**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR**
**ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**
**UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE**

**FACULTE DES SCIENCES EXACTES**
**DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES**

N° d'ordre : . . .

N° série : . . . .

# *MEMOIRE*

**Présenté pour l'obtention du diplôme de**
**Magister en Mathématiques**

## *Thème*

# *Etude de certaines classes de problèmes de Cauchy non correctement posés au sens d'Hadamard-Petrovski*

**Option**
**Analyse Mathématique Appliquée**

**Par :**

Kriket salah

*Devant le jury* :

| | | |
|---|---|---|
| **Président:** | **Hebbeche A.** | **M. C. Univ. Mentouri Constantine** |
| **Rapporteur:** | **Denche M.** | **Prof. Univ. Mentouri Constantine** |
| **Examinateurs:** | **Abdelli M.** | **M. C. Univ. Mentouri Constantine** |
| | **Saidouni C.** | **M. C. Univ. Mentouri Constantine** |

*Soutenu le 04/07/2011*

# REMERCIEMENTS

***A***vant tout, mes vifs remerciements, je les exprime à **Dieu** tout puissant.

***J***e tiens à exprimer ma plus profonde gratitude à l'égard de Monsieur: **Denche.M** professeur à l'université de **Constantine** pour sa fraîcheur d'esprit, pour leur conseils judicieux, pour l'infinie patience ainsi pour les conseils qu'il ma donné tout au long de ce travail.

***J***e suis également très honoré que Monsieur**: Hebbeche**. **A** maître de conférences à l'université de **Constantine** soit le président de jury de mon mémoire.

***M***es remerciements s'adressent également à Monsieur: **Saidouni. C** maître de conférences à l'université de **Constantine** et à Monsieur **M. ABDELLI** maître de conférences à l'université de **Constantine** d'avoir accepté de juger ce travail et d'en être les examinateurs.

***P***our finir, je ne voudrais pas oublier mes proches qui m'ont soutenu moralement, sans les nommer explicitement, je les remercie pour leur encouragement.

# Table des matières

# Introduction

Hadamard [13],[14] a introduit en 1902 la notion de problème bien posé. Il s'agit d'un problème dont :

- La solution existe.

- Elle est unique.

- Elle dépend continûment des données.

Bien entendu, ces notions doivent être bien précisées par le choix des espaces, ou les topologies, dans lesquelles les données et la solution évoluent.

Dans ce même livre [13],[14] Hadamard laissait entendre (et c'est une opinion répandue jusqu'à récemment) que seul un problème bien posé pouvait modéliser correctement un phénomène physique.

- Un modèle physique étant fixé, mais en réalité les données expérimentales sont en générale bruitées, et rien ne garantit que de telles données proviennent de ce modèle, même pour un autre jeu de paramètres.

- Si une solution existe, il est parfaitement concevable que des paramètres différents conduisent aux mêmes observations.

- Le fait que la solution d'un problème puisse ne pas exister, n'est pas une difficulté sérieuse. Il est habituellement possible de rétablir l'existence en relaxant la notion de solution (procédé classique en mathématiques).

- Si un problème a plusieurs solutions (non-unicité) c'est une chose plus sérieuse, il faut un moyen de choisir entre elles. Dans ce cas, il faut ajouter des informations supplémentaires pour minimiser le nombre des solutions (une information a priori).

- Le manque de continuité est sans doute le plus problématique, en particulier, en vue d'une résolution approchée ou numérique. Cela veut dire qu'il n'est pas possible (indépendamment de la méthode numérique choisie) d'approcher de façon satisfaisante la solution du problème mal posé, puisque les données disponibles seront bruitées donc proches mais différentes des données "réelles".

Un problème qui n'est pas bien posé aux sens de la définition ci-dessus est dit "mal posé" ( ill-posed en anglais). Nous allons en voir un exemple physique de tels problèmes.

Considérons un système physique évoluant avec le temps : Un problème essentiel consiste à atteindre au bout d'un certain temps $T$ (ou voisinage de $T$ ) un objectif donné. Cela peut par exemple, être théoriquement obtenu en injectant certaines conditions initiales, malheureusement, les difficultés de réalisabilité parfaite de telles conditions entraînent des perturbations (donc des écarts par rapport aux conditions idéales).

Deux problèmes se posent, l'un apprécier l'influence de ces "écarts" sur la solution, si on laisse évoluer le système livré a lui-même, et l'autre corriger l'évolution du système, c'est-à-dire contrôler le processus physique, donc effectuer des actions entre les instants zéro et $T$, non seulement pour compenser les écarts initiaux, mais aussi d'autres perturbations, aléatoires ou non, pouvant intervenir en cours du processus, ces actions visent toutes à améliorer la qualité de l'objectif visé (ou les conditions pour l'atteindre).

Bien entendu la situation finale peut être définie de façon complexe. En outre il peut y avoir des contraintes tant sur les conditions injectés que sur les contrôles en cours de processus, ou sur le phénomène lui-même.

# Chapitre 1

# Notions préliminaires

*Dans ce chapitre on rappelle la notion de problème bien posé (dite aussi correctement posé) au sens de Hadamard, et on donne certains exemples de problèmes mal posés, et nous terminerons par quelques méthodes connues de régularisaion comme la méthode de Lavrentiev et Tikhonov  et la méthode de quasi-revèrsibilité.*

## 1.1 Problèmes bien et mal posés

D'après Jacques Hadamard (voir [13],[14]) un problème est dit bien posé (correctement posé) si le problème admet une solution (Existence), si elle est unique (Unicité) et elle est stable (Stabilité). Le problème est dit mal posé si au moins une de ces trois conditions n'est pas vérifiée. Illustrons cela sur l'exemple suivant :

Soient $E$, $F$ deux espaces métriques et $A : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire (même pour un opérateur non linéaire). Considérons l'équation :

$$Ax = y \tag{1.1}$$

Notons que plusieurs problèmes physiques, se ramènent à une telle équation, le problème (1.1) est dit bien posé si ces trois conditions sont vérifiées simultanément :

1) Existence : Pour tout second membre l'équation (1.1) admet une solution

$\forall y \in F, \exists x \in E : Ax = y$

2) Unicité : La solution est unique

$\forall x_1, x_2 \in E : Ax_1 = Ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

3)Le problème est stable sur les espaces E et F ; c'est à dire qu'une petite perturbation du second membre $y$ donne une petite perturbation de la solution $x$ c'est à dire(La solution dépend continûment des données).

Plusieurs problèmes physiques ne vérifient pas forcément ces conditions simultanément. Alors au moins de ces trois conditions n'est pas vérifiées, le problème du type (1.1) est dit mal posé.

Tikhonov A. a reformulé en 1943(voir[34]) la définition d'un problème bien posé, élargissant ainsi la classe des problèmes mal posés. Selon Tikhonov, un problème vérifie les trois conditions suivantes :

1- La solution du problème (1.1) existe et appartient à un ensemble donné à priori $M$ inclus dans $E$ pour une classe de données dans $F$.

$\forall y \in N \subset F, \exists\ x \in M \subset E : Ax = y$

2- Cette solution est unique dans la classe $M$.

$\forall x_1, x_2 \in M \subset E : Ax_1 = Ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

3- A une perturbation infiniment petite du second membre telle que la solution reste dans $M$ correspond une variation infiniment petite de cette solution.

$\lim\limits_{\widetilde{y} \longrightarrow y} \widetilde{x} = x$, tel que $Ax = y$, $A\widetilde{x} = \widetilde{y}$ et $x, \tilde{x} \in M$

## 1.2 Exemples de problèmes mal posés

On donne quelques exemples des problèmes mal posés :

**Exemple 1** *La différentiation est l'intégration sont deux problèmes inverses l'un de l'autre. Il est plus habituel de penser à la différentiation comme problème direct, et à l'intégration comme problème inverse. En fait, l'intégration possède de bonnes propriétés* *mathématiques qui conduisent à le considérer comme le problème direct. Et la différentiation est le « prototype » du problème mal posé, comme nous allons le voir. Considérons l'espace de Hilbert* $L^2(\Omega)$, *et l'opérateur intégral* $A$ *défini par :*

$$Af(x) = \int_0^x f(t)dt$$

*Il est facile de voir directement que* $A \in \mathcal{L}(L^2([0;1]))$. *Cet opérateur est injectif, par contre son image est le sous espace vectoriel :*

$$ImA = \left\{f \in H^1([0;1]); u(0) = 0\right\}$$

*où* $H^1([0;1])$ *est l'espace de Sobolev. En effet, l'équation :*

$$Af = g$$

*est équivalente à :*

$$f(x) = g'(x) \text{ et } g(0) = 0$$

*L'image de* $A$ *n'est pas fermée dans* $L^2([0;1])$ *(bien entendu, elle l'est dans* $H^1(0;1)$*). En conséquence, l'inverse de* $A$ *n'est pas continu sur* $L^2([0;1])$, *comme le montre l'exemple suivant :*

*Considérons une fonction* $f \in C^1([0;1])$, *et* $n \in N$. *Soit :*

$$f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n}\sin n^2 x$$

*Alors :*

$$f_n{}'(x) = f'(x) + ncos\left(n^2 x\right)$$

*De simples calculs montrent que :*

$\|f - f_n\|_2 = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n}\sin\left(2n^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} = 0\left(\frac{1}{n}\right)$

*alors que :*

$$\|f\ ' - f_n{}'\|_2 = n(\frac{1}{2} + \frac{1}{4n}\sin\left(2n^2\right))^{\frac{1}{2}} = 0\,(n)$$

*Ainsi, la différence entre $f\ '$ et $f_n{}'$ peut-être arbitrairement grande, alors même que la différence entre $f$ et $f_n$ est arbitrairement petite. L'opérateur de dérivation (l'inverse de A) n'est donc pas continu, au moins avec ce choix des normes.*

**Exemple 2** *Soit le problème suivant :*

$$Au = f$$

*$A \in \mathcal{L}(H; F)$, $H; F$ des espaces de Hilbert.*

*Si $A$ est compact et $R(A)$non fermé alors, le problème est mal posé.*

*$R(A)$ est non fermé $\Longrightarrow A^{-1}$ est non borné $\Longrightarrow$ la troisième condition n'est donc pas vérifiée. Le problème reste mal posé.*

**Exemple 3** *Considérons l'équation différentielle :*

$$\begin{cases} u'(x) = u\ (x) - 1 \\ u\ (0) = 0 \end{cases}$$

*Cette équation admet comme solution :*

$$u(x) = e^x - 1$$

*Si la condition initiale est donnée par $u(0) = \varepsilon$, la solution est alors :*

$$v(x) = (1 + \varepsilon)e^x - 1$$

*De sorte que la différence s'écrit :*

$$v(x) - u\ (x) = \varepsilon e^x$$

*Si $x$ varie dans l'intervalle $[0;30]$, on a :*

$$v\ (30) - u(30) = e^{30}\varepsilon \simeq 10^{13}\varepsilon$$

*Si la précision des calculs est de $10^{\ -10}$ ; le problème est numériquement mal posé, bien que mathématiquement bien posé.*

***Remarque 1*** *Dans le cas de dimension finie par exemple si $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une matrice $(n \times n)$ alors :* $\left\{ {}^{Ax=y}_{bien\ posé} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} A^{-1}\ existe \\ \det A \neq 0 \\ Ax = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \end{array} \right.$

**Exemple 4** *Considérons l'espace de Hilbert $\ell^2$ de dimension infinie tel que :* $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in \ell^2 \Longleftrightarrow \sum\limits_{i\geq 1}^{+\infty} x_i^2 < +\infty$, *et* $\|x\|_{\ell^2} = \left( \sum\limits_{i\ \geq 1}^{+\infty} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

*Soit $A : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ un opérateur diagonale dans $\ell^2$ tel que :*

$$Ax = (x_1, \frac{x_2}{2}, ..., \frac{x_n}{n}, ...).$$

*Considérons le problème :*

$$Ax = y,$$

*l'inverse $A^{-1}$ de $A$ est donné par :*

$$A^{-1}y = (y_1, 2y_2, ..., ny_n, ...).$$

*Donc on a l'existene de la solution de ce problème pour un certaines $y \in \ell^2$, et on peut encore montrer facilement l'unicité de la solution. Prenons maintenant :*

$$y_n = (0, 0, ..., \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, ...),$$

*donc :*

$$A^{-1}y_n = (0, 0, ..., \sqrt{n}, 0, ...),$$

$\|y_n\|_{\ell^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$ *lorsque* $n$ *tend vers* $+\infty$ *, mais* $\|A^{-1}y_n\|_{\ell^2} = \sqrt{n} \longrightarrow +\infty$ *lorsque* $n$ *tend vers* $+\infty$*. Donc on a pas la stabilité de la solution d'ou le problème est mal posé.*

## 1.3 Méthodes de régularisation

Nous citons quelques méthodes de régularisation pour les problèmes linéaires mal posés. Régulariser un problème mal posé, c'est le remplacer par un autre bien posé de sorte que l'erreur commise soit compensée par le gain de stabilité. On appelle régularisation de (1.1)tout famille d'opérateurs lineaires bornés, $R_\alpha : F \longrightarrow E$ tel que pour tout $x \in E$ on a :

$$\lim_{\alpha \longrightarrow 0} R_\alpha(Ax) = x,$$

le paramètre $\alpha$ est appelé paramètre de régularisation.

On présente maintenant une introduction aux méthodes de régularisation les plus courantes. A savoir la méthode de Tikhonov (voir [34]), la methode de Lavrentiev (voir[23]), et la methode de quasi-revèrsibilité [21].

-Soit A un opérateur linéaire compact d'un espace de Hilbert $E$ dans un espace de Hilbert $F$, et considèrons l'equation (1.1)

1)Tikhonov a proposé une méthode pour résoudre l'instabilité du problème (1.1), cette méthode est la suivante :

En supposant que $\operatorname{Im} A$ est dense dans $F$, nous introduisons l'équation auxiliaire suivante :

$$(\alpha I + A^* A)\, x_\alpha = A^* \tilde{y}$$

Donc la solution régularisée du problème (1.1), est :

$$x_\alpha = (\alpha I + A^* A)^{-1} A^* y$$

qui converge vers $x$ quand $\alpha \longrightarrow 0$, dans ce cas la famille d'opérateurs $R_\alpha$ est donnée par :

$$R_\alpha = (\alpha I + A^* A)^{-1} A^*$$

et comme l'opérateur $\alpha I + A^* A$ admet un inverse borné on trouve que ce problème proche est bien posé. On note ici que si le paramètre de régularisation $\alpha$ est choisi convenablement en fonction de $\varepsilon$, de telle sorte que pour $\varepsilon \longrightarrow 0$ on a aussi $\alpha \longrightarrow 0$ et $\varepsilon^2 \alpha^{-1} \longrightarrow 0$.

2)Si $A$ est un opérateur auto-adjoint positif une méthode proposée par M.Lavrentiev pour la régularisation du problème (1.1) consiste à introduire une equation auxiliare :

$$(A + \alpha I)\, x_\alpha = \widetilde{y}$$

telque l'opérateur $A$ est auto-adjoint positif $(A = A^* \geq 0)$. En choisissant le paramètre de régularisation $\alpha$ en fonction de $\varepsilon$ de telle sorte que $x_\alpha$ tende vers $x$ pour $\varepsilon \longrightarrow 0$ . Cela est possible, en se donnant quelques restrictions supplémentaires. Plus exactement on a le theorème suivant :

**Théorème 1** *Supposons que l'opérateur $A$ vérifie pour tout $\alpha > 0$, la condition :*

$$\|A + \alpha I\|^{-1} \leq \frac{c}{\alpha},$$

*supposons aussi que $y \in D(A^2)$. Si le paramètre de régularisation $\alpha > 0$ est choisi en fonction de $\varepsilon$ de telle sorte que pour $\varepsilon \longrightarrow 0$, on a $\alpha \longrightarrow 0$ et $\varepsilon \alpha^{-2} \longrightarrow 0$, alors $x_\alpha \longrightarrow x$, pour $\varepsilon \longrightarrow 0$. Si $\alpha = O(\varepsilon^{\frac{1}{3}})$ pour $\varepsilon \longrightarrow 0$, alors :*

$$\|x_\alpha - x\| = O(\varepsilon^{\frac{1}{3}}).$$

3) **Méthode de quasi-réversibilité :**

Il est important de noter qu'il n'y a nullement unicité de la méthode quasi-réversibilité, dans tous les exemples que nous avons rencontré, il y a toujours une infinité de méthodes de quasi- réversibilité possibles (toutes relevant de la même idée : on change le "système"de façon que le problème qui était mal posé devienne bien posé).

L'idée générale de la méthode est de modifier convenablement les opérateurs aux dérivées partielles intervenant dans le problème. Cette modification se fait par l'introduction de termes différentiels, qui sont :

-soit "petits"(pouvant fortement tendre vers zéro) ;

-soit "dégénérant aux bords" (par exemple pour " éliminer " des conditions aux limites mathématiques gênantes, ou constituant précisément les inconnus à déterminer).

Ces opérateurs ainsi modifiés, sont généralement d'ordre différent de l'opérateur initial et de même nature (elliptique, etc.) ou non.

# Chapitre 2

# Génération de semi-roupes par des puisances fractionnaires d'opérateurs

Ce chapitre est constitué d'un rappel de quelques notions et compléments mathématiques en relation avec ce travail. On citera en particulier, les théories des opérateurs et des semigroupes.

Dans la suite, nous noterons par X un espace de Banach sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ et par $\boldsymbol{B}(X)$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés dans X. Nous désignerons par I l'unité de $\boldsymbol{B}(X)$.

$\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \text{ est invérsible dans } \boldsymbol{B}(X)\right\}$ s'appelle l'ensemble résolvant de $A$.

$\sigma(A) = \mathbb{C} / \rho(A)$ : Le spectre de $A$.

