

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE  
FACULTE DES SCIENCES EXACTES  
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES



N° d'ordre : .....  
Série : .....

# MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de  
MAGISTRE EN MATHEMATIQUES

THEME

## Synchronisation des Systèmes Dynamiques Chaotiques à Dérivées Fractionnaires

OPTION

EQUATIONS DIFFERENTIELLES ET APPLICATIONS

Présenté par :

**Menacer Tidjani**

Devant le jury :

Président	: M.Denche	Prof	Univ.Constantine
Rapporteur	: N.Hamri	Prof	Univ.Constantine
Examineur	: H.Zeraouia	M.C	Univ.Tébessa
Examineur	: K.Haoum	M.C	Univ.Tébessa

Soutenu le.....

# Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et remerciement envers mon directeur de thèse, Monsieur **N.Hamri**, Professeur à l'université Mentouri de Constantine.

Effectuer ma thèse sous sa direction fut pour moi un grand honneur et un réel plaisir. Ses conseils et ses encouragements ont guidé et stimulé mon travail. Sa rigueur et sa culture scientifique en ont été les modèles. Je remercie profondément Monsieur **M.Denche**, Professeur à l'université Mentouri de Constantine, pour avoir accepté de présider mon jury.

Mes grands remerciements sont adressés aussi à messieurs :

- **H.Zeraouia**, Maître de conférence à l'université de Tébessa

- **K.Haouam**, Maître de conférence à l'université de Tébessa,

D'être membres de jury et ayant un grand honneur de présenter mon thèse devant eux.

Je profite l'occasion pour remercier tout le staff et tous mes collègues de l'institut de mathématiques de l'université de Mentouri de Constantine.

Je ne pourrais jamais oublier le soutien des collègues et le groupe administratif de mon établissement: grand remerciement.

Je suis très sensible en ce moment là à exprimer mes sincères et grands remerciements à tous les membres de ma petite et grande famille et à tous mes amis de leurs soutien et leurs encouragements.

# Table des matières

0.1	Introduction générale . . . . .	10
-----	---------------------------------	----

## I Systèmes Dynamiques Chaotiques à Dérivées Fractionnaires

15

<b>1</b>	<b>Systèmes dynamiques et chaos</b>	<b>16</b>
1.1	Introduction . . . . .	16
1.2	Définitions et notations . . . . .	18
1.2.1	Représentations mathématiques des Systèmes dynamiques . . . . .	18
1.2.2	L'espace des phases . . . . .	19
1.2.3	Systèmes conservatifs et Systèmes dissipatifs . . . . .	19
1.3	Section de Poincaré . . . . .	21
1.4	Points critiques . . . . .	22
1.5	Points limites . . . . .	22
1.6	Attracteurs et bassin d'attraction . . . . .	23
1.6.1	Ensemble invariant : . . . . .	23
1.6.2	Attracteurs . . . . .	23
1.6.3	Les différents types d'attracteurs . . . . .	25
1.7	Etude qualitative des systèmes dynamiques . . . . .	28
1.7.1	Linéarisation des systèmes dynamiques . . . . .	28
1.7.2	Théorème de Hartmann-Grobman . . . . .	29

1.7.3	Classification de Poincaré des points fixes . . . . .	30
1.8	Notion de stabilité . . . . .	31
1.8.1	Stabilité au sens de Lyapunov . . . . .	31
1.8.2	Théorème de la variété centrale . . . . .	34
1.9	La théorie des bifurcations . . . . .	37
1.9.1	Bifurcations en codimension 1 . . . . .	38
1.9.2	Bifurcation locale . . . . .	38
1.9.3	Bifurcation noeud-col . . . . .	38
1.9.4	Bifurcations fourches . . . . .	39
1.9.5	Bifurcations transcritiques . . . . .	41
1.9.6	Bifurcation de Hopf . . . . .	42
1.10	Théorie du chaos . . . . .	43
1.10.1	Caractéristique du chaos . . . . .	43
1.10.2	Détection du chaos . . . . .	46
1.11	Routes vers le chaos . . . . .	51
1.12	Conclusion . . . . .	52
<b>2</b>	<b>Les dérivées fractionnaires</b>	<b>53</b>
2.1	Introduction . . . . .	53
2.2	Les dérivées fractionnaires de Grünwald-Letnikov . . . . .	53
2.2.1	La dérivation d'ordre entier relatif . . . . .	53
2.2.2	Représentation intégrale de ${}_{Gl}D_a^{-p}f(x)$ . . . . .	55
2.2.3	Extention de la dérivation d'ordre entier à l'ordre réel . . . . .	58
2.2.4	Dérivées d'ordre arbitraire : . . . . .	59
2.2.5	Exemples . . . . .	60
2.2.6	Propriétés : . . . . .	62
2.3	Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville . . . . .	62
2.3.1	L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$ . . . . .	62
2.3.2	Dérivée fractionnaire sur intervalle $[a, b]$ . . . . .	64

2.3.3	Généralisation . . . . .	66
2.3.4	Propriétés . . . . .	68
2.3.5	Intégration et dérivation sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}$ . . . . .	69
2.3.6	Exemples . . . . .	70
2.3.7	Lien avec l'approche de Grünwald-Letnikov. . . . .	70
2.4	Dérivées fractionnaires au sens de Caputo . . . . .	70
2.4.1	Introduction . . . . .	70
2.4.2	Dérivée d'une constante . . . . .	73
2.5	Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-liouville . . . . .	74
2.6	Propriétés générales des dérivées fractionnaires . . . . .	75
2.7	Transformées de Laplace des dérivées fractionnaires . . . . .	76
2.7.1	Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville . . . . .	77
2.7.2	Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo . . . . .	78
2.7.3	Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov . . . . .	78
2.8	<b>Interprétation géométrique et physique des dérivées fractionnaires et ses applications</b> . . . . .	79
2.8.1	Introduction . . . . .	79
2.8.2	Interprétation des intégrales fractionnaires à gauche de Riemann-Liouville (Approche de podlubny) . . . . .	80
2.8.3	Intégrale fractionnaire à droite de Riemann-Liouville . . . . .	83
2.8.4	Interprétation physique de l'intégrale de Stieltjes. . . . .	84
2.8.5	L'interprétation physique de l'intégrale fractionnaire . . . . .	85
2.8.6	Interprétation géométrique et physique de dérivée Fractionnaire de Riemann-Liouville . . . . .	85
2.9	<b>Applications des dérivées fractionnaires</b> . . . . .	87

2.9.1	Champs d'application . . . . .	87
2.9.2	Modèles rhéologiques composés . . . . .	91
2.9.3	Spring-Pot et modèles fractionnaires . . . . .	93
2.10	Conclusion . . . . .	97
<b>3</b>	<b>Etude des Systèmes dynamiques Chaotiques d'ordre fractionnaire</b>	<b>98</b>
3.1	Les équations différentielles fractionnaires . . . . .	98
3.1.1	Problème de Cauchy . . . . .	98
3.1.2	Equation différentielle fractionnaire linéaire . . . . .	99
3.1.3	Equation différentielle fractionnaire de forme plus générale . . . . .	99
3.1.4	Solutions numériques des équations différentielles fractionnaires . . . . .	101
3.2	Les Systèmes différentiels d'ordre fractionnaire . . . . .	102
3.2.1	Points d'équilibre et region de stabilité . . . . .	103
3.2.2	Stabilité des Systèmes linéaires autonomes . . . . .	104
3.3	Applications : Etude des systèmes fractionnaires . . . . .	106
3.3.1	Etude du système de Chen fractionnaire . . . . .	106
3.3.2	Etude du système de Lü fractionnaire . . . . .	109
3.3.3	Etude du circuit de Van der Pol-Duffing modifié . . . . .	112
3.3.4	Version fractionnaire du Système . . . . .	116
3.4	Conclusion . . . . .	119
 <b>II Synchronisation des Systèmes Chaotiques à Dérivées Fractionnaires</b>		 <b>120</b>
<b>4</b>	<b>Synchronisation des systèmes chaotiques</b>	<b>121</b>
4.1	Introduction . . . . .	121
4.2	Les systèmes couplés . . . . .	123
4.2.1	Accouplement unidirectionnel . . . . .	124
4.2.2	Méthode d'accouplement par contrôle continu . . . . .	125

4.2.3	Méthode d'accouplement par remplacement des variables . . . . .	125
4.3	La synchronisation . . . . .	126
4.4	Les différents types de Synchronisation . . . . .	126
4.4.1	Synchronisation identique . . . . .	126
4.4.2	Extension de la Synchronisation aux systèmes fractionnaires . . . . .	128
4.4.3	Cas des Systèmes fractionnaires . . . . .	134
4.4.4	La synchronisation généralisée . . . . .	137
4.5	La synchronisation de phase . . . . .	139
4.6	Synchronisation de retard . . . . .	140
4.7	Conclusion . . . . .	141
<b>5</b>	<b>Application des différents types de synchronisation pour des systèmes fractionnaires</b>	<b>142</b>
5.1	Synchronisation identique . . . . .	142
5.1.1	Synchronisation du système de <b>LU</b> par la méthode de Pecora-Carroll	142
5.1.2	Simulation numérique . . . . .	145
5.1.3	Synchronisation du système de <b>Chen</b> par la méthode du contrôle continu	145
5.1.4	Synchronisation du système Van Der Pol (VDPM) par contrôle linéaire continu . . . . .	154
5.2	Synchronisation généralisée . . . . .	160
5.3	Conclusion . . . . .	161
<b>6</b>	<b>Conclusion générale et perspective</b>	<b>166</b>
<b>7</b>	<b>Annexes</b>	<b>168</b>
7.1	Annexe 1 Fonctions utiles . . . . .	168
7.1.1	La fonction Gamma . . . . .	168
7.1.2	La fonction Bêta . . . . .	169

7.1.3	Liens entre la fonction Gamma et la fonction Bêta . . . . .	169
7.1.4	La fonction Mittag-Leffler . . . . .	170
7.1.5	Transformée de Laplace et convolution . . . . .	171
7.2	Annexe 2 Critère de Routh-Hurwitz pour un Système fractionnaire . . .	172



# Table des figures

1-1	Intersection de la trajectoire de l'attracteur de Rössler avec un plan P . . . . .	22
1-2	Les différents types des attracteurs . . . . .	27
1-3	Classification des équilibres dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	31
1-4	Les différents types de stabilités au sens de Lyapunov . . . . .	32
1-5	Les sous-variétés invariantes autour de point d'équilibre -X ,Ws loc. et Wi loc. les sous-variétés stable et instable et WC loc. la sous-variété et centrale	36
1-6	Variation des racines de $f(x, \mu)$ dans <b>a</b> $\mu < 0$ dans <b>b</b> $\mu = 0$ et dans <b>c</b> $\mu > 0$	38
1-7	Diagramme de Bifurcation noeud-col . . . . .	39
1-8	Diagramme de bifurcation Fourche . . . . .	41
1-9	Bifurcation transcritique . . . . .	42
1-10	Sensibilité aux conditions initiales pour des Systèmes chaotiques . . . . .	45
2-1	Les dérivées à droite et à gauche comme opérations sur le "passé" et le "future" de $f(t)$ . . . . .	65
2-2	Différence entre l'approche de Riemann et l'approche de Caputo . . . . .	76
2-3	La "clôture" et ses pejections : $I_0^1 f(t)$ et $I_0^\alpha f(t)$ pour $\alpha = 0.75$ , $f(t) =$ $t + 0.5sint$ , $0 \leq t \leq 10$ . . . . .	81
2-4	Le processus de changement de la forme de base de la barrière pour $I_0^\alpha f(t)$ , $\alpha = 0.75$ , $0 \leq t \leq 10$ . . . . .	82
2-5	Le profil de changement de l'ombre dû au changement de la "barrière" . . . . .	83
2-6	Le processus de changement de la forme de base de la barrière pour $I_{10}^\alpha f(t)$ , $\alpha = 0.75$ , $0 \leq t \leq 10$ . . . . .	84

2-7	Ressort et amortisseur . . . . .	88
2-8	Les trois modèles visco-élastiques linéaires . . . . .	88
2-9	Groupement quelconque . . . . .	91
2-10	Arrangement en parallèles . . . . .	92
2-11	Le spring-pot . . . . .	93
2-12	les trois modèles fractionnaires . . . . .	94
2-13	Plaque rigide sur un demi-espace occupé par un liquide visqueux . . . . .	95
3-1	Région de stabilité pour un système fractionnaire lineaire suivant l'ordre $q$	104
3-2	Système de Chen d'ordre entier et d'ordre fractionnaire . . . . .	107
3-3	Les exposants de Lyapunov du systèmes de Chen fractionnaire suivant la variation de $q$ de :0.81 à 1 . . . . .	109
3-4	L'état du système de $L\ddot{u}$ suivant l'ordre fractionnaire . . . . .	111
3-5	Le circuit (VDP) modifié par l'ajout de résistance (ohms) en parallèle avec l'inductance du circuit original . . . . .	112
3-6	La projection de l'attracteur sur (x-y) pour $\beta = 200, \mu = 0.1, v = 100$ et des différentes valeurs du parmètre $\alpha$ . . . . .	117
3-7	le système ADVP suivant l'ordre de dérivation fractionnaire $q$ . . . . .	118
4-1	Deux pendules couplés . . . . .	123
5-1	Synchronisation du système de $L\ddot{u}$ par la méthode Pécorra-Caroll . . . . .	145
5-2	Synchronisation identique du système de Chen contrôle continu avec les paramètres (35,3,28) et l'ordre $q=0.95$ pour $p_2=-22$ . . . . .	149
5-3	les variables ne sont pas synchronisées pour $p_2=-2$ . . . . .	150
5-4	Synchronisation selon l'ordre $q$ dans le cas du contrôle linéaire . . . . .	151
5-5	Synchronisation du système de Chen avec contrôle non linéaire . . . . .	155
5-6	Synchronisation du circuit ADPV . . . . .	159
5-7	Synchronisation entre Chen et $L\ddot{U}$ avec $k = 5$ et $(q_1, q_2, q_3) = (0.985, 0.99, 0.98)$	162
5-8	synchronisation pour $q=0.95$ . . . . .	163

5-9	Les variables erreur ne sont pas synchronisées pour $k=3$ . . . . .	164
5-10	Synchronisation généralisée entre syst de Chen et syst de Lü pour $q_1 =$ $0.985, q_2 = 0.99$ et $q_3 = 0.98$ . . . . .	165
7-1	Représentation de fonction Gamma sur $\mathbb{R}$ . . . . .	169
7-2	représentation de fonction Mittag-Leffler pour quelques valeurs de $\alpha$ . . .	170

## 0.1 Introduction générale

«*This is an apparent paradox from which, one day, useful consequences will be drawn.*» ce qui se traduit par «C'est un paradoxe apparent à partir duquel, un jour, les conséquences utiles en seront tirées» .

Ces mots sont la réponse de Leibniz à la lettre de L'Hopital dans laquelle on lui posé la question suivante «*Que faire si l'ordre sera de  $1 / 2 ?$*  » .

Plusieurs auteurs considèrent cette lettre datée en 30 septembre 1695[1], comme heure de naissance du calcul fractionnaire. Donc le calcul fractionnaire est un sujet mathématique datant de plus de 300 ans.

Ce sujet peut être considéré comme un vieux roman et encore nouveau sujet.

Il est un vieux sujet, à partir de certaines spéculations de G.W. Leibniz (1695, 1697) et L. Euler (1730), il a été développé jusqu'à nos jours.

Une liste de mathématiciens, qui ont fourni d'importantes contributions jusqu'au milieu de notre siècle, comprend : P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832 – 1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-67), A.K Grünwald (1867-1872), A.V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892-1912), Pincherle S. (1902), G.H Hardy et J.E. Littlewood (1917-1928), H. Weyl (1917), P. Lévy (1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis (1924-1936), A. Zygmund (1935-1945), E.R. Love (1938-1996), A. Erdélyi (1939-1965), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949).

Toutefois, le calcul fractionnaire peut être considéré comme un nouveau sujet, car seulement d'un peu plus de vingt ans, il a fait l'objet de conférences spécialisées à son traitement. Le mérite de la première conférence est attribué à B. Ross qui a organisé cette conférence à l'université de New Haven en juin 1974 sous le titre " Le calcul fractionnaire et ses applications" et il a publié encore la procédure, voir [1]. Pour la première monographie, un autre mérite est attribué à K.B. Oldham et J. Spanier, voir [2], qui ont commencé une collaboration en 1968, ont publié un ouvrage consacré au calcul fraction-

naire en 1974..De nos jours, la liste des textes et procédures consacrés exclusivement ou partiellement au calcul fractionnaire et ses applications contiennent environ une douzaine de titres [1, 12], dont l'encyclopédie traité par Samko, Kilbas et Marichev [5] est la plus importante; En outre, nous rappelons les traités de Davis[13], Erdélyi [14], Gelfand et Shilov [15], Djrbashian [16, 20], Caputo [17], Babenko [18], Gorenflo et Vessella[19], qui contiennent une analyse détaillée de certains aspects mathématiques et/ou physiques des applications du calcul fractionnaire.

Au cours des dernières années un intérêt considérable est attribué aux applications des dérivées fractionnaires (d'ordre non-entier) dans plusieurs domaines .Il a été trouvé dans le champs des interdisciplinaires, beaucoup de systèmes pouvant être décrits par des équations différentielles fractionnaires.

par exemple :

- Les dérivées fractionnaires ont été utilisées largement dans le modèle mathématique du visco-elastique des matières[2, 4].

- Les problèmes électromagnétiques peuvent être décrits en utilisant les équations intégro-différentiels fractionnaires [5, 6].

- Dans la physicochimie, le courant est proportionnel aux dérivées fractionnaires du voltage quand l'interface fractale est mise entre un métal et un milieu ionique [7].

- Dans la théorie du condensateur fractionnaire, si une des électrodes du condensateur a une surface rugueuse, le courant passe à travers lui est proportionnel aux dérivées d'ordre, non- entier de son voltage [8]. Aussi, la mémoire existante dans des dioélectriques utilisés dans les condensateurs est justifiée par la dérivée fractionnaire [9].

- Un autre exemple pour un élément avec modèle d'ordre fractionnaire est le fractance. Le fractance est un circuit électrique avec impédance d'ordre non- entier [14], cet élément a des propriétés qui se trouvent entre la résistance et la capacité; Citant le cas des deux exemples les bien connus de fractances : le fractance de l'arbre [15] et le fractance de la chaîne [16].

- Les échauffements de la conductance comme un processus dynamique peut être modéliser aussi bien par des modèles d'ordre fractionnaires que par des modèles d'ordre entier [18].

- En biologie, il a été déduit que les membranes de cellules d'organisme biologique ont la conductance électrique d'ordre fractionnaire [19] et alors est classé en groupe de modèles d'ordre non- entier.

- En économie, quelques systèmes de la finance peuvent afficher une dynamique d'ordre fractionnaire [22], des exemples sur la dynamique d'ordre fractionnaire peuvent être consultés dans Ref. [23].

- De plus, des applications du calcul fractionnaire ont été rapportées dans plusieurs domaines tels que :

-Le traitement du signal [24], le traitement d'image [25], la commande automatique[26] et robotique [27, 28], ces exemples et beaucoup d'autres échantillons semblables clarifient parfaitement l'importance de considération et analyse de systèmes dynamiques avec les modèles d'ordre fractionnaire.

- Actuellement, on a constaté que quelques systèmes différentiels d'ordre fractionnaire tels que le Circuit de Chua d'ordre fractionnaire[29], le système Duffing d'ordre fractionnaire [30], le modèle de la secousse d'ordre fractionnaire[31], le Système de Chen d'ordre fractionnaire [34], le système de Lü d'ordre fractionnaire [33], le système de Rössler d'ordre fractionnaire [34] .

- Le système d'Arneodo d'ordre fractionnaire [35] et le système de Newton.Leipnik d'ordre fractionnaire [36] peuvent démontrer des comportements chaotiques.

En 1990, Pécora et Carroll ont présenté le concept de "synchronisation du chaos" pour la première fois [42] et ont introduit une méthode pour synchroniser deux systèmes chaotiques identiques avec des conditions initiales différentes [43] .A partir de cette date, la synchronisation des systèmes chaotiques est devenue de plus en plus intéressante aux chercheurs dans des champs différents. Le problème de concevoir un système imitateur du comportement d'un autre système chaotique, est appelé la synchronisation.

Les deux systèmes chaotiques sont généralement appelés respectivement, système maître(drive) et système esclave(slave).

Récemment, la synchronisation de systèmes chaotiques d'ordre fractionnaires commence à attirer l'attention croissante dû à ses applications potentielles dans les communications sécurisées et les processus de contrôle [38]. Durant cette décennie, plusieurs types de synchronisation (synchronisation complète ou identique, généralisée, de la phase, projective) [44, 49] ont été étudiés, et beaucoup de méthodes ont été proposées, mais tous ces types et méthodes sont englobés sous deux modes de synchronisation. Le premier mode repose sur un couplage mutuel entre deux systèmes chaotiques ou plus. Le second est appelé maître-esclave ou couplage unidirectionnel : Son principe est de choisir un système générateur de chaos appelé "émetteur". Celui-ci est décrit par des équations récurrentes et caractérisé par ses variables d'état constituant le vecteur d'état. Quelques composantes de ce vecteur sont transmises à un second système dénommé "récepteur". Dans ce travail on va s'intéresser au deuxième mode, et on va essayer d'étudier tous les types de synchronisation qui le concerne.

L'objet de notre mémoire est d'étudier la synchronisation de quelques systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire par différents types de synchronisation et aussi l'influence de la variation des ordres de dérivation sur la synchronisation, afin d'aborder ce but , on a divisé le mémoire en deux parties.

**La première partie** se compose de trois chapitres, dont le premier est consacré aux notions de base sur les systèmes dynamiques tels que : espace de phases, points d'équilibre avec leurs classification et stabilités, en passant par la théorie de bifurcation et finissant par le chaos et ses caractéristiques avec un peu de détail sur les exposants de Lyapunov, quant au deuxième chapitre et principal dans cette partie ; il est consacré aux dérivées fractionnaires, après une introduction historique, on traite en détail les différents approches de dérivées fractionnaires (les définitions), les liens entre eux, leurs transformation de Laplace et terminant par une interprétation géométrique et leurs applications, on finit cette partie par le dernier chapitre qui présente l'application directe des notions des

chapitres précédents. Après l'introduction par les équations différentielles d'ordre fractionnaire (définition, existence des solutions, application de transformée de Laplace), on étudiera des systèmes chaotiques fractionnaires, le premier est le système de **Chen**, tandis que le deuxième est celui de **Lü**. On termine par le circuit de **Van Der-Plo Duffing** modifié

Ces systèmes sont dissipatifs et non linéaires et possèdent des comportements chaotiques dans leur évolution (à partir de certain ordre de dérivation). On fera une étude qualitative puis une simulation numérique pour bien voir le comportement chaotique de ces systèmes.

**La seconde partie** de ce mémoire présente la synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques à dérivées fractionnaires, cette partie se compose de deux chapitres, dans le premier on introduit la notion de Synchronisation et ces différents types (la synchronisation identique, généralisée, de phase, et finalement la synchronisation de retard.), tous ça après une historique de ce phénomène, tandis que le seconde chapitre est consacré à l'application des différents types de synchronisation sur les modèles chaotiques fractionnaires étudiés dans le troisième chapitre.

A la fin de ce mémoire qui annexé par deux annexes, le premier contient des fonctions utiles telle que fonction de Gamma, Béta, Mittag-Leffler, notions utiles de transformé de Laplace tandis que le deuxième est consacré aux conditions de **Routh-Hurwitz** pour des systèmes fractionnaires- on trouvera une bibliographie utilisée pour cette étude.



**Première partie**

**Systemes Dynamiques Chaotiques à**  
**Dérivées Fractionnaires**

# Chapitre 1

## Systemes dynamiques et chaos

### 1.1 Introduction

Les systemes dynamiques designent couramment la branche de recherche active des mathematiques, à la frontiere de la topologie, de l'analyse, de la geometrie, de la theorie de la mesure et des probabilités, et qui s'efforce d'etudier les propriétés d'un systeme dynamique. La nature de cette étude differe suivant le systeme dynamique étudie, nature qui depend des outils utilisés (analytiques, geometriques ou probabilistes).

Historiquement, les premières questions relevant des systemes dynamiques concernaient la mecanique à une époque où elle était incluse dans l'enseignement des mathematiques. Une des questions majeures et qui a motive la recherche mathematique est le probleme de la stabilite du systeme solaire. Les travaux de **Lagrange** sur le sujet consistent à interpreter l'influence des corps autres que le Soleil sur une planete comme une succession de chocs infinitesimaux : ces travaux retrouvent des echos dans le theoreme KAM (**Kolmogorov - Arnold - Moser**).

Les systemes dynamiques se sont developpes et specialises au cours du **XIXe siecle**. En effet, vers la fin du ce siecle le mathematicien, physicien et philosophe francais **Henri Poincaré** avait déjà mis en évidence le phenomene de sensibilité aux conditions initiales lors de l'étude astronomique du probleme des trois corps.

Toujours au **XIXe siècle**, le mathématicien russe **Alexandre Lyapunov** effectue des recherches sur la stabilité du mouvement. Il introduit l'idée de mesurer l'écart entre deux trajectoires ayant des conditions initiales voisines, lorsque cet écart évolue exponentiellement on parle de sensibilité aux conditions initiales.

Les travaux de Lyapunov, d'abord tombés dans l'oubli, seront plus tard très précieux pour étudier certains aspects de la théorie du chaos.

En 1963 le météorologue **Edward Lorenz** expérimentait une méthode lui permettant de prévoir les phénomènes météorologiques. C'est par pur hasard qu'il observa qu'une modification minime des données initiales pouvait changer de manière considérable ses résultats. Lorenz venait de découvrir le phénomène de sensibilité aux conditions initiales.

Les systèmes répondant à cette propriété seront à partir de 1975 dénommés :

systemes chaotiques. C'est donc au cours des années soixante dix que la théorie du chaos a pris son essor.

Evidemment, les travaux des prédécesseurs de Lorenz ont donc été très importants pour la compréhension du chaos déterministe, mais il faut souligner que ce qui va permettre aux scientifiques une compréhension plus accrue des systèmes chaotiques c'est **l'ordinateur**. En effet, les équations différentielles régissant un système chaotique sont nécessairement non linéaires et, sans ordinateur, leur résolution est en général impossible.

## 1.2 Définitions et notations

Un Système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble des objets en interaction il est défini par un triplet  $(X, T, f)$  constitué de l'espace d'état  $X$ , du domaine temporel  $T$ , et d'une application de transition d'état  $f : X \times T \rightarrow X$  qui permet de définir à partir d'un vecteur de conditions initiales l'état du système à tout instant .

### 1.2.1 Représentations mathématiques des Systèmes dynamiques

Un Système dynamique décrit par une fonction mathématique présente deux types de variables : *dynamiques* et *statiques*, les variables dynamiques sont les quantités fondamentales qui changent avec le temps, les variables statiques encore appelés paramètres du système sont fixes.

- Dans le cas où la composante temps est *continue* le système dynamique est présenté par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\frac{dX}{dt} = f(X, t, p) \quad \text{où } X \in \mathbb{R}^n \text{ et } p \in \mathbb{R}^r \quad (1.1)$$

- Dans le cas où le temps est *discret* le système dynamique est présenté par une application( fonction itérative)

$$X_{k+1} = f(X_k, p), \quad X_k \in \mathbb{R}^n \text{ et } p \in \mathbb{R}^r \quad , k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.2)$$

- Lorsque la variable libre  $t$  apparaît explicitement dans l'expression de  $f$ , le système est dit non-autonome. En général, c'est un inconvénient majeur pour la résolution numérique et il est préférable de s'en affranchir.

- On peut toujours transformer un système non-autonome en système autonome (où  $t$  n'apparaît pas explicitement), en posant :

$$\begin{cases} X_{n+1} & = & t \\ \dot{X}_{n+1} & = & f_{n+1}(X, p) = 1 \end{cases} \quad (1.3)$$

On augmente ainsi la dimension du système d'une unité, mais cela permet de remplacer systématiquement  $t$  dans les équations par  $X_{n+1}$ . Les algorithmes de résolution de systèmes d'équations différentielles vous en remercieront.

### 1.2.2 L'espace des phases

Dès que la dimension  $n$  du système dépasse l'unité, il devient assez difficile de se représenter "mentalement" comment le système évolue. L'outil de base pour y palier est l'espace de phase. On considère chaque composante  $X_i$  de  $X$  comme une coordonnée d'un point dans un espace de dimension  $n$ . L'évolution suivant  $t$  du système se traduit alors par un déplacement du point représentatif dans l'espace de phase, traçant ainsi une trajectoire de phase.

### 1.2.3 Systèmes conservatifs et Systèmes dissipatifs

Chez les physiciens, un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale, par contre un système dissipatif est un système qui dissipe de l'énergie. Donc le premier possède une intégrale première (ou constante) du mouvement, et l'autre possède au moins un terme dépendant de la vitesse. Mais n'oublions pas que les systèmes considérés sont des systèmes déterministes, alors pour préciser cette définition, on arrive à dire qu'un système déterministe est conservatif, si et seulement si la dynamique du système associée à chaque condition initiale  $x_0$  un et un seul état final  $x(t)$ , il faut pour cela qu'il existe une application bijective  $\phi$  de l'espace des phases

$$\begin{aligned} \phi : X \times \mathbb{R} &\rightarrow X \\ (x, t) &\longmapsto \phi_t(x) = \phi(x, t) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Qu'on appelle **flot** et qui possède les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\phi_t(x_0) &= x_0 \\ \phi_{t+s}(x_0) &= \phi_t(\Phi_s(x_0)) \text{ pour tous } t, s \in \mathbb{R}\end{aligned}\tag{1.5}$$

Si le système est dissipatif, le flot n'est pas bijectif et il existe en général un (ou plusieurs) attracteurs dans l'espace des phases du système.

**Exemple 1 cas continu(L'oscillateur de Duffing)**

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = & y \\ \frac{dy}{dt} = & x - x^3 - \delta y + \gamma \cos \varpi t \end{cases}\tag{1.6}$$

Où  $\delta$  ,  $\gamma$  ,  $\varpi$  sont des paramètres physiques réels (variables statiques)

L'espace des phases est :  $\mathbb{R}^2$  , l'espace des paramètres est :  $\mathbb{R}^3$

Ce système est non linéaire, non autonome, il peut être dissipatif ou conservatif (suivant le mouvement avec ou sans frottement).

**Exemple 2 cas discret(l'application de Hénon)**

$$\begin{cases} x_{k+1} = & y_k + 1 - ax_k^2 \\ y_{k+1} = & bx_k \end{cases}\tag{1.7}$$

Où  $a$  ,  $b$  sont des paramètres réels, l'espace des phases est :  $\mathbb{R}^2$ , l'espace des paramètres est :  $\mathbb{R}^2$

## 1.3 Section de Poincaré

Nous l'avons déjà vu lors de l'introduction, Henri Poincaré a apporté une contribution très utile pour l'étude des systèmes chaotiques. Parmi ces contributions on trouve les sections de Poincaré. Faire une section de Poincaré revient à couper la trajectoire dans l'espace des phases, afin d'étudier les intersections de cette trajectoire avec, par exemple en dimension trois, un plan. On passe alors d'un système dynamique à temps continu à un système dynamique à temps discret. Les mathématiciens ont bien sûr démontré que les propriétés du système sont conservées après la réalisation d'une section de Poincaré judicieusement choisie.

### Définition 1.1 :

Soit un système dynamique défini par l'équation suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) , \quad x(0) = x_0 \quad (1.8)$$

avec  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n > 2$ , et soit  $\Omega$  un ensemble de  $\mathbb{R}^2$ , l'intersection du plan  $\Omega$  et la trajectoire du système (1.8) nous permet de définir une fonction  $G$  comme suit

$$\begin{aligned} G : U \subset \Omega &\rightarrow \Omega \\ x(t) &\mapsto \phi(x(t), \tau) \end{aligned}$$

avec  $\tau$  désigne le temps qu'il faut pour que les trajectoires  $x(t)$  démarrent de  $U$  pour arriver à  $\Omega$ . La fonction  $G$  est appelée **la fonction de premier retour**.

### Remarque 1.1 :

Dans les systèmes à temps discret, pour une variable d'état  $x$ , l'application de premier retour consiste plus simplement à associer  $x(t)$  à  $x(t-1)$  :

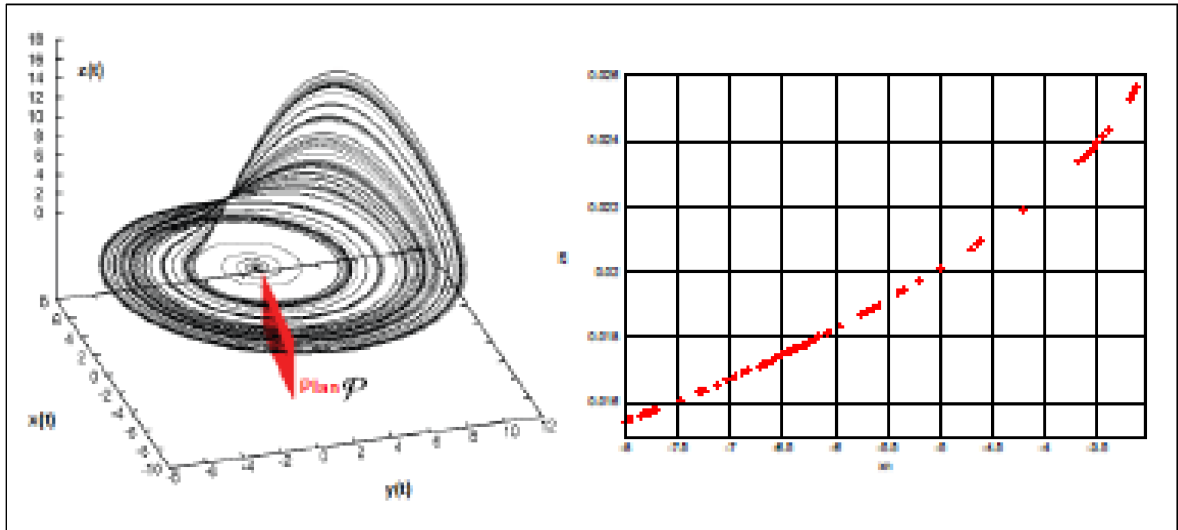


FIG. 1-1 – Intersection de la trajectoire de l'attracteur de Rössler avec un plan P

## 1.4 Points critiques

### Définition 1.2

Un point critique (ou point singulier, ou point stationnaire) de l'équation  $\dot{X} = F(X)$  est un point  $\bar{X}$  de l'espace des phases vérifiant  $F(\bar{X}) = 0$

### Remarque 1.2 :

Par un changement de variable  $z=x-a$  on peut ramener le point à l'origine (0)

## 1.5 Points limites

### Définition 1.3

Un point  $a \in X$  est un point  $\omega$ -limite d'une trajectoire  $x(x_0, t)$  s'il existe une suite  $t_n \rightarrow +\infty$

tel que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{t_n} = a$$



### Définition 1.4

Un point  $b \in X$  est un point  $\alpha$ -limite d'une trajectoire  $x(x_0, t)$  s'il existe une suite  $t_n \rightarrow -\infty$  tel que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{t_n} = b$$

### Définition 1.5 :

L'ensemble des points  $\alpha$ -limites (resp  $\omega$ -limite) est désigné par  $\alpha(x)$  (resp  $\omega(x)$ ), alors on définit l'ensemble limite de  $x(x_0, t)$  par l'ensemble  $\alpha(x) \cup \omega(x)$ .

## 1.6 Attracteurs et bassin d'attraction

### 1.6.1 Ensemble invariant :

#### Définition 1.6

Un ensemble  $M \subset X$  est dit invariant par un champ de vecteurs si toute solution  $X(t)$  du système différentiel associée au champ de vecteurs issue de  $M$  vérifie  $X(t) \subset M$  pour tout  $t$  pour lequel cette solution est définie.

### 1.6.2 Attracteurs

#### Définition 1.7 :

Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases, c'est à dire une situation (ou un ensemble de situations) vers lesquelles évolue un système, quelles que soient ses conditions initiales.

Mathématiquement, l'ensemble  $A$  est un attracteur si :

- Pour tout voisinage  $U$  de  $A$ , il existe un voisinage  $V$  de  $A$  tel que toute solution  $x(x_0, t) = \varphi_t(x_0)$  restreinte dans  $U$  si  $x_0 \in V$
- $\bigcap_{t \geq 0} \varphi_t(V) = A$
- Il existe une orbite dense dans  $A$ .

### Définition 1.8

Le bassin d'attraction d'un attracteur est l'ensemble des points de l'espace des phases qui donnent une trajectoire évoluant vers l'attracteur considéré, c'est l'ensemble

$$W = \cup_{\varphi_t(V), t < 0}$$

### Un attracteur manifeste les propriétés suivantes

- 1** – un sous ensemble borné  $A$  de l'espace est de volume nul invariant par flot . autrement dit , tout point de l'espace d'état qui appartient à un attracteur demeure à l' intérieur de cet attracteur pour tout  $t$  .
- 2** – Il existe un ensemble  $B \supset A$  , tel que pour tout voisinage de  $A$  , la trajectoire qui prend son origine dans  $B$  se trouve au bout d'un temps fini dans ce voisinage de  $A$  . Autrement dit , toute trajectoire qui a son origine dans  $B$  tend vers l'attracteur, cette " zone d'influence" est le (Bassin d'attraction) .
- 3** –Un attracteur est indicomposable c'est-à-dire que la réunion de deux attracteurs n'est pas un attracteur .

### 1.6.3 Les différents types d'attracteurs

Il existe deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

#### A – Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution de systèmes non chaotiques, et peuvent être de trois sortes

- **Le point fixe** : C'est le cas le plus courant, et le plus simple d'attracteur, dans lequel le système évolue vers un état de repos (point). Notons que seuls les **puits** peuvent être des attracteurs. Les autres types de points fixes ont en effet toujours au moins une "voie de sortie" : à chaque valeur propre du Jacobien de partie réelle positive est associé un vecteur propre qui pointe dans une direction où la trajectoire de phase s'éloigne du point fixe.

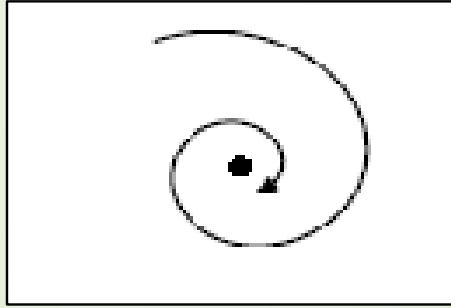
- **Le cycle limite périodique** : Il peut arriver que la trajectoire de phase se referme sur elle-même. L'évolution temporelle est alors cyclique, le système présentant des oscillations permanentes. Dans un système physique dissipatif, cela exige la présence d'un terme de forçage dans les équations qui vient compenser en moyenne les pertes par dissipation.

- **Le cycle limite pseudo-périodique** : C'est presque un cas particulier du précédent. Le système présente au moins deux périodes simultanées dont le rapport est irrationnel. La trajectoire de phase ne se referme pas sur elle-même, mais s'enroule sur une variété de dimension 2 (par exemple un tore).

