REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N^0 d'ordre:……
Série:……

MEMOIRE

PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE Doctorat d'etat

Thème

Solution exacte du problème de l'onde plane par l'approche stochastique de Parisi et WU

Par

Lehtihet Zehoua

Soutenu le : / / 2005

Rapporteur : Chetouani L. Univ. Mentouri Constantine

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Depuis la naissance de la mécanique quantique, Plusieurs physiciens, inclus ceux qui adhérent à l'interprétation de Copenhagen et ceux qui n'y adhèrent pas, concevaient confidentiellement l'idée de formuler la mécanique quantique par une dynamique stochastique. L'élément déterminant est l'analogie apparente entre l'équation de Schrôdinger et l'équation de diffusion pour un mouvement Brownien.

Dans cette approche, on peut citer plusieurs tentatives, celle de Shrôdinger en 1932, Bohm en 1952 qui essaya de faire apparaître la mécanique quantique à travers la dynamique stochastique puis vint Nelson en 1966 qui donna une formulation plus élégante par un chemin inverse par rapport à ce dernier. Mais ces théories s'avèrent difficiles à manier pour des systèmes compliqués à plusieurs particules.

Une nouvelle approche équivalente à la mécanique quantique standard existe actuellement : il s'agit de la mécanique quantique stochastique formulée par Parisi et Wu en 1981 [1]. Basée sur quelques principes simples, cette approche est surtout appliquée en théorie de champs et plus particulièrement en théorie de jauge. Récemment, elle a pu être cependant étendue à une certaine classe de systèmes dynamiques.

Malgré la simplicité de la formulation, cette approche n'a pas eu le développement qu'elle mérite comme l'ont été d'autres approches comme celles de Schwinger, Feynmann, Heisenberg... La formulation est basée essentiellement sur le principe suivant : la variable dynamique d'un système devient aléatoire lorsque elle interagit avec un milieu. Son évolution est régie par une équation de type Langevin dans laquelle intervient un bruit. Le bruit est choisi généralement blanc de manière à faire émerger les résultats de la mécanique quantique standard à une certaine limite (équilibre thermique).

En plus de l'équation de Langevin, il s'est avéré aussi qu'avec la probabilité, solution de l'équation de Fokker-Planck qui est du même type que celle de Schrodinger, les résultats physiques peuvent être également obtenus.

En ce qui concerne la formulation de Parisi et Wu, qui est beaucoup plus utile en théorie des champs, elle est basée d'abord sur l'introduction d'un nouveau temps qui est fictif [2]. A la différence de la formulation de Nelson, en plus du temps fictif, le temps ordinaire est imaginaire pour Parisi et Wu par une rotation de Wick pour bien définir la théorie mathématiquement.

Ce temps fictif permet d'obtenir une équation de type de Langevin du premier ordre par rapport à ce dernier. La variable devient aléatoire à cause du bruit qui est aussi généralement blanc. A cette équation, il peut être associé ensuite une probabilité solution aussi d'une certaine équation de Fokker Plank généralisée. Cette équation est de type fonctionnelle, en général difficile à résoudre sauf à l'équilibre où la solution devient égale à $\exp[iS/\hbar]$ c'est à dire la forme standard qui intervient dans le formalisme des intégrales de chemins [3].

En mécanique quantique non relativiste, nous connaissons seulement deux articles [4] et [5] où des applications ont été faites pour ce formalisme stochastique.

Il s'agit de la détermination exacte de l'amplitude de transition pour des actions uniquement quadratiques. C'est ainsi que les cas de la particule, libre, soumise à une force harmonique et à un champ magnétique constant ont été traités respectivement dans les espaces de phases et de configurations.

Le cas relatif à la variable de Grassmann a été en outre considéré.

Pour les cas non exacts nécessitant un traitement perturbatif, Nakazato a donné la méthode.

C'est pour cette raison que nous voulons à travers cette thèse ajouter à cette liste bien réduite de cas solubles par la mécanique quantique stochastique (MQS) le cas non quadratique suivant : il s'agit du problème d'une particule relativiste, sans spin régie donc par l'équation de Klein Gordon en mouvement dans le champ d'une onde plane. Cette onde étant décrite par un 4-potentiel exprimé dans la jauge de coordonnée.

Nous proposons donc de déterminer la fonction de Green par cette approche de la MQS afin de faire la comparaison avec d'autres calculs suivant d'autres méthodes de cette même fonction de Green dans la jauge des coordonnées. Nous pouvons citer les calculs effectués par [6] qui sont de nature algébrique, ou encore ceux qui utilisent les transformations de Furry [7]. Notons au passage que c'est Schwinger [8] avec son formalisme qui utilise les équations de mouvements suivant la représentation de Heisenberg a pour la première fois déterminé cette fonction de Green. Par le formalisme des intégrales de chemins [9] cette fonction de Green a été aussi déterminée exactement et semiclassiquement.

La formulation de cette nouvelle approche qu'est la mécanique quantique stochastique [4] dont il est question dans cette thèse peut être trouvée au chapitre 2.

Au chapitre 3, nous utilisons l'espace des phases pour calculer l'action classique ainsi que le facteur de fluctuation en utilisant deux équations de Langevin celles relatives à la position et à l'impulsion. Le calcul est effectué pour une particule de spin zéro soumise à l'action du champ d'une onde plane dans la jauge de coordonnées.

Nous reprenons le même problème au chapitre 4 en utilisant cette fois çi l'espace de configuration. Le lagrangien remplace l'hamiltonien du chap 3 comme moyen de description du mouvement. Nous avons ainsi une seule équation de Langevin à considérer. Comme précédemment l'action classique et le facteur de fluctuation sont recalculés.

La fonction de Green est alors déterminée à l'équilibre thermique.

Chapitre 2

Formalisme de la mécanique stochastique

2.1 Les équations de Langevin et Fokker-Planck

2.1.1 L'équation de Langevin

L'équation de base de la mécanique quantique stochastique est l'équation de Langevin.

C'est une équation différentielle au premier ordre par rapport au temps s

$$\frac{dx(s)}{ds} = f(x(s)) + \varrho(s), \tag{2.1}$$

où $\varrho(s)$ est une variable aléatoire qu'on appelle bruit.

Le bruit est choisi "blanc" pour les 2 propriétés suivantes

- sa moyenne est d'abord nulle

$$\langle \varrho(s) \rangle = 0, \tag{2.2}$$

- et ensuite le produit de corrélation de 2 bruits aux instants s et s'

$$\langle \varrho(s) \varrho\left(s^{'}\right) \rangle = \Omega\delta\left(s - s^{'}\right), \tag{2.3}$$

est égal à une fonction de Dirac δ.

La solution de l'équation de Langevin est

$$x\left(s\right)\ =x_0+\int_0^s\ \varrho\left(\tau\right)\ d\tau+\int_0^s\ f\left(x\left(\tau\right)\right)\ d\tau, \tag{2.4}$$

est évidemment une fonction du bruit.

Nous avons choisi comme condition initiale $x\left(0\right)=x_0$ à l'instant $s=0$.

C'est ainsi que la position moyenne de la particule est donnée par

$$\left\langle x\left(s\right)\right\rangle\ =x_0+\int_0^s\left\langle f\left(x\left(\tau\right)\right)\right\rangle\ d\tau. \tag{2.5}$$

Nous avons pris pour définition de la moyenne d'une grandeur physique la définition standard utilisée dans le formalisme intégrale de chemin

$$\left\langle F\left(x\left(s\right)\right)\right\rangle=\int F\left(x\left(s\right)\right)\exp\left[-\frac{1}{2\Omega}\int\ \varrho^2ds\right]\ D\varrho\ , \tag{2.6}$$

avec

$$D\varrho=\prod_{j=1}^{N}d\varrho\left(s_j\right), \tag{2.7}$$

la mesure.

Dans tous les calculs de moyenne, il est utile de passer par une source $j\left(s\right)$ ou plutôt par la moyenne d'une exponentielle qui fait intervenir une fonctionnelle de la source. C'est ainsi que nous avons

$$\langle\exp\left[\int j\left(s\right)\varrho\left(s\right)ds\right]\rangle=\int D\varrho\ \exp\left[\int j\left(s\right)\varrho\left(s\right)ds\right]\ \exp\left[-\frac{1}{2\Omega}\int^2\varrho ds\right]. \tag{2.8}$$

Pour intégrer , effectuons le changement $\varrho^{'}=\varrho-\Omega j$.

La mesure restant inchangée $D\varrho = D\varrho^{'}$, cette moyenne (2.8) devient

$$\begin{aligned}\langle\exp\left[\int j\left(s\right)\varrho\left(s\right)ds\right]\rangle &= \exp\left[\frac{\Omega}{2}\int j^2\left(s\right)\ ds\right]\ \int D\varrho\exp\left[-\frac{1}{2\Omega}\int^2\ \varrho ds\right]\\ &= \exp\left[\frac{\Omega}{2}\int j^2\left(s\right)\ ds\right]. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Faisons maintenant agir l'opérateur $\frac{\delta}{\delta j(\tau)}$ sur cette dernière équation. Il vient alors

$$\left\langle \varrho\left(\tau\right)\exp\left[\int j\left(s\right)\varrho\left(s\right)ds\right]\right\rangle = \Omega j\left(\tau\right)\exp\left[\frac{\Omega}{2}\int j^{2}\left(s\right)\ ds\right]. \tag{2.10}$$

Supprimons la source ($j=0$).Nous voyons que la valeur moyenne est nulle pour un bruit gaussien

$$\left\langle \varrho\left(\tau\right)\right\rangle = 0. \tag{2.11}$$

Faisons agir une deuxième fois l'opérateur $\frac{\delta}{\delta j(\tau)}$, en faisant $j=0$ par la suite. Nous obtenons

$$\left\langle \varrho\left(\tau\right)\varrho\left(w\right)\right\rangle = \Omega\delta\left(\tau-w\right). \tag{2.12}$$

Les deux propriétés (2.11) et (2.12) qui caractérisent le bruit "blanc" sont ainsi reproduites grâce à la définition de la moyenne au moyen d'une intégrale de chemin içi une somme sur tous les bruits possibles et où à chaque bruit , un poids de type gaussien lui est affecté.

Cependant pour le calcul de moyennes et dans le cas général, nous pouvons éviter l'utilisation de ces intégrales multiples (fonctionnelles avec des poids gaussiens sur le bruit) en passant par la probabilité qui est solution d'une équation de Fokker-Planck. Le même calcul des moyennes avec la probabilité se réduit ainsi à une simple intégrale.

Montrons alors comment obtenir l'équation de Fokker-Planck

2.1.2 L'équation de Fokker-Planck

Utilisons l'équation de Langevin (2.1) , (2.4) et la moyenne de la grandeur $F\left(x\left(s\right)\right)$ donnée par l'équation (2.6) . Définissons la probabilité de présence de la particule à un instant s et à une position x de la manière suivante

$$\left\langle F\left(x\left(s\right)\right)\right\rangle = \int F\left(x\right)\ P\left(x,s\right)\ dx, \tag{2.13}$$

avec évidemment la condition de normalisation

$$\int P\left(x,s\right)\ dx = 1. \tag{2.14}$$

Il est facile de voir que l'expression de la probabilité

$$P(x,s) = \delta\left(\left(x(s) - x\right)\right). \tag{2.15}$$

En effet, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, P(x,s)\ dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\ \langle\ \delta\left(\left(x(s) - x\right)\right)\rangle\ dx \\
&= \int\int\ F(x)\ \ \delta\left(\left(x(s) - x\right)\right)\ dx\ D\varrho \\
&\quad \times \exp\left[-\frac{1}{2\Omega}\int \varrho^2 ds\right],
\end{aligned} \tag{2.16}$$

et en utilisant

$$f(x)\,\delta(x-a) = f(a)\,\delta(x-a), \tag{2.17}$$

nous obtenons l'équation suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\ F(x)\, P(x,s)\ dx = \int F(x(s)) \exp\left[-\frac{1}{2\Omega}\int \varrho^2 ds\right] D\varrho \int dx \delta\left(\left(x(s) - x\right)\right), \tag{2.18}$$

et donc le résultat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, P(x,s)\ dx = \langle F x(s)\rangle. \tag{2.19}$$

Calculons maintenant la dérivée de la probabilité $P(x,s)$ par rapport au temps s, nous avons successivement

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P(x(s))}{\partial s}\ |_{x\ fix\acute{e}} &= \frac{\partial \langle \delta\left(x(s) - x\right)\rangle}{\partial s} \\
&= \langle \frac{\partial x(s)}{\partial s}\ \frac{\partial}{\partial x(s)}\ \delta\left(x(s) - x\right)\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle [f(x(s)) + \varrho(s)] \frac{\partial \delta(x(s)-x)}{\partial x(s)} \rangle \\
&= -\frac{\partial}{\partial x} \langle f(x(s))\, \delta(x(s)-x) \rangle \\
&\quad -\frac{\partial}{\partial x} \langle \varrho(s)\, \delta(x(s)-x) \rangle,
\end{aligned} \tag{2.20}
$$

où nous avons encore utilisé la propriété

$$
f(x) \frac{\partial}{\partial x} \delta(x-a) = -f(x) \frac{\partial}{\partial a} \delta(x-a). \tag{2.21}
$$

Remarquons par ailleurs que le premier terme de l'équation (2.20) , est égal

$$
-\frac{\partial}{\partial x} \langle f(x(s))\, \delta(x(s)-x) \rangle = -\frac{\partial}{\partial x} f(x)\, P(x,s), \tag{2.22}
$$

la propriété

$$
f(x)\, \delta(x-a) = f(a)\, \delta(x-a), \tag{2.23}
$$

a été utilisée.

Exprimons le deuxième terme de l'équation (2.20) en fonction de la probabilité.

Nous savons d'abord que $x(s)$ dépend du bruit $\eta(s)$ et par conséquent il est clair que la fonction $\delta(x(s)-x)$ dépend aussi du bruit. Avec la technique qui utilise la source, nous avons après avoir remplacé la fonction δ par

$$
\delta(x(s)-x) \longrightarrow H(\varrho(s)), \tag{2.24}
$$

le résultat suivant

$$
\langle \exp[j(s)\, \varrho(s)\, ds]\, H(\eta(s)) \rangle = \exp\left[\frac{\Omega}{2} \int j^2(s)\, ds\right] \langle H(\varrho(s) + \Omega j(s)) \rangle. \tag{2.25}
$$

Dérivons par rapport à la source

$$\frac{\delta}{\delta j\left(w\right)}\;|_{j=0}, \tag{2.26}$$

il vient alors

$$\begin{aligned}
\langle\varrho\left(w\right)H\left(\eta\left(s\right)\right)\rangle &= \Omega\langle\delta\left(w-s\right)\frac{\partial H\left(\varrho\left(s\right)\right)}{\partial\varrho\left(s\right)}\rangle \\
&= \Omega\langle\frac{\partial\varrho\left(s\right)}{\partial\varrho\left(w\right)}\frac{\partial H\left(\varrho\left(s\right)\right)}{\partial\varrho\left(s\right)}\rangle \\
&= \Omega\langle\frac{\partial H\left(\varrho\left(s\right)\right)}{\partial\varrho\left(w\right)}\rangle,
\end{aligned} \tag{2.27}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\langle\varrho\left(s\right)\;\;\delta\left(x\left(s\right)-x\right)\rangle &= \frac{\partial}{\partial x}\Omega\langle\frac{\partial x\left(s\right)}{\partial\varrho\left(s\right)}\frac{\partial}{\partial x\left(s\right)}\;\;\delta\left(x\left(s\right)-x\right)\rangle \\
&= -\Omega\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}\langle\delta\left(x\left(s\right)-x\right)\frac{\partial x\left(s\right)}{\partial\varrho\left(s\right)}\rangle.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Dérivons par rapport au bruit $\varrho\left(s\right)$la solution de l'équation de Langevin (2.4). Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x\left(s\right)}{\partial\varrho\left(s\right)} &= \int_{0}^{s}d\tau\frac{\partial f\left(x\left(\tau\right)\right)}{\partial\varrho\left(s\right)}+\int_{0}^{s}d\tau\frac{\partial\varrho\left(\tau\right)}{\partial\varrho\left(s\right)} \\
&= \theta\left(\tau-s\right)|_{0}^{s} \\
&= \theta\left(0\right)=\frac{1}{2},
\end{aligned} \tag{2.29}$$

l'intégrant (premier terme) de cette dernière équation est nul à cause du principe de causalité qui stipule que seules les forces agissant avant s et non après qui déterminent la position à l'instant s.

Ainsi nous obtenons pour l'équation (2.28)

$$\frac{\partial}{\partial x}\langle\varrho\left(s\right)\delta\left(x\left(s\right)-x\right)\rangle=-\frac{\Omega}{2}\frac{\partial^{2}P\left(x,s\right)}{\partial x^{2}}. \tag{2.30}$$

En utilisant les équations (2.30), (2.20) et (2.22), finalement l'équation de Fokker-Planck est la suivante

$$\frac{\partial P(x(s))}{\partial s}\ |_{x\ fix\acute{e}} = -\frac{\partial}{\partial x} f(x) P(x,s) + \frac{\Omega}{2}\frac{\partial^2 P(x,s)}{\partial x^2}. \tag{2.31}$$

Dans le où $f = 0$, cette équation, après une rotation de Wick $(s \to -is)$, et en posant

$$\Omega = \frac{\hbar}{m}, \tag{2.32}$$

ressemble à celle de Schrödinger (2.31)

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,s)}{\partial s} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,s)}{\partial x^2}. \tag{2.33}$$

Présentons maintenant la méthode de quantification stochastique de Parisi et Wu dont il est question dans cette thèse.

2.1.3 La Méthode de Quantification Stochastique de Parisi et Wu

Le principe sur lequel est basé la méthode de quantification stochastique de Parisi et Wu est le suivant : après introduction d'un temps fictif u, la variable dynamique $x(s)$ devient une variable stochastique $x(s,u)$ et son évolution est décrite par l'équation de Langevin,

$$\frac{\partial}{\partial u} x(s,u) = i\frac{\partial S}{\partial x(s,u)} + \varrho(s,u). \tag{2.34}$$

Par conséquent $x(s,u)$ est une fonction du bruit. Le bruit est choisi aussi "blanc" pour encore ses deux propriétés

- moyenne nulle

$$\langle\varrho(s,u)\rangle = 0, \tag{2.35}$$

- et le produit de corrélation

$$\langle \varrho(s,u)\,\varrho\left(s',u'\right)\rangle = \Omega\delta\left(s-s'\right)\delta\left(u-u'\right), \tag{2.36}$$

est égal à un produit de deux δ.

La moyenne $\langle M\rangle$ étant définie comme auparavant par une somme sur tous les bruits où à chaque bruit un poids de type gaussien lui est affecté

$$\langle M\rangle = \int M \ \exp\left[\frac{-1}{2\Omega}\int \varrho^2(s,u)\ ds\ du\right] D\varrho\ . \tag{2.37}$$

Comme précédemment, il est aussi possible d'obtenir une probabilité $P(x,u)$ satisfaisant à une équation de Fokker-Planck généralisée (intégrale)

$$\frac{\partial}{\partial u}P(x,u) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta}{\delta x(s)}\left(\frac{\delta}{\delta x(s)} - i\frac{\delta S}{\delta x(s)}\right)P(x,u), \tag{2.38}$$

et telle que

$$\langle 1\rangle = \int P(x,u)\ Dx = 1, \tag{2.39}$$

qui est la condition de normalisation.

Il est clair qu'à la limite $u \to \infty$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}P(x,u) &= 0\\ P &= e^{iS}.\end{aligned} \tag{2.40}$$

Ce qui correspond à l'équilibre thermique.

Les résultats de la mécanique quantique telles que les moyennes sont ainsi exactement les mêmes que ceux qui s'obtiennent par l'approche path intégral standard.

Par exemple en mécanique quantique non relativiste , la moyenne est par définition

$$\frac{\langle x_f, s_f \ \mid T\left(x(s_1)\,x(s_2)\right) \mid x_{\ i}, s_i\rangle}{\langle x_f, s_f \mid x_{\ i}, s_i\rangle} = \langle x(s_1)\ \ x(s_2)\ \ \rangle, \tag{2.41}$$

qui est aussi la moyenne stochastique

$$\frac{\langle x_f, s_f \mid T\left(x\left(s_1\right) x\left(s_2\right)\right) \mid x\ _i, s_i\rangle}{\langle x_f, s_f \mid x\ _i, s_i\rangle} = \lim_{u \to \infty} \langle x\left(s_1, u\right)\ \ x\left(s_2, u\right)\ \ \rangle, \tag{2.42}$$

à l'équilibre.

Si nous utilisons l'équation de Fokker-Planck, cette moyenne stochastique est comme suit

$$\langle x\left(s_1, u\right)\ \ x\left(s_2, u\right)\ \ \rangle = \int_{x_i, x_f} x\left(s_1\right) x\left(s_2\right)\ \ P\left(x, u\right)\ \ Dx, \tag{2.43}$$

avec $x\left(s_i\right) = x_i$ et $x\left(s_f\right) = x_f$.

