

x

NS

1413

physique

THESE PRESENTEE A L'UNIVERSITE DE PROVENCE (AIX-MARSEILLE I)  
en vue de l'obtention du DOCTORAT de SPECIALITE en ACOUSTIQUE

NADJI/1108

par

Arjang NADJI

*"APPLICATION A UN CALCUL DE FREQUENCES PROPRES D'UNE METHODE APPROCHEE  
DE RESOLUTION DES PROBLEMES AUX LIMITES EN MILIEUX NON HOMOGENES"*

Soutenu le 13 juin 1975 devant la Commission d'Examen

MM. P.CASAL

Président

R. BOUDET

P. FILIPPI

Examineurs

ECHANGES



THESE PRESENTEE A L'UNIVERSITE DE PROVENCE (AIX-MARSEILLE I)  
en vue de l'obtention du DOCTORAT de SPECIALITE en ACOUSTIQUE

NAD/M08

par

Arjang NADJI

*"APPLICATION A UN CALCUL DE FREQUENCES PROPRES D'UNE METHODE APPROCHEE  
DE RESOLUTION DES PROBLEMES AUX LIMITES EN MILIEUX NON HOMOGENES"*

Soutenue le 13 juin 1975 devant la Commission d'Examen

MM. P.CASAL

Président

R. BOUDET

P. FILIPPI

Examineurs

*Ce travail a été effectué à Marseille au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique du Centre National de la Recherche Scientifique. Je remercie M. B.NAYROLES, Directeur du L.M.A. de m'avoir reçu dans son Laboratoire.*

*Je tiens à exprimer ma gratitude à MM. P.CASAL et R.BOUDET, Professeurs à l'Université de Provence, qui ont accepté de juger mon travail.*

*Que M. P.FILIPPI trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance pour le soutien qu'il m'a apporté au cours de mes recherches et pour l'aide donnée pour résoudre les difficultés que j'ai rencontrées en tant qu'étranger.*

*Je remercie M. G.DELARUOTTE pour son aide précieuse au cours de la mise au point des expériences ; M. J.MEGE qui s'est chargé avec beaucoup de soin de la réalisation des montages ; ainsi que Mme CATTIAUX qui a effectué la dactylographie de ce mémoire.*

- T A B L E D E S M A T I E R E S -

-----

	<u>Page</u>
<u>Chapitre I : MISE EN EQUATION DU PHENOMENE DE PROPAGATION</u> <u>D'ONDES DANS UN PAVILLON -</u>	5
I.1.- Enoncé du problème.	6
I.2.- Forme sesquilinéaire de l'équation des ondes pour un pavillon de section variable.	6
a) Hypothèse de départ.	7
b) Principe de conservation de l'énergie.	7
c) Développement en série de la solution de (I.6)	8
I.3.- Série représentative de la solution d'une équation aux dérivées partielles à coefficients variables.	12
I.4.- Solution de l'équation $\mathfrak{B}(u, v) = (f, v)$ .	13
a) Symétrie des fonctions de Green.	13
b) Equations intégrales.	15
c) Expression stationnaire.	16
d) Suites de fonctions associées à une base de $L^2(\omega)$ .	17
e) Approximations et expression de $\mathcal{Q}_s(\Sigma) - \Gamma_s(\Sigma)$ .	18
f) Solution explicite des systèmes (I.34) et représentation de $\mathcal{Q}_s(\Sigma) - \Gamma_s(\Sigma)$ sous la forme d'une série.	20
<u>Chapitre II : CALCUL APPROCHE DES FREQUENCES PROPRES D'UN</u> <u>PAVILLON -</u>	22
II.1.- Pavillon de section variant linéairement.	23
II.1.1.- Mise en équation du problème.	23
II.1.2.- Calcul de $\mathcal{Q}_s(x)$ .	26
II.1.3.- Fréquences propres.	31
II.1.4.- Application de la formule (II.27).	40
II.1.5.- Solution classique du pavillon de section variant linéairement (BREKHOVSKIKH {5}).	41
II.1.6.- Solution asymptotique.	42
II.1.7.- Fréquences propres.	43

	<u>Page</u>
II.2.- Pavillon à section variant exponentiellement.	45
II.2.1.- Fréquences propres.	48
II.2.2.- Solution classique.	50
<u>Chapitre III : VERIFICATION EXPERIMENTALE -</u>	51
Tableau I	55
Tableau II	56
Tableau III	57
Tableau IV	58
<u>Chapitre IV : CONCLUSION -</u>	59
IV.1.- Pavillon de section variant linéairement.	60
IV.2.- Pavillon de section variant exponentiellement.	62
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	64
<b>ANNEXE I</b>	66
<b>ANNEXE II</b>	71
<b>ANNEXE III</b>	77



C H A P I T R E      I

-----

MISE EN EQUATION DU PHENOMENE DE PROPAGATION D'ONDES DANS UN PAVILLON

-----

C H A P I T R E        I

-----

MISE EN EQUATION DU PHENOMENE DE PROPAGATION D'ONDES DANS UN PAVILLON

-----

I.1.- ENONCE DU PROBLEME -

-----

On se propose d'étudier la propagation d'une onde acoustique dans un pavillon de section variable.

L'analyse de la propagation des ondes acoustiques dans un pavillon est un problème très complexe, que l'on ne peut traiter rigoureusement que pour certaines configurations géométriques particulières. Des techniques classiques de perturbation des frontières permettent encore de traiter des cas voisins de ceux-ci, mais ne permettent pas d'obtenir des solutions pour des profils quelconques de frontière. Une méthode récemment développée par P.FILIPPI {1} et complétée par G.TAVERA {2} permet de traiter le problème dans toute sa généralité. Nous nous proposons ici de la tester sur le calcul des fréquences propres d'un tuyau de section variant linéairement ou exponentiellement ; on compare les prévisions fournies par la théorie citée à l'expérience et à la solution analytique du problème.

I.2.- FORME SESQUILINEAIRE DE L'EQUATION DES ONDES POUR UN PAVILLON DE SECTION

-----

VARIABLE -

-----

Pour chercher une telle équation, on utilise une méthode de perturbation proposée par MM.PEUBE et CHASSERIAUX {3}. Elle consiste à développer la solution d'une équation en série des puissances successives d'un paramètre. Le premier terme de ce développement fournit précisément une équation linéaire unidimensionnelle qui décrit approximativement la propagation des ondes acoustiques dans un pavillon de section lentement variable.

Contrairement aux auteurs cités en {3}, nous partons du principe de conservation de l'énergie (principe de Hamilton) et non des équations aux dérivées partielles.

a.- Hypothèse de départ -

---

On considère un fluide parfait compressible dans un pavillon de section lentement variable et on fait les hypothèses suivantes :

1) Seule existe une onde longitudinale ;  $\lambda$  désigne une longueur d'onde de référence qui caractérise les distances axiales sur lesquelles la variation des quantités acoustiques sont importantes.

2)  $\lambda$  est grand vis à vis des dimensions transversales de la section du pavillon.

3) Le flux est continu (il n'y a pas d'onde de choc).

4) Le flux est isentropique.

b.- Principe de conservation de l'énergie -

---

Si on définit le potentiel des vitesses  $\varphi$  par la relation :

$$(I.1) \quad \vec{V} = - \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$$

on aura :

$$(I.2) \quad p = \rho \dot{\varphi}$$

$p$  est la pression acoustique et  $\rho$  est la masse volumique du fluide. Alors l'énergie totale contenue dans un domaine  $\Omega$  de frontière  $\Sigma$  a pour expression :

$$(I.3) \quad E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \rho \frac{\dot{\varphi}^2}{c^2} + \rho (\overrightarrow{\text{grad}} \varphi)^2 \right] d\Omega$$

Sa variation pendant un temps  $\delta t$  est :

$$(I.4) \quad \delta E = \int_{\Omega} \rho \left[ \frac{1}{c^2} \dot{\varphi} \delta \varphi + \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \delta \varphi \right] d\Omega$$

Cette variation d'énergie est due à la présence de source  $f$  et aux pertes d'énergie par la frontière  $\Sigma$  ; on a donc l'égalité suivante :

$$I.5) \quad \int_{\Omega} \rho \left[ \frac{1}{c^2} \ddot{\varphi} \delta\varphi + \vec{\text{grad}}\varphi \cdot \vec{\text{grad}}\delta\varphi \right] d\Omega = \int_{\Omega} \rho f \delta\varphi d\Omega + \int_{\Sigma} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \delta\varphi d\Sigma$$

Mais si on suppose qu'il y a conservation de l'énergie, l'intégrale sur  $\Sigma$  sera nulle et on obtient :

$$I.6) \quad \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{c^2} \ddot{\varphi} \delta\varphi + \vec{\text{grad}}\varphi \cdot \vec{\text{grad}}\delta\varphi \right] d\Omega = \int_{\Omega} f \delta\varphi d\Omega$$

qui est l'expression de conservation de l'énergie.

c.- Développement en série de la solution de (I.6) -

Il est bon tout d'abord d'écrire cette équation en faisant apparaître des quantités sans dimension. Pour cela il faut d'abord transformer les coordonnées  $(x, y, z)$  en coordonnées réduites. Si on exprime  $(x, y)$  par rapport à une longueur  $D$  caractérisant les dimensions géométriques de la section transversale et  $z$  par rapport à  $\lambda$  ( $\lambda$  représente en régime harmonique, la longueur d'onde), il apparaîtra le paramètre  $(\frac{D}{\lambda})^2$  ; celui-ci étant choisi petit par hypothèse, il est naturel de chercher la solution de l'équation (I.6) sous forme d'un développement en série des puissances de  $\frac{D^2}{\lambda^2}$  :

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{D}{\lambda}\right)^{2p} \varphi_p(x, y, z, t)$$

Pour écrire l'équation (I.6) sous une forme sans dimension, supposons que  $\varphi_0$  représente un potentiel de référence.

On peut définir des quantités réduites suivantes :

$$\varphi^* = \frac{\varphi}{\phi_0} \quad , \quad x^* = \frac{x}{\lambda} \quad , \quad y^* = \frac{y}{D} \quad , \quad z^* = \frac{z}{D} \quad , \quad t^* = t \frac{c}{\lambda}$$

et

$$f^* = f \frac{\lambda^2}{\phi_0}$$

L'équation (I.6) devient alors :

$$(I.7) \quad \int_{\hat{\Omega}} \left[ \frac{1}{\lambda^2} (\ddot{\varphi} \delta \dot{\varphi} + \partial_x \dot{\varphi} \partial_x \delta \dot{\varphi}) + \frac{1}{D^2} (\vec{\text{grad}}_2 \dot{\varphi} \cdot \vec{\text{grad}}_2 \delta \dot{\varphi}) \right] d\hat{\Omega} \\ = \int_{\hat{\Omega}} \frac{f^*}{\lambda^2} \delta \dot{\varphi} d\hat{\Omega}$$

\*  
 $\hat{\Omega}$  représente un domaine sans dimension et

$$\vec{\text{grad}}_2 = \frac{\partial}{\partial y^*} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z^*} \vec{k}$$

Si on multiplie l'équation (I.7) par  $D^2$  il vient :

$$(I.8) \quad \int_{\hat{\Omega}} \left[ \frac{D^2}{\lambda^2} (\ddot{\varphi} \delta \dot{\varphi} + \partial_x \dot{\varphi} \partial_x \delta \dot{\varphi}) + (\vec{\text{grad}}_2 \dot{\varphi} \cdot \vec{\text{grad}}_2 \delta \dot{\varphi}) \right] d\hat{\Omega} \\ = \int_{\hat{\Omega}} \frac{D^2}{\lambda^2} f^* \delta \dot{\varphi} d\hat{\Omega}$$

On a :

$$(I.9) \quad \varphi^*(\vec{P}, t^*) = \sum_{h=0}^{\infty} \left( \frac{D^2}{\lambda^2} \right)^h \varphi_h^*(\vec{P}, t^*)$$

Si on développe également  $f^*$  en série :

$$(I.10) \quad f^* = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{D^2}{\lambda^2}\right)^p f_p^*$$

en portant ces deux développements dans la formule (I.8), on trouve :

$$(I.11) \quad \int_{\Omega^*} \left\{ \sum_{p_1=0}^{\infty} \sum_{p_2=0}^{\infty} \left(\frac{D^2}{\lambda^2}\right)^{1+p_1+p_2} \left[ \ddot{\varphi}_{p_1}^* \delta \varphi_{p_2}^* + \partial_x^2 \varphi_{p_1}^* \partial_x^2 \delta \varphi_{p_2}^* \right] \right. \\ \left. + \sum_{p_1=0}^{\infty} \sum_{p_2=0}^{\infty} \left(\frac{D^2}{\lambda^2}\right)^{p_1+p_2} \vec{\text{grad}}_z \varphi_{p_1}^* \cdot \vec{\text{grad}}_z \delta \varphi_{p_2}^* \right\} d\Omega^* \\ = \int_{\Omega^*} \left(\frac{D^2}{\lambda^2}\right)^{1+p_1+p_2} f_{p_1}^* \delta \varphi_{p_2}^* d\Omega^*$$

En identifiant les coefficients de chaque terme  $\left(\frac{D^2}{\lambda^2}\right)^p$  on trouve :

$$(I.12) \quad p = p_1 + p_2 = 0 \Rightarrow \int_{\Omega^*} \vec{\text{grad}}_z \varphi_0^* \cdot \vec{\text{grad}}_z \delta \varphi_0^* d\Omega^* = 0$$

$$(I.13) \quad p = p_1 + p_2 = 1 \Rightarrow \int_{\Omega^*} \left[ \vec{\text{grad}}_z \varphi_0^* \cdot \vec{\text{grad}}_z \delta \varphi_1^* + \vec{\text{grad}}_z \varphi_1^* \cdot \vec{\text{grad}}_z \delta \varphi_0^* \right] d\Omega^* \\ + \int_{\Omega^*} \left[ \ddot{\varphi}_0^* \delta \varphi_0^* + \partial_x^2 \varphi_0^* \partial_x^2 \delta \varphi_0^* \right] d\Omega^* = \int_{\Omega^*} \delta \varphi_0^* f_0^* d\Omega^*$$

et ainsi de suite. Nous nous intéresserons aux deux premiers termes du développement.

L'équation (I.12) a pour solution  $\varphi_0^*$  une fonction indépendante de  $y$  et  $z$  en raison des conditions aux limites vérifiées (Solomon (4)).

Comme  $\varphi_0^*(x, t)$  ne dépend pas de  $y$  et  $z$ , l'équation (I.13) donne :

$$(I.14) \quad \int_{\dot{\Omega}} \left[ \ddot{\varphi}_0^* \delta \varphi_0^* + \partial_x \dot{\varphi}_0^* \partial_x \delta \varphi_0^* \right] d\dot{\Omega} = \int_{\dot{\Omega}} \delta \varphi_0^* f_0^* d\dot{\Omega}$$

Soit, en revenant aux fonctions inconnues de départ :

$$(I.15) \quad \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{c^2} \ddot{\varphi}_0 \delta \varphi_0 + \partial_x \dot{\varphi}_0 \partial_x \delta \varphi_0 \right] d\Omega = \int_{\Omega} \delta \varphi_0 f_0 d\Omega$$

Comme  $\varphi_0$  ne dépend pas de  $y$  et  $z$ , l'intégration en  $y$  et  $z$  est triviale et donne :

$$(I.16) \quad \int_x A(x) \left[ \frac{1}{c^2} \ddot{\varphi}_0 \delta \varphi_0 + \partial_x \dot{\varphi}_0 \partial_x \delta \varphi_0 \right] dx = \int_x A(x) \delta \varphi_0 f_0 dx$$

où  $A(x)$  est l'aire de la section droite du pavillon.

L'équation (I.16) fournit la forme sesquilinéaire attachée à l'équation des ondes unidimensionnelle pour un pavillon de section variable :

$$(I.17) \quad \int A(x) \left[ \frac{1}{c^2} \ddot{\varphi}_0 \bar{\Phi} + \partial_x \dot{\varphi}_0 \partial_x \bar{\Phi} \right] dx = \int A(x) f_0 \bar{\Phi} dx$$

$\bar{\Phi}$  = imaginaire conjugué de  $\Phi$ .

Pour un régime harmonique ( $f_0 = F e^{-i\omega t}$ ,  $\varphi_0 = \Psi e^{-i\omega t}$ ) on a à résoudre :

$$(I.18) \quad \int_x A(x) \left[ -k^2 \Psi \bar{\Phi} + \partial_x \Psi \partial_x \bar{\Phi} \right] dx = \int_x A(x) F \bar{\Phi} dx$$

d'où

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Les fonctions  $\psi$ ,  $\phi$  et  $F$  doivent appartenir à des espaces fonctionnels convenablement choisis ;  $A(x)$  doit être suffisamment régulière pour que les intégrales figurant dans (I.18) aient un sens ; on peut supposer  $A(x)$  continu par morceaux.

### I.3.- SERIE REPRESENTATIVE DE LA SOLUTION D'UNE EQUATION AUX DERIVEES PARTIELLES

#### ----- A COEFFICIENTS VARIABLES - -----

L'équation (I.18) est un cas très particulier de l'équation qui régit la propagation des ondes dans un milieu hétérogène. Examinons tout d'abord le cas général.

Dans de nombreux problèmes la conservation de l'énergie conduit à une équation fonctionnelle de la forme :

$$(I.19) \quad \mathcal{B}(u, v) = (f, v)$$

$$\text{où} \quad \mathcal{B}(u, v) = \sum_{\mathfrak{r}=0}^m \int_{\Omega} \alpha_{\mathfrak{r}}(x) D^{\mathfrak{r}} u D^{\mathfrak{r}} \bar{v} dx$$

$$\text{et} \quad D^{\mathfrak{r}} = \frac{\partial^{\mathfrak{r}}}{\partial x_i^{\beta_i}} \quad \text{avec} \quad \sum \beta_i = \mathfrak{r}$$

$(f, v)$  = produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$ , ( $L^2$  étant l'espace de Hilbert sur  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ).

Si  $f$  est une source appartenant à  $L^2(\Omega)$ , on cherche  $u$  dans un espace Hilbertien  $V(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ , vérifiant (I.19) quel que soit  $v \in V(\Omega)$ . On voit bien que l'équation (I.18) correspond à  $m = 1$ .

Nous allons résumer ici les résultats de P.FILIPPI (1). Le principe des calculs est basé sur la comparaison entre la solution cherchée et celle d'un problème de même type que l'on sait résoudre. La différence entre ces deux solutions s'exprime par une série. L'existence et l'unicité de ces solutions est supposée acquise.

