REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMANT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FRERES MENTOURI-CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N^0 d'ordre :56/D3C/2018

Série :03/Phy/2018

THESE

POUR OBTENIR LE DIPLOME DE DOCTORAT

$3^{éme}$ CYCLE (LMD) EN PHYSIQUE

Spécialité : PHYSIQUE THEORIQUE

THEME :

EFFET D'UNE INTERACTION NON LOCALE ET SEPARABLE SUR LE PROCESSUS DE CREATION DE PAIRES DE PARTICULES

PRESENTEE PAR:
HAFDALLAH ABDELHAKIM
Soutenue: 13 /05/2018

Devant le jury

Président:

Mr. Noureddine Mebarki Prof Université Frères Mentouri, Constantine

Rapporteur :

Mr. Lyazid Chetouani Prof Université Frères Mentouri, Constantine

Examinateurs :

Mme. Baya Bentag Prof Université Frères Mentouri, Constantine

Mr. Abdelmalik Boumali Prof Université Larbi Tebessi , Tebessa

Mr. Mekki Aouachria Prof Université Hadj Lakhdar , Batna

Table des matières

Remerciements

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'un projet de fin d'études, pour obtenir le diplôme de Doctorat LMD en physique Théorique à l'université de Frére Mentouri -constantine-.

Avant tout, je remercie ALLAH tout puissant de m'avoir donné la volonté et le courage de mener à bien ce travail. Et d'une façon toute particulière, je remercie mes chers parents pour leurs patience et leurs encouragements.

Je tiens à remercier mon encadreur le Pr L. Chetouani pour m'avoir proposer ce sujet qui est intéressant et riche en physique. Je suis trés reconnaissant tout particulièrement pour la confiance qu'il m'a témoignée et la liberté qu'il me la adressé .

j'exprime ma profonde renconnaissance à Pr N. Mebarki, d'avoir accepté de présider le jury de soutenance.

Je remercie égalment Pr B. Bentag, Pr A.Boumali et Pr .Aouachria d'avoir accepté de faire partie du jury

Enfin, je remercie beaucoup mon épouse M.Nadjette pour l'aide préciense qu'elle m'a apporté tout le long de ce travail.

Chapitre 1

Introduction Génerale

La création de paires de particules chargées dans le vide par un champ électrique externe a été étudiée par Schwinger il y a plusieurs ans. Bien qu'un demi-siècle se soit écoulé depuis la publication de l'œuvre classique de Schwinger, le sujet de la création de paires reste largement discuté dans la théorie des cordes et des trous noirs [1],[2]. Le mécanisme de Schwinger de la production par paires, mis en avant pour étudier la production de paires électron-positon dans un champ électrique fort et uniforme, a été appliqué à de nombreux problèmes de la physique contemporaine. Dans la physique des circuits électroniques macroscopiques, l'effet de la production de particules est entravée par la petite taille de l'énergie de transition par rapport à la hauteur de barrière qui est de l'ordre de la masse d'électrons [3],[4]. Le mécanisme de Schwinger a souvent été invoqué pour étudier la production de particules dans chromodynamique quantique, appliqué aux collisions nucléon-nucléon ou $e+e-$, le champ entre un quark et un antiquark est représenté en approximation par un champ de jauge abélien sous la même forme que le champ électrique constant entre deux plaques de condenseur en électrodynamique quantique QED)[5],[6].

Des nombreux travaux (expérimentaux et théoriques) ont été publiés sur le système à deux nucléons. Cependant, nos informations sur les forces nucléaires sont encore plutôt petites. Du point de vue théorique, cela est dû en partie à la difficulté de résoudre le problème de la diffusion. Par conséquent, il nous semble intéressant de discuter d'un potentiel nucléaire spécial pour lequel nous pouvons obtenir facilement une solution exacte. Ce potentiel est non local et donc de forme fondamentalement différente de ceux habituellement discutés, mais comme personne ne connaît la forme correcte, il reste de la place pour tester de nouveaux types [7]. Les potentiels séparables ont été largement utilisés en physique nucléaire, il y a depuis de nombreuses années que l'équation de Schrödinger avec un potentiel séparable peut être résolue analytiquement. Les potentiels séparables sont très pratiques du point de vue mathématique car ceux-ci réduisent un ensemble d'équations algébriques faciles à résoudre. Cependant, physiquement, ces potentiels ne sont pas une bonne représentation car la non-localité est diffusée sur toute la gamme. De nombreux potentiels séparables ont été construits pour reproduire les données de décalage de phase à deux corps et l'énergie de liaison de deutéron, mais ceux-ci ne reproduisent pas d'autres propriétés de deutéron comme les facteurs de forme, la probabilité d'état D, etc [8].

Des potentiels séparables ont été utilisés dans différents calculs à plusieurs corps comme la matière nucléaire, le triton et les noyaux finis. ces potentiels, en raison de leur simplicité, sont presque exclusivement utilisés pour l'étude de problèmes à trois corps en physique nucléaire.

Dans une tentative de réconcilier la mécanique quantique avec la relativité, Dirac a proposé de linéariser l'équation de Klein Gordon (KG) des particules libres, en se basant sur la relation relativiste quadratique entre l'énergie et la quantité de mouvement. Il a bien obtenu une équation relativiste de premier ordre par rapport au temps décrivant ainsi le mouvement d'une particule de spin-1/2, tels que l'électron. Historiquement Dirac a introduit son équation sous la forme :

$$\hat{H}\psi(x) = (\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{p} + \beta m)\psi(x) = i\frac{\partial\psi(x)}{\partial t} \tag{1.1}$$

où $\hat{H}$ est l'opérateur Hamiltonien, $\psi(x)$ et m sont respectivement la fonction d'onde et la masse de la particule relativiste, $\overrightarrow{p}$ est l'opérateur impulsion et $\overrightarrow{\alpha}$ et β sont des coefficients a déterminer.

Or comme $\widehat{\overrightarrow{p}} \equiv -i\overrightarrow{\nabla}$ l'´equation de Dirac s'écrit explicitement :

$$(-i\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{\nabla} + \beta m)\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{1.2}$$

Comme on le verra plus loin, les coefficients α_i $(i = 1, 2, 3)$ et β ne peuvent pas être des nombres. Ce sont des matrices $n \times n$ et l'équation de Dirac peut-être considérée comme une équation matricielle dans la quelle la fonction d'onde ψ est une matrice colonne a n composantes :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ . \\ . \\ \psi_n \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

Pour que l'équation de Dirac soit considérée comme l'équation décrivant le mouvement relativiste d'une particule libre de masse m, chacune des composantes ψ_i de la matrice colonne ψ doit satisfaire l'équation de Klein-Gordon c-à-d

$$\left(\partial^2 + m^2\right)\psi_i(x) = 0 \qquad \Rightarrow \quad (\; -\overrightarrow{\nabla}^2 + m^2)\psi_i(x) = -\frac{\partial^2 \psi_i(x)}{\partial t^2} \tag{1.4}$$

Pour cela, il suffit d'appliquer l'opérateur Hamiltonien $\hat{H}$ à l'équation de Dirac. En effet, on obtient dans ce cas

$$(-i\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{\nabla} + \beta m)(-i\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{\nabla} + \beta m)\psi = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{1.5}$$

soit donc explicitement :

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}(\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} - im\sum_{i=1}^{3}(\alpha_i\beta + \beta\alpha_i)\frac{\partial \psi}{\partial x^i} + \beta^2 m^2 \psi = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \; (\; -\overrightarrow{\nabla}^2 + m^2)\psi \tag{1.6}$$

Cette relation impose donc, comme on peut le voir, des conditions sur les coefficients α_i et β. Ces conditions sont

$$\begin{aligned} \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = \{\alpha_i \; , \; \alpha_j\} &= 2\delta_{ij} I \\ \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = \{\alpha_i \; , \; \beta\} &= 0 \\ \alpha_i^2 = \beta^2 &= I \end{aligned} \tag{1.7}$$

où I est la matrice unité.

La relation d'anticommutation $\{\alpha_i, \beta\} = 0$, indique clairement que les coefficients α_i et β doivent être des matrices et non des nombres. D'autre part pour que l'opérateur Hamiltonien, $\hat{H} =(-i\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{\nabla} + \beta m)$, soit un opérateur hermitien, il est nécessaire que les matrices α_i et β soient des matrices hermitiennes c-à-d $\beta^\dagger = \beta$ et

$\alpha_i^\dagger = \alpha_i \; \forall_i = 1, 2, 3.$

On montre que la plus petite dimension avec laquelle on peut construire les matrices α_i et α est la dimension $n = 4$. Le choix de ces matrices n'est cependant pas unique.

En choisissant la représentation dite de Dirac-Pauli, les matrices β et α_i s'écrivent

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} , \, i = 1, 2, 3 \tag{1.8}$$

La physique est indépendante du choix de la représentation préférée.

où I et 0 sont respectivement les matrices unité et nulle 2×2 et $\sigma_i = (i = 1, 2, 3)$ sont les matrices de Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \, , \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \, , \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

Le fait que les matrices α_i et β soient d'ordre 4, conduit nécessairement, dans l'équation de Dirac, à ce que la fonction d'onde de la particule soit une matrice colonne à 4 éléments :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

Cette fonction d'onde a 4 composantes n'est pas un quadrivecteur mais un nouvel objet appelé bi-spineur de Dirac (On dit aussi spineur par abus de langage).

Écrivons maintenant l'équation de Dirac sous forme covariante en introduisant

$$\gamma^0 = \gamma_0 = \beta, \tag{1.11}$$

$$\gamma^i = -\gamma_i = \gamma^0 \alpha_i \tag{1.12}$$

qui conduit à

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi\,(\overrightarrow{r}, t) = 0. \tag{1.13}$$

Réécrivons ainsi les relations (1.7) comme suit :

$$\begin{aligned} \left\{\gamma^0, \gamma^0\right\} = 2\left(\gamma^0\right)^2 = 2 \times 1_{4\times 4}, \\ \left\{\gamma^0, \gamma^i\right\} = 0, \\ \left\{\gamma^i, \gamma^j\right\} = 0, i \neq j, \\ \left\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\right\} = 2g^{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{1.14}$$

en présence d'une intéraction, l'équation de Dirac s'écrit comme suit

$$\left[\gamma^\mu\left(i\partial_\mu - eA_\mu\right) - m\right]\psi\left(\overrightarrow{r}, t\right) = 0. \tag{1.15}$$

Multiplions l'équation de Dirac à gauche par

$$\gamma^0\left[i\frac{\partial}{\partial t} - eA_0 + \alpha^i\left(i\partial_i - eA_i\right) - \gamma^0 m\right]\psi\left(\overrightarrow{r}, t\right) = 0, \tag{1.16}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = H_0\psi + V\psi, \tag{1.17}$$

où

$$\begin{aligned} H_0 = -\alpha^i\partial_i + \gamma^0 m, \\ V = eA_0 + e\alpha^i A_i. \end{aligned} \tag{1.18}$$

cette dernière équation ressemble à l'équation de Schrödinger en interaction classique avec un champ électromagnétique, même si la fonction d'onde est un spineur. Notamment, dans le cas particulier où $A_\mu = (\varphi, 0)$ le potentiel se réduit au potentiel électrique multiplié par la charge de la particule e.

L'équation de Dirac découle de la densité lagrangienne :

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = \mathcal{L}' + \frac{i}{2}\partial_\mu\left[\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\right] \tag{1.19}$$

ou

$$\mathcal{L}' = \frac{i}{2}\left[\overline{\psi}\gamma^\mu\left(\partial_\mu\psi\right) - \left(\partial_\mu\overline{\psi}\right)\gamma^\mu\psi\right] \tag{1.20}$$

avec : ψ et $\overline{\psi}$ qui est un spineur "ligne" $\overline{\psi} = \left(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \overline{\psi}_3, \overline{\psi}_4\right)$. Dans les deux cas, les densités lagrangiennes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ s'annulent lorsqu'elles sont évaluées pour un spineur solution de l'équation de Dirac.

L'équation relativiste de premier ordre du Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) est une équation décrivant les particules de spin-0 et de spin-1. Elle a considéré est une extension du formalisme covariant de l'équation de Dirac, décrit les particules scalaires de spin-0 et vectorielles de spin-1, dans lequel on remplace les matrices gamma par des matrices bêta vérifiant un algèbre plus compliquée connue sous le nom de l'algèbre de Kemmer

$$(i\widetilde{\beta}^{\mu}\partial_{\mu} - M)\psi_k = 0, \tag{1.21}$$

avec β^{μ} sont des matrices satisfaisant les relations de commutation suivants :

$$\widetilde{\beta}^{\mu}\widetilde{\beta}^{\nu}\widetilde{\beta}^{\rho} + \widetilde{\beta}^{\rho}\widetilde{\beta}^{\nu}\widetilde{\beta}^{\mu} = \widetilde{\beta}^{\mu}g^{\nu\rho} + \widetilde{\beta}^{\rho}g^{\nu\mu}. \tag{1.22}$$

dont les matrices possèdent trois représentations irréductibles, une triviale de dimension 0 , et les deux autres de dimensions 5 et 10 représentant respectivement

les particules de spin $s = 0$ et $s = 1$. Elles génèrent l'algèbre de Kemmer suivant

$$\widetilde{\beta}^{\mu}\widetilde{\beta}^{\nu}\widetilde{\beta}^{\lambda} + \widetilde{\beta}^{\lambda}\widetilde{\beta}^{\nu}\widetilde{\beta}^{\mu} = g^{\mu\nu}\widetilde{\beta}^{\lambda} + g^{\nu\lambda}\widetilde{\beta}^{\mu}. \tag{1.23}$$

aux matrices des algèbres de spin demi-entier, tel que l'algèbre de Dirac, elles possèdent la propriété des algèbres de spin entier non inversibles.

On choisit une représentation pour les matrices $\widetilde{\beta}^{\mu}$ dans laquelle $\widetilde{\beta}^{k+} = -\widetilde{\beta}^{k}$, et $\widetilde{\beta}^{0+} = -\widetilde{\beta}^{0}$, et on écrit pour le cas de spin-0 les matrices suivantes comme

suit :

$$\widetilde{\beta}^{0} = \begin{pmatrix} \theta_{2\times 2} & 0_{3\times 3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \widetilde{\beta}^{i} = \begin{pmatrix} 0 & \rho^{i} \\ -\rho^{i}_{T} & 0 \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3 \tag{1.24}$$

avec

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \ \rho^{1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \rho^{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \rho^{3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.25}$$

et ρ_T représentant la matrice transposée de ρ et 0 étant la matrice nulle. Par contre, pour le cas de spin-1 on a

$$\widetilde{\beta}^0 = \begin{pmatrix} 0 & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0}^T & 0 & 1 & 0 \\ \overline{0}^T & 1 & 0 & 0 \\ \overline{0}^T & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\beta}^i = \begin{pmatrix} 0 & \overline{0} & e_i & \overline{0} \\ \overline{0}^T & 0 & 0 & -is_i \\ -e^T & 0 & 0 & 0 \\ \overline{0}^T & -is_i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; i = 1, 2, 3 \tag{1.26}$$

avec $\overline{0}$ et e_i sont données par :

$$\overline{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.27}$$

et 1 et 0 étant respectivement, la matrice unité et la matrice nulle. Les si sont les s_i matrices standards non-relativistes du spin-1

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \; s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; s_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.28}$$

En présence d'une interaction électromagnétique A^μ, Eq. (1.21) prend la forme :

$$\left\{ i\widetilde{\beta}^\mu \left(\partial_\mu + ieA_\mu\right) - M \right\} \psi\left(\vec{x}, t\right) = 0. \tag{1.29}$$

Conjuguons maintenant l'équation (1.21) :

$$i\partial_\mu \psi^+ \widetilde{\beta}^\mu + M\psi^+ = 0. \tag{1.30}$$

On définit $\bar{\psi}$ par :

$$\bar{\psi} = \psi^+ \left\{ 2\left(\widetilde{\beta}^0\right)^2 - 1 \right\}, \tag{1.31}$$

d'où

$$\bar{\psi}\widetilde{\beta}^0 = \psi^+ \widetilde{\beta}^0, \tag{1.32}$$

avec $\bar{\psi}$ étant l'adjoint deψ qui vérifie l'équation adjointe suivante :

$$i\left(\partial_{\mu}-ieA_{\mu}\right)\bar{\psi}\widetilde{\beta}^{\mu}+M\bar{\psi}=0. \tag{1.33}$$

Sachant que :

$$\bar{\psi}\widetilde{\beta}^{\mu}\widetilde{\beta}^{0}=\psi^{+}\widetilde{\beta}^{\mu+}\widetilde{\beta}^{0}, \tag{1.34}$$

on tire l'équation de continuité :

$$\partial_{\mu}J^{\mu}=0, \tag{1.35}$$

où J^{μ} s'écrit de la façon suivante :

$$J^{\mu}=\left(J^{0},J^{k}\right)=\bar{\psi}\widetilde{\beta}^{\mu}\psi, \tag{1.36}$$

avec

$$J^{k}=\bar{\psi}\widetilde{\beta}^{k}\psi. \tag{1.37}$$

La densité de probabilité est alors donnée par

$$J^{0}=\bar{\psi}\widetilde{\beta}^{0}\psi. \tag{1.38}$$

qui est aussi n'est pas définie positive : comme dans le cas avec des équations de Proca et de KG, il est donc nécessaire de recourir à la réinterprétation de Pauli et Weisskopf qui est basée sur la symétrie de charge. Contrairement aux matrices gamma de l'algèbre de Dirac, ces matrices sont des inversibles.

Les exemples standards et apparemment les seuls pour les solutions des équations relativistes discutés dans les manuels de mécanique quantique sont ceux du puits carré et du potentiel de Coulomb. Dans ce contexte, le but de notre travail est d'étudier la probabilité de création des paires dans l'équation de Dirac en présence du potentiel non local et séparable, et la solution de l'équation de DKP lorsque le potentiel est aussi séparable et non local.

Cette thèse comporte deux chapitre de la façon suivante : Dans le premier chapitre nous traitons l'effet de perturbation de vide par une intéraction non locale et séparables sur le processus de création de paires de particules de Dirac, où nous utilisons l'approche de Schwinger de l'action effective pour calculer la probabilité. l'équation de continuité est déterminer et finalement nous appliquons le potentiel delta de Dirac comme un cas particulier d'un potentiel non local et séparable.

Le deuxième chapitre consiste à étudier le spectre d'énergie de l'équation de DKP avec une intéraction non locale et séparable en passant par le calcul de l'expression de la fonction de Green des particules de spin -0.

Enfin, nous terminons notre travail par une conclusion globale.

Chapitre 2

Création Des Paires

2.1 Introduction

Nous savons que le processus de création de paires de particules formulé par Schwinger [2] au moyen de l'amplitude de transition vide-vide et en termes d'action effective est en fait le mécanisme le plus étudié. Ainsi, pour la compréhension de ces phénomènes physiques, différentes approches ont été développées telles que celles basées sur la fonction de Green [9], ou la méthode adiabatique[10] , la technique de diagonalisation hamiltonienne[11] , l'approximation semi-classique de WKB et plus particulièrement la soi-disant approche des états de vide "in" et "out" basés sur la transformation de Bogoliubov [12] , le théorème des statistiques de spin [13] et les antiparticules décrites par les solutions d'énergie négative remontant dans le temps étant à la base de cette approche.

Succinctement, la plupart des travaux de la littérature liés au processus de création de particules considèrent la probabilité et un grand intérêt est focalisé sur l'obtention de formes analytiques de cette probabilité. Parmi les expressions, la plus simple est celle que Schwinger a obtenue en considérant comme interactions avec le vide, un champ électromagnétique constant et une onde de Volkov. Pour cette dernière interaction, il n'y a pas de processus de création de paires.

Parmi les travaux utilisant l'approche de Schwinger de l'action effective, nous pouvons encore trouver d'autres résultats simples pour la probabilité [14, 15] .

Dans ce chapitre, nous considérons une interaction ayant une forme particulière en contraste avec celle classiquement utilisée : il s'agit d'une forme non locale et séparable [16] Cette interaction a été considérée dans le cadre du problème posé par le potentiel de la fonction $-\delta$ dans le contexte structure périodique unidimensionnelle [17] et en particulier sur l'ambiguïté du comportement au point $x = 0$ de la fonction d'onde. L'avantage de la séparabilité confère au potentiel une certaine flexibilité puisque les calculs sont faciles à manipuler ce qui explique son utilisation dans de nombreux domaines et plus particulièrement en physique nucléaire voir par exemple [18].

De plus, sachant que l'équation de Dirac avec cette interaction non-locale est résoluble analytiquement, il nous a semblé utile de considérer le processus de création de paires de particules de Dirac lorsque le vide est perturbé par cette interaction séparable et non locale et de voir son effet, la détermination de la probabilité relative à ce mécanisme est notre objectif principal.

Symboliquement, cette interaction séparable, qui perturbe le vide a une forme de type matriciel. Elle est la suivante

$$\hat{V} = (\beta g + h) \mid v >< v \mid , \tag{2.1}$$

où g et h sont des paramètres rééls et β les matrices de Dirac habituelles 4×4.

Dans l'espace de configuration, son action sur la fonction d'onde (spineur) $\Psi(x, t)$ est définée par

$$< x \mid \hat{V} \mid \Psi(t) >= \int dx' < x \mid \hat{V} \mid x' > \Psi\left(x', t\right) = (\beta g + h)\, v(x) \int_{-\infty}^{\infty} dx' v\left(x'\right) \Psi\left(x', t\right), \tag{2.2}$$

où $v(x) = \langle x | \, v \rangle$ est choisi réel et tel que $v(x) = v(-x)$ et $v(\pm\infty) = 0$.

Il est évident au moment t , cette interaction dépend de l'espace entier via la fonction d'onde

.

Notez que si l'on se développe $v(x')$ en série au voisinage du point x , nous obtenons avec l'aide de l'opérateur de déplacement $e^{i(x'-x)\hat{p}}$, la relation $v(x) = e^{i(x'-x)\hat{p}} v(x)$. Ainsi , nous avons

$$< x \mid \hat{V} \mid x' >= (\beta g + h)\, v(x)\, v\left(x'\right) = (\beta g + h)\, v(x)\, e^{i(x'-x)\hat{p}} v(x)\,, \tag{2.3}$$

et son action sur Ψ est donnée par

$$< x \mid \hat{V} \mid \Psi(t) >= (\beta g + h)\left[v(x)\int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{i(x'-x)\hat{p}}\right] v(x)\,\Psi(x,t)\,, \tag{2.4}$$

$$= 2\pi\,(\beta g + h)\, v(x)\,\hat{\delta}(\hat{p})\, v(x)\,\Psi(x,t)\,, \tag{2.5}$$

c-à-d que la non-localité de l'interaction est caractérisée par la dépendance à l'impulsion $\hat{p}$ (opérateur). Formellement, la série $\int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{i(x'-x)\hat{p}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left[1 + \frac{i(x'-x)\hat{p}}{1!} + \frac{(i(x'-x)\hat{p})^2}{2!} + ...\right]$ est noté par l'opérateur $2\pi\hat{\delta}(\hat{p})$.

Après cette précision, nous procédons comme suit : premièrement, l'action effective $\bar{S}_{eff.}$ est exprimé en fonction des fonctions Green G (avec interaction) et G_0 (libre) . Puis, de la partie imaginaire de $\bar{S}_{eff.}$ la probabilité liée au processus de création de paires est déterminée.

En tant qu'application, nous choisissons pour le produit un potentiel non local $v(x)v(x')$ la forme du produit d'une fonction de Dirac $\delta(x)\delta(x')$ au lieu d'une forme locale $\delta(x)$ .Le problème du potentiel $-\delta$ est connu [19]pour les différents résultats obtenus par la limite de la solution à l'origine $x = 0$ quand le potentiel $-\delta$ est remplacé par un potentiel fini .

2.2 Action effective

D'abord, il est facile de s'assurer que l'action relative à l'interaction non locale est la suivante

$$\begin{aligned} S\left(\Psi, \Psi^{+}\right) &= \int dx dt \mathcal{L} \\ &= \int dx dt \left[\begin{array}{c} \Psi^{+}(x,t)\left(\alpha\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x} + \beta m\right)\Psi(x,t) - i\Psi^{+}(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) \\ +\Psi^{+}(x,t)(\beta g + h)\, v(x)\int dx' v(x')\,\Psi(x',t) \end{array}\right], \end{aligned} \tag{2.6}$$

puisque par la variation par rapport aux champs Ψ^{+}et Ψ, nous obtenons les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \Psi^{+}(y,u)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^{+}} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Psi^{+}}{\partial t}} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Psi^{+}}{\partial x}} = 0 \quad , \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \Psi^{+}(y,u)} = \int dxdt \left[\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \Psi^{+}(y,u)} \Psi^{+} \left(\alpha \frac{\partial}{i\partial x} + \beta m \right) \Psi(x,t) - i \frac{\partial}{\partial \Psi^{+}(y,u)} \Psi^{+} \frac{\partial}{\partial t} \Psi \\ + \frac{\partial}{\partial \Psi^{+}(y,u)} \Psi^{+} (\beta g + h) v(x) \int dx' v(x') \Psi(x',t) \end{array} \right] \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \Psi^{+}(y,u)} = \int dxdt \delta(x-y) \delta(t-u) \left[\left(\alpha \frac{\partial}{i\partial x} + \beta m \right) \Psi(x,t) - i \frac{\partial}{\partial t} \Psi + (\beta g + h) v(x) \int dx' v\left(x'\right) \Psi\left(x',t\right) \right] \tag{2.9}$$

c-à-d on obtient respectivement l'équation de Dirac

$$\left(\alpha \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} + \beta m - i \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi(x,t) + (\beta g + h) v(x) \int dx' v\left(x'\right) \Psi\left(x',t\right) = 0, \tag{2.10}$$

et son adjoint avec les mêmes étapes

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \Psi(y,u)} = \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Psi}{\partial t}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Psi}{\partial x}} = 0, \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \Psi(y,u)} = \int dxdt \left[\begin{array}{c} \Psi^{+} \left(\alpha \frac{\partial}{i\partial x} + \beta m \right) \frac{\partial}{\partial \Psi(y,u)} \Psi(x,t) \\ -i\Psi^{+} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \Psi(y,u)} \Psi + \Psi^{+} (\beta g + h) v(x) \int dx' v(x') \frac{\partial}{\partial \Psi(y,u)} \Psi(x',t) \end{array} \right] \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \Psi(y,u)} = \int dxdt \left[\begin{array}{c} \Psi^{+} \left(\alpha \frac{\partial}{i\partial x} \delta(x-y) \delta(t-u) + \beta m \delta(x-y) \delta(t-u) \right) - i\Psi^{+} \delta(x-y) \frac{\partial}{\partial t} \delta(t-u) \\ + \Psi^{+} (\beta g + h) v(x) \int dx' v(x') \delta(x'-y) \delta(t-u) \end{array} \right] \tag{2.13}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \Psi(y,u)} &= \int dxdt\Psi^{+}\alpha\frac{\partial}{i\partial x}\delta(x-y)\,\delta(t-u) \\
&\quad+\int dxdt\Psi^{+}\beta m\delta(x-y)\,\delta(t-u) \\
&\quad-i\int dxdt\Psi^{+}\delta(x-y)\,\frac{\partial}{\partial t}\delta(t-u) \\
&\quad+\int dxdt\Psi^{+}(\beta g+h)\,v(x)\int dx'v\left(x'\right)\delta\left(x'-y\right)\delta(t-u)
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \Psi(y,u)} &= \int dx\Psi^{+}(x,u)\,\alpha\frac{\partial}{i\partial x}\delta(x-y)+\Psi^{+}(y,u)\,\beta m \\
&\quad-i\int dt\Psi^{+}(y,t)\,\frac{\partial}{\partial t}\delta(t-u)+\int dx\Psi^{+}(x,u)\,(\beta g+h)\,v(x)\,v(y)\,\delta(t-u)
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

$$
\Psi^{+}(x,t)\left(-\frac{1}{i}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x}\alpha+\beta m+i\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial t}\right)+v(x)\int dx'v\left(x'\right)\Psi^{+}\left(x',t\right)(\beta g+h)=0, \tag{2.16}
$$

α et β étant les matrices habituelles de Dirac 4x4.

