

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES FRERES MENTOURI CONSTANTINE 1
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° de Série :.....

N° d'ordre :.....

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de Doctorat en Sciences en Physique

Spécialité : Physique Energétique

Option : Photothermique

THEME

Simulation numérique des transferts de chaleur et de masse en milieux poreux saturés de fluide dans différents espaces annulaires

PAR

BOULECHFAR Hichem

Soutenue le : 27/11/2016

Devant le jury :

Présidente :	Mme	A. CHAKER	Professeur	Univ. des Frères Mentouri Constantine 1
Rapporteur :	Mr	M. DJEZZAR	Professeur	Univ. des Frères Mentouri Constantine 1
Examineurs :	Mr	S. LAOUAR	M.C.A	Univ. 20 Août 1955 Skikda
	Mr	A. RAHMANI	M.C.A	Univ. Oum El Bouaghi

A la mémoire de mon petit ange Nouha.

A mes parents

A mon épouse et mes filles, Lyna et Rihem

A tous les membres de ma famille, grands et petits

A tous mes amis.

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier très chaleureusement et à exprimer toute ma gratitude à mon directeur de thèse, Professeur **Mahfoud DJEZZAR**, pour ses efforts, ses orientations ainsi que la qualité du travail qu'il m'a inculqué, sans oublier son temps précieux ainsi que sa disponibilité permanente, sa contribution primordiale et ses idées originales qui ont servi à enrichir le contenu de cette thèse.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à Madame **Abla CHAKER**, Professeur à l'Université des Frères Mentouri Constantine 1, qui a bien voulu présider mon jury de thèse, malgré ses nombreuses occupations.

Je remercie Monsieur **Salah LAOUAR**, Maître de Conférences à l'Université 20 Août 1955 Skikda et Monsieur **Ahmed RAHMANI**, Maître de Conférences à l'Université de Oum El Bouaghi, qui m'ont fait l'honneur d'examiner cette thèse et de participer à mon jury de soutenance, je leur adresse ma sincère gratitude.

Tous mes remerciements également, à toute personne ayant aidé de près ou de loin à l'achèvement de ce travail.

Nomenclature

Lettres latines :

a	Diffusivité thermique	m^2/s
A_1	Grand axe du cylindre elliptique intérieur	m
a_1	Demi axe du cylindre elliptique intérieur, $a_1 = A_1/2$	m
A_2	Grand axe du cylindre elliptique extérieur	m
a_2	Demi axe du cylindre elliptique extérieur, $a_2 = A_2/2$	m
B_1	Petit axe du cylindre elliptique intérieur	m
b_1	Demi axe du cylindre elliptique intérieur, $b_1 = B_1/2$	m
B_2	Petit axe du cylindre elliptique extérieur	m
b_2	Demi axe du cylindre elliptique extérieur, $b_2 = B_2/2$	m
c	Constante définie dans le système de coordonnées elliptiques	m
C_p	Chaleur massique à pression constante	$J/kg.K$
C	Concentration massique	kg/m^3
C_1	Concentration à la paroi intérieure	kg/m^3
C_2	Concentration à la paroi extérieure	kg/m^3
D	Diffusivité massique	m^2/s
Da	Nombre de Darcy $Da = \frac{K}{c^2}$	
e_1	Excentricité de l'ellipse interne, $\frac{\sqrt{A_1^2 - B_1^2}}{A_1}$	
e_2	Excentricité de l'ellipse externe, $\frac{\sqrt{A_2^2 - B_2^2}}{A_2}$	
g	Accélération de la pesanteur	m/s^2
Gr	Nombre de Grashof	
h	Coefficient métrique dimensionnel	m
H	Coefficient métrique adimensionnel	
j	Densité de flux de matière	$mol.m^{-2}.s^{-1}$
K	Perméabilité du milieu poreux	m^2
Le	Nombre de Lewis, $[= a/D]$	
N	Rapport de flottabilités, $[= \beta c \Delta C / \beta_T \Delta T]$	
Nu	Nombre de Nusselt local	
\overline{Nu}	Nombre de Nusselt moyen	
P	Pression	N/m^2
Pr	Nombre de Prandtl	

q	Densité de flux de chaleur	$W.m^{-2}$
Ra	Nombre de Rayleigh, [=Gr.Pr]	
Ra_m	Nombre de Rayleigh-Darcy, [=Ra.Da]	
Sh	Nombre de Sherwood Local	
\overline{Sh}	Nombre de Sherwood moyen	
S_Φ	Terme de source figurant dans l'équation 3.1	
t	Temps	s
T	Température du fluide	K
T_0	Température de référence	K
T_1	Température de la paroi interne	K
T_2	Température de la paroi externe	K
u	Composante de la vitesse suivant x	m/s
v	Composante de la vitesse suivant y	m/s
U_η	Composante de la vitesse suivant la direction η	m/s
V_θ	Composante de la vitesse suivant la direction θ	
\vec{V}	Vecteur vitesse	m/s
x, y, z	Coordonnées cartésiennes	m

Lettres grecques :

α	Angle d'inclinaison	
β_C	Coefficient d'expansion massique	$m^3.kg^{-1}$
β_T	Coefficient d'expansion thermique	K^{-1}
λ	Conductivité thermique	$W/m.K$
μ	Viscosité dynamique	$kg.m^{-1}.s^{-1}$
ν	Viscosité cinématique	m^2/s
ε	Porosité	
σ_T	Facteur de la capacité thermique	
ΔC	Ecart de concentration, [=C ₁ -C ₂]	kg/m^3
ΔT	Ecart de température, [=T ₁ -T ₂]	K
ρ	Masse volumique du fluide	kg/m^3
ρ_0	Masse volumique du fluide à la température de référence	kg/m^3
ψ	Fonction de courant	m^2/s
η, θ	Coordonnées elliptiques	
Φ	Fonction générale figurant dans l'équation 3.1	

Indices :

1	Interne
2	Externe
f	Fluide
p	Poreux
η	Suivant la coordonnée η
θ	Suivant la coordonnée θ

Exposants :

$+$	Paramètres adimensionnels
-----	---------------------------

TABLE DES FIGURES

Figure 1.1 : Convection naturelle dans l'atmosphère (Cellules de Hadley).....	5
Figure 1.2 : Exemple d'une centrale thermique solaire avec tubes cylindriques concentriques....	6
Figure 1.3 : Le transfert de chaleur et de matière par convection à l'intérieur de la terre.....	7
Figure 1.4 : Exemple de capteur solaire à caloduc.....	7
Figure 1.5 : Schéma de principe du caloduc.....	8
Figure 2.1 : Géométrie du système.....	18
Figure 2.2 : Schéma des coordonnées elliptiques.....	23
Figure 3.1 : Domaine physique et domaine de calcul.....	30
Figure 3.2 : Représentation d'un volume-fini typique avec son voisinage dans le domaine de calcul.....	31
Figure 3.3 : Représentation schématique des nœuds principaux et aux interfaces dans le maillage.....	37
Figure 4.1.a : Variation de la valeur maximale de la fonction de courant en fonction du maillage pour $e_1=0.75$, $e_2=0.5$, $N=0$ et $\alpha=0^\circ$	49
Figure 4.1.b : Variation du nombre de Nusselt moyen sur la paroi interne en fonction du maillage pour $e_1=0.75$, $e_2=0.5$, $N=0$ et $\alpha=0^\circ$	49
Figure 4.1.c : Variation de la valeur maximale de la fonction de courant en fonction du maillage pour $e_1=0.75$, $e_2=0.5$, $N=0$ et $\alpha=45^\circ$	50
Figure 4.1.d : Variation du nombre de Nusselt moyen sur la paroi interne en fonction du maillage pour $e_1=0.75$, $e_2=0.5$, $N=0$ et $\alpha=45^\circ$	50

Figure 4.2.a : Variation de la valeur maximale de la fonction de courant en fonction du maillage pour $e_1=0.75$, $e_2=0.5$, $N=1$, $Le=0.1$ et $\alpha=0^\circ$	51
Figure 4.2.b : Variation de la valeur maximale de la fonction de courant en fonction du maillage pour $e_1=0.75$, $e_2=0.5$, $N=1$, $Le=0.1$ et $\alpha=45^\circ$	51
Figure 4.2.c : Variation du nombre de Nusselt moyen sur la paroi interne en fonction du maillage pour $e_1=0.75$, $e_2=0.5$, $N=1$, $Le=0.1$ et $\alpha=0^\circ$	52
Figure 4.2.d : Variation du nombre de Sherwood moyen sur la paroi interne en fonction du maillage pour $e_1=0.75$, $e_2=0.5$, $N=1$, $Le=0.1$ et $\alpha=0^\circ$	52
Figure 4.2.e : Variation du nombre de Nusselt moyen sur la paroi interne en fonction du maillage pour $e_1=0.75$, $e_2=0.5$, $N=1$, $Le=0.1$ et $\alpha=45^\circ$	53
Figure 4.2.f : Variation du nombre de Sherwood moyen sur la paroi interne en fonction du maillage pour $e_1=0.75$, $e_2=0.5$, $N=1$, $Le=0.1$ et $\alpha=45^\circ$	53
Figure 4.3 : Isocourants et isothermes pour $Ra_m=70$, un rapport de rayon $R=1.2$ avec $Pr = 7$	54
Figure 4.4 : Comparaison qualitative des isocourants et isothermes pour $Ra_m=200$ $a_2/a_1=1.1$ and $b_1/a_1=0.1$ et $Pr=7$	55
Figure 4.5 : Isocourants et isothermes pour $R=2$, $Ra_m = 25$, $N=1$ et $Pr=7$	56
Figure 4.6 : Isothermes et lignes de courant pour $e_1=0,95$, $e_2=0,8$ et $\alpha=0$	60
Figure 4.7 : La variation du nombre de Nusselt local sur la paroi interne en fonction de la position azimutale θ , pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh-Darcy Ra_m	61
Figure 4.8 : Isothermes et lignes de courants pour $Ra_m = 500$, $e_1 = 0,95$ et $e_2 = 0,8$	63
Figure 4.9 : La variation du nombre de Nusselt local sur la paroi interne en fonction de la position azimutale θ , pour différentes valeurs de l'angle de l'inclinaison α	64

Figure 4.10 : Isothermes et lignes de courant pour $Ra_m = 500$ et $e_2 = 0,5$	66
Figure 4.11 : La conductivité thermique équivalente globale sur la paroi interne en fonction de l'excentricité e_1	67
Figure 4.12 : Isothermes, isoconcentrations et lignes de courant $Le=0.1$, $e_1=0.9$, $e_2=0.5$ et $\alpha=0^\circ$	71
Figure 4.13 : Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi interne en fonction de la position azimutale pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh-Darcy Ra_m et pour $N=2$, $Le=0.1$	72
Figure 4.14 : Variation du nombre de Sherwood local sur la paroi interne en fonction de la position azimutale pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh-Darcy Ra_m et pour $N=2$, $Le=0.1$	73
Figure 4.15 : La variation des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens sur la paroi interne en fonction du nombre de Rayleigh-Darcy Ra_m pour $N=2$, $Le=0.1$	73
Figure 4.16 : Isothermes, isoconcentrations et lignes de courant pour $Ra_m=250$, $e_1=0.9$, $e_2=0.5$ et $N=2$	76
Figure 4.17 : Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi interne en fonction de la position azimutale pour différentes valeurs du nombre de Lewis Le et pour $Ra_m=250$, $e_1=0.9$, $e_2=0.5$ et $N=2$	77
Figure 4.18 : Variation du nombre de Sherwood local sur la paroi interne en fonction de la position azimutale pour différentes valeurs du nombre de Lewis Le et pour $Ra_m=250$, $e_1=0.9$, $e_2=0.5$ et $N=2$	78
Figure 4.19 : Variation des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens sur la paroi interne en fonction du nombre de Lewis pour $Ra_m=250$, $e_1=0.9$, $e_2=0.5$ et $N=2$	78
Figure 4.20 : Isothermes, isoconcentrations et lignes de courant $Ra_m=250$, $e_1=0.9$, $e_2=0.5$, $Le=1$ et $N=2$	81

Figure 4.21 : La variation des nombres de Nusselt et de Sherwood locaux sur la paroi interne en fonction de la position azimutale pour différentes de l'inclinaison α et pour $Ra_m=250, e_1=0.9, e_2=0.5, N=2$ et $Le=1$	82
Figure 4.22 : La variation des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens sur la paroi interne en fonction l'inclinaison α pour $Ra_m=250, e_1=0.9, e_2=0.5, N=2$ et $Le=1$	82
Figure 4.23 : Isothermes, isoconcentrations et lignes de courant $Ra_m=250, e_2=0.5, N=2, Le=1$ et $\alpha=0^\circ$	84
Figure 4.24 : Isothermes, isoconcentrations et lignes de courant $N=-2, Le = 0.1, e_1=0.9, e_2=0.5$ et $\alpha=0^\circ$	87
Figure 4.25 : La variation du nombre de Nusselt local sur la paroi interne en fonction de la position azimutale (θ), pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh-Darcy (Ra_m) et pour $N=-2, Le = 0.1, e_1=0.9, e_2=0.5$ et $\alpha=0^\circ$	88
Figure 4.26 : La variation du nombre de Sherwood local sur la paroi interne en fonction de la position azimutale (θ), pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh-Darcy (Ra_m) et pour $N=-2, Le = 0.1, e_1=0.9, e_2=0.5$ et $\alpha=0^\circ$	88
Figure 4.27 : La variation des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens sur la paroi interne en fonction du nombre de Rayleigh-Darcy Ra_m pour $N=-2, Le=0.1$	89
Figure 4.28 : Isothermes, isoconcentrations et lignes de courant $Ra_m= 25, N=-5, e_1=0.9, e_2=0.5$ et $\alpha=0^\circ$	91
Figure 4.29 : La variation du nombre de Nusselt local sur la paroi interne en fonction de la position azimutale (θ), pour différentes valeurs du nombre de Lewis (Le) et pour $Ra_m= 25, N=-5, e_1=0.9, e_2=0.5$ et $\alpha=0^\circ$	92
Figure 4.30 : La variation du nombre de Sherwood local sur la paroi interne en fonction de la position azimutale (θ), pour différentes valeurs du nombre de Lewis (Le) et pour $Ra_m= 25, N=-5, e_1=0.9, e_2=0.5$ et $\alpha=0^\circ$	93

Figure 4.31 : La variation des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens sur la paroi interne en fonction du nombre de Lewis Le pour $Ra_m=25$, $N=-2$, $e_1=0.9$, $e_2=0.5$ et $\alpha=0^\circ$	93
Figure 4.32 : Isothermes, isoconcentrations et lignes de courant $Ra_m= 100$, $N=-2$, $Le=1$, $e_1=0.9$ et $e_2=0.5$	96
Figure 4.33 : La variation des nombres de Nusselt et de Sherwood locaux sur la paroi interne en fonction du nombre de l'angle d'inclinaison pour $Ra_m=100$, $N=-2$, $Le=1$, $e_1=0.9$ et $e_2=0.5$	97
Figure 4.34 : La variation des nombres de Nusselt et Sherwood moyens sur la paroi interne en fonction du nombre de l'angle d'inclinaison pour $Ra_m=100$, $N=-2$, $Le=1$, $e_1=0.9$ et $e_2=0.5$	97
Figure 4.35 : Isothermes, isoconcentrations et lignes de courant $Ra_m= 25$, $N=-2$, $Le=1$, $e_2=0.5$ et $\alpha=0^\circ$	99
Figure 4.36 : Isothermes, isoconcentrations et lignes de courant pour le cas opposant avec $N<0$, $Ra_m= 25$, $Le=1$, $e_1=0.9$, $e_2=0.5$ et $\alpha=0^\circ$	101
Figure 4.37 : Isothermes, isoconcentrations et lignes de courant pour le cas coopérant avec $N>0$, $Ra_m= 25$, $Le=1$, $e_1=0.9$, $e_2=0.5$ et $\alpha=0^\circ$	102
Figure 4.38 : La variation du nombre de Nusselt moyen sur la paroi interne en fonction du rapport de flottabilités (N) et pour différentes valeurs du nombre de Lewis (Le), $Ra_m=25$, $e_1=0.9$, $e_2=0.5$ et $\alpha=0^\circ$	104
Figure 4.39 : La variation du nombre de Sherwood moyen sur la paroi interne en fonction du rapport de flottabilités (N) et pour différentes valeurs du nombre de Lewis (Le), $Ra_m=25$, $e_1=0.9$, $e_2=0.5$ et $\alpha=0^\circ$	105

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1 : Coefficients de diffusion et Termes de source.....	32
Tableau 4.1: Effet du maillage sur les caractéristiques de l'écoulement pour le cas purement thermique avec $N=0$ et le cas thermosolutal avec $N=1$	48
Tableau 4.2: Comparaison quantitative avec les références [38], [44], [49], [50] et [60] du nombre de Nusselt moyen (\overline{Nu}_i) sur la paroi interne pour un rapport de rayon $R=2$ avec $Pr=7$	54
Tableau 4.3: Comparaison quantitative avec la référence [50] du nombre de Nusselt moyen (\overline{Nu}_i) sur la paroi interne pour un rapport de rayon $R=1.2$ avec $Pr=7$	55
Tableau 4.4: Comparaison quantitative avec la référence [50] du nombre de Nusselt moyen (\overline{Nu}_i) sur la paroi interne pour différents Ra_m avec $a_2/a_1=2$, $b_1/a_1=0.5$ et $Pr=7$	55
Tableau 4.5: Comparaison quantitative avec la référence [60] du nombre de Sherwood moyen (\overline{Sh}_i) sur la paroi interne pour un rapport de rayon $R=2$, $Le=1$, $N=1$ et $Pr=7$	56

TABLE DES MATIERES

DEDICACES	
REMERCIEMENTS	
NOMENCLATURE.....	i
TABLE DES FIGURES.....	iv
LISTE DES TABLEAUX.....	ix
TABLE DES MATIERES.....	x
INTRODUCTION GENERALE	01

CHAPITRE I: GENERALITES ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1 Généralités sur la convection naturelle.....	05
1.2 La convection naturelle double diffusive dans les espaces à géométries annulaires contenant des milieux poreux.....	06
1.3 Revue bibliographique.....	08
1.3.1 Convection naturelle dans les espaces annulaires.....	09
1.3.1.1 Espace annulaire cylindrique.....	09
1.3.1.2 Espace annulaire elliptique.....	11
1.3.2 Convection naturelle dans les espaces annulaires contenant un milieu poreux.....	12
1.3.2.1 Espace annulaire cylindrique.....	12
1.3.2.2 Espace annulaire elliptique.....	13
1.3.3 Convection naturelle bidiffusive dans les espaces annulaires remplis par un Milieu poreux.....	14
1.3.3.1 Espace annulaire vertical.....	14
1.3.3.2 Espace annulaire horizontal.....	15

CHAPITRE II: MODELES PHYSIQUE ET MATHEMATIQUE

2.1 Introduction.....	18
2.2 Description du problème.....	18

2.3 Les hypothèses simplificatrices.....	19
2.4 Modélisation mathématique.....	19
2.4.1 Formulation vectorielle.....	19
2.4.2 Formulation des équations dans les coordonnées cartésiennes.....	21
2.4.2.1 Elimination du terme de pression des équations du mouvement.....	21
2.4.3 Formulation des équations dans le système des coordonnées elliptiques.....	22
2.4.4 Les conditions aux limites.....	24
2.4.5 La forme adimensionnelle des équations du modèle mathématique.....	24
2.4.6 La forme adimensionnelle des conditions aux limites.....	26
2.4.7 Les coefficients d'échanges de chaleur et de masse.....	27
2.4.7.1 Les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux.....	27
2.4.7.2 Les nombres de Nusselt et de Sherwood moyens.....	28

CHAPITRE III: RESOLUTION NUMERIQUE

3.1 Introduction	30
3.2 La méthode des volumes finis.....	30
3.2.1 Représentation d'un volume de contrôle.....	30
3.3 Discrétisations des équations gouvernantes.....	31
3.3.1 Discrétisations de l'équation de continuité.....	32
3.3.2 Discrétisation de l'équation générale de transport.....	32
3.3.3 Discrétisations de l'équation de la chaleur.....	35
3.3.3.1 Discrétisations des conditions aux limites.....	39
3.3.4 Discrétisations de l'équation de concentration.....	39
3.3.4.1 Discrétisations des conditions aux limites.....	40
3.3.5 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement.....	41
3.3.5.1 Discrétisations des conditions aux limites.....	42
3.4 Discrétisation des composantes de la vitesse.....	42
3.5 L'algorithme de calcul.....	43
3.6 L'organigramme de calcul.....	45

CHAPITRE IV: RESULTATS ET DISCUSSIONS

4.1 Introduction.....	47
4.2 Etude du maillage.....	47
4.2.1 Représentation graphique du tableau 4.1.....	49
4.3 Validation numérique.....	54
4.3.1 Le cas de la convection naturelle purement thermique avec $N=0$	54
4.3.1.1 La configuration circulaire.....	54
4.3.1.2 La configuration elliptique.....	55
4.3.2 Le cas de la convection bidiffusive en mode coopérant avec $N=1$	56

Première partie des résultats : Convection naturelle purement thermique

4.4 Convection naturelle purement thermique avec $N=0$	58
4.4.1 Effet du nombre de Rayleigh-Darcy « Ra_m »	58
4.4.1.1 Les isotherme et les lignes de courant	58
4.4.1.2 Le nombre de Nusselt local.....	60
4.4.2 Effet de l'angle d'inclinaison « α »	61
4.4.1.1 Les isotherme et les lignes de courant	61
4.4.2.1 Le nombre de Nusselt local.....	64
4.4.3 Effet de l'excentricité de la paroi interne « e_1 »	64
4.4.3.1 Les isotherme et les lignes de courant	65
4.4.3.1 La conductivité thermique équivalente.....	66

Deuxième partie des résultats : Convection naturelle bidiffusive

4.5 Convection naturelle bidiffusive $N \neq 0$	69
4.5.1 Le cas coopérant de la convection naturelle bidiffusive $N > 0$	69
4.5.1.1 L'effet du nombre de Rayleigh-Darcy.....	69
4.5.1.1.1 Les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant.....	69
4.5.1.1.2 Les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux et moyens.....	72

4.5.1.2 L'effet du nombre de Lewis.....	74
4.5.1.2.1 Les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant.....	74
4.5.1.2.2 Les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux et moyens.....	76
4.5.1.3 L'effet de l'angle d'inclinaison.....	79
4.5.1.3.1 Les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant.....	79
4.5.1.3.2 Les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux et moyens	81
4.5.1.7 L'effet de l'excentricité de la paroi interne « e_1 ».....	83
4.5.2 Le cas opposant de la convection naturelle bidiffusive $N < 0$	85
4.5.2.1 L'effet du nombre de Rayleigh-Darcy.....	85
4.5.2.1.1 Les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant.....	85
4.5.2.1.2 Les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux et moyens.....	87
4.5.2.2 L'effet du nombre de Lewis.....	89
4.5.2.2.1 Les isothermes, les isocourants et les lignes de courant.....	89
4.5.2.2.2 Les nombres de Nusselt et Sherwood locaux et moyens.....	91
4.5.2.3 L'effet de l'angle d'inclinaison.....	94
4.5.2.3.1 Les isothermes, les isocourants et les lignes de courant.....	94
4.5.2.3.2 Les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux et moyens.....	96
4.5.2.7 L'effet de l'excentricité de l'ellipse interne « e_1 »	98
4.5.3 L'effet du rapport de flottabilités N sur la convection naturelle bidiffusive.....	100
4.5.3.1 Les isothermes, les isocourants et les lignes de courant.....	100
4.5.3.2 Variation des nombres de Nusselt et Sherwood moyens sur la paroi interne en fonction du rapport de flottabilités « N »	103
CONCLUSION GENERALE.....	105
ANNEXE.....	109
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	121
ملخص	
Abstract	
Résumé	

INTRODUCTION GENERALE

Les transferts couplés de chaleur et de masse ont suscité de nombreuses études notamment la convection naturelle double diffusive où une variété d'études théoriques, numériques et expérimentales ont traité ce phénomène dans différentes géométries pour le cas des milieux fluides et des milieux poreux saturés. L'étude de la convection naturelle double diffusive dans des espaces annulaires contenant un milieu poreux saturé de fluide est d'une importance fondamentale car de nombreuses applications sont souvent rencontrées dans des installations domestiques et industrielles, telles que l'extraction de l'énergie géothermique, la récupération du pétrole et du gaz, le stockage des déchets chimiques, les problèmes de sûreté dans le cas accidentel des réacteurs nucléaires, l'isolation thermique des bâtiments, les échangeurs de chaleur et les systèmes solaires thermiques.

Différentes géométries ont fait l'objet d'études considérables sur la convection naturelle, mais d'après la littérature disponible, nous pouvons affirmer que toutes les études publiées sur la convection naturelle double diffusive dans les milieux poreux saturés ont été limitées à des géométries simples comme des cavités rectangulaires ou carrées. En revanche, jusqu'à présent, les études sur la convection naturelle double diffusive dans des espaces annulaires elliptiques horizontaux contenant un milieu poreux saturé de fluide sont très rares.

L'importance de l'utilisation des conduits à géométrie annulaire elliptique est due essentiellement à leurs avantages dans l'industrie des échangeurs de chaleur ainsi que dans les installations solaires thermiques.

Dans la présente étude, nous nous sommes intéressés à la convection naturelle purement thermique et double diffusive dans un espace annulaire délimité par deux cylindres d'axes horizontaux de sections droites elliptiques, cet espace est rempli par un milieu poreux saturé de fluide. Dans ce travail, nous avons développé un code de calcul aux volumes finis afin de déterminer l'effet des différents paramètres sur la structure de l'écoulement, les distributions de la température et de la concentration ainsi que sur les taux de transfert de chaleur et de masse représentés respectivement par les nombres locaux et moyens de Nusselt et de Sherwood.

Le manuscrit de cette thèse est composé de quatre chapitres. Dans le premier chapitre, nous avons présenté des généralités sur la convection naturelle ainsi qu'une revue détaillée des travaux antérieurs qui ont traité la convection naturelle dans les milieux fluides puis dans les milieux poreux saturés de fluide en arrivant aux études qui ont traité la convection naturelle double diffusive dans les milieux poreux saturés de fluide et cela dans des géométries annulaires circulaires et elliptiques.

Le deuxième chapitre est dédié au modèle physique, on y présente les hypothèses simplificatrices, les équations en coordonnées cartésiennes, leurs conditions aux limites, leurs écritures en coordonnées elliptiques et également leurs adimensionalisations.

Dans le troisième chapitre, nous avons exposé la méthode des volumes finis utilisée pour la discrétisation des équations de la chaleur et d'espèces qui sont de type parabolique ainsi qu'une méthode aux différences centrées pour discrétiser l'équation de mouvement qui est de type elliptique. Les équations ainsi obtenues sont résolues par une méthode itérative avec une sous-relaxation successive.

Le quatrième chapitre qui est consacré aux résultats et leurs discussions, est divisé en deux parties, la première partie des résultats traite la convection naturelle purement thermique et la deuxième partie traite la convection naturelle double diffusive pour les deux cas, coopérant et opposant.

Nous terminons ce travail par une conclusion générale qui synthétise les principaux résultats.

CHAPITRE I :
GENERALITES ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1 Généralités sur la convection naturelle

En général, la convection peut être naturelle, forcée ou mixte et constitue avec la conduction thermique et le transfert radiatif, l'un des trois modes d'échange de chaleur entre deux systèmes donnés (physiques, chimiques ou biologiques). La convection naturelle se produit lorsqu'un gradient induit un mouvement dans le fluide. La masse volumique est en général fonction de la température et de la concentration et un gradient de température ou de concentration implique une différence de masse volumique au sein du fluide qui induit un mouvement de ces particules. De tels déplacements s'appellent des mouvements de convection. Ils sont à l'origine de certains phénomènes océanographiques (courants marins), géologiques (remontées de magma) et météorologiques comme par exemple les orages.

La convection naturelle autour de notre sphère terrestre, comme c'est illustré sur la figure 1.1, qui représente les cellules de **G. Hadley [1]** dans l'atmosphère, où la convection naturelle joue un rôle indispensable comme par exemple dans le cas de la pollution due aux gaz émis par les automobiles et les effluents industriels, qui doit être évacuée assez rapidement par les mouvements atmosphériques, sinon l'air deviendrait irrespirable.

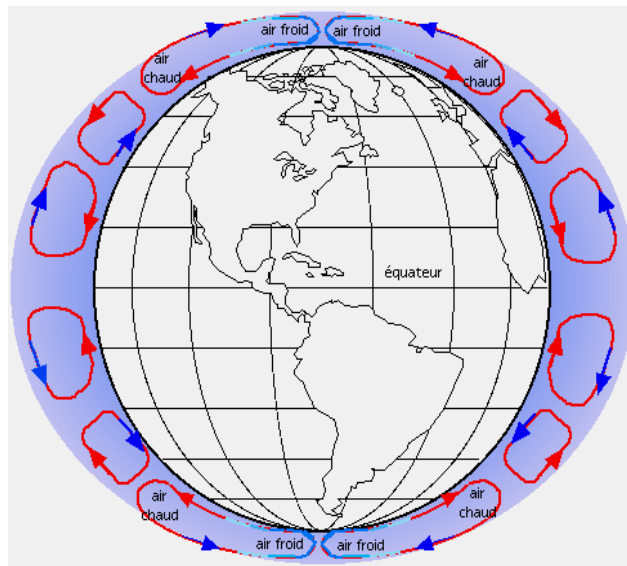


Figure 1.1 : Convection naturelle dans l'atmosphère (Cellules de Hadley)

(Source : <http://www.ffme.fr/fiches-ffme-techniques/page/dynamisme-general-de-l-atmosphere.html>)

Parce qu'en convection naturelle, les vitesses et les intensités de transfert sont généralement beaucoup plus faibles que celles observées en convection forcée. Donc, quand il est souhaitable de réduire au minimum les frais d'exploitation des installations thermiques, la convection naturelle est souvent préférable, ce qui explique l'intérêt considérable porté à ce phénomène dans les milieux fluides, comme dans les milieux poreux, et leurs applications sont telles que la récupération du pétrole, le stockage des produits d'agriculture, l'extraction de l'énergie géothermique, les problèmes de sécurité dans les réacteurs nucléaires, les centrales thermique - solaires montrée dans la figure 1.2 et les échangeurs de chaleur.



Figure 1.2 : Exemple d'une centrale thermique solaire avec tubes cylindriques concentriques
(<http://outilssolaires.com/developpement-durable/energie-solaire/centrales-thermiques>)

1.2 La convection naturelle double diffusive dans les espaces à géométries annulaires contenant des milieux poreux.

Depuis plus de deux décennies, un autre type de transfert convectif en milieux poreux ou fluides capte l'attention des scientifiques, c'est la convection double diffusive ou dite par fois thermosolutale qui se manifeste par la présence simultanée de deux gradients, de température et de concentration. Le phénomène de la double diffusion a été mis en évidence la première fois en 1959 par **H. Stommel et al. [2]** dans un cadre de recherche sur les phénomènes océanographiques, mais sa formulation théorique n'a été réalisée qu'en 1969 par **M.E. Stern [3]**.

Ce phénomène peut se produire dans les milieux fluides ou poreux, tels que les magmas, stellaires et planétaires, métaux liquides, océans, lacs et l'atmosphère. Une simulation numérique faite par **W.S. Kiefer et L.H. Kellogg [4]** montre la convection qui se produit dans le manteau de notre planète. Bien que la surface de la terre soit solide, son intérieur est souple et coule comme un liquide très visqueux. Ce mouvement, appelé convection du manteau illustré dans la figure 1.3, qui est le mécanisme d'entraînement pour la tectonique des plaques responsable de la production des tremblements de terre, des chaînes de montagnes et de volcans.

Les deux configurations géométriques que nous avons vues dans les figures (1.1) et (1.3) représentent des espaces annulaires elliptiques où les transferts de chaleur et de masse se manifestent à une échelle planétaire.

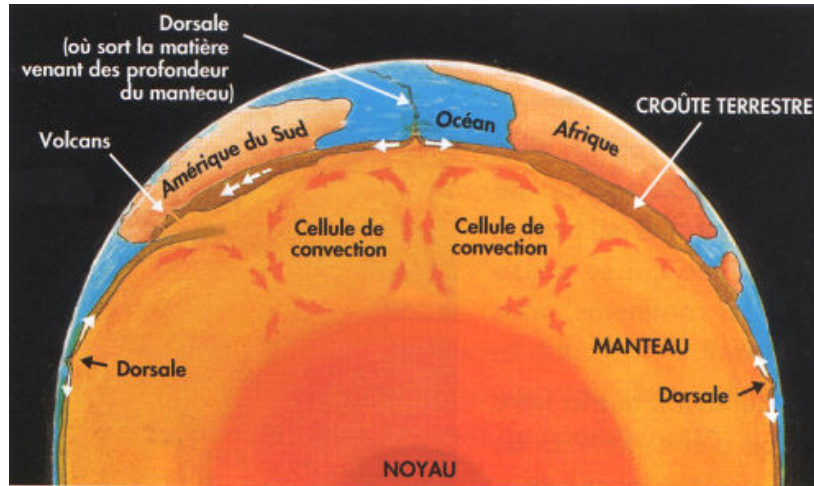


Figure 1.3 : Le transfert de chaleur et de matière par convection à l'intérieur de la terre
(Source : <http://www.icem-freinet.net/~btj/btjmag5/volcano.htm>)

Mais nous retrouvons également la convection naturelle double diffusive dans des applications industrielles comme par exemple les caloducs poreux de section annulaire cylindrique dans les installations des récepteurs solaires pour le chauffage domestique illustré par la figure 1.4.



Figure 1.4 : Exemple de capteur solaire à caloduc
(Source : <http://www.solarwaterheater.fr/2-3-heat-pipe-solar-collector.html>)

La figure 1.5 illustre un caloduc qui est généralement constitué par un tube métallique, formant une enceinte fermée le plus souvent cylindrique dont les parois intérieures peuvent comporter une structure poreuse saturée par un fluide caloporteur, généralement la matière poreuse confinée entre les deux parois du caloduc a pour but d'améliorer le transfert **R. A. Mahdi et al [5]**.

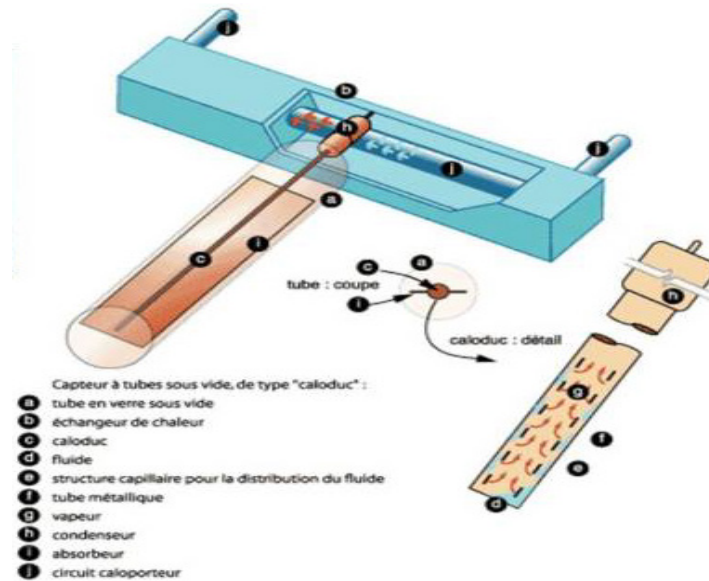


Figure 1.5 : Schéma de principe du caloduc

(Source : <http://uved.univ-perp.fr/module2/co/2-1-2-2-capteurs-solaires-sous-vide.html>)

1.3 Revue bibliographique

L'étude des transferts de chaleur et de masse par convection naturelle suscite toujours l'intérêt de nombreux scientifiques et industriels. Les recherches menées, dans ce domaine, s'étendent sur un peu plus d'un demi-siècle, ces recherches ont été précédées par de nombreuses études sur la convection naturelle suite à la découverte de ce phénomène par les expériences de **H. Bénard** [6] et l'analyse théorique de **L. Rayleigh** [7] au début du vingtième siècle.

La revue de littérature qui va suivre montre qu'il existe un nombre considérable de travaux théoriques, expérimentaux et numériques consacrés à l'étude des transferts de chaleur et de masse par convection naturelle dans des milieux poreux contenus dans des espaces annulaires entre deux cylindres circulaires ou elliptiques. Notre recherche bibliographique synthétisée est organisée en plusieurs parties, en respectant un sens chronologique croissant dans le but de voir l'évolution des différentes recherches dans cette thématique qui a suscité et suscite toujours une attention particulière due à son intérêt économique-industriel.

La première partie concerne la convection naturelle dans les milieux fluides à l'intérieur d'un espace annulaire entre deux cylindres, nous avons cité en premier lieu le cas des cylindres circulaires puis le cas de cylindres elliptiques. Une deuxième partie consacrée à la recherche sur la convection naturelle dans les milieux poreux contenus à l'intérieur d'un espace annulaire entre deux cylindres pour les deux cas circulaire et elliptique. La dernière partie est consacrée à la convection naturelle double diffusive ou dite thermosolutale dans les milieux poreux saturée de fluide dans des espaces annulaires entre deux cylindres circulaires ou elliptiques. Nous avons constaté qu'un grand nombre d'auteurs ont étudié ce phénomène dans l'espace annulaire cylindrique vertical représenté généralement par une forme rectangulaire, en revanche la

disposition horizontale représentée par un anneau cylindrique ou elliptique a suscité un intérêt particulier ces dernières années.

1.3.1 Convection naturelle dans les espaces annulaires

1.3.1.1 Espace annulaire cylindrique

Une des premières études bien documentées sur le transfert de chaleur dans des enceintes annulaires horizontales a été présentée par **W. Beckmann [8]** en 1931. Il a effectué des mesures expérimentales pour trois gaz différents, de l'air, H_2 et CO_2 , pour une large gamme du rapport de forme et du nombre de Grashof. Une contribution supplémentaire de cet auteur est son analyse fondamentale de ce problème, qui a conduit à la définition du rapport de conductivité effective adimensionnelle utilisé dans de nombreuses œuvres ultérieures. Il a également proposé une corrélation simple pour ses résultats. Plusieurs publications ultérieures ont soulevé des questions concernant l'exactitude des mesures de **W. Beckmann**, en particulier dans le cas de l'air. Par exemple, après trente années **C.Y. Liu et al. [9]** ont attribué les erreurs de conduction axiales le long des parois du tube à **W. Beckmann** qui n'a pas employé une isolation thermique aux extrémités du tube. Ils démontrent que les effets de cette conduction axiale sont plus visibles lorsque la longueur du tube est faible par rapport à son diamètre. **M.R. Abbott [10]** a présenté une méthode numérique pour résoudre les équations de la convection naturelle laminaire stationnaire dans un anneau cylindrique concentrique étroit avec un axe horizontal.

U. Grigull et W. Hauf [11] ont mené une étude expérimentale du transfert de chaleur par convection naturelle dans des espaces annulaires cylindriques concentriques d'axes horizontaux. Ils ont visualisé la structure de l'écoulement et ont étudié également les caractéristiques de transfert de chaleur. **J. Prusa et L.S. Yao [12]** ont étudié numériquement l'écoulement laminaire par convection naturelle entre des cylindres horizontaux excentrés. Ils ont examiné l'effet de l'excentricité du système ainsi que la flottabilité du fluide. **T.H. Kuehn et R.J. Goldstein [13-17]** ont réalisé plusieurs travaux qui traitent la convection naturelle dans les espaces annulaires cylindriques centrés et excentrés. Une première recherche **[13]** a été consacrée à une étude expérimentale, théorique et numérique pour approfondir les connaissances existantes sur les distributions de vitesse et de température ainsi que les coefficients de transfert de chaleur locaux pour la convection naturelle, pour ce faire, ils ont utilisé une méthode aux différences finies, suivie d'une autre étude **[14]** dans laquelle ils ont présenté des corrélations pour les taux de transfert de chaleur par convection naturelle dans une enceinte cylindrique qui ont été obtenues en utilisant un modèle de conduction de la couche limite, une autre étude **[15]** a été consacrée à une investigation expérimentale, concernant la convection naturelle à travers un espace annulaire délimité par deux cylindres horizontaux isothermes excentrés, menée afin de déterminer l'influence de l'excentricité du système ainsi que celle du nombre de Rayleigh. Ils ont traité aussi le transfert de chaleur par convection naturelle laminaire dans un espace annulaire horizontal **[16]**, en résolvant les équations de Navier-Stokes et l'équation de l'énergie, et enfin dans une autre étude **[17]**, ils ont présenté une recherche numérique dans laquelle ils ont mis en évidence l'effet du nombre de Prandtl sur le transfert de chaleur par convection naturelle toujours

dans un espace annulaire cylindrique et concentrique. Quant à **D.N. Francis et al. [18]**, ils ont étudié le cas du transfert de chaleur par convection naturelle dans un espace entre deux cylindres concentriques. Ils ont utilisé un code de calcul CFD pour reproduire les résultats expérimentaux, numériques ainsi que les équations de corrélation développées par **T.H. Kuehn et R.J. Goldstein [13] et [14]**. **A. Passerini et al. [19]** ont fait une investigation dont l'objectif principal était d'entreprendre l'étude théorique du modèle mathématique le plus couramment utilisé pour la convection naturelle entre deux cylindres horizontaux coaxiaux, Tout d'abord, ils ont montré l'existence de solutions pour le problème instable, ceci d'une part, d'autre part, ils ont montré que pour tout nombre de Prandtl et pour l'inverse de l'entrefèr relatif de l'espace annulaire, l'existence et la stabilité d'une solution stationnaire est prouvée, à condition que le nombre de Rayleigh soit suffisamment faible. **P. Teertstra et al. [20]** ont développé un modèle analytique pour la convection naturelle bidimensionnelle dans l'espace annulaire formé par deux cylindres isothermes horizontaux concentriques. Le modèle est constitué d'une combinaison de trois solutions asymptotiques qui sont la limite de diffusion, la limite de la couche limite laminaire et la limite de la transition de l'écoulement. **Y. Shi et al. [21]** ont présenté un modèle aux différences finies avec la méthode de lattice-BGK, ils ont appliqué ce modèle pour simuler un transfert de chaleur par convection naturelle dans un espace annulaire cylindrique horizontal soumis à un gradient de température. **E.L.M. Padilla et al. [22]** ont étudié numériquement la convection naturelle pour des nombres de Rayleigh faibles et modérés et dans un espace annulaire cylindrique soumis à des températures uniformes. L'écoulement est présenté pour plusieurs nombres de Rayleigh, avec une analyse sur les taux de transfert de chaleur. Ils ont aussi fait une formulation tridimensionnelle du problème, qui leur a permis de quantifier les composantes axiales de la vitesse autour d'un nombre de Rayleigh de l'ordre de 10^5 . **A. Cheddadi et al. [23]** ont travaillé sur une méthode d'optimisation et de contrôle des transferts thermiques au sein d'un espace annulaire cylindrique avec des blocs chauffants, où l'écoulement de l'air est généré par la convection naturelle. Leur recherche est orientée vers la description et l'optimisation des différents effets thermoconvectifs, induits par la variation de la position angulaire de deux blocs chauffants au sein d'un espace annulaire entre deux cylindres coaxiaux, horizontaux et isothermes. **O.S. Azmir et C.S.N. Azwadi [24]** ont fait une étude numérique du comportement de l'écoulement convectif entre deux cylindres concentriques pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh, du nombre de Prandtl et différents rapports d'aspect. Ils ont employé la méthode des différences finies Lattice-Boltzmann (FDLBM) pour améliorer l'efficacité et la stabilité du calcul numérique de la méthode conventionnelle. Le schéma proposé utilise l'approche UTOPIA (précision de troisième ordre dans l'espace) pour étudier la distribution de la température et de la formation de tourbillons dans l'espace annulaire. **J. Robles et al. [25]** ont comparé plusieurs approches différentes pour modéliser le phénomène de la convection naturelle dans une enceinte annulaire cylindrique à l'aide d'un code de calcul CFD et pour montrer comment ces approches peuvent être appliquées à un calcul réel des températures du combustible nucléaire irradié (SNF) pendant les opérations de stockage à sec. Parmi les méthodes comparées : les corrélations normalisées, simulation des grandes échelles (LES), et la

simulation RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes). **W. M. Abed et al. [26]** ont étudié numériquement le transfert de chaleur par convection naturelle dans un espace annulaire d'axe horizontal formé par un cylindre maintenu isotherme renfermant un tube aplati traversé par une densité de flux de chaleur constante. Les caractéristiques de l'écoulement du fluide caloporteur sont obtenues par l'utilisation du code Fluent-CFD. **H. Imtiaz et F. M. Mahfouz [27]** ont étudié numériquement le problème de la convection naturelle stationnaire ainsi que transitoire dans un espace annulaire concentrique rempli par un fluide micropolaire, en utilisant la méthode spectrale de Fourier. **M. Yaghoubi et al. [28]** ont évalué les pertes de chaleur des tubes absorbeurs de section transversale cylindrique dans le système des collecteurs cylindro-paraboliques d'une centrale thermique-solaire pour le champ de 250 kW dans la ville de Shiraz en Iran. Ils ont utilisé les mesures expérimentales et la modélisation numérique pour déterminer l'impact de la défaillance des tubes de collecte de chaleur.