I.4. - SOLUTION DE L'EQUATION  $\mathcal{B}(u, v) = (f, v)$  -

---

On définit la forme sesquilinéaire suivante :

$$(I.20) \quad \mathcal{B}^0(u, v) = \sum_{r=0}^m \int_{\Omega} a_r^0 D^r u D^r \bar{v} dx$$

qui correspond pour  $m = 1$  à un pavillon de section constante. D'après cette forme et la forme (I.19), on définit deux fonctions de Green de l'espace indéfini de la façon suivante :

$$(I.21) \quad \mathcal{B} \left[ \mathcal{G}_s(x), \bar{v}(x) \right] = v(s)$$

et avec  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$(I.22) \quad \mathcal{B}^0 \left[ \Gamma_s(x), \bar{v}(x) \right] = v(s)$$

( $\mathcal{D}(\Omega)$  = espace des fonctions  $C^\infty$  à support compact).

L'unicité de ces fonctions est assurée par une condition de Sommerfeld. On suppose que ces deux milieux différent sur un domaine  $\omega$ , c'est-à-dire :

$$a^r(x) - a_0^r = 0 \quad \forall x \in \omega$$

Si on suppose que  $\Gamma_s(x)$  est connue, on veut trouver  $\mathcal{G}_s(x)$  en passant par les étapes suivantes :

a) Symétrie des fonctions de Green :

---

On peut vérifier l'égalité suivante :

$$\mathcal{B}_s \left[ u(s), \bar{v}(s) \right] = \mathcal{B}_x \left[ u(x), \bar{v}(x) \right]$$

si on pose :

$$u(s) = \mathfrak{B}_x [\mathcal{G}_s(x), \bar{u}(x)]$$

et

$$u(x) = \mathfrak{B}_s [\mathcal{G}_x(s), \bar{u}(s)]$$

Dans l'égalité ci-dessus, on a :

$$(I.23) \quad \mathfrak{B}_s [\mathfrak{B}_x [\mathcal{G}_s(x), \bar{u}(x)], \bar{v}(x)] = \mathfrak{B}_x [\mathfrak{B}_s [\mathcal{G}_x(s), \bar{u}(s)], \bar{v}(x)]$$

D'autre part, l'équation  $\mathfrak{B}(u, v)$  nous donne l'égalité suivante :

$$(I.24) \quad \mathfrak{B}_x [\mathfrak{B}_s [\mathcal{G}_x(s), \bar{u}(s)], \bar{v}(x)] = \mathfrak{B}_s [\mathfrak{B}_x [\mathcal{G}_s(x), \bar{v}(s)], \bar{u}(x)]$$

En utilisant cette égalité, d'après l'expression (I.23) on a :

$$\mathfrak{B}_s [\mathfrak{B}_x [\mathcal{G}_s(x), \bar{u}(x)], \bar{v}(s)] = \mathfrak{B}_x [\mathfrak{B}_s [\mathcal{G}_x(x), \bar{v}(s)], \bar{u}(x)]$$

$$\Rightarrow \mathfrak{B}_s [u(s), \bar{v}(s)] = \mathfrak{B}_x [u(x), \bar{v}(x)] = \mathfrak{B}_x [u(x), \overline{\mathfrak{B}_s [\mathcal{G}_s(x), \bar{v}(s)]}]$$

$$\Rightarrow v(x) = \mathfrak{B}_s [\mathcal{G}_s(x), \bar{v}(s)]$$

Or, on sait par ailleurs, que :

$$v(x) = \mathfrak{B}_s [\mathcal{G}_x(s), \bar{v}(s)]$$

donc :

$$(I.25) \quad \mathcal{G}_s(x) = \mathcal{G}_x(s)$$

Les fonctions de Green sont donc symétriques.

b) Equations intégrales :

On définit une autre forme sesquilinéaire de la façon suivante :

$$\tilde{\mathfrak{B}}(u, v) = \mathfrak{B}(u, v) - \mathfrak{B}^{\circ}(u, v)$$

c'est-à-dire :

$$\tilde{\mathfrak{B}}(u, v) = \sum_{t=0}^m \int_{\omega} \tilde{a}_t(x) D^t u D^t \bar{v} dx$$

où

$$\tilde{a}_t(x) = a_t(x) - a_t^{\circ}(x)$$

dont  $\omega$  est le support.

D'après les équations (I.21) et (I.22), on a :

$$\tilde{\mathfrak{B}}_x^{\circ}[\mathfrak{G}_s(x), \bar{v}(x)] + \mathfrak{B}_x^{\circ}[\mathfrak{G}_s(x), \bar{v}(x)] = \mathfrak{B}_x^{\circ}[\Gamma_s(x), \bar{v}(x)]$$

d'où :

$$\tilde{\mathfrak{B}}_x^{\circ}[\mathfrak{G}_s(x) - \Gamma_s(x), \bar{v}(x)] = -\tilde{\mathfrak{B}}_x^{\circ}[\mathfrak{G}_s(x), \bar{v}(x)]$$

En portant l'expression de  $\bar{v}(x)$  donnée par (I.22) on obtient :

$$\tilde{\mathfrak{B}}_x^{\circ}[\mathfrak{G}_s(x) - \Gamma_s(x), \bar{v}(x)] = -\tilde{\mathfrak{B}}_x^{\circ}[\mathfrak{G}_s(x), \overline{\mathfrak{B}_t^{\circ}[\Gamma_s(t), \bar{v}(t)]}]$$

Ceci peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{B}}_x^{\circ}[\mathfrak{G}_s(x) - \Gamma_s(x), \bar{v}(x)] &= -\mathfrak{B}_t^{\circ}[\tilde{\mathfrak{B}}_x^{\circ}[\Gamma_s(t), \mathfrak{G}_s(t)], \bar{v}(t)] \\ &= \mathfrak{B}_t^{\circ}[\mathfrak{G}_s(t) - \Gamma_s(t), \bar{v}(t)] \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$(I.26) \quad \mathcal{G}_s(t) - \Gamma_s(t) = - \tilde{\mathfrak{F}}_x [\Gamma_x(t), \overline{\mathcal{G}}_s(x)]$$

qui est une équation intégrale où la fonction  $\mathcal{G}_s(t)$  de la variable  $t$  est l'inconnue.

Ainsi d'après cette égalité :

$$\tilde{\mathfrak{F}}_x [\Gamma_s(x), \overline{v}(x)] - \tilde{\mathfrak{F}}_x [\Gamma_s(x), \overline{v}(x)] = \tilde{\mathfrak{F}}_x [\mathcal{G}_s(x), \overline{v}(x)]$$

on a :

$$\tilde{\mathfrak{F}}_x [\mathcal{G}_s(x) - \Gamma_s(x), \overline{v}(x)] = - \tilde{\mathfrak{F}}_x [\Gamma_s(x), \overline{v}(x)]$$

et on aboutit à une équation intégrale :

$$(I.27) \quad \mathcal{G}_s(x) - \Gamma_s(x) = - \tilde{\mathfrak{F}}_t [\Gamma_s(t), \overline{\mathcal{G}}_t(x)]$$

dans laquelle la fonction  $\Gamma_s(x)$  de la variable  $x$  est l'inconnue.

c) Expression stationnaire :

En appliquant à l'égalité suivante :

$$\mathcal{G}_x(\Sigma) - \Gamma_x(\Sigma) + \tilde{\mathfrak{F}}_t [\mathcal{G}_x(t), \overline{\Gamma}_t(\Sigma)] = 0$$

l'opérateur  $\tilde{\mathfrak{F}}_x [\cdot, \overline{\Gamma}_s(x)]$  , il vient :

$$\tilde{\mathfrak{F}}_x [\mathcal{G}_x(\Sigma), \overline{\Gamma}_s(x)] - \tilde{\mathfrak{F}}_x [\Gamma_x(\Sigma), \overline{\Gamma}_s(x)] + \tilde{\mathfrak{F}}_x [\tilde{\mathfrak{F}}_t [\mathcal{G}_x(t), \overline{\Gamma}_t(\Sigma)], \overline{\Gamma}_s(x)] = 0$$

et si on ajoute cette expression à l'équation (I.26) on trouve :

$$(I.28) \quad \mathcal{G}_s(\Sigma) - \Gamma_s(\Sigma) = - \tilde{\mathfrak{F}}_t [\mathcal{G}_s(t), \overline{\Gamma}_t(\Sigma)] - \tilde{\mathfrak{F}}_x [\mathcal{G}_x(\Sigma), \overline{\Gamma}_s(x)] \\ + \tilde{\mathfrak{F}}_x [\Gamma_x(\Sigma), \overline{\Gamma}_s(x)] - \tilde{\mathfrak{F}}_x [\tilde{\mathfrak{F}}_t [\mathcal{G}_x(t), \overline{\Gamma}_t(\Sigma)], \overline{\Gamma}_s(x)]$$

qui est une expression stationnaire par rapport à  $\Gamma_t(\Sigma)$  et  $\Gamma_s(x)$ .

En effet si on dérive par rapport à  $\Gamma_s(x)$  on obtient une quantité nulle :

$$-\mathcal{G}_x(\Sigma) + \Gamma_x(\Sigma) - \tilde{\mathcal{B}}_t[\mathcal{G}_x(t), \bar{\Gamma}_t(\Sigma)]$$

et en dérivant par rapport à  $\Gamma_t(\Sigma)$  :

$$-\mathcal{G}_s(t) + \Gamma_s(t) - \tilde{\mathcal{B}}_x[\mathcal{G}_s(t), \bar{\Gamma}_s(x)]$$

qui est aussi une quantité nulle.

d) Suites de fonctions associées à une base de  $L^2(\omega)$  :

Soit  $\{\varphi_n\}$  une base de  $L^2(\omega)$ .

On définit  $\hat{\Psi}_n(x)$  de la façon suivante :

$$(I.29) \quad \hat{\Psi}_m(x) = \tilde{\mathcal{B}}_t[\Gamma_t(x), \bar{\varphi}_m(t)]$$

La relation

$$(I.30) \quad \Psi_m(x) = \varphi_m(x) + \hat{\Psi}_m(x) \quad x \in \omega$$

définit une suite de fonction  $\Psi_n(x)$ . D'autre part, on peut démontrer l'égalité suivante :

$$(I.31) \quad \hat{\Psi}_m(x) = \tilde{\mathcal{B}}_t[\Gamma_t(x), \bar{\varphi}_m(t)] = \tilde{\mathcal{B}}_t[\mathcal{G}_t(x), \bar{\Psi}_m(t)]$$

D'après cette égalité la fonction  $\hat{\Psi}_n(x)$  peut être considérée comme le rayonnement d'une source  $\varphi_n(t)$  dans le milieu de référence ou comme celui d'une source  $\Psi_n(t)$  dans l'autre milieu. C'est-à-dire que l'on peut exprimer le rayonnement de  $\Gamma_t(x)$  à partir de celui de  $\mathcal{G}_t(x)$ , c'est le point important de la méthode.

e) Approximations et expression de  $\mathcal{G}_s(\Sigma) - \Gamma_s(\Sigma)$  :

L'étape suivante consiste à appliquer une méthode de Ritz-Galerkin pour trouver un système algébrique linéaire, dont la solution permet d'obtenir une représentation approximative de  $\mathcal{G}_s(\Sigma) - \Gamma_s(\Sigma)$ .

On développe  $\Gamma_s(x)$  et  $\Gamma_x(\Sigma)$  en série de  $\psi_n(x)$  sous la forme :

$$(I.32) \quad \begin{cases} \Gamma_s(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_s^j \psi_j(x) \\ \Gamma_x(\Sigma) = \sum_{j=0}^{\infty} b_x^j \psi_j(x) \end{cases}$$

En introduisant ceci dans l'expression stationnaire (I.28) il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_s(\Sigma) - \Gamma_s(\Sigma) &= \sum_{j=0}^{\infty} b_s^j \tilde{\mathcal{G}}_t[\mathcal{G}_s(t), \bar{\psi}_j(t)] - \sum_{j=0}^{\infty} b_x^j \tilde{\mathcal{G}}_x[\mathcal{G}_x(\Sigma), \bar{\psi}_j(x)] \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} b_x^j b_s^i \tilde{\mathcal{G}}_x[\psi_j(x), \bar{\psi}_i(x)] - \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} b_x^j b_s^i \tilde{\mathcal{G}}_x[\tilde{\mathcal{G}}_t[\mathcal{G}_x(t), \bar{\psi}_j(t)], \bar{\psi}_i(x)] \end{aligned}$$

En vertu de la symétrie de  $\mathcal{G}_s(x)$  ( $\mathcal{G}_s(t) = \mathcal{G}_t(s)$ ) cette expression peut s'écrire :

(I.33)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_s(\Sigma) - \Gamma_s(\Sigma) &= - \sum_{j=0}^{\infty} b_x^j \hat{\psi}_j(s) - \sum_{j=0}^{\infty} b_s^j \hat{\psi}_j(\Sigma) \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} b_x^j b_s^i \tilde{\mathcal{G}}_x[\psi_j(x), \bar{\psi}_i(x)] - \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} b_x^j b_s^i \tilde{\mathcal{G}}_x[\hat{\psi}_j(x), \bar{\psi}_i(x)] \\ &= - \sum_{j=0}^{\infty} b_x^j \hat{\psi}_j(s) - \sum_{j=0}^{\infty} b_s^j \hat{\psi}_j(\Sigma) + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} b_x^j b_s^i \tilde{\mathcal{G}}_x[\psi_j(x) - \hat{\psi}_j(x), \bar{\psi}_i(x)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Phi_s(\Sigma) = \mathcal{G}_s(\Sigma) - \Gamma_s(\Sigma) &= - \sum_{j=0}^{\infty} b_x^j \hat{\psi}_j(s) - \sum_{i=0}^{\infty} b_s^i \hat{\psi}_i(\Sigma) \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} b_x^j b_s^i \tilde{\mathcal{G}}_x[\psi_j(x), \bar{\psi}_i(x)] \end{aligned}$$

La méthode de Ritz-Galerkin consiste à tronquer la série (I.33) à l'ordre N et à utiliser la propriété de stationnarité par rapport aux  $b_{\Sigma}^j$  ou aux  $b_s^i$  :

$$(I.34) \quad \frac{\partial \phi_s(\Sigma)}{\partial b_{\Sigma}^j} \approx -\hat{\psi}_j(s) + \sum_{i=0}^N b_s^i \tilde{\mathcal{B}}_x [\varphi_j(x), \bar{\psi}_i(x)] = 0$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial \phi_s(\Sigma)}{\partial b_s^i} \approx -\hat{\psi}_i(\Sigma) + \sum_{j=0}^N b_{\Sigma}^j \tilde{\mathcal{B}}_x [\varphi_j(x), \bar{\psi}_i(x)] = 0$$

On obtient ainsi des systèmes linéaires donnant une approximation des  $b_s^i$  et des  $b_{\Sigma}^j$ . En portant ces deux expressions dans l'expression de  $\phi_s(\Sigma)$ , on trouve :

$$(I.35) \quad \phi_s(\Sigma) - \Gamma_s(\Sigma) \approx \Phi_s^N(\Sigma) = - \sum_{j=0}^N b_{\Sigma}^j \hat{\psi}_j(s) - \sum_{i=0}^N b_s^i \hat{\psi}_i(\Sigma)$$

$$+ \begin{cases} \sum_{i=0}^N b_s^i \hat{\psi}_i(\Sigma) \Rightarrow \Phi_s^N(\Sigma) \approx - \sum_{j=0}^N b_{\Sigma}^j \hat{\psi}_j(s) \\ \sum_{j=0}^N b_{\Sigma}^j \hat{\psi}_j(s) \Rightarrow \Phi_s^N(\Sigma) \approx - \sum_{i=0}^N b_s^i \hat{\psi}_i(\Sigma) \end{cases}$$

Il est intéressant de remarquer que l'approximation de l'équation (I.35) est d'autant meilleure que l'approximation de  $\Gamma_s(x)$  et  $\Gamma_x(\Sigma)$  par

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_s(x) \approx \sum_{j=0}^N b_s^j \psi_j(x) \\ \Gamma_x(\Sigma) \approx \sum_{j=0}^N b_{\Sigma}^j \psi_j(x) \end{array} \right.$$

est bonne.

f) Solution explicite des systèmes (I.34) et représentation de  $\mathcal{G}_S(\Sigma) - \Gamma_S(\Sigma)$

sous la forme d'une série :

Soit  $\phi_S^N(\Sigma)$  l'approximation de  $\mathcal{G}_S(\Sigma) - \Gamma_S(\Sigma)$  donnée par la formule (I.35), on définit la matrice d'éléments  $D_{ij}$  par :

$$(I.36) \quad D_{ij} = \tilde{\mathcal{D}}_x [\varphi_j(x), \bar{\psi}_i(x)] = D_{ji}$$

à laquelle on associe les déterminants suivants :

$$D_N[\hat{\psi}_i(\Sigma)] = \det \begin{vmatrix} D_{00} & D_{01} & \dots & D_{0N-1} & \hat{\psi}_0(\Sigma) \\ D_{10} & D_{11} & \dots & D_{1N-1} & \hat{\psi}_1(\Sigma) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ D_{N0} & D_{N1} & \dots & D_{NN-1} & \hat{\psi}_N(\Sigma) \end{vmatrix}$$

$$D_N[\hat{\psi}_i(s)] = \det \begin{vmatrix} D_{00} & D_{01} & \dots & D_{0N-1} & \hat{\psi}_0(s) \\ D_{10} & D_{11} & \dots & D_{1N-1} & \hat{\psi}_1(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ D_{N0} & D_{N1} & \dots & D_{NN-1} & \hat{\psi}_N(s) \end{vmatrix}$$

et

$\bar{D}_N$  = déterminant de la matrice  $D_{ij}$ .

On peut montrer (voir Annexe 1) que la différence entre deux approximations consécutives a pour expression :

$$(I.39) \quad \Phi_s^N(\Sigma) - \Phi_s^{N-1}(\Sigma) = - \frac{D_N[\hat{\Psi}_i(s)] D_N[\hat{\Psi}_i(\Sigma)]}{\bar{D}_{N-1} \bar{D}_N}$$

En utilisant l'égalité suivante :

$$\Phi^N = (\Phi^N - \Phi^{N-1}) + (\Phi^{N-1} - \Phi^{N-2}) + \dots + (\Phi^1 - \Phi^0) + \Phi^0$$

et en faisant croître N à l'infini on trouve :

$$(I.40) \quad \mathcal{G}_s(\Sigma) - \Gamma_s(\Sigma) = - \frac{\hat{\Psi}_0(s) \hat{\Psi}_0(\Sigma)}{D_{00}} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_i[\hat{\Psi}_i(s)] D_i[\hat{\Psi}_i(\Sigma)]}{\bar{D}_{i-1} \bar{D}_i}$$

qui est la série cherchée.

