Table des matières

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FRERES MENTOURI CONSTANINE 1

FACULTE DES SCIENCES EXACTES

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° dórdre : 2 3 3 / D s / 2 0 1 8

Srie :19/Phy/2018

THESE

présentée pour obtenir le diplôme de

DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES

Spécialité : Physique théorique

Par

AMINE BENACHOUR

THEME

Quelques problèmes en relativité et cosmologie : Théorie d'Einstein-Cartan comme alternative au problème de la matière sombre, théorie $f(R)$ et transformation de Lorentz à l'échelle macroscopique

Soutenue le : 02/12/2018

Devant le Jury :

Président :	F. Benamira	Prof.	Univ. Frères Mentouri Constantine 1
Rapporteur :	S. R. Zouzou	Prof.	Univ. Frères Mentouri Constantine 1
Examinateurs :	A. Bouchareb	M. C. A	Univ. Badji Mokhtar Annaba
	K. H. Boudjemaa	M. C. A	Univ. Abbès Laghrour Khenchela

Introduction

La physique est la science qui étudie les phénomènes naturels surgissant dans l'univers, une tâche qui se heurte souvent à des problèmes énigmatiques pour lesquels elle se doit d'apporter une explication rationnelle. Parmi les problèmes récents les plus pertinents de la physique théorique, et plus précisément de la cosmologie ; il existe celui de la matière sombre appelée également matière noire (Dark Matter). L'origine du problème remonte à l'année 1933 suite à l'étude faite par l'astronaute suisse Fritz Zwicky sur un amas de galaxie quand il constata que la masse dynamique de cet amas obtenue théoriquement, est beaucoup plus importante que la masse lumineuse que donne la mesure de la quantité de lumière émise par cet amas. A l'époque ce résultat est passé inaperçu et il faut attendre les années soixante-dix et les travaux des astronomes américains Vera Rubin et Ford Kent [1] sur la rotations des galaxies spirales, pour confirmer le résultat de Zwicky. Afin d'expliquer cette différence de masse, une grande partie de la communauté scientifique a émis l'hypothèse de l'existence d'une forme de matière jusque là inconnue qui devrait être selon les estimations six fois plus abondante que la matière ordinaire, soit environs 27% de l'univers contre uniquement 5% de matière ordinaire, constituant les galaxies, les étoiles et les différents astres de tout l'univers. Cette nouvelle matière serait différente de la matière ordinaire par plusieurs aspects, comme son insensibilité à la force électromagnétique et un comportement singulier vis-à-vis de la lumière qu'elle ne peut ni absorber ni refléter ni émettre la rendant de plus en plus difficile à détecter ce qui explique pourquoi la masse des galaxies estimée à partir des observations astronomiques serait inférieure à la masse théoriquement conforme au mouvement de ces galaxies, car en fait la masse manquante est celle de la matière sombre qu'on n'arrive pas à détecter. En dépit de cette difficulté il y'a eu plusieurs tentatives pour la détection de la matière sombre. Citons à titre d'exemple les résultats obtenus en 2006 par une équipe de recherche [2] qui aurait observée nettement de la matière sombre. Si cette matière est si différente de la matière ordinaire, la question de savoir de quoi elle est constituée est une préoccupation majeur des physiciens, et il y'a eu plusieurs théories et hypothèses sur la nature exacte des ses constituants. La plus envisageable des hypothèses est celle qui l'a considère comme une matière non baryonique composée de particules supersymétriques associées à des particules connues du modèles standard comme le neutrino par exemple, qu'on regroupe sous l'appellation générique WIMP. Ainsi le fait de conférer une nature à cette matière sombre en tant qu'ensemble de particule, a permis de l'envisager dans le cadre de différentes expériences de la physique des particules menées dans de grand accélérateurs comme le LHC, les meilleurs endroits pour pouvoir mettre en évidence cette matière et remédier à la difficulté d'une détection astronomique directe. Il existe cependant un avis complètement différent au sujet de cette matière sombre privilégiant une approche théorique à cette question. Au lieu d'expliquer le défaut de masse par l'hypothèse d'une matière inconnue, il faut plutôt s'orienter vers des théories de la gravitation capables d'apporter une explication sans recourir à l'hypothèse d'une matière sombre. A vrai dire il existe une multitude de théories de la gravitation [3] autres que la théorie newtonienne et la relativité générale ; certaines sont des généralisations de la relativité générale d'autres sont des modifications de la théorie d'Einstein. Le point commun pour la plupart d'entres elles, c'est qu'elles dérivent d'un principe variationnel et sont en majorité des théories métriques. On peut répertorier les théories de la gravitation en plusieurs catégories : Des théories scalaires comme la théorie de Nordström, des théories quasi linéaires comme la théorie de Whithehids, des théories tensorielles comme la relativité générale, la théorie $f(R)$ ou Gauss-Bonnet, des théories type scalaire-tensoriel : comme la théorie de Brans-Dicke, des théories tensorielles est vectorielles comme la théorie de Will-Nortdvetd, des théories bi-métriques comme la théorie de Lightman-Lee, des théories non métrique comme la théorie de Gauge de la gravitation. C'est la principale classification de ces théories de la gravitation dites classiques pour les distinguer des théories quantiques de la gravitation. Deux de ces théories de la gravitation seront considérées dans cette thèse. La première est la théorie d'Einstein-Cartan pour laquelle nous avons consacré le premier chapitre afin de rappeler les points essentiels qui se rapportent à cette théorie à commencer par l'écriture des composantes de la connexion dans les repères holonome et orthonormé en établissant la relation liant les deux types de composantes, puis l'écriture des équations de structure de Cartan qui permettent de bien définir le tenseur de torsion qu'on décomposera en trois parties irréductibles : La partie complètement antisymétrique, la partie à symétrie mixte et la partie vectorielle pour pouvoir ensuite écrire les équations d'Einstein et de Cartan. C'est au deuxième chapitre qu'il sera question de montrer que la théorie d'Einstein-Cartan peut être une candidate pour résoudre le problème de la matière sombre. La deuxième théorie de la gravitation abordée dans cette thèse est la théorie $f(R)$ introduite au troisième chapitre qui se présente souvent comme une théorie alternative à un autre problème pertinent en cosmologie, celui de l'énergie sombre, ou noire (dark energy), dont les premières origines remontent aux années quatre-vingt-dix [4][5] où une accélération de l'expansion de l'univers fut observée en 1998, par une équipe de chercheurs dans le cadre du projet : Supernova Cosmology Project et Supernovae Search Team, en mesurant la distance de luminosité de supernova du type la, qui a été mise en relation avec le décalage vers le rouge de ces supernovas, ce qui a permis de suivre l'évolution de l'expansion de l'univers sur plusieurs années est constater donc le phénomène d'une accélération de l'expansion de l'univers plutôt étrange, car théoriquement parlant on devrait plutôt s'attendre au contraire. Comme pour la matière sombre, on a fait l'hypothèse d'une forme d'énergie jusque là inconnue, à qui on a attribué le nom d'énergie sombre qui constituerait environ 68% de la densité d'énergie totale, de nature inconnue en dépit de plusieurs hypothèses notamment celles de la supposer constituée de petites particules appelées quintessence formées lors du Big-bang. Il existe toutefois d'autres approches et interprétations comme celles qui associent cette énergie sombre à un simple effet de la constante cosmologique, et celles ayant recours à d'autres théories de la gravité comme la théorie $f(R)$. L'importance de cette théorie en tant que théorie susceptible d'apporter des réponses aux problèmes posés par l'énergie sombre, nous a motivé à étudier cette dernière d'un point de vu mathématique en établissant le lien qu'elle pourrait avoir avec la théorie de la relativité générale, en cherchant plus précisément les théories $f(R)$ qui seraient équivalentes à la relativité générale, c'est-à-dire celles qui possèdent exactement les mêmes solutions que la relativité générale pour une forme déterminée du scalaire de courbure, car quand on présente un modèle $f(R)$ donnée comme étant une alternative au problème de l'énergie sombre, la première condition à satisfaire c'est qu'il doit être différent de la relativité générale vu qu'il a pour ambition d'aller au-delà de cette théorie ce qui fait que ça ne sert absolument à rien de construire des théories plus compliquées qui en apparence semblent êtres différentes mais au fond sont équivalentes à la relativité générale. Ceci doit impérativement passer par la connaissance des conditions qui font qu'un modèle $f(R)$ donné, ait les mêmes solutions que la relativité générale, pour pouvoir faire la distinction et ne considérer que les théories $f(R)$ réellement différentes de la relativité générale. Ce sont principalement de telles conditions qui seront discutées au troisième chapitre. Le quatrième chapitre sera consacré à un autre problème en relativité ; celui de considérer la théorie de la relativité restreinte à l'échelle macroscopique, fondée sur des principes de géométrie euclidienne qui sont à la base de notre perception de ce monde macroscopique. On voudrait alors confronter ces principes aux nouveaux concepts introduits par la relativité restreinte à travers l'approche des expériences de pensée généralement suivie en l'absence d'expériences réelles faute de moyens technologiques permettant d'accélérer des objets macroscopiques à de très grandes vitesses. Ainsi une expérience de pensée sera proposée, puis mathématiquement analysée pour souligner quelques problèmes qui méritent d'être étudiés et résolus, tel sera l'objectif de ce chapitre.

Chapitre 1

Théorie d'Einstein-Cartan : Notions fondamentales

La théorie d'Einstein-Cartan est une théorie classique de la gravitation proposée par Elie Cartan [6][7][8][9] en 1922, ayant également connue quelques développements à partir des années soixante grâce aux travaux de Dennis Sciama [10] et Tom Kibble [11]. C'est une théorie non métrique de la gravitation qui tient compte de la torsion de l'espace-temps. Elle a connu récemment un regain d'intérêt [14] en tant que théorie pouvant expliquer le problème de la matière sombre dans l'univers [12][13]. C'est la raison qui nous pousse à l'étudier dans le but d'atteindre cet objectif, en commençant par rappeler brièvement les notions fondamentales qui se rattachent à cette théorie, nécessaires pour bien comprendre les développements du chapitre suivant, en insistant uniquement sur les points essentiels qui nous intéressent ; car une étude mathématique plus approfondie et plus détaillée risque sort du cadre de cette thèse, en se référant toutefois à quelques ouvrages relatifs à la théorie et au domaine de la géométrie différentielle de manière générale [15][16][17][18][19][20][21][22][23][24] pour plus de détails.

Dans la théorie d'Einstein-Cartan, on considère deux types de référentiels ; l'un dérivé d'un système de coordonnées x^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^4$, dit référentiel holonome noté dx^μ, où la métrique g de l'espace-temps est définie par

$$g_{\mu\nu} := g\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right), \tag{1.1}$$

et son inversse

$$g^{\mu\nu} := g\left(dx^{\mu}, dx^{\nu}\right). \tag{1.2}$$

L'autre est un référentiel orthonormé appelé repère mobile noté e^a, $a = 0, 1, 2, 3$, tel que

$$g\left(e^a, e^b\right) = \eta^{ab}, \tag{1.3}$$

où η^{ab} sont les compostantes du tenseur de Minkowski ($\eta^{ac}\eta_{cb} = \delta^a{}_b$; $\delta^a{}_b$ est le symbole de Kronecker). On peut alors exprimer la base orthonormée e^a en terme de celles de la base holonome dx^{μ}

$$e^a = e^a{}_{\mu} dx^{\mu}, \tag{1.4}$$

et inversement

$$dx^{\mu} = e^{-1\mu}{}_b\, e^b. \tag{1.5}$$

$e^a{}_{\mu}$ représentent les éléments d'une matrice 4×4 appartenant au groupe $GL(4, \mathbb{R})$; groupe des matrices réelles 4×4 inversibles et les éléments $e^{-1\mu}{}_b$ sont ceux de la matrice inverse avec

$$e^a{}_{\mu} e^{-1\mu}{}_b = \delta^a{}_b. \tag{1.6}$$

Vu que nous avons deux référentiels, il nous est possible d'exprimer la connexion aussi bien dans le référentiel holonome que dans le référentiel orthonormé. Par rapport au référentiel holonome cette connexion sera notée Γ^{α}_{β} et pour le référentiel orthonormé on la notera $\omega^a{}_b$, telles que

$$\begin{aligned} \Gamma^{\alpha}_{\beta} &= \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} dx^{\mu}, \\ \omega^a{}_b &= \omega^a_{b\mu} dx^{\mu}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

où $\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}$ et $\omega^a_{b\mu}$ représentent les composantes dans la base holonome de la connexion par rapport aux repères holonome et orthonormé respectivement. Du point de vu mathématique, Γ est une 1-fome à valeurs dans l'algèbre de lie $gl(4)$ du groupe $GL(4)$, tandis que ω est une 1-forme à valeurs dans l'algèbre de lie $so(1, 3)$ du groupe de Lorentz $SO(4)$. La connexion par rapport au référentiel holonome Γ et la connexion par rapport au référentiel orthonormé ω sont liées par

$$\omega = e\Gamma e^{-1} + ede^{-1}, \tag{1.8}$$

ou en terme de composantes,

$$\omega^{a}{}_{b\mu} = e^{a}{}_{\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}e^{-1^{\nu}}{}_{b} + e^{a}{}_{\lambda}\partial_{\mu}e^{-1^{\lambda}}{}_{b}. \tag{1.9}$$

Dans la théorie d'Einstein-Cartan, nous avons deux équations de structure de Cartan :

$$R := d\omega + \frac{1}{2}\left[\omega, \omega\right], \tag{1.10}$$

pour la courbure, une 2-forme à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz et

$$T := De = de + \omega e, \tag{1.11}$$

pour la torsion, une 2-forme à valeurs vectorielles. En termes de composantes

$$\begin{aligned} R^{a}_{\ b} \quad &: \quad = d\omega^{a}{}_{b} + \frac{1}{2}\left[\omega^{a}{}_{c}\omega^{c}{}_{b} - \omega^{c}{}_{b}\omega^{a}{}_{c}\right], \\ &\text{et} \\ T^{a} \quad &: \quad = De^{a} = de^{a} + \omega^{a}{}_{b}e^{b}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

La torsion s'exprime dans le repère holonome par

$$T^{a} = \frac{1}{2}T^{a}_{\ \mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}, \tag{1.13}$$

et par rapport au repère orthonormé, celle-ci a pour expression

$$T^{a} = \frac{1}{2}T^{a}_{\ bc}e^{b}e^{c}, \tag{1.14}$$

où $T^{a}_{\ bc}$ est le tenseur de torsion connu également sous le nom de tenseur de Cartan. Compte tenu de (1.5), l'équation (1.13) s'écrit

$$T^a = \frac{1}{2} T^a_{\mu\nu} e^{-1^\mu}{}_b \, e^{-1^\nu}{}_c e^b \, e^c, \tag{1.15}$$

donc, de (1.14) et (1.15) on déduit que

$$T^a_{bc} = T^a_{\mu\nu} e^{-1^\mu}{}_b \, e^{-1^\nu}{}_c. \tag{1.16}$$

D'autre part, selon (1.4)

$$\begin{aligned} de^a &= de^a{}_\nu dx^\nu \\ &= \partial_\mu e^a{}_\nu dx^\mu dx^\nu \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu e^a{}_\nu - \partial_\nu e^a{}_\mu\right) dx^\mu dx^\nu, \end{aligned} \tag{1.17}$$

et d'après (1.4) et (1.7) on peut aussi exprimer le terme $\omega^a{}_b e^b$ dans la base holonome,

$$\begin{aligned} \omega^a{}_b e^b &= \omega^a{}_{b\mu} e^b{}_\nu dx^\mu dx^\nu \\ &= \frac{1}{2}\left(\omega^a{}_{b\mu} e^b{}_\nu - \omega^a{}_{b\nu} e^b{}_\mu\right) dx^\mu dx^\nu. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Compte tenu de (1.17), (1.7) et (1.18), l'équation de structure (1.12) pour la torsion peut se mettre sous la forme

$$T^a = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu e^a{}_\nu - \partial_\nu e^a{}_\mu + \omega^a{}_{b\mu} e^b{}_\nu - \omega^a{}_{b\nu} e^b{}_\mu\right) dx^\mu dx^\nu, \tag{1.19}$$

puis, en comparant celle-ci à (1.13), il vient que

$$T^a_{\mu\nu} = \partial_\mu e^a{}_\nu - \partial_\nu e^a{}_\mu + \omega^a{}_{b\mu} e^b{}_\nu - \omega^a{}_{b\nu} e^b{}_\mu. \tag{1.20}$$

En suivant le même raisonnement, on obtient l'analogue de (1.20) pour la courbure. On commence donc par exprimer R^a_b par rapport au repère holonome,

$$R^a_b = \frac{1}{2} R^a{}_{b\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{1.21}$$

puis par rapport au repère orthonormé

$$R^a_{\ b} = \frac{1}{2} R^a_{\ bcd} e^c e^d, \tag{1.22}$$

où $R^a_{\ bcd}$ est le tenseur de courbure. Comme la base holonome est liée à la base orthonormée par la relation (1.5), on a

$$R^a_{\ b} = \frac{1}{2} R^a_{\ b\mu\nu} e^{-1\mu}_{\ \ \ c}\ e^{-1\nu}_{\ \ \ d} e^c e^d. \tag{1.23}$$

En comparant (1.22) et (1.23), on déduit

$$R^a_{\ bcd} = R^a_{\ b\mu\nu} e^{-1\mu}_{\ \ \ c}\ e^{-1\nu}_{\ \ \ d}. \tag{1.24}$$

Si on développe séparément les deux termes $d\omega^a_{\ b}$ et $\frac{1}{2}\left[\omega^a_{\ c}\omega^c_{\ b} - \omega^c_{\ b}\omega^a_{\ c}\right]$ de l'équation de structure (1.12) de la courbure dans la base holonome, on aura donc pour le premier terme

$$\begin{aligned} d\omega^a_{\ b} &= d\left(\omega^a_{\ b\mu} dx^\mu\right) \\ &= d\omega^a_{\ b\mu} dx^\mu \\ &= \partial_\nu \omega^a_{\ b\mu} dx^\nu dx^\mu \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \omega^a_{\ b\nu} - \partial_\nu \omega^a_{\ b\mu}\right) dx^\mu dx^\nu, \end{aligned} \tag{1.25}$$

et pour le second, le développent suivant dx^μ donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left[\omega^a_{\ c}\omega^c_{\ b} - \omega^c_{\ b}\omega^a_{\ c}\right] &= \frac{1}{2}\left(\omega^a_{\ c\mu} dx^\mu \omega^c_{\ b\nu} dx^\nu - \omega^c_{\ b\mu} dx^\mu \omega^a_{\ c\nu} dx^\nu\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\omega^a_{\ c\mu}\omega^c_{\ b\nu} - \omega^a_{\ c\nu}\omega^c_{\ b\mu}\right) dx^\mu dx^\nu. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Compte tenu de (1.25) et (1.26), On peut donc mettre l'équation de structure (1.12) pour la courbure sous la forme

$$R^a_{\ b} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \omega^a_{\ b\nu} - \partial_\nu \omega^a_{\ b\mu} + \omega^a_{\ c\mu}\omega^c_{\ b\nu} - \omega^a_{\ c\nu}\omega^c_{\ b\mu}\right) dx^\mu dx^\nu. \tag{1.27}$$

Finalement, en comparant (1.21) et (1.27), on obtient

$$R^a_{\ b\mu\nu} = \partial_\mu \omega^a_{\ b\nu} - \partial_\nu \omega^a_{\ b\mu} + \omega^a_{\ c\mu}\omega^c_{\ b\nu} - \omega^a_{\ c\nu}\omega^c_{\ b\mu}. \tag{1.28}$$

Le tenseur de torsion sous sa forme complètement covariante

$$T_{abc} = \eta_{ad} T^d_{bc}, \tag{1.29}$$

peut être décomposé en trois parties irréductibles, de la manière suivante

$$T_{abc} = A_{abc} + \eta_{ab} V_c - \eta_{ac} V_b + M_{abc}, \tag{1.30}$$

A_{abc} est la partie complètement antisymétrique. $\eta_{ab} V_c$ la partie vectorielle, M_{abc} la partie de symétrie mixte. Ces trois parties irréductibles ont pour expressions

$$A_{abc} = \frac{1}{3}\left(T_{abc} + T_{cab} + T_{bca}\right), \tag{1.31}$$

$$V_c = \frac{1}{3} T_{abc} \eta^{ab}, \tag{1.32}$$

$$M_{abc} = T_{abc} - A_{abc} - \eta_{ab} V_c + \eta_{ac} V_b. \tag{1.33}$$

La partie de symétrie mixte est caractérisée par

$$\begin{aligned} & M_{abc} = -M_{acb}, \\ & M_{abc}\eta^{ab} = 0, \\ & M_{abc} + M_{cab} + M_{bca} = 0. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Il convient de souligner que la courbure et la torsion vérifient les deux identités de Bianchi,

$$DR = dR + [\omega, R] = 0, \tag{1.35}$$

et

$$DT = DDe = \mathrm{Re}\,. \tag{1.36}$$

Dans la théorie de la relativité générale, la gravitation est perçue comme un phénomène lié à la courbure de l'espace-temps, une courbure engendrée essentiellement par la présence de matière, ainsi les équations d'Einstein traduisent le lien courbure-matière en établissant la proportionnalité du tenseur d'Einstein décrivant la courbure de l'espace-temps et du tenseur énergie-impulsion décrivant la matière présente dans cet espace-temps. En plus de la courbure de l'espace-temps, la théorie d'Einstein-Cartan tient également compte de la torsion de l'espace-temps, inexistante en relativité générale vu que cette théorie a été établie en faisant l'hypothèse d'une torsion nulle, c'est-à-dire en se limitant à des espace-temps sans torsion, ce qui n'est pas le cas des espace-temps de la théorie d'Einstein-Cartan. Par voie de conséquence les équations d'Einstein certes nécessaires, sont à elles seules insuffisantes pour décrire des espace-temps avec torsion et nous aurons donc besoin d'équations supplémentaires permettant d'établir un lien entre la torsion et sa source ; à savoir la densité de spin, exactement comme pour la relation courbure-matière. De telles équations sont connues sous le nom d'équations de Cartan ; elles stipulent la proportionnalité du tenseur de Cartan décrivant la torsion et le tenseur courant de spin décrivant la densité de spin. Comme pour la plupart des équations de la physique, les équations fondamentales de la théorie d'Einstein-Cartan peuvent également être déduites d'un principe variationnel, en variant l'action totale

$$S_T\left[e,\omega\right] = S_{EH}\left[e,\omega\right] + S_M\left[e,\omega\right], \tag{1.37}$$

constituée de deux contributions, à savoir l'action d'Einstein-Hilbert définie par

$$\begin{aligned} S_{EH}\left[e,\omega\right] &= \frac{1}{16\pi G}\int R^a_{\ b} * \left(e^b e_a\right) - \frac{2\Lambda}{16\pi G}\int *1 \\ &= -\frac{1}{32\pi G}\int \left(R^{ab} + \frac{1}{6}\Lambda e^a e^b\right) e^c e^d \epsilon_{abcd} \\ &= -\frac{1}{16\pi G}\int \left(R^{ab}{}_{ab} + 2\Lambda\right) dV, \end{aligned} \tag{1.38}$$

où $*$ désigne le Hodge star, ϵ_{abcd} le tenseur de Levi-Civita à 4 dimensions complètement antisymétrique avec $\epsilon_{0123} = 1$, Λ la constante cosmologique, G la constante de Newton, et la contribution de l'action de matière $S_M\left[e,\omega\right]$, définie comme l'intégrale du lagrangien de matière $\mathcal{L}_M$,

$$S_M[e,\omega] = \int \mathcal{L}_M[e,\omega]\,. \tag{1.39}$$

La variantion de ce lagrangien de matière par rapport au repère orthonormé e, donne

$$\mathcal{L}_M[e+f,\omega] - \mathcal{L}_M[e,\omega] = -f^a\tau_a + O\left(f^2\right), \tag{1.40}$$

où f est une 1-forme, et τ_a une 3-forme à valeurs vectorielles, définissant le courant énergie-impulsion, ce qui fait de $\mathcal{L}_M[e+f,\omega]$ une 4-forme. On définit le tenseur d'énergie-impulsion τ_{ab} comme les composantes du Hodge star du courant énergie-impulsion dans la base orthonormée

$$*\tau_a = \tau_{ab}e^b. \tag{1.41}$$

De la même manière on peut considérer la variation du lagrangien de matière par rapport à la connexion ω

$$\mathcal{L}_M[e,\omega+\chi] - \mathcal{L}_M[e,\omega] = -\frac{1}{2}\chi^{ab}S_{ab} + O\left(\chi^2\right), \tag{1.42}$$

où χ^{ab} est une 1-forme et S_{ab} une 3-forme à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz dont le Hodge star permet de définir le tenseur de spin S_{abc} dans le repère orthonormé,

$$*S_{ab} = S_{abc}e^c. \tag{1.43}$$

Ainsi en variant l'action totale par rapport au repère orthonormé, c'est-à-dire en écrivant $S_T[e+f,\omega] - S_T[e,\omega] = 0$, on obtient

$$\left(R^{ab} + \frac{\Lambda}{3}e^ae^b\right)e^d\epsilon_{abcd} = -16\pi G\tau_c. \tag{1.44}$$