Nous savons que l'amplitude de la transition vide-vide $\mathcal{A}(vac.-vac.)$ est donnée par [20]

$$
\mathcal{A}(vac-vac)=\int \mathcal{D}\Psi^{+}\mathcal{D}\Psi e^{i\int dxdt\Psi^{+}\hat{O}_{D}\Psi}=\int \mathcal{D}\Psi^{+}\mathcal{D}\Psi e^{iS} \tag{2.17}
$$

$$
=N\mathrm{Det}\hat{O}_{D}=e^{i\bar{S}_{eff}}, \tag{2.18}
$$

où maintenant, Ψ^{+} et Ψ sont des variables de Grassmann et $\bar{S}_{eff}$ est l'action effective qui, dans notre cas, est donné par l'expression suivante

$$
\bar{S}_{eff}=i\exp\left[-Tr\ln\frac{\alpha\hat{p}+\beta m-\hat{E}+i0^{+}}{\alpha\hat{p}+\beta m-\hat{E}+\hat{V}+i0^{+}}\right], \tag{2.19}
$$

$\hat{V}$ étant la perturbation qui est l'interaction non-locale.

La détermination de la probabilité P qui est le but de notre travail est défini en termes d'action effective par

$$P = 1 - \left| e^{i\bar{S}_{eff}} \right|^2 = 1 - e^{i\left(\bar{S}_{eff} - \bar{S}^*_{eff}\right)} = 1 - e^{-2\,\mathrm{Im}\,\bar{S}_{eff}} \simeq 2\,\mathrm{Im}\,\bar{S}_{eff}. \qquad (2.20)$$

Pour la détermination de $\bar{S}_{eff}$, il est plus approprié d'utiliser l'identité

$$\ln \frac{a + i0^+}{b + i0^+} = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s} \left[e^{is\left(b + i0^+\right)} - e^{is\left(a + i0^+\right)} \right], \qquad (2.21)$$

afin d'utiliser la forme exponentielle. Puis, $\bar{S}_{eff}$ prend la forme suivante

$$\bar{S}_{eff} = iTr \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s} \left[e^{is\left(\alpha\hat{p} + \beta m - \hat{E} + \hat{V} + i0^+\right)} - e^{is\left(\alpha\hat{p} + \beta m - \hat{E} + i0^+\right)} \right] \qquad (2.22)$$

$$= iTr_D Tr_x \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s} \left[e^{is\left(\alpha\hat{p} + \beta m + \hat{V} + i0^+\right)} - e^{is\left(\alpha\hat{p} + \beta m + i0^+\right)} \right] Tr_t \left(e^{-is\hat{E}} \right), \qquad (2.23)$$

où le symbole $Tr = Tr_x Tr_t Tr_D$ indique une sommation diagonale respectivement sur les coordonnées spatio-temporelles et sur les indices spinoriels. La dernière trace ayant été factorisée parce que les opérateurs $\hat{p}$ et $\hat{E}$ commute.

Notons par $\mid t >$ et $\mid x >$ les vecteurs propres des operateurs $\hat{x}$ et $\hat{t}$. Ces kets sont tels que $\hat{t} \mid t > = t \mid t >$, $\hat{E} \mid t >= i\frac{\partial}{\partial t} \mid t >$, $\hat{x} \mid x > =x \mid x >$ et $\hat{p} \mid x > =\frac{\partial}{i\partial x} \mid x >$.

La dernière trace par rapport à l'opérateur de translation temporelle $e^{-is\hat{E}}$ est facilement calculable . Tout d'abord, développons-nous en série $e^{-is\hat{E}}$ en tenant compte de l'action de $\hat{E}$ sur le ket $\mid t >$,le résultat est simplement égal à

$$e^{-is\hat{E}} \mid t >= \left(1 + s\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\left(s\frac{\partial}{\partial t}\right)^2}{2!} + ... \right) \mid t >$$

$$= \mid t + s > . \qquad (2.24)$$

Ensuite, l'élément de matrice de $e^{-is\hat{E}}$ a comme résultat

$$< t_b \mid e^{s\frac{\partial}{\partial t}} \mid t_a >= \langle t_b \vert\, t_a + s \rangle$$

$$= \delta\left(s - \left(t_b - t_a\right)\right), \qquad (2.25)$$

cela nous permet d'obtenir sa trace

$$Tr_t e^{s\frac{\partial}{\partial t}} = \int dt < t_b \mid e^{s\frac{\partial}{\partial t}} \mid t_a >\Big|_{t_b=t_a=t} = \int dt \, \delta\left(s-(t_b-t_a)\right)|_{t_b=t_a=t} = \delta\left(s\right)\int_0^T dt = T\delta\left(s\right). \tag{2.26}$$

L'action effective est réduite à

$$\bar{S}_{eff} = T\int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{\delta\left(s\right)}{s} Tr_D Tr_x \left[\theta\left(s\right)\left(e^{is\left(\alpha\hat{p}+\beta m+\hat{V}+i0^+\right)} - e^{is\left(\alpha\hat{p}+\beta m+i0^+\right)}\right)\right], \tag{2.27}$$

où la fonction de Heaviside $\theta\left(s\right)$a été ajouté afin d'étendre les limites des intégrations $(0,\infty)$ en $(-\infty,\infty)$ .Ainsi, nous avons exprimé l'action effective en fonction des opérateurs d'évolution (ou propagateurs) avec et sans interaction.

Cependant, il nous semble plus approprié d'utiliser les fonctions de Green pour la détermination de $\bar{S}_{eff}$. Pour cela, avec la représentation intégrale suivante de $\theta\left(s\right)$

$$\theta\left(s\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathcal{E}}{2i\pi}\frac{e^{i\mathcal{E}s}}{\mathcal{E}-i0} \qquad \text{pour } \theta\left(0\right) = \frac{1}{2},$$

qui devient avec le passage $\mathcal{E}\rightarrow\mathcal{E}-\hat{H}$

$$\theta\left(s\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathcal{E}}{2i\pi}\frac{e^{is\left(\mathcal{E}-\hat{H}\right)}}{\mathcal{E}-\hat{H}-i0},$$

nous obtenons la représentation intégrale du propagateur au moyen de la fonction de Green

$$\theta\left(s\right)e^{i\hat{H}s} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathcal{E}}{2i\pi}\frac{e^{i\mathcal{E}s}}{\mathcal{E}-\hat{H}-i0^+}, \tag{2.28}$$

où $-\hat{H}$ est le Hamiltonien qui régit le mouvement. En remplaçant $\hat{H}$ par $(\alpha\hat{p}+\beta m)$ et par $(\alpha\hat{p}+\beta m+V)$, nous avons respectivement les opérateurs de Green

- sans interaction (libre)

$$\hat{G}_0\left(\mathcal{E}\right) = \frac{1}{\mathcal{E}-\left(\alpha\hat{p}+\beta m+i0^+\right)}, \tag{2.29}$$

- et en présence de l'interaction non-locale $\hat{V}$

$$\hat{G}(\mathcal{E}) = \frac{1}{\mathcal{E} - \left(\alpha\hat{p} + \beta m + \hat{V} + i0^+\right)}. \tag{2.30}$$

Ainsi, l'action effective est maintenant fonction de $\hat{G}$ et $\hat{G}_0$

$$-\bar{S}_{eff} = iT \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{\delta(s)}{s} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathcal{E}}{2i\pi} e^{i\mathcal{E}s} Tr_D Tr_x \left[\hat{G}(\mathcal{E}) - \hat{G}_0(\mathcal{E})\right] \tag{2.31}$$

$$= T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{E} d\mathcal{E}}{2i\pi} Tr_D Tr_x \left[\hat{G}(\mathcal{E}) - \hat{G}_0(\mathcal{E})\right], \tag{2.32}$$

avec la propriété $\int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{\delta(s)}{s} e^{i\mathcal{E}s} = -\int_{-\infty}^{+\infty} ds\delta'(s) e^{i\mathcal{E}s} = i\mathcal{E} \int_{-\infty}^{+\infty} ds\delta(s) e^{i\mathcal{E}s} = i\mathcal{E}$,a été utilisé afin de simplifier les intégrations.

Il reste à déterminer $\hat{G}$. Formellement, observons que $\hat{G}$ et $\hat{G}_0$vérifie les équations suivantes

$$\left[\mathcal{E} - (\alpha\hat{p} + \beta m + (\beta g + h) |v\rangle \langle v|)\right] \hat{G}(\mathcal{E}) = 1, \tag{2.33}$$

$$\left[\mathcal{E} - (\alpha\hat{p} + \beta m)\right] \hat{G}_0(\mathcal{E}) = 1 \tag{2.34}$$

et de ces deux équations, nous obtenons la relation entre $\hat{G}(\mathcal{E})$ et $\hat{G}_0(\mathcal{E})$

$$\hat{G}(\mathcal{E}) = \hat{G}_0(\mathcal{E}) + \hat{G}_0(\mathcal{E}) (\beta g + h) |v\rangle \langle v| \hat{G}(\mathcal{E}). \tag{2.35}$$

Afin de déterminer $\hat{G}$, nous pouvons procéder en suivant deux méthodes non perturbatives et perturbatives :

1-méthode non perturbative : premièrement, en multipliant Eq.(2.35) à gauche par le bra $< v|$, nous obtenons

$$\langle v| \hat{G}(\mathcal{E}) = \frac{1}{1-\Gamma} \langle v| \hat{G}_0(\mathcal{E}), \tag{2.36}$$

où nous avons posé

$$\Gamma = \langle v| \hat{G}_0(\mathcal{E}) (\beta g + h) |v\rangle. \tag{2.37}$$

qui est une matrice. Ensuite, en remplaçant cette expression dans l'équation, nous obtenons l'opérateur Green lié à l'interaction

$$\hat{G}(\mathcal{E}) = \hat{G}_0(\mathcal{E}) + \hat{G}_0(\mathcal{E})|v\rangle(\beta g + h)\frac{1}{1-\Gamma}\langle v|\hat{G}_0(\mathcal{E}), \tag{2.38}$$

en fonction de $\hat{G}_0$(libre). Cette méthode pour obtenir $\hat{G}$ est donc non perturbative.

2- l'autre méthode (itération) est perturbative : elle consiste à remplacer successivement $\hat{G}$ du deuxième membre par son expression (2.35)

$$\begin{aligned}
\hat{G}(\mathcal{E}) &= \hat{G}_0(\mathcal{E}) + \hat{G}_0(\mathcal{E})(\beta g + h)|v\rangle\langle v|\hat{G}(\mathcal{E}) \\
&= \hat{G}_0(\mathcal{E}) + \hat{G}_0(\mathcal{E})(\beta g + h)|v\rangle\langle v|\left(\hat{G}_0(\mathcal{E}) + \hat{G}_0(\mathcal{E})(\beta g + h)|v\rangle\langle v|\hat{G}(\mathcal{E})\right) \\
&= \hat{G}_0(\mathcal{E}) + \hat{G}_0(\mathcal{E})(\beta g + h)|v\rangle\langle v|\hat{G}_0(\mathcal{E}) \\
&+ \hat{G}_0(\mathcal{E})(\beta g + h)|v\rangle\langle v|\hat{G}_0(\mathcal{E})(\beta g + h)|v\rangle\langle v|\hat{G}_0(\mathcal{E}) + \\
&= \hat{G}_0(\mathcal{E}) + \hat{G}_0(\mathcal{E})(\beta g + h)|v\rangle\langle v|\hat{G}_0(\mathcal{E}) + \hat{G}_0(\mathcal{E})(\beta g + h)|v\rangle\Gamma\langle v|\hat{G}_0(\mathcal{E}) \\
&+ \hat{G}_0(\mathcal{E})(\beta g + h)|v\rangle\Gamma^2\langle v|\hat{G}_0(\mathcal{E}) + ... \\
&= \hat{G}_0(\mathcal{E}) + \hat{G}_0(\mathcal{E})(\beta g + h)|v\rangle\left(1 + \Gamma + \Gamma^2 + ...\right)\langle v|\hat{G}_0(\mathcal{E}) \\
&= \hat{G}_0(\mathcal{E}) + \hat{G}_0(\mathcal{E})|v\rangle(\beta g + h)\frac{1}{1-\Gamma}\langle v|\hat{G}_0(\mathcal{E}),
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Donc, le résultat est le même suivant les deux méthodes.

De plus, il est remarquable de noter que le deuxième terme de la fonction de Green, qui est le seul à contribuer au calcul de l'action efficective, a une forme séparable grâce à la séparabilité du potentiel.

En effet, dans l'espace de configuration, ce 2ème terme peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned}
\langle x_b|\hat{G}_0(\mathcal{E})|v\rangle(\beta g + h)\frac{1}{1-\Gamma}\langle v|\hat{G}_0(\mathcal{E})|x_a\rangle &= \langle x_b|\hat{G}_0(\mathcal{E})|v\rangle(\beta g + h)\frac{1}{1-\Gamma}\langle v|\hat{G}_0(\mathcal{E})|x_a\rangle \\
&= V^*(x_b,\mathcal{E})(\beta g + h)\frac{1}{1-\Gamma}V(x_a;\mathcal{E}) \\
&= 2\pi V^*(x_b,\mathcal{E})\hat{\delta}(\hat{p})(\beta g + h)\frac{1}{1-\Gamma}V(x_a;\mathcal{E})
\end{aligned} \tag{2.40}$$

où $V(x;\mathcal{E}){=}\int dx_c v(x_c)G_0(x_c,x;\mathcal{E})$.

Ainsi, une fois de plus, il apparaît au deuxième terme de la fonction de Green la caractéristique de non-localité à travers l'opérateur $\hat{\delta}(\hat{p})$ depuis $\hat{G}(x_b, x_a; \mathcal{E})$ est une solution d'une équation pseudo différentielle suivante.

$$\left[\mathcal{E} + i\alpha\frac{\partial}{\partial x_b} - \beta m + (\beta g + h)\, v(x_b)\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{(x'-x_b)\frac{\partial}{\partial x_b}}\right) v(x_b)\right]\hat{G}(x_b, x_a; \mathcal{E}) = \delta(x_b - x_a) \tag{2.41}$$

Il est clair que la dépendance infinie dans $\frac{\partial}{\partial x_b}$ pose le problème du traitement du potentiel comme perturbation puisque le terme $i\alpha\frac{\partial}{\partial x_b}$ peut aussi être considéré comme une perturbation par comparaison avec le potentiel.

Cependant, puisque l'expression de $\hat{G}$ est de même selon les méthodes directes et perturbatives, on conclut qu'il y a continuité analytique et que le traitement est indépendant du choix de la forme de la perturbation.

Maintenant, déterminons les deux fonctions de Green avec et sans interaction.

2.2.1 Détermination de l'action effective et probabilité

Tout d'abord, déterminons explicitement la fonction de Green $G_0(x_{b,}x_a; \mathcal{E})$ qui est l'élément de matrice de l'opérateur $\hat{G}_0$. En insérant le projecteur $\int dp\,|p\rangle\langle p| = 1$ et avec l'aide de la relation $\hat{p}\,|p\rangle = p\,|p\rangle$, l'opérateur $\hat{p}$ est éliminaté . Alors, utiliser le produit scalaire $\langle x|\, p\rangle = \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\pi}}$, nous avons

$$\begin{aligned}
G_0(x_{b,}x_a; \mathcal{E}) &= \langle x_b|\,\hat{G}_0(\mathcal{E})\,|x_a\rangle \\
&= \langle x_b|\,\frac{1}{\mathcal{E} - (\alpha\hat{p} + \beta m + i0^+)}\,|x_a\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi}\frac{e^{ip((x_b - x_a))}}{\mathcal{E} - (\alpha p + \beta m + i0^+)} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi}\frac{e^{ip((x_b - x_a))}}{\mathcal{E}^2 - p^2 - m^2 - i0^+}(\mathcal{E} + \alpha p + \beta m)\,,
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Il est évident qu'il y a deux pôles $\pm\left(\sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2} - i0^+\right)$ situé sur les plans 1/2 inférieur et supérieur. Selon la méthode des résidus, il est facile d'effectuer l'intégrale. Pour les différents cas de x_b et x_a, le résultat peut être obtenu par les manipulations suivantes

$$G_0\left(x_b,x_a;\mathcal{E}\right) = (\beta m + E)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi}\frac{1}{\mathcal{E}^2 - i0^+ - (p^2+m^2)}e^{ip(x_b-x_a)} \tag{2.43}$$

$$+\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi}\frac{p}{\mathcal{E}^2 - i0^+ - (p^2+m^2)}e^{ip(x_b-x_a)} \tag{2.44}$$

et utilisons les décompositions

$$\frac{1}{E^2-(p^2+m^2)} = \frac{1}{p_0^2-p^2} = \frac{1}{2p_0}\left[\frac{1}{p+p_0} - \frac{1}{p-p_0}\right] \tag{2.45}$$

$$\frac{p}{E^2-(p^2+m^2)} = \frac{p}{p_0^2-p^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p+p_0} + \frac{1}{p-p_0}\right] \tag{2.46}$$

donc

$$G_0\left(x_b,x_a;\mathcal{E}\right) = \frac{1}{2p_0}(\beta m + E)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi}\left[\frac{1}{p+p_0} - \frac{1}{p-p_0}\right]e^{ip(x_b-x_a)}$$
$$-\frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi}\left[\frac{1}{p+p_0} + \frac{1}{p-p_0}\right]e^{ip(x_b-x_a)} \tag{2.47}$$

si $x_b - x_a > 0$ demi-plan supérieur $p_0 = -\left[\sqrt{E^2-m^2} - i0\right]$
Comme les résultats des intégrations sont simples

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi}\left[\frac{1}{p+p_0} - \frac{1}{p-p_0}\right]e^{ip(x_b-x_a)} = i\lim_{p\to -p_0}(p+p_0)\left[\frac{1}{p+p_0} - \frac{1}{p-p_0}\right]e^{-ip_0(x_b-x_a)} = ie^{-ip_0(x_b-x_a)} \tag{2.48}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi}\left[\frac{1}{p+p_0} + \frac{1}{p-p_0}\right]e^{ip(x_b-x_a)} = i\lim_{p\to -p_0}(p+p_0)\left[\frac{1}{p+p_0} + \frac{1}{p-p_0}\right]e^{-ip_0(x_b-x_a)} = ie^{-ip_0(x_b-x_a)} \tag{2.49}$$

Alors, la fonction de Green libre est la suivante

$$G_0\left(x_{b,}x_a;\mathcal{E}\right)=\frac{i}{2p_0}\left(-\alpha p_0+\left(\beta m+E\right)\right)e^{-ip_0\left(x_b-x_a\right)} \tag{2.50}$$

si $x_b-x_a<0$ demi-plan inférieur $p_0=\left[\sqrt{E^2-m^2}-i0\right]$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi}\left[\frac{1}{p+p_0}-\frac{1}{p-p_0}\right]e^{ip\left(x_b-x_a\right)}=-i\lim_{p\rightarrow p_0}\left(p-p_0\right)\left[\frac{1}{p+p_0}-\frac{1}{p-p_0}\right]e^{ip_0\left(x_b-x_a\right)}=ie^{ip_0\left(x_b-x_a\right)} \tag{2.51}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi}\left[\frac{1}{p+p_0}+\frac{1}{p-p_0}\right]e^{ip\left(x_b-x_a\right)}=-i\lim_{p\rightarrow p_0}\left(p-p_0\right)\left[\frac{1}{p+p_0}+\frac{1}{p-p_0}\right]e^{ip\left(x_b-x_a\right)}=-ie^{ip_0\left(x_b-x_a\right)} \tag{2.52}$$

Alors, la fonction de Green libre est la suivante

$$G_0\left(x_{b,}x_a;\mathcal{E}\right)=\frac{i}{2p_0}\left(\alpha p_0+\left(\beta m+\mathcal{E}\right)\right)e^{ip_0\left(x_b-x_a\right)} \tag{2.53}$$

Finalment, la fonction de Green est

$$G_0\left(x_{b,}x_a;\mathcal{E}\right)=\frac{i}{2\sqrt{\mathcal{E}^2-m^2}}\left(-\alpha\sqrt{\mathcal{E}^2-m^2}\sin\left(x_b-x_a\right)+\left(\beta m+\mathcal{E}\right)\right)e^{-i\sqrt{\mathcal{E}^2-m^2}\left|\left(x_b-x_a\right)\right|} \tag{2.54}$$

Pour le trosième cas c-à-d

$$\mathcal{E}^2<m^2 \tag{2.55}$$

$$p_0^2=\mathcal{E}^2-m^2=-\left(m^2-\mathcal{E}^2\right)=-\kappa^2 \tag{2.56}$$

la fonction de Green sera définit comme suit

$$G_0\left(x_{b,}x_a;\mathcal{E}\right)=\left(\beta m+\mathcal{E}\right)\int\frac{dp}{2\pi}\frac{1}{\mathcal{E}^2-i0^+-\left(p^2+m^2\right)}e^{ip_0\left(x_b-x_a\right)}+\alpha\int\frac{dp}{2\pi}\frac{p}{\mathcal{E}^2-i0^+-\left(p^2+m^2\right)}e^{ip_0\left(x_b-x_a\right)} \tag{2.57}$$

utilisons toujours la méthode de décomposition

$$\frac{1}{\mathcal{E}^2-\left(p^2+m^2\right)}=\frac{1}{-p^2--\kappa^2}=-\frac{1}{p^2+\kappa^2}==\frac{1}{2i\kappa}\left[\frac{1}{p+i\kappa}-\frac{1}{p-i\kappa}\right] \tag{2.58}$$

$$\frac{p}{E^2-(p^2+m^2)} = \frac{p}{-\kappa^2-p^2} = -\frac{p}{\kappa^2+p^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p+i\kappa}+\frac{1}{p-i\kappa}\right] \tag{2.59}$$

donc

$$G_0\left(x_{b,}x_a;\mathcal{E}\right) = \frac{1}{2i\kappa}\left(\beta m+\mathcal{E}\right)\int\frac{dp}{2\pi}\left[\frac{1}{p+i\kappa}-\frac{1}{p-i\kappa}\right]e^{ip_0(x_b-x_a)} - \frac{1}{2}\alpha\int\frac{dp}{2\pi}\left[\frac{1}{p+i\kappa}+\frac{1}{p-i\kappa}\right]e^{ip_0(x_b-x_a)} \tag{2.60}$$

pour $(x_b-x_a)>0; p_0=i\kappa$

$\kappa=\sqrt{m^2-E^2} \to\to$demi-plan inférieur

Comme les résultats des intégrations sont simples

$$\int\frac{dp}{2\pi}\left[\frac{1}{p+i\kappa}-\frac{1}{p-i\kappa}\right]e^{ip_0(x_b-x_a)} = -i\lim_{p\to i\kappa}(p-i\kappa)\left[\frac{1}{p+i\kappa}-\frac{1}{p-i\kappa}\right]e^{ip_0(x_b-x_a)} = ie^{-\kappa(b-a)} \tag{2.61}$$

$$\int\frac{dp}{2\pi}\left[\frac{1}{p+i\kappa}+\frac{1}{p-i\kappa}\right]e^{ip_0(x_b-x_a)} = -i\lim_{p\to i\kappa}(p-i\kappa)\left[\frac{1}{p+i\kappa}+\frac{1}{p-i\kappa}\right]e^{ip_0(x_b-x_a)} = -ie^{-\kappa(b-a)} \tag{2.62}$$

$$G_0\left(x_{b,}x_a;\mathcal{E}\right) = \frac{1}{2\kappa}\left(i\alpha\kappa+(\beta m+\mathcal{E})\right)e^{-\kappa(x_b-x_a)} \tag{2.63}$$

pour $(x_b-x_a)<0; p_0=-i\kappa$

$\kappa=\sqrt{m^2-E^2} \to\to$demi-plan supérieur

Comme les résultats des intégrations sont simples

$$\int\frac{dp}{2\pi}\left[\frac{1}{p+i\kappa}-\frac{1}{p-i\kappa}\right]e^{ip_0(x_b-x_a)} = i\lim_{p\to i\kappa}(p-i\kappa)\left[\frac{1}{p+i\kappa}-\frac{1}{p-i\kappa}\right]e^{ip_0(x_b-x_a)} = ie^{+\kappa(x_b-x_a)} \tag{2.64}$$

$$\int\frac{dp}{2\pi}\left[\frac{1}{p+i\kappa}+\frac{1}{p-i\kappa}\right]e^{ip_0(x_b-x_a)} = i\lim_{p\to i\kappa}(p-i\kappa)\left[\frac{1}{p+i\kappa}+\frac{1}{p-i\kappa}\right]e^{ip_0(x_b-x_a)} = ie^{+\kappa(x_b-x_a)} \tag{2.65}$$

$$G_0\left(x_{b,}x_a;\mathcal{E}\right) = \frac{1}{2\kappa}\left(-i\alpha\kappa+(\beta m+\mathcal{E})\right)e^{+\kappa(x_b-x_a)} \tag{2.66}$$

donc

$$G_0\left(x_b,x_a;\mathcal{E}\right)=\frac{1}{2\kappa}\left(i\alpha\kappa\sin(x_b-x_a)+(\beta m+\mathcal{E})\right)e^{-\kappa|x_b-x_a|} \tag{2.67}$$

Enfin, on trouve que l'expression de la fonction de Green dans le cas libre est

$$G_0\left(x_b,x_a;\mathcal{E}\right)=\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2\kappa}e^{-\kappa|x_b-x_a|}\left[i\alpha\kappa sign\left(x_b-x_a\right)+\beta m+\mathcal{E}\right]\ \text{pour } \mathcal{E}^2<m^2\\ \frac{1}{2i\sqrt{\mathcal{E}^2-m^2}}e^{-i\sqrt{\mathcal{E}^2-m^2}|x_b-x_a|}\left[-\alpha\sqrt{\mathcal{E}^2-m^2}sign\left(x_b-x_a\right)+\beta m+\mathcal{E}\right]\ \text{pour } \mathcal{E}^2>m^2,\end{array}\right. \tag{2.68}$$

où le lien entre $\kappa=\sqrt{m^2-\mathcal{E}^2}$ (avec $\mathcal{E}^2<m^2$) et p_0=$\sqrt{\mathcal{E}^2-m^2}$ (avec $\mathcal{E}^2>m^2$),est donnée par $\kappa=ip_0$.

