschild-de Sitter) et le modèle dynamique d'Einstein-Straus qui résulte du raccordement de la métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker à l'extérieur d'une vacuole avec la métrique statique de Kottler à l'intérieur de celle-ci. On s'est limité à deux versions de la métrique d'Einstein-Straus, plate et sphérique qui correspondent respectivement à une courbure spatiale nulle et positive. La déflexion de la lumière et le temps de retard ont été calculés dans chacun des deux modèles puis appliqués à un système particulier de lentille-quasar appelé SDSS J1004+4112, avec une attention particulière pour le modèle d'Einstein-Straus car c'est le modèle qui tient compte simultanément de l'expansion de l'Univers à l'échelle galactique et du fait que les échelles planétaire et atomique ne sont pas affectées par la dite expansion. Contrairement au modèle de Kottler, les résultats obtenus dans les cas plat et sphérique du modèle d'Einstein-Straus corroborent l'affirmation de Rindler et d'Ishak selon laquelle une constante cosmologique positive atténuée la déflexion de la lumière. Une analyse en fonction du facteur d'échelle actuel a_0 , dans le cadre du modèle d'Einstein-Straus sphérique, a mis en évidence l'impact de la courbure spatiale sur la déflexion de la lumière et le temps de retard. La déflexion de la lumière et le temps de retard diminuent significativement lorsque le facteur d'échelle actuel devient plus petit devant une valeur critique de 9.1×10^{26} m environ (correspondant à une densité de courbure actuelle $\Omega_{k0} \simeq 0.02$). Cela va à l'encontre du modèle d'Einstein-Straus plat auquel cas les résultats ne dépendent non plus de la valeur du facteur d'échelle actuel. Néanmoins, au-delà de cette valeur critique ($\Omega_{k0} < 0.02$), les résultats sont pratiquement les mêmes que pour le cas plat du modèle d'Einstein-Straus.

Le second sujet comporte deux volets. Le premier volet consiste en une généralisation de la méthode de génération de solutions en rotation par transformation finie de Geroch combinant une transformation particulière du groupe $SU(2,1)$ avec une transformation linéaire de coordonnées. Ces travaux, semblent montrer que cette généralisation ne serait qu'apparente, en ce sens que les solutions obtenues seraient seulement des transformées par $SU(2,1)$ des solutions générées par la méthode primitive. Le second volet consiste en une étude approfondie des propriétés de la solution de Reissner-Nordström-NUT, la solution asymptotiquement plate à symétrie sphérique la plus générale des équations d'Einstein-Maxwell. La résolution des équations de la géodésique a permis de montrer, contrairement à une opinion répandue, que toutes les géodésiques, y compris celles qui impactent la corde de Misner, sont complètes (ne se terminent qu'à l'infini). Une région de l'espace-temps de Reissner-Nordström-NUT contient des courbes fermées de genre temps, que l'on associe en général à la possibilité de violations de causalité. On a montré que le mouvement d'une particule neutre en chute libre est nécessairement causal (absence de géodésique fermée de genre temps ou lumière), et obtenu, dans le cas magnétique de masse nulle de la solution de Reissner-Nordström-NUT, un résultat un peu plus faible pour une particule électriquement chargée, à savoir que si celle-ci vient de l'infini, sa ligne d'univers ne peut pas être fermée ou s'intersecter (l'observateur chargé ne peut pas se retrouver face à lui-même).

Mots clés Relativité générale, cosmologie, déflexion de la lumière, temps de retard, constante cosmologique, équations d'Einstein-Maxwell, groupe $SU(2,1)$, transformation finie de Geroch, charge NUT, corde de Misner, wormhole, courbes fermées de genre temps, causalité.