

*République Algérienne Démocratique et Populaire Ministère de  
L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique*



*Université Mentouri - Constantine  
Faculté des Sciences  
Département de mathématique*

N° d'ordre :  
Série :

## **THESE**

**Présentée pour l'obtention du Diplôme de Magistère en Mathématique**

**Option : ANALYSE**

## **Thème**

*Approches numériques par des volumes finis d'une  
équation de transport*

### **PRÉSENTÉ PAR**

- **Kassah Laouar Lakhdar**

### **MEMBRES DE JURY**

- |                                |                          |                              |
|--------------------------------|--------------------------|------------------------------|
| • <b>Mr. DENECH MOHAMED</b>    | <b>Président de jury</b> | <b>Prof, UN. Constantine</b> |
| • <b>Mr. FATEH EL LAGOUNE</b>  | <b>Rapporteur</b>        | <b>M.C, UN. Guelma</b>       |
| • <b>Mlle. BOUGHABA SORAYA</b> | <b>Examinatrice</b>      | <b>M.C, UN. Constantine</b>  |
| • <b>Mr. GUESMIA AMAR</b>      | <b>Examineur</b>         | <b>M.C, UN. Skikda</b>       |

# Dédicace

**A toute ma famille.**

**A mes enfants.**

Kassah.l.l.

# Remerciements

Louange à dieu le tout puissant pour la volonté, la force, la patience ainsi qu'à la persévérance qu'il nous a donné toutes ces longues années, afin, qu'on puisse arriver là.

Toutes nos gratitudes à Monsieur : Dr. FATEH EL LAGOUNE de m'avoir accepté et dirigé ce travail.  
Nous voudrions exprimer nos sincères remerciements aux : Prof. M.Dénech , Dr.S.Boughaba et Dr.A.Guesmia pour avoir accepté d'allouer à la lecture et l'évaluation de ce travail.

Nous adressons nos vifs remerciements à : Dr.Z. Chebel pour son soutien moral sans limite,  
À tous mes amis et collègues, Prof. et Dr.de maths et d'informatiques.

Nous remerciant, nos proches et ma famille, qui ont toujours su être là et qui nous ont fourni un soutien moral.

MERCI.

# Table des matières

## 0.1 Introduction

3

<b>1</b>	<b>Modélisation</b>	<b>6</b>
1.1	<b>Introduction</b> . . . . .	6
1.2	On a besoin de quelques outils de physique pour la modélisation : . . . . .	6
1.2.1	Dérivée particulière d'une fonction scalaire . . . . .	6
1.2.2	Dérivée particulière d'une intégrale de volume . . . . .	7
1.2.3	Conservation de la masse . . . . .	10
1.2.4	La première loi de Fick : . . . . .	11
1.2.5	La deuxième loi de Fick : . . . . .	12
1.3	<b>Approche mathématique</b> . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Aspect théorique pour l'équation de transport :</b>	<b>18</b>
2.1	L'équation de transport sans diffusion : . . . . .	18
2.1.1	Cas où la vitesse du vent est constante : . . . . .	18
2.1.2	Cas où la vitesse du vent est variable . . . . .	23
2.2	L'équation de transport-diffusion . . . . .	33
2.2.1	Position du problème . . . . .	33
2.2.2	Notation et cadre fonctionnel . . . . .	34
2.2.3	Formulation variationnelle pour l'équation de transport-diffusion .	36

<b>3</b>	<b>Appoximation numérique de l'équation de transport par D.F :</b>	<b>45</b>
3.1	Introduction :	45
3.2	la méthode des différences finies.	45
3.3	<i>L' équation de transport sans diffusion</i>	50
3.3.1	<i>Cas où la vitesse du vent est constante</i>	50
3.3.2	cas où la vitesse du vent est variable :	61
3.4	présentation d'un schéma numérique pour l'équation de transport à vitesse variable :	64
3.5	L'équation de transport-diffusion	65
<b>4</b>	<b>Approximations Numériques par La méthode des volumes finis</b>	<b>67</b>
4.1	<b>Introduction</b>	67
4.2	<b>Schéma Volumes finis sur maillages admissibles</b>	68
4.3	<b>Méthode Mixte des Volumes Finis-Différences Finies</b>	70
4.3.1	<b>Cas où la vitesse du vent est constante :</b>	70
4.3.2	<b>Cas où la vitesse du vent n'est pas constante :</b>	75

## 0.1 Introduction

Les phénomènes de transport apparaissent dans de multiples processus en physique où dans la vie courante : le transport de particules dans un champ électrique, le transport d'un signal le long d'un câble téléphonique, les phénomènes de conservation (conservation de la masse, de la quantité de mouvement, quantité d'électricité) ou encore l'évolution de véhicules sur une route, en médecine, évolution de la concentration d'un polluant etc..

Le sujet que nous avons choisi concerne un modèle de propagation d'un nuage de fumée dont l'étude et la maîtrise étaient nécessaires mais sont devenus indispensables avec le développement de la société, donc il y a un grand problème de la pollution (fumée des usines surtout toxique) qu'il faut résoudre.

En effet, le développement rapide des usines du au besoin énorme de l'industrialisation, a donné lieu, par exemple, à la construction parfois anarchique d'usine dégageant la fumée polluante et nocive pour la santé.

La compréhension et la maîtrise de ce phénomène nous permettent de mieux l'utiliser, car nous pourrions mieux situer le lieu d'implantation d'une usine dégageant de la fumée(toxique) par rapport au maison d'habitation (ville) .

Cela nous permet de mieux maîtriser aussi la gestion de l'urbanisme(constructions des villes) et préserver la santé de la population en général.

D'où l'importance de ce thème.

Dans le premier chapitre ,nous présentons les principes de la modélisation conduisant à la famille des équations de transport, souvent appelées également équations cinétiques. On parle parfois de façon générique de l'équation de Boltzmann en faisant référence aux travaux de Ludwig Boltzmann (1844-1906) sur la cinétique des gaz, des travaux qui sont à l'origine de l'ensemble des approches statistiques du transport corpusculaire. Lorsqu'il est question de l'équation de Boltzmann, il faut donc comprendre, selon le contexte, qu'il est soit fait référence à l'ensemble de la famille des équations de transport, soit plus

précisément à la première d'entre elles (introduite en 1878 pour la modélisation de la dynamique des gaz dilués).

Donc c'est trouver la démarche (convenablement) d'une modélisation à ce phénomène, qui consiste à le mettre sous forme d'équation mathématique. Il en résulte une EDP, qui est une équation dans laquelle il y a des dérivées partielles qui représentent l'évolution de grandeurs physiques en fonction d'autres.

La modélisation d'un phénomène est une démarche visant à représenter par un moyen adéquat le comportement de ce phénomène.

La modélisation peut être abordée de différentes façons :

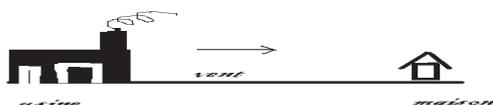
- les modèles réduits.

- les modèles analogiques.

- les modèles mathématiques, qui, sont les plus courants actuellement, suite à la montée en puissance des ordinateurs (très puissants) et de leur capacité à calculer vite, ils sont basés sur la mise en équation mathématique du phénomène à étudier, je cite : les modèles empiriques, les modèles conceptuels et les modèles mécanistes. (la mécanique, en tant que science, est à la base de la représentation du phénomène [3], on aboutit généralement à un type d'équation dites aux dérivées partielles [10,12], qu'il s'agit ensuite de résoudre.

Donc dans ce chapitre on définit un pur modèle de modélisation simple de la propagation d'un nuage de fumée conduit à l'équation d'advection-diffusion.

Usine dégageant de la fumée vers l'habitation (maison)



Ainsi, la modélisation représente le premier chapitre.

Dans le second chapitre, nous traitons l'étude théorique de l'équation de transport suivie de l'étude de l'équation de transport-diffusion[13].

On démontre l'existence et l'unicité de la solution du problème sans diffusion à l'aide de la méthode des caractéristiques [3.8].

dont l'analyse mathématique ne fournira en général que l'existence et l'unicité d'une solution, qui sera amené à se tourner vers l'utilisation de méthodes numériques pour calculer une solution approchée. Le second objectif du chapitre trois est d'introduire la méthode de discrétisation la plus classique (et la plus simple) : la méthode des différences finies qui est la «mère » des méthodes de discrétisation plus élaborées telles que les méthodes d'éléments finis, de volumes finis[35] etc....

Plusieurs schémas ont été traitée ( explicite et implicite) et Nous introduirons en particulier les concepts de consistance, de stabilité et de convergence , des estimations d'erreur a été prouvé et vérifié dans les deux cas ou le vent est constant ou pas.

Le quatrième chapitre traite les aspects théoriques et numériques de ces mêmes équations.en utilisant la méthode des volumes finies pour l'analyse numérique.[35] La méthode des Volumes Finis consiste à intégrer, sur des volumes élémentaires, les équations écrites sous forme intégrale. C'est une méthode particulièrement bien adaptée à la discrétisation spatiale des lois de conservation, contrairement aux Eléments Finis, et est ainsi très utilisée en mécanique des fluides. Sa mise en oeuvre est simple si les volumes élémentaires ou "volumes de contrôle" sont des

rectangles en 2D ou des parallélépipèdes en 3D. Cependant, la méthode des Volumes Finis permet d'utiliser des volumes de forme quelconque et donc de traiter des géométries complexes,contrairement aux Différences Finies.

# Chapitre 1

## Modélisation

### 1.1 Introduction

le problème de la diffusion des particules dans l'air est un problème très compliqué puisqu'il y a plusieurs paramètres qu'il faut prendre lors d'une étude, comme : la vitesse du vent, intensités et directions, l'état de l'air humide ou sec, la température ambiante, la nature de la fumée, sa température, et la concentration initiale....etc.

### 1.2 On a besoin de quelques outils de physique pour la modélisation :

#### 1.2.1 Dérivée particulière d'une fonction scalaire

Soit  $f(x, y, z)$  une fonction différentiable dont la différentielle est

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz. \quad (1.1)$$

Sa dérivée est

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w$$

et donc

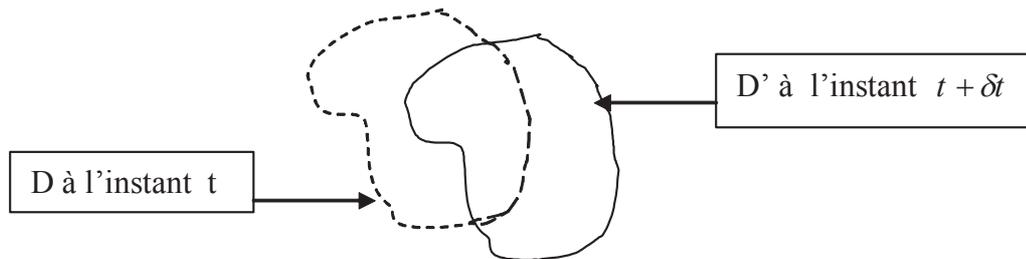
$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \langle \vec{U}, \overrightarrow{\text{grad}} f \rangle$$

(1.2)

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \langle \vec{U}, \vec{\nabla} f \rangle .$$

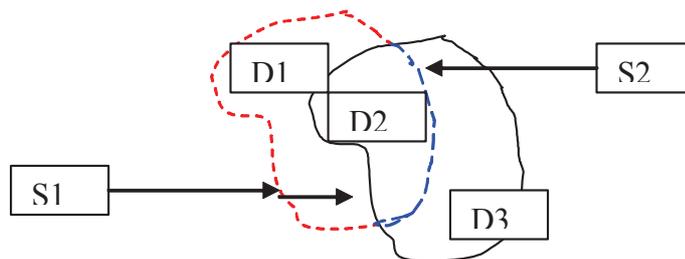
### 1.2.2 Dérivée particulière d'une intégrale de volume

L'écoulement des particules d'un fluide équivaut à la déformation du domaine  $D$  où  $D$  est le domaine des particules à l'instant  $t$  et  $D'$  est le domaine à l'instant  $t + \delta t$ . Ces deux domaines ont le même nombre de particules (Figures 1.1 et 1.2)



**Fig.1.1**

Écoulement des particules entre  $t$  et  $t + \delta t$



**Fig.1.2**

Partition de domaine

$S_2$  : le contour de  $D$  intérieur à  $D'$ .

Soit  $I$  la fonction d'état  $I(t) = \int_D f(\vec{x}, t)dv$ ; sa dérivée est

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_D f(\vec{x}, t)dv \\ &= \lim_{(\delta t \rightarrow 0)} \left( \frac{1}{\delta t} (\int_{D'} f(\vec{x}, t + \delta t)dv - \int_D f(\vec{x}, t)dv) \right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

On simplifie d'abord, alors

$$\begin{aligned} \int_{D'} f(\vec{x}, t + \delta t)dv - \int_D f(\vec{x}, t)dv &= \\ \int_{D_3} f(\vec{x}, t + \delta t)dv - \int_{D_1} f(\vec{x}, t)dv + \int_{D_2} (f(\vec{x}, t + \delta t) - f(\vec{x}, t))dv &= \\ = I_{D_3} - I_{D_1} + I_{D_2}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Pour calculer  $I_{D_2}$ , on utilise la formule suivante de Taylor :

$$f(\vec{x}, t + \delta t) = f(\vec{x}, t) + \frac{\delta t}{1!} \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{(\delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 f(\vec{x}, t)}{\partial t^2}, \quad (1.5)$$

avec

$$\frac{(\delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 f(\vec{x}, t)}{\partial t^2} \rightarrow 0. \quad (1.6)$$

Donc on a

$$\int_{D_2} (f(\vec{x}, t + \delta t) - f(\vec{x}, t))dv = \delta t \int_{D_2} \frac{df(\vec{x}, t)}{dt} dv \quad (1.7)$$

Pour  $I_{D_1}$  et  $I_{D_3}$  nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{D_3} f(\vec{x}, t + \delta t) dv &= \int_{D_3} f(\vec{x}, t + \delta t) \vec{u} \vec{n} dt ds \\
&= \delta t \int_{S_3} f(\vec{x}, t + \delta t) \vec{u} \vec{n} ds \\
&= \delta t \int_{S_3} (f(\vec{x}, t) + \delta t \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t}) \vec{u} \vec{n} ds
\end{aligned} \tag{1.8}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{D_1} f(\vec{x}, t) dv &= \int_{D_1} f(\vec{x}, t) \vec{u} \vec{n} dt ds \\
&= -\delta t \int_{S_1} f(\vec{x}, t) \vec{u} \vec{n} ds,
\end{aligned} \tag{1.9}$$

(les directions de  $\vec{u}$  et  $\vec{n}$  sont opposées). La vitesse est donnée par

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{u} \tag{1.10}$$

et

$$dv = d\vec{l} \vec{ds} = \vec{u} dt \vec{n} ds. \tag{1.11}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{dI(t)}{dt} &= \lim_{(\delta t \rightarrow 0)} \left( \frac{1}{\delta t} (\int_{D'} f(\vec{x}, t + \delta t) dv - \int_D f(\vec{x}, t) dv) \right) \\
&= \lim_{(\delta t \rightarrow 0)} \left( \frac{1}{\delta t} (\delta t \int_{D_2} \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t} dv + \delta t \int_{S_3} (f(\vec{x}, t) + \delta t \frac{df(\vec{x}, t)}{dt}) \vec{u} \vec{n} ds) \right) \\
&\quad + \frac{1}{\delta t} (\delta t \int_{S_1} f(\vec{x}, t) \vec{u} \vec{n} ds).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} = \lim_{(\delta t \rightarrow 0)} & \left( \frac{1}{\delta t} (\delta t \int_{D_2} \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t} dv + \delta t \int_{S_3+S_1=S} f(\vec{x}, t) \vec{u} \cdot \vec{n} ds) \right) \\ & + \frac{1}{\delta t} ((\delta t)^2 \int_{S_3} \frac{df(\vec{x}, t)}{dt} \vec{u} \cdot \vec{n} ds), \end{aligned}$$

quand  $\delta t \rightarrow 0$ ,  $D_2 \rightarrow D$ . Donc

$$\frac{dI(t)}{dt} = \int_D \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t} dv + \int_S f(\vec{x}, t) \vec{u} \cdot \vec{n} ds \quad (1.12)$$

### 1.2.3 Conservation de la masse

Soit  $\rho(x, y, z, t)$  la fonction d'état (masse volumique), avec

$$\rho = \frac{\partial m}{\partial v} \Rightarrow m = \int_D \rho dv, \quad (1.13)$$

où  $m$  est la masse des particules.

On dit qu'on a une conservation de la masse si

$$\frac{dm}{dt} = 0. \quad (1.14)$$

D'après la relation précédente (1.13), on a

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_D \rho(\vec{x}, t) dv = \int_D \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} dv + \int_S \rho(\vec{x}, t) \vec{u} \cdot \vec{n} ds \\ &= \int_D \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} dv + \int_D \text{div}(\rho(\vec{x}, t) \vec{u}) dv = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

ce qui implique

$$\frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} + \text{div}(\rho(\vec{x}, t) \vec{u}) = \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} + \rho(\vec{x}, t) \text{div}(\vec{u}) + \langle \vec{u}, \vec{\nabla} \rho(\vec{x}, t) \rangle = 0.$$

Comme

$$\frac{d\rho(\vec{x}, t)}{dt} + \rho(\vec{x}, t) \text{div}(\vec{u}) = 0, \quad (1.17)$$

alors

$$\frac{d\rho(\vec{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} + \langle \vec{u}, \vec{\nabla} \rho(\vec{x}, t) \rangle. \quad (1.18)$$

En particulier si  $\rho(\vec{x}, t)$  est constant on obtient  $\text{div}(\vec{u}) = 0$  (fluide incompressible).

#### 1.2.4 La première loi de Fick :

Par analogie A.Fick a établi la loi de flux de masse (matière) en 1855 :  $j = -D \frac{\delta C}{\delta X}$

$J$  : Flux de masse ( $kg/m^2, moles/m^2s$ )

$\frac{\delta C}{\delta X}$  : Gradient de concentration,  $kg/m^4$ , ou  $c$  est la concentration volumique  $kg/m^3$ .

$D$  Le coefficient de diffusion (diffusivité)

Remarque :

1) la première loi de Fick suppose que la concentration  $C$  et son gradient  $\frac{\delta C}{\delta X}$  ne change pas avec le temps. C à dire que pour  $x$  donné  $C = cte$  et  $\frac{\delta C}{\delta X} = cte$ , donc  $J \neq f(t)$ .

Ceci n'est valable que dans le régime stationnaire (uniforme).

2)  $J = -D \frac{\delta C}{\delta X}$  Représente la forme simplifiée unidimensionnelle de la loi de Fick. A trois dimensions :  $\vec{J} = -D \vec{\nabla} C$

### 1.2.5 La deuxième loi de Fick :

En pratique la diffusion est généralement non stationnaire (non uniforme). En effet le flux de diffusion et le gradient de concentration varient en fonction du temps en un point précis ( $x$  donné) d'un solide.

Dans ce cas la 1<sup>ère</sup> loi de Fick n'est pas applicable.

## 1.3 Approche mathématique

L'hypothèse que le phénomène évolue suivant une direction spatiale est la plus simple du point de vue de la complication de la distribution spatiale de la fumée. Cependant, même un problème unidimensionnel devient compliqué quand plusieurs paramètres participent dans l'évolution du phénomène.

alors :

Dans la modélisation présentée ici, les seuls paramètres considérés sont la vitesse du vent  $u(x, t)$ , qui dépend de la position et du temps, et la

concentration initiale de la fumée  $c(x, t)$  qui dépend de la position (nombre de particules par unité de surface à la position  $x$ ). la quantité que nous

espérons déterminer est la concentration  $c(x, t)$  dans chaque position et en tout instant (cette quantité est supposée à support compact, c.à.d. de distribution continue dans l'espace). on cherche à déterminer la concentration  $c(x, t)$  pour toute position  $x \in R$  (c.à.d., dans la position positive ou la position opposée) et tout temps  $t > 0$  (le temps évolue toujours dans le sens positif)

ci joint la représentation (figure1).