En appliquant le Hodge star aux deux membres de cette égalité et en tenant compte de (1.41), on obtient les équations d'Einstein

$$G_{ab} - \Lambda\eta_{ab} = 8\pi G\tau_{ba}, \tag{1.45}$$

où G_{ab} est le tenseur d'Einstein défini par : $G_{ab} := R_{ab} - \frac{1}{2}R\eta_{ab}$, et R_{ab} le tenseur de Ricci obtenu par contraction du tenseur de courbure,

$$R_{ab} = R^{c}_{acb}. \tag{1.46}$$

R est le scalaire de courbure, obtenu par contraction du tenseur de Ricci

$$R = R^{a}_{\ a}. \tag{1.47}$$

Pour obtenir les équations de Cartan, il va falloir varier l'action totale par rapport à la connexion ω. Alors $S_T\left[e, \omega + \chi\right] - S_T\left[e, \omega\right] = 0$, nous permettra de déduire

$$T^c e^d \epsilon_{abcd} = -8\pi G S_{ab}. \tag{1.48}$$

Après application du Hodge Star et tenant compte de (1.43), et de la décomposition (1.30) du tenseur de torsion, on obtient les équations de Cartan

$$A_{cab} + 2V_a \eta_{bc} - 2V_b \eta_{ac} + M_{cab} = -8\pi G S_{abc}. \tag{1.49}$$

Le tenseur de spin S_{abc} peut être également décomposé en ses parties irréductibles

$$S_{abc} = a_{abc} + \eta_{ca} s_b - \eta_{cb} s_b + m_{abc}, \tag{1.50}$$

avec

$$\begin{aligned}
&a_{abc} = \frac{1}{3}\left(s_{abc} + s_{bca} + s_{cab}\right), \\
&s_b = \frac{1}{3} s_{abc} \eta^{ac}, \\
&m_{abc} = -m_{bac}, \\
&m_{abc} \eta^{ac} = 0, \\
&\frac{1}{3}\left(m_{abc} + m_{bca} + m_{cab}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{1.51}$$

Les équations de Cartan (1.49) peuvent alors s'écrire sous la forme équivalente suivante

$$\begin{aligned} A_{abc} &= -8\pi G a_{abc}, \\ V_a &= 4\pi G s_a, \\ M_{cab} &= -8\pi G m_{abc}. \end{aligned} \tag{1.52}$$

Il convient de préciser qu'en présence de torsion, le tenseur d'Einstein G_{ab} et le tenseur d'énergie-impulsion τ_{ba} ne sont pas nécessairement symétriques ni conservés comme c'est le cas en relativité générale. De plus, la combinaison des équations d'Einstein écrites sous la forme : $\left(R^{ab} + \frac{\Lambda}{3} e^a e^b\right) e^d \epsilon_{abcd} = -16\pi G \tau_c$ avec la première identité de Bianchi (1.35) donne

$$\left(R^{ab} + \Lambda e^a e^b\right) T^d \epsilon_{abcd} = -16\pi G \left(D\tau\right)_c . \tag{1.53}$$

Si on combine l'équation de Cartan $T^c e^d \epsilon_{abcd} = -8\pi G S_{ab}$ avec la seconde identité de Bianchi (1.36) on obtient

$$\tau_{ab} - \tau_{ba} = - * \left(DS\right)_{ab} . \tag{1.54}$$

Les connexions métriques c'est-à-dire préservant les angles et les longueurs lors d'un transport parallèle, sont celles qui présentent un intérêt physique. Il est donc important pour nous de connaitre les conditions requises pour qu'une connexion soit métrique. Pour cela, les composantes de la connexion ω doivent être antisymétriques

$$\omega_{ab} = -\omega_{ba}, \tag{1.55}$$

tandis que celles de la connexion Γ doivent satisfaire la condition de métricité

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \Gamma^{\overline{\mu}}{}_{\mu\lambda} g_{\overline{\mu}\nu} - \Gamma^{\overline{\nu}}{}_{\nu\lambda} g_{\mu\overline{\nu}} = 0. \tag{1.56}$$

Il faut savoir que la condition de métricité n'est pas la seule contrainte à imposer aux connexions ; toujours pour des motivations physique nous aurons souvent à considérer des symétries de l'espace-temps, c'est-à-dire des transformations qui laissent invariante la métrique. De telles isométries sont des difféomorphismes qui vont générer des vecteurs de Killing qui à leurs tour généreront des champs de Killing et la condition d'isométrie de ces difféomorphismes se traduit par une équation appelée équation de Killing que la connexion considérée doit nécessairement satisfaire. En effet, soit une métrique $g_{\mu\nu}$ et un difféomorphisme φ défini sur une variété différentielle et $\{x^\mu\}$ un système de cordonnées. En définissant le Jacobien

$$\Lambda^{\overline{\mu}}{}_{\mu}\left(x\right) := \frac{\partial \varphi^{\bar{\mu}}}{\partial x^{\mu}}\left(x\right), \tag{1.57}$$

φ est une isométrie si

$$g_{\mu\nu}\left(x\right) = \left(\Lambda^{T}\right)_{\mu}{}^{\overline{\mu}}\left(x\right) g_{\overline{\mu}\overline{\nu}}\left(\varphi\left(x\right)\right) \Lambda^{\overline{\nu}}{}_{\nu}\left(x\right). \tag{1.58}$$

Si on a affaire à une isométrie locale, on peut se limiter à des transformations au voisinage de l'identité

$$\varphi\left(x\right) = x + \xi\left(x\right) + O\left(\xi^{2}\right), \tag{1.59}$$

où ξ est le champ vectoriel de Killing : $\xi^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$ et les ξ^{α} sont les composantes du vecteur de Killing. La métrique doit alors satisfaire à l'équation de Killing pour la métrique

$$\xi^{\alpha}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial \xi^{\overline{\mu}}}{\partial x^{\mu}} g_{\overline{\mu}\nu} + \frac{\partial \xi^{\overline{\nu}}}{\partial x^{\nu}} g_{\mu\overline{\nu}} = 0. \tag{1.60}$$

Imposer une telle condition uniquement à la métrique est insuffisant pour faire de φ une isométrie ; il faut également que les composantes $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\left(x\right)$ de la connexion vérifient

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\left(x\right) = \left(\Lambda^{-1T}\right)_{\overline{\lambda}}{}^{\lambda}\left(x\right) \Lambda^{\overline{\mu}}{}_{\mu}\left(x\right) \Lambda^{\overline{\nu}}{}_{\nu}\left(x\right) \Gamma^{\overline{\lambda}}{}_{\overline{\mu}\overline{\nu}}\left(\varphi\left(x\right)\right) - \left(\Lambda^{T}\right)_{\nu}{}^{\overline{\nu}}\left(x\right) \frac{\partial \left(\Lambda^{-1T}\right)_{\overline{\nu}}{}^{\lambda}\left(x\right)}{\partial x^{\mu}}. \tag{1.61}$$

Après linéarisation : $\varphi\left(x\right) = x + \xi\left(x\right) + O\left(\xi^{2}\right)$, nous obtenons l'analogue de l'équation de Killing (1.60) pour la connexion

$$\xi^{\alpha}\frac{\partial \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \xi^{\lambda}}{\partial x^{\overline{\lambda}}}\Gamma^{\overline{\lambda}}{}_{\mu\nu} + \frac{\partial \xi^{\overline{\mu}}}{\partial x^{\mu}}\Gamma^{\lambda}{}_{\overline{\mu}\nu} + \frac{\partial \xi^{\overline{\nu}}}{\partial x^{\nu}}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\overline{\nu}} + \frac{\partial^{2}\xi^{\lambda}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} = 0. \tag{1.62}$$

D'autres équations importantes en lien étroit avec la connexion, sont celles des géodésiques. Ces courbes de l'espace-temps qui ont une grande importance du fait qu'elles décrivent physiquement le mouvement d'objets en chute libre dans un champ gravitationnel conformément au principe d'équivalence ainsi que les trajectoires des photons dans l'espace-temps, quand on connait l'importance des phénomènes lumineux dans l'univers comme celui des lentilles gravitationnelles et la déviation de la lumière par des astres massifs. On peut alors se demander à quoi ressemblent ces équations quand on inclut la torsion dans le cadre de la théorie d'Einstein-Cartan ? à vrai dire on peut définir deux types de géodésiques ; celles s'apparentant au composantes $\Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu}$ de la connexion qu'on définit par transport parallèle du vecteur vitesse $\dot{x}$ pour un système de coordonnées $\{x^{\mu}\}$, qui sont données par

$$\ddot{x}^{\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = 0, \tag{1.63}$$

où la courbe de cette géodésique est paramétrée par p ; un paramètre réel par rapport auquel est définie la dérivée ($\cdot := \frac{d}{dp}$). Nous avons aussi un deuxième type de géodésiques défini en utilisant les symboles de Christoffel comme en relativité générale. Cette seconde géodésique a pour particularité de minimiser localement la longueur d'arc de la trajectoire. Il faut savoir que les deux géodésiques sont en général différentes et elles ne coïncident que pour le cas particulier où le tenseur de torsion (1.30) est complètement antisymétrique, autrement dit si la partie vectorielle et de symétrie mixte sont identiquement nulles ($V = M = 0$).

Grâce aux différentes équations que nous avons explicitées ainsi que les notions fondamentales que nous venons d'aborder succinctement dans ce chapitre, nous disposons désormais des outils mathématiques et ingrédients nécessaires permettant d'aborder le chapitre suivant.

Chapitre 2

L'espace-temps statique à symétrie sphérique dans la théorie d'Einstein-Cartan : solutions exactes et torsion comme alternative au problème de la matière sombre

La toute première solution exacte de l'histoire de la relativité générale fut celle découverte par Karl Schwarzschild en décembre 1915 publiée officiellement en janvier de l'année 1916. Elle permet de décrire la géométrie d'un espace-temps courbé par le champ gravitationnel d'une masse sphérique statique non chargée, plongée dans le vide. Une telle masse peut en réalité être celle d'un quelconque astre comme une étoile ou une planète, ce qui explique pourquoi la métrique de Schwarzschild a permis d'expliquer des phénomènes astrophysiques dans l'univers comme certains trous noirs bien décrits par cette solution qui à juste titre se généralise quand la constante cosmologique est prise en compte ; on parle alors de solution de Kottler. Rien que par curiosité mathématique et pour la grande importance physique de la solution de Kottler et éventuellement celle de Schwarzschild quand pour une raison ou pour une autre on néglige la constante cosmologique ; nous sommes très tentés de reconsidérer ces solutions dans un contexte plus général que celui de la relativité générale, c'est-à-dire celui de la théorie d'Einstein-Cartan. Toutefois, il existe un motif plus ambitieux qu'une simple curiosité ou des raisons purement mathématiques. En effet il faut savoir que quand on parle de la solution de Schwarzschild ou de Kottler, on fait souvent référence à la solution extérieure qui décrit l'espace-temps en dehors de la distribution de masse, or il existe également une solution intérieure permettant de décrire l'espace-temps à l'intérieur de la distribution de masse. Cette solution exacte des équations d'Einstein a été découverte il y'a quelques années par stuchlik [25], Boehmer [26] et Schüker [27] de manière indépendante. L'intérêt physique de cette solution intérieure notamment quand il s'agit de la considérer pour la théorie d'Einstein-Cartan réside dans le fait qu'elle permet d'évaluer la masse totale interne de l'objet en question pour pouvoir la comparer à la masse externe du même objet ; obtenue grâce à la solution extérieur. Il a été prouvé [13] que contrairement à la relativité générale, on n'a pas forcément une égalité entre la masse interne et la masse externe quand la torsion est prise en considération. Ce résultat est très pertinent car la différence des deux masses est susceptible d'apporter une explication rationnelle au problème de la matière sombre dans l'univers, et la théorie d'Einstein-Cartan serait par voie de conséquence la candidate potentielle pour remédier définitivement au problème de l'énergie sombre dans l'univers, ce qui représente un enjeu de taille. Notre contribution dans ce contexte consiste à confirmer les résultats numériques de l'article [13] par l'obtention de résultats exactes. Nous montrons que lorsque on considère une distribution de mase statique et à symétrie sphérique, dans la théorie d'Einstein-Cartan, il est possible d'obtenir des solutions exactes. A la place des résultats approximatifs nous serons en mesure d'obtenir des expressions exactes de la masse interne et externe, en faveur de l'idée de la torsion comme alternative au problème d'énergie sombre. Tel sera l'objectif principal de ce chapitre.

2.1 Forme générale d'une métrique statique à symétrie sphérique

En raison de la symétrie sphérique, la métrique décrivant l'espace-temps courbé par le champ gravitationnel d'une distribution de masse à symétrie sphérique, est une métrique invariante sous les rotations spatiales. Par conséquent la façon la plus naturelle de retrouver la métrique de Kottler (métrique de Schwarzschild, quand la constante cosmologique est négligée) serait de chercher la forme la plus générale d'une métrique invariante sous les rotations, lui imposer ensuite les équations d'Einstein du vide et retrouver systématiquement la solution de Kottler. Grâce aux champs vectoriels générés par les vecteurs de Killing il n'est pas très compliqué d'obtenir la forme la plus générale d'une métrique invariante sous une transformation continue donnée : $x^{\mu} \to x^{'\mu}$. Il suffit juste de considérer la forme infinitésimale de cette transformation : $x^{\mu} \to x^{'\mu} = x^{\mu} + \epsilon\xi^{\mu}(x)$, ($\epsilon$ paramètre infinitésimal) pour en déduire les vecteurs de Killing $\xi^{\mu}(x)$ et les champs de Killing $\xi^{\mu}(x)\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$. Pour une métrique symétrique sous une transformation donnée, il suffit juste d'imposer l'équation de Killing (1.60) correspondante pour aboutir à la forme générale d'une telle métrique. Puisque il en est ainsi, cherchons à déterminer la forme la plus générale d'une métrique à symétrie sphérique par ce procédé. En cordonnées cartésiennes (ct, x, y, z), (c est la vitesse de la lumière), une rotation d'un angle α autour de l'axe (ox) s'exprime

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ x^{'} &= x, \\ y^{'} &= \cos\alpha y - \sin\alpha z, \\ z^{'} &= \sin\alpha y + \cos\alpha z. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Une rotation d'un angle α autour de l'axe (oy) est donnée par

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ x^{'} &= \cos\alpha x + \sin\alpha z, \\ y^{'} &= y, \\ z^{'} &= -\sin\alpha x + \cos\alpha z, \end{aligned} \tag{2.2}$$

et pour la rotation d'angle α autour de l'axe (oz) on a

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ x^{'} &= \cos\alpha x - \sin\alpha y, \\ y^{'} &= \sin\alpha x + \cos\alpha y, \\ z^{'} &= z. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Si par contre ces rotations étaient infinitésimales d'angles $|\delta\alpha| << 1$, la rotation autour de (ox) s'écrit

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ x^{'} &= x, \\ y^{'} &= y - \delta\alpha z, \\ z^{'} &= z + \delta\alpha y, \end{aligned} \tag{2.4}$$

une rotation infinitésimale d'angle $|\delta\alpha| << 1$ autour de (oy) est donnée par

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x^{'} &= x + \delta\alpha z \\ y^{'} &= y \\ z^{'} &= z - \delta\alpha x, \end{aligned} \tag{2.5}$$

et pour une rotation infinitésimale $|\delta\alpha| << 1$ d'un angles autour de (oz) on a

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ x^{'} &= x - \delta\alpha y, \\ y^{'} &= y + \delta\alpha x, \\ z^{'} &= z. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Nous déduisons alors les vecteurs de Killing associés respectivement à ces trois rotations

$$\begin{aligned}
\xi^0 &= 0,\ \xi^1 = 0,\ \xi^2 = -z,\ \xi^3 = y, \qquad (2.7)\\
\xi^0 &= 0,\ \xi^1 = z,\ \xi^2 = 0,\ \xi^3 = -x,\\
\xi^0 &= 0,\ \xi^1 = -y,\ \xi^2 = x,\ \xi^3 = 0,
\end{aligned}$$

ainsi que leurs champs de Killing respectifs

$$\begin{aligned}
&y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, \qquad (2.8)\\
&z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z},\\
&x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Les coordonnées sphériques (ct, r, θ, φ) sont certainement les coordonnées les plus adaptées à la symétrique sphérique. Si en revanche nous venons d'employer à leurs places des coordonnées cartésiennes, c'est juste parce que le fait d'exprimer une rotation infinitésimale pour déduire les champs et vecteurs de Killing est une tâche beaucoup plus simple en coordonnées cartésiennes qu'en cordonnées sphériques. Mis à part cela le reste du calcul est au contraire plus simple en coordonnées sphériques, dû à la symétrie sphérique, et le mieux qu'on puisse faire serait de basculer en coordonnées sphériques. Connaissant la relation reliant les coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques

$$\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\varphi, \qquad (2.9)\\
y &= r\sin\theta\sin\varphi,\\
z &= r\cos\varphi,
\end{aligned}$$

on peut alors en déduire

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \\
\frac{\partial}{\partial z} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}.
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

Compte tenu de (2.9), (2.10), on déduit les expressions des champs vectoriels de Killing (2.8) en coordonnées sphériques, pour les rotations autour des axes (ox), (oy), (oz), qui sont données respectivement par

$$
\begin{aligned}
&-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\cos\varphi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}, \\
&\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\sin\varphi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}, \\
&\frac{\partial}{\partial\varphi},
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

et les vecteurs de Killing correspondant à ces trois rotations sont

$$
\begin{aligned}
\xi^0 &= \xi^1=0,\ \xi^2=-\sin\varphi,\ \xi^3=-\cos\varphi\cot\theta, \\
\xi^0 &= \xi^1=0,\ \xi^2=\cos\varphi,\ \xi^3=-\sin\varphi\cot\theta, \\
\xi^0 &= \xi^1=\ \xi^2=0,\ \xi^3=1.
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

En imposant l'invariance de la métrique sous les rotations autour de l'axe (oz), la condition (1.60) implique

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial\varphi}=0, \tag{2.13}$$

autrement dit les composantes du tenseur métrique sont indépendantes de φ. En tenant compte de ce résultat et en imposant l'invariance sous les rotations autour de l'axe (oy) ; la condition (1.60) s'écrit

$$\cos\varphi\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial\theta}+\frac{\partial\xi^2}{\partial x^\mu}g_{2\nu}+\frac{\partial\xi^3}{\partial x^\mu}g_{3\nu}+\frac{\partial\xi^2}{\partial x^\nu}g_{\mu2}+\frac{\partial\xi^3}{\partial x^\nu}g_{\mu3}=0, \tag{2.14}$$

ceci implique que les seules composantes non nulles du tenseur métrique sont : $g_{00} = F(t,r)$, $g_{01} = g_{10} = G(t,r)$, $g_{11} = H(t,r)$, $g_{22} = r^2 Q(t,r)$, $g_{33} = r^2 \sin^2(\theta) Q(t,r)$, où F, G, H, Q, sont des fonctions arbitraires ne dépendant que du temps et de la coordonnée r. Si de plus on veut que cette métrique soit statique il faut également imposer l'invariance sous les translations temporelles qui impliquent que toutes les composantes du tenseur métrique doivent être indépendantes du temps ; la métrique est donc donnée par

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= F(r)\, dt^2 + H(r)\, dr^2 + 2G(r)\, dtdr + r^2 Q(r)\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta Q(r)\, d\varphi^2, \end{aligned} \tag{2.15}$$

qu'on peut également écrire sous forme matricielle

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F(r) & G(r) & 0 & 0 \\ G(r) & H(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 Q(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta Q(r) \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

Il est certainement plus commode de diagonaliser cette matrice, ce qui peut facilement se faire grâce à un choix judicieux du système de coordonnées. En effet, en effectuant un changement de la variable temporelle

$$t = t' + w(r), \tag{2.17}$$

où $w(r)$ est une fonction arbitraire de r ; on obtient

$$\begin{aligned} ds^2 &= F(r)\, dt'^2 + \left[F(r)\left(\frac{dw}{dr}\right)^2 + 2G(r)\frac{dw}{dr} + H(r)\right] dr^2 \\ & \quad 2\left[F(r)\frac{dw}{dr} + G(r)\right] dt' dr + r^2 Q(r)\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta Q(r)\, d\varphi^2. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Il est clair que le terme en $dt' dr$ doit s'annuler si on veut que la métrique soit diagonale, nous aurons donc à imposer la condition

$$F(r)\frac{dw}{dr} + G(r) = 0, \tag{2.19}$$

à la fonction $w\left(r\right)$ qui n'est désormais plus arbitraire, mais de la forme

$$w\left(r\right)=-\int\frac{G\left(r\right)}{F\left(r\right)}dr, \tag{2.20}$$

obtenue après intégration de (2.19) ; Par conséquent (2.18) s'écrit

$$ds^2=F\left(r\right)dt^{'2}+\left(-\frac{G^2\left(r\right)}{F\left(r\right)}+H\left(r\right)\right)dr^2+r^2Q\left(r\right)d\theta^2+r^2\sin^2\theta Q\left(r\right)d\varphi^2. \tag{2.21}$$

Si on adopte la signature $(+---)$ pour le tenseur métrique ; la fonction $F\left(r\right)$ doit être définie positive tandis que les fonctions $-\frac{G^2(r)}{F(r)}+H\left(r\right)$, $Q\left(r\right)$ doivent être définies négatives. On peut simplifier davantage l'expression de la métrique en effectuant pour la coordonnée radiale r, le changement de variable suivant

$$r^{'}=r\sqrt{-Q\left(r\right)}. \tag{2.22}$$

Ainsi si on exprime r en terme de r' : $r\left(r^{'}\right)$, et si on introduit les fonctions positives $A\left(r^{'}\right)$, $B\left(r^{'}\right)$ définies par

$$\begin{aligned}A\left(r^{'}\right) &:= \frac{G^2\left[r\left(r^{'}\right)\right]}{F\left[r\left(r^{'}\right)\right]}-H\left[r\left(r^{'}\right)\right],\\ B\left(r^{'}\right) &:= F\left[r\left(r^{'}\right)\right].\end{aligned} \tag{2.23}$$

Pour simplifier les notations, on réappellera t', t et $r^{'}$, r. On obtient alors la forme la plus générale d'un métrique statique à symétrie sphérique

$$ds^2=B\left(r\right)dt^2-A\left(r\right)dr^2-r^2\left[d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right], \tag{2.24}$$

qui s'écrit sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} B\left(r\right) & 0 & 0 & 0\\ 0 & -A\left(r\right) & 0 & 0\\ 0 & 0 & -r^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{2.25}$$

2.2 Métriques de Kottler et de Schwarzschild en relativité générale

La métrique de Kottler également connue sous le nom de métrique de Schwarzschild-de Sitter, décrit comme nous l'avons souligné, l'espace-temps lorsqu'on a affaire à une distribution de masse statique à symétrie sphérique. Ici nous nous intéressons à la solution du vide en dehors de la distribution de masse. En raison donc de cette symétrie sphérique on sait d'emblé qu'elle ne peut avoir une autre forme que celle donnée par (2.24). Cependant parmi toutes les métriques ayant cette forme, on peut se poser la question de savoir laquelle peut physiquement décrire un tel espace-temps ? Autrement dit, quelle serait la condition à imposer à cette métrique pour obtenir les expressions exactes des fonctions $A\left(r\right)$ et $B\left(r\right)$? Si on se place dans le cadre de la relativité générale ceci revient à résoudre les équations d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \left(\frac{1}{2}R - \Lambda\right) g_{\mu\nu} = 0, \tag{2.26}$$

où le second membre sensé représenter la matière décrite par le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$, est nul. Si on prend la trace de ces équations, on obtient $R = 4\Lambda$. La substitution dans (2.26) de R par 4Λ permet de simplifier davantage la forme des équations d'Einstein dans le vide qui s'écrivent

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}. \tag{2.27}$$

Ainsi nous serons certains après résolution des équations d'Einstein dans le vide, que la métrique obtenue est physiquement acceptable du point de vue de la relativité générale. Maintenant, pour résoudre les équations d'Einstein du vide, nous devons connaitre les différentes composantes du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$. Comme celui-ci n'est autre que la contraction $R^{\sigma}{}_{\mu\sigma\nu}$ du tenseur de courbure $R^{\lambda}_{\mu\sigma\nu}$; nous devons d'abord connaitre les différentes composantes du tenseur de courbure, à savoir

$$R_{\lambda\mu\sigma\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\sigma}\right) + g_{\theta\rho}\left(\Gamma^{\theta}{}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\theta}{}_{\lambda\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma}\right), \tag{2.28}$$

obtenues donc sous la forme complètement covariante, grâce à la connaissance des symboles de Christoffel donnés par

$$\Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\partial_{\mu} g_{\rho\nu} + \partial_{\nu} g_{\rho\mu} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu} \right), \tag{2.29}$$

dont les éléments non nuls compte tenu de la forme générale de la métrique (2.24), sont

$$\begin{aligned}
\Gamma^{0}_{\ 01} &= \Gamma^{0}_{\ 10} = \frac{B'(r)}{2B(r)}, \\
\Gamma^{1}_{\ 00} &= \frac{B'(r)}{2A(r)},\ \Gamma^{1}_{\ 11} = \frac{A'(r)}{2A(r)},\ \Gamma^{1}_{\ 22} = -\frac{r}{A(r)},\ \Gamma^{1}_{\ 33} = -\frac{r}{A(r)} \sin\theta, \\
\Gamma^{2}_{\ 12} &= \Gamma^{2}_{\ 21} = \frac{1}{r},\ \Gamma^{2}_{\ 33} = -\sin\theta\cos\theta, \\
\Gamma^{3}_{\ 13} &= \Gamma^{3}_{\ 31} = \frac{1}{r},\ \Gamma^{3}_{\ 23} = \Gamma^{3}_{\ 32} = \cot\theta,
\end{aligned} \tag{2.30}$$

et qui permettent donc de déduire les composantes non nulles du tenseur de Ricci, à savoir