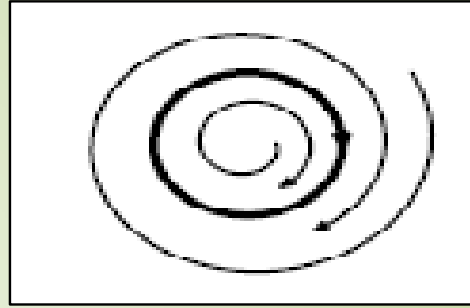
#### B – Attracteurs étranges

Avons-nous maintenant fait le tour des différentes solutions possibles ? Ou bien pouvons-nous trouver des attracteurs qui ne seraient ni des points, ni des courbes closes, ni des surfaces bidimensionnelles bornées c'est à dire. des tores dans un espace de phase tridimensionnel ? Si tel est le cas, nous aurons un problème de dimension. En effet, puisqu'un attracteur est un ensemble invariant, sa dimension dans un espace tridimensionnel doit être strictement inférieure à 3. Mais nous cherchons également un attracteur dont la dimension n'est ni 1 (point fixe) ni 2 (cycle). Nous recherchons donc des objets de

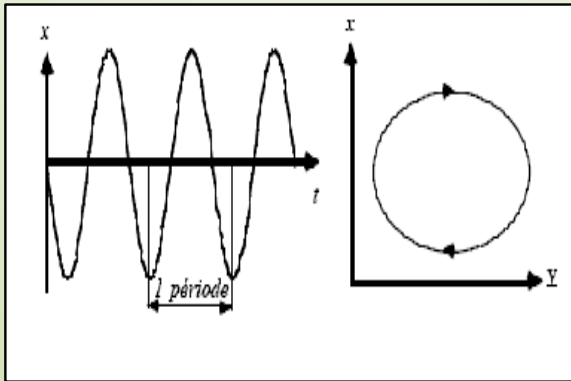
dimension...non-entière! De telles structures existent, moyennant une définition plus générale du concept de dimension. Mandelbrot leur a donné le nom de fractales. Nous examinerons dans la dixième section de ce chapitre le problème de leur dimension. Pour l'heure, essayons de mieux caractériser ces attracteurs. On comprend bien que leur nature doit être radicalement différente de celle d'un tore, qui ne peut être attracteur que d'un régime périodique. Les objets considérés ici, par contre, sont le siège de phénomènes aperiodiques et du chaos. On les appelle des attracteurs étranges. Et pour cause : il s'agit d'ensembles compacts, donc bornés, dans lesquels on retrouve des trajectoires chaotiques, dont l'une des caractéristiques essentielles est la S C I. (les trajectoires issues de conditions initiales proches s'écartent exponentiellement). Comment peut-on faire coexister l'attraction, qui implique le resserrement des trajectoires, avec la S C I, qui implique leur écartement? La solution réside dans le concept d'hyperbolicité de l'attracteur[43] : l'attraction s'opère dans une direction, et la divergence dans une autre. La surface contenant les trajectoires divergentes est appelée variété instable, alors que celle contenant les trajectoires convergentes sera dénommée variété stable. Notons que ceci ne peut se concevoir que dans un espace de phase d'au moins **trois** dimensions. Les attracteurs étranges sont caractéristiques de l'évolution des systèmes chaotiques : au bout d'un certain temps, tous les points de l'espace des phases (et appartenant au bassin d'attraction de l'attracteur) donnent des trajectoires qui tendent à former l'attracteur étrange. On va parler de ce type d'attracteur par la suite.



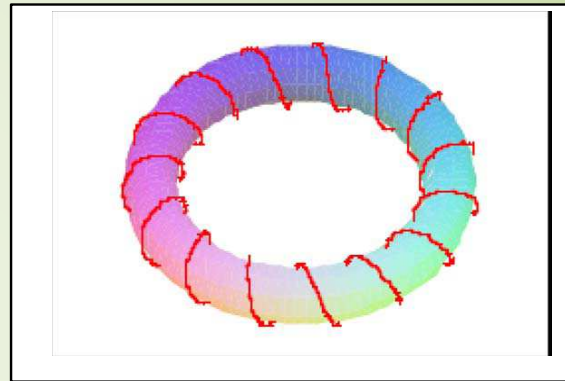
Un point fixe



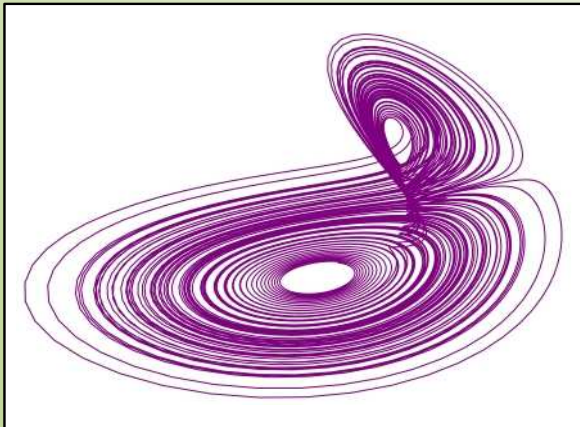
Un Cycle limite



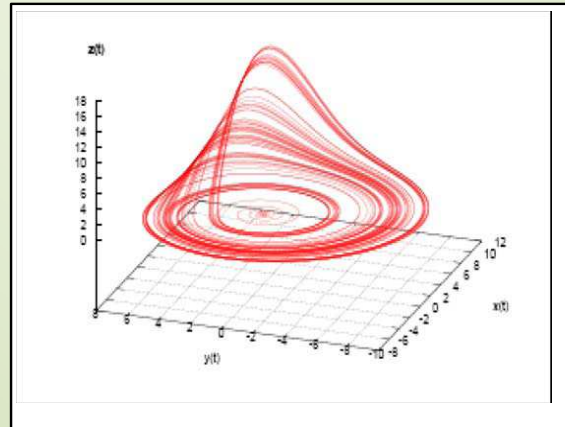
Un cycle limite dans l'espace naturel  
Puis dans l'espace de phase



Un Tor dans D3 (quasi-périodique)



Attracteur étrange de Lorenz



Attracteur étrange de Rössler

FIG. 1-2 – Les différents types des attracteurs

## 1.7 Etude qualitative des systèmes dynamiques

L'étude qualitative permet de voir le comportement des solutions sans avoir à résoudre l'équation différentielle. En particulier, elle permet l'étude locale des solutions autour de points d'équilibre. Pour avoir une étude complète d'un système dynamique, on attend en général de la part de l'environnement un comportement stationnaire, ce dernier va être présenté par la disparition des phénomènes transitoires en annulant la fonction de transition ou le champs de vecteurs, dans ce cas le système va avoir l'un des deux états suivants :

- Etat d'équilibre (points fixes, points périodiques).
- Etat chaotique.

Pour faciliter cette étude, on utilise les propriétés de l'algèbre linéaire sur les équations qui décrivent nos systèmes dynamiques, or que la majorité des systèmes dynamiques associés à des phénomènes naturels ne sont pas linéaires, à cet effet on est obligé de les linéariser.

### 1.7.1 Linéarisation des systèmes dynamiques

Considérons le système dynamique non linéaire défini par :

$$\dot{X} = F(X), X = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad F = (f_1, f_2, \dots, f_n) \quad (1.9)$$

et soit  $X_0$  un point fixe (d'équilibre) de ce système.

Supposons qu'une petite perturbation  $\epsilon(t)$  soit appliquée au voisinage du point fixe.

La fonction  $F$  peut être développée en série de Taylor au voisinage de point  $X_0$  comme suit :

$$\dot{\epsilon}(t) + \dot{X}_0 = F(X_0 + \epsilon(t)) \simeq F(X_0) + J_F(X_0) \cdot \epsilon(t) \quad (1.10)$$

avec  $J_F(X_0)$  est la matrice Jacobienne de la fonction  $F$  défini par :

$$J_{F(X_0)} = \left( \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right)_{X=X_0} \quad (1.11)$$

Comme  $F(X_0) = X_0$ , alors l'équation (1.10) redevient :

$$\dot{\epsilon}(t) = J_{F(X_0)} \cdot \epsilon(t) \quad (1.12)$$

L'écriture (1.12) veut dire que le système (1.9) est linéarisé.

### 1.7.2 Théorème de Hartmann-Grobman

Considérons le système dynamique (1.9)

Soit  $X_0$  un point d'équilibre du système (1.9) et soit  $JF(X_0)$  la matrice Jacobienne au point  $X_0$ , alors on a le théorème suivant :

#### **Théorème 1.1**

Si  $JF(X_0)$  admet des valeurs propres non nulles ou imaginaires pures, alors il existe un homéomorphisme qui transforme les orbites du flot non linéaire vers celles du flot linéaire dans certain voisinage  $U$  de  $X_0$ .

Ce théorème va nous permettre de lier la dynamique du système non linéaire(1.9) à la dynamique du système linéarisé (1.12).

### 1.7.3 Classification de Poincaré des points fixes

Il s'agit de distinguer ces points fixes par la nature des valeurs propres de la matrice jacobienne (1.11) du système linéarisé (1.12) associé au système différentiel initial (1.9) en ce point.

Pour cette raison on va supposer que les valeurs propres de la matrice (1.11) sont définies par :

$$\lambda_i = \omega_i + j\sigma_i, i = 1, 2, \dots, n$$

• Lorsque  $\omega_i \neq 0$  pour  $i=1,2,\dots,n$  le point fixe est dit **hyperbolique**.

La solution  $\epsilon(t)$  du système linéarisé s'écrit à partir d'une base des fonctions indépendantes :

$$\epsilon(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} \cdot V^i \quad (1.13)$$

Où  $V^i$  représente le vecteur propre associé à  $\lambda_i$  et  $C_i \in \mathbb{R}$ . dépend des conditions initiales.

Donc les valeurs propres  $\lambda_i$  définissent l'état de stabilité

Et on va citer les natures de ces points fixes en étudiant la nature des  $\lambda_i$ .

**1**—Si  $\omega_i < 0$  pour  $i=1,2,\dots,n$ , le point fixe est asymptotiquement stable :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ . On dit que le point est un **"puits" (foyer)** si  $\sigma_i \neq 0$  pour  $i=1,2,\dots,n$  un **"noeud"** si  $\sigma_i = 0$  pour  $i=1,2,\dots,n$ .

**2**—Si  $\omega_i > 0$  pour  $i=1,2,\dots,n$ , le point fixe est **instable**. On dit que le point est une **"source"** si  $\sigma_i \neq 0$  pour  $i=1,2,\dots,n$  et un **"noeud"** si  $\sigma_i = 0$  pour  $i=1,2,\dots,n$ .

**3**—Si  $\omega_j > 0$  pour  $j=1,2,\dots,p$  avec  $p < n$  et  $\omega_j < 0$  pour  $i \neq j$ , la solution est instable et le point est un **"col"**.

• S'il n'y a pas de valeur propre nulle, on a un point selle.



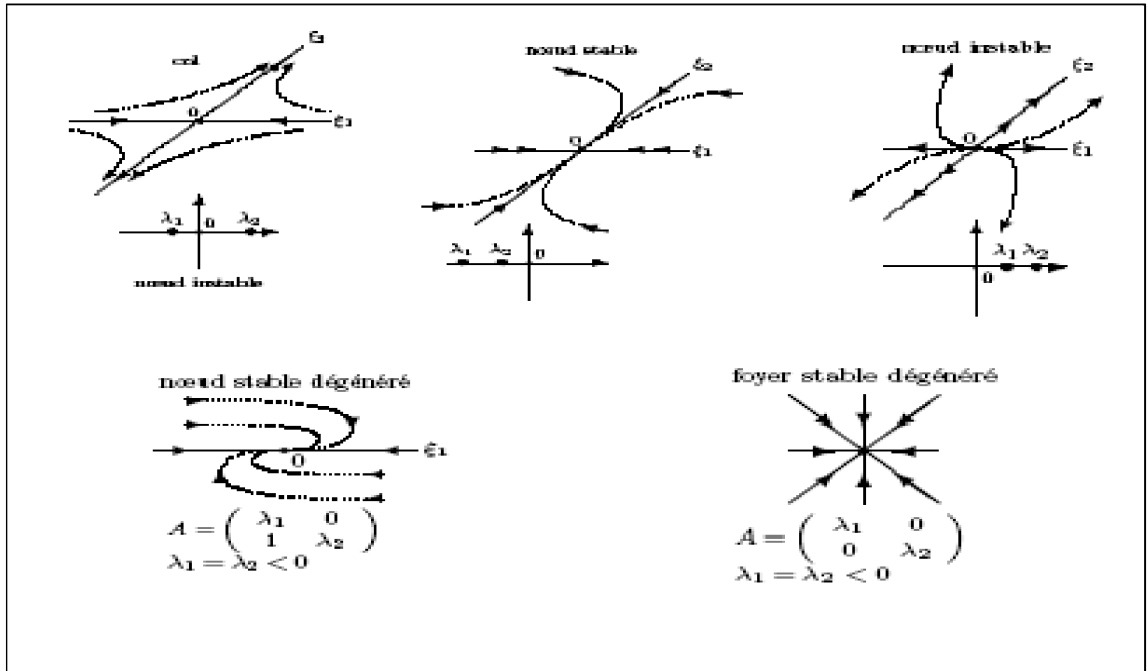


FIG. 1-3 – Classification des équilibres dans  $\mathbb{R}^2$

## 1.8 Notion de stabilité

### 1.8.1 Stabilité au sens de Lyapunov

Soit le système dynamique suivant :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \tag{1.14}$$

avec  $f$  une fonction non linéaire

**Définition 1.9 :**

le point d'équilibre  $x_0$  du système (1.14) est :

- Stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x\| < \delta \implies \|x(t, x(t_0)) - x_0\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0. \quad (1.15)$$

- Asymptotiquement stable si :

$$\exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x_0\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x(t_0)) - x_0\| = 0. \quad (1.16)$$

- Exponentiellement stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x\| < \delta \implies \|x(t, x(t_0)) - x_0\| < a \|x(t_0) - x\| \exp(-bt), \forall t > t_0 \quad (1.17)$$

- Instable si l'équation (1.15) n'est pas satisfaite.

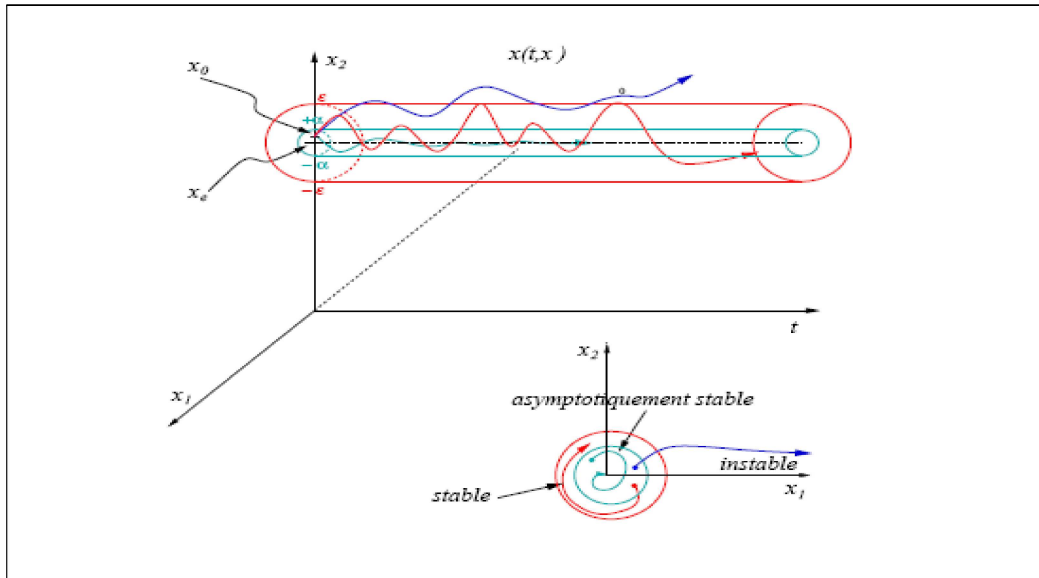


FIG. 1-4 – Les différents types de stabilités au sens de Lyapunov

### **Première méthode de Lyapunov (méthode indirecte)**

La première méthode de Lyapunov est basée sur l'examen de la linéarisation autour du point d'équilibre  $x_0$  du système (1.14). Plus précisément, on examine les valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice jacobienne évaluée au point d'équilibre. Selon cette méthode, les propriétés de stabilité de  $x_0$  s'expriment comme suit :

- Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne ont une partie réelle strictement négative,  $x_0$  est exponentiellement stable.
- Si la matrice jacobienne possède au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive,  $x_0$  est instable.

#### **Remarque 1.3 :**

Cette méthode ne permet pas de dire si l'équilibre est stable ou instable quand la matrice jacobienne comporte au moins une valeur propre nulle, et aucune valeur propre avec partie réelle strictement positive. Dans ce cas, les trajectoires du système convergent vers un sous-espace ( une variété) dont la dimension est le nombre de valeurs propres nulles de la matrice jacobienne, et la stabilité de l'équilibre peut être étudié dans ce sous-espace par la seconde méthode.

### **Seconde méthode de Lyapunov (méthode directe)**

Comme on a vu, la première méthode de Lyapunov est simple à appliquer mais elle ne permet d'analyser la stabilité des équilibres que très partiellement. En outre elle ne donne aucune indication sur la taille des bassins d'attraction. La seconde méthode est plus difficile à mettre en œuvre mais, en contrepartie, elle est d'une portée beaucoup plus générale. Elle est basée sur la définition d'une fonction particulière, notée  $V(x)$  et appelée fonction de Lyapunov, qui est décroissante le long des trajectoires du système à l'intérieur du bassin d'attraction. Ce théorème va résumer cette méthode.

### **Théorème 1.2**

Le point d'équilibre  $x_0$  du système (1.14) est stable si il existe une fonction

$V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$  continuellement différentiable ayant les propriétés suivantes :

- (1)  $D$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $x_0 \in D$ .
- (2)  $V(x) > V(x_0) \quad \forall x \neq x_0$  dans  $D$ .
- (3)  $V(x) \leq 0 \quad \forall x \neq x_0$  dans  $D$ .

Il n'y a aucune méthode pour trouver une fonction de Lyapunov. Mais en mécanique et pour les systèmes électriques on peut souvent utiliser l'énergie totale comme fonction de Lyapunov.

### **1.8.2 Théorème de la variété centrale**

Soit

$$\frac{dx}{dt} = f(x, c) \tag{1.18}$$

un système dynamique non linéaire,  $x_0$  son point d'équilibre qu'on peut ramener à l'origine par le changement de variable :

$$\xi = x - x_0$$

et soit  $J$  la matrice jacobienne d'ordre  $n$  associé au système (1.18) après sa linéarisation au voisinage de point fixe (après avoir considéré une petite perturbation  $\xi$  au voisinage de point fixe)

$$\frac{d\xi}{dt} = J.\xi$$

Soient :

- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  les valeurs propres de la matrice jacobienne  $J$  dont la partie réelle est négative.

- $u_1, u_2, \dots, u_i$  les valeurs propres de la matrice  $J$  dont la partie réelle est positive.

- $s_1, s_2, \dots, s_c$  les valeurs propres dont la partie réelle est nulle, avec  $s + i + c = n$ .

Et soient :

- $E^s$  le sous espace vectoriel de dimension  $s$  engendré par  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$ .
- $E^i$  le sous espace vectoriel de dimension  $i$  engendré par  $\{u_1, u_2, \dots, u_i\}$ .
- $E^c$  le sous espace vectoriel de dimension  $c$  engendré par  $\{s_1, s_2, \dots, s_c\}$ .

avec

$$E^n = E^s \oplus E^i \oplus E^c$$

On a le théorème suivant :

**Théorème 1.3**

Il existe des variétés de classe  $C^r$  : stable  $W^s$ , instable  $W^i$ , et centrale  $W^c$  tangentes respectivement à  $E^S, E^i$  et  $E^c$  en  $x_0$ . Ces variétés sont invariantes, par rapport au flot de système (1.18)

**Variété centrale dépendant d'un paramètre**

On applique une petite perturbation  $\varepsilon$  sur le système (1.18), donc le résultat sera un système dynamique dépendant d'un paramètre  $\varepsilon$ , et supposons que par une certaine transformation on peut ramener le système (1.18) à un système de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1x + f(x, y, z, \varepsilon) \\ \dot{y} = A_2y + g(x, y, z, \varepsilon) \\ \dot{z} = A_3z + m(x, y, z, \varepsilon) \\ \dot{\varepsilon} = 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

La variété centrale au voisinage de  $(0,0,0,0)$  est alors donnée par :

$$y = h_1(x, \varepsilon), \quad z = h_2(x, \varepsilon)$$

Après un simple calcul, et après avoir appliqué le développement de Taylor sur  $h_1$  et

$h_2$ , on peut donc écrire le système (1.19) sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + f(x, h_1(x, \varepsilon), h_2(x, \varepsilon), \varepsilon) \\ \dot{\varepsilon} = 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

Le théorème suivant permet de lier la dynamique du système (1.20) à celle du système (1.19) :

**Théorème 1.4 :**

Si l'origine  $x_0 = 0$ , du système (1.20) est asymptotiquement stable (instable), alors l'origine du système (1.19) est aussi asymptotiquement stable (instable)

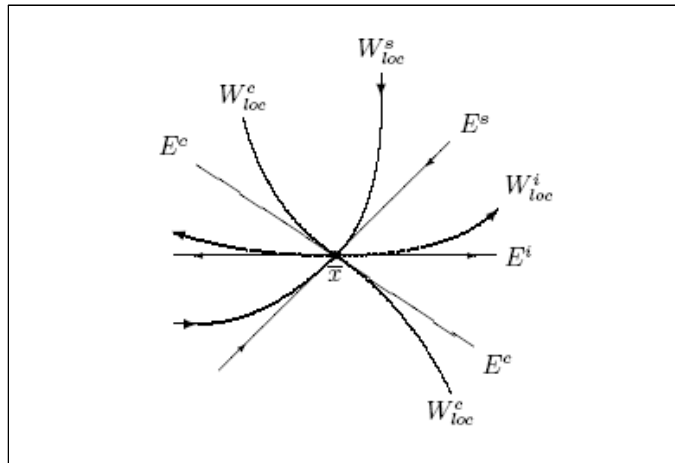


FIG. 1-5 – Les sous-variétés invariantes autour de point d'équilibre - $\bar{X}$ ,  $W^s_{loc}$  et  $W^i_{loc}$ . les sous-variétés stable et instable et  $W^c_{loc}$  la sous-variété et centrale

## 1.9 La théorie des bifurcations

On s'intéresse ici aux changements qualitatifs du portrait de phases d'un système dynamique dépendant de paramètres. De tels changements sont appelés bifurcations. Pour les systèmes continus dérivant d'un potentiel, le mathématicien **René Thom** emploie, au lieu de bifurcation, le terme catastrophe, terme qui a connu une fortune médiatique importante. Pour les valeurs des paramètres auxquelles de tels changements qualitatifs apparaissent, valeurs dites de bifurcation, la construction du portrait de phases nécessite des outils adaptés. Nous nous intéressons ici aux bifurcations dites locales, c'est à dire relatives à un point d'équilibre d'un système continu ou à un point fixe d'un système discret. L'étude de ce type de bifurcations repose sur la théorie de Landau, et le diagramme de bifurcation nous aidera géométriquement sur les deux méthodes suivantes qui se ramènent à l'utilisation de bonnes coordonnées :

1. la méthode de la sous-variété centrale qui permet d'isoler la partie non hyperbolique, dite centrale, du système.

2. la méthode des formes normales de Poincaré où ne subsistent que les vraies non linéarités, c'est à dire celles que l'on ne peut pas faire disparaître par changement régulier de coordonnées.

Soit le système

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu) \quad (1.21)$$

### Définition 1.9 :

Soit un système dynamique non linéaire de dimension  $n$  et de paramètre de contrôle  $\mu$ , et soit  $x_0$  sa solution.

- Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution  $x_0$  du système (1.21) lorsqu'on modifie  $\mu$ , et d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions.

## 1.9.1 Bifurcations en codimension 1

### 1.9.2 Bifurcation locale

On parle ici seulement de la bifurcation de codimension un et il existe quatre types de bifurcations de codimension un, qui correspondent tous à des comportements génériques.

### 1.9.3 Bifurcation noeud-col

Une fonction linéaire ne change pas le nombre de racines. Le polynôme le plus simple qui change de nombre de racines en fonction du paramètre  $\mu$  est le polynôme quadratique  $f(x) = \mu - x^2$ , comme celui de la figure suivante

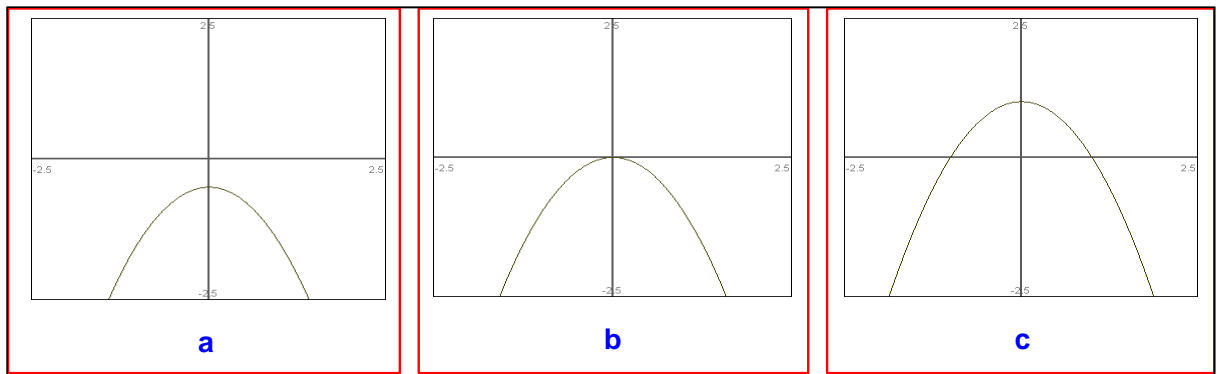


FIG. 1-6 – Variation des racines de  $f(x, \mu)$  dans **a**  $\mu < 0$  dans **b**  $\mu = 0$  et dans **c**  $\mu > 0$

Considérons le système (1.21)

Si on peut réécrire la fonction  $f$  sous la forme :

$$f(x, \mu) = \mu - x^2 \quad (1.22)$$

nous appellons la fonction (1.22) la forme normale de la bifurcation noeud-col.

Étudions le comportement de l'équation (1.22) : les points fixes de cette dernière sont

$$\tilde{x}_{\pm} = \pm\sqrt{\mu} \quad (1.23)$$



qui existent seulement pour  $\mu > 0$ , leur stabilité est déterminée par

$$f'(\tilde{x}_{\pm}) = -2\tilde{x}_{\pm} = -2(\pm\sqrt{\mu}) = \mp\sqrt{\mu} \quad (1.24)$$

selon les signes de  $f'(\tilde{x})$ , on voit que  $\bar{x}_+ = \sqrt{\mu}$  est stable, tandis que  $\bar{x}_- = -\sqrt{\mu}$  est instable.

**Remarque 1.4**

Même étude faite lorsque  $f(x, \mu) = -\mu - x^2$ ,  $f(x, \mu) = +\mu + x^2$ ,  $f(x, \mu) = -\mu + x^2$

Mais dans tous les cas, il y a une transition à  $\mu = 0$  entre existence d'aucun point fixe et de deux points fixes dont un est stable et l'autre instable.

La figure **fig(1.7)** suivante présente ce que on' appelle le diagramme de bifurcation. (la variation du point d'équilibre en fonction de paramètre  $\mu$  pour le cas  $f(x, \mu) = \mu + x^2$

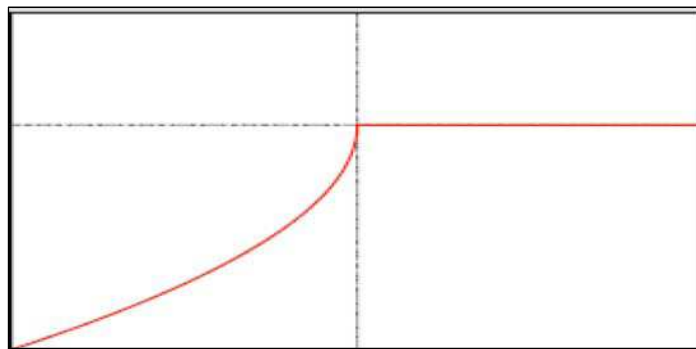


FIG. 1-7 – Diagramme de Bifurcation noeud-col

### 1.9.4 Bifurcations fourches

Si on peut réduire  $f(x, \mu)$  à un polynôme cubique a ces quatre cas :

$$f(x, \mu) = \mu x - x^3 \quad (1.25)$$

$$f(x, \mu) = \mu x + x^3 \quad (1.26)$$

$$f(x, \mu) = -\mu x + x^3 \quad (1.27)$$

$$f(x, \mu) = -\mu x - x^3 \quad (1.28)$$

L'équation (1.25) s'appelle la forme normale d'une bifurcation fourche supercritique.

Nous calculons ses points fixes :

$$\bar{x}(\mu - \bar{x}^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = 0 & \text{pour tout } \mu \\ \bar{x} = \pm\sqrt{\mu} & \text{pour } \mu > 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

Nous calculons la stabilité de ces points fixes.

$$f'(\bar{x}) = \mu - 3\bar{x}^2 = \begin{cases} \mu & \text{pour } \bar{x} = 0 \\ \mu - 3\mu = -2\mu & \text{pour } \bar{x} = \pm\sqrt{\mu} \end{cases} \quad (1.30)$$

Le point fixe  $\bar{x} = 0$  est donc stable pour  $\mu < 0$  et devient instable à  $\mu = 0$ , quand les branches de nouveaux points fixes  $\bar{x} = \pm\sqrt{\mu}$  sont créées. Ces nouveaux points fixes sont toujours stables quand ils existent.

Faisons le même calcul pour (1.30), qui est la forme normale d'une bifurcation fourche souscritique.

$$\bar{x}(\mu + \bar{x}^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = 0 & \text{pour tout } \mu \\ \bar{x} = \pm\sqrt{-\mu} & \text{pour } \mu < 0 \end{cases} \quad (1.31)$$

$$f'(\bar{x}) = \mu + 3\bar{x}^2 = \begin{cases} \mu & \text{pour } \bar{x} = 0 \\ \mu + 3(-\mu) = -2\mu & \text{pour } \bar{x} = \pm\sqrt{-\mu} \end{cases} \quad (1.32)$$

Comme pour le cas supercritique, le point fixe  $\bar{x} = 0$  est stable pour  $\mu < 0$  et devient instable à  $\mu = 0$ .

Mais contrairement au cas supercritique, les autres points fixes  $\pm\sqrt{\mu}$  existent dans la région où  $\bar{x} = 0$  est stable, et sont toujours instables.

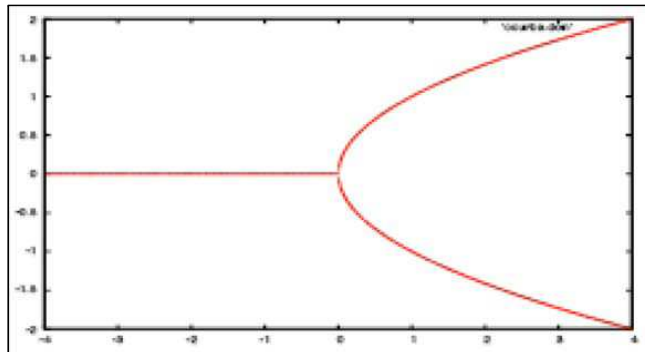


FIG. 1-8 – Diagramme de bifurcation Fourche

### 1.9.5 Bifurcations transcritiques

Si  $f$  est contrainte à ne pas avoir de terme constant, le développement limité mène à la forme normale d'une bifurcation transcritique, qui est la dernière bifurcation stationnaire dans une dimension :

$$\dot{x} = \mu x - x^2 \quad (1.33)$$

L'analyse usuelle donne :

$$\bar{x}(\mu - \bar{x}) = 0 \implies \begin{cases} \bar{x} = 0 \\ \bar{x} = \mu \end{cases} \quad (1.34)$$

$$f'(\bar{x}) = \mu - 2\bar{x} = \begin{cases} \mu & \text{pour } \bar{x} = 0 \\ -\mu & \text{pour } \bar{x} = \mu \end{cases} \quad (1.35)$$

Donc  $\bar{x} = 0$  est stable pour  $\mu < 0$ , instable pour  $\mu > 0$ , tandis que  $\bar{x} = \mu$  fait le contraire : ces points fixes échangent simplement leur stabilité.

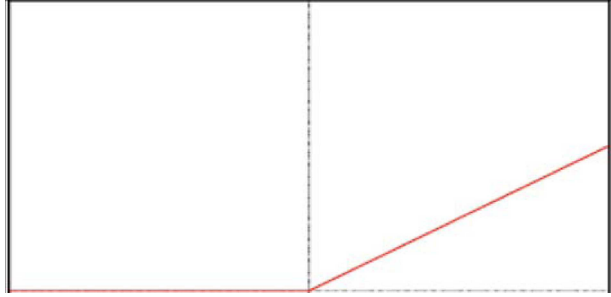


FIG. 1-9 – Bifurcation transcritique

### 1.9.6 Bifurcation de Hopf

Tandis que toutes les bifurcations que nous avons décrites sont stationnaires, la bifurcation de Hopf donne naissance à des solutions oscillantes ; l'espace des phases a maintenant deux composantes et la forme s'écrit dans le plan complexe

Forme normale :

$$\frac{dZ}{dt} = \mu Z - |Z|^2 Z$$

En posant  $\mu = \mu_r + i\mu_I$  et  $Z = X e^{i\theta}$ , on obtient alors :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \mu_r X - X^3 \\ \frac{d\theta}{dt} = \mu_I \end{cases}$$

Nous obtenons donc une bifurcation fourche pour l'amplitude tandis que la phase tourne à la vitesse  $\mu_I$ . La solution est donc périodique et les trajectoires décrivent une spirale attirée vers une courbe asymptotique nommée : cycle limite. Naturellement la bifurcation de Hopf peut être également sous critique si le coefficient du terme  $|Z|^2 Z$  est de signe positif, il faut alors un terme négatif en  $|Z|^4 Z$  pour obtenir une saturation non-linéaire. On va s'intéresser maintenant à l'étape qui suit la régularité temporelle. Selon Landau la bifurcation d'un point d'un comportement stationnaire (point fixe) vers un comportement périodique (cycle limite) puis bipériodique (un tore) constituent les premières étapes de la transition vers la turbulence, cette dernière présente un phénomène

très intéressant qu'on appelle le chaos qui est depuis longtemps synonyme de désordre, de confusion et s'oppose à l'ordre et à la méthode. De nombreux chercheurs en sciences se sont intéressés aux mouvements dit chaotiques. Ils ont confirmé que, contrairement à ce que la pensée déterministe, martèle depuis des lustres, il se pourrait qu'il y ait de l'équilibre dans le déséquilibre, de l'organisation dans la désorganisation.

## 1.10 Théorie du chaos

Des systèmes dynamiques non linéaires, ou simplement linéaires par morceau, peuvent faire preuve de comportements complètement imprévisibles, qui peuvent même sembler aléatoires (alors qu'il s'agit de systèmes parfaitement déterministes). Cette imprédictibilité est appelée chaos. La branche des systèmes dynamiques qui s'attache à définir clairement et à étudier le chaos s'appelle la théorie du chaos.

Cette branche des mathématiques décrit qualitativement les comportements à long terme des systèmes dynamiques. Dans ce cadre, on ne met pas l'accent sur la recherche de solutions précises aux équations du système dynamique (ce qui, de toute façon, est souvent sans espoir), mais plutôt sur la réponse à des questions comme « Le système convergera-t-il vers un état stationnaire à long terme, et dans ce cas, quels sont les états stationnaires possibles ? » ou « Le comportement à long terme du système dépend-il des conditions initiales ? ».

### 1.10.1 Caractéristique du chaos

#### 1- Sensibilité aux conditions initiales

Pour un système chaotique, une très petite erreur sur la connaissance de l'état initial  $x_0$  dans l'espace des phases va se trouver (presque toujours) rapidement amplifiée.

D'un point de vue mathématique on dit que  $f$  montre une dépendance sensible aux

conditions initiales lorsque :

$$\exists \delta > 0, \forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists (y, p) \in D : \begin{cases} \|x - y\| < \varepsilon \\ \|f^p(x) - f^p(y)\| > \delta \end{cases} \quad (1.36)$$

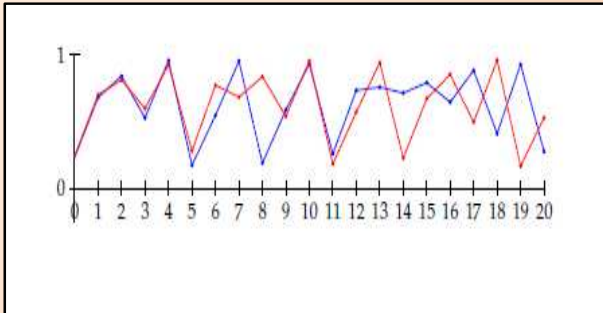
## 2- L'attracteur étrange

Un système chaotique dissipatif possède (au moins) un attracteur d'un type particulier appelé attracteur étrange. Géométriquement, un tel attracteur peut être décrit comme le résultat d'une opération d'étirement et de repliement d'un cycle de l'espace des phases, répétée un nombre infini de fois. La "longueur" de l'attracteur est infinie, bien qu'il soit contenu dans un espace fini. Alors on peut donner cette définition :

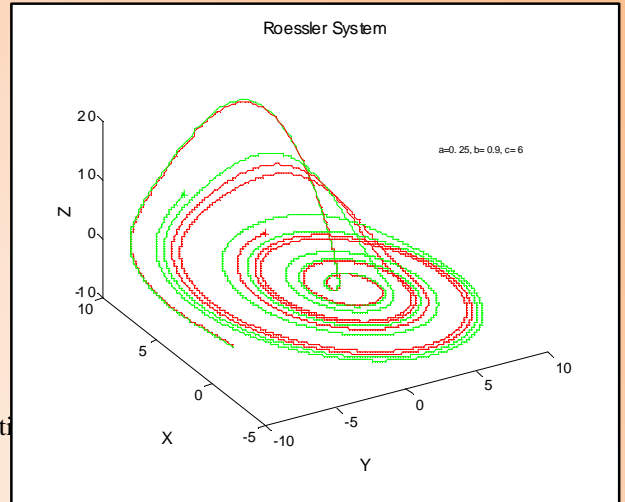
### Définition 1.10

Un sous-ensemble borné  $A$  de l'espace des phases est un attracteur étrange ou chaotique pour une transformation  $T$  de l'espace s'il existe un voisinage  $R$  de  $A$ ; c'est à dire que pour tout point de  $A$  il existe une boule contenant ce point et contenue dans  $R$  vérifiant les propriétés suivantes.

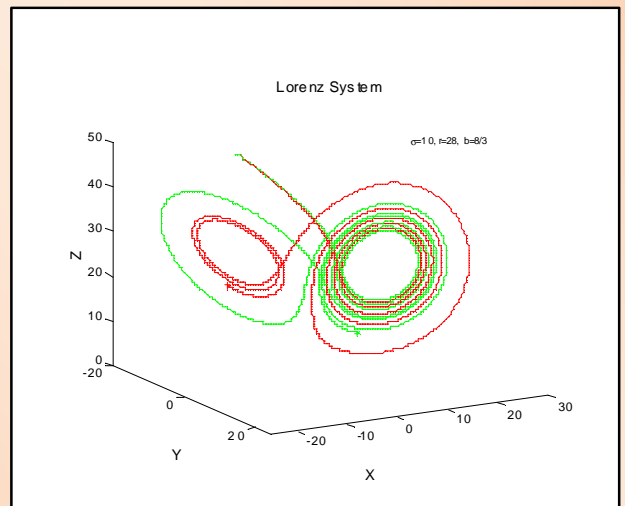
- Attraction :  $R$  est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par  $T$  dont le point initial est dans  $R$ , est entièrement contenue dans  $R$ . De plus, toute orbite de ce type devient et reste aussi proche de  $A$  que l'on veut.
- Il est contenu dans un espace fini. Son volume est nul. Sa dimension est fractale (non entière).
- Presque toute trajectoire sur l'attracteur a la propriété de ne jamais passer deux fois sur le même point : chaque trajectoire est presque sûrement aperiodique.
- Deux trajectoires proches à l'instant  $t$  voient localement leur distance augmenter à une vitesse exponentielle (sensibilité aux conditions initiales).