On peut montrer que cette série converge au sens des distributions quelle que soit la base  $\{\varphi_n\}$  utilisée pour sa construction. On peut donc espérer que la rapidité de convergence dépendra du choix de cette base.



CHAPITRE II

-----

CALCUL APPROCHE DES FREQUENCES PROPRES D'UN PAVILLON

-----

C H A P I T R E      I I

CALCUL APPROCHE DES FREQUENCES PROPRES D'UN PAVILLON

Nous nous proposons dans ce chapitre d'utiliser la première approximation de la solution de l'équation (I.18) pour calculer les fréquences propres d'un pavillon de section variable.

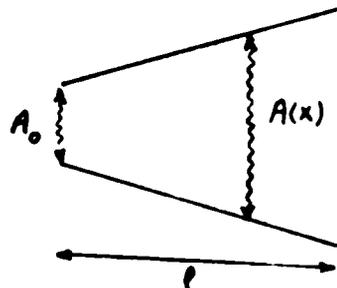
En effet, comme la série (I.40) est convergente quel que soit le choix de la base  $\{\varphi_n\}$ , il est possible de choisir les  $\varphi_n$  telles que la convergence de la série (I.40) soit plus ou moins rapide. En particulier on peut se poser la question de savoir si un choix convenable de la première fonction de base  $\varphi_0$  permet d'obtenir une bonne approximation. On sera guidé dans le choix de  $\varphi_0$  par le fait qu'à une approximation d'ordre N de  $\xi - \Gamma$  correspond une approximation d'ordre N de la fonction connue  $\Gamma$  (voir formule I.32).

II.1.- PAVILLON DE SECTION VARIANT LINEAIREMENT -

II.1.1.- Mise en équation du problème -

On considère un pavillon de longueur donnée l dont la section A(x) varie suivant la loi :

- $A(x) = ak x + A_0$
- $A_0 =$  constante donnée
- $ak =$  constante donnée
- $k =$  nombre d'onde



Pour chercher les fréquences propres de ce pavillon on a à résoudre l'équation suivante :

$$(II.1) \quad \int_{\omega} A(x) \left[ -\partial_x u \partial_x \bar{v} + k^2 u \bar{v} \right] dx = 0 \quad u \neq 0, \forall v$$

Supposons qu'on prolonge le pavillon jusqu'à l'infini pour  $x < 0$  et  $x > 1$ , par une section quelconque  $A_1(x)$  ; soit  $\mathcal{G}_j$  la solution élémentaire de ce domaine infini. La recherche des valeurs propres de (II.1) se ramène au problème suivant : soit  $\mu_1 \delta_0$  et  $\mu_2 \delta_1$ , deux sources placées en  $x = 0$  et  $x = 1$  ; déterminer les valeurs de  $k$  telles que le champ :

$$U = \mu_1 \mathcal{G}_0(x) + \mu_2 \mathcal{G}_1(x)$$

ne soit pas identiquement nul, et satisfasse à des conditions aux limites homogènes en  $x = 0$  et  $x = 1$  :

$$L_1 [\mu_1 \mathcal{G}_0(0) + \mu_2 \mathcal{G}_1(0)] = 0$$

$$L_2 [\mu_1 \mathcal{G}_0(1) + \mu_2 \mathcal{G}_1(1)] = 0$$

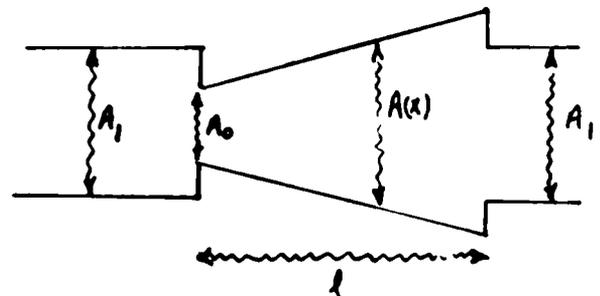
ce qui conduit à chercher les valeurs de  $k$  pour lesquelles le déterminant

$$L_1 \mathcal{G}_0(0) \times L_2 \mathcal{G}_1(1) - L_1 \mathcal{G}_1(0) \times L_2 \mathcal{G}_0(1)$$

du système ci-dessus est nul.

Pour simplifier les calculs on choisit  $A_1(x)$  constant ; on verra que le meilleur choix est  $A_1 = ak_1 + A_0$ .

Pour un pavillon à extrémités réfléchissantes, les conditions aux limites s'écrivent :  $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$



et on aboutit au système suivant :

$$\mu_1 \frac{\partial \mathcal{G}_0(0)}{\partial x} + \mu_2 \frac{\partial \mathcal{G}_1(0)}{\partial x} = 0$$

$$\mu_1 \frac{\partial \mathcal{G}_0(1)}{\partial x} + \mu_2 \frac{\partial \mathcal{G}_1(1)}{\partial x} = 0$$

D'où l'équation donnant les nombres d'onde propres :

$$(II.2) \quad \frac{\partial \varphi_0^{(0)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_0^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial x} = 0$$

Le milieu de référence sera bien sûr le tuyau infini, de section constante  $A_1$ . En conséquence la fonction  $\Gamma_S(x)$  a pour expression :

$$(II.3) \quad \Gamma_S(x) = \frac{1}{2ikA_1} e^{ik|x-S|}$$

Voulant nous contenter de la première approximation de  $\mathcal{G} - \Gamma$  nous devons jouer sur l'arbitraire de  $A_1$  et de  $\varphi_0$  ; nous sommes guidés dans ce choix par le fait que la première approximation de  $\Gamma_S(x)$  :

$$\Gamma_S(x) \approx b_S^0 \psi_0(x)$$

soit encore :

$$(II.4) \quad \Gamma_S(x) \approx \frac{\hat{\psi}_0(s) \psi_0(x)}{D_{00}}$$

doit être aussi bonne que possible. Nous allons voir que pour une source en  $S \leq 0$  un bon choix de  $\varphi_0$  est :

$$\varphi_0 = e^{ikx}$$

Mais pour une source en  $S \geq 1$ , il est bon de choisir :

$$\varphi_0 = e^{-ikx}$$

Ainsi est-on conduit à utiliser deux expressions différentes pour  $\varphi_1$ , l'une pour décrire le rayonnement de la source d'amplitude  $\mu_1$  placée en  $x = 0$ , et l'autre pour décrire celui de la source d'amplitude  $\mu_2$  placée en  $x = 1$ .

II.1.2.- Calcul de  $\mathcal{G}_S(x)$  -

---

a)  $S \leq 0$

D'après la formule (I.31), on a :

$$(II.5) \quad \hat{\Psi}_0(x) = \tilde{\mathcal{B}}_Y[\Gamma_Y(x), \bar{\varphi}_0(y)] = \mathcal{B}_Y[\Gamma_Y(x), \bar{\varphi}_0(y)] - \mathcal{B}_Y^0[\Gamma_Y(x), \bar{\varphi}_0(y)]$$

Pour calculer  $\hat{\Psi}_0(x)$  dans le cas où la source est dans la région  $x \leq 0$ , on choisit la fonction  $\varphi_0(x) = e^{ikx}$ , on a alors :

$$(II.6) \quad \hat{\Psi}_0(x) = \int_0^l \left[ -A(y) \frac{d\Gamma_Y(x)}{dy} \frac{d}{dy} e^{iky} + k^2 A(y) \Gamma_Y(x) e^{iky} \right] dy \\ - \int_0^l \left[ -A_1 \frac{d\Gamma_Y(x)}{dy} \frac{d}{dy} e^{iky} + k^2 A_1 \Gamma_Y(x) e^{iky} \right] dy$$

avec

$$A(y) = aky + A_0$$

Tous calculs faits, on trouve :

$$0 \leq x \leq l \Rightarrow \hat{\Psi}_0(x) = \frac{akx}{2A_1} e^{ikx} + \frac{ia}{4A_1} e^{ikx} + \frac{1}{2} \left( \frac{A_0}{A_1} - 1 \right) e^{ikx} \\ - \left[ \frac{akl}{2A_1} + \frac{ia}{4A_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{A_0}{A_1} - 1 \right) \right] e^{2ikl} e^{-ikx}$$

et pour :  $x \leq 0$

$$\Rightarrow \hat{\Psi}_0(x) = e^{-ikx} \left[ \frac{-akl}{2A_1} e^{2ikl} - \frac{ia}{4A_1} e^{2ikl} + \frac{ia}{4A_1} - \frac{1}{2} \left( \frac{A_0}{A_1} - 1 \right) (e^{2ikl} - 1) \right]$$

Le détail des calculs se trouve dans l'Annexe II.

Pour calculer  $D_{00}$ , d'après la formule (I.36) on a :

$$D_{00} = \tilde{\mathcal{B}}[\Psi_0(x), \bar{\Psi}_0(x)]$$

ou  
(II.7)

$$D_{00} = \int_0^l \left[ -A(y) \frac{d\varphi_0(y)}{dy} \frac{d\psi_0(y)}{dy} + k^2 A(y) \varphi_0(y) \psi_0(y) \right] dy - \int_0^l \left[ -A_1 \frac{d\varphi_0(y)}{dy} \frac{d\psi_0(y)}{dy} + k^2 A_1 \varphi_0(y) \psi_0(y) \right] dy$$

Pour simplifier les calculs, si on pose :

pour  $0 \leq x \leq l \Rightarrow \hat{\Psi}_0(x) = dkx e^{ikx} + \beta e^{-ikx} + \gamma e^{-ikx}$

et pour  $x \leq 0 \Rightarrow \hat{\Psi}_0(x) = \tau_1 e^{-ikx}$

avec :  $\Psi_0(x) = \varphi_0(x) + \hat{\Psi}_0(x) = e^{ikx} + dkx e^{ikx} + \beta e^{-ikx} + \gamma e^{-ikx}$

on trouve :

$$D_{00} = 2ikA_1 \left\{ \frac{a^2}{2A_1^2} \left[ -\frac{k^2 l^2}{2} e^{2ikl} + \frac{kl}{2i} e^{2ikl} + \frac{1}{4} e^{2ikl} - \frac{1}{4} \right] + \left( 1 + \beta - \frac{id}{2} \right) \left[ \frac{-akl}{2A_1} e^{2ikl} - \frac{ia}{4A_1} e^{2ikl} + \frac{ia}{4A_1} \right] - \frac{1}{2} \left( \frac{A_0}{A_1} - 1 \right) \left( 1 + \beta - \frac{id}{2} \right) \left( e^{2ikl} - 1 \right) - id \left( \frac{A_0}{A_1} - 1 \right) \left[ \frac{kl}{2i} e^{2ikl} + \frac{1}{4} e^{2ikl} - \frac{1}{4} \right] \right\}$$

Le détail des calculs est donné dans l'Annexe III.

Nous allons voir qu'en posant :

$$1 - \frac{A_0}{A_1} = \frac{akl}{A_1}$$

nous obtenons une approximation au premier ordre de  $\Gamma$  qui est satisfaisante. En effet, il vient :

$$D_{00} = 2ikA_1 \left\{ \left(1 + \beta - \frac{id}{2}\right) \psi_1 + \frac{-\frac{ia}{4A_1} \frac{akl}{A_1} e^{2ikl} + \frac{a^2}{8A_1^2} (e^{2ikl} - 1) + \frac{ia}{8A_1} \frac{akl}{A_1} (e^{2ikl} - 1)}{-\frac{akl}{2A_1} e^{2ikl} - \frac{ia}{4A_1} (e^{2ikl} - 1) - \frac{1}{2} \left(\frac{A_0}{A_1} - 1\right) (e^{2ikl} - 1)} \psi_1 \right\}$$

et en posant :

$$(II.8) \quad f = \frac{-\frac{ia}{4A_1} \frac{akl}{A_1} e^{2ikl} + \frac{a^2}{8A_1^2} (e^{2ikl} - 1) + \frac{ia}{8A_1} \frac{akl}{A_1} (e^{2ikl} - 1)}{-\frac{akl}{2A_1} e^{2ikl} - \frac{ia}{4A_1} (e^{2ikl} - 1) - \frac{1}{2} \left(\frac{A_0}{A_1} - 1\right) (e^{2ikl} - 1)}$$

on aura :

$$D_{00} = 2ikA_1 \left\{ \left(1 + \beta - \frac{id}{2}\right) \psi_1 + f \psi_1 \right\} = 2ikA_1 \left(1 - \frac{akl}{2A_1} + f\right) \psi_1$$

et en portant les expressions de  $\hat{\Psi}_0(S)$ ,  $\Psi_0(x)$  et  $D_{00}$  dans l'expression de (II.4) on trouve :

$$S \leq 0 \Rightarrow \Gamma_S(x) \approx \frac{\psi_1^{-iks} \left[ e^{ikx} + \frac{akx}{2A_1} e^{ikx} + \left(\frac{ia}{4A_1} - \frac{akl}{2A_1}\right) e^{ikx} - \frac{ia}{4A_1} e^{2ikl} e^{-ikx} \right]}{2ikA_1 \left(1 - \frac{akl}{2A_1} + f\right) \psi_1}$$

Après simplification, on obtient :

$$S \leq 0 \Rightarrow \Gamma_S(x) \approx \frac{1}{2ikA_1} e^{ik(x-S)} + e^{-iks} \frac{\frac{akx}{2A_1} e^{ikx} + \frac{ia}{4A_1} e^{ikx} - f e^{ikx} - \frac{ia}{4A_1} e^{2ikl} e^{-ikx}}{1 - \frac{akl}{2A_1} + f}$$

On remarque que cette expression est pratiquement égale à  $\Gamma$  si  $\frac{ak\rho}{2A_1} \ll 1$  ;  
c'est la seule hypothèse restrictive à faire.

On note que :  $S_1: \frac{ak\rho}{2A_1} \ll 1 \Rightarrow \frac{a}{A_1} \ll 1 \Rightarrow |f| \ll 1$

Pour calculer  $\mathcal{G}_S(x)$ , en ne conservant que le premier terme de la série (I.40) on a :

$$(II.9) \quad \mathcal{G}_S(x) - \Gamma_S(x) \approx - \frac{\hat{\Psi}_0(s) \hat{\Psi}_0(x)}{D_{00}}$$

et en portant les valeurs de  $\hat{\Psi}_0(s)$ ,  $\hat{\Psi}_0(x)$  et  $D_{00}$  dans cette expression, on trouve :

$$S \leq 0 \Rightarrow \mathcal{G}_S(x) - \Gamma_S(x) \approx \frac{-\Gamma_1 e^{-iks} \left[ \frac{akx}{2A_1} e^{ikx} + \left( \frac{ia}{4A_1} - \frac{ak\rho}{2A_1} \right) e^{ikx} - \frac{ia}{4A_1} e^{2ik\rho - ikx} \right]}{2ikA_1 \left( 1 - \frac{ak\rho}{2A_1} + f \right) \Gamma_1}$$

Soit après simplification :

$$(II.10) \quad S \leq 0 \Rightarrow \mathcal{G}_S(x) = \frac{1}{2ikA_1} e^{-iks} \left[ e^{ikx} + \frac{-\frac{akx}{2A_1} e^{ikx} + \left( \frac{ak\rho}{2A_1} - \frac{ia}{4A_1} \right) e^{ikx} + \frac{ia}{4A_1} e^{2ik\rho - ikx}}{1 - \frac{ak\rho}{2A_1} + f} \right]$$

avec :  $\frac{ak\rho}{2A_1} \ll 1$

b)  $S \geq \rho$   
-----

Dans le cas où l'on suppose que la source est dans la région  $S \geq \rho$ , on choisit la fonction  $\varphi_0(x) = e^{-ikx}$  pour les calculs.

On a alors :

$$(II.11) \quad \hat{\Psi}_0(x) = \int_0^l \left[ -A(y) \frac{d\Gamma(y)}{dy} \frac{d}{dy} e^{-iky} + k A(y) \Gamma(y) e^{-iky} \right] dy$$

$$- \int_0^l \left[ -A_1 \frac{d\Gamma_1(x)}{dy} \frac{d}{dy} e^{-iky} + k A_1 \Gamma_1(x) e^{-iky} \right] dy$$

Tous calculs faits, on trouve :

$$(II.12) \quad 0 \leq x \leq l \Rightarrow \hat{\Psi}_0(x) = \frac{akx}{2A_1} e^{-ikx} - \frac{ia}{4A_1} e^{-ikx} + \frac{ia}{4A_1} e^{ikx} + \frac{1}{2} \left( \frac{A_0}{A_1} - 1 \right) (e^{-ikx} - e^{ikx})$$

et

$$(II.13) \quad x \geq l \Rightarrow \hat{\Psi}_0(x) = e^{ikx} \left[ \frac{akl}{2A_1} e^{-2ikh} - \frac{ia}{4A_1} e^{-2ikh} + \frac{ia}{4A_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{A_0}{A_1} - 1 \right) (e^{-2ikh} - 1) \right]$$

D'après la définition de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\tau$ , on peut écrire ces deux fonctions sous la forme :

$$0 \leq x \leq l \Rightarrow \hat{\Psi}_0(x) = \bar{\alpha} k x e^{-ikx} + \bar{\beta} e^{-ikx} + \bar{\gamma} e^{ikx}$$

$$\text{et } x \geq l \Rightarrow \hat{\Psi}_0(x) = -\bar{\tau}_1 e^{ikx}$$

Le détail des calculs est donné dans l'Annexe II.

On trouve ainsi :

$$(II.14) \quad D_{00} = -2ikA_1 \left( 1 - \frac{akl}{2A_1} + \bar{\tau}_1 \right) \bar{\tau}_1$$

Le détail des calculs est donné dans l'Annexe III.