Comme $P \to e^{iS}$ lorsque $u \to \infty$, l'équilibre est alors atteint et la fonction de corrélation (2.43) devient une intégrale de chemin de Feynmann standard

$$\begin{aligned} \lim_{u \to \infty} \langle x\left(s_1, u\right)\ \ x\left(s_2, u\right)\rangle &= \frac{\int\ x\left(s_1, u\right)\ \ x\left(s_2, u\right)\ \ e^{iS}\ Dx}{\int\ e^{iS} Dx} \\ &= \langle 0 \mid T\left(x\left(s_1\right) x\left(s_2\right)\right) \mid 0\rangle, \end{aligned} \tag{2.44}$$

et donc la valeur moyenne du T-produit par rapport au vide.

Pour utiliser le formalisme de la mécanique stochastique en mécanique quantique standard, nous devons l'adapter. Montrons comment déterminer par exemple le propagateur

2.1.4 Formulation stochastique du propagateur

Nous savons qu'en mécanique quantique, l'amplitude de transition ou propagateur contient toutes les informations sur la dynamique d'un système. Aussi sa connaissance est fondamentale pour la détermination du spectre des énergies, fonctions d'onde,.......

L'objectif de cette thèse est de voir à travers les possibilités ou encore les limites de cette nouvelle approche qui est la Méthode de Quantification Stochastique de Parisi-Wu dans un calcul simple de propagateur.

Donnons la formulation stochastique pour calculer le propagateur.

Relions d'abord l'amplitude de transition $\langle x_f, s_f \mid x\ _i, s_i\rangle$ à la valeur moyenne de l'hamiltonien H [4].

Considérons d'abord un vecteur d'état de Heisenberg vérifiant

$$| \, x_i \; , s_i \; \rangle = T \exp \left[i \int_{s_0}^{s_i} H\left(s\right) \; ds \right] | \, x_i, s_0 \rangle, \tag{2.45}$$

où $H\left(s\right)$ est l'hamiltonien du système.

Dérivons par rapport au temps s, nous obtenons l'équation d'évolution

$$\frac{\partial}{\partial s_i} \, | \, x_i \; , s_i \; \rangle = i H\left(s_i\right) | \, x_i, s_0 \rangle. \tag{2.46}$$

Multiplions par $\langle x_f, s_f \, |$

$$\frac{\partial}{\partial s_i} \ln \langle x_f, s_f \mid x_i, s_i \rangle = i \frac{\langle x_f, s_f \mid H\left(s_i\right) \mid x_i, s_i \rangle}{\langle x_f, s_f \mid x_i, s_i \rangle}, \tag{2.47}$$

et intégrons cette dernière équation. Nous obtenons l'amplitude de transition

$$\langle x_f, s_f \mid x_i, s_i \rangle = \widetilde{c} \exp i \int^{s_i} \lim_{u \to \infty} \langle H\left(s_i, u\right) \rangle \; ds_i, \tag{2.48}$$

où $\widetilde{c}$ est une constante indépendante de s_i.

Associons maintenant à l'opérateur hamiltonien $\widehat{H}$ un hamiltonien classique. Décomposons d'abord les variables x et p en deux parties

$$x = x_{cl} + x_Q, \tag{2.49}$$

$$p = p_{cl} + p_Q, \tag{2.50}$$

et également l' hamiltonien $H\left(s \; , u\right)$ suivant [4] en deux parties :

- l'une classique (indépendant du bruit) fonction uniquement du chemin classique

- et l'autre qui s'exprime en fonction des chemins non classiques (déviations) à cause des bruits

$$H\left(s \; , u\right) = H_{cl}\left(s\right) + H_Q\left(s, u\right). \tag{2.51}$$

La moyenne de l'hamiltonien $H\left(s \; , u\right)$ est alors comme suit

$$\langle H\left(s\ ,u\right)\rangle = \langle H_{cl}\left(s\right)\rangle + \langle H\left(s,u\right)\rangle, \tag{2.52}$$

où

- le premier terme est une partie classique indépendante du temps fictif u (et donc du bruit) est reliée à l'action classique

$$\frac{\partial S_{cl}}{\partial s_i} = H_{cl}\left(s_i\right),$$

- et le deuxième terme contient les déviations à cause des bruits qui ont dévier la particule de sa trajectoire classique. Ce deuxième terme donne en principe le facteur de fluctuation.

Ainsi l'amplitude de transition a pour expression finale

$$\langle x_f, s_f \mid x_i, s_i\rangle = c\exp\left[iS_{cl}\right]\exp\left[i\int^{s_i}\lim_{u\to\infty}\langle H\left(s_i,u\right)\rangle\, ds_i\right], \tag{2.53}$$

ou encore le propagateur.

La constante c est indépendante de $s_i, x_i s_f, x_f$. Elle se détermine par la condition suivante

$$\lim_{\lambda\to 0}\langle x_f, s_f \mid\mid x\ _i, s\ _i\rangle = \ \delta\left(x_f - x_i\right), \qquad \lambda = \left(s_f - s_i\right). \tag{2.54}$$

En conclusion ,

- la première partie classique se calcule en utilisant uniquement le chemin classique

- tandis que la deuxième partie $\langle H\left(s_i,u\right)\rangle$ nécessite la connaissance des chemins (dépendants des bruits) solution des équations de Langevin.

Signalons jusqu'à maintenant que seules des actions quadratiques ont été considérées [4] et traitées par la mécanique stochastique de Parisi et Wu.

C'est ainsi que les cas relatifs à la particule libre, soumis à une force harmonique et à un champ magnétique constant ont été traités dans les espaces de phase et de configuration. Le cas relatif à Grassmann a été aussi considéré.

Cette liste de cas exactement solubles par cette approche est comme nous le voyons assez réduite puisque seulement deux articles existe actuellement.

Notre but est donc d'enrichir cette liste en considérant un cas non quadratique qui a été traité par d'autres approches. Il s'agit d'une particule sans spin relativiste en mouvement dans le champ d'une onde plane dans la jauge de coordonnée [6]. Son mouvement est décrit par l'équation de Klein Gordon.

La solution de ce problème a été donnée d'abord par Schwinger [8]. Il a été aussi considéré dans le cas de la seconde quantification en utilisant les transformations de Furry. Il a été en outre considéré par l'approche intégrale de chemin [9].

Nous voulons donc donner sa solution par cette nouvelle approche. Considérons la solution de ce problème d'abord dans l'espace des phases.

Chapitre 3

Formulation dans l'espace des phases

3.1 propagateur d'une particule libre

3.1.1 Introduction

Considérons une particule libre nonrelativiste dont le mouvement est régi par l'équation de Schrödinger.

Son hamiltonien et son action classique sont respectivement

$$H = \frac{p^2(s)}{2m}, \tag{3.1}$$

et

$$S_{cl} = \int_{s_i}^{s_f} \left[p_{cl}(s) \frac{dx(s)}{ds} - \frac{p_{cl}^2(s)}{2m} \right] ds. \tag{3.2}$$

En utilisant les équations d'Hamilton, nous pouvons déterminer le chemin classique x_{cl}

$$\dot{p}_{cl} = -\frac{\partial H}{\partial x_{cl}} = 0, \tag{3.3}$$

$$\dot{x}_{cl} = \frac{\partial H}{\partial p_{cl}} = \frac{p_{cl}}{m}. \tag{3.4}$$

L'action classique pour le cas de la particule libre est simplement égale à

$$
\begin{aligned}
S_{cl} &= \int_{s_i}^{s_f} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx(s)}{ds} \right)^2 \right] ds \\
&= \frac{m (x_f - x_i)^2}{2 (s_f - s_i)}.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Calculons alors le terme de fluctuation $\langle H_Q (s_i, u) \rangle$

3.1.2 Calcul du terme de fluctuation $\langle H_Q (s_i, u) \rangle$

Notons par

– x_Q^μ la déviation de x^μ par rapport à la trajectoire classique x_{cl}^μ

- et p_Q^μ la déviation par rapport à l'impulsion classique p_{cl}^μ

$$
\begin{cases} x = x_{cl}^\mu + x_Q^\mu \\ p = p_{cl}^\mu + p_Q^\mu \end{cases},
\tag{3.6}
$$

avec évidemment les conditions aux limites suivantes

$$
x_Q (s_i) = x_Q (s_f) = 0.
\tag{3.7}
$$

Pour la particule libre, l'action

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{s_i}^{s_f} \left[p(s) \dot{x}(s) - \frac{1}{2} p^2 (s) \right] ds \\
&= \int_{s_i}^{s_f} \left[(p_{cl} + p_Q) \frac{\partial [x_{cl} + x_Q]}{\partial s} - \frac{(p_{cl} + p_Q)^2}{2m} \right] ds \\
&= \int_{s_i}^{s_f} \left[p_{cl} \frac{\partial x_{cl}}{\partial s} - \frac{p_{cl}^2}{2m} \right] ds + \int_{s_i}^{s_f} \left[p_{cl} \frac{\partial x_Q}{\partial s} + p_Q \frac{\partial x_{cl}}{\partial s} \right. \\
&\quad \left. + p_Q \frac{\partial x_Q}{\partial s} - \frac{p_Q^2}{2m} - \frac{1}{m} p_{cl} \; p_Q \right] ds,
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

se décompose en deux parties

$$S = S_{cl} + S_Q, \tag{3.9}$$

- une partie classique qui a pour expression

$$\begin{aligned} S_{cl} &= \int_{s_i}^{s_f} \left[p_{cl} \, \frac{\partial x_{cl}}{\partial s} - \frac{p_{cl}^2}{2m} \right] ds \\ &= \frac{m \left(x_f - x_i\right)^2}{2 \left(s_f - s_i\right)}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

- et une autre partie qui regroupe les termes relatifs aux déviations

$$S_Q = \int_{s_i}^{s_f} \left[p_{cl} \, \frac{\partial x_Q}{\partial s} + p_Q \frac{\partial x_Q}{\partial s} \quad - \frac{p_Q^2}{2m} \right] \; ds, \tag{3.11}$$

Avec les conditions aux bords (3.7) et (3.3) cette partie se simplifie

$$S_Q = \int_{s_i}^{s_f} \left[\; p_Q \frac{\partial x_Q}{\partial s} \quad - \frac{p_Q^2}{2m} \right] \; ds. \tag{3.12}$$

Décomposons de la même façon l'hamiltonien. Il a aussi deux parties

$$H = H_{cl} + H_Q, \tag{3.13}$$

- une partie classique donnée par

$$H_{cl} = \frac{p_{cl}^2}{2m}, \tag{3.14}$$

- et une autre partie qui regroupe aussi tous les termes restants

$$H_Q = \frac{p_Q^2}{2m} + \frac{p_{cl}}{m} \; p_Q. \tag{3.15}$$

A cette étape, introduisons le temps fictif u en plus du temps réel s.

La variable x_Q change et devient

$$x_Q(s) \longrightarrow x_Q(s, u), \tag{3.16}$$

avec les conditions aux limites

$$x_Q\left(s_i,u\right)=x_Q\left(s_f,u\right)=0. \tag{3.17}$$

De même l'impulsion change et devient aussi

$$p_Q(s)\longrightarrow p_Q(s,u), \tag{3.18}$$

sans aucune condition aux limites.

Ces deux variables stochastiques sont régies par les équations de Langevin suivantes

$$\frac{\partial p_Q\left(s,u\right)}{\partial s}=i\frac{\partial S_Q}{\partial p_Q\left(s,u\right)}+\chi\left(s,u\right), \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial x_Q\left(s,u\right)}{\partial s}=i\frac{\partial S_Q}{\partial x_Q\left(s,u\right)}+\varrho\left(s,u\right), \tag{3.20}$$

avec les conditions aux limites

$$x_Q\left(s_i,u\right)=x_Q\left(s_f,u\right)=0, \tag{3.21}$$

avec les propriétés des bruits blancs suivantes

$$\left\{\begin{array}{c}\langle\ \varrho^{\mu}(s,u)\chi_{\nu}(s',u')\rangle=0\\ \\ \langle\ \ \varrho^{\mu}(s,u)\varrho_{\nu}(s',u')\rangle=\langle\chi^{\mu}(s,u)\chi_{\nu}(s',u')\rangle=2\delta^{\mu}_{\nu}\delta(s-s')\delta(u-u')\end{array}\right. . \tag{3.22}$$

Utilisons la décomposition en série de Fourier

$$x_Q\left(s\ ,u\right)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\left(u\right)\sin\frac{n\pi}{\lambda}\left(s-s_i\right), \tag{3.23}$$

et

$$p_Q\left(s\ ,u\right)=\sum_{n=1}^{\infty}p_n\left(u\right)\cos\frac{n\pi}{\lambda}\left(s-s_i\right)+\frac{p_0}{2}. \tag{3.24}$$

Pour séparer les deux variables temporelles s et u, et reportons dans l'expression de l'action (3.12). Il vient

$$\begin{aligned} S_Q &= \int_{s_i}^{s_f} \left\{ \left[\sum_{n=1}^{\infty} p_n(u) \cos \frac{n\pi}{\lambda}(s-s_i) + \frac{p_0}{2} \right] \right. \\ &\times \left[\sum_{l=1}^{\infty} \frac{l\pi}{\lambda} x_l(u) \cos \frac{l\pi}{\lambda}(s-s_i) \right] \\ &- \frac{1}{2m} \left[\sum_{n=1}^{\infty} p_n(u) \cos \frac{n\pi}{\lambda}(s-s_i) + \frac{p_0}{2} \right] \\ &\times \left. \left[\sum_{l=1}^{\infty} p_l(u) \cos \frac{l\pi}{\lambda}(s-s_i) + \frac{p_0}{2} \right] \right\} ds. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Utilisons le résultat de l'intégration

$$\begin{aligned} \int_{s_i}^{s_f} ds \cos \frac{n\pi}{\lambda}(s-s_i) \cos \frac{l\pi}{\lambda}(s-s_i) &= \frac{1}{2}\left(\lambda\delta_{n+l,0} + \lambda\delta_{l,n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\lambda\delta_{l,n}, \qquad n+l \neq 0, \end{aligned} \tag{3.26}$$

nous trouvons

$$S_Q = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n\pi}{2} p_n(u) x_n(u) - \frac{p_n^2(u)\lambda}{4m} \right] - \frac{p_0^2\lambda}{8m}. \tag{3.27}$$

Après avoir remplacé dans (3.19) et (3.20), les équations de Langevin relatives aux composantes des impulsions et positions sont alors

$$\begin{aligned} \frac{dp_0}{du} &= i\frac{\delta S_Q}{\delta p_0} + i\chi_0(u) \\ &= -i\frac{p_0\lambda}{4m} + \chi_0(u); \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\frac{dp_n}{du} = i\left(\frac{n\pi}{2}x_n - \frac{p_n\lambda}{2m}\right) + \rho_n(u), \tag{3.29}$$

$$\frac{dx_n}{du} = i\left(\frac{n\pi}{2}p_n\right) + \chi_n(u). \tag{3.30}$$

Matriciellement les deux équations précédentes se mettent sous la forme suivante

$$\frac{d}{du}\begin{pmatrix} p_n \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i\lambda}{2m} & \frac{in\pi}{2} \\ \frac{in\pi}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_n(u) \\ \chi_n(u) \end{pmatrix}, \tag{3.31}$$

ou vectoriellement encore

$$\frac{d}{ds}\overrightarrow{V} = M\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}. \tag{3.32}$$

Il est facile de voir que la matrice M a pour valeurs propres

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{i\lambda}{2m} \pm i\left(\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 + (n\pi)^2\right)}{2}, \tag{3.33}$$

avec les vecteurs propres correspondants

$$\overrightarrow{X}_1 = \begin{pmatrix} n\pi \\ -2i\lambda_1 \end{pmatrix}, \tag{3.34}$$

et

$$\overrightarrow{X}_2 = \begin{pmatrix} n\pi\alpha \\ -2i\lambda_2\alpha \end{pmatrix}, \tag{3.35}$$

α étant une constante.

La constante α, nous la fixons en imposant au déterminant de la matrice C la valeur égale à 1

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2i(\lambda_1-\lambda_2)} & n\pi \\ \frac{\lambda_2}{n\pi(\lambda_1-\lambda_2)} & -2i\lambda_1 \end{pmatrix}. \tag{3.36}$$

Calculons alors le terme $\langle p_n(u)\, p_l(u)\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle p_n(u)\,p_l(u)\rangle &= \langle (x_n p_n)\, C^{-1+}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C^{-1}\begin{pmatrix} x_l \\ p_l \end{pmatrix}\rangle \\ &= \langle (x_n p_n)\begin{pmatrix} \left[\frac{\lambda_2}{n\pi(\lambda_1-\lambda_2)}\right]^2 & -\frac{i\lambda_2}{2n\pi} \\ \frac{i\,\lambda_2}{2n\pi(\lambda_1-\lambda_2)} & -\frac{1}{2(\lambda_1-\lambda_2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_l \\ p_l \end{pmatrix}\rangle. \end{aligned} \tag{3.37}$$

A la limite $u \to \infty$ nous obtenons

$$\lim_{u\to\infty} \langle p_n(u)\,p_l(u)\rangle = 0. \tag{3.38}$$

Comme

$$H = H_{cl} + H_Q, \tag{3.39}$$

où

$$H_Q = \frac{P_Q^2}{2m} + \frac{p_{cl} p_Q}{m}, \tag{3.40}$$

a pour valeur moyenne

$$\langle H_Q\rangle = \frac{\langle P_Q^2\rangle}{2m} + \frac{p_{cl}\ \langle p_Q\rangle}{m}, \tag{3.41}$$

Utilisons les relations de transformations (3.23) et (3.24) dans l'expression (3.41)

$$\begin{aligned}\langle H_Q(s_i,u)\rangle &= \frac{1}{2m}\left[\langle \sum_{n=1}^{\infty} p_n(u)\cos\frac{n\pi}{\lambda}(s-s_i) + \frac{p_0}{2}\right. \\ &\quad \left.\times \sum_{l=1}^{\infty} p_l(u)\cos\frac{l\pi}{\lambda}(s-s_i) + \frac{p_0}{2}\right] \\ &\quad + \frac{(x_f-x_i)}{(s_f-s_i)}\left[\sum_{n=1}^{\infty} p_n(u)\right. \\ &\quad \left.\cos\frac{n\pi}{\lambda}(s-s_i) + \frac{p_0}{2}\right], \end{aligned} \tag{3.42}$$

et en utilisant aussi la relation (3.28) , par une simple intégration on aboutit au résultat suivant

$$p_0\left(u\right)=\exp\left[-\frac{i\lambda}{4m}u\right]\int_0^u\chi_0\left(\tau\right)\exp\left[\frac{i\lambda}{4m}\tau\right]d\tau+p_0\left(0\right)\exp\left[-\frac{i\lambda}{4m}u\right],\tag{3.43}$$

d'où la valeur moyenne

$$\left\langle p_0\left(u\right)\right\rangle=\exp\left[-\frac{i\lambda}{4m}u\right]\int_0^u\left\langle\chi_0\left(\tau\right)\right\rangle\exp\left[\frac{i\lambda}{4m}\tau\right]d\tau+p_0\left(0\right)\exp\left[-\frac{i\lambda}{4m}u\right].\tag{3.44}$$

En utilisant la propriété du bruit blanc, nous avons

$$\left\langle p_0\left(u\right)\right\rangle=p_0\left(0\right)\exp\left[-\frac{i\lambda}{4m}u\right].\tag{3.45}$$

Pour éviter toute divergence dans le calcul du propagateur, il est plus commode d'effectuer une rotation de Wick ($T\rightarrow -iT$)

$$\left\langle p_0\left(u\right)\right\rangle=p_0\left(0\right)\exp\left[-\frac{\lambda}{4m}u\right].\tag{3.46}$$

A l'équilibre thermodynamique ($u\rightarrow\infty$), nous avons alors

$$\lim_{u\rightarrow\infty}\left\langle p_0\left(u\right)\right\rangle=0,\tag{3.47}$$

et pour l'hamiltonien qui regroupe les termes stochastiques, sa valeur moyenne est

$$\begin{aligned}\lim_{u\rightarrow\infty}\left\langle H_Q\left(s_i,u\right)\right\rangle &= \lim_{u\rightarrow\infty}\sum_{n,l=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi}{\lambda}\left(s-s_i\right)\cos\frac{l\pi}{\lambda}\left(s-s_i\right)\\ &\quad\times\frac{1}{2m}\left\langle p_n\left(u\right)p_l\left(u\right)\right\rangle+\lim_{u\rightarrow\infty}\frac{1}{2m}\left\langle\frac{p_0^2\left(u\right)}{4}\right\rangle.\end{aligned}\tag{3.48}$$

En utilisant l'expression (3.43), le terme $\frac{1}{8m}\left\langle p_0^2\left(u\right)\right\rangle$ est facilement calculable

$$\begin{aligned}\frac{1}{8m}\left\langle p_0^2\left(u\right)\right\rangle &= \frac{1}{8m}\left\langle\left\{\exp\left[-\frac{i\lambda}{4m}u\right]\int_0^u\left\langle\chi_0\left(\tau\right)\right\rangle\exp\left[\frac{i\lambda}{4m}\tau\right]d\tau\right.\right.\\ &\quad+p_0\left(0\right)\exp\left[-\frac{i\lambda}{4m}u\right]\exp\left[-\frac{i\lambda}{4m}u\right]\int_0^{\tau}\left\langle\chi_0\left(\tau^{'}\right)\right\rangle\\ &\quad\left.\times\exp\left[\frac{i\lambda}{4m}\tau^{'}\right]d\tau^{'}+p_0\left(0\right)\exp\left[-\frac{i\lambda}{4m}u\right]\right\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{8m}\exp\left[-\frac{i\lambda}{2m}u\right]\int_0^u \exp\left[\frac{i\lambda}{4m}\tau\right]\ d\tau \\
&\int_0^u \exp\left[\frac{i\lambda}{4m}\tau^{'}\right]\langle\chi_0(\tau)\,\chi_0\left(\tau^{'}\right)\rangle\ d\tau^{'},
\end{aligned} \tag{3.49}
$$

il devient grâce aux propriétés relatives aux bruits blancs (3.22)

$$
\begin{aligned}
\lim_{u\to\infty}\frac{1}{8m}\langle p_0^2(u)\rangle &= \lim_{u\to\infty}\frac{1}{2i\lambda}\left(1-\exp\left[-\frac{i\lambda}{2m}u\right]\right) \\
&= \frac{1}{2i\lambda},
\end{aligned} \tag{3.50}
$$

où une simple rotation de Wick nous a permis de supprimer le terme oscillatoire

$$
\lim_{u\to\infty}\frac{1}{8m}\langle p_0^2(u)\rangle. \tag{3.51}
$$

Avec (3.38), l'expression du propagateur (2.53) est la suivante

$$
K = \widehat{c}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1/2}\exp\left[iS_{cl}\right], \tag{3.52}
$$

En appliquant (2.54) , la constante $\widehat{c}$ se détermine à la limite ($\lambda \to 0$). Insérons l'expression de l'action classique libre (3.5) nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\widehat{c}}{\sqrt{\lambda}}\exp\left[i\frac{m}{2\lambda}\left(x_f-x_i\right)^2\right]dx_f &= \int \delta\left(x_f-x_i\right)\ dx_f \\
&= 1,
\end{aligned}
$$

ainsi

$$
\widehat{c} = \sqrt{\frac{m}{2i\pi}}. \tag{3.53}
$$

3.1.3 Conclusion

Nous avons ainsi déterminé le propagateur relatif à la particule libre et nonrelativiste en utilisant le formalisme stochastique de Parisi et Wu et ceci dans l'espace des phases.