Exemple de suite à comportement chaotique :  
 $u_{n+1} = 3.82u_n(1-u_n)$ , pour deux conditions initiales  
différentes de  $10^{-2}$ , l'erreur augmente de façon exponentielle  
durant les huit premières itérations



Comportement chaotique du système de roessler  
pour deux conditions initiales très proches



Comportement chaotique du système de Lorenz  
pour deux conditions initiales très proches

FIG. 1-10 – Sensibilité aux conditions initiales pour des Systèmes chaotiques

### 3- Spectre de puissance

Une façon simple de caractériser le chaos consiste à calculer le spectre de Fourier de l'évolution temporelle d'une des variables du système. Lorsque le système est intégrable c'est-à-dire qu'il est possible de déterminer complètement les trajectoires d'un système dans son espace de phases, ce système est dit intégrable ; les trajectoires étant la composition de mouvements d'oscillation ayant chacun une pulsation  $w_i$ . Le spectre d'une variable d'un tel système ne contient donc qu'une assemblée de raies fines situées aux pulsations  $w_i$ , à leurs harmoniques  $mw_i$  avec  $m \in \mathbb{N}$ , aux combinaisons linéaires de fréquences  $mw_i + nw_j$  avec  $m, n \in \mathbb{Z}$ , les spectres qui sont la combinaison de plusieurs fréquences sans rapport simple sont dit quasipériodiques.

L'existence de spectres larges est une caractéristique essentielle des mouvements chaotiques d'un système.

L'évolution temporelle d'un système dynamique est souvent représentée par la valeur d'une de ses variables à intervalle régulier, c'est ce qu'on appelle la série temporelle.

#### 1.10.2 Détection du chaos

Il existe plusieurs méthodes qui permettent de déterminer si des systèmes non linéaires sont ou non chaotiques. Elles ne sont généralement pas très nombreuses, ni réparties sur un temps suffisamment long à l'échelle du système étudié. On a choisi de mettre en oeuvre deux des méthodes les plus couramment utilisées qui, d'ailleurs, sont complémentaires : la dimension fractale et les exposants de Lyapunov.

#### Les exposants de Lyapunov

Le 12 octobre 1892, Lyapounov soutient à l'Université de Moscou une thèse de doctorat intitulée : Le problème général de la stabilité du mouvement. Il y introduit l'idée de mesurer la divergence possible entre deux orbites issues de conditions initiales voisines. Lorsque cette divergence croît exponentiellement avec le temps pour presque toutes les



conditions initiales voisines d'un point donné, on a le phénomène de sensibilité aux conditions initiales, idée à laquelle sont attachés les **exposants de Lyapounov**, qui donnent une mesure quantitative de cette divergence exponentielle locale[13] et mesure en fait le degré de sensibilité d'un système dynamique. Rappelons d'abord cette formule et voyons comment Lyapounov a pu arriver à déduire une telle formule.

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left| \left( f'(x_{i-1}) \right) \right| \quad (1.37)$$

Considérons un système dynamique quelconque dont la condition initiale  $x_0$  est affectée d'une erreur infinitésimale  $E_0$ . Après  $n$  itérations, l'erreur initiale  $E_0$  sera donc amplifiée d'un facteur  $\left| \frac{E_n}{E_0} \right|$ .

Notons que l'erreur diminue lorsque le facteur est inférieur à 1 et augmente s'il est supérieur à 1.

Puisque

$\left| \frac{E_n}{E_0} \right| = \left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-2}}{E_{n-3}} \right| \dots \left| \frac{E_2}{E_1} \right| \cdot \left| \frac{E_1}{E_0} \right|$ , il suffit alors de calculer ce produit pour déterminer la façon dont s'amplifie l'erreur initiale.

Le logarithme d'un produit correspond à une somme de logarithmes. Utilisons plutôt le logarithme du produit pour compléter cette étude.

$$\ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| = \ln \left( \left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-2}}{E_{n-3}} \right| \dots \left| \frac{E_2}{E_1} \right| \cdot \left| \frac{E_1}{E_0} \right| \right) \quad (1.38)$$

$$= \ln \left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| + \ln \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| + \ln \left| \frac{E_{n-2}}{E_{n-3}} \right| + \dots + \ln \left| \frac{E_2}{E_1} \right| + \ln \left| \frac{E_1}{E_0} \right| \quad (1.39)$$

$$= \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right| \quad (1.40)$$

Avant de faire tendre cette dernière quantité vers l'infini, calculons d'abord la moyenne de la somme obtenue. On arrive ainsi à l'exposant de Lyapounov.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right| \right) \quad (1.41)$$

$E_i$  et  $E_{i-1}$  étant de très petites valeurs, le rapport correspond à la dérivée de la fonction associée à l'équation utilisée si naturellement la fonction est dérivable. En effet soit  $f(x_i)$  cette fonction.

$$E_i = f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1}) \quad (1.42)$$

et

$$\frac{E_i}{E_{i-1}} = \frac{f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1})}{E_{i-1}} \quad (1.43)$$

Puisque

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \quad (1.44)$$

Alors si  $f$  est dérivable, on a

$$\frac{E_i}{E_{i-1}} = \frac{f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1})}{E_{i-1}} = f'(x_{i-1}) \quad \text{lorsque } E_{i-1} \rightarrow 0 \quad (1.45)$$

Par conséquent,

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left| \left( f'(x_{i-1}) \right) \right| \quad (1.46)$$

Lorsque l'exposant de Lyapunov est positif,

$$\ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| > 0 \quad (1.47)$$

et par conséquent

$$\left| \frac{E_n}{E_0} \right| > 1 \quad (1.48)$$

L'erreur infinitésimale du début ira donc en augmentant. Le système sera dans ce

cas sensible aux très petites variations de sa condition initiale, une des caractéristiques des systèmes chaotiques. Si au contraire l'exposant de Lyapunov est négatif, l'erreur infinitésimale du début ira en diminuant. L'erreur initiale n'aura dans ce cas aucun effet à long terme.

Généralement on peut distinguer trois cas suivant le signe de l'exposant de Lyapunov

- Si  $\lambda < 0$  l'orbite est attractive vers un point fixe ou une orbite périodique stable.

Il caractérise les systèmes dissipatifs. Ce type de système exhibe une stabilité asymptotique ; plus l'exposant est négatif, plus la stabilité est grande. Les points fixes et les points périodiques super stables ont un exposant de Lyapunov  $\lambda$  qui tend vers  $-\infty$

- Si  $\lambda = 0$  l'orbite est un point fixe neutre. Un système physique avec un tel exposant est dit conservateur. Dans cette situation, les orbites gardent une séparation constante.

- Si  $\lambda > 0$  l'orbite est instable et chaotique. Tous les points voisins doivent être visités : ces points sont dit instables. Pour un système discret, on a un ensemble de points sans aucun rapport de liaison. Pour un système continu, l'espace de phase est un ensemble de lignes croisées.

## Dimension fractale

Cette méthode correspond à une mesure de la dimension de l'attracteur reconstruit du système étudié ; nous pouvons calculer la dimension de l'attracteur du système étudié et ainsi déterminer si oui ou non il est construit de manière fractale. Si, à l'issue du calcul, nous obtenons une valeur positive non entière, cela signifie que le système possède un attracteur étrange. Plusieurs dimensions ont été proposées, on cite quelques une :

il ya la dimension de Kolmogorov, dimension de Corrélation et dimension de Lyapunov, il ya une différence légère entre chaqu'une de ces dimension, mais elles caractérisent, toutes, l'attracteur étrange avec sa dimension fractale et satisfont les propriétés suivantes :

- $A \subset B \Rightarrow d(A) \leq d(B)$ .
- $A = \emptyset \Rightarrow d(A) = 0$ .
- $d(A \times B) = d(A) + d(B)$ .

**Dimension de Corrélation** Le principe de cette méthode repose sur les corrélations entre les points de la série temporelle étudiée. Il s'agit de compter combien de cubes de côté de longueur  $R$  il faut pour contenir tous les points de l'espace de dimension  $N$ . Les données sont regroupées en multiples de  $p$  et on compte le nombre de cubes nécessaires pour prendre en compte tous les points de l'espace. On commence par utiliser une toute petite boîte puis on l'agrandi afin que tout les points soient contenus dans une seule et même grande boîte. Notons  $C(R)$  le nombre de boîtes requis pour chaque dimension  $N$  :

On peut caractériser la dimension de corrélation à l'aide d'une fonction appropriée, une telle fonction est défini par :

$$C(R) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N^2} \cdot \vartheta \quad (1.49)$$

avec  $\vartheta$  représente le nombre de paires  $i, j$  dont la distance  $|X_i - X_j| < R$ .

On peut réécrire la fonction (1.49) comme

$$C(R) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N^2} \sum H(R - |X_i - X_j|) \quad (1.50)$$

avec  $H$  la fonction de Heaviside. La dimension de corrélation est alors définie par

$$v = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\log(C(R))}{\log(R)} \quad (1.51)$$

La distribution sur l'attracteur étant relativement facile à estimer, l'aspect fractal des attracteurs est souvent caractérisé simplement par cette dimension de corrélation.

### Dimension de Lyapunov

Cette dimension est définie par Karlan et Yorke, et elle est donnée par :

$$d_l = m + \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i}{|\lambda_{m+1}|} \quad (1.52)$$

avec  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$  sont les exposants de Lyapunov de l'attracteur d'un système dynamique, et  $m$  le plus grand entier tel que

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \leq 0 \quad (1.53)$$

### Dimension de capacité (Kolmogorov)

Soit  $X$  un ensemble de points de l'attracteur, on recouvre  $X$  par un nombre minimal  $N(\varepsilon)$  d'hypercube de côté  $\varepsilon$ .

- Si  $X$  est un carré de côté  $L$ , il peut être recouvert par  $N(\varepsilon) = \left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^2$  petits carrés de côtés  $\varepsilon$ .

- Dans le cas général on a :

$$N(\varepsilon) = \left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^d. \quad (1.54)$$

$$d = \frac{\log N(\varepsilon)}{\log L - \log \varepsilon} \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0, \log L \ll -\log \varepsilon \quad (1.55)$$

#### Définition 1.11 :

La dimension de Kolmogorov ou de capacité est définie par :

$$d_c = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon} \quad (1.56)$$

## 1.11 Routes vers le chaos

Un système dynamique possède en général un ou plusieurs paramètres dit "de contrôle", qui agissent sur les caractéristiques de la fonction de transition. Selon la valeur du paramètre de contrôle, les mêmes conditions initiales mènent à des trajectoires correspondant à des régimes dynamiques qualitativement différents. La modification continue du paramètre de contrôle conduit dans bien des cas à une complexification progressive du régime dynamique développé par le système.

Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos [45]. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marquée par des changements discontinus qu'on a déjà appelé bifurcations. Une bifurcation marque le passage soudain d'un régime dynamique à un autre, qualitativement différent. On peut citer trois scénarios de transition vers le chaos :

**1- L'intermittence vers le chaos :** un mouvement périodique stable est entrecoupé par des bouffées de turbulence. Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle, les bouffées de turbulence deviennent de plus en plus fréquentes, et finalement, la turbulence domine.

**2- Le doublement de période** qui est caractérisé par une succession de bifurcation de fourches. A mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée par deux, puis par quatre, puis par huit, etc... ; ces doublements de période sont de plus en plus rapprochés ; lorsque la période est infinie, le système devient chaotique. La turbulence dans les fluides peut apparaître suivant ce scénario.

**3- La quasi-périodicité** qui intervient quand un deuxième système perturbe un système initialement périodique. Si le rapport des périodes des deux systèmes en présence n'est pas rationnel, alors le système est dit quasipériodique. Ce scénario un peu compliqué est relié à la théorie des nombres, notamment aux travaux de Jean Christophe Yoccoz, lauréat de la Médaille Fields en 1994, pour ses travaux sur les systèmes dynamiques.

## 1.12 Conclusion

Dans ce chapitre préliminaire et après une introduction historique on a donné les notions de base de systèmes dynamiques, telles que : les différents types de ces systèmes, espace de phases, section de Poincaré, puis on a donné un aperçu sur l'étude qualitative des systèmes dynamiques, y compris la notion de stabilité. En passant par la théorie de bifurcations, la dernière section du chapitre est consacrée à la théorie du chaos, qui est caractérisé par la sensibilité aux conditions initiales, son attracteur étrange et au moins l'un des ses exposants positive. et enfin les différentes routes vers le chaos.

# Chapitre 2

## Les dérivées fractionnaires

### 2.1 Introduction

Le calcul fractionnaire a 300 ans d'existence mathématique .  
Tout au long de ces années, connaissait les contributions de nombreux mathématiciens qui ont donné plusieurs approches et définitions, dans ce mémoire on va restreindre à trois approches les plus populaires et les plus praticable qui sont : l'approche de **Grünwald-Letnikov** , de **Riemann-Liouville** et l'approche de **Caputo**

### 2.2 Les dérivées fractionnaires de Grünwald-Letnikov

#### 2.2.1 La dérivation d'ordre entier relatif

Soit  $f(x)$  une fonction continue sur  $[a, b]$

on :a

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad (2.1)$$

L'application de cette définition deux fois nous donne la dérivée seconde :

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Et par recurrence on peut généraliser cette formule pour tout entier  $m$

$$f^{(m)}(x) = \frac{d^m f(x)}{dx^m} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^m} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f(x - kh) \tag{2.3}$$

Où

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} \tag{2.4}$$

**Remarque 2.1 :**

La formule (2.3) s'appelle dérivée d'ordre  $m$  à gauche, de même, en prenant les différences à droite, on obtient une dérivée d'ordre  $m$  (à droite)

$$f^{(m)}(x) = \frac{d^m f(x)}{dx^m} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^m} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f(x + kh) \tag{2.5}$$

Pour la simplicité on va considérer que la dérivée (à gauche) dans tous ce qui suit

Considérons maintenant l'expression suivante généralisant (2.3)

$$f_h^{(p)}(x) = \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{p}{k} f(x - kh) \tag{2.6}$$

Où  $p$  et  $m$  sont deux entiers,

Evidament pour  $p \leq m$  on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(p)}(x) = f^{(p)}(x) = \frac{d^p f(x)}{dx^p} \tag{2.7}$$



Maintenant on remplace  $p$  dans (2.6) par  $(-p)$  on peut écrire

$$f_h^{(-p)}(x) = \frac{1}{h^{-p}} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{-p}{k} f(x - kh) \quad (2.8)$$

Si on considère

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p+1)\dots(p+k-1)}{k!} \quad (2.9)$$

pour les valeurs négatives de  $p$

En remarquant que

$$\binom{-p}{k} = \frac{-p(-p-1)\dots(-p-k+1)}{k!} \quad (2.10)$$

Alors la formule (2.8) prend la forme suivante

$$f_h^{(-p)}(x) = \frac{1}{h^{-p}} \sum_{k=0}^m \binom{p}{k} f(x - kh) \quad (2.11)$$

Si  $p$  est fixé alors  $f_h^{(-p)}(x)$  tend vers une limite (0) quand  $h$  tend vers (0)

supposons que  $m \rightarrow +\infty$  quand  $h \rightarrow 0$  (il suffit de prendre  $h = \frac{x-a}{m}$  où  $a$  est un réel notons par

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ mh=x-a}} f_h^{(-p)}(x) = G_a^{-p} f(x) \quad (2.12)$$

Donc

$${}_{Gl}D_a^{-p} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{-p}} \sum_{k=0}^m \binom{p}{k} f(x - kh) \quad (2.13)$$

## 2.2.2 Représentation intégrale de ${}_{Gl}D_a^{-p} f(x)$

· Si on prend  $p = 1$  dans la formule (2.13)

on trouve

$$f_h^{(-1)}(x) = h \sum_{k=0}^m f(x - kh) \quad (2.14)$$

En tenant compte de  $x - nh = a$  et  $f$  est continue alors :

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(-1)}(x) = {}_a D^{-1} f(x) = \int_0^{x-a} f(x-z) dz = \int_a^x f(t) dt \quad (2.15)$$

· Pour  $p = 2$  dans ce cas  $\binom{2}{k} = \frac{2(2+1)\dots(2+k-1)}{k!} = k + 1$

donc

$$f_h^{(-2)}(x) = h \sum_{k=0}^m (k+1) h f(x - kh) \quad (2.16)$$

qui peut s'écrire

$$f_h^{(-2)}(x) = h \sum_{k=1}^{m+1} (kh) f(y - kh) \quad (2.17)$$

où  $y = x - h$

si en faisant tendre  $h$  vers  $(0)$ , nous aurons

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(-2)}(x) = {}_a D^{-2} f(x) = \int_0^{x-a} z f(x-z) dz = \int_a^x (x-t) f(t) dt \quad (2.18)$$

Et par recurrence on peut généraliser les formules (2.15) et (2.18) sous la forme suivante :

$${}_G I D_a^{-p} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^p \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} f(x - kh) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^x (x-t)^{p-1} f(t) dt \quad (2.19)$$

### Représentation d'une intégrale répétée p-fois

On a :

$$\frac{d}{dx} ({}_G I D_a^{-p} f(x)) = \frac{1}{(p-2)!} \int_a^x (x-t)^{p-2} f(t) dt = {}_G I D_a^{-p+1} f(x) \quad (2.20)$$

En intégrant la relation (2.20) de  $a$  à  $x$  on obtient

$${}_G I D_a^{-p} f(x) = \int_a^x ({}_G I D_a^{-p+1} f(t)) dt$$

$${}_{GI}D_a^{-p+1}f(x) = \int_a^x ({}_{GI}D_a^{-p+2}f(t)) dt$$

Et ainsi

$$\begin{aligned} {}_{GI}D_a^{-p}f(x) &= \int_a^x dt \int_a^x ({}_{GI}D_a^{-p+2}f(t)) dt \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \underbrace{\int_a^x dt \int_a^x \dots \int_a^x f(t) dt}_{p\text{-fois}} \end{aligned} \tag{2.21}$$

**En bref**

On a l'expression générale suivante : pour tout entier relatif  $p$

$${}_{GI}D_a^p f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-p} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{p}{k} f(x - kh) \tag{2.22}$$

Qui représente :

1—La dérivée d'ordre entier  $n$  si  $p = n$  c'est à dire

$${}_{GI}D_a^n f(x) = f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh) \tag{2.23}$$

2—L'intégrale répétée  $n$ -fois si  $p = -n$

$$\begin{aligned} {}_{GI}D_a^{-n} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} h^n \sum_{k=0}^m \binom{n}{k} f(x - kh) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \\ &= \underbrace{\int_a^x dt \int_a^x \dots \int_a^x f(t) dt}_{n\text{-fois}} \end{aligned} \tag{2.24}$$

### 2.2.3 Extention de la dérivation d'ordre entier à l'ordre réel

Si on prend le cas négatif de  $p$  comme nous avons vu dans (2.19)

$${}_G I_a^{-n} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^n \sum_{k=0}^m \binom{n}{k} f(x - kh) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (2.25a)$$

pour tout entier  $n$

pour généraliser cette formule à une valeur réelle  $\alpha$  on a besoin du théorème suivant :

#### Théorème 2.1(A.V.Letnikov)

Prenons une suite  $(\beta_k)_{k=1,2,\dots}$  et supposons que

$$l \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 1$$

$$l \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n,k} = 0 \quad \text{pour tout } k$$

$$l \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} = A \quad \text{pour tout } k$$

$$\sum_{k=1}^n |\alpha_{n,k}| < K \quad \text{pour tout } n$$

Alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} \beta_k = A$$

En appliquant ce théorème et prenant en compte la généralisation de la factorielle par la fonction **Gamma** (voir l'annexe 1), **Letnikov** généralise le résultat (2.25a) on

conclut

$${}_{GI}D_a^{-\alpha} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \sum_{k=0}^m \binom{\alpha}{k} f(x - kh) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (2.26)$$

Si la dérivée  $f'(x)$  est continue dans  $[a, b]$ , alors en intégrant par parties on peut écrire (2.26)

$${}_{GI}D_a^{-\alpha} f(x) = \frac{f(a)(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^\alpha f'(t) dt \quad (2.27)$$

Et si la fonction  $f(x)$  est de classe  $C^m$  alors

$${}_{GI}D_a^{-\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+m)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+m-1} f^{(m)}(t) dt \quad (2.28)$$

Où  $(m-1) \leq \alpha \leq m$

## 2.2.4 Dérivées d'ordre arbitraire :

Dans ce cas on prend  $p$  positive

$${}_{GI}D_a^\alpha f(x) = f^{(p)}(x) = \frac{d^p f(x)}{dx^p} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{p}{k} f(x - kh) = \lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(p)}(x)$$

En utilisant la propriété connue des coefficients de binôme

$$\binom{p}{k} = \binom{p-1}{k} + \binom{p-1}{k-1} \quad (2.29)$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned} f_h^{(p)}(x) &= \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{p-1}{k} f(x - kh) + \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{p-1}{k-1} f(x - kh) \\ &= (-1)^m \binom{p-1}{k} h^{-p} f(a) + h^{-p} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{p-1}{k} \Delta f(x - kh) \end{aligned}$$

où nous notons par  $\Delta f(x - kh) = f(x - kh) - f(x - (k + 1)h)$

En appliquant la formule (2.29) des coefficients de binôme répétée  $n$ -fois et après les calculs [8] on arrive à :

$$f_h^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{m-k} \binom{p-k-1}{m-k} h^{-p} \Delta^k f(a+kh) + h^{-p} \sum_{k=0}^{m-n-1} (-1)^k \binom{p-n-1}{k} h^{-p} \Delta^{n+1} f(x-kh) \quad (2.30)$$

Et en appliquant le théorème précédent, on arrive finalement à l'expression suivante (en remplaçant  $p$  par  $\alpha$ )

$${}_{GI}D_a^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m)} \int_a^x (x-t)^{m-1-\alpha} f^{(m)}(t) dt \quad (2.31)$$

où  $f^{(k)}(x)$  sont continuées pour tout  $0 \leq k \leq m-1$  et  $m-1 < \alpha < m$

## 2.2.5 Exemples

• **Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov de la fonction  $(x-a)^\beta$**

Où  $\beta$  est un nombre réel

**Premier cas ( l'ordre négatif)**

on a :

$${}_{GI}D_a^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad \text{telque } \alpha \text{ est un réel positif}$$

supposons que  $\beta > -1$  (pour la convergence de l'intégrale) et en appliquant la formule précédente pour la fonction  $(x-a)^\beta$  alors

$${}_{GI}D_a^{-\alpha} (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta dt \quad (2.32)$$

en faisant le changement de variable suivant

$$t = a + \xi(x - a) \quad (2.33)$$

l'expression (2.32) devient

$${}_{GI}D_a^{-\alpha} (x - a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x - a)^{\beta+\alpha} \int_a^x \xi^\beta (1 - \xi)^{\alpha-1} dt \quad (2.34)$$

Rappelons la fonction **Beta** est définie comme suit :

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1 - t)^{\beta-1} dt \quad (2.35)$$

Alors le résultat (2.34) devient

$${}_{GI}D_a^{-\alpha} (x - a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} B(\beta + 1, \alpha) (x - a)^{\beta+\alpha} = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + \alpha + 1)} (x - a)^{\beta+\alpha} \quad (2.36)$$

### Deuxième cas (l'ordre positif)

Considérons maintenant le cas  $0 \leq m - 1 \leq \alpha \leq m$  et appliquons la formule (2.31) avec  $\beta > m - 1$

$${}_{GI}D_a^\alpha (x - a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(-\alpha + m)} \int_a^x (x - t)^{m-1-\alpha} \frac{d^m (t - a)^\beta}{dt^m} dt \quad (2.37)$$

En tenant compte de :

$$\frac{d^m (t - a)^\beta}{dt^m} = \beta(\beta - 1) \dots (\beta - m) (t - a)^{\beta-m} = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\beta - m - 1} (t - a)^{\beta-m-2} \quad (2.38)$$

Et en faisant le même changement de variable(2.33) on trouve :

$${}_{GI}D_a^\alpha (x - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (x - a)^{\beta-\alpha} \quad (2.39)$$

- **Cas particulier** (Dérivée d'une Constante)

$${}_{Gl}D_a^\alpha(C) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha-1} C dt = \frac{C}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha-1} dt = \frac{C}{\Gamma(-\alpha+1)} (x-a)^{-\alpha} \quad (2.40)$$

## 2.2.6 Propriétés :

Les dérivées fractionnaires de **Grünwald-Letnikov** vérifient les propriétés de compositions suivantes

- Les deux opérateurs  $\frac{d^n}{dx^n}$  et  ${}_{Gl}D_a^\alpha$  commutent dans le cas  $f^{(k)}(a) = 0, (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ .

$$\frac{d^n}{dx^n} ({}_{Gl}D_a^\alpha f(x)) = {}_{Gl}D_a^\alpha \left( \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right) = {}_{Gl}D_a^{\alpha+n} f(x) \quad (2.41)$$

- Avec la même condition  $f^{(k)}(a) = 0, (k = 0, 1, 2, \dots, p-1)$ , on trouve :

$${}_{Gl}D_a^\alpha ({}_{Gl}D_a^\beta f(x)) = {}_{Gl}D_a^{\alpha+\beta} f(x) \quad (2.42)$$

mais dans ce cas  $p = \max(n, m)$  avec  $0 \leq m-1 < \alpha < m$  et  $0 \leq n-1 < \beta < n$

## 2.3 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

### 2.3.1 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$

Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a, b]$  et  $-\infty < a < x < b < +\infty$  on considère l'intégrale

$$I^{(1)}f(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (2.43)$$



$$I^{(2)} f(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(u) du = \int_a^x (x-t) f(t) dt \quad (2.44)$$

Et par récurrence on peut montrer que

$$I^{(n)} f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t) dt \quad (2.45)$$

pour tout entier  $n$

cette formule est appelée formule de **Cauchy**

et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma :  $(n-1)! = \Gamma(n)$ ,

**Riemann** rendu compte que le second membre de (2.45) pourrait avoir un sens même quand  $n$  prenant une valeur non-entière, il était naturel de définir l'intégration fractionnaire comme suit :

**Définition 2.1**

si  $f(x) \in C[a, b]$  et  $a < x < b$

• L'intégrale

$$I_{a+}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt \quad \text{telle que } \alpha \in ]-\infty, +\infty[ \quad (2.46)$$

est appelée intégrale fractionnaire (à gauche) de **Riemann -Liouville** d'ordre  $\alpha$

• Et l'intégrale

$$I_{b-}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt \quad \text{telle que } \alpha \in ]-\infty, +\infty[ \quad (2.47)$$

est appelée intégrale fractionnaire (à droite) de **Riemann -Liouville** d'ordre  $\alpha$

**Remarque 2.2**

Dans tout ce qui suit au chapitre on utilise uniquement l'intégrale(à gauche).

**Théorème 2.2**

Pour  $f(x) \in C[a, b]$  L'intégrale fractionnaire de Riemann -Liouville possède la propriété de semi-groupe

$$I_a^{(\alpha)} [I_a^\beta f(x)] = I_a^{\alpha+\beta} f(x) \quad \text{pour } \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0 \tag{2.48}$$

**Preuve** :la preuve découle directement de la définition :

$$I_a^{(\alpha)} [I_a^\beta f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha-1}} \int_a^t \frac{f(u)}{(t-u)^{1-\beta}} du \tag{2.49}$$

Or  $f \in C[a, b]$  et d'après le théorème de **Fubini** on peut changer l'ordre de l'intégration on pose

$t = u + s(x - u)$  on obtient

$$I_a^{(\alpha)} [I_a^\beta f(x)] = \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{f(u)}{(x-u)^{1-\alpha-\beta}} du = I_a^{\alpha+\beta} f(x) \tag{2.50}$$

Telque  $B(\alpha, \beta)$  désigne la fonction Beta (voir l'annexe 1)

**2.3.2 Dérivée fractionnaire sur intervalle  $[a, b]$**

**Riemann** réalise le lien entre l'intégrale fractionnaire et la dérivée fractionnaire à partir de la solution de l'équation intégrale **d'Abel** pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$

Soit l'équation

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt \quad \dots\dots\dots x > 0 \tag{2.51}$$

formellement l'équation (2.51) peut être résolue en changeant  $x$  par  $t$  et  $t$  par  $s$  et on multiplie l'équation par  $(x-t)^{-\alpha}$  et en l'intégrant donc (2.51) devient

$$\int_a^x (x-t)^{-\alpha} dt \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(s) ds = \Gamma(\alpha) \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt \tag{2.52}$$

en appliquant le théorème de **FUBINI**

$$\int_a^x \varphi(s) ds \cdot \int_a^x (x-t)^{-\alpha} (t-s)^{\alpha-1} dt = \Gamma(\alpha) \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt \quad (2.53)$$

Avec le changement de variable  $t = s + \tau(x-s)$  et la fonction **Beta** on trouve

$$\int_a^x \varphi(s) ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt \quad (2.54)$$

après la différentiation on arrive finalement à l'expression

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt \quad (2.55)$$

**Définition 2.2**

Pour  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $a < x < b$

l'expression : 
$$D_{a+}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt \quad (2.56)$$

est appelée la dérivée fractionnaire de **Riemann-Liouville** (à gauche)

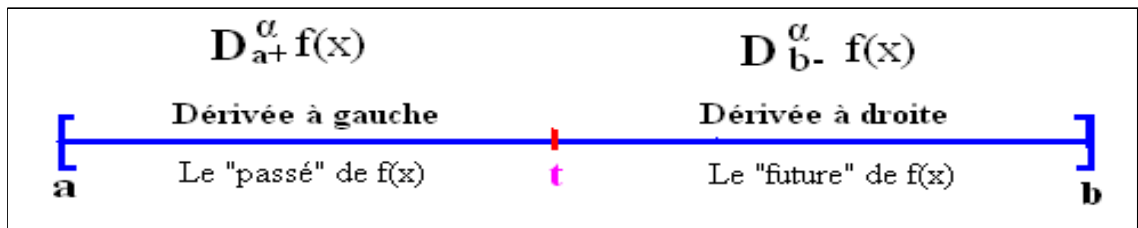


FIG. 2-1 – Les dérivées à droite et à gauche comme opérations sur le "passé" et le "future" de  $f(t)$

### 2.3.3 Généralisation

Prenons maintenant  $m - 1 \leq \alpha < m$ , donc  $\alpha = (m - 1) + \beta$  tel que  $0 < \beta < 1$  c'est à dire  $(m - 1)$  est la partie entière de  $\alpha$  et  $\beta$  son reste

#### Définition 2.3

Si  $\alpha > 0$  n'est pas un entier, alors nous définissons

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha} f(x) &= D_{a+}^{(m-1)+\beta} f(x) = \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \left[ D_{a+}^{\beta} f(x) \right] \\ &= \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \left[ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\beta} f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_a^x (x-t)^{m-1-\alpha} f(t) dt \end{aligned}$$

Alors :

$$D_{a+}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_a^x (x-t)^{m-1-\alpha} f(t) dt \quad (2.57)$$

pour toute  $f \in C^m([a, b])$

- D'autre part, si  $\alpha < 0$  on note par  $D_{a+}^{(\alpha)} f = I_a^{-\alpha} f$ , la définition peut être aussi appliquée et  $D_{a+}^{(\alpha)} f$  existe pour toute  $f \in C([a, b])$  et pour toute  $x \in [a, b]$ .

- On remarque également que, pour  $\alpha > 0$ ,  $D_{a+}^{(\alpha)} f$  existe certainement pour tous les  $f \in C^m([a, b])$  et  $x \in ]a, b]$

( pas nécessairement pour  $x = a$ ), pour voir cela, on applique la formule de **Taylor** avec reste :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + \frac{1}{(m-1)!} \int_a^x \frac{f(t)^{(m)}}{(x-t)^{m-1}} dt, \quad \forall x \in [a, b]$$

En remplaçant dans la définition de  $D_{a+}^{(\alpha)} f$  et après la généralisation de la factorielle par la fonction **Gamma**

$$D_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{d^m}{dx^m} \left( \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a) (x-a)^{k+1-\beta}}{\Gamma(k+2-\beta)} + \frac{1}{\Gamma(m+1-\beta)} \int_a^x f(t)^{(m)} \times (x-t)^{m-\beta} dt \right)$$

Il est clair que cette dérivée  $m^{\text{ème}}$  peut être effectuée pour tous les  $x \in [a, b]$ , en particulier l'intégrale ne pose pas de problème puisque  $f^{(m)} \in C([a, b])$  et depuis l'exposant

$m - \beta$  est plus grand que  $m - 1$ , de sorte que  $\frac{d^k}{dx^k}(x - t)^{m-\beta}$  est intégrable pour tout  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  ce qui prouve notre assertion.

Et après la simplification nous obtenons :

$$D_a^{(\alpha)} f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a) (x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt \quad (2.58)$$

**Cas particulier :**

pour :  $0 < \alpha < 1$

$$D_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{f(a) (x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f'(t) dt \quad (2.59)$$

Pour plus de commodité dans les théorèmes plus tard, nous définissons les éléments suivants

**Définition 2.4 (espace utile)**

Pour  $\alpha > 0$ , on note par  $I_{a+}^\alpha([a, b])$  l'espace des fonctions qui peuvent être représentées par un **R-L** intégrale d'ordre  $\alpha$  pour les fonctions  $C([a; b])$ .

**Théorème 2.3** [62]

On prend  $f \in C([a; b])$  et  $(m-1) \leq \alpha < m$ , de sorte que  $f(x) \in I_{a+}^\alpha([a, b])$ ,

il est nécessaire et suffisant que

$$I_{a+}^{m-\alpha} f \in C^m([a; b]) \quad (2.60)$$

Et que

$$\left( \frac{d^k}{dx^k} I_{a+}^{m-\alpha} f(x) \right)_{x=a} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (2.61)$$

### Théorème 2.4 [62]

- Si  $(n - 1) \leq \alpha < n$

$$D_a^\alpha I_{a+}^\alpha f(x) = f(x) \quad \text{pour toute fonction} \quad f \in C([a; b]) \quad (2.62)$$

- Si  $(n - 1) \leq \alpha < n$  et  $f \in C^n([a; b])$  et de plus  $f$  vérifie la condition du (théorème 2.2) alors

$$I_{a+}^\alpha D_a^\alpha f(x) = f(x) \quad (2.63)$$

Si non

$$I_{a+}^\alpha D_a^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} \frac{d^{m-k-1}}{dx^{m-k-1}} (I_{a+}^{m-\alpha} f(x)) \quad (2.64)$$

- En particulier

pour  $0 < \alpha < 1$

$$I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha f(x) = f(x) - \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ({}_{a+}^{1-\alpha} f(x)) \quad (2.65)$$

Et pour  $\alpha = m$  on a :

$$I_{a+}^m D_{a+}^m f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a) (x-a)^k}{k!} \quad (2.66)$$

### 2.3.4 Propriétés

On rappelle quelques propriétés utiles dans la suite de ce travail, on renvoie au livre de Podlubny [53] pour plus de détails

- On a

$$\frac{d^n}{dt^n} (D_a^\alpha f(t)) = D_a^{n+\alpha} f(t) \quad (2.67)$$

Par contre , on a

$$D_a^\alpha \left( \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = D_a^{n+\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma(1+k-\alpha-n)} \quad (2.68)$$

La dérivée de Riemann-Liouville commute donc avec la dérivée usuelle, si et seulement si,  $f^{(k)}(a) = 0$  pour  $k = 0, \dots, n-1$ .

•—On a aussi les formules de composition suivantes :

Soit  $m-1 \leq \alpha < m$  et  $n-1 \leq \beta < n$ , alors

$$D_a^\alpha (D_a^\beta f(t)) = D_a^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{k=1}^n [D_a^{\beta-k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma(1-\alpha-k)} \quad (2.69)$$

$$D_a^\beta (D_a^\alpha f(t)) = D_a^{\alpha+\beta} [D_a^{\alpha-k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-\beta-k}}{\Gamma(1-\beta-k)} \quad (2.70)$$

on voit sans peine qu'en général les dérivées de Riemann-Liouville ne commutent pas entre elles . Elles commutent si et seulement si,  $f^{(k)}(a) = 0$  pour  $k = 0, \dots, r-1$ . avec  $r = \max(m, n)$

### 2.3.5 Intégration et dérivation sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}$ .

Il est naturel d'étendre la notion d'intégrale et de dérivée fractionnaire de **Riemann-Liouville** aux axes  $\mathbb{R}^+$  et  $\mathbb{R}$ .

Leurs constructions correspondantes à ceux de (2.46) et (2.57) ont la forme suivante :

• Sur  $\mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} I_{0+}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt & x > 0 \\ D_{0+}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_0^x (x-t)^{m-1-\alpha} f(t) dt \end{cases} \quad (2.71)$$

• Sur  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{cases} I_+^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt & x \in \mathbb{R} \\ D_+^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_{-\infty}^x (x-t)^{m-1-\alpha} f(t) dt \end{cases} \quad (2.72)$$

### 2.3.6 Exemples

$f(x)$	$I_{a+}^{(\alpha)} f(x)$	$D_{a+}^{(\alpha)} f(x)$	Spécifications
$(x-a)^\beta$	$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta}$	$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(-\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}$	$a \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0, \beta > -1$
$C$	$\frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} (x-a)^\alpha$	$\frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}$	$a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$
$e^{\lambda x}$	$\lambda^{-\alpha} e^{\lambda x}$	$\lambda^{+\alpha} e^{\lambda x}$	$a = -\infty, \alpha > 0, \lambda > 0$
$e^{-\lambda x}$	$\lambda^{-\alpha} e^{-\lambda x}$	$\lambda^\alpha e^{-\lambda x}$	$a = +\infty, \alpha > 0, \lambda > 0$

(2.73)

### 2.3.7 Lien avec l'approche de Grünwald-Letnikov.

On peut vérifier facilement que si  $f$  est  $(n)$ -fois continûment différentiable dans l'intervalle  $[a; b]$ , et que  $f^{(n)}(t)$  est intégrable, la dérivée au sens **Riemann-Liouville**, existe et coïncide avec la dérivée au sens de **Grünwald-Letnikov**.

## 2.4 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

### 2.4.1 Introduction

La définition de la différentiation fractionnaire de type **Riemann-Liouville** a joué un rôle important dans le développement de la théorie des dérivées et intégrales fractionnaires et pour son application dans les mathématiques pures (solutions des équations différentielles d'ordre entier, définition de nouvelles classes de fonction, sommation des séries....). Cependant, la technologie moderne demande une certaine révision de l'approche mathématique pure bien connue. De nombreux travaux ont apparus, spécialement dans la théorie de visco-élasticité et des mécaniques du solide, où les dérivées fractionnaires sont utilisées pour une bonne description des propriétés des matériaux. Une modélisation



mathématique est basée sur les modèles rhéologiques même naturellement à des équations différentielles d'ordre fractionnaire, et à la nécessité de la formulation des conditions initiales de telles équations. Les problèmes, appliqués demandent des définitions de dérivées fractionnaires autorisant l'utilisation des conditions initiales interprétables physiquement, lesquelles contiennent  $f(a)$ ,  $f'(a)$ , etc... Malgré le fait que des problèmes aux valeurs initiales avec de telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement (voir, par exemple solutions données dans [50]) La solution de ce problème a été proposée par **M. Caputo** (dans les années soixante) dans sa définition, qu'il a adapté avec **Mainardi** dans la structure de la théorie de visco-élastiques [64]

Donc on introduit une dérivée fractionnaire qui est plus restrictive que celle de **Riemann-Liouville**. [8]

### Définition 2.5

Soient  $(D_{a+}^{\alpha}f)(x)$  et  $(D_{b-}^{\alpha}f)(x)$  les deux dérivées qui sont définis précédemment

On définit la dérivée fractionnaire de **Caputo** qu'on la note par :  $({}^cD_{a+}^{\alpha}f)(x)$  et  $({}^cD_{b-}^{\alpha}f)(x)$  respectivement, comme suit :

$$\text{Dérivée gauche} \quad ({}^cD_{a+}^{\alpha}f)(x) = \left( D_{a+}^{\alpha} \left[ f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a) (x-a)^k}{k!} \right] \right) (x) \quad (2.74)$$

$$\text{Dérivée droite} \quad ({}^cD_{b-}^{\alpha}f)(x) = \left( D_{b-}^{\alpha} \left[ f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(b) (b-t)^k}{k!} \right] \right) (x) \quad (2.75)$$

Où  $m = [\alpha] + 1$  pour  $\alpha \notin \mathbb{N}$ ;  $m = \alpha$  pour  $\alpha \in \mathbb{N}$  tels que  $[\alpha]$  est la partie entière de  $\alpha$

- En particulier si  $0 < \alpha < 1$

$$({}^cD_{a+}^{\alpha}f)(x) = (D_{a+}^{\alpha} [f(x) - f(a)]) (x) \quad (2.76)$$

$$({}^c D_{b-}^\alpha f)(x) = (D_{b-}^\alpha [f(x) - f(b)])(x) \quad (2.77)$$

### Remarque 2.3

Pour éviter la répétition, on va étudier uniquement la dérivée (à gauche)  $({}^c D_{a+}^\alpha f)(x)$

• Si  $\alpha \notin \mathbb{N}$  et  $f(x)$  une fonction pour laquelle  $({}^c D_{a+}^\alpha f)(x)$  coexiste avec  $(D_{a+}^\alpha f)(x)$ , alors, ils sont reliés les uns avec les autres par la suite de relations :

$$({}^c D_{a+}^\alpha f)(x) = (D_{a+}^\alpha f)(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (x - a)^{k-\alpha} \quad (2.78)$$

En particulier, si  $0 < \alpha < 1$ , on a :

$$({}^c D_{a+}^\alpha f)(x) = (D_{a+}^\alpha f)(x) - \frac{f(a)}{\Gamma(1 - \alpha)} (x - a)^{-\alpha} \quad (2.79)$$

• Dans le cas où  $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0$ , la dérivée au sens de **Caputo** coïncide avec celle de **Riemann-Liouville** pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  c'est à dire :

$$({}^c D_{a+}^\alpha f)(x) = (D_{a+}^\alpha f)(x) \quad (2.80)$$

### Théorème 2.5

pour  $(m - 1) \leq \alpha \leq m$

Si  $f(x) \in C^m([a, b])$  la dérivée  $({}^c D_{a+}^\alpha f)(x)$  existe presque partout sur  $[a, b]$ .