$D$  : volume

$u$  : concentration

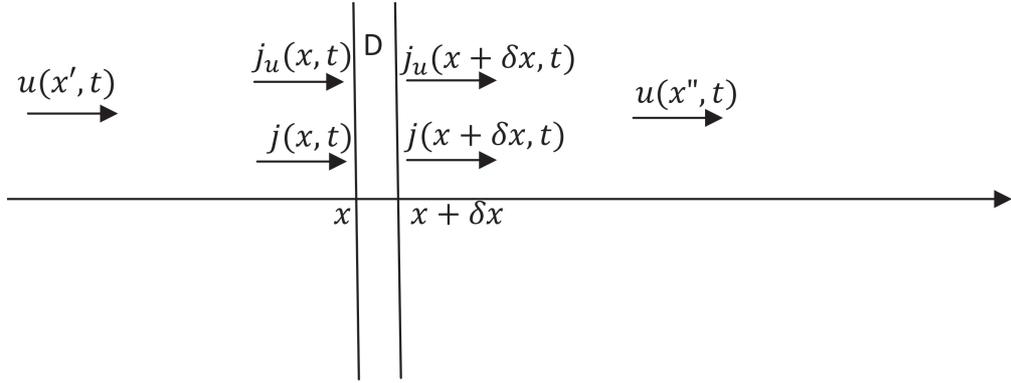


fig .1.

On fait l'hypothèse que l'équation  $c(x, t)$  est régulière : on suppose  $c \in C^2(R \times R)$  pour la suite (c.à.d, que pour les variables continues  $x$  et  $t$  qui appartiennent à  $R$ , nous avons des valeurs  $c(x, t)$  continues et purement positives  $c(x, t) \in R^+$ ). de plus on prendra  $u \in C^1(R \times R)$  (c.à.d, que  $u$  peut être une fonction de la variable continue  $t \in R$ , et la vitesse est considérée comme fonction continue ( $C^1$ ) non nulle dans la direction positive  $u \in R^+$ ). Afin de déterminer les équations que vérifie  $c(x, t)$ , on considère un volume  $D$  délimité par deux plans qui coupent l'axe  $ox$  dans les positions  $x$  et  $x + \delta x$ , bien sûr le volume va dépendre de la distance entre les plans qui est  $\delta x$ . dans chaque point  $\xi$  la concentration au moment  $t$  est  $c(\xi, t)$ , et le nombre de particules de fumée dans un petit volume délimité par deux plans qui coupent l'axe  $ox$  dans les positions  $\xi$  et  $\xi + \delta \xi$  est  $c(\xi, t)d\xi$ . Le nombre des particules  $V(t)$  (ou la quantité de fumée) contenue dans le volume  $D$  est la somme des quantités  $c(\xi, t)d\xi$  de  $x$  à  $x + \delta x$ .

$$V(t) = \int_D c(\xi, t)d\xi \quad (1.1)$$

La quantité  $V(t)$  est proportionnelle au nombre de particules qui rentrent dans le volume  $D$  à travers la surface située à la position  $x$ . Donc cette quantité doit être proportionnelle au flux  $j_u(x, t)$  de particules (densité de particules par unité de temps et surface) que ramène le vent et qui passe à travers la surface située à la position  $x$ . Ce flux est égale au produit de la concentration  $c(x, t)$  par la vitesse du vent  $u(x, t)$

$$j_u(x, t) = u(x, t)c(x, t) \quad (1.2)$$

Nous devons considérés aussi la diffusion des particules de la fumée, qui est par nature de hautes aux faibles concentration, c.à.d, que par la surface située à  $x$  il passe (il diffuse) au volume  $D$  au moment  $t$  un certain nombre de particules.

Nous signalons que la fumée se dirige vers la direction positive de l'axe  $ox$  et donc la concentration  $c(x, t)$  de la fumée diminue dans cette direction, alors la diffusion est dans le sens positif, c.à.d, que les particules diffusent vers le volume  $D$  à travers la surface située dans la position  $x + \delta x$ . La densité surfacique par unité de surface et de temps  $j(x, t)$  dû à la diffusion est définie par la loi de Fick

$$j(x, t) = -k \frac{\partial c}{\partial x}(x, t) \quad (1.3)$$

Le nombre  $k$  (réel) est appelé coefficient de diffusion, et dépend du type de fumée, ainsi que du milieu de propagation.

Le signe (-) signifie que la concentration diminue dans le sens positif.

La quantité de la fumée dans le volume  $D$  au moment  $t$  est donc proportionnelle à :

$$V(t) = u(x, t)c(x, t) - k \frac{\partial c}{\partial x}(x, t) \quad (1.4)$$

la variation de la quantité de fumée dans le volume  $D$  entre le moment  $t$  et  $t + \partial t$  est proportionnelle au bilan de concentration des particules qui rentrent par  $x$  et qui sortent

par  $x + \partial x$  et aussi à l' interval du temps  $\partial t$ , d' où

$$\begin{aligned}
 v(t+\delta t)-v(t) &= \left[ \left( u(x, t)c(x, t) - k \frac{\partial c}{\partial x}(x, t) \right) - \left( u(x + \partial x, t)c(x + \partial x, t) - k \frac{\partial c}{\partial x}(x + \partial x, t) \right) \right] \delta t \\
 &= A \left[ u(x, t)c(x, t) - u(x + \delta x, t)c(x + \delta x, t) + k \left( \frac{\partial c}{\partial x}(x + \delta x, t) - \frac{\partial c}{\partial x}(x, t) \right) \right] \delta t
 \end{aligned}$$

avec  $A$  est une constante de proportionnalité. Nous pouvons écrire cette équation sous la forme :

$$A^{-1} \left( \frac{V(t + \delta t) - V(t)}{\delta t} \right) = -[u(x + \delta x, t)c(x + \delta x, t) - u(x, t)c(x, t)] + k \left[ \frac{\partial c}{\partial x}(x + \delta x, t) - \frac{\partial c}{\partial x}(x, t) \right]$$

comme la fonction  $c(x, t)$  est supposée régulière (analytique), alors  $t \rightarrow V(t)$  est dérivable si bien qu'on peut faire tendre  $\delta t$  vers 0 dans l' expression précédente. Alors

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{V(t + \delta t) - V(t)}{\delta t} = \frac{\partial V(t)}{\partial t} \tag{1.5}$$

nous savons aussi  $f(x) = \int \frac{df(x)}{dx} dx$  (1.6)

d' où

$$\begin{aligned}
u(x + \delta x, t)c(x + \delta x, t) - u(x, t)c(x, t) &= \int_x^{x+\delta x} \left[ \frac{\partial c}{\partial x}(u(x, t)c(x, t)) \right]_{x=\xi} d\xi \\
&= \int_D \frac{\partial(uc)}{\partial x}(\xi, t) d\xi
\end{aligned} \tag{1.7}$$

et

$$\frac{\partial c}{\partial x}(x+\delta x, t) - \frac{\partial c}{\partial x}(x, t) = \int_x^{x+\delta x} \left[ \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(x, t) \right]_{x=\xi} d\xi = \int_D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(\xi, t) d\xi \tag{1.8}$$

et donc nous pouvons écrire

$$\frac{\partial V(t)}{\partial t} = - \int_D \frac{\partial(uc)}{\partial x}(\xi, t) d\xi + k \int_D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(\xi, t) d\xi \tag{1.9}$$

Toujours sous l'hypothèse de régularité faite sur  $c$ , on peut dériver sous l'intégrale dans l'expression (1.1) donnant  $V(t)$  pour obtenir

$$\frac{\partial V(t)}{\partial t} = \int_D \frac{\partial c(\xi, t)}{\partial x} d\xi \tag{1.10}$$

et donc la différence entre les équations (1.9) et (1.10) donne

$$\forall t > 0, \int_D \left[ \frac{\partial c}{\partial t}(\xi, t) + \frac{\partial(uc)}{\partial x}(\xi, t) - K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(\xi, t) \right] d\xi = 0 \tag{1.11}$$

On veut maintenant tendre  $\delta x$  vers 0 de telle sorte que le volume  $D$  se réduit peu à peu au point  $x$ . Or, pour toute fonction  $\varphi$  continue sur  $\mathbb{R}$ , on peut écrire

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \int_x^{x+\delta x} \varphi(\xi) d\xi = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \int_0^1 \varphi(x + s\delta x) ds \rightarrow \varphi(x) \int_0^1 ds = \varphi(x) \quad (1.12)$$

Comme , pour tout  $t > 0$  ,  $L$  ' integrant de l 'expression (1.11) est continu, on obtient donc à la limite

$$\forall x \in \mathbb{R} , \forall t > 0 , \frac{\partial c}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial(uc)}{\partial x}(x, t) - K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(x, t) = 0 \quad (1.13)$$

alors ,l'équation (1.13) est appelé équation d'advection-diffusion ou équation de transport-diffusion .

Elle est assortie de la condition initiale :

$$\forall x \in \mathbb{R} , c(x, 0) = c_0(x). \quad (1.14)$$

# Chapitre 2

## Aspect théorique pour l'équation de transport :

Le but de ce chapitre est l'étude de l'existence et l'unicité pour l'équation de transport ainsi que de trouver la solution exacte s'il y a lieu ;

### 2.1 L' équation de transport sans diffusion :

#### 2.1.1 Cas où la vitesse du vent est constante :

On suppose, ici, que la vitesse du vent est constante (en temps et en espace ) : pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $t > 0$ ,  $u(x, t) = u \in \mathbb{R}$ .

l'équation s'écrit donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t}(x, t) + u \frac{\partial c}{\partial x}(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0. \\ c(x, 0) = c_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.1)$$

On va employer la méthode des caractéristiques :on cherche une fonction  $X(t)$  telle que  $c$  soit constante sur les courbes  $(X(t), t)$ . Supposons donc  $c$  solution de l'équation (2.1) et posons  $\phi(t) = c(X(t), t)$ ,on cherche  $X(t)$  de sorte que  $\phi$  soit constante. Par dérivation

composée

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t}c(X(t), t) + X'(t)\frac{\partial c}{\partial x}(X(t), t) \\ &= [u - X'(t)]\frac{\partial c}{\partial x}(X(t), t)\end{aligned}$$

qui est nulle si  $X'(t) = u$ . On en déduit les courbes, appelées caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles (2.1).

$$X(t) = ut + \text{constante}.$$

**Définition 2.1** ([1]) *L'ensemble  $\{(X(t), t)/t \in \mathbb{R}\}$  est une droite de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  appelée courbe caractéristique issue de  $y$  pour l'opérateur de transport " $\partial_t + u\partial_x$ ".*

soit  $c(x, t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$  solution de l'équation de transport (2.1) donc l'application  $t \mapsto c(X(t), t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  et on a :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}c(X(t), t) &= \partial_t c(X(t), t) + \partial_x c(X(t), t)\frac{dX(t)}{dt} \\ &= (\partial_t + u\partial_x)c(X(t), t),\end{aligned}$$

Ainsi toute solution de classe  $\mathcal{C}^1$  de l'équation de transport (2.1) reste constante le long de chaque courbe caractéristique.

**Définition 2.2** *on appelle solution classique du problème de Cauchy une fonction  $c \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$  satisfaisant (2.1) au sens ordinaire ; les dérivées étant prises au sens usuel .*

**Théorème 2.1** ([8]) *Si  $c_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ , alors le problème (2.1) admet une unique solution  $c$  de classe  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ , donnée par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0 \quad c(x, t) = c_0(x - ut) \tag{2.2}$$

**Preuve.** Si  $c$  est une solution de classe  $\mathcal{C}^1$  de l'équation de transport, elle est constante le long des courbes caractéristiques donc

$$c(y + ut, 0) = c(y, 0) = c_0(y), \text{ pour tout } t > 0, y \in \mathbb{R},$$

en posant  $y + ut = x$ , on trouve donc que :

$$c(x, t) = c_0(x - ut) \text{ pour tout } t > 0, y \in \mathbb{R},$$

Réciproquement, pour  $c_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ , l'application  $(x, t) \mapsto c_0(x - ut)$  est de classe  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ , d'autre part on a :

$$\partial_x(c_0(x - ut)) = (\partial_x c_0)(x - ut),$$

$$\text{tandis que : } \partial_t(c_0(x - ut)) = -u(\partial_x c_0)(x - ut) = -u\partial_x(c_0(x - ut)),$$

ce qui montre que la fonction  $c(x, t) \mapsto c_0(x - ut)$  est bien une solution de l'équation de transport.

La formule (2.2) s'interprète ainsi : la donnée initiale est transportée le long des caractéristiques sans modification. Dans les termes de notre modèle, cela signifie qu'en l'absence de diffusion, la fumée arrive à hauteur de la maison avec la même concentration qu'à son émission.

Si  $c \in L^1(\mathbb{R})$  on peut également résoudre le problème en utilisant la transformée de Fourier. puisque l'équation transformée :

$$\partial_t \hat{c} + 2i\pi u \xi \hat{c} = 0 \text{ se résout à vue en :}$$

$$\begin{aligned} \hat{c}(\xi, t) &= \hat{c}(\xi, 0) \exp(-2i\pi u \xi t) \\ &= F(c(x - ut), 0) \end{aligned}$$

la transformée de Fourier étant une application injective, on obtient :

$$c(x, t) = c_0(x - ut)$$

cette façon de procéder est efficace et assez rapide mais de même est peu luxueuse .

■

**Définition 2.3 ([11])** Pour tout  $c_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ , on appelle solution faible du problème (2.1), toute fonction  $c \in \mathcal{C}(L^\infty(\mathbb{R}), [0, +\infty[)$ , qui satisfait : pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ ,

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} c(x, t)(\varphi_t(x, t) + u\varphi_x(x, t)) dx dt + \int_{\mathbb{R}} c_0(x)\varphi(x, 0) dx = 0$$

**Théorème 2.2 (existence des solutions faibles [11])** soit  $c_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$  la fonction  $c(x, t) = c_0(x - ut)$  est une solution faible du problème (2.1).

*Preuve.* on applique le théorème de changement de variable ainsi que le théorème de Fubini : soit  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, [0, +\infty[)$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} c_0(x - ut)(\varphi_t + u\varphi_x)(x, t) dx dt &= \int_{\mathbb{R}} c_0(y) \int_0^{+\infty} (\varphi_t + c\varphi_x)(y + ut, t) dt dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} c_0(y) \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} [\varphi(y + ut, t)] dt dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}} c_0(y)\varphi(y, 0) dy \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Théorème 2.3 (unicité des solutions faibles[11])** soit  $c_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ , la fonction  $c(x, t) = c_0(x - ut)$  est l'unique solution du problème (2.1).

*Preuve.* il suffit par linéarité de montrer que si  $c_0 = 0$ , alors  $c = 0$  est la seule solution faible. Soit donc  $c$  solution faible de (2.1) pour la condition initiale nulle. Pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ , on a

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} c(x, t)(\varphi_t(x, t) + u\varphi_x(x, t)) dx dt = 0$$

soit  $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ , alors il existe  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ , telle que  $\varphi_t(x, t) + u\varphi_x(x, t) = \psi$

par exemple,

$$\varphi(x, t) = \int_0^t \psi(x - u(t - s), s) ds$$

et par suite pour toute fonction  $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} c(x, t) \psi(x, t) dx dt = 0$$

et donc  $c(x, t) = 0$  dans  $L^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$  .

**Proposition 2.1** toute solution régulière du problème (2.1) est une solution faible du problème (2.1), réciproquement une solution faible régulière, disons de classe  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$  est une solution au sens classique de l'équation (2.1) .

■

**Preuve.** Soit  $c$  une solution régulière du problème de Cauchy (2.1) et une fonction  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$  on multiplie l'équation (2.1) par  $\varphi(x, t)$  et on intègre sur  $[0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (c_t(x, t) + uc_x(x, t)) \varphi(x, t) dx dt$$

les fonctions étant régulières on peut intégrer par parties; tous les termes de bord sont nuls sauf un et on obtient :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} c(x, t) (\varphi_t(x, t) + u\varphi_x(x, t)) dx dt + \int_{\mathbb{R}} c_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0$$

on obtient la réciproque , pour  $c$  régulière en faisant l'intégration par partie dans l'autre sens . ■

## Propriétés des solutions faibles

**Proposition 2.2 ([11])** Si  $c$  est la solution faible de (2.1) alors :

1. Si  $c_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$  , alors  $\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)} \leq \|c_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$  .
2. Si  $c_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  , alors  $c \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}))$ ,  
et  $\|c(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|c_0\|_{L^2(\mathbb{R})}$  , p.p.t  $\in \mathbb{R}_+$
3. On suppose que  $c_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$  est à support compact , alors pour tout  $t > 0$ ,  $c(\cdot, t)$  est aussi à support compact . plus précisément si  $\text{supp } c_0 \subset [-K, M]$  , alors  $\text{supp } c(\cdot, t) \subset [-K + ut, M + ut]$  .

**Preuve.** Il suffit d'utiliser l'expression explicite des solutions du problème (2.1). ■

## 2.1.2 Cas où la vitesse du vent est variable

**L'équation de transport non conservative :**

On a obtenu que les solutions (classiques et faibles) de l'équation d'advection scalaire à vitesse constante sont constantes le long de droites dans le plan  $(x, t)$  d'équation  $x - ut = x_0$

On peut donc établir le même genre de propriétés que dans le cas constant. On cherche des solutions  $c$  définies dans  $]a, b[ \times \mathbb{R}_+^*$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t}(x, t) + u(x, t) \frac{\partial c}{\partial x}(x, t) = 0, \forall x \in ]a, b[, \forall t > 0 \\ c(x, 0) = c_0(x), \forall x \in ]a, b[ \end{cases} \quad (2.3)$$

On suppose que  $u(a, t) = u(b, t) = 0$ , et que de plus la fonction  $(x, t) \mapsto u(x, t)$  est donnée régulière et bornée (hypothèses non optimales mais suffisantes).

On introduit les trajectoires associées à la vitesse  $u$  qu'on appelle courbes caractéristiques et sont solutions de l'équation dite équation caractéristique donnée par :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt}(t, t_0, x_0) = u(X(t, t_0, x_0), t) \\ X(t_0, t_0, x_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Avec les hypothèses sur la fonction  $u$ , d'après le théorème de Cauchy Lipshitz on sait que ce problème de Cauchy est globalement bien posé pour toute donnée  $x_0, t_0$ , c'est à dire qu'il possède une unique solution définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier.

**Proposition 2.3 ([5])** *La fonction  $X$  est définie, pour tout  $x \in ]a, b[$  et tout  $t, s \in \mathbb{R}$ , et on a :*

1-pour tout  $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ , on a :  $X(t_1, t_2, X(t_2, t_3, \cdot)) = X(t_1, t_3, \cdot)$ .

2-pour tout  $s, t \in \mathbb{R}$ , et  $x \in ]a, b[$  on a :

$$\partial_t X(s, t, x) + \partial_x X(s, t, x)u(x, t) = 0$$

**Preuve.** C'est ici qu'on utilise de façon cruciale la condition au bord sur la vitesse. comme  $u \in C^1(\mathbb{R}_+^* \times [a, b])$ , c'est par définition la restriction à  $\mathbb{R}_+^* \times [a, b]$  d'une fonction

$\tilde{u}$  de  $C^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$

1-Ce n'est autre que la propriété de semi groupe qui provient du théorème de Cauchy Lipshitz. en effet, pour tout  $x \in ]a, b[$ , la fonction  $\varphi : s \mapsto X(s, t_2, X(t_2, t_3, x))$  est solution de l'équation différentielle caractéristique et vérifie  $\varphi(t_2) = X(t_2, t_3, x)$  or  $\Psi : s \mapsto X(s, t_3, x)$  est aussi solution de l'équation caractéristique et vérifie  $\Psi(t_2) = X(t_2, t_3, x)$ . D'après le théorème de Cauchy Lipshitz, ces deux solutions sont nécessairement égales, ce qui donne le résultat.

2-Posons  $\gamma(s, t, x) = \partial_t X(s, t, x) + \partial_x X(s, t, x)u(x, t)$ .

on constate tout d'abord que  $\gamma(t, t, x) = 0$  pour tout  $t$  et  $x$ . En effet, par définition on a :  $X(t, t, x) = x$ , pour tout  $t$  et  $x$ , donc en dérivant par rapport au temps on obtient, en utilisant l'équation différentielle :

$$0 = \partial_t X(t, t, x) + \partial_s X(t, t, x) = \partial_t X(t, t, x) + u(x, t).$$

de plus  $\partial X(t, t, x) = 1$ , donc la relation précédente montre que  $\gamma(t, t, x) = 0$  pour tout  $t$  et tout  $x$ .