$\Sigma_\alpha = \{\lambda \in \mathbb{C}/\{0\} : |\arg \lambda| < \alpha\}$ Pour $\alpha \in (0, \pi)$.

## 2.1 Les opérateurs compacts

**Définition 1** *Soit $\mathcal{L}(X; Y)$ un espace normé d'opérateurs linéaires bornés de $X$ dans $Y$. On dit qu'un opérateur $A \in \mathcal{L}(X; Y)$ est compact si l'image par $A$ de la boule unité de l'espace $X$, est relativement compacte dans l'espace $Y$.*

**Théorème 2** *Tout opérateur compact $A \in \mathcal{L}(X;Y)$ fait correspondre à un ensemble borné dans $X$ un ensemble compact dans $Y$.*

On remarque que $A$ est compact si et seulement si l'image de toute partie bornée est relativement compacte ou, de façon équivalente si et seulement si, l'image de toute suite bornée possède une sous-suite convergente.

D'après le lemme de Riesz, l'identité d'un espace vectoriel normé est compacte si et seulement si cet espace est de dimension finie.

**Lemme 1** *Si $A \in \boldsymbol{B}(X)$ et $\|A\| < 1$, alors $(I - A)$ admet un inverse borné et*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$$

**Définition 2** *L'application : $R(.,A) : \rho(A) \to \boldsymbol{B}(X)$ tel que :*

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}.$$

*S'appelle la résolvante de $A$.*

**Proposition 1** *La résolvante d'un opérateur linéaire $A \in \boldsymbol{B}(X)$ ; a les propriétés suivantes :*

*i) Si $\lambda, \mu \in \rho(A)$, alors :*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\lambda - \mu) R(\lambda, A) R(\mu, A).$$

*ii) $R(.,A)$ est une application analytique sur $\rho(A)$.*

*iii) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $|\lambda| > \|A\|$ alors $\lambda \in \rho(A)$ et nous avons :*

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}.$$

*iv) Nous avons :*

$$\frac{d^{\,n}}{d\lambda^n}R(\lambda, A) = (-1)^n\, n!R(\lambda, A)^{n\,+1}, \forall n \in \mathbb{N}^* et\ \lambda \in \rho(A)$$

***Remarque 2*** *Compte tenu de la proposition $(iv)$il résulte que :*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|A\|\} \subset \rho(A).$$

**Définition 3** *On appelle semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach $X$, une famille $\{S(t)\}_{t\,\geq 0} \subset \boldsymbol{B}(X)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

*i)* $S(0) = I$.

*ii)* $S(t_1 + t_2) = S(t_1) + S(t_2), \forall\ t_1, t_2 > 0.$

*iii)* $\lim\limits_{t\,\to 0} \|S(t) - I\| = 0.$

**Corollaire 1** *Soient $\{S(t)\}_{t\,\geq 0}$ un semi-groupe uniformément continu et $A$ son générateur infinitésimal alors :*

*i) Il existe $\omega \geq 0$ tel que $\|S(t)\| \leq e^{\omega t}$, $\forall t \geq 0$.*

*ii) L'application $[0, +\infty[\ \ni t \mapsto S(t) \in \boldsymbol{B}(X)$, est différentiable pour la topologie de la norme et :*

$$\frac{dS(t)}{dt} = AS(t) = S(t)A, \forall t \geq 0.$$

**Théorème 3** *Soient $\{S(t)\}_{t\,\geq 0}$ un semi-groupe uniformément continu et $A$ son générateur infinitésimal si $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que : $Re\lambda > \|A\|$ alors l'application $R_\lambda : X \to X$,*

$$R_\lambda x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) x dt,$$

*définit un opérateur linéaire borné, $\lambda \in \rho(A)$ et :*

$$R_\lambda x = R(\lambda, A)\, x, \forall x \in X.$$

**Définition 4** *Un contour de Jordan lisse et fermé qui entoure* $\sigma(A)$*, s'appelle un contour de Jordan A-spectral s'il est homotopie avec un cercle* $C_r$ *de centre* $O$ *et de rayon* $r > \|A\|$*.*

**Théorème 4** $(Riesz - Dunford)$

*Soit* $A$ *le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *Si* $\Gamma_A$ *est un contour de Jordan A-spectral alors nous avons :*

$$S(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_A} e^{\lambda t}R(\lambda, A)\, d\lambda, \forall t \geq 0, \tag{2.1}$$

*est un semi-groupe de classe* $C_0$*.*

**Définition 5** *On appelle* $C_0$ *semi-groupe (ou semi-groupe fortement continu) d'opérateurs linéaires bornés sur* $X$ *une famille* $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \boldsymbol{B}(X)$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

*i)* $S(0) = I$*.*

*ii)* $S(t_1 + t_2) = S(t_1) + S(t_2)$*,* $\forall\ t_1,\ t_2 > 0$*.*

*iii)*$\lim\limits_{t\to 0} S(t)x - x = 0$*,* $\forall x \in X$*.*

**Notation 1** $S.G(M, \omega)$ *: L'ensemble des* $C_0$ *semi-groupes* $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \boldsymbol{B}(X)$*, pour les quels il existe* $\omega \geq 0$ *et* $M \geq 1$ *tel que :* $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$*,* $\forall t \geq 0$*.*

## 2.2 Propriétés générales des $C_0$ -Semi-groupes

**Théorème 5** *Soient* $\{S(t)\}_{t\geq 0} \in S.G(M, \omega)$ *et* $A$ *son générateur infinitésimal. Alors l'application :* $[0, +\infty[ \ni t \mapsto S(t)x \in X$ *est dérivable sur* $[0, +\infty[$*, pour tout* $x \in D(A)$ *et nous avons :*

*i)* $\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax$*,* $\forall t \geq 0$*.*

*ii)* $S(t)x - x = \int_0^t S(\mu)d\mu$*,* $\forall t \geq 0$*.*

**Théorème 6** $(Taylor)$ *Soient* $\{S(t)\}_{t\geq 0} \in S.G(M,\omega)$, *et* $A$ *son générateur infinitésimal, alors :*

$$S(t)x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} A^k x + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\mu)^{n-1} S(\mu) A^n x d\mu.$$

*Quel que soient* $x \in D(A^n)$, $t \geq 0$, *et* $n \in \mathbb{N}^*$

**Théorème 7** $(Hille - Yosida)$ *Un opérateur linéaire* $A : D(A) \subset X \to X$, *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe* $\{S(t)\}_{t\geq 0} \in S.G(M,\omega)$, *si et seulement si :*

*i)* $A$ *est un opérateur fermé et* $\overline{D(A)} = X$

*ii) Il existe* $\omega \geq 0$ *et* $M \geq 1$ *tel que :* $\wedge_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \omega\} \subset \rho(A)$

*et pour* $\lambda \in \wedge_\omega$, *on a :* $\|R(\lambda,A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda-\omega)^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

# Certaines Classes des $C_0$−Semi-groupes

## $C_0$−Semi-groupes différentiables

**Définition 6** *On dit que* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, *est un* $C_0$*-semi-groupe différentiable (que l'on notera par* $\{S(t)\}_{t\geq 0} \in S.G.D(M,\omega)$*) si l'application :*

$]0,+\infty[ \ni t \mapsto S(t)x \in X$, *est différentiable quel que soit* $x \in X$.

**Théorème 8** *Soient* $\{S(t)\}_{t\geq 0} \in S.G(M,\omega)$, *et* $A$ *son générateur infinitésimal. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

*i)* $\{S(t)\}_{t\geq 0} \in S.G.D(M,\omega)$.

*ii)* $\operatorname{Im} S(t) \subset D(A)$, $\forall t > 0$.

**Théorème 9** *Soient* $\{S(t)\}_{t\geq 0} \in S.G.D(M,\omega)$, *et* $A$ *son générateur infinitésimal, alors :*

*i)* $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in X$ : $S(x) \in D(A^n)$, *et :*

$$A^n S(t)x = \left[AS(\frac{t}{n})\right]^n x, \forall t > 0.$$

*ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application :* $]0, +\infty[\ \ni t \mapsto S(t) : X \to D(A^n)$, *est n fois différentiable pour la topologie de la convergence uniforme et :*

$$S(t)^{(n)} = \frac{d^n}{dt^n} S(t) = A^n S(t) \in B(X), \forall t > 0$$

*iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application :* $[0, +\infty[\ \ni t \mapsto S(t)^{(n)} \in \boldsymbol{B}(X)$ *est continue pour la topologie de la convergence uniforme.*

**Théorème 10** *Soit $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu dans un espace de Banach $X$ et soit $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ tel que : $\|S(t)\| \leq e^{\omega t}$, $\forall t \geq 0$. Alors le générateur $(A, D(A))$ de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ a les propriétés équivalentes suivantes :*

*i) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que : $R(\lambda) x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda \mu} s(\mu) d\mu$ existe quelque soit $x \in X$, alors : $\lambda \in \rho(A)$ et $R(\lambda, A) = R(\lambda)$.*

*ii) Si $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ alors $\lambda \in \rho(A)$ et la résolvante est donnée comme dans $(i)$.*

*iii) $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re} \lambda - \omega}$, pour tout $\operatorname{Re} \lambda > \omega$.*

**Corollaire 2** *Pour chaque $\lambda_0 \in \rho(A)$ on a : $d(\lambda_0, \sigma(A)) - \frac{1}{r(R(\lambda_0, A))} \geq \frac{1}{\|R(\lambda_0, A)\|}$.*

## 2.3 Les semi-groupes analytiques

### Opérateurs sectoriels

**Définition 7** *Un opérateur linéaire fermé $(B, D(B))$, de domaine dense dans un espace de Banach $X$ est appelé sectoriel (d'angle $\alpha$) s'il existe $\alpha$, $o < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ tel que le secteur :*

$$\Sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \alpha \right\} / \{0\} \subset \rho(B).$$

*Et si pour tout $\beta \in (0, \alpha)$, il existe $M_\beta \geq 1$ tel que :*

$$\|R(\lambda, B)\| \leq \frac{M_\beta}{|\lambda|}, \forall 0 \neq \lambda \in \overline{\Sigma}_{\frac{\pi}{2} + \alpha - \beta}.$$

**Définition 8** *Soit* $(B, D(B))$ *un opérateur sectoriel d'angle* $\alpha$*. On définit :* $S(0) = I$ *et l'opérateur* $S(z)$ *pour* $z \in \Sigma_\alpha$ *par :*

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\mu z} R(\mu, B)\, d\mu$$

*Où* $\Gamma$ *est une courbe lisse par morceaux dans* $\Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ *va de* $\infty e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha'\right)}$ *à* $\infty e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha'\right)}$ *pour* $\alpha' \in (|\arg z|, \alpha)$*.*

**Proposition 2** *Soit* $(B, D(B))$*, un opérateur sectoriel d'angle* $\alpha$ *alors pour tout* $z \in \Sigma_\alpha$*,* $S(z)$ *sont des opérateurs linéaires bornés sur* $X$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

*i)* $\|S(z)\|$ *est uniformément bornée pour* $z \in \Sigma_{\alpha'}$ *si* $0 < \alpha' < \alpha$

*ii) L'application* $z \longmapsto S(z)$ *est analytique dans* $\Sigma_\alpha$*.*

*iii)* $S(z_1 + z_2) = S(z_1) + S(z_2)$ *pour tous* $z_1, z_2 \in \Sigma_\alpha$*.*

*iv) L'application* $z \longmapsto S(z)$ *est fortement continue dans* $\Sigma_{\alpha'} \cup \{0\}$*, si* $0 < \alpha' < \alpha$*.*

**Preuve.** Nous verifions d'abord que pour z $\in \Sigma_{\alpha'}$ avec $\alpha' \in (0, \alpha)$ fixé, l'intégrale :

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\mu z} R(\mu, B)\, d\mu$$

convèrgent uniformément dans $\mathcal{L}(X)$ à l'egarde du norm. Chercher l'existence de $S(z)$ revient à étudier la convergete de l'integral : $\int_\Gamma e^{\mu z} R(\mu, B)\, d\mu$**.** Le contour $\Gamma$ déformé d'apré le théorème de Cauchy, nous choisirons $\Gamma = \Gamma_r$ comme dans la figure ci-dessous : Où : $\Gamma = \Gamma_r = \Gamma_{r,1} \cup \Gamma_{r,2} \cup \Gamma_{r,3}$ et :

$$\Gamma_{r,1} = \left\{-\rho e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta\right)}; -\infty \leq \rho \leq -r\right\}$$

$$\Gamma_{r,2} = \left\{re^{i\,\theta}; -\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta\right) \leq \theta \leq \left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta\right)\right\}$$

$$\Gamma_{r,3} = \left\{\rho e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta\right)}; r \leq \rho \leq +\infty\right\}$$

où : $\beta = \frac{\alpha-\alpha'}{2}$, et $r = \frac{1}{|z|}$

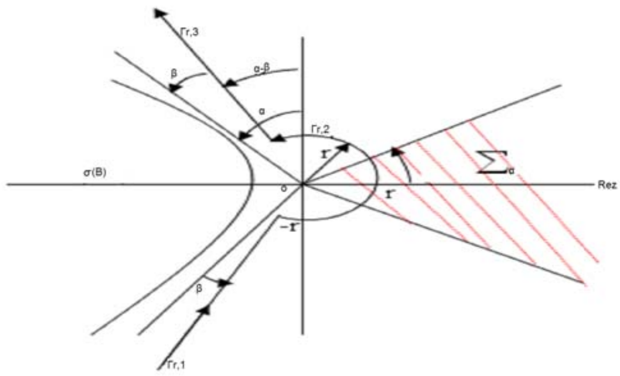


FIG. 2-1 –

**1)** pour $\mu \in \Gamma_{r,3}$ et $z \in \Sigma_{\alpha'}$ tel que : $0 \ < \alpha' < \alpha$ et, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$, On a :

$$\mu z = |\mu z| \, e^{i \arg(\mu z)} = |\mu z| \, e^{i(\arg(\mu)+\arg(z))},$$

et comme :

$$\begin{aligned} -\alpha' &\leq \arg(z) \leq \alpha' ...(1) \\ \arg(\mu) &= \frac{\pi}{2} + \alpha - \beta ...(2) \end{aligned}$$

En sommant (1) et (2) on trouve :

$$\frac{\pi}{2} + \alpha - \beta - \alpha' \leq \arg(z) + \arg(\mu) \leq \frac{\pi}{2} + \alpha - \beta + \alpha'$$

d'où :

$$\frac{\pi}{2} + \beta \leq \arg(z) + \arg(\mu) \leq \frac{3\pi}{2} - \beta ...(3)$$

tel que :

$$0 < \alpha' < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

Les complexes $\mu z$ ont des parties réelles négatives car :

$$\mathrm{Re}\,(\mu z) = |\mu z| \cos\left(\arg(z) + \arg(\mu)\right).$$

d'aprés (3) :

$$\cos\left(\arg(z) + \arg(\mu)\right) \leq \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right).$$

( Car la fonction cosinus est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$),d'où :

$$\mathrm{Re}\,(\mu z) = |\mu z| \cos\left(\arg(z) + \arg(\mu)\right) \leq |\mu z| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)$$

$$= -|\mu z| \sin(\beta)$$

et :

$$\mathrm{Re}\,(\mu z) \leq -|\mu z| \sin(\beta)$$

donc :

$$|e^{\mu z}| = e^{\mathrm{Re}(\mu z)} \leq e^{-|\mu z| \sin(\beta)} \tag{2.2}$$

d'où :

$$\|e^{\mu z} R(\mu, B)\| = |e^{\mu z}| \, \|R(\mu, B)\| \leq e^{-|\mu z| \sin(\beta)} \frac{M_\beta}{|\mu|}. \tag{2.3}$$

pour $\mu \in \Gamma_{r,3}$ et $z \in \Sigma_{\alpha'}$.

**2)** Pour $\mu \in \Gamma_{r,1}$ et $z \in \Sigma_{\alpha'}$ :

$$\begin{cases} -\alpha' \leq \arg(z) \leq \alpha' ... & (5) \\ \arg(\lambda) = -\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \beta\right) ...(6) \end{cases}$$

en sommant (5) et (6) on trouve :

$$-\alpha' - \frac{\pi}{2} - \alpha + \beta \leq \arg(z) + \arg(\mu) \leq \alpha' - \frac{\pi}{2} - \alpha + \beta$$

d'où :

$$-\frac{3\pi}{2}+\beta<\arg(z)+\arg(\mu)<-\frac{\pi}{2}-\beta.$$

Les complexes $\mu z$ ont des parties réelles négatives car :

$$\operatorname{Re}(\mu z)=|\mu z|\cos(\arg(z)+\arg(\mu))\leq|\mu z|\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\beta\right)$$

et on a :

$$\begin{aligned}|\mu z|\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\beta\right) &= |\mu z|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\\ &= -|\mu z|\sin(\beta).\end{aligned}$$

( Car la fonction cosinus est croissante sur $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$). Donc :

$$|e^{\mu z}|=e^{\operatorname{Re}(\mu z)}\leq e^{-|\mu z|\sin(\beta)}$$

$$\|e^{\mu z}R(\mu,B)\|=|e^{\mu z}|\,\|R(\mu,B)\|\leq e^{-|\mu z|\sin(\beta)}\frac{M_\beta}{|\mu|}...(7)$$

pour $\mu\in\Gamma_{r,1}$ et $z\in\Sigma_{\alpha'}$.