1.3.1.2 Espace annulaire elliptique

J.H. Lee et T.S. Lee [29] ont simulé le problème de la convection naturelle en coordonnées elliptiques pour des espaces annulaires elliptiques aplatis et allongés présentant un axe de symétrie et ils ont réalisé quelques expériences pour cette géométrie. **W. C. Schreiber et S. N. Singh [30]** ont étudié la convection naturelle stationnaire bidimensionnelle dans un espace annulaire entre deux cylindres elliptiques confocaux, orientés selon un angle défini par rapport à la force de pesanteur, est exprimée dans un système de coordonnées elliptiques. Ils ont utilisé la méthode du développement spectral en série pour traiter le système d'équations différentielles du second ordre. **M. M. Elshamy et M. N. Ozisik [31]** ont étudié numériquement la convection naturelle pour l'air délimité par deux cylindres elliptiques horizontaux et confocaux pour le cas de surfaces isothermes. Les nombres de Nusselt locaux et moyens ont été déterminés pour des valeurs variées du nombre de Rayleigh et pour différentes excentricités de la surface du cylindre elliptique intérieur. **C. H. Cheng et C.C. Chao [32]** ont présenté une étude sur l'écoulement de l'air entraîné par effet de flottabilité dans un espace entre deux cylindres elliptiques excentrés. Les équations qui régissent l'écoulement ont été discrétisées avec la méthode des volumes finis, ils ont examiné l'effet du nombre de Rayleigh, l'excentricité adimensionnelle ainsi que le rapport des deux surfaces des cylindres intérieur et extérieur sur l'écoulement, leurs résultats ont montré que pour $Ra > 10^4$ l'écoulement s'intensifie suffisamment pour donner des taux de transfert de chaleur appréciables. **W. Chmaissem et al. [33]** ont mis au point un code de calcul utilisant une méthode des éléments finis à deux dimensions pour simuler un écoulement laminaire stationnaire à l'intérieur d'un espace annulaire formé par un cylindre elliptique entourant un autre cylindre circulaire.

Y.D. Zhu et al. [34] ont étudié numériquement le transfert de chaleur par convection naturelle entre deux cylindres elliptiques horizontaux en utilisant la méthode des quadratures différentielles (DQ), les équations régissant l'écoulement sont écrites en formulation vorticité-fonction de courant. **M. Djeddar et al. [35]** ont exprimé les équations de Boussinesq de la

convection naturelle thermique laminaire, dans le cas d'un écoulement permanent et bidimensionnel, dans un espace annulaire entre deux cylindres elliptiques confocaux en utilisant un code de calcul aux volumes finis avec la formulation vitesse-pression dans un système de coordonnées elliptiques. Ils ont examiné l'effet du nombre de Rayleigh et l'influence de la géométrie du cylindre elliptique intérieur sur l'écoulement. **Y.R. Sakr et al. [36]** ont fait une étude expérimentale et numérique bidimensionnelle sur la convection naturelle de l'air existant dans un espace annulaire formé par deux cylindres elliptiques horizontaux et confocaux. Les expériences ont été réalisées pour plusieurs valeurs du nombre de Rayleigh, différents angles d'orientation du système étudié et également par rapport au rayon hydraulique, le calcul numérique et la simulation du problème sont effectués en utilisant un code commercial CFD. **F.M. Mahfouz [37]** a fait une recherche sur la convection thermique entraînée par l'effet de la flottabilité dans une enceinte annulaire elliptique. Les équations régissant l'écoulement sont formulées en termes de vorticités et fonction de courant et sont résolues numériquement en utilisant la méthode spectrale de Fourier pour différentes orientations de l'enceinte.

1.3.2 Convection naturelle dans les espaces annulaires contenant un milieu poreux

1.3.2.1 Espace annulaire cylindrique

J.P. Caltagirone [38] a étudié expérimentalement la convection naturelle dans un espace entre deux cylindres concentriques remplis par un milieu poreux avec un rapport de rayons $R=2$. Dans ces expériences, le champ thermique a été visualisé en utilisant l'effet Christiansen. Les nombres de Nusselt expérimentaux ont également été déterminés sur la base des mesures de la température du champ thermique au moyen de thermocouples insérés dans la couche poreuse. **H.H. Bau [39]** a appliqué les techniques de développement de perturbation régulière pour traiter la convection thermique à l'état stationnaire dans un milieu poreux totalement saturé et délimité par deux cylindres excentrés horizontaux. Les deux cylindres sont imperméables au mouvement du fluide et sont maintenus à des températures différentes et uniformes. Les conditions aux limites complexes sont traitées en utilisant les coordonnées bicylindriques. **K. Himasekhar et H.H. Bau [40]** ont fait une analyse détaillée des bifurcations pour différents rapports de rayons dans un espace annulaire cylindrique contenant un milieu poreux saturé de fluide. Ils ont étudié la structure d'écoulement en fonction des paramètres (R, Ra) où R est le rapport des rayons et Ra est le nombre de Rayleigh-Darcy. Le mouvement du fluide est décrit par les équations (DOB) de Darcy-Oberbeck-Boussinesq en deux dimensions résolues en utilisant la méthode de l'expansion de perturbation. Les expériences de visualisation, de **Caltagirone**, mentionnées en [39] ont été refaites à nouveau par **M.C. Charrier-Mojtabi et al [41]** dans une série d'essais sur une couche poreuse cylindrique de rayon égale à celui de Caltagirone. **J.P.B. Mota et E. Saadjan [42]** ont étudié numériquement la convection naturelle dans un milieu poreux délimité par deux cylindres horizontaux avec le modèle de Darcy. Ils ont appliqué un schéma précis au second ordre avec différences finies en utilisant la méthode des directions alternées et une sous-relaxation successive dans un maillage très raffiné. **A.F. Alfahaid et al. [43]** ont présenté une étude numérique de la convection thermique à l'état stationnaire dans un milieu poreux totalement

saturé et délimité par deux cylindres concentriques horizontaux, les cylindres sont imperméables et maintenus à différentes températures uniformes. Le schéma de solution est basé sur le modèle à deux dimensions des équations de Darcy-Oberbeck-Boussinesq. La méthode des éléments finis est utilisée avec une technique de Galerkin. **J.E. Braga et al. [44]** ont réalisé un calcul numérique sur la convection naturelle laminaire et turbulente dans un espace annulaire cylindrique horizontal rempli d'un milieu poreux saturé de fluide. Les calculs ont été réalisés pour plusieurs valeurs du nombre de Rayleigh sur un intervalle de $25 < Ra_m < 500$ ainsi que pour le nombre de Darcy de $3.2 \times 10^{-6} < Da < 3.2 \times 10^4$ en utilisant la méthode des volumes finis. Ils ont adopté le modèle de turbulence $k-\varepsilon$ macroscopique pour décrire l'écoulement turbulent en milieux poreux. Le même cas a été traité par **J.C. Leong et F.C. Lai [45]** qui ont utilisé la méthode de perturbation et de transformation de Fourier. Les deux cylindres intérieur et extérieur sont maintenus à des températures constantes où la paroi intérieure a une température légèrement supérieure à celle extérieure. Ils ont effectué une étude paramétrique pour examiner les effets du nombre de Rayleigh, le nombre de Darcy, l'épaisseur de la couche poreuse et la conductivité thermique relative sur les résultats de transfert de chaleur. **K. Khanafer et al. [46]** ont réalisé une recherche numérique sur le transfert de chaleur par convection naturelle à l'intérieur d'un anneau horizontal bidimensionnel, l'anneau entre les deux cylindres est partiellement rempli d'un milieu poreux saturé d'un fluide. Ils ont pris les effets de Forchheimer et Brinkman dans leur calcul. **M. Kumari et G. Nath [47]** ont étudié la convection naturelle instationnaire dans un espace annulaire cylindrique horizontal rempli d'un milieu poreux non Darcien. Le problème se pose en raison du changement brusque dans la température de la paroi du cylindre extérieur. Ils ont résolu les équations de Navier-Stokes ainsi que l'équation de l'énergie par la méthode des volumes finis. **M. Sankar et al. [48]** ont présenté une étude sur la convection naturelle dans un espace cylindrique annulaire vertical rempli d'un milieu poreux saturé de fluide. La paroi intérieure est soumise à un chauffage discret et la paroi extérieure est maintenue de manière isotherme à une température inférieure, tandis que la paroi supérieure et inférieure ainsi que les parties non chauffées de la paroi intérieure sont maintenues adiabatique. Ils ont examiné l'importance relative du chauffage discret sur la convection naturelle dans l'espace annulaire poreux grâce à l'équation de Darcy-Brinkman étendue. Ils ont utilisé une méthode aux différences finies implicite pour résoudre les équations du modèle mathématique. Ils ont effectué une analyse sur un large intervalle de valeurs des nombres de Rayleigh modifié et de Darcy pour différentes longueurs et différents emplacements de la source de chaleur.

1.3.2.2 Espace annulaire elliptique

M.C. Charrier-Mojtabi [49] a effectué une étude numérique de la convection naturelle bidimensionnelle et tridimensionnelle dans un espace annulaire elliptique contenant un milieu poreux saturé de fluide, en utilisant une approximation de Fourier-Galerkin pour les directions azimutale et axiale. Pour la direction radiale confinée l'auteur a adopté l'approximation de collocation-Chebyshev. L'algorithme numérique intègre les équations de Darcy-Boussinesq formulées en fonction de la pression et de la température. **E. Saadjan et al. [50]** ont obtenu des

solutions numériques précises pour les équations de Darcy-Boussinesq bidimensionnelles dans un espace annulaire circulaire avec un système de coordonnées elliptiques. Ils ont utilisé la méthode des différences finies au second ordre avec un maillage très raffiné, et avec les deux cas limites de la géométrie circulaire, les résultats obtenus montrent que les boucles d'hystérésis sont observées pour quelques rapports de rayons choisis. Leurs résultats sont en très bon accord avec ceux qui utilise un système de coordonnées cylindriques et mêmes avec les résultats expérimentaux. **J.P.B. Mota et al. [51]** ont résolu en coordonnées orthogonales généralisées les équations de Darcy-Boussinesq en deux dimensions qui gouvernent le transfert de chaleur par convection naturelle dans un milieu poreux saturé. Ils ont utilisé la méthode des différences finies sur un maillage très raffiné généré numériquement en utilisant la méthode de la trajectoire orthogonale. Le code est appliqué à des anneaux elliptiques excentriques et horizontaux contenant des milieux poreux saturés. **F.A. Khaleel et A.S. Dawood [52]** ont examiné numériquement l'influence de l'installation de deux obstacles adiabatiques sur la convection naturelle dans une couche poreuse d'épaisseur constante considérée comme un milieu poreux non-Darcien. Cette couche poreuse entourée par deux cylindres elliptiques de surface chaude isotherme pour la paroi interne et de surface froide isotherme pour la paroi externe. Ils ont examiné les effets de la longueur des obstacles, leurs positions angulaires et radiales pour différentes configurations. Un système de coordonnées curvilignes non orthogonales a été adopté avec les méthodes des différences finies et ADI avec une relaxation pour résoudre le système d'équations.

1.3.3 Convection naturelle bidiffusive dans les espaces annulaires remplis par un milieu poreux.

1.3.3.1 Espace annulaire vertical

H. Beji et al. [53] ont réalisé une étude numérique sur la convection naturelle à double diffusion dans une couche poreuse annulaire verticale dont les parois sont maintenues à des températures et des concentrations constantes. Ils ont examiné plusieurs valeurs du nombre de Rayleigh thermique, du nombre de Lewis, du rapport de flottabilités et du rapport des rayons de l'enceinte. **M. Benzeghiba et al. [54]** ont présenté des solutions numériques pour la convection naturelle thermosolutale dans une cavité concentrique verticale partiellement remplie d'un milieu poreux. La cavité est soumise à des gradients horizontaux de température et de concentration. Ils ont adopté le modèle général étendu de Darcy-Brinkman-Forchheimer pour formuler l'écoulement à travers la matrice poreuse dans la cavité. Les effets des paramètres de contrôle sur l'écoulement et le comportement des transferts de chaleur et de masse ont été examinés ainsi que les différentes structures d'écoulement en fonction des paramètres géométriques, de la nature du fluide, des paramètres dynamiques du fluide caloporteur et des caractéristiques de la matrice poreuses. **J.C. Kalita et A.K. Dass [55]** ont mis au point un calcul numérique en utilisant l'algorithme HOC pour le problème du transfert chaleur et de masse. Un schéma compact d'ordre élevé (HOC) est utilisé pour la simulation de la convection naturelle avec double diffusion dans un espace annulaire poreux vertical compris entre deux cylindres concentriques

maintenus à des températures et des concentrations constantes. **M. Sankar et al. [56]** ont réalisé une étude numérique de la convection naturelle à double diffusion dans un espace annulaire vertical poreux saturé d'un fluide soumis à un flux de chaleur et de masse à partir d'une portion de la paroi interne. La paroi externe est maintenue à une température et une concentration uniformes, tandis que les deux parois, supérieure et inférieure sont adiabatiques et imperméable au transfert de masse. Ils ont formulé le modèle physique en utilisant la loi de Darcy et ils ont résolu les équations régissant l'écoulement en utilisant une méthode implicite aux différences finies. Les effets des paramètres physiques et géométriques sur les lignes de courant, les isothermes, les isoconcentrations, les nombres moyens de Nusselt et de Sherwood ont été numériquement étudiés. **S.K. Jena et al. [57]** ont présenté une étude numérique des équations relatives à la convection naturelle thermosolutale à l'intérieur d'un anneau cylindrique. La surface interne de l'anneau est exposée à une température élevée et une concentration élevée en soluté tandis que la surface extérieure de l'anneau est maintenue à basse température et à faible concentration du soluté. Les auteurs ont utilisé le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer pour étudier l'écoulement du fluide ainsi que le transfert de chaleur et de masse dans un milieu poreux Darcien non-saturé. Les effets des paramètres tels que le nombre de Rayleigh-Darcy, le nombre de Darcy, le rapport des flottabilités et l'épaisseur de l'anneau ont été examinés.

1.3.3.2 Espace annulaire horizontal

Afin d'optimiser l'utilisation d'adsorbants solides dans des cycles thermodynamiques de réfrigération fonctionnant avec de l'énergie solaire, **M. Bakkas et al. [58]** ont étudié le transfert de chaleur et de matière dans l'adsorbeur par convection naturelle. Pour pallier à ces problèmes, ils ont analysé l'impact d'utiliser un caloduc poreux de forme annulaire cylindrique couplé à un capteur solaire à concentration du type CPC. Ils ont résolu les équations de conservation de la matière et de l'énergie par une méthode implicite aux différences finies et le modèle de Dubinin-Raduskevitch pour décrire le phénomène d'adsorption. **K.S. Reddy et G.V. Satyanarayana [59]** ont proposé un modèle de récepteur de forme annulaire cylindrique installé avec un concentrateur parabolique pour améliorer le transfert de chaleur et de masse. Un modèle numérique 3D est conçu pour évaluer la performance du récepteur avec différentes configurations d'inserts poreux de forme carrée, triangulaire, trapézoïdale et des formes circulaires. Ils ont résolu le problème avec le modèle k- ϵ en utilisant le progiciel CFD Fluent. **L.A. Tofaneli et J.S. Marcelo de Lemos [60]** ont présenté des résultats pour les transferts couplés de masse et de chaleur par convection naturelle sous un régime d'écoulement laminaire dans un anneau cylindrique horizontal rempli d'un milieu poreux saturé de fluide. Les équations modélisées sont présentées selon le concept de la double décomposition qui prend en considération les fluctuations temporelles ainsi que les déviations spatiales dans le calcul des valeurs moyennes.

N. Allouache et al. [61] ont présenté une recherche qui consiste à analyser les transferts de chaleur et de masse par convection naturelle dans un absorbeur poreux de forme annulaire cylindrique qui est considéré comme l'élément le plus important dans les systèmes de

refroidissement solaires. Le milieu poreux est contenu dans l'espace annulaire de l'absorbeur qui est chauffé par l'énergie solaire. Ils ont utilisé la méthode des volumes finis implicite pour discrétiser les équations régissant l'écoulement. **B. Cheddadi et al. [62]** ont examiné le problème de la convection naturelle double diffusive dans un espace annulaire cylindrique avec un rapport de rayons $R=2$. La méthode ADI a été utilisée pour décrire les solutions symétriques bidimensionnelles pour les isothermes, les lignes de courant et les isoconcentrations pour le cas de faibles flottabilités solutales. Cette étude numérique a été validée en comparant leurs résultats au cas purement thermique. **K. Ragui et al. [63]** ont fait une recherche sur la convection naturelle en mode coopérant par les forces de flottabilité thermique et solutale dans un cylindre horizontal poreux contenant un cylindre intérieur concentrique. Ils ont utilisé le modèle de Darcy-Brinkman pour résoudre l'ensemble des équations couplées en utilisant la méthode des volumes finis avec l'algorithme SIMPLER. **A.J.J. Belabid et A. Cheddadi [64]** ont présenté dans leur étude une simulation numérique de la convection naturelle à double diffusion dans un espace annulaire horizontal cylindrique rempli par un milieu poreux saturé de fluide. Leur analyse porte sur l'influence des différents paramètres, à savoir, le nombre de Rayleigh, le nombre de Lewis et le rapport des flottabilités, sur le transfert de chaleur et de masse et sur la structure de l'écoulement, dans le cas d'un rapport de rayon fixe $R=2$. Ils ont utilisé la méthode des différences finies avec le schéma ADI pour la discrétisation des équations adimensionnelles.

A l'issue de cette rétrospective sur les travaux de recherche qui ont contribué à la compréhension du phénomène de la convection naturelle bidiffusive, ce qui a conduit à l'amélioration des installations industrielles pour les transferts thermique et massique par convection naturelle dans les milieux poreux au sein de ces géométries annulaires. Ceci illustre bien l'importance de ce phénomène qui continue à susciter une attention croissante.

La majorité des travaux référentiels cités dans la dernière partie de ce chapitre porte sur la convection naturelle bidiffusive en milieux poreux entre deux cylindres de forme circulaire. La revue bibliographique considérée ici ne cite aucun travail concernant l'étude de la convection naturelle bidiffusive dans une matrice poreuse de section droite annulaire elliptique et saturée de fluide, ce qui a motivé cette investigation, qui a pour avantage d'utiliser un système de coordonnées elliptiques qui nous permet de retrouver les configurations cylindriques.

L'intérêt porté aussi, à la géométrie elliptique des cylindres est dû essentiellement aux avantages qu'ils auront notamment dans l'industrie des échangeurs de chaleur ainsi que dans les installations de conversion de l'énergie solaire qui utilisent en général des systèmes de canalisation cylindrique avec des sections circulaires. Aussi dans le cas de limitation de l'espace qui constitue une contrainte majeure dans la conception et l'installation, les cylindres avec des sections elliptiques se substituent comme une excellente solution dans les installations compactes. En plus, l'avantage d'un tube de section elliptique est celui d'avoir un périmètre plus grand que celui d'un tube circulaire pour la même superficie de section transversale d'écoulement et, par conséquent, les systèmes conçus avec des conduits elliptiques assurent une surface d'échange plus grande que celle dans les installations avec des conduits circulaires pour la même longueur.

CHAPITRE II :
MODELE MATHEMATIQUE

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous exposons la description et la modélisation mathématique du problème physique. Le modèle mathématique est représenté par l'ensemble des équations différentielles aux dérivées partielles qui sont les équations de continuité, de quantité de mouvement, de l'énergie et de concentration. Les équations du modèle mathématique sont présentées dans les coordonnées cartésiennes puis réécrites dans le système de coordonnées elliptiques que nous avons adopté pour résoudre le problème. La forme adimensionnelle des équations est obtenue par la normalisation des variables dans les équations du modèle mathématique avec des échelles caractéristiques appropriées.

2.2 Description du problème

Considérons le transfert de chaleur et de masse par convection naturelle dans un espace annulaire entre deux cylindres elliptiques horizontaux et confocaux, cet espace annulaire est incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal et contient un milieu poreux saturé par un fluide.

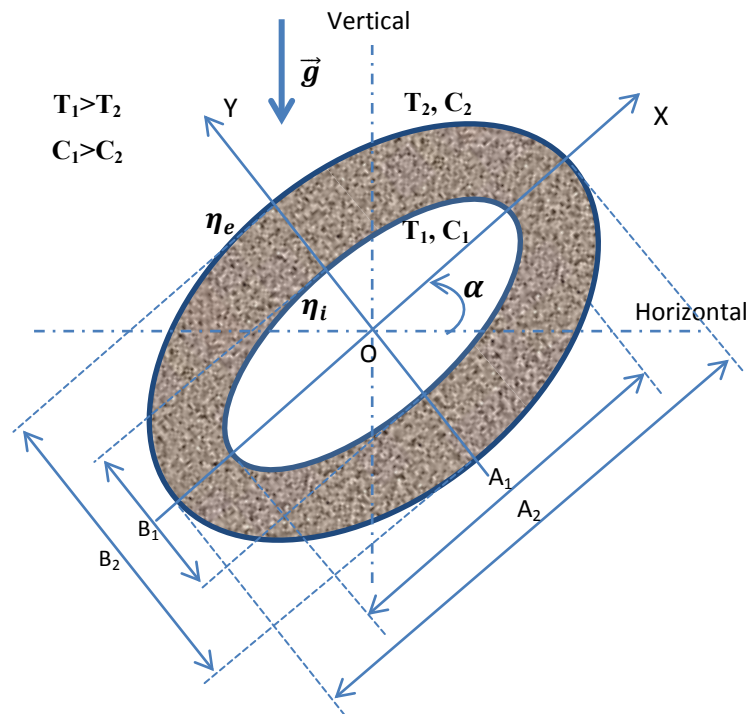


Figure 2.1 : Géométrie du système

Les deux parois elliptiques interne et externe sont considérées isothermes et imperméables, maintenues à des températures et des concentrations constantes T_1, C_1 et T_2, C_2 respectivement. Avec $T_1 > T_2$ et $C_1 > C_2$. La configuration du problème est illustrée sur la Figure 2.1

2.3 Les hypothèses simplificatrices

Les hypothèses simplificatrices que nous avons retenues dans notre étude sont les suivantes :

- Le fluide est newtonien et incompressible.
- On suppose que le milieu poreux est isotrope, homogène et en équilibre thermodynamique avec le fluide dont il est saturé.
- Le transfert de chaleur par rayonnement n'est pas pris en considération.
- L'interaction entre les transferts de chaleur et de masse (effets Soret et Dufour) sont négligeables.
- La dissipation visqueuse et le travail des forces de pression sont négligeables dans l'équation de la chaleur.
- Nous admettons que l'écoulement est bidimensionnel, permanent et laminaire.
- Les propriétés thermo-physiques du fluide sont constantes et déterminées à partir de la température et de la concentration de référence T_0 et C_0 respectivement. Par contre, la densité du fluide dans le terme des forces de volume varie linéairement avec la température T et la concentration C selon l'approximation de **J. Boussinesq** [65].

Cette variation est donnée par la relation suivante :

$$\rho(T, C) = \rho_0(1 - \beta_T(T - T_0) - \beta_C(C - C_0)) \quad (2.1)$$

Où ρ_0 est la densité à la température T_0 et la concentration C_0 de référence, β_T est le coefficient d'expansion volumique thermique et β_C le coefficient d'expansion volumique solutal exprimés ci-dessous :

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{P,C} \quad (2.1.1)$$

$$\beta_C = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_{P,T} \quad (2.1.2)$$

2.4 Modélisation mathématique

Les équations dimensionnelles qui modélisent le problème posé sont exprimées dans un premier lieu sous leur forme vectorielle, puis elles sont écrites dans les coordonnées cartésiennes avec la considération des hypothèses simplificatrices avant leur transformation en coordonnées elliptiques qui sont naturellement adaptées à la géométrie du problème. Ces équations sont déduites des principes fondamentaux de conservation.

2.4.1 Formulation vectorielle

- Equation de continuité :

$$\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.2)$$

Avec :

ε : La porosité

ρ : La masse volumique du fluide

- Equation de la quantité de mouvement :

Nous avons utilisé la formulation classique de **H. Darcy [66]** exprimée par une équation macroscopique de mouvement pour les fluides newtoniens dans les milieux poreux. Il a montré que l'écoulement dépendait linéairement du gradient de pression et de la force de gravité. La vitesse moyenne de filtration (vitesse de Darcy) V est alors proportionnelle à la somme du gradient de pression et de la force gravitationnelle, l'effet de l'inertie étant négligé. Il en résulte l'équation de Darcy sous la forme suivante :

$$\vec{V} = -\frac{K}{\mu}(\vec{\nabla}P - \rho \vec{g}) \quad (2.3)$$

Avec :

K : La perméabilité du milieu poreux

μ : La viscosité dynamique du fluide

- Equation de l'énergie

$$\sigma_T \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})T = \frac{\lambda_P}{(\rho C_P)_f} \nabla^2 T \quad (2.4)$$

Avec :

$\sigma_T = \frac{(\rho C_P)_P}{(\rho C_P)_f}$: Le rapport de capacités thermiques.

λ_P : La conductivité thermique de la matrice poreuse.

$(\rho C_P)_f$: La capacité thermique du fluide à pression constante.

$(\rho C_P)_P$: La capacité thermique du milieu poreux à pression constante.

- Equation de concentration :

$$\varepsilon \frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})C = D \nabla^2 C \quad (2.5)$$

Avec :

D : La diffusivité massique

2.4.2 Formulation des équations dans les coordonnées cartésiennes

Introduisons les coordonnées cartésiennes telles qu'elles sont définies sur la Figure 2.1 et en tenant compte des hypothèses simplificatrices, les équations (2.2), (2.3), (2.4) et (2.5) s'écrivent de la manière suivante :

- Equation de continuité :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (2.6)$$

- Equations de quantité de mouvement:

La projection de l'équation de Darcy (2.3) sur les deux axes (x) et (y) avec l'introduction de l'approximation de Boussinesq (2.1) nous donne les deux équations suivantes :

$$U = -\frac{K}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \rho_0 g (1 - \beta_T (T - T_0) - \beta_C (C - C_0)) \sin(\alpha) \right) \quad (2.7a)$$

$$V = -\frac{K}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \rho_0 g (1 - \beta_T (T - T_0) - \beta_C (C - C_0)) \cos(\alpha) \right) \quad (2.7b)$$

2.4.2.1 Elimination du terme de pression des équations du mouvement

L'utilisation de la formulation vorticité-fonction de courant nous permet d'éliminer le terme de la pression dans l'équation de quantité de mouvement. En dérivant les équations du mouvement (2.8a) et (2.8b) respectivement par rapport à y et par rapport à x de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial y} (U) = -\frac{K}{\mu} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \rho_0 g \frac{\partial}{\partial y} \left((1 - \beta_T (T - T_0) - \beta_C (C - C_0)) \sin(\alpha) \right) \right) \quad (2.8a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (V) = -\frac{K}{\mu} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \rho_0 g \frac{\partial}{\partial x} \left((1 - \beta_T (T - T_0) - \beta_C (C - C_0)) \cos(\alpha) \right) \right) \quad (2.8b)$$

En soustrayant l'équation (2.8b) de (2.8a), nous obtenons :

$$\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{K \rho_0 g \beta_T}{\mu} \left(\left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\beta_C}{\beta_T} \frac{\partial C}{\partial x} \right) \cos(\alpha) - \left(\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\beta_C}{\beta_T} \frac{\partial C}{\partial y} \right) \sin(\alpha) \right) \quad (2.9)$$

En introduisant dans l'équation (2.9) la fonction de courant ψ telle que :

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

L'équation du mouvement donc s'écrit comme suit:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{Kg\beta_T}{\nu} \left(\left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\beta_C}{\beta_T} \frac{\partial C}{\partial x} \right) \cos(\alpha) - \left(\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\beta_C}{\beta_T} \frac{\partial C}{\partial y} \right) \sin(\alpha) \right) \quad (2.10)$$

- Equation de la chaleur :

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.11)$$

Avec :

$$a = \frac{\lambda_p}{(\rho C_p)_f} : \text{La diffusivité thermique}$$

- Equation de concentration :

$$U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \quad (2.12)$$

Avec :

D : La diffusivité massique

2.4.3 Formulation des équations dans le système des coordonnées elliptiques

Nous avons présenté les équations (2.6), (2.10), (2.11) et (2.12) qui constituent notre modèle mathématique en coordonnées cartésiennes avec la considération des hypothèses simplificatrices. Pour le problème que nous avons posé, l'usage du système de coordonnées elliptiques est naturellement adapté à la géométrie du problème.

Les coordonnées elliptiques (η, θ) permettent, précisément dans notre cas d'obtenir un référentiel tel que les limites du système se traduisent par des valeurs constantes des coordonnées. La paroi du cylindre elliptique extérieur est représentée par $\eta=\eta_2=\text{constante}$, celle du cylindre elliptique intérieur par $\eta=\eta_1=\text{constante}$. (Voir le détail en annexe).

Dans le système de coordonnées (η, θ, z) , les surfaces $\eta=\text{constante}$ sont des cylindres elliptiques, les surfaces $\theta=\text{constante}$ sont des cylindres hyperboliques et les surfaces $z=\text{constante}$ sont des plans parallèles comme illustré dans la Figure 2.2.

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées elliptiques s'effectue à l'aide des relations ci-dessous:

$$\left. \begin{aligned} x &= c.ch\eta.cos\theta \\ y &= c.sh\eta.sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

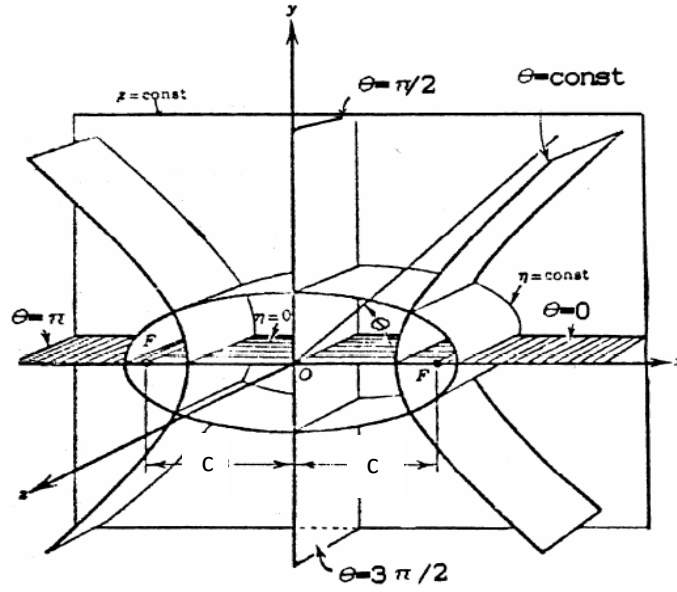


Figure 2.2 : Schéma des coordonnées elliptiques

Les coefficients métriques dans le système de coordonnées elliptiques sont donnés par:

$$h = h_\eta = h_\theta = c(\operatorname{sh}^2(\eta) + \sin^2(\theta))^{1/2}, \quad h_z = 1$$

Avec :

$$c = \frac{A}{\operatorname{ch}(\eta)} = \frac{B}{\operatorname{sh}(\eta)}$$

Les équations (2.6), (2.10), (2.11) et (2.12) s'écrivent respectivement dans les coordonnées elliptiques de la manière suivante (voir le détail de la transformation dans l'annexe) :

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(hV_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(hV_\theta) = 0 \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right] = & \\ & - \frac{Kg\beta_T}{\nu} \left([\cos(\alpha) F(\eta, \theta) - \sin(\alpha) G(\eta, \theta)] \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{\beta_C}{\beta_T} \frac{\partial C}{\partial \eta} \right) \right. \\ & \left. - [\sin(\alpha) F(\eta, \theta) + \cos(\alpha) G(\eta, \theta)] \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\beta_C}{\beta_T} \frac{\partial C}{\partial \theta} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$V_{\eta} \frac{\partial T}{\partial \eta} + V_{\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} = a \left(\frac{1}{h} \right) \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right] \quad (2.16)$$

$$V_{\eta} \frac{\partial C}{\partial \eta} + V_{\theta} \frac{\partial C}{\partial \theta} = D \left(\frac{1}{h} \right) \left[\frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2} \right] \quad (2.17)$$

Avec:

$$\left. \begin{aligned} F(\eta, \theta) &= \frac{sh\eta \cdot \cos\theta}{(sh^2\eta + \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}} \\ G(\eta, \theta) &= \frac{ch\eta \cdot \sin\theta}{(sh^2\eta + \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

V_{η} et V_{θ} sont les composantes de la vitesse suivant les directions η et θ .

2.4.4 Les conditions aux limites

Les conditions aux limites sont les suivantes :

- La paroi interne :

$$V_{\eta} = V_{\theta} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \text{ et } T = T_1, C = C_1$$

- La paroi externe :

$$V_{\eta} = V_{\theta} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \text{ et } T = T_2, C = C_2$$

2.4.5 La forme adimensionnelle des équations du modèle mathématique

De façon à rendre les équations de notre modèle mathématique adimensionnelles, la dimension c qui représente la distance focale de l'enceinte a été choisie comme longueur de référence. La diffusivité thermique a est utilisée pour adimensionnaliser la fonction de courant, (a/c) pour adimensionnaliser les composantes de la vitesse, la température et la concentration sont adimensionnalisées respectivement par rapport aux écarts de température ΔT et de concentration ΔC entre les deux parois actives de l'enceinte dans le cas de nos conditions pariétales thermique et massique. Les différentes grandeurs sans dimension sont données par les expressions suivantes:

$$H = \frac{h}{c} = (sh^2(\eta) + \sin^2(\theta))^{\frac{1}{2}};$$

$$V_{\eta}^{+} = \frac{V_{\eta}}{(a/c)} ;$$

$$V_{\theta}^{+} = \frac{V_{\theta}}{(a/c)} ;$$

$$\psi^{+} = \frac{\psi}{a} ;$$

$$T^{+} = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2} ;$$

$$C^{+} = \frac{C - C_2}{C_1 - C_2}$$

Introduisant également les nombres suivants respectivement, le nombre de Grashof, le nombre Prandtl et le nombre de Darcy :

$$Gr = \frac{g\beta_T c^3 \Delta T}{\nu^2} ; Pr = \frac{\nu}{a} ; Da = \frac{K}{c^2}$$

En portant les quantités adimensionnelles définies ci-dessus dans les équations du modèle mathématique (2.14), (2.15), (2.16) et (2.17), on obtient :

- Equation de continuité :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (HV_{\eta}^{+}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (HV_{\theta}^{+}) = 0 \quad (2.19)$$

- Equation de quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 \psi^{+}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^{+}}{\partial \theta^2} \right] = & \\ & -H \cdot \frac{g\beta_T c^3 \Delta T}{\nu^2} \cdot \frac{\nu}{a} \cdot \frac{K}{c^2} \left([\cos(\alpha) F(\eta, \theta) - \sin(\alpha) G(\eta, \theta)] \left(\frac{\partial T^{+}}{\partial \eta} + \frac{\beta_C \Delta C}{\beta_T \Delta T} \frac{\partial C^{+}}{\partial \eta} \right) \right. \\ & \left. - [\sin(\alpha) F(\eta, \theta) + \cos(\alpha) G(\eta, \theta)] \left(\frac{\partial T^{+}}{\partial \theta} + \frac{\beta_C \Delta C}{\beta_T \Delta T} \frac{\partial C^{+}}{\partial \theta} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

En introduisant le nombre de Rayleigh-Darcy (Ra_m) et le rapport de flottabilités N donnés par les relations suivantes :

$$Ra_m = Gr \cdot Pr \cdot Da ; N = \frac{\beta_C \Delta C}{\beta_T \Delta T}$$

L'équation de quantité de mouvement (2.20) s'écrit comme suit :

$$\left[\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2} \right] =$$

$$-H.Ra_m \left([\cos(\alpha) F(\eta, \theta) - \sin(\alpha) G(\eta, \theta)] \left(\frac{\partial T^+}{\partial \eta} + N \frac{\partial C^+}{\partial \eta} \right) \right.$$

$$\left. - [\sin(\alpha) F(\eta, \theta) + \cos(\alpha) G(\eta, \theta)] \left(\frac{\partial T^+}{\partial \theta} + N \frac{\partial C^+}{\partial \theta} \right) \right) \quad (2.21)$$

- Equation de la chaleur :

$$HV_\eta^+ \frac{\partial T^+}{\partial \eta} + HV_\theta^+ \frac{\partial T^+}{\partial \theta} = \left[\frac{\partial^2 T^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T^+}{\partial \theta^2} \right] \quad (2.22)$$

- Equation de concentration :

$$HV_\eta^+ \frac{\partial C^+}{\partial \eta} + HV_\theta^+ \frac{\partial C^+}{\partial \theta} = \frac{1}{Le} \left[\frac{\partial^2 C^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 C^+}{\partial \theta^2} \right] \quad (2.23)$$

Avec Le qui représente le nombre de Lewis défini par :

$$Le = \frac{a}{D}$$

2.4.6 La forme adimensionnelle des conditions aux limites

Les conditions aux limites adimensionnelles sont les suivantes :

- La paroi interne ($\eta = \eta_i = \text{constant}$) :

$$V_\eta^+ = V_\theta^+ = \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} = 0 \text{ et } T_1^+ = 1, C_1^+ = 1$$

- La paroi externe ($\eta = \eta_e = \text{constant}$) :

$$V_\eta^+ = V_\theta^+ = \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} = 0 \text{ et } T_2^+ = 0, C_2^+ = 0$$

Avec :

$$\left. \begin{aligned} V_\eta^+ &= \frac{1}{H} \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \\ V_\theta^+ &= -\frac{1}{H} \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

2.4.7 Les coefficients d'échanges de chaleur et de masse

2.4.7.1 Les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux

Nous exprimons les transferts de chaleur et de masse sur les parois actives de l'enceinte par les nombres de Nusselt (Nu) et de Sherwood (Sh) définis respectivement par la loi de Fourier et la loi de Fick. Le nombre de Nusselt est donné par :

$$Nu = \frac{q}{\lambda_f \frac{\Delta T}{L_c}} \quad (2.25)$$

q : La densité du flux de chaleur à travers la paroi de l'enceinte.

λ_f : La conductivité thermique du fluide.

ΔT : L'écart de températures ($T_1 - T_2$)

L_c : La longueur caractéristique de la géométrie, dans notre cas c'est la distance focale (c).

Avec :

$$q = -\lambda_f \left. \frac{1}{h} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_{\eta=Cte} \quad (2.26)$$

En utilisant la définition de la température adimensionnelle dans la condition pariétale thermique, le Nusselt local s'écrit :

$$Nu = - \left. \frac{1}{H} \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right|_{\eta=Cte} \quad (2.27)$$

Le nombre de Sherwood est donné par :

$$Sh = \frac{j}{D \frac{\Delta C}{L_c}} \quad (2.28)$$

j : La densité du flux de masse à travers la paroi de l'enceinte.

D : La diffusivité massique.

ΔC : L'écart de concentrations ($C_1 - C_2$)

$$j = -D \left. \frac{1}{h} \frac{\partial C}{\partial \eta} \right|_{\eta=Cte} \quad (2.29)$$

En utilisant la définition de la concentration adimensionnelle dans la condition pariétale massique, le Sherwood local s'écrit :

$$Sh = - \frac{1}{H} \frac{\partial C^+}{\partial \eta} \Big|_{\eta=c_{te}} \quad (2.30)$$

2.4.7.2 Les nombres de Nusselt et de Sherwood moyens

Les nombres de Nusselt et de Sherwood moyens s'expriment par les relations suivantes :

$$\overline{Nu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Nu \, d\theta \quad (2.31)$$

$$\overline{Sh} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Sh \, d\theta \quad (2.32)$$

**CHAPITRE III:
RESOLUTION NUMERIQUE**

3.1 Introduction

Les équations régissant la convection naturelle bidiffusive dans un milieu poreux que nous avons exposées dans le chapitre précédent, constituent un système d'équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires et couplées qui ne peuvent être résolues analytiquement, on les résout donc numériquement. Dans ce chapitre, et pour résoudre ces équations avec leurs conditions aux limites associées, nous considérons une solution numérique par la méthode des différences centrées pour l'équation (2.21), qui est une équation du type elliptique, alors que pour les équations (2.22) et (2.23) qui sont des équations du type parabolique, nous considérons une solution numérique par la méthode des volumes finis.

3.2 La méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis que nous avons choisie consiste à discrétiser le domaine physique étudié en un domaine de calcul montré dans la figure 3.1 qui se compose d'un nombre fini de volumes. Les bilans des grandeurs étudiées seront exprimés sur ces volumes de contrôle. Cette méthode est fréquemment utilisée dans la solution numérique des problèmes de transferts, les détails de la méthode sont exposés par **S.V. PATANKAR [67]**

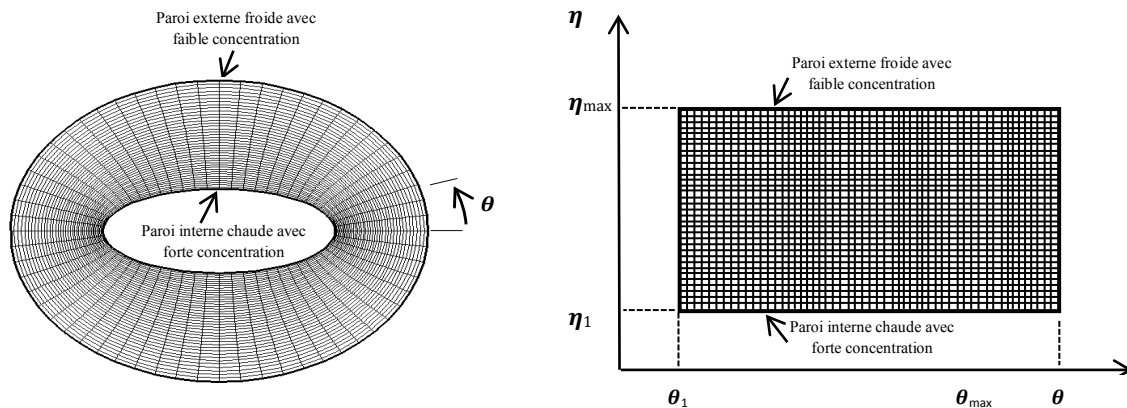


Figure 3.1 : Domaine physique et domaine de calcul.

3.2.1 Représentation d'un volume de contrôle

Le découpage de l'espace annulaire selon les directions des coordonnées elliptiques θ et η en un ensemble de volumes égaux nous donne des volumes de contrôles, ces volumes sont appelées également volumes élémentaires d'intégration. Chacun de ces volumes est égal à la quantité « $H^2 \cdot \Delta\eta \cdot \Delta\theta \cdot 1$ ». Parce que nous avons considéré le problème bidimensionnel, on prend l'unité dans la direction z comme épaisseur du volume de contrôle.

Le centre d'un volume fini typique est un point P et ses faces latérales «est», «ouest» «nord» et «sud», sont désignées respectivement, par les lettres : e, w, n et s. Chaque volume fini intérieur est entouré de quatre autres volumes finis. Les centres de ces volumes sont les points E, W, N et S. Les variables scalaires (température, concentration,...) sont stockées aux points centrés dans les volumes finis. Donc les équations de transfert des variables scalaires sont intégrées dans le volume fini typique. La figure 3.2 ci-dessous représente un volume fini typique entouré par les volumes finis de son voisinage.

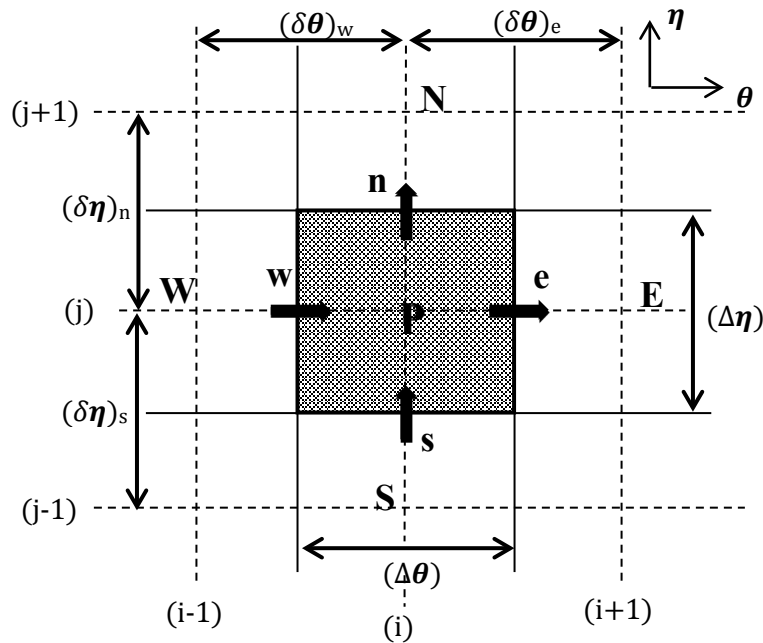


Figure 3.2 : Représentation d'un volume-fini typique avec son voisinage dans le domaine de calcul.

3.3 Discrétisations des équations gouvernantes

Pour une meilleure illustration de la discrétisation des équations (2.22) et (2.23) qui représentent respectivement l'équation de la chaleur et l'équation de la concentration sous leurs formes adimensionnelles par la méthode des volumes finis, on considère l'équation de transport dans notre cas sous sa forme générale :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[HV_{\eta}^+ \phi - \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[HV_{\theta}^+ \phi - \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right] = S_{\phi} \quad (3.1)$$

Pour chacune des équations (2.22) et (2.23), le terme de source et le coefficient de diffusion sont spécifiés dans le tableau 3.1

Tableau 3.1 : Coefficients de diffusion et Termes de source.

Equation	Variable ϕ	Coefficient Γ_ϕ	Source S_ϕ
Température Eq. (2.22)	T^+	1	0
Concentration Eq. (2.23)	C^+	$1/Le$	0

3.3.1 Discrétisations de l'équation de continuité

Avant de discrétiser l'équation générale de transport (3.1), nous allons discrétiser l'équation de continuité :

$$\int_w^e \int_s^n \left(\frac{\partial HV_\eta^+}{\partial \eta} + \frac{\partial HV_\theta^+}{\partial \theta} \right) d\eta d\theta = 0 \quad (3.2)$$

$$\left[(HV_\eta^+)_n - (HV_\eta^+)_s \right] \Delta\theta + \left[(HV_\theta^+)_e - (HV_\theta^+)_w \right] \Delta\eta = 0 \quad (3.3)$$

Nous poserons dans ce qui suit :

$$\left. \begin{aligned} F_n &= (HV_\eta^+)_n \cdot \Delta\theta \\ F_s &= (HV_\eta^+)_s \cdot \Delta\theta \\ F_e &= (HV_\theta^+)_e \cdot \Delta\eta \\ F_w &= (HV_\theta^+)_w \cdot \Delta\eta \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

F_n, F_s, F_e et F_w , sont les débits massiques (termes de convection) à travers les surfaces du volume fini. L'équation de continuité (2.19) après discrétisation dans le volume élémentaire, s'écrit :

$$F_n - F_s + F_e - F_w = 0 \quad (3.5)$$

3.3.2 Discrétisation de l'équation générale de transport

Ci-après, on présente la discrétisation de l'équation générale de transport (3.1) :

$$\begin{aligned} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial \eta} \left[HV_\eta^+ \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] d\eta d\theta + \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial \theta} \left[HV_\theta^+ \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right] d\eta d\theta \\ = \int_w^e \int_s^n S_\phi d\eta d\theta \end{aligned} \quad (3.6)$$

Posons :

$$\left. \begin{aligned} J_\eta &= HV_\eta^+ \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \\ J_\theta &= HV_\theta^+ \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

J_η et J_θ sont les flux totaux (convection plus diffusion), en portant ces valeurs dans l'équation (3.6), on obtient :

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial \eta} (J_\eta) d\eta d\theta + \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial \theta} (J_\theta) d\eta d\theta = \int_w^e \int_s^n S_\phi d\eta d\theta \quad (3.8)$$

Après intégration sur le volume de contrôle de la figure 3.2, l'équation (3.8) s'écrit comme suit :

$$J_n - J_s + J_e - J_w = \overline{S_\phi} \cdot \Delta V \quad (3.9)$$

Où J_e, J_w, J_n et J_s sont les valeurs des flux totaux aux interfaces du volume de contrôle.