(a) Si  $\alpha \notin \mathbb{N}$  la dérivée  $({}^c D_{a+}^\alpha f)(x)$  peut être représentée par :

$$({}^c D_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^x \frac{f^{(m)}(t)}{(x - t)^{\alpha+1-m}} dt = (I_{a+}^{m-\alpha} D^m f)(t) \quad (2.81)$$

En particulier, si  $0 < \alpha < 1$  et  $f(x) \in C[a, b]$

$$({}^c D_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha} dt = (I_{a+}^{1-\alpha} Df)(t) \quad (2.82)$$

(b) Si  $\alpha = m \in \mathbb{N}$

$$({}^c D_{a+}^\alpha f)(x) = f^m(x)$$

**preuve** (voir [64] )

## 2.4.2 Dérivée d'une constante

Il est bien claire que avec cette définition de Caputo la dérivée d'une constante est nulle

c'est à dire :

$$({}^c D_{a+}^\alpha C)(x) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.83)$$

Toutefois, la majorité des propriétés cités précédemment restent valables au cas du **Caputo**

### Remarque 2.4

Comme dans le cas des dérivées de **R-L**, on peut aussi étendre la définition de dérivées au sens de **Caputo** à  $\mathbb{R}^+$  et à l'axe réel  $\mathbb{R}$  Comme suit :

$$({}^c D_{0+}^\alpha C)(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x \frac{f^{(m)}(t)}{(x-t)^{\alpha+1-m}} dt = (I_{0+}^{m-\alpha} D^m f)(t) \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad (2.84)$$

$$({}^c D_{0-}^\alpha C)(x) = \frac{(-)^n}{\Gamma(m-\alpha)} \int_x^\infty \frac{f^{(m)}(t)}{(t-x)^{\alpha+1-m}} dt = (I_{0-}^{m-\alpha} D^m f)(t) \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad (2.85)$$

$$({}^c D_+^\alpha C)(x) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f^{(m)}(t)}{(x - t)^{\alpha+1-m}} dt = (I_+^{m-\alpha} D^m f)(t) \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.86)$$

$$({}^c D_-^\alpha C)(x) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_x^\infty \frac{f^{(m)}(t)}{(x - t)^{\alpha+1-m}} dt = (I_-^{m-\alpha} D^m f)(t) \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.87)$$

## 2.5 Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville

Nous avons vu que la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et celle de Caputo sont reliées par la formule :

$$(D_{a+}^\alpha f)(x) = ({}^c D_{a+}^\alpha f)(x) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (x - a)^{k-\alpha} \quad (2.88)$$

- L'avantage principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier, c'est à dire, contiennent les valeurs limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieure  $x = a$ .

- Afin de souligner la différence entre la forme des conditions initiales lesquelles doivent accompagner des équations différentielles en termes des dérivées de Riemann-Liouville et de Caputo, rappelons les formules des transformées de Laplace correspondantes pour  $a = 0$ .

La formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est

$$\int_0^{\infty} \exp(-st) \{ {}_0D_t^\alpha f(t) \} dt = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k [ {}_0D_t^{\alpha-k-1} f(t) ]_{t=0}, (m-1) \leq \alpha \leq m \quad (2.89)$$

quant à la formule de Caputo, obtenue pour la transformée de Laplace de la dérivée de Caputo est

$$\int_0^{\infty} \exp(-st) \{ {}_0^c D_t^\alpha f(t) \} dt = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} [ f^{(k)}(0) ] \quad , (m-1) \leq \alpha \leq m \quad (2.90)$$

• Une autre différence entre la définition de Riemann et celle de Caputo est que la dérivée d'une constante est nulle par **Caputo**(2.83) par contre par **Riemann-Liouville** elle est  $\frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}$  comme nous l'avons vu dans (2.73)

• Graphiquement, on peut dire que le chemin suit pour arriver à la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est également l'inverse quand on suit les autres sens (**Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov**) comme le montre la figure c'est à dire :

Pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  où  $m-1 \leq \alpha \leq m$  par l'approche de **Riemann-Liouville** ou par **Grünwald-Letnikov**, on commence d'abord par l'intégration fractionnaire d'ordre  $(m-\alpha)$  pour la fonction  $f(x)$  et puis on dérive le résultat obtenu à l'ordre entier  $m$

Mais pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  où  $m-1 \leq \alpha \leq m$  par l'approche de **Caputo** on commence par la dérivée d'ordre entier  $m$  de la fonction  $f(x)$  et puis on l'intègre d'ordre fractionnaire  $(m-\alpha)$

## 2.6 Propriétés générales des dérivées fractionnaires

1. **Linearité** Pareillement à la différentiation d'ordre entier, la différentiation fractionnaire est une opération linéaire :

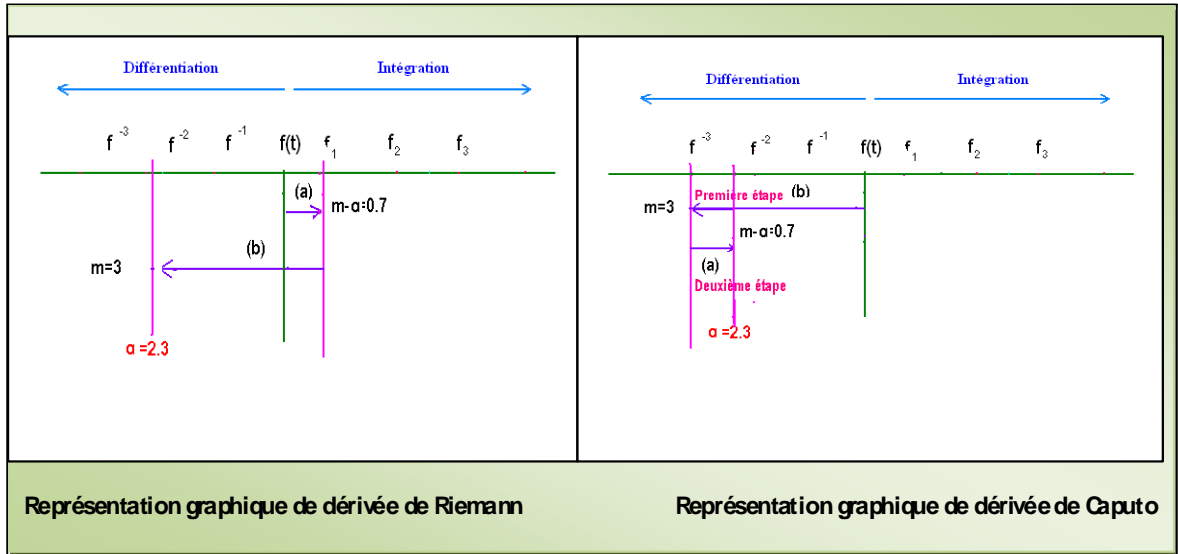


FIG. 2-2 – Différence entre l'approche de Riemann et l'approche de Caputo

$$D^\alpha (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^\alpha f(t) + \mu Dg(t) \quad (2.91)$$

## 2. La règle de Leibniz pour les dérivées fractionnaires

Si  $f(t)$  et  $\varphi(t)$  deux fonctions avec toutes ses dérivées sont continues dans  $[a, T]$  la règle de **Leibniz** pour la différentiation fractionnaire prend la forme :

$$D^\alpha (\varphi(t)f(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \varphi^{(k)}(t) D^{\alpha-k} f(t) \quad (2.92)$$

## 2.7 Transformées de Laplace des dérivées fractionnaires

Rappelons que la transformée de Laplace d'une fonction  $f(t)$  est la fonction  $F(s)$  définie comme suit :

$$F(s) = L\{f(t); s\} = \int_0^{\infty} \exp(-st)f(t)dt \quad (2.93)$$

$f(t)$  est appelée originale qui peut être reconstituée à partir de la transformée de Laplace inverse

$$f(t) = L^{-1}\{F(s); t\} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(st)F(s)ds \quad , c = Re(s) > 0 \quad (2.94)$$

### 2.7.1 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

En tenant compte que la transformée de laplace de la convolution est :

$$L\{f(t) * g(t) : s\} = F(s)G(s) \quad (2.95)$$

où  $f(t)$  et  $g(t)$  sont deux fonctions nules pour  $t < 0$  et  $F(s)$  et  $G(s)$  leurs transformées

En utilisant la propriété de la transformée de Laplace suivante :

$$L\{f^n(t); s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \quad (2.96)$$

voir l'annexe (2)

on arrive à la formule suivante :

$$L\{{}_0D^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [{}_0D^{(\alpha-k-1)} f(t)]_{t=0} \quad (n-1 \leq \alpha \leq n) \quad (2.97)$$

#### Remarque 2.4 :

Cette transformée est bien connue (voir par exemple, [52]) Cependant son application pratique est limitée par l'absence de l'interprétation physique des valeurs limites des

dérivées en borne inférieure  $t = 0$

### 2.7.2 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo

En utilisant la formule de la transformée de Laplace de l'intégrale de Riemann-Liouville et les mêmes propriétés précédentes, on arrive à la formule suivante :

$$L\{ {}_0^c D^\alpha f(t); s \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \quad (n-1 \leq \alpha < n) \quad (2.98)$$

Comme cette formule de la transformée de Laplace de la dérivée de Caputo induit les valeurs de la fonction  $f(t)$  et ses dérivées en la borne inférieure  $t = 0$ , pour laquelle une certaine interprétation physique existe, on peut espérer qu'il pourrait être utile pour la résolution des problèmes appliqués conduisant aux équations différentielles fractionnaires à coefficients constants accompagnées de conditions initiales dans leur forme traditionnelle.

### 2.7.3 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov

- Dans le premier cas où  $0 < \alpha < 1$ , on a vu que la dérivée (sur  $\mathbb{R}^+$ ) peut s'écrire sous la forme :

$${}_{Gl}D_{0+}^\alpha f(x) = \frac{f(0) (x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} f(t)' dt \quad (2.99)$$

En utilisant la transformée de Laplace de la fonction polynôme et celle de convolution on obtient :

$$L\{ {}_{Gl}D_{0+}^\alpha f(x) : s \} = \frac{f(0)}{s^{1-\alpha}} + \frac{1}{s^{1-\alpha}} (sF(s) - f(0)) = s^\alpha F(s) \quad (2.100)$$

- Si  $\alpha > 1$  la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de **Grünwald-**



**Letnikov** n'existe pas dans le sens classique, car dans un tel cas on a des fonctions non intégrables dans la somme de la formule (2.31)

## 2.8 Interprétation géométrique et physique des dérivées fractionnaires et ses applications

### 2.8.1 Introduction

Depuis l'apparition de l'idée de la différentiation et de l'intégration de l'arbitraire (pas nécessaire entier) il n'était pas acceptable toute interprétation géométrique et physique de ces options pendant plus de 300 ans. L'absence de ces interprétations est été reconnu lors de la première conférence internationale sur le calcul fractionnaire à New Haven (1974) mais le problème resté ouvert et la question est sans réponse, et donc répété à la seconde conférence à l'Université de Strathclyde (Royaume-Uni) en 1984 Et à l'Université Nihon (Tokyo, Japon) en 1989 La table ronde discussion lors de la conférence sur les méthodes de transformations des fonctions spéciales, à Varna (1996) ont montré que le problème n'ait pas encore été réglé, et depuis cette époque, la situation, en effet, n'avait toujours pas changé.

Une approche différente de l'interprétation géométrique des dérivées fractionnaires, fondé sur l'idée du contact de la  $\alpha$ -ème ordre, a été proposé par **F. Ben Adda** Cependant, il est difficile de parler au sujet d'une interprétation géométrique acceptable si l'on ne voit pas des photos.

En 2001/2002, **Podlubny** a suggéré une solution du problème- de plus de 300 ans- de l'interprétation géométrique des intégrales fractionnaires cet approche est donnée en termes d'échelle de temps de changer constamment l'ordre de l'intégration, et aussi dans un cas de variant ordre de l'intégration avec le paramètre temps constant.[8]

## 2.8.2 Interprétation des intégrales fractionnaires à gauche de Riemann-Liouville (Approche de podlubny)

Dans cette section, nous donnons des interprétations concernant les intégrales fractionnaires à gauche au sens de Riemann-Liouville.

On considère donc l'intégrale fractionnaire d'ordre  $\alpha$  suivante

$$I_{a+}^{(\alpha)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{(\alpha-1)} f(\tau) d\tau \quad t \geq a \quad (2.101)$$

cette dernière intégrale peut être réécrite sous la forme

$$I_{a+}^{(\alpha)} f(t) = \int_a^t f(\tau) dg_t(\tau) \quad (2.102)$$

Où :

$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \{t^\alpha - (t - \tau)^\alpha\} \quad (2.103)$$

Remarquons que la fonction  $g_t(\tau)$  possède une propriété d'échelle intéressante, en effet :

$t_1 = kt$  et  $\tau_1 = k\tau$  ( $k > 0$ ), alors

$$g_{t_1}(\tau_1) = g_{kt}(k\tau) = k^\alpha g_t(\tau) \quad (2.104)$$

1— Voyons d'abord l'intégrale (2.102) pour un  $t$  fixé, alors il devient tout simplement une intégrale de **Stieljes** et nous pouvons utiliser l'idée de **G.L.Bullock**, et prenons les axes  $\tau, g$  et  $f$ .

Dans le plan  $(\tau, g)$ , nous traçons la fonction  $g_t(\tau)$  pour  $0 \leq \tau \leq t$  Le long de la courbe obtenue on construit

une "clôture" de hauteur variant  $f(\tau)$ , de sorte que le bord supérieur de la "clôture" est une ligne tridimensionnelle  $(\tau, g_t(\tau), f(\tau))$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ . Cette "clôture" peut être projetée sur les deux surfaces :

- L'aire de la projection de cette clôture sur le plan  $(\tau, f)$  correspond à la valeur de l'intégrale

$$I_{at}^1 f(t) = \int_a^t f(\tau) d(\tau); t \geq a \quad (2.105)$$

- L'aire de la projection de la même clôture sur le plan  $(g, f)$  correspond à la valeur de l'intégrale (2.102), ou bien, qu'en est-il quant à la valeur de l'intégrale fractionnaire (2.101).

En d'autres termes, notre clôture jette deux ombres sur deux murs. Le premier d'entre eux, que sur le mur  $(\tau, f)$ , est bien connu : aire sous la courbe de  $f(\tau)$ , laquelle est une interprétation géométrique standard de l'intégrale fractionnaire (2.105). L'ombre sur le mur  $(g, f)$  est une interprétation géométrique de l'intégrale fractionnaire (2.101) pour  $t$  fixé.

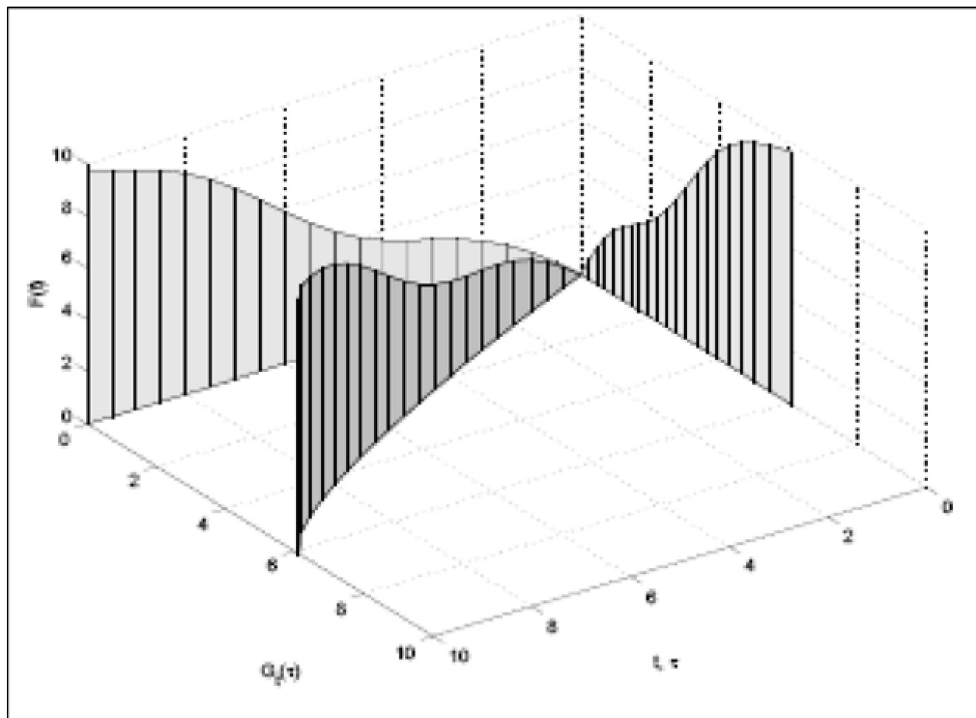


FIG. 2-3 – La "clôture" et ses projections :  $I_0^1 f(t)$  et  $I_0^\alpha f(t)$  pour  $\alpha = 0.75$ ,  $f(t) = t + 0.5 \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 10$

Il est évident que si  $\alpha = 1$ , alors  $g_t(\tau) = \tau$  et les deux «ombres» sont égaux. Cela montre que l'intégrale définie classique est un cas particulier aussi bien de l'intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville que du point de vue géométrique.

**2**– On se pose maintenant la question de savoir ce qui se passe lorsque  $t$  varie (croît). Comme  $t$  varie, la clôture varia également Sa longueur et, en certain sens, sa forme change voir **fig( 2-2)**.

Si on suit le changement de l'ombre sur le mur  $(g, f)$  qui est en train de changer en même temps que la clôture, donc on a une interprétation géométrique dynamique de l'intégrale fractionnaire(2.101) comme une fonction de la variable  $t$

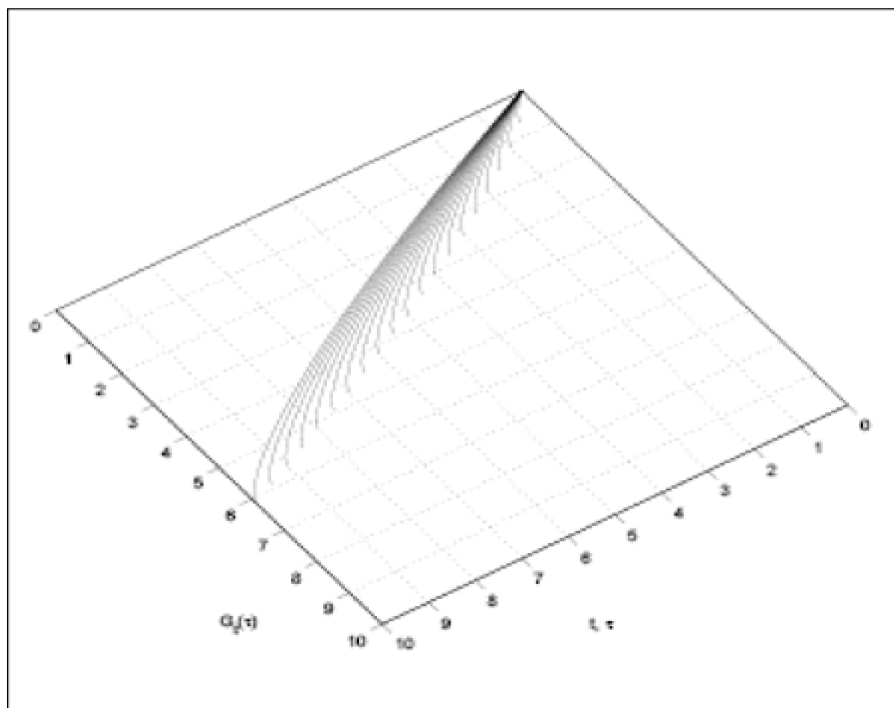


FIG. 2-4 – Le processus de changement de la forme de base de la barrière pour  $I_0^\alpha f(t)$ ,  $\alpha = 0.75, 0 \leq t \leq 10$

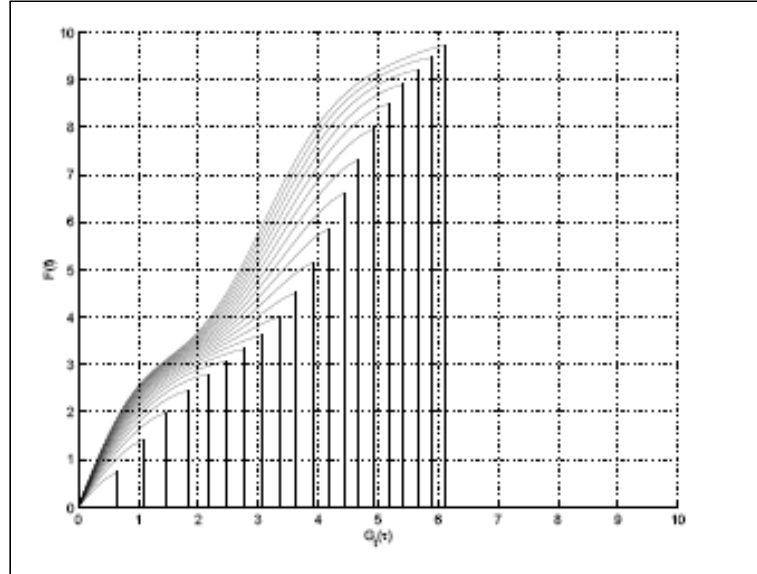


FIG. 2-5 – Le profil de changement de l'ombre dû au changement de la "barrière"

### 2.8.3 Intégrale fractionnaire à droite de Riemann-Liouville

Considérons maintenant l'intégrale fractionnaire à droite de Riemann-Liouville

$$I_{0t}^{(\alpha)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau - t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t \leq b \quad (2.106)$$

qui aussi l'on réécrit sous la forme

$$I_{0t}^{(\alpha)} f(t) = \int_t^b f(\tau) dh_t(\tau) \quad (2.107)$$

où

$$h_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \{t^\alpha - (\tau - t)^\alpha\} \quad (2.108)$$

En suite, on peut donner une interprétation géométrique semblable à l'interprétation géométrique de l'intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville. Cependant, dans ce cas il n'y a aucun point fixe dans la base de la clôture la borne inférieure, correspondant à  $\tau = b$  parcourt la ligne  $\tau = b$  dans le plan  $(\tau, g)$  quand la barrière change de forme.

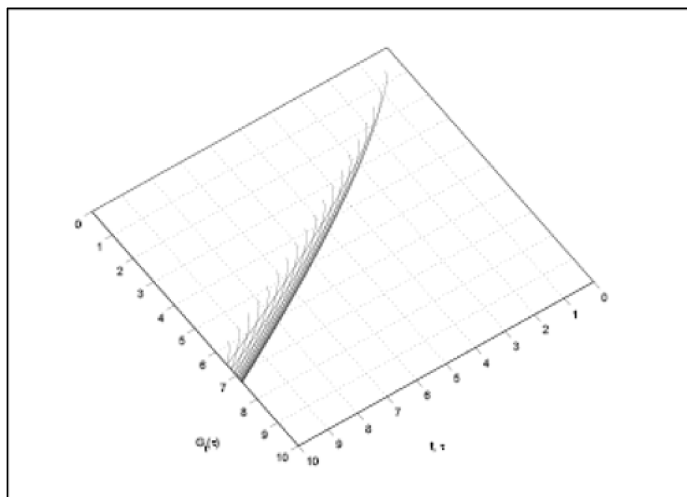


FIG. 2-6 – Le processus de changement de la forme de base de la barrière pour  $I_{10}^\alpha f(t)$ ,  $\alpha = 0.75, 0 \leq t \leq 10$

toutes les autres parties de l'interprétation géométrique restent les mêmes

Il est évident que si  $\alpha = 1$ , alors  $h(\tau) = \tau$ , et les deux «ombres» sont égales.

### 2.8.4 Interprétation physique de l'intégrale de Stieltjes.

Imaginez une voiture équipée de deux appareils de mesure : le compteur -Ainsi que l'enregistreur de la vitesse  $v(\tau)$ , et l'horloge qui devrait afficher l'heure  $T$ , nous supposons que la relation entre le mauvais temps  $\tau$ , qui est indiqué par l'horloge et dont le conducteur considère comme l'heure exacte, d'une part, et le vrai Temps  $T$ , d'autre part, est décrit par la fonction  $T = g_t(\tau)$ . Cela signifie que là où le conducteur de «mesures» de l'intervalle de temps  $d\tau$ , l'intervalle de temps réel est donnée par  $dT = dg(\tau)$ . Le conducteur, qui ne connaisse pas le mauvais fonctionnement de l'horloge, le calcul de la distance écoulée pour lui est l'intégrale classique :

$$S_A(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau \tag{2.109}$$

Cependant, l'observateur  $O$  connaissant de la mauvaise horloge et ayant la fonction

$g(\tau)$ , qui rétablit les valeurs correctes du temps à partir de la cabine de conduite  $T$  mauvais moment, le calcul de la distance réellement passée comme :

$$S_O(t) = \int_0^t v(\tau) dg(\tau) \quad (2.110)$$

Cet exemple montre que l'intégrale de Stieltjes (2.102) peut être interprété comme la véritable distance parcourue par un objet en mouvement, pour laquelle nous avons enregistré les valeurs corrigées de vitesse et de temps et des valeurs incorrectes, le rapport entre le temps  $\tau$  consigné incorrectement et le bon temps  $T$  est donnée par une fonction  $T = g(\tau)$ .

### 2.8.5 L'interprétation physique de l'intégrale fractionnaire

Considérons l'intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville

$$S_O(t) = \int_a^t v(\tau) dg(\tau) = I_a^\alpha v(t) \quad (2.111)$$

l'intégrale fractionnaire  $S_O(t)$  de la fonction  $v(t)$  peut être interprétée comme la vraie distance dépassé par un objet en mouvement, la fonction  $g(t)$  décrit l'échelle de temps non homogène, ce qui dépend non seulement de  $\tau$  mais aussi du paramètre  $t$ . quand  $t$  change, la totalité cosmique précédente intervalle du temps change également. Ceci est en accord avec les vues actuelles de la physique.

### 2.8.6 Interprétation géométrique et physique de dérivée Fractionnaire de Riemann-Liouville

D'autre part, nous pouvons utiliser les propriétés de la différentiation fractionnaire et de l'intégration et exprimer  $v(t)$  de l'équation (2.111) comme dérivée fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville de la  $S_O(t)$

$$V(t) = D_0^\alpha S_o(t) \quad (2.112)$$

où  $D_a^\alpha S_o(t)$  Désigne la dérivée fractionnaire à gauche de **Riemann-Liouville** pour  $0 < \alpha < 1$  et définie par

$$D_0^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^\alpha f(\tau) d\tau \quad (2.113)$$

Cela montre que la dérivée fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville de la vraie distance  $S_o(t)$  transmise par un objet en mouvement, pour laquelle la relation entre ses différents temps  $\tau$  et le temps cosmique  $T$  est donné par la fonction connue  $T = g_t(\tau)$  dicrite par (2.103) est égale à la vitesse à l'individu( $\tau$ ) de cet objet. D'autre part, nous pouvons distinguer la relation (2.111) avec respect à la variable temps cosmique  $t$ , ce qui donne la relation entre la vitesse  $V_0(t) = S_O^i(t)$  du mouvement du point de vue de l'indépendant observateur  $O$  et de l'individu vitesse  $v(t)$  :

$$V_0(t) = \frac{d}{dt} I_0^\alpha v(t) = D_0^{1-\alpha} S(t) \quad (2.114)$$

Par conséquent, le  $(1-\alpha)$ -ordre de dérivée de Riemann-Liouville de l'individule vitesse  $v(t)$  est égale à la vitesse  $V_0(t)$  du point de vue de l'observateur indépendant, si l'individu temps  $\tau$  et le temps cosmique  $T$

Sont liées par la fonction  $T = g_t(\tau)$  ,pour  $\alpha = 1$ , Quand il n'ya pas de déformation dynamique de l'échelle de temps, les deux vitesses coïncident :  $V_0(t) = v(t)$



## 2.9 Applications des dérivées fractionnaires

### 2.9.1 Champs d'application

Les applications de la méthode à dérivation fractionnaire dans les sciences physiques et les sciences de l'ingénieur relèvent des contributions scientifiques de ces dernières décennies, cette méthode est utilisée comme outil de modélisation dans plusieurs domaines[16], en mécanique et en rhéologie l'application de la méthode à dérivation fractionnaire pour modéliser le comportement des matériaux trouve une base théorique dans la théorie microstructurale de Rouse[14] d'une part et elle s'appuie sur les lois de la thermodynamique Bagley et Torvik[53] d'autre part. dans ce mémoire on présente un type d'application en rhéologie

#### Modèles rhéologiques simples

L'assemblage plus ou moins complexe des modèles rhéologiques de base constitués uniquement de ressorts ou d'amortisseurs visqueux **fig(2-5)** est utilisé habituellement pour décrire le comportement des corps viscoélastiques linéaires. On se limite ici au cas uni-dimensionnel.

•L'élasticité est définie par la loi de **Hooke** :

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) \quad (2.115)$$

Le ressort représente un élément élastique idéal :la contrainte  $\sigma$  est proportionnelle à la déformation  $\varepsilon$ .

•La loi du frottement visqueux de **Newton**

$$\sigma(t) = \eta\dot{\varepsilon}(t) \quad (2.116)$$

se représente par un amortisseur la contrainte  $\sigma$  est proportionnelle à la vitesse de déformation  $\dot{\varepsilon}$ .

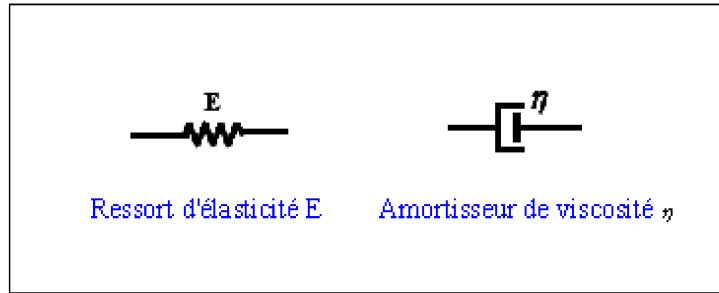


FIG. 2-7 – Ressort et amortisseur

En combinant ces éléments purement élastiques et purement dissipatifs, nous obtenons des modèles viscoélastiques linéaires **fig (2-6)** classiques de la littérature. Ils sont au nombre de trois :

- Kelvin-Voigt
- Maxwell
- Zener.

Pour chaque modèle, la loi de comportement liant contrainte-déformation et module complexe est rappelée.

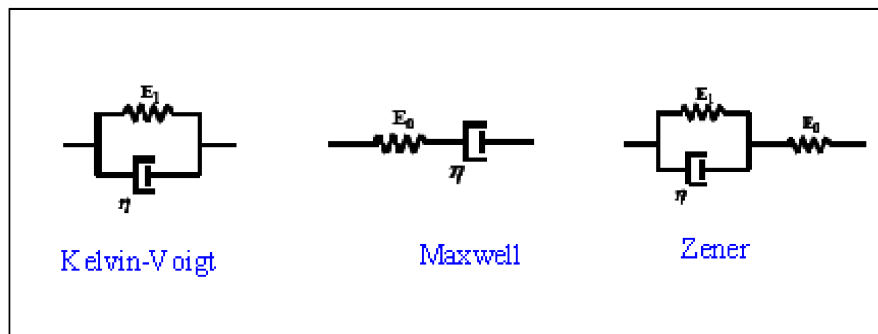


FIG. 2-8 – Les trois modèles visco-élastiques linéaires

## Modèle de Kelvin-Voigt

Ce modèle résulte de l'association en parallèle d'un ressort de module d'élasticité  $E_1$  et d'un amortisseur de viscosité  $\eta$ . L'équation différentielle de comportement du modèle s'écrit donc :

$$\sigma(t) = E_1 \varepsilon(t) + \eta \dot{\varepsilon}(t) \quad (2.117)$$

En appliquant la transformation de Fourier alors son module complexe est :

$$M(\omega) = E_1 + i\eta\omega \quad (2.118)$$

En posant  $\tau_1 = \frac{\eta}{E_1}$ , ce dernier peut aussi s'écrire :

$$M(\omega) = E_1(1 + i\tau_1\omega) \quad (2.119)$$

## Modèle de Maxwell

Ce modèle est formé de l'association en série d'un ressort et d'un amortisseur **fig(2-6)**.

L'équation différentielle de comportement du modèle est :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{1}{E_0} \dot{\sigma}(t) + \frac{1}{\eta} \sigma(t) \quad (2.120)$$

Le module complexe correspondant a pour expression :

$$\frac{1}{M(\omega)} = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{i\eta\omega} \quad (2.121)$$

que l'on peut aussi écrire en posant  $\tau_0 = \frac{\eta}{E_0}$  :

$$M(\omega) = E_0 \frac{i\tau_0\omega}{1 + i\tau_0\omega} \quad (2.122)$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire du module, on obtient :

$$M(\omega) = \frac{E_0 (\omega\tau_0)^2}{1 + (\omega\tau_0)^2} + i \frac{\eta\omega}{1 + (\omega\tau_0)^2} \quad (2.123)$$

### Modèle de Zener

Le modèle de Zener **fig(2-6)** est constitué d'un modèle de Kelvin-Voigt de paramètres  $(E_1, \eta)$  en série avec un ressort de module d'élasticité  $E_0$ . Si  $\varepsilon_0$  et  $\varepsilon_1$  représentent respectivement la déformation de chacun des ressorts et  $\sigma$  la contrainte associée, on a :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1$$

$$\sigma = E_0 \varepsilon_0$$

$$\sigma = E_1 \varepsilon_1 + \eta \dot{\varepsilon}_1$$

où  $\varepsilon$  est la déformation totale du modèle.

En combinant ces trois relations ci-dessus, l'équation de comportement s'écrit :

$$(E_0 + E_1) \sigma(t) + \eta \dot{\sigma}(t) = E_0 (E_1 \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon}(t)) \quad (2.124)$$

Le module complexe s'écrit :

$$\frac{1}{M(\omega)} = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1 + i\eta\omega} \quad (2.125)$$

En notant  $\tau_1 = \frac{\eta}{E_1}$ ,  $\tau = \frac{\eta}{E_0 + E_1}$ ,  $E = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1}$ , on obtient :

$$M(\omega) = E \frac{1 + i\tau_1\omega}{1 + i\tau\omega} \quad (2.126)$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire, la relation (2.126) devient :

$$M(\omega) = E \frac{1 + \tau_1\tau\omega^2}{1 + (\tau\omega)^2} + iE \frac{(\tau_1 - \tau)\omega}{1 + (\tau\omega)^2} \quad (2.127)$$

### Remarque 2.5 :

Les expressions des modules complexes des modèles de Kelvin-Voigt et Maxwell sont des cas particuliers du modèle de Zener. En effet :

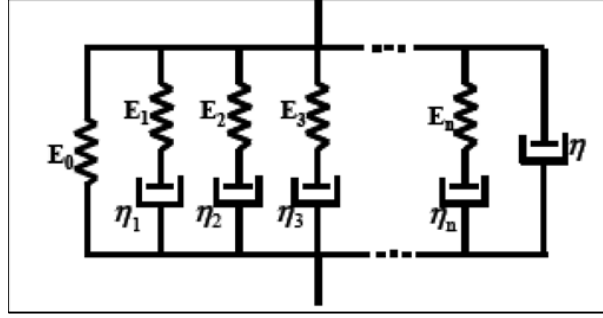


FIG. 2-9 – Groupement quelconque

- 1-Si  $E_1 \rightarrow \infty$  on retrouve le modèle de Kelvin-Voigt , avec  $E \rightarrow E_1, \tau \rightarrow 0$  et  $\tau_1 = \frac{\eta}{E_1}$
- 2-Si  $E_1 \rightarrow \infty$  on retrouve le modèle de Maxwell , et on a alors  $E \rightarrow 0, \tau_1 \rightarrow 0, E\tau_1 \rightarrow \eta$ , et  $\tau = \frac{\eta}{E_0}$

### 2.9.2 Modèles rhéologiques composés

On peut généraliser les modèles précédents en considérant un groupement quelconque d'éléments linéaires de type ressort ou amortisseur **fig(2.7)**, ce qui conduit à une équation différentielle linéaire de la forme :

$$\sigma(t) + \sum_{n=1}^N a_n \frac{d^n \sigma}{dt^n} = E \varepsilon(t) + \sum_{n=1}^N b_n \frac{d^n \varepsilon}{dt^n} \quad (2.128)$$

avec  $N$  entier,  $a_n$  et  $b_n$  sont des coefficients caractéristiques du matériau.

Dans leurs travaux, Heymans et Bauwens, ont imaginé de décrire les propriétés viscoélastiques des polymères solides à l'aide d'un assemblage fractal d'unités rhéologiques élémentaires constituées de ressorts et d'amortisseurs. Ce modèle rhéologique complexe, composé d'éléments élastiques de module  $E$  et d'éléments de viscosité  $\eta$  est représenté dans la figure **fig(2-7)**.

Le module de Young complexe correspondant, noté ici  $E^*$  vérifie donc l'équation :

$$E^* = \left( \frac{1}{E} + \frac{1}{E^*} \right)^{-1} + \left( \frac{1}{i\eta\omega} + \frac{1}{E^*} \right)^{-1} \quad (2.129)$$

En simplifiant l'équation (2.129), on obtient :

$$E^* = (i\eta\omega E)^{\frac{1}{2}} = E (i\omega\tau)^{\frac{1}{2}} \quad (2.130)$$

Où  $\tau = \frac{\eta}{E}$  représente la constante de temps de relaxation du modèle.

Partant d'une idée similaire, Schiessel et Blumen ont proposé un modèle rhéologique constitué d'arrangements en parallèle d'éléments hiérarchiques de Maxwell **fig(2-8)**. Le défaut des modèles rhéologiques composés est qu'ils font intervenir un grand nombre de paramètres, qu'il est difficile d'identifier.