**3)**Pour $\mu\in\Gamma_{r,2}$ et $z\in\Sigma_{\alpha'}$on a :

$$\mu=re^{i\theta}\text{ tel que : }-\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta\right)\leq\theta\leq\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta\right)$$

d'où :

$$\|e^{\mu z}R(\mu,B)\|=|e^{\mu z}|\,\|R(\mu,B)\|\leq e^{|\mu z|}\frac{M_\beta}{|\mu|}.$$

comme :

$$\mu=re^{i\theta},\text{ et }r=\frac{1}{|z|}$$

on a :

$$\|e^{\mu z}R(\mu,B)\|\leq e^{\left|re^{i\theta}z\right|}\frac{M_\beta}{|re^{i\theta}|}$$

comme :

$$e^{\left|re^{i\ \theta}z\right|}\frac{M_\beta}{\left|re^{i\theta}\right|}=e^{r|z|}\frac{M_\beta}{r}=\ e^{r\frac{1}{r}}\left|z\right|M=e\ \ |z|\ \ M_\beta$$

d'ou' :

$$\left\|e^{\mu z}R\left(\mu,B\right)\right\|\leq e\ \ |z|\ \ M_\beta \tag{2.4}$$

Pour $\mu\in\Gamma_{r,2}$ et $z\in\Sigma_{\alpha'}$on a :

$$\left\|\int\limits_{\Gamma_{r,2}}e^{\mu z}R\left(\mu,B\right)d\mu\right\|\leq\int_{-\pi}^{+\pi}e\ \ |z|\ \ M_\beta\frac{1}{|z|}d\ \theta...(8)$$

tel que : $\Gamma=\Gamma_r=\Gamma_{r,1}\cup\Gamma_{r,2}\cup\Gamma_{r,3}$. D'où :

$$\left\|\int\limits_{\Gamma r}e^{\mu z}R\left(\mu,B\right)d\mu\right\|=\left\|\int\limits_{\Gamma_{r,1}}e^{\mu z}R\left(\mu,B\right)d\mu+\int\limits_{\Gamma_{r,2}}e^{\mu z}R\left(\mu,B\right)d\mu+\int\limits_{\Gamma_{r,3}}e^{\mu z}R\left(\mu,B\right)d\mu\right\|\leq$$

$$\left\|\int\limits_{\Gamma_{r,1}}e^{\mu z}R\left(\mu,B\right)d\mu\right\|+\left\|\int\limits_{\Gamma_{r,2}}e\mu^{\lambda z}R\left(\mu,B\right)d\mu\right\|+\left\|\int\limits_{\Gamma_{r,3}}e^{\mu z}R\left(\mu,B\right)d\mu\right\|.$$

en sommant $2.3,(7)$et (8) d'où :

$$\left\|\int\limits_{\Gamma}e^{\mu z}R\left(\mu,B\right)d\mu\right\|\leq\int\limits_{\Gamma_{r,1}}e^{-|\mu z|\sin(\beta)}\frac{M_\beta}{|\mu|}d\mu+e\left|z\right|M_\beta\frac{2\pi}{|z|}+\int\limits_{\Gamma_{r,3}}e^{-|\mu z|\sin(\beta)}\frac{M_\beta}{|\mu|}d\mu \tag{9}$$

ce qui implique :

$$\left\|\int\limits_{\Gamma}e^{\mu z}R\left(\mu,B\right)d\mu\right\|\leq\int\limits_{-\infty}^{-r}e^{-\left|-\rho e^{-i\ \left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta\right)z}\right|\sin\beta}\frac{M_\beta}{\left|-\rho e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta\right)}\right|}d\rho+2\pi eM_\beta+$$

$$\int\limits_{r}^{+\infty}e^{-\left|\rho e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta\right)z}\right|\sin\beta}\frac{M_\beta}{\left|\rho e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta\right)}\right|}d\rho \tag{10}$$

comme :

$$\left|e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta\right)}\right|=\left|e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta\right)}\right|=1\text{et }\ |-\rho|=-\rho \text{ si } \rho<0$$

on a :

$$\left\|\int_{\Gamma} e^{\mu z}R\left(\mu,B\right)d\lambda\right\|\leq\int_{-\infty}^{-r} e^{(-\rho)|z|\sin\beta}\frac{M_\beta}{|-\rho|}d\rho+2\pi eM_\beta+\int_{r}^{+\infty} e^{-\rho|z|\sin\beta}\frac{M_\beta}{\rho}d\rho$$

*c'est -à-dire :*

$$\left\|\int_{\Gamma} e^{\mu z}R\left(\mu,B\right)d\mu\right\|\leq\int_{-\infty}^{-r} e^{+\rho|z|\sin\beta}\frac{M_\beta}{-\rho}d\rho+2\pi eM_\beta+\int_{r}^{+\infty} e^{-\rho|z|\sin\beta}\frac{M_\beta}{\rho}d\rho \qquad (11)$$

Posons dans l'integral $\int_{-\infty}^{-r} e^{-\rho|z|\sin\beta}\frac{M_\beta}{-\rho}d\rho$, $|\rho|=-\rho$ et comme, $r=\frac{1}{|z|}$. On a encore :

$$\left\|\int_{\Gamma} e^{\mu z}R\left(\mu,B\right)d\mu\right\|\leq 2\int_{r}^{+\infty} e^{-\rho|z|\sin\beta}\frac{M_\beta}{\rho}d\rho+2\pi eM_\beta=2\int_{r}^{+\infty} e^{-\rho|z|\sin\beta}\frac{M_\beta}{\rho}d\rho+2\pi eM_\beta \qquad (12)$$

En prenant $r=1$ dans (12)

$$\left\|\int_{\Gamma} e^{\mu z}R\left(\mu,B\right)d\mu\right\|\leq 2\int_{1}^{+\infty} e^{-\rho|z|\sin\beta}\frac{M_\beta}{\rho}d\rho+2\pi eM_\beta \qquad (13)$$

On montre maintenant que l'integral : $2\int_{1}^{+\infty} e^{-\rho|z|\sin\beta}\frac{M_\beta}{\rho}d\rho$ est convergente. En effet on a :

$$e^{\rho|z|\sin\beta}\geq\rho\left|z\right|\sin\beta\Longrightarrow\frac{1}{e^{\rho|z|\sin\beta}}\leq\frac{1}{\rho\left|z\right|\sin\beta},$$

d'où :

$$e^{-\rho|z|\sin\beta}\leq\frac{1}{\rho\left|z\right|\sin\beta}\Longrightarrow\frac{1}{\rho}e^{-\rho|z|\sin\beta}\leq\frac{1}{\rho^2\sin\beta}$$

donc :

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{-\rho|z|\sin\beta}}{\rho} d\rho \leq \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\rho^2 \sin\beta} d\rho = \frac{1}{\sin\beta} \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\rho^2} d\rho = \frac{1}{\sin\beta}.$$

d'où :

$$2\int_{1}^{+\infty} e^{-\rho|z|\sin\beta} \frac{M_\beta}{\rho} d\rho \leq 2M_\beta \frac{1}{\sin\beta}.$$

De (13) on a :

$$\left\| \int_{\Gamma} e^{\mu z} R(\mu, B)\, d\mu \right\| \leq 2M_\beta \frac{1}{\sin\beta} + 2\pi e M_\beta$$

Posons :

$$C = 2M \frac{1}{\sin\beta} + 2\pi e M_\beta$$

d'où :

$$\left\| \int_{\Gamma} e^{\mu z} R(\mu, B)\, d\mu \right\| \leq C$$

donc :

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{\mu z} R(\mu, B)\, d\mu \quad \text{défini pour } \mu \in \Gamma \text{et } z \in \Sigma_{\alpha'}$$

c'est -à-dire :

$$\|S(z)\| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\mu z} R(\mu, B)\, d\mu \right\| \leq K \text{ , tel que } K \text{ est constante.}$$

Cela montre que l'intégrale déffinissant $S(z)$ converge danns $\mathcal{L}(X)$ absolument et uniformement pour $z \in \Sigma_{\alpha'}$, c'est -à-dire les opérateurs $S(z)$ sont bien définis et satisfait $(i)$ ■

## Semi-groupe analytique

**Définition 9** *Une famille d'opérateurs* $\{S(z)\}_{z\ \in \Sigma_\alpha \cup \{0\}} \subset \mathcal{L}(X)$ *est appelée semi-groupe analytique d'angle* $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ *si :*

*i)* $S(0) = I$ *et* $S(z_1 + z_2) = S(z_1) + S(z_2)$, $\forall\ z_1, z_2 \in \Sigma_\alpha$.

*ii) L'application* $z \longmapsto S(z)$ *est analytique dans* $\Sigma_\alpha$.

*iii)* $\lim\limits_{\Sigma_{\alpha'} \ni z \to 0} S(z)x = x$, *quelque soit* $x \in X$ *et* $0 < \alpha' < \alpha$.

*Si en plus* $\|S(z)\|$ *est bornée dans* $\Sigma_{\alpha'}$ *pour tous* $0 < \alpha' < \alpha$, *alors on dit que* $\{S(z)\}_{z\ \in \Sigma_\alpha \cup \{0\}}$ *est un semi-groupe analytique borné.*

On peut le définir aussi de la maniére équivalente suivante :

**Définition 10** *Soit* $o < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. *Si le* $C_0$*-semi-groupe* $(S(t))_{t\ \geq 0}$ *admet un prolongement analytique dans* $\Sigma_\alpha$ *verifiant :* $\lim\limits_{\Sigma_\beta \ni t \to 0} S(t)x = x$, $\forall x \in X$, *et* $\beta \in (0, \alpha)$.

*Alors* $(S(t))$ *est dit semi-groupe analytique d'angle* $\alpha$ *son générateur est le générateur de* $(S(t))_{t\ \geq 0}$. *De plus le semi-groupe analytique d'angle* $\alpha$ *est dit borné si pour chaque* $\beta \in (0, \alpha)$, *il existe* $M_\beta > 0$ *tel que :* $\|S(t)\| \leq M_\beta$, *pour tout* $t \in \Sigma_\beta$.

Il est connu ($cf$ [31]) que : si $A$ le générateur d'un semi-groupe analytique d'angle $\alpha$, alors pour chaque $\beta \in (0, \alpha)$, il existe $\omega \in \mathbb{R}$ tel que : $A - \omega$ est le générateur d'un semi-groupe analytique borné d'angle $\beta$. Le critère suivant sur les générateurs de semi-groupes sera également utilisé dans la suite ($cf$ [31], [32], [33], [34]).

**Lemme 2** *Soit* $o < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*a)* $B$ *est le générateur d'un semi-groupe analytique borné d'angle* $\alpha$.

*b) Pour tout* $\beta \in (0, \alpha)$, *il existe* $M_\beta > 0$, *tel que :* $e^{\pm i\theta}B$ *est le générateur d'un* $C_0-$*semi-groupe* $(S_\theta(t))_{t\ \geq 0}$, *satisfaisant :*

$$\|S_\theta(t)\| \leq M_\beta, \forall t \geq 0, \theta \in (0, \alpha).$$

*c) L'application :* $]0, +\infty[\ \ni t \longmapsto S(t) \in \mathbf{B}(X)$, *est différentiable et il existe une constante* $C > 0$, *tel que :*

$$\|BS(t)\| \leq \frac{C}{t}, \forall t > 0.$$

*d) $B$ est le générateur d'un semi-groupe $(S(t))_{t\,\geq 0}$ fortement continu dans $X$ , et il existe une constante $C^{'}>0$, telle que pour tout $r>0$, $s\neq 0$, on ait :*

$$\left\| R\left(r+is,B\right)\right\| \leq \frac{C^{'}}{|s|}.$$

*e) $B$ est sectoriel.*

**Preuve.** Nous allons montrer que :

$(a)\Longrightarrow(b)\Longrightarrow(d)\Longrightarrow(e)\Longrightarrow(c)\Longrightarrow(a)$.

$(a)\Longrightarrow(b)$ : Pour $\theta\in(0,\alpha)$, nous définissons :

$S_{\theta}\left(t\right)=S(e^{+i\theta}r)$. Alors d'après la définition (9), la famille d'opérateurs

$\left\{ S_{\theta}\left(t\right)\right\}_{t\,\geq 0}\subset\mathcal{L}\left(X\right)$, est un semi-groupe fortement continu dans $X$ , d'autre part pour déterminer son générateur, nous définissons :

$\Gamma:[0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{C}$

$r\longmapsto\Gamma\left(r\right)=e^{+i\theta}r$.

Alors par l'analyticité et le théorème intégral de Cauchy, nous obtenons :

$$R(1,B)x=\int_{0}^{+\infty}e^{-t}S(t)xdt=\int_{\Gamma}e^{-r}S(r)xdr$$

En utilisant le changement de variable suivant :

$$t=e^{+i\theta}r\Longrightarrow dt=e^{+i\theta}dr$$

Alors :

$$\begin{aligned} R(1,B)x&=e^{+i\theta}\int_{0}^{+\infty}e^{-e^{+i\theta}r}S_{\theta}(r)xdr\\ &=e^{+i\theta}R(e^{+i\theta},B_{\theta})x,\forall x\in X\end{aligned}$$

C'est à dire : $R(e^{+i\theta},B_{\theta})=e^{-i\theta}R(1,B)$, d'où :

$$B_{\theta}=e^{+i\theta}B$$

De même, il s'ensuit que : $\left(S\left(e^{-i\theta}t\right)\right)$ est un semi-groupe fortement continu satisfaisant :

$$\left\|S_\theta\left(t\right)\right\| \leq M_\beta, \forall t \geq 0, \theta \in \left(0, \alpha\right).$$

Ayant pour générateur $e^{-i\theta}B$, c'est à dire : $(b)$ est prouvé.

$(b) \Longrightarrow (d)$ Pour $s > 0$ :

Soit : $e^{-i\theta} = a - ib$ pour $a$, $b > 0$. En appliquant le théorème de Hille-Yosida au générateur $e^{-i\theta}B$, il existe alors une constante $\widetilde{C} \geq 1$, telle que :

$$\left\|R\left(r+is, B\right)\right\| = \left\|e^{-i\theta}R(e^{-i\theta}\left(r+is\right), e^{-i\theta}B)\right\|$$

$$= \left\|R(e^{-i\theta}\left(r+is\right), e^{-i\theta}B)\right\|.$$

Et comme :

$(a-ib)\left(r+is\right) = ar+bs-i\left(br-as\right)$. Alors :

$$\left\|R\left(r+is, B\right)\right\| \leq \frac{\widetilde{C}}{ar+bs} \leq \frac{C'}{s}.$$

Pour : $s \leq 0$ on obtient une estimation similaire en utilisant le fait que :

$e^{+i\theta}B$ est un générateur dans $X$ ; $e^{+i\theta} = a+ib$.

$\lambda = (a+ib)\left(r+is\right) = ar-bs+i(br+as)$, $\operatorname{Re}\lambda = ar-bs$, donc :

$$\left\|R\left(r+is, B\right)\right\| \leq \frac{\widetilde{\widetilde{C}}}{ar-bs} \leq \frac{\widetilde{\widetilde{C}}}{-bs} = \frac{C'}{-s}, C' = \frac{\widetilde{\widetilde{C}}}{b}$$

$(d) \Longrightarrow (e)$ Par hypothèse, $B$ génère un semi-groupe fortement continu et donc nous avons :

$\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\alpha} \subset \rho\left(B\right)$, d'près le théorème (9). Du corollaire (2) on a :

$$\left\|R\left(\lambda, B\right)\right\| \geq \frac{1}{d\ \left(\lambda, \sigma\left(B\right)\right)}, \forall \lambda \in \rho\left(B\right).$$

De l'estimation :

$$\|R(r+is,B)\| \leq \frac{C^{'}}{|s|}, r>0, s\in \mathbb{R}^{*}.$$

Resulte que $i\mathbb{R}/\{0\} \subset \rho(B)$. Et d'après la continuité de la résolvante :

$$\|R(\mu,B)\| \leq \frac{C^{\,'}}{|\mu|}, \forall 0 \neq \mu \in i\mathbb{R}...(a)$$

Nous développons la résolvante de $B$ en $0 \neq \mu \in i\mathbb{R}$ à la série de Taylor (Voir proposition1) :

$$R(\lambda,B) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mu-\lambda)^{n} R(\mu,B)^{n+1}$$

Cette série converge uniformément dans $\mathcal{L}(X)$ à condition que :

$$|\mu-\lambda| \, \|R(\mu,B)\| \leq q < 1, q \in (0,1)$$

En particulier, pour $\mu = i\operatorname{Im}\lambda$, c'est à dire : $|\mu-\lambda| = |\operatorname{Re}\lambda|$

D'après$(a)$ on a : $|\operatorname{Re}\lambda| \leq \frac{q}{C^{\,'}}|\operatorname{Im}\lambda|$

Puisque ceci est vrai pour : $0<q<1$ arbitraire. Alors on conclut que :

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\lambda \leq 0 \text{ et } \left|\frac{\operatorname{Re}\lambda}{\operatorname{Im}\lambda}\right| < \frac{1}{C^{\,'}}\right\} \subset \rho(B).$$

Et donc : $\sum_{\frac{\pi}{2}+\alpha} \subseteq \rho(B)$ pour $\alpha = \arctan\frac{1}{C^{\,'}}$.

Il reste à estimer $\|R(\lambda,B)\|$ pour $\lambda \in \sum_{\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta}$ et $\beta \in (0,\alpha)$.