En portant les expressions de  $\hat{\psi}_0(s)$ ,  $\psi_0(x)$  et  $D_{00}$  dans la formule (II.4), on trouve :

$$S \gg l \Rightarrow \Gamma_s(x) \approx \frac{-\bar{f}_1 e^{iks} \left[ e^{-ikx} + \frac{akx}{2A_1} e^{-ikx} + \left(-\frac{ia}{4A_1} - \frac{akl}{2A_1}\right) e^{-ikx} + \left(\frac{ia}{4A_1} + \frac{akl}{2A_1}\right) e^{ikx} \right]}{-2ikA_1 \left(1 - \frac{akl}{2A_1} + \bar{f}\right) \bar{f}_1}$$

Soit, après avoir simplifié :

$$S \gg l \Rightarrow \Gamma_s(x) \approx \frac{1}{2ikA_1} e^{-ik(x-s)} + e^{iks} \frac{\left[ \frac{akx}{2A_1} e^{-ikx} - \frac{ia}{4A_1} e^{-ikx} - \bar{f} e^{-ikx} + \left(\frac{ia}{4A_1} + \frac{akl}{2A_1}\right) e^{ikx} \right]}{1 - \frac{akl}{2A_1} + \bar{f}}$$

et pour que cette expression approche bien la fonction  $\Gamma_s(x)$ , il suffit de prendre  $\frac{akl}{2A_1} \ll 1$ . En portant les expressions de  $\hat{\psi}_0(x)$ ,  $\hat{\psi}_0(s)$  et  $D_{00}$  d'après les équations (II.12), (II.13) et (II.14) dans la formule (II.9), on trouve :

$$(II.15) \quad S \gg l \Rightarrow \mathcal{G}_s(x) = \frac{1}{2ikA_1} e^{iks} \left[ e^{-ikx} + \frac{\left(\frac{akl}{2A_1} + \frac{ia}{4A_1}\right) e^{-ikx} - \frac{akx}{2A_1} e^{-ikx} - \left(\frac{ia}{4A_1} + \frac{akl}{2A_1}\right) e^{ikx}}{1 - \frac{akl}{2A_1} + \bar{f}} \right]$$

avec :  $\frac{akl}{2A_1} \ll 1$

### II.1.3.- Fréquences propres -

Pour exprimer l'action des parois limitant le pavillon, on place deux sources fictives aux extrémités du pavillon ; le mode propre U a pour expression :

$$(II.16) \quad U = \mu_1 \mathcal{G}_0(x) + \mu_2 \mathcal{G}_l(x)$$

Pour un pavillon fermé aux extrémités, la vitesse acoustique  $V$  est nulle sur les parois ; il en est de même du déplacement  $\xi$ , car  $v = -i\omega \xi$ . Il faut donc trouver une expression de  $\xi$  en fonction de  $U$  valable dans le domaine  $\omega$ . Pour ce faire, on peut effectuer une intégration par partie de l'expression suivante :

$$\int_{\omega} [-A(x) \partial_x U \partial_x \bar{v} + k^2 A(x) U \bar{v}] dx = 0$$

qui conduit à l'équation :

$$(II.17) \quad \frac{1}{A} \partial_x [A \partial_x U] + k^2 U = 0$$

valable dans  $\omega$  puisque  $A$  est dérivable dans  $\omega$ .

D'après la formule (I.1), on a :

$$(II.18) \quad \xi = \frac{1}{i\omega} \partial_x U$$

En portant dans la formule (II.17), il vient :

$$(II.19) \quad i\omega \frac{1}{A} \partial_x [A \xi] + k^2 U = 0$$

ou

$$(II.20) \quad A \xi = \frac{-k^2}{i\omega} \int_x A(x) U(x) dx$$

Comme nous utilisons une approximation  $\hat{U}$  de la formule (II.16) obtenue avec les expressions approchées de  $\mathcal{G}_0(x)$  et  $\mathcal{G}_1(x)$  précédemment calculées, il faut déterminer laquelle des deux formules (II.18) et (II.20) donne la meilleure approximation de  $\xi$ . La fonction  $\hat{U}$  vérifie :

$$(II.21) \quad \frac{1}{A} \partial_x [A \partial_x \hat{U}] + k^2 \hat{U} = h$$

Définissons  $\xi_1$  et  $\xi_2$  par :

$$A \xi_1 = - \frac{k^2}{i\omega} \int A \hat{U} dx$$

et

$$\xi_2 = \frac{1}{i\omega} \frac{\partial \hat{U}}{\partial x}$$

En dérivant la formule (II.19), on trouve :

$$(II.22) \quad \partial_x [1/A \partial_x A \xi_1] + k^2 \xi_1 = 0$$

Mais  $\xi_1$  et  $\xi_2$  vérifient :

$$(II.23) \quad \partial_x [1/A \partial_x A \xi_1] + k^2 \xi_1 = g_1$$

$$(II.24) \quad \partial_x [1/A \partial_x A \xi_2] + k^2 \xi_2 = g_2$$

En portant les valeurs de  $\xi_1$  et  $\xi_2$  dans les formules (II.23) et (II.24), on obtient :

$$g_1 = - \frac{k^2}{i\omega} \frac{1}{A} \int A h dx$$

$$g_2 = \frac{1}{i\omega} \frac{\partial h}{\partial x}$$

Pour trouver h il suffit de reporter la valeur de  $\hat{U}(x)$  dans l'équation (II.21). D'après la relation (II.16) on a :

$$\hat{U} = \frac{1}{2ikA_1} \frac{1}{1 - \frac{akl}{2A_1} + f} \left[ \left( 1 + f - \frac{ia}{4A_1} \right) e^{ikx} - \frac{akx}{2A_1} e^{ikx} + \frac{ia}{4A_1} e^{2ikl - ikx} \right]$$

En portant  $\hat{U}$  dans l'équation (II.21), il vient :

$$h = \frac{1}{2ikA_1} x \frac{k^2}{1 - \frac{akl}{2A_1} + f} x \frac{ia}{A_1} \frac{\left( \frac{akl}{A_1} + f + \frac{ia}{4A_1} \right) e^{ikx} - \frac{3}{2} \frac{akx}{A_1} e^{ikx} - \frac{ia}{4A_1} e^{2ikl - ikx}}{1 + \frac{akx}{A_1} - \frac{akl}{A_1}}$$

Cela donne :

$$g_2 = \frac{1}{2ika_1} \times \frac{1}{1 - \frac{akl}{2A_1} + f} \left[ -\frac{k^2}{i\omega A} k \frac{a}{A_1} \right] \frac{\left( \frac{akl}{A_1} + f - \frac{5ia}{4A_1} \right) e^{ikx} + \frac{ia}{4A_1} e^{2ikl - ikx} - \frac{3}{2} \frac{akx}{A_1} e^{ikx} + \frac{3ia}{A_1} e^{ikx}}{1 + \frac{akx}{A_1} - \frac{akl}{A_1}}$$

et

$$g_1 = \frac{1}{2ika_1} \times \frac{1}{1 - \frac{akl}{2A_1} + f} \left[ -\frac{k^2}{i\omega A} k \frac{a}{A_1} \right] \frac{\left( \frac{akl}{A_1} + f - \frac{5ia}{4A_1} \right) e^{ikx} + \frac{ia}{4A_1} e^{2ikl - ikx} - \frac{3}{2} \frac{akx}{A_1} e^{ikx}}{1}$$

En divisant  $g_2$  par  $g_1$ , on trouve :

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{1}{1 + \frac{akx}{A_1} - \frac{akl}{A_1}} \left[ 1 + \frac{3 \frac{ia}{A_1} e^{ikx}}{\left( \frac{akl}{A_1} + f - \frac{5ia}{A_1} \right) e^{ikx} + \frac{ia}{4A_1} e^{2ikl - ikx} - \frac{3}{2} \frac{akx}{A_1} e^{ikx}} \right]$$

Posons  $f = f_1 + f_2 i$ , alors :

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{1}{1 + \frac{akx}{A_1} - \frac{akl}{A_1}} \left[ 1 + \frac{3 \frac{ia}{A_1}}{\underbrace{\left[ \frac{akl}{A_1} - \frac{3}{2} \frac{akx}{A_1} + f_1 - \frac{a}{4A_1} \sin 2k(l-x) \right]}_{\pi_1} + i \underbrace{\left[ f_2 - \frac{5a}{4A_1} + \frac{a}{4A_1} \cosh 2k(l-x) \right]}_{\pi_2}} \right]$$

ou

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{1}{1 + \frac{akx}{A_1} - \frac{akl}{A_1}} \left[ 1 + \frac{3 \frac{ia}{A_1} [\pi_1 - i\pi_2]}{\pi_1^2 + \pi_2^2} \right] = \frac{1}{1 + \frac{akx}{A_1} - \frac{akl}{A_1}} \left[ 1 + \frac{3 \frac{a}{A_1} \pi_2}{\pi_1^2 + \pi_2^2} + i \frac{3 \frac{a}{A_1} \pi_1}{\pi_1^2 + \pi_2^2} \right]$$

En prenant le module :

$$\left| \frac{g_2}{g_1} \right| = \frac{1}{1 + \frac{akx}{A_1} - \frac{akl}{A_1}} \left[ \left[ 1 + \frac{3 \frac{a}{A_1} \pi_2}{\pi_1^2 + \pi_2^2} \right]^2 + \left[ \frac{3 \frac{a}{A_1} \pi_1}{\pi_1^2 + \pi_2^2} \right]^2 \right]^{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{g_2}{g_1} \right| = \frac{1}{1 + \frac{akx}{A_1} - \frac{akl}{A_1}} \left[ 1 + \frac{9 \frac{a^2}{A_1^2} \pi_2^2}{(\pi_1^2 + \pi_2^2)^2} + \frac{6 \frac{a}{A_1} \pi_2}{\pi_1^2 + \pi_2^2} + \frac{9 \frac{a^2}{A_1^2} \pi_1^2}{(\pi_1^2 + \pi_2^2)^2} \right]^{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{g_2}{g_1} \right| = \frac{1}{1 + \frac{akx}{A_1} - \frac{akl}{A_1}} \left[ 1 + \frac{9 \frac{a^2}{A_1^2} + 6 \frac{a}{A_1} \pi_2}{\pi_1^2 + \pi_2^2} \right]^{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{g_2}{g_1} \right| = \frac{1}{1 + \frac{akx}{A_1} - \frac{akl}{A_1}} \left[ 1 + \frac{a^2}{A_1^2} \frac{9 + 6 \left[ f_2 \frac{A_1}{a} - \frac{5}{4} + \frac{1}{4} \cos 2k(l-x) \right]}{\pi_1^2 + \pi_2^2} \right]^{1/2}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_R$

Considérons dès maintenant que  $f$  désigne  $\frac{1}{2} \frac{a}{A_1}$  (Nous le démontrons par la suite). L'expression  $R$  ci-dessus s'écrit alors :

$$R = 9 + 6 \left[ -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 2k(l-x) \right]$$

Puisque cette quantité est toujours positive et que

$$1 + \frac{akx}{A_1} - \frac{akl}{A_1} < 0$$

il s'ensuit que :

$$|g_2| > |g_1|$$

et on en conclut que  $\gamma_1$  est la meilleure approximation de  $\gamma$  et sera donc à utiliser pour exprimer les conditions aux limites.

On a donc :

$$A_1 \approx A_2 = -\frac{k^2}{i\omega} \int A(x) \left[ \mu_1 \mathcal{G}_0(x) + \mu_2 \mathcal{G}_l(x) \right] dx$$

Posons :

$$\int A(x) \mathcal{G}_0(x) dx = G_0(x) \quad \text{et} \quad \int A(x) \mathcal{G}_l(x) dx = G_l(x)$$

On a :

$$A_1 = -\frac{k^2}{i\omega} \left[ \mu_1 G_0(x) + \mu_2 G_l(x) \right]$$

Les conditions aux limites donnent le système suivant :

$$\mu_1 G_0(0) + \mu_2 G_l(0) = 0$$

$$\mu_1 G_0(l) + \mu_2 G_l(l) = 0$$

Pour que ce système ait une solution non nulle, il faut que le déterminant des coefficients soit nul, c'est-à-dire :

$$(II.25) \quad G_0(0) G_l(l) - G_0(l) G_l(0) = 0$$

En portant l'expression de  $\mathcal{G}_0(x)$  d'après (II.10) dans l'expression de  $G_0(x)$ , il vient :

$$G_0(x) = \frac{1}{2ik} \frac{1}{1 - \frac{akl}{2A_1} + f} \int \left( \frac{akx}{A_1} + \frac{A_0}{A_1} \right) \left[ e^{ikx} + f e^{-ikx} - \frac{akx}{2A_1} e^{ikx} - \frac{ia}{4A_1} e^{ikx} + \frac{ia}{4A_1} e^{2ikl - ikx} \right] dx$$

En intégrant et en gardant les termes du premier degré en  $\frac{a}{A_1}$  on trouve :

$$G_0(x) = \frac{1}{2k^2} \frac{1}{1 - \frac{akl}{2A_1} + f} \left[ -e^{-ikx} + \left( \frac{-ia}{4A_1} - f + \frac{akl}{A_1} \right) e^{ikx} - \frac{akx}{2A_1} e^{ikx} + \frac{ia}{4A_1} e^{2ikl - ikx} \right]$$

De même on a pour  $G_p(x)$  :

$$G_p(x) = \int (akx + A_0) \frac{e^{ikx}}{k} dx = -\frac{1}{2k^2} \frac{1}{1 - \frac{akp}{2A_1} + \bar{f}} e^{ikp} \left[ -e^{-ikx} + \left( \frac{ia}{4A_1} - \bar{f} + \frac{akp}{A_1} \right) e^{-ikx} - \frac{akx}{2A_1} e^{-ikx} - \left( \frac{ia}{4A_1} + \frac{akp}{2A_1} \right) e^{ikx} \right]$$

D'où :

$$G_0(0) = \frac{1}{2k^2} \frac{1}{1 - \frac{akp}{2A_1} + \bar{f}} \left[ -1 - \frac{ia}{4A_1} - \bar{f} + \frac{akp}{A_1} + \frac{ia}{4A_1} e^{2ikp} \right]$$

$$G_p(0) = \frac{-1}{2k^2} \frac{1}{1 - \frac{akp}{2A_1} + \bar{f}} \left[ -1 + \frac{ia}{4A_1} - \bar{f} + \frac{akp}{2A_1} - \left( \frac{ia}{4A_1} + \frac{akp}{2A_1} \right) e^{2ikp} \right]$$

$$G_0(p) = \frac{1}{2k^2} \frac{e^{ikp}}{1 - \frac{akp}{2A_1} + \bar{f}} \left[ -1 - \frac{ia}{4A_1} - \bar{f} + \frac{akp}{2A_1} + \frac{ia}{4A_1} \right]$$

$$G_p(p) = \frac{-1}{2k^2} \frac{e^{ikp}}{1 - \frac{akp}{2A_1} + \bar{f}} \left[ -1 + \frac{ia}{4A_1} - \bar{f} + \frac{akp}{A_1} - \left( \frac{ia}{4A_1} + \frac{akp}{2A_1} \right) \right]$$

L'équation (II.25) s'écrit donc :

$$\begin{aligned} & \left[ -1 - \frac{ia}{4A_1} - \bar{f} + \frac{akp}{A_1} + \frac{ia}{4A_1} e^{2ikp} \right] \left[ -1 + \frac{ia}{4A_1} - \bar{f} + \frac{akp}{2A_1} - \left( \frac{ia}{4A_1} + \frac{akp}{2A_1} \right) e^{2ikp} \right] \\ & = e^{2ikp} \left[ -1 - \bar{f} + \frac{akp}{2A_1} \right] \left[ -1 - \bar{f} + \frac{akp}{2A_1} \right] \end{aligned}$$

On a supposé  $\frac{akl}{2A_1} \ll 1$ , c'est-à-dire que la perturbation est petite ; dans ce cas, les fréquences propres sont proches des fréquences propres d'un pavillon de section constante à extrémités réfléchissantes ( $kl = m\pi$ ) ; on peut donc écrire pour le pavillon perturbé  $kl = m\pi + \epsilon$ , ce qui permet de considérer dans l'expression de  $f$  (II.8), que  $e^{2ikl} \sim 1$  ; cela nous donne :

$$f \sim \frac{ia}{2A_1}$$

En portant  $f \sim \frac{ia}{2A_1}$  dans l'équation précédente, on a :

$$\left[ -1 - \frac{3ia}{4A_1} + \frac{akl}{A_1} + \frac{ia}{4A_1} e^{2ikl} \right] \left[ -1 + \frac{3ia}{4A_1} + \frac{akl}{2A_1} - \frac{ia}{4A_1} e^{2ikl} - \frac{akl}{2A_1} e^{2ikl} \right] = e^{2ikl} \left[ \left( -1 + \frac{akl}{2A_1} \right)^2 + \frac{a^2}{4A_1^2} \right]$$

ou

$$\begin{aligned} 1 - \frac{3ia}{4A_1} - \frac{akl}{2A_1} + \frac{ia}{4A_1} e^{2ikl} + \frac{akl}{2A_1} e^{2ikl} + \frac{3ia}{4A_1} + \frac{9}{16} \frac{a^2}{A_1^2} - \frac{3}{8} i \frac{a^2}{A_1^2} k l - \frac{3}{16} \frac{a^2}{A_1^2} e^{2ikl} \\ + \frac{3}{8} i \frac{a^2}{A_1^2} k l e^{2ikl} - \frac{akl}{A_1} + \frac{3}{4} i \frac{a^2}{A_1^2} k l + \frac{1}{2} \left( \frac{akl}{A_1} \right)^2 - \frac{1}{4} i \frac{a^2}{A_1^2} k l e^{2ikl} - \frac{1}{2} \left( \frac{akl}{A_1} \right)^2 e^{2ikl} \\ - \frac{ia}{4A_1} e^{2ikl} - \frac{3}{16} \frac{a^2}{A_1^2} e^{2ikl} + \frac{1}{8} i \frac{a^2}{A_1^2} k l e^{2ikl} + \frac{1}{16} \frac{a^2}{A_1^2} e^{4ikl} - \frac{1}{8} i \frac{a^2}{A_1^2} k l e^{4ikl} \\ = e^{2ikl} \left[ \left( 1 + \frac{akl}{2A_1} \right)^2 - \frac{akl}{A_1} + \frac{a^2}{4A_1^2} \right] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} 1 - e^{2ikl} - \frac{3}{2} \frac{akl}{A_1} + \frac{3}{2} \frac{akl}{A_1} e^{2ikl} + \frac{1}{2} \left( \frac{akl}{A_1} \right)^2 - \frac{3}{4} \left( \frac{akl}{A_1} \right)^2 e^{2ikl} + \frac{9}{16} \frac{a^2}{A_1^2} - \frac{10}{16} \frac{a^2}{A_1^2} e^{2ikl} \\ + \frac{1}{16} \frac{a^2}{A_1^2} e^{4ikl} + \frac{3}{8} i \frac{a^2}{A_1^2} k l + \frac{1}{4} i \frac{a^2}{A_1^2} k l e^{2ikl} - \frac{1}{8} i \frac{a^2}{A_1^2} k l e^{4ikl} = 0 \end{aligned}$$

En remplaçant  $k\ell$  par  $mR + \mathcal{E}$  il vient :

$$\begin{aligned}
 & -i[2\mathcal{E}] + \frac{3}{2} \frac{ak\ell}{A_1} i[2\mathcal{E}] - \frac{1}{4} \left(\frac{ak\ell}{A_1}\right)^2 - \frac{3}{4} \left(\frac{ak\ell}{A_1}\right)^2 i[2\mathcal{E}] - \frac{1}{16} \frac{a^2}{A_1^2} - \frac{10}{16} \frac{a^2}{A_1^2} i[2\mathcal{E}] \\
 & + \frac{1}{16} \frac{a^2}{A_1^2} + \frac{1}{16} \frac{a^2}{A_1^2} i[4\mathcal{E}] + \frac{3}{8} i \frac{a^2}{A_1^2} k\ell + \frac{1}{4} i \frac{a^2}{A_1^2} k\ell - \frac{1}{4} \frac{a^2}{A_1^2} k\ell [2\mathcal{E}] - \frac{1}{8} i \frac{a^2}{A_1^2} k\ell \\
 & + \frac{1}{8} \frac{a^2}{A_1^2} k\ell [4\mathcal{E}] = 0
 \end{aligned}$$

Après avoir simplifié, on obtient :

$$(II.26) \quad i \left[ \left( -1 + \frac{3}{2} \frac{ak\ell}{A_1} - \frac{3}{4} \left(\frac{ak\ell}{A_1}\right)^2 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{A_1^2} \right) 2\mathcal{E} + \frac{1}{2} \frac{a^2}{A_1^2} k\ell \right] - \frac{1}{4} \left(\frac{ak\ell}{A_1}\right)^2 = 0$$

L'équation (II.26) étant complexe, on calcule  $\mathcal{E}$  en minimisant le module de (II.26).