Ainsi, la fonction de Green G liés à notre interaction non locale est

$$\begin{aligned}G\left(x_b,x_a;\mathcal{E}\right)&=\frac{1}{2ip_0}e^{-ip_0|x_b-x_a|}\left[-\alpha p_0 sign\left(x_b-x_a\right)+\beta m+\mathcal{E}\right]\\&+\left(\frac{1}{2ip_0}\right)^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}dx_c dx_z v\left(x_c\right)v\left(x_z\right)e^{-ip_0|x_b-x_c|}e^{-ip_0|x_z-x_a|}\times\\&\begin{array}{l}\left[-\alpha p_0 sign\left(x_b-x_c\right)+\beta m+\mathcal{E}\right]\left(\beta g+h\right)\\ \times\left[\frac{1}{1-\Gamma}\right]\left[-\alpha p_0 sign\left(x_z-x_a\right)+\beta m+\mathcal{E}\right]\end{array},\end{aligned} \tag{2.69}$$

et l'action effective a pour expression

$$\begin{aligned}\bar{S}_{eff}&=-iT\int_{\mathcal{C}}\frac{\mathcal{E}d\mathcal{E}}{2i\pi}\left(\frac{1}{2ip_0}\right)^2\\&\times Tr_D Tr_x\left[\begin{array}{c}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}dx_c dx_z v\left(x_c\right)v\left(x_z\right)e^{-ip_0|x_b-x_c|}e^{-ip_0|x_z-x_a|}\\ \left[-\alpha p_0 sign\left(x_b-x_c\right)+\beta m+\mathcal{E}\right]\left(\beta g+h\right)\left[\frac{1}{1-\Gamma}\right]\\ \left[-\alpha p_0 sign\left(x_z-x_a\right)+\beta m+\mathcal{E}\right]\end{array}\right],\end{aligned} \tag{2.70}$$

où $p_0=\sqrt{\mathcal{E}^2-m^2}$ pour $\mathcal{E}^2>m^2$.

Calculons la matrice Γ. En insérant les deux projecteurs $\int dx_b\left|x_b\right\rangle\left\langle x_b\right|=\int dx_a\left|x_a\right\rangle\left\langle x_a\right|=1$,nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\Gamma &=< v \mid G_0\left(\beta g+h\right) \mid v > \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_b dx_a v\left(x_b\right) G_0\left(x_b, x_a; \mathcal{E}\right)\left(\beta g+h\right) v\left(x_a\right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_b dx_a v\left(x_b\right)\left[\frac{1}{2ip_0} e^{-ip_0\left|x_b-x_a\right|}\left[-\alpha p_0 sign\left(x_b-x_a\right)+\beta m+\mathcal{E}\right]\right]\left(\beta g+h\right) v\left(x_a\right) \qquad (2.71)\\
&= \frac{1}{2ip_0}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_b v\left(x_b\right)\left(\int_{-\infty}^{+x_b}+\int_{x_b}^{+\infty}\right) dx_a e^{-ip_0\left|x_b-x_a\right|}\left[-\alpha p_0 sign\left(x_b-x_a\right)+\beta m+\mathcal{E}\right]\left(\beta g+h\right) v\left(x_a\right) \qquad (2.72)\\
&= \frac{1}{2ip_0}\left[\left(\begin{array}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_b v\left(x_b\right) e^{-ip_0 x_b}\int_{-\infty}^{+x_b} dx_a v\left(x_a\right) e^{ip_0 x_a}\left[-\alpha p_0+\beta m+\mathcal{E}\right] \\ +\int_{-\infty}^{+\infty} dx_b v\left(x_b\right) e^{-ip_0 x_b}\int_{x_b}^{+\infty} dx_a v\left(x_a\right) e^{ip_0 x_a}\left[\alpha p_0+\beta m+\mathcal{E}\right] \end{array}\right)\right]\left(\beta g+h\right) \qquad (2.73)\\
&= \frac{1}{ip_0}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_b v\left(x_b\right) e^{-ip_0 x_b}\int_{-\infty}^{+x_b} dx_a v\left(x_a\right) e^{ip_0 x_a}\left(\beta m+\mathcal{E}\right)\left(\beta g+h\right) \qquad (2.74)\\
&= \frac{1}{2ip_0} J\left[\mathcal{E}h+mg+\beta\left(\mathcal{E}g+mh\right)\right]. \qquad (2.75)
\end{aligned}
$$

avec

$$
J=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx_b dx_a v\left(x_b\right) v\left(x_a\right) e^{-ip_0\left|x_b-x_a\right|}.
$$

telque

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx_b dx_a v\left(x_b\right) v\left(x_a\right) e^{-ip_0\left|x_b-x_a\right|} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_b v\left(x_b\right)\left(\int_{-\infty}^{x}+\int_{x}^{+\infty}\right) dx_a v\left(x\right) e^{-ip_0\left|x_b-x_a\right|} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_b v\left(x_b\right)\int_{-\infty}^{x} dx_a v\left(x_a\right) e^{-ip_0\left(x_b-x_a\right)}+\int_{-\infty}^{+\infty} dx_b v\left(x_b\right)\int_{x}^{+\infty} dx_a v\left(x_a\right) e^{ip_0\left(x_b-x_a\right)} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_b v\left(x_b\right) e^{-ip_0 x_b}\int_{-\infty}^{x_b} dx_a v\left(x_a\right) e^{ip_0 x_a}+\int_{-\infty}^{+\infty} dx_b v\left(x_b\right) e^{ip_0 x_b}\int_{x}^{+\infty} dx_a v\left(x_a\right) e^{-ip_0 x_a} \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty} dx_b v\left(x_b\right) e^{-ip_0 x_b}\int_{-\infty}^{x} dx_a v\left(x_a\right) e^{ip_0 x_a} \qquad (2.76)
\end{aligned}
$$

Ensuite, nous pouvons déduire $\frac{1}{1-\Gamma}$ qui est aussi une matrice. C'est égal à

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\Gamma} &= \frac{1}{1-\frac{1}{2ip_0}J\left[\mathcal{E}h+mg+\beta\left(\mathcal{E}g+mh\right)\right]} = \frac{2ip_0}{2ip_0-J\left(\mathcal{E}h+mg\right)-\beta J\left(\mathcal{E}g+mh\right)} \\ &= \frac{2ip_0\left[2ip_0-J\left(\mathcal{E}h+mg\right)+\beta J\left(\mathcal{E}g+mh\right)\right]}{\left(2ip_0-J\left(\mathcal{E}h+mg\right)-J\left(\mathcal{E}g+mh\right)\right)\left(2ip_0-J\left(\mathcal{E}h+mg\right)+J\left(\mathcal{E}g+mh\right)\right)} \\ &= \frac{2ip_0\left[2ip_0-J\left(\mathcal{E}h+mg\right)+\beta J\left(\mathcal{E}g+mh\right)\right]}{\left[2ip_0-J\left(\mathcal{E}+m\right)\left(h+g\right)\right]\left[2ip_0+J\left(\mathcal{E}-m\right)\left(g-h\right)\right]},\end{aligned} \tag{2.77}$$

et donc l'action effective $\bar{S}_{eff}$ a maintenant, pour l'expression

$$\bar{S}_{eff} = T\int_{\mathcal{C}}\frac{\mathcal{E}d\mathcal{E}}{2i\pi}\frac{1}{2ip_0}\frac{1}{\left[2ip_0-J\left(\mathcal{E}+m\right)\left(h+g\right)\right]\left[2ip_0+J\left(\mathcal{E}-m\right)\left(g-h\right)\right]}$$
$$Tr_D Tr_x\left[\begin{array}{c}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}dx_c dx_z v\left(x_c\right)v\left(x_z\right)e^{-ip_0|x_b-x_c|}e^{-ip_0|x_z-x_a|} \\ \left[-\alpha p_0 sign\left(x_b-x_c\right)+\beta m+\mathcal{E}\right]\left(\beta g+h\right) \\ \times\left[2ip_0-J\left(\mathcal{E}h+mg\right)+\beta J\left(\mathcal{E}g+mh\right)\right] \\ \times\left[-\alpha p_0 sign\left(x_z-x_a\right)+\beta m+\mathcal{E}\right]\end{array}\right]. \tag{2.78}$$

Passons au calcul des traces relatives aux matrices dans S_{eff}.

Après le développement des 4 produits des facteurs contenant les matrices α et β et l'utilisation des propriétés des traces $Tr\alpha = Tr\beta = Tr\left(\alpha\beta\right) = 0$, il est facile de voir $\bar{S}_{eff}$ est réduit à

$$\bar{S}_{eff} = 4T\int_{\mathcal{C}}\frac{d\mathcal{E}}{2i\pi}\frac{\mathcal{E}}{2ip_0}\frac{1}{\left[2ip_0-J\left(\mathcal{E}+m\right)\left(h+g\right)\right]\left[2ip_0+J\left(\mathcal{E}-m\right)\left(g-h\right)\right]}$$
$$Tr_x\left[\begin{array}{c}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}dx_c dx_z v\left(x_c\right)v\left(x_z\right)e^{-ip_0|x_b-x_c|}e^{-ip_0|x_z-x_a|} \\ \left[\begin{array}{c}2m\mathcal{E}\left(Jm\left(h^2-g^2\right)+2ip_0 g\right) \\ +\left(\mathcal{E}J\left(g^2-h^2\right)+2ip_0 h\right)\left(\mathcal{E}^2+m^2+p_0^2 sign\left(x_z-x_a\right)sign\left(x_b-x_c\right)\right)\end{array}\right]\end{array}\right], \tag{2.79}$$

où le facteur 4 provient de $TrI = 4$.

Il reste à effectuer la dernière trace $Tr_x = \int_{-\infty}^{+\infty}dx\left(.\right)|_{x_b=x_a=x}$. relative à l'espace de configuration

Après quelques manipulations, le résultat est le suivant

$$\bar{S}_{eff} = -8T \int_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{E} d\mathcal{E}}{2i\pi} \frac{1}{\left[2ip_0 - J\left(\mathcal{E}+m\right)\left(h+g\right)\right]\left[2ip_0 - J\left(\mathcal{E}-m\right)\left(h-g\right)\right]}$$
$$\left[\begin{array}{c} 2im\left(hm+g\mathcal{E}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-2ip_0 x}\left(\int_{-\infty}^{x} dx_c e^{ip_0 x_c} v\left(x_c\right)\right)^2 \\ +\mathcal{E}\left[Jp_0\left(g^2-h^2\right)+2i\left(h\mathcal{E}+mg\right)\right]\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{x}^{+\infty} dx_c e^{-ip_0 x_c} v\left(x_c\right)\int_{-\infty}^{x} dx_z v\left(x_z\right) e^{ip_0 x_z} \end{array} \right], \tag{2.80}$$

où nous avons utilisé la propriété $v(x) = v(-x)$. Cette expression peut encore être réduite si l'on prend en compte les simplifications après intégrations par une partie des deux intégrales triples suivantes. Pour la 1ère intégrale nous avons

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-2ip_0 x}\left(\int_{-\infty}^{x} dx_c e^{ip_0 x_c} v\left(x_c\right)\right)^2 &= \frac{1}{-2ip_0} e^{-2ip_0 x}\left(\int_{-\infty}^{x} dx_c e^{ip_0 x_c} v\left(x_c\right)\right)^2\Bigg|_{-\infty}^{\infty} \\ &+ \frac{1}{ip_0}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ip_0 x} v\left(x\right)\int_{-\infty}^{x} dx_c e^{ip_0 x_c} v\left(x_c\right) \\ &= \frac{2}{2ip_0}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ip_0 x} v\left(x\right)\int_{-\infty}^{x} dx_c e^{ip_0 x_c} v\left(x_c\right) = \frac{J}{2ip_0}, \end{aligned} \tag{2.81}$$

où le premier terme égal à 0 comme le montre l'annexe A .Pour la deuxième intégrale, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{x}^{+\infty} dx_c e^{-ip_0 x_c} v\left(x_c\right)\int_{-\infty}^{x} dx_z v\left(x_z\right) e^{ip_0 x_z} &= x\int_{x}^{+\infty} dx_c e^{-ip_0 x_c} v\left(x_c\right)\int_{-\infty}^{x} dx_z v\left(x_z\right) e^{ip_0 x_z}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} x dx e^{-ip_0 x} v\left(x\right)\int_{-\infty}^{x} dx_z v\left(x_z\right) e^{ip_0 x_z} \\ &- \int_{-\infty}^{+\infty} x dx e^{ip_0 x} v\left(x\right)\int_{x}^{+\infty} dx_c e^{-ip_0 x_c} v\left(x_c\right) \\ &= i\frac{\partial J}{2\partial p_0}, \end{aligned} \tag{2.82}$$

où le premier terme égal à 0 comme le montre l'annexe A. Ces deux intégrales triples sont fonction de J .

Ainsi, nous obtenons une expression pour $\bar{S}_{eff}$ ce qui est plus pratique

$$\bar{S}_{eff} = -8iT \int_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{E}d\mathcal{E}}{2i\pi} \frac{1}{\left[2ip_0 - J\left(\mathcal{E}+m\right)\left(h+g\right)\right]\left[2ip_0 - J\left(\mathcal{E}-m\right)\left(h-g\right)\right]}$$
$$\left[\frac{m}{p_0}\left(hm+g\mathcal{E}\right)J + i\mathcal{E}\left[Jp_0\left(g^2-h^2\right)+2i\left(h\mathcal{E}+mg\right)\right]\frac{\partial J}{2\partial p_0}\right]. \tag{2.83}$$

Dans cette expression, il est évident qu'il y a 2 points de branchement$\mathcal{E} = \pm m$ à cause de la racine carrée $\sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2} = p_0$. Par conséquent, il est nécessaire d'introduire 2 coupes situées dans les 2 intervalles $|\mathcal{E}| \geq m$. Les pôles (ou singularités) situés dans l'intervalle$-m < \mathcal{E} < m$, correspondent aux états liés du spectre discret et les 2 coupes correspondent au spectre continu.

Notons par C^+ le chemin$]\infty - i0, m - i0[\cup]m + i0, \infty + i0[$ et par C^- le chemin $]-\infty - i0, -m - i0[\cup\ ]-m + i0, -\infty + i0[$ en entourant les points m et $-m$ dans les orientations négatives et positives et par $\int_{C^B}$ le contour entourant les pôles sur le$-m < E < m$ axes. L'intégrale sur C se décompose en 3 intégrales par rapport aux 3 contours : $\int_{\mathcal{C}} = \int_{C^+} + \int_{C^-} + \int_{C^B}$

D'abord, laissez-nous déterminer $\int_{C^B}$ relatives aux états liés et qui correspondent aux pôles (ou singularités, c'est-à-dire que le dénominateur est égal à 0). Ces énergies d'états liés $\mathcal{E}_B$ sont obtenus en résolvant les équations suivantes

$$2ip_0 - J\left(\mathcal{E}+m\right)\left(h+g\right) = 0, \tag{2.84}$$

$$2ip_0 - J\left(\mathcal{E}-m\right)\left(h-g\right) = 0. \tag{2.85}$$

En remplaçant p_0 par$\sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2}$ il est facile d'obtenir les énergies des états liés. Pour la première équation, on obtient l'énergie de l'état lié B_1

$$\mathcal{E}_{B_1} = \left.\frac{4-\left(g+h\right)^2 J_{B_1}^2}{4+\left(g+h\right)^2 J_{B_1}^2} m\right|_{p_{B_1} = 4im\frac{(h+g)J_{B_1}}{4+(h+g)^2 J_{B_1}^2}} \qquad \text{avec } (g+h) < 0, \tag{2.86}$$

alors que pour la deuxième équation, où il suffit de changer $(m, g) \to (-m, -g)$, nous avons l'énergie de l'état lié B_2

$$\mathcal{E}_{B_2} = -\left.\frac{4-(g-h)^2 J_{B_2}^2}{4+(g-h)^2 J_{B_2}^2} m\right|_{p_{B_2}=-4im\frac{(h-g)J_{B_2}}{4+(h-g)^2 J_{B_2}^2}} \qquad \text{avec } (g-h)<0. \tag{2.87}$$

Les conditions $(g \pm h) < 0$ sont dus à la détermination de la racine carrée $\sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2} = -i\sqrt{m^2 - \mathcal{E}^2}$.

Laissez-nous maintenant déterminer la contribution de chaque pôle. Pour le 1er pôle B_1, à proximité B_1nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2ip_0 - J(\mathcal{E}+m)(h+g)} &= \frac{2ip_0 + J(\mathcal{E}+m)(h+g)}{[2ip_0 - J(\mathcal{E}+m)(h+g)][2ip_0 + J(\mathcal{E}+m)(h+g)]} \\
&= \frac{2ip_0 + J(\mathcal{E}+m)(h+g)}{-4p_0^2 - J^2(\mathcal{E}+m)^2(h+g)^2} \\
&\approx \left.\frac{-2J(\mathcal{E}+m)(h+g)}{4p_0^2 + J^2(\mathcal{E}+m)^2(h+g)^2}\right|_{B_1} \\
&= \frac{-2J_{B_1}(h+g)}{\mathcal{E}\left[4+J_{B_1}^2(h+g)^2\right] - m\left(4 - J_{B_1}^2(h+g)^2\right)} \\
&= -2\frac{J_{B_1}(h+g)}{4+J_{B_1}^2(h+g)^2}\frac{1}{\mathcal{E}-\mathcal{E}_{B_1}},
\end{aligned} \tag{2.88}$$

et la contribution de ce pôle B_1 à l'action efficace effective est alors

$$\bar{S}_{eff.}^{B_1} = \left.\frac{8iT(h+g)\mathcal{E}}{4+J^2(h+g)^2}\frac{1}{g\mathcal{E}+hm}\left[\frac{m}{p}(hm+g\mathcal{E})J + i\frac{\partial J}{2\partial p}\mathcal{E}\left[Jp\left(g^2-h^2\right) + 2i(h\mathcal{E}+mg)\right]\right]\right|_{\substack{\mathcal{E}=\mathcal{E}_{B_1}\\ p=p_{B_1}\\ J=J_{B_1}}}, \tag{2.89}$$

avec $\mathcal{E}_{B_1} = -m\frac{4-(g+h)^2 J_{B_1}^2}{4+(g+h)^2 J_{B_1}^2}$ et $p_{B_1} = 4im\frac{(g+h)J_{B_1}}{4+(g+h)^2 J_{B_1}^2}$.

Depuis J_{B_1}dans un intégral (sur le variable x) est réel et que $\bar{S}_{eff.}^{B_1}$ est réel, cette action effective ne contribue pas à l'expression de la probabilité.

Avec le changement $(m, g) \rightarrow (-m, -g)$, l'action effective $S_{eff.}^{B_2}$ relatif à B_2 a une forme similaire à celle de $S_{eff.}^{B_1}$ et son expression est

$$\bar{S}_{eff.}^{B_2}=-\frac{8iT\left(h-g\right)\mathcal{E}}{4+J^2\left(h-g\right)^2}\frac{1}{g\mathcal{E}+hm}\left[\frac{m}{p}\left(hm+g\mathcal{E}\right)J+i\frac{\partial J}{2\partial p}\mathcal{E}\left[Jp\left(g^2-h^2\right)+2i\left(h\mathcal{E}+mg\right)\right]\right]\Bigg|_{\substack{\mathcal{E}=\mathcal{E}_{B_2}\\ p=p_{B_2}\\ J=J_{B_2}}}, \tag{2.90}$$

avec $\mathcal{E}_{B_2}=m\frac{4-(g-h)^2J_{B_2}^2}{4+(g-h)^2J_{B_2}^2}$ et $p_{B_2}=4im\frac{(g-h)J_{B_2}}{4+(g-h)^2J_{B_2}^2}$.

Aussi, l'action $\bar{S}_{eff.}^{B_2}$ ne contribue pas à le calcul de la probabilité.

Maintenant, considérons la partie continue. Première réécriture $\bar{S}_{eff.}$ comme suit

$$\begin{aligned}\bar{S}_{eff.}=8iT\int_{C^++C^-}\frac{d\mathcal{E}}{2i\pi}\frac{\mathcal{E}}{p_0}\frac{1}{p_0\left(J^2\left(g^2-h^2\right)+4\right)+4iJ\left(h\mathcal{E}+gm\right)}\\ .\left\{\frac{m}{p_0}\left(hm+g\mathcal{E}\right)J+i\mathcal{E}\frac{\partial J}{2\partial p_0}\left[Jp_0\left(g^2-h^2\right)+2i\left(h\mathcal{E}+mg\right)\right]\right\},\end{aligned} \tag{2.91}$$

et après quelques manipulations, nous pouvons montrer que $\bar{S}_{eff.}^{cont.}$ prend une forme plus compacte (voir l'annexe B)

$$\bar{S}_{eff.}^{cont.}=-16T\,\mathrm{Re}\int_{m-i0^+}^{+\infty-i0^+}\frac{d\mathcal{E}}{2\pi}\frac{\mathcal{E}}{p_0}\left\{\begin{array}{c}\frac{\frac{m}{p_0}(hm+g\mathcal{E})J}{p_0(J^2(g^2-h^2)+4)+4iJ(h\mathcal{E}+gm)}+i\mathcal{E}\frac{\partial J}{2\partial p_0}\frac{Jp_0\left(g^2-h^2\right)+2i(h\mathcal{E}+mg)}{p_0(J^2(g^2-h^2)+4)+4iJ(h\mathcal{E}+gm)}\\ -\frac{\frac{m}{p_0}(hm-g\mathcal{E})J}{p_0(J^2(g^2-h^2)+4)+4iJ(-h\mathcal{E}+gm)}-i\mathcal{E}\frac{\partial J}{2\partial p_0}\frac{Jp_0\left(g^2-h^2\right)+2i(-h\mathcal{E}+mg)}{p_0(J^2(g^2-h^2)+4)+4iJ(-h\mathcal{E}+gm)}\end{array}\right\}. \tag{2.92}$$

Il est évident que $\bar{S}_{eff.}^{cont.}$ est purement réel, sa partie imaginaire est alors égale à zéro

$$\mathrm{Im}\,\bar{S}_{eff.}^{cont.}=0, \tag{2.93}$$

c-à-d la partie continue de l'action effective ne contribue pas au calcul de la probabilité. La probabilité liée à notre interaction non locale est alors simplement nulle.

$$P=1-\exp\left(-2\,\mathrm{Im}\left(\bar{S}_{eff.}^{cont.}+\bar{S}_{eff.}^{B_1}+\bar{S}_{eff.}^{B_2}\right)\right)=1-\exp\left(0\right)=0. \tag{2.94}$$

c-à-d qu'il n'y a pas de processus de création de paire de particules (Dirac) lorsque le vide est perturbé par une telle forme d'interaction séparable.

Ce résultat nécessite cependant quelques clarifications ou remarques.

A-Considérons l'équation de continuité. Après avoir multiplié l'équation de Dirac et son adjoint respectivement par Ψ^{+} et Ψet par différence, nous obtenons l'équation suivante

$$\begin{array}{c} \frac{\partial\Psi^{+}\Psi}{\partial t}+\frac{\partial j}{\partial x}+i\left(\int_{-\infty}^{+\infty}dx'v\left(x'\right)\Psi^{+}\left(x',t\right)\right)\left(g+h\right)\Psi\left(x,t\right)v\left(x\right) \\ -iv\left(x\right)\Psi^{+}\left(x,t\right)\left(\beta g+h\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}dx'\Psi\left(x',t\right)v\left(x'\right)\right) \qquad\qquad =0, \end{array} \tag{2.95}$$

où $j=\Psi^{+}\alpha\Psi$ est la densité de courant standard . Cette équation n'est pas la forme standard de l'équation de continuité, mais en utilisant la relation $f\left(x,t\right)=\frac{\partial}{\partial t}\int^{t}dsf\left(x,s\right)$, nous pouvons absorber les deux derniers termes du premier terme de l'équation précédente et on obtient maintenant

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial j}{\partial x}=0, \tag{2.96}$$

où

$$\begin{array}{l} \rho=\Psi^{+}\Psi+ \\ i\displaystyle\int^{t}ds\left[\begin{array}{c} \left(\int_{-\infty}^{+\infty}dx'v\left(x'\right)\Psi^{+}\left(x',s\right)\right)\left(\beta g+h\right)\Psi\left(x,s\right)v\left(x\right) \\ -v\left(x\right)\Psi^{+}\left(x,s\right)\left(\beta g+h\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}dx'v\left(x'\right)\Psi\left(x',s\right)\right) \end{array}\right], \end{array} \tag{2.97}$$

est la nouvelle densité qui n'est clairement définie positive pour tout $v\left(x\right)\neq\delta\left(x\right)$. Cependant, notons que $\int_{-\infty}^{+\infty}\rho dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^{+}\Psi dx=1$ pour tout $v\left(x\right).$

Ainsi, pour ce type de potentiel, localement il n'y a pas de conservation du nombre de particules (c'est-à-dire que les particules sont créées ou absorbées) mais globalement il y a conservation du nombre de particules.