Nous supposons d'abord que : $Re\lambda > 0$ alors d'après le théorème de Hille-Yosida, il existe une constante $\widetilde{M} \geq 1$, telle que :

$\|R(\lambda,B)\| \leq \frac{\widetilde{M}}{\operatorname{Re}\lambda}$, et comme :

$\|R(\lambda,B)\| \leq \frac{C^{\,'}}{|\operatorname{Im}\lambda|}$, $|\lambda| = \sqrt{\operatorname{Re}\lambda^{2}+\operatorname{Im}\lambda^{2}}$

Implique : $\exists M \geq 1$, $\|R(\lambda,B)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}$ ; $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Dans le cas : $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ nous choisissons $q \in (0,1)$ de telle sorte que :

$\alpha - \beta = \arctan\left(\frac{q}{C'}\right)$, alors : $\left|\frac{\operatorname{Re}\lambda}{\operatorname{Im}\lambda}\right| \leq \frac{q}{C'}$, et d'après l'estimation :

$$\|R(\mu, B)\| \leq \frac{C'}{|\mu|}, \forall 0 \neq \mu \in i\,\mathbb{R}$$

En Combinant avec le développement de Taylor pour : $\mu = i\operatorname{Im}\lambda$, nous obtenons :

$$\|R(\lambda, B)\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |\operatorname{Re}\lambda|^n \frac{C'^{n+1}}{|\operatorname{Im}\lambda|^{n+1}} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\operatorname{Im}\lambda|^n q^n}{C'^n} \frac{C'^{n+1}}{|\operatorname{Im}\lambda|^{n+1}}.$$

Et comme : $\left|\frac{\operatorname{Re}\lambda}{\operatorname{Im}\lambda}\right| < \frac{1}{C'}$ il vient :

$$\frac{|\operatorname{Re}\lambda|^2}{|\operatorname{Im}\lambda|^2} < \frac{1}{C'^2}$$

D'où :

$$\frac{|\operatorname{Re}\lambda|^2}{|\operatorname{Im}\lambda|^2} + 1 < \frac{1}{C'^2} + 1$$

Par conséquent :

$$\frac{|\operatorname{Re}\lambda|^2 + |\operatorname{Im}\lambda|^2}{|\operatorname{Im}\lambda|^2} < \frac{C'^2 + 1}{C'^2}$$

Il s'ensuit donc que :

$$\frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|} < \frac{\sqrt{C'^2 + 1}}{C'\,|\lambda|}$$

Par suite :

$$\|R(\lambda, B)\| \leq \frac{\sqrt{C'^2 + 1}}{(1-q)\,|\lambda|} = \frac{\sqrt{C'^2 + 1}}{1-q} \frac{1}{|\lambda|}.$$

$(e) \Longrightarrow (c)$ D'après la proposition (2), $B$ génère un semi-groupe fortement continu borné $(S(t))_{t\geq 0}$, et l'application : $(0, +\infty) \ni t \longmapsto S(t)\,x \in X$ est differentiable pour tous $x \in X$ en particulier :

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} x = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{S(h) - I}{h} S(t)\,x.$$

Existe pour tous $x \in X$ et $t > 0$, donc : $\operatorname{Im}(S(t)) \subset D(B)$ pour $t > 0$.

Alors pour $t > 0$, l'opérateur $BS(t)$ est fermé de domaine $D(BS(t)) = X$, d'après le théorème du graphe fermé. pour estimer sa norme, nous utilisons la représentation intégrale de $S(t)$ (2.1), en utilisant la fermeture de $B$, l'équation de la résolvante et le théorème intégral de Cauchy nous obtenons :

$$BS(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\mu t} R(\mu, B)\, d\mu$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\mu t}(\mu R(\mu, B) - I)\, d\mu$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \mu e^{\mu t} R(\mu, B)\, d\mu,\ \frac{-1}{2\pi I}\int_{\Gamma} e^{\mu t} d\mu = 0$$

Alors par l'analyticité, nous prenons : $\Gamma = \Gamma_r$ pour $r = \frac{1}{t}$, comme dans la preuve de la proposition (2), d'après (2.3) et (2.4) on a :

$$\left\| \int_{\Gamma} \mu e^{\mu t} R(\mu, B)\, d\mu \right\| \leq 2M_\beta \int_{\frac{1}{t}}^{+\infty} e^{-\rho t \sin\beta} d\rho + \frac{2\pi e M_\beta}{t}$$

$$\leq 2M_\beta \left( \frac{1}{\sin\beta} + \pi e \right) \frac{1}{t},$$

où : $\beta = \frac{\alpha - \alpha'}{2}$, pour $\alpha' \in (0, \alpha)$. Ce qui prouve $(c)$.

$(c) \Longrightarrow (a)$ Soit $t_0 > 0$. D'apres la formule de Taylor on a :

$$S(t) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(t - t_0)^k}{k!} S^{(k)}(t_0) + \frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t} (t - \mu)^n S(\mu)^{(n+1)} d\mu$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(t - t_0)^k}{k!} B^K S(t_0) + \frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t} (t - \mu)^n B^{n+1} S(\mu)\, d\mu$$

Car :

$$S(t)^{(n)} = B^n S(t) = \left[ BS\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n, \forall t > 0.$$

Compte tenu de $(c)$, on voit que :

$$\left\| \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} (t-\mu)^n B^{n+1} S(\mu)\, d\mu \right\| \leq \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} (t-\mu)^n \left\| \left[ BS\left(\frac{\mu}{n+1}\right)\right]^{n+1} \right\| d\mu$$

$$\leq \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} (t-\mu)^n \left( \frac{C}{\frac{\mu}{n+1}} \right)^{n+1} d\mu$$

$$\leq \frac{1}{n!} \left( \frac{C\ (n+1)}{t_0} \right)^{n+1} \int_{t_0}^{t} (t-\mu)^n \, d\mu.$$

On pose : $t-\mu = s$ on obtient :

$$\frac{1}{n!} \left( \frac{C\ (n+1)}{t_0} \right)^{n+1} \int_{t_0}^{t} (t-\mu)^n \, d\mu = \frac{1}{n!} \left( \frac{C\ (n+1)}{t_0} \right)^{n+1} \int_{0}^{t-t_0} s^n ds$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \left( \frac{C\ (n+1)}{t_0} \right)^{n+1} (t-t_0)^{n+1}.$$

Avec la formule de Stirling :

$n! = n^n \sqrt{2\pi n} e^{-n + \frac{u_n}{12}}$, $u_n \in ]0,1[$, on obtient : $n! e^n \geq n^n$.

Par conséquent :

$$\left\| \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} (t-\mu)^n B^{\ n+1} S(\mu)\, d\mu \right\| \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{(t-t_0)^{n+1}}{(t_0)^{n+1}} (n+1)! e^{\ n+1} C^{\ n+1}$$

Pour $t \geq t_0$, et $n \in \mathbb{N}^*$, suffisamment grand.

Il en résulte que la série de Taylor est convergente vers $S(t)$, si : $t - t_0 < \frac{t_0}{Ce}$, et on a :

$$S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} B^k S(t_0).$$

Il s'ensuit donc que pour $z \in \mathbb{C}$ vérifiant :

$\operatorname{Re} z > 0$ et $|z - t_0| < \frac{t_0}{Ce}$, on peut définir une fonction analytique :

$$S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z - t_0)^k}{k!} B^k S(t_0).$$

La série de la partie droite de cette égalité est uniformément convergente par rapport à $z \in \mathbb{C}$, vérifiant les conditions :

$\operatorname{Re} z > 0$ et $|z - t_0| < q\frac{t_0}{Ce}$, où $q \in (0, 1)$

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que : $\operatorname{Re} z = t_0$ on voit que :

$|\operatorname{Im} z| = |z - t_0| < \frac{\operatorname{Re} z}{Ce}$, d'où :

$\frac{|\operatorname{Im} z|}{|\operatorname{Re} z|} < \frac{1}{Ce}$, ou encore : $|\arg z| \leq \arctan\left(\frac{1}{Ce}\right)$ en prenant : $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{Ce}\right)$.

Nous obtenons que l'application : $\triangle_\alpha \ni z \mapsto S(z) \in B(X)$ est analytique dans

Le secteur :

$$\triangle_\alpha = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} z > 0 \text{ et } |\arg z| < \alpha\}$$

De plus, si nous considérons $z \in \mathbb{C}$ avec les propriétés :

$\operatorname{Re} z > 0$ et $|t - t_0| < q\frac{t_0}{Ce}$, $q \in (0, 1)$. Alors nous déduisons que :

$$\|S(z)\| \leq \|S(t_0)\| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|z - t_0|^k}{k!} \left\|B^k S(t_0)\right\|$$

$$\leq \|S(t_0)\| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^k}{k!} \left(\frac{t_0}{Ce}\right)^k \left(\frac{Cn}{t_0}\right)^k$$

$$\leq M + \sum_{k=1}^{+\infty} q^k = M + \frac{q}{1 - q}.$$

Par conséquent, si nous notons :

$\alpha^{'} = \arctan\left(q\frac{1}{Ce}\right)$, $q \in ]0, 1[$.

Nous voyons que l'application : $\triangle_\alpha \ni z \mapsto S(z) \in B(X)$ est uniformément bornée dans le sous secteur :

$$\triangle_{\alpha'} = \left\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} z > 0 \text{ et } |\arg z| \leq \alpha^{'}\right\} \subset \triangle_\alpha$$

Il est évident que : $S(0) = I$, parce que $\{S(t)\}_{t\geq 0} \in S.G(M,0)$. De plus, pour tout $t > 0$ et tout $z \in \triangle_\alpha$, il résulte que :

$$S(t)S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z-t_0)^k}{k!} B^k S(t_0 + t)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{[(z+t)-(t_0+t)]^k}{k!} B^k S(t_0+t) = S(t+z)$$

Alors, pour tous $z_1$, $z_2 \in \triangle_\alpha$, nous obtenons :

$$S(z_1)S(z_2) = S(z_1) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z_2-t_0)^k}{k!} B^k S(t_0)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z_2-t_0)^k}{k!} B^k S(z_1+t_0)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{[(z_2+z_1)-(z_1+t_0)]^k}{k!} B^k S(z_1+t_0)$$

$$= S(z_1+z_2).$$

Soit : $X_0 = \underset{0<t<\infty}{\cup} S(t)X$.

Nous prouvons que cet ensemble est dense dans $X$. Soient $x \in X$ et $t_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = 0.$$

Alors pour : $x_n = S(t_n)x \in X_0$, $n \in \mathbb{N}$. Nous obtenons :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} S(t_n)x = x.$$

Par conséquent : $\overline{X}_0 = X$.

De plus, nous avons : vu que $\{S(z)\}_{z\in\triangle_{\alpha'}}$ est uniformément bornée dans tout sous secteur fermé $\triangle_{\alpha'}$. De même pour $x \in X$ , on obtient :

$$S(t)x \in X_0 \text{ et : } \lim_{z \longrightarrow 0} S(z)S(t)x = \lim_{z \longrightarrow 0} S(z+t)x = S(t)x.$$

Compte tenu du théorème de Banach-Steinhaus il en résulte que :

$$\lim_{z \longrightarrow 0} S(z)x = x, \forall x \in X, z \in \triangle_{\alpha}.$$

Finalement, on voit que : $\{S(z)\}_{z \in \triangle_{\alpha}}$ est un semi-groupe qui prolonge le $C_0$-semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0} \in S.G(M, 0)$ ■

Nous passons maintenant à une petite introduction aux puissances fractionnaires (Voir :[2],[5],[4],[20],[31],[33],[37]).

**Définition 11** *Soit* $-A$ *le générateur d'un semi-groupe analytique d'angle* $\alpha$ $\left(\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ *et soit* $0 \in \rho(A)$ *pour* $b > 0$, *la puissance fractionnaire* $A$ *est définie comme suit :*

$$A^{-b} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\gamma)} \mu^{-b} R(\lambda, A)\, d\mu.$$

Ici et dans la suite $\lambda^b$ est considérée comme la branche principale. Dans cette définition, la fonction $\mu \longmapsto \mu^{-b}$ est une branche de la fonction puissance fractionnaire dans $\mathbb{C}/\mathbb{R}_-$ c'est à dire :

$\mu^{-b} = e^{-b \log \mu}$; $\log \mu = \log |\mu| + i\ \theta$, $-\pi < \theta = \arg \mu < \pi$.

Et le chemin $\Gamma(\gamma)$, $\frac{\pi}{2} - \alpha < \gamma < \pi$ relie les points $-\infty e^{-i\gamma}$ à $+\infty e^{+i\gamma}$ dans $\rho(A)$, tout en évitant l'axe réel négatif et l'origine. Définir, $A^b = \left(A^{-b}\right)^{-1}$ (Voir lemme 3.$i$ ) et : $A^0 = I$.

Dans ce travail, nous avons besoin de plusieurs propriétés des puissances fractionnaires qui sont regroupées dans le lemme suivant :

**Lemme 3** *i)* $A^{-b} \in \boldsymbol{B}(X)$ *est injectif pour* $b > 0$.

*ii)* $A^b$ *est un opérateur fermé et* $D(A) \subset D\left(A^{b'}\right)$, *pour* $b > b' > 0$.

*iii)* $A^b x = A^{b\ -n} A^n x$ *; Pour* $x \in D(A^n)$, $n > b$, $n \in \mathbb{N}$.

*iv) Si* $B \subset A^b$ *et* $D(B) \subset D\left(A^{b'}\right)$ *;* $b > b' > 0$ *alors* $B$ *est fermable et* $\overline{B} = A^b$*, où* $\overline{B}$ *est la fermeture de* $B$*.*

**Preuve.** *i)* On prend $b' > 0$ tel que : $b + b' = n \in \mathbb{N}$ alors : $A^{-b\ -b'} = A^{-n}$ et comme $A^n A^{-b\ -b'} = I$ . Alors $A^{-b}$ est injectif.

*ii)*-Pour $b \leq 0$ ; $A^b$ est borné implique $A^b$ est fermé.

-Pour $b > 0$ ; $A^b$ est inversible donc : $0 \in \rho(A) \Longrightarrow A^b$ est fermé, $D\left(A^b\right) = \operatorname{Im}\left(A^{-b}\right)$

-Pour $b \geq b'$ et comme $\left\{A^{-b}\right\}$ forme un semi-groupe on a :

$A^{-b} = A^{-b'} A^{-\left(b\ -b'\right)}$ et donc : $D\left(A^b\right) = \operatorname{Im}\left(A^{-b}\right) \subset \operatorname{Im}\left(A^{-b'}\right) = D\left(A^{b'}\right)$.

Ce qui implique : $D\left(A^b\right) \subset D\left(A^{b'}\right)$

*iii)* $A^b x = A^{(b\ -n)+n} x = A^{b\ -n} A^n x$, pour $x \in D(A^n)$, $n \in \mathbb{N}$ $n > b$, $D(A^n) \subset D\left(A^b\right)$

■

# Semi-groupe analytique généré par $-A^b$ et $A - \varepsilon A^b$

Dans cette section nous montrons que les deux opérateurs $-A^b$et $A - \varepsilon A^b$ sont des générateurs de semi-groupes analytiques sous certaines conditions appropriées sur l'operateur $A$, (voir[36])

**Théorème 11** *Soit* $-A$ *le générateur d'un semi-groupe analytique borné d'angle* $\alpha$ $\left(0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$*et soit* $0 \in \rho(A)$*. Alors* $-A^b$ *est le générateur d'un semi-groupe analytique borné d'angle* $\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) b\right)$*, où* $b \in \left(1, \frac{\pi}{\pi - 2\alpha}\right)$*.*

**Preuve.** Pour $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) b\right)$ fixé, on choisit $\gamma \in \left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \frac{1}{b}\right)$, posons :

$$U(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\gamma)} e^{-\mu^b z} R(\mu, A)\, d\mu; \;\; z = te^{i\theta}, t > 0, |\theta| \leq \beta \tag{2.5}$$

Où le chemin $\Gamma(\gamma)$ est donnée comme dans la définition (11) où $0 \in \rho(A)$, on a :

$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq d\ \} \subset \rho(A)$ pour un certain $d \in (0, 1)$. Nous estimons d'abord $\{U(z)\}$, ce qui se fait en deux cas :

• Quand : $t^{\frac{-1}{b}} \leq d$ , d'après le théorème de Cauchy on peut déplacer le chemin $\Gamma(\gamma)$ dans (2.5) à $\Gamma^1 \cup \Gamma^2 \cup \Gamma^3$ (Voir figure ci-dessous )

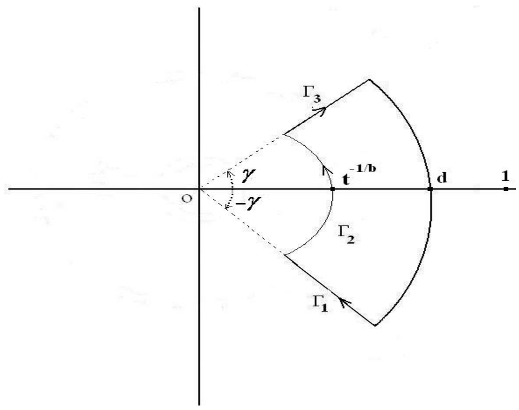


FIG. 2-2 –

où :

$\Gamma^1 = \left\{ se^{-i\gamma}; s \geq t^{\frac{-1}{b}} \right\}$

$\Gamma^2 = \left\{ t^{\frac{-1}{b}} e^{i\psi}; |\psi| \leq \gamma \right\}$

$\Gamma^3 = \left\{ se^{i\gamma}; s \geq t^{\frac{-1}{b}} \right\}$

Pour $\gamma$ donné. D'après lemme (2) il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$\|R(\mu, A)\| \leq \frac{M}{|\mu|}, \mu \in \Gamma(\gamma). \tag{2.6}$$

$\frac{\pi}{2} - \alpha < \gamma < \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \frac{1}{b} \Longrightarrow \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) b < \gamma b < \frac{\pi}{2} - \beta$

$\Longrightarrow \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) b + \beta < \gamma b + \beta < \frac{\pi}{2}$

Comme $0 < |\gamma b - \theta| \leq \gamma b + \beta < \frac{\pi}{2}$ ; $|\theta| < \beta$.

► Sur $\Gamma^1$ : $\mu \in \Gamma \Longrightarrow \mu = se^{-i\gamma}$ ; $s \geq t^{\frac{-1}{b}}$ et $d\mu = e^{-i\gamma} ds$.