On a :

$$|P|^2 = \left[ \left( -1 + \frac{3}{2} \frac{ak\ell}{A_1} - \frac{3}{4} \left(\frac{ak\ell}{A_1}\right)^2 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{A_1^2} \right) 2\mathcal{E} + \frac{1}{2} \frac{a^2}{A_1^2} k\ell \right]^2 + \left[ \frac{1}{4} \frac{a^2}{A_1^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{ak\ell}{A_1}\right)^2 \right]^2$$

en dérivant :

$$\{ |P|^2 \}' = 2 \times 2 \left( -1 + \frac{3}{2} \frac{ak\ell}{A_1} - \frac{3}{4} \left(\frac{ak\ell}{A_1}\right)^2 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{A_1^2} \right) \left[ \left( -1 + \frac{3}{2} \frac{ak\ell}{A_1} - \frac{3}{4} \left(\frac{ak\ell}{A_1}\right)^2 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{A_1^2} \right) 2\mathcal{E} + \frac{1}{2} \frac{a^2}{A_1^2} k\ell \right] = 0$$

$$\text{d'où :} \quad \mathcal{E} = \frac{\frac{1}{4} \frac{a^2}{A_1^2} k\ell}{1 - \frac{3}{2} \frac{ak\ell}{A_1} + \frac{3}{4} \left(\frac{ak\ell}{A_1}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{A_1^2}}$$

(II.27)

Ainsi s'exprime le glissement de fréquence propre du pavillon en fonction du coefficient "a" définissant la variation de la section.

II.1.4.- Application de la formule (II.27) -

---

Soit  $F_1$  une fréquence propre d'un pavillon de section  $A_1$  et à extrémités réfléchissantes ; on sait que :

$$F_1 = \frac{c}{2\pi} \frac{\pi\pi}{l} = \frac{\pi c}{2l}$$

Soit  $F_2$  la fréquence propre correspondante pour le pavillon de section variable ; on a :

$$F_2 - F_1 = \frac{c}{2\pi l} \epsilon$$

ou

$$\frac{F_2 - F_1}{F_1} = \frac{\epsilon}{\pi\pi}$$

En remplaçant  $\epsilon$  d'après la formule (II.27), on trouve :

$$\frac{\Delta F}{F_1} = \frac{1}{4\pi\pi} \frac{\left(\frac{akl}{A_1}\right)^2}{kl \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{akl}{A_1} - \frac{3}{4} \left(\frac{akl}{A_1}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{A_1^2} \right]}$$

En remplaçant  $\frac{akl}{A_1}$  par  $1 - \frac{A_0}{A_1}$  et en gardant les termes du premier degré en  $\frac{a}{A_0}$ , on obtient :

$$(II.28) \quad \frac{\Delta F}{F_1} = \frac{1}{4\pi^2 k l} \frac{\left(1 - \frac{A_0}{A_1}\right)^2}{1 - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{A_0}{A_1}\right)}$$

qui donne la variation relative de fréquence propre.

### II.1.5.- Solution classique du pavillon de section variant linéairement

(BREKHOVSKIKH {5})-

On peut donner une solution analytique pour un pavillon de section variant linéairement à l'aide de fonctions de Bessel. En effet, on a  $p = -i\omega\rho U$  et d'après la formule (II.17), on obtient :

$$1/A \partial_x [A \partial_x \psi] + k^2 \psi = 0$$

avec

$$A = akx + A_0$$

Si on divise les deux membres de cette équation par  $ak$ , il vient:

$$a \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x + \frac{A_0}{ak}} d_x \left[ \left( x + \frac{A_0}{ak} \right) d_x \psi \right] + k^2 \psi = 0$$

On introduit une nouvelle variable :

$$r = x + \frac{A_0}{ak} \Rightarrow \partial_r = \partial_x$$

qui donne :

$$1/r d_r [r d_r \psi] + k^2 \psi = 0$$

ou

$$(II.29) \quad d_r^2 \psi + 1/r d_r \psi + k^2 \psi = 0$$

qui est l'équation de Bessel du premier ordre et a pour solution :

$$\psi = C_1 J_0(kr) + C_2 I_0(kr)$$

ou

$$(II.30) \quad \psi = C_1 J_0 \left[ k \left( x + \frac{A_0}{ak} \right) \right] + C_2 I_0 \left[ k \left( x + \frac{A_0}{ak} \right) \right]$$

Mais en écrivant que le flux d'énergie à travers une section droite est le même que celui traversant une section droite voisine, on a :

$$|h|^2 A + d_x [ |h|^2 A ] dx = |h|^2 A$$

où  $dx$  est la distance entre ces deux sections. On en conclut que :

$$d_x [ |h|^2 A ] = 0 \quad \text{soit} \quad |h|^2 A = \text{cte}$$

c'est-à-dire que l'amplitude de  $p$  doit être inversement proportionnelle à la racine carrée de  $A$ , ce qui n'est pas le cas dans la formule (II.30). Toutefois cette propriété est vérifiée par l'expression asymptotique de (II.30) obtenue pour  $\frac{ak\rho}{A_1} \ll 1$ , ce qui est l'hypothèse faite dans les calculs précédents.

#### II.1.6.- Solution asymptotique -

Faisant le changement de fonction  $p = u/\sqrt{\lambda}$ , on a :

$$d_x p = 1/\sqrt{\lambda} d_x u - u/\lambda^2 \sqrt{\lambda}$$

et

$$d_{xx}^2 p = -1/2\lambda \sqrt{\lambda} d_{xx}^2 u + 1/\sqrt{\lambda} d_{xx}^2 u - 1/2 d_{xx}^2 u / \lambda \sqrt{\lambda} + 3/4 u / \lambda \sqrt{\lambda}$$

En portant dans l'équation (II.29), il vient :

$$d_{xx}^2 u + k^2 (1 + 1/4k^2 \lambda^2) u = 0$$

pour  $k\lambda = k\ell / \frac{ak\rho}{A_1} (1 - \frac{ak\rho}{A_1}) \gg 1$ . On peut négliger  $1/4k^2 \lambda^2$  devant 1. Alors

la solution de cette équation devient :

$$u = e^{\pm ikx}$$

ou 
$$p = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{i k x}$$

d'où on a pour la solution générale :

$$(II.31) \quad p = \frac{P_1}{\sqrt{\frac{akx}{A_1} + \frac{A_0}{A_1}}} e^{ikx} + \frac{P_2}{\sqrt{\frac{akx}{A_1} + \frac{A_0}{A_1}}} e^{-ikx}$$

Cette solution montre que l'amplitude de la pression est inversement proportionnelle à la racine carrée de A. Par la suite, nous nous référerons parfois à cette solution en l'appelant solution "exacte".

### II.1.7.- Fréquences propres -

On peut calculer les fréquences propres à partir de la relation :

$$V = \frac{1}{i\rho\omega} \partial_x p$$

D'après la formule (II.31), on a :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{-\frac{ak}{A_1} P_1}{2\left(\frac{akx}{A_1} + 1 - \frac{ak\rho}{A_1}\right)^{3/2}} e^{ikx} + ik \frac{P_1}{\left(\frac{akx}{A_1} + 1 - \frac{ak\rho}{A_1}\right)^{1/2}} e^{ikx} - \frac{\frac{ak}{A_1} P_2}{2\left(\frac{akx}{A_1} + 1 - \frac{ak\rho}{A_1}\right)^{3/2}} e^{-ikx} - ik \frac{P_2}{\left(\frac{akx}{A_1} + 1 - \frac{ak\rho}{A_1}\right)^{1/2}} e^{-ikx}$$

En considérant les conditions aux limites, on obtient :

$$V = \begin{cases} x=0 \\ x=l \end{cases} = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \begin{cases} x=0 \Rightarrow P_1 \left[ \frac{-\frac{ak}{A_1}}{2\left(1 - \frac{ak\rho}{A_1}\right)} + ik \right] - P_2 \left[ \frac{\frac{ak}{A_1}}{2\left(1 - \frac{ak\rho}{A_1}\right)} + ik \right] = 0 \\ x=l \Rightarrow P_1 \left[ \frac{-\frac{ak}{2A_1}}{2A_1} + ik \right] e^{ikl} - P_2 \left[ \frac{\frac{ak}{2A_1}}{2A_1} + ik \right] e^{-ikl} = 0 \end{cases}$$

Pour que ce système ait une solution non nulle, il faut que son déterminant soit nul, c'est-à-dire :

$$\left[ \frac{-\frac{ak}{A_1}}{2(1-\frac{akl}{A_1})} + ik \right] \left[ \frac{ak}{2A_1} + ik \right] e^{-ikl} - \left[ \frac{\frac{ak}{2A_1}}{1-\frac{akl}{A_1}} + ik \right] \left[ -\frac{ak}{2A_1} + ik \right] e^{ikl} = 0$$

ce qui donne :

$$\gamma_{kl} = \frac{\frac{1}{2} \frac{a^2}{A_1^2} kl}{1 - \frac{akl}{A_1} + \frac{a^2}{4A_1^2}} .$$

Si on pose :

$$kl = n\pi + \epsilon$$

on a :

$$(II.32) \quad \epsilon = \frac{\frac{1}{2} \frac{a^2}{A_1^2} kl}{1 - \frac{akl}{A_1} + \frac{a^2}{4A_1^2}}$$

On en déduit la variation relative de fréquence propre :

$$\frac{\Delta F}{F_1} = \frac{\epsilon}{n\pi}$$

soit :

$$\frac{\Delta F}{F_1} = \frac{1}{2n\pi} \cdot \frac{\left(\frac{akl}{A_1}\right)^2}{kl \left(1 - \frac{akl}{A_1} + \frac{a^2}{4A_1^2}\right)}$$

et en négligeant  $\frac{a^2}{A_1^2}$  devant l'unité :

$$(II.33) \quad \frac{\Delta F}{F_1} = \frac{1}{2n^2\pi^2} \frac{\left(1 - \frac{A_0}{A_1}\right)^2}{\frac{A_0}{A_1}}$$

Ce résultat n'est pas très différent de celui de la formule (II.28).

## II.2.- PAVILLON A SECTION VARIANT EXPONENTIELLEMENT -

Nous reprenons les calculs précédents pour le cas où la section du domaine  $\omega$  varie suivant la loi :

$$A = A_0 e^{-mx}$$

Pour décrire le rayonnement de la source  $\mu_1 \delta_0$ , on choisit :

$$\varphi_0(x) = e^{ikx}$$

et on trouve d'après la formule (II.6) les expressions suivantes :

$$0 \leq x \leq l \Rightarrow \hat{\psi}_0(x) = \left[ -\frac{1}{2} \frac{A_0}{A_1} \frac{1}{1 + \frac{im}{2k}} e^{-ml} + \frac{1}{2} \right] e^{2ikl - ikx} + \frac{1}{2} \frac{A_0}{A_1} \frac{1}{1 + \frac{im}{2k}} e^{-mx} e^{ikx} - \frac{1}{2} e^{ikx}$$

et

$$x \leq 0 \Rightarrow \hat{\psi}_0(x) = \left[ \left( -\frac{1}{2} \frac{A_0}{A_1} \frac{e^{-ml}}{1 + \frac{im}{2k}} + \frac{1}{2} \right) e^{2ikl} + \frac{1}{2} \frac{A_0}{A_1} \frac{1}{1 + \frac{im}{2k}} - \frac{1}{2} \right] e^{-ikx}$$

ou  $x \leq 0 \Rightarrow \hat{\psi}_0(x) = t_2 e^{-ikx}$

avec  $t_2 = \left[ \left( -\frac{1}{2} \frac{A_0}{A_1} \frac{e^{-ml}}{1 + \frac{im}{2k}} + \frac{1}{2} \right) e^{2ikl} + \frac{1}{2} \frac{A_0}{A_1} \frac{1}{1 + \frac{im}{2k}} - \frac{1}{2} \right]$

Le détail des calculs se trouve dans l'Annexe II.

Ainsi d'après la formule (II.7), on trouve :

$$D_{00} = 2ikA_1 \left\{ t_2 - \frac{1}{2} \left[ \frac{A_0}{A_1} \frac{k}{-2k - im} \left( e^{(2ik - m)l} - 1 \right) + \frac{1}{2} \left( e^{2ikl} - 1 \right) \right] + \frac{1}{2} \frac{A_0}{A_1} \left[ \frac{A_0}{A_1} \frac{k}{-2k - 2im} \left( e^{(2ik - 2m)l} - 1 \right) - \frac{k}{-2k - im} \left( e^{(2ik - m)l} - 1 \right) \right] \right\}$$

Le détail des calculs est donné dans l'Annexe III.

En posant  $\frac{A_0}{A_1} = 1$  on trouve :

$$D_{00} = 2ikA_1 \left[ t_2 + \left( -\frac{1}{4} + \frac{e^{-m\ell}}{1 + \frac{i\omega}{k}} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1 + \frac{i\omega}{2k}} \right) e^{(2ik-m)\ell} + \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{1 + \frac{i\omega}{k}} - \frac{1}{4} - \frac{1}{1 + \frac{i\omega}{k}} \right) \right. \\ \left. + \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{e^{-m\ell}}{1 + \frac{i\omega}{2k}} \right) e^{2ik\ell} + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \frac{i\omega}{2k}} \right) \right]$$

si on suppose que :

$$m\ell \ll 1 \text{ et } \frac{m}{k} \ll 1$$

Alors :

$$D_{00} = 2ikA_1 \left\{ t_2 + \frac{1}{4} \left[ -\left(1 - \frac{i\omega}{k}\right)(1 - 2m\ell) + \left(1 - \frac{i\omega}{2k}\right)(1 - m\ell) - 1 \right. \right. \\ \left. \left. + \left(1 - \frac{i\omega}{2k}\right)(1 - m\ell) \right] e^{2ik\ell} + \frac{1}{4} \left[ 1 - \frac{i\omega}{k} - \left(1 - \frac{i\omega}{2k}\right) + 1 - \left(1 - \frac{i\omega}{2k}\right) \right] \right\}$$

ou après simplification :

$$D_{00} = 2ikA_1 \left\{ t_2 \right\}$$

En reportant les valeurs de  $\psi_0(s)$ ,  $\psi_0(x)$  et  $D_{00}$  dans l'expression de (II.4), on trouve :

$$s \leq 0 \Rightarrow \Gamma_s(x) \approx \frac{t_2 e^{-aks} \left[ e^{ikx} + \left( \frac{1}{2} \frac{e^{-mx}}{1 + i\omega/2k} - \frac{1}{2} \right) e^{ikx} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{e^{-m\ell}}{1 + i\omega/2k} \right) e^{-ikx} \right]}{2ikA_1 t_0}$$

ou

$$s \leq 0 \Rightarrow \Gamma_s(x) \approx \frac{1}{2ikA_1} \left[ e^{ik(x-s)} + \frac{1}{2} \left( \frac{e^{-mx}}{1 + i\omega/2k} - 1 \right) e^{ikx} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{e^{-m\ell}}{1 + i\omega/2k} \right) e^{2ik\ell - ikx} \right]$$

qui donne l'expression exacte de  $\Gamma_s(x)$  pour  $s \leq 0$  si on néglige les termes petits devant l'unité.

En portant les expressions de  $\hat{\Psi}(s)$ ,  $\hat{\Psi}(x)$  et  $D_{00}$  dans la formule (II.9), on trouve :

$$\mathcal{G}_s(x) - \Gamma_s(x) \approx - \frac{1}{2ikA_1} e^{-iks} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{e^{-mx}}{1 + \frac{im}{2k}} - 1 \right) e^{ikx} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{e^{-ml}}{1 + \frac{im}{2k}} \right) e^{2ikl - ikx} \right]$$

pour  $s \leq 0$  avec  $\frac{m}{k} \ll 1$  et  $ml \ll 1$

Pour décrire le rayonnement de la source  $\mu_2 \delta_l$ , on choisit  $\varphi_0(x) = e^{-ikx}$ . La formule (II.11) pour  $A = A_0 e^{-mx}$  donne :

$$0 \leq x \leq l \Rightarrow \hat{\Psi}_0(x) = \left[ -\frac{1}{2} \frac{A_0}{A_1} \frac{1}{1 - \frac{im}{2k}} + \frac{1}{2} \right] e^{ikx} + \frac{1}{2} \frac{A_0}{A_1} \frac{1}{1 - \frac{im}{2k}} e^{-mx} e^{-ikx} - \frac{1}{2} e^{-ikx}$$

et  $x \geq l \quad \hat{\Psi}_0(x) = -\frac{1}{2} e^{-ikx}$

Le détail des calculs se trouve dans l'Annexe II.