Montrons maintenant que  $\gamma$  vérifie une équation différentielle linéaire. on utilise pour cela les résultats classiques de dérivation des solutions d'une EDO par rapport à des paramètres et à la donnée initiale. Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{ds}(s, t, x) &= \frac{d}{ds}(\partial_t X(s, t, x) + \partial_x X(s, t, x)u(x, t)) \\ &= \frac{d}{dt}\partial_s(X(s, t, x)) + (\partial_x \partial_s X(s, t, x))u(x, t) \\ &= \frac{d}{dt}(u(X(s, t, x), s)) + (\partial_x(u(X(s, t, x), s))u(x, t)) \\ &= \partial_x u(X(s, t, x), s)\partial_t X(s, t, x) + \partial_x u(s, t, x, s)\partial X(s, t, x)u(x, t) \\ &= \partial_x u(X(s, t, x), s)\gamma(s, t, x). \end{aligned}$$

Ainsi :  $s \mapsto \gamma(s, t, x)$  vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre et de plus  $\gamma(t, t, x) = 0$  donc  $\gamma$  est identiquement nulle. ■

**Proposition 2.4 ([6])** *Sous les hypothèses ci-dessus, et si  $c_0 \in C^1(]a, b[)$ , il existe une unique solution donnée par : (en prenant  $t_0 = 0$  et  $x = X(t, 0, x)$  :*

$$c(x, t) = c_0(X(0, t, x))$$

**Preuve.** Soit  $c$  une solution du problème. on fixe  $x_0 \in \mathbb{R}$ , et on introduit

$\varphi(t) = c(X(t, t_0, x_0), t)$ . par calcul, on trouve :

$$\varphi'(t) = \partial_t c(X(t, t_0, x_0), t) + \frac{dX}{dt}(t, t_0, x_0) \partial_x c(X(t, t_0, x_0), t) = 0$$

car  $c$  est solution de l'équation de transport à la vitesse  $u$ . on sait ainsi la fonction  $\varphi$  est constante le résultat est démontré.

ceci redonne les formules obtenues dans le cas des coefficients constants. par ailleurs, on peut montrer l'unicité des solutions sans utiliser les caractéristiques, par estimation d'énergie  $L^2$ , de la façon suivante :

**Théorème 2.4 ([7])** On suppose que  $u$  n'est pas constante et on note  $\alpha = \sup_{\mathbb{R}} u$  et  $\beta = \inf_{\mathbb{R}} u$

si  $c_0$  est identiquement nulle sur un intervalle  $[a, b]$ , alors pour tout  $t < \frac{b-a}{\alpha-\beta}$ , on a

$$c(t, \cdot) = 0, \text{ sur } [a + \alpha t, b + \beta t].$$

Remarquons que  $\alpha > \beta$  et donc l'intervalle en question se rétrécit au cours du temps.

■

**Preuve.** On commence par remarquer que  $c^2$  vérifie la même équation que  $c$

$$\partial_t c^2 + u(x, t) \partial_x c^2 = 0.$$

Tout est alors basé sur le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \int_{a+\alpha t}^{b+\beta t} c^2(x, t) dx \right) &= \beta c^2(b + \beta t, t) - \alpha c^2(a + \alpha t, t) + \int_{a+\alpha t}^{b+\beta t} \partial_t (c^2) dx \\ &= (\beta - u(b + \beta t, t)) c^2(b + \beta t, t) + (u(a + \alpha t, t) - \alpha) c^2(a + \alpha t, t) \\ &\quad + \int_{a+\alpha t}^{b+\beta t} \partial_x u(x, t) c^2(x, t) dx. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{a+\alpha t}^{b+\beta t} c^2(x, t) dx \right) \leq \int_{a+\alpha t}^{b+\beta t} \partial_x u(x, t) c^2(x, t) dx.$$

Si  $t$  est petit comme dans l'énoncé du théorème, les bornes de l'intégrale sont dans le bon sens et on a donc la

majoration

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{a+\alpha t}^{b+\beta t} c^2(x, t) dx \right) \leq \| \partial_x u \|_{L^\infty} \int_{a+\alpha t}^{b+\beta t} c^2(x, t) dx. \quad \blacksquare$$

On peut alors conclure par un lemme de type Gronwall que l'on rappelle ici :

**Lemme 2.1** ([7]) Soit  $M \in \mathbb{R}$  et  $t \mapsto \varphi(t)$  une fonction dérivable qui vérifie

$$\varphi'(t) \leq M\varphi(t), \forall t,$$

Alors on a :

$$\varphi(t) \leq \varphi(0) \exp Mt.$$

On applique alors le lemme à la fonction  $\varphi$  définie par

$$\varphi(t) = \int_{a+\alpha t}^{b+\beta t} c^2(x, t) dx,$$

ce qui montre que pour tout  $t$  convenable, on a

$$\varphi(t) \leq \varphi(0) \exp \|\partial_x u\|_{L^\infty}$$

Or, par hypothèse on a  $c_0 = 0$  sur  $[a, b]$ , ce qui implique  $\varphi(0) = 0$  et donc  $\varphi(t) = 0$  pour tout  $t$ , et donc  $c(t, \cdot)$  est nulle sur  $[a + \alpha t, b + \beta t]$ .

**Définition 2.4** ([7]) Soit  $c_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ . on dit qu'une fonction  $c \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$  est solution faible du problème (2.3) si et seulement si on a

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} c(\partial_t \varphi + \partial_x(u(x, t)\varphi)) dx dt + \int_{\mathbb{R}} c_0(x)\varphi(x, 0) dx = 0,$$

pour toute fonction  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ .

-Bien noter que l'opérateur qui agit sur la fonction-test n'est pas le même que celui qui définit l'équation, Il s'agit de l'opérateur adjoint.

-Oa a la même propriété que dans le cas précédant : toute solution régulière bornée du problème est solution faible et toute solution faible qui, de plus, est régulière est alors solution au sens usuel.

**Théorème 2.5** Pour toute donnée initiale  $c_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ , il existe une unique solution faible du problème (2.3) qui est donnée par :

$$c(x, t) = c_0(X(0, t, x)). \tag{2.5}$$

**Exemple 2.1** ([3]) Cherchons les solutions de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} + x(1-x)\frac{\partial c}{\partial x} = 0 & \text{sur } ]0, 1[ \times ]0, \infty[ \\ c(x, 0) = c_0(x) & \text{sur } ]0, 1[ \end{cases} \quad (2.6)$$

au point  $(x_0, t_0)$ , la caractéristique qui passe par ce point est solution de :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = X(1-X) \\ X(t_0) = x_0 \end{cases}$$

on peut résoudre cette équation différentielle par séparation de variables :

$$\frac{dX}{X(1-X)} = dt$$

si on intègre on obtient :

$$\int_{x_0}^X \frac{ds}{s(1-s)} = \int_{t_0}^t d\omega$$

ce qui donne :

$$-\log \left| \frac{1-X}{X} \right| + \log \left| \frac{1-x_0}{x_0} \right| = t - t_0$$

et l'expression pour la caractéristique :

$$X(t) = \frac{x_0}{x_0 + (1-x_0)\exp(t_0 - t)}$$

la solution de (2.6) est alors :

$$c(x_0, t_0) = c_0\left(\frac{x_0}{x_0 + (1-x_0)\exp t_0}\right)$$

## L'équation de transport conservative

On peut utiliser ce que l'on vient de faire pour résoudre un problème différent bien que similaire, sous forme conservative :

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}(uc)(x, t) = 0, & \text{sur } x \in ]a, b[, t > 0 \\ c(x, 0) = c_0(x), & x \in ]a, b[ \end{cases} \quad (2.7)$$

$u(x, t)$  est la vitesse qui est donnée et vérifie  $u(a) = u(b) = 0$  et  $c_0$  est une fonction donnée,

On va voir pourquoi on appelle cette équation conservative :

**Proposition 2.5 ([3])** *L'intégrale en  $x$  de la solution de l'équation (2.7) se conserve dans le temps, c'est-à-dire :*

$$\int_a^b c(x, t) dx = \int_a^b c_0(x) dx \quad \forall t > 0$$

**Preuve.** Comme  $c$  est solution de (2.7) on a :

$$\int_a^b \left( \frac{\partial c}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}(uc)(x, t) \right) dx = 0$$

on a :

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}(uc)(x, t) = [u(x, t)c(x, t)]_a^b = 0$$

car  $u(a, t) = u(b, t) = 0$ , on conclut que :

$$\frac{d}{dt} \int_a^b c(x, t) dx = 0 \quad \blacksquare$$

On remarquera que cette équation possède un terme supplémentaire, par rapport à l'équation de transport  $\left( \frac{\partial u}{\partial x} c \right)$  et de ce fait on ne peut plus dire que la solution est constante le long des caractéristiques.

Comme au paragraphe précédent, on cherche les caractéristiques; ce qui conduit à résoudre l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{dX}{ds}(s, t_0, x_0) = u(X(s, t_0, x_0), s) \\ X(t_0, t_0, x_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Afin d'assurer l'existence globale de solution pour (2.8), on suppose que la fonction  $u$  lipschitzienne par rapport à sa première variable. Soit alors  $X(t, t_0, x_0)$  la valeur au temps  $t$  de la solution de l'équation (2.8) satisfaisant la condition initiale  $X(0, t_0, x_0) = x_0$

on pose  $\Phi(s) = c(X(s, t_0, x_0), s)$ , alors on obtient l'équation différentielle

$$\frac{d\Phi}{ds}(s) = -\frac{\partial u}{\partial x}(X(s, t_0, x_0), s)\Phi(s),$$

qui s'intègre en :

$$\forall t > 0 \quad \Phi(t) = \Phi(0) \exp \left[ -\int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(X(s, t_0, x_0), s) ds \right].$$

D'ou finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0 \quad c(X(s, t_0, x_0), s) = c_0(x_0) \exp \left[ -\int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(X(s, t_0, x_0), s) ds \right]$$

on peut à partir de cette formule déduire un résultat d'existence et d'unicité.

**Théorème 2.6 ([8])** *soit  $c_0 \in C^1(\mathbb{R})$  et  $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  vérifiant la condition de Lipschitz :*

$$\exists L > 0 \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall t > 0 \mid u(x, t) - u(y, t) \mid \leq L \mid x - y \mid .$$

Alors l'équation (2.7) admet une unique solution  $c \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  donnée par :

$$c(x, t) = c_0(X(0, t_0, x_0)) \exp \left[ - \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(X(s, t_0, x_0), s) ds \right] \quad (2.9)$$

**Preuve.** 1-Unicité :

supposons qu'il existe deux solutions régulières  $\rho_1$  et  $\rho_2$  de (2.7) alors la différence  $\rho = \rho_1 - \rho_2$  vérifie :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \rho = 0, \\ \rho(0) = 0 \end{cases}$$

En multipliant l'équation précédente par  $\rho$  et en intégrant sur  $]a, b[$  on obtient, comme  $u$  est nulle sur les bords

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\rho(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial u}{\partial x}(\rho^2) dx = 0$$

Il vient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\rho(t)\|_{L^2}^2 \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^\infty} \|\rho(t)\|_{L^2}^2 .$$

et donc en utilisant le lemme de Gronwall, on obtient que :

$$\|\rho(t)\|_{L^2}^2 \leq \|\rho_0\|_{L^2}^2 \times \exp \left( \int_0^T \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^\infty} ds \right) ,$$

ce qui montre en particulier que  $\rho = 0$  et donc l'unicité des solutions de l'équation.

2-Existence :

vérifions que la formule proposée dans l'énoncé vérifie bien l'équation.

On commence par montrer que pour toute fonction  $f$  régulière et tout  $s \in \mathbb{R}$ , on a :

$$(\partial_t + u \partial_x)(f(X(s, t, x))) = (\partial_t X(s, t, x) + \partial_x X(s, t, x) u(x, t)) \partial f(X(s, t, x)) = 0,$$

D'après la propriété 2 de la proposition (2.3)

Ainsi si on applique l'opérateur  $(\partial_t + u \partial)$  à la formule (2.9), on voit que le terme qui va concerner  $c_0$  va s'annuler, de même que le terme de dérivation à l'intérieur de l'intégrale qui est dans l'exponentielle. Ainsi, il reste

$$\partial_t \rho + u(x, t) \partial \rho = - \frac{\partial u}{\partial x} \rho$$

Le fait que  $\rho(x, 0) = 0$  est clair. ■

La méthode des caractéristiques présentée ci-dessus ne peut fonctionner que si la vitesse  $u$  et la donnée initiale  $c_0$  sont suffisamment régulières (au moins lipschiziennes). on obtient alors des solutions au sens classique de l'équation de transport.

Néanmoins, dans beaucoup d'applications les données initiales ne sont pas régulières. Par ailleurs, la vitesse peut lui aussi ne pas être régulière. on est donc amenés à s'intéresser à la notion de solution faible de l'équation de transport.

**Définition 2.5** *soient  $I$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}$ ,  $c_0 \in L^\infty(I)$  et  $u \in L^1(]0, T[, L^1(I))$ , on dit qu'une fonction  $c \in L^\infty(]0, T[ \times I)$  est solution faible de (2.7) si pour toute fonction test  $\varphi \in C^1([0, T] \times I)$  telle que  $\varphi(t) = 0$  on a :*

$$\int_0^T \int_I \left( \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt + \int_I \rho_0 \varphi(\cdot, 0) dx = 0.$$

**Existence dans le cas général** En régularisant les données et en utilisant la méthode des caractéristiques introduites précédemment, il est assez aisé de construire des solutions faibles de l'équation de transport. Plus précisément on a le résultat suivant.

**Théorème 2.7** *Pour toute données  $I, c_0, u$  vérifiant les hypothèses de la définition ci-dessus il existe au moins une solution faible  $c \in L^\infty(]0, T[ \times I)$  de l'équation de transport (2.7)*

*Preuve.* On peut montrer que l'ensemble des vitesses de classe  $C^\infty$  par rapport à  $(x, t)$  à support compact est dense dans l'ensemble des vitesses de  $L^1(]0, T[, L^1(I))$  et tels que  $u(a, t) = u(b, t) = 0$  sur le bord. il existe donc une suite de vitesses régulières  $(u_n)_n$  vérifiant les conditions aux limites, qui converge vers  $u$  dans  $L^1$  et tel que  $\partial u_n$  converge vers  $\partial u$  dans  $L^1$  supposant borné.

De la même façon, par densité, il existe une suite de fonctions  $(\rho_0^n)_n$  dans  $D(I)$ , bornée dans  $L^\infty(I)$  et qui converge vers  $\rho_0$  dans tous les espaces  $L^p(I)$  avec  $p < +\infty$  et dans  $L^\infty(I)$  faible\*.

On peut alors utiliser la proposition === qui montre, pour tout  $n$ , l'existence d'une solution classique  $\rho^n$  de l'équation de transport pour les données  $u_n$ , et  $\rho_0^n$ . Par ailleurs,

d'après cette proposition on a :

$$\|\rho^n\|_{L^\infty(]0,T[,L^\infty(I))} \leq \|\rho_0^n\|_{L^\infty(I)} \exp \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x} \right\|_{L^1(I)} \leq C.$$

Il existe donc une fonction  $\rho \in L^\infty(]0,T[ \times I)$  et une sous-suite (toujours notée  $(\rho^n)_n$  pour simplifier les notations ) telle que :

$$\rho^n \rightharpoonup \rho \text{ quand } n \rightarrow +\infty, \text{ dans } L^\infty(]0,T[ \times I) \text{ faible}^*.$$

Par ailleurs, comme  $\rho^n, u_n$  sont régulières et vérifient l'équation de transport au sens classique ainsi que la condition au bord  $u_n(a) = u_n(b) = 0$ , ce sont aussi des solutions faibles. il vient donc pour toute fonction test  $\varphi$

$$\int_0^T \int_I \rho^n \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_n \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dt dx + \int_I \rho_0^n \varphi(0, \cdot) dx = 0.$$

Par construction  $(\rho_0^n)_n$  converge vers  $\rho_0$  dans  $L^1(I)$  par exemple ce qui permet de passer à la limite dans le second terme. Pour le premier terme, la convergence faible\* de  $(\rho^n)_n$  dans  $L^\infty$  et la convergence forte de  $(u_n)_n$ , dans  $L^1$  permettent de passer également à la limite. ceci montre que la fonction limite  $\rho$  est bien une solution faible de l'équation de transport attendue. ■

**Le cas d'un champ régulier** On a vu que si  $\rho_0, u$  sont réguliers alors il ya une unique solution régulière à notre problème donnée par ( $=$ ). cette solution régulière est alors également une solution faible du problème.

**Proposition 2.6 ([5])** On se donne  $\rho_0 \in L^\infty(I)$ , et on suppose que  $v$  et  $c$  sont réguliers.

Alors, la formule

$$\rho(x, t) = \rho_0(X(0, t, x)) \times \exp\left(-\int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(X(s, t, x)) ds\right)$$

définit une fonction  $\rho \in L^\infty(]0,T[ \times I)$  qui l'unique solution faible de l'équation de transport.

**Preuve.** On approche la donnée  $\rho_0$  par une suite de fonctions régulières  $(\rho_0^n)_n$  qui converge dans  $L^\infty$  faible  $===$  et dans tous les  $L^p$  vers  $\rho_0$ . La solution  $\rho^n(x, t) = \rho_0^n(X(0, t, x)) \exp - \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(X(s, t, x), s) ds$  de l'équation de transport associée à ces données converge alors également faible\* vers la solution  $\rho$  du problème limite. il reste donc à identifier cette limite  $\rho$ .

Soit  $\varphi \in C_c^\infty(]0, T[ \times I)$ , on a par changement de variables en  $x$  pour tout  $t$

$$\int_0^T \int_I \rho_0^n(X(0, t, x)) \varphi(x, t) dt dx = \int_I \rho_0^n(y) \left( \int_0^T \varphi(X(t, 0, y), t) J(t, y) dt \right) dy.$$

L'intégrale en temps est une fonction de  $y$  dans  $L^1(\Omega)$ , on peut donc passer à la limite en  $n$ . On obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_I \rho_0^n(X(0, t, x)) \varphi(x, t) dt dx &\rightarrow \int_I \rho_0(y) \left( \int_0^T \varphi(X(t, 0, y), t) J(t, y) dt \right) dy. \\ &= \int_0^T \int_I \rho_0(X(0, t, x)) \varphi(x, t) dt dx \end{aligned}$$

en utilisant à nouveau le théorème de Fubini et un changement de variables inverse.

Il reste à démontrer l'unicité. cette propriété, duale de celle de l'existence, se démontre grâce à la remarque =====. En effet, si  $\psi$  est une fonction régulière sur  $]0, T[ \times I$ , il existe une fonction  $\varphi$  régulière telle que  $\varphi(T) = 0$  et  $\partial_t \varphi + u \partial_x \varphi + (\partial v - c) \varphi = \psi$ .

Ainsi, si  $\rho$  est n'importe quelle solution faible pour la donnée initiale  $\rho_0 = 0$ , on met cette fonction  $\varphi$  dans la formulation faible et il vient

$$\int_0^T \int_I \rho \psi dt dx = 0,$$

ceci étant vrai pour tout  $\psi$  régulier, on trouve bien  $\rho = 0$ .

■

## 2.2 L'équation de transport-diffusion

Nous donnons une formulation variationnelle afin de prouver l'existence et l'unicité de la solution

### 2.2.1 Position du problème

soient  $]a, b[$  un ouvert de  $\mathbb{R}$ , et  $[o, T]$  un intervalle de temps, avec  $T > 0$ .

l'équation de convection-diffusion est de la forme :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial (uc)}{\partial x} - \frac{\partial (k \frac{\partial c}{\partial x})}{\partial x} = 0 \text{ dans } ]a, b[ \times [o, T]; \quad (2.11)$$

on rappelle que  $c(x, t)$  est la concentration de la fumée ,

$u$  est la vitesse du vent.

$k$  est le coefficient de diffusion, il est strictement positif.

on introduit les conditions initiales et les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} c(x, o) = c_0(x) & \forall x \in ]a, b[, \\ c(a, t) = c(b, t) = g(t), \end{cases} \quad (2.12)$$

le problème d'évolution que nous allons étudier dans la suite est :

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial (uc)}{\partial x} - \frac{\partial (k \frac{\partial c}{\partial x})}{\partial x} = 0 & \text{dans } ]a, b[ \times [o, T] \\ c(x, o) = c_0(x) & \forall x \in ]a, b[ \\ c(a, t) = c(b, t) = g(t) & \text{sur } ]o, T [ \quad ; \end{cases} \quad (2.13)$$

avec  $c$  et  $g, c_0$  sont des fonctions assez régulières ; avec :  $\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) > \lambda > 0$ .  $\lambda$  réel positif.