Pour cela il a été procédé d'abord

- au calcul de l'action classique en utilisant le chemin classique

- et ensuite le facteur de fluctuation relatif à une particule libre.

Déterminons encore le propagateur en considérant cette fois ci l'espace de configuration.

Chapitre 4

Formulation dans l'espace de configuration

4.1 Propagateur d'une particule libre

4.1.1 Introduction

Le lagrangien de la particule libre est

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2, \tag{4.1}$$

et l 'action classique est encore donnée par

$$\begin{aligned} S_{cl} &= \int_{s_i}^{s_f} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx(s)}{ds} \right)^2 \right] ds \\ &= \frac{m(x_f - x_i)^2}{2(s_f - s_i)}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

4.1.2 Calcul du terme de fluctuation $\langle H_Q (s_i, u)$

L'hamiltonien relatif à la particule libre étant

$$\begin{aligned} H &= \frac{P^2}{2m} \\ &= H_Q + H_{cl}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Sa valeur moyenne est

$$\begin{aligned} \langle H_Q \rangle &= H_{cl} + \langle H_Q \rangle \\ &= \langle p_Q \frac{\partial x_Q}{\partial s} \rangle - \frac{m}{2} \langle \left(\frac{\partial x_Q}{\partial s} \right)^2 \rangle, \end{aligned} \tag{4.4}$$

Ajoutons à s, le temps fictif u

$$x_Q\left(s\right) \to x_Q\left(s,u\right), \tag{4.5}$$

les conditions aux limites étant encore

$$x_Q(s_i,u) = x_Q(s_f,u) = 0. \tag{4.6}$$

Pour les impulsions, il n' y a pas de condition

Ecrivons le lagrangien comme suit

$$L_Q\left(s_i,u\right) = \frac{m}{2} \frac{\partial x_Q\left(s_i,u\right)}{\partial s} \; \frac{\partial x_Q\left(s_i,u\right)}{\partial s}. \tag{4.7}$$

Sa valeur moyenne peut encore s'écrire sous la forme suivante

$$\langle L_Q\left(s_i,u\right) \rangle = \frac{m}{2} \lim_{s_i,s_f \to s_i} \partial_{s_1} \partial_{s_2} \langle x_Q\left(s_1,u\right) x_Q\left(s_2,u\right) \rangle, \tag{4.8}$$

Pour l'impulsion, nous avons son mouvement qui est régi par l'équation de Langevin

$$\frac{\partial p_Q\left(s,u\right)}{\partial u} = i \frac{\delta S_Q}{\delta p_Q} + \chi_Q, \tag{4.9}$$

où

$$S_Q = \int \left[\left(p_Q \frac{\partial x_Q}{\partial s} \right) - \frac{p_Q^2}{2m} \right] ds \ . \tag{4.10}$$

Explicitement, l'équation de Langevin est

$$\frac{\partial p_Q}{\partial u} = i \left(\frac{\partial x_Q (s_i, u)}{\partial s} - \frac{p_Q (s_i, u)}{2m} \right) + \chi_Q (s_i, u) \, . \tag{4.11}$$

Considérons maintenant le produit

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial x_Q (s', u)}{\partial s} \frac{\partial p_Q (s, u)}{\partial u} \rangle &= \langle i \left(\frac{\partial x_Q (s, u)}{\partial s} \frac{\partial x_Q (s', u)}{\partial s} \right) \rangle \\ &+ \langle -i \left(\frac{p_Q (s, u)}{m} \frac{\partial x_Q (s', u)}{\partial s} \right) \rangle \\ &+ \langle \eta_Q (s, u) \frac{\partial x_Q (s', u)}{\partial s} \rangle, \end{aligned} \tag{4.12}$$

et utilisons les propriétés des bruits (3.22). Le premier membre de (4.12) ainsi que le dernier terme sont nuls.

En faisant $\left(s' = s_i, s = s_i \right)$, nous obtenons

$$\lim_{u \to \infty} \left[\langle \frac{\partial x_Q (s', u)}{\partial s} p_Q (s, u) \rangle - m \langle \frac{\partial x_Q (s', u)}{\partial s} \frac{\partial x_Q (s, u)}{\partial s} \rangle \right] = 0, \tag{4.13}$$

et ainsi

$$\langle H_Q (s_i, u) \rangle = \frac{M}{2} \lim_{s_1, s_2 \to S} \partial_{s_1} \partial_{s_2} \lim \langle x_Q (s_1, u) \, x_Q (s_2, u) \rangle . \tag{4.14}$$

Séparons dans l'action les parties classiques et non classiques

$$\begin{aligned} S &= S_Q + S_{cl}, \\ &= \int_{s_i}^{s_f} \frac{m}{2} \dot{x}_{cl}^2 ds + \int_{s_i}^{s_f} \frac{m}{2} \dot{x}_Q^2 ds + 2 \int_{s_i}^{s_f} \frac{m}{2} \dot{x}_{cl} \dot{x}_Q, \end{aligned} \tag{4.15}$$

Comme $\dot{x}_{cl}$est constant, le dernier terme disparaît à cause des conditions aux bords (4.6).

Nous obtenons pour la partie non classique

$$S_Q = \int_{s_i}^{s_f} \frac{m}{2} \dot{x}_Q^2 ds. \tag{4.16}$$

Effectuons encore la séparation des variables (s, u) au moyen de la décomposition de Fourier

$$x_Q(s,u) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(u) \sin \frac{n\pi}{T}(s - s_i). \tag{4.17}$$

Ainsi

$$\frac{\partial x_Q(s,u)}{\partial s} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(u) \frac{n\pi}{T} \cos \frac{n\pi}{T}(s - s_i), \tag{4.18}$$

et

$$\begin{aligned} S_Q &= \int_{s_i}^{s_f} \frac{m}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} x_n(u) \frac{n\pi}{T} \cos \frac{n\pi}{T}(s - s_i) \right] \\ &\quad \times \left[\sum_{l=1}^{\infty} x_l(u) \frac{l\pi}{T} \cos \frac{l\pi}{T}(s - s_i) \right]. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Avec le résultat de l'intégration suivant

$$\int_{s_i}^{s_f} \cos \frac{n\pi}{T}(s - s_i) \cos \frac{l\pi}{T}(s - s_i) \; ds = \frac{T}{2} \delta_{n,l}, \tag{4.20}$$

nous obtenons alors

$$\begin{aligned} S_Q &= \frac{m}{2} \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2(u) \left(\frac{n\pi}{T} \right)^2 \frac{T}{2} \\ &= \frac{m}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2}{4T} x_n^2(u). \end{aligned} \tag{4.21}$$

L'évolution des composantes de la série de Fourier est régie par l'équation de Langevin suivante

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_n}{\partial u} &= \frac{dx_n}{du}\\ &= i\frac{n\pi^2}{2T}m\ x_n+\rho_n,\end{aligned}\tag{4.22}$$

L'équation est facile à résoudre.

En posant

$$a=i\frac{n\pi^2}{2T}m,\tag{4.23}$$

la solution sans second membre est

$$x_n=Ae^{au}.\tag{4.24}$$

Avec le second membre, la solution est

$$x_n=e^{au}\int_0^u e^{-a\tau}\eta_n\left(\tau\right)\ d\tau+e^{au}A\left(0\right).\tag{4.25}$$

La moyenne du produit de deux composantes est simplement égal à

$$\begin{aligned}\langle x_nx_m\rangle &= \langle\left[e^{au}\int_0^u e^{-a\tau}\eta_n\left(\tau\right)\ d\tau+e^{au}A\left(0\right)\right]\\ &\quad\times e^{au}\int_0^u e^{-a\tau'}\eta_m\left(\tau'\right)\ d\tau'+e^{au}A\left(0\right)\rangle.\end{aligned}\tag{4.26}$$

En effectuant une rotation de Wick nous éliminons les termes oscillatoires.

Ainsi à la limite $u\to\infty$

$$\langle x_nx_m\rangle=\langle e^{2au}\int_0^u e^{-a\tau}\eta_n\left(\tau\right)\ d\tau\int_0^u e^{-a\tau'}\eta_m\left(\tau'\right)\ d\tau'\rangle.\tag{4.27}$$

Comme

$$\langle\eta_n\left(\tau\right)\eta_m\left(\tau'\right)\rangle=2\delta\left(\tau-\tau'\right)\delta_{n,m},\tag{4.28}$$

alors

$$
\begin{aligned}
\langle x_n x_m \rangle &= \langle e^{2au} \int_0^u e^{-a\tau} \int_0^u 2\delta\left(\tau-\tau'\right) e^{-a\tau'} d\tau' \rangle \delta_{n,m} \\
&= 2\langle e^{2au} \int_0^u e^{-au'} d\tau' \rangle \ \delta_{n,m} \\
&= \frac{e^{2au}-1}{a} \ \delta_{n,m} \\
&= -\frac{1}{a} \ \delta_{n,m} \\
&= \frac{2Ti}{n^2\pi^2 m}\delta_{n,m}.
\end{aligned} \tag{4.29}
$$

Le propagateur ayant pour expression

$$
K = \widehat{c}\exp\left[iS_{cl} + i\lim_{u\to\infty}\int^{s_i} \langle H_Q\left(s_i,u\right)\rangle \ ds_i\right], \tag{4.30}
$$

avec

$$
\langle H_Q\left(s_i,u\right)\rangle = \frac{M}{2}\lim_{s_1,s_2\to s}\partial_{s_1}\partial_{s_2}\langle x_Q\left(s_1,u\right)x_Q\left(s_2,u\right)\rangle. \tag{4.31}
$$

Il nous reste à déterminer $\langle x_Q\left(s_1,u\right)x_Q\left(s_2,u\right)\rangle$.

Les valeurs en sinus aux deux instants s_1, s_2 étant respectivement

$$
x_Q\left(s_1,u\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\left(u\right)\sin\frac{n\pi}{T}\left(s_1-s_i\right), \tag{4.32}
$$

et

$$
x_Q\left(s_2,u\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\left(u\right)\sin\frac{n\pi}{T}\left(s_2-s_i\right), \tag{4.33}
$$

la fonction de corrélation à deux points est alors

$$
\begin{aligned}
\lim_{s\to\infty}\langle x_Q\left(s_1,u\right)x_Q\left(s_2,u\right)\rangle &= \langle\sum_{n,l}\left(x_n\left(u\right)x_l\left(u\right)\right)\sin\frac{n\pi}{T}\left(s_1-s_i\right) \\
&\quad \times\sin\frac{n\pi}{T}\left(s_2-s_i\right)\rangle
\end{aligned}
$$

$$= \frac{i}{mT} \sum_{n=l} \frac{2 \sin \frac{n\pi}{T} (s_1 - s_i) \sin \frac{n\pi}{T} (s_2 - s_i)}{\pi^2 n^2} T. \tag{4.34}$$

Nous pouvons à l'aide de la table [13], **montrer que**

$$\lim_{s \to \infty} \langle x_Q (s_1, u)\, x_Q (s_2, u) \rangle = \frac{i}{mT} \left[s_f - \max (s_1, s_2) \right] \left[\min (s_1, s_2) - s_i \right]. \tag{4.35}$$

Appliquons (2.54) , nous pouvons déterminer la constante $\widehat{c}$ à la limite $(\lambda \to 0)$ (3.53) . Insérons l'expression de l'action classique libre (3.5), l'amplitude de transition (2.53) est finalement la suivante

$$\begin{aligned} K &= \sqrt{\frac{m}{2i\pi}} \exp \left[iS_{cl} + i \int^{s_i} \frac{i}{2T} (-1) \; ds_i \right] \\ &= \sqrt{\frac{m}{2i\pi}} \exp \left[iS_{cl} + \int^{s_i} \frac{ds_i}{2 (s_f - s_i)} \right] \\ &= \sqrt{\frac{m}{2i\pi}} \exp \left[iS_{cl} \; - \frac{1}{2} \log T \right] \\ &= \sqrt{\frac{m}{2i\pi}} \exp iS_{cl} \; \sqrt{\frac{1}{T}}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

4.1.3 Conclusion

Ainsi dans ce chapitre, nous avons considéré le problème de la particule libre nonrelativiste et l'avons solutionné en déterminant le propagateur dans l'espace de configuration et ceci en utilisant le formalisme stochastique de Parisi-Wu.

Pour cela, nous avons procédé comme suit : en utilisant le chemin classique, l'action classique est d'abord calculée et ensuite sommes passés à l'espace de configuration pour utiliser une seule équation de Langevin. C'est ainsi que le facteur de fluctuation a pu être déterminé plus simplement que dans l'espace des phases.

Chapitre 5

Formulation dans l'espace des phases

5.1 Propagateur d'une particule de spin zéro dans le champ d'une onde plane

5.1.1 Introduction

Considérons une particule de spin zéro régi donc par l'équation de Klein Gordon, en mouvement dans le champ d'une onde plane. Ce champ est décrit par le 4-potentiel A_μ. Nous choisissons de travailler avec la jauge de coordonnées c'est à dire telle que

$$(x - x_0)^\mu A_\mu(x) = 0, \tag{5.1}$$

avec x_0 un point de référence.

L'avantage de ce choix de jauge est , connaissant le tenseur électromagnétique $F_{\mu\nu}$ le 4-potentiel A_μ est déterminé d'une manière unique suivant la relation d'inversion [10]

$$A_\mu(x) = \int_0^1 \alpha (x - x_0)^\nu F_{\mu\nu}(\alpha x) \ d\alpha \ , \tag{5.2}$$

et le tenseur $F_{\mu\nu}$prend la forme suivante

$$F_{\mu\nu}(x) = f_{\mu\nu} F(\xi) \,. \tag{5.3}$$

La fonction $F(\xi)$ est une fonction uniquement de $\xi = \eta x$ qui le produit scalaire des deux 4-vecteurs η et x et $f_{\mu\nu}$ est une constante antisymétrique qui vérifie avec η_μ les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \eta^\mu \eta_\mu &= 0, \qquad \eta_\mu f^{\mu\nu} = 0, \qquad \eta_\mu f^{\mu\nu *} = 0, \\ f^{\ *}_{\mu\lambda} f^\lambda_\nu &= 0, \qquad f^*_{\mu\lambda} f^{\lambda *}_\nu = f_{\mu\lambda} f^\lambda_\nu = \eta_\mu \eta_\nu, \end{aligned} \tag{5.4}$$

où $f^{\ *}$ est le tenseur dual de f.

Dans cette jauge, le 4-potentiel A_μ a la forme suivante

$$A_\mu(x) = f_{\mu\nu}(x - x_0)^\nu K(\xi, \xi_0), \tag{5.5}$$

où $K(\xi, \xi_0)$ satisfait l'équation différentielle

$$2K + (\xi - \xi_0)\frac{dK}{d\xi} = -F(\xi), \tag{5.6}$$

qui a pour solution

$$K(\xi, \xi_0) = -\frac{A(\xi)}{\xi - \xi_0} + \frac{1}{(\xi - \xi_0)^2}\int_{\xi_0}^{\xi} A(\eta)\ d\eta, \tag{5.7}$$

avec $dA/d\xi = F(\xi)$.

Dans tout ce qui suit

- x désigne un point de référence dans l'espace à quatre dimensions engendré
- et $p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3)$ est le 4-vecteur impulsion
- $g_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$ la métrique habituelle

Choisissons le point de référence $x_0 = x_i = x(s_i)$, pour simplifier les calculs.

Ecrivons d'abord l'équation qui détermine le propagateur $\Delta(x_f, x_i)$ ou fonction de Green pour une particule sans spin (de Klein-Gordon) en mouvement dans le champ une onde plane

$$\left[(i\partial_\mu - eA_\mu)(i\partial^\mu - eA^\mu) - m^2\right]\Delta(x_f, x_i) = \delta^4(x_f - x_i). \tag{5.8}$$

Utilisons le temps propre

$$\lambda = s_f - s_i, \tag{5.9}$$

introduit auparavant par [11], [8] qui permet de déterminer $\Delta(x_f, x_i)$ au moyen de l'intégrale suivante

$$\Delta(x_f, x_i) = \frac{1}{2i} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{im^2\lambda}{2}\right] \overline{K}(x_f, x_i; \lambda)\ d\lambda, \tag{5.10}$$

qui fait intervenir un nouveau noyau ou propagateur $\overline{K}\ (x_f, x_i; \lambda)$ solution de l'équation suivante

$$\left[i\frac{\partial}{\partial\lambda} - \widehat{H}\right] \overline{K}(x_f, x_i; \lambda) = \delta\left(\lambda\right)\ \delta^4(x_f - x_i). \tag{5.11}$$

Dans notre cas, l'opérateur hamiltonien est $\widehat{H} = -\frac{1}{2}\left(\widehat{p} - eA\right)^2$ avec $\left(p_\mu = i\partial_\mu\right)$.

Passons aux calculs. D'abord celui de l'action classique

5.1.2 Calcul de l'action classique

L'hamiltonien qui régit le mouvement de la particule de spin zéro est

$$H = -\frac{1}{2}\left(p - eA\left(\xi\right)\right)^2, \tag{5.12}$$

et l'action est la suivante

$$S = -\int_{s_a}^{s_b} \left[\ p\left(s\right)\dot{x}\left(s\right) - \frac{1}{2}\left(p - eA\left(\xi\right)\right)^2\right]\ ds\ . \tag{5.13}$$

La trajectoire classique qui a pour équation x_{cl} , se détermine par les deux équations d'Hamilton, puisque nous sommes dans l'espace des phases

$$\begin{aligned} \dot{p}_{cl\rho} &= \frac{\partial H}{\partial x^\rho} \\ &= e\ \left(p_{cl} - eA_{\ cl}\right)\frac{dA_{\ cl}}{dx^\rho} \\ &= e\eta\left(p_{cl} - eA_{\ cl}\right)\ \frac{dA_{\ cl}}{d\xi^\rho}, \end{aligned} \tag{5.14}$$

et

$$\dot{x}_{cl\rho} = -\frac{\partial H}{\partial p^{\rho}} = p_{cl\rho} - eA_{cl\rho}. \tag{5.15}$$

Nous obtenons après avoir éliminé l'impulsion l'équation qui donne la trajectoire classique

$$\frac{d}{ds}\left(\dot{x}_{cl\rho} + eA_{cl\rho}.\right) = \; e\left(\; \dot{x}^{\mu} \;\partial_{\rho}A_{\mu}\right), \tag{5.16}$$

Utilisons la dérivation

$$\frac{dA}{ds} = \partial_{\mu}A_{\rho}\dot{x}^{\mu}, \tag{5.17}$$

alors l'équation de mouvement devient

$$\ddot{x}_{\rho} = eF_{\rho\mu}\dot{x}. \tag{5.18}$$

Procédons à l'intégration.