Comme, on sait que pour l'équation de Dirac, Ψ est la fonction d'onde , $\rho=\Psi^{+}\Psi>0$ est la densité de probabilité et Ψ devient une variable de Grassmann dans le formalisme de l'intégrale fonctionnelle . Dans notre cas ρ dépend de $v(x)$ n'est pas toujours >0 et l'utilisation de l'Eq.11 nous semble non appropriée puisque l'Eq.11 concerne les particules de Dirac (ayant $\rho>0$).

Ainsi, le résultat de la probabilité $=0$ peut s'expliquer par le fait que la création de paires de particules de type Dirac ($\rho>0$) n'est pas possible avec le potentiel non local.

Avec une autre approche, par exemple avec la méthode des états de vide "in" et "out", il faut prendre en compte la nature de la particule et les statistiques correspondantes. Nous savons que nous avons des statistiques de Bose pour les particules satisfaisant l'équation de Klein - Gordon et des statistiques de Fermi pour les particules de Dirac correspondantes. Dans notre cas, il y a une ambiguïté sur la nature de la particule.

B- Sur le plan procédural : la forme linéaire $\hat{E}\left(=i\frac{\partial}{\partial t}\right)$ utilisé, a conduit à l'apparition de la fonction Dirac $\delta\left(s-\left(t_b-t_a\right)\right)$ au lieu de la forme quadratique habituelle $\hat{E}^2\left(=-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$que l'on obtient en général en appliquant l'opération de conjugaison de charge C. Dans notre cas du potentiel non local, cette opération C conduirait à une forme non exploitable.

À titre d'illustration, choisissons le cas où $v(x)$ a une forme simple qui est la fonction delta de Dirac,

$$v\left(x\right)=\delta\left(x\right). \tag{2.98}$$

Dans ce cas, l'interaction non locale devient une interaction locale. Nous savons que la fonction $-\delta$ est mal défini dans l'espace de Hilbert et il peut être défini par une séquence de fonctions. Pour résoudre l'équation de Dirac par exemple, il faut habituellement une séquence comme un potentiel de puits carré fini, puis prendre la fin de la solution obtenue. Pour le cas de l'équation de Dirac, on trouve cependant que la solution dépend du choix de la séquence, contrairement à l'équation de Schrödinger.

2.2.2 Cas particulier : Potentiel $-\delta$ non local et séparable

Notons que l'intégrale J devient simple

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty}dxv\left(x\right)\int_{-\infty}^{+\infty}dxv\left(y\right)e^{-ip_0|x-y|}=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\delta\left(x\right)\int_{-\infty}^{+\infty}dx\delta\left(y\right)e^{-ip_0|x-y|}=1, \tag{2.99}$$

et les énergies des états liés sont égales à

$$\mathcal{E}_{B_1}=\frac{4-\left(g+h\right)^2}{4+\left(g+h\right)^2}m \quad \text{avec } \left(g+h\right)<0, \tag{2.100}$$

$$\mathcal{E}_{B_2}=-\frac{4-\left(g-h\right)^2}{4+\left(g-h\right)^2}m \quad \text{avec } \left(g-h\right)<0, \tag{2.101}$$

et les actions effectives liées aux états liés et aux états continus sont respectivement les suivantes

$$\bar{S}^{B_1}_{eff.} = 2T\mathcal{E}_{B_1}, \tag{2.102}$$

$$\bar{S}^{B_2}_{eff.} = 2T\mathcal{E}_{B_2}, \tag{2.103}$$

$$\begin{aligned}
\bar{S}^{cont.}_{eff.} &= -16T\,\mathrm{Re}\int_{m-i0^+}^{+\infty-i0^+}\frac{d\mathcal{E}}{2\pi}\frac{\mathcal{E}}{p_0}\left\{\begin{array}{c}\frac{\frac{m}{p_0}(hm+g\mathcal{E})}{p_0((g^2-h^2)+4)+4i(h\mathcal{E}+gm)}-\frac{\frac{m}{p_0}(hm-g\mathcal{E})}{p_0((g^2-h^2)+4)+4i(-h\mathcal{E}+gm)}\\ +\frac{\frac{m}{p_0}(hm-g\mathcal{E})}{p_0((g^2-h^2)+4)-4i(h\mathcal{E}+gm)}-\frac{\frac{m}{p_0}(hm-g\mathcal{E})}{p_0((g^2-h^2)+4)-4i(-h\mathcal{E}+gm)}\end{array}\right\}\\
&= -32T\left(\int_{m-i0^+}^{+\infty-i0^+}+\int_{-\infty-i0^+}^{-m-i0^+}\right)\frac{d\mathcal{E}}{2\pi}\frac{\mathcal{E}}{p_0}\frac{\frac{m}{p_0}\left(hm+g\mathcal{E}\right)\left(p_0\left(g^2-h^2\right)+4\right)}{\left[p_0\left(\left(g^2-h^2\right)+4\right)\right]^2+\left[4\left(h\mathcal{E}+gm\right)\right]^2},
\end{aligned} \tag{2.104}$$

et que la probabilité pour ce cas de potentiel delta de Dirac

$$P_\delta = 1 - e^{-2\,\mathrm{Im}\left(\bar{S}^{cont.}_{eff.}+\bar{S}^{B_1}_{eff.}+v^{B_2}_{eff.}\right)} = 1 - 1 = 0. \tag{2.105}$$

est aussi nulle !

Cependant, ce résultat nécessite à nouveau quelques clarifications

1- D'abord, laissez-nous calculer explicitement $\bar{S}^{cont.}_{eff.}$ en effectuant les deux intégrations. Comme

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathcal{E}}{\sqrt{\mathcal{E}^2-m^2}}\frac{g\mathcal{E}+hm}{\left[p_0\left(\left(g^2-h^2\right)+4\right)\right]^2+\left[4\left(h\mathcal{E}+gm\right)\right]^2}\\
&=\frac{1}{2}\frac{1}{g^2-h^2+4}\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}^2-m^2}}\left[\frac{g+h}{4+(g+h)^2}+\frac{g+h}{4+(g+h)^2}\frac{\mathcal{E}_{B_1}}{\mathcal{E}-\mathcal{E}_{B_1}}+(h,\mathcal{E}_{B_1})\to(-h,\mathcal{E}_{B_2})\right],
\end{aligned} \tag{2.106}$$

et avec l'aide de l' Eq.2.261 [21]

$$\begin{aligned}
R &= a+bx+cx^2\\
\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} &= \frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left(2\sqrt{cR}+2cx+b\right) \qquad c>0\\
&= \frac{-1}{\sqrt{-c}}arc\sin\frac{2cx+b}{\sqrt{-\Delta}} \qquad c<0 \quad \Delta=4ac-b^2<0,
\end{aligned} \tag{2.107}$$

et l'Eq.2.281 (avec n=1) [21]

$$\int \frac{dx}{(x+p)^n \sqrt{a+bx+cx^2}} = -\int \frac{t^{n-1}dt}{\sqrt{c+(b-2pc)\,t+(a-bp+cp^2)\,t^2}} \qquad t=\frac{1}{x+p}>0, \tag{2.108}$$

nous obtenons le résultat suivant de ces deux intégrales

$$\int_m^\infty \frac{d\mathcal{E}}{\sqrt{\mathcal{E}^2-m^2}} = \lim_{\mathcal{E}\to\infty} \ln\left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}^2-m^2}+\mathcal{E}}{m}\right), \tag{2.109}$$

$$\int_m^\infty \frac{d\mathcal{E}}{\sqrt{\mathcal{E}^2-m^2}} \frac{1}{\mathcal{E}-\mathcal{E}_{B_1}} = \frac{1}{\sqrt{m^2-\mathcal{E}_{B_1}^2}}\left(\arcsin\frac{\mathcal{E}_{B_1}}{m}+\pi/2\right), \tag{2.110}$$

Et ainsi

$$\int_m^\infty d\mathcal{E}... = \frac{1}{2}\frac{1}{g^2-h^2+4}\left[\begin{array}{c} \frac{g+h}{4+(g+h)^2}\lim_{\mathcal{E}\to\infty}\ln\left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}^2-m^2}+\mathcal{E}}{m}\right)+\mathcal{E}_{B_1}\frac{g+h}{4+(g+h)^2}\frac{1}{\sqrt{m^2-\mathcal{E}_{B_1}^2}}\left(\arcsin\frac{\mathcal{E}_{B_1}}{m}+\pi/2\right) \\ +\frac{g-h}{4+(g-h)^2}\lim_{\mathcal{E}\to\infty}\ln\left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}^2-m^2}+\mathcal{E}}{m}\right)+\mathcal{E}_{B_2}\frac{g-h}{4+(g-h)^2}\frac{1}{\sqrt{m^2-\mathcal{E}_{B_2}^2}}\left(\arcsin\frac{\mathcal{E}_{B2}}{m}+\pi/2\right) \end{array}\right], \tag{2.111}$$

et après quelques manipulations, nous obtenons pour le potentiel delta de Dirac l'expression de la partie continue de l'action effective

$$\bar{S}_{eff.}^{cont.} = -32T\frac{1}{g^2-h^2+4}\left[\begin{array}{c} \frac{g+h}{4+(g+h)^2}\lim_{\mathcal{E}\to\infty}\ln\left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}^2-m^2}+\mathcal{E}}{m}\right)+\frac{g+h}{4+(g+h)^2}\frac{\mathcal{E}_{B_1}}{\sqrt{m^2-\mathcal{E}_{B_1}^2}}\left(\arcsin\frac{\mathcal{E}_{B_1}}{m}\right) \\ +\frac{g-h}{4+(g-h)^2}\lim_{\mathcal{E}\to\infty}\ln\left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}^2-m^2}+\mathcal{E}}{m}\right)+\frac{g-h}{4+(g-h)^2}\frac{\mathcal{E}_{B_2}}{\sqrt{m^2-\mathcal{E}_{B_2}^2}}\left(\arcsin\frac{\mathcal{E}_{B2}}{m}\right) \end{array}\right], \tag{2.112}$$

et il est évident que $\bar{S}_{eff.}^{cont.} \to \infty$.

Dans notre cas de le potentiel $-\delta$, notons que l'amplitude vide-vide $\mathcal{A}(vac{-}vac) = e^{i\bar{S}_{eff}} = NDet\hat{O}_D \to e^{i\infty}$ et par conséquent le passage de l'équation 12 à l'équation 13 pour obtenir la fonction de Green n'est pas clair. en outre, le potentiel $-\delta$ est connu pour le problème posé par l'obtention de la solution de l'équation de Dirac et bien que des suggestions [18] comme le remplacement de $\delta\,(x)\,\Psi\,(x)$ par $\delta\,(x)\,\frac{\Psi(0^+)+\Psi(0^-)}{2}$, la solution de ce problème reste ambigu.

Sinon, comme la solution de l'équation de Dirac pour le potentiel $-\delta$ est

$$\Psi(x)=\Phi_0(x)+2e^{-ip_0x}\theta(-x)\frac{\left(\mathcal{E}\left(g^2-h^2\right)+2iph\right)(\mathcal{E}+m\beta)}{(h^2-g^2)p_0^2+4ih(h\mathcal{E}+gm)p_0-4p_0^2}\Phi_0(0)$$
$$+2e^{ip_0x}\theta(x)\frac{\left(m\left(h^2-g^2\right)+2ip_0g\right)(m+\beta\mathcal{E})}{(h^2-g^2)p_0^2+4ih(h\mathcal{E}+gm)p_0-4p_0^2}\Phi_0(0), \tag{2.113}$$

où le spineur $\Phi_0(0)$ est tel que $[\alpha p_0+\beta m+\mathcal{E}]\Phi_0(0)=0$ ($\Phi_0(x)$ étant la solution libre de l'équation de Dirac). Nous reconnaissons dans cette expression une superposition de trois ondes : incidente, réfléchie et transmise.

De chaque côté de l'origine, nous avons

$$\Psi\left(0^+\right)=\left(1+2\frac{\left(m\left(h^2-g^2\right)+2ip_0g\right)}{(h^2-g^2)p_0^2+4ih(h\mathcal{E}+gm)p_0-4p_0^2}(m+\beta\mathcal{E})\right)\Phi_0(0), \tag{2.114}$$

$$\Psi\left(0^-\right)=\left(1+2\frac{\left(\mathcal{E}\left(g^2-h^2\right)+2iph\right)}{(h^2-g^2)p_0^2+4ih(h\mathcal{E}+gm)p_0-4p_0^2}(\mathcal{E}+m\beta)\right)\Phi_0(0). \tag{2.115}$$

et il est clair que $\Psi(0^+)\neq\Psi(0^-)$ et pour $x=0$, $\Psi(0)$ est indéfinie.

Ainsi, pour le cas particulier $v(x)=\delta(x)$, la propriété $\delta(x)\Psi(x,s)=\delta(x)\Psi(0,s)$ est non valide si $\Psi(0,s)$ est indéfinie et Suivant l' Eq.61, nous n'avons pas le formulaire standard $\rho = \Psi^+\Psi$ pour la densité. En outre $\rho(0,t)$ et $j(0,t)=\Psi^+\alpha\Psi$ sont mal définis.

En un mot, puisqu'il n'y a pas d'équation de continuité pour ce cas particulier, Le potentiel $-\delta$ ne peut pas créer de particules de type Dirac ($\rho>0$) et donc la probabilité est nulle.

2.3 Conclusion

Dans ce travail qui peut être considéré comme une contribution au problème du potentiel $-\delta$ dans l'équation de Dirac , nous avons considéré le processus de création de paires en déterminant la probabilité suivant l'approche de l'action effective, le vide étant perturbé par un potentiel non local et séparable.

De l'équation de continuité, il a été montré que sous l'effet de l'interaction non locale classiquement, ρ n'est pas défini positif alors qu'une particule de Dirac a un $\rho > 0$ et le résultat est évidemment une probabilité nulle de créer des particules de type Dirac. Avec une autre approche comme la méthode des états de vide "in" et "out", la même ambiguïté subsiste, puisque la nature de la particule en relation avec le théorème de statistique de spin est nécessaire pour obtenir la probabilité

Pour le cas limite du potentiel $-\delta$, la solution à l'origine $x = 0$ est mal définie. Dans ce cas, il n'y a pas de continuité car (ρ, j) ne sont pas définis à l'origine. Alors, la probabilité de créer des particules de Dirac est également nul.

Chapitre 3

Equation de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) avec une interaction non locale et séparable

3.1 Introduction

Nous savons que les particules relativistes de spin-0 sont décrites par l'équation de Klein Gordon (KG), équation dont le défaut majeur est une densité ρ non définie positive et que les particules de spin -1/2 sont décrites par une équation de type matriciel et linéaire - équation de Dirac- qu'on obtient en faisant jouer l'espace et le temps un même rôle. Si la densité ρ est dans ce cas définie positive, l'importance de cette équation réside surtout dans la prédiction de l'existence d'antiparticules .

Il existe cependant une autre équation relativiste où l'espace et le temps jouent le même rôle et qui ressemble à celle de Dirac : il s'agit de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP)[22],[23],[24] qui est réservée à la description du mouvement des particules de spin-0 et de spin-1. Pour le cas du spin 0, les deux equations DKP et KG dans certaines situations,peuvent donner des résultats différents [25],[26] . C'est ainsi qu'il a été montré pour les réactions meson-noyau, que l'ajustement des résultats théoriques par rapport aux résultats expérimentaux est meilleur pour l'équation de DKP que pour l'équation de KG [27]

Rappelons que l'équation **DKP** est de type matriciel et a une certaine ressemblance avec celle de Dirac où le temps et l'espace jouent le même rôle, et où les matrices de Dirac γ^{μ} sont remplacées par les matrices $\widetilde{\beta}^{u}$ mais obéissant aux relations suivantes

$$\widetilde{\beta}^{\mu}\widetilde{\beta}^{\nu}\widetilde{\beta}^{\lambda}+\widetilde{\beta}^{\lambda}\widetilde{\beta}^{\nu}\widetilde{\beta}^{\mu}=g^{\mu\nu}\widetilde{\beta}^{\lambda}+g^{\nu\lambda}\widetilde{\beta}^{\mu}. \tag{3.1}$$

En présence d'une interaction cette équation DKP a la forme suivante

$$\left(i\widetilde{\beta}^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)\Phi\left(x,t\right)+V\Phi\left(x,t\right)=0. \tag{3.2}$$

Dans ce papier , on se propose d'utiliser des interactions de type non locale et séparable[4][3] pour l'obtention de la solution de l'équation DKP. Dans le cas non relativiste, il est connu les interactions de type non local ont été largement utilisées en physique nucléaire.

Cette interaction nous la choissons avec la forme simple suivante

$$\hat{V}=M\left|v\right\rangle\left\langle v\right| \tag{3.3}$$

où M est matrice .

Son action sur la fonction d'onde est donnée par

$$V\Phi\left(x,t\right)=Mv(x)\int_{-\infty}^{+\infty}dx'v^{*}(x')\Phi\left(x',t\right), \tag{3.4}$$

où l'on peut voir à travers l'intégrale,que l'interaction dépend de la fonction d'onde non seulement d'un point mais de tout l'espace.

3.2 Détermination de $\mathbf{G}_0\left(x_{b,}x_a,\mathcal{E}\right)$ et de $\mathbf{G}(x_{b,}x_a,\mathcal{E})$

Commençons par l'equation de DKP libre ($V=0$)

$$\left(i\widetilde{\beta}^{0}\partial_{0}+i\widetilde{\beta}^{1}\partial_{1}-m\right)\Psi\left(x,t\right)=0, \tag{3.5}$$

où les $\widetilde{\beta}$ obéissent aux relations suivantes

$$\widetilde{\beta}^{\mu}\widetilde{\beta}^{\nu}\widetilde{\beta}^{\lambda}+\widetilde{\beta}^{\lambda}\widetilde{\beta}^{\nu}\widetilde{\beta}^{\mu}=g^{\mu\nu}\widetilde{\beta}^{\lambda}+g^{\nu\lambda}\widetilde{\beta}^{\mu}. \tag{3.6}$$

D'abord, posons $\hat{\not{p}}=\widetilde{\beta}^{\mu}\hat{p}_{\mu}$ et multiplions par $\hat{p}_{\mu}$

$$\hat{\not{p}}\widetilde{\beta}^{\nu}\widetilde{\beta}^{\lambda}+\widetilde{\beta}^{\lambda}\widetilde{\beta}^{\nu}\hat{\not{p}}=\hat{p}^{\nu}\widetilde{\beta}^{\lambda}+g^{\nu\lambda}\hat{\not{p}}, \tag{3.7}$$

et ensuite par $\hat{p}_{\nu}$

$$\hat{\not{p}}\,\hat{\not{p}}\beta^{\lambda}+\beta^{\lambda}\,\hat{\not{p}}\,\hat{\not{p}}=\hat{p}^{2}\beta^{\lambda}+\hat{p}^{\lambda}\,\hat{\not{p}}, \tag{3.8}$$

,

et par $\hat{p}_{\lambda}$

$$\hat{\not{p}}\,\hat{\not{p}}\,\hat{\not{p}}+\,\hat{\not{p}}\,\hat{\not{p}}\,\hat{\not{p}}=\hat{p}^{2}\,\hat{\not{p}}+\hat{p}^{2}\,\hat{\not{p}}, \tag{3.9}$$

on obient la propriété suivante, utile pour la suite

$$\hat{\not{p}}^{3}=\hat{p}^{2}\,\hat{\not{p}}, \tag{3.10}$$

où l'on peut noter que $\hat{p}^{2}$ est sans matrice.
En présence de l'interaction $\hat{V}$, l'équation DKP devient

$$\left(i\widetilde{\beta}^{\mu}\not{\partial}_{\mu}-m\right)\Psi=-\hat{V}\Psi. \tag{3.11}$$

Pour obtenir sa solution on procède comme suit
$a-$on résoud d'abord l'eq. libre (sans intercation)

$$\left(i\widetilde{\beta}^{\mu}\not{\partial}_{\mu}-m\right)\Phi_{0}=0. \tag{3.12}$$

$b-$on détermine la fonction de Green libre solution de

$$\left(i\widetilde{\beta}^{\mu}\not{\partial}'_{\mu}-m\right)G_0\left(x',t';t,x\right)=\delta^2\left(X'-X\right) \tag{3.13}$$
$$\left(i\widetilde{\beta}^{0}\not{\partial}'_{0}+i\widetilde{\beta}^{1}\not{\partial}'_{1}-m\right)G_0\left(x',t';t,x\right)=\delta\left(t'-t\right)\delta\left(x'-x\right).$$

Alors la solution de l'équation de DKP avec interaction se deduit de a et b. Elle est donnée par

$$\begin{aligned}
\langle x|\,|\Psi\rangle &= \langle x|\,|\Phi_0\rangle - \langle x|\,G_0\hat{V}\,|\Psi\rangle \\
\Psi(x) &= \Phi_0(x) - \langle x|\,G_0\hat{V}\,|\Psi\rangle \\
&= \Phi_0(x) - \int dx'\,\langle x|\,G_0\left|x'\right\rangle\left\langle x'\right|\hat{V}\,|\Psi\rangle \\
&= \Phi_0(x) - \int dx' G_0\left(x,x';E\right)\left\langle x'\right|\hat{V}\,|\Psi\rangle
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Déterminons d'abord la fonction de Green $G_0(x',x.E)$ qui est reliée à $G_0(x',t';t,x)$ par

$$\begin{aligned}
G_0\left(x',t';t,x\right) &= \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}G_0(E,p)\,e^{-i[E(t'-t)-p(x'-x)]} \\
&= \int \frac{dEdp}{(2\pi)^2}G_0(E,p)\,e^{-i[E(t'-t)-p(x'-x)]} \\
&= \int \frac{dE}{2\pi}\frac{dp}{2\pi}G_0(E,p)\,e^{-i[E(t'-t)-p(x'-x)]} \\
&= \int \frac{dE}{2\pi}e^{-iE(t'-t)}G_0\left(x',x.E\right),
\end{aligned} \tag{3.15}$$

en rappelant au passage que

$$\delta\left(t'-t\right) = \int \frac{dE}{2\pi}e^{-iE(t'-t)}. \tag{3.16}$$

Ainsi nous avons respectivement

$$\begin{aligned}
\left(i\widetilde{\beta}^0\partial\!\!\!/_0' + i\widetilde{\beta}^1\partial\!\!\!/_1' - m\right)\int\frac{dE}{2\pi}e^{-iE(t'-t)}G_0\left(x',x;E\right) &= \delta\left(x'-x\right)\int\frac{dE}{2\pi}e^{-iE(t'-t)} \\
\int\frac{dE}{2\pi}e^{-iE(t'-t)}\left(i\widetilde{\beta}^0E + i\widetilde{\beta}^1\partial\!\!\!/_1' - m\right)G_0\left(x',x;E\right) &= \delta\left(x'-x\right)\int\frac{dE}{2\pi}e^{-iE(t'-t)} \\
\left(\widetilde{\beta}^0E + i\widetilde{\beta}^1\partial\!\!\!/_1' - m\right)G_0\left(x',x;E\right) &= \delta\left(x'-x\right) \\
\left(i\widetilde{\beta}^0E + i\widetilde{\beta}^1\partial\!\!\!/_1' - m\right)\int\frac{dp}{2\pi}G_0\left(E,p\right)e^{ip(x'-x)} &= \delta\left(x'-x\right) \\
&= \int\frac{dp}{2\pi}e^{ip(x'-x)}, \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

et par identification

$$\begin{aligned}
\left(\widetilde{\beta}^0E - \widetilde{\beta}^1\hat{p} - m\right)G_0\left(E,p\right) &= I \\
G_0\left(E,p\right) &= \frac{I}{\widetilde{\beta}^0E - \widetilde{\beta}^1\hat{p} - m}, \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

ou encore de manière symbolique

$$G_0 = \frac{I}{\hat{P\!\!\!/} - m}.$$

Ayant trouvé G_0, modifions son expression en multipliant par $\left(\frac{\hat{P\!\!\!/}^2}{m} + \hat{P\!\!\!/}\right)$. Nous avons

$$\begin{aligned}
G_0 &= \frac{I}{\left(\frac{\hat{P\!\!\!/}^2}{m} + \hat{P\!\!\!/}\right)\left(\hat{P\!\!\!/} - m\right)}\left(\frac{\hat{P\!\!\!/}^2}{m} + \hat{P\!\!\!/}\right) \\
&= \frac{I}{\frac{\hat{P\!\!\!/}^3}{m} + \hat{P\!\!\!/}^2 - \hat{P\!\!\!/}^2 - m\hat{P\!\!\!/}}\left(\frac{\hat{P\!\!\!/}^2}{m} + \hat{P\!\!\!/}\right) \\
&= \frac{I}{\frac{\hat{P\!\!\!/}^3}{m} - m\hat{P\!\!\!/}}\left(\frac{\hat{P\!\!\!/}^2}{m} + \hat{P\!\!\!/}\right) \\
&= \frac{I}{\left(\frac{\hat{P}^2}{m} - m\right)\hat{P\!\!\!/}}\left(\frac{\hat{P\!\!\!/}^2}{m} + \hat{P\!\!\!/}\right). \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

Dans cette expression, notons que le dénominateur contient encore des matrices$\left(\hat{\not{P}}\right)$. Comme

$$\hat{\not{P}}G_0 = mG_0 + I$$
$$= \frac{I}{\frac{P^2}{m} - m}\left(\frac{\hat{\not{P}}^2}{m} + \hat{\not{P}}\right), \tag{3.20}$$

alors, finalement

$$G_0 = \frac{I}{P^2 - m^2}\left(\frac{\hat{\not{P}}^2}{m} + \hat{\not{P}}\right) - \frac{I}{m}. \tag{3.21}$$

Dans l'"espace des configurations la fonction de Green libre s'écrit

$$G_0\left(x', x; E\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{ip(x'-x)}}{P^2 - m^2}\left(\frac{\not{P}^2}{m} + \not{P}\right) - \frac{\delta\left(x' - x\right)}{m}. \tag{3.22}$$

Il est clair que le denominateur s'annule lorsque $P^2 - m^2 = E^2 - p^2 - m^2 = 0$,c'est à dire pour $k = \pm\sqrt{E^2 - m^2 =}$ (2 pôles)