## 2.2.2 Notation et cadre fonctionnel

On note  $I = ]a, b[$  et  $I_T = ]a, b[ \times [0, T]$  pour donner une formulation variationnelle du problème (2.13), nous allons utiliser les espaces de Sobolev suivants :

$L^2(\mathbb{R}) = \{c \text{ mesurable} : \int_I |c|^2 dx < \infty\}$ , l'espace des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  et de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue  $dx$ . On le munit du produit scalaire :

$$(c, v) = \int_I cv dx, \forall c, v \in L^2(I);$$

et de la norme :

$$\|v\|_2 = \left( \int_I |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \forall v \in L^2(I);$$

soit  $D(I)$  l'espace des fonctions indéfiniment dérivables et à support compact dans  $I$ .

on note par  $H^1(I)$  l'espace des fonctions  $L^2(I)$  dont la dérivée au sens des distribution est aussi dans  $L^2(I)$  :

$$H^1(I) = \left\{ v \in L^2(I) / \frac{\partial v}{\partial x} \in L^2(I) \right\};$$

qu'on munit de la norme :

$$\|v\|_{H^1} = \left( \|v\|_{L^2(I)}^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2(I)}^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

alors  $H^1(I)$  est un espace de Hilbert .

on désigne par  $H_0^1(I)$  l'adhérence de  $D(I)$  dans  $H^1(I)$  :

$$H_0^1(I) = \{v \in H^1(I) / v(a) = v(b) = 0\};$$

munit de la norme :

$$\|v\|_{H_0^1(I)} = \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2(I)} ;$$

nous définissons l'espace de sobolev suivant :

$$H^2(I) = \left\{ v \in L^2(I) / \frac{\partial v}{\partial x} \in L^2(I), \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \in L^2(I) \right\}$$

muni de la norme :

$$\|v\|_{H^2} = \left( \|v\|_{L^2(I)}^2 + \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right\|_{L^2(I)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

pour formuler les problèmes évolutifs , nous utilisons les espaces :

$L^2(0, T; H_0^1(I))$  l'espace des fonctions de carré intégrable à valeurs dans  $H_0^1(I)$  muni de la norme :

$$\|c\|_{L^2(0,T;H_0^1(I))} = \left( \int_0^T \|c(t)\|_{H_0^1(I)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

est un espace de banach pour cette norme .

$C(0, T ; L^2(I))$ , l'espace des fonctions continues dans  $[0, T]$  à valeurs dans  $L^2(I)$ , qui est aussi un espace de Banach pour la norme :

$$\|c\|_{C(0,T;L^2(I))} = \max_{t \in [0,T]} \|c(t)\|_{L^2(I)} .$$

**Lemme 2.2 (de Granwall[2])** soient  $f$  et  $g \in \mathcal{C}([0, T] \times \mathbb{R})$  où  $T > 0$  on suppose de plus la fonction  $f$  à valeurs positives, si  $c \in \mathcal{C}^1([0, T] ; \mathbb{R})$  satisfait :

$$c(t) \leq g(t) + \int_0^t f(s)c(s)ds \quad \forall t \in [0, T]$$

alors :

$$c(t) \leq g(t) + \int_0^t f(s)c(s) \exp\left(\int_0^s f(\tau)d\tau\right)ds$$

**Lemme 2.3 (formule de green )** soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , de frontière  $\Gamma$ , pour toute fonction  $c \in H^2(\Omega)$  et toute fonction  $v \in H^1(\Omega)$ , on a la formule de Green suivante :

$$- \int_{\Omega} (\Delta c)v dx = \int_{\Omega} \nabla c \nabla v dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial c}{\partial n} v d\sigma$$

**Lemme 2.4 (Inégalité de Poincaré)** *soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  de frontière  $\Gamma$ , alors il existe une constante  $c_{\Omega} > 0$  telle que :*

$$\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \leq c_{\Omega} \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega);$$

**Définition 2.6**  *$a(., .)$  est continue s'il existe une constante  $\gamma > 0$  telle que :*

$$a(c, v) \leq \gamma \|c\|_V \|v\|_V \quad \forall v \in V;$$

**Définition 2.7** *soit  $V$  un espace vectoriel normé de  $\|\cdot\|_V$  une forme bilinéaire  $a(., .)$  est dite  $V$ -elliptique (coercive) s'il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que :*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V;$$

### 2.2.3 Formulation variationnelle pour l'équation de transport-diffusion

pour simplifier on va étudier le problème (2.13) pour des conditions de Dirichlet homogène c'est à dire lorsque  $g = 0$   
rappelons le problème à étudier

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(uc)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial c}{\partial x} \right) = 0 & \text{dans } [0, T] \times I \\ c(a, t) = c(b, t) = 0 & \text{pour tout } t \in ]0, T[. \\ c(x, 0) = c_0(x) & \text{pour tout } x \in ]a, b[ \end{cases} \quad (2.14)$$

pour obtenir une formulation variationnelle , nous multiplions d'abord l'équation

(2.14) par une fonction test  $v \in H_0^1(I)$ , puis nous intégrons sur  $I$  :

$$\int_I \frac{\partial c}{\partial t} v dx + \int_I \frac{\partial(uc)}{\partial x} v dx - k \int_I \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} v dx = 0$$

en utilisant la formule de Green ; et ayant  $v|_a = v|_b = 0$  on a :

$$\int_I \frac{\partial(uc)}{\partial x} v dx = - \int_I uc(v)' dx$$

et :

$$k \int_I \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} v dx = -k \int_I \frac{\partial c}{\partial x} v' dx$$

l'équation (2.14) se ramène à :

$$\int_I \frac{\partial c}{\partial t} v dx - \int_I uc(v)' dx + k \int_I \frac{\partial c}{\partial x} v' dx = 0 \quad (2.15)$$

en remarquant qu'on a au sens des distributions :

$$\int_I \frac{\partial c}{\partial t} v dx = \frac{d}{dt} \int_I cv dx$$

l'équation (2.15) devient pour tout  $v \in H_0^1(I)$  :

$$\frac{d}{dt} \int_I cv dx - \int_I uc(v)' dx + k \int_I \frac{\partial c}{\partial x} v' dx = 0$$

ainsi si  $c \in H^2(I)$  est solution du problème variationnel suivant :

soit  $c_0 \in L^2(I)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } c \in L^2(0, T; H_0^1(I)) \cap \mathcal{C}(0, T; L^2(I)) \text{ telque :} \\ \frac{d}{dt}(c(t), v) + a(c(t), v) = 0; \forall v \in H_0^1(I). \\ c(0) = c_0 \end{array} \right. \quad (2.16)$$

où :

$$(c(t), v) = \int_I c(x, t)v(x)dx; a(c(t), v) = - \int_I (uc)(x, t)v'(x)dx + k \int_I \frac{\partial c}{\partial x}(x, t)v'(x)dx$$

**Remarque 2.1 ([2])** la formulation (2.16) est appelé la forme faible du problème (2.14).

supposons maintenant que  $c$  est solution de (2.16), on souhaite bien sûr que  $c$  soit également solution du problème de départ , or si  $c \in L^2(0, T; H_0^1(I)) \cap C(0, T; L^2(I))$  est solution de

$$\frac{d}{dt} \int_I c(x, t)v(x)dx - \int_I (uc)(x, t)v'(x)dx + k \int_I \frac{\partial c}{\partial x}(x, t)v'(x)dx = 0; \forall v \in H_0^1(I).$$

et si  $c$  est suffisamment régulière pour que  $\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$  (afin de ne pas condenser l'écriture on va écrire dans ce qui suit  $c(x, t) = c(t) = c$  et  $v(x) = v$  s'il n'y a pas d'ambiguïté) soit défini au sens classique , on peut réutiliser la formule de Green et le fait que  $c(a, t) = c(b, t) = 0$  pour obtenir :

$$\int_I \left( \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(uc)}{\partial x} - k \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \right) v dx = 0 ; \forall v \in H_0^1(I).$$

comme on suppose que :  $c, \frac{\partial c}{\partial x}, \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$  sont continues , l'intégrale est nulle  $\forall v \in H_0^1(I)$  .seulement si :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(uc)}{\partial x} - k \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0,$$

il en découle donc avec la condition initiale  $c(x, 0) = c_0(x)$  que  $c$  est également solution du problème aux dérivées partielles (2.14) .

**Lemme 2.5 ([13])** la forme  $a(., .)$  définie dans  $H_0^1(I)$  est bilinéaire et continue .

**Preuve.** étudions la continuité de la forme bilinéaire  $a(., .)$  utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $L^2(I)$ , nous obtenons :

$$\left| \int_I \frac{\partial c}{\partial x} v t dx \right| \leq k \left\| \frac{\partial c}{\partial x} \right\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)} = k \|c\|_{H_0^1(I)} \|v\|_{H_0^1(I)}.$$

nous avons également :

$$\left| \int_I (uc)(t) v t dx \right| \leq \|u(t)\|_{L^\infty(I)} \|c(t)\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)}$$

puis par l'inégalité du Poincaré on trouve :

$$\left| \int_I (uc)(t) v t dx \right| \leq C_I \|u(t)\|_{L^\infty(I)} \|c(t)\|_{H_0^1(I)} \|v\|_{H_0^1(I)}.$$

d'où :

$$|a(c, v)| \leq \gamma \|c(t)\|_{H_0^1(I)} \|v\|_{H_0^1(I)}.$$

avec  $\gamma = k + C_I \|u(t)\|_{L^\infty(I)}$ . ■

**Lemme 2.6** ([14]) *la forme bilinéaire  $a(.,.)$  est  $H_0^1(I)$ -elliptique (coercive) i.e qu'il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que :*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H_0^1(I)}^2.$$

**Preuve.** nous avons :

$$a(v, v) = \|v\|_{H_0^1}^2 + \int_I \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) v^2 dx$$

nous remarquons que si  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \geq 0$  presque partout  $a$  est elliptique car  $a(v, v) \geq \|v\|_{H_0^1}^2$ . y a-t'il d'autre cas pour lesquels l'ellipticité est encore vraie? notons  $(\frac{\partial u}{\partial x})^-$  la partie négative de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  (c'est à dire  $(\frac{\partial u}{\partial x})^-$  est la fonction définie par  $(\frac{\partial u}{\partial x})^-(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$  si  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) > 0$  et  $(\frac{\partial u}{\partial x})^- = 0$  sinon) on a en effet la minoration suivante :

$$a(v, v) \geq \left(1 - \frac{1}{2}C_I \left\| \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^- \right\|_{L^\infty(I)}\right) \|v\|_{H_0^1}^2.$$

qui montre que si  $\left(1 - \frac{1}{2}C_I \left\| \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^- \right\|_{L^\infty(I)}\right) > 0$ , alors la forme  $a$  est élliptique .

■

**Théorème 2.8 ([13])** *Le problème (2.16) possède une solution et une seule  $c \in L^2(0, T; H_0^1(I)) \cap \mathcal{C}(0, T; L^2(I))$*

*De plus  $\frac{\partial c}{\partial t} \in L^2(0, T, H^{-1}(I))$ .*

**Preuve.** *Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution. On procède en plusieurs étapes :*

*i) problème en dimension finie :*

*On construit d'abord une suite de fonctions, solutions de problèmes posés en dimension finie.*

*Notons  $V = H_0^1(I)$ ,  $V$  est un sous espace fermé de  $H^1(I)$ , c'est un espace de Hilbert séparable.*

*Alors, soit  $\{\psi_j\}_{j \geq 1}$  une base orthonormale complète dans  $V$  et soit  $V^N$  l'espace engendré par les  $N$  premières fonctions de base,  $\{\psi_1, \dots, \psi_N\}$ .*

*Considérons le problème approché :*

*pour tout  $t \in [0, T]$  :*

$$\begin{cases} \text{trouver } c^N(t) \in V^N \text{ telle que :} \\ \frac{d}{dt}(c^N(t), \psi_j) + a(c^N(t), \psi_j) = 0, \forall j = 1, \dots, N; \\ c^N(0) = c_0^N = P_N(c_0) = \sum_{i=1}^N (c_0, \psi_i) \psi_i, \forall i = 1, \dots, N; \end{cases} \quad (2.17)$$

*Où  $P_N$  est la projection orthogonale sur  $V^N$  dans  $L^2(I)$ .*

*comme  $\{\psi_j\}_{j=1, \dots, N}$  est une base de  $V^N$ , alors l'équation (2.17) est satisfaite pour tout  $\psi^N \in V^N$ .*

*soit  $\{b_i^N(t)\}_{i=1, \dots, N}$  les coordonnées de  $c^N(t)$  dans la base  $\{\psi_i\}_{i=1, \dots, N}$ , alors  $c^N(t)$  peut s'écrire :*

$$c^N(t) = \sum_{i=1}^N b_i^N(t)\psi_i.$$

L'équation (2.17) est alors équivalente à résoudre le système linéaire d'équations différentielles

$$\begin{cases} M \frac{d}{dt} b^N(t) + A b^N(t) = 0; \\ b^N(0) = b_0; \end{cases} \quad (2.18)$$

où

$$M = (M_{ij}) \text{ où } M_{ij} = (\psi_j, \psi_i); i, j = 1, \dots, N$$

$$A = (A_{ij}) \text{ où } A_{ij} = a(\psi_j, \psi_i); i, j = 1, \dots, N$$

$M$  étant une matrice définie positive, le système (2.18) admet une solution unique  $b^N \in H^1(0, T)$  i.e  $c^N \in H^1(0, T, V)$ .

ii) convergence :

choisissons  $c^N(t)$  comme étant une fonction test dans (2.17) , nous avons :

$$\frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} \|c^N(t)\|_{L^2(I)}^2 dt + \alpha \int_0^T \|c^N(t)\|_{H^1(I)}^2 dt \leq 0;$$

ceci est équivalent à :

$$\frac{1}{2} [\|c^N(T)\|_{L^2(I)}^2 - \|c^N(0)\|_{L^2(I)}^2] + \alpha \int_0^T \|c^N(t)\|_{H^1(I)}^2 dt \leq 0;$$

d'où

$$\frac{1}{2} \|c^N(T)\|_{L^2(I)}^2 + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \|c^N(t)\|_{H^1(I)}^2 dt \leq \frac{1}{2} \|c^N(0)\|_{L^2(I)}^2;$$

ce qui implique que :

$$\int_0^T \|c^N(t)\|_{H^1(I)}^2 dt \leq \frac{1}{\alpha} \|c^N(0)\|_{L^2(I)}^2;$$

Alors la suite  $c^N$  est bornée dans  $L^\infty(0, T; L^2(I)) \cap L^2(0, T; V)$ . On peut alors extraire une sous-suite qu'on notera aussi  $c^N$  qui converge faiblement dans  $L^\infty(0, T; L^2(I))$  et dans  $L^2(0, T; V)$ ,

Alors, il existe  $c \in L^\infty(0, T; L^2(I)) \cap L^2(0, T; V)$  tel que pour tout  $\psi \in L^1(0, T; L^2(I))$

$$\int_0^T (c^N(t), \psi(t)) dt \rightarrow \int_0^T (c(t), \psi(t)) dt \text{ quand } N \rightarrow \infty.$$

Et on a pour tout  $\psi \in L^2(0, T; V)$

$$\int_0^T \left( \frac{\partial}{\partial x} c^N(t), \psi(t) \right) dt \rightarrow \int_0^T \left( \frac{\partial}{\partial x} c(t), \psi(t) \right) dt \text{ quand } N \rightarrow \infty.$$

Pour passer à la limite dans (2.17) prenant  $\xi \in C^1([0, T])$  avec  $\xi(T) = 0$ , multiplions (2.17) par  $\xi$  et intégrons par parties sur  $[0, T]$ , nous trouvons pour le premier terme

$$\int_0^T \frac{d}{dt} (c^N(t), \psi_j) \xi(t) dt = - \int_0^T (c^N(t), \psi_j) \frac{d}{dt} \xi(t) dt - (c_0^N, \psi_j) \xi(0).$$

Comme  $c_0^N$  converge vers  $c_0$  dans  $L^2(I)$ , alors choisissons  $N_0$  arbitraire et passons à la limite dans (2.17), nous obtenons finalement :

$$\left\{ - \int_0^T (c(t), \psi_j) \frac{d}{dt} \xi(t) dt - (c_0, \psi_j) \xi(0) + \int_0^T a(c(t), \psi_j) \xi(t) dt = 0, \quad \forall j = 1, \dots, N_0 \right.$$

comme la combinaison linéaire de  $\psi_j$  est dense dans  $V$ , on peut écrire l'équation précédente pour tout  $\psi \in V$ .

En plus, pour  $\xi \in D(0, T)$ , l'équation n'est autre que (2.16).

Ainsi, nous avons construit une solution  $c \in L^\infty(0, T; L^2(I)) \cap L^2(0, T; V)$  du problème (2.16).

iii) continuité avec les données initiales :

Il reste à montrer que  $c(0) = c_0$  et  $\frac{\partial c}{\partial t} \in L^2(0, T; V')$ , avec  $V' = H^{-1}(I)$  le dual de  $H_0^1(I)$ .

Montrons que  $c(0) = c_0$ .

Premièrement, on a  $(c(t), \psi) \in H^1(0, T)$ , multiplions (2.16) par  $\xi \in C^1([0, T])$  avec  $\xi(0) = 1$ , et  $\xi(T) = 0$ , après, intégration par parties, nous avons :

$$\left\{ - \int_0^T (c(t), \psi) \frac{d}{dt} \xi(t) dt - (c(0), \psi) \xi(0) + \int_0^T a(c(t), \psi) \xi(t) dt = 0, \quad \forall \psi \in V \right. \quad (2.19)$$

ayant  $\xi(0) = 1$  on a,  $(c(0) - c_0, \psi) = 0, \forall \psi \in V$  i.e,  $c(0) = c_0$ .

Il reste à montrer que  $\frac{\partial c}{\partial t} \in L^2(0, T; V')$ .

D'après (2.16) on :  $\frac{\partial c}{\partial t} + Lc = 0$  au sens des distributions et comme  $Lc \in L^2(0, T; V')$

alors  $\frac{\partial c}{\partial t} \in L^2(0, T; V')$ .

iv) Unicité de la solution :

Il nous reste maintenant à démontrer l'unicité de la solution.

Supposons qu'il existe deux solutions  $c_1, c_2 \in L^2(0, T; H_0^1(I)) \cap \mathcal{C}(0, T; L^2(I))$ .

Posons  $\xi = c_1 - c_2$  alors l'équation devient :

$$\begin{cases} (\frac{\partial \xi}{\partial t}, \psi) + a(\xi, \psi) = 0 \\ \xi(0) = 0 \end{cases}$$

avec  $a(\xi, \psi) = \int_I \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \int_I \frac{\partial}{\partial x} (u\xi) \psi dx$ .

Posons  $\psi = \xi$ , on a alors :  $(\frac{\partial \xi}{\partial t}, \xi) + a(\xi, \xi) = 0$ .

or

$$(\frac{\partial \xi}{\partial t}, \xi) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\xi(t)\|_{L^2(I)}^2,$$

d'où,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\xi(t)\|_{L^2(I)}^2 + a(\xi, \xi) = 0.$$

comme  $a(., .)$  est coercive, alors il existe  $\alpha > 0$  tel que :  $a(\xi, \xi) \geq \alpha \|\xi\|_{H_0^1(I)}^2$

D'où

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\xi(t)\|_{L^2(I)}^2 + \alpha \|\xi\|_{H_0^1(I)}^2 \leq 0$$

i.e

$$\frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{ds} \|\xi(s)\|_{L^2(I)}^2 + \alpha \int_0^t \|\xi\|_{H_0^1(I)}^2 \leq 0;$$

Alors, d'après le lemme de Gronwall nous avons que :

$$\frac{1}{2}\|\xi(t)\|_{L^2(I)}^2 - \frac{1}{2}\|\xi(0)\|_{L^2(I)}^2 + \alpha \int_0^t \|\xi(s)\|_{H_0^1(I)}^2 ds \leq 0;$$

alors :  $\|\xi(t)\|_{L^2(I)}^2 = 0$  ce qui implique que :  $\xi(t) = 0$  pour presque tout  $t \in ]0, T[$  dans  $L^2(I)$ , ceci veut dire que  $c_1 = c_2$ , donc la solution quand elle existe elle est unique . ■

Ainsi on a prouvé l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.16).

# Chapitre 3

## Approximation numérique de l'équation de transport par D.F :

### 3.1 Introduction :

En analyse numérique, la méthode des différences finies est une technique courante de recherche de solutions approchées d'équations aux dérivées partielles qui consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres.

En apparence, cette méthode apparaît comme étant la plus simple à mettre en oeuvre car elle procède en deux étapes :

d'une part la discrétisation par différences finies des opérateurs de dérivation/différentiation, d'autre part la convergence du schéma numérique ainsi obtenu lorsque la distance entre les points diminue.