$\overline{S_\phi}$: est la valeur moyenne de S_ϕ dans ce volume élémentaire. Ce terme peut généralement être linéarisé en fonction de ϕ_P (au nœud P) et se mettre sous la forme:

$$\overline{S_\phi} = S_0 + S_P \cdot \phi_P \quad (3.10)$$

Avec : $S_P < 0$

L'équation (3.9) s'écrit comme suit :

$$J_n - J_s + J_e - J_w = (S_0 + S_P \cdot \phi_P) \cdot \Delta V \quad (3.11)$$

En multipliant l'équation de continuité discrétisée (3.5) par la fonction ϕ_P et en soustrayant l'équation obtenue de l'équation (3.11):

$$(J_n - F_n \cdot \phi_P) - (J_s - F_s \cdot \phi_P) + (J_e - F_e \cdot \phi_P) - (J_w - F_w \cdot \phi_P) = (S_0 + S_P \cdot \phi_P) \cdot \Delta V \quad (3.12)$$

D'après **S.V. PATANKAR [67]**, on peut représenter les termes entre parenthèses de l'équation (3.11) de la manière suivante :

$$\left. \begin{aligned} J_n - F_n \cdot \phi_P &= a_N \cdot (\phi_P - \phi_N) \\ J_s - F_s \cdot \phi_P &= a_S \cdot (\phi_S - \phi_P) \\ J_e - F_e \cdot \phi_P &= a_E \cdot (\phi_P - \phi_E) \\ J_w - F_w \cdot \phi_P &= a_W \cdot (\phi_W - \phi_P) \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Après introductions de ces termes, l'équation (3.12) s'écrit sous sa forme de discrétisation suivante :

$$a_P \cdot \phi_P = a_N \cdot \phi_N + a_S \cdot \phi_S + a_E \cdot \phi_E + a_W \cdot \phi_W + b \quad (3.14)$$

Avec :

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + S_P \cdot \Delta V \quad (3.15)$$

$$b = S_0 \cdot \Delta V \quad (3.16)$$

On introduit maintenant la fonction $A(|P|)$ du nombre de Péclet, qui est celle de la loi de puissance (Power Law) d'après **S.V. PATANKAR [67]**, elle est donnée par : $A(|P|) = \max(0, (1 - 0.1|P|)^5)$

Le symbole $\max(A, B)$ signifie que le maximum entre A et B sera choisi. Les coefficients de l'équation algébrique (3.14) s'écrivent alors :

$$\left. \begin{aligned} a_N &= D_n \cdot A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ a_S &= D_s \cdot A(|P_s|) + \max(F_s, 0) \\ a_E &= D_e \cdot A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ a_W &= D_w \cdot A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Dans les relations (3.17), les grandeurs D_n, D_s, D_e et D_w sont les termes diffusifs qui sont définis par :

$$\left. \begin{aligned} D_n &= \frac{(\Gamma_\phi)_n \cdot \Delta\theta}{(\delta\eta)_n} \\ D_s &= \frac{(\Gamma_\phi)_s \cdot \Delta\theta}{(\delta\eta)_s} \\ D_e &= \frac{(\Gamma_\phi)_e \cdot \Delta\eta}{(\delta\theta)_e} \\ D_w &= \frac{(\Gamma_\phi)_w \cdot \Delta\eta}{(\delta\theta)_w} \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Les pas d'intégration $(\delta\eta)_n, (\delta\eta)_s, (\delta\theta)_e$ et $(\delta\theta)_w$ peuvent être égaux ou non aux pas de calcul $\Delta\eta$ et $\Delta\theta$ respectivement, dans notre cas, ils sont choisis constants et égaux aux $\Delta\eta$ et $\Delta\theta$. Considérons que les interfaces : e, w, s et n sont respectivement les milieux des nœuds (P, E), (P, W), (P, N) et (P, S). Dans ces conditions les grandeurs précédentes s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} D_n &= \frac{(\Gamma_\phi)_n \cdot \Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_s &= \frac{(\Gamma_\phi)_s \cdot \Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_e &= \frac{(\Gamma_\phi)_e \cdot \Delta\eta}{\Delta\theta} \\ D_w &= \frac{(\Gamma_\phi)_w \cdot \Delta\eta}{\Delta\theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Les grandeurs P_n , P_s , P_e et P_w dans les relations (3.17), représentent les nombres de Péclet qui sont définis par :

$$\left. \begin{aligned} P_n &= \frac{F_n}{D_n} \\ P_s &= \frac{F_s}{D_s} \\ P_e &= \frac{F_e}{D_e} \\ P_w &= \frac{F_w}{D_w} \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Parmi les conditions de convergence et de stabilité exigées par cette méthode, notons que dans l'équation (3.14) tous les coefficients doivent être positifs, S_P doit être négatif et le coefficient a_P doit être égal à la somme des autres coefficients et $S_P \Delta V$.

3.3.3 Discrétisations de l'équation de la chaleur

La discrétisation de l'équation générale de transport s'applique à l'équation de la chaleur (2.22) en suivant les mêmes étapes de discrétisation et en remplaçant la fonction générale ϕ aux nœuds P, E, W, N et S par la température adimensionnelle T^+ , on obtient l'équation algébrique suivante :

$$a_P \cdot T_P^+ = a_N \cdot T_N^+ + a_S \cdot T_S^+ + a_E \cdot T_E^+ + a_W \cdot T_W^+ \quad (3.21)$$

Comme le montre le **tableau 3.1**, le terme de source S_T dans l'équation de la chaleur (3.1) est nul, donc le coefficient a_P figurant dans l'équation (3.15) devient:

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W \quad (3.22)$$

En introduisant dans les relations (3.4), les composantes de la fonction de courant adimensionnelle ψ^+ qui sont définies par les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} (V_{\eta}^+)_{n} &= \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right)_{n}, & (V_{\eta}^+)_{s} &= \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right)_{s} \\ (V_{\theta}^+)_{e} &= - \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_{e}, & (V_{\theta}^+)_{w} &= - \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_{w} \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Les termes convectifs à travers les surfaces du volume fini s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} F_n &= \Delta\theta \cdot \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right)_{n} \\ F_s &= \Delta\theta \cdot \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right)_{s} \\ F_e &= \Delta\eta \cdot \left(- \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_{e} \\ F_w &= \Delta\eta \cdot \left(- \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_{w} \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Dans la suite nous supposons que :

$$\left. \begin{aligned} \psi_e^+ &= \frac{\psi(i+1, j) + \psi(i, j)}{2} \\ \psi_w^+ &= \frac{\psi(i, j) + \psi(i-1, j)}{2} \\ \psi_n^+ &= \frac{\psi(i, j+1) + \psi(i, j)}{2} \\ \psi_s^+ &= \frac{\psi(i, j) + \psi(i, j-1)}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

Les développements du gradient de la fonction de courant ψ^+ aux interfaces : e, w, n et s, sont établis d'après la démarche de **E.F. NOGOTOV [68]** montrée dans la figure 3.3 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_{e} &= \frac{\psi^+ \left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right) - \psi^+ \left(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2} \right)}{\Delta\eta} \\ &= \frac{1}{\Delta\eta} \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i+1, j) + \psi^+(i, j+1) + \psi^+(i+1, j+1)}{4} \\ &\quad - \frac{1}{\Delta\eta} \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i+1, j) + \psi^+(i, j-1) + \psi^+(i+1, j-1)}{4} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_{e} = \frac{1}{4\Delta\eta} (\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i+1, j+1) - \psi^+(i, j-1) - \psi^+(i+1, j-1))$$

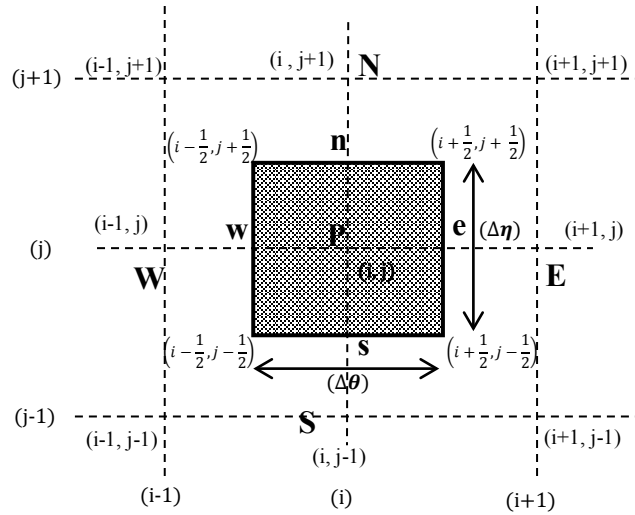


Figure 3.3 : Représentation schématique des nœuds principaux et aux interfaces dans le maillage.

Donc le coefficient convectif sur l'interface « e » s'écrit :

$$F_e = \frac{1}{4}(\psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i+1, j) - \psi^+(i+1, j+1)) \quad (3.28a)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}\right)_w &= \frac{\psi^+\left(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - \psi^+\left(i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta \eta} \\ &= \frac{1}{\Delta \eta} \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j+1) + \psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i-1, j)}{4} \\ &\quad - \frac{1}{\Delta \eta} \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j-1) + \psi^+(i-1, j) + \psi^+(i-1, j-1)}{4} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}\right)_w = \frac{1}{4\Delta \eta}(\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i-1, j+1) - \psi^+(i, j-1) - \psi^+(i-1, j-1))$$

Le coefficient convectif sur l'interface « w » s'écrit :

$$F_w = \frac{1}{4}(\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i-1, j+1) - \psi^+(i, j-1) + \psi^+(i-1, j-1)) \quad (3.28b)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_n &= \frac{\psi^+\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - \psi^+\left(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta \theta} \\ &= \frac{1}{\Delta \theta} \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i+1, j) + \psi^+(i, j+1) + \psi^+(i+1, j+1)}{4} \\ &\quad - \frac{1}{\Delta \theta} \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j+1) + \psi^+(i-1, j) + \psi^+(i-1, j+1)}{4} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_n = \frac{1}{4\Delta\theta} (\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i+1, j) - \psi^+(i-1, j+1) - \psi^+(i-1, j))$$

Le coefficient convectif sur l'interface « n » s'écrit :

$$F_n = \frac{1}{4} (\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i+1, j) - \psi^+(i-1, j+1) - \psi^+(i-1, j)) \quad (3.28c)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_s &= \frac{\psi^+(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}) - \psi^+(i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2})}{\Delta\theta} \\ &= \frac{\frac{1}{4} (\psi^+(i, j) + \psi^+(i+1, j) + \psi^+(i, j-1) + \psi^+(i+1, j-1))}{\Delta\theta} \\ &\quad - \frac{\frac{1}{4} (\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j-1) + \psi^+(i-1, j) + \psi^+(i-1, j-1))}{\Delta\theta} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_s = \frac{1}{4\Delta\theta} (\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i-1, j-1))$$

Le coefficient convectif sur l'interface « s » s'écrit :

$$F_s = \frac{1}{4} (\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i-1, j-1)) \quad (3.28d)$$

Comme nous l'avons présenté précédemment dans le tableau 3.1, le coefficient Γ_T prend la valeur 1 et en portant cette valeur dans le système (3.19), les termes diffusifs s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} D_n = D_s &= \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_e = D_w &= \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

Les nombres de Péclet dans le système (3.20) deviennent :

$$\left. \begin{aligned} P_n &= F_n \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_s &= F_s \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_e &= F_e \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ P_w &= F_w \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

Pour homogénéiser les notations dans l'équation (3.21) on remplace P, E, W, N et S respectivement par (i, j) , $(i+1, j)$, $(i-1, j)$, $(i, j+1)$, $(i, j-1)$.

Les coefficients a_E , a_W , a_N et a_S , sont pris au nœud (i,j) , l'équation (3.21) peut finalement s'écrire sous la forme suivante :

$$a_P \cdot T^+(i,j) = a_N \cdot T^+(i+1,j) + a_S \cdot T^+(i-1,j) + a_E \cdot T^+(i,j+1) + a_W \cdot T^+(i,j-1) \quad (3.31)$$

3.3.3.1 Discrétisations des conditions aux limites

Pour satisfaire les conditions imposées à la température sur les parois intérieure et extérieure de l'enceinte, on doit avoir les conditions suivantes :

Sur la paroi chaude interne ($j=1$) :

$$T^+(i,1)=1$$

Sur la paroi froide externe ($j=NN$) :

$$T^+(i, NN)=0$$

Sachant que NI et NN représentent respectivement le nombre de points suivant η et le nombre de points suivant θ .

3.3.4 Discrétisations de l'équation de concentration

La discrétisation de l'équation générale de transport s'applique également à l'équation de concentration (2.23) en suivant les mêmes étapes de discrétisation pour l'équation de la chaleur et en remplaçant la fonction générale ϕ aux nœuds P, E, W, N et S par la concentration adimensionnelle C^+ , on obtient l'équation algébrique suivante :

$$a_P \cdot C_P^+ = a_N \cdot C_N^+ + a_S \cdot C_S^+ + a_E \cdot C_E^+ + a_W \cdot C_W^+ \quad (3.32)$$

Comme le montre le tableau 3.1, le terme de source S_C dans l'équation de concentration (3.1) est nul, donc le coefficient a_P figurant dans l'équation (3.15) devient:

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W \quad (3.33)$$

Par analogie à la discrétisation de l'équation de la chaleur et d'après la démarche exposée par **E.F. NOGOTOV [68]**, le développement du gradient de la fonction de courant ψ^+ aux interfaces du volume fini qui sont représentées dans la figure 3.3 par les lettres minuscules : e, w, n et s, les termes convectifs à travers les surfaces du volume fini s'écrivent :

$$F_e = \frac{1}{4} (\psi^+(i-1,j+1) + \psi^+(i-1,j) - \psi^+(i+1,j) - \psi^+(i+1,j+1)) \quad (3.34a)$$

$$F_w = \frac{1}{4} (\psi^+(i,j-1) + \psi^+(i-1,j-1) - \psi^+(i-1,j+1) + \psi^+(i,j+1)) \quad (3.34b)$$

$$F_n = \frac{1}{4} (\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i+1, j) - \psi^+(i-1, j+1) - \psi^+(i-1, j)) \quad (3.34c)$$

$$F_s = \frac{1}{4} (\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i-1, j-1)) \quad (3.34d)$$

Comme nous l'avons présenté précédemment dans le tableau 3.1, le coefficient Γ_C prend la valeur $\frac{1}{Le}$ et en portant cette valeur dans le système (3.19), les termes diffusifs pour l'équation de concentration s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} D_n = D_s &= \frac{1}{Le} \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_e = D_w &= \frac{1}{Le} \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

Les nombres de Péclet dans le système (3.20) deviennent :

$$\left. \begin{aligned} P_n &= F_n \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} Le \\ P_s &= F_s \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} Le \\ P_e &= F_e \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} Le \\ P_w &= F_w \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} Le \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

Pour homogénéiser les notations dans l'équation (3.32), on remplace P, E, W, N et S respectivement par (i,j) , $(i+1,j)$, $(i-1,j)$, $(i,j+1)$, $(i,j-1)$. Les coefficients a_E , a_W , a_N et a_S , sont pris au nœud (i,j) et l'équation (3.32) peut finalement s'écrire sous la forme suivante :

$$a_P \cdot C^+(i, j) = a_N \cdot C^+(i+1, j) + a_S \cdot C^+(i-1, j) + a_E \cdot C^+(i, j+1) + a_W \cdot C^+(i, j-1) \quad (3.37)$$

3.3.4.1 Discrétisations des conditions aux limites

Pour satisfaire les conditions imposées à la concentration sur les parois intérieure et extérieure de l'enceinte, on doit avoir les conditions suivantes :

Sur la paroi interne à forte concentration ($j=I$) :

$$C^+(i, I) = 1$$

Sur la paroi externe à faible concentration ($j=NN$) :

$$C^+(i, NN) = 0$$

3.3.5 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement

L'équation (2.21) est de type elliptique comme nous l'avons cité plus haut, c'est pourquoi pour la discrétiser nous utiliserons les différences centrées. Les différents termes de l'équation (2.21) seront discrétisés séparément de la façon suivante :

$$\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2} = \frac{\psi^+(i, j+1) - 2\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j-1)}{(\Delta \eta)^2} + \frac{\psi^+(i+1, j) - 2\psi^+(i, j) + \psi^+(i-1, j)}{(\Delta \theta)^2} \quad (3.38)$$

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right|_{i,j} = \frac{T^+(i, j+1) - T^+(i, j-1)}{2(\Delta \eta)} \quad (3.39a)$$

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right|_{i,j} = \frac{T^+(i+1, j) - T^+(i-1, j)}{2(\Delta \theta)} \quad (3.39b)$$

$$\left. \frac{\partial C^+}{\partial \eta} \right|_{i,j} = \frac{C^+(i, j+1) - C^+(i, j-1)}{2(\Delta \eta)} \quad (3.40a)$$

$$\left. \frac{\partial C^+}{\partial \theta} \right|_{i,j} = \frac{C^+(i+1, j) - C^+(i-1, j)}{2(\Delta \theta)} \quad (3.40b)$$

$$\left[\frac{\psi^+(i, j+1) - 2\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j-1)}{(\Delta \eta)^2} + \frac{\psi^+(i+1, j) - 2\psi^+(i, j) + \psi^+(i-1, j)}{(\Delta \theta)^2} \right] =$$

$$-H. Ra_m \left([\cos(\alpha) F(\eta, \theta) - \sin(\alpha) G(\eta, \theta)] \left(\frac{T^+(i, j+1) - T^+(i, j-1)}{2(\Delta \eta)} \right) \right.$$

$$+ N \left. \frac{C^+(i, j+1) - C^+(i, j-1)}{2(\Delta \eta)} \right)$$

$$- [\sin(\alpha) F(\eta, \theta) + \cos(\alpha) G(\eta, \theta)] \left(\frac{T^+(i+1, j) - T^+(i-1, j)}{2(\Delta \theta)} \right.$$

$$+ N \left. \frac{C^+(i+1, j) - C^+(i-1, j)}{2(\Delta \theta)} \right) \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned}
\psi^+(i, j) = & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(\Delta\eta)^2} + \frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right)^{-1} \left[\frac{\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i, j-1)}{(\Delta\eta)^2} + \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i-1, j)}{(\Delta\theta)^2} \right] \\
& + H. Ra_m \left([\cos(\alpha) F(\eta, \theta) - \sin(\alpha) G(\eta, \theta)] \left(\frac{T^+(i, j+1) - T^+(i, j-1)}{2(\Delta\eta)} \right) \right. \\
& + N \frac{C^+(i, j+1) - C^+(i, j-1)}{2(\Delta\eta)} \left. \right) \\
& - [\sin(\alpha) F(\eta, \theta) + \cos(\alpha) G(\eta, \theta)] \left(\frac{T^+(i+1, j) - T^+(i-1, j)}{2(\Delta\theta)} \right) \\
& + N \frac{C^+(i+1, j) - C^+(i-1, j)}{2(\Delta\theta)} \left. \right) \quad (3.42)
\end{aligned}$$

3.3.5.1 Discrétisations des conditions aux limites

Sur la paroi interne chaude à forte concentration ($j = 1$) :

$$\psi^+(i, 1) = 0$$

Sur la paroi externe froide à faible concentration ($j = NN$):

$$\psi^+(i, NN) = 0$$

3.4 Discrétisation des composantes de la vitesse

Nous utilisons également les différences centrées pour obtenir une expression discrétisée des composantes adimensionnelles de la vitesse, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
V_\eta^+(i, j) &= \frac{1}{H(i, j)} \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \Big|_{i, j} \\
&= \frac{1}{H(i, j)} \left[\frac{\psi^+(i+1, j) - \psi^+(i-1, j)}{2(\Delta\theta)} \right] \quad (3.43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_\theta^+(i, j) &= -\frac{1}{H(i, j)} \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \Big|_{i, j} \\
&= -\frac{1}{H(i, j)} \left[\frac{\psi^+(i, j+1) - \psi^+(i, j-1)}{2(\Delta\eta)} \right] \quad (3.44)
\end{aligned}$$

$$\forall (i, j) \quad i \neq 1 ; i \neq NI ; j \neq 1 ; j \neq NN$$

3.5 L'algorithme de calcul

Pour résoudre le système d'équations algébriques (3.31), (3.37) et (3.42) nous utilisons la méthode proposée par E.F. NOGOTOV [69] qui est une méthode itérative à coefficients de sous-relaxation et afin de faciliter l'application de cette méthode, ces équations adimensionnalisées et discrétisées peuvent se mettre sous la forme ci-dessous pour être mieux adaptées à une résolution à l'aide d'une **méthode itérative à coefficients de sous-relaxation** et pour la clarté de la présentation des équations, les indices exposants « + » indiquant le caractère adimensionnel des variables sont omis :

$$\begin{aligned}
T^{n+1}(i, j) &= (1 - G_T)T^n(i, j) \\
&+ \frac{G_T}{a_P} \cdot [a_N \cdot T^n(i + 1, j) + a_S \cdot T^{n+1}(i - 1, j) + a_E \cdot T^n(i, j + 1) \\
&+ a_W \cdot T^{n+1}(i, j - 1)]
\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}
C^{n+1}(i, j) &= (1 - G_C)C^n(i, j) \\
&+ \frac{G_C}{a_P} \cdot [a_N \cdot C^n(i + 1, j) + a_S \cdot C^{n+1}(i - 1, j) + a_E \cdot C^n(i, j + 1) \\
&+ a_W \cdot C^{n+1}(i, j - 1)]
\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}
\psi^{n+1}(i, j) &= (1 - G_P)\psi^n(i, j) \\
&+ \frac{G_P}{2} \left(\frac{1}{(\Delta\eta)^2} + \frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right)^{-1} \left[\frac{\psi^n(i, j + 1) + \psi^{n+1}(i, j - 1)}{(\Delta\eta)^2} \right. \\
&+ \left. \frac{\psi^n(i + 1, j) + \psi^{n+1}(i - 1, j)}{(\Delta\theta)^2} \right] \\
&+ H \cdot Ra_m \left([\cos(\alpha) F(\eta, \theta) - \sin(\alpha) G(\eta, \theta)] \left(\frac{T^{n+1}(i, j + 1) - T^{n+1}(i, j - 1)}{2(\Delta\eta)} \right) \right. \\
&+ \left. N \frac{C^{n+1}(i, j + 1) - C^{n+1}(i, j - 1)}{2(\Delta\eta)} \right) \\
&- [\sin(\alpha) F(\eta, \theta) + \cos(\alpha) G(\eta, \theta)] \left(\frac{T^{n+1}(i + 1, j) - T^{n+1}(i - 1, j)}{2(\Delta\theta)} \right) \\
&+ \left. N \frac{C^{n+1}(i + 1, j) - C^{n+1}(i - 1, j)}{2(\Delta\theta)} \right)
\end{aligned} \tag{3.47}$$

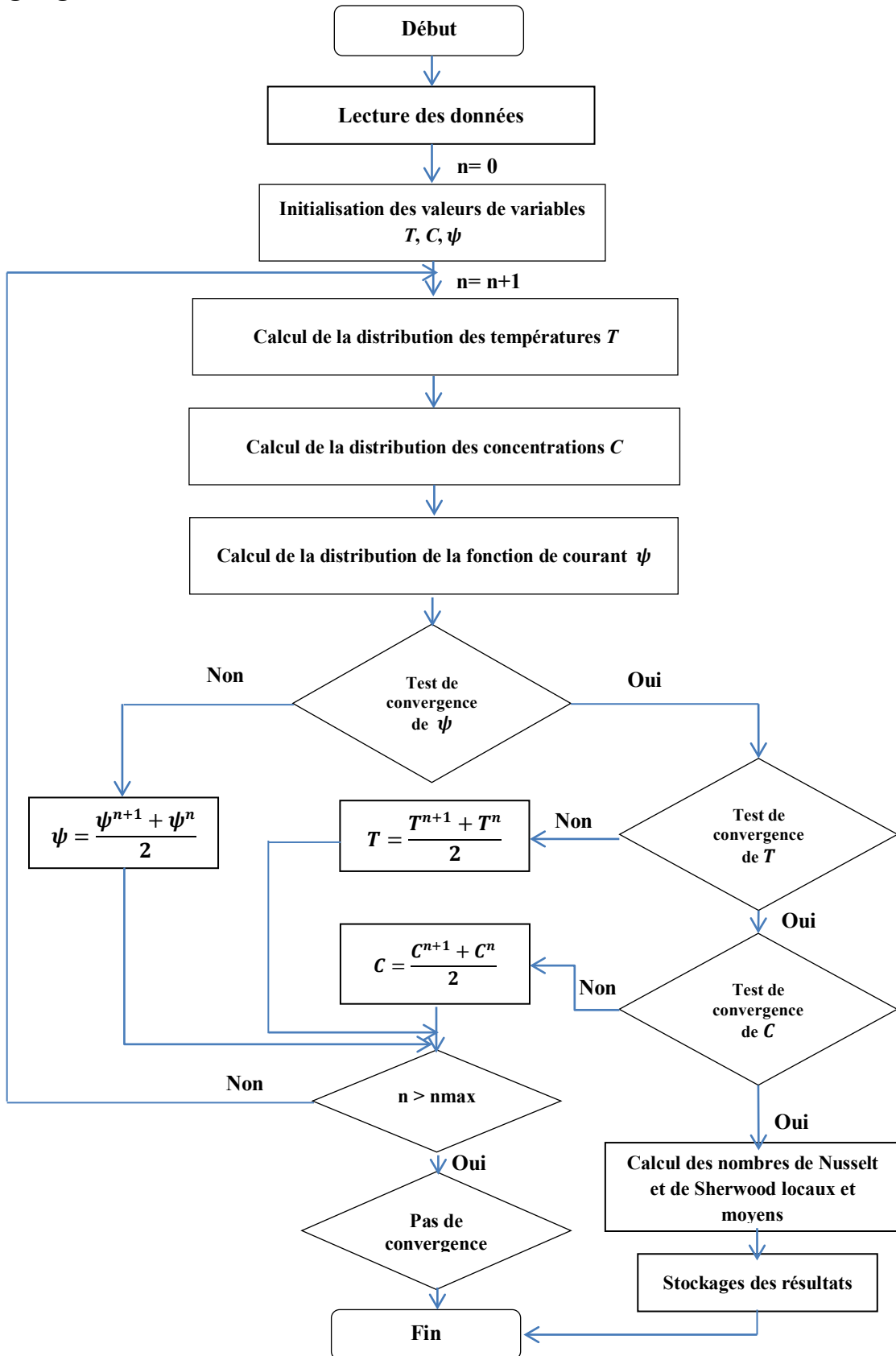
Les paramètres G_T , G_C et G_P sont les "facteurs de sous-relaxation". Leurs valeurs dépendent de la valeur du nombre de Darcy-Rayleigh (Ra_m). Nous résolvons le système d'équations (3.45), (3.46) et (3.47) où l'exposant « n » indique l'ordre de l'itération, de la façon suivante :

1. Initialisation des valeurs de chaque variable sur le maillage.
2. Calcul de la distribution de température.
3. Calcul de la distribution de concentration.
4. Calcul de la distribution de la fonction de courant.
5. Le processus itératif est répété jusqu'à ce qu'il y ait satisfaction des critères de convergence sur les valeurs de : ψ , T et C , selon le critères de convergence suivant :

$$\left| \frac{\max\phi^{n+1} - \max\phi^n}{\max\phi^{n+1}} \right| \leq 10^{-6}$$

6. Calcul des composantes de la vitesse.
7. Stockage des valeurs de T , C et ψ .
8. Fin du processus de calcul

3.6 L'organigramme



CHAPITRE IV:
RESULTATS ET DISCUSSIONS

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous avons présenté nos résultats avec leurs discussions et pour une meilleure représentation de ces résultats nous les avons divisés en deux parties, la première traite la convection naturelle purement thermique avec $N=0$ où nous présentons la distribution de la température par des isothermes et la structure de l'écoulement par des lignes de courant. Le taux d'échange de la chaleur au niveau des parois de l'espace annulaire sera présenté par les nombres de Nusselt locaux et moyens.

La deuxième partie concerne la convection naturelle bidiffusive avec $N \neq 0$ où nous présentons la distribution de la température par des isothermes, la concentration par des isoconcentrations et la structure de l'écoulement par des lignes de courant. Les taux d'échange de la chaleur et de la masse au niveau des parois de l'espace annulaire sont présentés respectivement par les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux et moyens.

Les paramètres de contrôle dans cette étude sont :

- Paramètres géométriques :
 - Les excentricités des cylindres elliptiques, intérieur et extérieur « e_1, e_2 »
 - L'angle de l'inclinaison de l'espace annulaire « α »
- Paramètres d'écoulement :
 - Le nombre de Rayleigh-Darcy « Ra_m »
 - Le rapport de flottabilités « N », $N=0$ pour le cas purement thermique
 - $N>0$ pour le cas coopérant
 - $N<0$ pour le cas opposant
 - Le nombre de Lewis « Le »

4.2 Etude du maillage

Nous mettons en évidence dans cette partie l'indépendance des résultats obtenus des maillages considérés pour les deux cas $N=0$ et $N=1$ pour un nombre de Lewis $Le=0.1$, les excentricités de $e_1=0.75$ et $e_2=0.5$ et pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh-Darcy « Ra_m » et pour deux positions de l'angle d'inclinaison $\alpha = 0^\circ$ et 45° .

Le tableau 4.1 représente les valeurs maximales de la fonction de courant et des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens sur la paroi interne pour différents maillages et nous a permis de choisir le maillage 71x91.

Tableau 4.1: Effet du maillage sur les résultats numériques pour le cas de la convection naturelle purement thermique avec $N=0$ et le cas bidiffusive avec $N=1$

		Maillage		11x21	21x31	31x41	41x51	51x71	61x81	71x91	81x101	91x111	
$N = 0$	$\alpha = 0^\circ$	$Ra_m = 100$	ψ_{max}	7.49	7.56	7.54	7.56	7.56	7.56	7.56	7.56	7.56	
			\overline{Nu}_i	2.19	2.28	2.31	2.33	2.36	2.37	2.37	2.37	2.37	2.37
		$Ra_m = 250$	ψ_{max}	15.97	15.97	16.03	15.99	15.97	15.97	15.97	15.97	15.97	15.97
			\overline{Nu}_i	3.21	3.46	3.55	3.60	3.65	3.67	3.67	3.67	3.67	3.68
		$Ra_m = 500$	ψ_{max}	25.66	25.61	25.57	25.51	25.42	25.37	25.37	25.37	25.37	25.36
			\overline{Nu}_i	4.31	4.83	5.00	5.09	5.17	5.22	5.22	5.22	5.22	5.22
	$\alpha = 45^\circ$	$Ra_m = 100$	ψ_{max}	8.59	8.68	8.69	8.69	8.68	8.69	8.69	8.69	8.69	8.69
			\overline{Nu}_i	2.28	2.38	2.42	2.44	2.46	2.48	2.48	2.48	2.48	2.48
		$Ra_m = 250$	ψ_{max}	17.83	17.88	17.89	17.89	17.85	17.83	17.83	17.83	17.82	17.82
			\overline{Nu}_i	3.38	3.68	3.78	3.83	3.88	3.92	3.92	3.92	3.92	3.92
		$Ra_m = 500$	ψ_{max}	28.25	28.11	28.00	27.95	27.84	27.80	27.77	27.75	27.75	27.72
			\overline{Nu}_i	4.52	5.13	5.34	5.44	5.53	5.59	5.59	5.59	5.59	5.61
$N = 1$	$\alpha = 0^\circ$	$Ra_m = 10$	ψ_{max}	1.60	1.60	1.60	1.60	1.60	1.60	1.60	1.59	1.60	
			\overline{Nu}_i	1.69	1.72	1.73	1.74	1.75	1.76	1.76	1.76	1.76	
			\overline{Sh}_i	1.66	1.69	1.70	1.71	1.72	1.72	1.73	1.73	1.73	
		$Ra_m = 100$	ψ_{max}	13.91	14.01	14.00	13.97	13.96	13.96	13.95	13.94	13.94	
			\overline{Nu}_i	2.95	3.14	3.21	3.24	3.28	3.29	3.30	3.30	3.30	
			\overline{Sh}_i	1.69	1.72	1.73	1.74	1.75	1.75	1.76	1.76	1.76	
		$Ra_m = 250$	ψ_{max}	28.60	28.65	28.54	28.43	28.36	28.33	28.29	28.29	28.28	
			\overline{Nu}_i	4.47	4.96	5.12	5.21	5.28	5.31	5.33	5.33	5.32	
			\overline{Sh}_i	1.76	1.80	1.82	1.83	1.84	1.84	1.85	1.85	1.85	
		$\alpha = 45^\circ$	$Ra_m = 10$	ψ_{max}	1.84	1.83	1.83	1.84	1.84	1.84	1.84	1.84	1.84
				\overline{Nu}_i	1.70	1.73	1.73	1.75	1.76	1.76	1.77	1.77	1.77
				\overline{Sh}_i	1.66	1.69	1.69	1.71	1.72	1.72	1.73	1.73	1.73
	$Ra_m = 100$		ψ_{max}	15.88	15.84	15.79	15.79	15.78	15.76	15.74	15.74	15.73	
			\overline{Nu}_i	3.15	3.37	3.45	3.493	3.51	3.54	3.55	3.55	3.55	
			\overline{Sh}_i	1.69	1.72	1.73	1.74	1.75	1.75	1.76	1.76	1.77	
	$Ra_m = 250$	ψ_{max}	32.23	31.87	31.66	31.63	31.50	31.49	31.46	31.46	31.46		
		\overline{Nu}_i	4.72	5.31	5.51	5.60	5.69	5.72	5.76	5.76	5.77		
		\overline{Sh}_i	1.78	1.82	1.83	1.84	1.85	1.86	1.86	1.86	1.86		

4.2.1 Représentation graphique du tableau 4.1

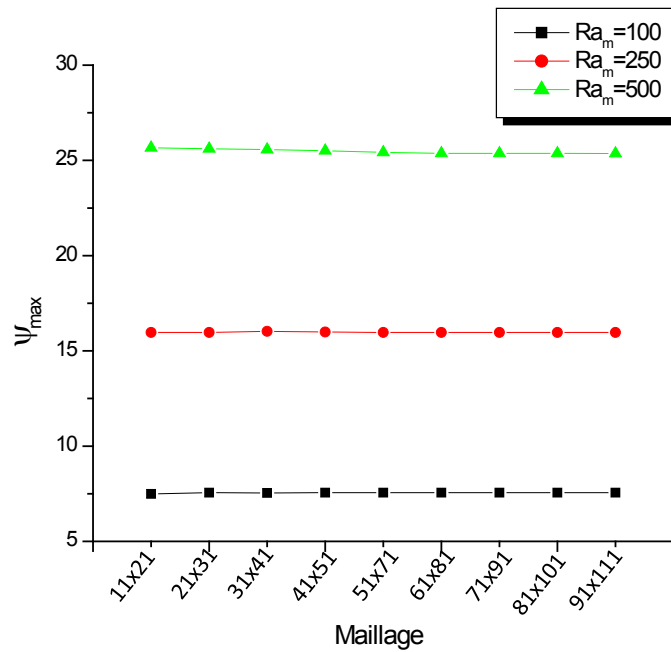


Figure 4.1.a : Variation de la valeur maximale de la fonction de courant en fonction du maillage pour $e_1=0.75$, $e_2=0.5$, $N=0$ et $\alpha=0^\circ$.

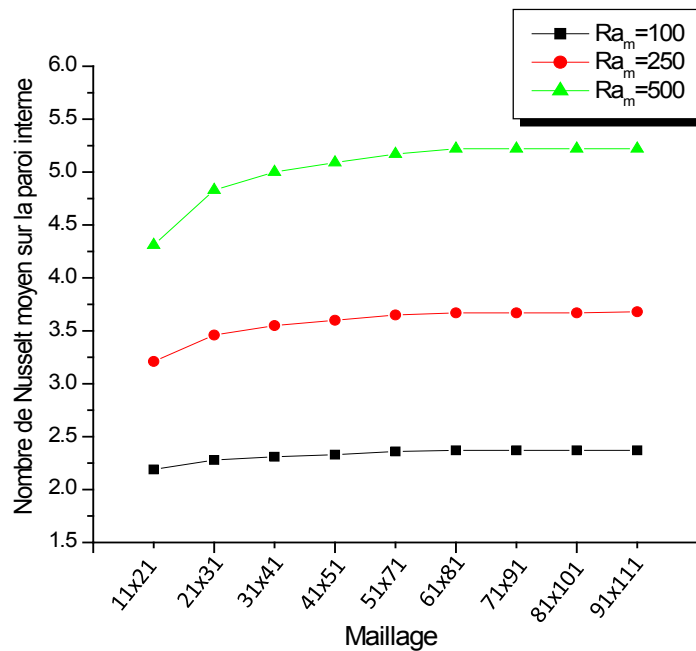


Figure 4.1.b : Variation du nombre de Nusselt moyen sur la paroi interne en fonction du maillage pour $e_1=0.75$, $e_2=0.5$, $N=0$ et $\alpha=0^\circ$.

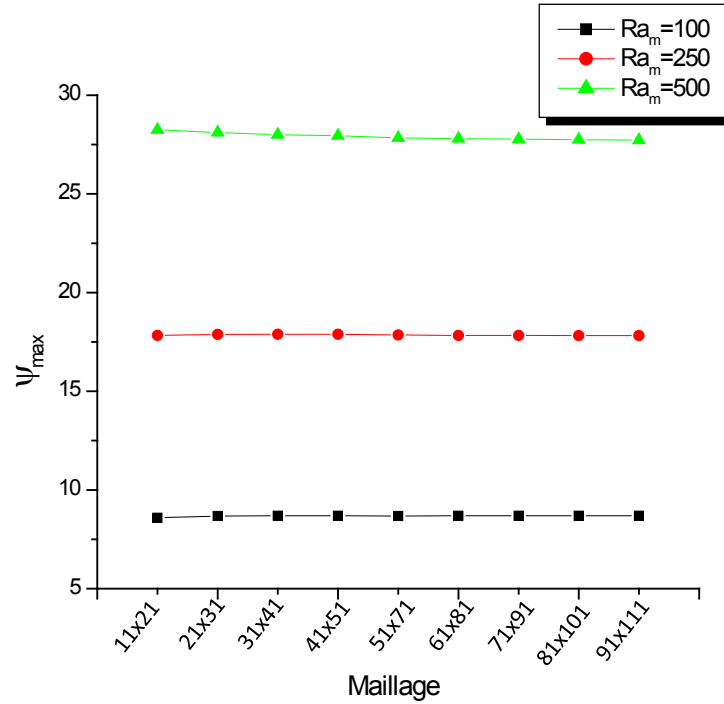


Figure 4.1.c : Variation de la valeur maximale de la fonction de courant en fonction du maillage pour $e_1=0.75$, $e_2=0.5$, $N=0$ et $\alpha=45^\circ$.

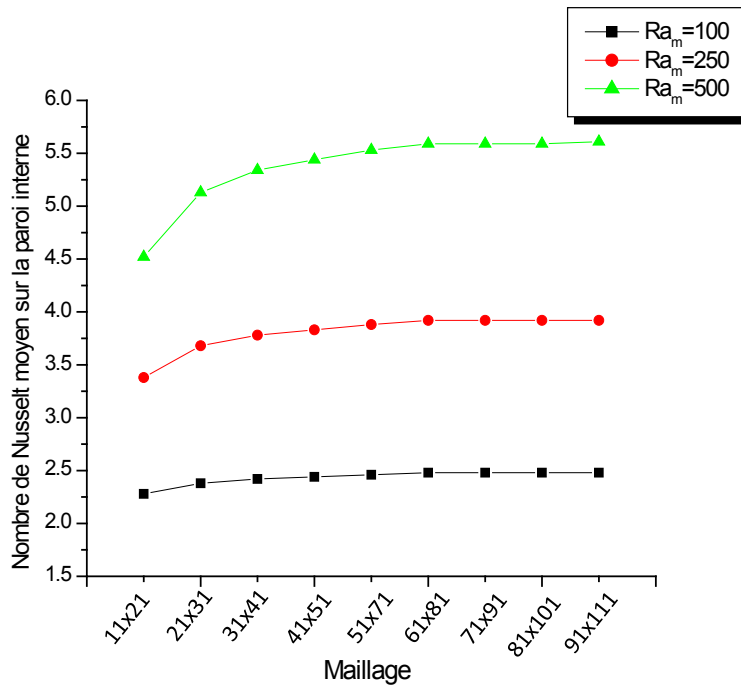


Figure 4.1.d : Variation du nombre de Nusselt moyen sur la paroi interne en fonction du maillage pour $e_1=0.75$, $e_2=0.5$, $N=0$ et $\alpha=45^\circ$.

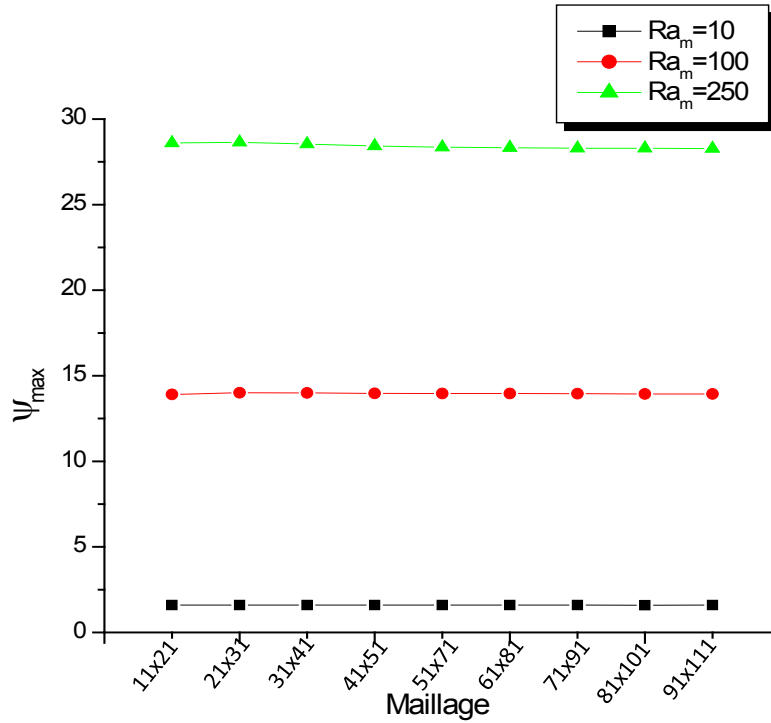


Figure 4.2.a : Variation de la valeur maximale de la fonction de courant en fonction du maillage pour $e_1=0.75$, $e_2=0.5$, $N=1$, $Le=0.1$ et $\alpha=0^\circ$.

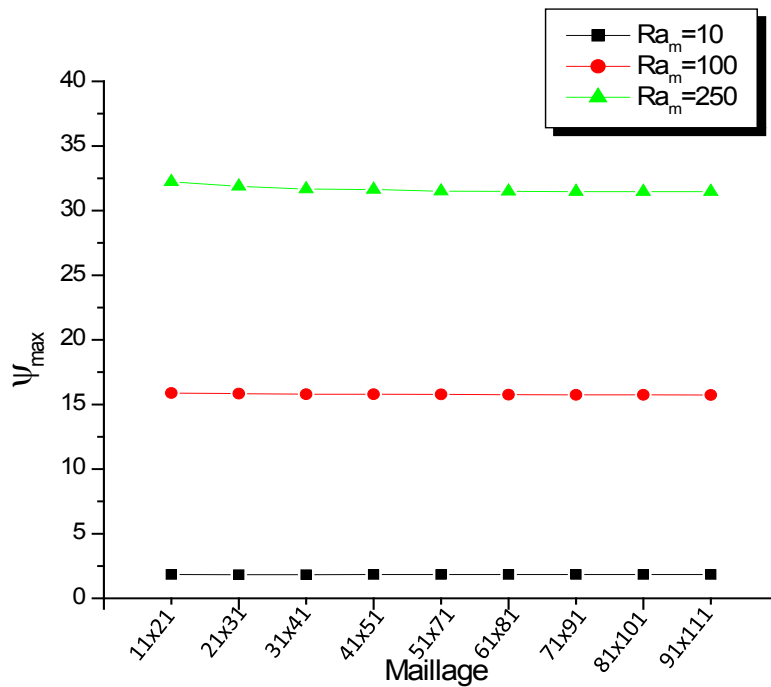


Figure 4.2.b : Variation de la valeur maximale de la fonction de courant en fonction du maillage pour $e_1=0.75$, $e_2=0.5$, $N=1$, $Le=0.1$ et $\alpha=45^\circ$.