$\mu^b = s^b e^{-i\gamma b} \Longrightarrow \mu^b z = s^b t e^{-i\theta} e^{-i\gamma b} = s^b t e^{i\,(\theta - \gamma b)}$ ; mais :

$\gamma b - \theta < \gamma b + \theta \Longrightarrow -i(\gamma b - \theta) > -i(\gamma b + \theta)$

$\Longrightarrow -s^b t e^{-i(\gamma b - \theta)} < -s^b t e^{-i(\gamma b + \theta)}$

Alors :

$$\exp\left(-s^b t e^{-i(\gamma b-\theta)}\right) < \exp\left(-s^b t e^{-i(\gamma b+\theta)}\right)$$

et :

$$\left|\exp\left(-s^b t e^{-i(\gamma b+\theta)}\right)\right| = \left|e^{-s^b t\ [\cos(\gamma b+\theta)-i\sin(\gamma b+\theta)]}\right|$$

$$= \exp\left(-s^b t\cos\left(\gamma b+\theta\right)\right).$$

Donc :

$$\left\|\int_{\Gamma^1} \exp\left(-\mu^b z\right) R\left(\mu, A\right) d\mu\right\| \leq \int_{t^{\frac{-1}{b}}}^{+\infty} \left\|R\left(\mu, A\right)\right\| \left|\exp\left(-s^b t e^{-i(\gamma b+\theta)}\right)\right| \left|e^{-i\gamma}\right| ds$$

$$\leq \int_{t^{\frac{-1}{b}}}^{+\infty} \frac{M}{|\mu|} \exp\left(-s^b t\cos\left(\gamma b+\theta\right)\right) ds$$

$$\leq M\int_{t^{\frac{-1}{b}}}^{+\infty} s^{-1}\exp\left(-s^b t\cos\left(\gamma b+\theta\right)\right) ds, |\mu| = s$$

On pose : $r = s^b t \Longrightarrow dr = bs^{b-1}tds$

$$\Longrightarrow dr = bs^b ts^{-1}ds$$

$$\Longrightarrow s^{-1}ds = b^{-1}r^{-1}dr$$

Quand $s \to +\infty \Longrightarrow r \to +\infty$ et quand $s = t^{\frac{-1}{b}} \Longrightarrow r = 1$ donc :

$$\left\|\int_{\Gamma^1} \exp\left(-\mu^b z\right) R\left(\mu, A\right) d\mu\right\| \leq Mb^{-1}\int_1^{+\infty} r^{-1}\exp\left(-r\cos\left(\gamma b+\theta\right)\right) dr$$

Et comme : $|\theta| < \beta \Longrightarrow \cos\left(\gamma b+\theta\right) \geq \cos\left(\gamma b+\beta\right)$

$\Longrightarrow \exp\left(-r\cos\left(\gamma b+\theta\right)\right) \leq \exp\left(-r\cos\left(\gamma b+\beta\right)\right)$, d'où :

$$\left\|\int_{\Gamma^1} \exp\left(-\mu^b z\right) R\left(\mu, A\right) d\mu\right\| \leq Mb^{-1}\int_1^{+\infty} r^{-1}\exp\left(-r\cos\left(\gamma b+\beta\right)\right) dr$$

$$\leq Mb^{-1}\int_1^{+\infty} \frac{1}{r^2\cos\left(\gamma b+\beta\right)} dr = \frac{Mb^{-1}}{\cos\left(\gamma b+\beta\right)}\left[\frac{-1}{r}\right]_1^{+\infty}$$

Alors :

$$\left\| \int_{\Gamma^1} \exp\left(-\mu^b z\right) R(\mu, A)\, d\mu \right\| \leq \frac{Mb^{-1}}{\cos(\gamma b + \beta)} = M_\beta. \tag{2.7}$$

Où, dans le reste, de cette preuve, $M_\beta$ est une constante positive indépendant de $t$ et $\theta$. L'estimation se fait de la même maniére pour l'intégral sur $\Gamma^3$.

► Sur $\Gamma^2$ : $\mu \in \Gamma^2 \Longrightarrow \mu = t^{\frac{-1}{b}} e^{i\psi}$, $|\psi| \leq \gamma$

$d\ \mu = it^{\frac{-1}{b}} e^{i\psi} d\psi$ ; $|\mu| = t^{\frac{-1}{b}}$, alors :

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\Gamma^2} \exp\left(-\mu^b z\right) R(\mu, A)\, d\mu \right\| &\leq \int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{M}{|\mu|} \left| \exp\left[ -\left( \left(t^{\frac{-1}{b}}\right)^b t e^{i(\psi b + \theta)} \right) \right] i e^{i\psi} t^{\frac{-1}{b}} \right| d\psi \\
&\leq M \int_{-\gamma}^{+\gamma} t^{\frac{-1}{b}} t^{\frac{+1}{b}} \left| \exp\left[ -\left( \left(t^{\frac{-1}{b}}\right)^b t e^{i(\psi b + \theta)} \right) \right] \right| d\psi \\
&\leq M \int_{-\gamma}^{+\gamma} \left| \exp\left[ -e^{i(\psi b + \theta)} \right] \right| d\psi.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi b + \theta \leq \tfrac{\pi}{2} &\Longrightarrow \cos(\psi b + \theta) \geq \cos \tfrac{\pi}{2} = 0 \\
&\Longrightarrow -\cos(\psi b + \theta) \leq 0 \\
&\Longrightarrow \exp(-\cos(\psi b + \theta)) \leq 1, \text{ donc :}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\Gamma^2} \exp\left(-\mu^b z\right) R(\mu, A)\, d\mu \right\| &\leq M \int_{-\gamma}^{+\gamma} \exp(-\cos(\psi b + \theta))\, d\psi \\
&\leq M \int_{-\gamma}^{+\gamma} d\psi \\
&\leq 2\gamma M \leq \pi M. 
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Car : $\frac{\pi}{2} - \alpha < \gamma < \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \frac{1}{b} 0 < \beta < \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) b \Longrightarrow \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) b < \frac{\pi}{2} - \beta < \frac{\pi}{2}$

$$\Longrightarrow \frac{\pi}{2} - \alpha < \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \frac{1}{b} < \frac{1}{b} \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}, b > 1 \Longrightarrow \frac{1}{b} < 1$$

$$\gamma < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow 2\gamma < \pi.$$

En conclusion on a :

$$\left\| U\left(te^{i\theta}\right)\right\| \leq M_\beta, 0 < t^{\frac{-1}{b}} \leq d, |\theta| \leq \beta \tag{2.9}$$

•• Quand : $t^{\frac{-1}{b}} > d$ parce que $\Gamma^2$ n'appartient pas nécessairement à $\rho(A)$.
On pose : $\Gamma(\gamma) = \bigcup\limits_{j=1}^{j=7} \Gamma_j$ (Voir figure ci-dessous)

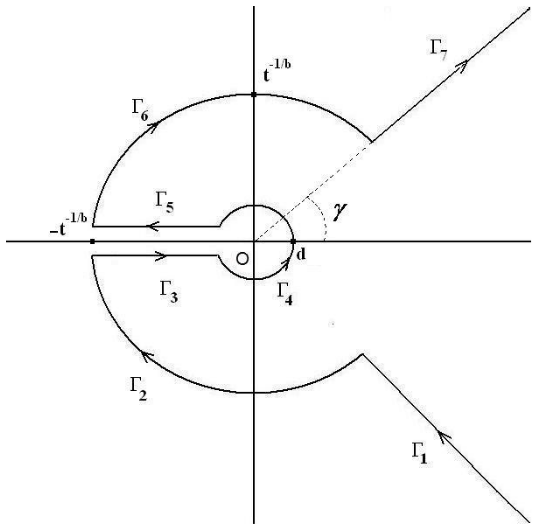


FIG. 2-3 –

Ou :

$$\Gamma_1 = \left\{se^{-i\gamma}; s \geq t^{\frac{-1}{b}}\right\}, \Gamma_2 = \left\{t^{\frac{-1}{b}} e^{i\psi}; \gamma \leq \psi \leq \pi\right\}$$

$$\Gamma_3 = \left\{se^{-i\pi}; d \leq s \leq t^{\frac{-1}{b}}\right\}, \Gamma_4 = \left\{de^{i\psi}; -\pi \leq \psi \leq \pi\right\}$$

$$\Gamma_5 = \left\{se^{i\pi}; d \leq s \leq t^{\frac{-1}{b}}\right\}, \Gamma_6 = \left\{t^{\frac{-1}{b}} e^{i\psi}; \gamma \leq \psi \leq \pi\right\}$$

$$\Gamma_7 = \left\{se^{i\gamma}; s \geq t^{\frac{-1}{b}}\right\}$$

Nous estimons d'abord l'intégrale sur $\Gamma_3 \cup \Gamma_5$ :

Pour $a \in (0, 2)$, la fonction $f(a, \theta)$ définie par :

$$(a, \theta) \longmapsto e^{a \sin\theta} + e^{-a \sin\theta} - 2\cos(a \cos\theta),$$

est encore dans $(-\beta,\beta)$ et elle est croissante sur $[0,\beta]$. On en déduit de (2.6) :

$$L=\left\|\left\{\int_{\Gamma_3}+\int_{\Gamma_5}\right\}e^{-\mu^b z}R(\mu,A)\,d\mu\right\|$$

- Si $\mu\in\Gamma_3\Longrightarrow\mu=se^{-i\pi}$, alors : $d\ \mu=e^{-i\pi}ds\ |\mu|=s$ et $\mu^b=s^b e^{-i\pi b}$ donc :

$$L=\left\|\int_d^{t^{\frac{-1}{b}}}\left\{\exp\left[-ts^b e^{i(\theta-\pi b)}\right]-\exp\left[-ts^b e^{i(\theta+\pi b)}\right]\right\}R(-s,A)\,ds\right\|$$

$\mu=e^{\pm i\pi}s=-s$, donc :

$$L\leq M\int_d^{t^{\frac{-1}{b}}}s^{-1}\left|\exp\left(-ts^b e^{i(\theta-\pi b)}\right)-\exp\left(-ts^b e^{i(\theta+\pi b)}\right)\right|ds=$$

$$M\int_d^{t^{\frac{-1}{b}}}s^{-1}\left|\exp\left(-ts^b\left(\cos(\theta-\pi b)+i\sin(\theta-\pi b)\right)\right)-\exp\left(-ts^b\left(\cos(\theta+\pi b)+i\sin(\theta+\pi b)\right)\right)\right|ds$$

$$\leq M\int_d^{t^{\frac{-1}{b}}}s^{-1}\left|e^{-ts^b\cos(\theta-\pi b)}\left[\cos\left(-ts^b\sin(\theta-\pi b)\right)+i\sin\left(-ts^b\sin(\theta-\pi b)\right)\right]-\right.$$

$$\left.-e^{-ts^b\cos(\theta+\pi b)}\left[\cos\left(-ts^b\sin(\theta+\pi b)\right)+i\sin\left(-ts^b\sin(\theta+\pi b)\right)\right]\right|ds$$

$$\leq M\int_d^{t^{\frac{-1}{b}}}s^{-1}\left|\left\{e^{-ts^b\cos(\theta-\pi b)}\left[\cos\left(-ts^b\sin(\theta-\pi b)\right)-e^{-ts^b\cos(\theta+\pi b)}\cos\left(-ts^b\sin(\theta+\pi b)\right)\right]\right\}+\right.$$

$$\left.i\left\{e^{-ts^b\cos(\theta-\pi b)}\sin\left(-ts^b\sin(\theta-\pi b)\right)-e^{-ts^b\cos(\theta+\pi b)}\sin\left(-ts^b\sin(\theta+\pi b)\right)\right\}\right|ds$$

$$\leq M\int_d^{t^{\frac{-1}{b}}}s^{-1}\left\{\left[e^{-ts^b\cos(\theta-\pi b)}\cos\left(-ts^b\sin(\theta-\pi b)\right)-e^{-ts^b\cos(\theta+\pi b)}\cos\left(-ts^b\sin(\theta+\pi b)\right)\right]^2+\right.$$

$$\left.+\left[e^{-ts^b\cos(\theta-\pi b)}\sin\left(-ts^b\sin(\theta-\pi b)\right)-e^{-ts^b\cos(\theta+\pi b)}\sin\left(-ts^b\sin(\theta+\pi b)\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}ds$$

$$\leq M\int_d^{t^{\frac{-1}{b}}}s^{-1}\left[e^{-2ts^b\cos(\theta-\pi b)}\cos^2\left(-ts^b\sin(\theta-\pi b)\right)+e^{-2ts^b\cos(\theta+\pi b)}\cos^2\left(-ts^b\sin(\theta+\pi b)\right)-\right.$$

$$-2\exp\left[-ts^b\cos(\theta-\pi b)-ts^b\cos(\theta+\pi b)\right].\cos\left(-ts^b\sin(\theta-\pi b)\right)\cos\left(-ts^b\sin(\theta+\pi b)\right)+$$

$$+\exp\left(-2ts^b\cos(\theta-\pi b)\right)\sin^2\left(-ts^b\sin(\theta-\pi b)\right)+\exp\left(-2ts^b\cos(\theta-\pi b)\right)\sin^2\left(-ts^b\sin(\theta+\pi b)\right)$$

$$-2\exp\left(-ts^b\cos(\theta-\pi b)-ts^b\cos(\theta+\pi b)\right)\sin\left(-ts^b\sin(\theta-\pi b)\right)\sin\left(-ts^b\sin(\theta+\pi b)\right)\Big]^{\frac{1}{2}}ds$$

$$\leq M\int_d^{t^{\frac{-1}{b}}} s^{-1}\left\{\left[\exp\left(-2ts^b\cos(\theta-\pi b)\right)+\exp\left(-2ts^b\cos(\theta-\pi b)\right)\right]-\right.$$

$$-2\exp\left[-ts^b\left(\cos(\theta-\pi b)+\cos(\theta+\pi b)\right)\right]\left[\cos\left(-ts^b\sin(\theta-\pi b)\right)\cos\left(-ts^b\sin(\theta+\pi b)\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\sin\left(-ts^b\sin(\theta-\pi b)\right)\sin\left(-ts^b\sin(\theta+\pi b)\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}ds$$

$$\leq M\int_d^{t^{\frac{-1}{b}}} s^{-1}\left\{\exp\left(-2ts^b\left(\cos\theta\cos\pi b+\sin\theta\sin\pi b\right)\right)+\exp\left(-2ts^b\left(\cos\theta\cos\pi b-\sin\theta\sin\pi b\right)\right)\right.$$

$$\left.-\,2\exp\left(-2ts^b\cos\theta\cos\pi b\right)\cos\left(-ts^b\sin(\theta-\pi b)+ts^b\sin(\theta+\pi b)\right)\right\}^{\frac{1}{2}}ds$$

$$\leq M\int_d^{t^{\frac{-1}{b}}} s^{-1}\exp\left(-ts^b\cos\theta\cos\pi b\right)\left\{e^{2ts^b\sin\theta\sin\pi b}+e^{-2ts^b\sin\theta\sin\pi b}-2\cos\left(-2ts^b\sin\pi b\right)\right\}^{\frac{1}{2}}ds$$

$$\leq M\int_d^{t^{\frac{-1}{b}}} s^{-1}\exp\left(-ts^b\cos\theta\cos\pi b\right)\left\{f\left(2ts^b\sin\pi b,\theta\right)\right\}^{\frac{1}{2}}ds...(b)$$

On pose :

$$r=ts^b\Longrightarrow dr=bts^bs^{-1}ds$$

$$\Longrightarrow s^{-1}ds=b^{-1}r^{-1}dr$$

Quand :

$$s=t^{\frac{-1}{b}}\Longrightarrow r=t\left(t^{\frac{-1}{b}}\right)^b=1$$

Et quand : $s=d\Longrightarrow r=0$. En remplacant dans $(b)$ on aura :

$$L\leq Mb^{-1}\int_0^1 r^{-1}\exp\left(-r\cos\pi b\right)\left\{f\left(2ts^b\sin\pi b,\theta\right)\right\}^{\frac{1}{2}}dr.$$

Comme $f$ est une fonction croissante sur $]-\beta,\beta[$, alors :
$f\left(2ts^b\sin\pi b,\theta\right)\leq f\left(2ts^b\sin\pi b,\beta\right)$, parce que : $|\theta|\leq\beta$.