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -\frac{B''(r)}{2A(r)} + \frac{B'(r)}{4A(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{B'(r)}{rA(r)}, \\
R_{11} &= \frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{B'(r)}{4B(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{A'(r)}{rA(r)} \\
R_{22} &= -1 + \frac{r}{2A(r)} \left(-\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) + \frac{1}{A(r)}, \\
R_{33} &= \sin^2\theta \left[-1 + \frac{r}{2A(r)} \left(-\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) + \frac{1}{A(r)} \right].
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Compte tenu de (2.24), (2.27), (2.31), on obtient le système d'équations différentielles

$$-\frac{B''(r)}{2A(r)} + \frac{B'(r)}{4A(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{B'(r)}{rA(r)} = \Lambda B(r), \tag{2.32}$$

$$\frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{B'(r)}{4B(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{A'(r)}{rA(r)} = -\Lambda A(r), \tag{2.33}$$

$$-1 + \frac{r}{2A(r)} \left(-\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) + \frac{1}{A(r)} = -\Lambda r^2, \tag{2.34}$$

$$\sin^2\theta\left[-1+\frac{r}{2A(r)}\left(-\frac{A'(r)}{A(r)}+\frac{B'(r)}{B(r)}\right)+\frac{1}{A(r)}\right]=-\Lambda r^2\sin^2\theta, \tag{2.35}$$

dont la résolution permet de déterminer l'expression de $A(r)$ et de $B(r)$. En effet en combinant les équations (2.32) et (2.33), on obtient

$$A'(r)\,B(r)+A(r)\,B'(r)=0\Rightarrow A(r)\,B(r)=C, \tag{2.36}$$

où C est une constante d'intégration. On peut alors éliminer la fonction $A(r)$ de l'équation (2.34) en substituant $\frac{C}{B(r)}$ à $A(r)$, pour aboutir à

$$\frac{d}{dr}\left[rB(r)\right]=C\left(1-\Lambda r^2\right), \tag{2.37}$$

qui après intégration donne

$$B(r)=C\left(1-\frac{\Lambda}{3}r^2+\frac{C'}{r}\right), \tag{2.38}$$

où C' est une autre constante d'intégration. Afin de déterminer les valeurs des constantes d'intégration, considérons le cas particulier où la constante cosmologique est nulle ($\Lambda=0$). Dans ce cas, le second membre des équations d'Einstein (2.32), (2.33), (2.34), (2.35) s'annule, et en suivant le même raisonnement on obtient la forme générale des fonctions $A(r)$ et $B(r)$, respectivement. $A(r)=\frac{\overline{C}}{B(r)}$, et $B(r)=\overline{C}\left(1+\frac{\overline{C}'}{r}\right)$ où $\overline{C}$ et $\overline{C}'$, sont deux constantes d'intégration. Comme il n'existe aucune masse autre que la distribution de masse statique à symétrie sphérique qui occupe une région limitée de l'espace, le champ gravitationnel est négligeable à l'infini. Or l'absence de gravitation et de constante cosmologique est synonyme d'absence de courbure ; la métrique doit être asymptotiquement plate, c'est-à-dire tendre vers celle de Minkowski quand r tend vers l'infini,

$$B(r)\underset{r\to+\infty}{\longrightarrow}1,\;\; A(r)\underset{r\to+\infty}{\longrightarrow}1. \tag{2.39}$$

On en déduit alors que $\overline{C}=1$ et

$$A(r)=\frac{1}{B(r)}. \tag{2.40}$$

Vu que la relativité générale doit se réduire à la théorie newtonienne pour un champ gravitationnel faible, la composante g_{00} du tenseur métrique doit être de la forme $g_{00}=1+2\phi(r)$, où

$\phi(r)$ est le potentiel gravitationnel de Newton donnée par

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r}, \tag{2.41}$$

pour une distribution de matière sphérique de masse totale M, où G n'est autre la constante universelle de gravitation. Ainsi $\overline{C}'$ doit nécessairement prendre la valeur $-2GM$, ce qui détermine complètement les solutions $B(r)$, $A(r)$ données par

$$B(r) = 1 - \frac{2GM}{r}, \;\; A(r) = \frac{1}{B(r)}. \tag{2.42}$$

Une métrique de la forme (2.24) telle que $B(r)$ et $A(r)$ sont données par (2.42), s'appelle : métrique de Schwarzschild qui comme nous l'avons souligné fut la toute première solution de l'histoire de la relativité générale portant le nom du physicien Karl Schwarzschild le premier à la découvrir. C'est également l'unique solution des équations du vide de la relativité générale dans le cas d'une distribution de masse statique à symétrie sphérique selon le théorème de Birkhoff. Comme la solution de Kottler n'est qu'une généralisation de celle de Schwarzschild lorsqu'on tient compte de la constante cosmologique, on doit donc pouvoir retrouver la solution de Schwarzschild, à partir de celle de Kottler quand on fait tendre Λ vers zéro, en prenant la précaution de savoir que contrairement à la métrique de Schwarzschild, celle de Kottler ne peut pas être asymptotiquement plate en raison de l'influence de la constante cosmologique qui agit sur tout l'espace-temps y compris à l'infini. Par conséquent quand il s'agit de la métrique de Kottler, il n'y a aucune raison pour que les fonctions $A(r)$ et $B(r)$ tendent vers un à l'infini, et on ne peut en aucun cas utiliser cette condition aux limites pour fixer la constante C, comme nous l'avons fait pour la solution de Schwarzschild. Neanmoins dans le cas de Kottler, on peut utiliser comme condition pour fixer les constantes C et C' une approximation de la fonction $B(r)$ au voisinage de zéro pour l'identifier à la solution de Schwarzschild ; ainsi quand r est suffisamment petit, on voit bien de (2.38) que

$$B(r) \simeq C\left(1 + \frac{C'}{r}\right). \tag{2.43}$$

En comparant alors (2.42) à (2.43) on déduit que $C=1$ et $C^{'}=-2GM$. Il en résulte que la solution de Kottler est la métrique (2.24) avec

$$B\left(r\right)=1-\frac{2GM}{r}-\frac{\Lambda}{3}r^{2},\ A\left(r\right)=\frac{1}{B\left(r\right)}, \tag{2.44}$$

qui tend clairement vers la métrique de Schwarzschild quand Λ tend vers zéro sans qu'elle soit nécessairement asymptotiquement plate.

2.3 Solution statique à symétrie sphérique en théorie d'Einstein-Cartan

Etant donnée que la théorie d'Einstein-Cartan généralise la relativité générale, en prenant en considération la torsion de l'espace-temps, il existe une nécessaire généralisation de la métrique de Kotller (Schwarzschild si la constante cosmologique est nulle), quand la torsion n'est pas nulle. Le but principal consiste à obtenir cette métrique en suivant les démarches naturelles conduisant à sa détermination ; ce qui revient à suivre un certain nombre d'étapes consécutives se traduisant par des contraintes mathématiques à la fois sur la métrique et la connexion comme la théorie d'Einstein-Cartan l'exige. En plus de la forme standard d'une métrique statique à symétrie sphérique qui comme nous venons de le montrer a été obtenue en imposant l'invariance de la métrique sous les rotations et les translations temporelles par la méthode de Killing ; il faut aussi obtenir par la même procédure et dans les mêmes conditions d'invariance sous les rotations et translations temporelles, la forme la plus générale des composantes de la connexion. Compte tenu de (1.62), l'unique connaissance des vecteurs et champs de Killing, suffit pour déterminer d'abord, la forme générale des composantes $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ de la connexion par rapport au repère holonome, qui doivent également satisfaire la condition de métricité (1.56) dans une première étape. Puis les composantes $\omega^{a}{}_{b\mu}$ de la connexion par rapport au repère orthonormé dans une seconde étape, après avoir déterminé la matrice $e^{a}{}_{\mu}$ qui comme nous l'avons vu au chapitre 1, établit le lien entre la base orthonormée et la base holonome. Nous pouvons alors écrire les composantes $\omega^{a}{}_{b\mu}$ en terme des composantes $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ que nous avons obtenu dans la première étape. La connaissance des composantes $\omega^{a}{}_{b\mu}$ de la connexion est primordiale. Elle permet d'une part de calculer le tenseur de courbure à partir duquel on déduit le tenseur de

Ricci et le scalaire de courbure. D'autre part, on sera aussi en mesure de calculer le tenseur de torsion sous sa forme complètement antisymétrique et de le décomposer en parties irréductibles pour pouvoir finalement écrire les équations d'Einstein et celles de Cartan, C'est la résolution combinée des équations d'Einstein et de Cartan qui déterminera la solution statique à symétrie sphérique dans le cadre de la théorie d'Einstein-Cartan, comme nous allons le montrer.

2.3.1 Forme générale de la connexion dans l'espace-temps statique à symétrie sphérique

En relativité générale nous avons vu que pour une distribution de masse statique à symétrie sphérique, la métrique décrivant l'espace-temps doit être invariante sous les rotations et les translations temporelles. Grâce à la méthode de Killing nous avons pu déterminer la forme générale d'une telle métrique, en appliquant la condition (1.60). Dans la théorie d'Einstein-Cartan nous avons en plus de la métrique, la connexion comme variable indépendante. Nous aurons donc besoin de l'analogue de la condition (1.60) pour la connexion qui n'est autre que la condition (1.62) donnée dans le cas général d'une transformation continue quelconque, à imposer aux composantes de la connexion par rapport au repère holonome. En imposant l'invariance sous les rotations et les translations temporelles ainsi que la condition de métricité (1.56) en tenant compte des vecteurs et champs de Killing (2.7), (2.8), de la forme de la métrique (2.24), nous déduisons après intégration des équations différentielles obtenues, la forme générale des composantes de la connexion par rapport au repère holonome pour l'espace-temps statique à symétrie sphérique avec torsion, dont les éléments non nuls sont donnés par

$$\begin{aligned}
\Gamma^{0}{}_{01} &= \frac{B^{'}(r)}{2B(r)},\ \Gamma^{0}{}_{10}=\frac{A(r)}{B(r)}D_0(r),\ \Gamma^{0}{}_{11}=\frac{A(r)}{B(r)}D_1(r), \\
\Gamma^{0}{}_{22} &= \frac{r^2}{B(r)}C_0(r),\ \Gamma^{0}{}_{23}=-\Gamma^{0}{}_{32}=\frac{r^2}{B(r)}G_0(r)\sin\theta, \\
\Gamma^{0}{}_{33} &= \frac{r^2}{B(r)}C_0(r)\sin^2\theta,\ \Gamma^{1}{}_{00}=D_0(r), \\
\Gamma^{1}{}_{01} &= D_1(r),\ \Gamma^{1}{}_{11}=\frac{A^{'}(r)}{2A(r)},\ \Gamma^{1}{}_{22}=\frac{-r^2}{A(r)}C_1(r), \\
\Gamma^{1}{}_{32} &= -\Gamma^{1}{}_{23}=\frac{r^2}{A(r)}G_1(r)\sin\theta,\ \Gamma^{1}{}_{33}=-\frac{r^2}{A(r)}C_1(r)\sin^2\theta, \\
\Gamma^{2}{}_{02} &= \Gamma^{3}{}_{03}=C_0(r),\ \Gamma^{2}{}_{03}=G_0(r)\sin\theta, \\
\Gamma^{2}{}_{12} &= \Gamma^{3}{}_{13}=C_1(r),\ \Gamma^{2}{}_{13}=G_1(r)\sin\theta, \\
\Gamma^{2}{}_{21} &= \Gamma^{3}{}_{31}=\frac{1}{r},\ \Gamma^{2}{}_{30}=-Z_0(r)\sin\theta, \\
\Gamma^{2}{}_{31} &= -Z_1(r)\sin\theta,\ \Gamma^{2}{}_{33}=-\sin\theta\cos\theta, \\
\Gamma^{2}{}_{30} &= -Z_0(r)\sin\theta,\ \Gamma^{3}{}_{02}=-\frac{G_0(r)}{\sin\theta},\ \Gamma^{3}{}_{12}=-\frac{G_1(r)}{\sin\theta}, \\
\Gamma^{3}{}_{20} &= \frac{Z_0(r)}{\sin\theta},\ \Gamma^{3}{}_{21}=\frac{Z_1(r)}{\sin\theta},\ \Gamma^{3}{}_{23}=\ \Gamma^{3}{}_{32}=\cot\theta.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Tout comme $A(r)$ et $B(r)$; $C_0(r)$, $C_1(r)$, $D_0(r)$, $D_1(r)$, $G_0(r)$, $G_1(r)$, $Z_0(r)$, $Z_1(r)$ sont des fonctions ne dépendant que de la coordonnée r, dont les expressions seront fixées par la suite, et l'indice prime, exprime la dérivée de la fonction considérée par rapport à r $\left({}^{'}:=\frac{d}{dr}\right)$. Pour déduire les composantes de la même connexion par rapport au repère orthonormé ; il faut connaitre la matrice associée au passage du repère holonome au repère orthonormé et son inverse. D'après (1.3), (1.4), (1.5),

$$g_{\mu\nu}=e^{a}{}_{\mu}e^{b}{}_{\nu}\eta_{ab}, \tag{2.46}$$

d'où

$$(e)^{a}{}_{\mu}=\begin{pmatrix} \sqrt{B(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{A(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r\sin\theta \end{pmatrix}, \tag{2.47}$$

et

$$\left(e^{-1}\right)^{\mu}_{\ a}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{B(r)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{A(r)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r\sin\theta} \end{pmatrix}. \tag{2.48}$$

Ainsi compte tenu de (1.9), la forme générale des composantes non nulles $\omega^{a}_{\ b\mu}$de la connexion est donnée par

$$\begin{aligned}
\omega^{0}_{\ 10} &= \omega^{1}_{\ 00}=\sqrt{\frac{A\left(r\right)}{B\left(r\right)}}D_{0}\left(r\right),\ \omega^{0}_{\ 11}=\omega^{1}_{\ 01}=\sqrt{\frac{A\left(r\right)}{B\left(r\right)}}D_{1}\left(r\right), \qquad (2.49)\\
\omega^{0}_{\ 22} &= \frac{rC_{0}\left(r\right)}{\sqrt{B\left(r\right)}},\ \omega^{0}_{\ 23}=\omega^{2}_{\ 03}=\frac{rG_{0}\left(r\right)}{\sqrt{B\left(r\right)}}\sin\theta,\\
\omega^{0}_{\ 32} &= \omega^{3}_{\ 02}=-\frac{rG_{0}\left(r\right)}{\sqrt{B\left(r\right)}},\ \omega^{0}_{\ 33}=\omega^{3}_{\ 03}=\frac{rC_{0}\left(r\right)}{\sqrt{B\left(r\right)}}\sin\theta,\\
\omega^{1}_{\ 32} &= -\omega^{3}_{\ 12}=\frac{rG_{1}\left(r\right)}{\sqrt{A\left(r\right)}},\ \omega^{2}_{\ 02}=\frac{rC_{0}\left(r\right)}{\sqrt{B\left(r\right)}},\\
\omega^{1}_{\ 22} &= -\omega^{2}_{\ 12}=-\frac{rC_{1}\left(r\right)}{\sqrt{A\left(r\right)}},\ \omega^{2}_{\ 13}=-\omega^{1}_{\ 23}=\frac{rG_{1}\left(r\right)}{\sqrt{A\left(r\right)}}\sin\theta,\\
\omega^{3}_{\ 13} &= -\ \omega^{1}_{\ 33}=\frac{rC_{1}\left(r\right)}{\sqrt{A\left(r\right)}}\sin\theta,\ \omega^{3}_{\ 20}=-\omega^{2}_{\ 30}=Z_{0}\left(r\right),\\
\omega^{3}_{\ 21} &= -\omega^{2}_{\ 31}=Z_{1}\left(r\right),\ \omega^{3}_{\ 23}=-\omega^{2}_{\ 33}=\cos\theta.
\end{aligned}$$

2.3.2 Tenseur de courbure, de Ricci et scalaire de courbure

Nous avons vu au chapitre 1 que la connaissance des composantes $\omega^{a}_{\ b\mu}$de la connexion permet de calculer les composantes du tenseur de courbure grâce à la relation (1.28). Compte tenu de cette dernière et de (1.24), les composantes indépendantes non nulles $R^{a}_{\ bcd}$ sont données par,

$$
\begin{aligned}
R^{0}{}_{110} &= \frac{\left(\sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}}D_0\left(r\right)\right)'}{\sqrt{A\left(r\right)B\left(r\right)}}, \\
R^{0}{}_{123} &= \frac{2\left[C_0\left(r\right)G_1\left(r\right)-C_1\left(r\right)G_0\left(r\right)\right]}{\sqrt{A\left(r\right)B\left(r\right)}}, \\
R^{0}{}_{202} &= \frac{\left[Z_0\left(r\right)G_0\left(r\right)-C_1\left(r\right)D_0\left(r\right)\right]}{B\left(r\right)}, \\
R^{0}{}_{203} &= -\frac{\left[D_0\left(r\right)G_1\left(r\right)+C_0\left(r\right)Z_0\left(r\right)\right]}{B\left(r\right)}, \\
R^{0}{}_{212} &= \frac{\left(\frac{rC_0(r)}{\sqrt{B(r)}}\right)'}{r\sqrt{A\left(r\right)}}-\frac{C_1\left(r\right)D_1\left(r\right)-G_0\left(r\right)Z_1\left(r\right)}{\sqrt{A\left(r\right)B\left(r\right)}}, \\
R^{0}{}_{213} &= \frac{\left(\frac{rG_0(r)}{\sqrt{B(r)}}\right)'}{r\sqrt{A\left(r\right)}}-\frac{D_1\left(r\right)G_1\left(r\right)+C_0\left(r\right)Z_1\left(r\right)}{\sqrt{A\left(r\right)B\left(r\right)}}, \\
R^{1}{}_{202} &= \frac{1}{B\left(r\right)}\sqrt{\frac{A\left(r\right)}{B\left(r\right)}}D_0\left(r\right)C_0\left(r\right)-\frac{Z_0\left(r\right)G_1\left(r\right)}{\sqrt{A\left(r\right)B\left(r\right)}}, \\
R^{1}{}_{203} &= \frac{1}{B\left(r\right)}\sqrt{\frac{A\left(r\right)}{B\left(r\right)}}D_0\left(r\right)G_0\left(r\right)+\frac{Z_0\left(r\right)C_1\left(r\right)}{\sqrt{A\left(r\right)B\left(r\right)}}, \\
R^{1}{}_{212} &= -\frac{\left(\frac{rC_1(r)}{\sqrt{A(r)}}\right)'}{r\sqrt{A\left(r\right)}}+\frac{D_1\left(r\right)C_0\left(r\right)}{B\left(r\right)}-\frac{Z_1\left(r\right)G_1\left(r\right)}{A\left(r\right)}, \\
R^{1}{}_{213} &= -\frac{\left(\frac{rG_1(r)}{\sqrt{A(r)}}\right)'}{r\sqrt{A\left(r\right)}}+\frac{D_1\left(r\right)G_0\left(r\right)}{B\left(r\right)}+\frac{Z_1\left(r\right)C_1\left(r\right)}{A\left(r\right)}, \\
R^{2}{}_{301} &= \frac{Z_1'\left(r\right)}{\sqrt{A\left(r\right)B\left(r\right)}}, \\
R^{2}{}_{323} &= \frac{1}{r^2}+\frac{C_0^2\left(r\right)+G_0^2\left(r\right)}{B\left(r\right)}-\frac{G_1^2\left(r\right)+C_1^2\left(r\right)}{A\left(r\right)}.
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

On peut alors par contraction du tenseur de courbure (1.46), déduire les composantes non nulles du tenseur de Ricci ; qui sont données par

$$
\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{\left(\sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}}D_0\left(r\right)\right)^{'}}{\sqrt{A\left(r\right)B\left(r\right)}} + \frac{2\left[D_0\left(r\right)C_1\left(r\right)+G_0\left(r\right)Z_0\left(r\right)\right]}{B\left(r\right)}, \qquad (2.51)\\
R_{01} &= 2\left[-\frac{\left(\frac{rC_0(r)}{\sqrt{B(r)}}\right)^{'}}{r\sqrt{A\left(r\right)}} + \frac{D_1\left(r\right)C_1\left(r\right)-G_0\left(r\right)Z_1\left(r\right)}{\sqrt{A\left(r\right)B\left(r\right)}}\right],\\
R_{10} &= 2\sqrt{\frac{A\left(r\right)}{B\left(r\right)}}\left(\frac{D_0\left(r\right)C_0\left(r\right)}{B\left(r\right)}-\frac{Z_0\left(r\right)G_1\left(r\right)}{A\left(r\right)}\right),\\
R_{11} &= -\frac{\left(\sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}}D_0\left(r\right)\right)^{'}}{\sqrt{A\left(r\right)B\left(r\right)}} - 2\left[\frac{\left(\frac{rC_1(r)}{\sqrt{A(r)}}\right)^{'}}{r\sqrt{A\left(r\right)}} - \frac{D_1\left(r\right)C_0\left(r\right)}{B\left(r\right)} + \frac{Z_1\left(r\right)G_1\left(r\right)}{A\left(r\right)}\right],\\
R_{22} &= R_{33} = -\frac{\left(\frac{rC_1(r)}{\sqrt{A(r)}}\right)^{'}}{r\sqrt{A\left(r\right)}} - \frac{G_1\left(r\right)Z_1\left(r\right)+G_1^2\left(r\right)+C_1^2\left(r\right)}{A\left(r\right)}\\
&\quad + \frac{G_0\left(r\right)Z_0\left(r\right)-D_0\left(r\right)C_1\left(r\right)+D_1\left(r\right)C_0\left(r\right)+G_0^2\left(r\right)+C_0^2\left(r\right)}{B\left(r\right)}\\
&\quad + \frac{1}{r^2},\\
R_{23} &= -R_{32}\\
&= -\frac{\left(\frac{rG_1(r)}{\sqrt{A(r)}}\right)^{'}}{r\sqrt{A\left(r\right)}} - \frac{G_1\left(r\right)D_0\left(r\right)+Z_0\left(r\right)C_0\left(r\right)-D_1\left(r\right)G_0\left(r\right)}{B\left(r\right)}\\
&\quad + \frac{Z_1\left(r\right)C_1\left(r\right)}{A\left(r\right)},
\end{aligned}
$$

ainsi que le scalaire de courbure

$$
\begin{aligned}
R &= \eta^{ab} R_{ab} \qquad (2.52)\\
&= R_{00} - R_{11} - R_{22} - R_{33}\\
&\quad 2\left[\frac{\left(\sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}}D_0\left(r\right)\right)^{'}}{\sqrt{A\left(r\right)B\left(r\right)}} + \frac{2\left(\frac{rC_1(r)}{\sqrt{A(r)}}\right)^{'}}{r\sqrt{A\left(r\right)}}\right.\\
&\quad + \frac{2\left(D_0\left(r\right)C_1\left(r\right) - Z_0\left(r\right)G_0\left(r\right) - D_1\left(r\right)C_0\left(r\right)\right) - G_0^2\left(r\right) - C_0^2\left(r\right)}{B\left(r\right)}\\
&\quad \left. + \frac{2Z_1\left(r\right)G_1\left(r\right) + G_1^2\left(r\right) + C_1^2\left(r\right)}{A\left(r\right)} - \frac{1}{r^2}\right].
\end{aligned}
$$

La détermination du tenseur de Ricci et du scalaire de courbure est importante par le fait que les deux entrent dans l'élaboration des équations d'Einstein que nous écrirons par la suite.