### 3.2 la méthode des différences finies.

*Maillage.*

Pour la méthode des différences finies, un maillage est un ensemble de points isolés (appelés noeuds) situés dans le domaine de définition des fonctions assujetties aux équations aux dérivées partielles. Une grille sur les seuls noeuds de laquelle sont définies les inconnus correspondant aux valeurs approximatives de ces fonctions.

Le maillage comprend également des noeuds situés sur la frontière du domaine (ou au moins "proche" de cette frontière) afin de pouvoir imposer les conditions aux limites et / où la condition initiale avec une précision suffisante.

#### *La consistance*

On appelle « erreur de troncature » la quantité  $|R_i^n|$ , c'est-à-dire concrètement la différence entre le schéma discrétisé et l'équation d'origine,

dans notre modèle  $|R_i^n| \leq C(\Delta x + \Delta t)$ , notre schéma est dit consistant si  $|R_i^n| \rightarrow 0$  quand  $\Delta x \rightarrow 0$  et  $\Delta t \rightarrow 0$ .

#### *La stabilité*

Cette notion concerne les résolutions des systèmes d'équations pour lesquels on est souvent amené à mettre en oeuvre des algorithmes itératifs. La stabilité peut se résumer à dire qu'une erreur d'arrondi (ou une perturbation numérique) ne doit pas s'amplifier au cours des calculs.

#### *La convergence*

Le théorème de Lax dit que s'il y a consistance et stabilité, alors il y a convergence.

Autrement dit, un schéma de discrétisation consistant et une méthode de résolution stable conduisent à une solution qui est une bonne image de la solution recherchée.

#### *Remarque*

Dans la méthode des différences finies, les discrétisations vues jusqu'à maintenant (les plus classiques) sont consistantes. Aussi, on s'attachera à préciser uniquement les conditions de stabilité pour vérifier la convergence.

#### *Shémas des D.F*

La construction des schémas par la méthodes des différences finies repose sur l'utilisation de développements de Taylor , ce qui suppose (implicitement) que la solution exacte est régulière. néanmoins les schémas peuvent être utilisés sur des cas non réguliers aussi avec des conditions.

On se donne donc un pas de discrétisation spatiale  $\Delta x$  (qu'on note très souvent  $h$ ) et un pas de discrétisation temporelle  $\Delta t$  (aussi souvent noter  $k$  ). ces deux pas de discrétisation étant fixés ,on considère la famille de points  $(x_i = i\Delta x)_{i \in \mathbb{Z}}$  discrétisent le domaine spatiale  $\mathbb{R}$  et la famille de points  $(t_n = n \Delta t)_{n \in \mathbb{N}}$  qui discrétisent la variable temporelle. ceci étant fait, on peut maintenant espérer représenter dans un ordinateur( dénombrable!) l'ensemble des valeurs  $(c(x_i, t_n))_{i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}}$

si on trouve une méthode pour calculer de façon exacte ces valeurs nous avons bien entendu complètement résolu le problème. malheureusement il est impossible de remplacer toute l'information contenu l'EDP (qui est valable en tout instant  $t$  est en tout point  $x$ ) par un nombre dénombrable de relation concernant seulement un échantillon de la solution.

Il faut donc trouver un moyen de traduire sur les valeurs discrètes l'équation aux dérivées partielle à laquelle on s'intéresse La méthode des différence finies consiste à remarquer que, si la fonction est suffisamment régulière, alors on peut construire des quotients différentiels à partir des valeurs échantillonnées qui ne sont pas trop loin des dérivées partielles de la fonction en un point  $(x_i, t_n)$  de la discrétisation

.ainsi nous avons par exemple

$$\begin{aligned}
\frac{c(x_{i+1}, t_n) - c(x_i, t_n)}{\Delta x} &\approx \partial_x c(x_i, t_n). \\
\frac{c(x_{i+1}, t_n) - c(x_{i-1}, t_n)}{2\Delta x} &\approx \partial_x c(x_i, t_n) \\
\frac{c(x_i, t_n) - c(x_{i-1}, t_n)}{\Delta x} &\approx \partial_x c(x_i, t_n) \\
\frac{c(x_i, t_{n+1}) - c(x_i, t_n)}{\Delta t} &\approx \partial_t c(x_i, t_n) \\
\frac{c(x_i, t_n) - c(x_i, t_{n-1})}{\Delta t} &\approx \partial_t c(x_i, t_n) \\
\frac{c(x_i, t_{n+1}) - c(x_i, t_{n-1})}{2\Delta t} &\approx \partial_t c(x_i, t_n)
\end{aligned}$$

il y a d'autres schémas aussi.

comme la fonction  $c$  que l'on cherche est solution de l'équation aux dérivées partielles au point  $(x_i, t_n)$ , on obtient (en choisissant l'une des possibilités de combinaison des formules ci-dessus) le résultat suivant :

$$\frac{c(x_i, t_n) - c(x_i, t_{n-1})}{\Delta t} + u \frac{c(x_{i+1}, t_n) - c(x_i, t_n)}{\Delta x} \approx \partial_t c(x_i, t_n) + u \partial_x c(x_i, t_n) \approx 0$$

Si ce terme était exactement nul, alors on aurait trouvé des relations liant uniquement les valeurs de  $c$  aux points de discrétisation et alors on a trouvé le bon résultat. malheureusement, sauf dans des cas très particuliers, ce calcul ne donne pas exactement 0. il donne un résultat petit (c'est à dire grosso modo de la taille des pas  $\Delta t$  et  $\Delta x$ ) que l'on appelle l'erreur de consistance.

à ce stade, nous n'avons pas écrit de schéma numérique !

écrire un schéma numérique par la méthode des différences finies consiste à dire : l'erreur de consistance n'est pas nulle mais est-ce que je peux trouver une famille de nombres réels notée  $(c_i^n)$  dont on espère qu'ils seront proches des vraies valeurs inconnues  $(c(x_i, t_n))$  qui

satisfont exactement la relation discrète ci-dessus c'est-à-dire dans l'exemple choisi :

$$\frac{c_i^n - c_i^{n-1}}{\Delta t} + u \frac{c_{i+1}^n - c_i^n}{\Delta x} = 0 \quad (3.1)$$

Bien entendu, la donnée initiale du problème doit intervenir quelque part. elle intervient tout simplement en disant que, puisque on connaît toutes les valeurs de  $c$  à l'instant 0 (c'est la fonction donnée  $c_0!$ ), on va demander à ce que les  $c_i^0$  soient donnés exactement par les valeurs de la donnée initiale.

$$c_i^0 = c(x_i, 0) = c_0(x_i), \quad \forall_i \in \mathbb{Z}. \quad (3.2)$$

Après avoir écrit un schéma numérique, on cherche à répondre à ces questions :

- schéma bien posé : la famille d'équation (3.1) assorti des conditions initiales (3.2) admet-il solution ? est-elle unique ? sous quelle condition sur les données du problème et/ou sur les paramètres de discrétisation ?
- consistance : quel est le sens exact des signes  $\approx 0$  dans les formules de dérivées numériques plus haut ?
- borne-stabilité : supposons que la solution du schéma existe et est unique. celle-ci dépend bien entendu des paramètres de discrétisation  $\Delta t$  et  $\Delta x$ . est-ce que la solution discrète obtenue est bornée quand  $\Delta t$  et  $\Delta x$  tendent vers 0 ? pour quelle norme ?
- convergence : a-t-on convergence de la solution approchée ? autrement dit a-t-on  $c_i^n$  aussi proche que l'on veut de  $c(x_i, t_n)$  si  $\Delta t$  et  $\Delta x$  sont assez petits ? sous quelles conditions sur  $\Delta t$  et  $\Delta x$  ?
- estimation de l'erreur : peut-on estimer a priori l'erreur de convergence c'est à dire la taille des nombres  $(u_i^n - u(x_i, t_n))_{i,n}$  en fonction de  $\Delta t$  et  $\Delta x$  ?

### 3.3 *L' équation de transport sans diffusion*

#### 3.3.1 *Cas où la vitesse du vent est constante*

Ce paragraphe est consacré à la discretisation de l' équation linéaire à coefficients constants avec une vitesse  $u > 0$  ( le cas  $u = 0$  est peu intéressant ; le signe de la vitesse joue un rôle dans ce qui suit mais le cas  $u < 0$  se traite de façon symétrique).

- 1. Soit le problème suivant :( équation de transport)

$$(3.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t}(x, t) + u \frac{\partial c}{\partial x}(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0. \\ c(x, 0) = c_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

*Le schéma diamant :*

Nous présentons le schéma diamant (ou en croix), dû à Carlson , qui est un schéma centré ayant l'avantage d'être précis à l'ordre 2 et inconditionnellement stable , ce schéma est un peu plus compliqué que les autres car il utilise les inconnus intermédiaires  $c_{j+1/2}^{n+1/2}$  qui sont des approximations de la solution au temps  $t_{n+1/2} = (n + 1/2)\Delta t$  et au point  $x_{j+1/2} = (j + 1/2) \Delta x$  il s'écrit :

$$(3.4) \quad \begin{cases} \frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t} + u \frac{c_{j+1/2}^{n+1/2} - c_{j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = 0 \\ c_j^{n+1} + c_j^n = c_{j+1/2}^{n+1/2} + c_{j-1/2}^{n+1/2} \end{cases}$$

la première ligne de(3.4)discrétise de manière centrée l'équation de transport (1.1) tandis que la deuxième ligne est purement algébrique .cette deuxième relation de (1.1) est dite "diamant" à cause de la figure obtenue en reliant les points  $(c_j^{n+1}, c_j^n, c_{j+1/2}^{n+1/2}, c_{j-1/2}^{n+1/2})$  sur un maillage espace-temps

les relations (3.4) sont valables pour les indices  $1 \leq j \leq N$  et on les complète par la condition aux limites :

$$(3.5) \quad c_0^n = g(t_n) \text{ pour } n \geq 0$$

pour calculer la solution de (3.4) , on élimine l'inconnue  $c_j^{n+1} = c_{j+1/2}^{n+1/2} + c_{j-1/2}^{n+1/2} - c_j^n$  pour se ramener au schéma, a priori implicite ,

$$c_{j+1/2}^{n+1/2} \left(1 + u \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) + c_{j-1/2}^{n+1/2} \left(1 - u \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) = 2c_j^n \quad (3.6)$$

qui permet de calculer les valeurs  $(c_{j+1/2}^{n+1/2})_j$  en fonction des valeurs précédentes  $(c_j^n)_j$ . on calcule ensuite facilement les valeurs  $(c_j^{n+1})_j$  avec la relation diamant , deuxième ligne de (3.4). la relation (3.6) est valable pour les indices  $0 \leq j \leq N$  et on la complète par la condition aux limites (obtenue en injectant (3.5) dans la relation diamant)

$$c_{-1/2}^{n+1/2} = -c_{1/2}^{n+1/2} + g(t_n) + g(t_{n+1}), \quad (3.7)$$

qui conduit à

$$c_{1/2}^{n+1/2} = \frac{g(t_n) \left(1 + u \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) - g(t_{n+1}) \left(1 - u \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)}{2u \frac{\Delta t}{\Delta x}}. \quad (3.8)$$

bien que le schéma (3.6) semble être implicite .il n'en est rien car il est possible de calculer de proche en proche les valeurs  $c_{j+1/2}^{n+1/2}$  en allant dans le sens des  $j$  croissants (car la vitesse est positive  $u > 0$  ; c'est l'équivalent discret de la méthode des caractéristiques). autrement dit , la résolution du système linéaire associé à (3.6) est immédiate car la matrice correspondante  $A$  est triangulaire

$$A = \begin{pmatrix} 1+d & 0 & \cdots & 0 \\ 1-d & 1+d & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1-d & 1+d \end{pmatrix} \quad \text{avec } d = u \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (3.9)$$

autrement dit , le schéma diamant (3.4) est quasiment explicite alors qu'il va hériter des propriétés usuelles des schémas implicites (stabilité inconditionnelle ). pour montrer la stabilité de ce schéma nous allons utiliser la méthode d'inégalité d'énergie et pour commencer nous établissons cette inégalité pour l'équation de transport (3.3) .

**Lemme 3.1 (3.1[1])** la solution régulière de (3.3) vérifie

$$\int_0^1 |c(x, T)|^2 dx \leq \int_0^1 |c_0(x)|^2 dx + \int_0^T u |g(t)|^2 dt$$

*Preuve.* on multiplie (3.3) par  $c$  et on intègre en espace

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_0^1 |c(x, t)|^2 \right) + \frac{u}{2} (|c(1, t)|^2 - |u(0, t)|^2) = 0$$

on remplace  $c(t, 0)$  par la condition aux limites  $g(t)$ , on minore par zéro le terme de bord en  $x = 1$  et on intègre en temps pour obtenir

$$\int_0^1 |c(x, T)|^2 dx - \int_0^1 |c(x, 0)|^2 dx - u \int_0^T |g(t)|^2 dt \leq 0.$$

qui est l'inégalité d'énergie recherchée.

**Lemme 3.2 (3.2[1])** le schéma diamant (3.4) est inconditionnellement stable en norme  $\mathbb{L}^2$ .

*Preuve.* on va reproduire l'argument de la preuve du lemme 3.1 mais adapté au cas discret, c'est à dire en remplaçant

les intégrations par des réarrangements de sommes discrètes. pour cela on multiplie la première équation de (3.4) par  $(c_j^{n+1} + c_j^n)$  et on utilise la deuxième équation de (3.4) pour le deuxième terme, ce qui donne

$$\frac{(c_j^{n+1})^2 - (c_j^n)^2}{\Delta t} + u \frac{(c_{j+1/2}^{n+1/2})^2 - (c_{j-1/2}^{n+1/2})^2}{\Delta x} = 0 \quad (3.10)$$

en sommant sur  $j$  les termes en  $(j + 1/2)$  s'éliminent deux à deux (sauf les extrêmes

pour lesquels on utilise la condition aux limites ) on obtient

$$\sum_{j=1}^N \Delta x (c_j^{n+1})^2 - \sum_{j=1}^N \Delta x (c_j^n)^2 - u \Delta t (c_{1/2}^{n+1/2})^2 \leq 0. \quad (3.11)$$

on somme alors  $n$  pour en déduire

$$\sum_{j=1}^N \Delta x (c_j^{n+1})^2 \leq \sum_{j=1}^N \Delta x (c_j^0)^2 + u \sum_{k=0}^n \Delta t (c_{1/2}^{k+1/2})^2. \quad (3.12)$$

la condition aux limites (1.5) nous dit que

$$\begin{aligned} c_{1/2}^{n+1/2} &= \frac{g(t_n) + g(t_{n+1})}{2} + \frac{g(t_n) - g(t_{n+1})}{2 \frac{u \Delta t}{\Delta x}} \\ &= g(t_{n+1/2}) - \frac{\Delta x}{2u} g'(t_{n+1/2}) + o((\Delta t)^2 + (\Delta t)^2 \Delta x), \end{aligned} \quad (3.13)$$

ce qui implique que la dernière somme dans (3.12) est une approximation consistante de  $\int_0^T |g(t)|^2 dt$  et donc que (3.12) est bien une inégalité de stabilité en norme  $\mathbb{L}^2$  valable pour tout choix des pas de temps et d'espace . ■

**Lemme 3.3 (3.3)** le schéma diamant(3.4) (avec condition aux limites de périodicité ) vérifie la condition nécessaire de stabilité en norme  $\mathbb{L}^2$  de Von Neumann.

**Lemme 3.4 (3.4)** le schéma diamant(3.4) est consistant avec l'équation de transport (3.3), précis l'ordre 2 en espace et temps .

**Preuve.** on calcule les erreurs de troncature des deux relations du schéma

$$E_1 = \frac{c(x_j, t_{n+1}) - c(x_j, t_n)}{\Delta t} + u \frac{c(x_{j+1/2}, t_{n+1/2}) - c(x_{j-1/2}, t_{n+1/2})}{\Delta x}$$

et

$$E_2 = c(x_j, t_{n+1}) + c(x_j, t_n) - c(x_{j+1/2}, t_{n+1/2}) - c(x_{j-1/2}, t_{n+1/2})$$

pour trouver , en faisant un développement de Taylor autour du point  $(t_{n+1/2}, x_j)$

$$E_1 = \left( \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} \right) (x_j, t_{n+1/2}) + o((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$$

et

$$E_2 = o((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$$

ce qui prouve que le schéma diamant est consistant d'ordre 2. ■

■

puisque le schéma diamant (3.4) est stable et consistant , il est automatiquement convergent par application du théorème de Lax .néanmoins nous allons redémontrer ce résultat(en suivant exactement la même méthode ) car le lecteur attentif aura remarqué que la définition du schéma diamant n'est pas standard puisqu'elle comprend deux relations dont une la deuxième est purement algébrique .la démonstration que nous avons donnée du théorème de Lax ne s'applique pas au schéma diamant qui est à trois niveaux  $(n, n + 1/2, n + 1)$ .par ailleurs , la définition de la stabilité du schéma dans le lemme (2.2.2) tient compte, non seulement de la donnée initiale , mais aussi de la condition aux limites .de même, dans la démonstration du lemme (3.4) sur la précision du schéma on peut se demander s'il ne fallait pas diviser la deuxième relation de (3.4) par  $\Delta t$  ou  $\Delta x$  .pour clarifier ces points nous allons donc démontrer le résultat suivant .

**Lemme 3.5 (3.5)** le schéma diamant (3.4) est convergent en norme  $\mathbb{L}^2$ .

**Preuve.** comme dans la démonstration du théorème de Lax nous introduisons la notation  $\tilde{c}_j^n = c(t_n, x_j)$  où  $c$  est la solution exacte de(3.3) et on définit l'erreur  $e_j^n = c_j^n -$

$c(t_n, x_j)$ . comme le schéma est précis à l'ordre 2, on a

$$\begin{cases} \frac{\tilde{c}_j^{n+1} - \tilde{c}_j^n}{\Delta t} + u \frac{\tilde{c}_{j+1/2}^{n+1/2} - \tilde{c}_{j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = o((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2) \\ \tilde{c}_j^{n+1} + \tilde{c}_j^n = \tilde{c}_{j+1/2}^{n+1/2} + \tilde{c}_{j-1/2}^{n+1/2} + o((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2) \end{cases} \quad (3.14)$$

par soustraction avec (1.2) on en déduit

$$\begin{cases} \frac{\tilde{c}_j^{n+1} - \tilde{c}_j^n}{\Delta t} + u \frac{\tilde{c}_{j+1/2}^{n+1/2} - \tilde{c}_{j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = \varepsilon_j^n \\ e_j^{n+1} + e_j^n = e_{j+1/2}^{n+1/2} + e_{j-1/2}^{n+1/2} + \eta_j^n, \end{cases} \quad (3.15)$$

avec

$$|\varepsilon_j^n| \leq \delta \text{ et } |\eta_j^n| \leq \delta \text{ où } \delta = o((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2), \quad (3.16)$$

nous suivons alors la démonstration du lemme (3.2) sur la stabilité, c'est à dire que nous multiplions la première relation de (3.15) par  $e_j^{n+1/2} + e_{j-1/2}^{n+1/2}$ , que nous sommions en  $j$  et que nous utilisons la deuxième relation pour obtenir

$$\Delta x \sum_{j=1}^N ((e_j^{n+1})^2 - (e_j^n)^2) + u \Delta t ((e_{N+1/2}^{n+1/2})^2 - (e_{1/2}^{n+1/2})^2) = \Delta x \sum_{j=1}^N (\Delta t \varepsilon_j^n (e_j^{n+1} + e_j^n) + \eta_j^n (e_j^{n+1} - e_j^n) - \Delta t \varepsilon_j^n \eta_j^n) \quad (3.17)$$

puis on somme en  $n$ , en se rappelant que l'erreur initiale est nulle,  $e^0 = 0$ , en introduisant la norme  $\mathbb{L}^2$  discrète et en minorant par zéro le terme  $(e_{N+1/2}^{n+1/2})^2$  pour obtenir

$$\|e^{n_0}\|_2^2 \leq u \Delta t \sum_{n=0}^{n_0-1} (e_{1/2}^{n+1/2})^2 + \Delta x \sum_{j=1}^N \sum_{n=0}^{n_0-1} (\Delta t \varepsilon_j^n (e_j^{n+1} + e_j^n) + \eta_j^n (e_j^{n+1} - e_j^n) - \Delta t \varepsilon_j^n \eta_j^n) \quad (3.18)$$

on réarrange la somme suivante

$$\sum_{n=0}^{n_0-1} \eta_j^n (e_j^{n+1} - e_j^n) = \sum_{n=0}^{n_0} e_j^n (\eta_j^{n-1} - \eta_j^n), \quad (3.19)$$

puis on majore tous les termes du membre de droite de (3.19), remarquons que  $\eta_j^n$  est une erreur de troncature et que, si on avait pour suivi le développement de Taylor dans la démonstration du lemme de la consistance, on aurait aisément vu que

$$\eta_j^{n-1} - \eta_j^n = \Delta t o((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2). \quad \blacksquare$$

**Preuve.** en utilisant la condition aux limites d'entrée (3.5), il est facile de voir par un développement de Taylor que l'on

$$\left| e_{1/2}^{n+1/2} \right| \leq \delta \text{ où } \delta = o((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2).$$

par conséquent, on en déduit :

$$\|e^{n_0}\|_2^2 \leq u \Delta t n_0 \delta^2 + \Delta t \Delta x \sum_{j=1}^N \sum_{n=0}^{n_0-1} (\delta(|e_j^{n+1}| + |e_j^n|) + \delta |e_j^n| + \delta^2) \quad (3.20)$$

pour un temps final  $T = n_T \Delta t$ , on choisit  $n_0$  qui donne l'erreur maximale,  $\|e^{n_0}\|_2 = \max_{1 \leq n \leq n_T} \|e^n\|_2$ , ce qui permet de majorer encore (1.17).

$$\|e^{n_0}\|_2^2 \leq (u+1)T\delta^2 + 3T\Delta x\delta \sum_{j=1}^N |e_j^{n_0}| \quad (3.21)$$

comme  $\Delta x \sum_{j=1}^N \leq 1$ , par Cauchy-Schwarz on a

$$\Delta x \sum_{j=1}^N |e_j^{n_0}| \leq \|e^{n_0}\|_2$$

et (3.21) conduit à

$$(\delta^{-1} \|e^{n_0}\|_2)^2 \leq C (\delta^{-1} \|e^{n_0}\|_2 + 1),$$

d'où, l'on déduit l'existence d'une constante  $C$ , indépendante de  $\Delta t$  et  $\Delta x$ , telle que  $\|e^{n_0}\|_2 = \max_{1 \leq n \leq n_T} \|e^n\|_2 \leq C\delta$ . le schéma diamant est donc convergent et sa vitesse de convergence est bien d'ordre 2.