Mais d'après le théorème de l'Hospital on a :

$$\lim_{r \longrightarrow 0} r^{-1} f\left(ar,\beta\right) = \lim_{r \longrightarrow 0} \frac{e^{ar\sin\beta} + e^{-ar\sin\beta} - 2\cos\left(ar\cos\beta\right)}{r}$$

$$= \lim_{r \longrightarrow 0} \left(a\sin\beta e^{ar\sin\beta} - a\sin\beta e^{-ar\sin\beta} + 2a\cos\beta\sin\left(ar\cos\beta\right)\right)$$

$$= a\sin\beta - a\sin\beta = 0.$$

Où $a \in (0,2)$, donc il existe une constante $M_{\beta}^{'} > 0$ telle que :

$$L \leq Mb^{-1}\int_0^1 r^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-r\cos\pi b\right)\left\{r^{-1}f\left(2r\sin\pi b,\beta\right)\right\}^{\frac{1}{2}}dr$$

Or :

$$L \leq MM_{\beta}^{'}b^{-1}\int_0^1 r^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-r\cos\pi b\right)dr \leq M_{\beta}.$$

De même pour (2.8) nous avons :

$\mu \in \Gamma_6 : \mu = t^{\frac{-1}{b}}e^{i\psi}\,;\ \gamma \leq \psi \leq \pi\,;\ |\mu| = t^{\frac{-1}{b}},\ z = te^{i\,\theta}$

$d\mu = it^{\frac{-1}{b}}e^{i\psi}d\psi$, donc :

$$\left\|\int_{\Gamma_6}\exp\left(-\mu^b z\right)R\left(\mu,A\right)d\mu\right\| \leq M\int_{\gamma}^{\pi}\frac{t^{\frac{-1}{b}}}{t^{\frac{-1}{b}}}e^{-\cos(\psi b+\theta)}d\psi$$

$$\leq M\int_{\gamma}^{\pi}e^{-\cos(\psi b+\theta)}d\psi \leq \pi eM.$$

L'estimation se fait de la même maniére pour l'intégral sur $\Gamma_2$

• Si $\mu \in \Gamma_4 \Longrightarrow \mu = de^{i\psi} \Longrightarrow d\mu = ide^{i\psi}d\psi$, et comme :

$t^{\frac{-1}{b}} > d \Longrightarrow 0 < t < d^{-b}$, alors :

$$\left\|\int_{\Gamma_4}\exp\left(-\mu^b z\right)R\left(\mu,A\right)d\mu\right\| \leq M\int_{-\pi}^{+\pi}e^{-d^b t\cos(\psi b+\theta)}d\psi$$

$$\leq 2\pi Me^{d^b t} \leq 2\pi eM \text{ car : } e^{d^b t} \leq e^1$$

Comme : $\Gamma_1 = \Gamma^1$ et $\Gamma_7 = \Gamma^3$. Les estimations des intégrales sur $\Gamma_1$ et $\Gamma_7$ sont les mêmes que (2.7), en combinant les estimations avec (2.9) nous obtenons :

$$\|U(z)\| \leq M_\beta;\ z = te^{i\theta},\ t > 0, |\theta| \leq \beta. \tag{2.10}$$

D'après théorème (3.1) dans [4] on a :

$\Sigma_{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)b} \subset \rho(-A)$ pour $\lambda \in \Sigma_{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)b}$ fixé.

Supposons, sans perte de généralité que : $|\arg\lambda| < \pi - b\gamma$.

Nous montrons maintenant :

$$R\left(\lambda, -A^b\right) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\gamma)} \frac{R(\mu, A)}{\lambda + \mu^b} d\mu. \tag{2.11}$$

En fait, comme : $\lambda + \mu^b \neq 0$ pour $\mu \in \Gamma(\gamma)$, il en résulte facilement de (2.6) que l'intégrale converge dans $\boldsymbol{B}(X)$ On désigne par $R_\lambda$ le côté droit de (2.11). On choisit $\gamma' \in \left(\gamma, \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\frac{1}{b}\right)$, telle que : $\Gamma(\gamma) \cap \Gamma\left(\gamma'\right) = \varnothing$. Alors par la définition (11), l'identité résolvante et le théorème de Cauchy on a :

$$R_\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\gamma)} \frac{R(\mu, A)}{\lambda + \mu^b} d\mu \text{ et } A^{b'} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\gamma')} v^{b'} R(v, A)\, dv.$$

Donc :

$$R_\lambda A^{b'} = (\frac{1}{2\pi i})^2 \int_{\Gamma(\gamma)}\int_{\Gamma(\gamma')} \frac{v^{b'}}{\lambda + \mu^b} R(\mu, A)\, R(v, A)\, d\mu dv.$$

Mais :

$$R(\mu, A) - R(v, A) = (v - \mu)\, R(\mu, A)\, R(v, A)\,.$$

C'est à dire :

$$R(\mu, A)\, R(v, A) = \frac{R(\mu, A) - R(v, A)}{v - \mu}.$$

Alors :

$$R_\lambda A^{b'} = (\frac{1}{2\pi i})^2 \int_{\Gamma(\gamma)}\int_{\Gamma(\gamma')} \frac{v^{b'}}{\lambda + \mu^b}(\frac{R(\mu, A) - R(v, A)}{v - \mu}) d\mu dv.$$

Or :

$$R_\lambda A^{b'} = (\frac{1}{2\pi i})^2 \int_{\Gamma(\gamma)} \int_{\Gamma(\gamma')} \frac{v^{b'} R(\mu, A)}{(\lambda + \mu^b)(v - \mu)} d\mu dv -$$

$$-(\frac{1}{2\pi i})^2 \int_{\Gamma(\gamma)} \int_{\Gamma(\gamma')} \frac{v^{b'} R(v, A)}{(\lambda + \mu^b)(v - \mu)} dv d\mu.$$

D'où :

$$R_\lambda A^{b'} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\gamma)} \frac{R(\mu, A)}{\lambda + \mu^b} (\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\gamma')} \frac{v^{b'}}{v - \mu} dv) d\mu -$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\gamma')} v^{b'} R(v, A) (\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\gamma)} \frac{1}{(\lambda + \mu^b)(v - \mu)} d\mu) dv$$

Il en résulte :

$$R_\lambda A^{b'} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\gamma)} \frac{\mu^{b'}}{\lambda + \mu^b} R(\mu, A) d\mu, b' < 0, v \in \Gamma(\gamma') \text{ et } \mu \in \Gamma(\gamma). \tag{2.12}$$

Par conséquent :

$$R_\lambda A^{b-n} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\gamma)} \frac{\mu^{b-n}}{\lambda + \mu^b} R(\mu, A) d\mu$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\gamma)} \frac{\mu^{-n}\lambda + \mu^{b-n} - \mu^{-n}\lambda}{\lambda + \mu^b} R(\mu, A) d\mu$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\gamma)} (\frac{\mu^{-n}\lambda + \mu^{b-n}}{\lambda + \mu^b} - \frac{\mu^{-n}\lambda}{\lambda + \mu^b}) R(\mu, A) d\mu$$

$$= A^{-n} - \lambda R_\lambda A^{-n}, n > b$$

D'après le lemme 3 $(iii)$ et $(iv)$ nous avons :

$$R_\lambda \left( A^{b-n} A^n + \lambda \right) x = x, \text{pour } x \in D\left(A^b\right).$$

Donc :

$$R_\lambda \left(A^b + \lambda\right) x = x, \text{ pour } x \in D\left(A^b\right).$$

Et donc : $R_\lambda = R\left(\lambda, -A^b\right)$ c'est à dire (2.11) est démontrée.

On définit : $U(0) = I$ et $U_\theta(t) = U(te^{i\theta})$ pour $t > 0$.

De même pour (2.12) nous avons :

$$U_\theta(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\gamma)} e^{-\mu^b te^{i\theta}} R(\mu, A)\, d\mu.$$

Et

$$A^{-b} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\gamma')} v^{-b} R(v, A)\, dv\ .$$

tel que : $\Gamma(\gamma) \cap \Gamma\left(\gamma'\right) = \varnothing$ donc :

$$U_\theta(t)\, A^{-b} = (\frac{1}{2\pi i})^2 \int_{\Gamma(\gamma)} \int_{\Gamma(\gamma')} v^{-b} e^{-\mu^b te^{i\theta}} R(\mu, A)\, R(v, A)\, d\mu dv$$

$$= (\frac{1}{2\pi i})^2 \int_{\Gamma(\gamma)} \int_{\Gamma(\gamma')} \frac{v^{-b} e^{-\mu^b te^{i\theta}} R(\mu, A)}{v-\mu} d\mu dv - (\frac{1}{2\pi i})^2 \int_{\Gamma(\gamma)} \int_{\Gamma(\gamma')} \frac{v^{-b} e^{-\mu^b te^{i\theta}} R(v, A)}{v-\mu} d\mu dv.$$

On suppose : $\mu \in \Gamma(\gamma)$ et $v \in \Gamma\left(\gamma'\right)$ et d'après le théorème de Fibbini on a :

$$U_\theta(t)\, A^{-b} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\gamma)} \mu^{-b} e^{-\mu^b te^{i\theta}} R(\mu, A)\, d\mu, t \geq 0$$

Alors pour $t$ donné, $t_0 \geq 0$, $(t \neq t_0)$ :

$$U_\theta(t)\, A^{-b} - U_\theta(t_0)\, A^{-b} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\gamma)} \mu^{-b}(e^{-\mu^b te^{i\theta}} - e^{-\mu^b t_0 e^{i\theta}}) R(\mu, A)\, d\mu.$$

En utilisant la preuve de (2.10) et en utilisant le théorème de convergence dominée on trouve :

$$\left\| U_\theta(t)\, A^{-b} - U_\theta(t_0)\, A^{-b} \right\| \longrightarrow 0, t \longrightarrow t_0$$

Et donc pour $x \in D\left(A^b\right)$ :

$$\| U_\theta(t)\, x - U_\theta(t_0)\, x \| = \left\| U_\theta(t)\, A^{-b}\left(A^b x\right) - U_\theta(t_0)\, A^{-b}\left(A^b x\right) \right\|$$

C'est à dire :

$$\left\|U_\theta\left(t\right)x-U_\theta\left(t_0\right)x\right\|\leq\left\|U_\theta\left(t\right)A^{-b}-U_\theta\left(t_0\right)A^{-b}\right\|\left\|\left(A^bx\right)\right\|\longrightarrow 0 \text{ quand } t\longrightarrow t_0.$$

De la continuité forte de $\{U_\theta\left(t\right)\}$, de la densité de $D\left(A^b\right)$ et (2.10) pour $\tau$, $t>0$, d'après le théorème de Fibbini et le théorème de Cauchy nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_0^\tau e^{-\lambda t}U(te^{i\theta})dt &= -\frac{1}{2\pi i}\int_0^\tau e^{-\lambda t}\left\{\int_{\Gamma(\gamma)}e^{-\mu^bte^{i\theta}}R\left(\mu,A\right)d\mu\right\}dt\\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\gamma)}R\left(\mu,A\right)\left\{\int_0^\tau e^{-(\lambda+\mu^be^{i\theta})t}dt\right\}d\mu\\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\gamma)}R\left(\mu,A\right)\left[-\frac{e^{-(\lambda+\mu^be^{i\theta})t}}{\lambda+\mu^be^{i\theta}}\right]_0^\tau d\mu\\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\gamma)}\left[\frac{1-e^{-(\lambda+\mu^be^{i\theta})\tau}}{\lambda+\mu^be^{i\theta}}\right]R\left(\mu,A\right)d\mu\\
&= R(\mu,-e^{i\theta}A^b)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\gamma)}\frac{\exp(-\tau(\lambda+\mu^be^{i\theta}))}{\lambda+\mu^be^{i\theta}}R\left(\mu,A\right)d\mu.
\end{aligned}$$

Quand $\tau\longrightarrow+\infty$

$$\begin{aligned}
\left\|\int_{\Gamma(\gamma)}\frac{\exp(-\tau(\lambda+\mu^be^{i\theta}))}{\lambda+\mu^be^{i\theta}}R\left(\mu,A\right)d\mu\right\| &\leq M\int_{\Gamma(\gamma)}\frac{e^{-\tau\lambda}\left|e^{-\tau\mu^b(\cos\theta+\sin\theta)}d\mu\right|}{\lambda+\mu^be^{i\theta}}\\
&\leq Me^{-\tau\lambda}\int_{\Gamma(\gamma)}\frac{e^{-\tau\mu^b\cos\theta}\left|d\mu\right|}{\left|\mu\right|\left|\lambda+\mu^be^{i\,\theta}\right|}\ ;\ e^{-\tau\mu^b\cos\theta}\leq 1\\
&\leq Me^{-\tau\lambda}\int_{\Gamma(\gamma)}\frac{\left|d\mu\right|}{\left|\mu\right|\left|\lambda+\mu^be^{i\theta}\right|}\to 0
\end{aligned}$$

Donc :

$$R(\mu,-e^{i\theta}A^b)=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}U(te^{i\theta})dt,\lambda>0.$$

Par la théorie des semi-groupes il s'ensuit que, pour chaque $|\theta|\leq\beta$ ; la famille

$\left\{U(te^{i\theta})\right\}_{t\geq 0}$est un $C_0-$semi-groupe de générateur $-e^{i\theta}A^b$, qui résulte de (2.10) et du lemme (2) ■

**Théorème 12** *Supposons que l'opérateur $A$ satisfait les conditions du théorème (10). Soit $A_\varepsilon = A - \varepsilon A^b$, où $\varepsilon > 0$ et $b \in \left(1, \frac{\pi}{\pi - 2\alpha}\right)$. Alors pour tout $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) b\right)$, $A_\varepsilon$ est le générateur d'un semi-groupe analytique $\{V_\varepsilon(t)\}$ d'angle $\beta$, vérifiant :*

$$\|V_\varepsilon(t)\| \leq M \exp(C\ \varepsilon^{\frac{1}{1-b}} t) pour\ t \geq 0$$

*Où $M$ et $C$ sont des constantes positives indépendantes de $\varepsilon$.*

***Preuve.*** *Soit $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) b\right)$ fixé par le théorème (10) et le lemme (2), il existe alors une constante $M_1$ (indépendante de $\varepsilon$) telle que :*

$$\left\|\lambda R\left(\lambda, -\varepsilon A^b\right)\right\| = \left\|\varepsilon^{-1}\lambda R\left(\varepsilon^{-1}\lambda, -A^b\right)\right\| \leq M_1, \lambda \in \Sigma_{\beta + \frac{\pi}{2}} \tag{2.13}$$

*Par conséquent $-\varepsilon A^b$ est le générateur d'un semi-groupe analytique borné d'angle $\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) b\right)$. Par ailleurs en utilisant l'inégalité (voir[11]), il existe une constante, $M_2$ tel que :*

$$\|Ax\| \leq M_2 \left\|A^b x\right\|^{\frac{1}{b}} \|x\|^{1-\frac{1}{b}}, x \in D\left(A^b\right)$$

*Comme :*

$$fg \leq \frac{f^{\ p}}{p} + \frac{g^q}{q}; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, f, g > 0 ... (c)$$

*Donc :*

$$\|Ax\| \leq (b\varepsilon\delta)^{\frac{1}{p}} (b\varepsilon\delta)^{-\frac{1}{p}} M_2 \left\|A^b x\right\|^{\frac{1}{b}} \|x\|^{1-\frac{1}{b}}$$

$$\leq M_2 \left(b\varepsilon\delta \left\|A^b x\right\|\right)^{\frac{1}{p}} (b\varepsilon\delta)^{-\frac{1}{p}} \|x\|^{1-\frac{1}{b}}$$

$$\leq M_2 \left(b\delta \left\|\varepsilon A^b x\right\|\right)^{\frac{1}{p}} (b\varepsilon\delta)^{-\frac{1}{p}} \|x\|^{1-\frac{1}{b}}.$$

*On pose : $f = \left(b\delta \left\|\varepsilon A^b x\right\|\right)^{\frac{1}{p}}$ et, $g = M_1 (b\varepsilon\delta)^{-\frac{1}{p}} \|x\|^{1-\frac{1}{b}}, \delta > 0$. Et on prend : $p = b$ et*

$q=\frac{b}{b\ -1}$, *il est clair que :* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, *d'après* (c) *on a :*

$$\|Ax\|\leq\frac{\left[\left(b\delta\left\|\varepsilon A^{b}x\right\|\right)^{\frac{1}{b}}\right]^{b}}{b}+\frac{\left[M_{2}\left(b\varepsilon\delta\right)^{-\frac{1}{b}}\|x\|^{1-\frac{1}{b}}\right]^{\frac{b}{b\ -1}}}{\frac{b}{b\ -1}}$$

$$\leq\frac{b\delta\left\|\varepsilon A^{b}x\right\|}{b}+\frac{M_{2}^{\frac{b}{b\ -1}}\left(b\varepsilon\delta\right)^{\frac{1}{1-b}}\|x\|}{\frac{b}{b\ -1}}$$

$$\leq\delta\left\|\varepsilon A^{b}x\right\|+b^{\frac{1}{1-b}}b^{-1}\left(b-1\right)M_{2}^{\frac{b}{b\ -1}}\left(\varepsilon\delta\right)^{\frac{1}{1-b}}\|x\|$$

*D'où :*

$$\|Ax\|\leq\delta\left\|\varepsilon A^{b}x\right\|+M_{3}\left(\varepsilon\delta\right)^{\frac{1}{1-b}}\|x\|\,,x\in D\left(A^{b}\right). \tag{2.14}$$

*Où :*

$$M_{3}=b^{\frac{1}{1-b}}b^{-1}\left(b-1\right)M_{2}^{\frac{b}{b\ -1}},$$

*on choisit :*

$$0<\delta<\left(2\left(1+M_{1}\right)\right)^{-1}.$$

*Et soit :*

$$\omega_{\varepsilon}=C\varepsilon^{\frac{1}{1-b}}\ \text{ où } C=\frac{M_{1}M_{3}\delta^{\frac{1}{1-b}}}{\frac{1}{2}-\delta\left(1+M_{1}\right)}\sec\beta>0$$

*alors :*

$$\lambda\in\omega_{\varepsilon}+\Sigma_{\beta\ +\frac{\pi}{2}}\Longrightarrow|\lambda|\geq\omega_{\varepsilon}\cos\beta.$$

*Il en résulte d'après* (2.13) *et* (2.14) *que :*

$$\left\|AR\left(\lambda,-\varepsilon A^{b}\right)\right\|\leq\delta\left\|\varepsilon A^{b}R\left(\lambda,-\varepsilon A^{b}\right)\right\|+M_{3}\left(\varepsilon\delta\right)^{\frac{1}{1-b}}\left\|R\left(\lambda,-\varepsilon A^{b}\right)\right\|$$

"$\left\|R\left(\lambda,-\varepsilon A^{b}\right)\right\|\leq\frac{M_{1}}{|\lambda|}$ *et* $AR\left(\lambda,A\right)=\lambda R\left(\lambda,A\right)-I$ "

*Ce qui implique :*

$$\left\|AR\left(\lambda,-\varepsilon A^{b}\right)\right\|\leq\delta\left(1+M_{1}\right)+M_{1}M_{3}\frac{\left(\varepsilon\delta\right)^{\frac{1}{1-b}}}{|\lambda|}$$