2.3.3 Tenseur de torsion

Le tenseur de torsion est l'élément clé des équations de Cartan. On doit donc calculer ses composantes pour pouvoir écrire les équations de Cartan. Compte tenu de (1.16), (1.20), (1.29), (2.47), (2.48), (2.49), on peut alors déduire les composantes non nulles du tenseur de torsion, qui sont données par

$$
\begin{aligned}
T_{001} &= -T_{010} = \frac{2A\left(r\right)D_0\left(r\right) - B^{'}\left(r\right)}{2B\left(r\right)\sqrt{A\left(r\right)}},\ T_{032} = -T_{023} = \frac{2G_0\left(r\right)}{\sqrt{B\left(r\right)}}, \qquad (2.53)\\
T_{101} &= -T_{110} = \frac{D_0\left(r\right)}{\sqrt{B\left(r\right)}},\ T_{132} = -T_{123} = \frac{2G_1\left(r\right)}{\sqrt{A\left(r\right)}},\\
T_{202} &= -T_{220} = T_{303} = -T_{330} = \frac{C_0\left(r\right)}{\sqrt{B\left(r\right)}},\\
T_{203} &= -T_{230} = -T_{302} = T_{320} = \frac{Z_0\left(r\right) + G_0\left(r\right)}{\sqrt{B\left(r\right)}},\\
T_{212} &= -T_{221} = T_{313} = -T_{331} = \frac{rC_0\left(r\right) - 1}{r\sqrt{A\left(r\right)}},\\
T_{213} &= -T_{231} = -T_{312} = T_{321} = \frac{Z_1\left(r\right) + G_1\left(r\right)}{\sqrt{A\left(r\right)}}.
\end{aligned}
$$

Comme nous l'avons vu en (1.30), le tenseur de torsion peut être décomposé en trois parties irréductibles : la partie complètement antisymétrique, la partie de symétrie mixte et la partie vectorielle. Compte tenu donc de (1.31) et (2.53), les composantes non nulles du tenseur complètement antisymétrique sont données par

$$\begin{aligned} A_{032} &= -A_{023} = A_{203} = -A_{230} = -A_{302} = A_{320} = \frac{2\left[2G_0(r) + Z_0(r)\right]}{3\sqrt{B(r)}}, \\ A_{132} &= -A_{123} = A_{213} = -A_{231} = -A_{312} = A_{321} = \frac{2\left[2G_1(r) + Z_1(r)\right]}{3\sqrt{A(r)}}. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Pour la partie vectorielle, on a compte tenu de (1.32) et (2.53),

$$V_0 = \frac{D_1(r) + 2C_0(r)}{3\sqrt{B(r)}}, \; V_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{2A(r)\,D_0(r) - B'(r)}{2B(r)\sqrt{A(r)}} - \frac{2\left(1 - rC_1(r)\right)}{r\sqrt{A(r)}}\right), \; V_2 = V_3 = 0. \tag{2.55}$$

De (1.33), (2.53), (2.54), (2.55) on déduit les composantes non nulles M_{abc} du tenseur à symétrie mixte

$$\begin{aligned} M_{001} &= -M_{010} = 2M_{221} = -2M_{212} = -M_{313} = 2M_{331} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{A(r)}}\left(\frac{2A(r)\,D_0(r) - B'(r)}{B(r)} + \frac{2\left[1 - rC_1(r)\right]}{r}\right), \\ M_{023} &= -M_{032} = 2M_{203} = -2M_{230} = -2M_{302} = -2M_{312} = 2M_{320} \\ &= \frac{2\left[Z_0(r) - G_0(r)\right]}{3\sqrt{B(r)}}, \\ M_{101} &= -M_{110} = -2M_{202} = 2M_{220} = -2M_{303} = 2M_{330} \\ &= \frac{2\left[D_1(r) - C_0(r)\right]}{3\sqrt{B(r)}}, \\ M_{123} &= -M_{132} = -2M_{231} = 2M_{231} \\ &= \frac{2\left[Z_1(r) - G_1(r)\right]}{3\sqrt{A(r)}}. \end{aligned} \tag{2.56}$$

2.3.4 Equations d'Einstein

Dans le référentiel orthonormé les équations d'Einstein ont pour expression

$$\underbrace{R_{ab} - \left(\frac{R}{2} + \Lambda\right)\eta_{ab}}_{\overline{G}_{ab}} = 8\pi G\tau_{ba}, \tag{2.57}$$

où le tenseur $\overline{G}_{ab}$ a été défini comme la somme du tenseur d'Einstein G_{ab} et du tenseur $-\Lambda\eta_{ab}$. Compte tenu des expressions des composantes du tenseur de Ricci (2.51) et de l'expression du scalaire de courbure (2.52), les composantes non nulles du tenseur $\overline{G}_{ab}$ sont données par

$$\begin{aligned}
\overline{G}_{00} &= -\frac{2\left(\frac{rC_1(r)}{\sqrt{A(r)}}\right)'}{r\sqrt{A(r)}} + \frac{2D_1(r)\,C_0(r) + G_0^2(r) + C_0^2(r)}{B(r)} \\
&\quad -\frac{2Z_1(r)\,G_1(r) + G_1^2(r) + C_1^2(r)}{A(r)} + \frac{1}{r^2} - \Lambda, \\
\overline{G}_{01} &= 2\left[-\frac{\left(\frac{rC_0(r)}{\sqrt{B(r)}}\right)'}{r\sqrt{A(r)}} + \frac{D_1(r)\,C_1(r) - G_0(r)\,Z_1(r)}{\sqrt{A(r)\,B(r)}}\right], \\
\overline{G}_{10} &= 2\left(\frac{D_0(r)\,C_0(r)}{B(r)}\sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}} - \frac{Z_0(r)\,G_1(r)}{\sqrt{A(r)\,B(r)}}\right), \\
\overline{G}_{11} &= \frac{2\left[D_0(r)\,C_1(r) - G_0(r)\,Z_0(r)\right] - G_0^2(r) - C_0^2(r)}{B(r)} + \frac{G_1^2(r) + C_1^2(r)}{A(r)} - \frac{1}{r^2} + \Lambda, \\
\overline{G}_{22} &= \frac{\left(\frac{rC_1(r)}{\sqrt{A(r)}}\right)'}{r\sqrt{A(r)}} + \frac{\left(\sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}}D_0(r)\right)'}{\sqrt{A(r)\,B(r)}} + \frac{G_1(r)\,Z_1(r)}{A(r)} \\
&\quad + \frac{D_0(r)\,C_1(r) - D_1(r)\,C_0(r) - G_0(r)\,Z_0(r)}{B(r)} + \Lambda, \\
\overline{G}_{23} &= -\overline{G}_{32} \\
&= -\frac{\left(\frac{rG_1(r)}{\sqrt{A(r)}}\right)'}{r\sqrt{A(r)}} - \frac{G_1(r)\,D_0(r) + Z_0(r)\,C_0(r) - D_1(r)\,G_0(r)}{B(r)} + \frac{Z_1(r)\,C_1(r)}{A(r)},
\end{aligned} \tag{2.58}$$

et la forme la plus générale du tenseur d'énergie-impulsion τ_{ab} est donc donnée par

$$\tau_{ab} = \begin{pmatrix} \tau_{00} & \tau_{01} & 0 & 0 \\ \tau_{10} & \tau_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{22} & -\tau_{32} \\ 0 & 0 & \tau_{32} & \tau_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.59}$$

on obtient donc six équations indépendantes d'Einstein :

$$\overline{G}_{00} = 8\pi G \tau_{00}, \tag{2.60}$$

$$\overline{G}_{01} = 8\pi G \tau_{10}, \tag{2.61}$$

$$\overline{G}_{10} = 8\pi G \tau_{01}, \tag{2.62}$$

$$G_{11} = 8\pi G \tau_{11}, \tag{2.63}$$

$$\overline{G}_{22} = 8\pi G \tau_{22}, \tag{2.64}$$

$$\overline{G}_{23} = 8\pi G \tau_{32}. \tag{2.65}$$

Notons que les composantes du tenseur d'Einstein et donc du tenseur $\overline{G}_{ab}$; ne dépendent que de la coordonnée r, une conséquence de la symétrie sphérique et bien évidement elles sont toutes indépendantes du temps car il s'agit du cas statique.

2.3.5 Equations de Cartan

Nous avons vu au chapitre 1 que les équations de Cartan établissent le lien entre la densité de spin et la torsion. Ce sont les équations (1.49) qu'on a également écrites sous la forme équivalente (1.52), suite à la décomposition (1.30) du tenseur de Cartan et de la densité de spin (1.50). Ainsi compte tenu de (2.54), (2.55), (2.56), les équations de Cartan correspondant au cas statique à symétrie sphérique, sont données par

$$\begin{aligned}
&\frac{2\left[2G_0(r)+Z_0(r)\right]}{3\sqrt{B(r)}}=8\pi G a_{023}, \\
&\frac{2\left[2G_1(r)+Z_1(r)\right]}{3\sqrt{A(r)}}=8\pi G a_{123}, \\
&\frac{D_1(r)+2C_0(r)}{3\sqrt{B(r)}}=\frac{1}{2}8\pi G s_0, \\
&\frac{1}{3}\left(\frac{2A(r)\,D_0(r)-B^{'}(r)}{2B(r)\sqrt{A(r)}}-\frac{2\left(1-rC_0(r)\right)}{r\sqrt{A(r)}}\right)=\frac{1}{2}8\pi G s_0, \\
&\frac{1}{3\sqrt{A(r)}}\left(\frac{2A(r)\,D_0(r)-B^{'}(r)}{B(r)}+\frac{2\left[1-rC_1(r)\right]}{r}\right)=\frac{1}{2}8\pi G s_1 \\
&\frac{1}{3\sqrt{A(r)}}\left(\frac{2A(r)\,D_0(r)-B^{'}(r)}{B(r)}+\frac{2\left[1-rC_1(r)\right]}{r}\right)=-8\pi G m_{010}, \\
&\frac{2\left[Z_0(r)-G_0(r)\right]}{3\sqrt{B(r)}}=-8\pi G m_{230}, \\
&\frac{2\left[D_1(r)-C_0(r)\right]}{3\sqrt{B(r)}}=-8\pi G m_{011}, \\
&\frac{2\left[Z_1(r)-G_1(r)\right]}{3\sqrt{A(r)}}=-8\pi G m_{231},
\end{aligned} \tag{2.66}$$

avec : $a_{023}=-a_{032}=-a_{203}=a_{230}=a_{302}=-a_{320}$, $a_{123}=-a_{132}=-a_{213}=a_{231}=a_{312}=-a_{321}$ et $m_{001}=-m_{010}=2m_{221}=-2m_{212}=-m_{313}=2m_{331}$, $m_{023}=-m_{032}=2m_{203}=-2m_{230}=-2m_{302}=-2m_{312}=2m_{320}$, $m_{101}=-m_{110}=-2m_{202}=2m_{220}=-2m_{303}=2m_{330}$, $m_{123}=-m_{132}=-2m_{231}=2m_{231}$; qui sont les seuls a_{abc} et m_{cba}, non nuls.

2.4 Solutions exactes : Cas d'un tenseur de torsion complètement antisymétrique

Nous arrivons enfin au but essentiel pour lequel tout le calcul précédent a été élaboré, à commencer par la détermination des composantes de la connexion par rapport au repère holonome et par rapport au repère orthonormé, jusqu'à l'écriture des équations d'Einstein et de Cartan. Notre but consiste à déterminer l'équivalent de la solution de Kottler en présence de la torsion. Pour ce faire il nous faut donc résoudre à la fois les équations d'Einstein et de Cartan formant un système de quinze équations différentielles non linéaires pour les fonctions $A(r)$ et $B(r)$ qui déterminent la métrique, et les fonctions $C_0(r)$, $C_1(r)$, $D_0(r)$, $D_1(r)$, $G_0(r)$, $G_1(r)$, $Z_0(r)$, $Z_1(r)$, qui déterminent la connexion ; d'abord à l'extérieur de la distribution de masse sphérique ; sans torsion, afin d'obtenir la solution extérieure ; puis pour une forme spécifique de matière et de torsion à l'intérieur de la distribution de masse à symétrie sphérique pour aboutir à la solution intérieure. En raison de leur complexité, il est évident que pour le cas de l'espace-temps statique à symétrie sphérique, les équations d'Einstein et de Cartan dans leurs forme la plus générale, ne peuvent être résolues analytiquement pour des formes arbitraires du tenseur énergie-impulsion et de a densité de spin ; le recours aux méthodes numériques est inévitable. Néanmoins, nous avons pu montrer l'existence de solutions exactes, quand on impose au tenseur de Cartan d'être complètement antisymétrique. Le cas d'un tenseur de torsion complètement antisymétrique est intéressant à plus d'un titre. En particulier, nous n'avons qu'un seul type de géodésique. Autrement dit les géodésiques de la connexion métrique et des Christoffel coïncident. L'hypothèse d'un tenseur de Cartan complètement antisymétrique revient à supposer compte tenu de la décomposition (1.30) en parties irréductibles ; que les parties de symétrie mixte (1.33) et vectorielle (1.32) sont identiquement nulles ce qui implique les contraintes

$$\begin{aligned}
&C_0(r) = D_1(r) = 0, \qquad (2.67)\\
&Z_0(r) = G_0(r),\\
&Z_1(r) = G_1(r),\\
&C_1(r) = \frac{1}{r},\\
&B'(r) - 2A(r)\,D_0(r) = 0,
\end{aligned}$$

permettant de réduire le nombre de fonctions inconnues de dix à cinq. En dépit des simplifications qu'elle apporte ; l'hypothèse d'un tenseur de Cartan complément antisymétrique est insuffisante pour résoudre les équations d'Einstein et de Cartan, il nous faut d'autres informations pour établir la forme générale du tenseur énergie-impulsion et de la densité de spin, sur la base d'arguments physiques. Nous devons distinguer entre la solution à l'extérieur de la distribution de masse et la solution à l'l'intérieur de la distribution de masse.

2.4.1 La solution extérieure

A l'extérieur de la distribution de masse le tenseur d'énergie-impulsion est nul. Il en est de même de la torsion qui contrairement à la courbure, ne se propage pas. La torsion est présente uniquement là où il y'a de la matière. Par conséquent, les équations de Cartan sont toutes identiquement nulles de même que le second membre des équations d'Einstein. On est donc exactement dans le cas du vide en relativité générale, chose qu'on confirme en tenant compte de la contrainte (2.67), où on voit bien que les équations (2.60), (2.61), (2.62), (2.63), (2.64), (2.65), sans second membre, sont exactement identiques aux équations d'Einstein du vide (2.32), (2.33), (2.34), (2.35), et les composantes de la connexion (2.45) se réduisent aux symboles de Christoffel (2.30) ; la métrique est donc celle de Kottler (2.24) (métrique de Schwarzchild (2.44) en l'abscence de la constante cosmologique), comme il se doit, sauf que pour cette solution extérieure nous préférons employer la notation

$$B_{ext}(r) := B_{RG}(r) = 1 - \frac{2GM_e}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2,\ A_{ext}(r) := A_{RG}(r) = \frac{1}{B_{RG}(r)}, \tag{2.68}$$

pour la distinguer de la solution intérieure pour laquelle on garde la même notation des fonctions $A(r)$ et $B(r)$: $B_{int}(r) := B(r)$ et $A_{int}(r) := A(r)$, où M_e se réfère à la masse extérieure et on adopte la notation M_i pour la masse intérieure que nous allons rencontrer dans ce qui suit.

2.4.2 La solution intérieure

Pour obtenir la solution intérieure, il faut à la fois résoudre les équations d'Einstein en présence de matière ainsi que les équations de Cartan. Comme la matière à l'intérieur de la distribution de masse est décrite par le tenseur d'énergie-impulsion, on doit déterminer sa forme en tant que second membre des équations d'Einstein proportionnel au tenseur $\overline{G}_{ab}$. Pour ce faire, on doit suivre la même démarche que celle du cas général, qui consiste à exploiter cette proportionnalité, pour déterminer la forme du tenseur énergie-impulsion ; car tout comme le tenseur $\overline{G}_{ab}$ les composantes de τ_{ba} doivent être indépendantes du temps ne dépendant que de r et s'annuler là où les composantes du tenseur $\overline{G}_{ab}$ sont nulles. Si on tient compte des conditions (2.67), celles-ci réduisent à cinq, le nombre des composantes indépendantes du tenseur $\overline{G}_{ab}$, du moment que dans ce cas

$$\overline{G}_{10} = \overline{G}_{01} = -\frac{2G_0(r)\,G_1(r)}{\sqrt{A(r)\,B(r)}}. \tag{2.69}$$

Sachant également que $\overline{G}_{23} = -\overline{G}_{32}$, on a comme conséquence la réduction du nombre d'équations d'Einstein à cinq équations indépendantes et le tenseur d'énergie-impulsion (2.59), est donc de la forme

$$\tau_{ab} = \begin{pmatrix} \rho(r) & q_1(r) & 0 & 0 \\ q_1(r) & p_1(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2(r) & -q_2(r) \\ 0 & 0 & q_2(r) & p_2(r) \end{pmatrix}, \tag{2.70}$$

vu que $G_{10} = G_{01} \Rightarrow \tau_{01} = \tau_{10}$. Le choix de la notation des composantes de τ_{ab}, c'est-à-dire : $\rho(r)$, $p_1(r)$, $p_2(r)$, $q_1(r)$, $q_2(r)$ à la place des notations précédentes : τ_{00}, τ_{11}, τ_{22}, τ_{01}, τ_{02}, τ_{32} plus abstraites ; se justifie par le fait que le premier élément de la diagonale du tenseur énergie-impulsion s'interprète physiquement comme une densité de masse et le reste des éléments diagonaux comme des pressions. $q_1(r)$, $q_2(r)$ sont des fonctions arbitraires de r. Ainsi compte tenu des conditions (2.67), (2.69), (2.58) et de la forme (2.70) de τ_{ab}, les équations d'Einstein (2.60), (2.61), (2.62), (2.63), (2.64), (2.65), se réduisent à

$$\frac{A'(r)}{rA^2(r)} - \frac{1}{r^2A(r)} + \frac{1}{r^2} + \frac{G_0^2(r)}{B(r)} - \frac{3G_1^2(r)}{A(r)} - \Lambda = 8\pi G\rho(r), \tag{2.71}$$

$$\frac{-2G_0(r)\,G_1(r)}{\sqrt{A(r)\,B(r)}} = 8\pi G q_1(r), \tag{2.72}$$

$$\frac{2D_0(r)}{rB(r)} + \frac{1}{r^2A(r)} - \frac{1}{r^2} - \frac{3G_0^2(r)}{B(r)} + \frac{G_1^2(r)}{A(r)} + \Lambda = 8\pi G p_1(r), \tag{2.73}$$

$$\left[\frac{D_0(r)}{B(r)} - \frac{1}{rA(r)}\right]\frac{A'(r)}{2A(r)} + \left[\frac{1}{r} - \frac{B'(r)}{2B(r)}\right]\frac{D_0(r)}{B(r)} + \frac{D_0'(r)}{B(r)} + \frac{G_1^2(r)}{A(r)} - \frac{G_0^2(r)}{B(r)} + \Lambda = 8\pi G p_2(r), \tag{2.74}$$

$$\frac{A'(r)\,G_1(r)}{2A^2(r)} - \frac{G_1'(r)}{A(r)} - \frac{G_1(r)\,D_0(r)}{B(r)} = 8\pi G q_2(r). \tag{2.75}$$

D'autre part le choix d'un tenseur de torsion complètement antisymétrique implique : $T_{abc} \equiv A_{abc}$, $S_{abc} \equiv a_{abc}$ et les conditions (2.67) réduisent également le nombre de composantes indépendantes du tenseur de Cartan à deux : $A_{032} = A_{203} = A_{320} = -A_{023} = -A_{230} = -A_{302}$

$= \frac{2G_0(r)}{\sqrt{B(r)}}$ et $A_{132} = -A_{123} = -A_{231} = -A_{312} = A_{213} = A_{321} = \frac{2G_1(r)}{\sqrt{A(r)}}$. Donc les neuf équations de Cartan (2.66), se réduisent à deux équations indépendantes

$$\frac{G_0(r)}{\sqrt{B(r)}} = 4\pi G a_{023}, \tag{2.76}$$

$$\frac{G_1(r)}{\sqrt{A(r)}} = 4\pi G a_{123}, \tag{2.77}$$

avec $a_{023} = -a_{032} = -a_{203} = a_{230} = -a_{320} = a_{302}$ et $a_{123} = -a_{132} = -a_{213} = a_{231} = a_{312} = -a_{321}$. Pour simplifier davantage, nous allons faire l'hypothèse d'une densité de spin constante. Il s'ensuit que les rapports : $\frac{G_1(r)}{\sqrt{A(r)}}, \frac{G_0(r)}{\sqrt{B(r)}}$ sont indépendants de r et on peut donc poser

$$\begin{aligned} \frac{G_1(r)}{\sqrt{A(r)}} &= \alpha, \\ \frac{G_0(r)}{\sqrt{B(r)}} &= \beta, \end{aligned} \tag{2.78}$$

où α et β sont deux constantes arbitraires qu'il faut voir comme des paramètres réels. Pour aboutir à la solution intérieure, il faut maintenant résoudre les équations d'Einstein (2.71), (2.72), (2.73), (2.74), (2.75), qui compte tenu de (2.67) et (2.78) peuvent être réécrites après élimination des fonctions : $G_0(r)$, $G_1(r)$, $D_0(r)$, de la manière suivante

$$\frac{-1}{r^2}\left(\frac{r}{A(r)}\right)' + \frac{1}{r^2} + \beta^2 - 3\alpha^2 - \Lambda = 8\pi G\rho(r), \tag{2.79}$$

$$\frac{-\alpha\beta}{4\pi G} = q_1(r), \tag{2.80}$$

$$\frac{1}{r^2 A(r)} + \frac{B'(r)}{rA(r)B(r)} - \frac{1}{r^2} + \alpha^2 - 3\beta^2 + \Lambda = 8\pi G p_1(r), \tag{2.81}$$

$$\left[\frac{D_0(r)}{B(r)} - \frac{1}{rA(r)}\right]\frac{A'(r)}{2A(r)} + \left[\frac{1}{r} - \frac{B'(r)}{2B(r)}\right]\frac{D_0(r)}{B(r)} + \frac{D_0'(r)}{B(r)} + \alpha^2 - \beta^2 + \Lambda = 8\pi G p_2(r). \tag{2.82}$$

Comme selon (2.67),

$$D_0(r) = \frac{B'(r)}{2A(r)}; \tag{2.83}$$

l'équation (2.82) peut alors se mettre sous la forme,

$$\frac{B^{"}(r)}{2A(r)B(r)}-\frac{B^{'2}(r)}{4A(r)B^{2}(r)}+\frac{B^{'}(r)}{2rA(r)B(r)}-\left[\frac{1}{r}+\frac{B^{'}(r)}{2B(r)}\right]\frac{A^{'}(r)}{2A^{2}(r)}+\alpha^{2}-\beta^{2}+\Lambda=8\pi Gp_{2}(r)\,, \tag{2.84}$$

après élimination de $D_0(r)$, quant à l'équation (2.75), elle se réduit à

$$-\frac{\alpha B^{'}(r)}{16\pi GB(r)\sqrt{A(r)}}=q_{2}(r)\,, \tag{2.85}$$

compte tenu de (2.78) et (2.83). Suite à cette réécriture des équations d'Einstein, on constate dans le cas d'une distribution de matière uniforme, c'est-à-dire d'une masse volumique ρ indépendante de r ; que l'équation (2.79) est intégrable. Son intégration permet d'obtenir l'expression de la fonction $A(r)$, donnée par

$$A(r)=A_{int}(r)=\left[\frac{\beta^{2}-3\alpha^{2}-8\pi G\rho-\Lambda}{3}r^{2}+1\right]^{-1}. \tag{2.86}$$

Hormis la fonction $A(r)$, la détermination des expressions exactes des autres fonctions semble être impossible en raison de la complexité des équations d'Einstein ; cependant on peut tout de même obtenir de telles solutions si on se place dans le cas particulier où $p_1(r)=p_2(r)=p(r)$. En effet, en écrivant l'égalité des membres de gauche des équations (2.81) et (2.84), et en substituant à $A(r)$ son expression (2.86), on obtient l'équation différentielle

$$B(r)B^{"}(r)-\frac{1}{2}B^{'2}(r)-\frac{B(r)B^{'}(r)}{(\overline{\alpha}r^{2}+1)r}+\frac{4\beta^{2}}{\overline{\alpha}r^{2}+1}B^{2}(r)=0, \tag{2.87}$$

pour la fonction $B(r)$, avec $\overline{\alpha}=\frac{\beta^{2}-3\alpha^{2}-\Lambda-8\pi G\rho}{3}$. Cette équation différentielle se linéarise [28] grâce au changement de fonction

$$y^{2}(r)=B(r)\,, \tag{2.88}$$

conduisant à l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$y^{"}(r)-\frac{1}{(\overline{\alpha}r^{2}+1)r}y^{'}(r)+\frac{2\beta^{2}}{\overline{\alpha}r^{2}+1}y(r)=0, \tag{2.89}$$

pour la nouvelle fonction $y(r)$. On montre que cette équation différentielle admet des solutions exactes si $\beta = 0$, et quand $\overline{\alpha} = 0$; deux cas que nous allons considérer séparément.

Cas où $\beta = 0$

On obtient un β nul si on impose l'invariance sous le renversement du sens du temps. L'équation (2.89) se réduit alors à

$$y^{"}(r) - \frac{1}{(\overline{\alpha}r^2 + 1)\, r} y^{'}(r) = 0. \tag{2.90}$$

L'équation (2.90) est indépendante de la fonction $y(r)$, ce qui implique que toute constante est nécessairement une solution particulière de cette équation. Or on sait que la solution générale de toute équation différentielle linéaire du second ordre peut être déduite à partir de n'importe quelle solution particulière $y_0(r)$. La solution générale de (2.90) peut se mettre sous la forme

$$y(r) = y_0(r) \left(c_1 + c_2 \int \frac{\exp\left(\int \frac{dr}{(\overline{\alpha}r^2+1)r}\right)}{y_0^2(r)} dr \right), \tag{2.91}$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes d'intégration. Ainsi à partir de la solution particulière la plus simple, à savoir $y_0(r) = 1$, on déduit que la solution générale de l'équation (2.90) est de la forme

$$y(r) = c_1 + \overline{c}_2 \sqrt{\overline{\alpha}r^2 + 1}, \tag{2.92}$$

avec $\overline{c}_2 = \frac{c_2}{\overline{\alpha}}$, d'où

$$B(r) = \left[c_1 + \overline{c}_2 \sqrt{\overline{\alpha}r^2 + 1} \right]^2. \tag{2.93}$$

Compte tenu de (2.83) et (2.86) on en déduit que

$$D_0(r) = c_2 r \left(c_1 + \overline{c}_2 \sqrt{\overline{\alpha}r^2 + 1} \right) \sqrt{\overline{\alpha}r^2 + 1}. \tag{2.94}$$

Pour déterminer les constantes d'intégration nous nous plaçons dans le cas où cette distribution de masse serait une sphère de rayon R et nous prenons comme conditions aux limites la continuité de la solution (2.93) en R, et une pression nulle en R. Alors en tenant compte de (2.81), (2.86), (2.93) et en imposant ces deux conditions aux limites, nous obtenons un système de deux équations linéaires pour les deux inconnues c_1 et c_2,

$$B_{RG}(R) = B(R) \Rightarrow c_1 + \frac{\sqrt{\overline{\alpha} R^2 + 1}}{\overline{\alpha}} c_2 - \sqrt{1 - \frac{2GM_e}{R} - \frac{\Lambda}{3} R^2} = 0, \tag{2.95}$$

$$p(R) = 0 \Rightarrow \overline{\alpha}\left(\overline{\alpha} + \alpha^2 + \Lambda\right) c_1 + \left(3\overline{\alpha} + \alpha^2 + \Lambda\right) \sqrt{\overline{\alpha} R^2 + 1} c_2 = 0, \tag{2.96}$$

dont la résolution en tenant compte de l'expression $\overline{\alpha} = -\frac{3\alpha^2 + 8\pi G\rho + \Lambda}{3}$, permet d'obtenir les expressions de c_1 et de c_2, données par

$$\begin{aligned} c_1 &= \left(1 - \frac{\Lambda - 4\pi G\rho}{\Lambda + 8\pi G\rho + 3\alpha^2}\right) \sqrt{1 - \frac{2GM_e}{R} - \frac{\Lambda}{3} R^2}, \\ c_2 &= \frac{4\pi G\rho - \Lambda}{3} \sqrt{\frac{3R - \Lambda R^3 - 6GM_e}{R\left[3 - \left(3\alpha^2 + 8\pi G\rho + \Lambda\right) R^2\right]}}, \end{aligned} \tag{2.97}$$

d'où

$$\overline{c}_2 = \frac{c_2}{\overline{\alpha}} = \frac{\Lambda - 4\pi G\rho}{\Lambda + 8\pi G\rho + 3\alpha^2} \sqrt{\frac{3R - \Lambda R^3 - 6GM_e}{R\left[3 - \left(3\alpha^2 + 8\pi G\rho + \Lambda\right) R^2\right]}}. \tag{2.98}$$

Si on choisit comme équation d'état

$$s = \omega\rho, \tag{2.99}$$

liant la torsion à la masse volumique. En combinant alors les équations de Cartan (2.76) et (2.77) avec le définition (2.78) de α et β, sachant que $\beta = 0$, on obtient

$$\alpha = 4\pi G\omega\rho, \tag{2.100}$$

d'où

$$\overline{\alpha} = -\frac{8\pi G\rho\left(6\pi G\omega^2\rho + 1\right) + \Lambda}{3}. \tag{2.101}$$

D'après (2.86) et (2.100),

$$A(r) = \left[-\frac{8\pi G\rho\left(6\pi G\omega^2\rho + 1\right) + \Lambda}{3} r^2 + 1\right]^{-1}. \tag{2.102}$$

D'autre part, en éliminant α des relations (2.97), (2.98) ; on a les formules suivantes pour les constantes d'intégration

$$\begin{aligned} c_1 &= \left(1 - \frac{\Lambda - 4\pi G\rho}{8\pi G\rho\left(6\pi G\omega^2\rho + 1\right) + \Lambda}\right)\sqrt{1 - \frac{2GM_e}{R} - \frac{\Lambda}{3}R^2}, \\ c_2 &= \frac{4\pi G\rho - \Lambda}{3}\sqrt{\frac{R\left(3 - \Lambda R^2\right) - 6GM_e}{R\left\{3 - \left[8\pi G\rho\left(6\pi G\omega^2\rho + 1\right) + \Lambda\right]R^2\right\}}}, \\ \overline{c}_2 &= \frac{\Lambda - 4\pi G\rho}{8\pi G\rho\left(6\pi G\omega^2\rho + 1\right) + \Lambda}\sqrt{\frac{R\left(3 - \Lambda R^2\right) - 6GM_e}{R\left\{3 - \left[8\pi G\rho\left(6\pi G\omega^2\rho + 1\right) + \Lambda\right]R^2\right\}}}, \end{aligned} \tag{2.103}$$

ce qui détermine complètement les expressions exactes des fonctions $A(r)$, $B(r)$, $D_0(r)$, en plus de celles des fonctions $G_0(r)$, $G_1(r)$, où compte tenu de $\beta = 0$ et de (2.78), (2.100), (2.102), on a

$$\begin{aligned} G_0(r) &= 0, \\ G_1(r) &= 4\pi G\omega\rho\left[-\frac{8\pi G\rho\left(6\pi G\omega^2\rho + 1\right) + \Lambda}{3}r^2 + 1\right]^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{2.104}$$

on obtient ainsi la solution statique à symétrie sphérique en théorie d'Einstein-Cartan lorsqu'on fait l'hypothèse d'un tenseur de Cartan antisymétrique et on impose l'invariance sous le renversement du sens du temps.