Intégrons par rapport à s,

$$\dot{x}_{\rho}(s) = \dot{x}_{\rho}(0) + e\int_{0}^{s} \; f_{\rho\mu}\frac{dA}{d\xi'}\dot{x}^{\mu}(s') \; ds', \tag{5.19}$$

$\frac{dA}{d\xi} = F(\xi)$ a été utilisé.

Résolvons cette équation par itération en appliquant bien sûr les propriétés que vérifient η et f (5.4). Il vient

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\rho}(s) &= \dot{x}_{\rho}(0) + e\int_{0}^{s} \; f_{\rho\mu}\frac{dA}{d\xi'}\left[\dot{x}^{\mu}(0) + e\int_{0}^{s'} ds'' f^{\mu}{}_{\alpha}\frac{dA}{d\xi''}\;\dot{x}^{\alpha}(s'')\right]\; ds' \\ &= \dot{x}_{\rho}(0) + ef_{\rho\mu}\dot{x}^{\mu}(0)\int_{0}^{s}\frac{dA}{d\xi'}\;ds' \\ &\quad + e^{2}\eta_{\rho}\int_{0}^{s}\frac{dA}{d\xi'}ds'\int_{0}^{s'}\frac{dA}{d\xi''}\eta_{\alpha}\dot{x}^{\alpha}(s'')\;ds''. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Multiplions les deux membres à gauche par η^{ρ},

$$\eta^{\rho}\dot{x}_{\rho}(s) = \eta^{\rho}\dot{x}_{\rho}(0) = \beta, \tag{5.21}$$

nous aboutissons à la relation suivante

$$\xi\left(s\right)=\left[\eta\dot{x}\left(0\right)\right]\ s+\xi\left(0\right), \tag{5.22}$$

avec

$$\begin{aligned}\xi_f &= \beta s_i+\xi\left(0\right), \\ \xi_i &= \beta s_i+\xi_0,\end{aligned} \tag{5.23}$$

et

$$\frac{\xi_f-\xi_i}{\lambda}=\beta, \qquad \frac{d\xi}{ds}=\beta. \tag{5.24}$$

Comme $\lambda=(s_f-s_i)$ et $\triangle x=x_f-x_i$ alors

$$\xi_f-\xi_i=\eta\triangle x. \tag{5.25}$$

Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned}\dot{x}_\rho\left(s\right) &= \dot{x}_\rho\ \left(0\right)+ef_{\lambda\mu}\dot{x}^{\mu}\left(0\right)\int_{A(\xi_0)}^{A(\xi)}dA \\ &+e^2\eta_\lambda\int_{A(\xi_0)}^{A(\xi)}dA\int_{A(\xi_0)}^{A\left(\xi^?\right)}\ \eta_\alpha\dot{x}^{\alpha}\left(s"\right)\ dA,\end{aligned} \tag{5.26}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\dot{x}_\rho\left(s\right) &= \dot{x}_\rho\left(0\right)+ef_{\rho\mu}\ \frac{\dot{x}^{\mu}\left(0\right)}{\beta}\left[A\left(\xi\right)-A\left(\xi_0\right)\right] \\ &+e^2\ \frac{\eta_\rho}{\beta^2}\int_{A(\xi_0)}^{A(\xi)}\left[A\left(\xi'\right)-A\left(\xi_0\right)\right]\left[\eta_\alpha\dot{x}^{\alpha}\left(s"\right)\right]\ dA\left(\xi'\right).\end{aligned} \tag{5.27}$$

Elle devient en utilisant (5.21)

$$\begin{aligned} \dot{x}_\rho(s) &= \dot{x}_\rho(0) + e\ \ f_{\rho\mu}\ \frac{\dot{x}^\mu(0)\ \ \lambda}{\xi_f - \xi_i}\left[A(\xi) - A(\xi_0)\right] \\ &+e^2\ \frac{\eta_\rho\ \lambda}{2\left(\xi_f - \xi_i\right)}\left[A\left(\xi'\right) - A(\xi_0)\right]^2. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Intégrons une deuxième fois par rapport à s.

Nous obtenons l' équation de la trajectoire classique

$$\begin{aligned} x_\rho(s) &= \dot{x}_\rho(0)\, s + e\ \ f_{\rho\mu}\ \frac{\dot{x}^\mu(0)\ \ \lambda^2}{\left(\xi_f -\ \xi_i\right)^2}\int_{\xi_0}^{\xi}\left[A(\xi') - A(\xi_0)\right]\ d\zeta' \\ &+e^2\frac{\eta_\rho\lambda^2}{2\left(\xi_f -\ \xi_i\right)^2}\int_{\xi_0}^{\xi}\ \left[A(\xi') - A(0)\right]^2\ d\ \xi' + x_\rho(0)\,. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Avec cette trajectoire classique calculons maintenant l'action classique

$$S_{cl} = -\int\left[\frac{1}{2}\dot{x}_{cl}^2(s) + eA_{cl}\dot{x}_{cl}^2(s)\right]\ ds. \tag{5.30}$$

Calculons la vitesse $\dot{x}_\rho^2(s)$ en utilisant l'équation (5.29) afin de déduire d'abord $x_f\ = x(s_f)$ pour tirer ensuite

$$\begin{aligned} (x_f - x_i) &= \dot{x}_\rho(0)\,\lambda + e f_{\rho\mu}\ \frac{\dot{x}^\mu(0)\,\lambda^2}{\left(\xi_f - \xi_i\right)^2}\int_{\xi_i}^{\xi_f}\left[A(\xi') - A(\xi_0)\right]\ d\xi' \\ &+e^2\frac{\eta_\rho\lambda^2}{2\left(\xi_f -\ \xi_i\right)^2}\int_{\xi_i}^{\xi_f}\ \left[A(\xi') - A(0)\right]^2\ d\xi'. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Nous obtenons l'expression de $\dot{x}_\rho(0)$

$$\begin{aligned} \dot{x}_\rho^2(0) &= \Bigg[\left(\frac{x_f - x_i}{\lambda}\right) - e f_{\rho\mu}\ \frac{\dot{x}^\mu(0)\,\lambda}{\left(\xi_f - \xi_i\right)^2}\int_{\xi_i}^{\xi_f}\ \left[A(\xi') - A(\xi_0)\right]\ d\xi' \\ &-e^2\frac{\eta_\rho\lambda}{2\left(\xi_f - \xi_i\right)^2}\int_{\xi_i}^{\xi_f}\ \left[A(\xi') - A(\xi_0)\right]^2\ d\xi'\Bigg]. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Remarquons que le carré de la vitesse (5.18) et sa composante dans la direction de η

$$\dot{x}^2(s) = \dot{x}^2(0), \qquad \eta\dot{x}(s) = \eta\dot{x}(0) = \frac{(\xi_f - \xi_i)}{\lambda}, \tag{5.33}$$

sont conservés au cours du mouvement.

Réutilisons les propriétés de η et f (5.4)

$$\begin{aligned} \dot{x}^2(0) &= \left(\frac{x_f - x_i}{\lambda}\right)^2 + \left[ef_{\rho\mu}\frac{\dot{x}^{\mu}(0)\,\lambda}{(\xi_f - \xi_i)^2}\int_{\xi_i}^{\xi_f}[A(\xi') - A(\xi_0)]\,d\xi'\right]^2 \\ &\quad - 2\left(\frac{x_f - x_i}{\lambda}\right)\left[e^2\frac{\eta_\rho\lambda}{2(\xi_f - \xi_i)^2}\int_{\xi_i}^{\xi_f}[A(\xi') - A(\xi_0)]^2\,d\xi'\right] \\ &\quad - 2\left[ef_{\rho\mu}\frac{\dot{x}^{\mu}(0)\,\lambda}{(\xi_f - \xi_i)^2}\int_{\xi_i}^{\xi_f}[A(\xi') - A(\xi_0)]\,d\xi'\right]\left[\frac{x_f - x_i}{\lambda}\right], \end{aligned} \tag{5.34}$$

et l'antisymétrique de f

$$f_{\rho\mu}f_{\mu}^{\lambda\,\cdot} = -f_{\ \mu\rho}f_{\mu}^{\rho\,\cdot}, \tag{5.35}$$

ainsi que les propriétés (5.4) et celles relatives aux tenseurs.

Les termes suivants deviennent

$$\begin{aligned} f_{\rho\mu}\,\dot{x}^{\mu}(0) &= f_{\rho\mu}\left(\frac{x_f - x_i}{\lambda}\right) - \frac{e\lambda\, f_{\rho\mu}\, f_{\mu}^{\rho}\ \dot{x}^{\mu}(0)}{(\xi_f - \xi_i)^2}\int_{\xi_i}^{\xi_f}[A(\xi') - A(\xi_0)]\,d\xi' \\ &= \frac{e\eta_\mu}{(\xi_f - \xi_i)}\int_{\xi_i}^{\xi_f}[A(\xi') - A(\xi_0)]\,d\xi', \end{aligned} \tag{5.36}$$

et

$$\begin{aligned} &\left[ef_{\rho\mu}\frac{\dot{x}^{\mu}(0)\,\lambda}{(\xi_f - \xi_i)^2}\int_{\xi_i}^{\xi_f}[A(\xi') - A(\xi_0)]\,d\xi'\right] \\ &= \frac{e\eta_\mu\lambda}{(\xi_f - \xi_i)^3}\int_{\xi_i}^{\xi_f}[A(\xi') - A(\xi_0)]\,d\xi', \end{aligned} \tag{5.37}$$

et finalement le dernier terme est égal à

$$\left[e f_{\rho\mu} \frac{\dot{x}^{\mu}(0)\,\lambda}{\left(\xi_f - \xi_i\right)^2} \int_{\xi_i}^{\xi_f} d\xi' \left[A(\xi') - A(\xi_0)\right] \right]^2$$

$$= -\frac{e^2}{\left(\xi_f - \xi_i\right)^2} \left(\int_{\xi_i}^{\xi_f} \left[A(\xi') - A(\xi_0)\right]\, d\xi' \right)^2. \tag{5.38}$$

Avec ces résultats le carré de la vitesse est alors

$$\begin{aligned} \dot{x}^2(0) &= \left(\frac{x_f - x_i}{\lambda}\right)^2 + \frac{e^2}{\left(\xi_f - \xi_i\right)^2} \left[\int_{\xi_i}^{\xi_f} \left[A(\xi') - A(\xi_0)\right]\, d\xi' \right]^2 \\ &\quad - \frac{e^2}{\left(\xi_f - \xi_i\right)} \int_{\xi_i}^{\xi_f} \left[A(\xi') - A(\xi_0)\right]^2\, d\xi', \end{aligned} \tag{5.39}$$

où

$$\begin{aligned} -\frac{\dot{x}^2(s)}{2} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{x_f - x_i}{\lambda}\right)^2 - \frac{e^2}{2\,\left(\xi_f - \xi_i\right)^2} \left[\int_{\xi_i}^{\xi_f} A(\xi')\, d\xi' \right]^2 \\ &\quad + \frac{e^2}{2\,\left(\xi_f - \xi_i\right)} \int_{\xi_i}^{\xi_f} \left[A(\xi')\right]^2\, d\xi'. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Intégrons maintenant sur s

$$\begin{aligned} -\int_{\xi_i}^{\xi_f} \frac{\dot{x}^2(s)}{2} &= -\frac{1}{2}\frac{\left(x_f - x_i\right)^2}{\lambda} - \frac{e^2\lambda}{2\,\left(\xi_f - \xi_i\right)^2} \left[\int_{\xi_i}^{\xi_f} A(\xi')\, d\xi' \right]^2 \\ &\quad + \frac{e^2\,\lambda}{2\,\left(\xi_f - \xi_i\right)} \int_{\xi_i}^{\xi_f} \left[A(\xi')\right]^2 d\xi', \end{aligned} \tag{5.41}$$

et calculons le terme $\dot{x}(s)\; A(x(s))$.

Utilisons pour cela les propriétés ηA ainsi que (5.28) et (5.29)

$$
\begin{aligned}
A\left(x\left(s\right)\right)\dot{x}\left(s\right) &= A\left\{\frac{1}{s}\left[x\left(s\right)-x_a\right]-ef_{\lambda\mu}\frac{\dot{x}^{\mu}\left(0\right)\lambda^2}{s\left(\xi_f-\xi_i\right)^2}\right. \\
&\quad\times\int_{\xi_0}^{\xi}\left[A\left(\xi'\right)-A\left(\xi_0\right)\right]\,d\zeta' \\
&\quad\left.+ef_{\lambda\mu}\frac{\dot{x}^{\mu}\left(0\right)\lambda}{\left(\xi_f-\xi_i\right)}\left[A\left(\xi\right)-A\left(\xi_0\right)\right]\right\}, \qquad (5.42)
\end{aligned}
$$

nous avons $\left(\xi\left(s\right)=\beta s+\xi_a\right)$. Nous pouvons tirer le temps s

$$
s=\frac{\xi\left(s\right)-\xi_a}{\beta}, \qquad (5.43)
$$

et utiliser la valeur de β de la relation (5.24) ainsi que l'expression de $\dot{x}^{\mu}\left(0\right)$ (5.29).

Avec la jauge choisie nous avons $A\left(x\left(s\right)\right)\left(x\left(s\right)-x_0\right)=0$.

Ainsi

$$
\begin{aligned}
eA\left(x\left(s\right)\right)\left(\dot{x}\left(s\right)\right) &= +\left[e^2\ K\left(\xi,\xi_0\right)\left(\int_{\xi_0}^{\xi}A\left(\xi\right)\ d\zeta\right)\right] \\
&\quad -e^2\left[\left(\xi-\xi_0\right)K\left(\xi,\xi_0\right)A\left(\xi\right)\right]. \qquad (5.44)
\end{aligned}
$$

Remplaçons par (5.7) nous trouvons

$$
eA\left(x\left(s\right)\right)\left(\dot{x}\left(s\right)\right)=+e^2\ \frac{\left(\int_{\xi_0}^{\xi}A\left(\xi\right)\ d\zeta\right)^2}{\left(\xi-\xi_0\right)^2}+e^2\ A\left(\xi\right)^2-\frac{2e^2\ A\left(\xi\right)}{\left(\xi-\xi_0\right)}\int_{\xi_0}^{\xi}A\left(\xi\right)\ d\zeta. \qquad (5.45)
$$

Intégrons sur s en changeant ds en $d\xi$,et intégrons ensuite par partie. Notons le premier terme par

$$
I=\int_{\xi_a}^{\xi_b}e^2\frac{1}{\left(\xi-\xi_0\right)^2}\left(\int_{\xi_0}^{\xi}A\left(\xi'\right)d\zeta'\right)^2\left(\frac{\lambda}{\xi_f-\xi_i}d\xi\right), \qquad (5.46)
$$

et posons

$$\begin{cases} F(\xi) = \left(\int_{\xi_0}^{\xi} d\zeta' A\left(\xi'\right)\right)^2 \\ \\ G'(\xi) = \frac{1}{(\xi-\xi_0)^2} \end{cases} .$$

Remplaçons dans (5.45), nous obtenons

$$\begin{aligned} -e\int_{\xi_i}^{\xi_f} A(x(s))\left(\dot{x}(s)\right)\left(\frac{\lambda}{\xi_f-\xi_i}\right)d\xi &= +\frac{e^2\lambda}{\left(\xi_f-\xi_i\right)^2}\left(\int_{\xi_i}^{\xi_f} A(\xi)\,d\zeta\right)^2 \\ &\quad -\frac{e^2\lambda}{\left(\xi_f-\xi_i\right)}\int_{\xi_i}^{\xi_f} [A(\xi)]^2\,d\zeta. \end{aligned} \tag{5.47}$$

Reportons les résultats suivants (5.41) et (5.47) dans l'action classique (5.30) .Nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} S_{cl} &= -\frac{(x_f-x_i)^2}{2\lambda}+\frac{e^2\lambda}{2\left(\xi_f-\xi_i\right)^2}\left[\int_{\xi_i}^{\xi_f} A(\xi')\,d\xi'\right]^2 \\ &\quad -\frac{e^2\ \lambda}{2\left(\xi_f-\xi_i\right)}\int_{\xi_i}^{\xi_f} [A(\xi')]^2\,d\xi' \quad , \end{aligned} \tag{5.48}$$

qui est l'action calculée sur le chemin classique. Elle est fonction de x_f, x_i, s_i, s_f.

Passons au calcul du facteur de fluctuation.

5.1.3 Calcul du terme de fluctuation $\langle\ H_Q(s_i,u)\rangle$

Désignons par $(x_Q^\mu,\ p_Q^\mu)$ les deux variables

- x_Q^μ est la déviation de x^μ par rapport à la trajectoire classique x_{cl}^μ
- et p_Q^μ la déviation par rapport à l'impulsion classique p_{cl}^μ

$$\begin{cases} x = x_{cl}^\mu + x_Q^\mu \\ p = p_{cl}^\mu + p_Q^\mu \end{cases} . \tag{5.49}$$

L'action pour le problème de l'onde plane étant

$$S=-\int\left[p\left(s\right)\dot{x}\left(s\right)-\frac{1}{2}\left(p\left(s\right)-eA\left(\xi\right)\right)^{2}\right], \tag{5.50}$$

décomposons la en deux parties

$$S=S_{cl}+S_{Q}, \tag{5.51}$$

- une action classique donnée par l'expression suivante

$$S_{cl}=-\int ds\left(\frac{1}{2}\dot{x}_{cl}^{2}+eA_{cl}\dot{x}_{cl}\right), \tag{5.52}$$

- et une action qui regroupe tous les termes restants

$$\begin{aligned} S_{Q} &= -\int_{s_a}^{s_b}\left[p_{cl}.\dot{x}_{Q}+p_{Q}.\dot{x}_{Q}-e\left(A_{cl}-A\left(x\right)\right)\left(p_{cl}+p_{Q}\right)\right.\\ &\left.-\frac{e^{2}}{2}\left(A^{2}\left(x\right)-A_{cl}^{2}\right)-\frac{1}{2}p_{Q}^{2}\right]\ ds, \end{aligned} \tag{5.53}$$

avec

$$x_{Q}\left(s_{i}\right)=x_{Q}\left(s_{f}\right)=0, \tag{5.54}$$

les conditions aux bords.

Décomposons l'hamiltonien aussi en deux parties

$$H=H_{cl}+H_{Q}, \tag{5.55}$$

où

- la partie classique est donnée par

$$H_{cl}=-\frac{1}{2}\left(p_{cl}-eA_{cl}\ \right)^{2}, \tag{5.56}$$

- et la partie qui regroupe aussi tous les termes restants

$$H_{Q}=H-H_{cl}$$

$$\begin{aligned} = \quad & -\frac{1}{2}p_Q^2 - p_{cl}p_Q - \frac{e^2}{2}A^2(\xi) + e(p_{cl}+p_Q)A(\xi) \\ & +\frac{e^2}{2}A_{cl}^2 - ep_{cl}A_{cl}. \end{aligned} \tag{5.57}$$

Introduisons dans cette étape en plus du temps réel s, le temps fictif u. Ainsi la variable x_Q change en

$$x_Q(s) \longrightarrow x_Q(s,u) \ . \tag{5.58}$$

Les conditions aux limites devenant

$$x_Q(s_i,u) = x_Q(s_f,u) = 0. \tag{5.59}$$

L'impulsion change aussi en

$$p_Q(s) \longrightarrow p_Q(s,u), \tag{5.60}$$

sans aucune condition aux limites.

Ces deux variables stochastiques sont les solutions des équations de Langevin suivantes

$$\frac{\partial x_Q^\mu(s,u)}{\partial u} = i\frac{\delta S_Q}{\delta x^\mu(s,u)} + \varrho^{\,\mu}(s,u)\,, \tag{5.61}$$

et

$$\frac{\partial p_Q^\mu}{\partial u} = i\frac{\delta S_Q}{\delta p^\mu(s,u)} + \chi^\mu\ (s,u), \tag{5.62}$$

avec pour les bruits les propriétés suivantes

$$\left\{ \begin{array}{c} \langle\ \varrho^\mu(s,u)\chi_\nu(s',u')\rangle = 0 \\ \\ \langle\ \varrho^\mu(s,u)\varrho_\nu(s',u')\rangle = \langle\chi^\mu(s,u)\chi_\nu(s',u')\rangle = 2\delta_\nu^\mu\delta(s-s')\delta(u-u') \end{array} \right. .. \tag{5.63}$$

Un calcul simple se basant sur la dérivation

$$\frac{\delta A(\xi)}{\delta x_Q(s,u)} = \eta \frac{dA}{d\xi}\ \delta(s-s'), \tag{5.64}$$

puis après intégration suivant la règle connue

$$\int dx\ f(x)\,\delta'(x-a) = -\ f'(a), \tag{5.65}$$

nous permet d'obtenir ce qui suit

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_Q}{\partial u} &= -i\int\ \Big[p_{cl}\delta'(s-s') + p_Q\delta'(s-s') + e\eta\frac{dA}{d\xi}(p_{cl}+p_Q)\,\delta(s-s') \\ &\quad -\frac{e^2}{2}\eta\frac{dA^2}{d\xi}\delta(s-s')\Big]\ ds' + \varrho(s,u),\end{aligned} \tag{5.66}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_Q}{\partial u} &= -i\int_{s_a}^{s_b}\Big[\dot{x}_Q\delta(s-s') - e\,(A_{cl} - A(\zeta))\,\delta(s-s') - p_Q\delta(s-s')\Big]\,ds' \\ &\quad +\chi(s\ ,u\ ).\end{aligned} \tag{5.67}$$

Ainsi les évolutions de x_Q et p_Q est déterminée par les équations suivantes de Langevin

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_Q}{\partial u} = i\left[\ \dfrac{\partial p_Q}{\partial s} + \dfrac{\partial p_{cl}}{\partial s} + \dfrac{1}{2}e^2\eta\dfrac{dA^2}{d\xi} - e\eta\dfrac{dA}{d\xi}.\,(p_{cl}+p_Q)\right] + \varrho(s,u) \\ \\ \dfrac{\partial p_Q}{\partial u} = i\left[p_Q - \dfrac{\partial x_Q}{\partial s} + e\,(A_{cl} - A(\xi))\right] + \chi\ (s,u) \end{cases}, \tag{5.68}$$

avec les conditions aux limites (5.59).