**Remarque 3.1 (3.1)** le seul inconvénient du schéma diamant est qu'il n'est pas positif en général, c'est à dire qu'il peut produire des valeurs négatives de la solution même si la donnée initiale (et éventuellement la condition aux limites) est positive. c'est bien sûr contraire au principe du maximum pour l'équation de transport(3.3).

■

Un exemple dans lequel le schéma décentre est stable si  $|\lambda| = |u_0|k/h < 1$  i.e si  $k \leq h/|u_0|$

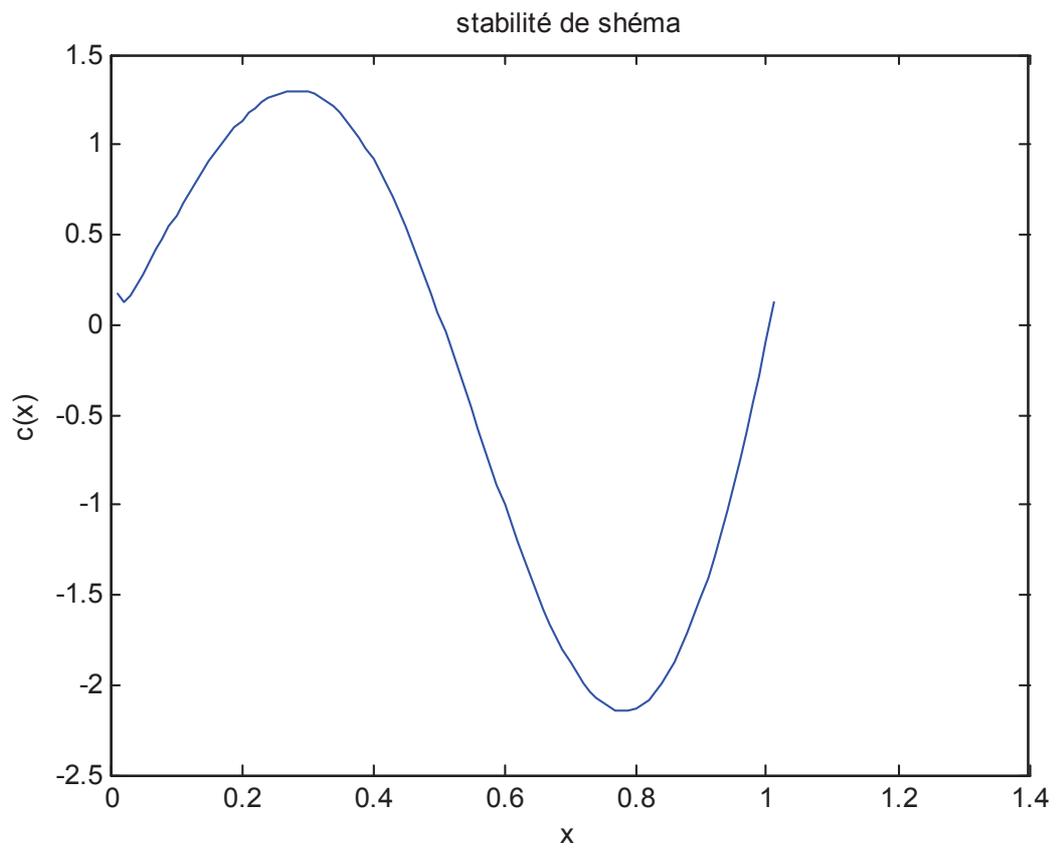


fig : 3.3  
schéma stable  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lambda \Delta t < 1$ .

un exemple dans lequel le schéma d'Euler est instable si  $|\lambda| = |u_0| k/h > 1$  i.e si  $k > h/|u_0|$

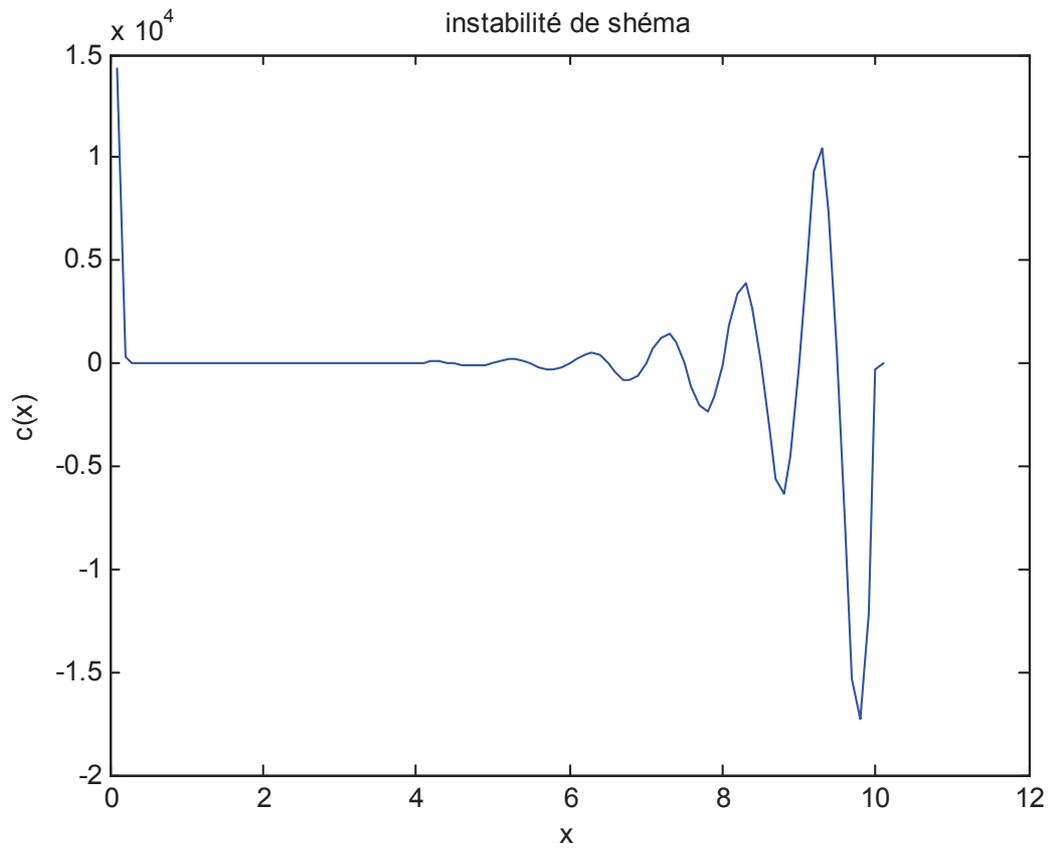


fig : 3.4

schéma instable  $\text{limda} > 1$

*Le schéma décentré amont :*

$$\begin{aligned}
 \text{(SDA)} \quad & \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} + \frac{u}{\Delta x} (c_i - c_{i-1}^n) = 0, \text{ si } u \geq 0 \\
 & \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} (c_{i+1} - c_i^n) = 0 \quad \text{sinon.}
 \end{aligned}$$

Pour  $n \in \{0, \dots, N\}$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ . on verra que ce schéma est d'ordre un et stable également sous des conditions de type CFL

**Proposition 3.1 (3.1[11])** *On suppose que  $c_0$  est une fonction de classe  $C^2(\mathbb{R})$  à support compact :*

*Le schéma (SDA) est d'ordre un en espace et temps*

**Preuve.** *on remarque en effectuant des développements limites de  $c$  au voisinage du point  $(x_i, t_n)$  que :*

$$\frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} = \frac{\partial c}{\partial t}(x_i, t_n) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial t^2}(x_i, t_n).$$

$$\frac{c_i^n - c_{i-1}^n}{\Delta x} = \frac{\partial c}{\partial x}(x_i, t_n) - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x_i, t_n).$$

$$\frac{c_{i+1}^n - c_i^n}{\Delta x} = -\frac{\partial c}{\partial x}(x_i, t_n) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x_i, t_n).$$

$$R_i^n = \frac{\partial c}{\partial t}(x_i, t_n) + u \frac{\partial c}{\partial x}(x_i, t_n).$$

$$R_i^n = \frac{\partial c}{\partial t}(x_i, t_n) + u \frac{\partial c}{\partial x}(x_i, t_n) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial t^2}(x_i, t_n) + u \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x_i, t_n).$$

$$|R_i^n| \leq C(\Delta x + \Delta t)$$

où  $c$  ne dépend que des bornes des dérivées de  $c$ .

**Proposition 3.2 (3.2[11])** *1-Le schéma (SDA) est stable au sens de Von Neuman sous la condition de CFL :  $|u| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ .*

*2-ce schéma est  $L^\infty$  stable sous la condition de CFL  $|u| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ .*

*3- ce schéma est  $L^2$  stable sous la condition de CFL  $|u| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ .*

*on a même mieux, pour toute donnée  $c_0 \in L^2(\mathbb{R})$  et pour tout  $N > 0$*

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} (c_i^{N+1})^2 \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} (c_i^0)^2$$

**Preuve.** on suppose que  $u > 0$ , la démonstration dans le cas  $u < 0$  est analogue, 1-on vérifie que  $\alpha_p = 1 - u \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 - e^{ip\Delta x})$ .

Par conséquent,  $|\alpha_p| \leq 1$  pour tout  $p$  si la condition de CFL est satisfaite

2-stabilité  $L^\infty$ . on récrit le schéma sous la forme :

$$c_i^{n+1} = (1 - u \frac{\Delta t}{\Delta x}) c_i^n + u \frac{\Delta t}{\Delta x} c_{i-1}^n$$

on voit alors que sous la condition de CFL  $u \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ ,

$c_i^{n+1}$  est un barycentre à coefficients positifs des points  $c_i^n, c_{i-1}^n$  et par suite

$$\inf_{i \in \mathbb{Z}} (c_i^n) \leq c_i^{n+1} \leq \sup_{i \in \mathbb{Z}} (c_i^n), \forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{Z}.$$

3-stabilité  $L^2$ , L'estimation  $L^2$  de la solution du problème discret s'obtient comme celle du problème continu. on multiplie le schéma par  $c_i^n$  et on somme sur les indices  $i$  et  $n$ . l'estimation  $L^2$  s'obtient alors en effectuant des intégrations par parties discrètes. on remarque que :

$$2 \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} (c_i^{n+1} - c_i^n) c_i^n = - \sum_{i \in \mathbb{Z}} (c_i^0)^2 + \sum_{i \in \mathbb{Z}} (c_i^{N+1})^2 - \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} (c_i^{n+1} - c_i^n)^2$$

et

$$2 \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} (c_i^n - c_{i-1}^n) c_i^n = 2 \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} (c_i^n - c_{i-1}^n)^2$$

on trouve alors utilisant le schéma :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} (c_i^{N+1})^2 - \sum_{i \in \mathbb{Z}} (c_i^0)^2 = u \frac{\Delta t}{\Delta x} (u \frac{\Delta t}{\Delta x} - 1) \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} (c_i^n - c_{i-1}^n)^2 \leq 0.$$

sous la condition de CFL  $u \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$  ■

■

### 3.3.2 cas où la vitesse du vent est variable :

**L'équation de transport non conservative :**

On s'intéresse maintenant à trouver une solution approchée au problème suivant :

$$(3.22) \quad \begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t}(x, t) + u(x, t) \frac{\partial c}{\partial x}(x, t) = 0, & \forall x \in ]a, b[ , \forall t > 0. \\ c(x, 0) = c_0(x) & \forall x \in ]a, b[ \end{cases}$$

Afin de construire une approximation du problème (3.22), on se donne deux nombres réels positifs  $\tau$  et  $h$  et on définit :

$$\begin{aligned} x_i &= ih, \quad i \in \mathbb{Z}, \\ t^n &= n\tau, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

On outre, on désigne pour  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , par  $c_i^n$  l'approximation de  $c(x_i, t^n)$  donnée par le schéma :

$$\begin{cases} \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\tau} + (u_i^n)^+ \frac{c_i^n - c_{i-1}^n}{h} - (u_i^n)^- \frac{c_{i+1}^n - c_i^n}{h} = 0 & i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \\ c_i^0 = c_0(x_i) & i \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (3.23)$$

ou

$$\begin{aligned} u_i^n &= u(x_i, t^n), \\ d^+ &= \max(d, 0) = \frac{1}{2}(d + |d|), \\ d^- &= -\min(d, 0) = \frac{1}{2}(|d| - d). \end{aligned}$$

Il est clair que le schéma (3.23) est explicite. En effet, on peut écrire en notant  $\lambda = \frac{\tau}{h}$  :

$$c_i^{n+1} = c_i^n - \lambda(u_i^n)^+(c_i^n - c_{i-1}^n) + \lambda(u_i^n)^-(c_{i+1}^n - c_i^n).$$

**Théorème 3.1 (3.1[6])** *Le schéma (3.23) est consistant à l'ordre un en espace et en temps.*

**Preuve.** On définit l'erreur de troncature du schéma (3.23) par :

$$\varepsilon_i^{n+1} = \frac{c(x_i, t^{n+1}) - c(x_i, t^n)}{\tau} + (u_i^n)^+ \frac{c(x_i, t^n) - c(x_{i-1}, t^n)}{h} - (u_i^n)^- \frac{c(x_{i+1}, t^n) - c(x_i, t^n)}{h}.$$

on montre alors, en supposant que la fonction  $c$  est de classe  $C^2$ , que

$$|\varepsilon_i^{n+1}| \leq C(h + \tau).$$

Nous nous intéressons maintenant à la stabilité et la monotonie du schéma (3.23). ■

**Théorème 3.2 (3.2[6])** Soit  $N > 0$ . On suppose que

$$\sup_{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} |u(x,t)| \frac{\tau}{h} \leq 1. \quad (3.24)$$

Alors on a l'inégalité :

$$\sup_{0 < n \leq N} |c_i^n| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |c_0(x)| \text{ pour tout } i \in \mathbb{Z}. \quad (3.25)$$

De plus si on suppose la fonction  $c_0$  non négative, on a

$$c_i^n \geq 0 \quad i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}. \quad (3.26)$$

**Preuve.** Fixons  $n \in \{0, \dots, N\}$  et soit  $j \in \mathbb{Z}$ . on a :

$$\begin{aligned} c_i^{n+1} &= c_i^n - \lambda(u_i^n)^+(c_i^n - c_{i-1}^n) + \lambda(u_i^n)^-(c_{i+1}^n - c_i^n) \\ &= (1 - \lambda((u_i^n)^+ + (u_i^n)^-))c_i^n - \lambda((u_i^n)^+c_{i-1}^n + (u_i^n)^-c_{i+1}^n) \\ &= (1 - \lambda |u_i^n|)c_i^n + \lambda((u_i^n)^+c_{i-1}^n + (u_i^n)^-c_{i+1}^n) \end{aligned}$$

Donc par l'hypothèse (3.24) :

$$|c_i^{n+1}| \leq (1 - \lambda |u_i^n|) \sup_{i \in \mathbb{Z}} |c_i^n| + \lambda |u_i^n| \sup_{i \in \mathbb{Z}} |c_i^n|.$$

On en déduit que pour tout  $j \in \mathbb{Z}$  :

$$\begin{aligned} |c_i^{n+1}| &\leq \sup_{i \in \mathbb{Z}} |c_i^n| \\ &\leq \sup_{i \in \mathbb{Z}} |c_i^{n-1}| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |c_0(x)|. \end{aligned}$$

L'inégalité (3.25) est ainsi démontré.

Supposons maintenant  $c_0 \geq 0$  et raisonnons par récurrence sur  $n$ . supposons que  $c_i^n \geq 0$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ . L'égalité

$$c_i^{n+1} = (1 - \lambda |u_i^n|)c_i^n + \lambda((u_i^n)^+c_{i-1}^n + (u_i^n)^-c_{i+1}^n),$$

et l'hypothèse (3.24) impliquent  $c_i^{n+1} \geq 0$ . ■

**Remarque 3.2 (3.3)** la condition (3.24) est donc une condition de stabilité appelée

condition de Courant-Friedrichs-Levy ou condition CFL. Elle exprime le fait que la vitesse de propagation numérique doit être supérieure ou égale à la vitesse de propagation physique.

Nous pouvons maintenant montrer la convergence de ce schéma.

**Théorème 3.3** *on suppose que la solution  $c$  du problème (3.23) est dans  $C_b^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  et que la condition CFL (3.24) est satisfaite. alors il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  et de  $\tau$  telle que :*

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}, 0 < n \leq N} |c(x_i, t_n) - c_i^n| \leq C(h + \tau)$$

**Preuve.** *c'est une conséquence du théorèmes 3.1 et 3.2.*

Notons  $e_i^n = c(x_i, t_n) - c_i^n$  pour  $i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ . on a en utilisant la définition de l'erreur de troncature :

$$e_i^{n+1} = \frac{e_i^{n+1} - e_i^n}{\tau} + (u_i^n)^+ \frac{e_i^n - e_{i-1}^n}{h} - (u_i^n)^- \frac{e_{i+1}^n - e_i^n}{h}.$$

l'utilisation du théorème 3.1 et de l'inégalité (3.25) permet de conclure.

■

### 3.4 présentation d'un schéma numérique pour l'équation de transport à vitesse variable :

nous proposons dans la suite le schéma de Lax-Friedrichs qui est un schéma centré auquel on rajouté un terme de stabilisation pour simplifier l'écriture de ce schéma , nous

noterons  $g_i^n = u_i^n c_i^n$  :

$$\frac{2c_i^{n+1} - c_{i+1}^n - c_{i-1}^n}{2\Delta t} + \frac{1}{2\Delta x}(g_{i+1}^n - g_{i-1}^n) = 0 \quad \text{pour } n = 0, \dots, N, i \in \mathbb{Z}.$$

avec la donnée initiale

$$c_i^0 = c_0(x_i)$$

le schéma se réécrit sous forme explicite comme suit :

$$c_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i+1}^n\right) c_{i+1}^n + \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i-1}^n\right) c_{i-1}^n \right] \quad \text{pour } n = 0, \dots, N, i \in \mathbb{Z}.$$

on verra dans la suite que ce schéma est conditionnellement convergent .