Cas $\overline{\alpha} = 0$

Lorsque $\overline{\alpha} = 0$, c'est-à-dire

$$\beta^2 - 3\alpha^2 - 8\pi G\rho - \Lambda = 0, \tag{2.105}$$

on peut également montrer qu'il existe une solution exacte. En effet si on tient compte de cette condition et de (2.86),

$$A(r) = 1. \tag{2.106}$$

D'autre part, l'équation différentielle (2.89), s'écrit

$$ry^{"}(r) - y^{'}(r) + 2r\beta^2 y(r) = 0, \tag{2.107}$$

qui est une forme particulière de l'équation de Bessel [28] admettant comme solution générale

$$y\left(r\right)=r\left[\widetilde{c}_1J_1\left(\sqrt{2\beta^2}r\right)+\widetilde{c}_2Y_1\left(\sqrt{2\beta^2}r\right)\right],\tag{2.108}$$

où $J_1\left(\sqrt{2\beta^2 r}\right)$ et $Y_1\left(\sqrt{2\beta^2 r}\right)$, sont respectivement les fonctions de Bessel de première espèce et de deuxième espèce et $\widetilde{c}_1$, $\widetilde{c}_2$ des constantes d'intégration. D'après (2.88), on déduit que

$$B\left(r\right)=r^2\left[\widetilde{c}_1J_1\left(\sqrt{2\beta^2}r\right)+\widetilde{c}_2Y_1\left(\sqrt{2\beta^2}r\right)\right]^2.\tag{2.109}$$

Compte de (2.81) et des relations de récurrence

$$\begin{aligned}J_1'\left(\sqrt{2\beta^2}r\right)&=\sqrt{2\beta^2}J_0\left(\sqrt{2\beta^2}r\right)-\frac{1}{r}J_1\left(\sqrt{2\beta^2}r\right),\\ Y_1'\left(\sqrt{2\beta^2}r\right)&=\sqrt{2\beta^2}Y_0\left(\sqrt{2\beta^2}r\right)-\frac{1}{r}Y_1\left(\sqrt{2\beta^2}r\right),\end{aligned}\tag{2.110}$$

la condition aux limites $p\left(R\right)=0$, implique

$$\begin{aligned}&\left[2\sqrt{2\beta^2}J_0\left(\sqrt{2\beta^2}R\right)+R\left(\alpha^2-3\beta^2+\Lambda\right)J_1\left(\sqrt{2\beta^2}R\right)\right]\widetilde{c}_1\\ &+\left[2\sqrt{2\beta^2}Y_0\left(\sqrt{2\beta^2}R\right)+R\left(\alpha^2-3\beta^2+\Lambda\right)Y_1\left(\sqrt{2\beta^2}R\right)\right]\widetilde{c}_2\\ =\;&0,\end{aligned}\tag{2.111}$$

et la condition de continuité $B_{RG}\left(R\right)=B\left(R\right)$, sachant que $A_{RG}\left(R\right)=A\left(R\right)=1$ et $B_{RG}\left(R\right)=\frac{1}{A_{RG}(R)}$, se traduit par

$$J_1\left(\sqrt{2\beta^2}R\right)\widetilde{c}_1+Y_1\left(\sqrt{2\beta^2}R\right)\widetilde{c}_2-\frac{1}{R}=0.\tag{2.112}$$

Après résolution du système des deux équations linéaires (2.111), (2.112) pour les inconnues $\widetilde{c}_1$, $\widetilde{c}_2$, on obtient

$$\begin{aligned}
\widetilde{c}_1 &= R^{-1}\left[2\sqrt{2\beta^2}Y_0\left(\sqrt{2\beta^2}R\right)+\left(\alpha^2-3\beta^2+\Lambda\right)RY_1\left(\sqrt{2\beta^2}R\right)\right] \qquad (2.113)\\
&\times\left\{\left[2\sqrt{2\beta^2}Y_0\left(\sqrt{2\beta^2}R\right)+\left(\alpha^2-3\beta^2+\Lambda\right)RY_1\left(\sqrt{2\beta^2}R\right)\right]J_1\left(\sqrt{2\beta^2}R\right)\right.\\
&\left.-\left[2\sqrt{2\beta^2}J_0\left(\sqrt{2\beta^2}R\right)+\left(\alpha^2-3\beta^2+\Lambda\right)RJ_1\left(\sqrt{2\beta^2}R\right)\right]Y_1\left(\sqrt{2\beta^2}R\right)\right\}^{-1},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\widetilde{c}_2 &= R^{-1}\left[2\sqrt{2\beta^2}J_0\left(\sqrt{2\beta^2}R\right)+\left(\alpha^2-3\beta^2+\Lambda\right)RJ_1\left(\sqrt{2\beta^2}R\right)\right] \qquad (2.114)\\
&\times\left\{\left[2\sqrt{2\beta^2}J_0\left(\sqrt{2\beta^2}R\right)+\left(\alpha^2-3\beta^2+\Lambda\right)RJ_1\left(\sqrt{2\beta^2}R\right)\right]Y_1\left(\sqrt{2\beta^2}R\right)\right.\\
&\left.-\left[2\sqrt{2\beta^2}Y_0\left(\sqrt{2\beta^2}R\right)+\left(\alpha^2-3\beta^2+\Lambda\right)RY_1\left(\sqrt{2\beta^2}R\right)\right]J_1\left(\sqrt{2\beta^2}R\right)\right\}^{-1}.
\end{aligned}$$

D'autre part, comme $A(r)=1$, et $D_0(r)=\frac{B'(r)}{2A(r)}$ et compte tenu de (2.109) et des relations de récurrence (2.110), on a

$$\begin{aligned}
D_0(r) &= \frac{B'(r)}{2}, \qquad (2.115)\\
&= \sqrt{2\beta^2}r^2\left[\widetilde{c}_1J_0\left(\sqrt{2\beta^2}r\right)+\widetilde{c}_2Y_0\left(\sqrt{2\beta^2}r\right)\right]\left[\widetilde{c}_1J_1\left(\sqrt{2\beta^2}r\right)+\widetilde{c}_2Y_1\left(\sqrt{2\beta^2}r\right)\right],
\end{aligned}$$

où $\widetilde{c}_1$et $\widetilde{c}_2$sont données par (2.113) et (2.114). Ainsi nous venons de montrer que l'hypothèse d'un tenseur de Cartan complètement antisymétrique pour une distribution de matière uniforme et une torsion constante, permet d'obtenir des solutions exactes pour certains cas particuliers.

2.5 Théorie d'Einstein-Cartan comme alternative au problème de la matière sombre : Formule de masse

Peut-on résoudre le problème de la matière sombre dans l'univers une fois pour toute, en ayant une concordance entre les prédictions théoriques du mouvement de galaxies et les données observationnelles relatives à ce mouvement, sans pour autant faire l'hypothèse de l'existence d'une quelconque forme de matière autre que la matière ordinaire ? On peut affirmer sans le moindre doute que la théorie d'Einstein-Cartan serait une très bonne candidate pour expliquer un univers sans matière sombre. Nous allons voir dans ce qui suit que la torsion pourrait être une alternative à la matière sombre. Pour ce faire nous allons établir une relation entre la masse interne M_i et la masse externe M_e d'une distribution statique à symétrie sphérique. La masse interne est donnée par

$$M_i = \frac{4\pi}{3}\rho R^3, \tag{2.116}$$

où ρ est la masse volumique et R est le rayon de la distribution de masse. On peut alors réécrire la solution interne en terme de la masse interne, après élimination de la masse volumique ρ en faveur de la masse interne dans l'expression (2.86),

$$A_{int}(r) = \left[\left(\frac{\beta^2 - 3\alpha^2 - \Lambda}{3} - \frac{2GM_i}{R^3}\right) r^2 + 1\right]^{-1}. \tag{2.117}$$

La condition de continuité de $A(r)$ en R : $A_{int}(R) = A_{ext}(R)$ s'écrit, en tenant compte de (2.68) et (2.117)

$$\left(\frac{\beta^2 - 3\alpha^2 - \Lambda}{3} - \frac{2GM_i}{R^3}\right) R^2 + 1 = 1 - \frac{2GM_e}{R} - \frac{\Lambda}{3}R^2, \tag{2.118}$$

ce qui permet de lier la masse externe M_e à la masse interne M_i,

$$M_e = M_i + \frac{\left(3\alpha^2 - \beta^2\right) R^3}{6G}. \tag{2.119}$$

On voit clairement que le second terme du second membre de (2.119) exprime l'effet de la torsion. Nous avons en comparant (2.76) et (2.77) à (2.78),

$$\alpha = 4\pi G a_{123}, \tag{2.120}$$

et

$$\beta = 4\pi G a_{023}. \tag{2.121}$$

Si on adopte les deux équations d'état $a_{123} = \omega_\alpha \rho$ et $a_{023} = \omega_\beta \rho$, où ω_α et ω_β sont deux constantes réelles ; il s'ensuit de (2.120) et (2.121) que

$$\alpha = 4\pi G \rho \omega_\alpha = \frac{3G\omega_\alpha}{R^3} M_i, \tag{2.122}$$

et

$$\beta = 4\pi G \rho \omega_\beta = \frac{3G\omega_\beta}{R^3} M_i. \tag{2.123}$$

En substituant à α et β leurs expressions (2.122) et (2.123) en terme de la masse interne dans (2.119), on obtient

$$M_e = M_i \left[1 + \frac{3\left(3\omega_\alpha^2 - \omega_\beta^2\right) G}{2R^3} M_i \right], \tag{2.124}$$

qui est la formule de masse liant les masses externe et interne de la distribution de masse à symétrie sphérique. La relation (2.124) montre clairement que la torsion a pour effet de rendre la masse externe différente de la masse interne sauf lorsque $3\omega_\alpha^2 = \omega_\beta^2$. Donc à l'exception du cas très particulier où $3\omega_\alpha^2 = \omega_\beta^2$, en présence de torsion la loi de Gauss faible est violée. Bien sûr en l'absence de torsion ($\omega_\alpha = \omega_\beta = 0$),

$$M_e = M_i, \tag{2.125}$$

résultat bien connu en relativité générale, qui constitue la loi de Gauss faible. Selon que $3\omega_\alpha^2 > \omega_\beta^2$ ou $3\omega_\alpha^2 < \omega_\beta^2$, la masse externe est supérieure ou inférieure à la masse interne. Le cas intéressant du point de vue de la cosmologie est celui où la masse externe est supérieure à la masse interne, ce qui permet d'envisager la torsion comme alternative à la matière sombre. On peut constater facilement à partir de (1.61) que les fonctions $G_0(r)$ et $G_1(r)$ sont respectivement impaire et paire sous le renversement du temps. On peut alors traiter séparément les deux cas ($\omega_\alpha = 0$, $\omega_\beta \neq 0$) et ($\omega_\alpha \neq 0$, $\omega_\beta = 0$). Le cas ($\omega_\alpha = 0$, $\omega_\beta \neq 0$) mène à la formule de masse

$$M_e = M_i \left(1 - \frac{3G\omega_\beta^2}{2R^3} M_i \right). \tag{2.126}$$

où $M_e < M_i$. Le cas ($\omega_\alpha \neq 0$, $\omega_\beta = 0$) mène à la formule de masse

$$M_e = M_i \left(1 + \frac{9G\omega_\alpha^2}{2R^3} M_i \right) , \tag{2.127}$$

où $M_e > M_i$. C'est ce deuxième cas qui est intéressant du point de vue de la cosmologie, la torsion pouvant alors être une alternative à la matière sombre.

Chapitre 3

Les théories $f(R)$ équivalentes à la relativité générale pour une forme déterminée du scalaire de courbure

Comme la plupart des lois de la physique, la relativité générale considérée par beaucoup de physiciens comme la meilleure théorie décrivant la gravitation, peut être déduite d'un principe variationnel. En effet les équations d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}; \;\; \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}, \tag{3.1}$$

sont facilement obtenues en variant l'action de Hilbert-Einstein

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} \left(R - 2\Lambda \right) d^4x + S_m. \tag{3.2}$$

L'idée de ce qui est appelé la théorie $f(R)$ est basée sur la généralisation de l'action de Hilbert-Einstein en écrivant S sous une forme plus générale

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} f\left(R \right) d^4x + S_m. \tag{3.3}$$

En faisant varier l'action par rapport à la métrique $g_{\mu\nu}$, on peut déduire les équations de champ de la théorie $f(R)$,

$$f^{'}\left(R\right)R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}f\left(R\right)g_{\mu\nu}-\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}f^{'}\left(R\right)+\Box f'\left(R\right)g_{\mu\nu}=\kappa T_{\mu\nu}, \tag{3.4}$$

où $f^{'}\left(R\right)=\frac{df(R)}{dR}$ et ∇_{μ} représente la dérivée covariante. Ainsi pour n'importe quelle fonction $f(R)$ on obtient une théorie $f(R)$ et la relativité générale devient un cas particulier correspondant à $f(R)=R-2\Lambda$ parmi une infinité de choix possibles de la fonction $f(R)$. La considération d'une théorie modifiée de la gravitation constitue une manière d'aller au-delà de la théorie d'Einstein [3] dans le but essentiel est de résoudre plusieurs problèmes en cosmologie comme celui de l'énergie sombre, où la théorie $f(R)$ par le biais de ses différents modèles [29] est une candidate potentielle pour expliquer un univers en expansion accélérée sans recourir à la nécessité d'émettre l'hypothèse de l'existence d'une énergie sombre. Cependant les prédictions de n'import quelle théorie proposée doivent être en accord avec les observations cosmologiques pour être acceptées comme un modèle alternatif au problème de l'énergie sombre, ce qui se traduit par des conditions mathématiques sur la fonction $f(R)$ réduisant son choix en la limitant à des formes particulières.

Indépendamment du fait que la fonction $f(R)$ satisfait ou par les conditions requises il est tout à fait légitime de poser la question : Est-il possible que la relativité générale et une théorie $f(R)\neq R-2\Lambda$, aient les mêmes solutions quand ces deux théories sont concernées par le même contexte physique ? Si oui, quand ? Nous entendons par solution le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et le même contexte physique, signifie le même tenseur d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ décrivant une forme spécifique de matière pour les deux équations de champ (3.1), (3.4). En fait il y'a deux motivations qui nous poussent à nous poser de telles questions : La première est due à la difficulté rencontrée lors de la résolution analytique des équations de champs de la théorie $f(R)$. Donc avant d'envisager une quelconque technique de résolution, il est certainement plus commode de savoir si la solution de la relativité générale demeure une solution pour cette théorie $f(R)$ sachant que les équations de la relativité générale sont plus simples comparées à celles de la théorie $f(R)$ et la plupart des solutions de la relativité générale intéressantes du point de vu physique sont bien connues depuis longtemps [30] pouvant ainsi nous éviter des calculs compliqués. La seconde motivation est d'avoir la possibilité de mesurer combien même la théorie modifiée est si différente de la relativité générale ; car ça n'a absolument pas de sens de construire des théories plus compliquées semblant être différentes en apparence, pour qu'il s'avère à la fin que les solutions pertinentes de ces théories sont celles de la relativité générale ; faisant que toute étude visant à comprendre la relation entre la relativité générale et la théorie $f(R)$ est très recommandée. L'objectif de ce chapitre est d'apporter une réponse à la première question en déterminant d'abord toutes les conditions mathématiques sur la fonction $f(R)$ pour lesquelles la relativité générale et cette théorie aient les mêmes solutions, puis nous montreront comment exploiter ces conditions pour les appliquer sur des exemples concrets.

3.1 Les conditions requises sur la fonction $f(R)$ pour avoir des solutions communes à la relativité générale et à la théorie $f(R)$

Comme nous l'avons souligné, notre objectif consiste à apporter une réponse à la question de savoir quand la relativité générale et la théorie $f(R)$ possèdent les mêmes solutions. Nous allons d'abord essayer de répondre à cette question dans le cas générale où il n'existe aucune supposition sur la forme du scalaire de courbure, puis nous considérerons le cas particulier où le scalaire de Ricci est une constante, pas seulement pour sa simplicité, mais surtout pour son intérêt physique.

3.1.1 Cas général (R quelconque)

Dans le but d'apporter une réponse à la question précédente, l'idée consiste à faire apparaitre les équations d'Einstein à l'intérieur de celles de la théorie $f(R)$ qui peuvent être écrites sous la forme équivalente

$$\begin{aligned} & f'(R)\left[R_{\mu\nu}-\frac{R}{2}g_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu}-\kappa T_{\mu\nu}\right]+f'(R)\left[\frac{R}{2}g_{\mu\nu}-\Lambda g_{\mu\nu}+\kappa T_{\mu\nu}\right] \\ & -\frac{1}{2}f\left(R\right)g_{\mu\nu}-\nabla_\mu\nabla_\nu f^{'}\left(R\right)+\Box f'\left(R\right)g_{\mu\nu} \\ = \;& \kappa T_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

où $f'(R) = \left[\frac{df(R)}{dR}\right]$. On peut alors énoncer le théorème suivant :

Théorème : Une métrique $g_{\mu\nu}$ est une solution à la fois de la relativité générale et de la théorie $f(R)$ si et seulement si elle est au moins solution de l'une des deux théories, vérifiant :

$$\left[f'(R) - 1\right] R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left[f(R) - (R - 2\Lambda) - 2\Box f'(R)\right] g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu f^{'}(R) = 0. \qquad (3.6)$$

Démonstration : Soit $g_{\mu\nu}$ une solution commune de la relativité générale et de la théorie $f(R)$; alors $g_{\mu\nu}$ satisfait à la fois les équations de champ de la relativité générale et de la théorie $f(R)$. Donc l'équation (3.5) est satisfaite et son premier terme s'annule tel que

$$\left[\left(\frac{R}{2} - \Lambda\right) f^{'}(R) - \frac{1}{2} f(R) + \Box f'(R)\right] g_{\mu\nu} + \left[f'(R) - 1\right] \kappa T_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu f^{'}(R) = 0. \qquad (3.7)$$

Comme $\kappa T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$, cette dernière relation peut s'écrire sous la forme $[f'(R) - 1] R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}[f(R) - (R - 2\Lambda) - 2\Box f'(R)] g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu f^{'}(R) = 0$ qui n'est rien d'autre que la condition nécessaire (3.6). Autrement dit, si $g_{\mu\nu}$ est une solution pour les deux théories la condition (3.6) est nécessairement satisfaite. Démontrons que la réciproque est également vrai en supposant une métrique qui soit au moins solution pour l'une des deux théories satisfaisant au même temps la condition (3.6), pour montrer que cette condition est suffisante pour que cette métrique soit solution des deux théories. Nous allons d'abord commencer par le cas où $g_{\mu\nu}$ est une solution de la relativité générale. En additionnant les équations de la relativité générale et la condition (3.6), nous obtenons $\left[R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu}\right] + [f'(R) - 1] R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}[f(R) - (R - 2\Lambda) - 2\Box f'(R)] g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu f^{'}(R) = 0$ qui conduit aux équations de champ (3.4) de la théorie $f(R)$ après simplification, ce qui montre que $g_{\mu\nu}$ est aussi une solution pour la théorie $f(R)$. Si maintenant nous supposons que $g_{\mu\nu}$ est juste une solution de la théorie $f(R)$ satisfaisant (3.4) et (3.6) ; on peut montrer de la même manière que ceci est également suffisant pour prouver que cette métrique sera une solution de la relativité générale. En effet, comme $g_{\mu\nu}$ est une solution des équations de champ (3.4), elle sera évidemment solution des équations (3.5) car ces dernières sont juste une manière équivalente d'écrire les équations de champ de la théorie $f(R)$ en ajoutant et en enlevant la même quantité ; à savoir les équations d'Einstein. D'autre part, le terme $f'(R)\left[\frac{R}{2} g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} + \kappa T_{\mu\nu}\right] - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) + \Box f'(R) g_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu}$ s'annule car ce n'est rien d'autre que la condition (3.6) quand $\kappa T_{\mu\nu}$ est remplacé par $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$. En fait nous sommes obligés de faire une telle substitution malgré le fait que nous n'avons pas encore prouvé que $g_{\mu\nu}$ est une solution de la relativité générale car nous avons considéré le même tenseur d'énergie-impulsion pour les deux théorie. Donc $f^{'}(R)\left[R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu}\right] = 0$. Comme la fonction $f(R)$ n'est pas constante mais a en général une expression bien déterminée en terme de R qui est également une fonction dépendant du système de coordonnée ; la dérivée $f^{'}(R)$ ne peut pas s'annuler identiquement. Par conséquent $R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu} = 0$, ce qui prouve que $g_{\mu\nu}$ est une solution de la relativité générale. Il existe tout de même la possibilité d'avoir une dérivée nulle dans la cas particulier d'un espace-temps avec un scalaire de courbure constant, c'est-à-dire complètement indépendant des coordonnées qui aurait donc la même valeur constante en tous point de l'espace-temps comme c'est le cas des espace-temps du type de Sitter. Si par exemple $f(R) = R^2 - 8\Lambda$ et la métrique conduit à un scalaire de Ricci constant : $R = g_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = 4\Lambda$ alors $f^{'}(R) = f^{'}(4\Lambda) = [2R - 8\Lambda]_{R=4\Lambda} = 0$. En réalité ceci ne constitue aucun problème car cette condition est assez solide pour être valide même quand $f^{'}(R) = 0$. En effet dans ce cas, les équations de champs (3.4) de la théorie $f(R)$ sont données par

$$\frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} + \kappa T_{\mu\nu} = 0, \tag{3.8}$$

et peuvent être mises sous la forme équivalente

$$\left[R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu}\right] + \left[R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left[f(R) + (R - 2\Lambda)\right]g_{\mu\nu}\right] = 0, \tag{3.9}$$

en ajoutant et en enlevant les équations d'Einstein. On constate clairement que le premier terme entre parenthèses représente les équations d'Einstein et le second, la condition (3.6) dans le cas particulier où $f^{'}(R) = 0$. Donc si $g_{\mu\nu}$ est une solution de la théorie $f(R)$ et la condition (3.6) est satisfaite, le second terme s'annule et la métrique sera nécessairement une solution de la relativité générale.

Ainsi nous concluons que quelque soit la forme des fonctions $f(R)$ et du scalaire de Ricci, la condition (3.6) est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une métrique, solution de la relativité générale ou de la théorie $f(R)$, soit simultanément une solution pour les deux théories.

3.1.2 Espace-temps avec scalaire de courbure constant ($R = R_0$)

Les espace-temps caractérisés par un scalaire de Ricci constant possèdent un certain intérêt physique. En effet l'une des meilleures descriptions d'un trou noir est celle fournie par la solution de Schwarzschild et De Sitter. Quand on est dans ce cas où R_0 est un nombre réel, quelque soit la fonction $f(R)$, sa dérivée est toujours constante au point ce qui fait que les composantes de $\nabla_\mu \nabla_\nu f^{'}(R_0)$ et le terme $\Box f'(R_0)$ s'annulent et on peut déduire du théorème précédent le corollaire suivant

Corollaire 1 : Si $g_{\mu\nu}$ est une solution de la théorie de la relativité générale conduisant à un scalaire de Ricci constant et on a une théorie $f(R)$, il faut et il suffit que cette métrique vérifie la condition

$$\left[f'(R_0) - 1\right] R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left[f(R_0) - (R_0 - 2\Lambda)\right] g_{\mu\nu} = 0, \tag{3.10}$$

pour qu'elle soit solution des deux théories.