*On pose :*

$$C = \frac{M_1 M_3 \delta^{\frac{1}{1-b}}}{\frac{1}{2} - \delta\left(1 + M_1\right)} \sec\beta\,;\ \sec\beta = \frac{1}{\cos\beta}$$

*Alors :*

$$M_1 M_3 \delta^{\frac{1}{1-b}} = C\ (\frac{1}{2} - \delta\left(1 + M_1\right)) \cos\beta$$

*Nous trouvons :*

$$\left\|AR\left(\lambda, -\varepsilon A^b\right)\right\| \leq \delta\left(1 + M_1\right) + \frac{C\ \varepsilon^{\frac{1}{1-b}}\ \left(\frac{1}{2} - \delta\left(1 + M_1\right)\right) \cos\beta}{|\lambda|}$$

$$\leq \delta\left(1 + M_1\right) + \omega_\varepsilon \frac{\left(\frac{1}{2} - \delta\left(1 + M_1\right)\right) \cos\beta}{|\lambda|}.$$

*Mais :*

$$|\lambda| > \omega_\varepsilon \cos\beta \Longrightarrow \frac{1}{|\lambda|} < \frac{1}{\omega_\varepsilon \cos\beta}.$$

*D'où :*

$$\left\|AR\left(\lambda, -\varepsilon A^b\right)\right\| \leq \delta\left(1 + M_1\right) + \frac{1}{2} - \delta\left(1 + M_1\right) = \frac{1}{2}; \lambda \in \omega_\varepsilon + \Sigma_{\beta + \frac{\pi}{2}}.$$

*Donc :* $\omega_\varepsilon + \Sigma_{\beta\ + \frac{\pi}{2}} \subset \rho\left(A_\varepsilon\right)$ *et ;*

$$\left\|R\left(\lambda, A_\varepsilon\right)\right\| = \left\|\sum_{n=0}^{+\infty} R\left(\lambda, -\varepsilon A^b\right)\left[AR\left(\lambda, -\varepsilon A^b\right)\right]^n\right\|.$$

*Et comme :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left\|AR\left(\lambda, -\varepsilon A^b\right)\right\|\right]^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1}{2})^n = 2, \left\|R\left(\lambda, -\varepsilon A^b\right)\right\| \leq \frac{M_1}{|\lambda|}.$$

*Donc :*

$$\left\|R\left(\lambda, A_\varepsilon\right)\right\| \leq \frac{2M_1}{|\lambda|}, \lambda \in \omega_\varepsilon + \Sigma_{\beta\ + \frac{\pi}{2}}.$$

*Comme :* $|\lambda| \geq |\lambda - \omega_\varepsilon| \cos\beta,\ \lambda \in \omega_\varepsilon + \Sigma_{\beta\ + \frac{\pi}{2}}$

*Alors :* $\frac{1}{|\lambda|} \leq \frac{\sec\beta}{|\lambda-\omega_\varepsilon|}$ *et nous obtenons :*

$$\|R(\lambda, A_\varepsilon)\| \leq \frac{2M_1 \sec\beta}{|\lambda - \omega_\varepsilon|}, \lambda \in \omega_\varepsilon + \Sigma_{\beta+\frac{\pi}{2}}. \tag{2.15}$$

*Donc d'après le lemme* (2), $A_\varepsilon$ *est le générateur d'un semi-groupe analytique* $\{V_\varepsilon(t)\}$ *d'angle* $\beta$*. D'apres la représentation d'un semi-groupe analytique on a :*

$$V_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega_\varepsilon + \Gamma(\gamma)} e^{\lambda t} R(\lambda, A_\varepsilon)\, d\lambda, t > 0$$

*Où le chemin* $\Gamma(\gamma)$ *s'exécuté dans* $\Sigma_{\beta+\frac{\pi}{2}}$ *de* $-\infty e^{-i\theta}$ *à* $+\infty e^{-i\theta}$ *,* $\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \beta + \frac{\pi}{2}\right)$
*soit* $\mu = (\lambda - \omega_\varepsilon)\, t$*, alors :*
$\lambda = \omega_\varepsilon + \frac{\mu}{t} \Longrightarrow d\lambda = \frac{1}{t} d\mu.$

$$V_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\pi i t} \int_{t\,\Gamma(\gamma)} e^{\omega_\varepsilon t + \mu} R(\omega_\varepsilon + \frac{\mu}{t}, A_\varepsilon) d\lambda, t > 0.$$

*D'après le théorème de Cauchy, on peut déplacer le chemin* $t\ \Gamma$ *à* $\Gamma$ *puis en déduire de* (2.15) *que :*

$$\|V_\varepsilon(t)\| \leq M\pi^{-1} e^{\omega_\varepsilon t} \sec\beta \int_\Gamma \left|\mu^{-1} e^{\mu}\right| |d\mu| \leq M e^{\omega_\varepsilon t}, t > 0,$$

*où la constante* $M$ *indépendante de* $\varepsilon$ ■

Enfin, de la même façon que (2.11) nous pouvons montrer :

$$R(\lambda, A_\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\gamma)} \frac{R(\mu, A)}{\lambda - \mu + \varepsilon\mu^b} d\mu,\ \lambda \in \omega_\varepsilon + \Sigma_{\beta+\frac{\pi}{2}}.$$

Par conséquent :

$$V_\varepsilon(t) = -(\frac{1}{2\pi i})^2 \int_{\omega_\varepsilon + \Gamma(\gamma)} e^{\lambda t} \left\{ \int_{\Gamma(\gamma)} \frac{R(\mu, A)}{\lambda - \mu + \varepsilon\mu^b} d\mu \right\} d\lambda$$

$$= -(\frac{1}{2\pi i})^2 \int_{\Gamma(\gamma)} R(\mu, A) \left\{ \int_{\omega_\varepsilon + \Gamma(\gamma)} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - \mu + \varepsilon \mu^b} d\lambda \right\} d\mu$$

$$V_\varepsilon(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\gamma)} e^{(\mu - \varepsilon \mu^b)t} R(\mu, A) \, d\mu, t > 0. \tag{2.16}$$

Cette représentation sera utile dans le chapitre $(III)$ .

# Chapitre 3

# Régularisation d'une Classe de problèmes de Cauchy mal-posés associés aux générateurs de semi-groupes analytiques

Motivés par de nombreux problèmes pratiques par exemple, problèmes inverses

Des équations de la chaleur, les problèmes de Cauchy mal-posés ont reçu beaucoup

D'attention depuis les années 1960 du siècle dernier (voir [3],[11],[15] [20], [21], [23], [27], [34], [37]).

Le but de ce chapitre est l'étude du problème de Cauchy abstrait suivant :

$$\begin{cases} u^{'}(t) = Au(t) \ ; 0 < t \leq T \\ u(0) = x \end{cases} \tag{3.1}$$

Où $-A$ est le générateur d'un semi-groupe analytique d'angle $\alpha$ dans l'espace de Banach $X$, où $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. On rappele que ce problème a été traité dans [36].

**Définition 12** *La fonction $u : \mathbb{R}_{+} \longrightarrow X$ est appelé solution classique de (3.1) si :*

*i) $u \in C([0, +\infty], D(A))$ munit de la norme du graphe.*

*ii)* $u \in C^1([0,+\infty], X)$

*iii)* $u$ *verifie l'equation (3.1) et verifie la condition initiale* $u(0) = x$ *avec* $x \in D(A)$ *.*

**Corollaire 3** *Pour un opérateur fèrmé* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ *associe au problème 3.1 est bien posé si et seulement si* $A$ *est le générateur d'un semi-groupe fortement cntinu.*

**Lemme 4** *Soit* $(T(t))_{t\ \geq 0}$ *un* $C_0$*-semi-groupe d'operateurs bornés, si quelque soit* $t > 0$ *,* $T(t)^{-1}$ *existe et il est borné alors* $S(t) = T(t)^{-1}$ *est un* $C_0$*-semi-groupe d'operateurs bornés où son générateur infinitésimal est* $-A$*.*

*En plus si :*

$$U(t) = \begin{cases} T(t)\ , & \text{pour } t\ \geq 0 \\ T(-t)^{-1}, & \text{pour } t\ \leq 0 \end{cases}$$

*Alors :* $U(t)$ *est un groupe fortement continue d'opérateurs bornés.*

***Preuve.*** *Nous montrons que* $S(t)$ *est un semi-groupe fortement continue.*

$$S(t+s) = [T(t+s)]^{-1} = [T(t)T(s)]^{-1} = T(s)^{-1}T(t)^{-1}$$

*d'ou :*

$$S(t+s) = S(s)S(t).$$

*Maintenant, nous montrons la continuité forte de* $S(t)$ *:*

*pour* $s > 0$ *alors* $ImT(s) \subset X$ *. Soit* $x \in X$ *et soit* $s > 1$*. Alors :*

$\exists y \in X$ *tel que :* $T(s)y = x$*. Pour* $t < 1$ *nous avons alors :*

$$\left\|T(t)^{-1}x - x\right\| = \left\|T(t)^{-1}T(t)T(s-t)y - T(s)y\right\|$$

$$= \|T(s-t)y - T(s)y\| \to 0, quand\ t \to 0.$$

*Donc* $S(t)$ *est fortement continue. Finalement, pour* $x \in D(A)$ *nous avons :*

$$\lim_{t\ \longrightarrow 0} \frac{T(t)^{-1}x - x}{t} = \lim_{t\ \longrightarrow 0} T(t)\frac{T(t)^{-1}x - x}{t} = -Ax.$$

*Donc $-A$est le générateur infinitésimal de $T(t)^{-1}$* ■

**Théorème 13** *Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continue d'operateurs bornés. Si $0 \in \rho(T(t_0))$ pour un certain $t_0 > 0$, alors $0 \in \rho(T(t))$ pour tout $t > 0$et $T(t)$ peut être etendu en un $C_0$groupe ( groupe fortement continue ).*

***Preuve.*** *D'aprés le lemme (4) il suffit de montrer que $0 \in \rho(T(t))$, $\forall t > 0$.*

*Comme $0 \in \rho(T(t_0))$ alors : $[T(t_0)]^n = T(nt_0)$ est bijective , quelque soit $n \geq 1$.*

*Soit : $T(t)x = 0$ ; choisissons $n$ telque : $nt_0 > t$ . Nous avons :*

$$T(nt_0)x = T(nt_0 - t)T(t)x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

*Donc $T(t)$ est bijective pour tout $t > 0$.*

*Maintenant nous montrons que :*

$$ImT(t) = X, \forall t > 0.$$

*Ceci est vraie pour $t \leq t_0$ puisque d'aprés les proprietés de semi-groupe :*

$$ImT(t) \supset ImT(t_0)\,,\ pour\ t \leq t_0.$$

*Pour $t > t_0$, soit $t = kt_0 + t_1$ ; avec $0 \leq t_1 < t_0$. Alors :*

$$T(t) = [T(t_0)]^k T(t_1)$$

*et donc :*

$$ImT(t) = X.$$

*$T(t)$ est bijective et $ImT(t) = X$, pour tout $t > 0$, et d'aprés le theorème du graphe fèrmé $0 \in \rho(T(t))$, pout tout $t > 0$* ■

**Proposition 3** *Soit $-A$ le générateur d'un semi-groupe analytique $(S(t))$ et soit $0 \in \rho(S(t_0))$ Pour certains $t_0 > 0$. Alors $A \in B(X)$.*

**Preuve.** On peut supposer sans perte de généralité que $-A$ est le générateur d'un semi-groupe analytique borné d'angle $\alpha$ pour un certain $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, autrement nous considérons le semi-groupe analytique $\{e^{\omega t}S(t)\}$ de générateur $(\omega - A)$ pour un certain $\omega \in \mathbb{R}$.

$$0 \in \rho(S(t_0)) \Longrightarrow 0 \in \rho(S(t)), \forall t \geq 0$$

donc :

$$0 \in \rho\left\{e^{\omega t}S(t)\right\}$$

On a d'après le théorème (13), si $(\omega - A)$ est le générateur d'un semi-groupe analytique d'angle $\beta \in (0, \alpha)$, alors $A$ est un générateur d'un $C_0$-semi-groupe, et d'aprés le théoreme de Hille-Yosida on a :

$$\exists M, \omega' \geq 0 : \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \omega'\right\} \subset \rho(A) \text{ et } \|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega'}, \operatorname{Re}\lambda > \omega'.$$

Comme $A$ génère un $C_0$-semi-groupe $S(t)^{-1}$, et d'aprés le lemme(4), $S(t)^{-1}$borné, alors on peut l'étendre a un semi-groupe analytique.

Et comme $-A$ est le générateur d'un semi-groupe analytique $(S(t))$ d'angle $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ alors $A$ est le générateur d'un semi-groupe analytique d'angle $\beta \in \left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2}\right) \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Alors il existe une constante $M_\beta > 0$ tel que :

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M_\beta}{|\lambda|}, \operatorname{Re}\lambda > 2\omega', \ |\arg\lambda| \leq \beta.$$

Et d'aprés la proposition(3) on a :

$$\begin{cases} 1) \ \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda| \geq \frac{\pi}{2} - \alpha\right\} \subset \rho(A) \\ 2) \exists M_\beta > 0; \|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M_\beta}{|\lambda|}, \ |\arg\lambda| \geq \beta \end{cases}$$

où la constante $M_\beta$ peut être remplacée par une autre plus grande si nécessaire, donc :

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M_\beta}{|\lambda|}, |\lambda| > 2\omega'$$

Et d'après la proposition ([22] page 63) on obtient $A \in B(X)$ ■

Le problème (3.1) est généralement mal-posé. Pour cela considérons le problème invers correspondant à (3.1)

$$\begin{cases} v'(t) = -Av(t) \; ; 0 < t < T \\ v(0) = y \end{cases} \tag{3.2}$$

Comme $-A$ le générateur d'un semi-groupe analytique dans $X$, le problème de Cauchy (3.2) est bien posé. Cela signifie que (3.2) admet une solution pour chaque $y \in X$,et (3.2) est stable. Désignons par $(S(t))_{t \geq 0}$ le semi-groupe généré par $-A$. Alors $v(t) = S(t)\, y$, $0 \leq t \leq T$, est l'unique solution de (3.2). D'autre part si $u(t)$, $(0 \leq t \leq T)$ est la solution de (3.1) Alors $u(T-t)$ ; $(0 \leq t < T)$ est évidemment la solution de (3.2) avec l'élément initiale $u(T)$. Par l'unicité des solutions de (3.2) nous obtenons que :

$$v(t) = u(T-t); \;\; 0 \leq t < T$$

C'est à dire :

$$S(t)\, u(T) = u(T-t); \;\; 0 \leq t < T$$

Pour $t = T$, on a :

$$S(T)\, u(T) = u(0) = x$$

Pour le chongement de variable : $t = T - t$, l'opérateur $A$ génère le semi-groupe $S(T-t)$, où : $u(T) = y$ . D'ou :

$$u(t) = S(T-t)u(T).$$

Alors :

$$S(t)\, u(t) = S(t)\, S(T-t)u(T) = x; \;\; 0 \leq t \leq T$$

C'est à dire :

$$S(t)\,u(t) \;= S(T)\,u(T) = x;\;\; 0 \leq t \leq T$$

Comme $S(t)$ est inversible pour chaque $t \geq 0\,(cf.$[22] page 69) Nous obtenons :

$$u(t) = S(t)^{-1}\,x, \text{ pour } 0 \leq t \leq T$$

D'aprés la proposition(3), $S(t)^{-1}$, $t \geq 0$ n'est pas une famille d'opérateurs linéaires bornés. Ainsi (3.1) n'est pas stable. Une méthode importante pour traiter le problème de Cauchy

mal-posé(3.1) est la méthode de quasi-réversibilité qui a été introduite par Lattes et Lions ([16]). Cette méthode conduit à la régularisation de (3.1). En utilisant la solution du problème de Cauchy bien-posé :

$$\begin{cases} u_{\varepsilon}^{'}(t) = \left(A - \varepsilon A^{b}\right) u_{\varepsilon}(t)\ ;\ 0 \leq t \leq T \\ u_{\varepsilon}(0) = x \end{cases} \tag{3.3}$$

D'approcher la solution de (3.1) où $\varepsilon > 0$ et $A^{b}$, $(b > 1)$ est définie comme la puissance fractionnaire(Voir [8], [17], [25], [27]). Le résultat principal de ce travail est : si $-A$ le générateur d'un semi-groupe analytique. Alors il existe la famille de régularisées pour le problème de Cauchy mal-posé (3.1). A l'aide de la méthode quasi-réversibilité. La théorie de base de $C_0$-semi-groupe, peut être trouvée dans [31] aussi voir([6],[7], [19], [20], [27], [33], [36])

## 3.1 Régularisation de (3.1)

Nous commençons par la définition des familles de régularisations pour les opérateurs $(cf$ [34])

**Définition 13** *Une famille* $\{R_{\varepsilon,t}, \varepsilon > 0, t \in [0,T]\} \subset \boldsymbol{B}(X)$ *est appelée une famille régularisante d'opérateurs pour* (3.1) *si pour chaque solution* $u(t)$, $(0 \leq t \leq T)$ *de* (3.1) *avec l'élément initial* $x$ *et pour tout* $\delta > 0$, *il existe* $\varepsilon(\delta) > 0$ *tel que :*

*(i)* $\varepsilon(\delta) \longrightarrow 0$, $(\delta \longrightarrow 0)$

*(ii)* $\left\|R_{\varepsilon(\delta),t}x_\delta - u(t)\right\| \longrightarrow 0$, $(\delta \to 0)$ *pour chaque* $t \in [0,T]$ *quand* $\|x_\delta - x\| \leq \delta$.