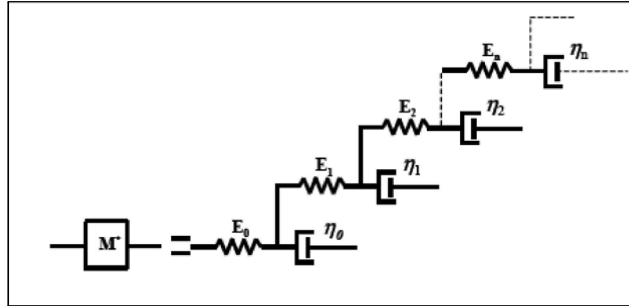


FIG. 2-10 – Arrangement en parallèles

Dans le cas où les modules d'élasticité ( $E_0, E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ ) sont tous égaux à  $E$  et les viscosités ( $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$ ) toutes égales à  $\eta$  on retrouve l'expression (2.130) pour le module complexe. Cette expression assez simple, puisqu'elle ne dépend que de 2 paramètres, permet de rendre compte d'un modèle rhéologique plutôt complexe. Ces deux derniers exemples aboutissent à un module complexe de la forme :

$$M(\omega) = E (i\omega\tau)^{\frac{1}{2}} \quad (2.131)$$

Faisant intervenir une puissance fractionnaire de  $i\omega$  Cette idée a donc été exploitée et

généralisée grâce à l'introduction d'un nouveau élément rhéologique **le spring -pot**.

### 2.9.3 Spring-Pot et modèles fractionnaires

#### Le spring-pot

Le spring-pot est un élément rhéologique supposé avoir un module complexe de la forme :  $M(\omega) = E(i\omega\tau)^{\frac{1}{2}}$  et dont le symbole rhéologique est **fig(2-9)**

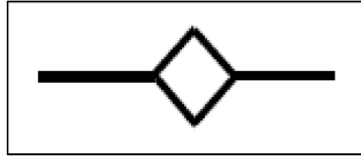


FIG. 2-11 – Le spring-pot

Pour  $\alpha = 0$ , on retrouve un ressort de module d'élasticité  $E$  et pour  $\alpha = 1$  on retrouve un amortisseur visqueux de viscosité  $\eta = E\tau$ . On rappelle que le paramètre adimensionnel  $\alpha$  permet une transition continue entre le modèle rhéologique solide idéal (ressort ou spring :  $\alpha = 0$ ) et le modèle fluide idéal (amortisseur visqueux ou dash-pot :  $\alpha = 1$ ).

#### Modèles fractionnaires

En remplaçant dans les modèles classiques vus précédemment, l'amortisseur visqueux par le spring-pot, nous obtenons des modèles rhéologiques fractionnaires que nous appellerons Kelvin-Voigt fractionnaire, Maxwell fractionnaire, Zener fractionnaire. Ces modèles sont décrits sur la figure (2-10) ci-dessous :

On peut utiliser la même démarche pour les modèles composés vus plus haut. On obtient des lois de comportement utilisant les dérivées fractionnaires du type :

$$\sigma(t) + \sum_{k=1}^N a_k \frac{d^{\alpha_k} \sigma}{dt^{\alpha_k}} = E\varepsilon(t) + \sum_{k=1}^N b_{\alpha_k} \frac{d^{\alpha_k} \varepsilon}{dt^{\alpha_k}} \quad (2.132)$$

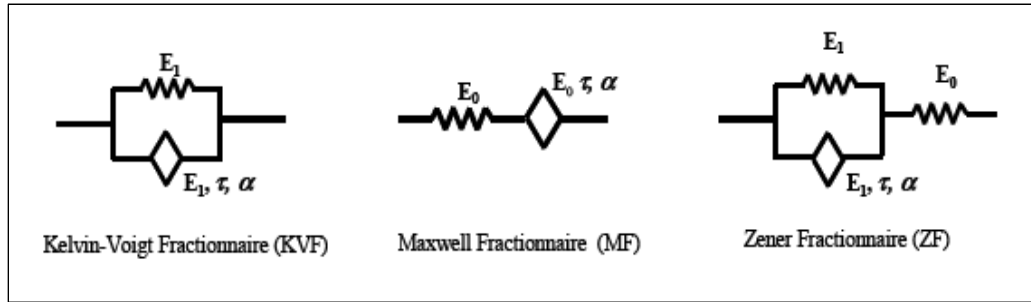


FIG. 2-12 – les trois modèles fractionnaires

où  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  sont des valeurs comprises entre 0 et 1.

En appliquant la transformée de Fourier à l'équation (2.132), le module complexe correspondant est de la forme

$$M(\omega) = \frac{E + \sum_{k=1}^N b_k (i\omega)^{\beta_k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k (i\omega)^{\alpha_k}} \quad (2.133)$$

En se basant sur des essais expérimentaux, les auteurs **Bagley et Torvik**, ont montré que l'on peut se contenter d'utiliser les premiers termes de chaque série pour modéliser un grand nombre de matériaux viscoélastiques. Il en résulte un modèle à cinq paramètres :  $E, a, b, \alpha, \beta$

$$M(\omega) = \frac{E + b (i\omega)^\beta}{1 + a (i\omega)^\alpha} \quad (2.134)$$

Bagley et Torvik ont précisé les conditions que doivent vérifier les paramètres pour que le modèle soit conforme aux principes de la thermodynamique et aux résultats expérimentaux dont ils disposaient. Ces conditions sont au nombre de cinq :  $a$  et  $b$  et  $E$  doivent être positifs  $\alpha = \beta$  pour que le module reste borné et non nul pour des fréquences très grandes et l'inégalité  $\frac{b}{a} \geq E$  vient de ce que le module  $|M(\omega)|$  doit être une fonction positive et croissante de  $\omega$  variant de  $E$  à  $\frac{b}{a}$

La loi constitutive du modèle **Bagley et Torvik** s'écrit :



$$\sigma + {}_a D^\alpha (\sigma) = E\varepsilon + {}_b D^\beta (\varepsilon) \quad (2.135)$$

### Exemple 2.1

On considère un fluide visqueux dans un demi-espace, initialement au repos, et permettant la plaque flottante de faire des mouvements transverses, comme dans la **fig(2-11)** .Ils montrent que la pression résultante en tout point du fluide peut être exprimer en termes de dérivée fractionnaire en temps du profil de la vitesse du fluide.

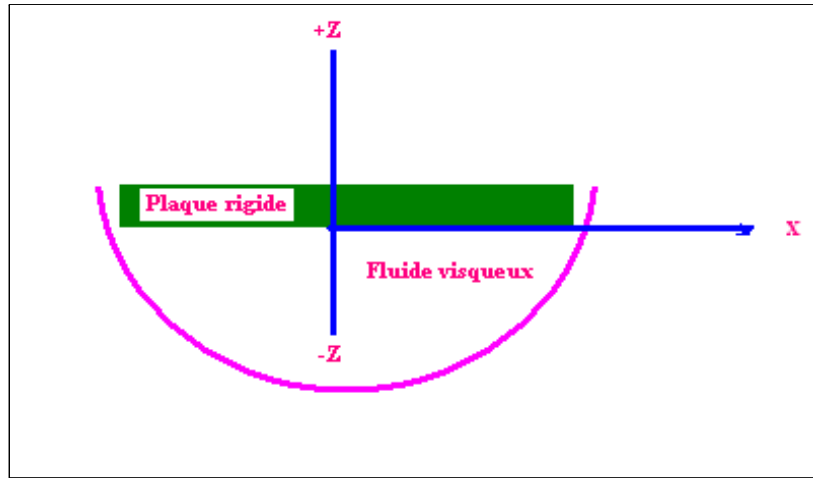


FIG. 2-13 – Plaque rigide sur un demi-espace occupé par un liquide visqueux

L'équation du mouvement du fluide est une équation de diffusion de la forme

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (2.136)$$

Où  $\rho$  est la densité du fluide,  $\mu$  la viscosité,  $v$  est le profil de la vitesse transversale du fluide, laquelle est une fonction du temps  $t$  et de la distance  $z$

En prenant la transformée de Laplace de l'équation (2.136) et en utilisant la propriété suivante

$$\mathcal{L} \left[ \frac{\partial f(t)}{\partial t} \right] = s \mathcal{L}[f(t)] - f(0) \quad (2.137)$$

on obtient

$$\rho s [[v(z, t)] - \rho v(z, t = 0) = \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} [[v(z, t)]. \quad (2.138)$$

et comme le profil de la vitesse initiale du fluide est nulle, alors la dernière équation est réduite à

$$\rho s [[v(z, t)] = \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} [[v(z, t)] \quad (2.139)$$

et comme

$$v(z, t) = v(t) e^{\lambda z} \quad (2.140)$$

Alors

$$[[v(z, t)] = e^{\lambda z} [[v(z, t)] \quad (2.141)$$

Par conséquent ,on a

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} [[v(z, t)] = \lambda^2 e^{\lambda z} [[v(z, t)] \quad (2.142)$$

En substituant (1.26),(1.27) dans (1.24), on obtient :

$$\rho s e^{\lambda z} [[v(t)] = \mu \lambda^2 e^{\lambda z} [[v(t)] \quad (2.143)$$

Ce qui entraîne que  $\lambda = \sqrt{\frac{\rho s}{\mu}}$

donc

$$v(z = 0, t) = v(t) = v_p(t) \implies v(z, t) = v_p(t) e^{\sqrt{\frac{\rho s}{\mu}} z} \quad (2.144)$$

Par ailleurs, la relation

$$\sigma(z, t) = \mu \frac{\partial v}{\partial t}(z, t) \quad (2.145)$$

$$[[\sigma(z, t)] = \mu \sqrt{\frac{\rho s}{\mu}} e^{\sqrt{\frac{\rho s}{\mu}} z} [[v(z, t)] = \sqrt{\mu \rho} \cdot \sqrt{s} [[v(z, t)] \quad (2.146)$$

la dernière équation peut être réécrite comme :

$$[[\sigma(z, t)]] = \sqrt{\mu\rho} \cdot \frac{s}{\sqrt{s}} [[v(z, t)]] \quad (2.147)$$

Or

$$s[[v(z, t)]] = \mathcal{L}\left[\frac{\partial v(z, t)}{\partial t}\right] \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{s}} = \mathcal{L}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{t}}\right]$$

On obtient

$$[[\sigma(z, t)]] = \sqrt{\mu\rho} \cdot \mathcal{L}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{t}}\right] \times [[v(z, t)]] \quad (2.148)$$

Et finalement en appliquant la transformée de Laplace inverse on aura

$$\sigma(z, t) = \sqrt{\mu\rho} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^t \frac{\dot{v}(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau \quad (2.149)$$

et grâce à la nullité de la vitesse initiale, la dernière équation prend la forme suivante

$$\sigma(z, t) = \sqrt{\mu\rho} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{v(z, t)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau = \sqrt{\mu\rho} D_{0t}^{\frac{1}{2}} v(z, t) \quad (2.150)$$

Dans (2.150) on reconnaît une dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha = \frac{1}{2}$  traduisant la relation pression -vitesse dans le demi-espace du fluide visqueux.

## 2.10 Conclusion

On a vu dans ce chapitre trois approches de définitions des dérivées fractionnaires .L'approche de Grünward-Letnikov, l'approche de Riemann-Lioville, et celle de Caputo et puits on a donné une interprétation géométrique et physique des ces dérivées, avec une application en physique.

# Chapitre 3

## Etude des Systèmes dynamiques Chaotiques d'ordre fractionnaire

### 3.1 Les équations différentielles fractionnaires

#### 3.1.1 Problème de Cauchy

Soit l'équation différentielle fractionnaire :

$$D_{a+}^q x = f(x, t) \quad (3.1)$$

Où :  $(n-1) < q \leq n$  et  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application  $q$ -dérivable et  $f(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$   
et  $D_{a+}^q$  désigne la dérivée au sens de Riemann-Liouville.

#### Définition 3.1

On appelle donnée de Cauchy pour l'équation(3.1) une condition

$$D_{a+}^{q-k} x(a+) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{R} \quad (k = 1, 2, \dots, n \in \mathbb{N}) \quad (3.2)$$

Où  $b_k \in \mathbb{R}^n$  et  $a_+ \in \mathbb{R}$

Un problème de Cauchy fractionnaire sera la donnée d'une équation fractionnaire et

d'une donnée de Cauchy

### 3.1.2 Equation différentielle fractionnaire linéaire

Considérons le problème à valeurs initiales suivant

$$\begin{cases} {}_aD^\alpha x(t) = f(t) & , (a < t < T < \infty \\ [{}_aD^{\alpha-1}x(t)]_{t=0} = b \end{cases} \quad (3.3)$$

Où  ${}_aD^\alpha x(t)$  désigne la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville tels que  $0 < \alpha \leq 1$  et  $f(t) \in L_1(a, T)$ , c'est à dire :

$$\int_a^T |f(t)| dt < \infty$$

#### Théorème 3.1

Si  $f(t) \in L_1(a, T)$ , alors le problème (3.1) admet une unique solution  $x(t) \in L_1(a, T)$

### 3.1.3 Equation différentielle fractionnaire de forme plus générale

En plus des équations différentielles fractionnaire linéaires, les équations non- linéaires apparaissent aussi dans les applications surtout dans les systèmes qu'on va étudier prochainement, notons que le résultats ci-dessous peuvent les utilisés pour toutes les mutations de différentiation fractionnaire.

Considérons donc le problème à valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} {}_aD^\alpha x(t) = f(t, x(t)) \\ [{}_aD^{\alpha-1}x(t)]_{t=0} = b \end{cases} \quad (3.4)$$

Où  $0 < \alpha \leq 1$

Nous supposons que  $f(t, x(t))$  est définie dans un domaine  $G$  du plan  $(t, x)$ , et nous

définissons une région  $R(h, K) \subset G$  comme étant l'ensemble des points  $(t, x) \in G$ , qui vérifient les inégalités suivantes :

$$0 < t < h, \quad \left| t^{1-\alpha}x(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}b \right| \leq K \quad (3.5)$$

**Théorème 3.2 :**

Soit  $f(t, x)$  une fonction continue à valeurs réelles, définie dans le domaine  $G$ , la condition de Lipschitz par rapport à  $x$ , c'est à dire :

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq A |x_1 - x_2|$$

et telle que :

$$|f(t, x)| \leq M < \infty \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad (t, x) \in G$$

Soit aussi

$$K \geq \frac{Mh}{\Gamma(1 + \alpha)}$$

Alors il existe, dans la région  $R(h, K)$ , une unique solution continue  $x(t)$  du problème (3.2)

**Lemme 3.1 :**

Soit l'équation

$$\begin{cases} {}^cD_0^\alpha x(t) = f(t, x(t)) \\ [{}^cD_0^{\alpha-1}x(t)]_{t=0} = b \end{cases} \quad (3.6)$$

Où  ${}^cD$  désigne la dérivée fractionnaire de **Caputo**

Si  $f$  est continue, alors l'équation (3.6) équivalente à l'équation intégrale de **Voltéra** suivante

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} x^{(k)}(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \quad (3.7)$$

- Dans la cas où  $0 < \alpha < 1$  l'équation (3.7) devient

$$x(t) = x(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \quad (3.8)$$

### 3.1.4 Solutions numériques des équations différentielles fractionnaires

Au contraire de la résolution numérique d'une équation différentielle ordinaire, la simulation numérique dans le cas fractionnaire pose des problèmes. Dans la littérature du chaos fractionnaire, deux méthodes des approximations ont été proposées pour résoudre une équation différentielle fractionnaire numériquement.

- La première méthode, connue comme approximation de domaine fréquentiel, est basée sur l'approximation du comportement du système d'ordre fractionnaire dans le domaine fréquentiel. Dans [33], un algorithme a été proposé de calculer les approximations de transfert linéaires de la fonction  $\frac{1}{s^\alpha}$

- La deuxième méthode est une version améliorée de l'algorithme **Adams-Bashforth-Moulton** [29, 30] et est proposée et basée sur les (predictor-correctors) [31, 32]. Pour expliquer la méthode, nous considérons l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} {}^c D_0^\alpha x(t) = f(t, x(t)) & 0 \leq t \leq T \\ x^{(k)}(0) = x_0^{(k)}, & k = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases} \quad (3.9)$$

D'après le lemme précédent l'équation (3.9) est équivalente à l'équation intégrale de **Voltera** suivante

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} x^{(k)}(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \quad (3.10)$$

Maintenant  $h = \frac{T}{N}$ ,  $t_n = nh$  ( $n = 0, 1, \dots, N$ ), alors l'équation (3.10) peut être discrétiser comme suit :

$$x_h(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} x_0^{(k)} \frac{t_{n+1}^k}{k!} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f(t_{n+1}, x_h^p(t_{n+1})) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{k=0}^n a_{k,n+1} f(t_k, x_h(t_k)) \quad (3.11)$$

Où la valeur prédit de  $x_k^p(t_{n+1})$  est déterminée par :

$$x_h^p(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} x_0^{(k)} \frac{t_{n+1}^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^n b_{k,n+1} f(t_k, x_h(t_k)) \quad (3.12)$$

Et,

$$a_{k,n+1} = \begin{cases} n^{\alpha+1} - (n-\alpha)(n+1)^\alpha & , k = 0 \\ (n-k+2)^{\alpha+1} + (n-k)^{\alpha+1} - 2(n-k+1)^{\alpha+1}, 1 \leq \alpha \leq n & (3.13) \\ 1 & , k = n+1 \end{cases}$$

$$b_{k,n+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} ((n-k+1)^\alpha + (n-k)^\alpha)$$

L'erreur d'estimation de cette approximation est décrite comme suit :

$$\max_{k=0,1,\dots,N} |x(t_k) - x_h(t_k)| = O(h^p) \quad (3.14)$$

Où  $p = \min(2, 1 + \alpha)$

## 3.2 Les Systèmes différentiels d'ordre fractionnaire

Soit le système différentiel suivant :

$$D^q x(t) = f(t, x(t)) \quad (3.15)$$

Où  $0 < q \leq 1$  et  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  et  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction



continue et  $D^q x(t)$  désigne la dérivée de Caputo

### 3.2.1 Points d'équilibre et region de stabilité

Prenons le système (3.15) avec condition initiale  $x(0) = x_0$  pour évaluer les points d'équilibre du système(3.15) , il suffit résoudre l'équation

$$D^q x(t) = 0$$

Si  $x_{e_q}$  est une solution de l'equation, alors :

$$f(x_{e_q}) = 0$$

Pour

$$x(t) = x_{e_q} + \varepsilon(t)$$

Alors

$$D^q(x_{e_q} + \varepsilon) = f(x_{e_q} + \varepsilon)$$

Avec la linéarité de dérivation fractionnaire, le résultat précédent peut s'écrire

$$D^q(\varepsilon(t)) = f(x_{e_q} + \varepsilon)$$

On utilise le développement (généralisé aux dérivées fractionnaires)(1.48) de Taylor de la fonction  $f$  , on arrive

$$f(x_{e_q} + \varepsilon) \simeq f'(x_{e_q})\varepsilon$$

La où  $f(x_{e_q}) = 0$ , et puis

$$D^q \varepsilon(t) \simeq f'(x_{e_q})\varepsilon(t), \quad t > 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon(0) = x_0 - x_{e_q}$$

### 3.2.2 Stabilité des Systèmes linéaires autonomes

#### Théorème 3.3

Soit le système autonome suivant :

$$\begin{cases} D^q x(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.16)$$

Telles que  $0 < q < 1$  et  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

•Le système (3.16) est asymptotiquement stable, si et si seulement si,  $|\arg(\lambda)| > q \cdot \frac{\pi}{2}$  pour tous  $\lambda$

où  $\lambda$  sont toutes les valeurs propres de la matrice  $A$ . Aussi, le vecteur d'état  $x(t)$  tends vers 0 et verifie la condition suivante :  $\|x(t)\| < Nt^{-q}$ ,  $t > 0, q > 0$

•Le système (3.16) est stable, si et si seulement si, la condition  $|\arg(\lambda)| \geq q \cdot \frac{\pi}{2}$  est vérifie pour toute  $\lambda$  valeur propre de la matrice  $A$ , et les valeurs propres critiques satisfaire à  $|\arg(\lambda)| = q \cdot \frac{\pi}{2}$  ont une multiplicité géométrique.

La figure **fig(3-1)** présente les régions stable et unstable selon les régions au-dessus de théorème.

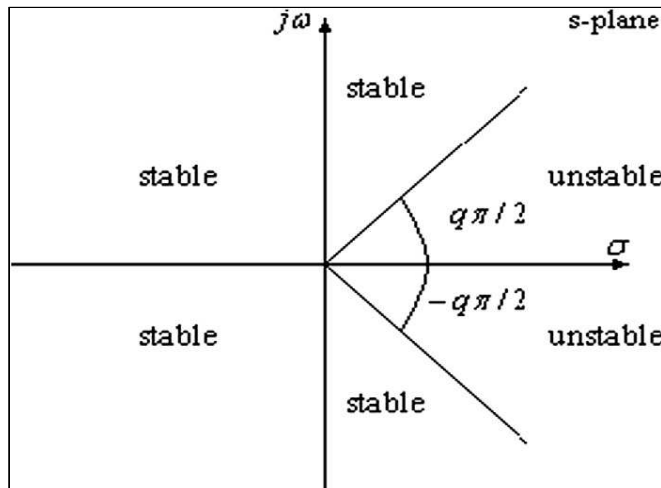


FIG. 3-1 – Région de stabilité pour un système fractionnaire lineaire suivant l'ordre  $q$

**Remarque 3.1 :** Dans le cas du système non linéaire :

$$D^q x = f(x) \tag{3.17}$$

Où  $0 < q < 1$  et  $x \in \mathbb{R}^n$

On peut linéariser le système qui peut s'écrire sous la forme :

$$D^q x = Ax \tag{3.18}$$

avec  $A$  est la matrice Jacobienne de  $f$  et puis on applique le théorème précédent

• Dans le cas des systèmes dynamiques non-linéaire de dimension 3, un point d'équilibre "selle" est un point sur lequel le modèle linéarisé l'équivalent a au moins une valeur propre dans la région stable et une valeur propre dans la région instable. Dans le même système, un point "selle" est appelé point "selle" d'indice 1 si l'une des valeurs propres est instable et les autres sont stables. Aussi, un point "selle" d'indice 2 est un point "selle" avec une valeur propre stable et deux valeurs propres instables. En systèmes chaotiques, il est prouvé que les rouleaux sont générés à autour des points "selles" d'indice 2. En outre, les points "selles" d'indice 1 sont responsables seulement pour le raccordement des rouleaux [60, 61].

Supposons le système chaotique de dimension 3.

$$D^q x = f(x) \tag{3.19}$$

Où  $0 < q < 1$  et  $x \in \mathbb{R}^n$

Donc il ne dispose que de trois points d'équilibre. Par conséquent, si ce système a un double attracteur de défilement, l'un des points d'équilibre est un point "selle" d'indice 1 et les autres points sont d'indice 2.

Supposons que  $\lambda$  est une valeur propre instable de l'un des points "selle" d'indice 2, une condition nécessaire pour que le système fractionnaire (3.19) de demeurer chaotique est de maintien de la valeur propre  $\lambda$  dans la région instable. Cela signifie :

$$\tan\left(q \cdot \frac{\pi}{2}\right) > \left| \frac{\text{Im}(\lambda)}{\text{Re}(\lambda)} \right| \iff q > \frac{2}{\pi} \tan^{-1}\left(\left| \frac{\text{Im}(\lambda)}{\text{Re}(\lambda)} \right|\right) \quad (3.20)$$

### 3.3 Applications : Etude des systèmes fractionnaires

#### 3.3.1 Etude du système de Chen fractionnaire

En 1999, Chen et UETA(1.47) ont introduit un nouveau système chaotique, qui est similaire mais pas topologiquement équivalent au système de Lorenz. Le système est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} = & a(y - x) \\ \dot{y} = & (c - a)x - xz + cy \\ \dot{z} = & xy - bz \end{cases} \quad (3.21)$$

Où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des paramètres réels.

- Quand un  $a = 35$ ,  $b = 3$ ,  $c = 28$ , le système (3.21) décrit un attracteur chaotique, voir la **fig (3-2)**.

- Si  $(2c-a)b > 0$ , ce système a trois points d'équilibre :

$O(0,0,0)$ ,  $C^+(\sqrt{(2c-a)b}, \sqrt{(2c-a)b}, 2c-a)$ ,  $C^-( -\sqrt{(2c-a)b}, -\sqrt{(2c-a)b}, 2c-a)$

- La matrice Gacobienne du système(associée du point d'équilibre  $(x_0, y_0, z_0)$

$$J(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c - a - z_0 & c & -x_0 \\ y_0 & x_0 & -b \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

- Pour  $a = 35$ ,  $b = 3$ ,  $c = 28$  et avec un simple calcul on trouve les trois points d'équilibre et leurs valeurs propres correspondantes

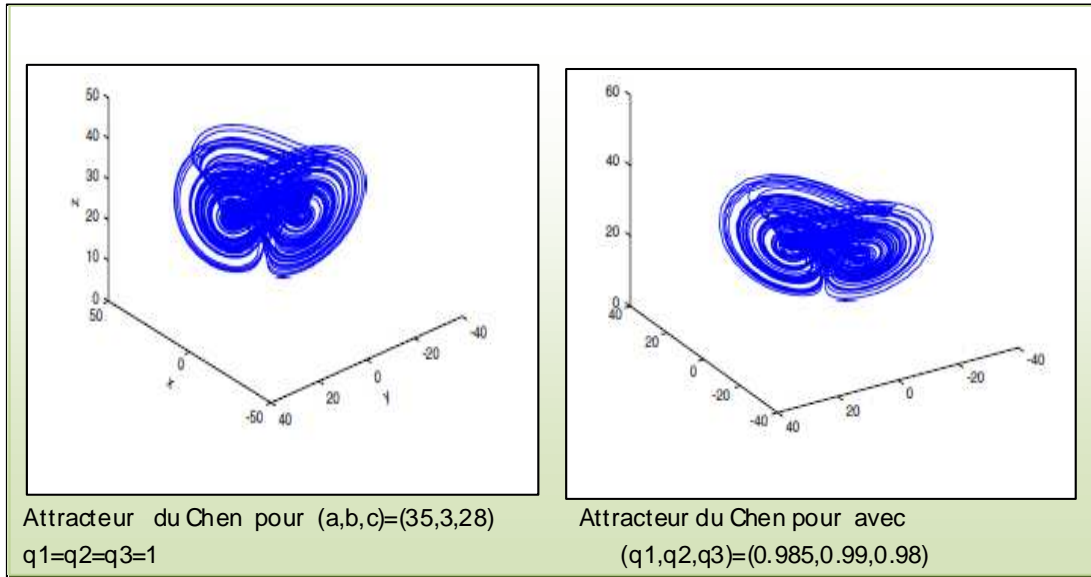


FIG. 3-2 – Système de Chen d’ordre entier et d’ordre fractionnaire

Points d’équilibre	Valeurs propres correspondantes		
$O(0, 0, 0)$	$\lambda_1 = -30.83$	$\lambda_2 = 23.83$	$\lambda_3 = -3$
$C^+(7.93, 7.93, 21)$	$\lambda_1 = -18.42$	$\lambda_2 = 4.21 + j14.88$	$\lambda_3 = 4.21 - j14.88$
$C^-( -7.93, -7.93, 21)$	$\lambda_1 = -18.42$	$\lambda_2 = 4.21 + j14.88$	$\lambda_3 = 4.21 - j14.88$

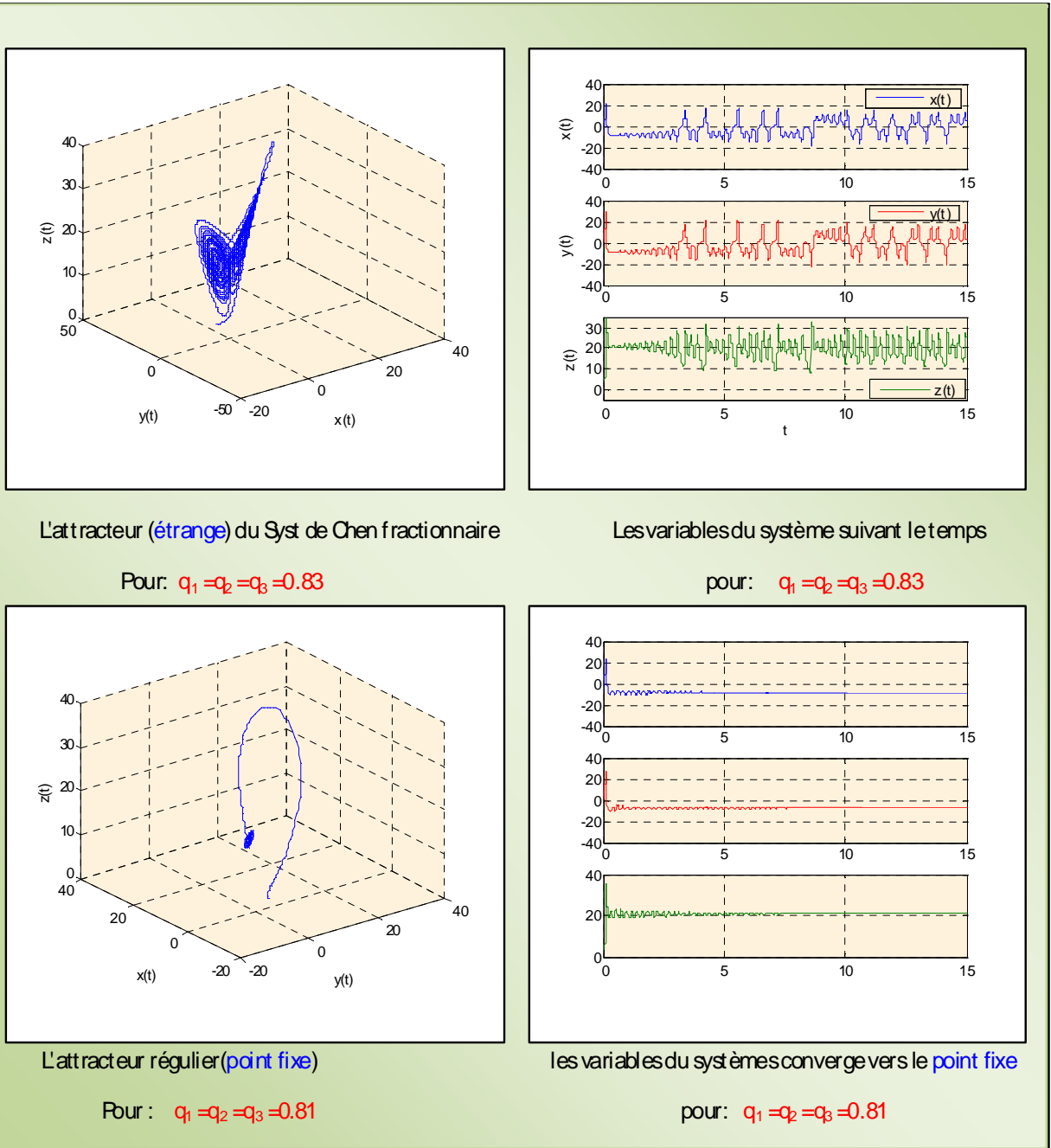
•Par conséquent  $C^+$  et  $C^-$  Sont des points "selle" de l’indice 2 et  $O$  est un point "selle" d’indice 1.

Maintenant, laissez-nous introduire sa version fractionnaire comme suit :

$$\begin{cases} \frac{d^q x}{dt^q} = a(y - x) \\ \frac{d^q y}{dt^q} = (c - a)x - xz + cy \\ \frac{d^q z}{dt^q} = xy - bz \end{cases} \quad (3.23)$$

Selon l’inégalité (3.20), la valeur maximale de l’ordre fractionnaire  $q$  pour laquelle le système de Chen d’ordre fractionnaire avec les paramètres ci-dessus peut démontrer le chaos est  $q \approx 0.82$ . **fig (3-3)** et **(3-4)**, respectivement Voir les résultats de simulation numérique pour  $q = 0,83$  et  $q = 0,81$  basé sur la méthode (predictor-correctors ),

Pour  $q = 0,83$ , et les paramètres  $(a, b, c) = (35, 3, 28)$  le système est chaotique et pour  $q = 0,81$  ne l'est pas.



l'état du système de Chen suivant l'ordre de dérivation

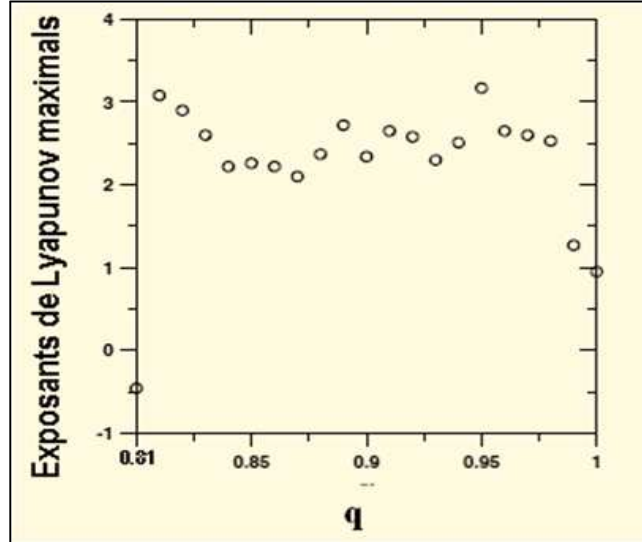


FIG. 3-3 – Les exposants de Lyapunov du systèmes de Chen fractionnaire suivant la variation de  $q$  de :0.81 à 1

### Cas d'ordre de dérivation différent

Prenons maintenant le système fractionnaire

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1}x}{dt^{q_1}} = a(y - x) \\ \frac{d^{q_2}y}{dt^{q_2}} = (c - a)x - xz + cy \\ \frac{d^{q_3}z}{dt^{q_3}} = xy - bz \end{cases} \quad (3.24)$$

Pour calculer la valeur maximale qui montre le chaos il suffit d'appliquer l'énégalité  $q > \frac{2}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{|\text{Im}(\lambda)|}{\text{Re}(\lambda)}\right)$  où  $q = \max(q_1, q_2, q_3)$

### 3.3.2 Etude du système de Lü fractionnaire

Le système de Lü, trouvé par **Lü** et **Chen**, est connu comme un pont entre les systèmes de Lorenz et les systèmes de Chen et représente la transition de l'un à l'autre [57]. Le système de Lü est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= -xz + cy \\ \dot{z} &= xy - bz \end{cases} \quad (3.25)$$

• Si  $bc > 0$  Le système de Lü comporte trois points d'équilibres :

$O(0, 0, 0)$ ,  $C^+(\sqrt{bc}, \sqrt{bc}, c)$ ,  $C^(-\sqrt{bc}, -\sqrt{bc}, c)$ .

• La matrice Gacobienne du système (associée du point d'équilibre  $(x_0, y_0, z_0)$ )

$$J(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -z_0 & c & -x_0 \\ y_0 & x_0 & -b \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

• Si  $(a, b, c) = (36, 3, 28)$ , le système (3.25) décrit un attracteur chaotique, voir la **fig (3-4)** Dans ce cas, les points fixes et leurs valeurs propres correspondantes sont calculés comme suit :

Points d'équilibre	Valeurs propres correspondantes		
$O(0, 0, 0)$	$\lambda_1 = -36$	$\lambda_2 = -3$	$\lambda_3 = 28$
$C^+(9.16, 9.16, 28)$	$\lambda_1 = -20.32$	$\lambda_2 = 4.66 + 16.60j$	$\lambda_3 = 4.66 - 16.60j$
$C^(-9.16, -9.16, 28)$	$\lambda_1 = -20.32$	$\lambda_2 = 4.66 + 13.60j$	$\lambda_3 = 4.66 - 13.60j$

• Maintenant, laissez-nous introduire sa version fractionnaire comme suit :

$$\begin{cases} \frac{d^q x}{dt^q} &= a(y - x) \\ \frac{d^q y}{dt^q} &= -xz + cy \\ \frac{d^q z}{dt^q} &= xy - bz \end{cases} \quad (3.27)$$

En appliquant le théorème (3.3), on trouve  $q \approx 0.81$  la valeur minimale qui montre la chaocité du système de Lü d'ordre fractionnaire pour  $(a, b, c) = (35, 3, 28)$ . donc pour  $q < 0, 81$ , les points fixes  $C^+$  et  $C^-$  Sont stables



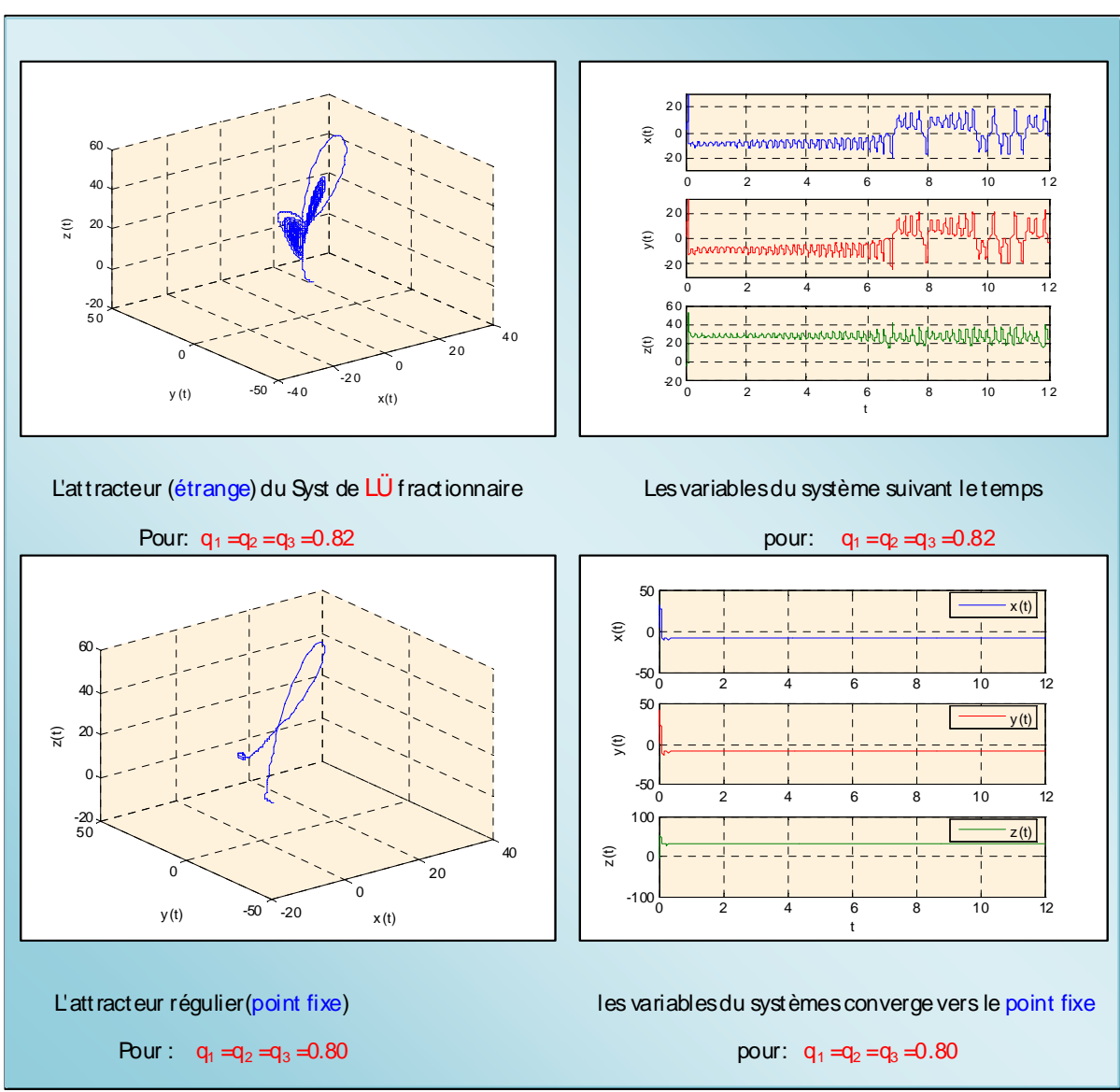


FIG. 3-4 – L'état du système de  $L\ddot{u}$  suivant l'ordre fractionnaire

### 3.3.3 Etude du circuit de Van der Pol-Duffing modifié

Dans cette section nous étudions la dynamique des comportements du circuit **Van der Pol-Duffing** (VDPM) avec résistance en parallèle voir **fig(3-5)**

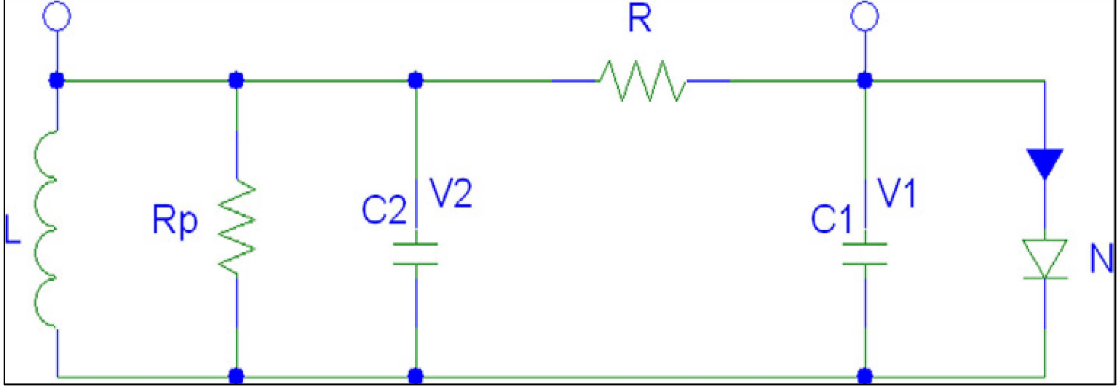


FIG. 3-5 – Le circuit (VDP) modifié par l'ajout de résistance (ohms) en parallèle avec l'inductance du circuit original

Le circuit modifié est non linéaire car il a un élément non-linéaire avec la forme cubique [68]. En appliquant les lois de Kirchhoff au circuit à **fig(3-5)**, les équations des éléments du circuit (les tensions  $v_1$  et  $v_2$  dans les condensateurs  $C_1$  et  $C_2$ , le courant  $I_N$  à travers le diode  $N$  non linéaire et le courant  $i_L$  à travers l'inductance  $L$ ) sont représentés par le système autonome de trois équations différentielles du premier ordre :

$$\begin{cases} c_1 \dot{v}_1 = -[bv_1^3 + av_1 + (1/R)(v_1 - v_2)] \\ c_2 \dot{v}_2 = (1/R)(v_1 - \alpha v_2) - i_L \\ i_L = v_2/L \end{cases} \quad (3.28)$$

Où  $C_1, C_2$  sont les capacités des deux condensateurs,  $L$  est l'inductance,  $R$  la résistance linéaire

et  $\alpha = (R + RP)/RP$ ,  $RP$  est la résistance parallèle qui modifie le circuit VDP.