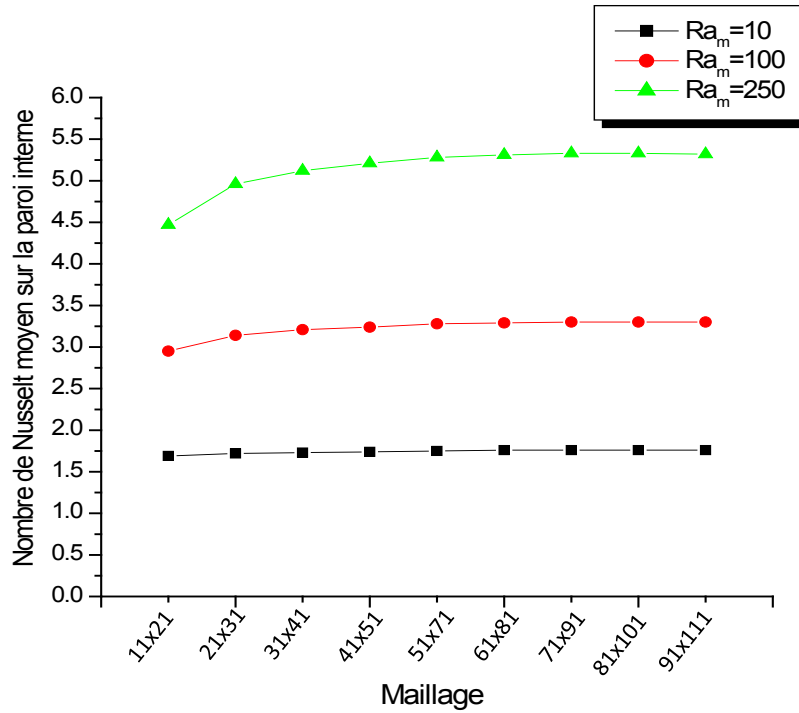


Figure 4.2.c : Variation du nombre de Nusselt moyen sur la paroi interne en fonction du maillage pour $e_1=0.75$, $e_2=0.5$, $N=1$, $Le=0.1$ et $\alpha=0^\circ$.

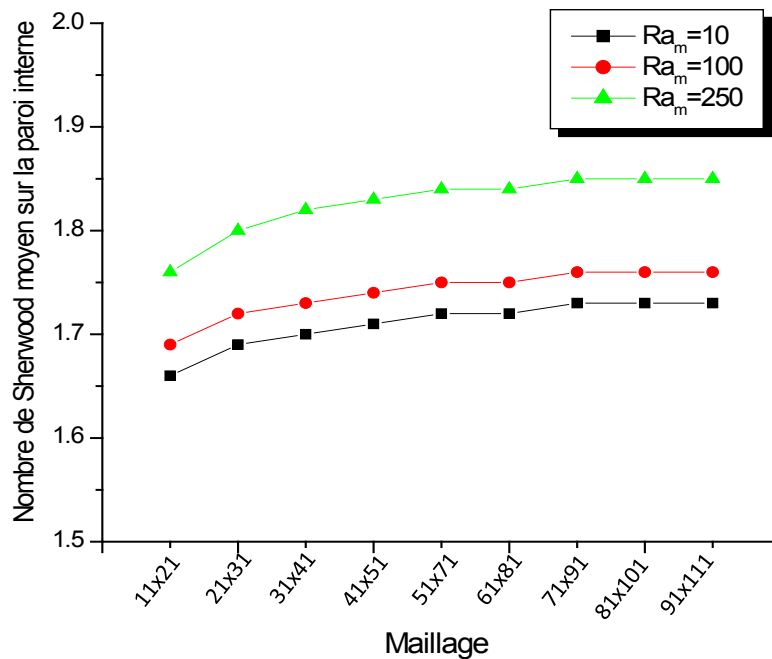


Figure 4.2.d : Variation du nombre de Sherwood moyen sur la paroi interne en fonction du maillage pour $e_1=0.75$, $e_2=0.5$, $N=1$, $Le=0.1$ et $\alpha=0^\circ$.

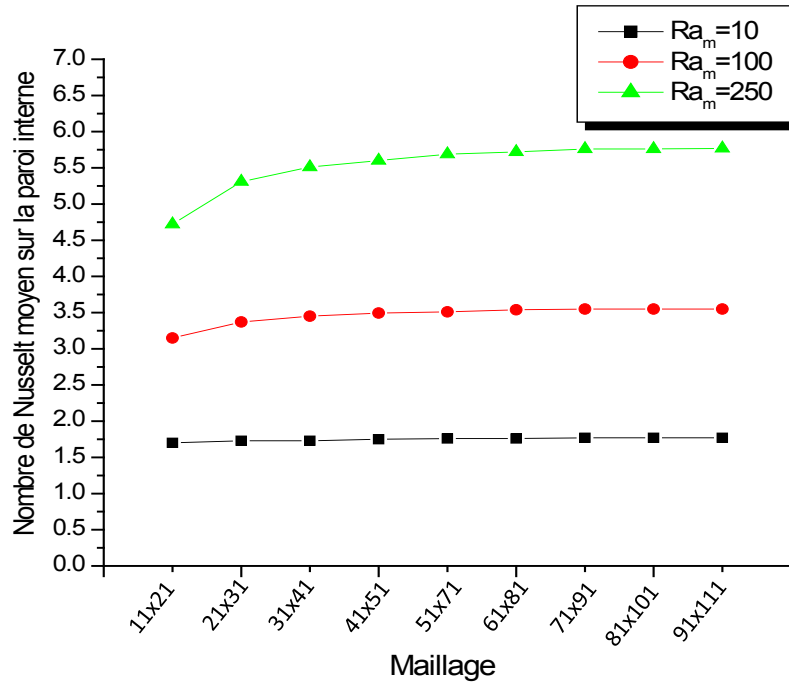


Figure 4.2.e : Variation du nombre de Nusselt moyen sur la paroi interne en fonction du maillage pour $e_1=0.75$, $e_2=0.5$, $N=1$, $Le=0.1$ et $\alpha=45^\circ$.

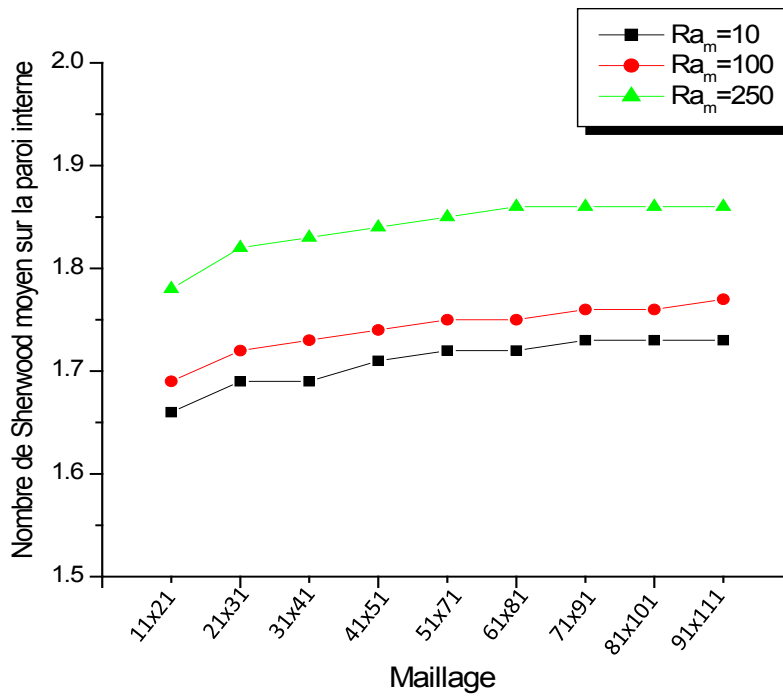


Figure 4.2.f : Variation du nombre de Sherwood moyen sur la paroi interne en fonction du maillage pour $e_1=0.75$, $e_2=0.5$, $N=1$, $Le=0.1$ et $\alpha=45^\circ$.

4.3 Validation numérique

Nous avons Comparé nos résultats issus de ce code de calcul avec les résultats des travaux similaires disponibles dans la littérature, pour le cas purement thermique où $N=0$ et pour le cas des transferts couplés de chaleur et de masse avec $N=1$. Les références utilisées pour le cas de la convection purement thermique avec $N=0$ sont [38], [44], [49], [50] et [60]. La référence [60] est également utilisée pour le cas de la convection bidiffusive avec $N=1$.

4.3.1 Le cas de la convection naturelle purement thermique avec $N=0$

4.3.1.1 La configuration circulaire

a. Le cas de l'anneau circulaire avec un rapport de rayon $R=2$ pour les excentricités qui correspondent à $a_2/a_1 = 2$ et $b_1/a_1 = 0.99$ avec un nombre de Prandtl $Pr=7$.

Tableau 4.2: Comparaison quantitative avec les références [38], [44], [49], [50] et [60] du nombre de Nusselt moyen (\overline{Nu}_i) sur la paroi interne pour un rapport de rayon $R=2$ avec $Pr=7$

Ra_m	25	63	70	90	100	105	112	150	200	500
Référence [38] 1976	1.0993	-	-	-	1.8286	-	-	-	2.6256	4.1983
Référence [44] 1997	-	-	-	-	1.8670	-	-	2.3090	-	-
Référence [49] 2006	1.1095	-	-	-	1.8629	-	-	2.3023	2.6764	4.2741
Référence [50] 1999	-	1.4943	1.5710	1.7681	1.8571	1.8997	1.9570	-	-	-
Référence [60] 2010	1.1076	-	-	-	1.8544	-	-	2.3022	2.6495	4.2631
Présent travail	1.0748	1.4810	1.5523	1.7823	1.8536	1.9032	1.9805	2.3421	2.7279	4.0956
Erreur relative maximale	3.12%	0.89%	1.19%	0.79%	1.35%	0.18%	1.18%	1.70%	3.75%	4.17%

b. Le cas de l'anneau circulaire avec un rapport de rayon $R=1.2$

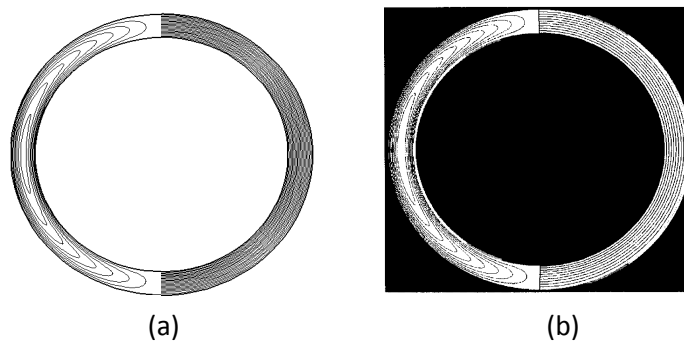


Figure 4.3 : Isocourants et isothermes pour $Ra_m=70$, un rapport de rayon $R=1.2$ avec $Pr = 7$
 (a) Présent travail, (b) Référence [50]

Tableau 4.3: Comparaison quantitative avec la référence [50] du nombre de Nusselt moyen (\overline{Nu}_i) sur la paroi interne pour un rapport de rayon $R=1.2$ avec $Pr=7$

Ra_m	35	70	142	212	285	355
Présent travail	1.0525	1.0544	1.0623	1.0748	1.0928	1.1141
Référence [50]	1.0027	1.0083	1.0127	1.0286	1.0720	1.1477
Erreur relative	4.73%	4.37%	4.66%	4.29%	1.90%	2.92%

4.3.1.2 La configuration elliptique

- a) Le cas de l'anneau elliptique avec les excentricités qui correspondent à $a_2/a_1=2$ et $b_1/a_1=0.5$ et pour l'inclinaison $\alpha = 0^\circ$ afin de comparer nos résultats avec les résultats dans la référence [50].

Tableau 4.4: Comparaison quantitative avec la référence [50] du nombre de Nusselt moyen (\overline{Nu}_i) sur la paroi interne pour différents Ra_m avec $a_2/a_1=2$, $b_1/a_1=0.5$ et $Pr=7$

Ra_m	57	72.5	75	92.5	115	138.5	173	179
\overline{Nu}_i Présent travail	1.8494	2.0929	2.1298	2.3651	2.6485	2.9070	3.2447	3.2993
\overline{Nu}_i Référence [50]	1.8268	2.0555	2.1086	2.3340	2.6243	2.8798	3.3957	3.4520
Erreur relative %	1.22	1.78	0.99	1.31	0.91	0.93	4.44	4.42

- a) Le cas de la configuration elliptique, avec les excentricités qui correspondent à $a_2/a_1=1.1$ et $b_1/a_1=0.1$ pour le régime bicellulaire.

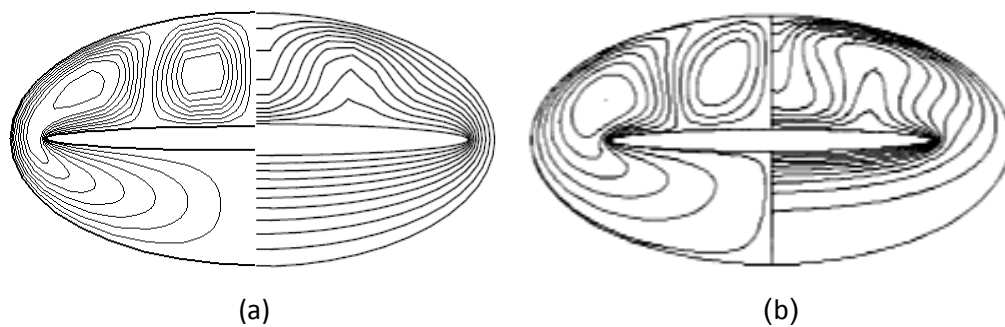


Figure 4.4 : comparaison qualitative des isocourants et isothermes pour $Ra_m=200$, $a_2/a_1=1.1$ and $b_1/a_1=0.1$ et $Pr=7$

(a) Présent travail, (b) Référence [50]

4.3.2 Le cas de la convection bidiffusive en mode coopérant avec $N=1$

Le cas de la configuration circulaire de l'espace annulaire avec un rapport de rayon $R=2$ pour $N=1$ qui correspond au cas coopérant des gradients température et de concentration.

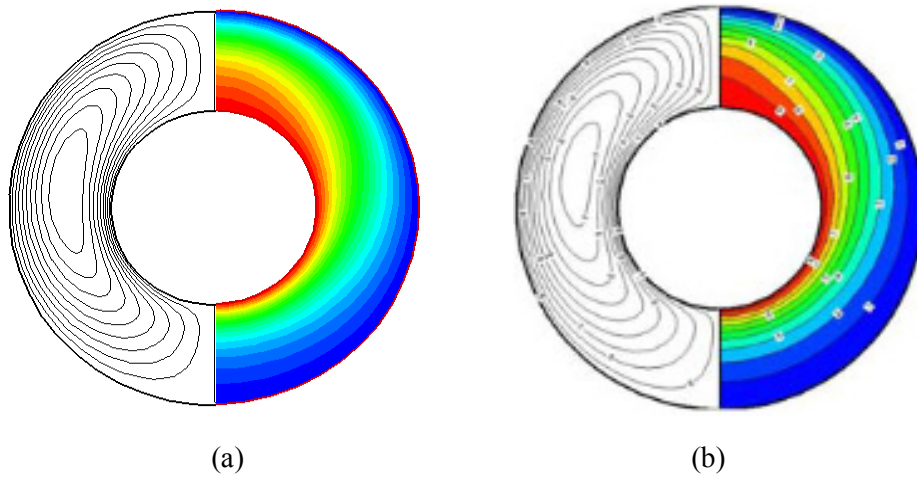


Figure 4.5 : Isocourants et isothermes pour $R=2$, $Ra_m = 25$, $N=1$ et $Pr=7$
 (a) Présent travail, (b) Référence [60]

Tableau 4.5: Comparaison quantitative avec la référence [60] du nombre de Sherwood moyen (\overline{Sh}_i) sur la paroi interne pour un rapport de rayon $R=2$, $Le=1$, $N=1$ et $Pr=7$

Ra_m	25	100	150	200
Présent travail	1.1654	2.2644	2.7213	3.0860
Référence [60]	1.1193	2.2665	2.7744	3.1975
Erreur relative	3.95%	0.09%	1.91%	3.43%

Première partie des résultats :
Convection naturelle purement thermique

4.4 Convection naturelle purement thermique avec $N=0$

Dans cette première partie où on traite uniquement le transfert de chaleur au sein d'une enceinte annulaire remplie d'un milieu poreux saturé d'air avec un nombre de Prandtl $Pr=0.702$, on va examiner l'effet des différents paramètres de contrôle sur la distribution de la température, la structure de l'écoulement ainsi que sur le nombre de Nusselt qui exprime le taux d'échange de chaleur au niveau des parois de l'espace annulaire.

4.4.1 Effet du nombre de Rayleigh-Darcy « Ra_m »

4.4.1.1 Les isothermes et les lignes de courant

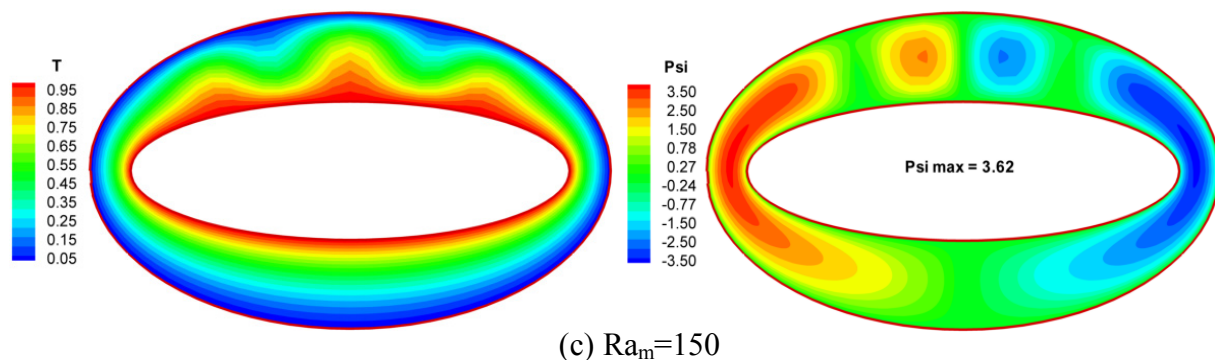
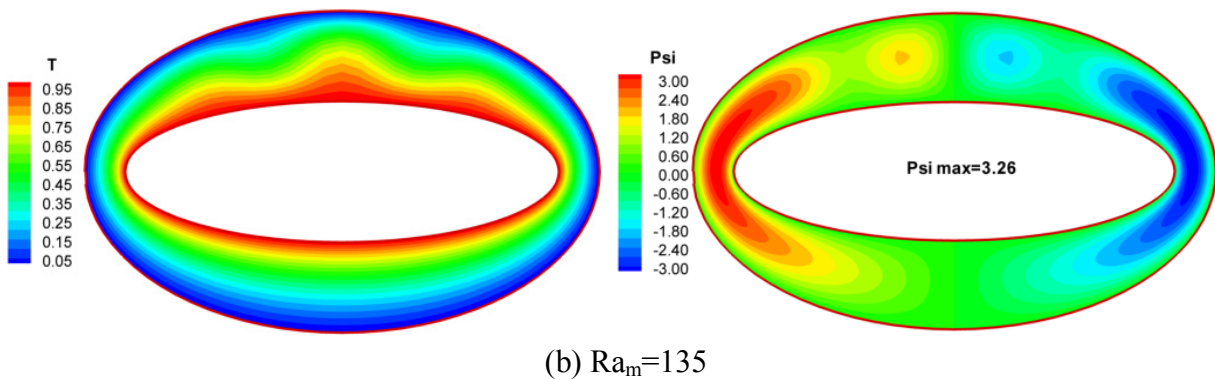
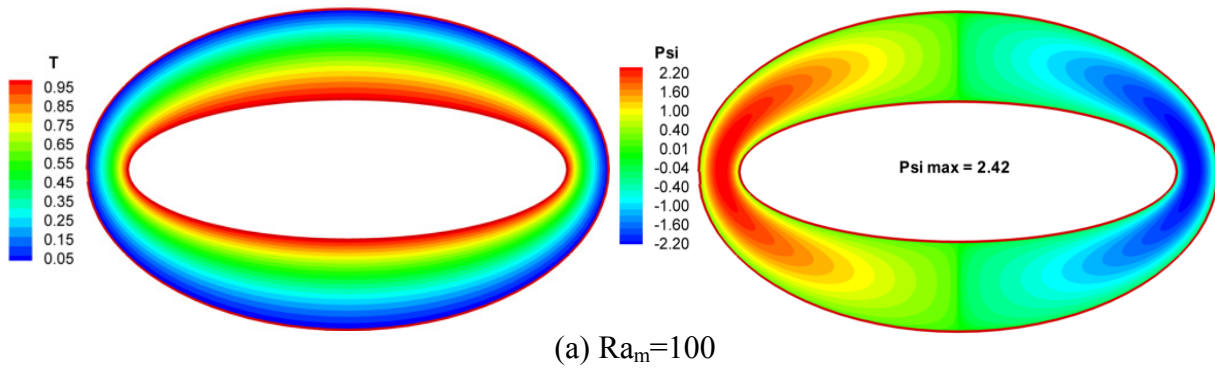
Nous présentons les isothermes et les lignes de courant pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh-Darcy dans le cas d'un espace annulaire délimité par deux cylindres elliptiques dont les excentricités respectives sont $e_1 = 0.95$ et $e_2 = 0.8$ en position horizontale avec $\alpha=0^\circ$.

Nous constatons sur ces figures que les isothermes et les lignes de courant sont symétriques par rapport à un plan fictif vertical médian. Les isothermes de la figure 4.6.a correspondant à $Ra_m=100$ sont des courbes fermées parallèles et concentriques qui épousent bien le profil des parois, la répartition de la température est simplement décroissante de la paroi chaude vers la paroi froide. Les lignes de courant de la même figure montrent que l'écoulement est organisé en deux cellules principales qui tournent très lentement dans des directions opposées. La cellule en rouge tourne dans le sens trigonométrique par contre la cellule en bleu tourne dans le sens horaire. Ceci est dû au déplacement des particules de fluide vers le haut de l'enceinte sous l'effet de la poussée d'Archimède en s'échauffant le long de la paroi chaude et le déplacement vers le bas des particules de fluide sous l'effet de la pesanteur en se refroidissant le long de la paroi froide. Les valeurs de la fonction de courant sont très faibles. Dans ce cas, le transfert de chaleur se fait principalement par conduction. Les figures (4.6.b) et (4.6.c) correspondant respectivement à $Ra_m=135$ et $Ra_m=150$ montrent que les isothermes sont modifiées dans la partie supérieure de l'enceinte. Le sens de la déformation des isothermes correspond à la direction de rotation des lignes de courant. Les valeurs de fonction de courant augmentent progressivement avec l'augmentation de la valeur de Ra_m ce qui signifie que la convection naturelle s'intensifie. Les isothermes dans la partie inférieure restent toujours parallèles ce qui traduit que le transfert de chaleur dans cette partie de l'enceinte se fait principalement par conduction.

Dans la figure 4.6.b on peut voir l'apparition de bifurcations donnant naissance de deux cellules supplémentaires qui se détachent des cellules principales sous l'effet de l'intensification de l'écoulement, ces petites cellules tournent dans les sens contraires de leurs cellules voisines ainsi que l'une par rapport à l'autre. Dans la figure 4.6.c pour $Ra_m=150$, l'augmentation du nombre de Rayleigh-Darcy engendre une intensification de la convection naturelle qui a permis le détachement complet des cellules supplémentaires qui commencent à prendre de l'ampleur et à occuper plus d'espace dans cette région. En augmentant davantage la valeur de Rayleigh-Darcy à $Ra_m=175$, la convection s'intensifie sensiblement pour donner un régime d'écoulement transitant

d'un régime bicellulaire vers un régime multicellulaire comme le montre la figure 4.6.d où la genèse des deux autres cellules est très apparente.

La figure 4.6.e pour la valeur de $Ra_m = 500$ illustre bien les bifurcations avec les quatre cellules supplémentaires chacune tournant dans le sens inverse de sa cellule voisine. L'augmentation du nombre de Rayleigh-Darcy a permis de passer à un autre régime d'écoulement qui est l'écoulement multicellulaire, avec l'apparition de ces bifurcations dans la partie supérieure de l'espace annulaire qui représente une zone d'instabilité pour les grandes valeurs du nombre de Rayleigh-Darcy. Les isothermes dans la partie supérieure de l'espace annulaire se déforment et s'enfoncent dans la zone où il y a présence de deux tourbillons contra-rotatifs. Le fluide est presque immobile dans la partie inférieure de l'enceinte où le transfert est quasi-conductif.



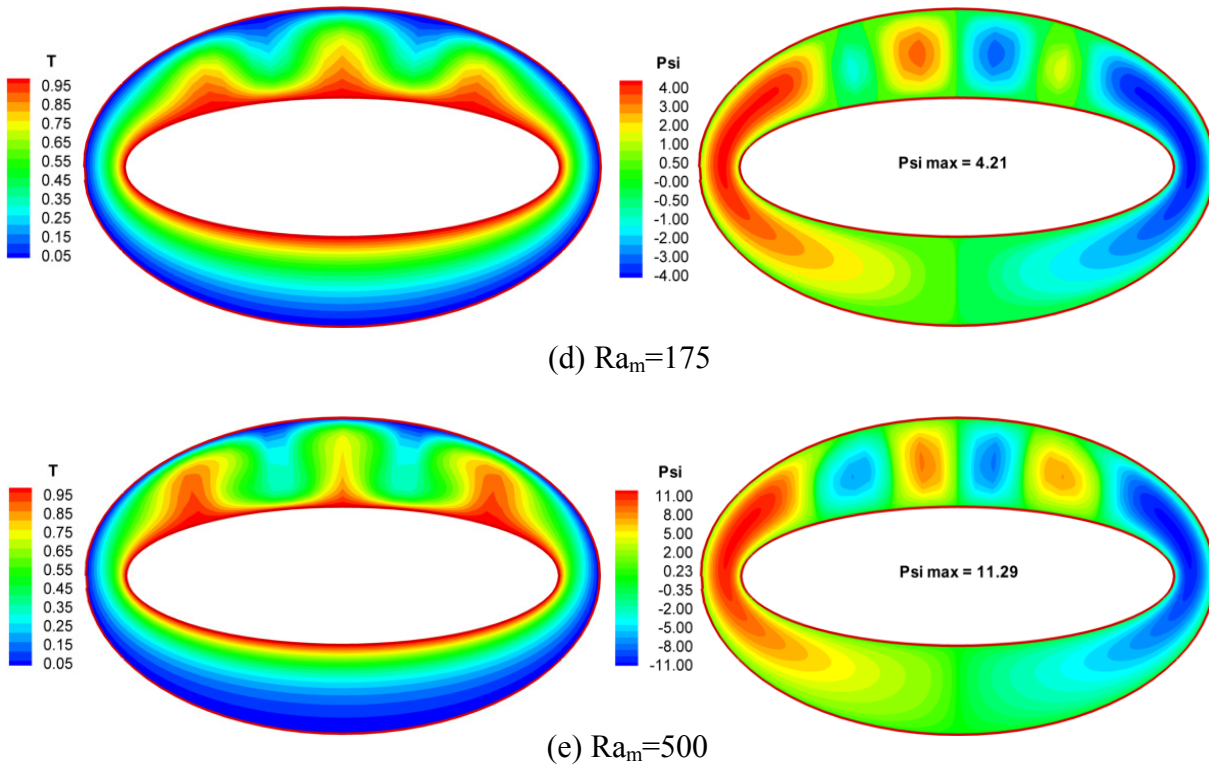


Figure 4.6 : Isothermes et lignes de courant pour $e_1=0,95$, $e_2=0,8$ et $\alpha=0$

4.4.1.2 Le nombre de Nusselt local

La figure 4.7 montre la variation du nombre de Nusselt local sur la paroi interne du cylindre elliptique pour les excentricités $e_1=0.95$ et $e_2=0.8$, cette variation nous permet de constater qu'avec l'augmentation du nombre de Rayleigh-Darcy, la valeur du nombre de Nusselt local augmente, ce qui est évident car le transfert par convection s'intensifie et le taux d'échange entre les parois et le fluide augmente. Cette figure montre pour $Ra_m > 100$, l'existence de trois minima et deux maxima dans la partie supérieure de l'enceinte ($30^\circ < \theta < 150^\circ$) correspondant à la juxtaposition des cellules qui tournent en sens inverse les unes par rapport aux autres repoussant le fluide de la paroi chaude dans le cas d'un minimum, et l'amenant vers celle-ci dans le cas d'un maximum. Alors que pour la valeur $Ra_m=100$ l'allure de la courbe est similaire à celles de la partie inférieure de l'enceinte correspondant à une zone morte, ce qui nous met en présence d'un régime d'écoulement pseudo-conductif.

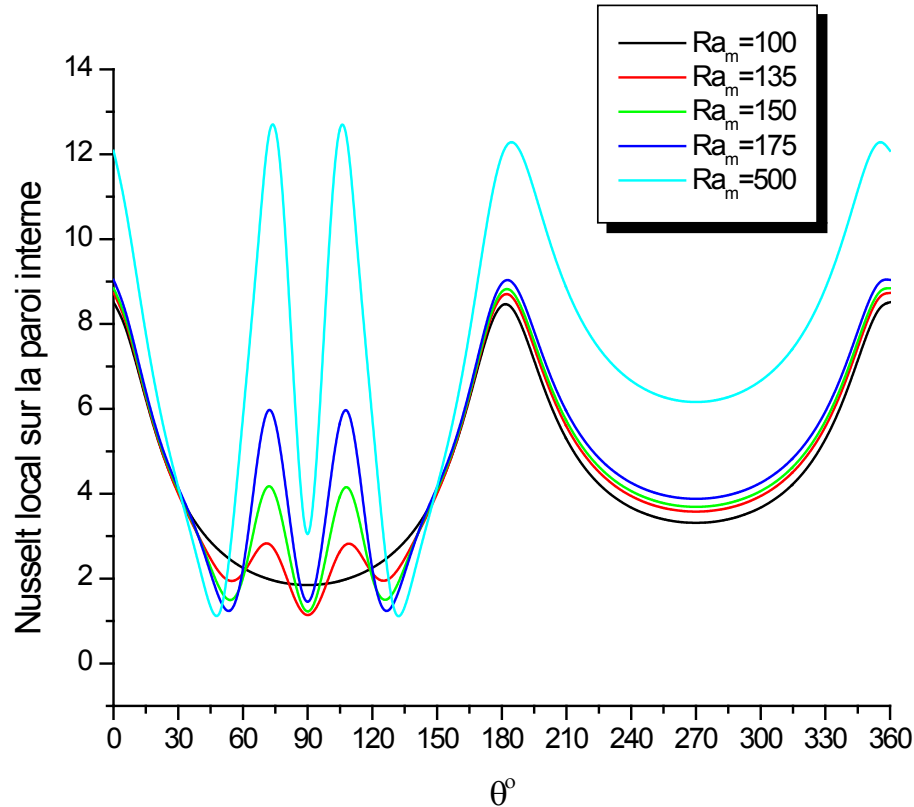


Figure 4.7 : La variation du nombre de Nusselt local sur la paroi interne en fonction de la position azimutale θ , pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh-Darcy Ra_m

4.4.2 Effet de l'angle d'inclinaison « α »

On va examiner l'effet de l'inclinaison du système par rapport à la verticale où l'angle est calculé à partir de l'horizontale dans le sens trigonométrique. Pour cela nous avons considéré plusieurs valeurs de α (0° , 15° , 30° , 45° , 60° et 90°) pour les excentricités $e_1=0.95$ et $e_2=0.8$ et pour le nombre de Rayleigh-Darcy $Ra_m=500$.

4.4.2.1 Les isothermes et les lignes de courant

Le cas où l'angle d'inclinaison est égal à zéro $\alpha=0^\circ$:

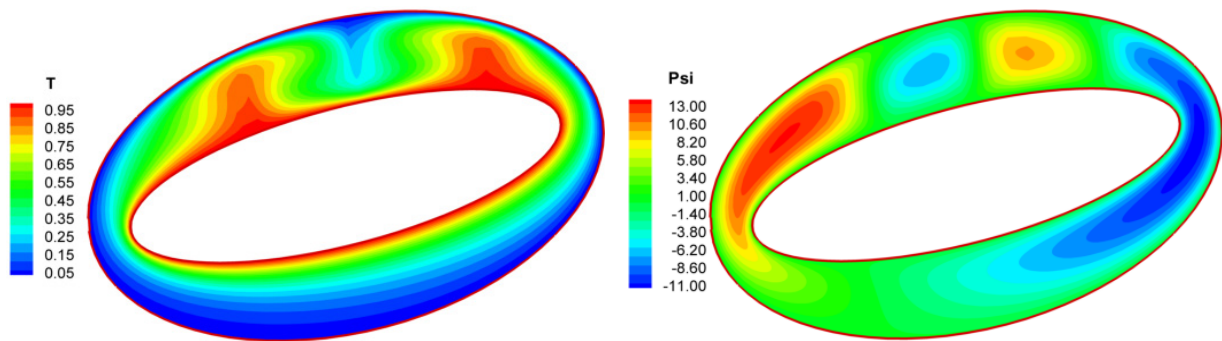
Dans ce cas, le plan fictif vertical médian (passant par les petits axes des ellipses) est en principe un plan de symétrie pour les phénomènes de transfert. Par conséquent, l'écoulement s'organise par symétrie et par rapport à ce plan vertical en deux cellules principales tournant en sens inverse l'une par rapport à l'autre avec les quatre cellules qui résultent de bifurcations comme le montre la figure 4.6.e.

Le cas où l'angle d'inclinaison $\alpha \neq 0^\circ$ et $\alpha \neq 90^\circ$:

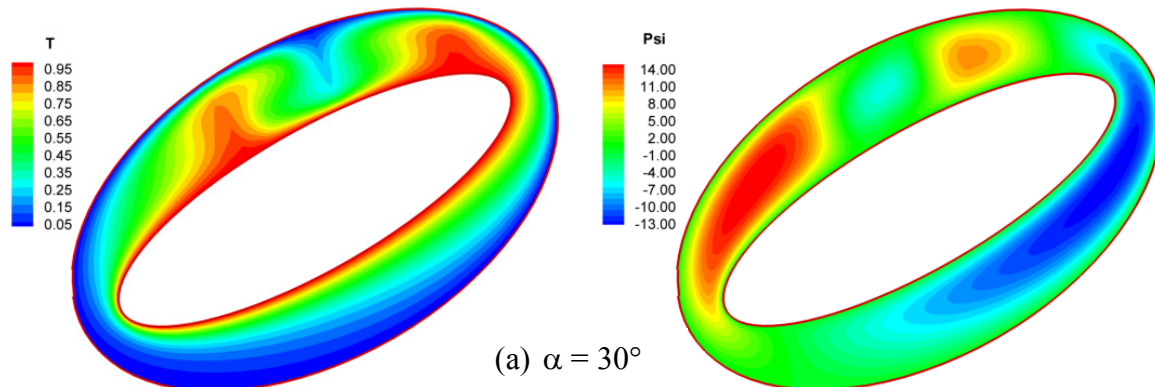
En donnant à l'angle α une valeur autre que 0° et 90° , nous détruisons la symétrie du système par rapport au plan fictif vertical médian. Les figures (4.8.a), (4.8.b) et (4.8.c) qui représentent respectivement les isothermes et les lignes de courant pour $\alpha=15^\circ$, 30° et 45° et pour $Ra_m=500$, montrent que le tourbillon de droite peut davantage se développer par rapport à son homologue dans la partie gauche et que la cellule de la partie droite inférieure se développe aussi davantage que son homologue dans la partie gauche. La cellule à gauche se déplace à la partie supérieure de l'espace annulaire pour fusionner avec le tourbillon supérieur de la partie droite du système ceci en augmentant l'angle d'inclinaison jusqu'à $\alpha=60^\circ$ comme c'est illustré sur la figure 4.8.d qui montre que ces deux tourbillons se développent pour occuper entièrement l'espace annulaire.

Le cas où l'angle d'inclinaison $\alpha=90^\circ$

Lorsque $\alpha=90^\circ$, le plan fictif vertical médian (qui dans ce cas passe par les grands axes des ellipses) est un plan de symétrie, la figure 4.8.e montre que les isothermes représentent des courbes fermées presque parallèles et concentriques qui épousent presque le profil des parois. Dans la région sommitale, ces isothermes s'insèrent vers le haut de l'enceinte, cela est dû à la séparation des particules se déplaçant de la paroi chaude vers la paroi froide au niveau du plan de symétrie, ce qui montre la présence sur chacun des deux côtés de l'espace annulaire, d'une cellule de circulation qui emporte les particules du fluide de la paroi chaude vers la paroi froide.



(b) $\alpha = 15^\circ$



(a) $\alpha = 30^\circ$

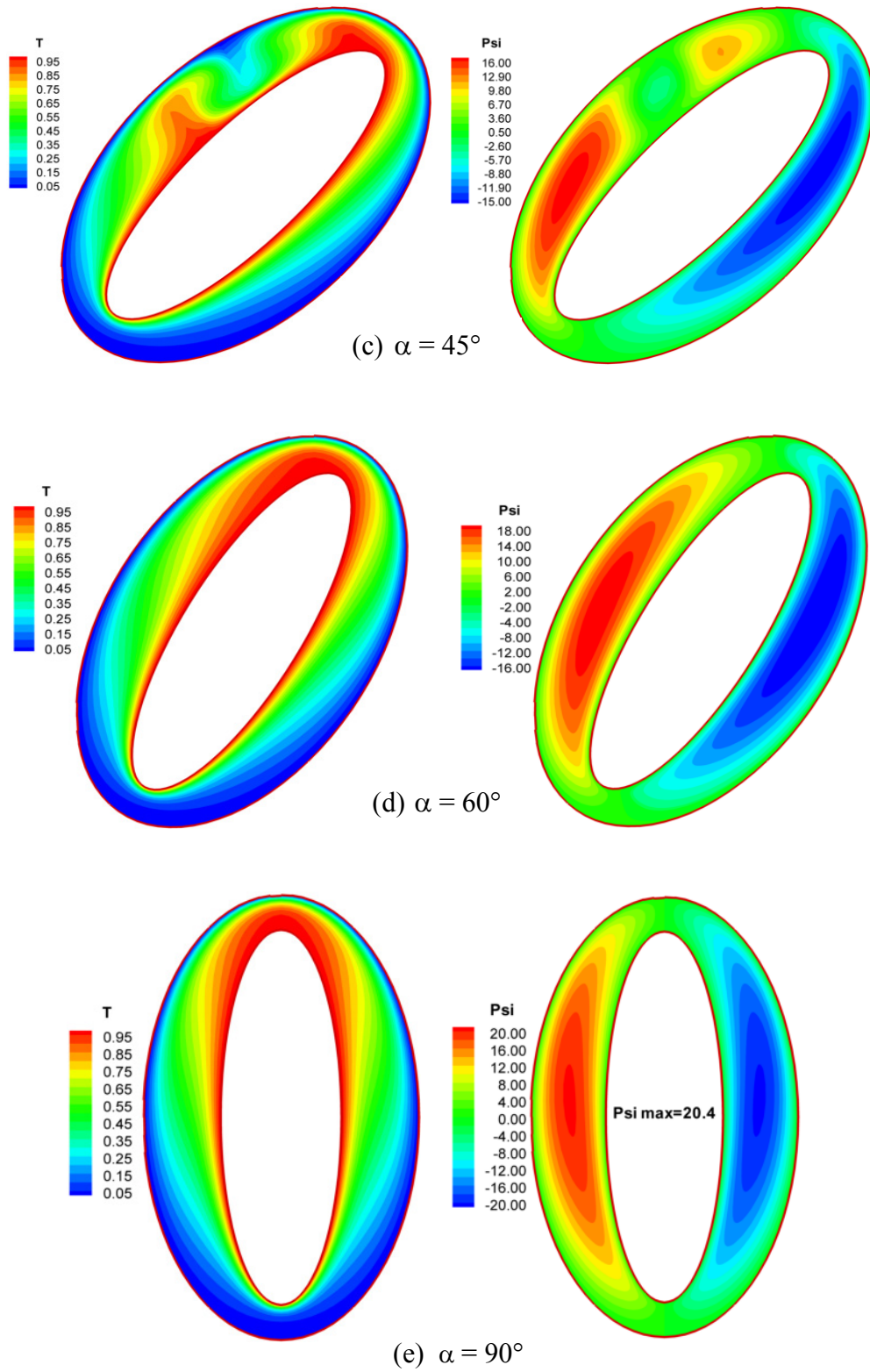


Figure 4.8 : Isothermes et lignes de courant pour $Ra_m = 500$, $e_1 = 0,95$ et $e_2 = 0,8$

4.4.2.2 Le nombre de Nusselt local

La variation du nombre de Nusselt local sur la paroi interne illustrée sur la figure 4.9 est en très bon accord avec les distributions des isothermes dans les figures précédentes. Les courbes qui correspondent à $0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$ montrent l'existence des minima et des maxima dans la partie supérieure de l'enceinte où $30^\circ < \theta < 150^\circ$, ce qui interprète la présence d'un régime multicellulaire pour ces inclinaisons. Pour le cas de $\alpha=60^\circ$ et 90° , les deux courbes présentent un seul maximum à $\theta=180^\circ$ et un seul minimum à $\theta=0^\circ$ ceci est dû au fait que nous sommes en présence de deux cellules principales éloignant du fluide de la paroi chaude à $\theta=0^\circ$ et l'amenant vers celle-ci à $\theta=180^\circ$, ces deux positions correspondent aux deux rétrécissements de l'espace annulaire.

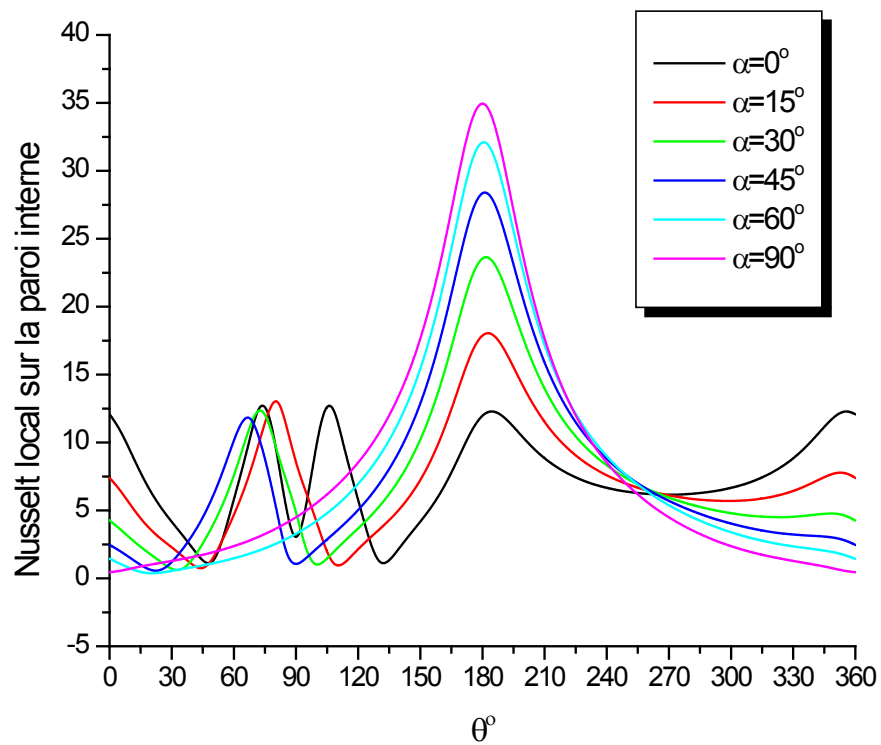


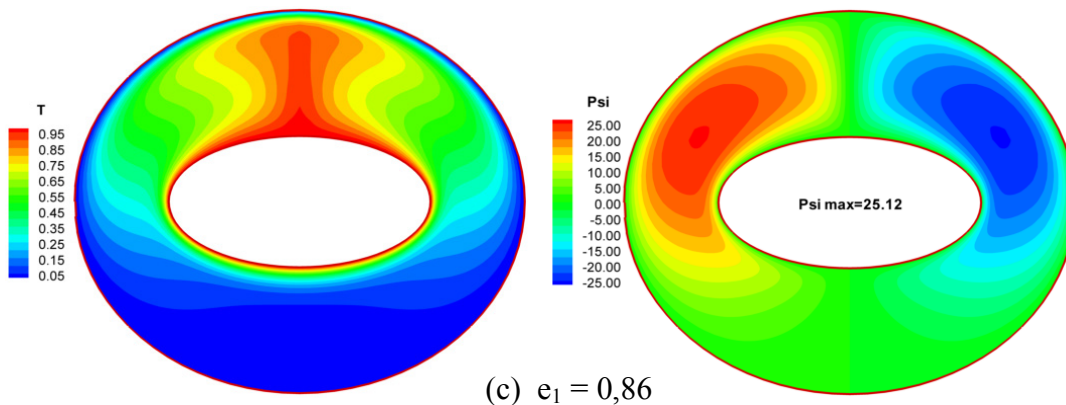
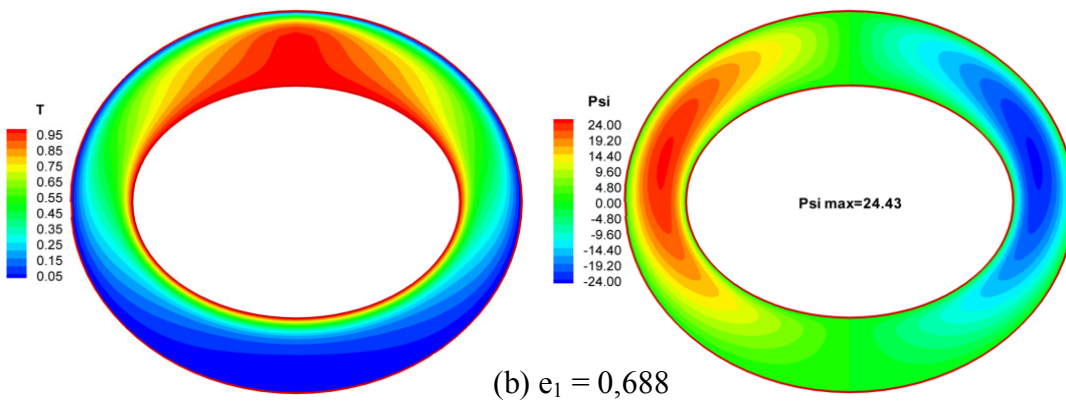
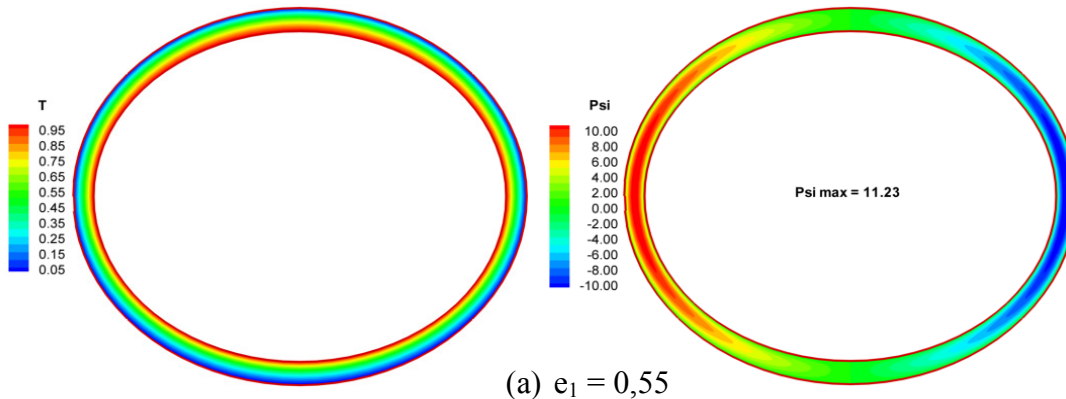
Figure 4.9 : La variation du nombre de Nusselt local sur la paroi interne en fonction de la position azimutale θ , pour différentes valeurs de l'angle de l'inclinaison α

4.4.3 Effet de l'excentricité de la paroi interne « e_1 »

Nous considérons les espaces annulaires caractérisés par les différentes excentricités du cylindre elliptique interne ($e_1=0.55$), ($e_1=0.688$), ($e_1=0.86$), ($e_1=0.9$) et ($e_1=0.999$). L'excentricité du cylindre externe est maintenue constante ($e_2 = 0.5$) avec Rayleigh-Darcy $Ra_m=500$ et l'inclinaison choisie est $\alpha=0^\circ$.