Développons l'intégrale

$$\int \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{ip(x'-x)}}{P^2 - m^2}\left(\frac{\hat{\not{P}}^2}{m} + \hat{\not{P}}\right) = \int \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{ip(x'-x)}}{E^2 - (p^2 + m^2 - i0)}\left(\frac{\left(E\widetilde{\beta}^0 - p\widetilde{\beta}^1\right)^2}{m} + E\widetilde{\beta}^0 - p\widetilde{\beta}^1\right)$$
$$= \int \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{ip(x'-x)}}{E^2 - (p^2 + m^2) + i0}\left(\frac{E^2\widetilde{\beta}^{02} + p^2\widetilde{\beta}^{12} - Ep\left(\widetilde{\beta}^0\widetilde{\beta}^1 + \widetilde{\beta}^1\widetilde{\beta}^0\right)}{m} + E\widetilde{\beta}^0 - p\widetilde{\beta}^1\right) \tag{3.23}$$

et utilisons les décompositions

$$\frac{1}{E^2 - (p^2 + m^2) + i0} = \frac{1}{-p^2 + E^2 - m^2 + i0} = \frac{1}{-p^2 + k^2 + i0} = -\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{p - k} - \frac{1}{p + k}\right),$$

$$\frac{p}{E^2-(p^2+m^2)+i0}=\frac{p}{-p^2+k^2+i0}=-\frac{p}{p^2-k^2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-k}+\frac{1}{p+k}\right).$$

Comme les résultats des intégrations sont simples

$$\int\frac{dp}{2\pi}e^{ip(x'-x)}\frac{1}{p-k}=i\theta\left(x'-x\right)e^{ik(x'-x)},$$

$$\int\frac{dp}{2\pi}e^{ip(x'-x)}\frac{1}{p+k}=-i\theta\left(x-x'\right)e^{-ik(x'-x)},$$

Alors, la fonction de Green libre est finalement la suivante

$$G_0\left(x',x;E\right) = -\frac{\beta^{12}+I}{m}\delta\left(x'-x\right)-\frac{i}{2k}\theta\left(x'-x\right)e^{ik(x'-x)}\left(\frac{\not{K}^2}{m}+\not{K}\right) \tag{3.24}$$

$$-\frac{i}{2k}\theta\left(x-x'\right)e^{-ik(x'-x)}\left(\frac{\not{K}^2}{m}+\not{K}\right)_{k\to-k}, \tag{3.25}$$

où K^μ=(E,k)

Passons à la solution générale de l'équation de DKP

D'abord, symboliquement nous avons

$$|\Psi\rangle=|\Phi_0\rangle-G_0\left(E\right)M\left|v\right\rangle\left\langle v\right|\left|\Psi\right\rangle, \tag{3.26}$$

Multiplions à gauche par $\langle v|$, on obient

$$\langle v|\,|\Psi\rangle=\langle v|\,|\Phi_0\rangle-\langle v|\,G_0\left(E\right)M\left|v\right\rangle\left\langle v\right|\left|\Psi\right\rangle, \tag{3.27}$$

ou encore

$$\left(I+\langle v|\,G_0\left(E\right)M\left|v\right\rangle\right)\langle v|\,|\Psi\rangle=\langle v|\,|\Phi_0\rangle. \tag{3.28}$$

Ce qui nous permet de tirer

$$\langle v|\,|\Psi\rangle=\frac{I}{I+\langle v|\,G_0\left(E\right)M\left|v\right\rangle}\langle v|\,|\Phi_0\rangle. \tag{3.29}$$

Posons maintenant

$$\Gamma = \langle v| G_0 (E) M |v\rangle , \tag{3.30}$$

d'où

$$|\Psi\rangle = |\Phi_0\rangle - G_0 (E) M |v\rangle \frac{I}{I+\Gamma} \langle v| |\Phi_0\rangle , \tag{3.31}$$

et en terme de fonction d'onde

$$\Psi (x) = \Phi_0 (x) - \int dy G_0 (x, y; E) M v (y) \frac{I}{I+\Gamma} \int dz v (z) \Phi_0 (z) . \tag{3.32}$$

Posons

$$\begin{aligned} \Gamma &= \langle v| G_0 (E) M |v\rangle \\ &= \int \langle v| G_0 (E) M |v\rangle \\ &= \int dx' dx G_0 \left(x', x; E\right) M v \left(x'\right) v (x) . \end{aligned} \tag{3.33}$$

Il est clair que l'expression $I+\Gamma = I + \langle v| G_0 (E) M |v\rangle$ se trouvant au dénominateur dans la fonction d'onde est une matrice et que $\frac{I}{I+\Gamma}$son inverse est également une matrice. Nous savons que pour inverser une matrice il faut passer par le déterminant et finalement le spectre des énergies est donnée par l'"équation suivante

$$\mathrm{Det} (I+\Gamma) = 0. \tag{3.34}$$

Il nous reste à fixer la matrice M en utilisant des considérations d'invariance relativiste.

Pour le choix simple suivant

$$M = h\widetilde{\beta}^1, \tag{3.35}$$

et aprés avoir calculé le déterminant dans le cas du spin 0 où les matrices sont des matrices

5×5

$$\widetilde{\beta}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \widetilde{\beta}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nous trouvons la valeur suivante pour l'énergie

$$E^2 = -\frac{m^2}{4J^2h^2}$$

où

$$J = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx'} v\left(x'\right) \int_{-\infty}^{x'} dx e^{-ikx} v(x),$$

$J^* = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx'} v\left(x'\right) \int_{-\infty}^{x'} dx e^{ikx} v(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx'} v\left(x'\right) \int_{-\infty}^{x'} dx e^{-ikx} v(x)$

Remarquons que J est reel si k est de la forme $k = i\rho$,c'est à dire maginaire pur . Comme $E^2 = k^2 + m^2 = -\rho^2 + m^2 > 0$ alors $\rho^2 < m^2$

Distinguons alors les 2 cas

-Cas 1 : si h réel, alors $E = \pm i\frac{m}{2Jh}$ = imaginaire pur . Dans ce cas il n'ya pas d'états liés

-Cas 2 : si h =imagimaire pur $= ia$. Alors $E^2 = \frac{m^2}{4J^2a^2}$ et $E = \pm\frac{m}{2Ja}$.Dans ce cas il ya deux états liés à condition $-m < E = \pm\frac{m}{2Ja} < m$.

3.3 Conclusion

Nous avons montré pour un potentiel non local et separable comment obtenir analytiquement le spectre d'énergie relative à des particules de spin 0 , décrites par l'équation DKP. Pour le cas du spin 1 on doit utiliser des matrices d'ordre 10×10 pour les matrices $\widetilde{\beta}^0$ et $\widetilde{\beta}^1$. Le résultat peut ètre trouvé ailleurs.

Chapitre 4

Conclusion générale

Dans cette thèse qui traite essentiellement des équations de Dirac (spin $-1/2$)et Duffin-Kemmer-Petiau (spin -0) , nous pouvons voir qu'elle se compose de deux chapitres :

Dans le premier chapitre, nous avons étudié la probabilité de création des paires dans l'équation de Dirac, où le vide est perturbé par un potentiel séparable et non local d'une forme matricielle. En suivant l'approche de l'action effective par l'utilisation des fonctions de Green (libre) et (avec interaction). La probabilité étant déterminée via la partie imaginaire de l'action effective, et nous avons trouvé que cette probabilité est nulle c-à-d il n'y a pas de processus de création de paires pour le type du potentiel non local traité.

À titre d'illustration, le potentiel non local est pris de forme simple 'le potentiel delta de Dirac $-\delta$ ' qui nous permis de confirmer que puisqu'il n'y a pas d'équation de continuité pour ce cas particulier, on ne peut pas créer de particules de type Dirac.

Dans le deuxième chapitre, La solution de l'équation de DKP décrite les particules bosoniques de Spin-0 est discutée en présence d'une interaction matricielle de type non locale et séparable. Dans ce cas, le spectre d'énergie est obtenu analytiquement à travers le calcul de la fonction de Green (libre) de l'équation de DKP. Enfin, nous avons choisi une forme simple pour une matrice M présenté cette interaction.

Les principales perspectives de recherche qui apparaissent à l'issue de cette thèse concernant les résultats trouvés, nous pouvons envisager de compléter les travaux suivants :

-Utiliser l'approche de transformation de Bogoliobov pour calculer la probabilité de création des paires dans l'équation de Dirac avec le type d'interaction choisie (séparable et non locale).

- Tester l'influence de ce potentiel non local sur autres équations relativistes.

4.0.1 Annexe A

Dans cette annexe, nous proposons de montrer que les deux termes suivants sont null :

- Pour le premier terme

$$
\begin{aligned}
e^{-2ip_0x}\left(\int_{-\infty}^{x} dx_c e^{ip_0x_c} v\left(x_c\right)\right)^2\Bigg|_{-\infty}^{\infty} &= \left(\lim_{R\to\infty} - \lim_{R\to-\infty}\right) e^{-2ip_0R}\left(\int_{-\infty}^{R} dx_c e^{ip_0x_c} v\left(x_c\right)\right)^2 \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\lim_{R\to\infty} - \lim_{R\to-\infty}\right)\left(\frac{\int_{-\infty}^{R} dx_c e^{ip_0x_c} v\left(x_c\right)}{e^{ip_0R}e^{\varepsilon R}}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx_c e^{ip_0x_c} v\left(x_c\right)}{\infty} = \frac{cte}{\infty} = 0\right)^2 - \\
&- \left(\frac{\int_{-\infty}^{-\infty} dx_c e^{ip_0x_c} v\left(x_c\right)}{0} = \frac{0}{0}\right)^2 \\
&= 0 - \lim_{\varepsilon\to 0^+}\lim_{R\to-\infty}\left(\frac{e^{ip_0R}e^{\varepsilon R} v\left(R\right)}{ip_0 e^{ip_0R}e^{\varepsilon R}}\right)^2 \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\lim_{R\to-\infty}\left(\frac{v\left(R\right)}{ip_0}\right)^2 \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\lim_{R\to-\infty}\left(\frac{v\left(R\right)}{ip_0}\right)^2 = \frac{v^2\left(-\infty\right)}{p_0^2} \\
&= 0 \quad \left(p_0 \neq 0\right).
\end{aligned}
$$

-Pour le deuxième terme

$$x\int_x^{+\infty} dx_c e^{-ip_0 x_c} v(x_c) \int_{-\infty}^{x} dx_z v(x_z) e^{ip_0 x_z}\Big|_{-\infty}^{\infty}$$
$$= \left(\lim_{R\to\infty} - \lim_{R\to-\infty}\right) R \int_R^{+\infty} dx_c e^{-ip_0 x_c} v(x_c) \int_{-\infty}^{R} dx_z v(x_z) e^{ip_0 x_z}$$
$$= \left(\lim_{R\to\infty} - \lim_{R\to-\infty}\right) \frac{\int_R^{+\infty} dx_c e^{-ip_0 x_c} v(x_c) \int_{-\infty}^{R} dx_z v(x_z) e^{ip_0 x_z}}{\frac{1}{R}}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx_z v(x_z) e^{ip_0 x_z} \lim_{R\to\infty} \frac{\int_R^{+\infty} dx_c e^{-ip_0 x_c} v(x_c)}{\frac{1}{R}} - \int_{-\infty}^{+\infty} dx_c e^{-ip_0 x_c} v(x_c) \lim_{R\to-\infty} \frac{\int_{-\infty}^{R} dx_z v(x_z) e^{ip_0 x_z}}{\frac{1}{R}}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx_z v(x_z) e^{ip_0 x_z} \lim_{R\to\infty} \frac{-e^{-i\left(p_0-i0^+\right)R} v(R)}{-\frac{1}{R^2}} - \int_{-\infty}^{+\infty} dx_c e^{-ip_0 x_c} v(x_c) \lim_{R\to-\infty} \frac{v(R) e^{i\left(p_0-i0^+\right)R}}{-\frac{1}{R^2}}$$
$$= 0 - 0 = 0.$$

parce que $\lim_{R\to\infty} e^{-i\left(p_0-i0^+\right)R} \to 0$ et $\lim_{R\to-\infty} e^{i\left(p_0-i0^+\right)R} \to 0$

4.0.2 Annexe B

Dans cette annexe, nous développons l'expression $\bar{S}_{eff}^{cont.}$.

Depuit $\int_{C^-} d\mathcal{E} f(\mathcal{E}) = \int_{C^+} d\mathcal{E} f(-\mathcal{E})$, premièrement

$$\bar{S}_{eff}^{cont.} = 8iT \int_{C^+} \frac{d\mathcal{E}}{2i\pi} \frac{\mathcal{E}}{p_0} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\frac{m}{p_0}(hm+g\mathcal{E})J}{p_0(J^2(g^2-h^2)+4)+4iJ(h\mathcal{E}+gm)} + i\mathcal{E}\frac{\partial J}{2\partial p_0}\frac{Jp_0\left(g^2-h^2\right)+2i(h\mathcal{E}+mg)}{p_0(J^2(g^2-h^2)+4)+4iJ(h\mathcal{E}+gm)} \\ +\frac{-\frac{m}{p_0}(hm-g\mathcal{E})J}{p_0(J^2(g^2-h^2)+4)+4iJ(-h\mathcal{E}+gm)} + i\mathcal{E}\frac{\partial J}{2\partial p_0}\frac{Jp_0\left(g^2-h^2\right)+2i(-h\mathcal{E}+mg)}{p_0(J^2(g^2-h^2)+4)+4iJ(-h\mathcal{E}+gm)} \end{array} \right\},$$

où nous pouvons observer le changement $(m,g,h) \to (-m,-g,-h)$dans le deuxième intégral $\left(\int_{C^-}\right)$.

Maintenant, laissez-nous décomposer l'intégrale comme suit

$$\int_{C^+} d\mathcal{E}\,(.) = \int_{+\infty-i0^+}^{m-i0^+} d\mathcal{E}\,(.) + \int_{m+i0^+}^{\infty+i0^+} d\mathcal{E}\,(.) = -\int_{m-i0^+}^{+\infty-i0^+} d\mathcal{E}\,(.) + \int_{m+i0^+}^{\infty+i0^+} d\mathcal{E}\,(.),$$

en prenant en compte pour $p_0$le changement de signe :

$= +\sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2}$ sur le chemin $]\infty - i0, m - i0[$

$= -\sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2}$ sur le chemin $]\infty + i0, m + i0[$.

alors $\bar{S}^{cont.}_{eff.}$ devient

$$
\begin{aligned}
\bar{S}^{cont.}_{eff.} = -8iT \int_{m-i0^+}^{+\infty-i0^+} \frac{d\mathcal{E}}{2i\pi}\frac{\mathcal{E}}{p_0} & \left\{ \begin{array}{c} \frac{\frac{m}{p_0}(hm+g\mathcal{E})J}{p_0(J^2(g^2-h^2)+4)+4iJ(h\mathcal{E}+gm)} + i\mathcal{E}\frac{\partial J}{2\partial p_0}\frac{\left(Jp_0\left(g^2-h^2\right)+2i(h\mathcal{E}+mg)\right)}{p_0(J^2(g^2-h^2)+4)+4iJ(h\mathcal{E}+gm)} \\ -\frac{\frac{m}{p_0}(hm-g\mathcal{E})J}{p_0(J^2(g^2-h^2)+4)+4iJ(-h\mathcal{E}+gm)} + i\mathcal{E}\frac{\partial J}{2\partial p_0}\frac{Jp_0\left(g^2-h^2\right)+2i(-h\mathcal{E}+mg)}{p_0(J^2(g^2-h^2)+4)+4iJ(-h\mathcal{E}+gm)} \end{array} \right\} \\
+ 8iT \int_{m+i0^+}^{\infty+i0^+} \frac{d\mathcal{E}}{2i\pi}\frac{\mathcal{E}}{-p_0} & \left\{ \begin{array}{c} +\frac{\frac{m}{p_0}(hm+g\mathcal{E})J^*}{p_0(J^{*2}(g^2-h^2)+4)-4iJ^*(h\mathcal{E}+gm)} - i\mathcal{E}\frac{\partial J^*}{2\partial p_0}\frac{J^*p_0\left(g^2-h^2\right)-2i(h\mathcal{E}+mg)}{p_0(J^{*2}(g^2-h^2)+4)-4iJ^*(h\mathcal{E}+gm)} \\ -\frac{\frac{m}{p_0}(hm-g\mathcal{E})J^*}{p_0(J^{*2}(g^2-h^2)+4)-4iJ^*(-h\mathcal{E}+gm)} - i\mathcal{E}\frac{\partial J^*}{2\partial p_0}\frac{J^*p_0\left(g^2-h^2\right)-2i(-h\mathcal{E}+mg)}{p_0(J^{*2}(g^2-h^2)+4)-4iJ^*(-h\mathcal{E}+gm)} \end{array} \right\}.
\end{aligned}
$$

Cette expression peut être écrite sous forme compacte (Eq.56).

Bibliographie

[1] Qiong-gui Lin, J. Phys. G : Nucl. Part. Phys. 25, 17–26(1999) .

[2] J. Schwinger, Phys. Rev. 82, 664(1951).

[3] Y. Nogami and W.van Dijk, Phys.Rev.C 34, 5 (1986).

[4] M. G. Calkin and D. Kiang ,Y. Nogami, Phys. Rev. 38, 1076 (1988).

[5] A. Casher, H. Neuberger, and S. Nussinov, Phys.Rev.D 21, 7(1980).

[6] Ren-Chuan Wang and Cheuk- Yin Wong, Phys.Rev.D 38 ,1 (1988).

[7] Yoshio Yamaguhi , Phys. Rev. 95, 6 (1954).

[8] F. Perey and B. Buck , Nuclear Physics 32 ,353–380(1962) .

[9] H. Ayoama and M.Kobayashi, Prog. Th.Phys. 64,1045(1980).

[10] L. Parker, Phys. Rev. Lett. 21, 562 (1968) ; Phys. Rev. D 3, 346 (1971).

[11] A. A. Grip, S. G. Mamayev and V. M. Mostepanenko, Gen. Rel. Grav. 7, 535 (1976) ; J. Phys. A : Math. Gen 13, 2057 (1980).

[12] A. I. Nikishov, arXiv :hep-th/0207085.

[13] A. Hansen, and F. Ravndal, Phys. Scr. 23, 1030(1981).

[14] B. Hamil and L. Chetouani, Eur. Phys. J. Plus doi : 10.1140/epjp/i2016-16311-4,Scr.89,115301(2014) .

[15] S. Boudieb, L. Chetouani, Eur. Phys. J. Plus,doi :10.1140/epjp/i2015-15042-4 (2015) .

[16] B. Sutherland and D. C. Mattis, Phys. Rev. A24, 1194(1981).

[17] B. H. Mc Kellar and G. J. Stephenson, Jr., Phys. Rev. C35, 2262(1987).

[18] Yoshio Yamaguhi, Phys. Rev. 95,1628(1954).

[19] D. Griffiths and S. Walborn, Am. J. Phys. 67,5(1999) ; F. A. B. Coutinho, Y. Nogami and F. M. Toyama Revista Bras. Ensino Fis.31, 4302(2009).

[20] C. Itzykson and J. B. Zuber, (Mc Graw- Hill, N. Y. 1980) ; A. A. Grib, S. G. Mamayev, and V. M. Mostepanenko,Friedmann Lab. Publ.,St. Petersburg 1994.

[21] I. S. Gradstein and I. M. Ryzhik : Tables of Integrals, Sums, Series, and Products, Acad. Press, New York(1965).

[22] Ricardo Ignacio Alvarez del Castillo Astiazaran. Departement of Physics, McGill University . Canada, (1991).

[23] R. J. Duffin. Phys. Rev,54(111'), (1938).

[24] G. Petiau. Acad. R. Belg. Cl. Sci. Mem. Collect., 18 :16, 1936.

[25] R. F. Guertin and T. L. Wilson. Phys. Rev. D, 15 :1518, (1977).

[26] B. Vijayalakshmi, M. Seetharaman, and P. M. Mathews, J. Phys. A Math. Gen, 12(5) :665,(1979).

[27] B. C. Clark, S.Hama, G. R. Kälbermann, R. L.Mercer, and L.Ray. Phys. Rev. Lett., 55 :592–595, (1985).

ISSN 1547-4771, Physics of Particles and Nuclei Letters, 2018, Vol. 15, No. 1, pp. 57–68. © Pleiades Publishing, Ltd., 2018.

PHYSICS OF ELEMENTARY PARTICLES AND ATOMIC NUCLEI. THEORY

Pair Creation by a Non-Local Potential[1]

A. Hafdallah and L. Chetouani*

Laboratoire de Physique Mathématique et de Physique Subatomique (LPMPS), Université Frères Mentouri, Constantine, Algeria

**e-mail: lyazidchetouani@gmail.com*

Received April 6, 2017

Abstract—The probability of pair creation by a separable and non-local potential is considered following the Schwinger approach . It has been found that this probability is null. As a particular case, the separable δ-potential is considered and the probability is also found null.

Keywords: pair creation, Dirac equation, effective action, non local potential

DOI: 10.1134/S1547477118010065

1. INTRODUCTION

We know that the process of pair creation of particles formulated by Schwinger [1]. by means of the transition amplitude vacuum-vacuum and in terms of effective action is actually the mechanism the most studied. Thus, for the understanding of this physical phenomena, different approaches have been developed such as those based on Green function [2], or the adiabatic method [3], the Hamiltonian diagonalization technique [4], the semiclassical WKB approximation and more especially the so-called approach of "in" and "out" vacuum states based on the transformation of Bogoliubov [5], the spin-statistics theorem [6] and the antiparticles described by the negative energy solutions moving backward in time being at the basis of this approach.

Succinctly, the most of the works in the literature related to the particle creation process consider the probability and a great interest is focused on the obtaining of analytical forms of this probability. Among the expressions, the simplest is the one obtained by Schwinger by considering as interactions with the vacuum, a constant electromagnetic field and a Volkov wave. For this last interaction, there is no process of creation of pairs.

Among the works using the Schwinger' approach of the effective action we can still find others simple results for the probability [7, 8].

In this paper, we consider an interaction having a particular form in contrast to that conventionally used: it is about a nonlocal and separable form [9]. This interaction has been considered in the framework of the problem posed by the δ-function potential in the context one-dimensional periodic structure [10] and in particular on the ambiguity of the behavior at the point $x = 0$ of the wave function. The advantage of the separability confers to the potential a certain flexibility since the calculations are easy manipulable which explains its use in many fields and more particularly in the nuclear physics, see for example [11].

In addition, knowing that the Dirac equation with this nonlocal interaction is solvable analytically, it seemed to us that it would be useful to consider the process of pairs creation of Dirac particles when the vacuum is perturbed by this separable and non local interaction and to see its effect, the determination of the probability relative to this mechanism is our main objective.

Symbolically, this separable interaction, which perturb the vide has a form of matrix type. It is the following

$$\hat{V} = (\beta g + h)|v\rangle\langle v|, \tag{1}$$

where g and h are real parameters and β the usual Dirac matrix 4×4.

In the configuration space, its action on the wave function (spinor) $\Psi(x,t)$ is defined by

$$\begin{aligned}\langle x|\hat{V}|\Psi(t)\rangle &= \int dx' \langle x|\hat{V}|x'\rangle \Psi(x',t) \\ &= (\beta g + h)\, v(x) \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, v(x')\Psi(x',t),\end{aligned} \tag{2}$$

where $v(x) = \langle x|v\rangle$ is chosen real and such as $v(x) = v(-x)$ and $v(\pm\infty) = 0$.

It is obvious at the time t, this interaction depends on the entire space via the wave function.

Note that if one develops $v(x')$ in series in the vicinity of the point x, we obtain with the help of the

[1] The article is published in the original.

displacement operator $e^{i(x'-x)\hat{p}}$, the relation $v(x') = e^{i(x'-x)\hat{p}}v(x)$. Thus, we have

$$\begin{aligned}\langle x|\hat{V}|x'\rangle &= (\beta g + h)v(x)v(x') \\ &= (\beta g + h)v(x)e^{i(x'-x)\hat{p}}v(x),\end{aligned} \tag{3}$$

and its action on Ψ is given by

$$\begin{aligned}\langle x|\hat{V}|\Psi(t)\rangle &= (\beta g + h) \\ &\times\left[v(x)\int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{i(x'-x)\hat{p}}\right]v(x)\Psi(x,t),\end{aligned} \tag{4}$$

$$= 2\pi(\beta g + h)v(x)\hat{\delta}(\hat{p})v(x)\Psi(x,t), \tag{5}$$

i.e. that the non-locality for the interaction is characterized by the dependence in impulsion $\hat{p}$ (operator). Formally, the series $\int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{i(x'-x)\hat{p}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx'\left[1 + \frac{i(x'-x)\hat{p}}{1!} + \frac{(i(x'-x)\hat{p})^2}{2!} + \ldots\right]$ is noted by the operator $2\pi\hat{\delta}(\hat{p})$.

After this precision, we proceed as follows: first, the effective action $\bar{S}_{\text{eff}}$ is expressed in function of the Green functions G (with interaction) and G_0 (free). Then, from the imaginary part of $\bar{S}_{\text{eff}}$ the probability related of process of pair creation is determined.

As application, we choose for the product nonlocal potential $v(x)v(x')$ the form of product of a Dirac function $\delta(x)\delta(x')$ instead of a local form $\delta(x)$. The problem of the δ-potential is known [12] for the different results obtained by the limit of the solution at the origin $x = 0$ when the δ-potential is replaced by a finite potential.

2. EFFECTIVE ACTION

First, it is easy to ensure that the action related to our problem with the non-local interaction is as follow

$$\begin{aligned}S(\Psi,\Psi^+) &= \int dxdt\mathcal{L} = \int dxdt\Big[\Psi^+(x,t)\left(\alpha\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x} + \beta m\right) \\ &\times\Psi(x,t) - i\Psi^+(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) \\ &+ \Psi^+(x,t)(\beta g + h)v(x)\int dx' v(x')\Psi(x',t)\Big],\end{aligned} \tag{6}$$

since by variation with respect to the fields Ψ^+ and Ψ, we obtain the Euler–Lagrange equations

$$\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\Psi^+(y,u)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi^+} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial\Psi^+}{\partial t}} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial\Psi^+}{\partial x}} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\Psi(y,u)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial\Psi}{\partial t}} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial\Psi}{\partial x}} = 0, \tag{8}$$

i.e. we obtain respectively the Dirac equation and its adjoint

$$\begin{aligned}&\left(\alpha\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x} + \beta m - i\frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi(x,t) \\ &+ (\beta g + h)v(x)\int dx' v(x')\Psi(x',t) = 0,\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\Psi^+(x,t)\left(-\frac{1}{i}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x}\alpha + \beta m + i\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial t}\right) \\ &+ v(x)\int dx' v(x')\Psi^+(x',t)(\beta g + h) = 0,\end{aligned} \tag{10}$$

α and β being the usual Dirac matrices 4×4.