Il est commode de réécrire le système d'équations (5.68) sous forme matricielle

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{pmatrix} x_Q \\ p_Q \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial s} \\ -\frac{\partial}{\partial s} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_Q \\ p_Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{p_{cl}} + \frac{1}{2}e^2\eta\frac{dA^2}{d\xi} - e\eta\frac{dA}{d\xi}.\left(p_{cl}+p_Q\right) \\ e\left(A_{cl} - A\left(\xi\right)\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varrho\left(s,u\right) \\ \chi(s\ ,u\ ) \end{pmatrix}, \quad (5.69)$$

ou encore symboliquement, il a la forme vectorielle suivante

$$\frac{\partial}{\partial u}\overrightarrow{X} = M\overrightarrow{X} + \overrightarrow{W}\ + \overrightarrow{V}.$$

La solution (avec champ) de ce système suivant [5] est donnée par

$$\overrightarrow{X}\left(s,u\right) = \overrightarrow{X}_Q^{(0)}\left(s,u\right) + \int_{s_i}^{s_f} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} G\left(s,u \mid s',u'\right)\overrightarrow{W}\left(s',u'\right)\ du', \quad (5.70)$$

où $G\left(s,u \mid s',u'\right)$ est la fonction de Green libre.

Cette fonction de Green est de type matriciel (2x2). Nous pouvons la représenter par

$$G\left(s,u \mid s',u'\right) = \begin{pmatrix} G_{11}\left(s,u \mid s',u'\right) & G_{12}\left(s,u \mid s',u'\right) \\ G_{21}\left(s,u \mid s',u'\right) & G_{21}\left(s,u \mid s',u'\right) \end{pmatrix}. \quad (5.71)$$

Désignons par $\overrightarrow{X}_Q^{(0)}\left(s,u\right)$ la solution libre (sans champ) [5] vérifiant l'équation suivante

$$\frac{\partial}{\partial u}\overrightarrow{X}_Q^{(0)}\left(s,u\right) = M^{(0)}\overrightarrow{X}_Q^{(0)} +\ \overrightarrow{V}, \quad (5.72)$$

où

$$\overrightarrow{X}_Q^{(0)}\left(s,u\right) = \int_{s_i}^{s_f} ds' \int_{-\infty}^{+\infty}\ G\left(s,u \mid s',u'\right)\ \overrightarrow{V}\ \left(s',u'\right)\ du'. \quad (5.73)$$

Calculons les éléments de la fonction de Green libre $G\left(s,u \mid s',u'\right)$ qui vérifie le système d'équations de Langevin libre

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} - M\right)G^0\left(s,s^{'},u-u^{'}\right) = \delta\left(s-s^{'}\right)\delta\left(u-u^{'}\right), \quad (5.74)$$

où

$$
\begin{aligned}
M &= -\frac{\partial}{\partial s}\begin{pmatrix} 0 & -\ i \\ i & 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -\sigma_y \partial_s - \frac{i}{2}\sigma_z + \frac{i}{2} \\
&= \overrightarrow{\sigma}\overrightarrow{A} + \frac{i}{2},
\end{aligned}
\tag{5.75}
$$

avec

$$
\overrightarrow{A} = \left(0, -\partial_s, -\frac{i}{2}\right). \tag{5.76}
$$

l'expression de la fonction de Green libre

$$
G^0\left(s, s^{'}, u - u^{'}\right) = \frac{1}{\frac{\partial}{\partial u} - M}\delta\left(s - s^{'}\right)\delta\left(u - u^{'}\right), \tag{5.77}
$$

devient

$$
G^0\left(s, s^{'}, u - u^{'}\right) = \frac{1}{\partial_u - \overrightarrow{\sigma}\overrightarrow{A} - \frac{i}{2}}\delta\left(s - s^{'}\right)\delta\left(u - u^{'}\right). \tag{5.78}
$$

Calculons la fonction Green, on remplace les fonctions de Dirac et on revient à une écriture matricielle

$$
\begin{aligned}
G^0\left(s, s^{'}, u - u^{'}\right) &= \frac{\partial_u - \sigma_y \partial_s - \frac{i}{2}\sigma_z - \frac{i}{2}}{\partial_u^2 - i\partial_u - \partial_s^2}\ \delta\left(s - s^{'}\right)\delta\left(u - u^{'}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \partial_u - i & i\partial_s \\ -i\partial_s & \partial_u \end{pmatrix} \frac{1}{\partial_u^2 - i\partial_u - \partial_s^2}\int \frac{dk}{2\pi}\ \exp k\left(u - u^{'}\right) \\
&\quad \times \frac{2}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{\lambda}\left(s - s_i\right)\sin\frac{n\pi}{\lambda}\left(s^{'} - s_i\right),
\end{aligned}
\tag{5.79}
$$

d'où

$$G^0\left(s,s^{'},u-u^{'}\right) = -\frac{2}{\lambda}\begin{pmatrix}\partial_u - i & i\partial_s \\ -i\partial_s & \partial_u\end{pmatrix}\int\frac{dk}{2\pi}\frac{\exp ik\left(u-u^{'}\right)}{k^2-k-\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)^2} \times\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{\lambda}\left(s-s_i\right)\sin\frac{n\pi}{\lambda}\left(s^{'}-s_i\right). \tag{5.80}$$

On effectue le changement de variables suivant

$$K = k-\frac{1}{2}, \tag{5.81}$$

ainsi on obtient

$$G^0\left(s,s^{'},u-u^{'}\right) = -\frac{2}{\lambda}\begin{pmatrix}\partial_u - i & i\partial_s \\ -i\partial_s & \partial_u\end{pmatrix}\int\frac{dK}{2\pi}\frac{\exp\frac{\left(u-u^{'}\right)}{2}\ \exp iK\left(u-u^{'}\right)}{K^2-\frac{1}{4}\left(\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2+1\right)} \times\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{\lambda}\left(s-s_i\right)\sin\frac{n\pi}{\lambda}\left(s^{'}-s_i\right), \tag{5.82}$$

on éxtrait deux poles α_1 et α_2

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2+1}, \tag{5.83}$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2+1}, \tag{5.84}$$

et on applique la méthode des résidus

$$G^0\left(s,s^{'},u-u^{'}\right) = \frac{4}{\lambda}\begin{pmatrix}\partial_u - i & i\partial_s \\ -i\partial_s & \partial_u\end{pmatrix}\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{\lambda}\left(s-s_i\right)\sin\frac{n\pi}{\lambda}\left(s^{'}-s_i\right) \times\exp\frac{\left(u-u^{'}\right)}{2}\sin\frac{\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2+1}}{2}\left(u-u^{'}\right). \tag{5.85}$$

On peut calcules tous les éléments de la matrice de Green

$$\begin{aligned}
G_{11} &= -\theta(u-u')\frac{2i}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{\lambda}(s-s_i)\sin\frac{n\pi}{\lambda}(s'-s_i) \\
&\times\left\{\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2+1}}\sin\left[\frac{\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2+1}}{2}(u-u')\right]\right. \\
&\left.+i\cos\left[\frac{\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2+1}}{2}(u-u')\right]\right\}\exp\frac{i}{2}(u-u'),
\end{aligned} \tag{5.86}$$

$$\begin{aligned}
G_{12} &= -\theta(u-u')\frac{4i}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{\lambda}\cos\frac{n\pi}{\lambda}(s-s_i)\sin\frac{n\pi}{\lambda}(s'-s_i) \\
&\times\sin\left[\frac{\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2+1}}{2}(u-u')\right]\quad\exp\frac{i}{2}(u-u')\ ,
\end{aligned} \tag{5.87}$$

et

$$\begin{aligned}
G_{21} &= \theta(u-u')\frac{4i}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{\lambda}\sin\frac{n\pi}{\lambda}(s-s_i)\cos\frac{n\pi}{\lambda}(s'-s_i) \\
&\times\sin\left[\frac{\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2+1}}{2}(u-u')\right]\quad\exp\frac{i}{2}(u-u')\ ,
\end{aligned} \tag{5.88}$$

et finalement

$$\begin{aligned}
G_{22} &= \theta(u-u')\frac{2i}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{\lambda}(s-s_i)\sin\frac{n\pi}{\lambda}(s'-s_i) \\
&\left\{\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2+1}}\sin\left[\frac{\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2+1}}{2}(u-u')\right]\right. \\
&\left.-i\cos\left[\frac{\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2+1}}{2}(u-u')\right]\right\}\exp\frac{i}{2}(u-u').
\end{aligned} \tag{5.89}$$

Passons alors au calcul du facteur de fluctuation

$$\exp\left[i\int_0^{s_i}\lim_{u\to\infty}\langle H_Q\left(s_i,u\right)\rangle ds_i\right]. \tag{5.90}$$

Nous avons besoin de la moyenne de l'hamiltonien

$$\langle H_Q\rangle = -\frac{1}{2}\langle p_Q^2\rangle - p_{cl}\langle p_Q\rangle - \frac{e^2}{2}\langle A^2\left(\xi\right)\rangle + ep_{cl}\ \langle A\left(\xi\right)\rangle + e\langle p_Q\ A\left(\xi\right)\rangle + \frac{e^2}{2}A_{cl}^2 - ep_{cl}A_{cl}. \tag{5.91}$$

Désignons dans toute la suite par

$$\overrightarrow{X}\left(s,u\right) = \begin{pmatrix} x_Q \\ p_Q \end{pmatrix} = \overrightarrow{e_1}x_Q\left(s,u\right) + \overrightarrow{e_2}p_Q\left(s,u\right), \tag{5.92}$$

la solution en utilisant

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e_1} &= \begin{pmatrix} O \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \overrightarrow{e_2} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{5.93}$$

deux vécteurs de base.

Ainsi $x_Q\left(s,u\right)$ et $p_Q\left(s,u\right)$ ont pour expressions

$$\begin{aligned} x_Q\left(s,u\right) &= \overrightarrow{e_1}^{+}\overrightarrow{X}\ , \\ p_Q\left(s,u\right) &= \overrightarrow{e_2}^{+}\overrightarrow{X}\ , \end{aligned} \tag{5.94}$$

c'est à dire

$$x_Q\left(s,u\right) = \left(1\ \ 0\right)\ \left(\overrightarrow{X}_Q^0\left(s,u\right) + \int_{s_i}^{s_f} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' G\left(s,u\mid s',u'\right)\overrightarrow{w}\left(s',u'\right)\right), \tag{5.95}$$

et

$$p_Q\left(s,u\right) = \ \left(0\ \ 1\right)\ \left(\overrightarrow{X}_Q^0\left(s,u\right) + \int_{s_i}^{s_f} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' G\left(s,u\mid s',u'\right)\overrightarrow{w}\left(s',u'\right)\right), \tag{5.96}$$

qui sont évidemment fonctions des deux bruits.

Notons que le champ $A(\xi)$ d'après l'écriture

$$A\Big|_{\eta\left(x_{cl}+x_Q\right)} = f\left(\ \eta x_{cl} + \eta x_Q\right) \tag{5.97}$$

est fonction de la déviation $x_Q\ \ (s,u)$ et par conséquent, il est fonction via de l'équation de Langevin du bruit.

Décomposons le champ en série au voisinage du chemin classique, la déviation $x_Q(s,u)$ dépendant du bruit via l'équation de Langevin

$$A\Big|_{\eta(x_{cl}+x_Q)} = \sum_n \frac{1}{n!}\left(\eta x_Q\right)^n \frac{d^n\ \ f}{d\xi_{cl}^n}\,|_{\xi_{cl}=\eta x_{cl}}\ . \tag{5.98}$$

Calculons d'abord a moyenne de $\xi_Q = \eta x_Q$.

Ainsi, multiplions par η les équations (5.96) et (5.95), sachant que $\eta^2\ =\ 0$, $\eta A\ =\ 0$ et $\eta\overrightarrow{w}\left(s',u'\right) = 0$

$$\eta x_Q(s,u) \ = \ \eta\,(1 \qquad 0)\,\overrightarrow{X}_Q^0(s,u)\,, \tag{5.99}$$

$$\eta p_Q(s,u) \ = \ \eta\,(0 \qquad 1)\ \ \overrightarrow{X}_Q^0(s,u)\,, \tag{5.100}$$

alors

$$\begin{aligned}\eta x_Q(s,u) \ &= \ \eta\,(1\ \ 0)\int_{s_i}^{s_f} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' \begin{pmatrix} G_{11}(s,u\mid s',u') & G_{12}(s,u\mid s',u') \\ G_{21}(s,u\mid s',u') & G_{21}(s,u\mid s',u')\end{pmatrix} \\ &\quad\times\begin{pmatrix}\varrho(s',u') \\ \chi(s\ ',u'\ )\end{pmatrix}, \end{aligned}\tag{5.101}$$

et

$$\begin{aligned}\eta p_Q(s,u) \ &= \ \eta\,(0\ \ 1)\int_{s_i}^{s_f} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du'' \begin{pmatrix} G_{11}(s,u\mid s',u') & G_{12}(s,u\mid s',u') \\ G_{21}(s,u\mid s',u') & G_{21}(s,u\mid s',u')\end{pmatrix} \\ &\quad\times\begin{pmatrix}\varrho(s',u') \\ \chi(s\ ',u'\ )\end{pmatrix}. \end{aligned}\tag{5.102}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}\eta x_Q(s,u) &= \eta \int_{s_i}^{s_f} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du \left[G_{11}(s,u \mid s',u')\, \varrho(s',u') + G_{12}(s,u \mid s',u')\right. \\ &\quad \left.\times\, \chi(s\,',u'\,)\right], \end{aligned} \tag{5.103}$$

et

$$\begin{aligned}\eta p_Q(s,u) &= \eta \int_{s_i}^{s_f} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du \;\left[G_{21}(s,u \mid s',u')\, \varrho(s',u') + G_{22}(s,u \mid s',u')\right. \\ &\quad \left.\times\, \chi(s\,',u'\,)\right], \end{aligned} \tag{5.104}$$

Comme le champ A a pour développement

$$A\Big|_{\eta\left(x_{cl}+x_Q\right)} = \sum_n \frac{1}{n!}(\eta x_Q)^n \frac{d^n A}{d\xi^n}\,|_{\xi=\eta x_{cl}} \quad , \tag{5.105}$$

il dépend du bruit au niveau du terme $(\eta x_Q)^n$.

La moyenne se calcule de la manière suivante

$$\begin{aligned}\langle A(\xi)\rangle \;\Big|_{\xi=\eta\left(x_{cl}+x_Q\right)} &= \sum_n \frac{1}{n!}\frac{d^n A}{d\xi^n}\,|_{\xi=\eta x_{cl}}\; \langle(\eta x_Q)^n\rangle \\ &= \sum_n \frac{1}{n!}\frac{d^n A}{d\xi^n}\,|_{\xi=\eta x_{cl}} \\ &\quad \times\langle\eta\;\left(\int_{s_i}^{s_f} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du\;\left[G_{11}(s,u \mid s',u')\,\varrho(s',u')\right.\right. \\ &\quad \left.\left.+G_{12}(s,u \mid s',u')\,\chi(s\,',u'\,)\right]\right)^n\rangle, \end{aligned} \tag{5.106}$$

Remarquons que le terme pour $n=0$ de la série

$$\begin{aligned}\langle A(\xi)\rangle \;\Big|_{\xi=\eta\left(x_{cl}+x_Q\right)} &= \frac{d^0 A}{d\xi^0}\,|_{\xi=\eta x_{cl}}\;\langle 1\rangle \\ &= A(\xi_{cl}), \end{aligned} \tag{5.107}$$

et pour $n=1$

$$
\begin{aligned}
\langle A(\xi)\rangle \Big|_{\xi=\eta\left(x_{cl}+x_Q\right)} &= \frac{d\ A}{d\xi}\,|_{\xi=\eta x_{cl}} \\
&\times\langle\eta\ \left(\int_{s_i}^{s_f} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du\,[G_{11}(s,u\mid s',u')\,\varrho(s',u')\right. \\
&+G_{12}(s,u\mid s',u')\,\chi(s\ ',u'\ )])\rangle \\
&= \frac{d\ A}{d\xi}\,|_{\xi=\eta x_{cl}}\ \eta \int_{s_i}^{s_f} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du \\
&\times[G_{11}(s,u\mid s',u')\,\langle\varrho(s',u')\rangle \\
&\ +G_{12}(s,u\mid s',u')\,\langle\chi(s\ ',u'\ )\rangle]\,. \qquad (5.108)
\end{aligned}
$$

Lcs bruits ćtant blancs

$$
\langle\varrho(s',u')\rangle = \langle\chi(s\ ',u'\ )\rangle = 0. \qquad (5.109)
$$

le terme $\langle A(\xi)\rangle \Big|_{\xi=\eta\left(x_{cl}+x_Q\right)}$ pour le terme $n=1$ est nul

Pour $n=2$, la propriété $\eta^2=0$ implique que le troisième terme de la série est nul.

Ainsi, nous obtenons

$$
\langle A(\xi)\rangle = A(\xi_{cl})\,, \qquad (5.110)
$$

et de la même manière

$$
\langle A^2(\xi)\ \rangle = A^2(\xi_{cl})\,. \qquad (5.111)
$$

Calculons la moyenne de $p_Q A(\xi)$ figurant dans l'expression de $\langle H_Q\rangle$.