Nous remarquons que la famille régularisante d'opérateurs pour (3.1) n'est pas triviale si le problème (3.1) n'a pas la solution $u(t) \equiv 0$ Seulement.

En effet, il est connu (Voir [22] page 67) que (3.1) à une solution unique pour chaque elément initial $x \in D$, où $D$ est un sous espace dense dans $X$.

Le résultat principal de ce travail est le suivant :

**Théorème 14** *Supposons que $-A$ est le générateur d'un semi-groupe analytique, alors il existe, une famille régularisante d'opérateurs pour le probléme* (3.1).

***Preuve.*** *Nous considérons d'abord le cas où $-A$ est le générateur d'un semi groupe analytique borné d'angle $\alpha$ et $0 \in \rho(A)$, où $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$. soit $u(t)$ $(0 \leq t \leq T)$ une solution de* (3.1) *avec l'élément initial $x$, vérifiant :*

$$||x_\delta - x|| \leq \delta.$$

*En utilisant la méthode de quasi- réversibilité pour* (3.3) *avec l'élément initial $x_\delta$, le problème approché admet une solution unique :*

$$u_{\varepsilon,\delta}(t) = V_\varepsilon(t)x_\delta.$$

*Où $V_\varepsilon(t)$ est le semi-groupe généré par $A_\varepsilon$ dans le théorème* (11).

*On définit :*

$$R_{\varepsilon,t} = V_\varepsilon(t) \text{ pour, } \varepsilon > 0 \text{ et } 0 \leq t \leq T.$$

*Alors :*

$$\{R_{\varepsilon,t}, \varepsilon > 0, t \in [0,T]\} \subset \boldsymbol{B}(x).$$

*Quand : $t = 0$ il est clair que :*

$$||R_{\varepsilon,0}x_\delta - u(0)|| = ||V_\varepsilon(0)x_\delta - u(0)||$$

$$= ||x_\delta - x|| \longrightarrow 0 quand\ \delta \longrightarrow 0.$$

*Quand* $t \in (0,T]$ *nous avons :*

$$||R_{\varepsilon,t}x_\delta - u(t)|| \leq ||R_{\varepsilon,t}x_\delta - R_{\varepsilon,t}\, x|| + ||R_{\varepsilon,t}x - u(t)|| = \triangle_1 + \triangle_2, \varepsilon > 0.$$

*Pour estimer* $\triangle_2$*, nous notons que :* $x = S(t)\, u(t)$*.*

*En utilisant le problème inverse* (3.2) *où* $\{S(t)\}$ *est le semi-groupe généré par* $-A$*. D'après la représentation du semi-groupe analytique on a :*

$$S(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\eta)} e^{\lambda t} R(\lambda, -A)\, d\lambda.$$

*Où :* $\frac{\pi}{2} < \eta < \pi - \gamma$ *et* $\frac{\pi}{2} - \alpha < \gamma < \frac{\pi}{2b}$*.*

*Il résulte alors de* 2.16*, de l'identité résolvante et du théorème de Cauchy que :*

$$R_{\varepsilon,t}x = V_\varepsilon(t)x = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\gamma)} e^{(\mu - \varepsilon\mu^b)t} R(\mu, A)\, x d\mu$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\gamma)} e^{(\mu - \varepsilon\mu^b)t} R(\mu, A) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\eta)} e^{\lambda t} R(\lambda, -A)\, d\lambda \right\} u(t)\, d\mu.$$

*Car :* $x = S(t)\, u(t)$ *on a :*

$$R_{\varepsilon,t}x = -(\frac{1}{2\pi i})^2 \int_{\Gamma(\gamma)} e^{(\mu - \varepsilon\mu^b)t} \left\{ \int_{\Gamma(\eta)} e^{\lambda t} \frac{R(\mu, A) + R(\lambda, -A)}{\lambda + \mu} u\ \ (t)\, d\lambda \right\} d\mu.$$

*Parce que :*

$$R(\mu, A) + R(\lambda, -A) = (\lambda + \mu)\, R(\mu, A)\, R(\lambda, -A)\,,$$

*Donc :*

$$R_{\varepsilon,t}x = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\gamma)} e^{(\mu-\varepsilon\mu^b)t}R(\mu,A)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\eta)} e^{\lambda t}(\lambda+\mu)^{-1}u(t)\,d\lambda\right\}d\mu$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\eta)} e^{\lambda t}eR(\lambda,-A)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\gamma)}(\lambda+\mu)^{-1}e^{(\mu-\varepsilon\mu^b)t}u(t)\,d\mu\right\}d\lambda$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\gamma)} e^{(\mu-\varepsilon\mu^b)t-\mu t}R(\mu,A)\,u(t)\,d\mu.$$

*Parce que :*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\eta)}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda-(-\mu)}u(t)\,d\lambda = e^{-\mu t}u(t) \ \ et\ \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\gamma)}(\lambda+\mu)^{-1}e^{(\mu-\varepsilon\mu^b)t}u(t)\,d\mu = 0.$$

*Ainsi à partir de* $(2.5)$ *on voit que :* $R_{\varepsilon,t}x = U(\varepsilon t)\,u(t)$ *où* $\{U(t)\}$ *est le semi-groupe généré par* $-A^b$*dans le théorème*$(10)$*. Par la continuité forte de* $\{U(t)\}$ *nous obtenons :*

$$\triangle_2 = ||R_{\varepsilon,t}x - u(t)|| = ||U(\varepsilon t)\,u(t) - u(t)|| \longrightarrow 0, (\delta \longrightarrow 0)\,. \tag{3.4}$$

*Quand* $\varepsilon \to 0$, $(\delta \to 0)$*. En ce qui concerne* $\triangle_1$*, il résulte du théorème*$(11)$*que :*

$$\triangle_1 = ||R_{\varepsilon,t}x_\delta - R_{\varepsilon,t}x|| \le ||x_\delta - x||\,\|R_{\varepsilon,t}\|$$

$$\le \delta\,\|R_{\varepsilon,t}\| = \delta\,\|V_\varepsilon(t)\|$$

$$\le \delta M\exp(C\ \varepsilon^{\frac{1}{1-b}}t)$$

*où* $C$, $M > 0$ *sont indépendants de* $\varepsilon$ *et* $t$ *on choisit :*

$$\varepsilon = \left[-TC(\ln\sqrt{\delta})^{-1}\right]^{b-1},\ 0<\delta<1 \tag{3.5}$$

*Alors* $\varepsilon \longrightarrow 0$, $(\delta \longrightarrow 0)$ *et :* $\triangle_1 \leq \delta M \exp(C\varepsilon^{\frac{1}{1-b}}T)$ *de* (3.5), *on trouve :*

$$\triangle_1 \leq \delta M \exp\left[\left(TC\left\{-TC\ (\ln\sqrt{\delta})^{-1}\right\}^{b-1}\right)^{\frac{1}{1-b}}\right]$$

*Ou :*

$$\leq \delta M \exp\left[TC\left\{-TC\ (\ln\sqrt{\delta})^{-1}\right\}^{-1}\right]$$

$$\leq \delta M \exp(-\ln\sqrt{\delta}) = \frac{\delta M}{\sqrt{\delta}} = \sqrt{\delta}M.$$

*Donc :*

$$\triangle_1 \leq \sqrt{\delta}M \longrightarrow 0, (\delta \longrightarrow 0)\,. \tag{3.6}$$

*En combinant* (3.4) *avec* (3.6) *résulte que :*

$$\forall t \in [0,T]\,, ||R_{\varepsilon,t}x_\delta - u\,(t)|| \longrightarrow 0; (\delta \to 0)\,.$$

*Donc* $\{R_{\varepsilon,t}\}$ *est une famille régularisante d'opérateurs de* (3.1). *Traitons le cas général lorsque* $-A$ *est le générateur d'un semi-groupe analytique. De la remarque figurant aprés la définition* (10) *il existe une constante* $\omega \in \mathbb{R}$ *telle que* $(A-\omega)$ *est le générateur d'un semi-groupe analytique borné et* $0 \in \rho\,(A-\omega)$. *Comme ci-dessus, il existe une famille d'opérateurs régularisants* $\{R_{\varepsilon,t}\}$ *pour le problème :*

$$\begin{cases} v'\,(t) = (A-\omega)\,v\,(t)\,,\ 0 < t \leq T \\ \ v\,(0) = x. \end{cases} \tag{3.7}$$

*Soit* $u\,(t)$, $(0 \leq t \leq T)$ *une solution de* (3.1) *avec l'élément initial* $x$. *Alors :*

$$v\,(t) = e^{-\omega t}u\,(t)\,, 0 \leq t \leq T,$$

*solution de* (3.7)*avec l'élément initial* $x$. *Ainsi pour chaque* $t \in [0,T]$ *:*

$$\left|\left|e^{\omega t}R_{\varepsilon(\delta),t}x_\delta - u\,(t)\right|\right| = e^{\omega t}\left|\left|R_{\varepsilon(\delta),t}x_\delta - e^{-\omega t}u\,(t)\right|\right|$$

$$\leq e^{\omega t} \left|\left|R_{\varepsilon(\delta),t} x_\delta - v\left(t\right)\right|\right| \longrightarrow 0; \left(\delta \to 0\right).$$

*C'est à dire :* $\{e^{\omega t} R_{\varepsilon,t}\}$ *est la famille d'oprateurs régularisant de* (3.1) ■

De la démonstration du théorème (14) et (2.16) nous pouvons donner la représentation de la famille d'opérateurs régularisants pour (3.1) comme suit :

$$R_{\varepsilon,t} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\gamma)} e^{\left(\omega+\mu-\varepsilon\mu^b\right)t} R\left(\omega+\mu, A\right) d\mu; \varepsilon > 0, t > 0.$$

Où : $\frac{\pi}{2} - \alpha < \delta < \frac{\pi}{2b}$ et où $\omega$ est la borne dans l'estimation exponentielle du semi-groupe $e^{-tA}$, $t \geq 0$.

# Bibliographie


[1] L. Sh. Abdulkerimov, "Regularization of the ill-posed Cauchy problem by a perturbationof initial conditions," submitted to Azerbaijan NIINTI, No. 82 Az-D83, Baku (1983).

[2] S. Agmon, On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems, Comm. Pure Appl. Math. 15 (1962), 119–147.A. N.

[3] K.A. Ames,J.F. Epperson, A kernel-based method for the approximate solution of backward parabolic problems, SIAM J. Numer. Anal. 34 (1997) 1357-1390.

[4] A.V. Balakrishnan, Fractional powers of closed operators and the semigroupsgenerated by them, Pacific J. Math. 10 (1960) 419-437.

[5] M. Denche and K. Bessila, A modified quasi-boundary value method for ill-posed problems. J. Math. Anal. Appl. 301(2005), No. 2, 419–426.

[6] N. Dunford and J. T. Schwartz, Linear operators. Part I. General theory. Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York,1988.

[7] H.O. Fatorini, the Cauchy Problem, Adison-Wesley, London, 1983.

[8] A. I. Filinkov, Investtigation of the Correctness and Regularization of Abstract Boundary Problems, PhD. Dissertation, 01.01.02, Sverdlovsk (1989).

[9] A. Yu. Freiberg, "Regularization of an ill-posed Cauchy problem for a differential operator equation of the first order," submitted to VINITI, No. 586-V88, Moscow (1987).

[10] A . Yu. Freiberg, The Correctness of General Boundary Problems for Differential-Operator Equations in Banach Spaces, PhD. Dissertation, 01.01.02, Sverdlovsk (1988).

[11] V.B. Glasko, Inverse Problems of Mathematical Physics, merican Institute of Physics, New York, 1988.

[12] J.A. Goldstein, Some remarks on infinitesimal generators of analytic semigroups,Proc. Amer. Math. Soc. 22 (1969) 91-93.

[13] Hadamard, J., *Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique,* Bull. Un. V. Princeton, V.B. 1902.

[14] Hadamard, J., *Lectures on Cauchy's Problem in linear Partial Differential Equations.* Yale University Press. 1923.

[15] V. Isakov. Inverse Problems for Partial Differential Equations. Number 127 in Applied Mathematical Sciences. Springer, New-York, 1998.

[16] V. K. Ivanov, "The quasi-inverse problem for the heat equation in the uniform metric," Differents. Uravn., 8, No. 4, 652-658 (1972).

[17] V. K. Ivanov, I. V. Mel'nikova and A.I. Filinkov, Differential Operator Equations and Illposed Problems, Nauka, Moscow, 1995. (In Russian) MR1415388 (97j :47092).

[18] B. G. Karasik, A Conditionally-Correct Cauchy Problem for Differential-Operator Equations and Their Applications, PhD. Dissertation, 01.01.02, Baku (1978).

[19] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, 2nd Corrected Printing of the 2nd Editon, Springer, Berlin, 1984.

[20] S.G. Krein, Linear Differential Equations in Banach Space, American Mathematical Society, Providence, RI, 1971.

[21] R. Lattes and J.-L. Lions, The Method of Quasi-Reversibility ; Applications to Partial Differential Equations, American Elsevier Pub. Co., New York (1969).

[22] R. deLaubenfels, Existence Families, Functional Calculi and Evolution Equations,Springer-Verlag, Berlin, 1994. MR1290783 (96b :47047).

[23] M. M. Lavrent'ev, Conditionally Ill-Posed Problems for Differential Equations [in Russian], NGU, Novosibirsk (1973).

[24] I. V. Mel'nikova, Correct and Ill-Posed Problems for Differential-Operator Equations in Banach Spaces, PhD. Dissertation, 01.01.02, Novosibirsk (1988).

[25] I. V. Mel'nikova, General theory of the ill-posed Cauchy problem, J. Inverse and Ill-posed Problems 3(1995), 149-171. MR1341036 (97a :34156).

[26] I. V. Mel'nikova, "Solution of the inverse Cauchy problem by the method of quasi-reversibility,"Izv. Vuzov. Matem., 6, 36-38 (1981).

[27] I. V. Mel'nikova and A.I. Filinkov, Abstract Cauchy Problems : Three Approaches, Chapman and Hall, London, 2001. MR1823612 (2002h :34110).

[28] I. V. Mel'nikova and A. Yu. Freiberg, "Regularization of ill-posed Cauchy problem for the second order equation in a Banach space," Differents. Uravn., 22, Noo 8, 1332-1338(1986).

[29] I. V. Mel'nikova and A. G. Kudryavtsev, "Regularization of the ill-posed Cauchy problem for the first order equation in a Banach space with the help of boundary problems,"in : Theory and Methods of Solving Ill-Posed Problems [in Russian], Trudy Vsesoyuz..Shk. (Proceedings of All-Union School), Novosibirsk, NGU, 260-261 (1983).

[30] N. V. Muzylev, "Regularization properties of the method of quasi-reversibility," Dok!. Akad. Nauk SSSR, 223, No. 2, 298-299 (1975).

[31] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations,Springer-Verlag, Berlin, 1983. MR0710486 (85g :47061).

[32] B. Stewart, Generation of analytic semigroups by strongly elliptic operators under general boundary conditions, Trans. Amer. Soc. 259 (1980) 299-310.

[33] H. Tanabe, Equations of Evolution, Pitman, London, 1979.

[34] A.N.Tikhonov,V. Ya. Arsenin, Solutions of Ill-Posed Problems, Halsted Press,Washington-Winston-New York (1977).

[35] P. N. Vabishchevich,"Nonlocal parabolic equations and the inverse problem for the heat equation," Differents. Uravn., 17, No. 7, 1193-1199 (1981).

[36] H. Yongzhong, Q.Zheng, Regulariztion for Ill-posed Cauchy problems associated with generators of analytic semigroups, J. Differential Equations 203 (2004) 38-54.

[37] Q.Zheng, Y. Li, Abstract parabolic systems and regularized semigroups, Pacific J. Math. 182 (1998).

**Titre: Etude certaines classes de problème de Cauchy non correctement posés au sens d'Hadamard-Petrovski**


## Résumé

Ce travail concerne l'étude d'une classe de problèmes de Cauchy mal-posés, associe à un opérateur linéaire **A** de domaine dense définie dans un espace de Banach **X**.
On montre que si **-A** est le générateur d'un semi-groupe analytique, alors il existe une famille régularisante d'opérateurs pour le problème en question. La méthode d'étude est basée sur celle de quasi-réversibilité en utilisant les puissances fractionnaires et les semi-groupes d' opérateurs linéaires.



**Mots clés** :

problème de Cauchy mal-posé, famille régularisante, théorie des semi-groupes, méthode de quasi-réversibilité, puissance fractionnaire.

# Title: Study of certain classes of Cauchy problems not correctness posed by the meaning of Hadamard-Petrovski

## Abstract

This work is concerned the study of a class of ill-posed Cauchy problems associated with a densely defined linear operator **A** in a Banach space **X**. It is proved that if **–A** is the generator of an analytic semi-group, then there exists a family of regularizing operators by using the quasi-reversibility method, fractional powers and semi-groups of linear operators.

## Keywords:

Ill-posed Cauchy problem; Regularizing family; Quasi-reversibility; Analytic semi-group; fractional power.

**العنوان:** دراسة لقسم من مسائل كوشي الموضوعة بشكل غير جيد على طريقة هدمارد- بيتروفسكي

## ملخص

هذا العمل يتضمن دراسة لقسم من مسائل كوشي الموضوعة بشكل غير جيد المرفقة بمؤثر خطي A لمجموعة كثيفة معرفة في فضاء بناخ X .

النتيجة الأساسية لهذا العمل تتمثل في: إذا كان A- مولد لنصف الزمرة التحليلية فانه توجد عائلة من المؤثرات المعدلة لمسائل كوشي الموضوعة بشكل غير جيد مستعملين في ذلك الطريقة الشبه عكسية و القوى ذات الأساس و كذلك أنصاف الزمر المرفقة بمؤثر خطي.

.