Pour étudier le comportement qualitatif du système (3.28), les variables sont ramenées comme suit :

$x = \sqrt{bRv_1}$ ,  $y = \sqrt{bRv_2}$ ,  $z = \sqrt{bR^3i_L}$ ,  $\tau = t/Rc_2$ ,  $\mu = -(1 + aR)$ ,  $\nu = c_2/c_1$  et  $\beta = c_2R_2/L$ .

Le système (3.28) s'écrit mathématiquement sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\nu(x^3 - \mu x - y) \\ \dot{y} = x - \alpha y - z \\ \dot{z} = \beta y \end{cases} \quad (3.29)$$

avec  $\alpha, \nu, \beta$  sont tous des réels positifs. Le circuit VDP est un cas particulier du système (3.29) pour  $\alpha = 1$

### Points d'équilibre et leurs stabilité linéaire

Les points d'équilibre du système (3.29) sont constatés par l'annulation du côté à droite du système et ils sont donnés comme suit :

$$E_0(0, 0, 0), E_{\pm}(\pm\sqrt{\mu}, 0, \pm\sqrt{\mu}) \quad si \quad \mu > 0 \quad (3.30)$$

La matrice Gacobienne du système (associée du point d'équilibre  $(x_0, y_0, z_0)$ )

$$J(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} -3\nu x^2 + \mu\nu & \nu & 0 \\ 1 & -\alpha & -1 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

#### •Stabilité du point $E_0$ :

D'abord nous avons commencer par le cas  $\mu < 0$ . Dans ce cas, le système (3.29) ne dispose que d'un seul point d'équilibre réel  $E_0$ .

Le polynôme caractéristique de  $J(E_0)$ (matrice Jacobienne ) est donné par :

$$\lambda^3 + (\alpha - \mu\nu)\lambda^2 + (\beta - \nu - \alpha\mu\nu)\lambda - \mu\nu\beta = 0. \quad (3.32)$$

Afin d'étudier les conditions de stabilité du point d'équilibre  $E_0$ , nous appliquons le

critère de **Routh-Hurwitz** , qui affirme que toutes les valeurs propres et de toutes les parties réelles des valeurs propres complexes conjugués sont négatifs si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $a_1 > 0$ ,
- $a_3 > 0$ ,
- $a_1 a_2 - a_3 > 0$

où  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  sont définis de telle sorte que :

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0.$$

Ici :  $a_1 = \alpha - \mu\nu$  et  $a_2 = \beta - \nu - \alpha\mu\nu$  et  $a_3 = -\mu\nu\beta$

nous constatons que la condition nécessaire et suffisante pour que le point  $E_0$  d'être asymptotiquement stable est

$$-\mu\nu\alpha^2 + (\beta - \nu + \mu^2\nu^2)\alpha + \mu\nu^2 > 0. \quad (3.33)$$

**Remarque 3.2 :**

Le point  $E_0$  est instable lorsque tous les nombres  $\alpha, \beta, \nu$ , et  $\mu$  sont des réels positifs.

• **Stabilité des points  $E_{\pm}$  :**

Lorsque  $\mu > 0$  les deux points d'équilibre  $E_{\pm}$  apparaissent. Les points d'équilibre  $E_+$  et  $E_-$  sont symétriques, ils ont la même matrice Jacobienne et leur équation caractéristique est donnée comme suit :

$$\lambda^3 + (\alpha + 2\mu\nu)\lambda^2 + (\beta - \nu + 2\alpha\mu\nu)\lambda + 2\mu\nu\beta = 0 \quad (3.34)$$

L'application du critère **Routh-Hurwitz** à l'équation. (3.34), nous constatons que les points d'équilibre  $E_{\pm}$  sont asymptotiquement stable si et seulement si :

$$2\mu\nu\alpha^2 + (\beta - \nu + 4\mu^2\nu^2)\alpha - 2\mu\nu^2 > 0 \quad (3.35)$$

### Lemme 3.1

Pour  $\mu = \mu_0 = 0$ , le système (3.29) subit une bifurcation **Pitchfork**. En outre, le point d'équilibre  $E_0$  est (asymptotiquement stable près  $\mu = \mu_0$ ) pour  $\mu < \mu_0$ , et en faisant varier le paramètre  $\mu$ -dessus de la valeur critique la  $\mu_0$ , le point d'équilibre  $E_0$  devient instable et deux autres points d'équilibre  $E_+$  et  $E_-$  (à asymptotiquement stable près de  $\mu = \mu_0$ ).

## Résultats Numériques

### A : orbites périodiques et attracteurs chaotiques

Si  $\mu > 0$ , les équilibres  $E_{\pm}$  existe et le système (3.29) est intégré avec les valeurs des paramètres  $\nu = 100$ ,  $\mu = 0, 1$ ,  $\beta = 200$  et  $\alpha > 0$ .

Dans ce cas, la valeur critique pour la quelle le système (3.29) a deux valeurs propres imaginaires purs est  $\alpha_+ = 3, 5078$ .

Les points d'équilibre  $E_+(0.3162, 0, 0.3162)$  et  $E_-(-0, 3162, 0, -0, 3162)$  sont stables pour  $\alpha > \alpha_+$  et perdent leur stabilité pendant  $\alpha$  est décroissante au-dessous de  $\alpha_+$ .

Pour  $\alpha < \alpha_+$ , le système (3.29) donne des solutions périodiques et attracteurs chaotiques avec des ordres supérieurs .L'attracteur chaotique du système (3.29) est montré dans la **fig(3- 2)**, mais le système atteint le chaos par bifurcation de dédoublement- - période voir **fig.(3-6)**. Nous résumons les riches dynamique du système(3.29), comme suit : un cycle limite de période **1** est observée lorsque  $3.17 < \alpha \leq 3.51$ , un cycle limite de période **2** pour  $3.06 < \alpha \leq 3.16$  et un cycle limite de période **4** pour  $3.04 < \alpha \leq 3.06$ . Une bande chaos existe pour  $2.8 < \alpha \leq 2.96$ , et de nouveau à double bande de chaos pour  $1.69 < \alpha \leq 2.79$ ,une fenêtre périodique **3** existe pour  $1.66 \leq \alpha \leq 1.69$  et de nouveau à double bande chaotique pour  $1.05 < \alpha < 1.66$  .

On voit facilement que lorsque  $\alpha = 1$  (le cas du circuit original), le système a mis sur orbite périodique.

### B :Exposants de lyapunov

Pour les paramètres  $\nu = 100$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\beta = 200$ , et  $\alpha = 1.6$  le système (3.29) est chaotique .Dans ce cas, les points fixes et leurs valeurs propres correspondantes sont calculés comme suit :

Points d'équilibre	Valeurs propres correspondantes		
$E_0 (0, 0, 0)$	$\lambda_1 = 13.34$	$\lambda_2 = -2.47 - 11.99j$	$\lambda_3 = -2.47 + 11.99j$
$E_+(0.31, 0, 0.31)$	$\lambda_1 = -23.30$	$\lambda_2 = 0.85 + 13.07j$	$\lambda_3 = 0.85 - 13.074j$
$E_-(-0.31, 0, -0.31)$	$\lambda_1 = -23.30$	$\lambda_2 = 0.85 + 13.07j$	$\lambda_3 = 0.85 - 13.07j$

le système (3.29) a trois exposants de lyapunov qui sont :  $\lambda_1 = 2.22$ ,  $\lambda_2 = 0.00$ ,  $\lambda_3 = -21.77$

### 3.3.4 Version fractionnaire du Système

Maintenant, laissez-nous introduire sa version fractionné comme suit :

$$\begin{cases} \frac{d^q x}{dt^q} = -\nu(x^3 - \mu x - y) \\ \frac{d^q y}{dt^q} = x - \alpha y - z \\ \frac{d^q z}{dt^q} = \beta y \end{cases} \quad (3.36)$$

Où  $0 < q < 1$  avec les paramètres  $\nu = 100$ ,  $\mu = 0.1$  ,  $\beta = 200$ , et  $\alpha = 1.6$

Selon le théorème (3.3), la valeur maximale de l'ordre fractionnaire  $q$  pour laquelle le système (3.36) avec les paramètres ci-dessus peut démontrer le chaos est  $q \approx 0.95$  . fig(3-3) et (3-4), respectivement Voir les résultats de simulation numérique pour  $q = 0,98$  et  $q = 0,94$  basé sur la methode (prédicteur-correctors ), Pour  $q = 0,98$ , le système est chaotique et pour  $q = 0,94$  ne l'est pas.

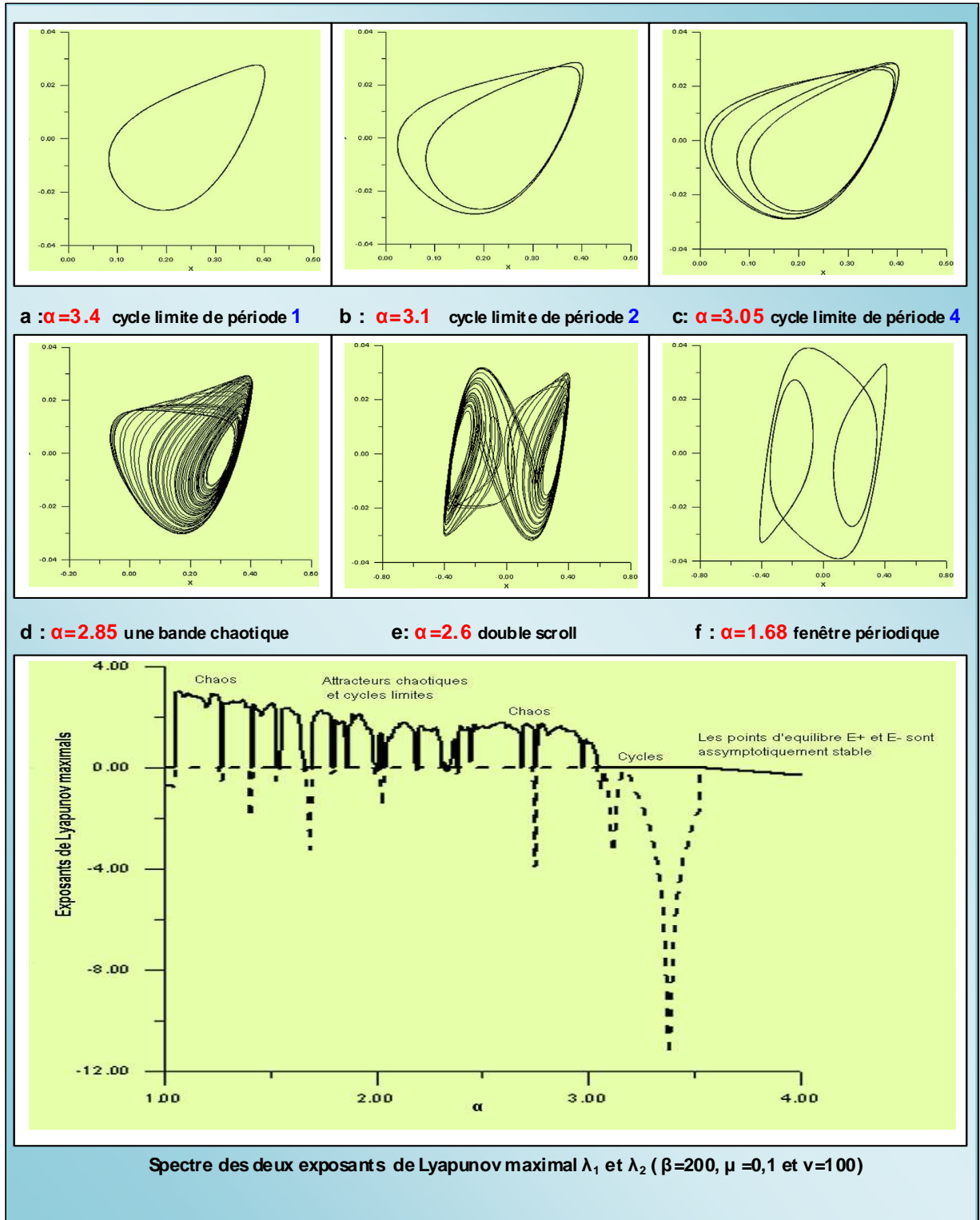


FIG. 3-6 – La projection de l'attracteur sur (x-y) pour  $\beta = 200$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\nu = 100$  et des différentes valeurs du paramètre  $\alpha$

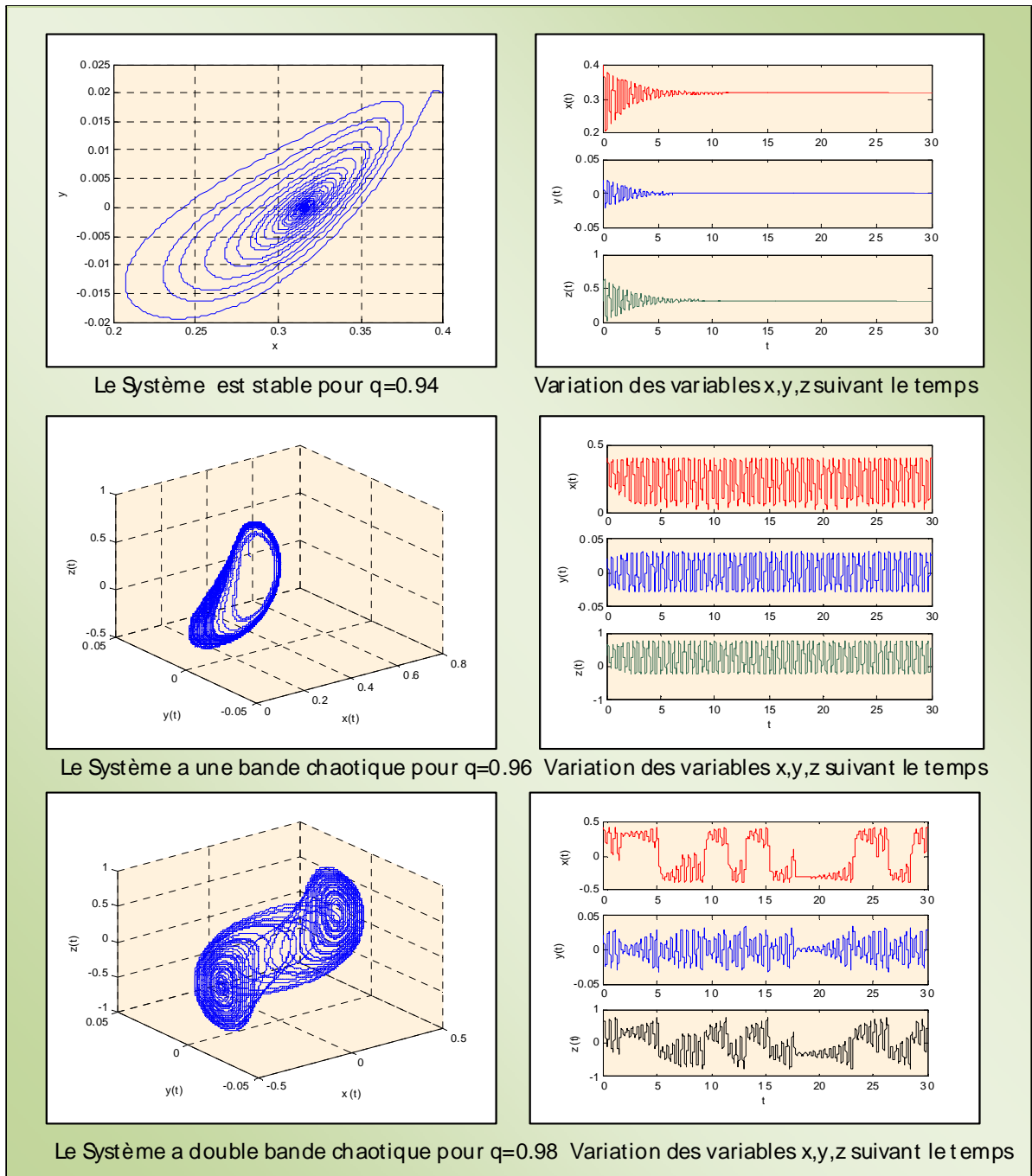


FIG. 3-7 – le système ADVP suivant l'ordre de dérivation fractionnaire  $q$



## 3.4 Conclusion

Après une introduction sur les équations différentielles d'ordres fractionnaires -existence et unicité des solutions, solutions numériques-, on a passé aux systèmes fractionnaires tels que on a introduit le théorème de stabilité des systèmes linéaires, la deuxième partie est consacrée à des applications sur les systèmes de **Chen**, de **LÜ** et de **VDPM**

## Deuxième partie

# Synchronisation des Systèmes Chaotiques à Dérivées Fractionnaires

# Chapitre 4

## Synchronisation des systèmes chaotiques

### 4.1 Introduction

L'histoire de la synchronisation remonte au dix-septième siècle, quand le scientifique hollandais, Christian Huygen aurait constaté que deux de ses horloges à balancier, placées côte à côte, convergeaient rapidement vers un mouvement identique en phase et en fréquence ; c'est à dire que les deux horloges avaient une parfaite synchronisation. S'il les perturbait, elles se resynchronisaient en une demi-heure, et s'il les éloignait, la synchronisation cessait. Dans la terminologie moderne, cela signifie que les deux horloges ont été synchronisées .

Récemment, les chercheurs de la synchronisation se sont intéressés aux systèmes chaotiques. Et comme ces derniers sont caractérisés par la sensibilité aux conditions initiales, la synchronisation entre deux systèmes chaotiques paraissait impossible. Mais les travaux de plusieurs scientifiques dans ce domaine ont montré le contraire.

En 1990, des travaux du Hubler ont démontré que les systèmes d'entraînement avec les signaux apériodiques pourraient induire certains comportements intéressants comme la résonance ou la stimulation non-linéaire des modes particuliers. l'idée d'employer un

signal apériodique spécial, à savoir un signal chaotique, pour conduire un système non-linéaire provient des travaux de **Carroll** et **Pecora** leurs travaux concentrés sur une configuration spécial impliquant deux systèmes couplés de sorte que le comportement de la seconde dépend du comportement du premier, mais réciproquement, le premier n'est pas influencé par le comportement du seconde. Le premier système produisant le signal chaotique, s'appelle le système émetteur(maître), et le deuxième c'est le système récepteur (esclave).

Durant la décennie passée, plusieurs types de synchronisation ont été étudiés, et beaucoup de méthodes ont été proposées, mais tous ces types et méthodes sont englobés sous deux modes de synchronisation. Le premier mode repose sur un couplage mutuel entre deux systèmes chaotiques ou plus. Le second est appelé maître-esclave ou couplage unidirectionnel : Son principe est de choisir un système générateur de chaos appelé "émetteur". Celui-ci est décrit par des équations récurrentes et caractérisé par ses variables d'état constituant le vecteur d'état. Quelques composantes de ce vecteur sont transmises à un second système nommé "récepteur".[66]

Au cours des dernières années, les recherches montrent qu'on peut aussi prolonger la synchronisation aux systèmes à dérivées fractionnaires et cela que nous essayons de la faire dans ce mémoire avec la version fractionnaire des systèmes choisis : le premier est celui de **Chen**, le deuxième est le système de **Lü**, et le troisième est celui du **Van Der-Pol (modifié)** en appliquant des différents types de synchronisation.

## 4.2 Les systèmes couplés

### Définition 4.1

On dit que deux oscillateurs sont couplés si l'existence d'une perturbation dans l'un entraîne une perturbation dans l'autre ; ce qui se traduit par un transfert d'énergie entre les deux oscillateurs. Ce type d'accouplement est appelé accouplement **mutuel**.

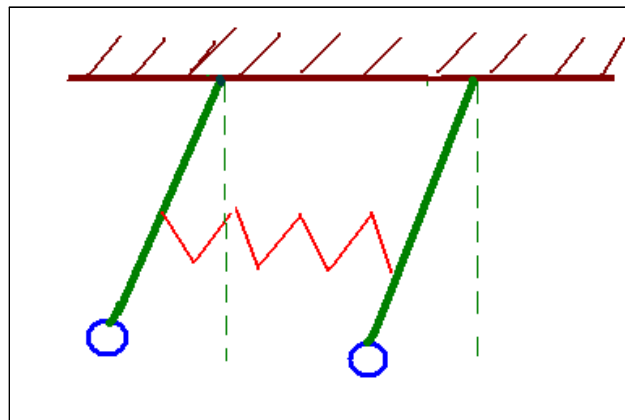


FIG. 4-1 – Deux pendules couplés

Maintenant, et après ce cas particulier on donne la définition d'accouplement pour deux systèmes dynamiques en général

**Définition 4.2** supposons qu'on a deux systèmes dynamiques chaotiques présentés par :

$$\dot{X} = f_1(X, t) \quad (4.1)$$

$$\dot{Y} = f_2(Y, t) \quad (4.2)$$

- On dit que les deux systèmes sont couplés si on peut réécrire les équations (4.1) et (4.2) sous la forme :

$$\dot{X} = g_1(X, X, Y, t) \quad (4.3)$$

$$\dot{Y} = g_2(Y, X, Y, t) \quad (4.4)$$

avec  $g_1, g_2$  sont des fonctions non linéaires, où la première variable de chaque équation représente la variable du système, tandis que la deuxième et la troisième sont le résultat de l'effet d'accouplement. La dernière représentation signifie que chaque système a un acte sur l'autre, dans ce cas on parle de l'accouplement **bidirectionnel**.

### 4.2.1 Accouplement unidirectionnel

Supposons qu'on a deux systèmes dynamiques identiques représentés par les deux équations suivantes :

$$\dot{X} = f(X, t) \quad (4.5)$$

$$\dot{Y} = f(Y, t) \quad (4.6)$$

Si l'équation(4.6) va être modifier par l'effet d'accouplement, et si le résultat de cette modification nous donne de nouvelles équations de la forme

$$\dot{X} = f(X, t) \quad (4.7)$$

$$\dot{Y} = g(Y, X, t) \quad (4.8)$$

tel que  $g(Y, X, t) = f(Y, t)$  pour  $X = Y$ , dans ce cas on parle de l'accouplement **unidirectionnel**.

le premier système s'appelle système émetteur (maître), et le deuxième système ré-

cepteur (esclave). La dernière représentation signifie que le système émetteur a un acte sur le récepteur, et le contraire est faux. Il est bien clair que ce type d'accouplement est un cas particulier d'accouplement mutuel, mais dans ce mémoire on s'enterrasse à **l'accouplement unidirectionnel**. On distingue deux méthodes d'accouplement unidirectionnel parmi plusieurs autres : la première méthode est par contrôle continu, et la deuxième est par remplacement des variables.

### 4.2.2 Méthode d'accouplement par contrôle continu

Dans ce cas le système émetteur est toujours donné par l'équation(4.7 ) tandis que le système récepteur est donné par l'équation

$$\dot{Y} = g(Y, X) = f(Y, t) + M_{n \times n}(X - Y) \quad (4.9)$$

Avec  $M_{n \times n}$  une matrice diagonale carré d'ordre  $n$ , et elle est constituée des éléments constants de la force d'accouplement.

### 4.2.3 Méthode d'accouplement par remplacement des variables

Cette méthode a été utilisée dans les travaux de **Carroll et Pecora** son principe est de décomposer le système émetteur, qui est représenté par l'équation(4.7) en deux sous systèmes présentés par :

$$\dot{X}_1 = f_1(X_1, X_2) \quad (4.10)$$

$$\dot{X}_2 = f_2(X_1, X_2) \quad (4.11)$$

Avec  $X_1 \in \mathbb{R}^d$ ,  $X_2 \in \mathbb{R}^m$ ,  $d + m = n$ . et  $X = (X_1, X_2)$

Dans ce cas le système récepteur est donné par l'équation suivante :

$$\dot{Y} = f_2(X_1, Y) \quad (4.12)$$

## 4.3 La synchronisation

### Définition 4.3

La synchronisation est une manière de faire l'entretien d'un mouvement périodique (ou chaotique). La synchronisation de deux systèmes dynamiques signifie que chaque système évolue en suivant le comportement de l'autre système.

## 4.4 Les différents types de Synchronisation

Dans la littérature il existe plusieurs types de Synchronisation citons parmi elles :

### 4.4.1 Synchronisation identique

La synchronisation identique ou la synchronisation complète a été réalisée grâce aux effets des forces d'accouplement unidirectionnelle des systèmes dynamiques. Elle peut être détectée non seulement dans les systèmes autonomes, mais aussi dans les systèmes non autonomes, et elle est basée sur les propriétés d'accouplement de deux systèmes ou plus, si ces systèmes sont identiques, on parle de la synchronisation **identique**, et s'ils sont différents on parle de la synchronisation **généralisée**.

•Supposons qu'on a deux systèmes dynamiques identiques liés par un accouplement unidirectionnel, et représentés par les équations suivantes :

$$\dot{X} = f(X, t) \quad (4.13)$$

$$\dot{Y} = g(Y, X, t) \quad (4.14)$$



### Définition 4.5

On dit qu'il y a une synchronisation identique entre ces deux systèmes si :

$$\lim |Y(t) - X(t)| = 0, \text{ pour } t \rightarrow \infty \quad (4.15)$$

pour toutes conditions initiales  $X(o), Y(o)$ , des deux systèmes

D'après cette définition on peut conclure que l'étude de la synchronisation nous ramène à l'étude de la stabilité au voisinage de l'origine d'un nouveau système qu'on s'appelle "système erreur". Ce dernier représente la perturbation qui peut exister entre le système émetteur et le système récepteur. La question qu'on peut poser ici : est-ce que cette perturbation va tendre vers le zéro exponentiellement ou non. A cet effet, on va supposer que la petite perturbation entre les deux systèmes est donnée par l'équation :

$$e = Y - X$$

L'évolution de cette dernière par rapport au temps est donnée par :

$$\frac{de}{dt} = g(X, Y) - f(X) \quad (4.16)$$

On a obtenu un système dynamique, et on va étudier sa stabilité, et pour cela il suffit de

- Linéariser le système (4.16) au voisinage de ces points d'équilibre.

Il est bien clair que le seul point d'équilibre est le point  $X = Y$ . Alors la linéarisation du système(4.16) nous donne :

$$\frac{de}{dt} = J(X).e \quad (4.17)$$

Avec

$$J(X) = \left[ \frac{\partial g(X, Y)}{\partial Y} \right]_{X=Y}$$

la matrice jacobienne associée.

Et pour étudier sa stabilité :

a Utiliser la dixième méthode de Lyapunov, pour cela il suffit de choisir une fonction qui vérifie les conditions nécessaires de stabilité.

b Calculer les exposants de Lyapunov du système récepteur pour garantir sa stabilité asymptotique.

#### 4.4.2 Extension de la Synchronisation aux systèmes fractionnaires

La définition précédente de la synchronisation identique reste valable pour les systèmes à dérivées fractionnaires

c'est à dire : si on a deux systèmes fractionnaires liés par un accouplement unidirectionnel donnés par leurs équations :

$$\frac{d^q X}{dt^q} = f(X, t) \quad (4.18)$$

$$\frac{d^q Y}{dt^q} = g(Y, X, t) \quad (4.19)$$

• On dit qu'il y a une synchronisation identique entre ces deux systèmes si :

$$\lim |Y(t) - X(t)| = 0, \quad \text{pour } t \rightarrow \infty \quad (4.20)$$

Et le problème aussi revient à étudier la stabilité du système erreur défini par

$$\frac{d^q e}{dt^q} = g(X, Y) - f(X) \quad (4.21)$$

La linéarisation du système(4.21)(en utilisant le développement de Taylor **généralisé** au point "zéro") nous donne :

$$\frac{d^q e}{dt^q} = J(X).e \quad (4.22)$$

avec

$$J(X) = \left[ \frac{\partial g(X, Y)}{\partial Y} \right]_{X=Y} \quad (4.23)$$

est la matrice jacobienne associée.

Pour étudier sa stabilité :

- On Utilise la deuxième méthode de Lyapunov qui peut être généralisée aux systèmes fractionnaires, pour cela il suffit de choisir une fonction qui vérifie les conditions nécessaires de stabilité.

- On calcule les exposants de Lyapunov du système récepteur pour garantir sa stabilité asymptotique.

On peut aussi

- Utiliser la transformée de Laplace pour la convergence du système erreur vers "zéro".

- Utiliser le théorème (3.3) concernant la stabilité des systèmes fractionnaires.

### **Le problème général de la synchronisation du chaos**

Comme on a déjà indiqué que le problème de la synchronisation de deux systèmes dynamiques chaotiques va nous ramener à un autre problème qui est celui de la stabilité du système erreur au voisinage de l'origine, à cet effet, et dans cette partie on va donner une forme plutôt générale du système erreur et nous allons fournir certaines conditions simples, explicites et facile à vérifier pour la stabilité globale et exponentielle de sa solution zéro.

Considérons le système erreur général suivant

$$\begin{cases} \dot{e}_r(t) &= f(t, e_r, e_{n-r}) \\ \dot{e}_{n-r}(t) &= g(t, e_r) + A.e_{n-r}(t) \end{cases} \quad (4.24)$$

où  $1 \leq r \leq n$ ,  $e_r \in \mathbb{R}^r, e_{n-r} \in \mathbb{R}^{n-r}$ ,  $f \in C[I \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^{n-r}]$  et  $A \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$  est une matrice constante réelle.

On a d'abord le résultat principal suivant.

**Théorème 4.1 :**

Si le système (4.24) est exponentiellement stable quand  $e_r = 0$ , la matrice constante  $A$  est Hurwitz stable et

$$\|g(t, e_r)\| \leq K \|e_r\|^\beta \quad (4.25)$$

pour les constantes  $K > 0$  et  $\beta > 0$ , donc le système (4.24) est aussi exponentiellement stable quand  $e_{n-r} = 0$ .

**Preuve :** Puisque le système (4.24) est exponentiellement stable au point  $e_r = 0$ , donc il existe des constantes  $C > 0$  et  $\alpha > 0$  tel que

$$\|e_r(t, t_0, e_r^0)\| \leq C \|e_r^0\| e^{-\alpha(t-t_0)} \quad (4.26)$$

Pour toute condition initiale  $e_r(t_0) = e_r^0$ .

en revanche, il suit de la deuxième équation du système (4.24) que :

$$e_{n-r}(t, t_0, e_{n-r}^0) = e_{n-r}^0 e^{(t-t_0)A} + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A} g(\tau, e_r(\tau)) d\tau \quad (4.27)$$

de plus et puisque  $A$  est stable au sens de Herwitz, alors il existe des constantes  $M > 0$  et  $\lambda > 0$  tel que

$$\|e^{(t-t_0)A}\| \leq M e^{-\lambda(t-t_0)} \quad (4.28)$$

il suit alors que

$$\begin{aligned} \|e_{n-r}^0(t, t_0, e_{n-r}^0)\| &\leq \|e_{n-r}^0\| e^{(t-t_0)A} + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A} g(\tau, e_r(\tau)) d\tau \\ &\leq \|e_{n-r}^0\| M e^{-\lambda(t-t_0)} + \int_{t_0}^t M e^{-\lambda(t-\tau)} K \|e_r(\tau)^\beta\| d\tau \\ &\leq \|e_n^0\|^{1+\beta} M \left(1 + \frac{KC}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

donc, pour un  $\varepsilon > 0$ , il existe

$$\delta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{C}, \left( \frac{\varepsilon}{M + (MKC)/\lambda} \right)^{1/(1+\beta)} \right\}$$

tel que pour toutes fois que  $\|e_n^0\| < \delta$  on a

$$\max \left\{ \|e_r(t, t_0, e_r^0)\|, \|e_{n-r}(t, t_0, e_{n-r}^0)\| \right\} < \varepsilon$$

On conclut que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_{t_0}^t M e^{\lambda \tau} K C \|e_r^0\|^\beta e^{-\alpha \beta (\tau - t_0)} d\tau}{e^{\lambda t}} = 0$$

exponentiellement

### Synchronisation par la méthode du contrôle continu

Il est évident que la matrice jacobienne dans cette partie dépend bien sûr de la matrice  $M_{n \times n}$  de l'équation (4.9). Pour cela on va consider les deux systèmes chaotiques présentés par les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X) \\ \dot{Y} = f(Y) + M_{n \times n}(Y - X) \end{cases} \quad (4.29)$$

avec  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $Y = (y_1, y_1, \dots, y_n)$ ,  $f$  une fonction non linéaire et  $M_{n \times n}$  une matrice carrée diagonale d'ordre  $n$ .

Comme la fonction  $f$  est non linéaire, donc on peut réécrire le système (4.29) sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{X} = A.X + \phi(X) \\ \dot{Y} = A.Y + \phi(Y) + M_{n \times n}(Y - X) \end{cases} \quad (4.30)$$

telles que  $A$  une matrice constante,  $\phi$  une fonction qui représente la partie non linéaire de chaque système.

Dans cette partie, la dynamique du système erreur est donné par :

$$\dot{e} = A.e + \phi(Y) - \phi(X) + M_{n \times n}.e \quad (4.31)$$

Donc selon l'équation (4.31) on peut étudier la stabilité du système erreur au voisinage de l'origine.

### **Le principe de la synchronisation identique**

On suppose qu'on a deux systèmes chaotiques identiques définits par les deux équations suivantes :

$$\dot{X} = AX + \phi(X) \quad (4.32)$$

$$\dot{Y} = AY + \phi(Y) + M_{n \times n}(Y - X) \quad (4.33)$$

Les deux systèmes sont liés par un accouplement unidirectionnel, avec  $X, Y$  sont les variables des systèmes maître (4.32) et esclave(4.33) respectivement,

$$M_{n \times n} = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

une matrice diagonale,  $A$  est une matrice carrée d'ordre  $n$  et  $\phi$  une fonction continue non linéaire d'ordre  $n$  qui satisfait la condition de Lipschitz suivante :

$$\|\phi(X) - \phi(Y)\| \leq \rho \|X - Y\| \quad (4.34)$$

$\rho$  est appelée la constante de Lipschitz,  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne.

Alors on a le théorème suivant

**Théorème 4.3 :**

Soit  $E$  la matrice unitaire d'ordre  $n \times n$  et  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  les valeurs propres de la matrice symétrique

$$\frac{(A + M_{n \times n}) + (A + M_{n \times n})^T}{2} + \rho E.$$

Si  $\max \{\lambda_i\}_{i=1}^n < 0$ , alors le système maître (4.32) et le système esclave (4.33) sont synchronisés dans le sens que le système erreur tend vers le zéro exponentiellement.

**Preuve :**

Supposons qu'on a le système erreur présenté par l'équation suivante

$$e = y - x$$

alors la dynamique de ce dernier est représentée par

$$\dot{e} = (A + M_{n \times n}).e + \phi(Y) - \phi(X) \quad (4.35)$$

Comme  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  sont les valeurs propres de la matrice symétrique

$$\frac{(A + M_{n \times n}) + (A + M_{n \times n})^T}{2} + \rho E.$$

Alors cette dernière est similaire ou semblable à la matrice diagonale

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

par la matrice orthogonale  $U$  tel que

$$U^T \cdot \left[ \frac{(A + M_{n \times n}) + (A + M_{n \times n})^T}{2} + \rho E \right] \cdot U = \Lambda$$

Soit  $V(e)$  la fonction de Lyapunov du système erreur défini par

$$V(e) = \frac{1}{2} \|e\|^2$$

il est clair que  $V(e) > 0$ . On va calculer  $\dot{V}(e)$ .

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= \frac{1}{2}(\dot{e}e + e\dot{e}) \\ &= \frac{1}{2}[(A + M_{n \times n}).e + \phi(X) - \phi(Y)).e + e.(A + M_{n \times n}).e + \phi(X) - \phi(Y)] \\ &= \frac{1}{2}[(A + M_{n \times n}).e.e + e.(A + M_{n \times n}).e + (\phi(X) - \phi(Y)).e + e.(\phi(X) - \phi(Y))] \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &\leq e^T \left[ \frac{(A + M_{n \times n}) + (A + M_{n \times n})^T}{2} + \rho.E \right].e \\ &\leq e^T.U.\Lambda.U^T.e = (U^T e)^T \Lambda (U^T e) \\ &\leq \max \{ \lambda_i \}_{i=1}^n (U^T e)^T (U^T e) \\ &\leq 0. \text{ pour tous } e \neq 0. \end{aligned}$$

Alors

$$V(e) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

ce qui nous donne que  $e \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

### 4.4.3 Cas des Systèmes fractionnaires

Considérons les deux systèmes chaotiques d'ordre fractionnaires  $q$  ( $0 < q < 1$ ) décrits par :

$$\begin{cases} \frac{d^q X_1}{dt^q} = f_1(X_1) \\ \frac{d^q X_2}{dt^q} = f_2(X_2) \end{cases} \quad (4.36)$$



Où  $X_1(t), X_2(t) \in \mathbb{R}^n$

Après la linéarisation des systèmes on peut les réécrire sous forme :

$$\frac{d^q X_1}{dt^q} = A_1 X_1 + g_1(X_1) \quad (4.37)$$

$$\frac{d^q X_2}{dt^q} = A_2 X_2 + g_2(X_2) \quad (4.38)$$

Où  $A_1$  et  $A_2 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  désignent les Jacobiennes de  $f_1(X_1)$  et  $f_2(X_2)$  respectivement  $g_1(X_1)$  et  $g_2(X_2)$  leurs parties non linéaire

La synchronisation par la méthode du contrôle continu consiste à choisir le système (4.37) comme système émetteur (maître) qu'on réécrit sous la forme ;

$$\frac{d^q X_m}{dt^q} = A_1 X_m + g_1(X_m) \quad (4.39)$$

Et on choisit le système (4.38) comme système récepteur(esclave) qu'on réécrit sous la forme :

$$\frac{d^q X_s}{dt^q} = A_2 X_s + g_2(X_s) + U(t) \quad (4.40)$$

Avec les symboles  $m$  et  $s$  désignent système maître et système esclave respectivement..