Pour cela, déterminons l'expression de l'impulsion

$$
\begin{aligned}
p_Q(s,u) &= (0\ \ 1)\ \left(\overrightarrow{X}_Q^0(s,u) + \int_{s_i}^{s_f} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' G(s,u\mid s',u')\,\overrightarrow{w}(s',u')\right) \\
&= (0\ \ 1)\left(\int_{s_i}^{s_f} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du'\ G(s,u\mid s',u')\ \overrightarrow{V}.\ (s',u')\right. \\
&\left. + \int_{s_i}^{s_f} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' G(s,u\mid s',u')\,\overrightarrow{w}(s',u')\right). \qquad (5.112)
\end{aligned}
$$

Nous obtenons

$$
\begin{aligned}
p_Q(s,u) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{X}_Q^0(s,u) + \int_{s_i}^{s_f} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' G(s,u \mid s',u') \\ \times \overrightarrow{w}(s',u') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\int_{s_i}^{s_f} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' \; G(s,u \mid s',u') \; \overrightarrow{V}.\ (s',u') \right. \\
&\quad \left. + \int_{s_i}^{s_f} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' G(s,u \mid s',u') \overrightarrow{w}(s',u') \right) \\
&= \int_{s_i}^{s_f} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' \left[G_{21}(s,u \mid s',u') \varrho_\mu(s',u') \right. \\
&\quad + G_{22}(s,u \mid s',u') \chi_\mu(s',u') \\
&\quad + eG_{22}(s,u \mid s',u') \left(A'_{\mu cl} - A'_\mu(\xi) \right) \\
&\quad\quad + G_{21}(s,u \mid s',u') \\
&\quad \left. \times \left(\dot{p}'_{cl} + \tfrac{1}{2} e^2 \eta \frac{dA^{2\prime}}{d\xi} - e\eta \frac{dA'}{d\xi} . \left(p'_{cl} + p'_Q \right) \right) \right] .
\end{aligned} \tag{5.113}
$$

Il est clair que l'impulsion est fonction des deux bruits. Utilisons les propriété de la jauge $\eta A = 0$ et $\dot{p}_{cl} A = 0$, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
p_{\mu Q}(s,u) A^\mu(\xi) &= \int_{s_i}^{s_f} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' \left[G_{21}(s,u \mid s',u') \varrho_\mu(s',u') \right. \\
&\quad + G_{22}(s,u \mid s',u') \chi_\mu(s',u') \\
&\quad \left. + eG_{22}(s,u \mid s',u') \left(A'_{\mu cl} - A'_\mu(\xi) \right) \right] A^\mu(\xi) ,
\end{aligned} \tag{5.114}
$$

et en prenant la moyenne sur les bruits

$$
\begin{aligned}
\langle p_{\mu Q}(s,u) A^\mu(\xi) \rangle &= \int_{s_i}^{s_f} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' \left[G_{21}(s,u \mid s',u') \langle \varrho_\mu(s',u') \;\; A^\mu(\xi) \rangle \right. \\
&\quad + G_{22}(s,u \mid s',u') \langle \chi_\mu(s',u') A^\mu(\xi) \rangle \\
&\quad + e\; G_{22}(s,u \mid s',u') A'_{\mu cl} \; \langle A^\mu(\xi) \rangle \\
&\quad \left. - eG_{22}(s,u \mid s',u') \langle A'_\mu(\xi) A^\mu(\xi) \rangle \right] ,
\end{aligned} \tag{5.115}
$$

alors

$$
\begin{aligned}
\left\langle p_{\mu Q}\left(s,u\right)A^{\mu}\left(\xi\right)\right\rangle &= \int_{s_i}^{s_f} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' \left[\left(\sum_n \frac{1}{n!}\frac{d^n\ A}{d\xi_{cl}^n}\mid_{\xi_{cl}=\eta x_{cl}}\right)\right. \\
&\times G_{21}\left(s,u\mid s',u'\right)\left\langle \varrho_{\mu}\left(s',u'\right)\ \left(\eta x_Q\right)^n\right\rangle \\
&+G_{22}\left(s,u\mid s',u'\right)\left(\sum_n \frac{1}{n!}\frac{d^n\ A}{d\xi_{cl}^n}\mid_{\xi_{cl}=\eta x_{cl}}\right) \\
&\times\left\langle \chi_{\mu}\left(s',u'\right)\left(\eta x_Q\right)^n\right\rangle + e\ G_{22}\left(s,u\mid s',u'\right)\ A'_{\mu cl} \\
&\times\left(\sum_n \frac{1}{n!}\frac{d^n\ A}{d\xi_{cl}^n}\mid_{\xi_{cl}=\eta x_{cl}}\right)\left\langle\left(\eta x_Q\right)^n\right\rangle \\
&-eG_{22}\left(s,u\mid s',u'\right)\left(\sum_m \frac{1}{m!}\frac{d^m A}{d\xi_{cl}^m}\mid_{\xi_{cl}=\eta x_{cl}}\right) \\
&\left.\times\left(\sum_n \frac{1}{n!}\frac{d^n\ A}{d\xi_{cl}^n}\mid_{\xi_{cl}=\eta x_{cl}}\right)\ \left\langle\left(\eta x_Q\right)^m\left(\eta x_Q\right)^n\ \right\rangle\right] \\
&= 0. \qquad (5.116)
\end{aligned}
$$

Calculons la moyenne de p_Q

$$
\begin{aligned}
\left\langle p_Q\left(s,u\right)\right\rangle &= \int_{s_i}^{s_f} ds^{'} \int_{-\infty}^{+\infty} du^{'} \left[G_{21}\left(s,u\mid s^{'},u^{'}\right)\left\langle\varrho_{\mu}\left(s^{'},u^{'}\right)\right\rangle\right. \\
&+G_{22}\left(s,u\mid s^{'},u^{'}\right)\left\langle\chi_{\mu}\left(s^{'},u^{'}\right)\right\rangle \\
&+G_{21}\left(s,u\mid s^{'},u^{'}\right)\left(\begin{array}{c} \dot{p}_{cl}^{'}+\frac{1}{2}e^2\eta\left\langle\frac{dA^{'2}}{d\xi}\right\rangle \\ -e\eta\left\langle\frac{dA^{'}}{d\xi^{'}}\right\rangle p_{cl}^{'}-e\eta\left\langle\frac{dA^{'}}{d\xi^{'}}p_Q^{'}\right\rangle \end{array}\right) \\
&\left.+eG_{22}\left(s,u\mid s^{'},u^{'}\right)\left[A_{\mu cl}^{'}-\left\langle A_{\mu}^{'}\left(\xi\right)\right\rangle\right]\right]. \qquad (5.117)
\end{aligned}
$$

Avec les propriétés des bruits blanc (5.109) , et vu que la moyenne $\langle p_Q\frac{dA}{d\xi}\rangle$ est nulle, nous obtenons

$$\langle p_Q\rangle = 0. \qquad (5.118)$$

Finalement, calculons la moyenne $\langle\ p_Q^2\rangle$.

Pour cela utilisons l'expression de p_Q^2

$$\begin{aligned}
p_Q^2 &= \int_{s_i}^{s_f} ds' ds'' \int_{-\infty}^{+\infty} du' du'' \left\{ 2\eta_\mu \left[\begin{array}{c} \frac{e^2}{2}\ G_{21}\left(s,u \mid s',u'\right) G_{21}\left(s',u' \mid s'',u''\right) \\ \times \frac{dA^2}{d\xi'} \varrho^\mu\left(s'',u''\right) \end{array} \right.\right. \\
&- eG_{21}\left(s,u \mid s',u'\right) G_{21}\left(s',u' \mid s'',u''\right) p'_Q \frac{dA'}{d\xi'} \varrho^\mu\left(s'',u''\right) \Bigg] \\
&+2\eta_\mu \left[\frac{e^2}{2} G_{21}\left(s,u \mid s',u'\right) G_{22}\left(s',u' \mid s'',u''\right) \frac{dA^{2\prime}}{d\xi'} \chi^\mu\left(s'',u''\right) \right. \\
&- eG_{21}\left(s,u \mid s',u'\right) G_{22}\left(s',u' \mid s'',u''\right) p'_Q \frac{dA'}{d\xi'} \chi^\mu\left(s'',u''\right) \Bigg] \\
&+G_{21}\left(s,u \mid s',u'\right) G_{21}\left(s',u' \mid s'',u''\right) \varrho^\mu\left(s',u'\right) \varrho_\mu\left(s'',u''\right) \\
&+2eG_{22}\left(s,u \mid s',u'\right) G_{21}\left(s',u' \mid s'',u''\right) \left[A_{\mu cl} - A'_\mu\left(\xi\right)\right] \varrho_\mu\left(s'',u''\right) \\
&+G_{22}\left(s,u \mid s',u'\right) G_{22}\left(s',u' \mid s'',u''\right) \chi^\mu\left(s',u'\right) \chi^\mu\left(s'',u''\right) \\
&+2eG_{22}\left(s,u \mid s',u'\right) G_{22}\left(s',u' \mid s'',u''\right) \chi^\mu\left(s',u'\right) \left[A_{\mu cl} - A'_\mu\left(\xi\right)\right] \\
&\left. \begin{array}{c} +e^2 G_{22}\left(s,u \mid s',u'\right) G_{22}\left(s',u' \mid s'',u''\right) \left[A_{\mu cl} - A'_\mu\left(\xi\right)\right] \\ \times \left[A'_{\mu cl} - A\ ''_\mu\left(\xi\right)\right] \end{array} \right\}. \qquad (5.119)
\end{aligned}$$

En utilisant l'équation (5.63) et en simplifiant le calcul on aboutit à

$$\begin{aligned}
\langle p_Q^2 \rangle &= \int_{s_a}^{s_b} ds' ds'' \int_{-\infty}^{+\infty} du' du' \left\{ \begin{array}{c} G_{21}\left(s,u \mid s',u'\right) G_{21}\left(s',u' \mid s'',u''\right) \\ \times \langle \varrho_\mu\left(s',u'\right) \varrho^\mu\left(s'',u''\right) \rangle \end{array} \right. \\
&\quad +G_{22}\left(s,u \mid s',u'\right) G_{22}\left(s',u' \mid s'',u''\right) \langle \chi^\mu\left(s',u'\right) \chi^\mu\left(s'',u''\right) \rangle. \\
&= 2 \int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' \left[G_{21}^2\left(s,u \mid s',u'\right) + G_{22}^2\left(s,u \mid s',u'\right) \right]. \qquad (5.120)
\end{aligned}$$

Reportons (5.110), (5.111), (5.115), (5.118) et (5.120) dans (5.91), alors

$$\langle H_Q \rangle = -\frac{1}{2} \langle p_Q^2 \rangle. \qquad (5.121)$$

Nous obtenons

$$\langle H_Q \rangle \left|_{A \neq 0} = \langle H_Q \rangle \right|_{A=0} , \tag{5.122}$$

c'est à dire que la moyenne de H_Q relative à la particule soumise à l'action du champ de l'onde plane est la même que celle relative à une particule libre, donc sans champ.

Avec ce résultat, le propagateur (2.53) est alors

$$\begin{aligned} \langle x_f, s_f \quad | \quad x_i, s_i \rangle &= c \exp\left[\hat{\imath} S_{cl}\right] \exp\left[i \int_0^{s_i} \lim_{u \to \infty} \langle H_Q (s_i, u) \rangle ds_i \right] \\ &= c \exp\left[\hat{\imath} S_{cl}\right] \exp\left[-i \int_0^{s_i} \lim_{u \to \infty} \left(\int_{s_i}^{s_f} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' G_{21}^2 (s, u \mid s', u') \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + G_{22}^2 (s, u \mid s', u') \right) ds_i \right] , \end{aligned} \tag{5.123}$$

ainsi nous avons montré [14] que l'onde plane n'a aucune influence sur le calcul du facteur de fluctuation. Son expression est la même que celui relatif à une particule libre.

5.1.4 Conclusion

Dans le formalisme de la quantification stochastique, nous avons dans l'espace des phases solutionné le problème de la particule relativiste sans spin et soumise à l'action du champ d'une onde plane. Le calcul du propagateur a été effectué en deux étapes. Nous avons d'abord déterminé l'action classique en utilisant le chemin classique et ensuite le facteur de fluctuation qui a été trouvé le exactement le même que celui relatif à une particule libre. Grâce aux propriétés de l'onde plane et un traitement perturbatif, la solution obtenue est analytique et exacte.

Chapitre 6

Formulation dans l'espace de configuration

6.1 Propagateur d'une particule de spin zéro dans le champ d'une onde plane

6.1.1 Introduction

Il est clair que pour maîtriser les calculs il est préférable de limiter le nombre de variables dans la description de la physique d'un système. Utilisons le formalisme lagrangien pour calculer le propagateur dans l'espace de configuration.

Considérons encore la particule relativiste sans spin en interaction avec le champ d'une onde plane décrit par le même 4-potentiel A_μ et dans la même jauge de coordonnées.

Dans ce cas, le lagrangien qui régit le mouvement de la particule dans le système de coordonnées

$$x^\mu = x^\mu(s), \tag{6.1}$$

est

$$L\left[x(s), \dot{x}(s)\right] = -\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - eA\left(\frac{dx}{ds}\right). \tag{6.2}$$

Nous avons besoin de l'action qui est la même que celle donnée dans l'approche des intégrales de chemin [9]

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{s_i}^{s_f} ds\ L\ \left[x(s), \dot{x}(s)\right] \\
&= -\int_{s_i}^{s_f} ds \left[\frac{1}{2}\dot{x}^2(s) + eA\dot{x}(s)\right].
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

Comme auparavant, il est nécessaire de calculer

- d'abord l'action classique

- et l'action relative aux termes restants.

La procédure est la même que dans le chapitre précédent.

Calculons d'abord l'action classique.

6.1.2 Calcul de l'action classique S_{cl}

Avec l'équation d'Euler-Lagrange,

$$
\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,
\tag{6.4}
$$

nous obtenons la trajectoire classique

$$
\frac{d}{ds}\left(\dot{x}_\rho + eA_\rho\right) = e\dot{x}^\mu \partial_\rho A_\mu,
\tag{6.5}
$$

où

$$
A_\mu(x) = \int_0^1 d\alpha\ \alpha\,(x - x_0)^\nu F_{\mu\nu}(\alpha x),
\tag{6.6}
$$

et

$$
F_{\mu\nu}(x) = f_{\mu\nu} F(\xi),
\tag{6.7}
$$

le tenseur électromagnétique.

L'équation de la trajectoire est ainsi la même que celle trouvée au chapitre précèdent, le calcul conduit au même résultat que celui du chapitre 1.

L'action classique est donc

$$S_{cl} = -\frac{(x_b - xa)^2}{2\lambda} + \frac{e^2\lambda}{2(\xi_b - \xi_a)^2}\left[\int_{\xi_i}^{\xi_f} d\xi\text{'} A(\xi\text{'})\right]^2 - \frac{e^2\ \lambda}{2(\xi_b - \xi_a)}\int_{\xi_i}^{\xi_f} d\xi\text{'} \left[A(\xi\text{'})\right]^2 . \tag{6.8}$$

Il nous reste la fonction de corrélation.

6.1.3 Calcul de la fonction de corrélation à deux points

Passons au calcul du facteur de fluctuation.

Désignons par x_Q^μ la déviation de x^μ par rapport à la trajectoire classique x_{cl}

$$x^\mu = x_{cl}^\mu + x_Q^\mu, \tag{6.9}$$

l'action S se décompose en deux parties

- une partie classique

$$\begin{aligned} S_{cl} &= -\int_{s_i}^{s_f} ds \left[\frac{1}{2}\dot{x}_{cl}\dot{x}_{cl} + eA(x_{cl})\dot{x}_{cl}\right] \\ &= -\frac{(x_f - x_i)^2}{2\lambda} + \frac{e^2\lambda}{2\left(\xi_f - \xi_i\right)^2}\left[\int_{\xi_i}^{\xi_f} d\xi\text{'} A(\xi\text{'})\right]^2 \\ &\quad -\frac{e^2\ \lambda}{2\left(\xi_f - \xi_i\right)}\int_{\xi_i}^{\xi_f} d\xi\text{'} \left[A(\xi\text{'})\right]^2 \quad , \end{aligned} \tag{6.10}$$

- et une deuxième partie ($S_Q = S - S_{cl}$) qui contient les termes restants

$$\begin{aligned} S_Q &= -\int_{s_i}^{s_f} ds \left[\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_{cl}}{ds}\right)\left(\frac{dy}{ds}\right)\right. \\ &\quad \left. + eA(\xi).(\frac{dx_{cl}}{ds} + \frac{dy}{ds}) - eA(\xi_{cl}).\frac{dx_{cl}}{ds}\right], \end{aligned} \tag{6.11}$$

avec les conditions aux limites

$$x_Q(s_i) = x_Q(s_f) = 0. \tag{6.12}$$

Notons par $x_Q = y$,

$$\xi_{cl} = \eta x_{cl}, \tag{6.13}$$

et par

$$\xi \ = \eta \left(x_{cl} + x_Q \right). \tag{6.14}$$

Ajoutons le temps fictif u au temps réel s

$$y\left(s\right) \rightarrow y\left(s,u\right), \tag{6.15}$$

les conditions aux limites devenant

$$y(s_i, u) = y(s_f, u) = 0. \tag{6.16}$$

Le mouvement de $y\left(s,u\right)$ est maintenant régi par une seule équation de Langevin

$$\frac{\partial y^{\mu}(s,u)}{\partial u} = i \frac{\delta S_Q}{\delta y^{\mu}(s,u)} + \eta^{\mu}(s,u), \tag{6.17}$$

avec pour les bruits, les propriétés habituelles

$$\left\{ \begin{array}{c} \langle \varrho^{\mu}(s,u) \rangle = 0 \\ \langle \varrho^{\mu}(s,u) \ \varrho^{\nu}(s',u') \rangle = 2g^{\mu\nu}\delta(s-s')\delta(u-u') \end{array} \right. . \tag{6.18}$$

Développons le deuxième membre de l'équation de Langevin

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(s,u)}{\partial u} \quad &= \quad -i \frac{\delta}{\delta y(s,u)} \int_{s_i}^{s_f} ds' \ \left[\frac{1}{2} \dot{y}^2 + \dot{x}_{cl} \dot{y} + \ eA(\xi) \mid_{\left(\xi_{cl} + \xi_q \right)}, \right. \\ & \left. \times (\dot{x}_{cl} + \dot{y}) - eA\left(\xi_{cl}\right) \dot{x}_{cl} \ + \varrho(s,u) \right], \end{aligned} \tag{6.19}$$

en utilisant

$$\frac{\delta A\left(\xi_{cl}\right) \dot{x}_{cl}}{\delta y(s,u)} = 0, \tag{6.20}$$

et

$$\frac{\delta A(\xi)}{\delta y(s,u)} = \frac{dA}{d\xi} \eta \delta(s-s'), \tag{6.21}$$

ainsi que la règle connue

$$\int dx f(x)\delta^{'}(x-a)=-f^{'}(a). \tag{6.22}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{\partial y(s,u)}{\partial u} &= -i\int_{s_i}^{s_f} ds^{'}\ \left[\dot{y}\ \frac{\partial}{\partial s}\delta\left(s-s^{\cdot}\right)+\dot{x}_{cl}\frac{\partial}{\partial\ s}\delta\left(s-s^{\cdot}\right)\right. \\ &\left. +e\frac{\delta A(\xi)}{\delta y\left(s,u\right)}(\dot{x}_{cl}+\dot{y})+A\left(\xi\right)\left(\frac{\partial}{\partial\ s}\ \delta\left(s-s^{\cdot}\right)\right)\right]+\varrho(s,u), \end{aligned}\tag{6.23}$$

et finalement, l'équation de Langevin est la suivante

$$\begin{aligned}\frac{\partial y\left(s,u\right)}{\partial u} &= i\frac{\partial^{2}}{\partial s^{2}}\left(y+x_{\ cl}\right)\ -ie\eta\ \frac{dA\left(\xi\right)}{d\zeta}\Big|_{\xi=\eta\left(x_{cl}+x_{Q}\right)}\left(\ \dot{x}_{cl}+\dot{y}\right) \\ &+ie\ \frac{\partial A\left(\xi\right)}{\partial s}\ +\varrho(s,u). \end{aligned}\tag{6.24}$$

La solution y peut être considérée comme une superposition de deux solutions. L'une relative au cas libre $y^{0}\left(s,u\right)$ c'est à dire sans champ A_{μ} et l'autre $y^{'}\left(s,u\right)$ relative à ce qui reste [4]

$$y(s,u)=y^{(0)}(s,u)+y^{'}(s,u). \tag{6.25}$$

Décomposons la solution libre en deux termes

$$y^{(0)}(s,u)=y_{cl}^{(0)}(s)+y_{Q}^{(0)}(s,u), \tag{6.26}$$

où $y_{cl}^{0}\left(s,u\right)$ est la solution de l'équation classique.

Nous avons bien sûr

$$\frac{\partial^{2}y_{cl}^{0}\left(s\right)}{\partial s^{2}}=0, \tag{6.27}$$

dont la solution classique libre est

$$y_{cl}^{0}\left(s\right)=cs+d. \tag{6.28}$$

Les conditions aux limites

$$y_{cl}^{(0)}(s_{i})=y_{cl}^{(0)}(s_{f})=0, \tag{6.29}$$

imposent

$$c = d = 0, \tag{6.30}$$

et finalement

$$y_{cl}^{(0)}(s) = 0. \tag{6.31}$$

La déviation $y_Q^{(0)}(s,u)$ est régie maintenant par l'équation de Langevin

$$\frac{\partial}{\partial u} y_Q^{(0)}(s,u) = i \frac{\partial^2}{\partial s^2} y_Q^{(0)}(s,u) + \varrho(s,u), \tag{6.32}$$

avec pour conditions aux limites

$$y_Q^{(0)}(s_i,u) = y_Q^{(0)}(s_f,u) = 0. \tag{6.33}$$

Désignons par $G^{(0)}(s,s^{'};u-u^{'})$ la fonction de Green libre solution de l'équation suivante

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) G^{(0)}(s,s^{'};u-u^{'}) = \delta(s-s^{'})\delta(u-u^{'}), \tag{6.34}$$

où les conditions aux limites sont

$$G^{(0)}(s,s^{'};u-u^{'}) = 0, \qquad \textit{pour } s \; (\textit{où } s^{'}) = s_a, s_b \textit{ ou } u < u^{'}. \tag{6.35}$$

Nous pouvons montrer facilement que

$$\begin{aligned} G^{(0)}(s,s^{'};u-u^{'}) &= \theta(u-u^{'}) \frac{2}{\lambda} \sum \sin \frac{n\pi}{\lambda}(s-s_i) \sin \frac{n\pi}{\lambda}(s^{'}-s_i) \\ &\times \exp \left[\frac{in^2\pi^2}{\lambda^2}(u-u^{'}) \right]. \end{aligned} \tag{6.36}$$

Ainsi la solution de l'équation libre de Langevin (6.32) est donnée par

$$y_Q^{(0)}(s,u) = \int_{s_i}^{s_f} ds^{'} \int_{-\infty}^{+\infty} du^{'} G^{(0)}(s,s^{'};u-u^{'}) \varrho(s,u), \tag{6.37}$$

et la solution de l'équation de Langevin en présence du champ A_μ (6.24) par

$$\begin{aligned} y(s,u) &= y_Q^{(0)}(s,u) + i\int_{s_i}^{s_f} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' G^{(0)}(s,s';u-u') \\ &\left[\ddot{x}_{cl}(s') + e\ \frac{\partial A(x)}{\partial s} \right. \\ &\left. -e\eta \cdot \frac{dA\ (x)}{d\zeta}\left(\dot{x}_{cl} + \dot{y}\right)\ \right]. \end{aligned} \tag{6.38}$$

Déterminé $y(s,u)$ par itération grâce aux propriétés de la jauge $\eta^2 = 0$ et $\eta f = 0$, les calculs se simplifient.