Démonstration : Il s'agit juste d'un cas particulier de la condition (3.6) quand $R = R_0$ et $\nabla_\mu \nabla_\nu f^{'}(R_0) = 0$, $\Box f'(R_0) = 0$.

De cette condition on peut apprendre beaucoup d'informations au sujet de la relation $f(R)$-GR, comme nous allons le voir dans ce qui suit.

Corollaire 2 : Pour les espace-temps caractérisés par une courbure scalaire constante R_0 ; la relativité générale et les théories $f(R)$ telles que

$$\begin{aligned} f'(R_0) &= 1 \\ f(R_0) &= R_0 - 2\Lambda, \end{aligned} \tag{3.11}$$

sont équivalentes, c'est-à-dire qu'elles ont exactement les mêmes solutions conduisant à des espace-temps avec une courbure scalaire égale à R_0.

Démonstration : Soit $g_{\mu\nu}$ une solution pour la théorie $f(R)$ telle que $g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R_0$. Quand le scalaire de Ricci est constant, les équations de champ (3.4) de la théorie $f(R)$, sont données par

$$f^{'}(R_0) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R_0) g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \tag{3.12}$$

Donc pour les théories $f(R)$ telles que $f'(R_0) = 1$ et $f(R_0) = R_0 - 2\Lambda$, les équations (3.12) seront identiques aux équations de la relativité générale, ce qui signifie que toutes les solutions de la théorie $f(R)$ sont également des solutions de la relativité générale et vice verse. Une autre manière de prouver ce corollaire est de voir que si $f'(R_0) = 1$ et $f(R_0) = R_0 - 2\Lambda$, la condition nécessaire est suffisante (3.10) pour laquelle une métrique solution de l'une de deux théories devient une solution pour les deux théories, est satisfaite.

Corollaire 3 : Les solutions du vide de la relativité générale sont également des solutions du vide d'une théorie $f(R)$ si et seulement si

$$\Lambda f'(4\Lambda) - \frac{1}{2} f(4\Lambda) = 0. \tag{3.13}$$

Démonstration : Soit $g_{\mu\nu}$ une solution du vide de la relativité générale et $f(R)$ une fonction telle que $\Lambda f'(4\Lambda) - \frac{1}{2} f(4\Lambda) = 0$. Comme $g_{\mu\nu}$ est une solution de la relativité générale, on a $g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 4\Lambda$, alors les équations d'Einstein se simplifient en $R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 0$, d'où $\left[\Lambda f'(4\Lambda) - \frac{1}{2} f(4\Lambda)\right] g_{\mu\nu} - (R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}) = 0$. Si on développe cette dernière équation et on remplace le terme $f'(4\Lambda)\Lambda g_{\mu\nu}$ par $f'(4\Lambda) R_{\mu\nu}$, on peut réécrire cette équation sous la forme équivalente $[f'(4\Lambda) - 1] R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}[f(4\Lambda) - 2\Lambda] g_{\mu\nu} = 0$ qui signifie que $g_{\mu\nu}$ est aussi une solution du vide de la théorie $f(R)$ car cette équation n'est rien d'autre que la condition nécessaire et suffisante (3.10) pour laquelle une solution de la relativité générale devient une solution de la théorie $f(R)$, dans le cas particulier où $R_0 = 4\Lambda$, c'est-à-dire le vide.

Corollaire 4 : Pour des variétés caractérisées par un tenseur de Ricci nul, la relativité générale et les théories $f(R)$ telles que

$$f(0) = -2\Lambda, \tag{3.14}$$

sont équivalentes, en d'autres termes toutes les solutions de la relativité générale décrivant de telles variétés sont solutions des théories $f(0) = -2\Lambda$ et visse versa.

Démonstration : Soit $g_{\mu\nu}$ une métrique telle que $R_{\mu\nu} = 0$, alors $R = 0$. Selon les équations de champ (3.12) de la théorie $f(R)$, si $g_{\mu\nu}$ est une solution d'une théorie $f(R)$ telle que $f(0) = -2\Lambda$, cette métrique satisfait $\Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$, qui est exactement l'équation d'Einstein pour $R_{\mu\nu} = 0$ c'est-à-dire que les équations de la relativité générale et celles des théories $f(0) = -2\Lambda$

sont identiques pour les espaces-temps où la tenseur de Ricci est nul.

Corollaire 5 : Pour des espaces-temps avec un scalaire de Ricci R_0 constant, la relativité générale et les théories $f(R)$ telles que

$$R_0 f'(R_0) - 2f(R_0) + R_0 - 4\Lambda \neq 0, \tag{3.15}$$

ne possèdent aucune solution commune.

Démonstration : Nous avons prouvé que si une métrique est une solution de la relativité générale et de la théorie $f(R)$, la fonction $f(R)$ satisfait nécessairement la condition nécessaire et suffisante (3.10), par conséquent elle satisfait également sa trace qui est donnée par

$$R_0 f'(R_0) - 2f(R_0) + R_0 - 4\Lambda = 0, \tag{3.16}$$

ainsi si une fonction $f(R)$ ne satisfait pas cette trace, la condition (3.10) ne peut pas être satisfaite et la métrique ne peut donc pas être solution des deux théories.

3.1.3 Remarques

1) Il faut comprendre que la fonction $f(R) = R - 2\Lambda$ correspondant à la relativité générale et sa dérivée première, n'est pas l'unique fonction vérifiant les conditions (3.11), (3.13), (3.14). Comme R_0 est un nombre réel, on peut avoir une infinité de fonctions $f(R)$ différentes par leurs forme générale, ayant la même image $f(R_0)$ au point R_0, comme nous allons le voir dans ce qui suit.

2) En l'absence de constante cosmologique, le corollaire 3 stipule que toute les solutions du vide de la relativité générale sont également solutions du vide d'une théorie $f(R)$ si et seulement si

$$f(0) = 0. \tag{3.17}$$

Ce résultat a également été déduit par J. D. Barrow et A. C. Ottewill *[31]* en utilisant une approche différente avec comme hypothèse $f'(0) \neq 0$, qui selon notre approche ne semble pas être vraiment une condition nécessaire pour que les deux théories aient les mêmes solutions du vide.

3) Les conditions sur les fonctions $f(R)$ que nous avons obtenues et pour lesquelles la relativité générale et la théorie $f(R)$ aient les mêmes solutions correspondant à un scalaire de Ricci constant, doivent également êtres perçues comme des conditions d'existence pour ces fonctions. En effet pour une courbure scalaire constante R_0, on peut facilement voir de (3.11), (3.13), (3.14) qu'il existe une infinité de fonctions vérifiant ces conditions c'est-à-dire que quelque soit la solution de la relativité générale conduisant à un scalaire de Ricci constant, il existe au moins une théorie $f(R) \neq R - 2\Lambda$ qui a les mêmes solutions pour R_0, ce qui n'est pas le cas si R n'est pas constant, comme nous allons le voir dans ce qui suit.

3.2 Formes des fonctions $f(R)$ pour les théories $f(R)$ équivalentes à la relativité générale correspondant à une forme spécifique du scalaire de Ricci

On peut s'interroger sur l'intérêt principal du théorème précédent et des corollaires qui en découlent. En réalité, ce théorème et ses conséquences donnent la possibilité de savoir si une théorie $f(R)$ donnée peut avoir les mêmes solutions que la relativité générale pour une forme donnée du scalaire de Ricci. Ceci est très commode si par exemple on veut juste obtenir des solutions exactes d'une théorie $f(R)$, où sans prendre la peine de résoudre des équations de champs plus compliquées en générale même pour le cas le plus banal, on peut directement prendre celles de la relativité générale. Un autre avantage est d'être capable de savoir si pour une solution donnée de la relativité générale il existe ou non, des théories $f(R)$ qui admettent une telle solution en allant jusqu'à obtenir la forme de telles fonctions comme nous allons le montrer.

3.2.1 Conditions sur les paramètres d'une classe de théories $f(R)$

Dans la littérature, quand on parle d'une théorie $f(R)$ on entend souvent une classe de fonctions appelée également modèle $f(R)$ dépendant d'un ou de plusieurs paramètres. Une conséquence intéressante du théorème et des corollaires précédents, est de pouvoir fixer les conditions sur ces paramètres pour que cette classe et la relativité générale aient les mêmes solutions pour une courbure scalaire constante. Pour illustrer ce fait, considérons le modèle

$$f(R;\alpha,\beta) = R + \alpha\beta^{1-p}R^p \text{ avec : } 0 < p < 1,\ \alpha,\ \beta > 0, \tag{3.18}$$

proposé dans [32] comme un modèle candidat pour expliquer un univers sans énergie sombre. De (3.16) on déduit que ces paramètres doivent nécessairement satisfaire la condition

$$(p-2)\,\alpha\beta^{1-p}R_0^p - 4\Lambda = 0, \tag{3.19}$$

pour permettre aux solutions de la relativité générale d'être des solutions pour ce modèle. Bien sûr cette condition certes nécessaire, est à elle seule insuffisante pour pouvoir affirmer que les solutions de la relativité générale sont également solutions pour ce modèle. D'autre part, la condition (3.11) se traduit par

$$\begin{cases} \alpha\beta^{1-p}pR_0^{p-1} = 0 \\ \alpha\beta^{1-p}R_0^p + 2\Lambda = 0 \end{cases}. \tag{3.20}$$

Comme $0 < p < 1$; α, $\beta > 0$, cette condition n'est pas vérifiée si $R_0 \neq 0$. Ceci ne signifie nécessairement pas que la relativité générale et ce modèle ne possèdent pas de solutions communes ; car il s'agit d'une condition suffisante mais non nécessaire. En revanche en l'absence de la constante cosmologique, le système d'équations (3.20) est vérifié dans le cas où $R_0 = 0$, qui nous dit que la relativité générale et ce modèle sont équivalents pour décrire les espaces-temps à scalaire de courbure nul, vu qu'ils ont exactement les mêmes solutions. On peut en particulier affirmer que les solutions du vide des équations d'Einstein sans constante cosmologique, sont également des solutions du vide pour ce modèle, ce qui peut également être confirmé par la condition (3.17), du moment que $\forall\alpha$, β, p telles que $0 < p < 1$; α, $\beta > 0$, on a $f(0;\alpha,\beta) = 0$. Si par contre $\Lambda \neq 0$, on peut affirmer selon (3.13) que toutes les solutions du vide de la relativité générale sont également des solutions du vide des équations de champ générées par la théorie $R + \alpha\beta^{1-p}R^p$ si et seulement si

$$(p-2)\,\alpha\beta^{1-p}\,(4\Lambda)^p - 4\Lambda = 0. \tag{3.21}$$

C'est la méthode à adopter pour savoir si un modèle donné possède les mêmes solutions que la relativité générale, ainsi que les conditions que ses paramètres doivent satisfaire pour qu'il en soit ainsi.

3.2.2 Construction des théories $f(R)$ équivalentes à la relativité générale pour un scalaire de courbure constant

Comme les conditions faisant que la relativité générale et la théorie $f(R)$ aient les mêmes solutions, ont été obtenues, nous sommes maintenant en mesure d'avoir plus d'informations au sujet de la forme de telles fonctions. Autrement dit, il sera possible à partir d'une solution de la relativité générale, de construire les théories $f(R)$ qui possèdent les mêmes solutions.

Corollaire 6 : Les solutions du vide de la relativité générale sont aussi solutions du vide des théories $f(R)$ telles que

$$f(R) = \exp\left(\frac{R}{2\Lambda}\right)\left[\frac{1}{\Lambda}\int F(R)\exp\left(-\frac{R}{2\Lambda}\right)dR + k\right], \tag{3.22}$$

où k est une constante arbitraire et $F(R)$ est également une fonction arbitraire qui s'annule pour $R = 4\Lambda$.

Démonstration : Soit $g_{\mu\nu}$ une solution du vide de la relativité générale et f une fonction de R. Considérons l'équation différentielle linéaire

$$\Lambda f'(R) - \frac{1}{2}f(R) = F(R), \tag{3.23}$$

où F est une fonction quelconque telle que $F(4\Lambda) = 0$. Alors toutes les solutions de cette équation vérifient la condition (3.13) pour $R = 4\Lambda$. Par conséquent $g_{\mu\nu}$ sera également une solution des théories $f(R)$ générées par les fonctions de la forme (3.22), étant donné que l'expression (3.22) n'est rien d'autre que la solution générale de l'équation (3.23) et k est une constante d'intégration arbitraire.

On voit clairement que $f(R) = R - 2\Lambda$ correspondant à la relativité générale n'est pas l'unique fonction vérifiant la condition (3.13). Ceci correspond juste au choix particulier où la fonction $F(R)$ est égale à $2\Lambda - \frac{R}{2}$ et à une constante d'intégration nulle, parmi une infinité de choix possibles pour $F(R)$. Par exemple, si on choisit le cas le plus simple où $F(R) = 0$ on obtient compte tenu de (3.22), la théorie $f(R) = k\exp\left(\frac{R}{2\Lambda}\right)$ et ainsi de suite.

Dans le cas général d'un scalaire de Ricci constant mais non nécessairement égal à 4Λ, la tâche d'obtenir de telles fonctions est beaucoup plus simple. Tout ce que nous avons à faire est de choisir n'importe quelle fonction dépendant d'au moins deux paramètres, pour lui imposer la condition (3.11) et obtenir deux équations qui détermineront des conditions sur ces paramètres voir carrément ces paramètres, si notre choix repose sur une fonction ne dépendant que de deux paramètres. A titre d'exemple, considérons la fonction

$$f(R) = \alpha R^n + \beta R^m, \tag{3.24}$$

où α et β sont deux paramètres réels et n, $m \in \mathbb{N}^*(n \neq m)$. Selon la condition (3.11) ; il suffit juste d'imposer à α et β de satisfaire le système d'équations

$$\begin{cases} n\alpha R_0^{n-1} + \beta m R_0^{m-1} = 1 \\ \alpha R_0^n + \beta R_0^m = R_0 - 2\Lambda \end{cases}, \tag{3.25}$$

si on veut faire d'une solution $g_{\mu\nu}$ de la relativité générale telle que $R_0 = g_{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, une solution pour cette théorie $f(R)$. La solution du système d'équations (3.25) est

$$\begin{cases} \alpha = \frac{(1-m)R_0+2m\Lambda}{(n-m)R_0^n} \\ \beta = \frac{(n-1)R_0-2n\Lambda}{(n-m)R_0^m} \end{cases}. \tag{3.26}$$

Par conséquent, $g_{\mu\nu}$ est aussi une solution de la théorie $f(R)$ telle que

$$f(R) = \frac{(1-m)\,R_0 + 2m\Lambda}{(n-m)\,R_0^n} R^n + \frac{(n-1)\,R_0 - 2n\Lambda}{(n-m)\,R_0^m} R^m. \tag{3.27}$$

Il existe également une autre façon semblable d'obtenir plus de classes de fonctions $f(R)$ qui possèdent les mêmes solutions que la relativité générale à l'aide de différentes combinaisons de $f'(R_0)$ et $f(R_0)$ permettant d'obtenir différentes formes d'équations différentielles dont la résolution permettra de déterminer la fonction $f(R)$. En effet, compte tenu de (3.11) on peut écrire

$$f'(R_0) + f(R_0) = R_0 - 2\Lambda + 1. \tag{3.28}$$

Donc, toutes les solutions de l'équation différentielle linéaire

$$f'(R) + f(R) = U(R), \tag{3.29}$$

où $U(R_0) = R_0 - 2\Lambda + 1$; seront nécessairement solutions de l'équation (3.28). La solution générale de (3.29) est donnée par

$$f(R) = \exp(-R)\left(\int U(R)\exp(R)\,dR + c_1\right). \tag{3.30}$$

à qui il faut imposer la condition (3.11), pour déterminer la valeur de la constante d'intégration c_1, donnée par

$$c_1 = (R_0 - 2\Lambda)\exp(R_0) - \left[\int U(R)\exp(R)\,dR\right]_{R=R_0}. \tag{3.31}$$

On peut choisir une autre combinaison de $f(R_0)$ et $f'(R_0)$ en conformité avec (3.11), comme par example

$$f'(R_0)\,f(R_0) = R_0 - 2\Lambda, \tag{3.32}$$

puis résoudre l'équation différentielle

$$f'(R)\,f(R) = Q(R), \tag{3.33}$$

où $Q(R_0) = R_0 - 2\Lambda$, pour obtenir la fonction

$$f(R) = \pm\sqrt{2\int Q(R)\,dR + c_2}, \tag{3.34}$$

où la constante d'intégration c_2 est déterminée par la condition (3.11), ce qui donne

$$c_2 = (R_0 - 2\Lambda)^2 - 2\left[\int Q(R)dR\right]_{R=R_0}. \tag{3.35}$$

Ce processus peut être répété plusieurs fois avec d'autres combinaisons pour obtenir plus de théories $f(R)$.

3.2.3 Construction des fonctions $f(R)$ pour des espaces-temps où R n'est pas constant (cas d'un espace-temps à symétrie maximale)

Bien que la condition suffisante et nécessaire (3.6) faisant d'une métrique $g_{\mu\nu}$ une solution à la fois de la relativité générale et de la théorie $f(R)$ est générale, l'obtention des fonctions $f(R)$

satisfaisant à cette condition n'est pas simple quand le scalaire de Ricci n'est pas constant, en raison du fait que la dérivée covariante $\nabla_\mu \nabla_\nu f^{'}(R)$ n'est pas nulle. A l'exception de la condition (3.6) nous ne sommes pas en mesure d'obtenir des conditions simples applicables à la fonction $f(R)$ comme conditions générales qui peuvent mener à la construction des fonctions $f(R)$ de manière simple, comme pour le cas d'une courbure scalaire constante. Par conséquent, cette construction doit se faire au cas par cas suivant la forme de la métrique et du scalaire de Ricci, en ayant en tête que dans le cas générale rien ne garanti l'existence nécessaire des théories $f(R)$ équivalentes à la relativité générale quelque soit la solution considérée. La première étape à suivre consiste à se donner une solution de la relativité générale telle que R ne soit pas constant. Pour cela nous allons choisir d'étudier l'une des solutions les plus pertinentes de la relativité générale et de la cosmologie, à savoir la métrique FLRW en essayant d'apporter une réponse à la question : existe-il des théories $f(R)$ qui admettent la solution FLWR comme solution ?

La métrique FLRW décrit un espace-temps à symétrie maximale ; il est bien connu qu'en coordonnées sphériques, la forme la plus générale d'une métrique à symétrie maximale est donnée par

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right], \tag{3.36}$$

où $a(t)$ est une fonction arbitraire ne dépendant que du temps, et K est la courbure de l'espace qui peut prendre une valeur positive pour une géométrie sphérique de l'espace, négative pour le cas hyperbolique et nulle pour le cas plat, à ne pas confondre avec le scalaire de Ricci R qui est la courbure de l'espace-temps. Pour $c = 1$, les composantes non nulles du tenseur et du scalaire de Ricci sont respectivement données par

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, \\ R_{ij} &= \left[\ddot{a}a + 2\left(\dot{a}^2 + K\right)\right]\sigma_{ij}, \end{aligned} \tag{3.37}$$

$$R = 6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2}\right], \tag{3.38}$$

et le point représente la dérivée par rapport au temps ; $\sigma_{ij}dx^i dx^j = \frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta + d\varphi^2\right)$; i et j prennent les valeurs : $1, 2, 3$ et comme il n'y a aucune confusion sur la dépendance temporelle de la fonction $a(t)$ nous préférons la noter simplement a. Il convient de préciser que si R

n'est pas constant, il ne dépend que du temps. Pour donner un sens physique à cette métrique, il faut lui imposer les équations d'Einstein. Dans ce cas l'espace-temps à symétrie maximale représente physiquement l'univers isotrope et homogène en expansion ou en contraction selon le comportement de la fonction a qui est précisément le facteur d'échelle de cet univers. Energie et matière sont décrites par le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$. Pour le modèle d'un fluide parfait, compatible avec l'univers homogène et isotrope, la forme matricielle du tenseur d'énergie-impulsion est donnée par

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{1-Kr^2}p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2r^2p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2r^2\sin^2\theta p \end{pmatrix}. \tag{3.39}$$

ρ est la masse volumique et p la pression. Ainsi en imposant les équations d'Einstein (3.1), on obtient les fameuses équations de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}, \tag{3.40}$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = -8\pi Gp + \Lambda. \tag{3.41}$$

Pour toute solution des équations de Friedmann (3.40), (3.41) notre objectif est de trouver les théories $f(R) \neq R - 2\Lambda$, pour lesquelles la métrique (3.36) serait également une solution, si une telle théorie existe. En général les équations de Friedmann ne possèdent pas de solutions analytiques, et il n'existe que quelques solutions exactes pour des cas particuliers. Alors, pour surmonter la difficulté d'avoir une formule générale pour le facteur d'échelle, l'idée consiste à écrire les équations de Friedmann sous la forme équivalente suivante

$$\dot{a}^2 - \frac{\Lambda}{3}a^2 - \frac{8\pi GN_0}{3}a^{-(1+3\omega)} + K = 0, \tag{3.42}$$

$$2a\ddot{a} + \dot{a}^2 - \Lambda a^2 + 8\pi GN_0\omega a^{-(1+3\omega)} + K = 0, \tag{3.43}$$

où nous avons pris en considération l'équation de continuité $\dot{\rho} = -3\left(\rho + p\right)\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)$ résultant de la conservation de l'énergie, et sa solution $\rho = \rho_0 a_0^{3(1+\omega)} a^{-3(1+\omega)}$ avec : $\rho_0 := \rho(0)$, $a_0 := a(0)$, $N_0 = \rho_0 a_0^{3(1+\omega)}$et l'équation d'état habituelle $p = \omega\rho$. De (3.42), on a

$$\dot{a} = \pm\sqrt{\frac{8\pi G N_0}{3} a^{-(1+3\omega)} + \frac{\Lambda}{3} a^2 - K}. \tag{3.44}$$

Si on combine cette dernière relation avec l'équation (3.43) ; on peut écrire la dérivée seconde du facteur d'échelle, uniquement en fonction de a,

$$\ddot{a} = -4\pi G N_0 \left(\omega + \frac{1}{3}\right) a^{-(3\omega+2)} + \frac{\Lambda}{3} a. \tag{3.45}$$

Compte tenu de (3.44), (3.45), le scalaire de Ricci (3.38) peut lui aussi s'écrire uniquement en terme du facteur d'echelle

$$R = 8\pi G N_0 (1 - 3\omega) a^{-3(\omega+1)} + 4\Lambda. \tag{3.46}$$

On peut voir que ω doit être différent de -1 et $\frac{1}{3}$ sinon, on a un scalaire de Ricci constant que nous avons auparavant considéré. Si par exemple ; R est égale à 4Λ; il s'agit de la solution des équations d'Einstein du vide pour un espace-temps à symétrie maximale c'est-à-dire l'espace-temps de de Sitter. De même N_0 doit être non nulle. Comme $\omega \neq -1, \frac{1}{3}$, la relation (3.46) peut être inversée pour écrire a en terme de R,

$$a = \left[\frac{R - 4\Lambda}{8\pi G N_0 (1 - 3\omega)}\right]^{\frac{-1}{3(\omega+1)}}. \tag{3.47}$$

Les fonctions $f(R)$ que nous cherchons doivent satisfaire l'équation (3.6). Compte tenu de la forme de la métrique et du scalaire de Ricci qui ne dépend que du temps ; la condition (3.6) s'écrit

$$\left[f'(R) - 1\right] R_{\mu\nu} - \left[\partial_0^2 f'(R) + \frac{1}{2} f(R) - \frac{R}{2} + \Lambda\right] g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu f'(R) = 0. \tag{3.48}$$

En raison de la symétrie, cette condition n'est formée que de deux équations indépendantes

$$\left[f'(R) - 1\right] R_{00} + \frac{1}{2} f(R) - \frac{R - 2\Lambda}{2} = 0, \tag{3.49}$$

et

$$\left[f'(R)-1\right]\left[\ddot{a}a+2\left(\dot{a}^2+K\right)\right]-\left[\partial_0^2 f'(R)+\frac{1}{2}f(R)-\frac{R}{2}+\Lambda\right]a^2=0. \tag{3.50}$$

De (3.37), (3.44), (3.45), on déduit la composante 00 du tenseur de Ricci

$$R_{00}=-3\left[\frac{\Lambda}{3}-4\pi G N_0\left(\omega+\frac{1}{3}\right)a^{-3(\omega+1)}\right], \tag{3.51}$$

qui d'après (3.47) peut être écrite en terme de R après élimination du facteur d'échelle,

$$R_{00}=\frac{1}{3\omega-1}\left[3(\omega+1)\Lambda-\frac{3\omega+1}{2}R\right]. \tag{3.52}$$

En utilisant (3.52), on peut écrire (3.49) sous la forme d'une équation différentielle du premier ordre pour la fonction $f(R)$,

$$\left[3(\omega+1)\Lambda-\frac{3\omega+1}{2}R\right]f'(R)+\left(\frac{3\omega-1}{2}\right)f(R)+(R-4\Lambda)=0. \tag{3.53}$$