•  $-U(t) \in \mathbb{R}^n$  est un contrôle(linéaire ou non) conçu de telle sorte que la synchronisation entre les deux systèmes (4.37)et (4.38) soit réalisée . Et pour avoir ce but on définit le système erreur (en posant  $e = Y - X$ ) comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{d^q e}{dt^q} &= \frac{d^q X_s}{dt^q} - \frac{d^q X_m}{dt^q} = A_2 X_s + g_2(X_s) - A_1 X_m + g_1(X_m) + U(t) \\ &= Ae + G(X_m, X_s) + U(t) \end{aligned}$$

Où  $e = Y - X$  et  $G(X_m, X_s) = g_2(Y_s) - g_1(X_m) + (A_2 - A_1)X_1$

Pour simplifier les notations, la partie linéaire du système esclave est représentée par la matrice  $A$  (c'est à dire  $A = A_2$ ). L'objectif est de concevoir le contrôleur  $u(t)$  de telle

sorte que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0 \quad (4.41)$$

### La synchronisation par la méthode de Carroll et Pecora

En 1990, Carroll et Pecora ont montré que : si on substitue une variable d'un système chaotique par la décomposition de ce dernier, alors on peut synchroniser ce système avec un autre système identique [6].

Supposons qu'on a deux systèmes dynamiques chaotiques de dimension  $n$ , et supposons qu'ils sont identiques et présentés par les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X) \\ \dot{Y} = F(Y) \end{cases} \quad (4.42)$$

l'un des deux système est le maître et l'autre l'esclave. L'idée de cette méthode est de décomposer le système maître en deux sous système comme suit :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = F_1(X_1, X_2) \\ \dot{X}_2 = F_2(X_1, X_2) \end{cases} \quad (4.43)$$

Avec  $X_1 \in \mathbb{R}^d$ ,  $X_2 \in \mathbb{R}^m$ ,  $d + m = n$ . et  $X = (X_1, X_2)$

et on va considérer l'un des deux sous système comme un signal transmetteur et il sera injecter dans le système esclave, alors on obtient le système suivant

$$\dot{Y} = F_2(X_1, Y) \quad (4.44)$$

comme système esclave ou récepteur, avec  $X_1$  est le signal transmetteur.

### Cas des systèmes fractionnaires

Supposons les deux systèmes suivants

$$\begin{cases} \frac{d^q X}{dt^q} = F(X) \\ \frac{d^q Y}{dt^q} = F(Y) \end{cases} \quad (4.45)$$

dans ce cas le système (4.43) devient :

$$\begin{cases} \frac{d^q X_1}{dt^q} = F_1(X_1, X_2) \\ \frac{d^q X_2}{dt^q} = F_2(X_1, X_2) \end{cases} \quad (4.46)$$

Avec  $X_1 \in \mathbb{R}^d$ ,  $X_2 \in \mathbb{R}^m$ ,  $d + m = n$ . et  $X = (X_1, X_2)$

et le système esclave sera :

$$\frac{d^q Y}{dt^q} = F_2(X_1, Y) \quad (4.47)$$

#### 4.4.4 La synchronisation généralisée

Dans le concept de la synchronisation identique sous l'effet d'accouplement unidirectionnel il a été indiqué que le système récepteur est identique ou presque identique au système émetteur. Cependant, on va essayer d'imaginer la situation pratique intéressante où le système récepteur est différent du système émetteur.

En général, quand il existe une différence essentielle entre les systèmes couplés, on ne peut pas être sûr du premier coup d'œil d'affirmer que les systèmes chaotiques non identiques peuvent être synchronisés, mais plusieurs travaux ont démontré que ce type de synchronisation chaotique peut exister en généralisant le concept de la synchronisation pour inclure la non identification entre les systèmes couplés, et on a appelé ce phénomène **la synchronisation généralisée**.

Pour définir la synchronisation généralisée pour deux systèmes chaotiques couplés unidirectionnellement, on va travailler avec des systèmes non-linéaires composés d'un système émetteur autonome avec les variables dynamiques  $x$  dans un espace de phase  $X$

couplé à un système récepteur avec des variables dynamiques  $y$  dans l'espace d'état  $Y$ . La dynamique des systèmes émetteur et récepteur est donnée par

$$\dot{x} = F(x(t)) \quad (4.48)$$

$$\dot{y} = G(y(t), g, x(t)) \quad (4.49)$$

avec  $g$  une constante qui caractérise la force d'accouplement unidirectionnel.

Plusieurs méthodes ont été proposées pour détecter et étudier la stabilité de la synchronisation généralisée, mais on va proposer une de ces méthodes qui est connue sous le nom de "Le système auxiliaire approché"

### **La méthode du système auxiliaire approché**

Le principe de cette méthode est basé sur le fait que si le même système émetteur  $x(t)$  conduit deux systèmes récepteurs identiques  $y(t)$  et  $z(t)$  qui commencent par des conditions initiales différentes dans le bassin d'attraction, alors l'analyse de stabilité de la synchronisation dans l'espace  $X \oplus Y$ , qui peut en général avoir une forme très compliquée  $y(t) = \phi(x(t))$ , peut être remplacée par l'analyse de la stabilité tout à fait simple  $z(t) = y(t)$  dans l'espace  $Z \oplus Y$ .

A cet effet on va supposer le système auxiliaire suivant

$$\dot{z} = G(z(t), g, x(t)) \quad (4.50)$$

qui est identique au système récepteur. Clairement, quand le système récepteur et son auxiliaire ont le même signal émetteur  $x(t)$ , alors les champs (domaines) vectoriels dans les espaces de phase du récepteur et des systèmes auxiliaires sont identiques et les systèmes peuvent se développer sur des attracteurs identiques.

Il est facile de montrer que la stabilité linéaire du collecteur  $z(t) = y(t)$  est équivalente à la stabilité linéaire du collecteur des mouvements synchronisés dans  $X \oplus Y$ , qui est déterminé par  $\phi(\cdot)$ . Les équations linearisées qui dirigent l'évolution des quantités  $\zeta_y(t) =$

$y(t) - \phi(x(t))$  et  $\zeta_z(t) = z(t) - \phi(x(t))$ , sont :

$$\dot{\zeta}_y(t) = DG(\phi(x(t)), g, x(t)) \cdot \zeta_y(t) \quad (4.51)$$

$$\dot{\zeta}_z(t) = DG(\phi(x(t)), g, x(t)) \cdot \zeta_z(t) \quad (4.52)$$

avec

$$DG(w, h_u(t)) = \frac{\partial G(w, h_u(t))}{\partial w} \quad (4.53)$$

Puisque les équations linéarisées pour  $\zeta_y(t)$  et  $\zeta_z(t)$  sont identiques, les équations linéarisées pour  $\zeta_z(t) - \zeta_y(t) = z(t) - y(t)$  ont la même matrice Jacobienne  $DG(\cdot, g, x(t))$  que dans l'équation précédente. Donc, si le collecteur des mouvements synchronisés dans  $X \oplus Y \oplus Z$  est linéairement stable pour  $z(t) - y(t)$ , alors il est linéairement stable pour  $\zeta_y(t) = y(t) - \phi(x(t))$  et vice versa. Notons que l'équation linéarisée pour  $z(t) - y(t)$  est identique à l'équation qui définit les exposants de Lyapunov conditionnels pour le système récepteur. Ainsi, quand le collecteur  $z = y$  est linéairement stable, les exposants de Lyapunov conditionnels pour le système émetteur, conditionnés sur la valeur du système récepteur  $x(t)$ , sont tous négatifs.

## 4.5 La synchronisation de phase

Un cas fréquemment étudié dans la littérature est quand une force périodique externe faible est appliquée à un système chaotique autonome, cette situation peut être décrite par un système d'équations différentielles d'ordre  $n$  suivant

$$\dot{x}(t) = f(x) + p(t) \quad (4.54)$$

avec  $p(t) = A_1 \cos(\omega t + \delta_1), A_2 \cos(\omega t + \delta_2), \dots, A_n \cos(\omega t + \delta_n)$  la force périodique appliquée de fréquence  $\omega$  dont l'intensité est mesurée par l'amplitude  $A_i, i = 1, \dots, n$ . Dans ces circonstances il est possible d'observer le phénomène connu comme **la synchronisation de phase**. Cela signifie que le système reste chaotique mais sa dynamique est modifiée d'une telle façon que la phase de l'attracteur chaotique rencontre celui de la force appliquée. La présence de synchronisation de phase d'un système chaotique à une force agissante de fréquence  $\omega$  est représentée par la relation suivante :

$$\psi(t) = \phi(t) \pm \frac{m}{n}\omega t \quad (4.55)$$

avec  $m$  et  $n$  des nombres entiers, comme le cas quand il y a deux numéros (nombres) réels,  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ , qui vérifient  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$  et  $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 < 2\pi$ , tel que  $\varepsilon_1 < \psi(t) < \varepsilon_2$  pour tout  $t$ ,  $\phi(t)$  représente la phase de l'oscillateur chaotique et  $\Psi(t)$  la différence entre la phase de l'oscillateur chaotique et celle de la force agissante. Cette condition peut être réécrite, comme :

$$|n\Omega - m\omega| = 0 \quad (4.56)$$

pour que la synchronisation de phase signifie que la phase de l'oscillateur reste toujours assez près de la phase de la force ( $m = n = 1$ ), ou à une de ses harmoniques ( $m > n$ ), ou bien la fréquence de l'oscillateur,  $\Omega$ , est près d'une harmonie de la fréquence de la force ( $m < n$ ). La synchronisation de phase peut être obtenue ou non, selon les propriétés de la force appliquée : sa fréquence,  $\omega$ , amplitude  $A_i$  et les angles  $\delta_i, i = 1 \dots n$ , à cause des approches différentes à la phase de l'oscillateur présenté dans la subdivision précédente ; la synchronisation de phase peut être contrôlée de plusieurs façons.

## 4.6 Synchronisation de retard

Après la synchronisation complète et généralisée, les chercheurs ont découvert que deux systèmes dynamiques chaotiques non identiques peuvent exposer un phénomène

de synchronisation dans lequel les variables dynamiques des deux systèmes deviennent synchronisées, mais avec un retard de temps de l'un par rapport à l'autre, ils ont appelé ce phénomène **la synchronisation de retard**.

A cet effet, considérons deux systèmes chaotiques légèrement différents  $\dot{x}_1 = F_1(x_1)$  et  $\dot{x}_2 = F_2(x_2)$ , accrochés par un accouplement unidirectionnel défini par la force d'accouplement  $\varepsilon$ , donc on s'attend que  $x_1(t)$  soit synchronisée avec  $x_2(t + \tau)$  dans une gamme de valeurs de  $\varepsilon$ , où  $\tau \neq 0$  est le retard de temps qui dépend beaucoup plus de  $\varepsilon$  que du paramètre caractérisant la différence entre les deux oscillateurs.

Pour évaluer quantitativement la synchronisation de retard, nous utilisons la fonction de similitude suivante définie en ce qui concerne une variable dynamique, disons  $x$ , des oscillateurs chaotiques

$$s(\tau) = \sqrt{\frac{\langle (x_2(t - \tau) - x_1(t))^2 \rangle}{(\langle x_1^2(t) \rangle \langle x_2^2(t) \rangle)^{1/2}}} \quad (4.57)$$

où  $\tau$  est le temps de retard. Soit  $s_{\min}$  la valeur minimale de  $s(\tau)$  et soit  $\tau_{\min}$  la quantité (somme) de retard où  $s_{\min}$  est réalisé. On désigne par  $\langle . \rangle$  le produit scalaire défini sur l'espace de phases.

La synchronisation de retard entre les deux oscillateurs est caractérisée par les conditions

$$s_{\min} = 0 \quad \text{et} \quad \tau_{\min} \neq 0 \quad (4.58)$$

tandis que la synchronisation complète est caractérisée par les conditions

$$s_{\min} = 0 \quad \text{et} \quad \tau_{\min} = 0$$

## 4.7 Conclusion

On a donné un aperçu historique sur le phénomène de la synchronisation, puis on a introduit la notion et les types de synchronisation (Identique, généralisée, de phase, et à retard) avec des différentes méthodes, en généralisant tous ça aux systèmes fractionnaires.

# Chapitre 5

## Application des différents types de synchronisation pour des systèmes fractionnaires

### 5.1 Synchronisation identique

#### 5.1.1 Synchronisation du système de LU par la méthode de Pecora-Carroll

Cas où le signal transmetteur est  $y$

On considère le système de LU d'ordre fractionnaire

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1}x}{dt^{q_1}} = a(y - x), \\ \frac{d^{q_2}y}{dt^{q_2}} = cy - xz, \\ \frac{d^{q_3}z}{dt^{q_3}} = xy - bz, \end{cases} \quad (5.1)$$

Où  $0 < q_1, q_2, q_3 \leq 1$  et  $a, b, c$  sont des constantes.

Pour  $(a, b, c) = (36, 3, 20)$  et  $(q_1, q_2, q_3) = (0.985, 0.99, 0.98)$  le système précédent(5.1) est chaotique qui peut se décomposer en deux sous-systèmes par la substitution suivante :



$$X_1 = (y_1) \quad (5.2)$$

$$X_2 = (x_1, z_1) \quad (5.3)$$

Dans ce cas le système émetteur est :

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} x_m}{dt^{q_1}} = a(y_m - x_m), \\ \frac{d^{q_3} z_m}{dt^{q_3}} = x_m y_m - b z_m \end{cases} \quad (5.4)$$

et le système récepteur sera :

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} x_s}{dt^{q_1}} = a(y_m - x_s), \\ \frac{d^{q_3} z_s}{dt^{q_3}} = x_s y_m - b z_s, \end{cases} \quad (5.5)$$

La soustraction du système (5.4) de système (5.5) permet d'obtenir le système d'erreur suivant : avec  $e_1 = x_s - x_m$  et  $e_3 = z_s - z_m$ .

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} e_1}{dt^{q_1}} = -a e_1 \\ \frac{d^{q_3} e_3}{dt^{q_3}} = y_m e_1 - b e_3 \end{cases} \quad (5.6)$$

On applique la transformation de Laplace pour le système (5.6) et on pose

$$E(s) = L(e_i(t)), i = 1, 2, 3, \quad (5.7)$$

En appliquant la formule:

$$L(d^q e_i / dt^q) = s^q E_i(s) - s^{q-1} e_i(0) \quad i = 1, 2, 3,$$

on trouve

$$\begin{cases} s^{q_1} E_1(s) - s^{q_1-1} e_1(0) = -a E_1(s) \\ s^{q_3} E_3(s) - s^{q_3-1} e_3(0) = L(y_m e_1) - b E_3(s) \end{cases} \quad (5.8)$$

ce qui nous donne :

$$E_1(s) = \frac{s^{q_1-1} e_1(0)}{s^{q_1} + a} \quad (5.9)$$

$$E_3(s) = \frac{s^{q_3-1} e_3(0) + L(y_m e_1)}{s^{q_3} + b} \quad (5.10)$$

et avec le théorème de la moyenne de Laplace, nous trouvons :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e_1(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s E_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s^{q_1} e_1(0)}{s^{q_1} + a} = 0, \quad (5.11)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e_3(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s E_3(s) = \frac{1}{b} \lim_{s \rightarrow 0^+} s L(y_m e_1), \quad (5.12)$$

or  $y_m$  est borné c'est à dire,  $|y_m| \leq M$

tel que :

$$|L(y_m e_1)| \leq M |E_1(s)| \quad (5.13)$$

donc

$$|s L(y_m e_1)| \leq M |s E_1(s)| \quad (5.14)$$

ce qui implique :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e_3(t) = 0 \quad (5.15)$$

de (5.11) et de (5.15) on trouve que les systèmes (5.4) et (5.5) sont synchronisés, comme la montre la simulation numérique suivante :

## 5.1.2 Simulation numérique

Pour les valeurs de paramètres  $(a, b, c) = (36.3.20)$  et pour les valeurs initiales  $(x_m, y_m, z_m) = (-4, 1, 4)$ , et  $(x_s, z_s) = (-3, 3)$  on obtient :

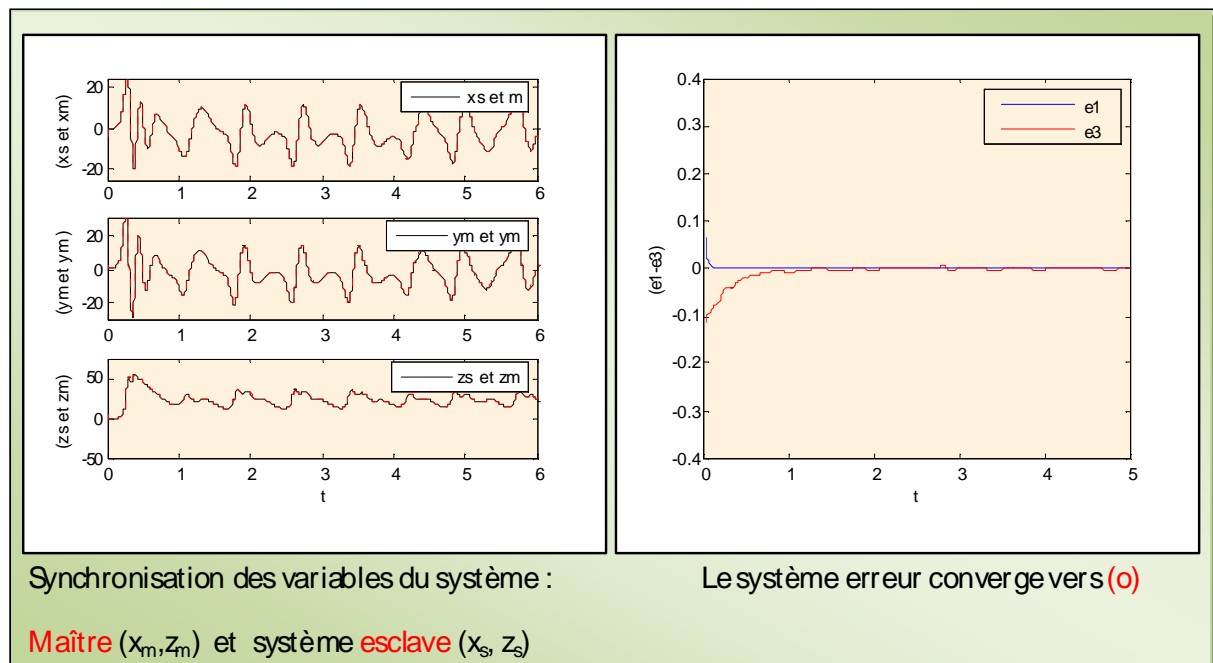


FIG. 5-1 – Synchronisation du système de Lü par la méthode Pécorra-Caroll

## 5.1.3 Synchronisation du système de Chen par la méthode du contrôle continu

### 5.1.3.1 Cas du contrôle linéaire

On considère le système de **Chen** d'ordre fractionnaire :

$$\begin{cases} \frac{d^q x}{dt^q} = a(y - x) \\ \frac{d^q y}{dt^q} = (c - a)x - xz + cy \\ \frac{d^q z}{dt^q} = xy - bz \end{cases} \quad (5.16)$$

Où  $a = 35$ ,  $b = 3$ ,  $c = 28$

1 : Tout d'abord fixons  $q = 0.95$ , le système est chaotique comme on a déjà vu dans le chapitre (troisième)

•– Dans ce cas le système émetteur est :

$$\begin{cases} \frac{d^q x_m}{dt^q} = a(y_m - x_m) \\ \frac{d^q y_m}{dt^q} = (c - a)x_m - x_m z_m + cy_m \\ \frac{d^q z_m}{dt^q} = x_m y_m - bz_m \end{cases} \quad (5.17)$$

qui peut s'écrire sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} \frac{d^q x_m}{dt^q} \\ \frac{d^q y_m}{dt^q} \\ \frac{d^q z_m}{dt^q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c - a & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_m z_m \\ x_m y_m \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

•–le système récepteur sera :

$$\begin{cases} \frac{d^q x_s}{dt^q} = a(y_s - x_s) + u_1(t) \\ \frac{d^q y_s}{dt^q} = (c - a)x_s - x_s z_s + cy_s + u_2(t) \\ \frac{d^q z_s}{dt^q} = x_s y_s - bz_s + u_3(t) \end{cases} \quad (5.19)$$

qui peut aussi s'écrire sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} \frac{d^q x_m}{dt^q} \\ \frac{d^q y_m}{dt^q} \\ \frac{d^q z_m}{dt^q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c - a & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_s z_s \\ x_s y_s \end{pmatrix} + u(t) \quad (5.20)$$

Où  $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))^T \in \mathbb{R}^3$  est un paramètre désiré de contrôle de sorte que ces deux systèmes chaotiques peuvent être synchronisés, et les indices "**m**" et "**s**" désignent le système émetteur (maître) et système récepteur (esclave) respectivement. Puis en soustrayant le système (5.18) du système (5.20) permet d'obtenir le système d'erreur suivant : en posant :  $e_1 = x_s - x_m$ ,  $e_2 = y_s - y_m$  et  $e_3 = z_s - z_m$

$$\begin{pmatrix} \frac{d^q e_1}{dt^q} \\ \frac{d^q e_2}{dt^q} \\ \frac{d^q e_3}{dt^q} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + \varphi(x, y, z) + u(t) \quad (5.21)$$

Où

$$A = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c - a & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

et  $\varphi(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_s z_s \\ x_s y_s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -x_m z_m \\ x_m y_m \end{pmatrix}$  est une fonction non linéaire qui vérifie

la condition de Lipschitz  $\|\phi(X) - \phi(Y)\| \leq \rho \|X - Y\|$  pour  $\rho = 1$

Généralement pour la simplicité on choisit le contrôle  $u(t) = M.e(t)$  dans la quelle  $M$  est une matrice diagonale qui peut être choisie de telle sorte que le théorème **(3-3)** soit appliqué c'est à dire  $|\arg(\lambda_i)|_{i=1,2,3} > q \cdot \frac{\pi}{2}$  et la synchronisation entre les systèmes (5.17) et (5.19) soit satisfaite.

Où  $\lambda_i$  sont toutes les valeurs propres de la matrice  $A + M$  et  $q$  l'ordre de dérivation.

Si on prend par exemple :

$$M = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}$$

Où  $p_1, p_2$  et  $p_3$  sont des constantes réelles positives.

Alors

$$A + M = \begin{pmatrix} -a + p_1 & a & 0 \\ -a + c & c + p_2 & 0 \\ 0 & 0 & -b + p_3 \end{pmatrix}$$

Pour que la condition  $|\arg(\lambda_i)|_{i=1,2,3} > q \cdot \frac{\pi}{2}$  soit satisfaite, on utilise le critère de **Routh-Hurwitz** généralisé à l'ordre fractionnaire (**annexe1**)

Soit le polynôme caractéristique de la matrice  $A + M$  :

$$p(x) = X^3 + (-p_1 - p_2 - p_3 + 10) X^2 + ((p_2 + 28)(p_1 - 35) - (p_3 - 3)(-p_1 - p_2 + 7)) X - (p_3 - 3)(p_2 + 28)(p_1 - 35)$$

son discriminant :

$$D(p) = 18a_1a_2a_3 + (a_1a_2)^2 - 4a_3(a_1)^3 - 4(a_2)^3 - 27(a_3)^2$$

$$\text{Où } a_1 = (-p_1 - p_2 - p_3 + 10)$$

$$a_2 = ((p_2 + 28)(p_1 - 35) - (p_3 - 3)(-p_1 - p_2 + 7))$$

$$a_3 = -(p_3 - 3)(p_2 + 28)(p_1 - 35)$$

**a**—Si  $D(p) > 0, a_1 > 0, a_3 > 0$  et  $a_1a_2 > a_3$  la condition  $|\arg(\lambda_i)|_{i=1,2,3} > q \cdot \frac{\pi}{2}$  est nécessairement vérifiée.

**b**—Si  $D(p) < 0, a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, a_3 > 0, \alpha < (2/3)$  la condition  $|\arg(\lambda_i)|_{i=1,2,3} > q \cdot \frac{\pi}{2}$  est satisfaite

**c**—Si  $D(p) < 0, a_1 < 0, a_2 < 0, \alpha > (2/3)$  alors toutes les racines de  $p(x) = 0$  satisfont la condition  $|\arg(\lambda_i)|_{i=1,2,3} > q \cdot \frac{\pi}{2}$

**d**—Si  $D(p) < 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_1a_2 = a_3$ , la condition précédente est aussi satisfaite.

•—Si  $p_1 = p_3 = 0$ , après un simple calcul on voit que la condition (**a**) pour qu'elle soit vérifiée il faut que  $p_2 < -21$ .

•—Si  $p_1 = p_2 = p_3 = -50$

on trouve :  $a_1 = 160, a_2 = 7541$ , et  $a_3 = 99110$  en suite  $D(p) = 3905750016$

on voit que la condition (**a**) est vérifiée, alors la condition  $|\arg(\lambda_i)|_{i=1,2,3} > q \cdot \frac{\pi}{2}$  est nécessairement vérifiée  $\forall \alpha \in ]0, 1]$  (remarquons que les valeurs propres dans ce cas sont :  $\lambda_1 = -22, \lambda_2 = -85, \lambda_3 = -53$ ), et selon le théorème (**3-3**) les deux systèmes (5.17) et (5.19) sont synchronisés, La simulation numérique confirme ce résultat, comme le montre **fig(5-1)**

**2**— Maintenant fixons  $p_1 = p_2 = p_3 = -50$  faisons varier l'ordre de dérivation  $q$  pour voir l'influence de l'ordre de dérivation sur la synchronisation voir **fig(5-4)**

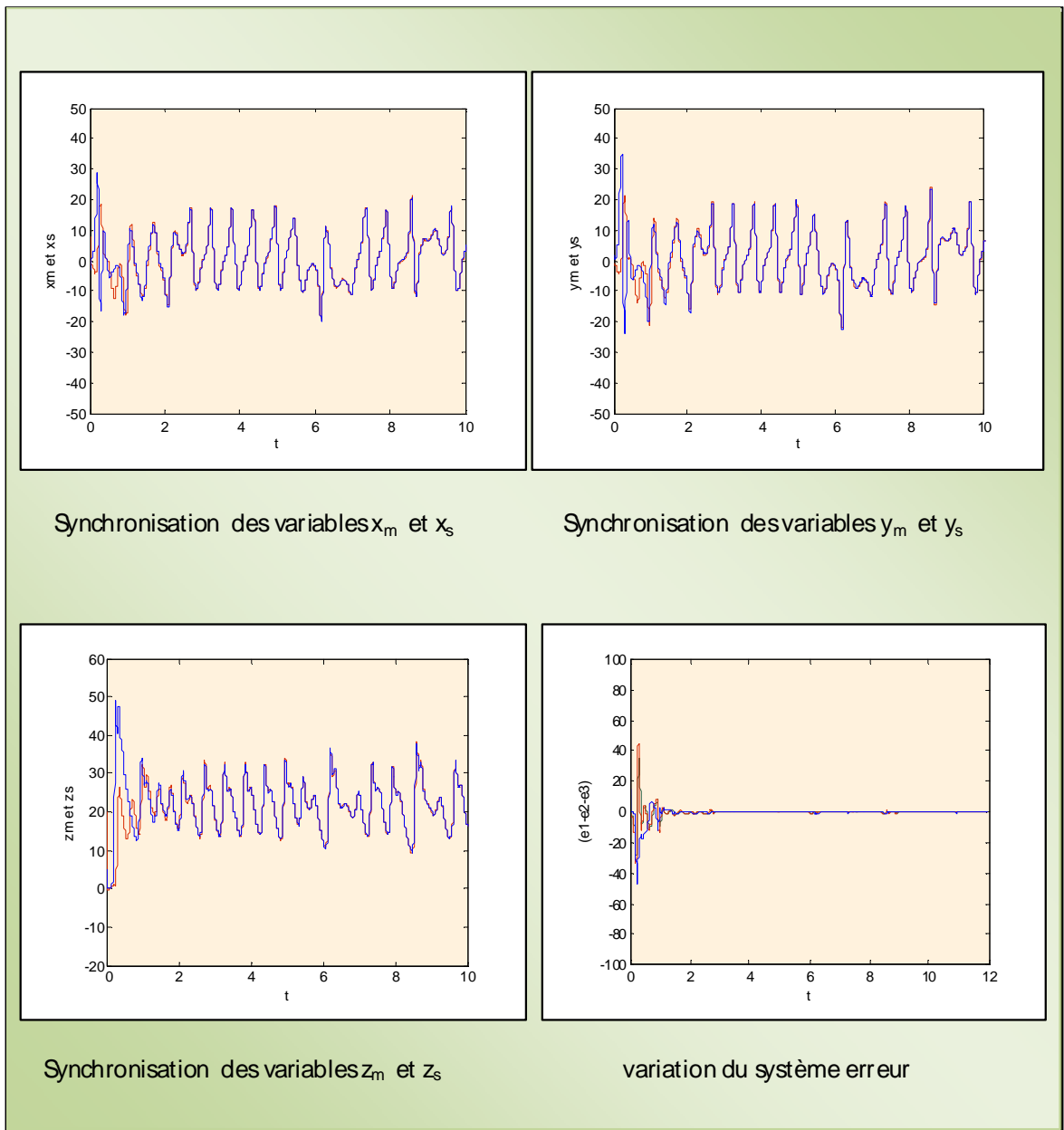


FIG. 5-2 – Synchronisation identique du système de Chen contrôle continu avec les paramètres (35,3,28) et l'ordre  $q=0.95$  pour  $p_2=-22$

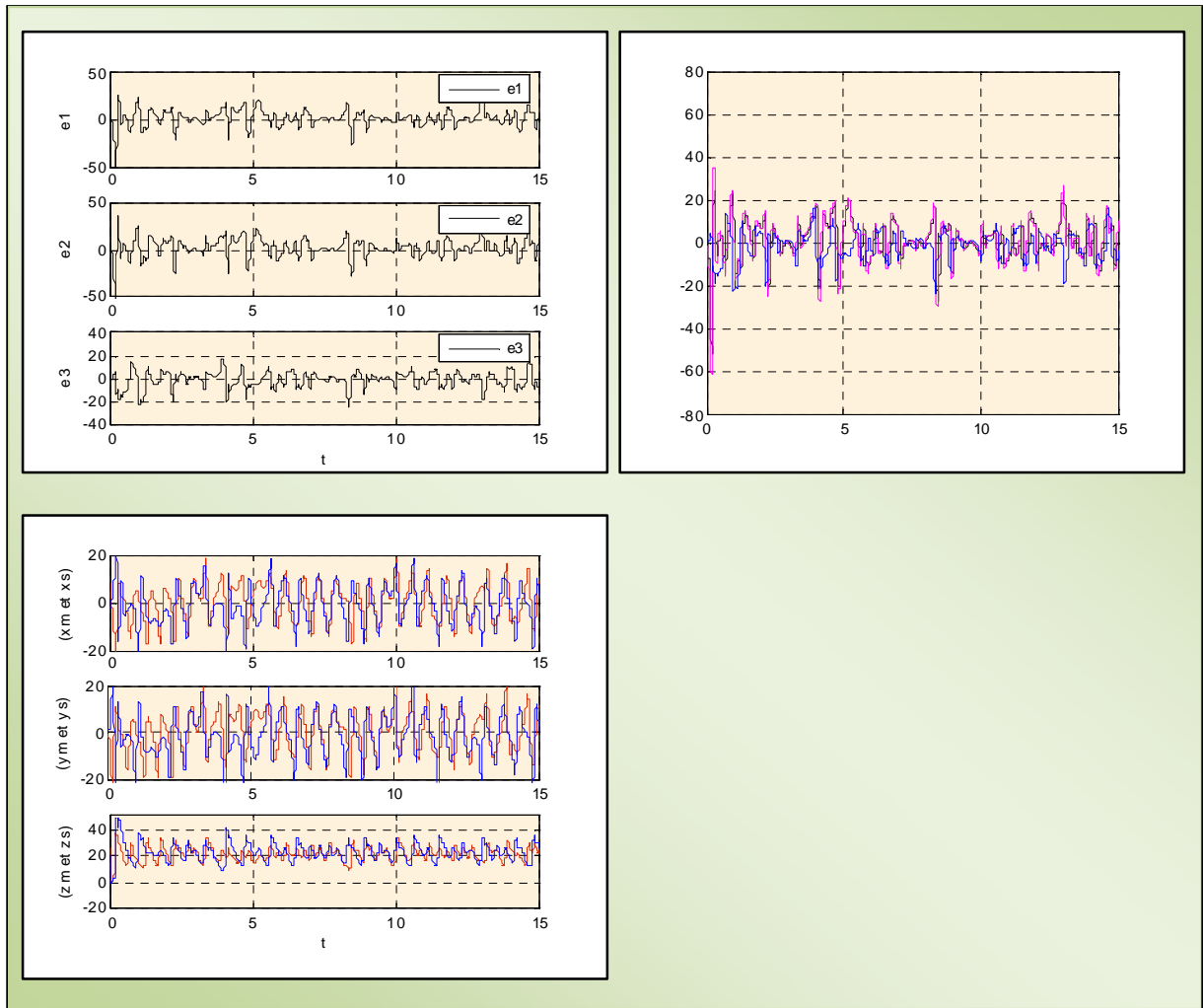


FIG. 5-3 – les variables ne sont pas synchronisées pour  $p_2=-2$



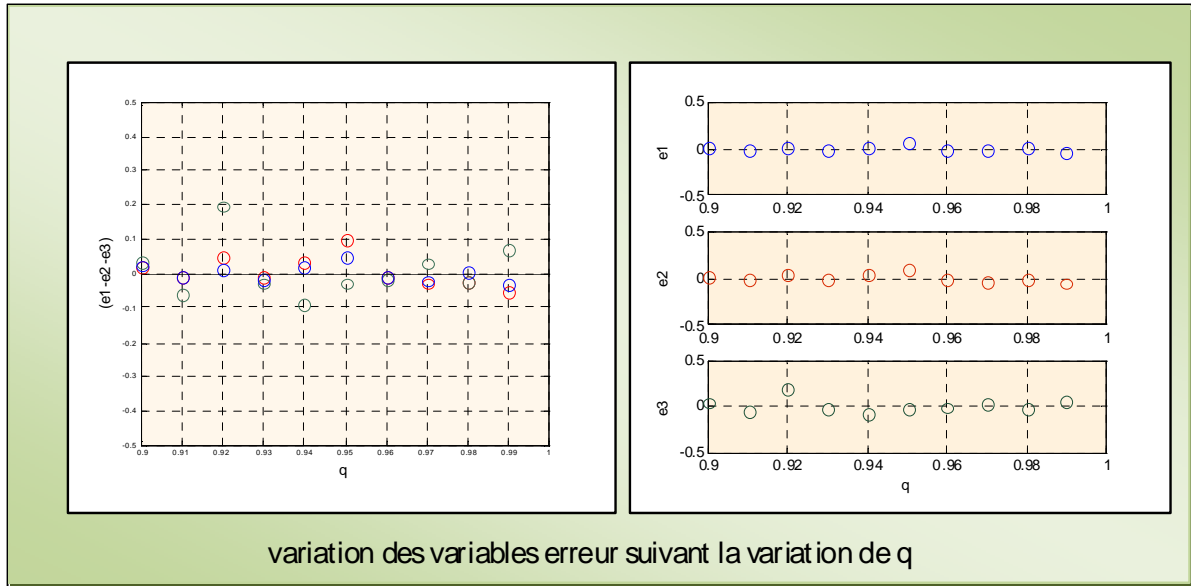


FIG. 5-4 – Synchronisation selon l'ordre  $q$  dans le cas du contrôle linéaire

### 5.1.3.2. Cas du contrôle non linéaire :

Dans ce cas on prend le système de Chen d'ordre fractionnaire

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} x}{dt^{q_1}} = a(y - x) \\ \frac{d^{q_2} y}{dt^{q_2}} = (c - a)x - xz + cy \\ \frac{d^{q_3} z}{dt^{q_3}} = xy - bz \end{cases} \quad (5.22)$$

Où :  $0 < q_1, q_2, q_3 \leq 1$

Si  $(a, b, c) = (35, 3, 28)$  et  $(q_1, q_2, q_3) = (0.985, 0.99, 0.98)$  le système (5.22) est bien chaotique

- Le système émetteur est :

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} x_m}{dt^{q_1}} = a(y_m - x_m) \\ \frac{d^{q_2} y_m}{dt^{q_2}} = (c - a)x_m - x_m z_m + cy_m \\ \frac{d^{q_3} z_m}{dt^{q_3}} = x_m y_m - bz_m \end{cases} \quad (5.23)$$

- le système récepteur sera :

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} x_s}{dt^{q_1}} = & a(y_s - x_s) + u_1(t) \\ \frac{d^{q_2} y_s}{dt^{q_2}} = & (c - a)x_s - x_s z_s + cy_s + u_2(t) \\ \frac{d^{q_3} z_s}{dt^{q_3}} = & x_s y_s - bz_s + u_3(t) \end{cases} \quad (5.24)$$

Tels que  $U(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ , représente le contrôle non linéaire être conçu, notre objectif est de déterminer ce contrôleur pour que la synchronisation identique entre les deux systèmes de Chen (5.23) et (5.24) soit complète. Afin d'obtenir ce but, nous définissons l'erreur de synchronisation par :

$e_1 = x_s - x_m, e_2 = y_s - y_m$  et  $e_3 = z_s - z_m$  respectivement, ensuite, la soustraction du système (5.23) de système(5.24) permet d'obtenir le système d'erreur suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} e_1}{dt^{q_1}} = & a(e_2 - e_1) + u_1(t) \\ \frac{d^{q_2} e_2}{dt^{q_2}} = & (c - a)e_1 + ce_2 - e_1 e_3 - x_m e_3 - z_m e_1 + u_2(t) \\ \frac{d^{q_3} e_3}{dt^{q_3}} = & e_1 e_2 + x_m e_2 + y_m e_1 - be_3 + u_3(t) \end{cases} \quad (5.25)$$

Qui s'écrit sous forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} e_1}{dt^{q_1}} \\ \frac{d^{q_2} e_2}{dt^{q_2}} \\ \frac{d^{q_3} e_3}{dt^{q_3}} \end{cases} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c - a & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -e_1 e_3 - x_m e_3 - z_m e_1 \\ e_1 e_2 + x_m e_2 + y_m e_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

Il n'existe pas une méthode générale pour trouver le contrôleur  $U(t)$ , mais on définit ce contrôleur par construction de telle sorte que la partie non linéaire du système soit éliminée et le système erreur converge exponentiellement vers zéro. Donc, nous définissons la fonction contrôle  $U(t)$  comme suit

$$\begin{cases} u_1(t) = & 0 \\ u_2(t) = & +e_1e_3 + x_me_3 + z_me_1 - (c+1)e_2 \\ u_3(t) = & -e_1e_2 - x_me_2 - y_me_1 \end{cases} \quad (5.27)$$

Dans le cadre de ce choix particulier, le système erreur (5.26) devient :

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1}e_1}{dt^{q_1}} = & a(e_2 - e_1) \\ \frac{d^{q_2}e_2}{dt^{q_2}} = & (c - a)e_1 - e_2 \\ \frac{d^{q_3}e_3}{dt^{q_3}} = & -be_3 \end{cases} \quad (5.28)$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \left( \begin{array}{c} \frac{d^{q_1}e_1}{dt^{q_1}} \\ \frac{d^{q_2}e_2}{dt^{q_2}} \\ \frac{d^{q_3}e_3}{dt^{q_3}} \end{array} \right) = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (5.29)$$

Où :

$$A = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c - a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

Pour prouver que le système erreur converge vers (0), cette fois on va utiliser la transformation de **Laplace**

Posons  $E_i(s) = L(e_i(t))$  ( $i = 1, 2, 3$ ) la transformée de  $e_i(t)$  et en utilisant la formule :

$L\left(\frac{d^{q_i}e_i}{dt^{q_i}}\right) = s^{q_i}E_i(s) - s^{q_i-1}e_i(0)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) nous obtenons :

$$\begin{cases} s^{q_1}E_1(s) - s^{q_1-1}e_1(0) = & -a(E_2(s) - E_1(s)), \\ s^{q_2}E_2(s) - s^{q_2-1}e_2(0) = & (c - a)E_1(s) - E_2(s), \\ s^{q_3}E_3(s) - s^{q_3-1}e_3(0) = & -bE_3(s), \end{cases} \quad (5.30)$$

Il résulte des équations du système (5.30)

$$E_1(s) = \frac{s^{q_1-1}e_1(0) + aE_2(s)}{s^{q_1} + a} \quad (5.31)$$

$$E_2(s) = \frac{s^{q_2-1}e_2(0) + A}{s^{q_2} + 1 - B} \quad (5.32)$$

Où  $A = (c - a)s^{q_1-1}e_1(0)/(s^{q_1} + a)$  et  $B = (c - a)a/(s^{q_1} + a)$

$$E_3(s) = \frac{s^{q_3-1}e_3(0)}{s^{q_3} + b} \quad (5.33)$$

Avec la valeur finale du théorème de Laplace [60] nous avons :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e_2(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} sE_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s^{q_2}e_2(0) + sA}{s^{q_2} + 1 - B} = 0$$

Donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e_1(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} sE_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s^{q_1}e_1(0) + asE_2(s)}{s^{q_1} + a} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e_3(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} sE_3(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s^{q_3}e_3(0)}{s^{q_3} + b} = 0$$

L'analyse ci-dessus implique que le système émetteur (maître) (5.23) et système récepteur (esclave) (5.24) avec le contrôle non-linéaire (5.27) sont synchronisés. La simulation numérique confirme ce résultat, comme la montre la **fig(5-5)**

#### 5.1.4 Synchronisation du système Van Der Pol (VDPM) par contrôle linéaire continu

Dans cette paragraphe on va prendre le système étudié dans le chapitre troisième c'est le système **Van Der Pol-Duffing**

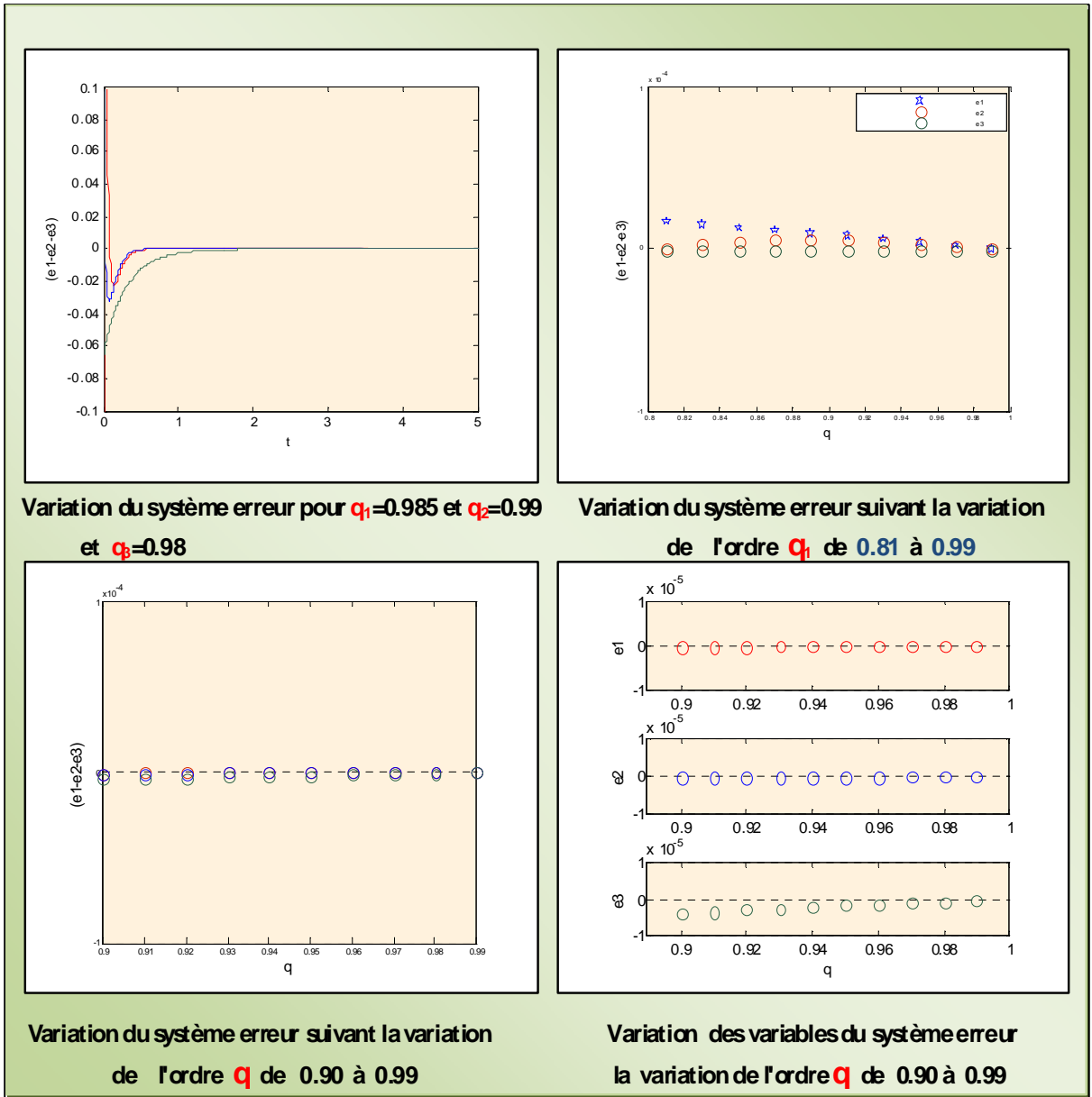


FIG. 5-5 – Synchronisation du système de Chen avec contrôle non linéaire

Soit le système :

$$\begin{cases} \frac{dx^q}{dt^q} = -\nu(x^3 - \mu x - y) \\ \frac{dy^q}{dt^q} = x - \alpha y - z \\ \frac{dz^q}{dt^q} = \beta y \end{cases} \quad (5.34)$$

Avec les paramètres :  $\nu = 100$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\beta = 200$ , et  $\alpha = 1.6$  et l'ordre de dérivation  $q = 0.98$ , le système est chaotique.