4.4.3.1 Les isothermes et les lignes de courant

La figure 4.10.a, montre que lorsque $e_1=0.55$ l'espace libre entre les deux surfaces d'échange est très faible ce qui favorise le transfert par conduction entre les deux parois. L'augmentation de la valeur de l'excentricité de l'ellipse interne engendre une augmentation de l'espace annulaire, comme l'illustrent les figures (4.10.b), (4.10.c), (4.10.d) et (4.10.e), où le transfert par convection devient plus important, ce qui se traduit par une intensification de la convection naturelle dans la partie supérieure de l'espace annulaire.



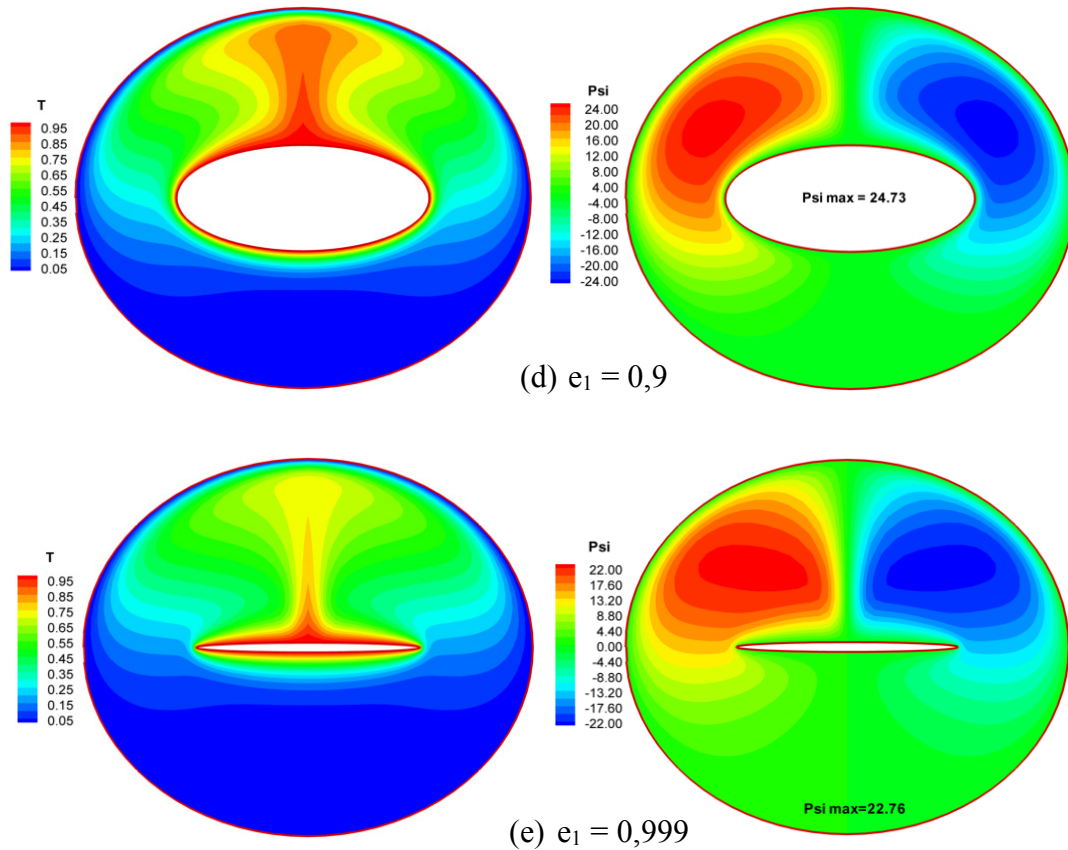


Figure 4.10 : Isothermes et lignes de courant pour $Ra_m = 500$ et $e_2 = 0,5$

4.4.3.2 La conductivité thermique équivalente

Puisque cette étude examine la convection naturelle dans un espace annulaire dont la géométrie varie en fonction de l'excentricité, le nombre de Nusselt n'est pas donc un bon indicateur de transfert de chaleur lorsque l'on compare des géométries différentes, la conductivité thermique équivalente est le paramètre le plus approprié permettant de comparer les transferts thermiques des différents espaces annulaires.

La conductivité thermique équivalente locale est définie comme étant le rapport entre le nombre de Nusselt local sur la surface au voisinage de laquelle un fluide est en mouvement et le nombre de Nusselt local qui serait calculé si le fluide est au repos. Elle est donnée par la relation suivante :

$$\lambda_{eq}^* = \frac{\left. \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right|_{convection+conduction}}{\left. \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right|_{conduction}} \quad (4.1)$$

La conductivité thermique équivalente globale est donnée par le rapport des nombres moyens de Nusselt pour le cas de la convection sur des nombres moyens de Nusselt pour le cas de la conduction.

La figure 4.11 montre que la valeur de la conductivité thermique équivalente moyenne augmente avec l'augmentation de l'excentricité de la paroi interne ce qui explique l'intensification du transfert par mode convectif qui est favorisé par l'augmentation de l'espace entre les deux cylindres elliptiques.

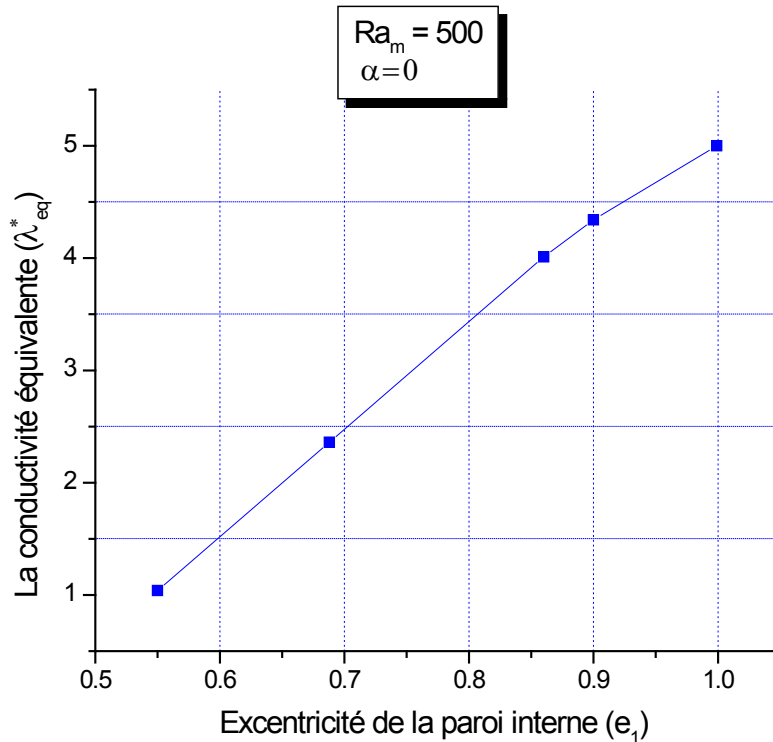


Figure 4.11 : La conductivité thermique équivalente globale sur la paroi interne en fonction de l'excentricité e_1 .

Deuxième partie des résultats :
Convection naturelle bidiffusive

4.5 Convection naturelle bidiffusive $N \neq 0$

Dans cette deuxième partie on va étudier le transfert de chaleur et de masse à l'intérieur de l'enceinte annulaire contenant un milieu poreux saturé d'un fluide binaire, on va examiner l'effet des différents paramètres de contrôle sur la distribution de la température et la concentration et sur la structure de l'écoulement ainsi que sur les nombres de Nusselt et de Sherwood qui interprètent respectivement le taux d'échange de chaleur et le taux d'échange de masse au niveau des parois de l'espace annulaire. Pour la convection naturelle bidiffusive on distingue deux modes différents, le mode coopérant où le rapport de flottabilités est positif $N > 0$ et le mode opposant où $N < 0$. Le cas de $N = 0$ qui correspond à la convection naturelle purement thermique a été présenté dans la première partie. L'effet de chacun des paramètres de contrôle qui sont le nombre de Rayleigh-Darcy Ra_m , le nombre de Lewis Le , l'angle d'inclinaison du système α , l'excentricité de la paroi interne e_1 , va être étudié pour les deux modes de convection bidiffusive. L'effet du rapport de flottabilités sur la distribution de la température et la concentration et sur la structure de l'écoulement ainsi que sur les nombres de Nusselt et de Sherwood va être également examiné en détail.

4.5.1 Le cas coopérant de la convection naturelle bidiffusive $N > 0$

Nous allons présenter les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant pour différentes valeurs de chacun des paramètres de contrôle pour le mode coopérant du transfert de chaleur et de masse avec un rapport de flottabilités $N = 2$. Les nombres de Nusselt et de Sherwood sont présentés également en fonction de ces paramètres.

4.5.1.1 L'effet du nombre de Rayleigh-Darcy Ra_m

Nous commençons par analyser l'effet du nombre de Rayleigh-Darcy Ra_m , car il est d'une importance majeure pour le cas de la convection naturelle. Pour cette raison, nous avons présenté les résultats pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh-Darcy $10 \leq Ra_m \leq 250$, pour un nombre de Lewis $Le = 0.1$. Les excentricités des ellipses interne et externe choisies sont respectivement données par $e_1 = 0.9$ et $e_2 = 0.5$, et avec une inclinaison du système $\alpha = 0^\circ$.

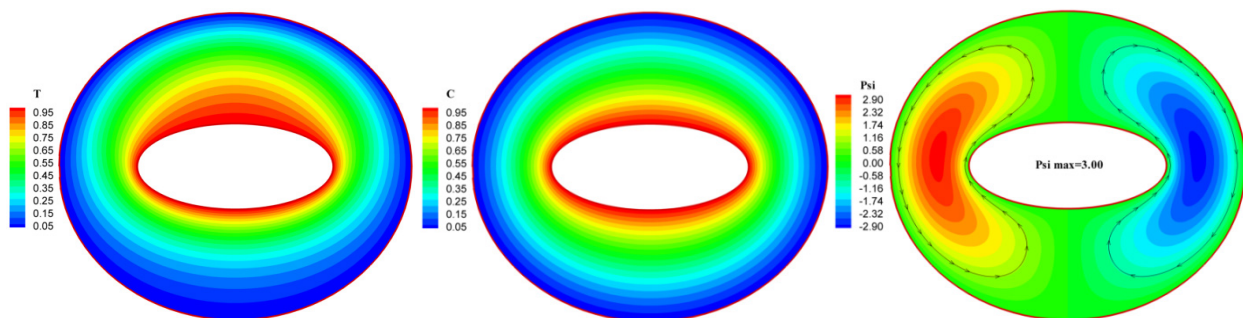
4.5.1.1.1 Les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant

Nous constatons dans la figure 4.12 que les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant sont symétriques par rapport au plan fictif vertical médian. Les isothermes de la figure 4.12.a correspondant à $Ra_m = 10$ sont des courbes fermées parallèles et concentriques qui épousent bien le profil des parois dans la partie inférieure de l'espace annulaire où la répartition de la température est simplement décroissante de la paroi chaude vers la paroi froide sous un régime conductif, par contre, dans la partie supérieure les isothermes présentent un décollement de la paroi chaude vers la paroi froide ce qui dénote une transition vers un régime convectif précoce due à la contribution du gradient de concentration dans le régime d'écoulement. Tandis que pour les isoconcentrations dans la même figure elles sont parallèles et concentriques dans tout l'espace

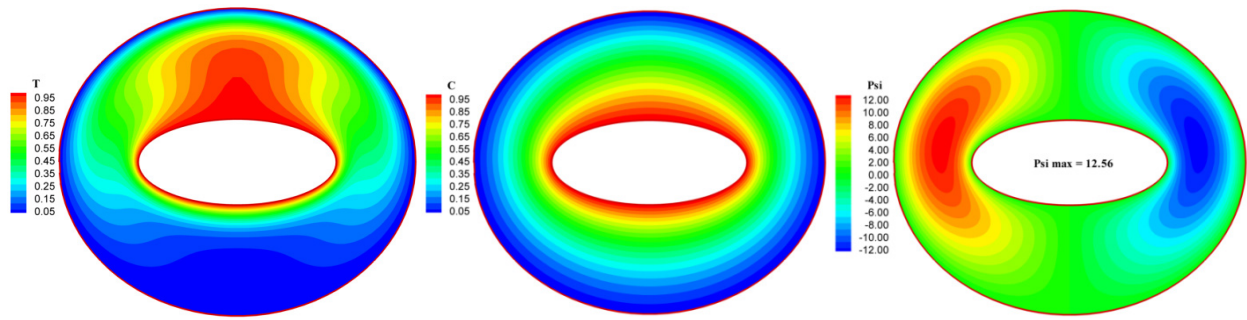
annulaire. La répartition de l'espèce est simplement décroissante de la paroi à forte concentration vers celle à faible concentration, le transport de masse ou de l'espèce est dominé par le mode diffusif pour deux raisons, d'une part ceci est dû à la valeur du nombre de Rayleigh-Darcy Ra_m qui est relativement faible et d'autre part, la diffusivité massique est dix fois plus grande que la diffusivité thermique pour $Le=0.1$. En ce qui concerne les isocourants dans la même figure, elles montrent que l'écoulement est organisé en deux cellules principales qui tournent lentement dans des directions opposées. La cellule de gauche tourne dans le sens trigonométrique par contre celle de droite tourne dans le sens horaire. Ceci est dû au déplacement des particules de fluide vers le haut de l'enceinte sous l'effet de la poussée d'Archimède en s'échauffant le long de la paroi chaude puis elles se déplacent vers le bas de l'enceinte sous l'effet de la gravité en se refroidissant le long de la paroi froide.

Avec l'augmentation du nombre de Rayleigh-Darcy Ra_m dans la figure 4.12.b, les isothermes se déforment davantage dans la partie supérieure de l'espace annulaire sous l'effet de l'intensification de l'écoulement. Les isoconcentrations dans cette figure montrent que la diffusion de la masse est toujours dominante dans la partie inférieure de l'espace annulaire, par contre, le décollement dans la partie supérieure qui commence à apparaître sous l'effet de l'intensification de l'écoulement, indique une transition vers un mode convectif qui contribue dans le transport de la masse dans cette partie de l'enceinte. Les isocourants montrent que l'écoulement est continuellement organisé en deux cellules principales qui tournent dans des directions opposées avec une augmentation de la valeur de la fonction de courant. En augmentant davantage Ra_m dans les figures (4.12.c), (4.12.d) et (4.12.e) les isothermes montrent que le transfert de la chaleur dans tout l'espace annulaire est entièrement dominé par le mode de la convection naturelle.

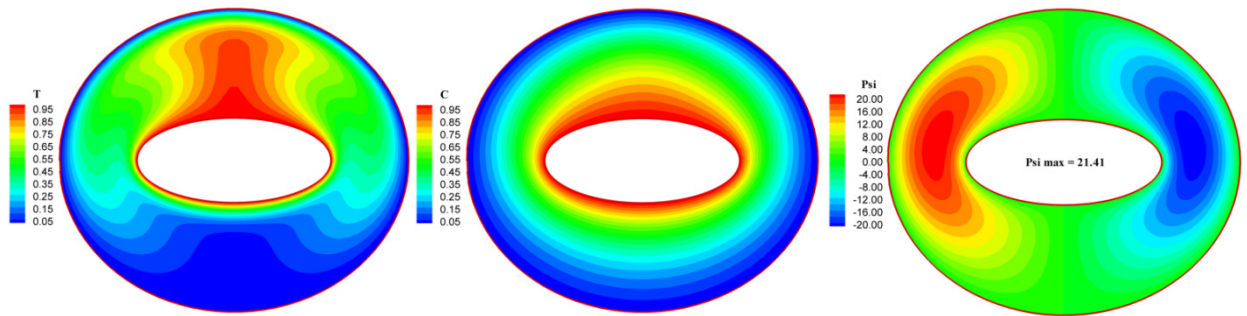
Les isothermes dans ces figures ont pris une forme particulière dans la partie supérieure qui est celle d'un champignon sous l'effet des deux cellules tournantes dans des sens opposés en faisant déplacer les particules du fluide avec une grande vélocité dans l'enceinte. On note également que ces deux cellules se déplacent vers le haut sous l'effet de l'intensification de la convection naturelle. Cette intensification est plus prononcée, si on la compare au cas purement thermique dans la première partie cela est dû essentiellement à l'effet coopérant des gradients de température et de concentration. Dans la partie inférieure de l'enceinte on observe une stratification massique car les espèces ont tendance à être transportées par diffusion plutôt que par convection.



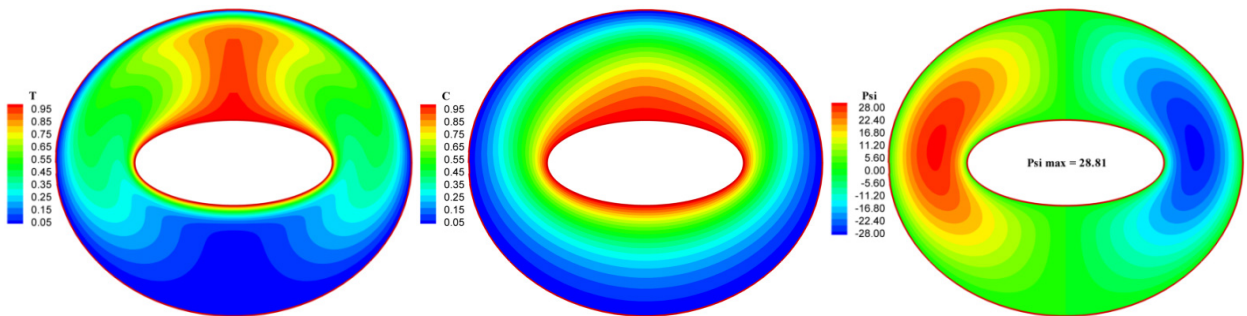
(a) $Ra_m=10$



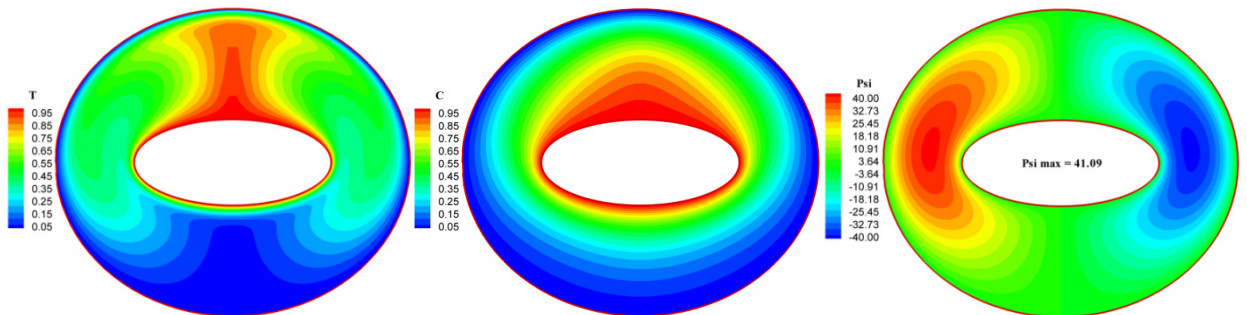
(b) $Ra_m=50$



(c) $Ra_m=100$



(d) $Ra_m = 150$



(e) $Ra_m = 250$

Figure 4.12 : Isothermes, isoconcentrations et lignes de courant

$N=2$, $Le=0.1$, $e_1=0.9$, $e_2=0.5$ et $\alpha=0^\circ$

4.5.1.1.2 Les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux et moyens

Sur la Figure 4.13 nous avons illustré la variation du nombre de Nusselt local sur la paroi intérieure du cylindre elliptique, cette variation nous permet de constater que l'augmentation du nombre de Rayleigh-Darcy Ra_m engendre une intensification de la convection naturelle ce qui implique une augmentation des valeurs des nombres de Nusselt locaux, ce qui est évident. La variation du nombre de Nusselt local montre l'existence d'un minima à la position azimutale $\theta = 90^\circ$ et de deux maximas correspondant respectivement aux positions azimutales $\theta = 195^\circ$ et $\theta = 355^\circ$. Ces cellules éloignent le fluide de la paroi chaude dans le cas d'un minimum et l'amènent vers celle-ci dans le cas d'un maximum, ceci d'une part, d'autre part dans la moitié inférieure de notre espace annulaire comprise entre les positions azimutales $\theta = 180^\circ$ et $\theta = 360^\circ$ le nombre de Nusselt local varie de la même manière pour les différentes valeurs du nombre de Rayleigh-Darcy Ra_m considérées, ceci est dû au fait que dans cette région nous avons une stratification thermique. En revanche, la variation du nombre de Sherwood local sur la figure 4.14 pour les mêmes paramètres $N=2$ et $Le=0.1$, présente un comportement différent. Dans la partie supérieure de l'espace annulaire entre $20^\circ \leq \theta \leq 160^\circ$ où on constate une légère diminution du nombre de Sherwood quand la valeur de Ra_m augmente, par contre dans la partie inférieure le transfert de la masse se fait essentiellement par diffusion et donc nous avons la même allure obtenue pour le cas thermique. La figure 4.15 nous permet de constater que les valeurs des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens sur la paroi interne augmentent avec l'augmentation de la valeur de Ra_m ce qui est évident, ceci d'une part, d'autre part, ces valeurs du nombre de Nusselt moyen sont plus importantes que celles du nombre de Sherwood moyen, car le nombre de Lewis dans ce cas-là est inférieur à un ($Le < 1$).

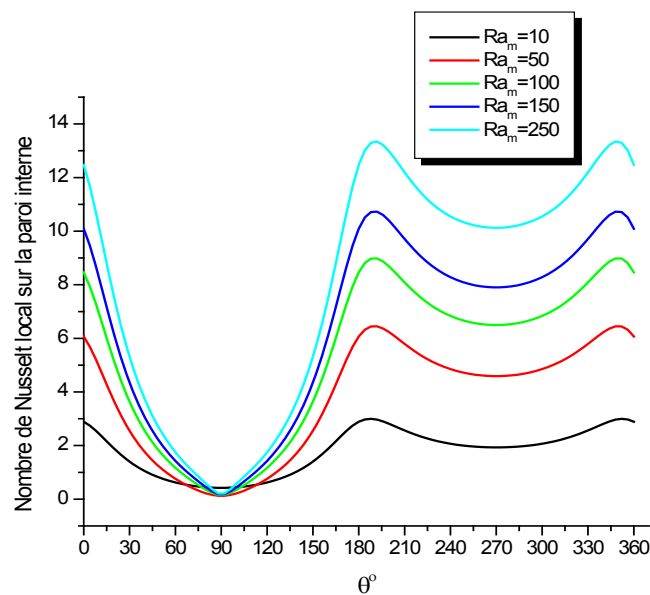


Figure 4.13 : Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi interne en fonction de la position azimutale pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh-Darcy Ra_m et pour $N=2$, $Le=0.1$

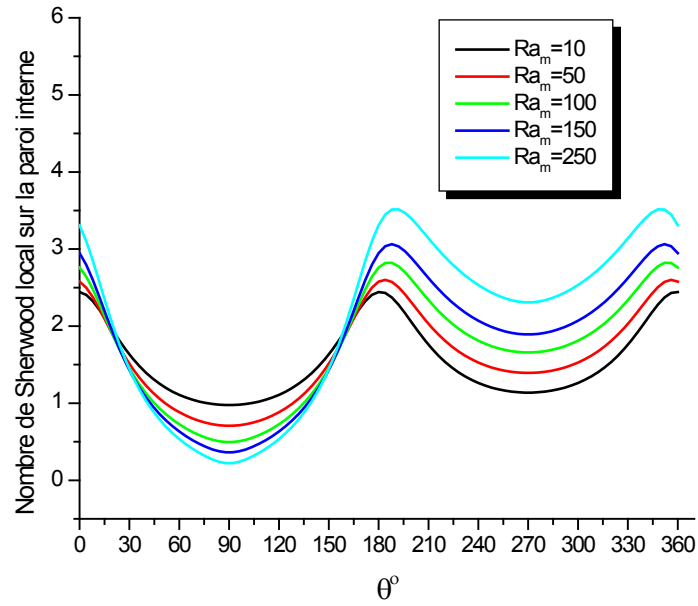


Figure 4.14 : Variation du nombre de Sherwood local sur la paroi interne en fonction de la position azimutale pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh-Darcy Ra_m et pour $N=2$, $Le=0.1$

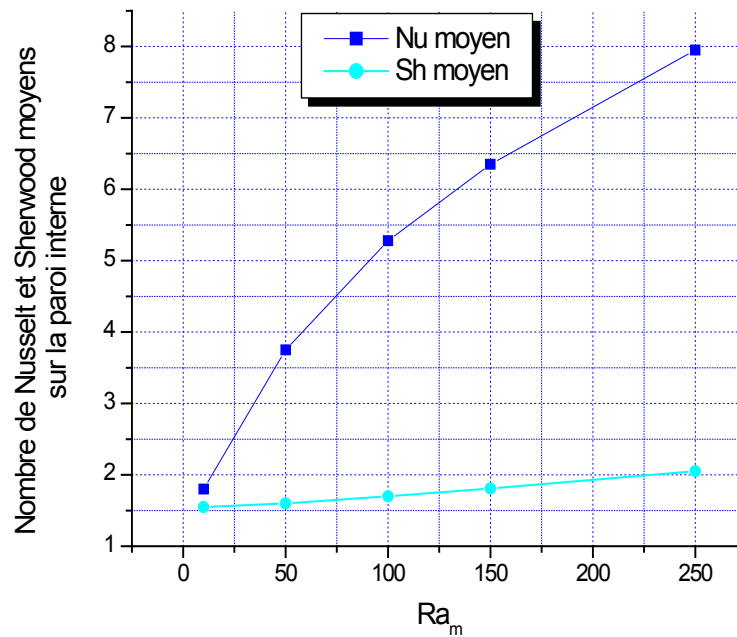


Figure 4.15 : La variation des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens sur la paroi interne en fonction du nombre de Rayleigh-Darcy Ra_m pour $N=2$, $Le=0.1$

4.5.1.2 L'effet du nombre de Lewis

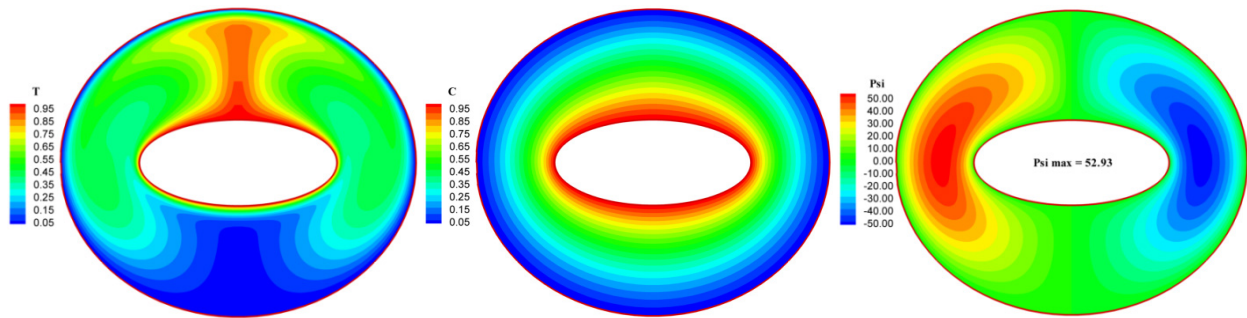
Nous considérons l'espace annulaire caractérisé par les excentricités du cylindre elliptique interne et externe respectivement donnée par $e_1=0,9$ et $e_2=0,5$ avec $Ra_m=250$ et l'inclinaison choisie $\alpha=0^\circ$. Nous avons utilisé différentes valeurs du nombre de Lewis dans un intervalle de $[0.01-50]$ pour le cas où d'un rapport de flottabilité $N=2$.

4.5.1.2.1 Les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant

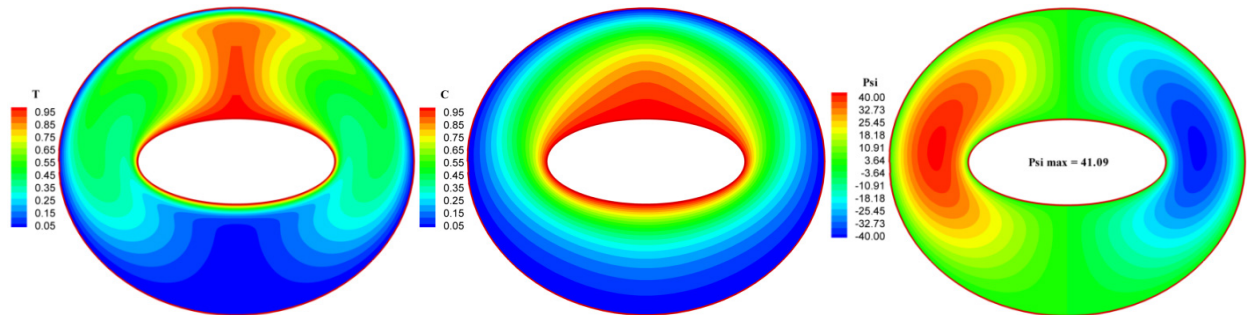
La figure 4.16 représente les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant, nous notons que ces contours sont symétriques par rapport au plan fictif vertical médian. Les lignes de courant de la figure (4.16.a) et (4.16.b) montrent que l'écoulement est divisé en deux cellules principales qui se distinguent avec leur forme oblongue réniforme qui tournent dans des directions opposées avec des vitesses élevées. Cela est dû au mouvement ascendant des particules de fluide sous l'effet des flottabilités thermique et massique et au mouvement descendant dû à la gravité. Les isothermes de la figure 4.16.a montrent que le transfert de chaleur se fait principalement par convection naturelle dans presque tout l'espace annulaire. Les isoconcentrations dans cette figure montrent que le transport de la masse dans tout l'espace annulaire est dominé par un régime diffusif ce qui est dû à une très grande diffusivité massique 100 fois plus importante que la diffusivité thermique pour un nombre de Lewis $Le=0.01$. Avec l'augmentation du nombre de Lewis à la valeur de $Le=0.1$, les lignes de courant de la figure 4.16.b montrent que l'écoulement est aussi divisé en deux cellules principales qui gardent encore leur forme oblongue réniforme et qui tournent dans des directions opposées avec des vitesses moins élevées. La nette déformation des isoconcentrations qui apparaît au voisinage de la position azimutale $\theta=90^\circ$, dénote d'une transition vers un mode convectif en ce qui concerne le transfert de masse qui est dû à l'augmentation du nombre de Lewis.

Lorsque le nombre de Lewis est égal à l'unité, la figure 4.16.c montre que les stratifications thermique et massique sont similaires. Cette similarité reflète l'égalité des deux diffusivités thermique et massique quand $Le=1$. Les lignes de courant, de cette figure, montrent que les deux cellules contrarotatives ont tendance à s'éloigner l'une de l'autre, mais avec des vitesses moins importantes que celles présentées pour $Le<1$, cette diminution de la valeur de la fonction de courant, est due à l'atténuation de l'écoulement qui est due à la stratification massique qui domine de plus en plus en augmentant le nombre de Lewis. Sur la même figure, les isothermes ont subi un changement important, elles ont adopté une forme d'un dôme plutôt que la forme d'un champignon obtenue pour $Le<1$. Sur la figure 4.16.d la valeur du nombre de Lewis correspond à $Le=10$, où la diffusivité thermique est dix fois plus importante que la diffusivité massique, les lignes de courant montrent que la structure de l'écoulement reste organisée en deux cellules principales qui tournent dans des directions opposées, mais l'espace entre elles, est plus important, ce qui correspond bien à la stratification thermique qui domine la moitié supérieure de l'enceinte.

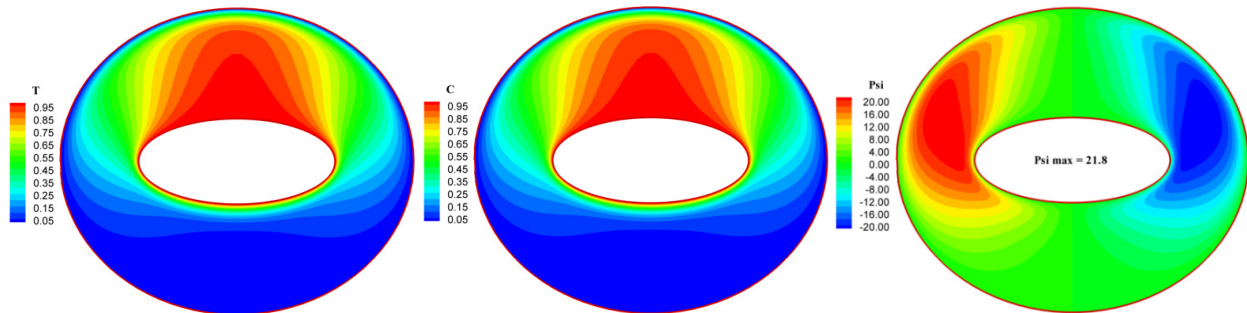
La figure 4.16.e montre que le panache massique est moins important que le panache thermique avec l'augmentation du nombre de Lewis ceci est dû à la prépondérance de la diffusivité thermique sur la diffusivité massique pour les grandes valeurs du nombre de Lewis, dans ce cas nous remarquons que le gradient de concentration est plus important au niveau des parois comparé au milieu de l'espace annulaire, aussi les valeurs de la fonction de courant diminuent tout en augmentant la valeur du nombre de Lewis Le , ce qui dénote d'une diminution de l'intensité de l'écoulement qui est freiné par la stratification massique. Nous remarquons aussi sur cette figure pour les lignes de courant l'apparition de deux cellules secondaires contrarotatives dans la région sommitale de l'enceinte.



(a) $Le=0.01$



(b) $Le=0.1$



(c) $Le=1$

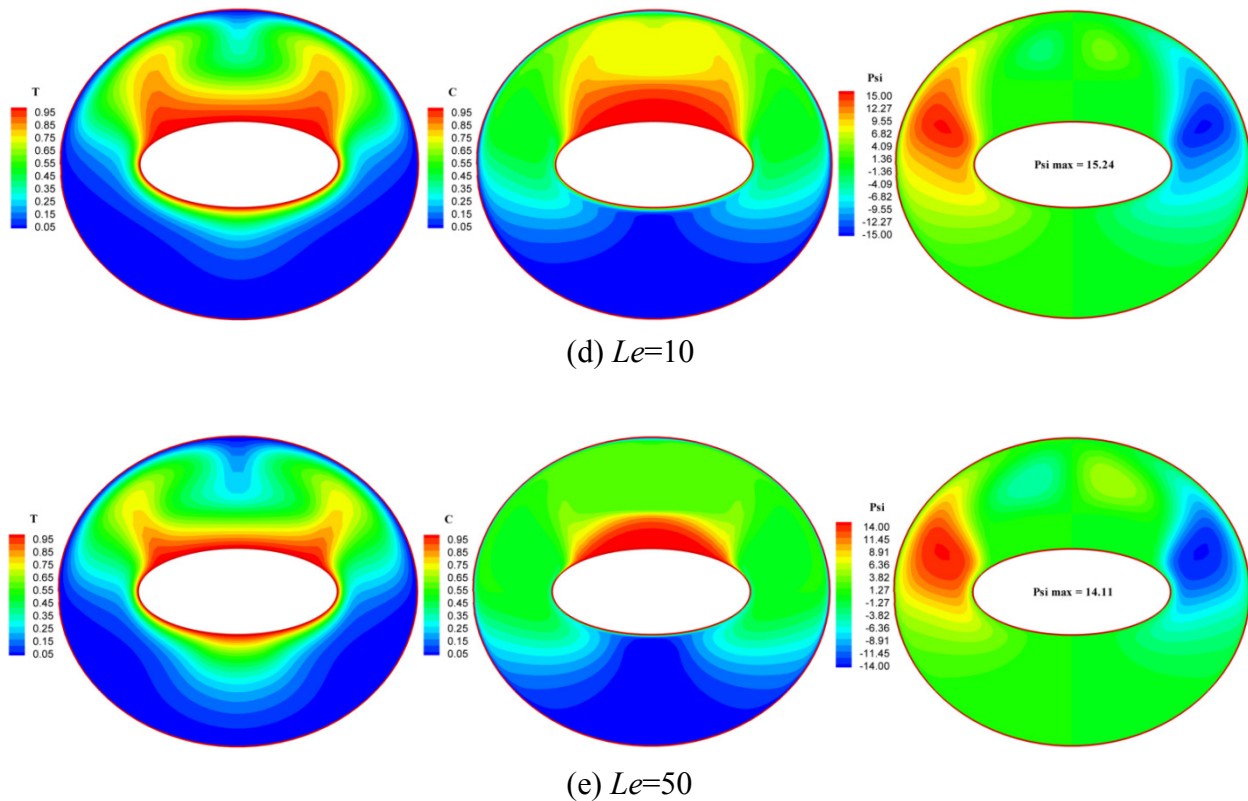


Figure 4.16 : Isothermes, isoconcentrations et lignes de courant pour $Ra_m=250$, $e_1=0.9$, $e_2=0.5$ et $N=2$

4.5.1.2.2 Les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux et moyens

Sur la figure 4.17 nous avons illustré la variation du nombre de Nusselt local sur la paroi interne du cylindre elliptique en fonction de la position azimutale. Nous constatons qu'avec l'augmentation du nombre de Lewis, la valeur du nombre de Nusselt local diminue en raison de la stratification thermique. Pour $Le=10$ et $Le=50$, l'apparition des deux cellules secondaires dans la région sommitale qui sont illustrées par la figure 4.16.e relative aux lignes de courant, ces cellules vont faire amener du fluide à la paroi chaude ce qui explique le maximum obtenu pour le nombre de Nusselt dans cette région là ($\theta=90^\circ$). Par contre les deux minimums correspondant aux deux positions azimutales $\theta \approx 40^\circ$ et $\theta \approx 140^\circ$ sont dus à la juxtaposition d'une cellule secondaire à sa cellule principale d'un côté et de l'autre de l'axe médian vertical, ces juxtapositions font éloigner le fluide de la paroi chaude.

En revanche, la variation du nombre de Sherwood local illustré sur la figure 4.18 nous permet de constater que sa valeur augmente avec l'augmentation du nombre de Lewis Le en dehors de la région sommitale comprise entre $45^\circ < \theta < 145^\circ$ où existe un gradient de concentration important

par contre dans cette même région nous remarquons une stratification massive qui justifie la valeur minimale du nombre de Sherwood.

La variation des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens qui est illustrée sur la figure 4.19 montre que l'effet du nombre de Lewis sur les taux de transfert de chaleur et de masse est inverse. Son augmentation engendre une diminution du nombre de Nusselt moyen sur la paroi interne et une augmentation du nombre de Sherwood moyen sur cette dernière. On constate également que la valeur du nombre de Nusselt moyen tend vers une valeur asymptotique pour $Le > 10$.

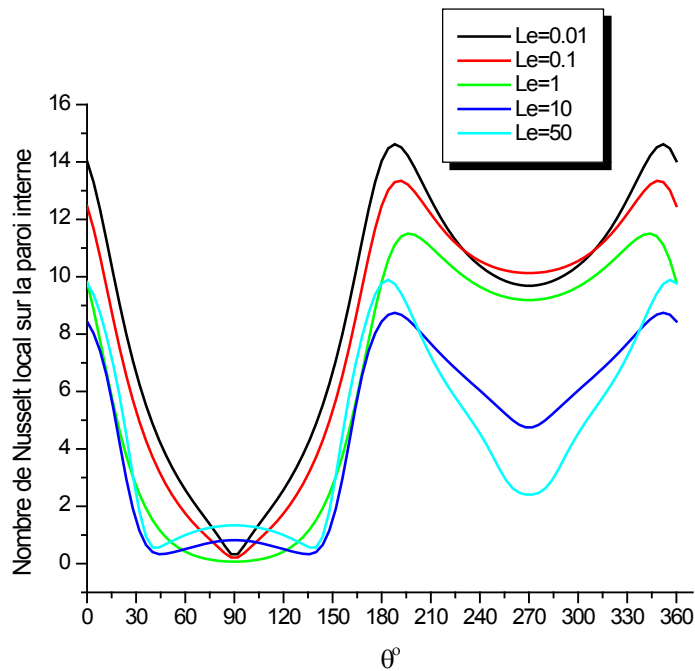


Figure 4.17 : Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi interne en fonction de la position azimutale pour différentes valeurs du nombre de Lewis Le et pour $Ra_m=250$, $e_1=0.9$, $e_2=0.5$ et $N=2$

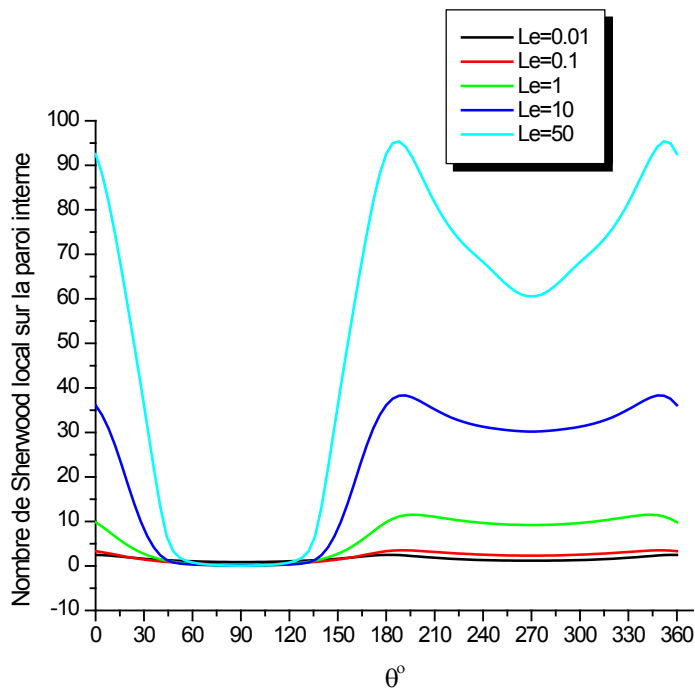


Figure 4.18 : Variation du nombre de Sherwood local sur la paroi interne en fonction de la position azimutale pour différentes valeurs du nombre de Lewis Le et pour $Ra_m=250$, $e_1=0.9$, $e_2=0.5$ et $N=2$

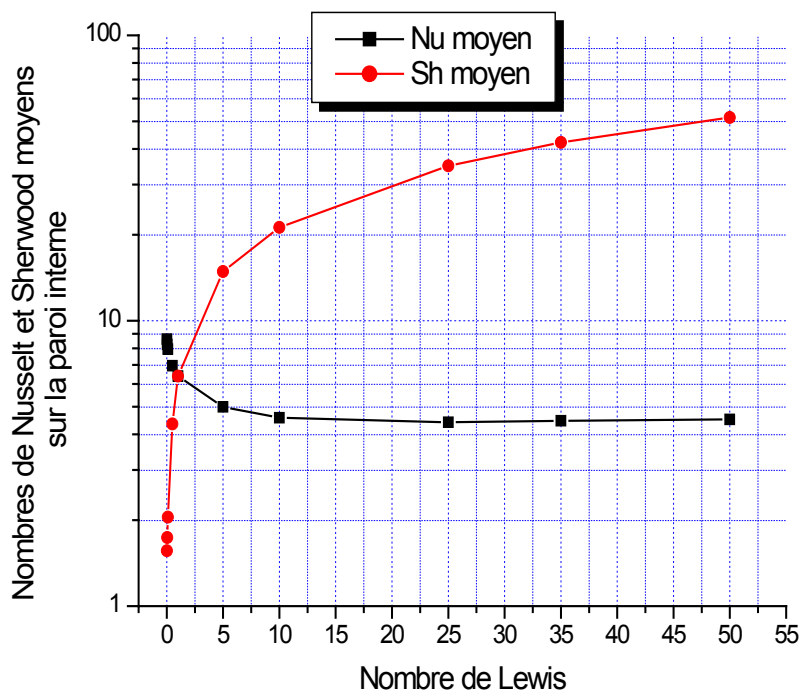


Figure 4.19 : Variation des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens sur la paroi interne en fonction du nombre de Lewis pour $Ra_m=250$, $e_1=0.9$, $e_2=0.5$ et $N=2$

4.5.1.3 L'effet de l'angle d'inclinaison

On va examiner l'effet de l'inclinaison du système, l'angle est calculé à partir de l'horizontale dans le sens trigonométrique. Pour cela nous avons considéré plusieurs valeurs de α (0° , 15° , 30° , 45° , 60° et 90°) pour les excentricités $e_1=0.9$ et $e_2=0.5$ et pour le nombre de Rayleigh-Darcy $Ra_m=250$, le nombre de Lewis $Le=1$ et le rapport de flottabilité $N=2$.