We know that the vacuum–vacuum transition amplitude $\mathcal{A}$(vac.–vac.) is given by [13].

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\text{vac–vac}) &= \int \mathcal{D}\Psi^+\mathcal{D}\Psi e^{i\int dxdt\Psi^+\hat{O}_D\Psi} \\ &= \int \mathcal{D}\Psi^+\mathcal{D}\Psi e^{iS},\end{aligned} \tag{11}$$

$$= N\text{Det}\,\hat{O}_D = e^{i\bar{S}_{\text{eff}}}, \tag{12}$$

where now, Ψ^+ and Ψ are Grassmann variables and $\bar{S}_{\text{eff}}$ is the effective action which, in our case, is given by the following expression

$$\bar{S}_{\text{eff}} = i\exp\left[-\text{Tr}\ln\frac{\alpha\hat{p} + \beta m - \hat{E} + i0^+}{\alpha\hat{p} + \beta m - \hat{E} + \hat{V} + i0^+}\right], \tag{13}$$

$\hat{V}$ being the perturbation which is the nonlocal interaction.

The determination of the probability P which is the aim of our paper is defined in term of effective action by

$$\begin{aligned}P &= 1 - \left|e^{i\bar{S}_{\text{eff}}}\right|^2 = 1 - e^{i(\bar{S}_{\text{eff}} - S^*_{\text{eff}})} \\ &= 1 - e^{-2Im\bar{S}_{\text{eff}}} \simeq 2Im\bar{S}_{\text{eff}}.\end{aligned} \tag{14}$$

For the determination of $\bar{S}_{\text{eff}}$, it is more suitable to use the identity

$$\ln\frac{a + i0^+}{b + i0^+} = \int_0^{+\infty}\frac{ds}{s}\left[e^{is(b+i0^+)} - e^{is(a+i0^+)}\right], \tag{15}$$

in order to use the exponential form. Then, $\bar{S}_{\text{eff}}$ takes the following form

$$\bar{S}_{\text{eff}} = i\text{Tr}\int_0^{+\infty}\frac{ds}{s}\left[e^{is(\alpha\hat{p}+\beta m-\hat{E}+\hat{V}+i0^+)} - e^{is(\alpha\hat{p}+\beta m-\hat{E}+i0^+)}\right] \tag{16}$$

$$\begin{aligned}&= i\text{Tr}_D\text{Tr}_x\int_0^{+\infty}\frac{ds}{s}\left[e^{is(\alpha\hat{p}+\beta m+\hat{V}+i0^+)} - e^{is(\alpha\hat{p}+\beta m+i0^+)}\right] \\ &\times\text{Tr}_t\left(e^{-is\hat{E}}\right),\end{aligned} \tag{17}$$

where the symbol $\text{Tr} = \text{Tr}_x\text{Tr}_t\text{Tr}_D$ indicates a diagonal summation respectively on the space-time coordinates and on the spinorial indices. The last trace having been factorized because the operators $\hat{p}$ and $\hat{E}$ commute.

Let us denote by $|t\rangle$ and $|x\rangle$ the eigenvectors of operators $\hat{x}$ and $\hat{t}$. These kets are such as $\hat{t}\,|t\rangle = t\,|t\rangle$, $\hat{E}\,|t\rangle = i\dfrac{\partial}{\partial t}|t\rangle$, $\hat{x}\,|x\rangle = x\,|x\rangle$ and $\hat{p}\,|x\rangle = \dfrac{\partial}{i\partial x}|x\rangle$.

The last trace relative to the time translation operator $e^{-is\hat{E}}$ is easily calculable. First, let us expand in series $e^{-is\hat{E}}$ by taking into account the action of $\hat{E}$ on the ket $|t\rangle$, the result is simply equal to

$$e^{-is\hat{E}}\,|t\rangle = \left(1 + s\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\left(s\frac{\partial}{\partial t}\right)^2}{2!} + \ldots\right)|t\rangle = |t + s\rangle. \quad (18)$$

Then, the matrix element of $e^{-is\hat{E}}$ has as result

$$\left\langle t_b \left| e^{s\frac{\partial}{\partial t}} \right| t_a \right\rangle = \langle t_b | t_a + s\rangle = \delta(s - (t_b - t_a)), \quad (19)$$

this allows us to obtain its trace

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_t e^{s\frac{\partial}{\partial t}} &= \int dt \left\langle t_b \left| e^{s\frac{\partial}{\partial t}} \right| t_a \right\rangle \Big|_{t_b = t_a = t} \\ &= \int dt\delta(s - (t_b - t_a))\big|_{t_b = t_a = t} = \delta(s)\int_0^T dt = T\delta(s). \end{aligned} \quad (20)$$

The effective action is reduced to

$$\begin{aligned} \bar{S}_{\mathrm{eff}} &= T\int_{-\infty}^{+\infty} ds\frac{\delta(s)}{s}\mathrm{Tr}_D \\ &\times \mathrm{Tr}_x\left[\theta(s)\left(e^{is\left(\alpha\hat{p} + \beta m + \hat{V} + i0^+\right)} - e^{is\left(\alpha\hat{p} + \beta m + i0^+\right)}\right)\right], \end{aligned} \quad (21)$$

where the Heaviside function $\theta(s)$ has been added in order to extend the limits of integrations $(0, \infty)$ into $(-\infty, \infty)$. Thus, we have expressed the effective action in function of the evolution operators (or propagators) with and without interaction.

However, it seems to us more appropriate to use the Green functions for the determination of $\bar{S}_{\mathrm{eff}}$. For this, with the following integral representation of $\theta(s)$

$$\theta(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathcal{E}}{2i\pi}\frac{e^{iEs}}{\mathcal{E} - i0} \quad \text{with} \quad \theta(0) = \frac{1}{2},$$

which becomes with the shift $\mathcal{E} \to \mathcal{E} - \hat{H}$

$$\theta(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathcal{E}}{2i\pi}\frac{e^{is(\mathcal{E} - \hat{H})}}{\mathcal{E} - \hat{H} - i0},$$

we obtain the integral representation of propagator by means of the Green's function

$$\theta(s)e^{i\hat{H}s} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathcal{E}}{2i\pi}\frac{e^{i\mathcal{E}s}}{\mathcal{E} - \hat{H} - i0^+}, \quad (22)$$

where $-\hat{H}$ is the Hamiltonian which governs the movement. By replacing $\hat{H}$ by $(\alpha\hat{p} + \beta m)$ and by $(\alpha\hat{p} + \beta m + V)$, we have respectively the Green operators

—without interaction (free)

$$\hat{G}_0(\mathcal{E}) = \frac{1}{\mathcal{E} - \left(\alpha\hat{p} + \beta m + i0^+\right)}, \quad (23)$$

—and in presence of the nonlocal interaction $\hat{V}$

$$\hat{G}(\mathcal{E}) = \frac{1}{\mathcal{E} - \left(\alpha\hat{p} + \beta m + \hat{V} + i0^+\right)}. \quad (24)$$

Thus, the effective action is now function of $\hat{G}$ and $\hat{G}_0$

$$\begin{aligned} -\bar{S}_{\mathrm{eff}} &= iT\int_{-\infty}^{+\infty} ds\frac{\delta(s)}{s}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mathcal{E}}{2i\pi}e^{i\mathcal{E}s} \\ &\times \mathrm{Tr}_D\mathrm{Tr}_x\left[\hat{G}(\mathcal{E}) - \hat{G}_0(\mathcal{E})\right] \end{aligned} \quad (25)$$

$$= T\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathcal{E}d\mathcal{E}}{2i\pi}\mathrm{Tr}_D\mathrm{Tr}_x\left[\hat{G}(\mathcal{E}) - \hat{G}_0(\mathcal{E})\right], \quad (26)$$

where the propriety $\int_{-\infty}^{+\infty} ds\frac{\delta(s)}{s}e^{i\mathcal{E}s} = -\int_{-\infty}^{+\infty} ds\delta'(s)e^{i\mathcal{E}s} = i\mathcal{E}\int_{-\infty}^{+\infty} ds\delta(s)e^{i\mathcal{E}s} = i\mathcal{E}$, has been used in order to simplify the integrations.

It remains to determine $\hat{G}$. Formally, let us observe that $\hat{G}$ and $\hat{G}_0$verifies the following equations

$$[\mathcal{E} - (\alpha\hat{p} + \beta m + (\beta g + h)|v\rangle\langle v|)]\hat{G}(\mathcal{E}) = 1, \quad (27)$$

$$[\mathcal{E} - (\alpha\hat{p} + \beta m)]\hat{G}_0(\mathcal{E}) = 1 \quad (28)$$

and from this two equations, we obtain the relation between $\hat{G}(\mathcal{E})$ and $\hat{G}_0(\mathcal{E})$

$$\hat{G}(\mathcal{E}) = \hat{G}_0(\mathcal{E}) + \hat{G}_0(\mathcal{E})(\beta g + h)|v\rangle\langle v|\hat{G}(\mathcal{E}). \quad (29)$$

In order to determine $\hat{G}$, we can proceed following two methods nonperturbative and perturbative:

(1) Non perturbative method: first, by multiplying the Eq. (29) on the left by the bra $\langle v|$, we obtain

$$\langle v|\hat{G}(\mathcal{E}) = \frac{1}{1 - \Gamma}\langle v|\hat{G}_0(\mathcal{E}), \quad (30)$$

where we have posed

$$\Gamma = \langle v|\hat{G}_0(\mathscr{E})(\beta g + h)|v\rangle. \tag{31}$$

which is a matrix. Then, by replacing this expression in the equation, we obtain the Green operator related to the interaction

$$\begin{aligned}\hat{G}(\mathscr{E}) &= \hat{G}_0(\mathscr{E}) \\ &+ \hat{G}_0(\mathscr{E})|v\rangle(\beta g + h)\frac{1}{1-\Gamma}\langle v|\hat{G}_0(\mathscr{E}),\end{aligned} \tag{32}$$

in function of $\hat{G}_0$ (free). This method to get $\hat{G}$ is thus nonperturbative.

(2) The other method (iteration) is perturbative: it consists to replace successively $\hat{G}$ of the second member by its expression (29)

$$\begin{aligned}\hat{G}(\mathscr{E}) &= \hat{G}_0(\mathscr{E}) + \hat{G}_0(\mathscr{E})(\beta g + h)|v\rangle\langle v|\hat{G}(\mathscr{E}) \\ &= \hat{G}_0(\mathscr{E}) + \hat{G}_0(\mathscr{E})(\beta g + h)|v\rangle\langle v|(\hat{G}_0(\mathscr{E}) \\ &+ \hat{G}_0(\mathscr{E})(\beta g + h)|v\rangle\langle v|\hat{G}(\mathscr{E})) = \hat{G}_0(\mathscr{E}) + \hat{G}_0(\mathscr{E}) \\ &\times(\beta g + h)|v\rangle\langle v|\hat{G}_0(\mathscr{E}) + \hat{G}_0(\mathscr{E})(\beta g + h)|v\rangle\langle v| \\ &\times\hat{G}_0(\mathscr{E})(\beta g + h)|v\rangle\langle v|\hat{G}_0(\mathscr{E}) + \ldots \\ &= \hat{G}_0(\mathscr{E}) + \hat{G}_0(\mathscr{E})(\beta g + h)|v\rangle\langle v|\hat{G}_0(\mathscr{E}) + \\ &+ \hat{G}_0(\mathscr{E})(\beta g + h)|v\rangle\Gamma\langle v|\hat{G}_0(\mathscr{E}) + \hat{G}_0(\mathscr{E})(\beta g + h) \\ &\times|v\rangle\Gamma^2\langle v|\hat{G}_0(\mathscr{E}) + \ldots = \hat{G}_0(\mathscr{E}) + \hat{G}_0(\mathscr{E})(\beta g + h) \\ &\times|v\rangle\left(1 + \Gamma + \Gamma^2 + \ldots\right)\langle v|\hat{G}_0(\mathscr{E}) = \hat{G}_0(\mathscr{E}) + \\ &+ \hat{G}_0(\mathscr{E})|v\rangle(\beta g + h)\frac{1}{1-\Gamma}\langle v|\hat{G}_0(\mathscr{E}),\end{aligned} \tag{33}$$

So the result is the same following the two methods.

Moreover, it is remarkable to note that the 2nd term of the Green function, which is the only one to contribute to the calculation of the effective, has a separable form thanks to the separability of potential.

Indeed, in the configuration space, this 2nd term can be written as follows

$$\begin{aligned}&\langle x_b|\hat{G}_0(\mathscr{E})|v\rangle(\beta g + h)\frac{1}{1-\Gamma}|v\rangle\hat{G}_0(\mathscr{E})|x_a\rangle \\ &= \langle x_b|\hat{G}_0(\mathscr{E})|v\rangle(\beta g + h)\frac{1}{1-\Gamma}|v\rangle\hat{G}_0(\mathscr{E})|x_a\rangle \\ &= V^*(x_b,\mathscr{E})(\beta g + h)\frac{1}{1-\Gamma}V(x_a;\mathscr{E}) \\ &= 2\pi V^*(x_b,\mathscr{E})\hat{\delta}(\hat{p})(\beta g + h)\frac{1}{1-\Gamma}V(x_a;\mathscr{E})\end{aligned} \tag{34}$$

where $V(x;\mathscr{E}) = \int dx_c v(x_c)G_0(x_c,x;\mathscr{E})$.

Thus, once again it appears in the 2nd term of the Green function the characteristic of non-locality through the operator $\hat{\delta}(\hat{p})$ since $\hat{G}(x_b,x_a;\mathscr{E})$ is a solution of a following pseudodifferential equation.

$$\begin{aligned}&\left[\mathscr{E} + i\alpha\frac{\partial}{\partial x_b} - \beta m + (\beta g + h)v(x_b)\right. \\ &\left.\times\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{(x'-x_b)\frac{\partial}{\partial x_b}}\right)v(x_b)\right]\hat{G}(x_b,x_a;\mathscr{E}) = \delta(x_b - x_a).\end{aligned} \tag{35}$$

It is clear that the infinite dependence in $\frac{\partial}{\partial x_b}$ poses the problem of treatment of the potential as perturbation since the term $i\alpha\frac{\partial}{\partial x_b}$ can also be considered as perturbation by comparison to the potential.

However, since the obtained expression of $\hat{G}$ is the same according to the direct and perturbative methods, we conclude that there is analytic continuity and furthermore the treatment is independent of the choice of the form of the perturbation.

Now, let us determine the two Green functions with and without interaction.

2.1. Determination of the Effective Action and Probability

First, let us determine explicitly the Green function $G_0(x_b,x_a;\mathscr{E})$ which is the matrix element of the operator $\hat{G}_0$. By inserting the projector $\int dp|p\rangle\langle p| = 1$ and with the help the relation $\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$, the operator $\hat{p}$ is eliminated. Then, using the scalar product $\langle x|p\rangle = \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\pi}}$, we have

$$\begin{aligned}G_0(x_b,x_a;\mathscr{E}) &= \langle x_b|\hat{G}_0(\mathscr{E})|x_a\rangle \\ &= \langle x_b|\frac{1}{\mathscr{E} - \left(\alpha\hat{p} + \beta m + i0^+\right)}|x_a\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi}\frac{e^{ip((x_b-x_a))}}{\mathscr{E} - \left(\alpha p + \beta m + i0^+\right)} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi}\frac{e^{ip((x_b-x_a))}}{\mathscr{E}^2 - p^2 - m^2 - i0^+}(\mathscr{E} + \alpha p + \beta m),\end{aligned} \tag{36}$$

It is obvious that there are two poles $\pm\left(\sqrt{\mathscr{E}^2 - m^2} - i0^+\right)$ located on the lower and upper 1/2 planes. According to the residue method, it is easy to perform the integral. For the different cases of x_b and x_a, the result can be summarized as follows

$$G_0\left(x_b, x_a; \mathscr{E}\right) = \begin{cases} 1pt12\kappa e^{-\kappa|x_b-x_a|}\left[i\alpha\kappa\,\mathrm{sgn}\left(x_b - x_a\right) + \beta m + \mathscr{E}\right] \text{ for } \mathscr{E}^2 < m^2 \\ 1pt12i\sqrt{\mathscr{E}^2 - m^2}e^{-i\sqrt{\mathscr{E}^2-m^2}|x_b-x_a|}\left[-\alpha\sqrt{\mathscr{E}^2 - m^2}\mathrm{sgn}\left(x_b - x_a\right) + \beta m + \mathscr{E}\right] \text{ for } \mathscr{E}^2 > m^2, \end{cases} \tag{37}$$

where the link between $\kappa = \sqrt{m^2 - \mathscr{E}^2}$ (with $\mathscr{E}^2 < m^2$) and $p_0 = \sqrt{\mathscr{E}^2 - m^2}$ (with $\mathscr{E}^2 > m^2$), is given by $\kappa = ip_0$.

Thus, the Green function G related to our non local interaction is

$$\begin{aligned} G\left(x_b, x_a; \mathscr{E}\right) &= 1pt12ip_0 e^{-ip_0|x_b-x_a|}\left[-\alpha p_0 \mathrm{sgn}\left(x_b - x_a\right) + \beta m + \mathscr{E}\right] + \left(1pt12ip_0\right)^2 \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_c dx_z v\left(x_c\right) v\left(x_z\right) e^{-ip_0|x_b-x_c|}e^{-ip_0|x_z-x_a|}\left[-\alpha p_0 \mathrm{sgn}\left(x_b - x_c\right) + \beta m + \mathscr{E}\right]\left(\beta g + h\right) \\ &\times \left[\frac{1}{1-\Gamma}\right]\left[-\alpha p_0 \mathrm{sgn}\left(x_z - x_a\right) + \beta m + \mathscr{E}\right], \end{aligned} \tag{38}$$

and the effective action has for expression

$$\begin{aligned} \overline{S}_{\mathrm{eff}} &= -iT\int_C \frac{\mathscr{E}d\mathscr{E}}{2i\pi}\left(1pt12ip_0\right)^2 \mathrm{Tr}_D\mathrm{Tr}_x\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_c dx_z\, v\left(x_c\right) v\left(x_z\right) e^{-ip_0|x_b-x_c|}e^{-ip_0|x_z-x_a|}\right. \\ &\left.\times\left[-\alpha p_0 \mathrm{sgn}\left(x_b - x_c\right) + \beta m + \mathscr{E}\right]\left(\beta g + h\right)\left[\frac{1}{1-\Gamma}\right]\left[-\alpha p_0 \mathrm{sgn}\left(x_z - x_a\right) + \beta m + \mathscr{E}\right]\right], \end{aligned} \tag{39}$$

where $p_0 = \sqrt{\mathscr{E}^2 - m^2}$ for $\mathscr{E}^2 > m^2$.

Let us calculate the matrix Γ. By inserting the two projectors $\int dx_b \left|x_b\right\rangle\left\langle x_b\right| = \int dx_a \left|x_a\right\rangle\left\langle x_a\right| = 1$, we obtain

$$\begin{aligned} \Gamma &= \left\langle v\right|G_0\left(\beta g + h\right)\left|v\right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_b dx_a v\left(x_b\right) \\ &\times G_0\left(x_b, x_a; \mathscr{E}\right)\left(\beta g + h\right) v\left(x_a\right) \\ &= 1pt12ip_0 J\left[\mathscr{E}h + mg + \beta\left(\mathscr{E}g + mh\right)\right], \end{aligned} \tag{40}$$

where we have posed

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx_b dx_a v\left(x_b\right) v\left(x_a\right) e^{-ip_0|x_b-x_a|}. \tag{41}$$

Then, we can deduce $\frac{1}{1-\Gamma}$ which is also a matrix. It is equal to

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\Gamma} &= \frac{1}{1 - 1pt12ip_0 J\left[\mathscr{E}h + mg + \beta\left(\mathscr{E}g + mh\right)\right]} = \frac{2ip_0}{2ip_0 - J\left(\mathscr{E}h + mg\right) - \beta J\left(\mathscr{E}g + mh\right)} \\ &= \frac{2ip_0\left[2ip_0 - J\left(\mathscr{E}h + mg\right) + \beta J\left(\mathscr{E}g + mh\right)\right]}{\left(2ip_0 - J\left(\mathscr{E}h + mg\right) - J\left(\mathscr{E}g + mh\right)\right)\left(2ip_0 - J\left(\mathscr{E}h + mg\right) + J\left(\mathscr{E}g + mh\right)\right)} \\ &= \frac{2ip_0\left[2ip_0 - J\left(\mathscr{E}h + mg\right) + \beta J\left(\mathscr{E}g + mh\right)\right]}{\left[2ip_0 - J\left(\mathscr{E} + m\right)\left(h + g\right)\right]\left[2ip_0 + J\left(\mathscr{E} - m\right)\left(g - h\right)\right]}, \end{aligned} \tag{42}$$

and thus the effective action $\overline{S}_{\mathrm{eff}}$ has now, for expression

$$\begin{aligned} \overline{S}_{\mathrm{eff}} &= T\int_C \frac{\mathscr{E}d\mathscr{E}}{2i\pi} 1pt12ip_0 \frac{1}{\left[2ip_0 - J\mathscr{E}\left(\mathscr{E} + m\right)\left(h + g\right)\right]\left[2ip_0 + J\left(\mathscr{E} - m\right)\left(g - h\right)\right]} \\ &\times \mathrm{Tr}_D\mathrm{Tr}_x\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_c dx_z\, v\left(x_c\right) v\left(x_z\right) e^{-ip_0|x_b-x_c|}e^{-ip_0|x_z-x_a|}\left[-\alpha p_0 \mathrm{sgn}\left(x_b - x_c\right) + \beta m + \mathscr{E}\right]\left(\beta g + h\right)\right. \\ &\left.\times\left[2ip_0 - J\left(\mathscr{E}h + mg\right) + \beta J\left(\mathscr{E}g + mh\right)\right]\left[-\alpha p_0 \mathrm{sgn}\left(x_z - x_a\right) + \beta m + \mathscr{E}\right]\right]. \end{aligned} \tag{43}$$

Let us proceed to the calculation of the traces relating to the matrices in S_{eff}.

After the development of the 4 products of the factors containing the matrices α and β and the use of the properties of the traces $\mathrm{Tr}\alpha = \mathrm{Tr}\beta = \mathrm{Tr}(\alpha\beta) = 0$, it is easy to see $\bar{S}_{\text{eff}}$ is reduced to

$$\bar{S}_{\text{eff}} = 4T\int_C \frac{d\mathcal{E}}{2i\pi} 1p\mathcal{E}2ip_0 \frac{1}{[2ip_0 - J(\mathcal{E}+m)(h+g)][2ip_0 + J(\mathcal{E}-m)(g-h)]}$$
$$\times \mathrm{Tr}_x\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_c dx_z\, v(x_c)v(x_z)e^{-ip_0|x_b-x_c|}e^{-ip_0|x_z-x_a|}\left[2m\mathcal{E}\left(Jm\left(h^2-g^2\right)2ip_0 g\right)\right.\right. \tag{44}$$
$$\left.\left.+\left(\mathcal{E}J\left(g^2-h^2\right)2ip_0 h\right)\left(\mathcal{E}^2+m^2+p_0^2\operatorname{sgn}(x_z-x_a)\operatorname{sgn}(x_b-x_c)\right)\right]\right],$$

where the factor 4 arises from $\mathrm{Tr}I = 4$.

It remains to perform the last trace $\mathrm{Tr}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} dx(.)\big|_{x_b=x_a=x}$. relating to the configuration space.

After some manipulations, the result is the following

$$\bar{S}_{\text{eff}} = -8T\int_C \frac{\mathcal{E}d\mathcal{E}}{2i\pi}\frac{1}{[2ip_0 - J(\mathcal{E}+m)(h+g)][2ip_0 - J(\mathcal{E}-m)(h-g)]}$$
$$\times\left[2im(hm+g\mathcal{E})\int_{-\infty}^{+\infty} dxe^{-2ip_0x}\left(\int_{-\infty}^{x} dx_c e^{ip_0x_c}v(x_c)\right)^2 + \mathcal{E}\left[Jp_0\left(g^2-h^2\right)+2i(h\mathcal{E}+mg)\right]\right.$$
$$\left.\times\int_{-\infty}^{+\infty} dx\int_{x}^{+\infty} dx_c e^{-ip_0x_c}v(x_c)\int_{-\infty}^{x} dx_z v(x_z)e^{ip_0x_z}\right],$$

where we have used the property $v(x) = v(-x)$. This expression can be again reduced if we take into account the simplifications after integrations by part of the two following triple integral. For the 1st integral we have

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dxe^{-2ip_0x}\left(\int_{-\infty}^{x} dx_c e^{ip_0x_c}v(x_c)\right)^2 = \frac{1}{-2ip_0}e^{-2ip_0x}\left(\int_{-\infty}^{x} dx_c e^{ip_0x_c}v(x_c)\right)^2\Bigg|_{-\infty}^{\infty}$$
$$+\frac{1}{ip_0}\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-ip_0x}v(x)\int_{-\infty}^{x} dx_c e^{ip_0x_c}v(x_c) = \frac{2}{2ip_0}\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-ip_0x}v(x)\int_{-\infty}^{x} dx_c e^{ip_0x_c}v(x_c) = \frac{J}{2ip_0}, \tag{45}$$

where the 1st term = 0 as it is shown in appendix A. For the 2nd integral, we have

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\int_{x}^{+\infty} dx_c e^{-ip_0x_c}v(x_c)\int_{-\infty}^{x} dx_z v(x_z)e^{ip_0x_z} = x\int_{x}^{+\infty} dx_c e^{-ip_0x_c}v(x_c)\int_{-\infty}^{x} dx_z v(x_z)e^{ip_0x_z}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}$$
$$+\int_{-\infty}^{+\infty} xdxe^{-ip_0x}v(x)\int_{-\infty}^{x} dx_z v(x_z)e^{ip_0x_z} - \int_{-\infty}^{+\infty} xdxe^{ip_0x}v(x)\int_{x}^{+\infty} dx_c e^{-ip_0x_c}v(x_c) = i\frac{\partial J}{2\partial p_0}, \tag{46}$$

where the 1st term = 0 as it is shown in appendix A. This two triple integrals are function of J.