Si on suppose encore  $ml \ll 1$  et  $\frac{m}{k} \ll 1$  en prenant  $\frac{A_0}{A_1} = 1$  on trouve :

$$D_{00} = -2ikA_1 \bar{T}_2$$

En portant  $\hat{\Psi}(s)$ ,  $\varphi_0(x)$  et  $D_{00}$  dans l'expression (II.4) on trouve :

$$s \geq l \Rightarrow \Gamma_s(x) \approx \frac{-\bar{T}_2 e^{iks} \left[ e^{-ikx} + \left( -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{im}{2k}} + \frac{1}{2} \right) e^{ikx} + \left( \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{im}{2k}} e^{-mx} - \frac{1}{2} \right) e^{-ikx} \right]}{-2ikA_1 \bar{T}_2}$$

ou

$$s \geq l \Rightarrow \Gamma_s(x) \approx \frac{1}{2ikA_1} \left[ e^{ik(s-x)} + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{1 - \frac{im}{2k}} + 1 \right) e^{ikx} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - \frac{im}{2k}} e^{-mx} - 1 \right) e^{-ikx} \right]$$

qui donne l'expression exacte de  $\Gamma_s(x)$  pour  $s \geq l$  lorsqu'on néglige des termes petits devant l'unité.

En portant  $\hat{\psi}_0(s)$ ,  $\hat{\psi}_0(x)$  et  $D_{00}$  dans la formule (II.9) on trouve pour expression approchée  $\mathcal{G}_s(x)$  pour  $S \gg l$  :

$$(II.34) \quad \mathcal{G}_s(x) - \Gamma_s(x) \approx - \frac{1}{2ikA_1} e^{iks} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{e^{-mx}}{1 - \frac{i\mu}{2k}} - 1 \right) e^{-ikx} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{1 - \frac{i\mu}{2k}} \right) e^{ikx} \right]$$

pour  $S \gg l$  avec  $ml \ll 1$  et  $\frac{\mu}{k} \ll 1$

### II.2.1.- Fréquences propres -

Pour écrire les conditions aux limites il nous faut là encore trouver la meilleure approximation du déplacement  $\xi$ .

Si on porte  $A = A_0 e^{-mx}$  dans la formule (II.22) il vient :

$$(II.35) \quad -k^2 \xi = -m \partial_x \xi + \partial_{xx}^2 \xi$$

ce qui montre que  $\xi$  vérifie la même équation que le potentiel des vitesses ; on peut donc exprimer  $\xi$  par :

$$\xi = \mu_1 \mathcal{G}_0(x) + \mu_2 \mathcal{G}_l(x)$$

Pour un pavillon à extrémités réfléchissantes les conditions aux limites conduisent à :

$$V=0 \Rightarrow \xi=0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x=0 \quad \rightarrow \quad \mu_1 \mathcal{G}_0(0) + \mu_2 \mathcal{G}_l(0) = 0 \\ x=l \quad \rightarrow \quad \mu_1 \mathcal{G}_0(l) + \mu_2 \mathcal{G}_l(l) = 0 \end{array} \right.$$

D'où l'équation aux fréquences propres :

$$\mathcal{G}_0(0) \mathcal{G}_l(l) - \mathcal{G}_0(l) \mathcal{G}_l(0) = 0$$

On a :

$$y_0(0) = \frac{1}{2ikA_1} \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{im}{2k}} - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{e^{-ml}}{1 + \frac{im}{2k}} \right) e^{2ikl} \right]$$

$$y_l(l) = \frac{1}{2ikA_1} \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{e^{-ml}}{1 - \frac{im}{2k}} - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{1 - \frac{im}{2k}} \right) e^{2ikl} \right]$$

$$y_0(l) = \frac{1}{2ikA_1} e^{ikl} \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{e^{-ml}}{1 + \frac{im}{2k}} - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{e^{-ml}}{1 + \frac{im}{2k}} \right) \right]$$

$$y_l(0) = \frac{1}{2ikA_1} e^{ikl} \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{im}{2k}} - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{1 - \frac{im}{2k}} \right) \right]$$

Ces relations nous donnent :

$$\frac{1}{1 + \frac{m^2}{4k^2}} \left[ \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \frac{im}{k} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{im}{2k} - e^{-ml} \right) e^{2ikl} \right] \left[ \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \frac{im}{k} - \frac{1}{2} e^{-ml} + \frac{1}{4} \frac{im}{k} e^{2ikl} \right] = e^{2ikl}$$

Après avoir effectué les calculs et en posant  $e^{-ml} = 1 - ml$ , on trouve :

$$1 - e^{2ikl} + \frac{1}{2} ml - \frac{1}{2} ml e^{2ikl} + \frac{3}{8} \frac{im}{k} ml + \frac{1}{4} \frac{im}{k} ml e^{2ikl} - \frac{1}{8} \frac{im}{k} ml e^{4ikl} + \frac{9}{16} \frac{m^2}{k^2} - \frac{3}{8} \frac{m^2}{k^2} e^{2ikl} + \frac{1}{16} \frac{m^2}{k^2} e^{4ikl} - \frac{m^2}{4k^2} e^{2ikl} = 0$$

Si on pose encore  $kl = m\pi + \ell$ , on obtient :

$$-i[2\ell] - \frac{1}{2} iml[2\ell] + \frac{1}{2} \frac{im}{k} - i \frac{m^2}{4k^2} [2\ell] = 0$$

Soit finalement :

$$(II.36) \quad \ell = \frac{\frac{1}{4} \frac{m}{k} ml}{1 + \frac{1}{2} ml + \frac{m^2}{4k^2}}$$

### II.2.2.- Solution classique -

En portant dans l'équation (II.35) une solution de la forme

$$\xi = B e^{i\gamma x}$$

on trouve :

$$\gamma^2 + i\gamma m - k^2 = 0$$

d'où :

$$\gamma = -i\frac{m}{2} \pm \sqrt{k^2 - \frac{m^2}{4}}$$

Ainsi la solution générale de cette équation sera de la forme :

$$\xi = e^{\frac{m}{2}x} \left[ B e^{ikz x} + C e^{-ikz x} \right]$$

avec

$$z = \sqrt{1 - \frac{m^2}{4k^2}}$$

En écrivant les conditions aux limites, on trouve :

$$V = 0 \Rightarrow \xi \begin{cases} x=0 \\ x=l \end{cases} = 0 \Rightarrow \begin{cases} B + C = 0 \\ B e^{ikzl} + C e^{-ikzl} = 0 \end{cases}$$

ce qui donne pour les fréquences propres :

$$\sin kzl = 0$$

ou

$$kzl = n\pi$$

Mais on a :

$$z = \sqrt{1 - \frac{m^2}{4k^2}} \approx 1 - \frac{m^2}{8k^2}$$

Soit :

$$kl = n\pi + \epsilon$$

d'où

$$\epsilon = \frac{m^2 l}{8k}$$

qui n'est pas loin du résultat (II.36) qu'on a trouvé d'après la formule approchée.

CHAPITRE III



VERIFICATION EXPERIMENTALE



C H A P I T R E        I I I

-----

V E R I F I C A T I O N        E X P E R I M E N T A L E

-----

En vue d'éprouver la validité de l'approximation proposée au chapitre précédent (§ II.1.2), nous avons effectué l'étude expérimentale suivante :

On a réalisé deux tuyaux de même longueur, l'un de section constante rectangulaire sert de référence (I) ; la section du second est rectangulaire mais varie linéairement suivant le grand axe.

Les diverses dimensions sont précisées sur le schéma (I) (p.53).

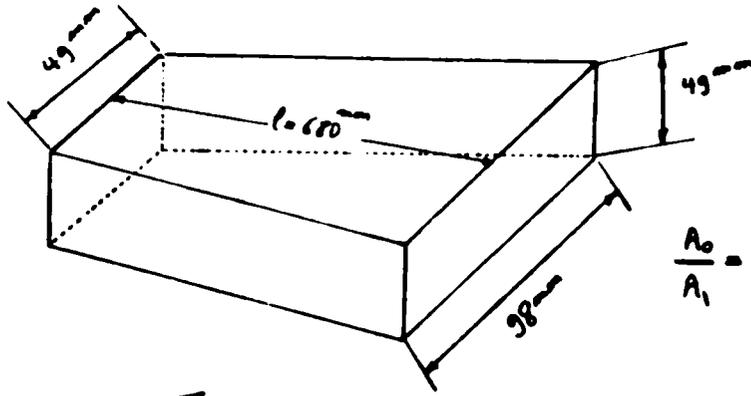
Ces guides sont fermés par deux sections droites rigides et dont l'une percée d'un trou où débouche une sonde reliée à une chambre de compression. Le trou est assez petit pour ne pas perturber la condition de réflexion totale. Les enceintes acoustiques ainsi constituées sont réalisées en plaque de duralumin de 8 mm d'épaisseur de sorte que la condition aux limites de Neumann est très bien satisfaite.

Le montage de mesure est schématisé sur la figure (2) (p.53). La fréquence d'excitation est obtenue à partir d'un synthétiseur (Stabilité relative :  $10^{-8}$ ).

Pour déterminer les longueurs d'onde propres du tuyau on effectue un repérage des fréquences propres, puis on mesure la distance entre deux minima consécutifs ; on compare ensuite les résultats obtenus avec l'un puis l'autre tuyau.

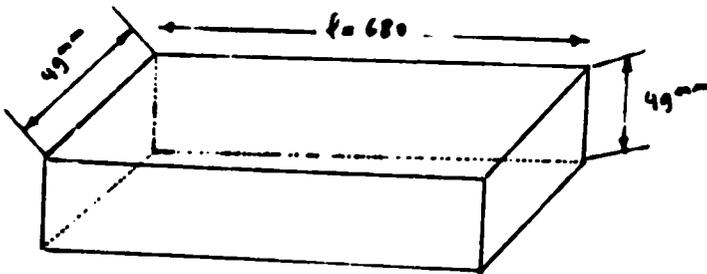
Remarque :

-----  
En ce qui concerne le premier mode, un seul noeud de pression apparaît ; aussi mesure-t-on la distance qui le sépare de l'extrémité du pavillon et qui est égale à un quart de la longueur d'onde.



$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{49 \times 49}{49 \times 98} = \frac{1}{2}$$

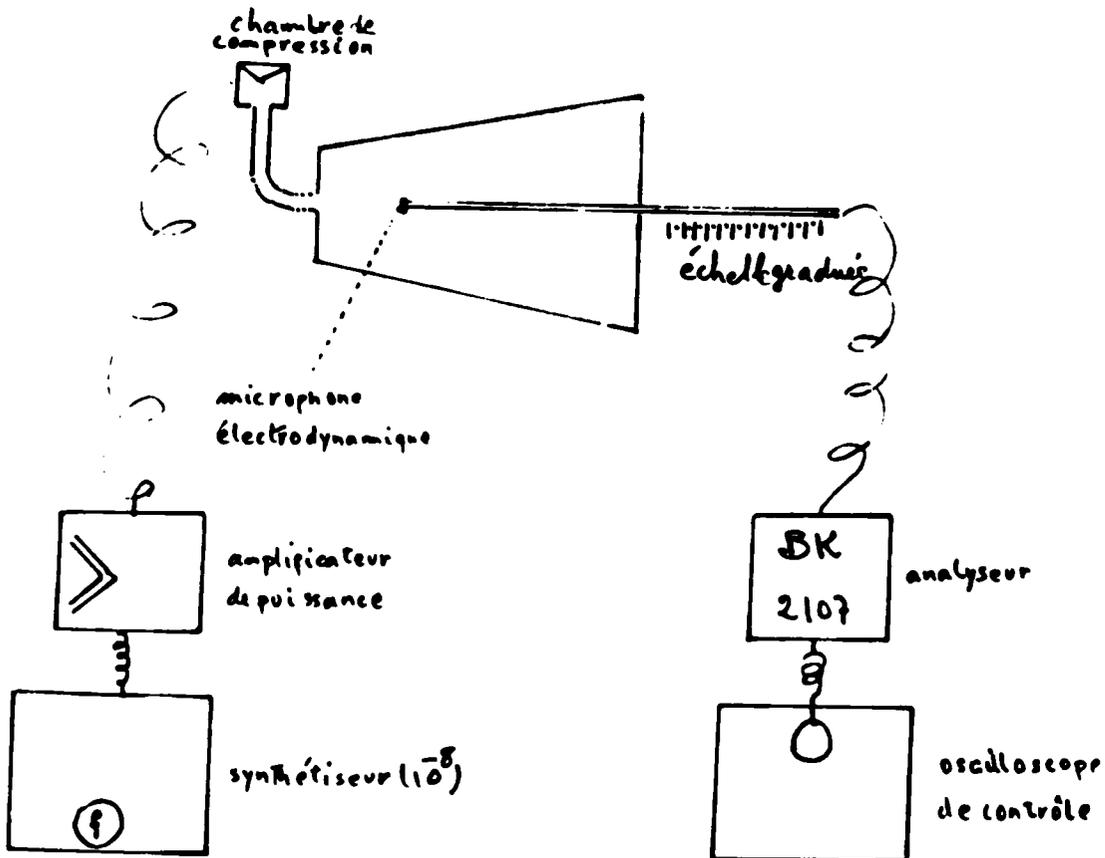
I



$$\frac{A_0}{A_1} = 1$$

I

(Fig 1)



(Fig 2)

Pour repérer les fréquences propres on a placé un microphone à condensateur (type B. & K.) sur l'une des parois du pavillon ; la face avant du microphone affleure exactement cette paroi. On fait varier la fréquence du synthétiseur jusqu'à obtention du signal maximum au microphone ; ceci a lieu si la fréquence du synthétiseur est une fréquence de résonance du pavillon. On a placé en outre un autre microphone électrodynamique mobile selon l'axe du pavillon en vue de repérer les minima successifs du champ ; on a noté ces positions ( $d_1, d_2 \dots d_n$ ). Les minima successifs sont distants d'une demi longueur d'onde, ce qui permet d'évaluer la longueur d'onde correspondante. Pour contrôler la mesure de la longueur d'onde propre on l'a déduite de la mesure de fréquence en tenant compte de la variation de la célérité  $c$  du son en fonction de la température :

$$c = 331 \sqrt{1 + \frac{t}{273}}$$

où  $t$  est la température en degrés centigrades.

On a calculé ensuite le rapport  $R = \frac{f' - f}{f}$  ( $f'$  étant la fréquence propre du pavillon de section variable et  $f$  celle du pavillon de référence) ;

puis on a évalué la moyenne des mesures effectuées à des dates différentes,

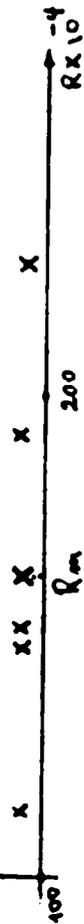
$$R_m = \frac{R_1 + \dots + R_n}{n} .$$
 On a estimé l'erreur sur  $R$  par l'écart maximum entre

$R_m$  et les différentes mesures  $R$  :

$$\Delta R = \max | R_m - R_n | .$$

Les résultats des mesures sont récapitulés dans les tableaux suivants.

Dispersion des mesures par rapport  
à la moyenne (n = 1)



Température (Degrés)	Fréquence mesurée (Hz) Tube I	Fréquence mesurée (Hz) Tube II	$\lambda = \frac{c}{f}$ (cm) Tube I	$\lambda = 4(d_1 - d_2)$ (cm) Tube I	$\lambda = \frac{c}{f}$ (cm) Tube II	$\lambda = 4(d_1 - d_2)$ (cm) Tube II	$R = \frac{f' - f}{f}$
19	262	266	130,66	4(58,1-26)=128,4	128,69	4(56,1-26)=120,4	0,0153
18	261	267	130,93	4(58 - 26)=128,0	127,99	4(55,8-26)=119,2	0,0230
17	260	265	131,21	4(58,2-26)=128,8	128,74	4(56,1-26)=120,4	0,0192
18	261	267	130,93	4(60 - 26)=136,0	127,99	4(55,8-26)=119,2	0,0230
19	261	265	131,11	4(57,1-26)=124,4	129,17	4(56,2-26)=120,8	0,0153
17,4	261	264	130,80	4(58,2-26)=128,8	129,26	4(56,2-26)=120,4	0,0115
18,5	262	265	130,54	4(57,8-26)=127,2	129,06	4(56 - 26)=120,0	0,0115
18	261	265	130,93	4(58,1-26)=128,4	128,95	4(56 - 26)=120,0	0,0153
18,4	261	265	131,02	4(58,1-26)=128,4	129,00	4(56 - 26)=120,0	0,0153
20	263	267	130,38	4(56,9-26)=123,6	128,43	4(56,6-26)=122,4	0,0152

T A B L E A U I (n = 1)

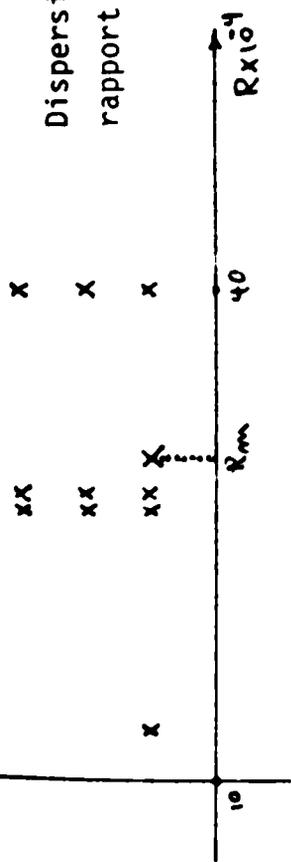
Dispersion des mesures par rapport  
à la moyenne (n = 2)



Température (Degrés)	Fréquence mesurée (Hz) Tube I	Fréquence mesurée (Hz) Tube II	$\lambda = \frac{c}{f}$ (cm) Tube I	$\lambda = 2(d_1 - d_2)$ (cm) Tube I	$\lambda = \frac{c}{f}$ (cm) Tube II	$\lambda = 2(d_1 - d_2)$ (cm) Tube II	$R = \frac{f' - f}{f}$
19	505	508	67,79	2(75,7-41,7)=68,0	67,39	2(75,1-41,5)=67,2	0,0059
18	505	508	67,67	2(75,7-41,8)=67,8	67,27	2(75,1-41,6)=67,0	0,0059
17	503	506	67,82	2(75,8-41,8)=68,0	67,42	2(75,4-41,7)=67,2	0,0060
18	505	508	67,66	2(75,7-41,6)=68,2	67,27	2(74,8-41,5)=66,6	0,0059
19	505	508	67,76	2(75,65-41,75)=67,8	67,39	2(75-41,5) = 67,0	0,0059
17,4	504	506	67,73	2(75,6-41,8)=67,6	67,44	2(75,1-41,6)=67,0	0,0040
18,5	506	508	67,59	2(75,5-41,7)=67,6	67,32	2(74,17-41,4)=66,6	0,0040
18	504	507	67,80	2(75,7-41,8)=67,8	67,40	2(75,1-41,6)=67,0	0,0060
18,4	505	507	67,72	2(75,5-41,7)=67,6	67,43	2(75,2-41,5)=67,4	0,0040
20	507	509	67,63	2(75,5-41,9)=67,2	67,36	2(75 - 41,5)=67,0	0,0039