Notons d'abord que

$$\eta \ddot{x}_{cl}(s) = 0, \tag{6.39}$$

et aussi

$$\eta \dot{y}(s) = \eta\ \dot{y}_Q^{(0)}(s,u). \tag{6.40}$$

En passant par la dérivée suivante

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial s} &= \frac{\partial A}{\partial \xi}\Big|_{\xi=\eta(x_{cl}+x_Q)} \frac{\partial\ \xi}{\partial s} \\ &= \frac{\partial A}{\partial \xi}\Big|_{\xi=\eta(x_{cl}+x_Q)}\ \eta\left(\dot{x}_{cl} + \dot{y}_Q(s,u)\right) \\ &= \frac{\partial A}{\partial \xi}\Big|_{\xi=\eta(x_{cl}+x_Q)}\ \eta\left(\dot{x}_{cl} + \dot{y}_Q^{(0)}(s,u)\right), \end{aligned} \tag{6.41}$$

la solution de l'équation (6.24) est

$$\begin{aligned} y(s,u) &= y_Q^{(0)}(s,u) + i\int_{s_i}^{s_f} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' G^{(0)}(s,s';u-u') \\ &\times\left[\ddot{x}_{cl}\left(s'\right) + e\ \frac{dA}{d\zeta'}\Big|_{\eta(x+y)}\ \eta\left(\dot{x}_{cl}\left(s'\right) + \dot{y}_Q^{(0)}\left(s',u'\right)\right)\right] \\ &-ie\eta\int_{s_i}^{s_f} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' G^{(0)}(s,s';u-u')\frac{dA}{d\xi'}\Big|_{\eta(x+y)} \\ &\times\left[i\int_{s_i}^{s_f} ds'' \int_{-\infty}^{+\infty} du'' \frac{\partial}{\partial s'} G^{(0)}(s',s'';u'-u'')\ \left(\ddot{x}_{cl}(s'') + e\frac{\partial\ A}{\partial s''}\right)\right. \\ &\left. +\ \dot{x}_{cl}(s') +\ \dot{y}_Q^{(0)}(s',u')\right]. \end{aligned} \tag{6.42}$$

A ce niveau nous pouvons calculer la fonction de corrélation à deux points $< y(s_1, u_1) \cdot y(s_2, u_2) >$.

Prenons en compte le fait que $\eta^2 = 0$, $\eta A = 0$, $\left(\eta \ddot{x}_{cl} = 0\right)$ et la propriété du bruit blanc (6.18) nous obtenons le résultat simple pour la moyenne suivante

$$\langle y_Q^0 (s, u)\rangle = 0. \tag{6.43}$$

La fonction de corrélation prend devient alors

$$\begin{aligned}
< & \ y(s_1, u_1) \cdot y(s_2, u_2) > \\
= & \ < y_Q^{(0)}(s_1, u_1) \cdot y_Q^{(0)}(s_{2,}u_2) > - \int_{s_i}^{s_f} ds_1^{'} ds_2^{'} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1^{'} du_2^{'} G^{(0)}(s_1, s_1^{'}; u_1 - u_1^{'}) \\
& \times G^{(0)}(s_2, s_2^{'}; u_2 - u_2^{'}) \langle \left[\ddot{x}_{cl}^{\ \mu}(s_1^{'}) + e \frac{dA^{\mu}}{d\xi_1^{'}} \mid_{\eta(x+y)} \eta \left(\dot{x}_{cl}(s_1^{'}) + \dot{y}_Q^{(0)}(s_1^{'}, u_1^{'}) \right) \right] \\
& \times \left[\ddot{x}_{cl\mu}(s_2^{'}) + e \frac{dA_{\mu}}{d\xi_2^{'}} \mid_{k(x+y)} \eta \left(\dot{x}_{cl}(s_2^{'}) + \dot{y}_Q^{(0)}(s_2^{'}, u_2^{'}) \right) \right] \rangle \\
& + ie \int_{s_i}^{s_f} ds_2^{'} \int_{-\infty}^{+\infty} du_2^{'} G^{(0)}(s_2, s_2^{'}; u_2 - u_2^{'}) \langle y_Q^{(0)\mu}(s_1, u_1) \frac{dA_{\mu}}{d\xi_2^{'}} \mid_{\eta(x+y)} \\
& \times \eta \left(\dot{x}_{cl}(s_2^{'}) + \dot{y}_Q^{(0)}(s_2^{'}, u_2^{'}) \right) \rangle - ie\eta_{\mu} \int_{s_i}^{s_f} ds_2^{'} \int_{-\infty}^{+\infty} du_2^{'} G^{(0)}(s_2, s_2^{'}; u_2 - u_2^{'}) \\
& \times \langle y_Q^{(0)\mu}(s_1, u_1) \frac{dA}{d\xi_2^{'}} \mid_{\eta(x+y)} \left[\dot{x}_{cl}(s_2^{'}) + \dot{y}_Q^{(0)}(s_2^{'}, u_2^{'}) \right. \\
& \left. \ + i \int_{s_i}^{s_f} ds_2^{''} \int_{-\infty}^{+\infty} du_2^{''} \frac{\partial}{\partial s_2^{'}} G^{(0)}(s_2^{'}, s_2^{''}; u_2^{'} - u_2^{''}) \left(\ddot{x}_{cl}(s_2^{''}) + e \frac{\partial A}{\partial s_2^{''}} \right) \right] \rangle \\
& - ie \int_{s_i}^{s_f} ds_1^{'} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1^{'} G^{(0)}(s_1, s_1^{'}; u_1 - u_1^{'}) \langle \frac{dA^{\mu}}{d\xi_1^{'}} \mid_{\eta(x+y)} \\
& \times \eta \left(\dot{x}_{cl}(s_1^{'}) + \dot{y}_Q^{(0)}(s_1^{'}, u_1^{'}) \right) y_{Q\mu}^{(0)}(s_{2,}u_2) \rangle - ie \int_{s_i}^{s_f} ds_1^{'} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1^{'} G^{(0)}(s_1, s_1^{'}; u_1 - u_1^{'}) \\
& \times \langle \frac{dA}{d\xi_1^{'}} \mid_{\eta(x+y)} \left[\dot{x}_{cl}(s_1^{'}) + \dot{y}_Q^{(0)}(s_1^{'}, u_1^{'}) + i \int_{s_i}^{s_f} ds_1^{''} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1^{''} \frac{\partial}{\partial s_1^{'}} G^{(0)}(s_1^{'}, s_1^{''}; u_1^{'} - u_1^{''}) \right. \\
& \left. \times \left(\ddot{x}_{cl}(s_1^{''}) + e \frac{\partial A}{\partial s_1^{''}} \right) \right] \eta^{\mu} y_{Q\mu}^{(0)}(s_{2,}u_2) \rangle.
\end{aligned} \tag{6.44}$$

On note par $\eta_2^{'} = \eta \left(x \left(s_2^{'} \right) + y \left(s_2^{'}, u_2^{'} \right) \right)$ et on démontre que les moyennes suivantes sont nulles

$$M_1 = \langle y_Q^{(0)\mu}(s_1,u_1)\frac{dA_\mu}{d\xi_2^{'}}\,|_{\eta(x+y)}\;\eta\left(\dot{x}_{cl}(s_2^{'}) + \dot{y}_Q^{(0)}(s_2^{'},u_2^{'})\right)\rangle \ , \tag{6.45}$$

$$\begin{aligned} M_2 &= \langle \eta_\mu y_Q^{(0)\mu}(s_1,u_1)\frac{dA_\mu}{d\xi_2^{'}}\,|_{\eta(x+y)} \\ &\quad \Bigg[\dot{x}_{cl}(s_2^{'}) + \dot{y}_Q^{(0)}(s_2^{'},u_2^{'}) \\ &\quad +i\int_{s_a}^{s_b} ds_2^{''}\int_{-\infty}^{+\infty} du_2^{''}\frac{\partial}{\partial s_2^{'}}G^{(0)}(s_2^{'},s_2^{''};u_2^{'}-u_2^{''}) \\ &\quad \times\left(\ddot{x}_{cl}(s_2^{''}) + e\frac{\partial A}{\partial s_2^{''}}\right)\Bigg]\rangle, \end{aligned} \tag{6.46}$$

et

$$\begin{aligned} M_{\ 3} &= \langle\left[\ddot{x}_{cl}^{\ \mu}(s_1^{'}) + e\frac{dA^\mu}{d\xi_1^{'}}\,|_{k(x+y)}\;\eta\cdot\left(\dot{x}_{cl}(s_1^{'}) + \dot{y}_Q^{(0)}(s_1^{'},u_1^{'})\right)\right] \\ &\quad \times\left[\ddot{x}_{cl\mu}(s_2^{'}) + e\frac{dA_\mu}{d\xi_2^{'}}\,|_{k(x+y)}\;\eta\cdot\left(\dot{x}_{cl}(s_2^{'}) + \dot{y}_Q^{(0)}(s_2^{'},u_2^{'})\right)\right]\rangle. \end{aligned} \tag{6.47}$$

Posons

$$\frac{dA}{d\xi} = f\left(\eta\ \ (x_{cl}+y)\right), \tag{6.48}$$

et développons en série au voisinage du chemin classique

$$\begin{aligned} &= \sum_n \frac{1}{n!}\left(\eta\ y\right)^n\,\frac{d^{n+1}A}{\partial\left(\xi\right)^{n+1}}\,|_{\eta x_{cl}} \\ &= \sum_n \frac{1}{n!}\left(\eta\ y\right)^n\,\frac{d^{n+1}A}{d\left(\xi\right)^{n+1}}\,|_{\eta x_{cl}}\ . \end{aligned} \tag{6.49}$$

Multiplions $y(s,u)$ par η et utilisons les propriétés $\eta^2 = 0$, $\eta A = 0$

$$\begin{aligned} \eta y(s,u) &= \eta y_Q^{(0)}(s,u) \\ &= \int_{s_i}^{s_f} ds^{'}\int_{-\infty}^{+\infty} du^{'}G^{(0)}(s,s^{'};u-u^{'})\ \varrho(s^{'},u^{'}). \end{aligned} \tag{6.50}$$

La dérivée du champ A par rapport à ξ est aussi fonction du bruit

$$\frac{dA}{d\xi}=\sum_n\frac{1}{n!}\left(\eta y_Q^{(0)}(s,u)\right)^n\frac{d^{n+1}A}{d\left(\eta x_{cl}\right)^{n+1}}. \tag{6.51}$$

La moyenne (6.45) est maintenant calculable

$$\begin{aligned}
&\langle y_Q^{(0)\mu}(s_1,u_1)\frac{dA_\mu}{d\xi_2^{'}}\,|_{\eta(x+y)}\,\eta\left(\dot{x}_{cl}(s_2^{'})+\dot{y}_Q^{(0)}(s_2^{'},u_2^{'})\right)\rangle\\
=&\sum_n\frac{1}{n!}\frac{d^{n+1}A\left(\eta x_{cl}\right)}{d\left(\eta x\left(s_2^{'}\right)\right)^{n+1}}\langle y_Q^{(0)\mu}(s_1,u_1)\left(\eta y_Q^{(0)}(s_2^{'},u_2^{'})\right)^n\\
&\eta\left(\dot{x}_{cl}(s_2^{'})+\dot{y}_Q^{(0)}(s_2^{'},u_2^{'})\right)\rangle.
\end{aligned}\tag{6.52}$$

Le terme (pour $n=0$) de la série est nul

$$\begin{aligned}
&\frac{dA_\mu\left(\eta x_{cl}+\eta y\right)}{d\left(\eta x\left(s_2^{'}\right)\right)}\left[\langle y_Q^{(0)\mu}(s_1,u_1)\rangle\eta\dot{x}_{cl}(s_2^{'})+\langle y_Q^{(0)\mu}(s_1,u_1)\eta\dot{y}_Q^{(0)}(s_2^{'},u_2^{'})\rangle\right]\\
=&\frac{dA_\mu\left(\eta x_{cl}+\eta y\right)}{d\left(\eta x\left(s_2^{'}\right)\right)}\langle y_Q^{(0)\mu}(s_1,u_1)\eta\dot{y}_Q^{(0)}(s_2^{'},u_2^{'})\rangle\\
=&\int_{s_i}^{s_f}ds_1^{'}ds_2^{'}\int_{-\infty}^{+\infty}du_1^{'}du_2^{'}G^{(0)}(s_1,s_1^{'};u_1-u_1^{'})G^{(0)}(s_2,s_2^{'};u_2-u_2^{'})\\
&\times\frac{d^\mu A\left(\eta x_{cl}+\eta y\right)}{d\left(\eta x\left(s_2^{'}\right)\right)}\times\langle\varrho_\mu(s_1^{'},u_1^{'})\left[\eta\varrho(s_2^{'},u_2^{'})\right]\rangle\\
=&\,2\int_{s_i}^{s_f}ds_1^{'}\int_{-\infty}^{+\infty}du_1^{'}G^{(0)}(s_1,s_1^{'};u_1-u_1^{'})\frac{\partial}{\partial s_2^{'}}G^{(0)}(s_2^{'},s_2^{''};u_2^{'}-u_2^{''})\\
&\times\frac{dA^\mu\left(\eta x_{cl}+\eta y\right)}{d\left(\eta x\left(s_2^{'}\right)\right)}\eta_\mu\frac{dA^\mu\left(\eta x_{cl}+\eta y\right)}{d\left(\eta x\left(s_2^{'}\right)\right)}\eta_\mu,
\end{aligned}\tag{6.53}$$

le deuxième terme de la série pour $n=1$

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2A_\mu\left(\eta x_{cl}+\eta y\right)}{d\left(\eta x\left(s_2^{'}\right)\right)^2}\langle y_Q^{(0)\mu}(s_1,u_1)\left(\eta y_Q^{(0)}(s_2^{'},u_2^{'})\right)\eta\left(\dot{x}_{cl}(s_2^{'})+\dot{y}_Q^{(0)}(s_2^{'},u_2^{'})\right)\rangle\\
=&\frac{d^2A_\mu\left(\eta x_{cl}+\eta y\right)}{d\left(\eta x\left(s_2^{'}\right)\right)^2}\left[\langle y_Q^{(0)\mu}(s_1,u_1)\eta y_Q^{(0)}(s_2^{'},u_2^{'})\eta\dot{y}_Q^{(0)}(s_2^{'},u_2^{'})\rangle\right.\\
&\left.+\eta\dot{x}_{cl}(s_2^{'})\langle y_Q^{(0)\mu}(s_1,u_1)\rangle\eta y_Q^{(0)}(s_2^{'},u_2^{'})\rangle\right]\\
=&\,0,
\end{aligned}\tag{6.54}$$

et grâce aux propriétés de la jauge $\eta^2 = 0$, $\eta A = 0$ le résultat est le suivant

$$\langle \varrho^{\mu}(s_1^{'}, u_1^{'})\eta\varrho\, (s_2^{''}, u_2^{''})\eta\varrho^{\mu}(s_2^{''}, u_2^{''})\rangle = 0. \tag{6.55}$$

En conclusion, avec les moyennes (6.45), (6.46), (6.47) que nous insérons par la suite dans (6.44) et grâce aux propriétés des bruits blancs, nous obtenons la fonction de corrélation à deux points

$$\begin{aligned}
< \quad & y(s_1, u_1) \cdot y(s_2, u_2) >=< y_Q^{(0)}(s_1, u_1) \cdot y_Q^{(0)}(s_{2,} u_2) > \\
= \quad & \int_{s_a}^{s_b} ds_1^{'} ds_2^{'} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1^{'} du_2^{'} G^{(0)}(s_1, s_1^{'}; u_1 - u_1^{'} G^{(0)}(s_2, s_2^{'}; u_2 - u_2^{'}) \\
& \times \langle \eta^{\mu}(s_1^{'}, u_1^{'})\eta_{\mu}(s_2^{'}, u_2^{'})\rangle) \\
= \quad & 8 \int_{s_a}^{s_b} ds_1^{'} ds_2^{'} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1^{'} du_2^{'} G^{(0)}(s_1, s_1^{'}; u_1 - u_1^{'}) G^{(0)}(s_2, s_2^{'}; u_2 - u_1^{'}),
\end{aligned} \tag{6.56}$$

le facteur 4 est dû à la contraction sur les indices μ.

Insérons l'expression de la fonction de Green $G^{(0)}$ (6.36) dans (6.56) , alors

$$\begin{aligned}
< \quad & y(s_1, u_1) \cdot y(s_2, u_2) >= \frac{32}{\lambda^2} \sum_{n,l} \sin \frac{n\pi}{\lambda}(s_1 - s_i) \sin \frac{l\pi}{\lambda}(s_2 - s_i) \\
& \times \int_{-\infty}^{+\infty} du_1^{'} \theta(u_1 - u_1^{'}) \theta(u_2 - u_1^{'}) \int_{s_a}^{s_b} ds_1^{'} \sin \frac{n\pi}{\lambda}(s_1^{'} - s_i) \sin \frac{l\pi}{\lambda}(s_1^{'} - s_i) \\
& \times \exp\left[\frac{in^2\pi^2}{\lambda^2}(u_1 - u_1^{'})\right] \exp\left[\frac{il^2\pi^2}{\lambda^2}(u_2 - u_1^{'})\right].
\end{aligned} \tag{6.57}$$

Calculons l'intégrale suivante

$$\int_{s_a}^{s_b} ds_1^{'} \sin \frac{n\pi}{\lambda}(s_1^{'} - s_i) \sin \frac{l\pi}{\lambda}(s_1^{'} - s_i), \tag{6.58}$$

en utilisant le résultat suivant

$$\begin{aligned}
\int_0^{\lambda} ds \cos \frac{m\pi}{\lambda} s &= \frac{\lambda}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{\lambda} s \ \ |_O^{\lambda} \\
&= \begin{cases} 0 & si\ m \neq 0 \\ \lambda & si\ m = 0 \end{cases} .
\end{aligned}$$

Alors
$$\int_{s_a}^{s_b} ds_1^{'} \sin\frac{n\pi}{\lambda}(s_1^{'} - s_i) \sin\frac{l\pi}{\lambda}(s_1^{'} - s_i) = \frac{\lambda}{2}\delta_{n,l}, \tag{6.59}$$

Remplaçons dans l'expression

$$\begin{aligned}
&\frac{16}{\lambda}\sum_n \sin\frac{n\pi}{\lambda}(s_1 - s_i)\sin\frac{n\pi}{\lambda}(s_2 - s_i) \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} du_1^{'} \times \theta(u_1 - u_1^{'})\theta(u_2 - u_1^{'}) \\
&\times \exp\left[\frac{in^2\pi^2}{\lambda^2}(u_1 + u_2 - 2u_1^{'})\right],
\end{aligned} \tag{6.60}$$

qui après intégration par rapport à $u_1^{'}$, donne

$$\begin{aligned}
&\sum_n \frac{8i\lambda}{n^2\pi^2} \sin\frac{n\pi}{\lambda}(s_1 - s_i)\sin\frac{n\pi}{\lambda}(s_2 - s_i) \\
&\times \exp\left[\frac{in^2\pi^2}{\lambda^2}\left|u_1 - u_2\right|\right].
\end{aligned} \tag{6.61}$$

Prenons la limite pour $u_1 = u_2 \to \infty$, il ne reste que la série dans cette dernière expression. Transformons

$$\sin\frac{n\pi}{\lambda}(s_1 - s_i)\sin\frac{n\pi}{\lambda}(s_2 - s_i) \to \frac{1}{2}\cos\frac{n\pi}{\lambda}(s_1 - s_i) - \cos\frac{n\pi}{\lambda}(s_2 + s_2 - 2s_i), \tag{6.62}$$

et utilisons l'identité suivante [13]

$$\sum \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4}, \qquad [0 \leq x \leq 2\pi], \tag{6.63}$$

en changeant

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\pi}{\lambda}(s_1 - s_2), \\
x_2 &= \frac{\pi}{\lambda}(s_1 + s_2 - 2s_i).
\end{aligned} \tag{6.64}$$

Nous trouvons finalement,

$$\lim_{u\to\infty} < y(s_1,u_1)\; y(s_2,u_2) >= \frac{4i}{\lambda}(s_2-s_i)(s_f-s_1). \tag{6.65}$$

A ce stade du calcul, il est nécessaire de montrer l'écriture de la moyenne stochastique de l'hamiltonien $\langle H_Q(s_i,u)\rangle$; le deuxième exposant dans le terme de fluctuation au niveau de l'expression du propagateur (2.53) .

Ayant déterminé le produit de corrélation, calculons alors le terme qui correspond au facteur de fluctuation.