Thus, we obtain an expression for $\bar{S}_{\text{eff}}$ which is more practical

$$\bar{S}_{\text{eff}} = -8iT\int_C \frac{\mathcal{E}d\mathcal{E}}{2i\pi}\frac{1}{[2ip_0 - J(\mathcal{E}+m)(h+g)][2ip_0 - J(\mathcal{E}-m)(h-g)]}$$
$$\times\left[\frac{m}{p_0}(hm+g\mathcal{E})J + i\mathcal{E}\left[Jp_0\left(g^2-h^2\right)+2i(h\mathcal{E}+mg)\right]\frac{\partial J}{2\partial p_0}\right]. \tag{47}$$

In this expression, it is obvious that there are 2 branch points $\mathcal{E} = \pm m$ because of the square root $\sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2} = p_0$. Therefore, it is necessary to introduce 2 cuts located in the 2 intervals $|\mathcal{E}| \geq m$. The poles (or singularities) located in the interval $-m < \mathcal{E} < m$, correspond to the bound states of the discrete spectrum and the 2 cuts correspond to the continuous spectrum.

Let us denote by C^+ the path $]\infty - i0, m - i0[\, \cup\,]m + i0, \infty + i0[$ and by C^- the path $]-\infty - i0, -m - i0[\, \cup\,]-m + i0, -\infty + i0[$ by surrounding the points m and $-m$ in the negative and positive orientations and by $\int_{C^B}$ the contour surrounding the poles on the $-m < E < m$ axis. The integral over C is decomposing into 3 integrals relative to the 3 contours: $\int_C = \int_{C^+} + \int_{C^-} + \int_{C^B}$.

First, let us determine $\int_{C^B}$ relating to bound states and which correspond to the poles (or singularities i.e. the denominator is $= 0$). These energies of bound states $\mathcal{E}_B$ are obtained by solving the following equations

$$2ip_0 - J(\mathcal{E} + m)(h + g) = 0, \tag{48}$$

$$2ip_0 - J(\mathcal{E} - m)(h - g) = 0. \tag{49}$$

By replacing p_0 by $\sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2}$ it is easy to obtain the energies of bound states. For the 1st Eq. we obtain the energy of the bound state B_1

$$\mathcal{E}_{B_1} = \left.\frac{4 - (g + h)^2 J_{B_1}^2}{4 + (g + h)^2 J_{B_1}^2} m\right|_{p_{B_1} = 4im\frac{(h+g)J_{B_1}}{4+(h+g)^2 J_{B_1}^2}} \quad \text{with } (g + h) < 0, \tag{50}$$

while for the 2nd Eq., where it is sufficient to change $(m, g) \to (-m, -g)$, we have the energy of the bound state B_2

$$\mathcal{E}_{B_2} = -\left.\frac{4 - (g - h)^2 J_{B_2}^2}{4 + (g - h)^2 J_{B_2}^2} m\right|_{p_{B_2} = -4im\frac{(h-g)J_{B_2}}{4+(h-g)^2 J_{B_2}^2}} \quad \text{with } (g - h) < 0. \tag{51}$$

The conditions $(g \pm h) < 0$ are due to the determination of the square root $\sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2} = -i\sqrt{m^2 - \mathcal{E}^2}$.

Let us note at this level that due to the non-locality of the potential, the energies of the bound states are solutions of transcendental equations.

Let us now determine the contribution of each pole. For the 1st pole B_1, at its vicinity B_1 we have

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2ip_0 - J(\mathcal{E} + m)(h + g)} \\ &= \frac{2ip_0 + J(\mathcal{E} + m)(h + g)}{[2ip_0 - J(\mathcal{E} + m)(h + g)][2ip_0 + J(\mathcal{E} + m)(h + g)]} \\ &= \frac{2ip_0 + J\mathcal{E}(\mathcal{E} + m)(h + g)}{-4p_0^2 - J^2(\mathcal{E} + m)^2(h + g)^2} \\ &\approx \left.\frac{-2J(\mathcal{E} + m)(h + g)}{4p_0^2 + J^2(\mathcal{E} + m)^2(h + g)^2}\right|_{B_1} \\ &= \frac{-2J_{B_1}(h + g)}{\mathcal{E}\left[4 + J_{B_1}^2(h + g)^2\right] - m\left(4 - J_{B_1}^2(h + g)^2\right)} \\ &= -2\frac{J_{B_1}(h + g)}{4 + J_{B_1}^2(h + g)^2}\frac{1}{\mathcal{E} - \mathcal{E}_{B_1}}, \end{aligned} \tag{52}$$

and the contribution of this pole B_1 to the effective action effective is then

$$\begin{aligned} \bar{S}_{\text{eff}}^{B_1} = &\frac{8iT(h + g)\mathcal{E}}{4 + J^2(h + g)^2}\frac{1}{g\mathcal{E} + hm}\left[\frac{m}{p}(hm + g\mathcal{E})J\right. \\ &\left.\left. + i\frac{\partial J}{2\partial p}\mathcal{E}\left[Jp\left(g^2 - h^2\right) + 2i(h\mathcal{E} + mg)\right]\right]\right|_{\substack{\mathcal{E} = \mathcal{E}_{B_1} \\ p = p_{B_1} \\ J = J_{B_1}}}, \end{aligned} \tag{53}$$

with $\mathcal{E}_{B_1} = -m\frac{4 - (g + h)^2 J_{B_1}^2}{4 + (g + h)^2 J_{B_1}^2}$ and $p_{B_1} = 4im\frac{(g + h)J_{B_1}}{4 + (g + h)^2 J_{B_1}^2}$.

Since J_{B_1} is an integral (on the variable x) is real and that $\bar{S}_{\text{eff}}^{B_1}$ is real, this effective action does not contribute to the expression of the probability.

With the change $(m, g) \to (-m, -g)$, the effective action $S_{\text{eff}}^{B_2}$ relative to B_2 has a similar form to that of $S_{\text{eff}}^{B_1}$ and its expression is

$$\begin{aligned} \bar{S}_{\text{eff}}^{B_2} = -&\frac{8iT(h - g)\mathcal{E}}{4 + J^2(h - g)^2}\frac{1}{g\mathcal{E} + hm}\left[\frac{m}{p}(hm + g\mathcal{E})J\right. \\ &\left.\left. + i\frac{\partial J}{2\partial p}\mathcal{E}\left[Jp\left(g^2 - h^2\right) + 2i(h\mathcal{E} + mg)\right]\right]\right|_{\substack{\mathcal{E} = \mathcal{E}_{B_2} \\ p = p_{B_2} \\ J = J_{B_2}}}, \end{aligned} \tag{54}$$

with $\mathcal{E}_{B_2} = m\frac{4 - (g - h)^2 J_{B_2}^2}{4 + (g - h)^2 J_{B_2}^2}$ and $p_{B_2} = 4im\frac{(g - h)J_{B_2}}{4 + (g - h)^2 J_{B_2}^2}$.

Also, this action $\bar{S}_{\text{eff}}^{B_2}$ does not contribute to the calculation of probability.

Now, let us consider the continuous part. First rewriting $\overline{S}_{\text{eff}}$ as follows

$$\overline{S}_{\text{eff}} = 8iT \int_{C^{+}+C^{-}} \frac{d\mathscr{E}}{2i\pi} \frac{\mathscr{E}}{p_0} \times \frac{1}{p_0\left(J^2\left(g^2-h^2\right)+4\right)+4iJ\left(h\mathscr{E}+gm\right)} \times \left\{\frac{m}{p_0}\left(hm+g\mathscr{E}\right)J + i\mathscr{E}\frac{\partial J}{2\partial p_0} \times Jp_0\left(g^2-h^2\right)+2i\left(h\mathscr{E}+mg\right)\right\}, \tag{55}$$

and after some manipulations, we can show that $\overline{S}_{\text{eff}}^{\text{cont}}$ takes a more compact form (see Appendix B)

$$\begin{aligned}\overline{S}_{\text{eff}}^{\text{cont}} = -16T\text{Re}\int_{m-i0^{+}}^{+\infty-i0^{+}} \frac{d\mathscr{E}}{2\pi}\frac{\mathscr{E}}{p_0} \times \Bigg\{ & \frac{\frac{m}{p_0}\left(hm+g\mathscr{E}\right)J}{p_0\left(J^2\left(g^2-h^2\right)+4\right)+4iJ\left(h\mathscr{E}+gm\right)} \\ & + i\mathscr{E}\frac{\partial J}{2\partial p_0}\frac{Jp_0\left(g^2-h^2\right)+2i\left(h\mathscr{E}+mg\right)}{p_0\left(J^2\left(g^2-h^2\right)+4\right)+4iJ\left(h\mathscr{E}+gm\right)} \\ & - \frac{\frac{m}{p_0}\left(hm-g\mathscr{E}\right)J}{p_0\left(J^2\left(g^2-h^2\right)+4\right)+4iJ\left(-h\mathscr{E}+gm\right)} \\ & - i\mathscr{E}\frac{\partial J}{2\partial p_0}\frac{Jp_0\left(g^2-h^2\right)+2i\left(-h\mathscr{E}+mg\right)}{p_0\left(J^2\left(g^2-h^2\right)+4\right)+4iJ\left(-h\mathscr{E}+gm\right)}\Bigg\}.\end{aligned} \tag{56}$$

It is obvious that $\overline{S}_{\text{eff}}^{\text{cont}}$ is purely real, its imaginary part is then equal to zero

$$Im\overline{S}_{\text{eff}}^{\text{cont}} = 0, \tag{57}$$

i.e. the continuous part of the effective action does not contributes to the calculation of the probability. The probability related to our non local interaction is then simply null

$$\begin{aligned}P &= 1-\exp\left(-2Im\left(\overline{S}_{\text{eff}}^{\text{cont}}+\overline{S}_{\text{eff}}^{B_1}+\overline{S}_{\text{eff}}^{B_2}\right)\right) \\ &= 1-\exp(0) = 0.\end{aligned} \tag{58}$$

i.e. that there is no process of pair creation of particle (Dirac) when the vacuum is perturbed by one such separable form of interaction.

This result requires however, some clarifications or remarks.

(A) Let us consider the continuity equation. After having multiplied the Dirac equation and its adjoint respectively by Ψ^{+} and Ψ and by difference, we obtain the following equation

$$\begin{aligned}&\partial\Psi^{+}(\Psi)/\partial t + \frac{\partial j}{\partial x} + i\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx' v(x')\Psi^{+}(x',t)\right)(g+h) \\ &\times \Psi(x,t)v(x) - iv(x)\Psi^{+}(x,t)(\beta g+h) \\ &\times \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx'\Psi(x',t)v(x')\right) = 0,\end{aligned} \tag{59}$$

where $j = \Psi^{+}\alpha\Psi$ is the standard current density. This equation is not the standard form of continuity equation, but by using the relation $f(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int^{t} dsf(x,s)$, we can absorb the last two terms in the first term and the previous equation becomes now

$$\partial\rho/\partial t + \frac{\partial j}{\partial x} = 0, \tag{60}$$

where

$$\begin{aligned}\rho = \Psi^{+}\Psi + i\int^{t} ds\Bigg[&\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx' v(x')\Psi^{+}(x',s)\right)(\beta g+h) \\ &\times \Psi(x,s)v(x) - v(x)\Psi^{+}(x,s) \\ &\times (\beta g+h)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx' v(x')\Psi^{+}(x',s)\right)\Bigg],\end{aligned} \tag{61}$$

is the new density which is clearly not defined positive for any $v(x) \neq \delta(x)$. However, let us note that $\int_{-\infty}^{+\infty}\rho dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^{+}\Psi dx = 1$ for any $v(x)$.

Thus, for this type of potential, locally there is no conservation of the number of particles (i.e. particles are created or absorbed) but globally there is conservation of the number of particles.

As, it is known that for the Dirac equation, Ψ is a wave function, $\rho = \Psi^{+}\Psi > 0$ is the probability density and Ψ becomes a Grassmann variable in the formalism of functional integral. In our case ρ depends on $v(x)$ is not always >0 and the use of the Eq. (11) seems to us unappropriated since the Eq. (11) concerns the Dirac particles (having $\rho > 0$).

Thus, the result of the probability = 0 can be explained by the fact that the pair creation of particles de type Dirac ($\rho > 0$) is not possible with the non local potential.

With an another approach, for example with the "in" and "out" vacuum states method, we must take into account the nature of the particle and the corresponding statistics. We known that we have Bose statistics for particles satisfying the Klein–Gordon equation and Fermi statistics for corresponding Dirac particles. In our case there is ambiguity on the nature of particle.

(B) On the procedural point of view: the linear form in $\hat{E}\left(= i\frac{\partial}{\partial t}\right)$ used, has led to the appearance of the Dirac function $\delta(s - (t_b - t_a))$ instead of the usual quadratic form $\hat{E}\left(= i\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$ that one obtains in general by applying the operation of charge conjugation C. In our case of the non-local potential, this operation C would lead to a non-exploitable form.

As an illustration let us choose the case where $v(x)$ has a simple form which is the Dirac delta function,

$$v(x) = \delta(x). \tag{62}$$

In this case, the non local interaction becomes a local interaction. We know that the δ-function is ill-defined in the Hilbert space and it can be defined by a sequence of functions. To solve the Dirac equation for example, usually it takes a sequence as finite square well potential then one take the limit of the obtained solution at the end. For the case of the Dirac equation, it is found, however, that the solution depends on the choice of the sequence, contrary to the Schrödinger equation.

2.2. Particular Case: Non Local and Separable δ-Potential

Let us note that integral J becomes simple

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx v(x) \int_{-\infty}^{+\infty} dx v(y) e^{-ip_0|x-y|} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(y) e^{-ip_0|x-y|} = 1, \end{aligned} \tag{63}$$

and the energies of the bound states are equal to

$$\mathcal{E}_{B_1} = \frac{4-(g+h)^2}{4+(g+h)^2} m \quad \text{with} \quad (g+h) < 0, \tag{64}$$

$$\mathcal{E}_{B_2} = -\frac{4-(g-h)^2}{4+(g-h)^2} m \quad \text{with} \quad (g-h) < 0, \tag{65}$$

and the effective actions related to the bound states and to continuous states are respectively the following

$$\bar{S}_{\text{eff}}^{B_1} = 2T\mathcal{E}_{B_1}, \quad \bar{S}_{\text{eff}}^{B_2} = 2T\mathcal{E}_{B_2},$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{\text{eff}}^{\text{cont}} &= -16T\,\mathrm{Re}\int_{m-i0^+}^{+\infty-i0^+} \frac{d\mathcal{E}}{2\pi}\frac{\mathcal{E}}{p_0}\left\{\frac{\frac{m}{p_0}(hm+g\mathcal{E})}{p_0\left((g^2-h^2)+4\right)+4i(hE+gm)} - \frac{\frac{m}{p_0}(hm-g\mathcal{E})}{p_0\left((g^2-h^2)+4\right)+4i(-h\mathcal{E}+gm)}\right. \\ &\left. + \frac{\frac{m}{p_0}(hm-g\mathcal{E})}{p_0\left((g^2-h^2)+4\right)-4i(h\mathcal{E}+gm)} - \frac{\frac{m}{p_0}(hm-g\mathcal{E})}{p_0\left((g^2-h^2)+4\right)-4i(-h\mathcal{E}+gm)}\right\} \\ &= -32T\left(\int_{m-i0^+}^{+\infty-i0^+} + \int_{-\infty-i0^+}^{-m-i0^+}\right)\frac{d\mathcal{E}}{2\pi}\frac{\mathcal{E}}{p_0}\frac{\frac{m}{p_0}(hm+g\mathcal{E})\left(p_0(g^2-h^2)+4\right)}{\left[p_0\left((g^2-h^2)+4\right)\right]^2+\left[4(h\mathcal{E}+gm)\right]^2}, \end{aligned} \tag{66}$$

and that the probability for this case of Dirac delta potential

$$P_\delta = 1 - e^{-2\,\mathrm{Im}\left(\bar{S}_{\text{eff}}^{\text{cont}} + \bar{S}_{\text{eff}}^{B_1} + v_{\text{eff}}^{B_2}\right)} = 1 - 1 = 0.$$

is also zero !

However, this result requires again some clarifications

(1) First, let us calculate explicitly $\bar{S}_{\text{eff}}^{\text{cont}}$ by performing the two integrations. As

$$\begin{aligned} &\frac{\mathcal{E}}{\sqrt{\mathcal{E}^2-m^2}}\frac{g\mathcal{E}+hm}{\left[p_0\left((g^2-h^2)+4\right)\right]^2+\left[4(h\mathcal{E}+gm)\right]^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{g^2-h^2+4}\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}^2-m^2}}\left[\frac{g+h}{4+(g+h)^2}\right. \\ &\left. + \frac{g+h}{4+(g+h)^2}\frac{\mathcal{E}_{B_1}}{\mathcal{E}-\mathcal{E}_{B_1}} + (h,\mathcal{E}_{B_1}) \to (-h,\mathcal{E}_{B_2})\right], \end{aligned} \tag{67}$$

and with the help of the Eq.2.261 [14]

$$\begin{aligned} R &= a + bx + cx^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left(2\sqrt{c}R + 2cx + b\right) \quad c > 0 \\ &= \frac{-1}{\sqrt{-c}}\arcsin\frac{2cx+b}{\sqrt{-\Delta}} \quad c < 0 \quad \Delta 4ac - b^2 < 0, \end{aligned}$$

and of the Eq. (2.281) (with $n = 1$) [14]

$$\begin{aligned} &\int \frac{dx}{(x+p)^n\sqrt{a+bx+cx^2}} = \\ &-\int \frac{t^{n-1}dt}{\sqrt{c+(b-2pc)t+\left(a-bp+cp^2\right)t^2}}, \\ &t = \frac{1}{x+p} > 0, \end{aligned}$$

we obtain the following result of this two integrals

$$\int_m^\infty \frac{d\mathcal{E}}{\sqrt{\mathcal{E}^2-m^2}} = \lim_{\mathcal{E}\to\infty} \ln\left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}^2-m^2}+\mathcal{E}}{m}\right),$$
$$\int_m^\infty \frac{d\mathcal{E}}{\sqrt{\mathcal{E}^2-m^2}} \frac{1}{\mathcal{E}-\mathcal{E}_{B_1}} = \frac{1}{\sqrt{m^2-\mathcal{E}_{B_1}^2}}\left(\arcsin\frac{\mathcal{E}_{B_1}}{m}+\pi/2\right), \tag{68}$$

and thus

$$\int_m^\infty d\mathcal{E}\ldots = \frac{1}{2}\frac{1}{g^2-h^2+4}\left[\frac{g+h}{4+(g+h)^2}\lim_{\mathcal{E}\to\infty}\ln\left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}^2-m^2}+\mathcal{E}}{m}\right)+\mathcal{E}_{B_1}\frac{g+h}{4+(g+h)^2}\right.$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{m^2-\mathcal{E}_{B_1}^2}}\left(\arcsin\frac{\mathcal{E}_{B_1}}{m}+\pi/2\right)+\frac{g-h}{4+(g-h)^2} \tag{69}$$
$$\left.\times\lim_{\mathcal{E}\to\infty}\ln\left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}^2-m^2}+\mathcal{E}}{m}\right)+\mathcal{E}_{B_2}\frac{g-h}{4+(g-h)^2}\frac{1}{\sqrt{m^2-\mathcal{E}_{B_2}^2}}\left(\arcsin\frac{\mathcal{E}_{B2}}{m}+\pi/2\right)\right],$$

and after some manipulations, we obtain for the Dirac delta potential the expression of the continuous part of the effective action

$$\bar{S}_{\text{eff}}^{\text{cont}} = -32T\frac{1}{g^2-h^2+4}\left[\frac{g+h}{4+(g+h)^2}\lim_{\mathcal{E}\to\infty}\ln\left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}^2-m^2}+\mathcal{E}}{m}\right)+\frac{g+h}{4+(g+h)^2}\frac{\mathcal{E}_{B_1}}{\sqrt{m^2-\mathcal{E}_{B_1}^2}}\right.$$
$$\left.\times\left(\arcsin\frac{\mathcal{E}_{B_1}}{m}\right)+\frac{g-h}{4+(g-h)^2}\lim_{\mathcal{E}\to\infty}\ln\left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}^2-m^2}+\mathcal{E}}{m}\right)+\frac{g-h}{4+(g-h)^2}\frac{\mathcal{E}_{B_2}}{\sqrt{m^2-\mathcal{E}_{B_2}^2}}\left(\arcsin\frac{\mathcal{E}_{B2}}{m}\right)\right], \tag{70}$$

and it is obvious that $\bar{S}_{\text{eff}}^{\text{cont}} \to \infty$.

In our case of the δ-potential, we note that the amplitude vacuum–vacuum $\mathcal{A}(\text{vac–vac}) = e^{i\bar{S}_{\text{eff}}} = N\text{Det}\hat{O}_D \to e^{i\infty}$ and consequently the passage of Eq. (12) to the Eq. (13) in order to obtain the Green function is not clear. In addition, the δ-potential is known for the problem posed by the obtaining of the solution of the Dirac equation and although suggestions [11. as the replacement of $\delta(x)\Psi(x)$ by $\delta(x)\frac{\Psi(0^+)+\Psi(0^-)}{2}$, the solution of this problem remains ambiguous.

Otherwise, as the solution of Dirac equation for δ-potential is

$$\Psi(x) = \Phi_0(x) + 2e^{-ip_0x}\theta(-x)$$
$$\times\frac{\left(\mathcal{E}(g^2-h^2)+2iph\right)(\mathcal{E}+m\beta)}{(h^2-g^2)p_0^2+4ih(h\mathcal{E}+gm)p_0-4p_0^2}\Phi_0(0)+2e^{ip_0x} \tag{71}$$
$$\times\theta(x)\frac{\left(m(h^2-g^2)2ip_0g\right)(m+\beta\mathcal{E})}{(h^2-g^2)p_0^2+4ih(h\mathcal{E}+gm)p_0-4p_0^2}\Phi_0(0),$$

where the spinor $\Phi_0(0)$ is such as $[\alpha p_0+\beta m+\mathcal{E}]\Phi_0(0)=0$ ($\Phi_0(x)$ being the free solution of Dirac equation). We recognize in this expression a superposition of three waves: incident, reflected and transmitted.

On either side of the origin, we have

$$\Psi(0^+) = \left(1+2\frac{\left(m(h^2-g^2)2ip_0g\right)}{(h^2-g^2)p_0^2+4ih(h\mathcal{E}+gm)p_0-4p_0^2}(m+\beta\mathcal{E})\right)\Phi_0(0), \tag{72}$$

$$\Psi(0^-) = \left(1+2\frac{\left(\mathcal{E}(g^2-h^2)+2iph\right)}{(h^2-g^2)p_0^2+4ih(h\mathcal{E}+gm)p_0-4p_0^2}(\mathcal{E}+m\beta)\right)\Phi_0(0). \tag{73}$$

and it is clear that $\Psi(0^+) \neq \Psi(0^-)$ and for $x = 0$, $\Psi(0)$ is undefined.

Thus, for the particular case $v(x) = \delta(x)$, the property $\delta(x)\Psi(x,s) = \delta(x)\Psi(0,s)$ is not valid if $\Psi(0,s)$ is undefined and following the Eq. (61), we do not have the standard form $\rho = \Psi^+\Psi$ for the density. In addition $\rho(0,t)$ and $j(0,t) = \Psi^+\alpha\Psi$ are ill definite.

In a word, since there is no continuity equation for this particular case, the δ-potential can not create particles of type Dirac ($\rho > 0$) and thus the probability is null.

3. CONCLUSIONS

In this paper which can be considered as a contribution to the problem of the δ-potential in Dirac equation, we have considered the process of pair creation by determining the probability following the approach of the effective action, the vacuum being perturbed by a non-local and separable potential.

From the continuity equation, it has been shown that under the effect of non local interaction classically, ρ is not defined positive while a Dirac particle has a $\rho > 0$ and the result is obviously a probability null to create particles of type Dirac. With another approach like the "in" and "out" vacuum states method the same ambiguity remains, since the nature of particle in connection with the spin-statistics theorem are necessary to obtain the probability.

For the limit case of δ-potential, the solution at the origin $x = 0$ is ill definite .In this case, there is no continuity because (ρ, j) are not definite at the origin. So, the probability to create Dirac particles is also null.

4. APPENDIX A

In this appendix, we propose to show that the two following terms are null:

—for the 1st term

$$e^{-2ip_0x}\left(\int_{-\infty}^{x} dx_c e^{ip_0x_c}v(x_c)\right)^2\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = (\lim_{R\to\infty} - \lim_{R\to-\infty})e^{-2ip_0R}\left(\int_{-\infty}^{R} dx_c e^{ip_0x_c}v(x_c)\right)^2 = \lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\lim_{R\to\infty} - \lim_{R\to-\infty}\right)$$

$$\times\left(\frac{\int_{-\infty}^{R} dx_c e^{ip_0x_c}v(x_c)}{e^{ip_0R}e^{\varepsilon R}}\right)^2 = \left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx_c e^{ip_0x_c}v(x_c)}{\infty} = \frac{cte}{\infty} = 0\right)^2 - \left(\frac{\int_{-\infty}^{-\infty} dx_c e^{ip_0x_c}v(x_c)}{0} = \frac{0}{0}\right)^2$$

$$= 0 - \lim_{\varepsilon\to0^+}\lim_{R\to-\infty}\left(\frac{e^{ip_0R}e^{\varepsilon R}v(R)}{ip_0e^{ip_0R}e^{\varepsilon R}}\right)^2 = -\lim_{\varepsilon\to0^+}\lim_{R\to-\infty}\left(\frac{v(R)}{ip_0}\right)^2 = -\lim_{\varepsilon\to0^+}\lim_{R\to-\infty}\left(\frac{v(R)}{ip_0}\right)^2 = \frac{v^2(-\infty)}{p_0^2} = 0 \quad (p_0 \neq 0).$$

—for the 2nd term

$$x\int_{x}^{+\infty} dx_c e^{-ip_0x_c}v(x_c)\int_{-\infty}^{x} dx_z v(x_z)e^{ip_0x_z}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \left(\lim_{R\to\infty} - \lim_{R\to-\infty}\right)R\int_{R}^{+\infty} dx_c e^{-ip_0x_c}v(x_c)\int_{-\infty}^{R} dx_z v(x_z)e^{ip_0x_z}$$

$$= \left(\lim_{R\to\infty} - \lim_{R\to-\infty}\right)\frac{\int_{R}^{+\infty} dx_c e^{-ip_0x_c}v(x_c)\int_{-\infty}^{R} dx_z v(x_z)e^{ip_0x_z}}{\frac{1}{R}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_z v(x_z)e^{ip_0x_z}\lim_{R\to\infty}\frac{\int_{R}^{+\infty} dx_c e^{-ip_0x_c}v(x_c)}{\frac{1}{R}}$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} dx_c e^{-ip_0x_c}v(x_c)\lim_{R\to-\infty}\frac{\int_{-\infty}^{R} dx_z v(x_z)e^{ip_0x_z}}{\frac{1}{R}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_z v(x_z)e^{ip_0x_z}\lim_{R\to\infty}\frac{-e^{-i(p_0-i0^+)R}v(R)}{-\frac{1}{R^2}}$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} dx_c e^{-ip_0x_c}v(x_c)\lim_{R\to-\infty}\frac{v(R)e^{i(p_0-i0^+)R}}{-\frac{1}{R^2}} = 0 - 0 = 0.$$

because $\lim_{R\to\infty} e^{-i(p_0-i0^+)R} \to 0$ and $\lim_{R\to-\infty} e^{i(p_0-i0^+)R} \to 0$.