**Proposition 3.3** *le schéma de Lax-friedrichs est consistant avec l'équation de transport (222), précis à l'ordre 1 en espace est en temps pour un rapport de CFL  $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$  fixé.*

**Preuve.** supposons que  $c$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ , également pour  $g$ , on remarque en effectuant des développements de Taylor limités de  $c$  et  $g$  au voisinage du point  $(x_i, t_n)$  que :

$$R_i^n = \frac{\partial c}{\partial t}(x_i, t_n) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_i, t_n) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial t^2}(x_i, t_n) - \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_i, t_n)$$

d'où  $|R_i^n| \leq C \left( \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} + \Delta t \right)$ . où  $C$  ne dépend que des bornes des dérivées de  $c$  et  $g$ . ■

**Proposition 3.4** *le schéma de Lax-Friedrichs est stable au sens de Von Neuman sous la condition de CFL  $|u_i^n| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ .*

*il est  $L^\infty$ -stable sous la condition de CFL  $|u_i^n| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ .*

## 3.5 L'équation de transport-diffusion

une approximation en *différences finis* est proposée pour donner une solution numérique à ce problème.

*definition :*

En analyse numérique , la methode en différence fini est une technique courante de recherche de solutions approchées d ' equation aux dérivées partielles qui consiste

à résoudre un système de relation (schéma numérique) liant les valeurs inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres.

En apparence, cette méthode apparaît comme étant la plus simple à mettre en œuvre car elle procède en deux étapes, d'une part la discrétisation par différences finies des opérateurs de dérivations/ différentiations, d'autre part la convergence du schéma numérique ainsi obtenu lorsque la distance entre les points diminue.

*Approximation des opérateurs par formules de Taylor*

Une discrétisation des opérateurs différentiels (dérivées premières, dérivées secondes, partielles ou non ect...) peut être obtenue par la formule de Taylor.

nota :

la formule de Taylor-Yong est préférable dans son utilisation simple, la formulation de Taylor avec reste intégral de Laplace permet de mesurer les erreurs.

*exemple :*

en un point  $x$  et pour une valeur  $h$  du pas de discrétisation tels que  $u \in C^3$  sur l'intervalle  $[x - h, x + h]$

$$u(x + h) = u(x) + \sum_{n=1}^3 \frac{h^n}{n!} u^{(n)}(x) + h^3 \xi_1(x, h) \quad (1)$$

$$u(x - h) = u(x) + \sum_{n=1}^3 \frac{(-h)^n}{n!} u^{(n)}(x) + h^3 \xi_2(x, h) \quad (2)$$

ou les 2 fonctions  $\xi_i(x, h)$  convergent vers 0 avec  $h$ . par conséquent

$$\frac{u(x+h)-u(x)}{h} = u'(x) + \frac{h}{2} u''(x) + \frac{h^2}{3!} u^{(3)}(x) + h^2 \xi_1(x, h)$$

$$\frac{u(x-h)-u(x)}{h} = -u'(x) + \frac{h}{2} u''(x) - \frac{h^2}{3!} u^{(3)}(x) + h^2 \xi_2(x, h)$$

correspondent à deux approximations de  $u'(x)$  du 1<sup>ère</sup> ordre en  $h$ .

en soustrayant les développements précédents. on obtient :

$$\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h} = u'(x) + \frac{h^2}{3!} u^{(3)}(x) + h^2 \xi_3(x, h)$$

qui est une approximation de  $u'(x)$  du 2<sup>ème</sup> ordre en  $h$ .

# Chapitre 4

## Approximations Numériques par La méthode des volumes finis

### 4.1 Introduction

La méthode des Volumes Finis consiste à intégrer, sur des volumes élémentaires, les équations écrites sous forme intégrale. C'est une méthode particulièrement bien adaptée à la discrétisation

spatiale des lois de conservation, contrairement aux Eléments Finis, et est ainsi très utilisée en mécanique des fluides.

Sa mise en oeuvre est simple si les volumes élémentaires ou "volumes de contrôle" sont des rectangles en  $2D$  ou des parallélépipèdes en  $3D$ . Cependant, la méthode des Volumes Finis permet d'utiliser des volumes de forme quelconque et donc de traiter des géométries complexes, contrairement aux Différences Finies

On s'intéresse dans ce travail à des techniques d'analyse numérique appliquée aux équations aux dérivées partielles. Spécialement aux techniques volumes finis, différences finies appliquées à notre problème dans les deux cas.

## 4.2 Schéma Volumes finis sur maillages admissibles

On définit tout d'abord un maillage VF admissible (voir [35]).

**Définition (Maillage admissible).** Soit  $\Omega$  un ouvert polygonal borné de  $\mathbb{R}^2$ .

Un maillage  $\tau$  admissible de  $\Omega$  au sens des volumes finis est donné par :

1. un ensemble  $M$  d'ouverts polygonaux convexes disjoints 2 à 2, appelés volumes de contrôle  $K$ , tels

que  $\overline{\cup_k M} = \Omega$ . On note  $\delta M$  l'ensemble des bords de volume de contrôle de  $M$  inclus dans  $\delta \Omega$  qui sont

considérés comme des volumes de contrôle dégénérés.

2. Pour tous les volumes de contrôle voisins  $K$  et  $L$ , on suppose que  $\delta K \setminus \delta L$  est un côté de chaque

volume de contrôle, et il est appelé arête  $\sigma$  du maillage  $T$ , notée  $\sigma = k/l$ . On note  $\varepsilon$  l'ensemble de

ces arêtes

3. A chaque volume de contrôle  $K \in M$ , on associe un point  $x_k \in \overline{K}$  et à chaque volume de contrôle du

bord  $K \in \delta M$ , on associe un point  $x_{\sigma} \in \sigma$  tel que  $x_k, x_{\sigma}$  soit un point de la maille du bord  $K$ . On impose

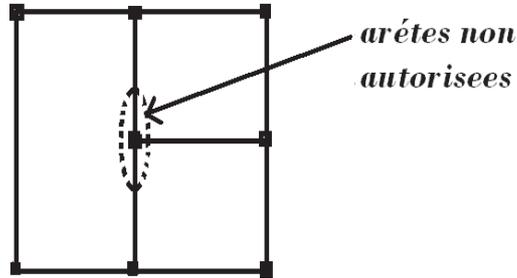
pour  $\sigma = k/l$  que la ligne joignant  $x_k$  à  $x_l$  est orthogonale à l'arête  $\sigma = k/l$  (figure 4.2) et pour

$\sigma \in \delta \Omega \cap \overline{K}$  que la ligne joignant  $x_k$  à  $x_{\sigma}$  est orthogonale à l'arête  $\sigma$ .

.

Notations :

Pour un volume de contrôle  $K \in M$ , on définit :

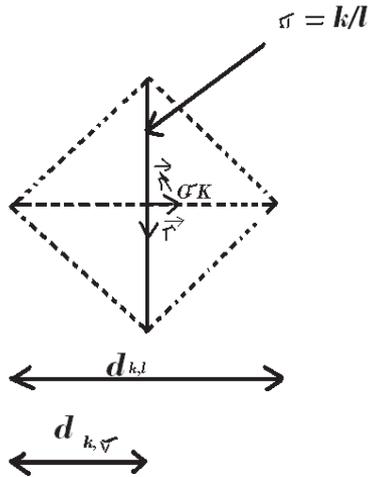


- $m_k$  la mesure du volume de contrôle  $K$ ,
- $\varepsilon_k$  l'ensemble des arêtes de  $K \in M$ ,
- $\eta_k$  la normale extérieure à  $K$ ,
- $d_k$  le diamètre de  $K$ .
- $m_\sigma$  la longueur de l'arête  $\sigma$ ,  $d_{k,\sigma}$  ; la distance entre  $x_k$  et  $\sigma$ ,  $d_{k,\sigma} = d(x_k; \sigma)$ .
- $\eta_{\sigma k}$  la normale à  $\sigma$  sortant de  $K$ ,
- $\tau$  la tangente à  $\sigma$ .

La méthode des volumes finis associe, à chaque volume de contrôle  $K \in M$ , une inconnue  $u_K$  et à chaque

$\sigma \in \delta M$ , une inconnue  $u_\sigma$ , où  $u_k$  est une "bonne" approximation de  $u(x_k)$ .

Remarque 1 : Pour un maillage admissible,  $d_{k,l} = d_{k,\sigma} + d_{l,\sigma}$



## 4.3 Méthode Mixte des Volumes Finis-Différences Finies

### 4.3.1 Cas où la vitesse du vent est constante :

On considère le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial c}{\partial t}(x, t) + u \frac{\partial c}{\partial x}(x, t) = 0, & x \in [0, 1], t > 0. \\ c(x, 0) = c_0(x) & x \in [0, 1] \\ c(0, t) = g_0(t) & t \in [0, T] \\ c(1, t) = g_1(t) & t \in [0, T] \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où la solution faible  $c(x, t)$  est définie sur  $[0, 1] \times [0, T]$ .

On considère une subdivision  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de  $[0, 1]$  et on note  $x_{i+1/2} = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$ .

On définit ensuite les volumes de contrôle  $K_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  avec  $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$  sa

largeur. La réunion des volumes  $K_i$  est  $[0, 1]$ .

De même, on partitionne  $[0, T]$  en intervalles  $[t_n, t_{n+1}]$  dont la réunion constitue  $[0, T]$ .

On pose  $t_n = n\Delta t$ ,  $n \geq 0$  entier et  $\Delta t > 0$ .

On fait une discrétisation par la méthode d'Euler explicite en  $t$  des différences finies

$$\frac{\partial c(x, t_n)}{\partial t} \simeq \frac{c(x, t_{n+1}) - c(x, t_n)}{\Delta t} + R_1(\Delta t)$$

où

$$R_1(\Delta t) \leq c_1 \Delta t$$

A l'instant  $t_n$  l'équation (4.1) sera

$$\frac{\partial c(x, t_n)}{\partial t} + u \frac{\partial c(x, t_n)}{\partial x} = 0 \quad x \in [0, 1]$$

qu'on l'approxime par

$$\frac{c(x, t_{n+1}) - c(x, t_n)}{\Delta t} + R_1(\Delta t) + u \frac{\partial c(x, t_n)}{\partial x} = 0, \quad x \in [0, 1]$$

On intègre l'équation (4.1) sur  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  afin d'obtenir

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\Delta t} \int_{K_i} c(x, t_{n+1}) - c(x, t_n) dx \right) + \int_{K_i} R_1(\Delta t) dx + u(c(x_{i+1/2}, t_n) - c(x_{i-1/2}, t_n)) = 0 \\ \Rightarrow & \left( \frac{1}{h_i \Delta t} \int_{K_i} c(x, t_{n+1}) - c(x, t_n) dx \right) + \frac{1}{h_i} \int_{K_i} R_1(\Delta t) dx + \frac{1}{h_i} u(c(x_{i+1/2}, t_n) - c(x_{i-1/2}, t_n)) = 0 \\ \Rightarrow & \left( \frac{1}{h_i \Delta t} \int_{K_i} c(x, t_{n+1}) - c(x, t_n) dx \right) + \frac{1}{h_i} u(c(x_{i+1/2}, t_n) - c(x_{i-1/2}, t_n)) = -R_1(\Delta t) \end{aligned}$$

on pose

$$c_i(s) = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} c(x, s) dx$$

la valeur moyenne de  $c$  sur  $K_i$

donc on aura :

$$\frac{1}{\Delta t}(c_i(t_{n+1}) - c_i(t_n)) + \frac{1}{h_i}u(c(x_{i+1/2}, t_n) - c(x_{i-1/2}, t_n)) = -R_1(\Delta t) \quad (4.2)$$

on fait l'approche suivant :

$$c(x_{i+1/2}, t_n) - c(x_{i-1/2}, t_n) \simeq h_i \frac{c(x_i, t_n) - c(x_{i-1}, t_n)}{h_{i-1/2}} + h_i R_2(h_{i-1/2})$$

où

$$R_2(h_{i-1/2}) \leq c_2 h_{i-1/2}$$

et on remplace dans (4.2), alors

$$\frac{1}{\Delta t}(c_i(t_{n+1}) - c_i(t_n)) + \frac{1}{h_{i-1/2}}u(c(x_i, t_n) - c(x_{i-1}, t_n)) = -uR_2(h_{i-1/2}) - R_1(\Delta t) \quad (4.3)$$

Supposons  $x_i$  le centre de  $K_i$  on a

$$|c_i(t_n) - c(x_i, t_n)| \leq ch^2$$

et on considère une suite  $(h_i)_i$  de pas de discrétisation telle que  $h_i \rightarrow 0$  quand  $i \rightarrow \infty$ . qui nous donne  $-uR_2(h_{i-1/2}) - R_1(\Delta t) \rightarrow 0$

alors on obtient une approximation par des valeurs moyennes de  $c$  dans chaque volume de contrôle  $K_i$  à l'instant  $t_n$ . D'où

$$\frac{1}{\Delta t}(c_i(t_{n+1}) - c_i(t_n)) + \frac{1}{h_{i-1/2}}u(c_i(t_n) - c_{i-1}(t_n)) = 0 \quad (4.4)$$

On pose

$$c_i(t_n) = c_i^n,$$

donc on obtient une approximation

$$\frac{1}{\Delta t}(c_i^{n+1} - c_i^n) + \frac{1}{h_{i-1/2}}u(c_i^n - c_{i-1}^n) = 0 \quad (4.5)$$

Le schéma numérique explicite est

$$(c_i^{n+1} - c_i^n) + \lambda_i(c_i^n - c_{i-1}^n) = 0 \quad i = 1, \dots, N \text{ et } n = 0, \dots, M \quad (4.6)$$

où

$$\lambda_i = \frac{\Delta t}{h_{i-1/2}}u \quad i = 1, \dots, N$$

avec des conditions initiales et aux limites

$$\left\{ \begin{array}{ll} c_0^n = c_0(t_n) & n = 0, \dots, M \\ c_N^n = g_1(t_n) & n = 0, \dots, M \\ c_i^0 = g_0(x_i) & i = 1, \dots, N \end{array} \right.$$

**Théorème 4.1** (*Stabilité*) On a

$$|c_i^{n+1}| \leq Cm$$

où  $C_i^{n+1}$  vérifie

$$c_i^{n+1} - c_i^n + \lambda_i(c_i^n - c_{i-1}^n) = 0, \quad i = 1, \dots, N \text{ et } n = 0, \dots, M.$$

**Preuve.** On a

$$c_i^{n+1} - c_i^n + \lambda_i(c_i^n - c_{i-1}^n) = 0, \quad i = 1, \dots, N \text{ et } n = 0, \dots, M.$$

$$\Rightarrow c_i^{n+1} = (1 - \lambda_i)c_i^n + \lambda_i c_{i-1}^n, \quad i = 1, \dots, N \text{ et } n = 0, \dots, M.$$

On choisit  $\Delta t$  en fonction de  $h_{i-1/2}$  de telle sorte que  $\lambda_i < 1$ , pour avoir une combinaison convexe.

Soit  $|c_i^0| < Cm$ . On démontre par récurrence que

$$|c_i^n| \leq Cm$$

Donc

$$|c_i^{n+1}| \leq (1 - \lambda_i) |c_i^n| + \lambda_i |c_{i-1}^n| \leq (1 - \lambda_i) Cm + \lambda_i Cm \leq Cm.$$

■

**Théorème 4.2** (*Estimation d'erreur*) *Posons*

$$e_i^n = (c_i^n - c(x_i, t_n)) \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \quad \text{et } n = 0, \dots, M$$

et

$$e_0^n = e_{N+1}^n = e_i^0 = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \quad \text{et } n = 0, \dots, M.$$

Alors

$$|e_i^n| \leq c_2 M u (h)^2 + c_1 \frac{hT}{u}$$

**Preuve.** Posons

$$e_i^n = (c_i^n - c(x_i, t_n)) \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \quad \text{et } n = 0, \dots, M$$

et

$$e_0^n = e_{N+1}^n = e_i^0 = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \quad \text{et } n = 0, \dots, M,$$

et

$$\frac{1}{\Delta t} (c_i(t_{n+1}) - c_i(t_n)) + \frac{1}{h_{i-1/2}} u (c(x_i, t_n) - c(x_{i-1}, t_n)) = -uR_2(h_{i-1/2}) - R_1(\Delta t) \quad (*)$$

$$\frac{1}{\Delta t}(c_i^{n+1} - c_i^n) + \frac{u}{h_{i-1/2}}(c_i^n - c_{i-1}^n) = 0 \quad (**)$$

(\*\*)-(\*) on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{u}{h_{i-1/2}}(e_i^n - e_{i-1}^n) = uR_2(h_{i-1/2}) + R_1(\Delta t) \\ \Rightarrow & (e_i^n - e_{i-1}^n) = h_{i-1/2}R_2(h_{i-1/2}) + \frac{h_{i-1/2}}{u}R_1(\Delta t) \\ \Rightarrow & |(e_i^n - e_{i-1}^n)| \leq c_2(h_{i-1/2})^2 + c_1 \frac{h_{i-1/2}\Delta t}{u} \\ \Rightarrow & |e_i^n| - |e_{i-1}^n| \leq |(e_i^n - e_{i-1}^n)| \leq c_2(h_{i-1/2})^2 + c_1 \frac{h_{i-1/2}\Delta t}{u} \\ \Rightarrow & |e_i^n| \leq |e_{i-1}^n| + c_2(h_{i-1/2})^2 + c_1 \frac{h_{i-1/2}\Delta t}{u} \\ \Rightarrow & |e_i^n| \leq |e_{i-1}^0| + n \left( c_2(h_{i-1/2})^2 + c_1 \frac{h_{i-1/2}\Delta t}{u} \right) \\ \Rightarrow & |e_i^n| \leq |e_{i-1}^0| + M \left( c_2(h)^2 + c_1 \frac{h_{i-1/2}\Delta t}{u} \right) \end{aligned}$$

Alors, il en résulte

$$|e_i^n| \leq c_2M(h)^2 + c_1 \frac{hT}{u}$$

■

### 4.3.2 Cas où la vitesse du vent n'est pas constante :

On considère le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial c}{\partial t}(x, t) + u(x, t) \frac{\partial c}{\partial x}(x, t) = 0, & x \in [0, 1], t > 0. \\ c(x, 0) = c_0(x) & x \in [0, 1] \\ c(0, t) = g_0(t) & t \in [0, T] \\ c(1, t) = g_1(t) & t \in [0, T] \end{array} \right.$$

où la solution faible  $c(x, t)$  est définie sur  $[0, 1] \times [0, T]$ .

On considère une subdivision  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de  $[0, 1]$  et on note  $x_{i+1/2} = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$ .

On définit ensuite les volumes de contrôle  $K_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  avec  $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$  sa largeur. La réunion des volumes  $K_i$  est  $[0, 1]$ .

De même, on partitionne  $[0, T]$  en intervalles  $[t_n, t_{n+1}]$  dont la réunion constitue  $[0, T]$ .

On pose  $t_n = n\Delta t$ ,  $n \geq 0$  entier et  $\Delta t > 0$ .