T A B L E A U II (n = 2)

Dispersion des mesures par rapport à la moyenne (n = 3)



Température (Degrés)	Fréquence mesurée (Hz) Tube I	Fréquence mesurée (Hz) Tube II	$\lambda = \frac{c}{f}$ (cm) Tube I	$\lambda = 2(d_1 - d_2)$ (cm) Tube I	$\lambda = \frac{c}{f}$ (cm) Tube II	$\lambda = 2(d_1 - d_2)$ (cm) Tube II	$R = \frac{f' - f}{f}$
19	755	757	45,34	$2(58,9-36,2)=45,4$	45,22	$2(58,9-36,3)=45,2$	0,0026
18	754	757	45,32	$2(58,8-36,2)=45,2$	45,14	$2(81,3-58,8)=45,0$	0,0040
17	752	754	45,37	$2(59-36,3) = 45,4$	45,25	$2(81,7-59,1)=45,2$	0,0027
18	754	757	45,32	$2(58,8-36) = 45,6$	45,14	$2(58,7-36,1)=45,2$	0,0040
19	755	757	45,32	$2(59-36,3) = 45,4$	45,22	$2(58,8-36,4)=44,8$	0,0026
17,4	753	755	45,34	$2(59-36,2) = 45,6$	45,20	$2(58,9-36,3)=45,2$	0,0027
18,5	755	757	45,30	$2(58,8-36,1)=45,4$	45,18	$2(58,7-36) = 45,4$	0,0026
18	753	756	45,38	$2(58,9-36,2)=45,4$	45,20	$2(81,5-59) = 45,0$	0,0040
18,4	754	756	45,35	$2(81,7-59) = 45,9$	45,22	$2(81,5-58,9)=45,2$	0,0027
20	758	759	45,23	$2(58,8-36,4)=44,8$	45,17	$2(58,7-36,5)=44,4$	0,0013

T A B L E A U I I I (n = 3)

Mode axiale n	$R_m$	$\Delta R$	R calculé approché	R calculé asymptotique
1	0,0164	0,0066	0,0250	0,0250
2	0,0051	0,0012	0,0063	0,0063
3	0,0029	0,0011	0,0028	0,0028

T A B L E A U IV

Le Tableau IV fait apparaître la comparaison entre les valeurs calculées de R par les deux méthodes exposées au chapitre II (§ II.1.2 et § II.1.5) et la valeur moyenne  $R_m$  des mesures.

On constate que calculs et expérience sont en bonne concordance, l'erreur maximum apparaissant sur le premier mode dont le repérage est toujours le plus délicat.



C H A P I T R E    I V



C O N C L U S I O N



CHAPITRE IV

CONCLUSION

IV.1.- PAVILLON DE SECTION VARIANT LINEAIREMENT -

On a trouvé d'après la première approximation de  $\varphi - \Gamma$  une expression du glissement de fréquence propre  $\varepsilon_1$  :

$$(IV.1) \quad \varepsilon_1 = \frac{\frac{1}{4} \frac{a^2}{A_1^2} k l}{1 - \frac{2}{3} \frac{a k l}{A_1}} \quad \text{avec} \quad \frac{a k l}{A_1} \ll 1$$

Mais la valeur "exacte" de ce glissement de fréquence a pour expression :

$$(IV.2) \quad \varepsilon_2 = \frac{\frac{1}{2} \frac{a^2}{A_1^2} k l}{1 - \frac{a k l}{A_1}}$$

On constate que pour  $\frac{a k l}{A_1} \sim \frac{1}{2}$  les deux formules donnent à peu près le même résultat, mais pour  $\frac{a k l}{A_1} \ll 1$  la formule "exacte" donne  $\varepsilon_2$  deux fois plus grand que  $\varepsilon_1$ .

Les calculs suivants montrent que ceci correspond à l'approximation de :

$$\sqrt{1 + \frac{a k x}{A_1} - \frac{a k l}{A_1}} \quad \text{par} \quad 1 + \frac{a k x}{2 A_1} - \frac{a k l}{2 A_1}$$

dans la formule "exacte".

En effet d'après la formule (II.31), on a :

$$\psi = \frac{P_1}{\sqrt{1 + \frac{akh}{A_1} - \frac{ahf}{A_1}}} e^{ikx} + \frac{P_2}{\sqrt{1 + \frac{akh}{A_1} - \frac{ahf}{A_1}}} e^{-ikx}$$

En écrivant :

$$\psi = \frac{P_1}{1 + \frac{1}{2} \left( \frac{akh}{A_1} - \frac{ahf}{A_1} \right)} e^{ikx} + \frac{P_2}{1 + \frac{1}{2} \left( \frac{akh}{A_1} - \frac{ahf}{A_1} \right)} e^{-ikx}$$

on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} = & \frac{-\frac{1}{2} \frac{ah}{A_1} P_1}{\left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{akh}{A_1} - \frac{ahf}{A_1} \right) \right]^2} e^{ikx} + ik \frac{P_1}{\left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{akh}{A_1} - \frac{ahf}{A_1} \right) \right]} e^{ikx} \\ & - \frac{\frac{1}{2} \frac{ah}{A_1} P_2}{\left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{akh}{A_1} - \frac{ahf}{A_1} \right) \right]^2} e^{-ikx} - ik \frac{P_2}{\left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{akh}{A_1} - \frac{ahf}{A_1} \right) \right]} e^{-ikx} \end{aligned}$$

En considérant les conditions aux limites, il vient :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \begin{cases} x=0 \Rightarrow \left[ \frac{-\frac{1}{2} \frac{ah}{A_1}}{\left( 1 - \frac{1}{2} \frac{ahf}{A_1} \right)^2} + ik \frac{1}{1 - \frac{ahf}{2A_1}} \right] P_1 - \left[ \frac{\frac{1}{2} \frac{ah}{A_1}}{\left( 1 - \frac{1}{2} \frac{ahf}{A_1} \right)^2} + \frac{ik}{1 - \frac{ahf}{2A_1}} \right] P_2 = 0 \\ x=l \Rightarrow \left[ -\frac{ah}{2A_1} + ik \right] P_1 e^{ikl} + \left[ -\frac{ah}{2A_1} - ik \right] P_2 e^{-ikl} = 0 \end{cases}$$

d'où :

$$\left[ \frac{-\frac{ah}{2A_1}}{1 - \frac{1}{2} \frac{ahf}{A_1}} + ik \right] \left[ -\frac{ah}{2A_1} - ik \right] e^{-ikl} - \left[ \frac{-\frac{ah}{2A_1}}{1 - \frac{1}{2} \frac{ahf}{A_1}} - ik \right] \left[ -\frac{ah}{2A_1} + ik \right] e^{ikl} = 0$$

ce qui donne :

$$y_{kl} = \frac{\frac{1}{4} \frac{a^2}{A_1^2} k l}{1 - \frac{a k l}{2 A_1} + \frac{a^2}{4 A_1^2}}$$

Soit avec  $kl = n\pi + \epsilon$

$$(IV.3) \quad \epsilon = \frac{\frac{1}{4} \frac{a^2}{A_1^2} k l}{1 - \frac{a k l}{2 A_1} + \frac{a^2}{4 A_1^2}}$$

qui est l'expression  $\epsilon_1$  (IV.1) pour  $\frac{a k l}{A_1} \ll 1$ .

#### IV.2.- PAVILLON DE SECTION VARIANT EXPONENTIELLEMENT -

-----

On a trouvé d'après la première approximation de  $y - \Gamma$  une expression du glissement de fréquence propre  $\epsilon_1$  :

$$(IV.4) \quad \epsilon_1 = \frac{\frac{1}{4} \frac{m}{k} m l}{1 + \frac{1}{2} m l + \frac{m^2}{4 k^2}}$$

Mais la valeur "exacte" de ce glissement de fréquence propre a pour expression :

$$(IV.5) \quad \epsilon_2 = \frac{1}{8} \frac{m}{k} m l$$

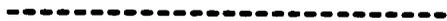
On constate que pour  $ml \ll 1$  l'expression de  $\epsilon_1$  (IV.4) est deux fois plus grande que  $\epsilon_2$  (IV.5)

Ce travail montre en définitive, qu'en appliquant la théorie générale développée par P.FILIPPI, nous avons pu obtenir une bonne approximation des premières fréquences propres axiales d'un tuyau de section variable à extrémités réfléchissantes. L'expérience simple a permis de confirmer que l'équation approchée adoptée ainsi que la méthode de calcul utilisée étaient bien adaptées au phénomène.

Les résultats que nous avons obtenus sur cet exemple simple permettent d'espérer que la théorie proposée soit efficace dans des cas plus complexes pour lesquels aucune solution analytique n'est possible.



**B I B L I O G R A P H I E**



B I B L I O G R A P H I E

-----

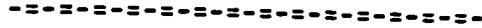
- {1} FILIPPI (P.), "Wave Phenomena in inhomogeneous Media", à paraître dans : "Quarterly of Applied Mathematics", Brown University, Providence.
- {2} TAVERA (G.), "Contribution à l'étude des déformations de milieux élastiques non homogènes", Thèse de Spécialité en Acoustique, Marseille, 1975.
- {3} PEUBE (J.L.) & CHASSERIAUX (J.), "Non-Linear Acoustics in Ducts with varying cross-section", Journal of Sound and Vibration, (1973), 27(4), p.533-548.
- {4} SOLOMON (L.), "Analyse fonctionnelle élémentaire et applications à l'étude de certaines équations de la physique mathématique", Cours de A.E.A., Poitiers.
- {5} BREKHOVSKIKH (L.M.), "Waves in Layered Media", Academic Press Publishers, New-York, 1960.



A N N E X E I

-----

A N N E X E I



Soit  $b_{\Sigma}^{i,j}$ , une solution du système (I.34) correspond à ( $i = 0, 1, \dots, N-1$ )  
 et ( $j = 0, 1, \dots, N-1$ ). On définit  $\beta_{\Sigma}^j$  et  $B_{\Sigma}^i$  tels que :

$$(1) \quad \begin{cases} \beta_{\Sigma}^j = b_{\Sigma}^j - b_{\Sigma}^{i,j} & j = 0, 1, \dots, N-1 \\ \beta_{\Sigma}^N = b_{\Sigma}^N \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} B_{\Sigma}^i = 0 & i = 0, 1, \dots, N-1 \\ B_{\Sigma}^N = \hat{\Psi}_N(\Sigma) - \sum_{j=0}^{N-1} b_{\Sigma}^{i,j} D_{Nj} \end{cases}$$

D'une manière similaire, on a :

$$(3) \quad \begin{cases} \beta_s^i = b_s^i - b_s^{i,i} & i = 0, 1, \dots, N-1 \\ \beta_s^N = b_s^N \end{cases}$$

et

$$(4) \quad \begin{cases} B_s^j = 0 & j = 0, 1, \dots, N-1 \\ B_s^N = \hat{\Psi}_N(s) - \sum_{i=0}^{N-1} b_s^{i,i} D_{iN} \end{cases}$$

D'après ces définitions on peut montrer que  $\beta_{\Sigma}^j$  et  $\beta_S^i$  sont les solutions des équations suivantes :

$$(5) \quad \sum_{j=0}^N D_{ij} \beta_{\Sigma}^j = B_{\Sigma}^i \quad i = 0, 1, \dots, N$$

et

$$(6) \quad \sum_{i=0}^N D_{ij} \beta_S^i = B_S^j \quad j = 0, 1, \dots, N$$

On établit cette égalité :

$$(7) \quad \phi_S^N(\Sigma) - \phi_S^{N-1}(\Sigma) = -B_{\Sigma}^N \beta_S^N$$

en écrivant :

$$(8) \quad - \left[ \sum_{j=0}^N b_{\Sigma}^j \hat{\psi}_j(s) - \sum_{j=0}^{N-1} b_{\Sigma}^j \hat{\psi}_j(s) \right] = - \left[ \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \beta_{\Sigma}^i b_S^j D_{ij} \right]$$

$$= - \left[ \sum_{i=0}^N B_{\Sigma}^i b_S^i \right] = -B_{\Sigma}^N b_S^N = -B_{\Sigma}^N \beta_S^N$$

On peut trouver l'expression de  $\beta_S^N$  d'après l'équation (6).

Comme  $B_S^j$  ( $j = 0, 1, \dots, N-1$ ) = 0, d'après la formule de Cramer on a :

$$(9) \quad \beta_S^N = B_S^N \frac{\overline{D_{N-1}}}{D_N}$$

Mais pour trouver  $\phi_S^N(\Sigma) - \phi_S^{N-1}(\Sigma)$ , il faudra encore chercher  $B_{\Sigma}^N$  et  $\beta_S^N$  ; pour ce faire, soit  $f_{\Sigma}^j$  et  $g_S^i$  définies par :

$$(10) \quad b_{\Sigma}^j = -f_{\Sigma}^j / f \quad , \quad b_S^i = -g_S^i / g$$

où  $f$  et  $g$  sont deux constantes arbitraires.

A cause des relations (5) et (6) les constantes  $f_{\Sigma}^j$ ,  $f$ ,  $g_S^i$  et  $g$  satisfont aux équations suivantes :

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^{N-1} D_{ij} f_{\Sigma}^j + \hat{\Psi}_i(\Sigma) f = 0 \\ \sum_{j=0}^{N-1} D_{Nj} f_{\Sigma}^j + (\hat{\Psi}_N(\Sigma) - B_{\Sigma}^N) f = 0 \end{array} \right. \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

et

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^{N-1} D_{ij} g_S^i + \hat{\Psi}_i(s) g = 0 \\ \sum_{i=0}^{N-1} D_{iN} g_S^i + (\hat{\Psi}_N(s) - B_s^N) g = 0 \end{array} \right. \quad j = 0, 1, \dots, N-1$$

Pour que l'équation (11) ait des solutions non nulles, il faut que le déterminant des coefficients soit nul, c'est-à-dire :

$$(13) \left| \begin{array}{cccc} D_{00} & D_{01} & \dots & D_{0N-1} & \hat{\Psi}_0(\Sigma) \\ D_{10} & D_{11} & \dots & D_{1N-1} & \hat{\Psi}_1(\Sigma) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ D_{N-10} & D_{N-11} & \dots & D_{N-1N-1} & \hat{\Psi}_{N-1}(\Sigma) \\ D_{N0} & D_{N1} & \dots & D_{NN-1} & \hat{\Psi}_N(\Sigma) - B_{\Sigma}^N \end{array} \right| = 0$$

Mais ce déterminant peut se séparer en deux déterminants :

$$(14) \quad \begin{vmatrix} D_{00} & D_{01} & \dots & D_{0N-1} & \hat{\Psi}_0(\Sigma) \\ D_{10} & D_{11} & \dots & D_{1N-1} & \hat{\Psi}_1(\Sigma) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ D_{N0} & D_{N1} & \dots & D_{NN-1} & \hat{\Psi}_N(\Sigma) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} D_{00} & D_{01} & \dots & D_{0N-1} & 0 \\ D_{10} & D_{11} & \dots & D_{1N-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ D_{N0} & D_{N1} & \dots & D_{NN-1} & \bar{D}_{\Sigma}^N \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$D_N[\hat{\Psi}_i(\Sigma)] - B_{\Sigma}^N \bar{D}_{N-1} = 0$$

d'où :

$$(15) \quad B_{\Sigma}^N = \frac{D_N[\hat{\Psi}_i(\Sigma)]}{\bar{D}_{N-1}}$$

De même d'après l'équation (12) on trouve :

$$(16) \quad B_S^N = \frac{D_N[\hat{\Psi}_i(s)]}{\bar{D}_{N-1}}$$

et en portant les valeurs de  $B_S^N$  et  $B_{\Sigma}^N$  dans l'expression (7), il vient :

$$\Phi_S^N(\Sigma) - \Phi_S^{N-1}(\Sigma) = - \frac{D_N[\hat{\Psi}_i(s)] D_N[\hat{\Psi}_i(\Sigma)]}{\bar{D}_{N-1} \bar{D}_N}$$

qui est l'expression de (I.39).

A N N E X E     I I



A N N E X E I I



I.- CALCUL DE LA FORMULE (II.6) -



$$a) \begin{cases} A = akx + A_0 \\ 0 < x < l \end{cases}$$

On a :

$$\hat{\Psi}_0(x) = \int_0^l \left[ -A \frac{1}{2ikA_1} e^{ik|x-y|} \frac{d}{dy} e^{iky} + kA \frac{1}{2ikA_1} e^{ik|x-y|} e^{iky} \right] dy$$

$$- \int_0^l \left[ -A_1 \frac{1}{2ikA_1} \frac{d}{dy} e^{ik|x-y|} \frac{d}{dy} e^{iky} + kA_1 \frac{1}{2ikA_1} e^{ik|x-y|} e^{iky} \right] dy$$

$$\Rightarrow \hat{\Psi}_0(x) = \int_0^x \frac{aky + A_0}{2ikA_1} \left[ -\frac{d}{dy} e^{ik(x-y)} \frac{d}{dy} e^{iky} + k e^{ik(x-y)} e^{iky} \right] dy$$

$$+ \int_x^l \frac{aky + A_0}{2ikA_1} \left[ -\frac{d}{dy} e^{ik(y-x)} \frac{d}{dy} e^{iky} + k e^{ik(y-x)} e^{iky} \right] dy$$

$$- \int_0^x \frac{A_1}{2ikA_1} \left[ -\frac{d}{dy} e^{ik(x-y)} \frac{d}{dy} e^{iky} + k e^{ik(x-y)} e^{iky} \right]$$

$$- \int_x^l \frac{A_1}{2ikA_1} \left[ -\frac{d}{dy} e^{ik(y-x)} \frac{d}{dy} e^{iky} \right]$$

$$+ k e^{ik(y-x)} e^{iky} \right] dy$$

la première et la troisième intégrales s'annulent.