De cette équation on constate qu'en l'absence de la constante cosmologique et pour $\omega=\frac{-1}{3}$, l'unique solution est $f(R)=R$ c'est-à-dire la relativité générale. Ce qui veut dire qu'il n'y'a aucune théorie $f(R)$ qui possède exactement le même facteur d'échelle que la relativité générale. D'autre part la solution générale de l'équation (3.53) est donnée par

$$f(R)=\begin{cases} C\left[\frac{3\omega+1}{2(1-3\omega)}R+\frac{3\Lambda(\omega+1)}{3\omega-1}\right]^{\frac{3\omega-1}{3\omega+1}}+\underbrace{(R-2\Lambda)}_{f_{RG}(R)} \text{ si } \omega\neq-1,\frac{-1}{3},\frac{1}{3} \\ \overline{C}\exp\frac{R}{2\Lambda}+\underbrace{(R-2\Lambda)}_{f_{RG}(R)} \text{ si } \omega=\frac{-1}{3},\ \Lambda\neq 0 \end{cases}, \tag{3.54}$$

où C et $\overline{C}$ sont deux constantes d'intégration. On confirme alors que la relativité générale appartient à cette classe de théorie du moment que c'est la théorie correspondant à une constante d'intégration nulle, comme il se doit, cependant ces classes de théories doivent aussi satisfaire la seconde équation (3.50) de la condition (3.48). Comme nous n'avons que deux équations indépendantes et la première est déjà satisfaite il faut et il suffit que la trace de l'équation

(3.48) soit satisfaite pour que la deuxième équation le soit. Cette trace est donnée par

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)^2 f^{'''}(R) + \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} f^{''}(R) - \frac{1}{3} R f^{'}(R) + \frac{2}{3} f(R) - \frac{R - 4\Lambda}{3} = 0. \tag{3.55}$$

Compte tenu de (3.44), (3.45), (3.46), (3.47), (3.54), si $\omega \neq -1, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}$, cette trace s'écrit

$$C \begin{bmatrix} \Lambda^2 \left(\omega + \frac{2}{3}\right) a^{6(\omega+1)} + 4\pi G N_0 \Lambda \left(7\omega + \frac{17}{3}\right) a^{3(\omega+1)} \\ -4\pi G N_0 K (3\omega + 5) a^{3\omega+1} - K\Lambda (3\omega + 4) a^{2(3\omega+2)} \\ -2 (4\pi G N_0)^2 \left(3\omega^2 + \omega - \frac{4}{3}\right) \end{bmatrix} = 0. \tag{3.56}$$

$C = 0$, est la solution évidente correspondant à la relativité générale. C'est en fait le terme entre crochets qui doit s'annuler s'il existe au moins une théorie $f(R) \neq R - 2\Lambda$ qui admet le facteur d'échelle de la relativité générale comme solution. Comme ce facteur d'échelle n'est pas constant, le terme entre crochets ne peut pas être identiquement nul quelque soit ω, K, Λ. On peut cependant noter qu'en l'absence de la constante cosmologique et pour un espace plat, cette trace s'annule si

$$3\omega^2 + \omega - \frac{4}{3} = 0, \tag{3.57}$$

c'est-à-dire si

$$\omega = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{6}. \tag{3.58}$$

Pour le second cas où $\omega = \frac{-1}{3}$, $\Lambda \neq 0$, la trace de (3.55) est donnée par

$$\overline{C} \left[\frac{1}{3} a^4 + \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{40\pi G N_0}{3} - 3K\right) a^2 + \frac{16\pi G N_0}{\Lambda^2} \left(\frac{8\pi G N_0}{3} - K\right)\right] = 0, \tag{3.59}$$

qui signifie que la théorie $f(R)$ telle que $f(R) = \overline{C} \exp \frac{R}{2\Lambda} + (R - 2\Lambda)$ et $\overline{C} \neq 0$ ne peut pas admettre le facteur d'échelle de la relativité générale comme solution. Précisons que ces résultats sont complètement indépendants du signe de la dérivée première du facteur d'échelle dans (3.44) qui était pris positif car si on refait les mêmes calculs avec un signe négatif nous aboutirons à la même conclusion stipulant que pour un univers homogène et isotrope les seuls théories $f(R)$

qui ont exactement le même facteur d'échelle que la relativité générale sont de la forme

$$f(R) = C\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1\pm\sqrt{17}}{3\mp\sqrt{17}}\right)R\right]^{\frac{\pm\sqrt{17}-3}{\pm\sqrt{17}+1}} + R, \tag{3.60}$$

à condition que l'espace soit plat et que la constante cosmologique soit nulle avec comme équation d'état

$$p = \frac{-1\pm\sqrt{17}}{6}\rho, \tag{3.61}$$

sinon les deux théories auront des solutions complètement différentes. Ce résultat nouveau, vient s'ajouter à d'autres résultats [33][34][35][36] relatifs à la solution FLRW dans le cadre de la théorie $f(R)$.

Chapitre 4

Simultanéité en relativité et transformation de Lorentz à l'échelle macroscopique

4.1 Introduction

Vers la fin du dix-neuvième siècle une crise profonde secoua la physique quand deux grandes théories parfaitement établies à savoir la théorie de l'électromagnétisme et la mécanique newtonienne entrèrent en opposition en raison de la non invariance sous une transformation de Galilée des équations de Maxwell, incorporant les lois de le l'électromagnétisme, contrairement au principe de relativité stipulant que toutes les lois de la physique doivent être identiques dans tous les référentiels, particulièrement les référentiels inertiels. La situation s'aggrava davantage lorsque la fameuse expérience de Michelson-Morley [37] confirma les prédictions théoriques des équations de Maxwell concernant l'invariance de la vitesse de la lumière qui doit être désormais considérée comme une constante universelle dans tous les référentiels ; contredisant un principe fondamentale de la mécanique classique selon lequel la vitesse de tout objet en mouvement doit nécessairement dépendre du référentiel par rapport à laquelle elle est mesurée, indépendamment de la nature de cet objet, sans aucune exception. Ainsi les physiciens de l'époque étaient confrontés à un problème de taille et pour la plupart d'entres eux, l'idée la plus simple pour résoudre ces problèmes consistant à remettre entièrement en question la théorie de l'électromagnétisme est certainement la moins envisageable dû au grand succès de la théorie de l'électromagnétisme qui non seulement est confirmée expérimentalement mais est à l'origine d'un progrès remarquable suite aux expériences du physicien allemand Heinrich Hertz et la découverte des ondes radio. Donc la meilleure des solutions serait de substituer à la transformation de Galilée une nouvelle transformation qui constituerait une symétrie pour les équations de Maxwell. Dans ce contexte quelques transformations ont été proposées par Voigt [38] Thomson [39], Larmor [40, 41], mais c'est à partir des travaux de Poincaré [42, 43, 44] et de Lorentz [45, 46, 47, 48, 49] qu'émargea la meilleure transformation garantissant l'invariance des équations de Maxwell en parfait accord avec les résultats de l'expérience de Michelson Morley. Cette transformation prendra le nom de transformation de Lorentz. En septembre 1905 Albert Einstein publia dans le Annalen der Physik son fameux article [50] mettant complètement fin aux problèmes suscités par l'introduction des équations de Maxwell, en montrant qu'à l'exception des lois de la gravitation, le principe de relativité s'étend à toutes les lois de la physique incluant celles de l'électromagnétisme quand la transformation de Lorentz est adoptée, c'est la naissance de la relativité restreinte une théorie qui apporta une nouvelle perception de l'espace et du temps, désormais liée pour former l'espace-temps à quatre dimensions. Bien que la théorie de la relativité restreinte ait connu un grand succès ; la nouvelle perception de l'espace qui se mêle au temps moins intuitive comparativement à la vision classique d'un espace séparé du temps, grandeur absolue, fut à l'origine d'un certain nombre de paradoxes, comme le célèbre paradoxe des jumeaux [51] et bien d'autres [52][53][54][55][56], qui malgré une ambigüité apparente naissant de l'introduction de nouveaux concepts comme la dilatation des durées et la contraction des longueurs ainsi que de nouvelles règles de simultanéité ; ne remettent en aucun cas sa validité, et possèdent souvent une explication rationnelle dans le cadre de la théorie. L'étude de tels paradoxes est d'une grande importance par le fait qu'ils aident à mieux comprendre le fondement de la relativité restreinte. Dans ce contexte nous proposons dans ce qui suit une expérience de pensée [57] à qui on donnera le nom de : "L'expérience de pensée du mètre ruban rétractable ", dont l'analyse par la transformation de Lorentz dévoilera quelques problèmes mathématiques que nous essayerons de résoudre.

4.2 La relativité restreinte à l'échelle macroscopique

Comme toute théorie bien fondée, la relativité restreinte a réussi jusqu'à présent tous les tests expérimentaux nécessaires à sa validation ; elle est quotidiennement confirmée dans les différents accélérateurs de particules au monde à chaque fois qu'il s'agit de mener des expériences à l'échelle subatomique à très hautes énergies, où il y'a une parfaite conformité entre résultats expérimentaux et théoriques. Si la relativité restreinte a connu tant de succès à l'échelle subatomique on peut alors se poser la question sur sa validité à l'échelle macroscopique ? Une réponse faisant presque l'objet d'un consensus de la part de la communauté scientifique serait de dire qu'elle est certainement vrai tant qu'il n'y'a aucune raison pour qu'elle ne le soit pas. Or en toute rigueur il n'existe aucune expérience mettant en jeu des objets macroscopiques permettant d'affirmer ou d'infirmer la validité de la théorie à cette échelle car pour accélérer un objet macroscopique aussi petit soit il à des vitesses relativistes, il faut une énergie colossale que les moyens et la technologie actuelle ne permettent pas d'atteindre, ce n'est pas pour autant qu'il faut abandonner complètement l'idée de concevoir une relativité restreinte à notre échelle tant que théoriquement parlant l'imagination et le raisonnement rationnel le permettent. Ainsi il faut tout d'abord commencer par définir le monde macroscopique dans lequel nous vivons qui peut être modélisé mathématiquement quand on ne tient pas compte des effets de la gravitation, par un ensemble de points M d'un espace affine ε associé à un espace euclidien E à trois dimensions telle que

$$\forall (a, b) \in \varepsilon^2 : (a, b) \rightarrow \overrightarrow{ab} \in E, \tag{4.1}$$

$$\forall (a, b) \in \varepsilon^2, \overrightarrow{ab} = -\overrightarrow{ba}, \tag{4.2}$$

$$\forall (a, b, c) \in \varepsilon^3, \overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc}, \tag{4.3}$$

$$p \in \varepsilon, \overrightarrow{v} \in E, \exists! p' \in \varepsilon : \overrightarrow{pp'} = \overrightarrow{v}. \tag{4.4}$$

Avec la structure du produit scalaire muni à cet espace et la norme d'un vecteur définie au moyen de ce produit scalaire par

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v}}. \tag{4.5}$$

Les axiomes (4.1), (4.2), (4.4), définissent complètement la géométrie de cet espace. La relativité restreinte s'introduit dans cet espace par la donnée de deux référentiels inertiels orthonormés que nous noterons respectivement par $R(O,x,y,z)$ et $R^{'}(O^{'},x^{'},y^{'},z^{'})$; où $R^{'}(O^{'},x^{'},y^{'},z^{'})$ est en mouvement rectiligne uniforme avec une vitesse relativiste V par rapport à $R(O,x,y,z)$ dans le sens positif de celui-ci. Il s'agit plus précisément d'établir un lien direct entre les coordonnées spatiotemporelles d'un point matériel M, exprimées dans ces deux référentielles par le biais de la transformation de Lorentz. En effet si on suppose que les origines des deux repères sont confondus $(O \equiv O^{'})$ à l'instant initial $(t = t^{'} = 0)$; cette transformation de Lorentz est donnée par

$$x^{'} = \gamma\left(x - Vt\right) \Leftrightarrow x = \gamma\left(x^{'} + Vt^{'}\right), \tag{4.6}$$

$$y^{'} = y, \tag{4.7}$$

$$z^{'} = z, \tag{4.8}$$

$$t^{'} = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \Leftrightarrow t = \gamma\left(t^{'} + \frac{V}{c^2}x^{'}\right), \tag{4.9}$$

où c est la vitesse de la lumière, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ et $(x(t), y(t), z(t))$, $(x^{'}(t^{'}), y^{'}(t^{'}), z^{'}(t^{'}))$ représentent les coordonnées cartésiennes du point matériel M, dont les vecteurs positions par rapport à $R(O,x,y,z)$ et $R^{'}(O^{'},x^{'},y^{'},z^{'})$ sont notés $\overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{r^{'}}$ respectivement. Comme $O^{'}$ est en mouvement le long de l'axe (ox) du référentiel $R(O,x,y,z)$ et la définition classique de la vitesse d'un point matériel : $\overrightarrow{V_M} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}$ est également admise en relativité restreinte ; le vecteur $\overrightarrow{OO^{'}}$ a une seule composante Vt; ainsi pour être en conformité avec les axiomes (4.2) et (4.3) on doit nécessairement avoir

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO^{'}} + \overrightarrow{O^{'}M} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Vt \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \\ z^{'} \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

donc

$$x = x^{'} + Vt \Leftrightarrow x^{'} = x - Vt, \tag{4.11}$$

qui n'est autre que la transformation de Galilée pour la coordonnée x, mais également

$$\overrightarrow{OO'} = -\overrightarrow{O'O} \Rightarrow \left\|\overrightarrow{OO'}\right\| = \left\|\overrightarrow{O'O}\right\|. \tag{4.12}$$

Le plus frappant lors de la comparaison de la transformation de Lorentz (4.6) à celle de Galilée (4.11), c'est bien l'introduction du facteur de Lorentz γ à qui on aurait bien aimé attribuer une certaine légitimité puisée des axiomes gouvernant la géométrie de l'espace à l'échelle macroscopique. On voit bien que la transformation de Galilée découle directement de l'axiome (4.3), et la notion d'un temps universel fait que la distance entre deux observateurs relativistes est une grandeur absolue à savoir qu'à un instant donnée les deux observateurs s'accordent toujours sur la mesure de cette distance, tandis que selon la transformation de Lorentz la distance en question n'est plus absolue mais dépend de l'observateur qui la mesure, principalement à cause du facteur de Lorentz à l'origine d'un concept complètement nouveau, celui de la contraction des longueurs [58] faisant que les deux observateurs n'ont pas la même appréciation de la distance qui les séparent, à l'opposé de la perception d'une distance macroscopique entres deux points a et b complètement indépendante du fait de mesurer la longueur ab de a à b ou de b à a en étant également indépendante de celui qui la mesure. Que ça soit a ou b qui fait la la mesure, on a la même longueur indépendamment de leurs mouvements respectifs. Nous pouvons alors s'attendre lors de l'application de la transformation de Lorentz dans des expériences macroscopiques concrètes, à certaines incompréhensions conceptuelles qui ne constituent nécessairement pas une invalidation de la théorie mais de simples nuances émanant des nouveaux concepts qui se heurtent à l'intuition et aux perceptions que nous avons des longueurs à l'échelle macroscopique. C'est justement dans ce contexte que nous proposons dans ce qui suit une expérience de pensée où les deux observateurs O et O', tentent de mesurer mutuellement la distance qui les sépare, afin de calculer la vitesse relative V.

4.3 L'expérience de pensée du mètre ruban rétractable

Si par incapacité technique nous n'arrivons pas à réaliser des expériences relativistes à l'échelle macroscopique, c'est par la pensée que nous pourrions atteindre cet objectif. Ce fut la voie suivie par Einstein lui même dès les premières années de la naissance de cette théorie.

Ainsi en attendant le jour où une technologie plus avancée permettrait de confirmer les différents phénomènes relativistes à l'échelle macroscopique. En suivant cette approche nous essayerons d'apporter une réponse à la question suivante : Si la relativité restreinte prédit une contraction des longueurs ; que se passerait-il si un mécanisme aille à l'encontre d'une telle contraction de part sa nature, exactement comme le ferait un mètre ruban rétractable en allongement permanent, lors d'une mesure de la distance entre deux observateurs inertiels en mouvement ? Pour le faire nous imaginerons l'expérience de pensée suivante.

4.3.1 Enoncé de l'expérience

Supposons que l'observateur O veut mesurer la vitesse de l'observateur $O^{'}$ qui est également intéressé de connaitre la vitesse de O. Ainsi chaque observateur aura besoin d'utiliser son horloge et trouver un moyen pour mesurer la distance qui le sépare de l'autre observateur. Sachant que $O^{'}$ est en mouvement rectiligne uniforme par rapport à O et un point A bien visible depuis O au repos par rapport au référentiel $R(O,x,y,z)$ se trouvant à une distance $\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = L$ de O dans le sens positif de l'axe (ox) ; O doit juste attendre que $O^{'}$ atteigne A pour regarder son horloge lui indiquant un certain temps $t = T$ pour conclure donc que la vitesse de $O^{'}$ est

$$V = \frac{L}{T}. \tag{4.13}$$

Pour mesurer la distance $\left\|\overrightarrow{O^{'}O}\right\|$, l'observateur $O^{'}$ utilise un mètre ruban rétractable. A l'instant initial ($t = t^{'} = 0$, $O \equiv O^{'}$) celui-ci accroche l'extrémité indiquant le zéro du ruban rétractable au point O (on peut par exemple imaginer que ce bout soit tenu par l'observateur O) tandis qu'il tire avec lui l'autre extrémité lors de son mouvement de manière à ce que le zéro du ruban reste toujours fixé à O. En faisant ainsi, l'observateur $O^{'}$ sera capable à tous moment de connaitre la distance qui le sépare de O, vu qu'il lui suffit juste de lire la mesure de cette distance sur le bout du mètre ruban qu'il tire avec lui en permanence. Si $O^{'}$ décide de mesurer cette distance à l'instant $t^{'} = T^{'}$ correspondant exactement au moment où il arrive en A ; le mètre ruban ne peut lui indiquer une mesure autre que la distance L, vu que le point zéro du ruban est resté fixé à O et le mouvement rectiligne de $O^{'}$ fait que ce ruban est tiré linéairement ; donc la longueur de la partie tirée du mètre ruban ne peut être différente de la distance de O à A c'est-à-dire L.

En se basant sur la mesure lue sur le mètre ruban, l'observateur $O^{'}$ peut donc conclure que O s'éloigne de lui avec une vitesse

$$V^{'} = \frac{L}{T'}. \tag{4.14}$$

Il convient de préciser que $V^{'}$ est positive car elle représente la norme du vecteur vitesse de O par rapport à $R^{'}(O^{'}, x^{'}, y^{'}, z^{'})$: $\overrightarrow{V'} = -V' \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$, alors que $\vec{V} = V \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$ est le vecteur vitesse de $O^{'}$ par rapport à $R(O, x, y, z)$. Bien évidement l'usage des composantes du vecteur vitesse à la place de sa norme n'affecte en rien le raisonnement à suivre, c'est juste une question de choix de recourir à la norme du vecteur vitesse plutôt qu'à sa composante ; un choix commode permettant d'éviter le signe négatif au risque de l'omettre. Les mesures expérimentales (4.13), (4.14) doivent maintenant être confrontées à la théorie pour une analyse mathématique.

4.3.2 Analyse mathématique de l'expérience

Essayons d'analyser cette expérience à l'aide d'un raisonnement logique. Quand $O^{'}$ arrive au niveau du point A, fixe par rapport à $R(O, x, y, z)$; l'observateur O constate que celui-ci se trouve à une distance $\left\|\overrightarrow{OO^{'}}\right\| = \left\|\overrightarrow{OA}\right\| = L$, de lui. La perception de $O^{'}$ de la distance $\left\|\overrightarrow{O^{'}O}\right\|$ le séparant de O au moment où il rencontre A, sera au préalable notée par $L^{'}$dans le but d'établir sa véritable relation avec L, et on ne peut bien évidemment avoir que deux possibilités. Soit

$$L = L^{'}, \tag{4.15}$$

ou

$$L \neq L^{'}. \tag{4.16}$$

Ces deux cas de figure doivent donc êtres examinés séparément pour ne garder que la proposition vraie et rejeter la fausse.

1. $L = L^{'}$: C'est ce qu'on doit avoir si on se fie au résultat expérimental, car L est la mesure de la distance séparant les deux observateurs procurée par le mètre ruban à l'observateur $O^{'}$au moment où il arrive à la localité A. Il y'a de fortes raisons de croire cette mesure d'autan plus qu'elle est en parfaite accord avec (4.12) et la vision macroscopique de la distance entre deux points. A notre échelle, l'intuition voudrait qu'instantanément un mètre ruban mesure

toujours la même longueur entre deux observateurs qui le tiennent par ses deux extrémités de manière linéaire, indépendamment du sens dans lequel cette mesure est effectuée, de même pour la façon avec laquelle il est tiré, c'est-à-dire lentement ou rapidement avec ou sans variation de vitesse pour insinuer que même si les deux observateurs n'étaient pas relativistes ou si l'un des deux accélère par rapport à l'autre, un mètre ruban fournira toujours la même longueur entre deux points, pourvu qu'il ne se courbe pas lors de son tirage, chose tout à fait réalisable techniquement par le choix d'une rigidité adaptée à sa vitesse, de telle manière à ce qu'il reste toujours droit. Le problème avec un tel raisonnement vraisemblablement cohérent, est que la contraction des longueurs prédite par la transformation de Lorentz faisant que la distance entre les deux observateurs mesurée par O ne serait pas la même que celle mesurée par $O^{'}$, n'aura plus d'existence, causant une incompatibilité avec la transformation de Lorentz car selon cette dernière les horloges en mouvement ne peuvent pas mesurer la même durée, et on doit nécessairement avoir $T \neq T^{'}$, ce qui mènerait d'après (4.13) et (4.14) à

$$V \neq V^{'}, \tag{4.17}$$

contredisant l'égalité des vitesses relatives

$$V = V^{'}, \tag{4.18}$$

qui résulte de la transformation de Lorentz. Par conséquent nous n'avons pas d'autres choix que de considérer la seconde possibilité comme unique alternative permettant d'éviter le problème de la différence des vitesses relatives, en réhabilitant à nouveau le concept de contraction des longueurs contrairement à la mesure fournie par le mètre ruban.

2. $L \neq L^{'}$: Dan ce cas nous sommes parfaitement en accord avec les prédictions de la transformation de Lorentz, à savoir l'égalité (4.18) et la contraction des longueurs. En effet soient $x_{o^{'}}$, $x_{o}^{'}$ les coordonnées cartésiennes de $O^{'}$ et O par rapport à $R(O, x, y, z)$ et $R^{'}(O^{'}, x^{'}, y^{'}, z^{'})$ respectivement. Quand $O^{'}$ atteint A, son horloge indique un temps $t^{'} = T^{'}$, tandis que celle de O montre $t = T$. Comme à l'instant T, l'observateur $O^{'}$ est situé à une distance $\left\| \overrightarrow{OO^{'}} \right\| =$

$\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = \sqrt{x_{o'}^2} = \left|x_{o'}\right| = L$, de O ; selon (4.6)

$$\left|x_{o'}\right| = \left|\gamma V T'\right| = \gamma V T' = L. \tag{4.19}$$

Lorsque $O^{'}$ arrive au niveau de A, il observe O à une distance $\left\|\overrightarrow{O^{'}O}\right\| = \sqrt{x_o^{'2}} = \left|x_o^{'}\right| = L^{'}$. Selon la transformation de Lorentz (4.6), nous avons

$$\left|x_o^{'}\right| = |-\gamma V T| = \gamma V T = L^{'}. \tag{4.20}$$

Comme la théorie stipule que $T \neq T^{'}$; nous confirmons de (4.19), (4.20) que $L \neq L^{'}$. Autrement dit, la transformation de Lorentz nous dit qu'en raison de la contraction des longueurs faisant que $L \neq L^{'}$, les observateurs en mouvement n'ont pas la même appréciation de la distance qui les séparent, cette différence dans la mesure de la distance mutuelle est compensée par la différence dans la mesure du temps ($T \neq T^{'}$) de telle sorte à ce que les rapports $\frac{L}{T}$, $\frac{L^{'}}{T^{'}}$ soient toujours égaux, garantissant ainsi l'égalité permanente (4.18), des vitesses relatives conformément à la transformation de Lorentz. Malheureusement un tel raisonnement pourtant cohérent, conduira à d'autres contradictions mathématiques. En effet, si $V = V^{'}$ c'est-à-dire $\frac{L}{T} = \frac{L^{'}}{T^{'}}$ avec $L \neq L^{'}$ et $T \neq T^{'}$ comme le suggère la transformation de Lorentz, cela signifie d'après (4.19), (4.20) que

$$\frac{\gamma V T^{'}}{T} = \frac{\gamma V T}{T^{'}} \Longrightarrow T^{'} = \pm T. \tag{4.21}$$

Comme T et T' sont bien évidemment strictement positifs, la seuls possibilité est d'avoir

$$T^{'} = T, \tag{4.22}$$

qui contredit l'hypothèse $T \neq T^{'}$. D'autre part on déduit de (4.9), que

$$\begin{cases} T^{'} = \gamma T \\ T = \gamma T^{'} \end{cases}, \tag{4.23}$$

d'où

$$\gamma = \pm 1, \tag{4.24}$$

qui est également absurde car γ est une quantité strictement positive par hypothèse et le fait que V soit non nulle, implique que $\gamma \neq 1$. On peut cependant espérer que la formulation quadridimensionnelle de la théorie pourrait nous éviter ces problèmes mathématiques d'autant plus que la relativité restreinte considère une espace qui se mêle au temps pour former l'espace-temps rendant cette formulation plus adaptée à celle qui considère un espace à trois dimensions séparé du temps. En vérité ceci ne change absolument rien, tout simplement car l'ensemble de tous les points de l'espace-temps (les événements) est également un espace affine associé à un espace pseudo-euclidien à quatre dimensions, c'est-à-dire l'espace de Minkowski où chaque point est décrit par la quadri-position $x^{\mu} := (ct, \overrightarrow{r})$ pour laquelle la partie spatiale obéit à toutes les règles de la géométrie euclidienne en conformité avec les axiomes (4.1), (4.2), (4.3), (4.4). Tout ce que nous aurons à faire pour prouver notre argument et de bien définir nos événements ; où nous avons précisément deux : Le premier est l'arrivée de $O^{'}$ en A. Les quadri-positions pour cet événement dans le repère R_O attaché à O et $R_{O'}$, le repère qui a pour origine $O^{'}$ dans l'espace de Minkowski, sont respectivement

$$x^{\mu}_{o'} \equiv \left(cT,\ x_{o'} = L,\ 0,\ 0\right),\ x^{'\mu}_{o'} \equiv \left(cT^{'},\ x^{'}_{o'} = 0,\ 0,\ 0\right), \tag{4.25}$$

donc

$$x^{\mu}_{o'} = \Lambda_{\nu}{}^{\mu} x^{'\nu}_{o'} \Rightarrow \begin{cases} T = \gamma T^{'} \\ |x_{o'}| = L = \gamma V T^{'} \end{cases}. \tag{4.26}$$

Le second événement est la position de O mesurée par $O^{'}$ depuis A. Comme à cet instant précis les horloges de O et de $O^{'}$ indiquent respectivement les durées T et $T^{'}$, cet événement se caractérise dans les repères R_O et $R_{O'}$ par les quadri-positions

$$x^{\mu}_{o} \equiv \left(cT,\ x_{o} = 0,\ 0,\ 0\right),\ x^{'\mu}_{o} \equiv \left(cT^{'},\ x^{'}_{o} = -L^{'},\ 0,\ 0\right), \tag{4.27}$$

tel que

$$x^{'\mu}_{o} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}_{o} \Rightarrow \begin{cases} T^{'} = \gamma T \\ |x^{'}_{o}| = L^{'} = \gamma V T \end{cases}, \tag{4.28}$$

où

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} \equiv \begin{pmatrix} \gamma & \frac{-\gamma V}{c} & 0 & 0 \\ \frac{-\gamma V}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \Lambda_{\nu}{}^{\mu} \equiv \begin{pmatrix} \gamma & \frac{\gamma V}{c} & 0 & 0 \\ \frac{\gamma V}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.29}$$

la matrice associée à la transformation de Lorentz et son inverse. Il convient de préciser que o et $o^{'}$ dans x^{μ}_{o}, $x^{'\mu}_{o}$, $x^{\mu}_{o^{'}}$, $x^{'\mu}_{o^{'}}, x^{'}_{o^{'}}$ ne sont pas des indices covariants ; ils permettent juste de faire la distinction entre les différentes coordonnées cartésiennes de O et $O^{'}$ dans R_O et $R_{O'}$ respectivement. Comme les équations (4.26), (4.28) sont exactement les mêmes que (4.19), (4.20), (4.23) ; on confirme que l'analyse de l'expérience de pensée à trois et à quatre dimensions sont équivalentes vu que les deux approches conduisent au même résultat : avec $L = L^{'}$, nous avons le même problème souligné au paragraphe 1 et pour $L \neq L^{'}$celui discuté au paragraphe 2.