4.5.1.3.1 Les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant

Sachant que pour un $Le=1$, la distribution de la température et de la concentration sont identiques donc les isothermes et les isoconcentrations sont présentées par une même figure.

Le cas où l'angle d'inclinaison est égal à zéro $\alpha = 0^\circ$:

Sur la figure 4.20.a, le plan médian vertical fictif représente un plan de symétrie pour les distributions de la température, la concentration ainsi que pour la structure de l'écoulement. Par conséquent, l'écoulement s'organise par symétrie et par rapport à ce plan en deux cellules principales tournant en sens inverse l'une par rapport à l'autre. Les lignes de courant dans cette figure montrent que ces deux cellules contrarotatives ont tendance à s'éloigner l'une de l'autre dans la moitié supérieure de notre espace annulaire. La fonction de courant atteint la valeur maximale de $\psi=21.8$. Les isothermes et les isoconcentrations dans la même figure ont adopté une forme de dôme.

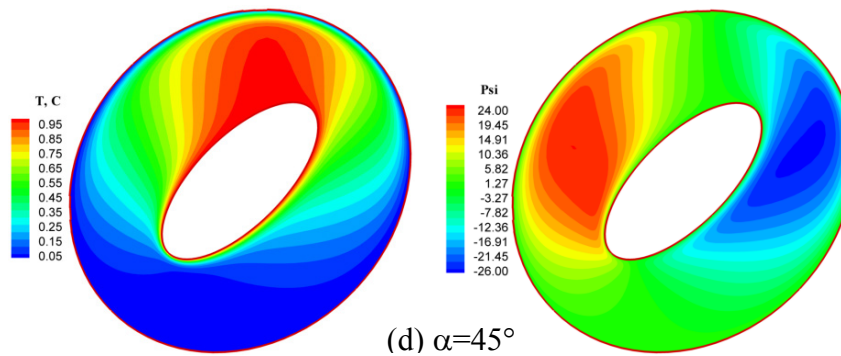
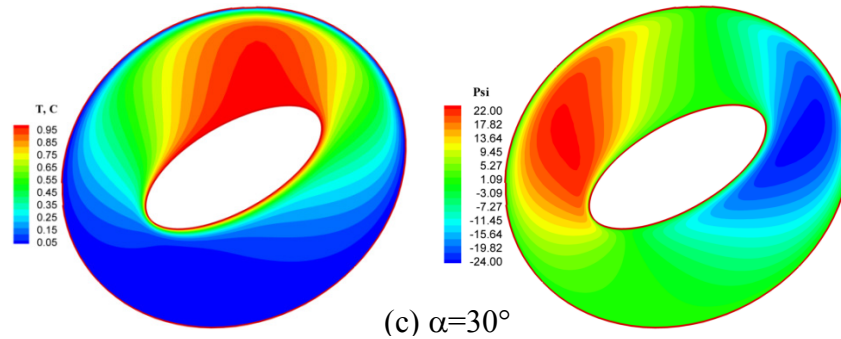
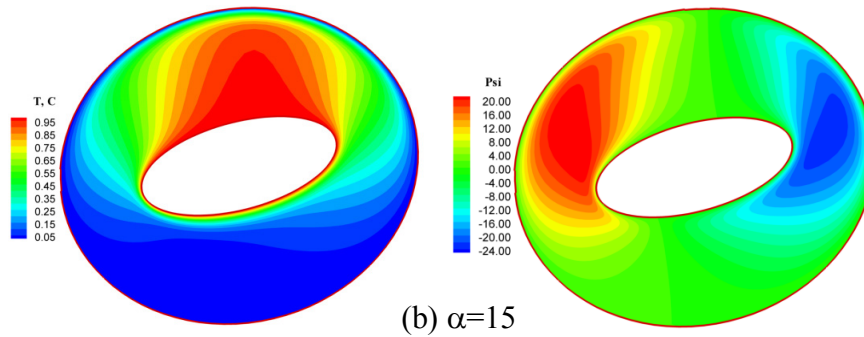
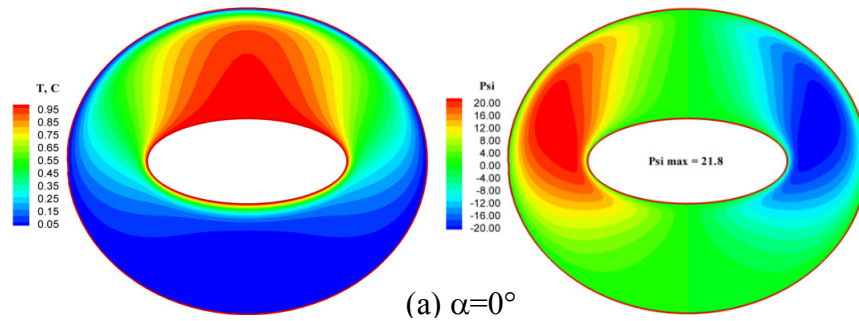
Le cas où l'angle d'inclinaison $\alpha \neq 0^\circ$ et $\alpha \neq 90^\circ$:

En donnant à l'angle α une valeur autre que 0° et 90° , nous détruisons la symétrie du système par rapport au plan vertical fictif. Les figures (4.20.b), (4.20.c) et (4.20.d) qui représentent les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant, respectivement, pour $\alpha=15^\circ$, 30° et 45° et pour $Ra_m=250$, montrent la cellule de gauche se déplace à la partie supérieure de l'espace annulaire et celle de droite se déplace à la partie inférieure. En augmentant l'angle d'inclinaison pour accéder à $\alpha=60^\circ$ cas illustré par la figure 4.20.e, on remarque que ces deux cellules se développent davantage pour occuper plus d'espace. Ces figures montrent aussi que la valeur maximale de la fonction de courant augmente avec l'augmentation de l'angle (α).

Le cas où l'angle d'inclinaison $\alpha=90^\circ$

Lorsque $\alpha=90^\circ$, le plan vertical fictif passant par le centre du système redevient un plan de symétrie comme dans le cas de $\alpha=0^\circ$, la figure 4.20.f pour les isothermes et les isoconcentrations montre que la convection naturelle s'intensifie notamment dans la partie supérieure de l'espace annulaire. Dans la région inférieure, les isothermes et les isoconcentrations se resserrent au niveau de la paroi interne, les transferts dans cette partie de l'enceinte se font principalement par conduction pour la chaleur et par diffusion pour la masse.

Les lignes de courant sur cette figure montrent l'accroissement de la valeur maximale de la fonction de courant qui atteint la valeur de $\psi = 27.96$, ce qui confirme l'intensification de l'écoulement et par conséquent de la convection naturelle pour la disposition verticale de l'enceinte.



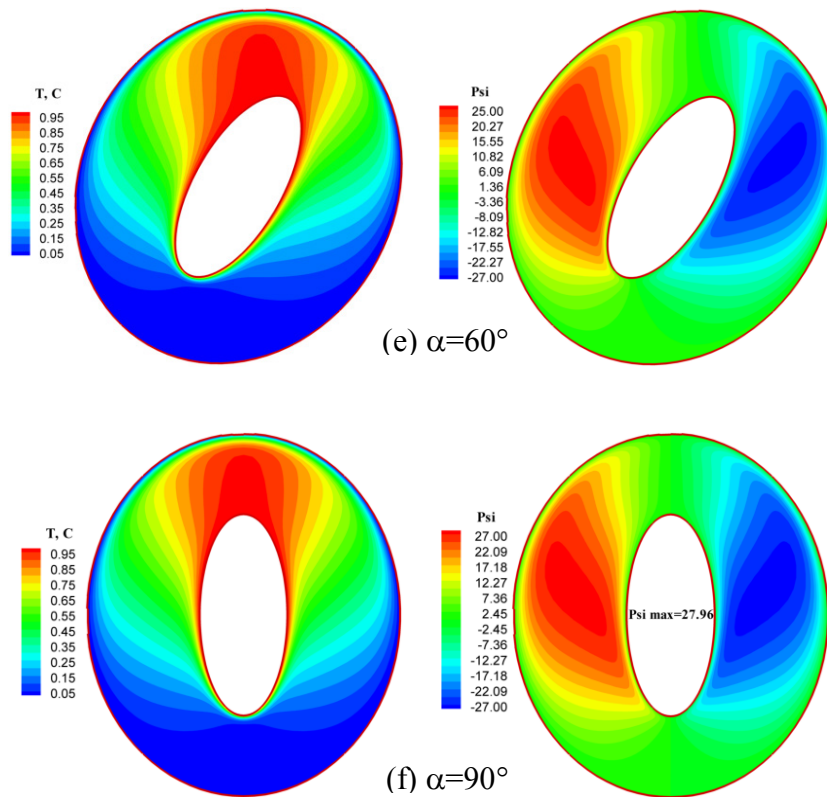


Figure 4.20 : Isothermes, isoconcentrations et lignes de courant
 $Ra_m=250, e_1=0.9, e_2=0.5, Le=1$ et $N=2$

4.5.1.3.2 Les nombres de Nusselt et de de Sherwood locaux et moyens

La variation des nombres de Nusselt et de Sherwood locaux sur la paroi interne, illustrée sur la figure 4.21, est en très bon accord avec les distributions des isothermes et des isoconcentrations des figures précédentes. Les valeurs minimales de ces deux nombres changent de positions azimutales à chaque fois que l'on change l'inclinaison du système, ce qui dénote l'influence de ce paramètre sur le phénomène étudié.

La figure 4.22 montre la variation de la valeur moyenne des nombres de Nusselt et de Sherwood qui se confondent pour le cas de $Le=1$, leur augmentation est proportionnelle à l'accroissement de l'inclinaison qui améliore les transferts d'une manière significative par exemple pour $\alpha=90^\circ$ l'amélioration des transferts de chaleur et de masse est maximale avec une augmentation de 35% par rapport à la position horizontale pour $\alpha=0^\circ$.

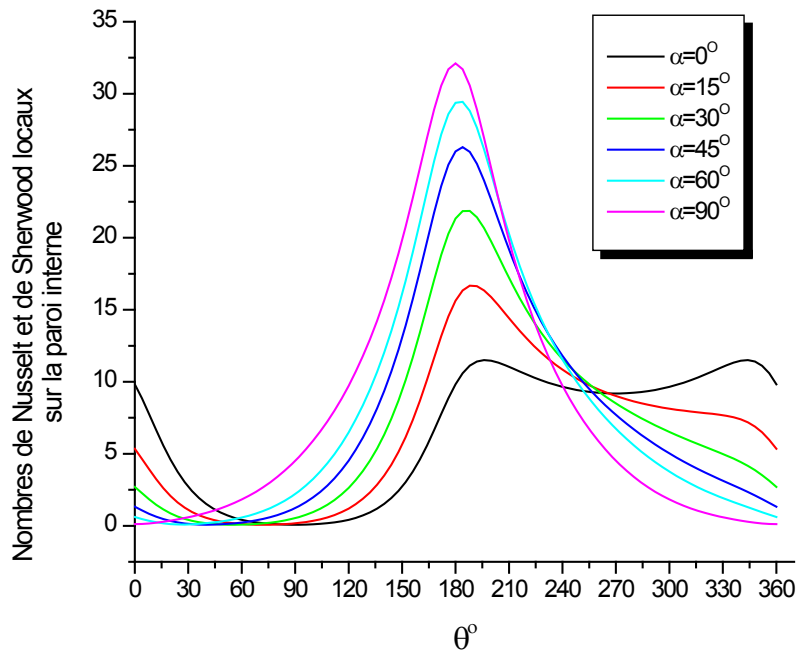


Figure 4.21 : La variation des nombres de Nusselt et de Sherwood locaux sur la paroi interne en fonction de la position azimutale pour différentes inclinaisons α et pour $Ra_m=250$, $e_1=0.9$, $e_2=0.5$, $N=2$ et $Le=1$

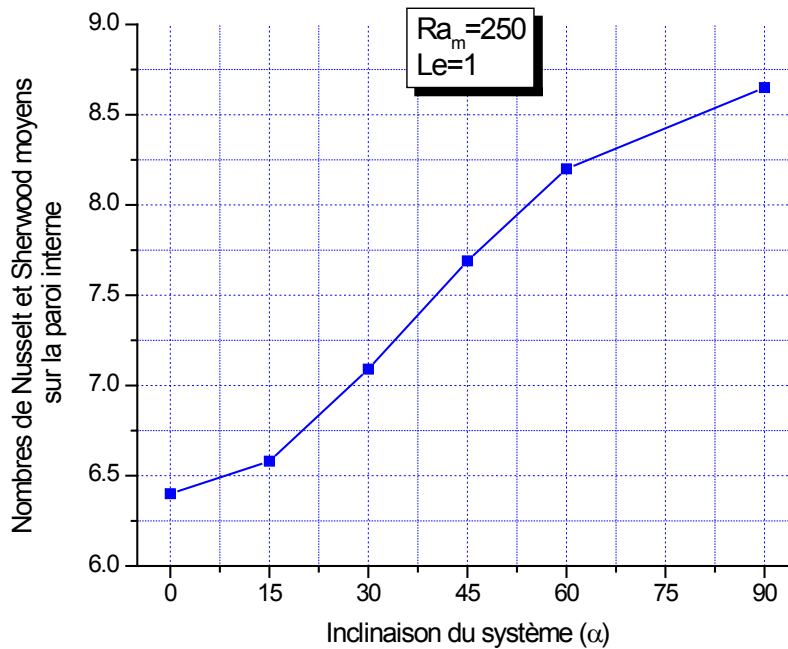
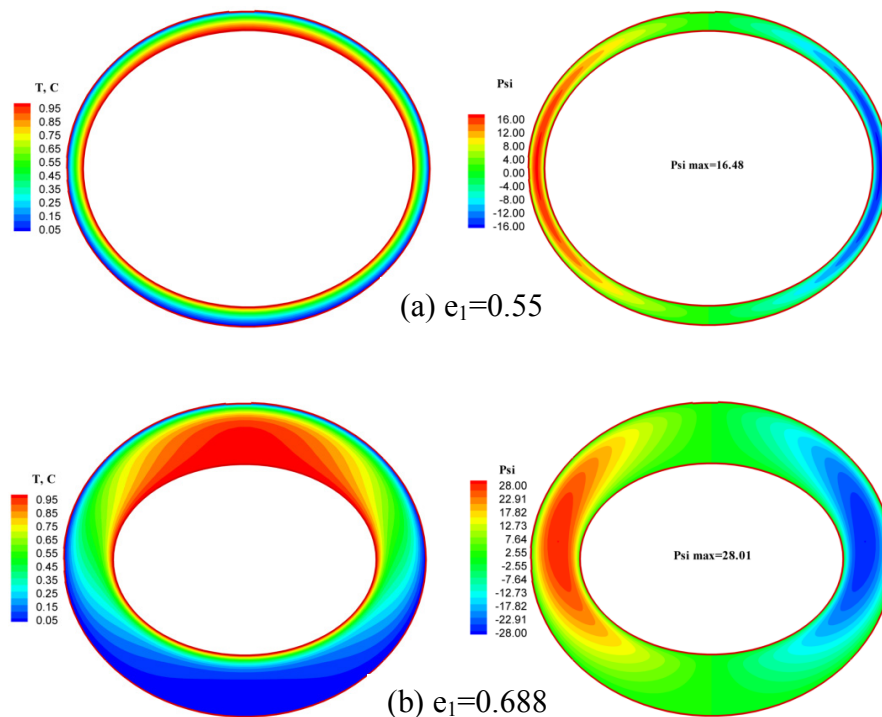


Figure 4.22 : La variation des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens sur la paroi interne en fonction de l'inclinaison α pour $Ra_m=250$, $e_1=0.9$, $e_2=0.5$, $N=2$ et $Le=1$

4.5.1.4 L'effet de l'excentricité de la paroi interne

Nous considérons les espaces annulaires caractérisés par les différentes excentricités du cylindre elliptique interne ($e_1=0.55$), ($e_1=0.688$), ($e_1=0.75$), ($e_1=0.9$) et ($e_1=0.999$) avec l'excentricité du cylindre elliptique externe qui est maintenue constante ($e_2 = 0.5$) avec un nombre de Rayleigh-Darcy $Ra_m=250$ et une inclinaison fixée à $\alpha=0^\circ$.

La figure 4.23.a, montre que lorsque $e_1=0.55$ l'espace libre entre deux surfaces d'échange est très faible, ce qui favorise le transfert par conduction pour la chaleur et par diffusion pour la masse. Avec l'augmentation de la valeur de l'excentricité de l'ellipse interne, illustrée par la figure 4.23.b, cet espace est relativement élargi, ce qui facilite le déplacement des particules du fluide au sein de l'enceinte et favorise les transferts de chaleur et de masse par mode de convection. Ce transfert par convection devient plus important pour les grands espaces annulaires des figures (4.23.c), (4.23.d) et (4.23.e) qui montrent que l'augmentation de la valeur de l'excentricité e_1 interne engendrant une augmentation de l'espace libre entre les deux surfaces d'échange, se traduit par une intensification de la convection naturelle dans la partie supérieure de l'espace annulaire. Tandis que pour la partie inférieure, les transferts se font principalement par conduction pour la chaleur et par diffusion pour la masse.



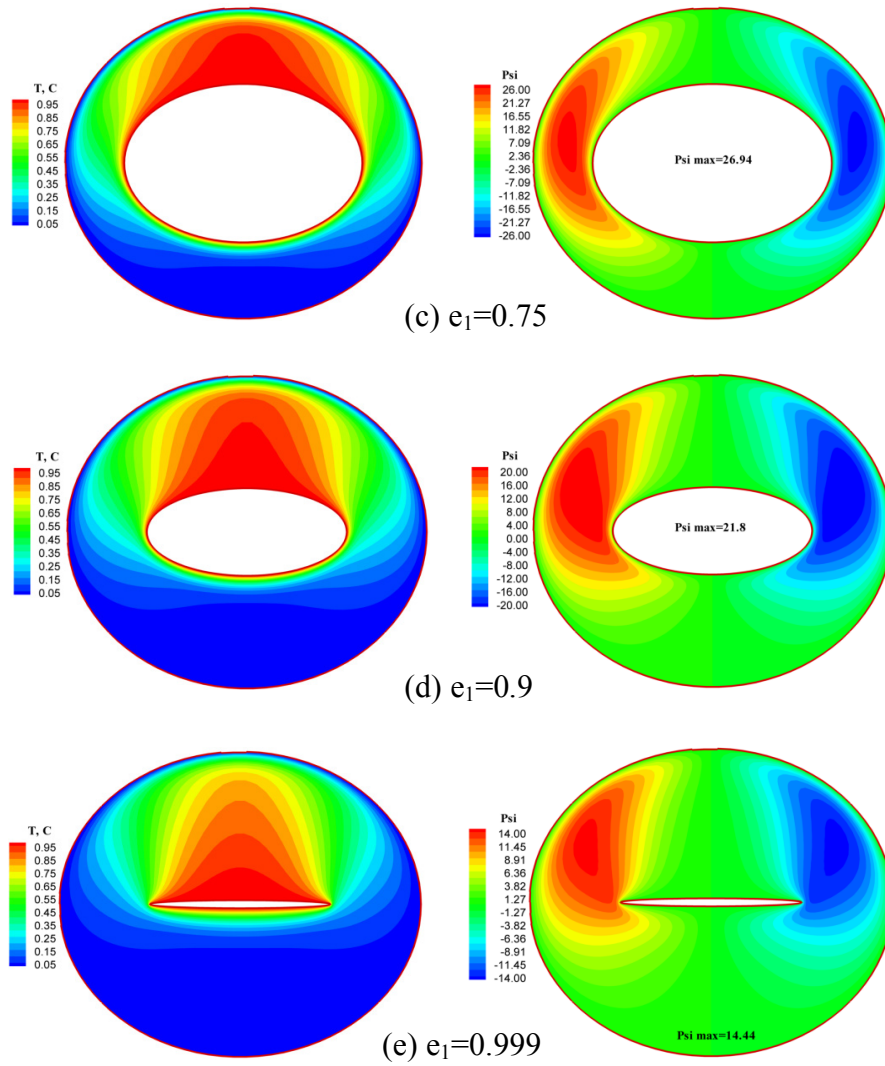


Figure 4.23 : Isothermes, isoconcentrations et lignes de courant

$Ra_m=250$, $e_2=0.5$, $N=2$, $Le=1$ et $\alpha=0^\circ$

4.5.2 Le cas opposant de la convection naturelle bidiffusive $N < 0$

Pour le mode opposant des transferts de chaleur et de masse, nous allons présenter les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant pour différentes valeurs de chacun des paramètres de contrôle. Les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux et moyens sont présentés en fonction de ces paramètres.

4.5.2.1 L'effet du nombre de Rayleigh-Darcy

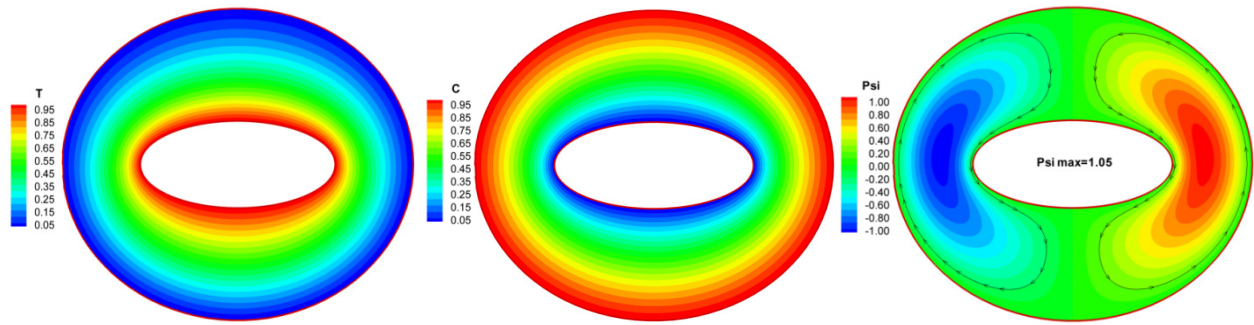
Nous commençons comme dans le cas coopérant par analyser l'effet du nombre de Rayleigh-Darcy. Pour cette raison, nous avons présenté les résultats pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh-Darcy $Ra_m = [10-250]$ et pour un nombre de Lewis $Le = 0.1$ et un rapport de flottabilités $N=-2$. Les excentricités des ellipses interne et externe choisies sont respectivement données par $e_1=0.9$, $e_2=0.5$ et avec l'inclinaison du système $\alpha=0^\circ$.

4.5.2.1.1 Les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant

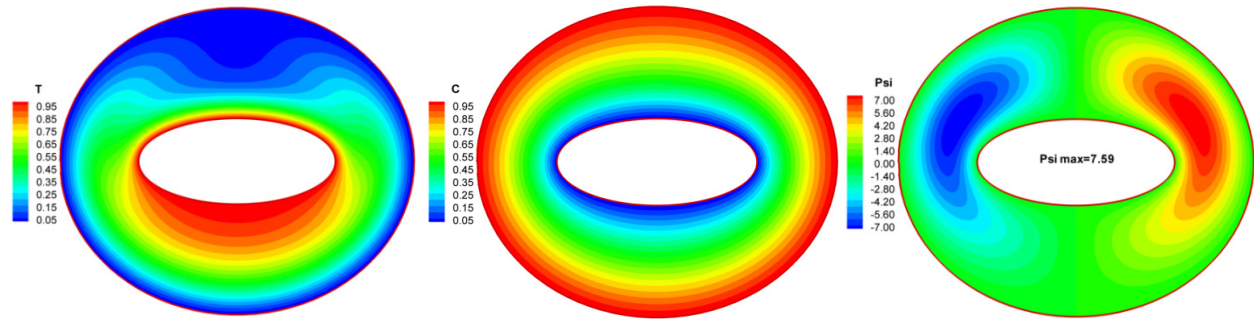
Nous constatons sur la figure 4.24 que les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant sont symétriques par rapport à un plan fictif vertical médian. Les isothermes et les isoconcentrations de la figure 4.24.a correspondant à $Ra_m=10$ sont des courbes fermées parallèles et concentriques qui épousent très bien le profil des parois dans tout l'espace annulaire où la température est simplement décroissante de la paroi chaude vers la paroi froide et la répartition de la concentration se fait de la paroi à forte concentration vers la paroi à faible concentration sous un régime quasi-conductif pour le transfert de chaleur et quasi-diffusif pour le transfert de masse.

En ce qui concerne les isocourants de la même figure, elles montrent que l'écoulement est organisé en deux cellules principales qui tournent lentement dans des directions opposées. La cellule de gauche tourne dans le sens horaire par contre celle de droite tourne dans le sens trigonométrique contrairement au cas coopérant. Ceci est dû au fait que la flottabilité massique est deux fois plus grande ($N=-2$) et s'oppose à la flottabilité thermique.

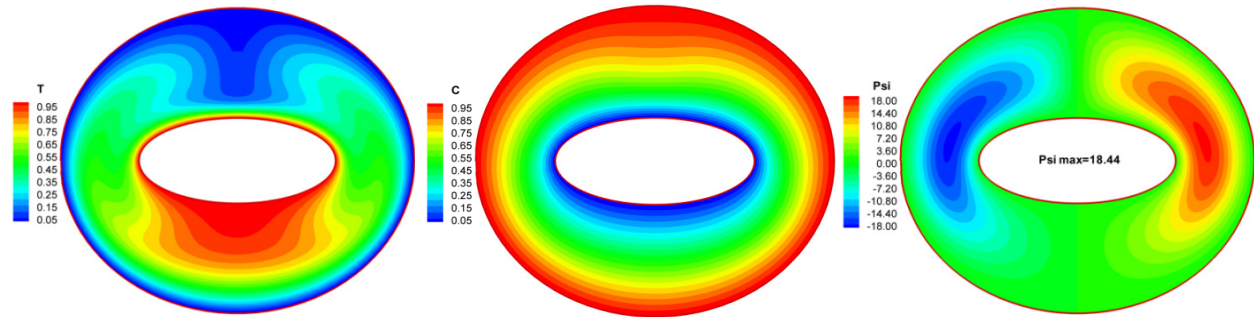
Avec l'augmentation du nombre de Rayleigh-Darcy dans la figure 4.25.b, les isothermes se déforment davantage dans tout l'espace annulaire sous l'effet de l'intensification de l'écoulement. Les isoconcentrations de cette figure sont toujours concentriques et parallèles. Les lignes de courant montrent que l'écoulement est toujours organisé en deux cellules principales qui tournent dans des directions opposées avec une augmentation de la valeur de la fonction de courant. En augmentant davantage le nombre de Rayleigh-Darcy Ra_m , les figures (4.24.c) et (4.24.d) montrent que les isothermes se modifient encore plus pour exprimer un régime convectif prépondérant qui s'installe. Les valeurs de la fonction de courant de la figure 4.24.e augmentent encore plus ce qui dénote d'une intensification de l'écoulement dû à l'augmentation du nombre de Rayleigh-Darcy Ra_m .



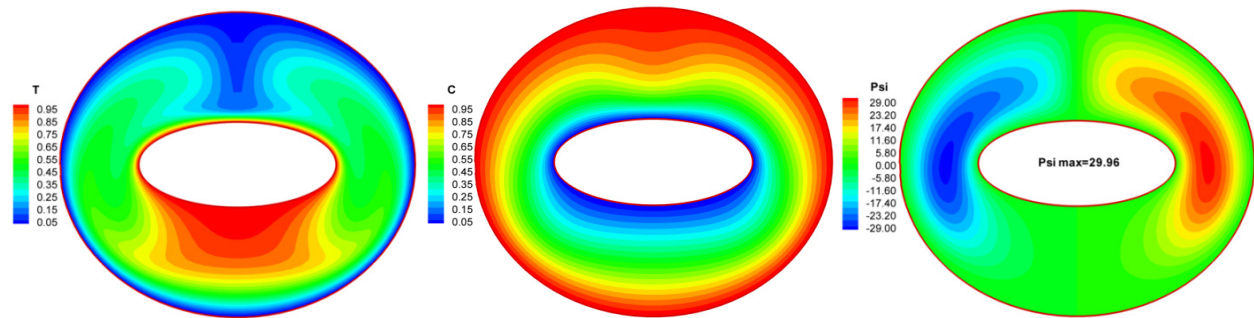
(a) $Ra_m=10$



(b) $Ra_m=50$



(c) $Ra_m=100$



(d) $Ra_m=150$

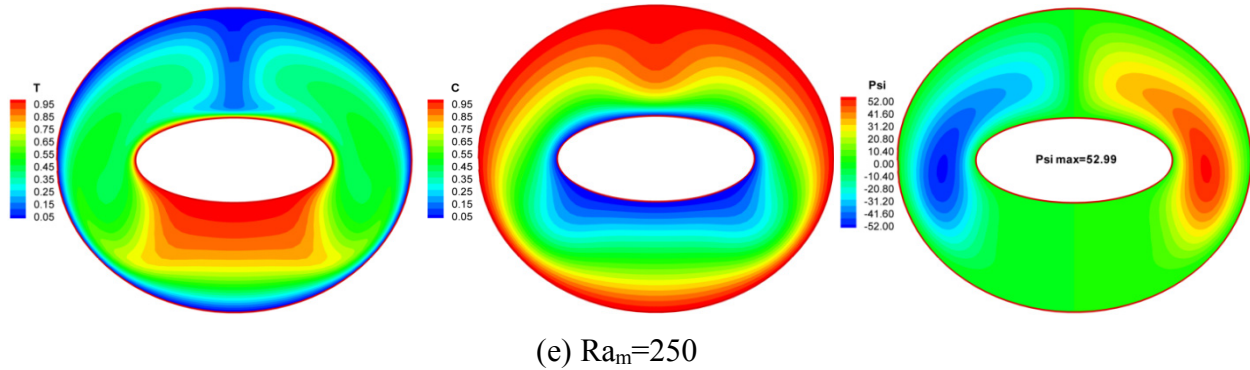


Figure 4.24 : Isothermes, isoconcentrations et lignes de courant
 $N=-2$, $Le = 0.1$, $e_1=0.9$, $e_2=0.5$ et $\alpha=0^\circ$

4.5.2.1.2 Les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux et moyens

La Figure 4.25 montre la variation du nombre de Nusselt local sur la paroi interne du cylindre elliptique, cette variation nous a permis de constater que l'augmentation du nombre de Rayleigh-Darcy engendre une intensification de la convection naturelle ce qui implique une augmentation des valeurs des nombres de Nusselt locaux. La variation du nombre de Nusselt local montre l'existence d'un maximum et d'un minimum correspondant respectivement aux positions azimutales $\theta = 90^\circ$ et $\theta = 270^\circ$. Ces cellules ramènent le fluide dans la partie supérieure de l'enceinte vers la paroi chaude et le repoussent de la paroi chaude vers la paroi froide dans la partie inférieure de l'enceinte. La figure 4.26 illustre les mêmes variations pour les nombres de Sherwood locaux que ceux de la figure précédente pour les nombres de Nusselt locaux.

Nous terminons cette partie par la figure 4.27 qui montre les variations des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens sur la paroi interne. Cette figure nous permet de constater que les valeurs des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens sur la paroi interne augmentent avec l'augmentation de la valeur de Ra_m ce qui est évident, ceci d'une part, d'autre part, ces valeurs du nombre de Nusselt moyen sont plus importantes que celles du nombre de Sherwood moyen, car le nombre de Lewis dans ce cas-là est inférieur à un ($Le < 1$.)

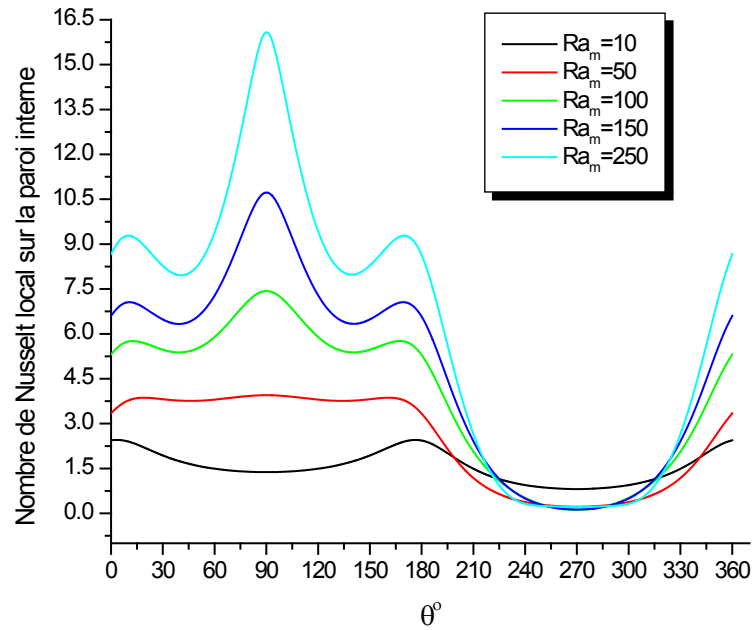


Figure 4.25 : La variation du nombre de Nusselt local sur la paroi interne en fonction de la position azimutale (θ), pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh-Darcy (Ra_m) et pour $N=-2, Le = 0.1, e_1=0.9, e_2=0.5$ et $\alpha=0^\circ$

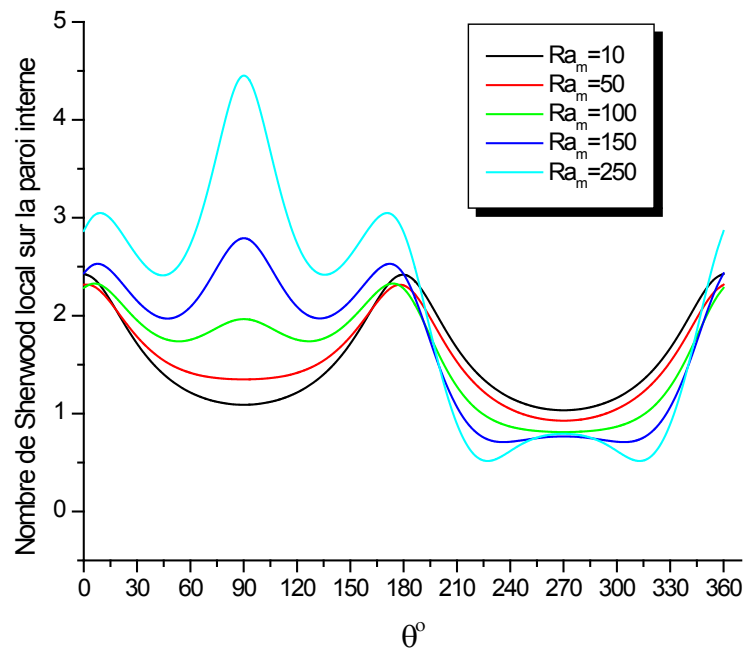


Figure 4.26 : La variation du nombre de Sherwood local sur la paroi interne en fonction de la position azimutale (θ), pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh-Darcy (Ra_m) et pour $N=-2, Le = 0.1, e_1=0.9, e_2=0.5$ et $\alpha=0^\circ$

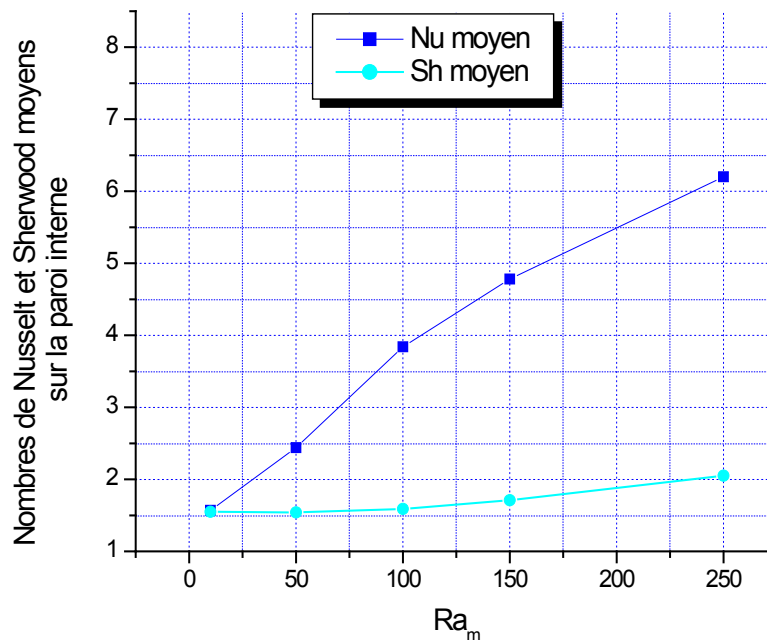


Figure 4.27 : La variation des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens sur la paroi interne en fonction du nombre de Rayleigh-Darcy Ra_m pour $N=-2$, $Le=0.1$, $e_1=0.9$, $e_2=0.5$ et $\alpha=0^\circ$

4.5.2.2 L'effet du nombre de Lewis

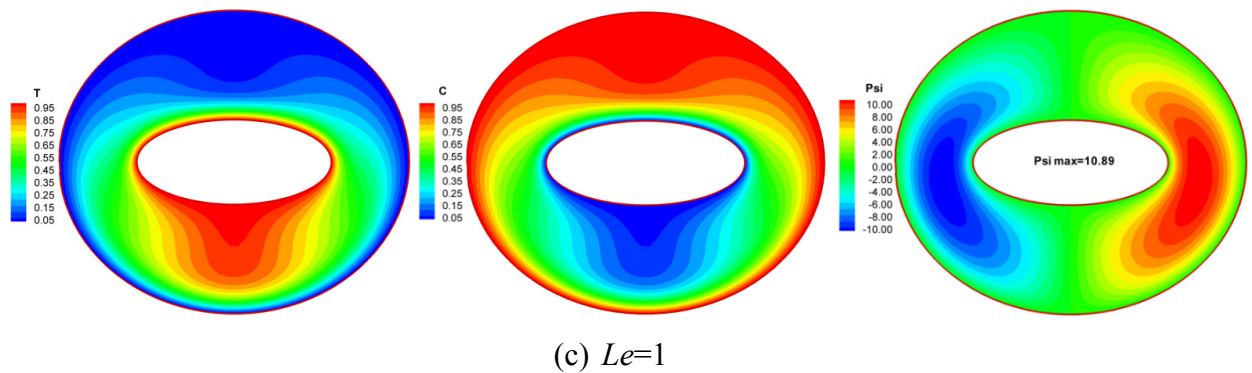
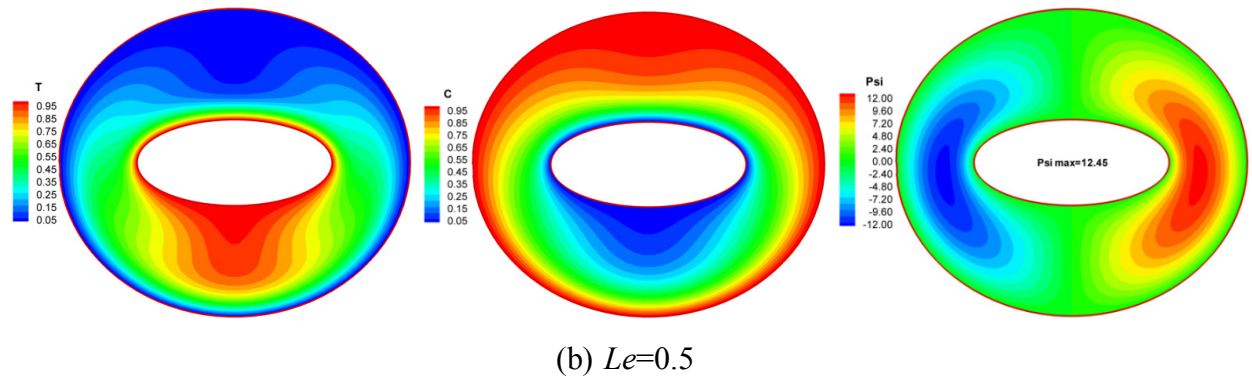
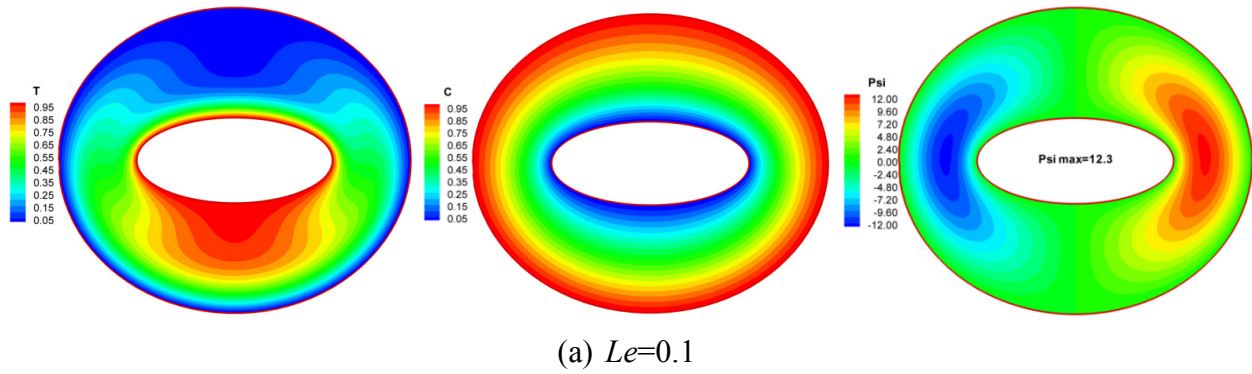
Nous examinons ici l'effet du nombre de Lewis pour différentes valeurs dans un intervalle de $Le = [0.1 - 10]$ pour le cas où les gradients thermique et massique s'opposent avec un rapport de flottabilités $N=-5$ et pour des excentricités du cylindre elliptique interne et externe respectivement données par $e_1=0.9$ et $e_2=0.5$ avec $Ra_m = 25$ et avec l'inclinaison choisie $\alpha = 0^\circ$.

4.5.2.2.1 Les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant

La figure 4.28 représente les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant qui sont des contours symétriques par rapport au plan fictif vertical médian. Les lignes de courant des figures (4.28.a), (4.28.b), (4.28.c) et (4.28.d) montrent que l'écoulement est divisé en deux cellules qui tournent dans des directions opposées et les isothermes de toutes ces figures montrent que le transfert de chaleur se fait principalement par convection dans tout l'espace annulaire. Les isoconcentrations de la figure 4.28.a montrent que le transfert de masse est favorisé principalement par la diffusion, ceci est dû à la valeur de la diffusivité massique qui est 10 fois plus importante que celle de la diffusivité thermique pour $Le=0.1$. Les isoconcentrations de la figure 4.28.b se déforment vers le bas dans le sens antinaturel de la convection ceci est dû à l'effet du rapport de flottabilités $N=-5$ qui entraîne les particules du fluide dans le sens de la force de gravité. Dans ce cas-là, le transfert de la masse a subi une transition rapide vers un mode convectif sous l'effet de l'augmentation du nombre de Lewis de $Le=0.1$ à $Le=0.5$.

Lorsque le nombre de Lewis est égal à l'unité ce qui illustré par la figure 4.28.c les stratifications thermique et massique sont similaires et se développent de la même manière en sens inverse.

Cette similarité est due à l'égalité entre la diffusivité thermique et massique pour $Le=1$. Les lignes de courant dans cette figure montrent que les deux cellules contrarotatives se rapprochent davantage l'une de l'autre avec une diminution de la valeur de la fonction de courant. En augmentant davantage la valeur du nombre de Lewis, les figures (4.28.d) et (4.28.e) montrent que la valeur de la fonction de courant diminue sensiblement ceci est dû au panache massique qui freine l'écoulement du fluide.



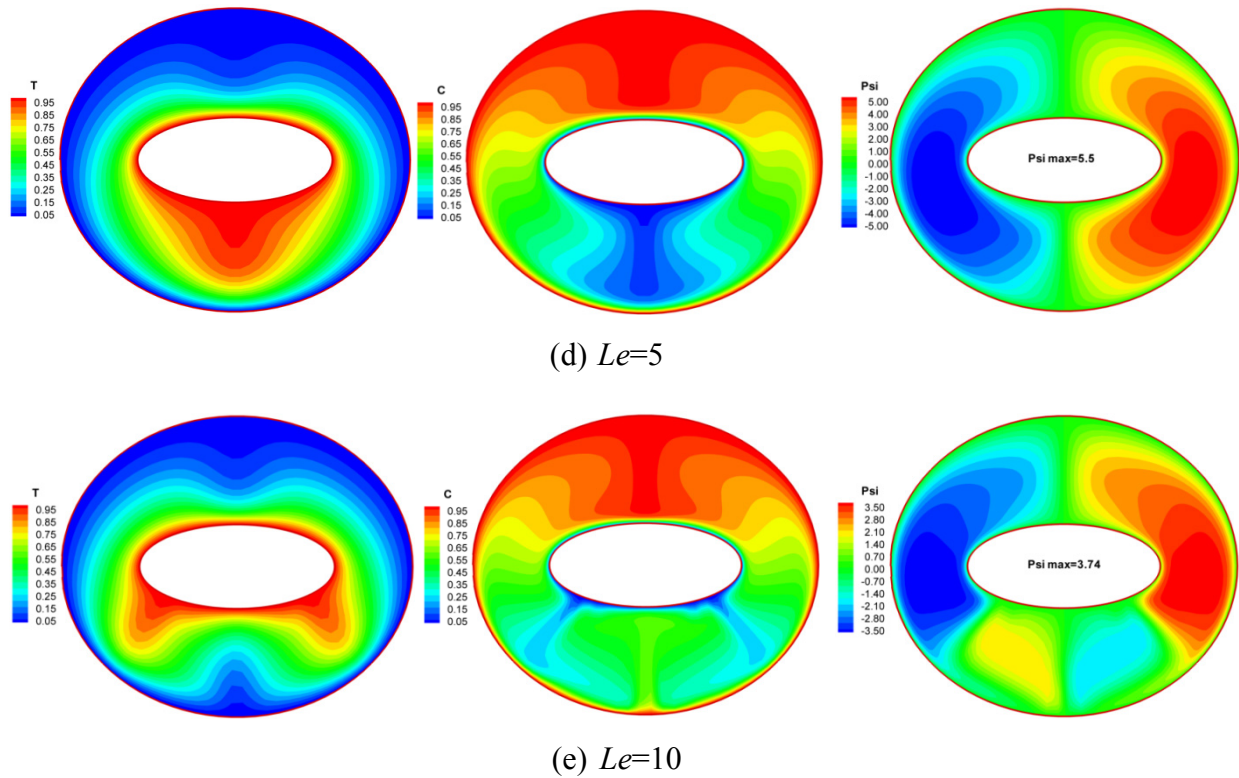


Figure 4.28 : Isothermes, isoconcentrations et lignes de courant
 $Ra_m = 25$, $N = -5$, $e_1 = 0.9$, $e_2 = 0.5$ et $\alpha = 0^\circ$

Sur la figure 4.28.e illustrant le cas où la valeur du nombre de Lewis est égale $Le=10$, la diffusivité massique est dix fois moins importante que celle thermique, les lignes de courant montrent que la structure de l'écoulement a subi un changement important dans leur forme ainsi que dans leur intensité qui diminue de plus en plus. L'écoulement a transité d'un régime bicellulaire vers un régime multicellulaire avec l'apparition de deux cellules supplémentaires dans la partie inférieure de l'espace annulaire.