On fait une discrétisation par la méthode d'Euler explicite en  $t$  des différences finies

$$\frac{\partial c(x, t_n)}{\partial t} \simeq \frac{c(x, t_{n+1}) - c(x, t_n)}{\Delta t} + R_1(\Delta t)$$

où

$$R_1(\Delta t) \leq c_1 \Delta t$$

A l'instant  $t_n$  l'équation (4.1) sera

$$\frac{\partial c(x, t_n)}{\partial t} + u(x, t_n) \frac{\partial c(x, t_n)}{\partial x} = 0 \quad x \in [0, 1]$$

qu'on l'approxime par

$$\frac{c(x, t_{n+1}) - c(x, t_n)}{\Delta t} + R_1(\Delta t) + u(x, t_n) \frac{\partial c(x, t_n)}{\partial x} = 0, \quad x \in [0, 1]$$

On intègre l'équation (4.1) sur  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  afin d'obtenir

$$\left( \frac{1}{h_i \Delta t} \int_{K_i} c(x, t_{n+1}) - c(x, t_n) dx \right) + \frac{1}{h_i} \int_{K_i} R_1(\Delta t) dx + \frac{1}{h_i} \int_{K_i} u(x, t_n) \frac{\partial c(x, t_n)}{\partial x} dx = 0 \quad (4.7)$$

on suppose qu'il exist une constante  $L$  et une fonction  $\xi(t)$  telque :

$$\frac{1}{h_i} \int_{K_i} u(x, s) \frac{\partial c(x, s)}{\partial x} dx = \frac{1}{h_i} L \xi(s) \int_{K_i} \frac{\partial c(x, s)}{\partial x} dx$$

donc(4.7) on peut recire :

$$\left(\frac{1}{h_i \Delta t} \int_{K_i} c(x, t_{n+1}) - c(x, t_n) dx\right) + \frac{L\xi(t_n)}{h_i} \int_{K_i} \frac{\partial c(x, t_n)}{\partial x} dx = -R_1(\Delta t)$$

se qui donne :

$$\frac{1}{\Delta t} (c_i(t_{n+1}) - c_i(t_n)) + \frac{L\xi(t_n)}{h_i} (c(x_{i+1/2}, t_n) - c(x_{i-1/2}, t_n)) = -R_1(\Delta t) \quad (4.8)$$

où

$$c_i(s) = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} c(x, s) dx$$

la valeur moyenne de  $c$  sur  $K_i$

on fait l'approche suivant :

$$c(x_{i+1/2}, t_n) - c(x_{i-1/2}, t_n) \simeq h_i \frac{c(x_i, t_n) - c(x_{i-1}, t_n)}{h_{i-1/2}} + h_i R_2(h_{i-1/2})$$

où

$$R_2(h_{i-1/2}) \leq c_2 h_{i-1/2}$$

et on remplace dans (4.2), alors

$$\frac{1}{\Delta t} (c_i(t_{n+1}) - c_i(t_n)) + \frac{L\xi(t_n)}{h_{i-1/2}} (c(x_i, t_n) - c(x_{i-1}, t_n)) = -L\xi(t_n) R_2(h_{i-1/2}) - R_1(\Delta t) \quad (4.9)$$

Supposons  $x_i$  le centre de  $K_i$  on a

$$|c_i(t_n) - c(x_i, t_n)| \leq ch^2$$

alors on obtient une approximation par des valeurs moyennes de  $c$  dans chaque volume

de contrôle  $K_i$  à l'instant  $t_n$ . D'où

$$\Rightarrow \frac{1}{\Delta t}(c_i(t_{n+1}) - c_i(t_n)) + \frac{L\xi(t_n)}{h_{i-1/2}}(c(x_i, t_n) - c(x_{i-1}, t_n)) = 0 \quad (4.10)$$

On pose

$$c_i(t_n) = c_i^n,$$

donc on obtient une approximation

$$\frac{1}{\Delta t}(c_i^{n+1} - c_i^n) + \frac{L\xi(t_n)}{h_{i-1/2}}(c_i^n - c_{i-1}^n) = 0 \quad (4.1)$$

Le schéma numérique explicite est

$$(c_i^{n+1} - c_i^n) + \lambda_i^n(c_i^n - c_{i-1}^n) = 0 \quad i = 1, \dots, N \text{ et } n = 0, \dots, M \quad (4.6)$$

où

$$\lambda_i^n = \frac{\Delta t L \xi(t_n)}{h_{i-1/2}} \quad i = 1, \dots, N$$

avec des conditions initiales et aux limites

$$\left\{ \begin{array}{ll} c_0^n = c_0(t_n) & n = 0, \dots, M \\ c_N^n = g_1(t_n) & n = 0, \dots, M \\ c_i^0 = g_0(x_i) & i = 1, \dots, N \end{array} \right.$$

**Théorème 4.3** (*Stabilité*) Pour  $\Delta t < \frac{h}{L\vartheta}$ , où  $\vartheta = \min_{t>0}(\xi(t_n))$

on a

$$|c_i^{n+1}| \leq Cm$$

où  $c_i^{n+1}$  vérifie

$$c_i^{n+1} - c_i^n + \lambda_i^n (c_i^n - c_{i-1}^n) = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad \text{et} \quad n = 0, \dots, M.$$

**Preuve.** On a

$$c_i^{n+1} - c_i^n + \lambda_i^n (c_i^n - c_{i-1}^n) = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad \text{et} \quad n = 0, \dots, M.$$

$$\Rightarrow c_i^{n+1} = (1 - \lambda_i^n) c_i^n + \lambda_i^n c_{i-1}^n, \quad i = 1, \dots, N \quad \text{et} \quad n = 0, \dots, M.$$

On choisit  $\Delta t$  en fonction de  $h_{i-1/2}$  de telle sorte que  $\lambda_i^n < 1$ . ( $\frac{\Delta t L \xi(t_n)}{h_{i-1/2}} < 1$ ), pour avoir une combinaison convexe.

Soit  $|c_i^0| < cm$ . On démontre par récurrence que

$$|c_i^n| \leq cm$$

Donc

$$|c_i^{n+1}| \leq (1 - \lambda_i^n) |c_i^n| + \lambda_i^n |c_{i-1}^n| \leq (1 - \lambda_i^n) Cm + \lambda_i^n Cm \leq Cm.$$

■

**Théorème 4.4** (*Estimation d'erreur*) *Posons*

$$e_i^n = (c_i^n - c(x_i, t_n)) \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, N \quad \text{et} \quad n = 0, \dots, M$$

et

$$e_0^n = e_{N+1}^n = e_i^0 = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, N \quad \text{et} \quad n = 0, \dots, M.$$

Alors

$$|e_i^n| \leq c_2 M(h)^2 + c_1 \frac{hT}{L\vartheta}$$

**Preuve.** Posons

$$e_i^n = (c_i^n - c(x_i, t_n)) \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \quad \text{et } n = 0, \dots, M$$

et

$$e_0^n = e_{N+1}^n = e_i^0 = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \quad \text{et } n = 0, \dots, M,$$

et

$$\frac{1}{\Delta t}(c_i(t_{n+1}) - c_i(t_n)) + \frac{L\xi(t_n)}{h_{i-1/2}}(c(x_i, t_n) - c(x_{i-1}, t_n)) = -L\xi(t_n)R_2(h_{i-1/2}) - R_1(\Delta t) \quad (\#)$$

$$\frac{1}{\Delta t}(c_i^{n+1} - c_i^n) + \frac{L\xi(t_n)}{h_{i-1/2}}(c_i^n - c_{i-1}^n) = 0 \quad (\#\#)$$

(\#\#)-(\#) on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{L\xi(t_n)}{h_{i-1/2}}(e_i^n - e_{i-1}^n) = L\xi(t_n)R_2(h_{i-1/2}) + R_1(\Delta t) \\ \Rightarrow & (e_i^n - e_{i-1}^n) = h_{i-1/2}R_2(h_{i-1/2}) + \frac{h_{i-1/2}}{L\xi(t_n)}R_1(\Delta t) \\ \Rightarrow & |(e_i^n - e_{i-1}^n)| \leq c_2(h_{i-1/2})^2 + c_1 \frac{h_{i-1/2}\Delta t}{L\xi(t_n)} \\ \Rightarrow & |e_i^n| - |e_{i-1}^n| \leq |(e_i^n - e_{i-1}^n)| \leq c_2(h_{i-1/2})^2 + c_1 \frac{h_{i-1/2}\Delta t}{L\xi(t_n)} \\ \Rightarrow & |e_i^n| \leq |e_{i-1}^n| + c_2(h_{i-1/2})^2 + c_1 \frac{h_{i-1/2}\Delta t}{L\xi(t_n)} \\ \Rightarrow & |e_i^n| \leq |e_{i-1}^0| + n \left( c_2(h_{i-1/2})^2 + c_1 \frac{h_{i-1/2}\Delta t}{L\xi(t_n)} \right) \\ \Rightarrow & |e_i^n| \leq |e_{i-1}^0| + M \left( c_2(h)^2 + c_1 \frac{h_{i-1/2}\Delta t}{L\xi(t_n)} \right) \end{aligned}$$

Alors, il en résulte

$$|e_i^n| \leq c_2M(h)^2 + c_1 \frac{hT}{L\vartheta}$$

■

Exemple de schéma ( fig 4.3) stable avec  $\lambda < 1$  et schéma( fig 4.4) instable avec  $\lambda > 1$

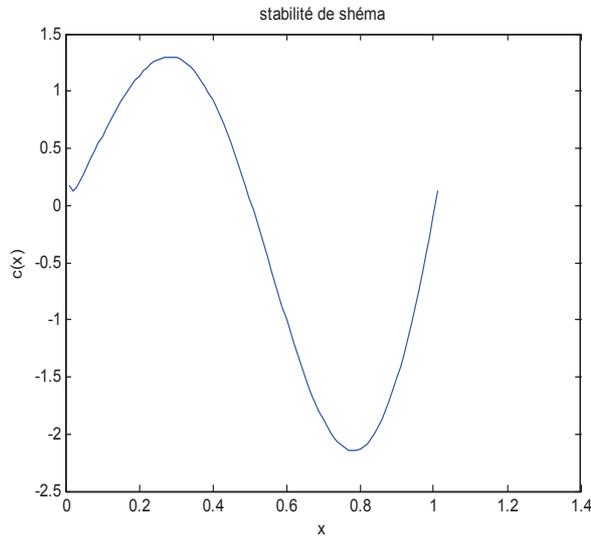


fig 4.3

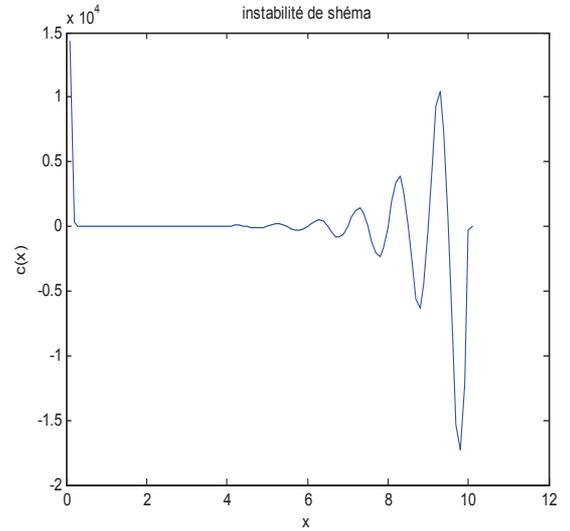


fig 4.4

## Conclusion

La réalisation de ce travail nous a permis de traiter les aspects théoriques,

Une modélisation simple de la propagation d'un nuage de fumée se représente comme un problème de transport dans  $\mathbb{R}$ . On montre l'existence et l'unicité de la solution du problème sans diffusion à l'aide de la méthode des caractéristiques, et numérique du phénomène par deux méthodes, la première méthode c'est la méthode des différences finies qui consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou noeuds du maillage, avec grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul. Mais malheureusement elle est limitée à des géométries simples, difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type Neumann, et la seconde, la méthode de volumes finis qui s'intègre, sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations écrites sous forme de loi de conser-

vation. Elle fournit ainsi de manière naturelle des approximations discrètes conservatives ,et, est particulièrement bien adaptée aux équations de la mécanique des fluides. Sa mise en oeuvre est simple avec des volumes élémentaires rectangles. et qui permet de traiter des géométries complexes avec des volumes de forme quelconque, détermination, plus naturelle des conditions aux limites de type Neumann, mais peu de résultats théoriques de convergence.

Chaque méthode sur notre problème donne une preuve de la stabilité et de la convergence ,et on illustre par des cas tests numériques

# Bibliographie

- [1] **G.Allaire,F.Golse**,*Transport et diffusion* , Edition de l'Ecole polytechnique,2ème édition(2010).
- [2] **J.Bastien,J.Noël Martin**,*Introduction à l'analyse numérique;Application sous Matlab* ,Dunod,Paris(2003).
- [3] **S.Benzoni**,*Introduction aux équations aux dérivées partielles* ,Préparation à l'épreuve de modélisation de l'agrégation(2005).
- [4] **S.Benzoni**,*Calcul différentiel*,Licence de mathématiques(2008).
- [5] **F.Boyer**,*Aspects théoriques et numériques de l'équation de transport*,Master 2ème année,Université Paul Cézanne(2010).
- [6] **F.Boyer**,*Equations différentielles ordinaires;Equations aux dérivées partielles;Analyse théorique et numérique*,Master 1ère année,Université de Provence(2010).
- [7] **F.Boyer**,*Analyse numérique des EDP elliptiques*,Master 2ème année , Aix-Marseille universités(2010).
- [8] **G.Caloz,Grégory vial**,*un modèle de propagation d'un nuage de fumée*,vous pouvez le chercher sur le siteweb :[www.Bretagne.ens-cachan.fr/math/people/Grégory vial](http://www.Bretagne.ens-cachan.fr/math/people/Grégory_vial).(2006).
- [9] **A.De Montigny**,*Application de la méthode des éléments finis aux équations de Saint-Venant* ,Mémoire pour l'obtention du grade de maître ès sciences ,Université Laval (2000).

- [10] **P.Ferreira,S.M.Gallic**,*Equation aux dérivées partielles (2001)*.
- [11] **F.Hubert,J.Hubbard**,*Calcul scientifique ;De la théorie à la pratique ;Volume 2 ;Equations différentielles et équations aux dérivées partielles , Vuibert,Paris(2006)*.
- [12] **B.Lucquin**,*Equations aux dérivées partielles et leurs approximations ; Niveau M1, Ellipses, Paris(2006)*.
- [13] **.M.M.Zerouali**,*Quelques méthodes de résolution des équations de convection-diffusion*,Mémoire pour l'obtention du grade de maître ès sciences ,Université Laval (1997)
- [14] **R. Eymard, T. Gallouet , M. Ghilani and R. Herbin**, Error estimates for the approximate solutions of a nonlinear hyperbolic equation given by some finite volume schemes, I.M.A. Journal of Numer. Anal.18(1998),pp.563-594.
- [15] **R.Eymard, T. Gallouet and R. Herbin**,*Finite Volume Methods, Handbook of Numerical Analysis*.
- [16] **R. Eymard, T. Gallouet and R. Herbin**, Convergence of a finite volume schemes for a nonlinear hyperbolic equation, Proceedings of the Third colloquium on numerical analysis, D. Bainov and V. Covachev éditeurs, Elsevier(1995), pp. 61-70.
- [17] **A.Guesmia , N. Daili**,*EFinite volume approximation of stationary burgers equation , J.Anal.Appl. Vol. 6, 2008, no. 3, 179 - 193*.
- [18] **A.Guesmia , N. Daili**, *Approche numerique de la solution entropique de l'équation de l'evolution de buegers par la méthode desc lignes.general mathematics Vol. 17,2009, no. 2, 99 - 111*.
- [19] **J.P. Vila**, Convergence and error estimate in finite volume schemes for general multidimensional conservation laws, M<sup>2</sup>AN, Vol. 28(1994), pp. 267-285.
- [20] **J. Baranger**. Analyse numérique. Hermann, 1988.
- [21] J. Beuneu. Algorithmes pour le calcul scienti que. Cours de l'Ecole Universitaire d'Ingénieurs de Lille, 1999.
- [22] **J.A. Desideri**. Introduction à l'analyse numérique. INRIA, 1998.

- [23] **E. Hairer.** Méthodes numériques. Cours de l'université de Genève, 2004
- [24] **C. Hirsch.** Numerical computation of internal and external flows, volume I : fundamentals of numerical discretization. John Wiley & Sons, Chichester, New York, 1986.
- [25] **P. Lascaux and R. Theodor.** Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, tomes I et II. Masson, Paris, 1986.
- [26] **V. Legat.** Mathématique et méthodes numériques. Cours de l'université catholique de Louvain, 2004.
- [27] **B. Mohammadi and J.H. Saiaç.** Pratique de la simulation numérique. Dunod, 2003
- [28] **N. Point and J.H. Saiaç.** Equations aux dérivées partielles - mathématiques et méthodes numériques. Cours de l'ESCPI, 2005.
- [29] **J. Reveillon.** Simulation et modélisation numérique. Cours de l'université de Rouen, 2003
- [30] **A. Quarteroni.** Analyse numérique. Cours de l'EPFL, 2003
- [31] **P. Viot.** Méthodes d'analyse numériques. Cours de DEA de Jussieu, 2003
- [32] **R. Cautrès, R. Herbin and F. Hubert,** The Lions domain decomposition algorithm on non matching cell-centered finite volume meshes, Preprint LATP 02/07, IMA Journal of Numerical Analysis, 24, PP. 465-490, 2004.
- [33] **F. Hermeline,** A finite volume method for the approximation of diffusion operators on distorted meshes, Journal of computational Physics, 160, pp. 481-499, 2000.
- [34] **K. Domelevo and P. Omnes,** A finite volume method for the Laplace equation on almost arbitrary two-dimensional grids, M2AN, 39, n 6, pp. 1203-1249, 2005.
- [35] **R. Eymard, T. Gallouët and R. Herbin,** Finite Volume Methods, Handbook of Numerical Analysis, Vol. VII, edited by P.G. Ciarlet and J.L. Lions, North-Holland, 2000.

Résumé :

Le but de cette thèse est d'étudier numériquement par deux méthodes, la méthode de différences finies et la méthode de volumes finis qui s'applique à l'équation d'advection-diffusion, représentée, comme un problème de transport dans  $\mathbb{R}$ .

Une modélisation simple de la propagation d'un nuage de fumée, On montre l'existence et l'unicité de la solution du problème sans diffusion à l'aide de la méthode des caractéristiques.

La méthode des différences finies est tout d'abord appliquée au problème. Ensuite, on l'a traité avec la méthode des volumes finis et on donne une preuve de la stabilité et de la convergence.

L'étude numérique par deux méthodes est illustrée par des cas tests numériques sur Maillage admissible.

Abstract :

The purpose of this thesis is to study numerically by two methods, the method of finite differences and finite volume method that applies to the advection-diffusion equation, represented as a transportation problem in  $\mathbb{R}$ . A simple modeling of the propagation of a cloud of smoke, we show the existence and uniqueness of the solution without diffusion using the method of characteristics. The finite difference method is first applied to the problem. Then he was treated with the finite volume method and we give a proof of the stability and convergence. The numerical study of two methods is illustrated by numerical tests on cases eligible Mesh.

Mots Clefs :

Modélisation mathématique; Equation de Transport; Lois de Conservation.; Différences Finies; Volumes Finis; Approches Algorithmiques; Estimations d'erreur; Vitesse de convergence; Simulations numériques.

**Theme: Approaches digital finite volume of a transport equation.**

## **ABSTRACT**

The purpose of this thesis is to study numerically by two methods, the method of .finite Differences and finite volume method that applies to the advection-diffusion equation, Represented as a transportation problem in  $R$ .

A simple modeling of the propagation of a cloud of smoke, we show the existence and Uniqueness of the solution without diffusion using the method of characteristics.

The finite difference method is first applied to the problem. Then he was treated with the finite volume method and we give a proof of the stability and convergence.

The study by two numerical methods are illustrated by numerical tests on cases eligible Mesh.

Key Words:

Mathematical modeling; Transport Equation; for Conservation Laws; Finite Difference, Finite Volume, Algorithmic approaches, error estimates, convergence speed, numerical simulations

## **Thème : Approches numériques par des volumes finis d'une équation de transport.**

### **Résumé :**

Le but de cette thèse est d'étudier numériquement par deux méthodes, la méthode de Différences finies et la méthode de volumes finis qui s'applique à l'équation d'advection-Diffusion, représentée, comme un problème de transport dans  $\mathbb{R}$ .

Une modélisation simple de la propagation d'un nuage de fumée, On montre l'existence et l'unicité de la solution du problème sans diffusion à l'aide de la méthode des caractéristiques.

La méthode des différences finies est tout d'abord appliquée au problème. Ensuite, on l'a traité avec la méthode des volumes finis et on donne une preuve de la stabilité et de la convergence.

L'étude numérique par deux méthodes est illustrée par des cas tests numériques sur Maillage admissible.

### **Mots Clefs :**

Modélisation mathématique ; Equation de Transport ; Lois de Conservation ;  
Différences Finies ; Volumes Finis ; Approches Algorithmiques ; Estimations d'erreur  
; Vitesse de convergence ; Simulations numériques

## موضوع : نهج الرقمية محدود حجم معادلة النقل

### ملخص

الهدف من هذه الأطروحة هي الدراسة العددية بواسطة طريقتين طريقة الفروق المحدودة و طريقة الحجم المحدود التي تنطبق على معادلة advection-Diffusion التي تمثل مشكلة النقل في R.

النمذجة البسيطة من انتشار سحابة من الدخان تثبت وجود و تفرد في حل المشكلة دون انتشار باستخدام طريقة الخصائص. طبقت أولاً طريقة الفروق المحدودة على هذه المشكلة ثم قمنا بمعالجتها بطريقة الحجم المحدود و نعطي دليلاً على الاستقرار و التقارب.

الدراسة العددية بواسطة طريقتين تتضح من حالات الاختبارات العددية على الشبكة المؤهلة.

### الكلمات الدالة:

والنمذجة الرياضية، معادلة النقل؛ لقوانين الحفظ؛ الفرق محدود، محدود الحجم، والنهج حسابي، وتقديرات الخطأ، وسرعة التقارب، والمحاكاة العددية