Ainsi on confirme que les résultats (4.19), (4.20), sont indépendants de la dimension et les contradictions (4.22) et (4.24) méritent vraiment d'avoir une attention particulière pour résoudre soigneusement le problème qu'elles englobent, en identifiant les hypothèses que nous n'avons pas le droit d'émettre, pour leurs incompatibilité avec la transformation de Lorentz, qui sont certainement à l'origine de ces contradictions, passées inaperçues. Même si la solution du problème ne semble pas être simple à deviner, il doit bien y avoir une quelconque explication à ces contradictions et un moyen permettant de fournir une analyse de l'expérience, compatible avec la relativité restreinte sans le moindre problème et confirmer ainsi le bien fondée mathématique de cette théorie, comme il se doit. Tel sera l'objectif à atteindre dans ce qui suit.

4.3.3 Résolution du problème mathématique

L'analyse précédente révèle que l'expérience de pensée du mètre ruban fait en réalité intervenir deux événements simultanés à savoir : l'arrivée de l'observateur $O^{'}$ à l'emplacement A (4.25), et la mesure par celui-ci de la position de O à partir de A (4.27) ayant donc eu lieu au même moment. Ainsi pour comprendre l'origine du paradoxe auquel nous nous sommes confronté et le résoudre, il faut impérativement se conformer aux règles imposées par la transformation de Lorentz, aux événements simultanés, ceci va nous permettre en l'occurrence de prouver que les contradictions mathématiques (4.22), (4.24) ne reflètent aucunement une incohérence de la théorie, certainement bien fondée mathématiquement. Pour cela, considérons deux événements arbitraires $E_1\,(ct_1,\ x_1,\ y_1,\ z_1)$ et $E_2\,(ct_2,\ x_2,\ y_2,\ z_2)$. En définissant la durée $\Delta t = t_2 - t_1$ et les longueurs $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta z = z_2 - z_1$, entre ces deux événements, on a compte tenu de la transformation de Lorentz

$$\Delta x^{'} = \gamma\,(\Delta x - V\Delta t) \Leftrightarrow \Delta x = \gamma\left(\Delta x^{'} + V\Delta t^{'}\right), \tag{4.30}$$

$$\Delta y^{'} = \Delta y, \tag{4.31}$$

$$\Delta z^{'} = \Delta z, \tag{4.32}$$

$$\Delta t^{'} = \gamma\left(\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x\right) \Leftrightarrow \Delta t = \gamma\left(\Delta t^{'} + \frac{V}{c^2}\Delta x^{'}\right), \tag{4.33}$$

qu'on aurait également pu obtenir de manière équivalente en prenant la différentielle des équations (4.6), (4.7), (4.8), (4.9). On comprend alors que deux événements simultanés par rapport à un référentiel inertiel relativiste ne le sont nécessairement pas par rapport à un autre, et la condition nécessaire et suffisante pour que deux événements soient simultanés par rapport à deux référentiels inertiels en mouvement, est

$$\Delta x = \Delta x^{'} = 0, \tag{4.34}$$

qui se traduit géométriquement par les points de l'espace appartenant au même plan vertical à la direction du mouvement dans les deux référentiels. En effet, supposons que nos deux événements soient simultanés dans les deux référentiels, c'est-à-dire que $\Delta t = \Delta t^{'} = 0$, alors d'après (4.30), (4.31), (4.32), (4.33), la condition (4.34) est forcement satisfaite. Réciproquement si on a affaire à deux événements telles que (4.34) soit satisfaite, c'est-à-dire deux événements possédant la même coordonnée suivant l'axe (ox) et la même coordonnée suivant l'axe $\left(ox^{'}\right)$, le fait que $\Delta x = \Delta x^{'} = 0$ implique $\Delta t = \Delta t^{'} = 0$. Par conséquent,

$$\Delta t = \Delta t^{'} = 0 \Leftrightarrow \Delta x = \Delta x^{'} = 0. \tag{4.35}$$

Un exemple concret de deux événements différents vérifiant cette condition serait de considérer les lampes d'un feu de circulation fixées à des hauteurs différentes sur une même verticale qu'on peut assimiler à une tige rectiligne verticale à la direction du mouvement de l'observateur $O^{'}$, ce sont des événements différents dans les deux référentiels par le fait qu'ils ne possèdent pas la même coordonnée suivant les axes (oz) et $\left(oz^{'}\right)$respectivement mais vérifient tout de même la condition (4.34) vu que dans les deux référentiels ils possèdent la même coordonnée suivant l'axe des abscisses. Donc si l'un des deux observateurs constate que ces lampes s'allument simultanément, l'autre fera la même constatation à la différence des lampes qui ne seraient pas sur le même plan perpendiculaire à la direction de mouvement comme par exemple celles de deux lampadaires fixes par rapport à l'un des deux référentiels qui seraient placées arbitrairement dans deux endroits complètement différents ($x_1 \neq x_1$ ou $x_1^{'} \neq x_2^{'}$). Si pour un observateur ces dernières s'allument simultanément, leurs allumage n'est pas simultané pour l'autre observateur. Ainsi la relativité restreinte stipule qu'il ne peut y avoir deux événements simultanés par rapport à deux référentiels inertiels en mouvements sans qu'ils ne se situent dans le même plan perpendiculaire à la direction du mouvement et ceci dans les deux référentiels à la fois. On peut bien évidemment avoir des événements simultanés par rapport à un référentiel inertiel qui ne seraient pas dans un même plan perpendiculaire à la direction du mouvement, sauf que pour une simultanéité d'événements par rapport aux deux référentiels, la condition (4.34) est à la fois nécessaire et suffisante. Cependant, on constate de (4.25) et (4.27) que les deux événements que nous avons pris lors de l'analyse de notre expérience de pensée étaient justement simultanés par rapport aux deux référentiels sans pour autant qu'ils satisfassent la condition (4.34), vu que $\Delta x = L$ et $\Delta x^{'} = L^{'}$avec $L \neq L^{'}$ ce qui ne peut avoir lieu du point de vu de la relativité restreinte, expliquant ainsi les contradictions mathématiques (4.22), (4.24) engendrées par la violation d'un principe de simultanéité plutôt que d'une incohérence mathématique de la théorie. Un raisonnement conforme à la théorie de la relativité restreinte consiste à interpréter cette expérience de la manière suivante : Vu que les longueurs et les durées ne sont plus des grandeurs absolues, le mètre ruban ne devrait pas être considéré comme un instrument de mesure fiable permettant à l'observateur $O^{'}$ d'obtenir la distance correcte le séparant de O ; le premier cas de figure $L = L^{'}$est donc à écarter, ce qui signifie que c'est le deuxième cas de figure qui est compatible avec la transformation de Lorentz à condition de l'interpréter de la manière suivante :

Arrivé au niveau du point A, l'observateur $O^{'}$ constate que son horloge indique la durée $T^{'}$ et l'observateur O distant d'une longueur $L^{'}$, à ce moment précis l'horloge de O indique une durée T et une distance $\left\|\overrightarrow{OO^{'}}\right\| = \left\|\overrightarrow{OA}\right\| = L$, toutes les deux différentes de $T^{'}$ et $L^{'}$ respectivement, telles que $\frac{L}{T} = \frac{L^{'}}{T^{'}}$. Pour établir une relation entre les durées T et $T^{'}$ et les distances L et $L^{'}$ il faut effectivement recourir à la transformation de Lorentz en spécifiant les événements à prendre en considération. On peut alors sans problème considérer l'événement : « arrivée de l'observateur $O^{'}$ à la localité A» comme nous l'avons fait en (4.25), (4.26) où la première partie du raisonnement précédent est tout à fait correcte permettant de déduire que

$$T = \gamma T^{'}, \tag{4.36}$$

et

$$L = \gamma L^{'}, \tag{4.37}$$

obtenue en tenant compte du fait que selon la transformation de Lorentz les deux observateurs s'accordent sur la mesure de la vitesse relative V, donc $VT^{'} = L^{'}$, d'où (4.37). Ce qui n'est en revanche pas permis par cette théorie c'est le fait d'avoir associé dans (4.27) la mesure $(cT,\ x_o = 0,\ 0,\ 0)$ à celle pour laquelle on a $\left(cT^{'},\ x_o^{'} = -L^{'},\ 0,\ 0\right)$ comme si ces deux mesures représentaient le même événement, à savoir, les coordonnées spatiotemporelles de l'observateur O lorsque son homologue $O^{'}$ arrive en A, mesurées dans les deux référentiels R_O et $R_{O'}$ respectivement. Malgré le fait que cette correspondance semble être légitime voir logique, les nouvelles règles de simultanéité l'interdisent, car d'après la transformation de Lorentz les mesures $(cT,\ 0,\ 0,\ 0)$ et $\left(cT^{'},\ -L^{'},\ 0,\ 0\right)$ faites par O et $O^{'}$ respectivement ne décrivent pas le même événement comme on a tendance à le croire. En effet selon la relativité restreinte, il est tout à fait vrai que lorsque $O^{'}$ est dans la localité A, son horloge indique l'heure $T^{'}$. Donc s'il s'intéresse à l'événement : « observation de O depuis A» il mesurerait certainement $\left(cT^{'},\ -L^{'},\ 0,\ 0\right)$ sauf que l'application de la transformation de Lorentz (4.6), (4.7), (4.8), (4.9), montre que par rapport à O, cette mesure correspond à $(c\gamma\left[T^{'} - \frac{V}{c^2}L^{'}\right], \left[VT^{'} - L^{'}\right], 0, 0)$ et non pas à $(cT,\ x_o = 0,\ 0,\ 0)$. De même que quand O décide de s'auto-observer lorsque son horloge indique l'heure T, où il mesurera certainement pour sa position : $(cT,\ x_o = 0,\ 0,\ 0)$. Or même si à cet instant précis $O^{'}$ se trouve en A, on a absolument pas le droit mathématiquement de dire que pour cet événement, $O^{'}$ mesurera $\left(cT^{'},\ -L^{'},\ 0,\ 0\right)$, même si intuitivement on a également tendance à le croire en raison du fait qu'à l'instant T chez O, l'horloge de l'observateur $O^{'}$ indique le temps $T^{'}$ et une mesure $L^{'}$ de la distance le séparant de O ; car la transformation de Lorentz dit que la mesure $(cT,\ x_o = 0,\ 0,\ 0)$ décrivant la situation spatiotemporelle de O dans le référentiel R_O lui correspond dans le référentiel $R_{O'}$ une mesure unique : $(c\gamma T, -\gamma VT, 0, 0)$. Par conséquent l'événement (4.27) supposé décrire la position de O dans les deux référentiels R_O et $R_{O'}$ respectivement quand $O^{'}$est en A, est inexistant du point de vu de la relativité restreinte. Suivant le mode de raisonnement, il doit être remplacé soit par l'événement

$$(c\gamma\left[T^{'} - \frac{V}{c^2}L^{'}\right], 0,\ 0,\ 0),\ \left(cT^{'},\ -L^{'},\ 0,\ 0\right), \tag{4.38}$$

si on considère que c'est $O^{'}$ qui mesure la position de O quand il arrive en A et son horloge indique $T^{'}$, ou par l'événement

$$(cT,\ x_o = 0,\ 0,\ 0)\,,\ (c\gamma T, -\gamma L,\ 0,\ 0), \tag{4.39}$$

si on se place dans la situation de O qui mesure sa propre position à l'instant T. De cette façon les contradictions mathématiques (4.22), (4.24) n'auront pas lieu d'être, et devraient plutôt être qualifiées de pseudo-contradictions émanant d'une mauvaise application de la transformation de Lorentz conduisant à une violation d'un principe de simultanéité en associant deux mesures certes effectives pour former l'événement inexistant (4.27). Telle est la solution mathématique du problème.

Si nous avons pu résoudre les pseudo-problèmes mathématiques (4.22), (4.24), en confirmant le bien fondé mathématique de la relativité restreinte lors de l'analyse de cette expérience de pensée, on peut s'interroger sur l'aspect physique dans cette histoire et l'éventualité d'aller au-delà d'une résolution de problèmes mathématiques en trouvant le moyen théorique permettant à un mètre ruban d'être toujours un outil de mesure fiable quelque soit l'expérience qui l'utilise, ou de permettre à l'événement (4.27) d'exister réellement tellement il est concordant avec notre vision des choses et le sens commun à l'échelle macroscopique. On peut certainement vouloir trouver le moyen de conserver la règle de simultanéité classique stipulant l'indépendance de la simultanéité d'événements du référentiel auxquels ils se rapportent, sans avoir à imposer des conditions particulières comme en (4.34). Tout ceci est inconcevable dans le cadre de la transformation de Lorentz et ne peut se faire que dans la perspective d'une nouvelle transformation engendrant une nouvelle théorie qui en plus de répondre aux exigences de l'invariance de la vitesse de la lumière et des équations de maxwell, devrait également prendre en considération l'aspect intuitif lors de la description des événements par des observateurs relativistes, chose non seulement compliquée à établir, mais posera d'autres questions quant à l'intérêt réel d'une telle théorie vu que jusqu'à présent la relativité restreinte est considérée comme la théorie décrivant par excellence l'évolution dynamique des système relativistes inertiels.

Conclusion

Parmi les problèmes les plus pertinents de la physique théorique, et plus précisément de la cosmologie, il existe celui de la masse sombre dans l'univers. La résolution du problème peut se faire en ayant recours à des théories alternatives comme celle d'Einstein-Cartan ; une théorie de la gravitation qui généralise la relativité générale en tenant compte de la torsion de l'espace-temps. En considérant le cas statique à symétrie sphérique pour un tenseur de torsion complètement antisymétrique, des solutions exactes des équations d'Einstein et de Cartan (2.86), (2.93), (2.94), (2.102), (2.109), (2.115) ont été obtenues, permettant d'établir une formule de masse (2.124) reliant la masse externe d'une distribution de masse statique à symétrie sphérique, à sa masse interne, dévoilant l'éventualité d'avoir une masse externe supérieure à la masse interne de la même distribution de masse, ce qui représente un enjeu important du point de vu physique, car cette différence de masse est susceptible d'expliquer un univers sans matière sombre dans la mesure où l'hypothèse de la matière sombre a justement été émise pour expliquer cette différence de masse qui peut donc s'expliquer naturellement par l'introduction de la torsion dans le cadre de la théorie d'Einstein-Cartan, sans être dans l'obligation de faire des suppositions sur l'existence d'une quelconque forme de matière non baryonique.

Une autre théorie alternative de la gravitation qu'on présente notamment afin d'expliquer un autre problème en cosmologie, celui de l'énergie sombre, appelée communément théorie $f(R)$, a également été étudiée dans cette thèse, où un lien a été établi avec la théorie de la relativité générale par la démonstration d'un théorème établissant une condition nécessaire et suffisante (3.6) sur la fonction $f(R)$ pour que les deux théories soient équivalentes, dans le sens où pour une forme spécifique du tenseur d'énergie-impulsion et du scalaire de Ricci, les deux théories possèdent exactement les mêmes solutions. Dans le cas particulier d'un espace-temps avec un scalaire de Ricci constant, nous avons montré que cette tâche ne nécessite pas un artifice mathématique compliqué. L'astuce qui a permis de simplifier le problème, consiste à faire apparaitre les équations d'Einstein à l'intérieur des équations de champ (3.5) de la théorie $f(R)$, ce qui a eu pour conséquence un certain nombre de corollaires ayant permis d'une part la construction de classes de théories (3.22),(3.27), (3.30), (3.34) équivalentes à la relativité générale, à partir d'une solution donnée de la relativité générale par différentes approches basées sur l'élaboration d'équations différentielles et leurs résolutions. D'autre part, ces corollaires nous ont également permis de fixer les conditions requises sur les paramètres d'un modèle donné permettant à celui-ci d'avoir les mêmes solutions de la relativité générale. Pour illustrer l'application de cette méthode sur un exemple concret nous avons considéré le modèle (3.18). Bien que la condition nécessaire et suffisante (3.6) soit générale, Il a été constaté que dans un espace-temps avec un tenseur de Ricci non constant, il n'existe pas de recette générale permettant de construire les théories $f(R)$ équivalentes à la relativité générale. Il faut en effet agir au cas par cas comme nous l'avons fait pour la solution FLRW, où nous avons montré qu'il n'existe qu'une seule classe de théories (3.60), uniquement dans le cas particulier d'un espace plat sans constante cosmologique pour une équation d'état bien déterminée (3.61).

Nous nous sommes ensuite penché sur un autre problème suscité par la considération de la transformation de Lorentz à l'échelle macroscopique lorsque nous avons imaginé une expérience de pensée assez originale ayant fait l'objet de publication [57], dans laquelle on se propose de mesurer la distance séparant deux observateurs inertiels et relativistes en mouvement l'un par rapport à l'autre, à l'aide d'un mètre ruban. L'analyse de cette expérience a dévoilé quelques problèmes mathématiques qui ne signifient certainement pas une invalidation d'une théorie bien fondée depuis plus d'un siècle, mais s'inscrit dans le cadre de paradoxes courants en relativité restreinte [52][53][54][55][56] qui souvent possèdent une explication rationnelle dans le cadre de la théorie, naissant d'une mauvaise interprétation ou d'une mauvaise application de la transformation de Lorentz, parfois légitime en raison de certains concepts relativistes peu intuitifs dans une vision macroscopique des événements, qui se veut fidèle aux percepts généraux de la géométrie euclidienne. L'étude de tels paradoxes et la contribution à leurs résolution comme nous venons de le faire, est non seulement passionnante mais également très pertinente pour bien comprendre les fondements de la théorie.

Bibliographie

[1] V. C. Rubin, F. W. Kent, Astron. J. 159 (1970).

[2] D. Clowe, M. Bradac, A. H. Gonzalez, M. Markevitch, S. W. Randall, C. Jones, D. Zaritsky, Astrophys. J. 648, 2 (2006).

[3] S. Cappoziello, S. Faraoni, *Fundamental Theories of Physics*, 170 Springer (2011).

[4] A.G. Riess et al, Astrophys. J. 116, 3 (1998).

[5] S. Perlmutter et al, Astron. J. 517, 2 (1999).

[6] E. Cartan, C. R. Acad. Sci. 174 (1922).

[7] E. Cartan, Ann. Ec. Norm. 40 (1923).

[8] E. Cartan, Ann. Ec. Norm. 41 (1924).

[9] E. Cartan, Ann. Ec. Norm. 42 (1925).

[10] D. W. Sciama, Rev. Mod. Phys. 36, 1103 (1964).

[11] T. W. B. Kibble, J. Math. Phys. 2, 212 (1961).

[12] A. Tilquin, T. Schücker, Gen. Rel. Grav. 43 (2011).

[13] T. Schücker, S. R. Zouzou, Class. Quantum Gravity. 29, 24 (2012).

[14] T. Schücker, A. Tilquin, Int. J. Mod. Phys. D 21 (2012).

[15] F. W. Hehl, P. von der Heyde, G. D. Kerlick, J. M. Nester, Rev. Mod. Phys. 48 (1976).

[16] S. Capozziello, G. Lambiase, C. Stornaiolo, Annalen Phys. 10 (2001).

[17] I. L. Shapiro, Phys. Rept. 357 (2002).

[18] M. Blagojevic, F. W. Hehl, Gen.Rel.Grav. 45 (2013).

[19] M. Göckeler, T. Schücker, Differential Geometry, Gauge Theories, and Gravity, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University (1987).

[20] N. Straumann, General Relativity with Applications in Astrophysics, Texts and Monographs in Physics, Springer Verlag (2004).

[21] C. W. Misner, K. Thorne, J. Wheeler, Gravitation, W. H. Freeman and Company (1973).

[22] O. Gron, S. Hervik, Einstein's General Theory of Relativity, Springer (2007).

[23] S. Kobayashi, K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, J.Wiley and Sons (1963).

[24] M. Spivak, Calculus on Manifolds Benjamin. Cummings, (1965).

[25] Z. Stuchlik, Acta Phys. Slov. 50 (2000).

[26] C. G. Boehmer, Gen. Rel. Grav. 36 (2004).

[27] T. Schücker, Gen. Relativ. Gravit. 42, 8 (2010).

[28] A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev, Handbook of exact solutions for ordinary differential equations, Chapman & Hall/CRC (2003).

[29] L. Amendola, S. Tsujikawa, *Dark Energy,* Cambridge university press (2010).

[30] H. Stephani, D. Kramer, M. Maccallum, C. Hoenselaers, E. Herlt, *Exact Solutions to Einstein's Field Equation*s, Cambridge university press (2003).

[31] J. D. Barrow, A. C Ottewill, *J. Phys. A. Math. Gen* 16 (1983).

[32] L. Amendola, R. Gannouji, D. Polarski, S. Tsujikawa, *Phys. Rev.* D 75 (2007).

[33] T. Clifton, Class. Quantum Grav. 24 (2007).

[34] S. Carloni, R. Goswami, P. K. S. Dunsby, Class. Quantum Grav. 29 (2012).

[35] S. Domazet, V.Radovanović, M. Simonović, H. Stefancic, Int. J. Mod. Phys. D 22 (2013).

[36] N. Dimakis, T. Christodoulakis, Petros A.Terzis, Journal of Geometry and Physics, 77 (2014).

[37] A. Michelson, E. Morley, Am. J. Sci, 34, 203 (1887).

[38] W. Voigt, Göttinger Nachr. 2, 41 (1887).

[39] J. J. Thomson, Philos. Mag. S 28, 1 (1889).

[40] J. Larmor, Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A 190, 205 (1897).

[41] J. Larmor, Aether and Matter, Cambridge University Press (1900).

[42] H. Poincaré, Arch. Neerl. Sci. Exactes Nat. 5, 252 (1900).

[43] H. Poincaré, Congress of Arts and Science, Universal Exposition, St. Louis, Cornell University Library, Ithica, NY (1904).

[44] H. Poincaré, C. R. Acad. Sci. 140,1504 (1905) ; R. Circ. Mat. Palermo 21 (1906).

[45] H. A. Lorentz, Arch. Neerl. Sci. Exactes Nat. 25, 363 (1892).

[46] H. A. Lorentz, Akad. V. Wet. 1, 74 (1892).

[47] H. A. Lorentz, Attempt of a Theory of Electrical and Optical Phenomena in Moving Bodies, E. J. Brill, Leiden, The Netherlands (1895).

[48] H. A. Lorentz, Proc. R. Neth. Acad. Sci. 1, 427 (1899).

[49] H. A. Lorentz, Proc. R. Neth. Acad. Sci. 6, 809 (1904).

[50] A. Einstein, Ann. Phys. 17, 891 (1905).

[51] P. Langevin, Scientia 10, 31 (1911).

[52] P. Ehrenfest, Phys. Z. 10, 918 (1909).

[53] E. M. Dewan and M. J. Beran, Am. J. Phys 27, 517 (1959).

[54] J. S. Bell, Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics, Cambridge University Press (1987).

[55] W. Rindler, Am. J. Phys. 29, 365 (1961).

[56] R. Shaw, Am. J. Phys. 30, 72 (1962).

[57] A. Benachour, Phys. Essays, 28, 3 (2015).

[58] G. F. FitzGerald, Science 13, 390 (1889).