En dérivant les expressions entre parenthèses, il vient :

$$(I) \quad \hat{\Psi}_0(x) = \frac{1}{2ik} \left[ \int_x^l \left( \frac{ak}{A_1} + \frac{A_0}{A_1} \right) 2k e^{2-ikx} e^{2iky} dy - \int_x^l 2k e^{2-ikx} e^{2iky} dy \right]$$

$$\Rightarrow \hat{\Psi}_0(x) = \frac{k}{i} e^{-ikx} \left[ \frac{ak}{A_1} \int_x^l y e^{2iky} dy + \left( \frac{A_0}{A_1} - 1 \right) \int_x^l e^{2iky} dy \right]$$

et en intégrant :

$$0 \leq x \leq l \Rightarrow \hat{\Psi}_0(x) = \frac{akx}{2A_1} e^{ikx} + \frac{ia}{4A_1} e^{ikx} + \frac{1}{2} \left( \frac{A_0}{A_1} - 1 \right) e^{ikx} - \left[ \frac{akl}{2A_1} + \frac{ia}{4A_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{A_0}{A_1} - 1 \right) \right] e^{2ikl-ikx}$$

b)  $A = akx + A_0$   
 $x \leq 0$

Pour  $x \leq 0$ , on a :

$$\hat{\Psi}_0(x) = \frac{k}{i} e^{-ikx} \left[ \frac{ak}{A_1} \int_0^l y e^{2iky} dy + \left( \frac{A_0}{A_1} - 1 \right) \int_0^l e^{2iky} dy \right]$$

$$\Rightarrow \hat{\Psi}_0(x) = e^{-ikx} \left[ -\frac{akl}{2A_1} e^{2ikl} - \frac{ia}{4A_1} e^{2ikl} + \frac{ia}{4A_1} - \frac{1}{2} \left( \frac{A_0}{A_1} - 1 \right) (e^{2ikl} - 1) \right]$$

c)  $A = A_0 e^{-mx}$

$0 < x < l$

En remplaçant  $(\frac{aky}{A_1} + \frac{A_0}{A_1})$  par  $\frac{A_0}{A_1} e^{-my}$  dans la formule I, on trouve

$$\hat{\Psi}_0(x) = \frac{k}{\lambda} e^{-ikx} \left[ \frac{A_0}{A_1} \int_x^l e^{2iky} e^{-my} dy - \int_x^l e^{2iky} dy \right]$$

En intégrant, il vient :

$$0 \leq x \leq l \quad \hat{\Psi}_0(x) = \left[ -\frac{A_0}{2A_1} \frac{1}{1 + \frac{im}{2k}} e^{-ml} + \frac{1}{2} \right] e^{2ikl - ikx} + \frac{A_0}{2A_1} \frac{1}{1 + \frac{im}{2k}} e^{-mx} e^{ikx} - \frac{1}{2} e^{ikx}$$

d)  $A = A_0 e^{-mx}$

$x \leq 0$

Pour  $x \leq 0$ , on a :

$$\hat{\Psi}_0(x) = \frac{k}{\lambda} e^{-ikx} \left[ \frac{A_0}{A_1} \int_0^l e^{2iky} e^{-my} dy - \int_0^l e^{2iky} dy \right]$$

soit en intégrant :

$$\hat{\Psi}_0(x) = \left[ \left( -\frac{A_0}{2A_1} \frac{e^{-ml}}{1 + \frac{im}{2k}} + \frac{1}{2} \right) e^{2ikl} + \frac{A_0}{2A_1} \frac{1}{1 + \frac{im}{2k}} - \frac{1}{2} \right] e^{-ikx}$$

II.- CALCUL DE LA FORMULE (II.11) -

a)  $A = akx + A_0$

$0 < x < l$

On a :

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_0(x) &= \int_0^x \frac{aky + A_0}{2ikA_1} \left[ -\frac{d}{dy} e^{ik(x-y)} \frac{d}{dy} e^{-iky} + k^2 e^{ik(x-y)} e^{-iky} \right] dy \\ &+ \int_x^l \frac{aky + A_0}{2ikA_1} \left[ -\frac{d}{dy} e^{ik(y-x)} \frac{d}{dy} e^{-iky} + k^2 e^{ik(y-x)} e^{-iky} \right] dy \\ &- \int_0^x \frac{A_1}{2ikA_1} \left[ -\frac{d}{dy} e^{ik(x-y)} \frac{d}{dy} e^{-iky} + k^2 e^{ik(x-y)} e^{-iky} \right] dy \\ &- \int_x^l \frac{A_1}{2ikA_1} \left[ -\frac{d}{dy} e^{ik(y-x)} \frac{d}{dy} e^{-iky} + k^2 e^{ik(y-x)} e^{-iky} \right] dy \end{aligned}$$

La deuxième et la quatrième intégrales s'annulent. D'où en intégrant :

$$(II) \quad \hat{\Psi}_0(x) = \frac{1}{2ik} \left[ \int_0^x \left( \frac{aky}{A_1} + \frac{A_0}{A_1} \right) 2k e^{ikx} e^{-iky} dy - 2k^2 \int_0^x e^{ikx} e^{-2iky} dy \right]$$

En intégrant, il vient :

$$0 \leq x \leq l \Rightarrow \hat{\Psi}_0(x) = \frac{akx}{2A_1} e^{-ikx} + \left[ -\frac{ia}{4A_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{A_0}{A_1} - 1 \right) \right] e^{-ikx} + \left[ \frac{ia}{4A_1} - \frac{1}{2} \left( \frac{A_0}{A_1} - 1 \right) \right] e^{ikx}$$

b)  $A = akx + A_0$   
 $x > l$

Pour  $x \geq l$ , on a :

$$\hat{\Psi}_0(x) = \frac{1}{2ik} \left[ \int_0^l \left( \frac{aky}{A_1} + \frac{A_0}{A_1} \right) 2k e^{2ikx} e^{-2iky} dy - 2k \int_0^l e^{ikx} e^{-2iky} dy \right]$$

Ce qui donne :

$$x \geq l \Rightarrow \hat{\Psi}_0(x) = e^{ikx} \left[ \frac{akl}{2A_1} e^{-2ikl} - \frac{ia}{4A_1} e^{-2ikl} + \frac{ia}{4A_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{A_0}{A_1} - 1 \right) (e^{-2ikl} - 1) \right]$$

c)  $A = A_0 e^{-mx}$   
 $0 \leq x \leq l$

En remplaçant  $\left( \frac{aky}{A_1} + \frac{A_0}{A_1} \right)$  par  $\frac{A_0}{A_1} e^{-my}$  dans la formule (II), il vient :

$$\hat{\Psi}_0(x) = \frac{k}{i} \left[ \frac{A_0}{A_1} \int_0^x e^{ikx} e^{-my} e^{-2iky} dy - e^{ikx} \int_0^x e^{-2iky} dy \right]$$

En intégrant :

$$0 \leq x \leq l \Rightarrow \hat{\Psi}_0(x) = \left[ -\frac{A_0}{2A_1} \frac{1}{1 - \frac{im}{2k}} + \frac{1}{2} \right] e^{ikx} + \frac{A_0}{2A_1} \frac{1}{1 - \frac{im}{2k}} e^{-mx} e^{ikx} - \frac{1}{2} e^{-ikx}$$

Pour  $x \geq l$ , on a :

$$\hat{\Psi}_0(x) = \frac{k}{i} \left[ \frac{A_0}{A_1} \int_0^l e^{ikx} e^{-my} e^{-2iky} dy - \int_0^l e^{ikx} e^{-2iky} dy \right]$$

En intégrant :

$$x \geq l \Rightarrow \hat{\Psi}_0(x) = - \left[ \left( -\frac{A_0}{2A_1} \frac{e^{-ml}}{1 - \frac{im}{2k}} + \frac{1}{2} \right) + \frac{A_0}{2A_1} \frac{1}{1 - \frac{im}{2k}} - \frac{1}{2} \right] e^{ikx}$$

$x \times x$

A N N E X E     I I I



A N N E X E I I I



I.- CALCUL DE LA FORMULE (II.7) -



a)  $S \leq 0$   
 $A = akx + A_0$

On a :

$$d = \frac{ak}{2A_1}$$

$$\varphi_0(y) = e^{iky}$$

avec

$$\beta = \frac{ia}{4A_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{A_0}{A_1} - 1 \right)$$

$$\psi_0(y) = e^{iky} + akye^{iky} + \beta e^{iky} + \gamma e^{-iky}$$

$$\gamma = - \left[ \frac{ak\rho}{2A_1} + \frac{ia}{4A_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{A_0}{A_1} - 1 \right) \right] e^{iky}$$

D'après la formule (II.7), on a :

$$D_{00} = \int_0^{\rho} (aky + A_0) \left[ -\frac{d}{dy} e^{iky} \frac{d}{dy} \psi_0(y) + k^2 e^{iky} \psi_0(y) \right] dy$$

$$- \int_0^{\rho} A_1 \left[ -\frac{d}{dy} e^{iky} \frac{d}{dy} \psi_0(y) + k^2 e^{iky} \psi_0(y) \right] dy$$

En dérivant :

$$D_{00} = A_1 \left\{ \int_0^{\rho} \frac{aky}{A_1} (-ike^{iky}) (ike^{iky} + akye^{iky} + ik\beta e^{iky} + ik\gamma e^{-iky} - ik\gamma e^{-iky}) \right.$$

$$+ \int_0^{\rho} \frac{aky}{A_1} k^2 e^{iky} (e^{iky} + akye^{iky} + \beta e^{iky} + \gamma e^{-iky}) dy$$

$$+ \int_0^{\rho} \left( \frac{A_0}{A_1} - 1 \right) (-ike^{iky}) (ike^{iky} + akye^{iky} + ik\beta e^{iky} + ik\gamma e^{-iky} - ik\gamma e^{-iky}) dy$$

$$+ \int_0^{\rho} \left( \frac{A_0}{A_1} - 1 \right) k^2 e^{iky} (e^{iky} + akye^{iky} + \beta e^{iky} + \gamma e^{-iky}) dy$$

Après simplification, on aura :

$$D_{oo} = A_1 \left\{ \frac{2ak^4}{A_1} a \int_0^l y^2 e^{iky} dy + \left[ \frac{ak}{A_1} (2k^2 + 2\beta k^2 - iak^2) + \left( \frac{A_0}{A_1} - 1 \right) 2ak^3 \right] \int_0^l y e^{iky} dy + \left( \frac{A_0}{A_1} - 1 \right) (2k^2 + 2\beta k^2 - iak^2) \int_0^l e^{iky} dy \right\}$$

Le calcul de l'intégrale conduit à :

$$D_{oo} = 2iakA_1 \left\{ a \frac{a}{A_1} \left[ -\frac{k^2 l^2}{2} e^{2ikt} + \frac{kl}{2i} e^{ikt} + \frac{1}{4} e^{ikt} - \frac{1}{4} \right] + \left( 1 + \beta - \frac{id}{2} \right) \left[ -\frac{akl}{2A_1} e^{ikt} - \frac{ia}{4A_1} e^{ikt} + \frac{ia}{4A_1} \right] - \frac{1}{2} \left( \frac{A_0}{A_1} - 1 \right) \left( 1 + \beta - \frac{id}{2} \right) \left[ e^{ikt} - 1 \right] - id \left( \frac{A_0}{A_1} - 1 \right) \left[ \frac{kl}{2i} e^{ikt} + \frac{1}{4} e^{ikt} - \frac{1}{4} \right] \right\}$$

ou avec :

$$T_1 = \frac{-akl}{2A_1} e^{ikt} - \frac{ia}{4A_1} e^{ikt} + \frac{ia}{4A_1} - \frac{1}{2} \left( \frac{A_0}{A_1} - 1 \right) (e^{ikt} - 1)$$

on a :

$$D_{oo} = 2iakA_1 \left\{ \left( 1 + \beta - \frac{id}{2} \right) T_1 - \left( \frac{akl}{2A_1} \right)^2 e^{2ikt} + \frac{a}{4A_1} \frac{akl}{iA_1} + \frac{a^2}{8A_1^2} (e^{ikt} - 1) - id \left( \frac{A_0}{A_1} - 1 \right) \left[ \frac{kl}{2i} e^{ikt} + \frac{1}{4} e^{ikt} - \frac{1}{4} \right] \right\}$$

Si on pose :

$$1 - \frac{A_0}{A_1} = \frac{akh}{A_1}$$

on trouve :

$$D_{00} = 2ikA_1 \left\{ (1 + \beta - \frac{i\alpha}{2}) \bar{t}_1 - \frac{i\alpha}{4A_1} \frac{akh}{A_1} + \frac{a^2}{8A_1^2} (e^{2ik\ell} - 1) + i \frac{a}{8A_1} \frac{akh}{A_1} (e^{2ik\ell} - 1) \right\}$$

que l'on peut écrire :

$$D_{00} = 2ikA_1 \left\{ (1 - \frac{akh}{2A_1} + \beta) \bar{t}_1 \right\} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{-\frac{i\alpha}{4A_1} \frac{akh}{A_1} + \frac{a^2}{8A_1^2} (e^{2ik\ell} - 1) + i \frac{a}{8A_1} \frac{akh}{A_1} (e^{2ik\ell} - 1)}{\bar{t}_1}$$

b)  $S \geq \ell$

$$A = akx + A_0$$

On a :

$$\varphi_0(y) = e^{-iky}$$

$$\Psi(y) = e^{-iky} + \bar{\alpha} k y e^{-iky} + \bar{\beta} e^{-iky} + \gamma' e^{iky}$$

avec

$$\bar{\alpha} = \frac{akh}{2A_1}$$

$$\bar{\beta} = \frac{-i\alpha}{4A_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{A_0}{A_1} - 1 \right)$$

$$\gamma' = \frac{i\alpha}{4A_1} - \frac{1}{2} \left( \frac{A_0}{A_1} - 1 \right)$$

Etant donné que dans le cas  $S \leq 0$ ,  $D_{00}$  ne dépendait pas de  $\gamma$  pour le cas  $S \geq \ell$ , on trouve pour  $D_{00}$  :

$$D_{00} = -2ikA_1 \left\{ (1 - \frac{akh}{2A_1} + \bar{\beta}) \bar{t}_1 \right\}$$

avec :

$$1 - \frac{A_0}{A_1} = \frac{akh}{A_1}$$

c)  $s < 0$   
 $A = A_0 e^{-mx}$

On a :

$$\gamma = -\frac{1}{2}$$

$$\varphi_0(y) = e^{iky}$$

avec

$$\beta = \frac{A_0}{A_1} \frac{k}{2k + im}$$

$$\psi_0(y) = e^{iky} + \gamma e^{iky} + \beta e^{-my} e^{iky} + d e^{-iky}$$

$$d = \left[ -\frac{A_0}{A_1} \frac{k}{2k + im} e^{(2ik - m)y} + \frac{1}{2} e^{iky} \right]$$

ce qui donne :

$$D_{00} = \int_0^l A \left[ -\frac{d}{dy} e^{iky} \frac{d}{dy} \psi_0(y) + k^2 e^{2iky} \psi_0(y) \right] dy - \int_0^l A_1 \left[ -\frac{d}{dy} e^{iky} \frac{d}{dy} \psi_0(y) + k^2 e^{iky} \psi_0(y) \right] dy$$

ou

$$D_{00} = \int_0^l A_0 e^{-my} \left\{ (-ike^{iky}) \left[ ik(1+\gamma)e^{iky} - ikd e^{-iky} + \beta(ik-m)e^{(ik-m)y} \right] \right. \\ \left. + k^2 e^{2iky} \left[ (1+\gamma)e^{iky} + d e^{-iky} + \beta e^{(ik-m)y} \right] \right\} dy \\ - \int_0^l A_1 \left\{ (-ike^{iky}) \left[ ik(1+\gamma)e^{iky} - ikd e^{-iky} + \beta(ik-m)e^{(ik-m)y} \right] \right. \\ \left. + k^2 e^{iky} \left[ (1+\gamma)e^{iky} + d e^{-iky} + \beta e^{(ik-m)y} \right] \right\} dy$$

Soit après simplification :

$$D_{00} = k^2(1+\gamma) \int_0^l (A_0 e^{(2ik-m)y} - A_1 e^{2iky}) dy - ik\beta(ik-m) \int_0^l (A_0 e^{(2ik-m)y} - A_1 e^{(ik-m)y}) dy \\ + k^2(1+\gamma) \int_0^l (A_0 e^{(ik-m)y} - A_1 e^{iky}) dy + k\beta \int_0^l (A_0 e^{(2ik-m)y} - A_1 e^{(ik-m)y}) dy$$

En intégrant :

$$D_{00} = 2ikA_1 \left\{ \overbrace{(1+\gamma)}^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{A_0}{A_1} \frac{k}{-2k-im} \left( e^{(2ik-m)\rho} - 1 \right) + \frac{1}{2} \left( e^{2ik\rho} - 1 \right) \right] \right. \\ \left. + \beta \left( \frac{k}{i} + \frac{m}{2} \right) \left[ \frac{A_0}{A_1} \frac{1}{2ik-2m} \left( e^{(2ik-2m)\rho} - 1 \right) - \frac{1}{2ik-m} \left( e^{(2ik-m)\rho} - 1 \right) \right] \right\}$$

En portant les valeurs de  $\gamma$  et  $\beta$  dans cette expression,  $D_{00}$  s'écrit :

$$D_{00} = 2ikA_1 \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{A_0}{A_1} \frac{k}{-2k-im} \left( e^{(2ik-m)\rho} - 1 \right) + \frac{1}{2} \left( e^{2ik\rho} - 1 \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{A_0}{A_1} \left[ \frac{A_0}{A_1} \frac{k}{-2k-im} \left( e^{(2ik-2m)\rho} - 1 \right) - \frac{k}{-2k-im} \left( e^{(2ik-m)\rho} - 1 \right) \right] \right\}$$

d)  $s > \frac{1}{2}$   
 $A = A_0 e^{-mx}$

On a :

$$\varphi_0(y) = e^{-iky}$$

$$\psi(y) = e^{-iky} + \bar{\gamma} e^{-iky} + \bar{\beta} e^{-my} + d e^{iky}$$

Etant donné que l'expression de  $D_{00}$  ne dépend pas de  $\alpha$ , d'après l'expression précédente de  $D_{00}$ , on trouve :

$$D_{00} = -2ikA_1 \left\{ \bar{\frac{1}{2}} \left[ \frac{A_0}{A_1} \frac{k}{-2k+im} \left( e^{(-2ik-m)\rho} - 1 \right) + \frac{1}{2} \left( e^{-2ik\rho} - 1 \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{A_0}{A_1} \left[ \frac{A_0}{A_1} \frac{k}{-2k+im} \left( e^{(-2ik-2m)\rho} - 1 \right) - \frac{k}{-2k+im} \left( e^{(-2ik-m)\rho} - 1 \right) \right] \right\}$$

DNV 85/916 / B.N.P.