4.5.2.2.2 Les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux et moyens

La figure 4.29 illustre la variation du nombre de Nusselt local sur la paroi interne du cylindre elliptique pour différentes valeurs du nombre de Lewis. Nous constatons qu'avec l'augmentation du nombre de Lewis, les valeurs locales du nombre de Nusselt diminuent dans la partie supérieure de l'espace annulaire $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, par contre dans la partie inférieure entre $180^\circ < \theta < 360^\circ$ et pour $Le=10$ le maximum qui apparaît est dû à l'apparition des deux cellules supplémentaires (figure 4.28.e) se juxtaposant à la position azimutale $\theta=270^\circ$.

La figure 4.30 montre que la valeur du nombre de Sherwood local augmente avec l'augmentation du nombre de Lewis, ce qui est évident, car le transfert de la masse est meilleur quand la valeur du nombre de Lewis est grande car la diffusivité massique diminue ce qui favorise le mode

convectif. La même remarque est à faire que pour le cas précédent, quant à l'apparition d'un maximum à la position azimutale $\theta=270^\circ$ pour $Le=10$.

La variation des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens qui est illustrée dans la figure 4.31 nous permet de corroborer les observations faites précédemment et de voir l'effet du nombre de Lewis sur les transferts de chaleur et de masse. Le transfert de chaleur se comporte inversement par rapport au transfert de masse sous l'effet du nombre de Lewis.

Pour des valeurs du nombre de Lewis $\ll 1$, l'augmentation de ce dernier engendre une légère augmentation de la valeur de Nusselt moyen sur la paroi interne, mais quand le nombre de Lewis augmente, la valeur du nombre de Nusselt moyen diminue.

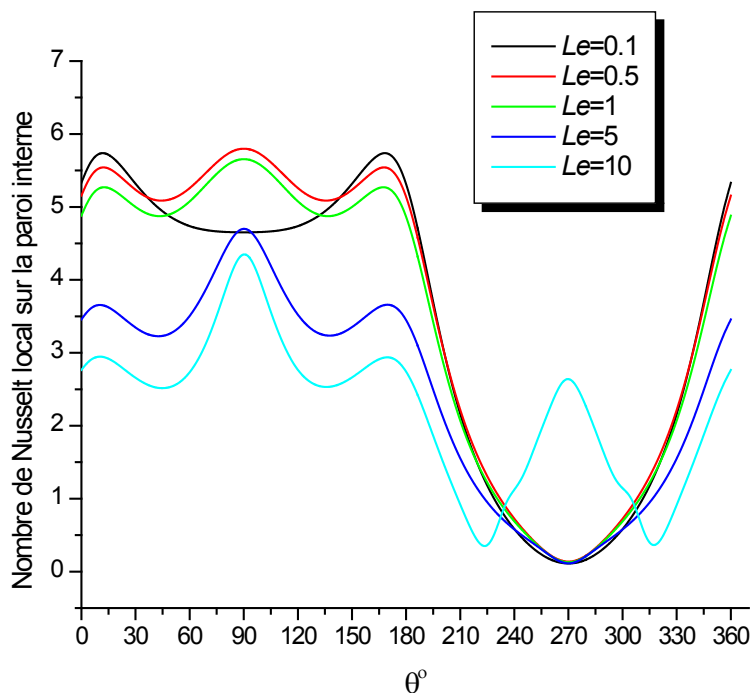


Figure 4.29 : La variation du nombre de Nusselt local sur la paroi interne en fonction de la position azimutale (θ), pour différentes valeurs du nombre de Lewis (Le) et pour $Ra_m=25$, $N=-5$, $e_1=0.9$, $e_2=0.5$ et $\alpha=0^\circ$

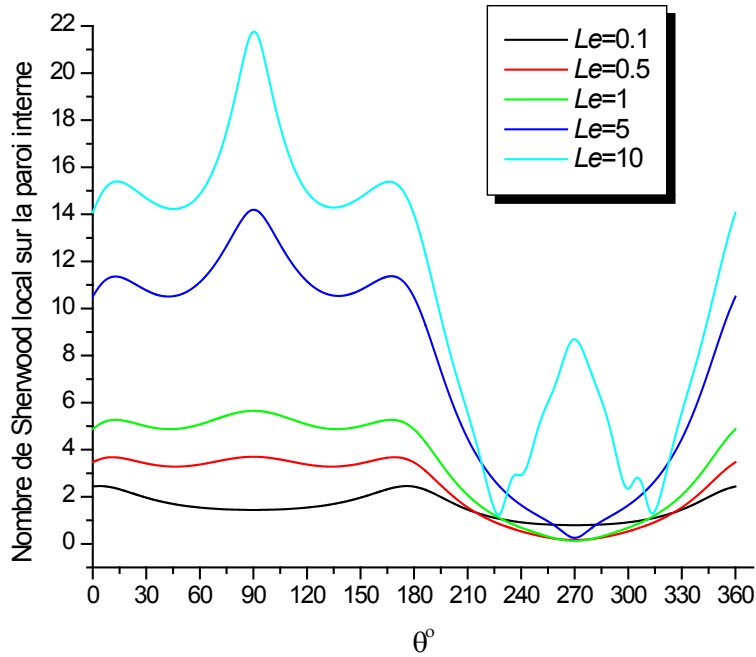


Figure 4.30 : La variation du nombre de Sherwood local sur la paroi interne en fonction de la position azimutale (θ), pour différentes valeurs du nombre de Lewis (Le) et pour $Ra_m=25$, $N=-5$, $e_1=0.9$, $e_2=0.5$ et $\alpha=0^\circ$

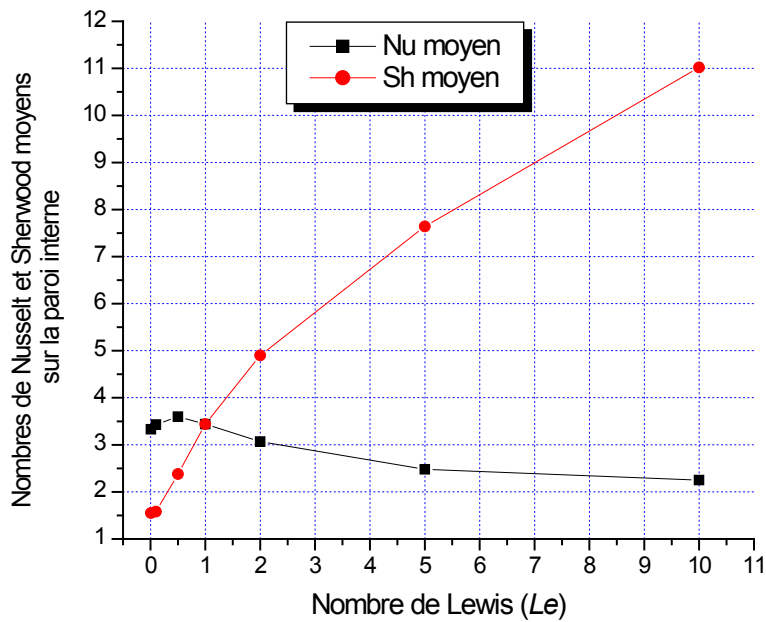


Figure 4.31 : La variation des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens sur la paroi interne en fonction du nombre de Lewis Le pour $Ra_m=25$, $N=-5$, $e_1=0.9$, $e_2=0.5$ et $\alpha=0^\circ$

4.5.2.3 L'effet de l'angle d'inclinaison

L'effet de l'inclinaison du système par rapport à l'horizontale est montré par les figures suivantes pour plusieurs valeurs de α (0° , 15° , 30° , 45° , 60° et 90°) et pour les excentricités choisies $e_1=0.9$ et $e_2=0.5$ et pour un nombre de Rayleigh-Darcy $Ra_m=100$, le nombre de Lewis $Le=1$ et le rapport de flottabilités $N=-2$.

4.5.2.3.1 Les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant

Il faut noter dans tout ce qui suit que la distribution de la concentration n'a pas été représentée car la valeur du nombre de Lewis considérée dans ce cas-là est égale à l'unité et de ce fait, nous avons les mêmes distributions que celles de la température.

Le cas où l'angle d'inclinaison est égal à zéro $\alpha = 0^\circ$:

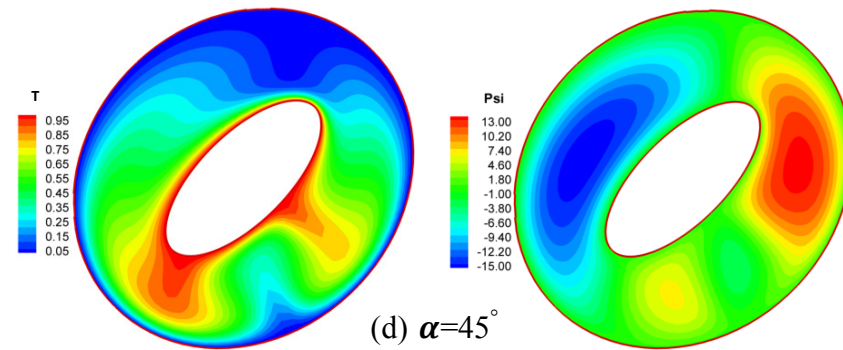
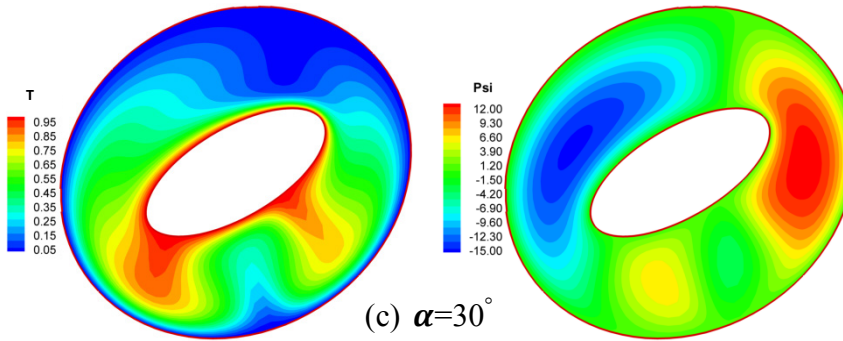
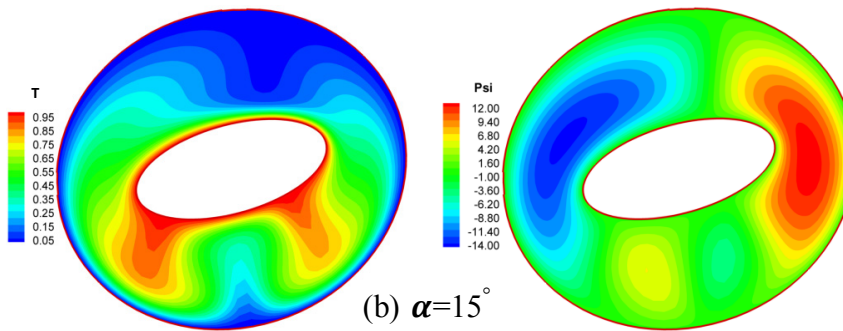
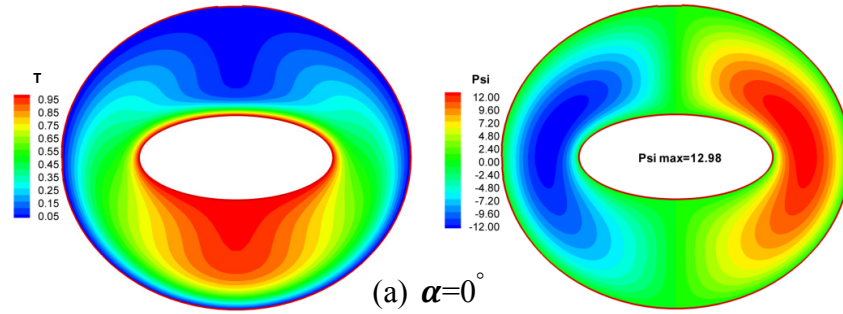
Sur la figure 4.32.a, le plan fictif vertical médian représente un plan de symétrie pour les distributions de la température, la concentration ainsi que pour la structure de l'écoulement. Par conséquent, l'écoulement s'organise par symétrie et par rapport à ce plan vertical en deux cellules principales tournant en sens inverse l'une par rapport à l'autre. Les isothermes dans la même figure se déforment dans la partie inférieure de l'espace annulaire. Dans la partie supérieure de l'enceinte, elles se resserrent près de la paroi interne chaude. Les isoconcentrations illustrent une stratification massique semblable à la stratification thermique avec la même forme des contours car le nombre de Lewis $Le=1$ (sauf qu'elles se resserrent au niveau de la paroi interne à faible concentration).

Le cas où l'angle d'inclinaison $\alpha \neq 0^\circ$ et $\alpha \neq 90^\circ$:

En donnant à l'angle α une valeur autre que 0° et 90° , nous détruisons la symétrie du système par rapport au plan fictif vertical médian. Les figures (4.32.b), (4.32.c) et (4.32.d) qui représentent respectivement les isothermes, les isoconcentrations (par analogie) et les lignes de courant pour $\alpha=15^\circ$, 30° et 45° montrent que l'inclinaison a permis le passage d'un écoulement bicellulaire à un écoulement multicellulaire où la cellule de la partie gauche se développe davantage que son homologue de la partie droite. En augmentant l'angle d'inclinaison pour atteindre $\alpha=60^\circ$ dans la figure 4.32.e les cellules principales se développent davantage pour occuper plus d'espace, on note également que la valeur absolue maximale de la fonction de courant a augmenté pour atteindre la valeur $|\psi| = 16.29$.

Le cas où l'angle d'inclinaison $\alpha = 90^\circ$

Lorsque $\alpha=90^\circ$, le plan fictif vertical passant par le centre du système redevient un plan de symétrie. La figure 4.32.f illustre bien la disparition de la bifurcation où le régime d'écoulement est redevenu un régime bicellulaire, ce qui a engendré une diminution de l'intensité de l'écoulement et par conséquent une atténuation de la convection naturelle indiquée par une légère diminution de la valeur de la fonction de courant $\psi=15.96$.



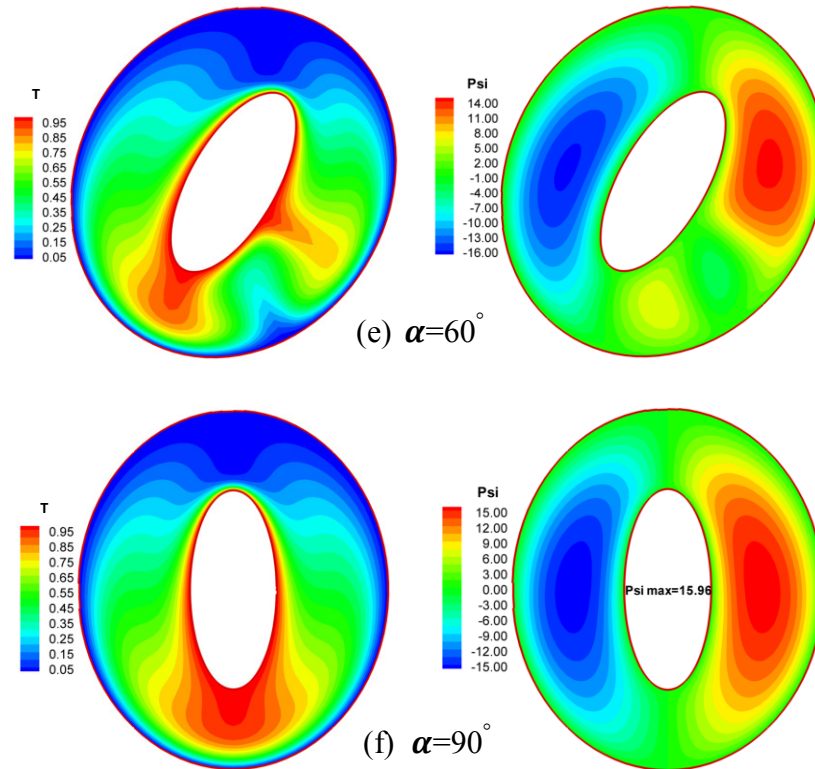


Figure 4.32 : Isothermes, isoconcentrations et lignes de courant
 $Ra_m=100, N=-2, Le=1, e_1=0.9$ et $e_2=0.5$

4.5.2.3.2 Les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux et moyens

La variation des nombres de Nusselt et de Sherwood locaux sur la paroi interne illustrée par la figure 4.33 est en très bon accord avec les distributions des isothermes et des isoconcentrations dans les figures précédentes. On constate que pour les inclinaisons correspondant aux valeurs de α comprises entre 15° et 60° la variation des valeurs locales confirme la présence des cellules supplémentaires dans la zone comprise entre $180^\circ < \theta < 300^\circ$.

La figure 4.34 illustre la variation des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens, qui augmentent avec l'inclinaison ce qui améliore les transferts d'une manière significative jusqu'à atteindre leurs valeurs maximales pour une inclinaison $60^\circ < \alpha < 75^\circ$ avec un régime d'écoulement multicellulaire. La diminution des valeurs des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens se confirme sur cette figure pour $\alpha=90^\circ$ où le régime d'écoulement multicellulaire redevient un régime bicellulaire.

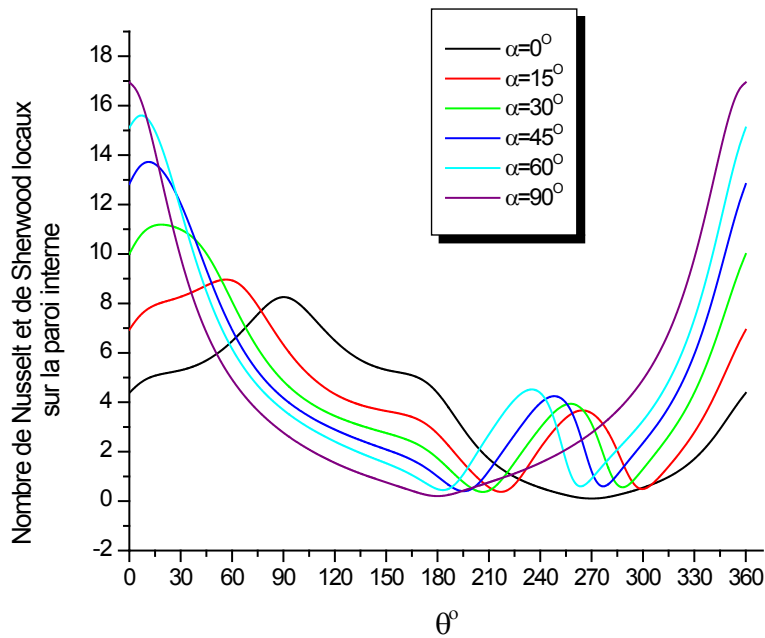


Figure 4.33 : La variation des nombres de Nusselt et de Sherwood locaux sur la paroi interne en fonction de la position azimutale (θ), pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison pour $Ra_m=100$, $N=-2$, $Le=1$, $e_1=0.9$ et $e_2=0.5$

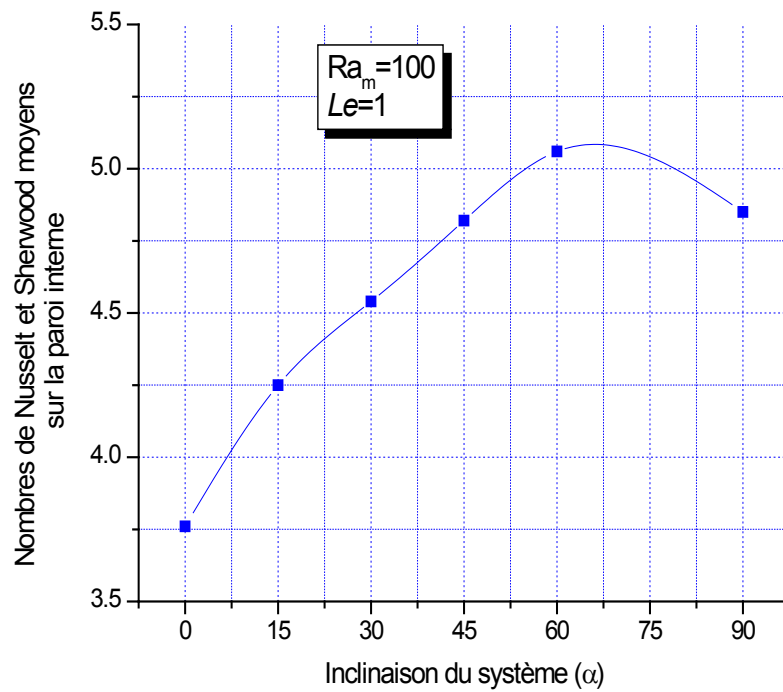


Figure 4.34 : La variation des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens sur la paroi interne en fonction de l'angle d'inclinaison pour $Ra_m=100$, $N=-2$, $Le=1$, $e_1=0.9$ et $e_2=0.5$

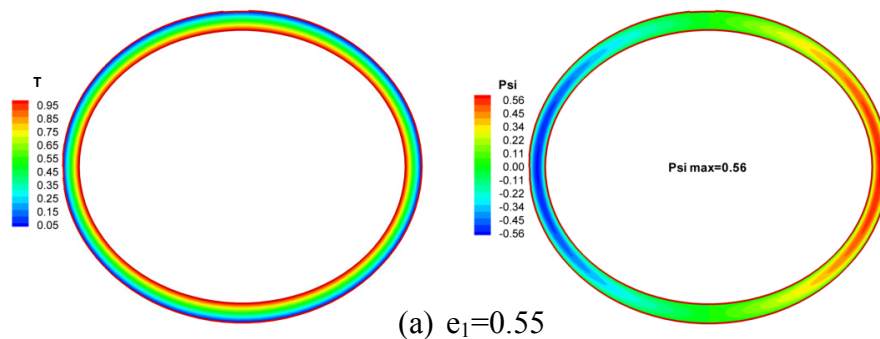
4.5.2.4 L'effet de l'excentricité de l'ellipse interne « e_1 »

Nous considérons les espaces annulaires, caractérisés par les différentes excentricités du cylindre elliptique interne ($e_1=0.55$), ($e_1=0.688$), ($e_1=0.75$), ($e_1=0.9$) et ($e_1=0.999$) avec l'excentricité du cylindre externe qui est maintenue constante ($e_2=0.5$) et pour un nombre de Rayleigh-Darcy $Ra_m=25$, un nombre de Lewis $Le=1$, un rapport de flottabilités $N=-2$ et pour une inclinaison choisie $\alpha=0^\circ$.

La figure 4.35.a, montre que lorsque $e_1=0,55$ l'espace libre entre deux surfaces d'échange est très faible ce qui favorise le transfert par le mode de pseudo-conduction pour le transfert de chaleur et par pseudo-diffusion pour le transfert de masse.

Avec l'augmentation de la valeur de l'excentricité de l'ellipse interne sur la figure 4.35.b l'espace libre est relativement élargi mais les transferts continuent à être dominés par pseudo-conduction pour le transfert de chaleur et par pseudo-diffusion pour le transfert de masse. En augmentant davantage l'excentricité du cylindre interne sur la figures (4.35.c) ce qui engendre plus d'espace est cela facilite le déplacement des particules du fluide au sein de l'enceinte ce qui favorise les transferts de chaleur et de masse par mode de convection, dans ce cas et pour la valeur de $e_1=0.75$ on constate que le régime multicellulaire prend place avec l'apparition de deux cellules supplémentaires dans la partie supérieure de l'espace annulaire avec une intensification de la convection naturelle interprétée par une augmentation de la valeur de la fonction de courant. Par contre, dans la partie inférieure de l'espace annulaire, le transfert de chaleur et de masse se fait principalement par pseudo-conduction et pseudo-diffusion où les isothermes ainsi que les isoconcentrations (par analogie) représentent des courbes parallèles qui épousent très bien le profil des parois dans cette partie de l'enceinte.

Le mode de transfert par convection bidiffusive devient plus important pour les grands espaces annulaires sur les figures (4.35.d) et (4.35.e), l'augmentation de la valeur de l'excentricité interne engendre donc une augmentation de l'espace libre entre les deux surfaces d'échange, ce qui se traduit par une intensification de la convection naturelle dans tout l'espace annulaire.



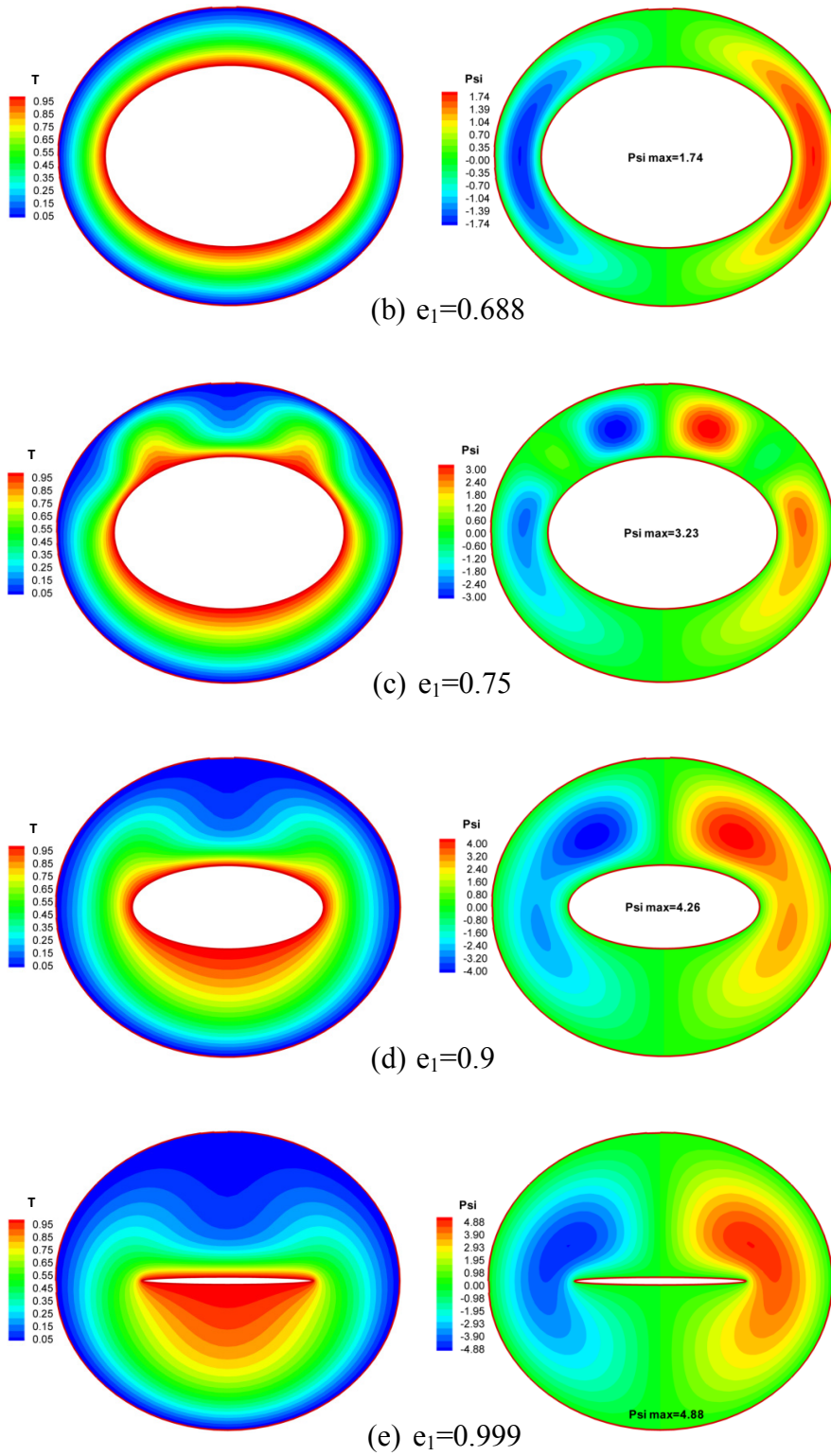


Figure 4.35 : Isothermes, isoconcentrations et lignes de courant
 $Ra_m=25$, $N=-2$, $Le=1$, $e_2=0.5$ et $\alpha=0^\circ$

4.5.3 L'effet du rapport de flottabilités N sur la convection naturelle bidiffusive

Nous illustrons dans cette partie, l'effet du rapport de flottabilités (N) sur la structure de l'écoulement ainsi que sur les transferts de chaleur et de masse, ce rapport qui représente le ratio des forces de poussée thermique et massique. L'effet du rapport de flottabilités sur la convection naturelle bidiffusive est examiné pour le cas coopérant où les forces de volume thermique et massique coopèrent dans le même sens avec $N > 0$ et dans le cas opposant où les deux forces s'opposent avec $N < 0$. La valeur de N varie de -25 à 25 pour la valeur du nombre de Lewis $Le=1$ avec Rayleigh-Darcy $Ra_m=25$, $e_1=0.9$, $e_2=0.5$ et $\alpha=0^\circ$.

4.5.3.1 Les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant

Les figures (4.36) et (4.37) montrent que les stratifications thermique et massique sont identiques et les isothermes et les isoconcentrations sont similaires quelque-soit la valeur du rapport de flottabilités N . Pour le cas de $N=-25$, sur la figure 4.36.a, les lignes de courant montrent que l'écoulement est organisé en quatre cellules qui tournent avec une vitesse très élevée dans des directions opposées l'une par rapport à l'autre. La cellule principale de gauche tourne dans le sens horaire, par contre, la cellule principale de droite tourne dans le sens trigonométrique. Dans ce cas, les diffusivités thermique et massique sont égales mais les forces de volume massiques sont très grandes et s'opposent aux forces de volume thermiques, l'écoulement est principalement entraîné par les forces de flottabilité massiques donnant naissance à une bifurcation d'origine massique et un régime convectif multicellulaire.

Avec la diminution de la valeur absolue du rapport de flottabilités N , l'intensité du régime convectif diminue sensiblement comme le montre les figures (4.36.b) et (4.36.c) qui correspondent respectivement à $N=-10$ et -5 où on constate que le régime d'écoulement dans ces deux cas-là est bicellulaire avec une diminution dans la valeur de la fonction de courant.

Sur la figure 4.36.d, lorsque $N=-1$, les forces de volume thermiques et massiques sont comparables et opposées, et par conséquent il n'y a pas de recirculation dans l'espace annulaire et les valeurs de la fonction de courant sont donc nulles, nous sommes donc en présence d'une situation d'anhélation de la convection naturelle. Les stratifications thermique et massique sont identiques et les isothermes et les isoconcentrations représentent des courbes parallèles et concentriques qui épousent parfaitement les parois interne et externe de notre enceinte. Donc dans cette situation les transferts de chaleurs et de masse se font respectivement par pure conduction et pure diffusion.

Pour le cas coopérant $N > 0$ et pour la valeur du nombre de Lewis considérée $Le=1$. La figure 4.37.a correspondant à $N=1$, l'écoulement reste organisé en deux cellules principales qui tournent dans des directions opposées. La cellule de gauche tourne dans le sens trigonométrique par contre celle de droite tourne dans le sens horaire contrairement au cas opposant. En augmentant davantage la valeur du rapport de flottabilités sur les figures (4.37.b), (4.37.c) et (4.37.d), la

convection naturelle s'intensifie et la valeur de la fonction de courant augmente légèrement moins comparé au cas opposant pour la même valeur absolue du rapport de flottabilités.

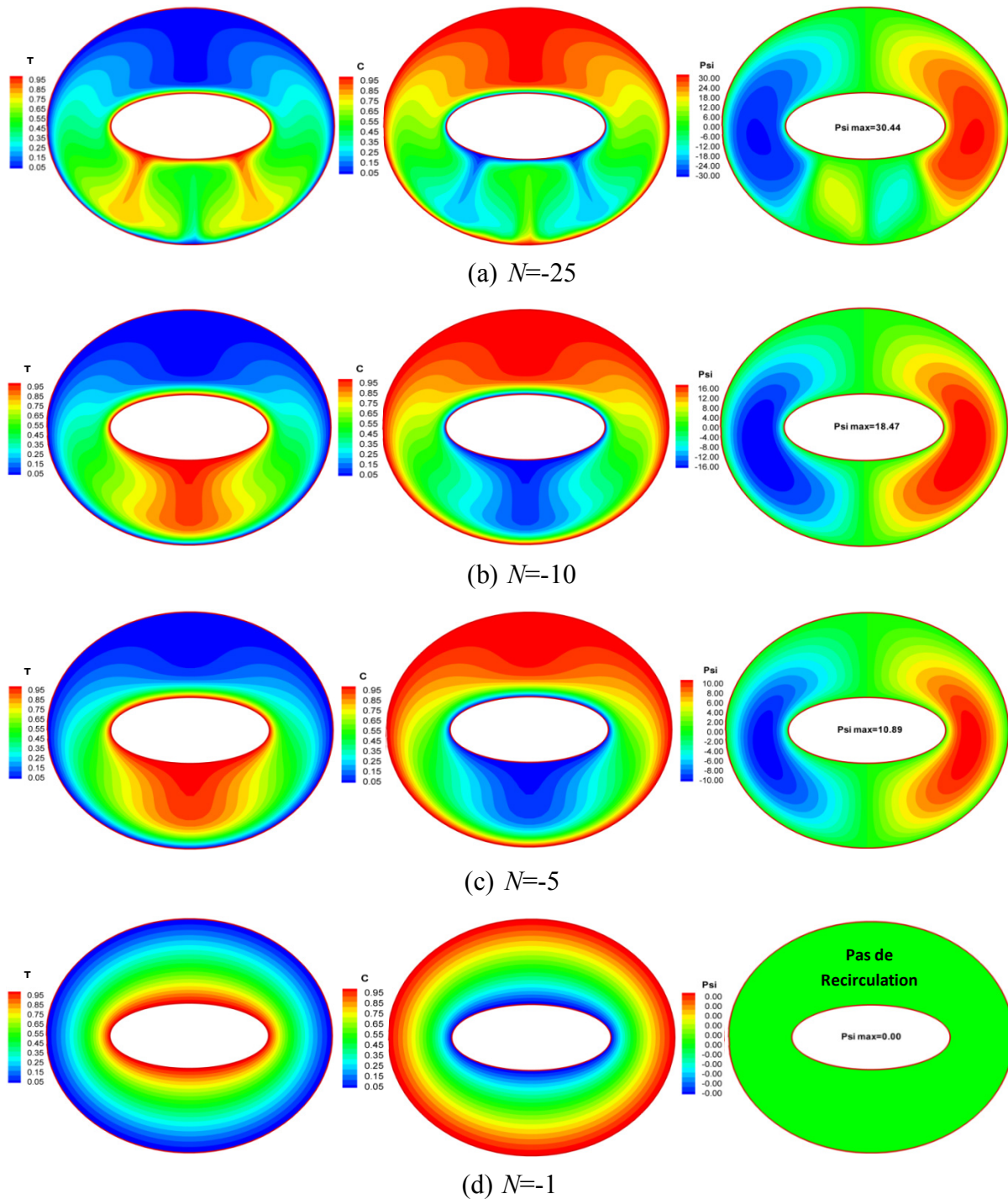


Figure 4.36 : Isothermes, isoconcentrations et lignes de courant pour le cas opposant avec $N < 0$
 $Ra_m = 25$, $Le = 1$, $e_1 = 0.9$, $e_2 = 0.5$ et $\alpha = 0^\circ$

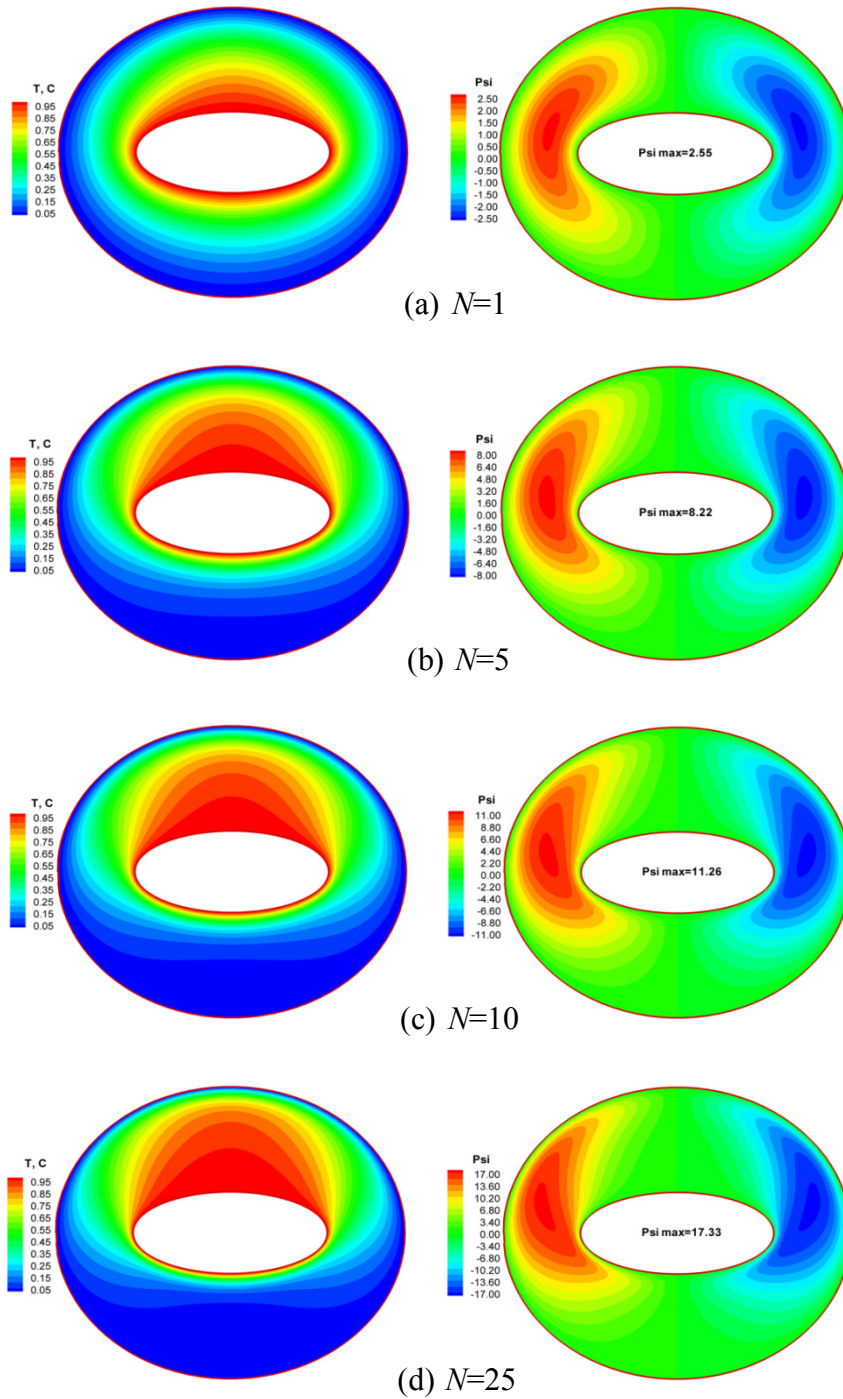


Figure 4.37 : Isothermes, isoconcentrations et lignes de courant pour le cas coopérant avec $N > 0$
 $Ra_m = 25$, $Le = 1$, $e_1 = 0.9$, $e_2 = 0.5$ et $\alpha = 0^\circ$

4.5.3.2 Variation des nombres de Nusselt et Sherwood moyens sur la paroi interne en fonction du rapport de flottabilités « N »

Les figures (4.38) et (4.39) représentent les nombres de Nusselt et de Sherwood moyens qui interprètent les taux moyens des transferts de chaleur et de masse sur la paroi interne en fonction du rapport de poussée N pour les deux modes, coopérant et opposant et pour différentes valeurs du nombre de Lewis (Le) avec un Rayleigh-Darcy $Ra_m=25$, $e_1=0.9$, $e_2=0.5$ et $\alpha=0^\circ$.

On constate sur ces deux figures qu'il y a une valeur critique du rapport de flottabilités qui correspond à $N_c=-1$ où les valeurs des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens sont minimales ce qui correspond à l'absence de recirculation au sein de l'espace annulaire montrée sur la figure 4.36.d où les transferts de chaleur et de masse se font respectivement par pure conduction et pure diffusion notamment pour les valeurs du nombre de Lewis $Le \leq 1$, ces figures sont en très bon accord avec la référence de **D.A. Nield et A. Bejan [69]**.

Sur la figure 4.38 et pour le mode opposant, on constate que la valeur du nombre de Nusselt diminue avec l'augmentation du rapport N jusqu'à atteindre son minimum quand $N=N_c$, contrairement pour le mode coopérant où la valeur du nombre de Nusselt moyen augmente avec l'augmentation de la valeur du rapport de flottabilités à partir de la valeur critique N_c . Pour une valeur du rapport de flottabilités donnée, on constate que la valeur du nombre de Nusselt moyen diminue avec l'augmentation du nombre de Lewis et cela est valable pour le mode coopérant ainsi que pour le mode opposant.

En ce qui concerne le nombre de Sherwood moyen illustré sur la figure 4.39, il est très clair que sa variation en fonction de N est relativement similaire à celle du nombre de Nusselt moyen, on constate que pour $N < N_c$, la valeur du nombre de Sherwood moyen diminue avec l'augmentation du rapport N jusqu'à atteindre son minimum quand $N=N_c$, et inversement pour $N > N_c$ où la valeur du nombre de Sherwood moyen augmente avec l'augmentation de la valeur de N .

Pour une valeur du rapport de flottabilités donnée, la valeur du nombre de Sherwood moyen augmente avec l'augmentation du nombre de Lewis contrairement au nombre de Nusselt moyen et cela est valable quel que soit la valeur de N .

On constate également sur la figure 4.39 que l'intensité du transfert de la matière est plus importante et plus sensible à la variation de Le si l'on compare au transfert de la chaleur de la figure 4.38.

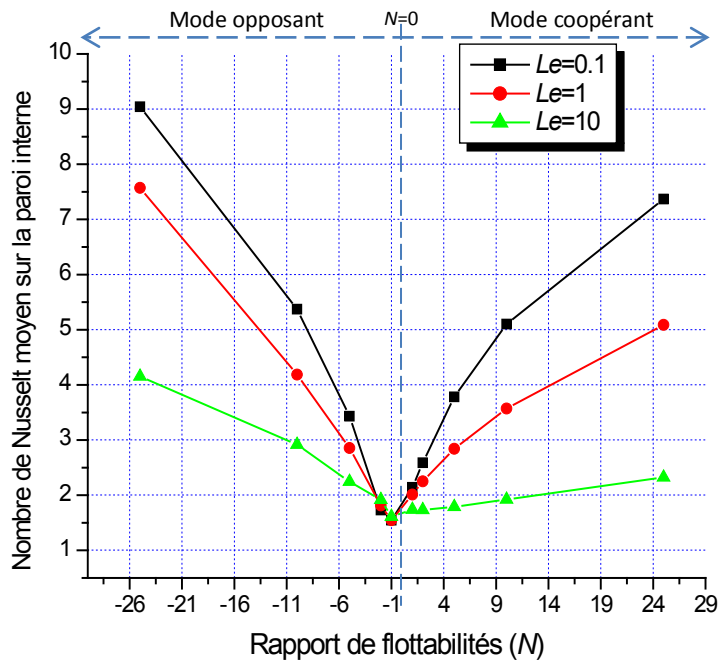


Figure 4.38 : La variation du nombre de Nusselt moyen sur la paroi interne en fonction du rapport de flottabilités (N) et pour différentes valeurs du nombre de Lewis (Le)

$$Ra_m=25, e_1=0.9, e_2=0.5 \text{ et } \alpha=0^\circ$$

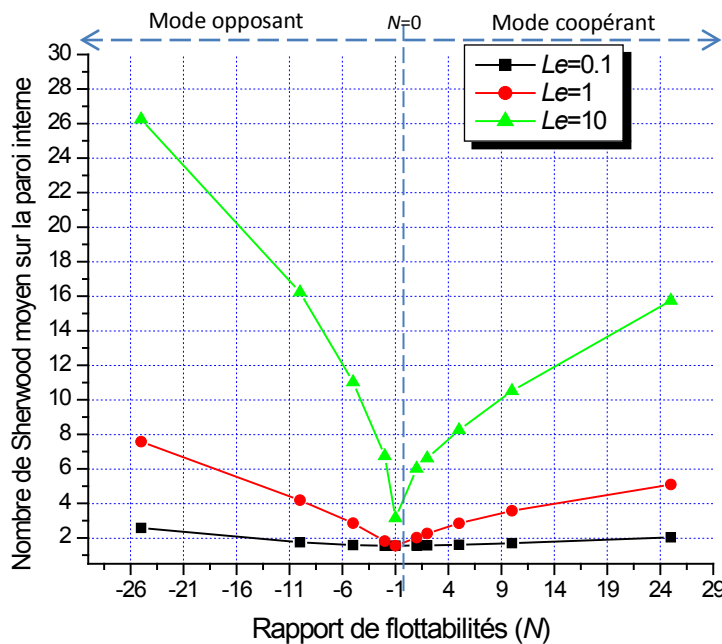


Figure 4.39 : La variation du nombre de Sherwood moyen sur la paroi interne en fonction du rapport de flottabilités (N) et pour différentes valeurs du nombre de Lewis (Le)

$$Ra_m=25, e_1=0.9, e_2=0.5 \text{ et } \alpha=0^\circ$$

Conclusion générale

La convection naturelle double diffusive dans un espace annulaire délimité par deux cylindres elliptiques maintenus à des températures et des concentrations constantes et rempli par un milieu poreux saturé de fluide a été étudiée numériquement pour le cas bidimensionnel d'un écoulement laminaire et permanent, par la méthode des volumes finis et sous la formulation vorticité-fonction de courant, avec l'adoption du modèle de Darcy et l'approximation de Boussinesq.