5. APPENDIX B

In this appendix, we develop the expression $\bar{S}_{\text{eff}}^{\text{cont}}$

Since $\int_{C^-} d\mathcal{E} f(\mathcal{E}) = \int_{C^+} d\mathcal{E} f(-\mathcal{E})$, first we have

$$\bar{S}_{\text{eff}}^{\text{cont}} = 8iT \int\limits_{C^+} \frac{d\mathcal{E}}{2i\pi} \frac{\mathcal{E}}{p_0}$$

$$\times \left\{ \frac{\frac{m}{p_0}(hm + g\mathcal{E}) J}{p_0\left(J^2\left(g^2 - h^2\right) + 4\right) + 4iJ\left(h\mathcal{E} + gm\right)} \right.$$

$$+ i\mathcal{E} \frac{\partial J}{2\partial p_0} \frac{Jp_0\left(g^2 - h^2\right) + 2i\left(h\mathcal{E} + mg\right)}{p_0\left(J^2\left(g^2 - h^2\right) + 4\right) + 4iJ\left(h\mathcal{E} + gm\right)}$$

$$+ \frac{-\frac{m}{p_0}(hm - g\mathcal{E}) J}{p_0\left(J^2\left(g^2 - h^2\right) + 4\right) + 4iJ\left(-h\mathcal{E} + gm\right)}$$

$$\left. + i\mathcal{E} \frac{\partial J}{2\partial p_0} \frac{Jp_0\left(g^2 - h^2\right) + 2i\left(-h\mathcal{E} + mg\right)}{p_0\left(J^2\left(g^2 - h^2\right) + 4\right) + 4iJ\left(-h\mathcal{E} + gm\right)} \right\},$$

where we can observe the change $(m, g, h) \to (-m, -g, -h)$ in the second integral $\left(\int_{C^-}\right)$.

Now, let us decompose the integral as follows

$$\int\limits_{C^+} d\mathcal{E}(.) = \int\limits_{+\infty - i0^+}^{m - i0^+} d\mathcal{E}(.) + \int\limits_{m + i0^+}^{\infty + i0^+} d\mathcal{E}(.)$$

$$= -\int\limits_{m - i0^+}^{+\infty - i0^+} d\mathcal{E}(.) + \int\limits_{m + i0^+}^{\infty + i0^+} d\mathcal{E}(.),$$

by taking into account for p_0 the change of sign:

$= +\sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2}$ on the path $]\infty - i0, m - i0[$

$= -\sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2}$ on the path $]\infty + i0, m + i0[$.

Then $\bar{S}_{\text{eff}}^{\text{cont}}$ becomes

$$\bar{S}_{\text{eff}}^{\text{cont}} = -8iT \int\limits_{m - i0^+}^{+\infty - i0^+} \frac{d\mathcal{E}}{2i\pi} \frac{\mathcal{E}}{p_0} \left\{ \frac{\frac{m}{p_0}(hm + g\mathcal{E}) J}{p_0\left(J^2\left(g^2 - h^2\right) + 4\right) + 4iJ\left(h\mathcal{E} + gm\right)} + \mathcal{E} \frac{\partial J}{2\partial p_0} \frac{\left(Jp_0\left(g^2 - h^2\right) + 2i\left(h\mathcal{E} + mg\right)\right)}{p_0\left(J^2\left(g^2 - h^2\right) + 4\right) + 4iJ\left(h\mathcal{E} + gm\right)} \right.$$

$$\left. - \frac{\frac{m}{p_0}(hm - g\mathcal{E}) J}{p_0\left(J^2\left(g^2 - h^2\right) + 4\right) + 4iJ\left(-h\mathcal{E} + gm\right)} + i\mathcal{E} \frac{\partial J}{2\partial p_0} \frac{Jp_0\left(g^2 - h^2\right) + 2i\left(-h\mathcal{E} + mg\right)}{p_0\left(J^2\left(g^2 - h^2\right) + 4\right) + 4iJ\left(-h\mathcal{E} + gm\right)} \right\}$$

$$+ 8iT \int\limits_{m + i0^+}^{\infty + i0^+} \frac{d\mathcal{E}}{2i\pi} \frac{\mathcal{E}}{-p_0} \left\{ + \frac{\frac{m}{p_0}(hm + g\mathcal{E}) J^*}{p_0\left(J^{*2}\left(g^2 - h^2\right) + 4\right) - 4iJ^*\left(h\mathcal{E} + gm\right)} - i\mathcal{E} \frac{\partial J^*}{2\partial p_0} \frac{J^* p_0\left(g^2 - h^2\right) - 2i\left(h\mathcal{E} + mg\right)}{p_0\left(J^{*2}\left(g^2 - h^2\right) + 4\right) - 4iJ^*\left(h\mathcal{E} + gm\right)} \right.$$

$$\left. - \frac{\frac{m}{p_0}(hm - g\mathcal{E}) J^*}{p_0\left(J^{*2}\left(g^2 - h^2\right) + 4\right) - 4iJ^*\left(-h\mathcal{E} + gm\right)} - i\mathcal{E} \frac{\partial J^*}{2\partial p_0} \frac{J^* p_0\left(g^2 - h^2\right) - 2i\left(-h\mathcal{E} + mg\right)}{p_0\left(J^{*2}\left(g^2 - h^2\right) + 4\right) - 4iJ^*\left(-h\mathcal{E} + gm\right)} \right\}.$$

This expression can be written in compact form (Eq. (56)).

REFERENCES

1. J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1955).
2. H. Ayoama and M. Kobayashi, Prog. Theor. Phys. **64**, 1045 (1980).
3. L. Parker, Phys. Rev. Lett. **21**, 562 (1968), Phys. Rev. D **3**, 346 (1971).
4. A. A. Grip, S. G. Mamayev, and V. M. Mostepanenko, Gen. Rel. Grav. **7**, 535 (1976); J. Phys. A: Math. Gen. **13**, 2057 (1980).
5. A. I. Nikishov, arXiv:hep-th/0207085.
6. A. Hansen and F. Ravndal, Phys. Scr. **23**, 1030 (1981).
7. B. Hamil and L. Chetouani, Phys. Scr. **89**, 115301 (2014); Eur. Phys. J. Plus. doi 10.1140/epjp/i2016-16311-4
8. S. Boudieb and L. Chetouani, Eur. Phys. J. Plus (2015). doi 10.1140/epjp/i2015-15042-4
9. M. G. Calkin, D. Kiang, and Y. Nogami, Phys. Rev. **38**, 1076 (1988), B. Sutherland and D. C. Mattis, Phys. Rev. A **24**, 1194 (1981).
10. B. H. McKellar and G. J. Stephenson, Jr., Phys. Rev. C **35**, 2262 (1987).
11. Yoshio Yamaguhi, Phys. Rev. **95**, 1628 (1954).
12. D. Griffiths and S. Walborn, Am. J. Phys. **67**, 5 (1999), F. A. B. Coutinho, Y. Nogami, and F. M. Toyama, Rev. Bras. Ensino Fis. **31**, 4302 (2009).
13. C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York, 1980); A. A. Grib, S. G. Mamayev, and V. M. Mostepanenko, *Vacuum Quantum Effects in Strong Fields* (Friedmann Lab., St. Petersburg, 1994).
14. I. S. Gradstein and I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Sums, Series, and Products* (Academic, New York, 1965).

Sciences & Technologie A – N°44, Décembre 2016, 09-16

The Duffin-Kemmer-Petiau equation (DKP) with non local and separable interaction

A. HAFDALLAH, L. CHETOUANI
Laboratoire de physique mathématique et de physique subatomique (LPMPS), Université Constantine1, Algérie.
Reçu le / /2017 – Accepté le / /2017

Abstract

The Duffin-Kemmer-Petiau equation (DKP) is solved for a separable and non-local matrix interaction via the determination of the free Green function.

Thus, it has been shown that the spectrum of the energies is obtained from the calculation of the determinant and as an illustration we have chosen a simple form for the matrix M relative to the interaction and we have calculated the determinant for the case of spin 0 (β matrices of order 5 × 5).

Keywords: *non-local, Green function*

Résumé

L'équation de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) est solutionnée pour une interaction de type matriciel , séparable et non-local via la détermination de la fonction de Green libre.
C'est ainsi qu'il a été montré que le spectre des énergies s'obtient à partir du calcul du déterminant et comme illustration nous avons choisi une forme simple pour la matrice M relative à l'interaction et nous avons calculé le déterminant pour le cas du spin 0 (matrices β d'ordre 5×5).

Mots clés *: non-local, , fonction de Green*.

ملخص

تم حل معادلة ديفان- كمار- بيتيو (DKP) بوجود كمون غير محلي و قابل للإنفصال ، بتحديد دالة قرين في الحالة الحرة كما تم إثبات أن طيف الطاقة يتم الحصول عليه من خلال حساب المحدد وكمثال على ذلك إخترنا شكل بسيط من أجل المصفوفة M المرتبطة بالكمون , وقمنا بحساب المحدد من أجل حالة السبين صفر (المصفوفة β رتبة 5×5) .

الكلمات المفتاحية غير محلي , دالة قرين.

I- Introduction

We know that the relativistic particles of spin 0 are described by the equation of Klein Gordon (KG) and that the main defect is an undefined positive density ρ and that the particles of spin 1/2 are described by the Dirac equation obtained by making space and time play the same role. The Dirac equation is a matricial type and has a linear form and the density ρ in this case is positive,. The importance of this equation resides mainly in the prediction of the existence of antiparticles.
There is, however, another relativistic equation where the space and time play the same role and resembles to that of Dirac:it is Duffin Kemmer-Petiau (DKP) equation [1], [2], [3] which is reserved for the description of the motion of spin-0 and spin-1 particles. For the case of spin 0, the two equations DKP and KG in some situations may give different results [4], [5]. Thus, it has been shown for the meson - noyau reactions that the adjustment of the theoretical results with respect to the experimental results is better for the DKP equation than for the KG equation [6].
Recall that the DKP equation is of the matricial type and has a certain resemblance to that of Dirac where time and space play the same role, and where the Dirac matrices γ^μ are replaced by the matrices β^μ but obeying the following relations

$$\beta^\mu\beta^\nu\beta^\lambda+\beta^\lambda\beta^\nu\beta^\mu=g^{\mu\nu}\beta^\lambda+g^{\nu\lambda}\beta^\mu. \qquad (1)$$

In the presence of an interaction, this DKP equation has the following form

$$\left(i\beta^\mu\partial_\mu-m\right)\Phi(x,t)+V\Phi(x,t)=0. \qquad (2)$$

Where $\mu=0,1$ i.e D =(1+1)

In this paper, it is proposed to use interactions of non-local and separable type [7] [8] for obtaining the

© Université des Frères Mentouri Constantine 1, Algérie, 2016

solution of the DKP equation. In the non-relativistic case, it is known that non-local interactions have been wide

$\widehat{V} = M|v><v|$ used in nuclear physics. We choose the following simple form for the interaction in question

$$\widehat{V} = M|v><v| \,, \qquad (3)$$

where M is a certain matrix .
In representation of coordinates we have

$$<x'|\widehat{V}|x>= M <x'||v><v|x>$$

i.e. a separable form in x and x' .Its action on the wave function is defined by

$$V\Phi(x,t) = Mv(x)\int_{+\infty}^{-\infty} dx' v^*(x')\Phi(x',t). \qquad (4)$$

where we can see through the integral that the interaction depends on the wave function not only of a time but of the entire space.

II-Determination of $\mathbf{G_0(x_b, x_a, \mathcal{E})}$ and of $\mathbf{G(x_b, x_a, \mathcal{E})}$

Let us start with the free DKP equation ($V = 0$)

$$(i\beta^0\partial_0 + i\beta^1\partial_1 - m)\Psi(x,t) = 0 \quad . \qquad (5)$$

Where the β obey the following relationships

$$\beta^\mu\beta^\nu\beta^\lambda + \beta^\lambda\beta^\nu\beta^\mu = g^{\mu\nu}\beta^\lambda + g^{\nu\lambda}\beta^\mu, \qquad (6)$$

First, let us put $\hat{\not{p}}=\beta^\mu\widehat{p_\mu}$ and multiply by $\widehat{p_\mu}$

$$\hat{\not{p}}\beta^\nu\beta^\lambda + \beta^\lambda\beta^\nu\hat{\not{p}} = \hat{p}^\nu\beta^\lambda + g^{\nu\lambda}\hat{\not{p}} \,, \qquad (7)$$

And then by p_ν , and by p_λ

$$\hat{\not{p}}\hat{\not{p}}\hat{\not{p}} + \hat{\not{p}}\hat{\not{p}}\hat{\not{p}} = \hat{p}^2\hat{\not{p}} + \hat{p}^2\hat{\not{p}} \,, \qquad (8)$$

We obtain the following property, useful for the following

$$\hat{\not{p}}^3 = \hat{p}^2\hat{\not{p}} \,, \qquad (9)$$

Where it may be noted that $\hat{p}^2$ is without matrix.

In the presence of the interaction V, The DKP equation becomes

$$\left(i\beta^\mu\not{\partial}_\mu - m\right)\Psi = -\widehat{V}\Psi \,, \qquad (10)$$

To obtain its solution, we proceed as follows
$a -$ We first solve the DKP equation for a free particle or without interaction

$$\left(i\beta^\mu\not{\partial}_\mu - m\right)\Phi_0 = 0 \quad , \qquad (11)$$

$b -$ We determine the solution of free Green function

$$(i\beta^0\not{\partial}_0{}' + i\beta^1\not{\partial}_1{}' - m)G_0(x',t';x,t) = \delta(t'-t)\delta(x'-x) \quad , \qquad (12)$$

Then, the solution of DKP eq. with interaction is deduced from a and b. It is given by

$$<x||\Psi> = <x||\Phi_0> - <x|G_0\widehat{V}|\Psi> \,,$$

$$\Psi(x) = \Phi_0\,(x) - \int dx' G_0(x,x';E) <x'|\widehat{V}|\Psi> \qquad (13)$$

Let us first determine the Green function $G_0(x',x;E)$ which is connected to $G_0(x',t';t,x)$ by

$$G_0(x',t';t,x) = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} G_0(E,p)e^{-i[E(t'-t)-p(x'-x)]}$$

$$= \int \frac{dE}{2\pi} e^{-iE(t'-t)} G_0(x',x;E) \qquad (14)$$

reminding the passage that

$$\delta(t'-t) = \int \frac{dE}{2\pi} e^{-iE(t'-t)}. \qquad (15)$$

Thus we have respectively

$$(i\beta^0\not{\partial}_0{}' + i\beta^1\not{\partial}_1{}' - m)\int \frac{dE}{2\pi} e^{-iE(t'-t)} G_0(x',x;E)$$

$$= \delta(x'-x)\int \frac{dE}{2\pi} e^{-iE(t'-t)} \,, \qquad (16)$$

$$(i\beta^0 E + i\beta^1\not{\partial}_1{}' - m)\int \frac{dp}{2\pi} G_0(E,p)e^{-ip(x'-x)}$$

$$= \int \frac{dp}{2\pi} e^{-ip(x'-x)} \quad , \qquad (17)$$

And by identification

$$(\beta^0 E - \beta^1\hat{p} - m)G_0(E,p) = I \,, \qquad (18)$$

$$G_0(E,p) = \frac{I}{\beta^0 E - \beta^1\hat{p} - m} \quad , \qquad (19)$$

Or symbolically

$$G_0 = \frac{I}{\hat{\not{p}} - m} \quad , \qquad (20)$$

Having found G_0, modify its expression by multiplying by $\left(\frac{\widehat{\not{P}}^2}{m} + \hat{\not{P}}\right)$, we have

$$G_0 = \frac{I}{\left(\frac{\widehat{\not{P}}^2}{m} + \hat{\not{P}}\right)(\hat{\not{P}} - m)}\left(\frac{\widehat{\not{P}}^2}{m} + \hat{\not{P}}\right)$$

$$= \frac{I}{(\frac{\hat{P}^2}{m} - m)\hat{\not{P}}}\left(\frac{\widehat{\not{P}}^2}{m} + \hat{\not{P}}\right) \,, \qquad (21)$$

In this expression, note that the denominator still contains matrices as $\hat{\not{P}}$, we have

$$\not{p}G_0 = mG_0 + I$$
$$= \frac{I}{\left(\frac{P^2}{m}-m\right)}\left(\frac{\not{P}^2}{m}+\not{P}\right), \quad (22)$$

then, finally

$$G_0 = \frac{I}{(P^2-m^2)}\left(\frac{\not{P}^2}{m}+\not{P}\right)-\frac{I}{m}\ , \quad (23)$$

in the configuration space, the Free Green function is written

$$G_0(x',x;E) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi}\frac{e^{-ip(x'-x)}}{(P^2-m^2)}\left(\frac{\not{p}^2}{m}+\not{p}\right)-\frac{\delta(x'-x)}{m} \quad (24)$$

It is clear that the denominator vanishes when $P^2 - m^2 = E^2 - p^2 - m^2 = 0$, That is to say for $k = \pm\sqrt{E^2-m^2} =$ (2 poles)

Let's develop the integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi}\frac{e^{-ip(x'-x)}}{(P^2-m^2)}\left(\frac{\not{P}^2}{m}+\not{P}\right) =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi}\frac{e^{-ip(x'-x)}}{E^2-(p^2+m^2-i0)}\left(\frac{(E\beta^0-p\beta^1)^2}{m}+E\beta^0 - p\beta^1\right). \quad (25)$$

And use the decompositions

$$\frac{1}{E^2-(p^2+m^2)+i0} = \frac{1}{-p^2+k^2+i0}$$
$$= -\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{p-k}-\frac{1}{p+k}\right). \quad (26)$$

$$\frac{p}{E^2-(p^2+m^2)+i0} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-k}+\frac{1}{p+k}\right). \quad (27)$$

As the integration results are simple

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi}\frac{e^{-ip(x'-x)}}{p-k} = i\theta(x'-x)e^{ik(x'-x)}\ , \quad (28)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi}\frac{e^{-ip(x'-x)}}{p+k} = -i\theta(x-x')e^{-ik(x'-x)}\ , (29)$$

Then, the free Green function is finally the following

$$G_0(x',x;E) =$$
$$-\frac{\beta^{12}+I}{m}\delta(x'-x)-\frac{i}{2k}\theta(x'-x)e^{ik(x'-x)}\left(\frac{\not{K}^2}{m}+\not{K}\right)$$
$$-\frac{i}{2k}\theta(x-x')e^{-ik(x'-x)}\left(\frac{\not{K}^2}{m}+\not{K}\right)_{k\to -k}\ , \quad (30)$$

where $K^\mu = (E,k)$

Let's move on to the general solution of the DKP equation. First, symbolically we have

$$|\Psi> = |\Phi_0> - G_0(E)M|v><v||\Psi>,$$

Multiplying at the left by $<v|$, we get

$$<v||\Psi> = <v||\Phi_0> - <v|G_0(E)M|v><v||\Psi>,$$

Or

$$(I + <v|G_0(E)M|v>)<v||\Psi> = <v||\Phi_0>. (31)$$

This allows us to

$$<v||\Psi> = \frac{I}{I+<v|G_0(E)M|v>}<v||\Phi_0>. \quad (32)$$

Now, we have

$$\Gamma = <v|G_0(E)M|v>, \quad (33)$$

where

$$|\Psi> = |\Phi_0> - G_0(E)M|v>\frac{I}{I+\Gamma}<v||\Phi_0>, (34)$$

and in terms of wave function

$$\Psi(x) = \Phi_0(x)$$
$$-\int dy G_0(x,y,E)Mv(y)\ \frac{I}{I+\Gamma}\int dz v(z)\Phi_0(z). (35)$$

Hence

$$\Gamma = <v|G_0(E)M|v>$$
$$= \int dx'dx G_0(x',x;E)Mv(x')v(x) \quad (36)$$

It is clear that the expression $I + \Gamma = I + <v|G_0(E)M|v>$ in the denominator of the wave function is a matrix and that $\frac{I}{I+\Gamma}$ its inverse is also a matrix. We know that in order to inverse a matrix it is necessary to pass by the determinant and finally the spectrum of the energies is given by the following equation

$$Det(I+\Gamma) = 0. \quad (37)$$

It remains for us to fix the matrix M by using relativistic invariance considerations.

For the following simple choice

$$M = h\beta^1, \quad (38)$$

And after calculating the determinant in the case of the spin 0 where the matrices are of dimension 5×5

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

We find the following value for the energy

$$E^2 = -\frac{m^2}{4J^2h^2}. \tag{39}$$

where

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{ikx'} \vartheta(x') \int_{-\infty}^{x'} dx\, e^{-ikx} \vartheta(x), (40)$$

$$J^* = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ikx'} \vartheta(x') \int_{-\infty}^{x'} dx\, e^{ikx} \vartheta(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{ikx'} \vartheta(x') \int_{-\infty}^{x} dx\, e^{-ikx} \vartheta(x),$$

Note that J is real if k has the form $k = i\rho$, that is to say pure imaginary. As

$E^2 = k^2 + m^2 = -\rho^2 + m^2 > 0$ then $\rho^2 < m^2$

Let us distinguish the two cases

-Case 1: if h is real, then $E = \pm i \frac{m}{2Jh}$ = pure imaginary. In this case there are no linked states.

-Case 2 : if h= pure imagimary $= ia$, then $E^2 = \frac{m^2}{4J^2a^2}$ and $E^2 = \pm \frac{m}{2Ja}$ In this case there are two bounded states with the condition $-m < E = \pm \frac{m}{2Ja} < m$.

CONCLUSION

We have shown for a non-local and separable potential how to obtain analytically the energy spectrum relative to particles of spin 0 and described by the DKP equation. For the case of spin 1, the matrices of 10×10 order must be used for the matrices $\beta^0 and\ \beta^1$. The result can be found elsewhere.

REFERENCES

[1]- Ricardo Ignacio Alvarez del Castillo Astiazaran. The Kemmer equation for pionnucleus scattering. Master's thesis, McGill University . Canada, 1991.

[2]- R. J. Duffin. On the characteristic matrices of covariant systems. Phys. Rev, 54(111), 1938.

[3]- G. Petiau. Acad. R. Belg. Cl. Sci. Mem. Collect, 18 , 16, 1936.

[4]- R. F. Guertin and T. L. Wilson. Noncausal propagation in spin-0 theories with external field interactions, Phys. Rev. D, 15, 1518, 1977.

[5]- B. Vijayalakshmi, M. Seetharaman, and P. M. Mathews. Consistency of spin-1 theories in external electromagnetic fields, J. Phys. A Math. Gen, 12(5), 665,1979.

[6]- B. C. Clark, S.Hama, G. R. Kälbermann, R. L.Mercer, and L.Ray. Relativistic impulse approximation for meson-nucleus scattering in the Kemmer-Duffin-Petiau formalism, Phys. Rev. Lett., 55 , 592, 1985.

[7] M. G. Calkin and D. Kiang ,Y. Nogami, Phys.Rev, 38, 1076, 1988.

[8] Yoshio Yamaguhi , Phys. Rev. 95, 6 , 1954.

تأثير تفاعل غير محلي و منفصل على عملية إنشاء ازواج الجسيمات

ملخص

تـم حسـاب احتمـال خلـق الأزواج لمعادلـة ديـراك عـن طريـق كمـون منفصـل و غيـر محلـي مـن نـوع مصـفوفي اتباعـا لمقاربـة شـوينغر, لقـد وجـدنا أن هـذا الاحتمـال معـدوم. كحالـة خاصـة، اعتبرنـا أن الكمـون δ منفصـل. أيضـا، معادلـة ديفـان-كيميـر-بيتيـو الواصـفة لجزيئـات ذات سـبين-0 تـم حلهـا مـن أجـل نفـس الكمـون عـن طريـق تحديـد دالـة غـرين الحـرة. و هكـذا اثبتنـا أن طيـف الطاقـة يـتم الحصـول عليـه مـن حسـاب المحـدد و كمثال نختار شكلا بسيط للمصفوفة M المرتبطة بالكمون.

<u>الكلمات المفتاحية</u> خلق الأزواج ,معادلة ديراك , الفعل الفعال كمون غير محلي ,معادلة DKP

Efect of non-local and separable interaction on the process of particle's pair creation

Abstract

The probability of pair creation of the Dirac equation by a separable and non-local potential of the matrix type is calculated as follows the Schwinger approach. It was found that this probability was zero. In a particular case, the potential δ is considered separable. Also, the Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) equation describing the spin-0 particles is solved for the same interaction via the determination of the free Green function. Thus, it has been shown that the spectrum of energies is obtained from the calculation of the determinant and as illustration we have chosen a simple form for the matrix M relative to the interaction.

Keywords : pair creation , Dirac equation , effective action , non local potential, DKP eqution

Résumé

La probabilité de création de paire de l'équation de Dirac par un potentiel séparable et non local de type matriciel est calculé comme suit l'approche de Schwinger.On a constaté que cette probabilité était nulle. Dans un cas particulier, on considère le potentiel δ séparable. Aussi, l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) décrivante les particules du spin-0 est solutionnée pour la même interaction via la détermination de la fonction de Green libre. C'est ainsi on a été montré que le spectre des énergies s'obtient à partir du calcul du déterminant et comme illustration on a choisi une forme simple pour la matrice M relative à l'interaction.

Mots clés création de paire , équation de Dirac , action effective , potentiel non local , équation de **DKP**