6.1.4 Calcul du terme de fluctuation $\langle\ H_Q\left(s_i,u\right)\rangle$

La moyenne de l'hamiltonien étant

$$\langle H_Q(s_i,u)\rangle = -\left\langle p_Q(s_i,u)\frac{\partial x_Q(s_i,u)}{\partial s_i}\right\rangle + \langle L_Q(s_i,u)\rangle\,, \tag{6.66}$$

effectuons encore la décomposition du lagrangien en deux parties

$$L = L_Q + L_{cl}, \tag{6.67}$$

- classique L_{cl}
- et

$$\begin{aligned} L_Q\left(s_i,u\right) &= -\left[\frac{1}{2}\frac{\partial x_Q}{\partial s_i}\frac{\partial x_Q}{\partial s_i} + \frac{\partial x_{cl}}{\partial s_i}\frac{\partial x_Q}{\partial s_i} + eA(\xi)\;(\frac{\partial x_{cl}}{\partial s_i} + \frac{\partial x_Q}{\partial s_i})\right. \\ &\quad \left. - eA(\xi_{cl})\frac{\partial x_{cl}}{\partial s_i}\right], \end{aligned} \tag{6.68}$$

qui regroupe les termes restants.

La moyenne de

$$\begin{aligned} \langle L_Q(s_i,u)\rangle &= -\frac{1}{2}\left\langle \frac{\partial x_Q(s_i,u)}{\partial s_i}\frac{\partial x_Q(s_i,u)}{\partial s_i}\right\rangle \\ &\quad - e\left\langle A\left(\xi\right)\Big|_{\xi=\eta\left(x_{cl}(s_i)+x_Q(s_i,u)\right)}\frac{\partial x_Q(s_i,u)}{\partial s_i}\right\rangle, \end{aligned} \tag{6.69}$$

ou encore avec l'écriture [12] suivante

$$\langle L_Q(s_i,u)\rangle_{bc} = -\frac{1}{2}\lim_{s_1,s_2\to s_i}\partial_{s_1}\partial_{s_2}\langle x_Q(s_1,u)\,x_Q(s_2,u)\rangle \; - e\langle A(\xi_i)\frac{\partial\, x_Q}{\partial s_i}(s_i,u)\rangle. \tag{6.70}$$

Il est facile de montrer que la moyenne suivante

$$\left\langle A(\xi)\right|_{\xi=\eta(x_{cl}(s_i)+x_Q(s_i,u))}\left.\frac{\partial x_Q(s_i,u)}{\partial s_i}\right\rangle = 0, \tag{6.71}$$

est nulle.

En tenant compte du résultat (5.110) nous obtenons

$$\begin{aligned} &\left\langle A(\xi)\right|_{\xi=\eta(x_{cl}(s_i)+x_Q(s_i,u))}\left.\frac{\partial x_Q(s_i,u)}{\partial s_i}\right\rangle \\ =\;& \lim_{s_1,s_2\longrightarrow s_i}\left\langle A(\eta x_{cl}(s_1))\frac{\partial x_Q(s_2,u)}{\partial s_2}\right\rangle \\ =\;& A(\eta x_{cl})\lim_{s_2\longrightarrow s_i}\frac{\partial}{\partial s_2}\langle x_Q(s_2,u)\rangle\,, \end{aligned} \tag{6.72}$$

Utilisons la propriété $\eta A = 0$, ainsi que la solution de l'équation de Langevin (6.24) pour x_Q et multiplions la par $A(\eta x_{cl})$, il vient

$$\begin{aligned} A(\eta x_{cl})\,y(s,u) &= A(\eta x_{cl})\,y_Q^{(0)}(s,u) \\ &\quad + iA(\eta x_{cl})\int_{s_a}^{s_b} ds'\int_{-\infty}^{+\infty} du' G^{(0)}(s,s';u-u') \\ &\quad \times\left[\ddot{x}_{cl}(s') + e\left.\frac{dA\;(x)}{d\zeta'}\right|_{\eta(x+y)}\eta\left(\dot{x}_{cl}+\dot{y}_Q^{(0)}(s',u')\right)\right], \end{aligned} \tag{6.73}$$

$$y_Q^{(0)}(s,u) = \int_{s_a}^{s_b} ds'\int_{-\infty}^{+\infty} du' G^{(0)}(s,s';u-u')\eta(s',u'), \tag{6.74}$$

étant la solution libre,

et

$$I = \; eA(\eta x_{cl})\;\; f_{\lambda\mu}\frac{dA}{d\xi_{cl}}.\dot{x}_{cl}(s')\;, \tag{6.75}$$

le deuxième terme (II) est représenté par l'expression suivante

$$II = eA\left(\eta x_{cl}\right)\left\langle \frac{dA}{d\xi'}\Big|_{\xi=\eta x_{cl}}\left(\eta.\dot{x}_{cl}(s')\right)\right\rangle. \tag{6.76}$$

Développons en série au voisinage du chemin classique $\frac{dA}{d\xi'}\Big|_{\eta(x_{cl}+y)}$

$$\begin{aligned} II &= eA\left(\eta x_{cl}\right)\left\langle \sum_n \frac{1}{n!}\left(\eta y(s',u)\right)^n \frac{d^{n+1}A}{d\xi^{n+1}}\Big|_{\xi=\eta x_{cl}}\left(\eta.\dot{x}_{cl}(s')\right)\right\rangle \\ &= eA\left(\eta x_{cl}\right)\left\langle \sum_n \frac{1}{n!}\left(\eta \dot{y}_Q^{(0)}(s',u)\right)^n \frac{d^{n+1}A}{d\xi^{n+1}}\Big|_{\xi=\eta x_{cl}}\left(\eta.\dot{x}_{cl}(s')\right)\right\rangle, \end{aligned} \tag{6.77}$$

Nous voyons que le premier terme de la série $(n = 0)$

$$II = eA\left(\eta x_{cl}\right)\frac{dA}{d\xi_{cl}}\left(\eta.\dot{x}_{cl}(s')\right), \tag{6.78}$$

le 2ème terme de la série (*pour* $n = 1$) s'annule aussi puisque on a

$$\left\langle \dot{y}_Q^{(0)}(s',u)\right\rangle = 0. \tag{6.79}$$

Pour le troisième terme $(n = 2)$, nous utilisons le même raisonnement en tenant compte de la propriété $\eta^2 = 0$. Le résultat est similaire, il est donné par

$$\begin{aligned} III &= eA\left(\eta x_{cl}\right)\left\langle \frac{dA}{d\xi'}\Big|_{\eta(x+y)} \eta.\dot{y}_Q^{(0)}(s',u')\right\rangle \\ &= eA\left(\eta x_{cl}\right)\left\langle \sum_n \frac{1}{n!}\left(\eta \dot{y}_Q^{(0)}(s',u)\right)^n \frac{d^{n+1}A}{d\xi^{n+1}}\Big|_{\xi=\eta x_{cl}}\left(\eta.\dot{y}_Q^{(0)}(s',u')\right)\right\rangle. \end{aligned} \tag{6.80}$$

Pour $n = 0$, le terme $(III = 0)$ est nul, puisque

$$\left\langle \dot{y}_Q^{(0)}(s',u)\right\rangle = 0. \tag{6.81}$$

Le 2ème terme (*pour* $n = 1$) de la série est aussi nul.

Utilisons la propriété $\eta^2 = 0$ au niveau des termes (I) , (II) et (III), nous obtenons (6.71)

$$\left\langle A\left(\xi\right)\right|_{\xi=\eta\left(x_{cl}\left(s_i\right)+x_Q\left(s_i,u\right)\right)} \frac{\partial x_Q(s_i,u)}{\partial s_i}\Big\rangle = 0. \tag{6.82}$$

Par conséquent

$$\langle L_Q(s_i,u)\rangle = -\frac{1}{2}\lim_{s_1,s_2\longrightarrow s_i}\frac{\partial}{\partial s_1}\frac{\partial}{\partial s_2}\left\langle x_Q(s_1,u)x_Q(s_2,u)\right\rangle . \tag{6.83}$$

Utilisons (5.68) l'équation de Langevin relative à l'impulsion en appliquant les conditions aux limites

$$\frac{\partial p_Q\left(s_i,u\right)}{\partial u} = i\ \left(\frac{\partial x_Q\left(s_i,u\right)}{\partial s_i}\ + \frac{\partial H_Q}{\partial p_Q\left(s_i,u\right)}\right) + \chi(s_i,u\ ), \tag{6.84}$$

et multiplions par $\left[\frac{\partial x_Q(s_i\ ,u)}{\partial s_i}\right]$ afin de revenir à l'espace de configuration

$$\begin{aligned}
&\langle\frac{\partial x_Q\left(s_i\ ,u\right)}{\partial s_i}\ \ \frac{\partial p_Q\ \left(s_i,u\right)}{\partial\ u}\ \rangle \\
=\ & \lim_{u\to\infty}\ \left[\langle\frac{\partial x_Q\left(s_i',u\right)}{\partial s_i}\ p_Q\left(s_i,u\right)\rangle +\ \langle\frac{\partial x_Q\left(s_i',u\right)}{\partial s_i}\ \frac{\partial x_Q\left(s_i,u\right)}{\partial s_i}\ \rangle\right] \\
&+\langle\frac{\partial x_Q\left(s_i,u\right)}{\partial s_i}\chi(s_i,u\ )\rangle.
\end{aligned} \tag{6.85}$$

Calculons alors l'expression suivante

$$\langle\frac{\partial x_Q\left(s_i\ ,u\right)}{\partial s_i}\ \ \frac{\partial p_Q\ \left(s_i,u\right)}{\partial\ u}\rangle\ = \lim_{s_1\to s_i}\partial_{s_1}\lim_{u_1,,u_2\to\infty}\partial_{u_2}\langle x_Q\left(s\ _1,u_1\right)p_Q\left(s_2,u_2\right)\rangle. \tag{6.86}$$

En utilisant l'équation (5.95) , $x_Q\left(s_i,u\right)$ est donné par l'expression suivante

$$\begin{aligned}
x_Q\left(s,u\right) &= \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\left(\overrightarrow{X}_Q^0\left(s,u\right) + \int_{s_i}^{s_f}ds'\int_{-\infty}^{+\infty}du'G\left(s,u\mid s',u'\right)\overrightarrow{w}\left(s',u'\right)\right) \\
&= \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\int_{s_i}^{s_f}ds'\int_{-\infty}^{+\infty}du'\ G\left(s,u\mid s',u'\right)\ \overrightarrow{V}.\ \left(s',u'\right) \\ \\ +\int_{s_i}^{s_f}ds'\int_{-\infty}^{+\infty}du'G\left(s,u\mid s',u'\right)\overrightarrow{w}\left(s',u'\right)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= & \int_{s_i}^{s_f} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' \ \{G_{11}(s,u \mid s',u')\,\varrho_\mu(s',u') + G_{12}(s,u \mid s',u')\,\chi_\mu(s',u') \\
& \times\chi_\mu(s',u') + G_{11}(s,u \mid s',u') \left[\dot{p}'_{cl} + \frac{1}{2}e^2\eta\frac{dA^{2\prime}}{d\xi} - e\eta\frac{dA'}{d\xi}.\left(p'_{cl}+p'_Q\right)\right] \\
& +eG_{12}(s,u \mid s',u')\left(A'_{\mu cl} - A'_\mu(\xi)\right)\}. \qquad (6.87)
\end{aligned}
$$

On calcule ainsi la moyenne suivante en insérant l'expression de l'impulsion (5.113)

$$
\begin{aligned}
& \lim_{u_1,u_2\to\infty} \langle \frac{\partial x(s_1,u_1)}{\partial s_1} \frac{\partial p_Q}{\partial u_2}(s_2,u_2)\rangle \\
= & \lim_{s_1\to s_i} \partial_{s_1} \lim_{u_1,u_2\to\infty} \partial_{u_2}\langle x^\mu(s_1,u_1)\,p_{\mu Q}(s_2,u_2)\rangle \\
= & \lim_{s_1\to s_i} \partial_{s_1} \lim_{u_1,u_2\to\infty} \partial_{u_2} \int_{s_i}^{s_f} ds'ds'' \int_{-\infty}^{+\infty} du'du'' \ \{G_{11}(s,u \mid s',u')\,\varrho^{\,\mu}(s',u') \\
& +G_{12}(s,u \mid s',u')\,\chi^{\,\mu}(s',u') \\
& +G_{11}(s,u \mid s',u') \left[\dot{p}'_{cl} + \frac{1}{2}e^2\eta\frac{dA^{2\prime}}{d\xi} - e\eta\frac{dA'}{d\xi}.\left(p'_{cl}+p'_Q\right)\right] \\
& +eG_{12}(s,u \mid s',u')\left(A'^{\mu}_{cl} - A'^{\mu}(\xi)\right)\} \\
& \times\Big\{ \Big[G_{21}\left(s',u' \mid s'',u''\right)\varrho_\mu\left(s'',u''\right) \\
& +G_{22}\left(s',u' \mid s'',u''\right)\chi_\mu(s'',u'') \\
& +G_{21}\left(s',u' \mid s'',u''\right)\left(\dot{p}''_{cl} + \frac{1}{2}e^2\eta\frac{dA^{2\prime\prime}}{d\xi} - e\eta\frac{dA''}{d\xi}.\left(p''_{cl}+p''_Q\right)\right) \\
& +eG_{22}\left(s',u' \mid s'',u''\right)\left(A''_{\mu cl} - A''_\mu(\xi)\right)\Big]\Big\}\rangle. \qquad (6.88)
\end{aligned}
$$

En utilisant les propriétés des bruits (5.63), $\langle A(\xi)\rangle = A(\xi_{cl})$ et en appliquant les conditions aux limites pour les éléments de la matrice de Green (5.86), (5.87), (5.88), et (5.89) , l'expression précédante s'annule, nous obtenons

$$
\lim_{s_1\to s_i} \partial_{s_1} \lim_{u_1,u_2\to\infty} \partial_{u_2}\langle x^\mu(s_1,u_1)\,p_{\mu Q}(s_2,u_2)\rangle = 0. \qquad (6.89)
$$

De même, avec les propriétés relatives aux bruits

$$
\begin{aligned}
\langle\frac{\partial x_Q(s_i,u)}{\partial s_i}\chi(s_i,u)\rangle &= \lim_{u\to\infty}\lim_{s_1\to s_2}\partial_{s_1}\langle x(s_1,u)\,\chi(s_2,u)\rangle \\
&= 0. \qquad (6.90)
\end{aligned}
$$

Dans notre cas relativiste, on insère ce dernier résultat et (6.83) dans l'équation (6.66) , la valeur moyenne de l'hamiltonien à l'instant s_i est donnée par l'expression suivante

$$\lim_{u\to\infty} < H_Q(s_i,u) >= \frac{1}{2}\lim_{s_1,s_2\to s_i}\frac{\partial}{\partial s_1}\frac{\partial}{\partial s_2}\lim_{u\to\infty} < y(s_1,u_1)\cdot y(s_2,u_2) > . \tag{6.91}$$

Finalement après avoir en inséré la fonction de corrélation à deux points (6.65) l'expression de la moyenne de l'hamiltonien est

$$\lim_{u\to\infty} < H_Q(s_i,u) >= -\frac{2i}{\lambda}. \tag{6.92}$$

Le propagateur relatif à notre problème est alors

$$\begin{aligned} K(x_f,x_i;\lambda) &= c\exp\left[iS_{cl}\right]\exp\left[-i\int_0^{s_i}\frac{2i}{\lambda}ds_i\right] \\ &= c\exp\left[iS_{cl}\right]\exp\left[-i\int_0^{s_i}\frac{2i}{\lambda}ds_i\right] \\ &= \frac{c}{\lambda^2}\exp\left[iS_{cl}\right]. \end{aligned} \tag{6.93}$$

Il reste à fixer la constante c.

Comme elle est indépendante de s_i et s_f, cette constante s'obtient en passant à la limite $\lambda \to 0$ (2.54)

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda\to 0} K(x_f,x_i;\lambda) &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{c}{\lambda^2}\exp\left[-i\frac{(x_f-x_i)^2}{2\lambda}\right] \\ &= \delta^4(x_f-x_i). \end{aligned} \tag{6.94}$$

Par comparaison, il est facile de voir que

$$c = \frac{i}{(2\pi)^2} . \tag{6.95}$$

Le propagateur après avoir inséré l'action classique (5.48) est finalement

$$
\begin{aligned}
K(x_f, x_i; \lambda) &= \frac{i}{(2\pi)^2}\frac{1}{\lambda^2}\exp\left\{-\frac{i\left(x_f - x_i\right)^2}{2\lambda}\right. \\
&\left. + \frac{ie^2\lambda}{2\left(\xi_f - \xi_i\right)^2}\left[\int_{\xi_i}^{\xi_f} d\xi' A\left(\xi'\right)\right]^2 - \frac{ie^2\ \lambda}{2\left(\xi_f - \xi_i\right)}\int_{\xi_i}^{\xi_f} d\xi' \left[A\left(\xi'\right)\right]^2\right\} \qquad (6.96)
\end{aligned}
$$

et l'expression de la fonction de Green (5.10) pour une particule relativiste soumise à l'action d'un champ d'une onde plane est donc [14]

$$
\begin{aligned}
\triangle(x_f, x_i) &= \frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2}\exp\left\{-\frac{im^2\lambda}{2} - \frac{i\left(x_f - x_i\right)^2}{2\lambda}\right. \\
&\quad + \frac{ie^2\lambda}{2\left(\xi_f - \xi_i\right)^2}\left[\int_{\xi_i}^{\xi_f} d\xi' A\left(\xi'\right)\right]^2 \\
&\quad \left. - \frac{ie^2\ \lambda}{2\left(\xi_f - \xi_i\right)}\int_{\xi_i}^{\xi_f} d\xi' \left[A\left(\xi'\right)\right]^2\right\}. \qquad (6.97)
\end{aligned}
$$

6.1.5 Conclusion

Nous avons, dans ce chapitre considéré une nouvelle fois le problème de l'onde plane dans la même jauge de coordonnées et l'avons solutionné de manière analytique et exacte dans l'espace de configuration par le formalisme stochastique de Parisi-Wu.

Nous avons fait le calcul en deux étapes. D'abord nous avons trouvé la même action classique. Ensuite grâce à l'espace de configurations, nous avons utilisé une seule équation de Langevin au lieu de deux pour l'espace des phases et les calculs ont été grandement simplifiés.

La détermination de la fonction de Green a pu être ainsi mené jusqu'au bout grâce principalement aux propriétés de l'onde plane. Le calcul itératif et perturbatif a permis d'obtenir la fonction de Green sous forme compacte et notre résultat par cette approche est comparable à celui obtenu par l'approche des intégrales de chemins.

Chapitre 7

Conclusion Générale

Dans ce travail, nous avons calculé pour une particule relativiste, sans spin et soumise à l'action du champ d'une onde plane, la fonction de Green dans l'approche stochastique de Parisi-Wu.

Nous avons principalement utilisé les équations de Langevin au lieu des équations de Fokker-Planck. Les calculs ont été effectués en séparant la partie classique de la partie qui contient les termes fluctuants dans les espaces des phases et des coordonnées.

Grâce surtout aux propriétés de l'onde plane qui ont permis de limiter le nombre de termes dans les itérations et aussi dans la série de perturbation, nous avons réussi à mener les calculs jusqu'au bout.

Dans les deux espaces, la fonction de Green obtenue par cette nouvelle approche est exactement la même que celle obtenue suivant l'approche des intégrales de chemins.

Nous pouvons affirmer, malgré le handicap de la longueur des calculs, que cette nouvelle approche a été concluante pour ce problème non quadratique.

Nous devons donc poursuivre ce qui a été entamé pour entrevoir ses possibilités ou ses limites.

Bibliographie

[1] G. Parisi and Y.-S. Wu, Sci. Sin. 24 (1981) 483

[2] M. Namiki, "Stochastic Quantization" (Springer, 1992)

[3] P.H. Damgaard and H.Hüffel "Stochastic Quantization " (World Scientific Publishing Co. Pte ;Ltd, 1988)

[4] H. Hüffel and P. H. Nakazato , Mod. Phys. Lett. A9 (1994), 2953

[5] K. Yuosa and H. Nakazato, Wu. Hep (1996), 12

[6] A. N. Vaidya and C. Farina De Souza, Nuovo Cimento B101 (1988) 69

[7] A. Vaidya, C. Farina and M. Hott, Nuovo. Cimento A,105 (1992) 925

[8] J. Schwinger, Phys. Rev. 82 (1951) 664

[9] T. Boudjedaa, L. Chetouani, L. Guechi and T. F. Hammann, Nuovo Cimento. Vol B109 (1994) 219

[10] C. Cronsrtom, Phys. Lett. B90 (1980) 267

[11] Schulmann, L. S, " Techniques and Applications of Path Integration" (Willey, New York1981)

[12] R. Feynman and A. Hibbs, "Quantum Mechanics and Path Integrals" (MAC Graw Hill, New York, 1965)

[13] I.S.Gradshteyn and I.M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products, Academic Press, NewYork, 1979

[14] Z. Lehtihet, L. Chetouani, Eur. Phys. J. C 42 (2OO5)243.