Le modèle mathématique est représenté par les équations de continuité, de quantité de mouvement, de la chaleur et d'espèces. La méthode des volumes finis a été utilisée pour la discrétisation des équations de type parabolique (chaleur et espèces) et celle des différences centrées pour la discrétisation de l'équation de type elliptique (mouvement). Le système d'équations discrétisées est résolu par la méthode itérative de Gauss-Seidel avec une sous-relaxation. Les distributions de la température et de la concentration ainsi que la fonction de courant dans la matrice poreuse sont représentées en fonction des différents paramètres de contrôle. Les nombres adimensionnels de Nusselt et de Sherwood locaux et moyens déterminant les taux de transfert de chaleur et de masse sont également présentés en fonction de ces paramètres.

La validation de nos résultats, nous a permis de trouver un bon accord avec la littérature, en ce qui concerne la convection naturelle purement thermique, ainsi que pour la convection naturelle double diffusive, pour un écoulement bidimensionnel laminaire et permanent dans un espace annulaire rempli d'un milieu poreux saturé de fluide situé entre deux cylindres circulaires concentriques pour $N=0$ et $N=1$, ainsi que pour le cas de deux cylindres elliptiques confocaux pour $N=0$.

Concernant la convection naturelle purement thermique où $N=0$, les résultats des simulations ont montré que pour un angle d'inclinaison $\alpha=0^\circ$ le régime de l'écoulement est bicellulaire et le transfert de chaleur se fait par pseudo-conduction pour de faibles valeurs de Rayleigh-Darcy $Ra_m < 100$. Avec l'augmentation du nombre de Rayleigh-Darcy jusqu'à $Ra_m=500$, un régime convectif multicellulaire apparaît ce qui traduit alors une intensification de la convection naturelle. L'influence de la géométrie sur la convection naturelle purement thermique a été également examinée pour différentes inclinaisons où l'écoulement s'intensifie le plus quand $\alpha=90^\circ$ et pour différentes valeurs de l'excentricité du cylindre elliptique interne (e_1) où nous avons conclu que le transfert de chaleur est amélioré quand l'espace libre entre les deux cylindres elliptiques augmente.

Dans le cas de la convection naturelle double diffusive, nos résultats ont montré que pour une valeur du nombre de Lewis donnée et pour les excentricités $e_1=0.9$, $e_2=0.5$ le régime de l'écoulement est bicellulaire et les transferts de chaleur et de masse se font respectivement par pseudo-conduction et pseudo-diffusion pour les faibles valeurs du nombre de Rayleigh-Darcy qui varie dans l'intervalle $Ra_m = [10-250]$. L'augmentation de ce dernier engendre une intensification de la convection naturelle avec une amélioration des transferts de chaleur et de masse et ceci est valable pour le cas coopérant avec $N>0$ ainsi que pour le cas opposant avec $N<0$.

L'effet du nombre de Lewis (Le) a été étudié pour les deux cas, coopérant et opposant. Nos résultats montrent que pour une valeur donnée de Rayleigh-Darcy et pour la configuration géométrique qui correspond aux excentricités $e_1=0.9$ et $e_2=0.5$, l'augmentation du nombre de Lewis engendre une amélioration dans le transfert de la masse interprété par l'augmentation du nombre de Sherwood moyen dû à la diminution de la diffusivité massique. Contrairement au transfert de la masse, le nombre de Nusselt moyen diminue avec l'augmentation du nombre de Lewis (Le) et ceci est valable pour le cas coopérant avec $N>0$ ainsi que pour le cas opposant avec $N<0$ mais avec l'exception des valeurs de $Le \ll 1$ où le nombre de Nusselt moyen subit un léger accroissement avant sa diminution.

Le cas particulier de $Le=1$ se caractérise par la similarité qualitative et quantitative des stratifications thermique et massique ainsi que les valeurs des Nombres Locaux et moyens de Nusselt et de Sherwood pour toutes les valeurs du rapport de flottabilités $-25 \leq N \leq +25$.

L'effet de l'inclinaison du système a été examiné pour les deux cas, coopérant et opposant où nous avons constaté que le régime d'écoulement s'intensifie en gardant sa structure bicellulaire avec la variation de l'inclinaison (α) où il atteint son maximum d'intensité pour $\alpha=90^\circ$ et ceci est valable uniquement pour le cas coopérant avec $N>0$. En revanche et pour le cas opposant, l'écoulement se caractérise par un régime bicellulaire pour les deux cas de symétrie avec $\alpha=0^\circ$ et $\alpha=90^\circ$, mais pour les autres valeurs de (α) l'écoulement se caractérise par un régime multicellulaire où l'écoulement s'intensifie et atteint un maximum au voisinage de $\alpha=60^\circ$ pour les valeurs de N , Le et Ra_m considérées.

La valeur de l'excentricité du cylindre elliptique interne (e_1) pour une valeur fixe de l'excentricité du cylindre elliptique externe $e_2=0.5$, caractérise l'espace libre entre les deux cylindres elliptiques. L'augmentation de (e_1) génère plus d'espace libre entre les deux cylindres elliptiques ce qui favorise l'intensification de l'écoulement ainsi qu'une amélioration des transferts dans les deux cas coopérant $N>0$ et opposant $N<0$.

L'effet du rapport de flottabilités a été considéré pour différentes valeurs du nombre de Lewis (Le) où nous avons constaté qu'il y a une valeur critique de N correspondant à $N_c=-1$ où les valeurs des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens sont minimales ce qui correspond à

l'absence de recirculation au sein de l'espace annulaire où les transferts de chaleur et de masse se font respectivement par pure conduction et pure diffusion.

Pour le mode opposant, on constate que la valeur moyenne des nombres de Nusselt et de Sherwood diminuent avec l'augmentation du rapport (N) jusqu'à atteindre son minimum quand $N=N_c$, contrairement pour le mode coopérant où ces valeurs augmentent proportionnellement avec l'augmentation de la valeur du rapport de flottabilités (N) à partir de la valeur critique N_c .

Quant aux suites que nous pouvons envisager à cette investigation; nous améliorerons le modèle de Darcy en incluant les termes de **Brinkman** et **forchheimer** dans l'équation du mouvement. Nous pensons également à prendre en considération les effets de **Soret** et **Dufour** dans les équations de la chaleur et l'équation de la concentration. L'effet de l'anisotropie de la matrice poreuse peut également être étudié.

ANNEXE

COORDONNEES ELLIPTIQUES

A. 1. Introduction

Dans le référentiel elliptique représenté sur la figure A.1, nous observons dans le plan (x, y) un groupe d'ellipses et un groupe de paraboles :

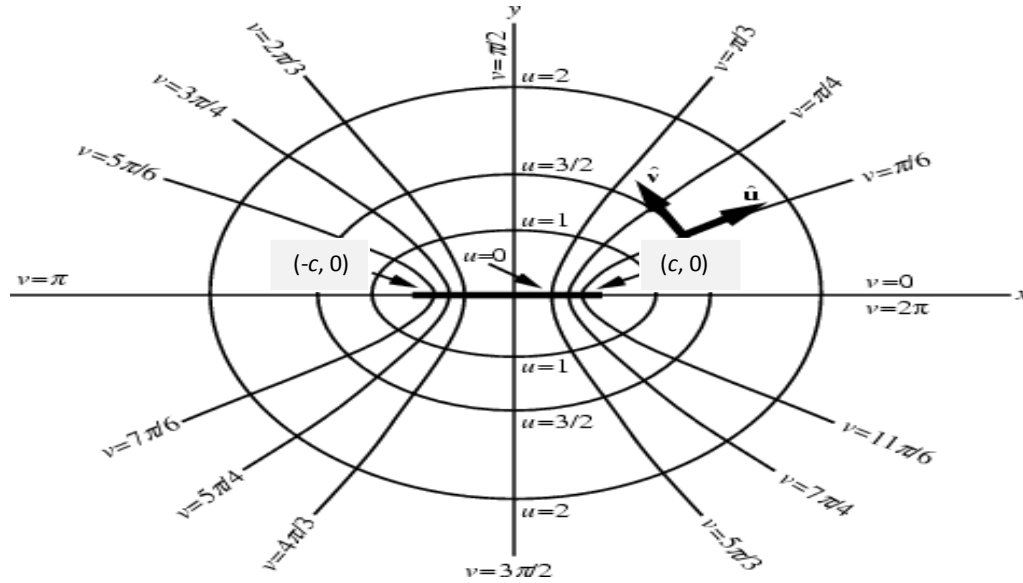


Fig. A.1 représentation schématique des coordonnées elliptiques

- Les ellipses sont définies par $u=\text{constant}$, dont le grand axe est confondu avec l'axe (x).
- Les hyperboles sont définies par $v=\text{constant}$.

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées elliptiques s'effectue à l'aide des relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} x &= c \cdot ch\eta \cos\theta \\ y &= c \cdot sh\eta \sin\theta \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad \text{A.1}$$

Ces formules s'établissent comme suit, d'après la théorie des variables complexes.

Soit :

$$z = c \cdot chw \quad \text{A.2}$$

Avec :

$$z = x + iy \quad \text{et} \quad w = \eta + i\theta$$

Nous avons :

$$chw = \frac{e^w + e^{\bar{w}}}{2} = \frac{e^\eta e^{i\theta} + e^{-\eta} e^{-i\theta}}{2}$$

En développant les termes exponentiels, nous obtenons :

$$chw = \cos\theta ch\eta + i\sin\theta sh\eta \quad \text{A.3}$$

Introduisons (A.3) valeur dans l'équation (A.2), il vient :

$$z = x + iy = c \cdot chw = c \cdot (\cos\theta ch\eta + i\sin\theta sh\eta) \quad \text{A.4}$$

L'identification de la partie réelle à x et de la partie imaginaire à y donne :

$$\left. \begin{aligned} x &= c \cdot ch\eta \cos\theta \\ y &= c \cdot sh\eta \sin\theta \end{aligned} \right\}$$

A.2 Démonstration géométrique

A partir du système (A.1), on a :

$$\cos\theta = \frac{x}{cch\eta} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{y}{csh\eta}$$

Soit :

$$\cos^2\theta = \left(\frac{x}{cch\eta}\right)^2 \quad \text{et} \quad \sin^2\theta = \left(\frac{y}{csh\eta}\right)^2$$

Comme :

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

On en déduit :

$$\left(\frac{x}{cch\eta}\right)^2 + \left(\frac{y}{csh\eta}\right)^2 = 1 \quad \text{A.5}$$

On pose :

$$\left. \begin{aligned} A &= c \cdot ch\eta \\ B &= c \cdot sh\eta \end{aligned} \right\} \quad A.6$$

Et comme :

$$ch\eta > sh\eta \quad \forall \eta \in \mathcal{R}$$

On se ramène donc à l'équation d'une famille d'ellipses de grand axe : $A = c \cdot ch\eta$ et de petit axe : $B = c \cdot sh\eta$

L'équation (A.5) sera donc de la forme suivante :

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1 \quad A.7$$

A.3 Coefficients métriques

En coordonnées cartésiennes un élément de longueur s'écrit :

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

En coordonnées polaires (r, θ) , $(ds)^2$ s'écrit :

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2$$

Cet exemple nous conduit à écrire, dans le cas général :

$$(ds)^2 = h_1(du_1)^2 + h_2(du_2)^2$$

Où : u_1 et u_2 sont des coordonnées curvilignes, les quantités h_1 et h_2 les coefficients métriques qui sont fonction, en général, des coordonnées.

En coordonnées cartésiennes, on a $h_x=h_y=h_z=1$ et en coordonnées elliptiques :

$$h_\eta = h_\theta = c \cdot (sh^2\eta + sh^2\theta)^{1/2}, \quad h_z=1$$

Ces coefficients sont obtenus en utilisant les transformations (A.1) et les définitions suivantes :

$$h^2_\eta = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2 \quad A.8$$

$$h^2_\theta = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 \quad A.9$$

$$h^2_z = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2 \quad A.10$$

On obtient:

$$h_\eta = h_\theta = c. (sh^2\eta + sh^2\theta)^{1/2} \quad \text{A.11}$$

$$h_z = 1 \quad \text{A.12}$$

En connaissant les coefficients métriques, on peut écrire les différentes expressions des gradients, divergences, rotationnels, etc..., qui s'écrivent de la façon suivante :

$$\overrightarrow{\text{Grad}}\phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \overrightarrow{a_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \overrightarrow{a_2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \overrightarrow{a_3}$$

Avec :

h_1, h_2, h_3 : sont des coefficients métriques.

x_1, x_2, x_3 : sont des coordonnées curvilignes.

$$\text{Div } \vec{V} = \frac{1}{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 \cdot h_3 \cdot V_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 \cdot h_3 \cdot V_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 \cdot h_2 \cdot V_3) \right)$$

Avec :

V_1, V_2, V_3 : composantes de la vitesse suivant x_1, x_2, x_3 .

$$\begin{aligned} \text{Rot } \vec{V} = & \frac{1}{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3} \left(h_1 \left[\frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 \cdot V_3) - \frac{\partial}{\partial x_3} (h_2 \cdot V_2) \right] \overrightarrow{a_1} \right. \\ & + h_2 \left[\frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 \cdot V_1) - \frac{\partial}{\partial x_1} (h_3 \cdot V_3) \right] \overrightarrow{a_2} \\ & \left. + h_3 \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 \cdot V_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 \cdot V_1) \right] \overrightarrow{a_3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\phi = & \frac{1}{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3} \left(\frac{h_2 \cdot h_3}{h_1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial \left(\frac{h_2 \cdot h_3}{h_1} \right)}{\partial x_1} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{h_1 \cdot h_3}{h_2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial \left(\frac{h_1 \cdot h_3}{h_2} \right)}{\partial x_2} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right. \\ & \left. + \frac{h_1 \cdot h_2}{h_3} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial \left(\frac{h_1 \cdot h_2}{h_3} \right)}{\partial x_3} \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right) \end{aligned}$$

Puisque dans notre cas, nous avons, en coordonnées elliptiques :

$$\begin{cases} h_1 = h_\eta \\ h_2 = h_\theta \\ h_3 = h_z = 1 \end{cases}$$

Avec : $h_\eta = h_\theta = h$

Nous avons également :

$$\begin{cases} x_1 = \eta \\ x_2 = \theta \\ x_3 = z \end{cases} ; \begin{cases} V_1 = V_\eta \\ V_2 = V_\theta \\ V_3 = V_z \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \vec{a}_1 = \vec{a}_\eta \\ \vec{a}_2 = \vec{a}_\theta \\ \vec{a}_3 = \vec{a}_z \end{cases} \text{ sont les vecteurs unitaires suivant } \eta, \theta \text{ et } z$$

Ceci nous permettra donc de simplifier les équations précédentes :

$$\overrightarrow{\text{Grad}}\phi = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta} \vec{a}_\eta + \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \vec{a}_\theta \right) + \frac{\partial\phi}{\partial z} \vec{a}_z \quad \text{A.13}$$

$$\text{Div } \vec{V} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial}{\partial\eta} (hV_\eta) + \frac{\partial}{\partial\theta} (hV_\theta) \right) + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad \text{A.14}$$

$$\begin{aligned} \text{Rot} \vec{V} &= \left[\frac{1}{h} \frac{\partial V_z}{\partial\theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right] \vec{a}_\eta + \left[\frac{\partial V_\eta}{\partial z} - \frac{1}{h} \frac{\partial V_z}{\partial\eta} \right] \vec{a}_\theta \\ &\quad + \left[h \frac{\partial V_\theta}{\partial\eta} + V_\theta \frac{\partial h}{\partial\eta} - h \frac{\partial V_\eta}{\partial\theta} - V_\eta \frac{\partial h}{\partial\theta} \right] \vec{a}_z \end{aligned} \quad \text{A.15}$$

$$\Delta\phi = \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} \right) + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \quad \text{A.16}$$

A.3.1 Exemple

Cas de deux cylindres elliptiques confocaux d'axes horizontaux illustree sur la figure A.2.

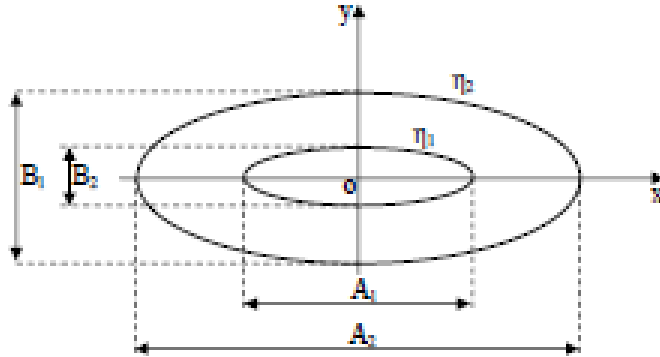


Figure. A.2 Représentation schématique de deux cylindres elliptiques confocaux d'axes horizontaux

Les relations (A.6) donnent les relations suivantes :

$$\frac{A}{B} = \coth\eta = \frac{e^{2\eta} + 1}{e^{2\eta} - 1} \quad A.17$$

On en déduit :

$$e^{2\eta} = \frac{A + B}{A - B} \quad A.18$$

Il résulte donc :

$$\eta = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{A + B}{A - B}\right) \quad A.19$$

Nous aurons respectivement pour le cylindre elliptique intérieur et le cylindre extérieur :

$$\eta_1 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{A_1 + B_1}{A_1 - B_1}\right) \quad A.19.a$$

$$\eta_2 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{A_2 + B_2}{A_2 - B_2}\right) \quad A.19.b$$

A.3.2 L'excentricité de l'ellipses

L'excentricité d'une ellipse est donnée par la relation suivante :

$$e = \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A} \quad A.20$$

Avec $0 < e < 1$

Et A et B sont respectivement le grand et le petit axe de l'ellipse.

D'autre part la relation (A.17) donne :

$$\frac{A^2}{B^2} = \coth^2\eta = \frac{ch^2\eta}{sh^2\eta} \quad A.21$$

Nous avons également :

$$ch^2\eta - sh^2\eta = 1$$

On en déduit :

$$ch^2\eta - 1 = sh^2\eta \quad A.22$$

En remplaçant (A.22) dans (A.21) on obtient :

$$\frac{A^2}{B^2} = \frac{ch^2\eta}{ch^2\eta - 1}$$

D'où :

$$\frac{B^2}{A^2} = \frac{ch^2\eta - 1}{ch^2\eta} = 1 - \frac{1}{ch^2\eta}$$

On en déduit :

$$\frac{1}{ch^2\eta} = 1 - \frac{B^2}{A^2} = \frac{A^2 - B^2}{A^2}$$

Soit encore :

$$\frac{1}{ch\eta} = \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A} = e$$

On obtient donc :

$$e = \frac{1}{ch\eta} \tag{A.23}$$

On aura donc pour le cylindre elliptique intérieur et le cylindre elliptique extérieur les excentricités suivantes :

$$e_1 = \frac{1}{ch\eta_1} \tag{A.23.a}$$

$$e_2 = \frac{1}{ch\eta_2} \tag{A.23.b}$$

Les relations (A.21), (A.22) et (A.23) donnent :

$$th^2\eta = \frac{ch^2\eta - 1}{ch^2\eta} = 1 - \frac{1}{ch^2\eta} = 1 - e^2$$

On aura donc :

$$th\eta = \sqrt{1 - e^2} = \frac{e^{2\eta} + 1}{e^{2\eta} - 1}$$

Ce qui donne :

$$e^{2\eta} = \frac{-(th\eta + 1)}{th\eta - 1}$$

On aura donc la relation suivante :

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{1 - e^2} + 1}{1 - \sqrt{1 - e^2}} \right) \quad \text{A. 24}$$

A.4 Formulation des équations de continuité, de chaleur, de l'espèce et l'équation du mouvement dans le système de coordonnées elliptiques

A.4.1 Equation de continuité

Notre problème étant bidimensionnel, la relation (A.14) s'écrit :

$$\text{Div } \vec{V} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} (hV_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h.V_\theta) \right) \quad \text{A. 25}$$

Ainsi $\text{Div } \vec{V} = 0$, se traduit par :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (hV_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h.V_\theta) = 0 \quad \text{A. 26}$$

A.4.2 Equation du mouvement

Réécrivons l'équation du mouvement (2.10) sous la forme suivante :

$$\text{Div}(\overrightarrow{\text{Grad}}\psi) = -\frac{Kg\beta_T}{\nu} \left(\left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\beta_C}{\beta_T} \frac{\partial C}{\partial x} \right) \cos(\alpha) - \left(\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\beta_C}{\beta_T} \frac{\partial C}{\partial y} \right) \sin(\alpha) \right) \quad \text{A. 27}$$

D'après les relations (A.13) et (A.24), nous déduisons :

$$\text{Div}(\overrightarrow{\text{Grad}}\psi) = \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \quad \text{A. 27.a}$$

Nous expliciterons maintenant l'expression suivante en fonction de η et θ :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\beta_C}{\beta_T} \frac{\partial C}{\partial x} \right) \cos(\alpha) - \left(\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\beta_C}{\beta_T} \frac{\partial C}{\partial y} \right) \sin(\alpha) \quad \text{A. 27.b}$$

D'après les relations (A.1), nous pouvons écrire :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta$$

$$dx = c(ch\eta \cos\theta d\eta - ch\eta \sin\theta d\theta) \quad A.29.a$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta$$

$$dy = c(sh\eta \sin\theta d\eta + sh\eta \cos\theta d\theta) \quad A.29.b$$

A partir de ces valeurs nous déterminons les valeurs de $d\eta$ et $d\theta$:

$$d\eta = \frac{1}{c^2(sh^2\eta + \sin^2\theta)} [c \cos\theta sh\eta dx + c \sin\theta ch\eta dy] \quad A.30$$

$$d\theta = \frac{1}{c^2(sh^2\eta + \sin^2\theta)} [c \cos\theta sh\eta dx + c \sin\theta ch\eta dy] \quad A.31$$

Par suite on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\eta}{dx} &= \frac{\cos\theta sh\eta}{c (sh^2\eta + \sin^2\theta)} \\ \frac{d\theta}{dx} &= \frac{-\sin\theta ch\eta}{c (sh^2\eta + \sin^2\theta)} \end{aligned} \right\} \quad A.32$$

Nous remarquons que :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} &= -\frac{d\eta}{dy} \\ \frac{d\theta}{dy} &= \frac{d\eta}{dx} \end{aligned} \right\} \quad A.33$$

Comme les dérivées partielles de T par rapport à x et à y sont définies par :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad A.34$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad A.35$$

En tenant compte des relations (A.33), l'équation (A.35) devient :

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad A.36$$

Alors, en utilisant les relations (A.32), (A.34) et (A.36) nous obtenons :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{c (sh^2 \eta + sin^2 \theta)} \left[cos \theta sh \eta \frac{\partial T}{\partial \eta} - sin \theta ch \eta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \quad A.37.a$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{c (sh^2 \eta + sin^2 \theta)} \left[sin \theta ch \eta \frac{\partial T}{\partial \eta} + cos \theta sh \eta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \quad A.37.b$$

Par analogie aux termes de température, les termes de concentration s'écrivent de la même façon :

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{c (sh^2 \eta + sin^2 \theta)} \left[cos \theta sh \eta \frac{\partial C}{\partial \eta} - sin \theta ch \eta \frac{\partial C}{\partial \theta} \right] \quad A.38.a$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{1}{c (sh^2 \eta + sin^2 \theta)} \left[sin \theta ch \eta \frac{\partial C}{\partial \eta} + cos \theta sh \eta \frac{\partial C}{\partial \theta} \right] \quad A.38.b$$

En portant ces valeurs dans l'expression (A.27.b), il vient :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\beta_C}{\beta_T} \frac{\partial C}{\partial x} \right) cos \alpha - \left(\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\beta_C}{\beta_T} \frac{\partial C}{\partial y} \right) sin \alpha \\ &= \frac{1}{c (sh^2 \eta + sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{cos \theta sh \eta cos \alpha - sin \theta ch \eta sin \alpha}{(sh^2 \eta + sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{\beta_C}{\beta_T} \frac{\partial C}{\partial \eta} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{cos \theta sh \eta sin \alpha + sin \theta ch \eta cos \alpha}{(sh^2 \eta + sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\beta_C}{\beta_T} \frac{\partial C}{\partial \theta} \right) \right] \quad A.39 \end{aligned}$$

On peut écrire la relation qui précède sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\beta_C}{\beta_T} \frac{\partial C}{\partial x} \right) cos \alpha - \left(\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\beta_C}{\beta_T} \frac{\partial C}{\partial y} \right) sin \alpha \\ &= \frac{1}{h} \left[[cos(\alpha) F(\eta, \theta) - sin(\alpha) G(\eta, \theta)] \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{\beta_C}{\beta_T} \frac{\partial C}{\partial \eta} \right) \right. \\ & \quad \left. - [sin(\alpha) F(\eta, \theta) + cos(\alpha) G(\eta, \theta)] \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\beta_C}{\beta_T} \frac{\partial C}{\partial \theta} \right) \right] \quad A.39.a \end{aligned}$$

Avec :

$$\left. \begin{aligned} F(\eta, \theta) &= \frac{sh\eta \cdot \cos\theta}{(sh^2\eta + \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}} \\ G(\eta, \theta) &= \frac{ch\eta \cdot \sin\theta}{(sh^2\eta + \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \right\} \quad A.39.b$$

Finalement, l'équation du mouvement (A.27) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right] &= -\frac{Kg\beta_T}{v} \left([\cos(\alpha) F(\eta, \theta) - \sin(\alpha) G(\eta, \theta)] \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{\beta_C}{\beta_T} \frac{\partial C}{\partial \eta} \right) - [\sin(\alpha) F(\eta, \theta) + \right. \\ &\left. \cos(\alpha) G(\eta, \theta)] \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\beta_C}{\beta_T} \frac{\partial C}{\partial \theta} \right) \right) \end{aligned} \quad A.40$$

A.4.3 Equation de la chaleur

L'équation de la chaleur peut se mettre sous la forme :

$$(\vec{V} \cdot \overrightarrow{Grad})T = \frac{\lambda}{\rho C_p} Div(\overrightarrow{Grad}T) \quad A.41$$

Compte tenu de l'expression du gradient donnée par la relation (A.13), le premier membre de A.41 donne :

$$(\vec{V} \cdot \overrightarrow{Grad})T = \frac{V_\eta}{h} \frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad A.41.a$$

A partir des relations (A.13) et (A.25), nous déduisons :

$$Div(\overrightarrow{Grad}T) = \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) \quad A.41.b$$

Nous obtenons donc :

$$V_\eta \frac{\partial T}{\partial \eta} + V_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\lambda}{\rho C_p} \frac{1}{h} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) \quad A.42$$

A.4.4 Equation de l'espèce (concentration)

Par analogie à l'équation de la chaleur, l'équation de la concentration s'écrit :

$$V_{\eta} \frac{\partial C}{\partial \eta} + V_{\theta} \frac{\partial C}{\partial \theta} = D \frac{1}{h} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2} \right) \quad A.43$$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] **G. Hadley**, Concerning the Cause of the General Trade-Winds , Philosophical Transactions of The Royal Society, Vol. 39, pp. 58-62, (1735).
- [2] **H. Stommel et al.**, An Oceanographic Curiosity: the Perpetual Salt Fountain. Deep-Sea Research, Vol.3, pp. 152-153, (1956).
- [3] **M. E. Stern**, Collective Instability of Salt Fingers, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 35, pp. 209-218, (1969).
- [4] **W.S. Kiefer et L.H. Kellogg**, Geoid anomalies and dynamic topography from time-dependent, spherical axisymmetric mantle convection, Journal of Physics of the Earth and Planetary Interiors, Vol. 106, Issue 3-4, pp. 237–256, (1998).
- [5] **R. A. Mahdi et al.**, Improvement of Convection Heat Transfer by Using Porous Media and Nanofluid (Review), International Journal of Science and Research (IJSR), Vol. 2 Issue 8, pp. 34-47, (2013).
- [6] **H. Bénard**, Les Tourbillons Cellulaires dans une Nappe Liquide Transportant de la Chaleur par Convection en Régime Permanent, Ann. Chim. Phys. Vol.23, pp. 62-144, (1901).
- [7] **L. Rayleigh**, On Convection Currents in a Horizontal Layer of Fluid, When the Higher Temperature is on the Underside, Phil. Mag. Vol.32, pp. 529-538, (1916).
- [8] **W. Beckmann**, Die Wärmeübertragung in Zylindrischen Schichten bei Natürlicher Konvektion, Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Vol.2, pp. 165-178, (1931).
- [9] **C.Y. Liu et al.**, Natural convection heat transfer in long horizontal cylindrical annuli, International Developments in Teat Transfer, part.5, pp. 976-984, (1961).
- [10] **M. R. Abbott**, A numerical method for solving the equations of natural convection in a narrow concentric cylindrical annulus with a horizontal axis, Quart. Journal. Mech. and Applied Math., Vol. 17, Part.4, pp. 471-481, (1964).
- [11] **U. Grigull et W. Hauf**, Natural convection in horizontal cylindrical annuli, Proc. third International Heat Transfer conference, Vol.2. pp. 182-195, (1966).

-
- [12] **J. Prusa et L.S. Yao**, Natural convective heat transfer between eccentric horizontal cylinders, *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 105, pp. 108-116, (1983).
- [13] **T.H. Kuehn et R. J. Goldstein**, An Experimental and Theoretical Study of Natural Convection in the Annulus between Horizontal Concentric Cylinders, *J. Fluid Mech.*, Vol. 74, pp. 695-719, (1976).
- [14] **T.H. Kuehn et R.J. Goldstein**, Correlating Equations for Natural Convection Heat Transfer between Horizontal Circular Cylinders, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 19, pp. 1127-1134, (1976).
- [15] **T.H. Kuehn et R.J. Goldstein**, An experimental study of natural convection heat transfer in concentric and eccentric horizontal cylindrical annuli, *ASME J. Heat Transfer*. Vol. 100. pp. 635-640, (1978).
- [16] **T.H. Kuehn et R.J. Goldstein**, Numerical Solution to the Navier-Stokes Equations for Laminar Natural Convection about a Horizontal Circular Cylinder, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 23, pp. 971-979, (1980).
- [17] **T.H. Kuehn et R.J. Goldstein**, A Parametric Study of Prandtl Number and Diameter Ratio Effects on Natural Convection Heat Transfer in Horizontal Cylindrical Annuli, *J. Heat Transfer ASME*, Vol. 102, pp. 768-770, (1980).
- [18] **D.N. Francis et al.**, CFD Calculation of Internal Natural Convection in the Annulus between Horizontal Concentric Cylinders, SAND2002-3132, Reported by United States Department of Energy by Sandia Corporation, (2002).
- [19] **A. Passerini et al.**, Natural Convection Between Two Horizontal Coaxial Cylinders, *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, Vol. 14, No. 1, pp. 25-40, (2004).
- [20] **P. Teertstra et al.**, Analytical Modeling of Natural Convection in Horizontal Annuli, 43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit American Institute of Aeronautics and Astronautics, AIAA-2005-0959, (2005).
- [21] **Y. Shi et al.**, Finite difference-based lattice Boltzmann simulation of natural convection heat transfer in a horizontal concentric annulus, *Computers & Fluids* 35, pp. 1-15, (2006).
- [22] **E. L. M. Padilla et al.**, Numerical Analysis of The Natural Convection in Horizontal Annuli At Low and Moderate Ra., *Engenharia Térmica (Thermal Engineering)*, Vol. 5, No 02, pp. 58-65, (2006).

- [23] **A. Cheddadi et al.**, Optimisation du transfert de chaleur en géométrie annulaire cylindrique par placement de blocs chauffants symétriques. Jean-Jacques BEZIAN. JITH Albi, 28-30 Août, France, (2007).
- [24] **O. Shahrul Azmir et C.S.N. Azwadi**, UTOPIA Finite Different Lattice Boltzmann Method for Simulation Natural Convection Heat Transfer from a Heated Concentric Annulus Cylinder, European Journal of Scientific Research Vol.38, No.1, pp.63-71,(2009).
- [25] **J. Robles et al.**, A Comparative Analysis of Natural Convection Modeling Methods in a Horizontal Annulus and Its Application to Spent Nuclear Fuel Transfer Operations – 9206, United States Nuclear Regulatory Commission Washington, DC 20555, Waste Management Symposium Proceedings, USA, 1-5 March, Vol. 4, pp.1957-1665, (2009).
- [26] **W.M. Abed et al.**, Natural Convection Heat Transfer in Horizontal Concentric Annulus between Outer Cylinder and Inner Flat Tube, Anbar Journal for Engineering Sciences, Vol.3, No.2, (2010).
- [27] **H. Imtiaz et F. M. Mahfouz**, Numerical simulation of free convection in uniformly heated concentric annulus filled with Micropolar fluid, Proceedings of International Bhurban Conference on Applied Sciences & Technology, Islamabad, Pakistan, 10-13 January, (2011).
- [28] **M. Yaghoubi et al.**, Analysis of Heat Losses of Absorber Tubes of Parabolic through Collector of Shiraz (Iran) Solar Power Plant, Journal of Clean Energy Technologies, Vol. 1, No.1, pp. 33-37, (2013).
- [29] **J.H. Lee et T.S. Lee**, Natural convection in the annuli between horizontal confocal elliptical cylinders, Int. J. Heat. Mass. Trans., Vol. 24, pp. 1739-1742, (1981).
- [30] **W.C. Schreiber et S.N. SINGH**, Natural convection between confocal horizontal elliptical cylinders, Int. J. Heat. Mass. Trans., Vol. 28, pp. 807-822, (1985).
- [31] **M.M. Elshamy et M.N. Ozisik**, Correlation for laminar natural convection between confocal horizontal elliptical cylinders, Numerical Heat Transfer, Part A, vol.18, pp.95-112, (1990).
- [32] **C. H. Cheng et C.C. Chao**, Numerical prediction of the buoyancy-driven flow in the annulus between horizontal eccentric elliptical cylinders, Num. Heat. Trans. A 30, pp.283-303, (1996).

- [33] **W. Chmaissem et al.**, Numerical study of the Boussinesq model of natural convection in an annular space: having a horizontal axis bounded by circular and elliptical isothermal cylinders, *Applied Thermal Engineering* Vol. 22, pp. 1013–1025, (2002).
- [34] **Y.D. Zhu et al.**, Numerical simulation of natural convection between two elliptical cylinders using DQ method,” *International Journal of Heat and Mass Transfer* Vol. 47, pp.797–808, (2004).
- [35] **M. Djeddar et al.**, Numerical Study of bidimensional steady natural convection in a space annulus between two elliptic confocal ducts, influence of the eccentricity, *Rev. Energy. Ren.* Vol.8, pp.63-72, (2005).
- [36] **Y. R. Sakr et al.**, Experimental and Numerical Investigation of Natural Convection Heat Transfer in Horizontal Elliptic Annuli, *Int. J. of Chemical Reactor Engineering* Vol. 6, Article A45, (2008).
- [37] **F.M. Mahfouz**, Buoyancy driven flow within an inclined elliptic enclosure,” *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 50, pp. 1887-1899, (2011).
- [38] **J.P. Caltagirone**, Thermoconvective instabilities in a Porous Medium bounded by two concentric horizontal cylinders, *J. Fluid Mech.* Vol. 76, pp. 337-362, (1976).
- [39] **H.H. Bau**, Low Rayleigh number thermal convection in a saturated porous medium bounded by two horizontal, eccentric cylinders, *J. Heat transfer.* Vol. 106, pp.166-175, (1984).
- [40] **K. Himasekhar et H.H. Bau**, Two-dimensional bifurcation phenomena in thermal convection in horizontal concentric annuli containing saturated porous media, *J. Fluid. Mech.* Vol. 187, pp. 267-300, (1988).
- [41] **M.C. Charrier-Mojtabi et al.**, Numerical and experimental study of multicellular free convection in an annular porous layer, *Int. J. Heat Mass Transfer* Vol. 34, pp. 3061-3074, (1991).
- [42] **J.P.B. Mota et E. Saadjan**, Natural convection in a porous horizontal cylindrical annulus, *J. Heat Transfer* Vol. 116, pp. 621-626, (1994).
- [43] **A. F. Alfahaid et al.**, Natural Convection Heat Transfer in Concentric Horizontal Annuli Containing a Saturated Porous Media, *IIUM Engineering Journal*, Vol. 6, No. 1, (2005).

- [44] **J.E. Braga et al.**, Simulation of turbulent natural convection in a porous cylindrical annulus using a macroscopic two-equation model, *International Journal of Heat and Mass Transfer* Vol. 49, pp. 4340–4351, (2006).
- [45] **J.C. Leong et F.C. Lai**, Natural convection in a concentric annulus with a porous sleeve, *Int. J. Heat and Mass Transfer* Vol. 49, pp. 3016-3027, (2006).
- [46] **K. Khanafer et al.**, Numerical analysis of natural convection heat transfer in a horizontal annulus partially filled with a fluid-saturated porous substrate, *Int. J. Heat and Mass Transfer* Vol.51, pp.1613-1627, (2008).
- [47] **M. Kumari et G. Nath**, Unsteady natural convection from a horizontal annulus filled with a porous medium, *Int. J. Heat and Mass Transfer* Vol.51, pp. 5001-5007, (2008).
- [48] **M. Sankar et al.**, Numerical study of natural convection in a vertical porous annulus with discrete heating” *Int. J. Heat and Mass Transfer* Vol. 54, pp. 1493-1505, (2011).
- [49] **M.C. Charrier-Mojtabi**, Numerical simulation of two- and three-dimensional free convection flows in a horizontal porous annulus using a pressure and temperature formulation, *Int. J. Heat and Mass Transfer* Vol.40, pp. 1521-1533, (1997).
- [50] **E. Saadjan et al.**, Natural convection heat transfer in the annular region between porous confocal ellipses, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 31, pp. 513-522, (1999).
- [51] **J.P.B. Mota et al.**, Natural convection heat transfer in horizontal eccentric elliptic annuli containing saturated porous media, *Int. J. Heat and Mass Transfer* Vol. 43, pp. 4367-4379, (2000).
- [52] **F. A. Khaleel et A. S. Dawood**, The Effect of Adiabatic Obstacles on Natural Convection inside a Horizontal Elliptical Porous Annulus, *Mechanical Engineering Research*, Vol. 4, No. 1, (2014).
- [53] **H. Beji et al.**, Double-Diffusive Natural Convection in a Vertical Porous Annulus, *Numerical Heat Transfer, Part A*, Vol. 36, pp.153-170, (1999).
- [54] **M. Benzeghiba et al.**, Thermosolutal Convection in a Partly Porous Vertical Annular Cavity, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 125, pp. 703-715, (2003).

- [55] **J. C. Kalita et A. K. Dass**, Higher Order Compact Simulation of Double-Diffusive Natural Convection in a Vertical Porous Annulus, *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics* Vol. 5, No.3, pp. 357–371, (2011).
- [56] **M. Sankar et al.**, Double-Diffusive Convection from a Discrete Heat and Solute Source in a Vertical Porous Annulus, *Transp. Porous Med.* Vol. 91, pp.753–775, (2012).
- [57] **S. K. Jena et al.**, Thermosolutal Convection in a Rectangular Concentric Annulus: A Comprehensive Study, *Transport in Porous Media* Vol.98, Issue1, pp.103-124, (2013).
- [58] **M. Bakkas et al.**, Modélisation et Simulation du Transfert de Chaleur et de Masse à l'Intérieur d'un Réacteur de Charbon Actif Réagissant avec de l'Ammoniac Couplé à un Caloduc Annulaire à Eau, *Rev. Energ. Ren. Journées de Thermique*, pp.19-24, (2001).
- [59] **K. S. Reddy et G. V. Satyanarayana**, Numerical Study of Porous Finned Receiver for Solar Parabolic Trough Concentrator, *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics* Vol. 2, No. 2, pp. 172–184, (2008).
- [60] **L. A. Tofaneli et J.S. Marcelo de Lemos**, Simulation of Laminar Natural Convection in a Porous Cylindrical Annulus With Double-Diffusion Effects, *Proceedings of ENCIT 2010, 13th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering*, No.0295, December 5-10, Brazil, (2010).
- [61] **N. Allouache et al.**, Numerical Analysis of Heat and Mass Transfer in an Annular Porous Adsorber for Solar Cooling System, *Defect and Diffusion Forum* Vols. 297-301, pp.802-807, (2010).
- [62] **B. Cheddadi et al.**, Numerical study of double diffusive convection in a cylindrical annular Geometry: Validation and mesh sensibility, *IJCSI International Journal of Computer Science Issues*, Vol. 11, Issue 1, No 1, pp. 96-102, (2014).
- [63] **K. Ragui et al.**, The Impact of Cylindrical Fuel Assemblies' Arrangement on the Heat and Mass Transfers into an Horizontal Porous Circular Cylinder, *International Letters of Chemistry, Physics and Astronomy* Vol. 58, pp. 66-76, (2015).
- [64] **A.J.J. Belabid et A. Cheddadi**, Heat and Mass Transfer in a Saturated Porous Medium Confined in Cylindrical Annular Geometry, *International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering* Vol.9, No.4, pp. 586-590, (2015).

- [65] **J. Boussinesq**, Théorie Analytique de la Chaleur mise en Harmonie avec la Thermodynamique et avec la Théorie Mécanique de la Lumière, Tome 2, Gauthier-Villars, Paris, (1903).
- [66] **H. Darcy**, Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon, distribution d'eaux et filtrage des eaux, Victor Dalmont, Paris, (1856).
- [67] **S.V. Patankar**, Numerical Heat Transfer and fluid flow, McGraw-Hill book company, New York, (1980).
- [68] **E.F. Nogotov**, Applications of Numerical Heat transfer, McGraw-Hill book company, New York, (1978)
- [69] **D. Nield et A. Bejan**, Convection in Porous Media, 3rd ed. Springer-verlang, New York Inc. (2006).

محاكاة عددية للانتقال الحراري والمادي داخل أوسط مسامية مشبعة بمائع في فضاءات حلقيه مختلفة.

ملخص:

الانتقال الحراري والمادي بواسطة الحمل الطبيعي في نظام رقائقي مستقر داخل فضاء أفقي إهليلجي حلقي الشكل ثنائي الأبعاد مليئ بوسط مسامي مشبع بمائع، تم تحليله عددياً باستخدام برنامج حسابي تم تطويره بطريقة الأحجام المحدودة و في صياغة التدويم- دالة التيار وحل كل من معادلة الاستمرارية، وكمية الحركة و معادلة الطاقة ومعادلة التركيز، وذلك باستخدام قانون دارسي وتقريب بوسيناسك. السورين الذين يحددان الفراغ الحلقي لهما درجات حرارة وتركيزات مختلفة و ثابتة. عوامل التحكم المتعلقة بتدفق المائع هي : عدد رايلي- دارسي، عدد لوييس و نسبة الطفو. أما العوامل الهندسية فهي زاوية الميل واللاتمركز للاسطوانات إهليلجية الشكل. يتم دراسة إنتقال الحرارة والمادة بواسطة الحمل الحراري الطبيعي في حال تعاون و حال تعارض لنسبة الطفو لكل من الحرارة و التركيز. يعرض كل من عدد نسلت و عدد شيرود المحلية والمتوسطة وفقاً لعوامل التحكم.

المفاتيح: الانتقال الحراري والمادي، الحمل الطبيعي، الأوساط المسامية، قانون دارسي، فضاء حلقي إهليلجي، صياغة التدويم- دالة التيار.

Numerical simulation of heat and mass transfer in fluid-saturated porous media in different annular spaces

Abstract:

The heat and mass transfer by laminar and steady natural convection in two-dimensional horizontal elliptical annular space filled with a fluid-saturated porous medium is analyzed numerically using our calculation code based on the finite volumes method and under the vorticity-stream function formulation by solving the equations of continuity, momentum, energy and concentration, using Darcy's law and Boussinesq's approximation. Both walls bounding the annular space are maintained at uniform temperatures and concentrations. The flow-related control parameters are Rayleigh-Darcy number, Lewis number and buoyancy ratio. The geometrical control parameters are the inclination angle and the eccentricities of the elliptical cylinders. The heat and mass transfer by natural convection is studied for both cooperating and opposing buoyancies. The locals and the averaged Nusselt and Sherwood numbers are presented in term of the control parameters.

Keywords: *Heat and mass transfer, Natural convection, Porous media, Darcy's law, Elliptical annulus, Vorticity-stream function formulation.*

Résumé :

Les transferts de chaleur et de masse par convection naturelle en régime laminaire et permanent dans un espace annulaire elliptique horizontal bidimensionnel rempli par un milieu poreux saturé de fluide, est analysé numériquement en mettant au point un code de calcul aux volumes finis et en utilisant la formulation vorticité-fonction de courant pour résoudre les équations de continuité, de quantité de mouvement, de l'énergie et de la concentration, en utilisant la loi de Darcy et l'approximation de Boussinesq. Les deux parois délimitant l'espace annulaire sont maintenues à des températures et des concentrations uniformes. Les paramètres de contrôle liés à l'écoulement sont le nombre de Rayleigh-Darcy, nombre de Lewis et le rapport de flottabilités. L'angle d'inclinaison et les excentricités des cylindres elliptiques sont les paramètres liés à la géométrie. Le transfert de chaleur et de masse par convection naturelle est étudié pour les deux cas, coopérant et opposant des gradients de température et de concentration. Les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux et moyens sont présentés en fonction des paramètres de contrôle.

Mots clés : *Transferts de chaleur et de masse, Convection naturelle, Milieux poreux, Loi de Darcy, Espace annulaire elliptique, Formulation vorticité-fonction de courant.*