• Dans ce cas le système émetteur est :

$$\begin{cases} \frac{dx_m^q}{dt^q} = -\nu(x_m^3 - \mu x_m - y_m) \\ \frac{dy_m^q}{dt^q} = x_m - \alpha y_m - z_m \\ \frac{dz_m^q}{dt^q} = \beta y_m \end{cases} \quad (5.35)$$

• Le système récepteur sera

$$\begin{cases} \frac{dx_s^q}{dt^q} = -\nu(x_s^3 - \mu x_s - y_s) + k_1(x_s - x_m) \\ \frac{dy_s^q}{dt^q} = x_s - \alpha y_s - z_s + k_2(y_s - y_m) \\ \frac{dz_s^q}{dt^q} = \beta y_s + k_3(z_s - z_m) \end{cases} \quad (5.36)$$

Où  $k_1, k_2, k_3$  est les paramètres d'accouplement.

La soustraction du système (5.35) de système(5.36) permet d'obtenir le système d'erreur suivant :

$$\begin{pmatrix} \frac{d^q e_1}{dt^q} \\ \frac{d^q e_2}{dt^q} \\ \frac{d^q e_3}{dt^q} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + \varphi(x, y, z) \quad (5.37)$$

avec :  $e_1 = x_s - x_m, e_2 = y_s - y_m$  et  $e_3 = z_s - z_m$  et

$$A = \begin{pmatrix} \nu\mu + k_1 & \nu & 0 \\ 1 & k_2 - \alpha & -1 \\ 0 & \beta & k_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\nu(x_s^3 - x_m^3) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

$\varphi(x, y, z)$  est une fonction non linéaire qui vérifie la condition de Lipschitz  $\|\phi(X) - \phi(Y)\| \leq \rho \|X - Y\|$  pour  $\rho = 1$

•–Dans le cas des paramètres :  $\nu = 100$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\beta = 200$ , et  $\alpha = 1.6$

Pour que le système (5.38) soit asymptotiquement stable et converge vers (o), il suffit d'appliquer le théorème **(3.3)** c'est à dire : la condition  $|\arg(\lambda_i)|_{i=1,2,3} > q \cdot \frac{\pi}{2}$  soit satisfaite telles que  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de la matrice **A** et pour cela on utilise le critère de **Routh-Hurwitz** généralisé à l'ordre fractionnaire( **annexe1**)

Soit le polynôme caractéristique de la matrice **A**

$$P(x) = X^3 + (-k_1 - k_2 - k_3 - 8.4) X^2 + (-k_3(-k_1 - k_2 - 8.4) + (k_1 + 10)(k_2 - 1.6) + 100) X - (200k_1 + k_3((k_1 + 10)(k_2 - 1.6) - 100) + 2000.0)$$

sont discriminant :

$$D(p) = 18a_1a_2a_3 + (a_1a_2)^2 - 4a_3(a_1)^3 - 4(a_2)^3 - 27(a_3)^2$$

$$\text{Où } a_1 = (-k_1 - k_2 - k_3 - 8.4)$$

$$a_2 = (-k_3(-k_1 - k_2 - 8.4) + (k_1 + 10)(k_2 - 1.6) + 100)$$

$$a_3 = -(200k_1 + k_3((k_1 + 10)(k_2 - 1.6) - 100) + 2000.0)$$

Selon le critère du **Routh-Hurwitz** (condition **a**) il suffit :  $D(p) > 0, a_1 > 0, a_3 > 0$  et  $a_1a_2 > a_3$  pour que la condition  $|\arg(\lambda_i)|_{i=1,2,3} > q \cdot \frac{\pi}{2}$  soit nécessairement vérifiée

•–Dans le cas  $k_1 = -15, k_2 = -10, k_3 = -5$

$$\text{On trouve } a_1 = 21.6, a_2 = 241, a_3 = 790, D(p) = 1.3265 \times 10^7$$

Donc les deux systèmes sont synchronisés comme les montre la **fig (5.6)(en haut)**

•–Dans le cas  $k_1 = -10, k_2 = -5, k_3 = -2$

On trouve  $a_1 = 8.6, a_2 = 113.2, a_3 = -200.0$ , Or  $a_3$  est négative donc le système est instable c'est à dire les deux systèmes ne sont pas synchronisés voir la **fig (5.6)(en**

bas)

**Remarque 5.1 :**

Dans le premier cas les valeurs propres de la matrice **A** sont :

$$\lambda_1 = -5.0, \lambda_2 = -8.3 + 9.4398i, \text{ et } \lambda_3 = -8.3 - 9.4398i,$$

Tandis que dans le deuxième cas sont :

$$\lambda_1 = 1.5511, \lambda_2 = -5.0755 + 10.158i, \text{ et } \lambda_3 = -5.0755 - 10.158i$$



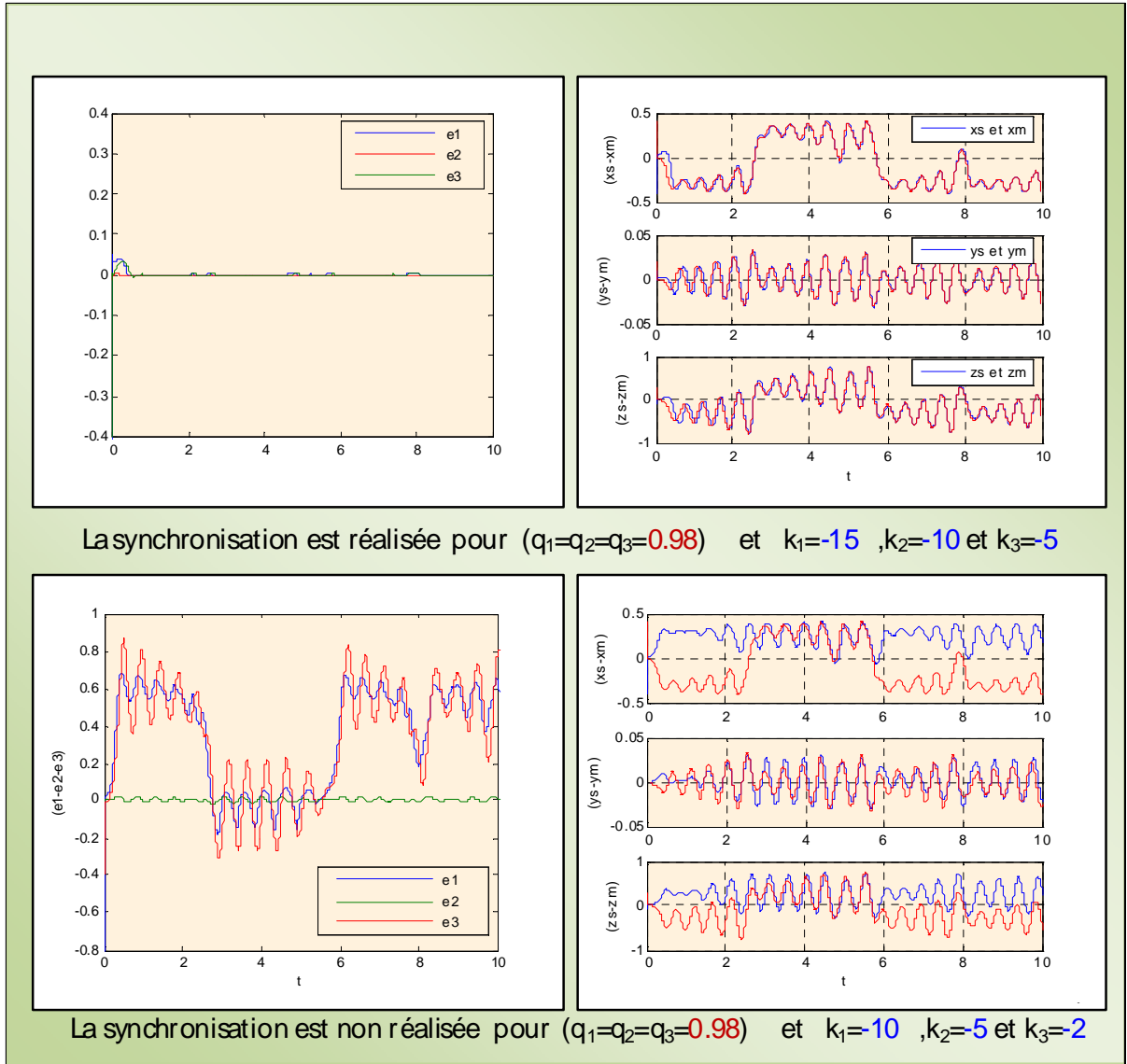


FIG. 5-6 – Synchronisation du circuit ADPV

## 5.2 Synchronisation généralisée

dans ce paragraphe on va prendre deux systèmes fractionnaires différents le premier est celui de **Chen** et le deuxième est le système de  $\mathbf{L}\ddot{\mathbf{U}}$ , et on va détecter la synchronisation au moyen d'un système auxiliaire .

Pour cela, on suppose le système de Chen fractionnaire comme système émetteur :

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} x_1}{dt^{q_1}} = a(y_1 - x_1), \\ \frac{d^{q_2} y_1}{dt^{q_2}} = (c - a)y_1 - x_1 z_1 + cy_1 \\ \frac{d^{q_3} z_1}{dt^{q_3}} = x_1 y_1 - b z_1, \end{cases} \quad (5.39)$$

où  $(a, bc) = (35, 3, 28)$  et  $(q_1, q_2, q_3) = (0.985, 0.99, 0.98)$

Et supposons comme système récepteur le système de  $L\ddot{U}$  fractionnaire

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} x_2}{dt^{q_1}} = \alpha(y_2 - x_2) \\ \frac{d^{q_2} y_2}{dt^{q_2}} = \delta y_2 - x_2 z_2 - k(y_2 - y_1) \\ \frac{d^{q_3} z_2}{dt^{q_3}} = x_2 y_2 - \beta z_2, \end{cases} \quad (5.40)$$

où  $(\alpha, \beta, \delta) = (36, 3, 20)$ . et  $(q_1, q_2, q_3) = (0.985, 0.99, 0.98)$ ,  $k$  est un nombre réel

Le système émetteur est couplé avec le système récepteur seulement par le scalaire  $y(t)$ , on choisit le système auxiliaire, qui est identique au système récepteur(5.40) :

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} x_3}{dt^{q_1}} = \alpha(y_3 - x_3) \\ \frac{d^{q_2} y_3}{dt^{q_2}} = \delta y_3 - x_3 z_3 - k(y_3 - y_1) \\ \frac{d^{q_3} z_3}{dt^{q_3}} = x_3 y_3 - \beta z_3, \end{cases} \quad (5.41)$$

pour  $e_1 = x_3 - x_2, e_2 = y_3 - y_2, e_3 = z_3 - z_2$

on obtient le système erreur suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} e_1}{dt^{q_1}} = \alpha(e_2 - e_1) \\ \frac{d^{q_2} e_2}{dt^{q_2}} = \beta e_2 - z_2 e_1 - x_3 e_1 - k e_2 \\ \frac{d^{q_3} e_3}{dt^{q_3}} = x_3 e_2 - y_2 e_1 - \sigma e_3 \end{cases} \quad (5.42)$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{d^{q_1} e_1}{dt^{q_1}} \\ \frac{d^{q_2} e_2}{dt^{q_2}} \\ \frac{d^{q_3} e_3}{dt^{q_3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & \sigma & 0 \\ 0 & \beta - k & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -z_2 e_1 - x_3 e_1 \\ x_3 e_2 - y_2 e_1 \end{pmatrix} \right. \quad (5.43)$$

Pour les paramètres  $(a, b, c) = (35, 3, 28)$  et les paramètres  $(\alpha, \beta, \sigma) = (36, 3, 20)$ , avec l'ordre de dérivation  $(q_1, q_2, q_3) = (0.985, 0.99, 0.98)$  en appliquant le théorème **(3.3)** on trouve que  $k$  doit vérifier  $k > 3$  pour que la condition  $|\text{Arg}(\lambda_i)|_{i=1,2,3} > q \times \frac{\pi}{2}$  soit satisfaite, où  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $A$  et  $q = 0.95$ , alors les deux systèmes (5.40) et (5.41) sont synchronisés.

### 5.3 Conclusion

Ce chapitre est consacré à des applications des différents types de synchronisation, pour les systèmes étudiés en chapitres troisième, on a commencé par la synchronisation identique avec des différentes méthodes (Perora-Carroll, control linéaire / non linéaire), et on a terminé par la synchronisation généralisée entre deux systèmes différents (Chen et Lü) en utilisant la méthode du système auxiliaire

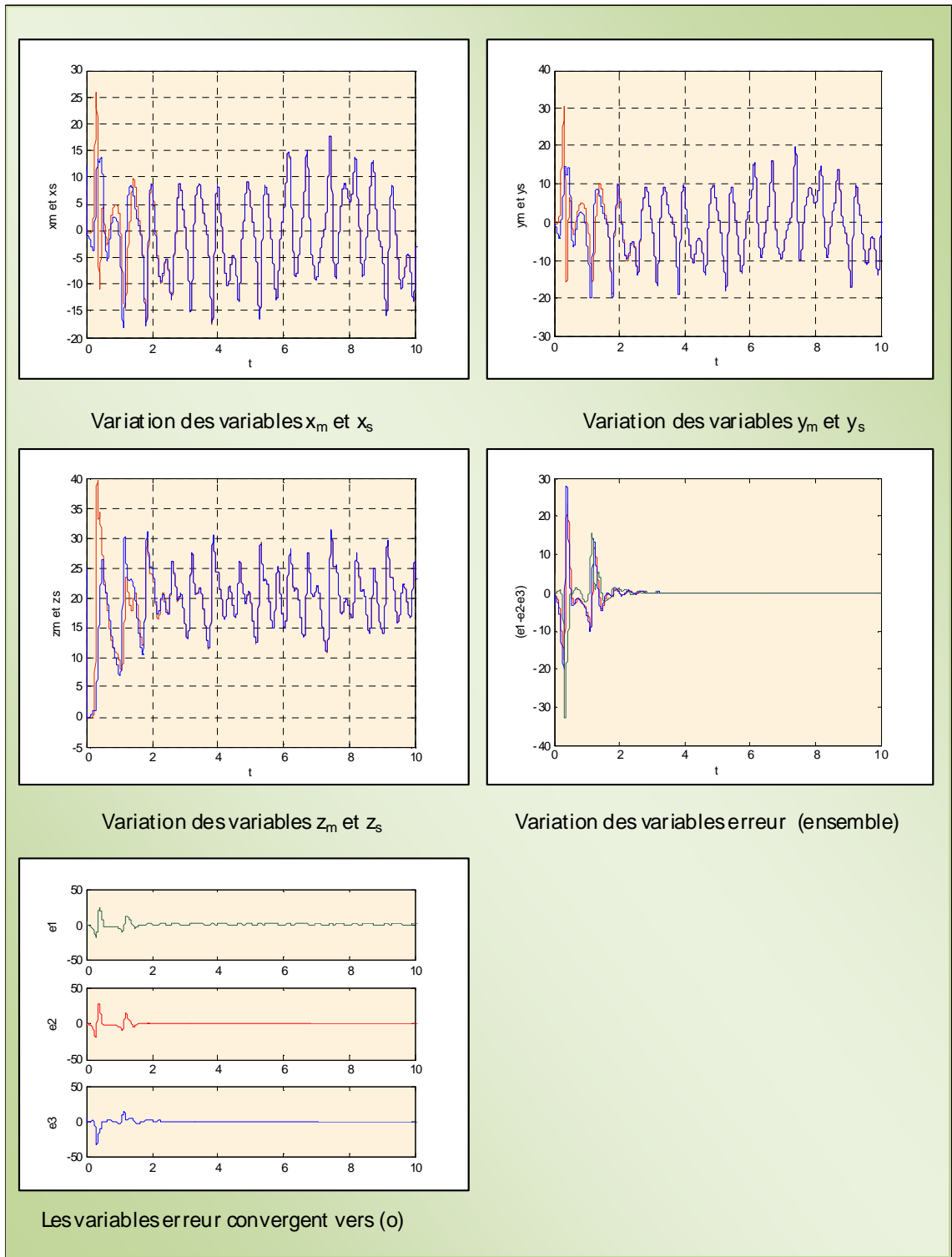
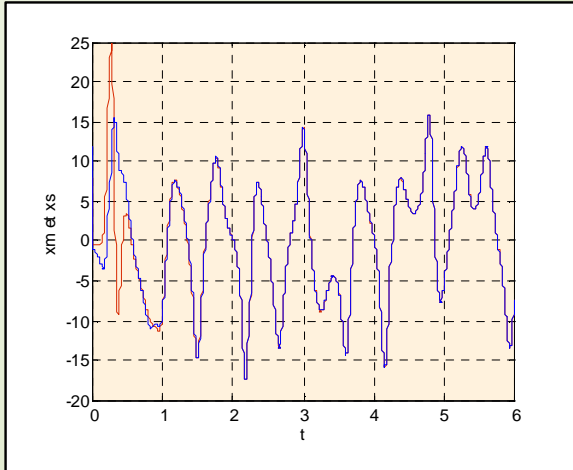
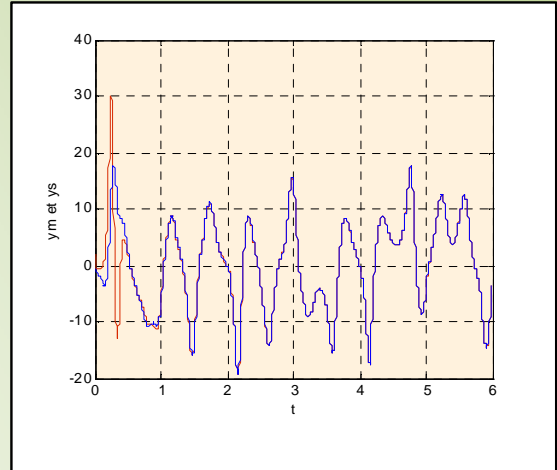


FIG. 5-7 – Synchronisation entre Chen et Lü avec  $k = 5$  et  $(q_1, q_2, q_3) = (0.985, 0.99, 0.98)$

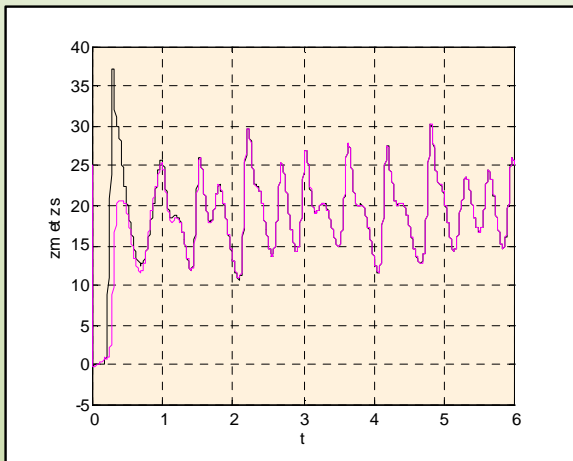
Syn gén  $k=5$   $q=0.95$



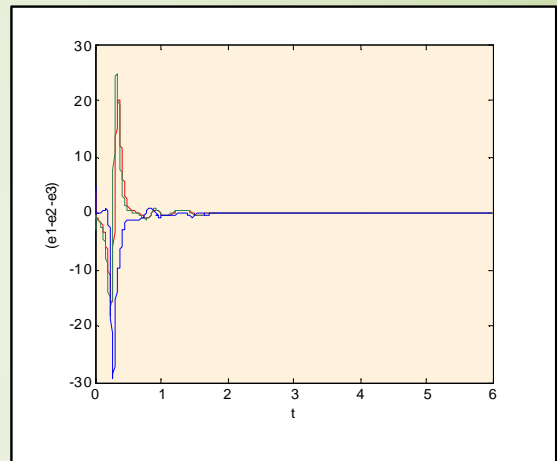
Variation des variables  $x_m$  et  $x_s$



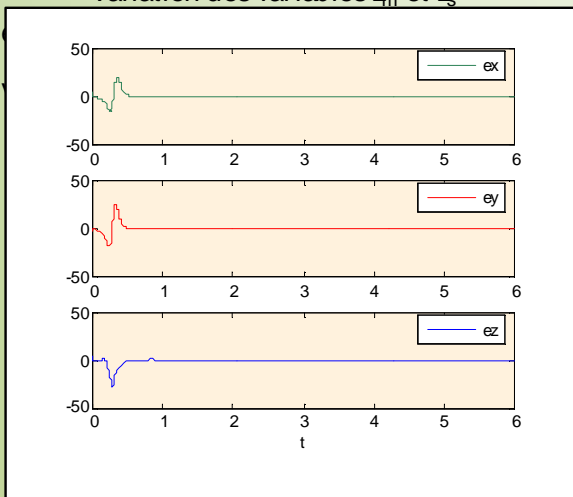
Variation des variables  $y_m$  et  $y_s$



Variation des variables  $z_m$  et  $z_s$



Variation des variables erreur



Variation des variables erreur

FIG. 5-8 – synchronisation pour  $q=0.95$

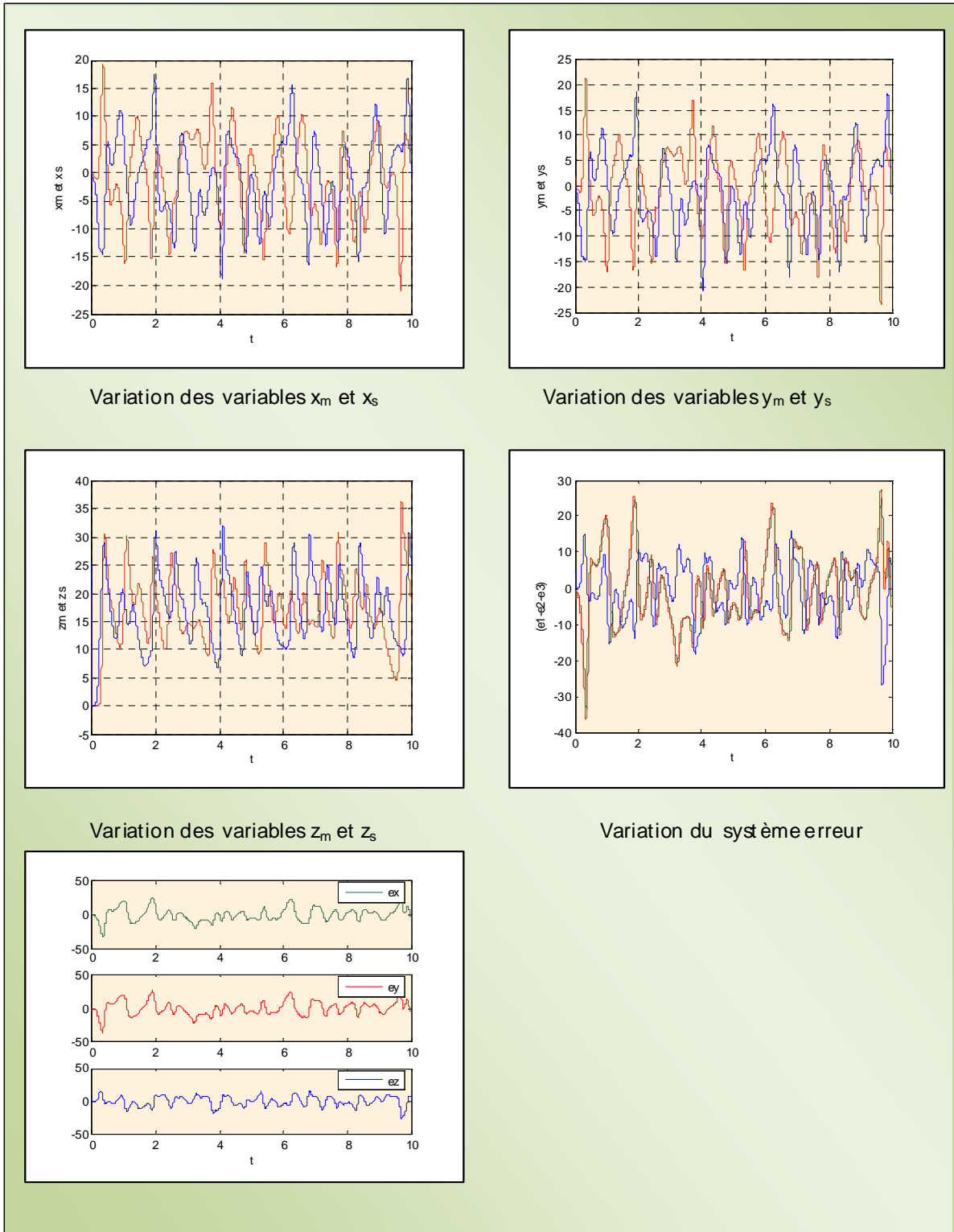


FIG. 5-9 – Les variables erreur ne sont pas synchronisées pour  $k=3$

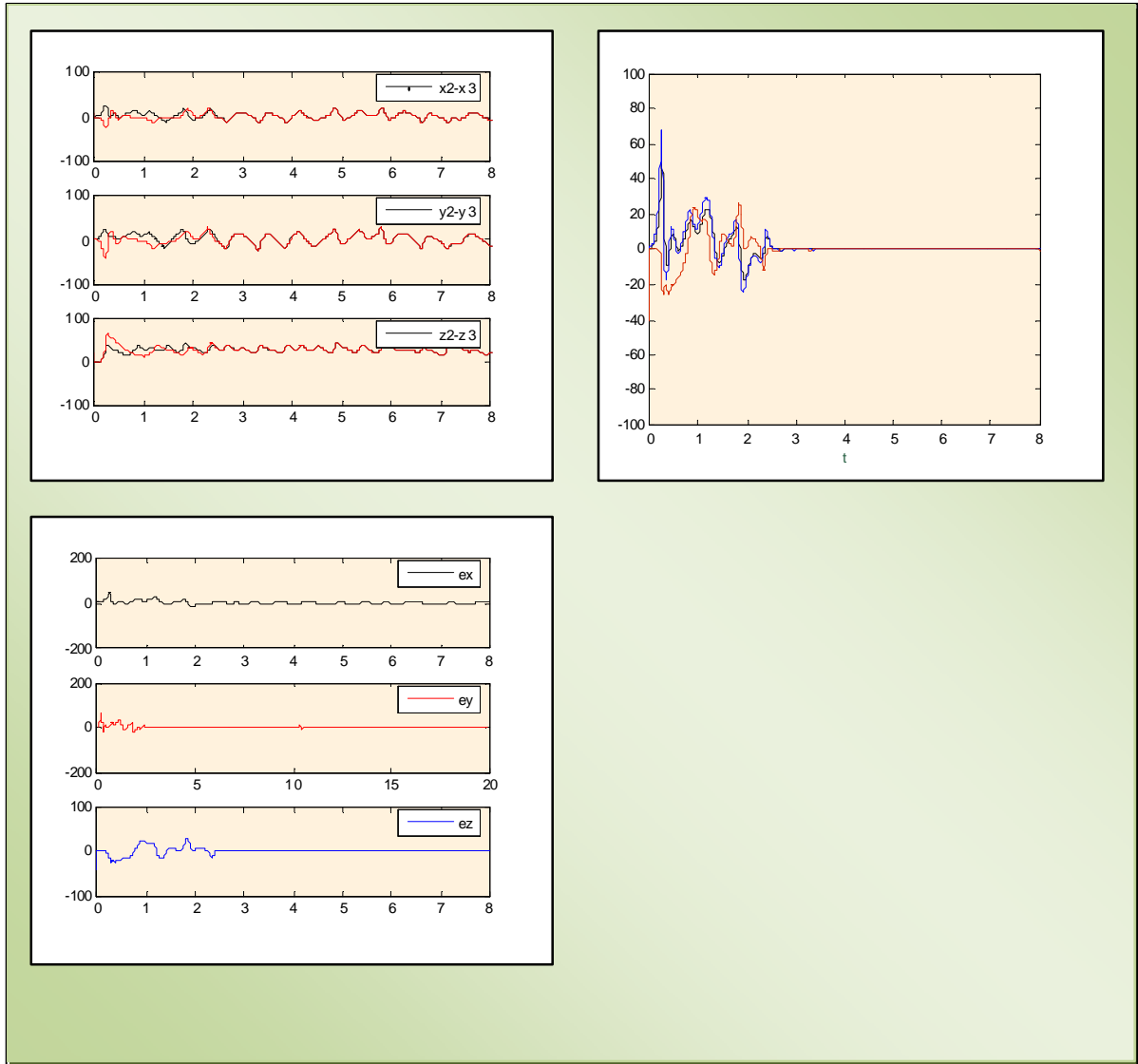


FIG. 5-10 – Synchronisation généralisée entre syst de Chen et syst de Lü pour  $q_1 = 0.985$ ,  $q_2 = 0.99$  et  $q_3 = 0.98$

# Chapitre 6

## Conclusion générale et perspective

On a étudié dans ce mémoire que l'on a dévisé en deux parties, la synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques à dérivées fractionnaires, la première partie se compose d'un chapitre préliminaire sur les notions de base des systèmes dynamiques et chaos, un deuxième sur les dérivées fractionnaires leurs définitions, propriétés, interprétations géométriques et applications en physique. et se termine par un chapitre des applications sur trois systèmes fractionnaires. Tandis que la deuxième partie a été consacrée à l'étude du phénomène de la synchronisation où on s'est basée sur deux types de synchronisation : identique et généralisée avec applications, par différentes méthodes sur les systèmes étudiés dans la première partie.

On peut conclure que la synchronisation des systèmes chaotiques qui a été largement étudiée dans les deux dernières décennies et a plusieurs applications dans divers domaines tels que la biologie, la chimie, les télécommunications (sécurité des informations) et la physique ces pré-cités ne sont que des exemples.

Cette synchronisation peut être généralisée aux systèmes à dérivées fractionnaires (non entier) déjà, vu dans ce mémoire.

Notre prochain projet et sera l'étude de la synchronisation des autres systèmes et en particulier les systèmes différents (synchronisation généralisée) avec d'autre méthodes car vu le manque de travail sur ces systèmes difficiles, par rapport à la synchronisation iden-



tique, parce que ces derniers se compose de différentes structures, paramètres, et décalage des deux systèmes chaotiques on cherchera des autres applications et les différences, s'il existe, entre le cas fractionnaire et celui du cas entier..

# Chapitre 7

## Annexes

### 7.1 Annexe 1 Fonctions utiles

#### 7.1.1 La fonction Gamma

La fonction gamma est, en mathématiques, une fonction complexe, considérée également comme une fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes (excepté en certains points)

##### Définition 1

Pour  $Z \in \mathbb{C}$  tel que  $Re(Z) > 0$ , on définit la fonction suivante :

$$\Gamma : Z \rightarrow \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad Re(Z) > 0 \quad (7.1)$$

Cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive.

En intégrant par parties, on montre que

$$: \Gamma(Z + 1) = Z \times \Gamma(Z) \quad Re(Z) > 0 \quad (7.2)$$

Et en particulier

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \Gamma(n + 1) = n! \quad (7.3)$$

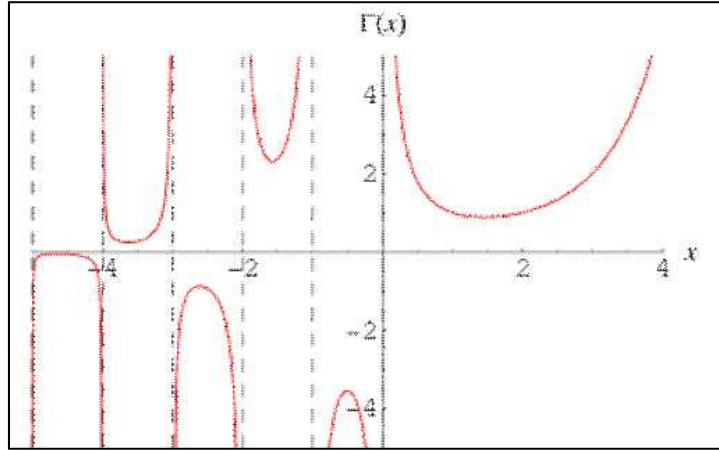


FIG. 7-1 – Représentation de fonction Gamma sur  $\mathbb{R}$

### 7.1.2 La fonction Bêta

#### Définition 2 :

la fonction **Bêta** (qui est un type d'intégrale d'Euler, au même titre que la fonction gamma) est une fonction remarquable définie par :

$$B(x, y) = \int_0^{\infty} t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (7.4)$$

pour  $(R(x), R(y)) \in (]0, \infty])^2$

### 7.1.3 Liens entre la fonction Gamma et la fonction Bêta

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \times \Gamma(y)}{\Gamma(x + y)} \quad (7.5)$$

### 7.1.4 La fonction Mittag-Leffler

la fonction Mittag-Leffler est une fonction importante qu'on trouve largement utilisée dans le calcul fractionnaire

et joue un rôle analogue dans la solution des équations aux dérivées fractionnaires.

#### Définition 3

Pour  $Z \in \mathbb{C}$  tel que  $Re(Z) > 0$ , on définit la fonction Mittag-Leffler comme suit :

$$E\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (7.6)$$

En particulier ,si  $\alpha = 1$  on trouve la fonction exponentielle

$$E_1(z) = e^z$$

Cette fonction peut être généraliser pour deux paramètres :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad \alpha > 0, \beta > 0 \quad (7.7)$$

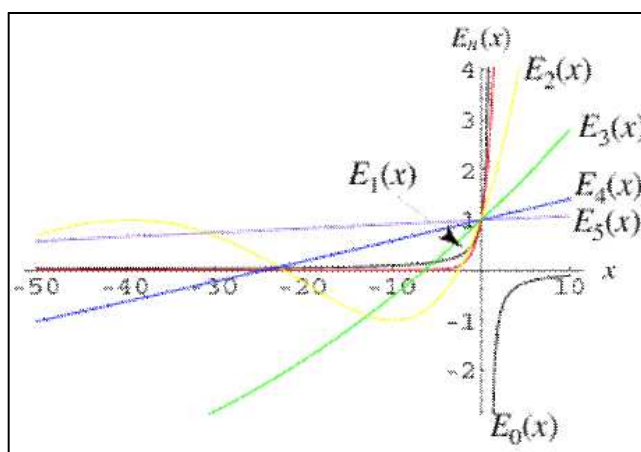


FIG. 7-2 – représentation de fonction Mittag-Leffler pour quelques valeurs de  $\alpha$

### 7.1.5 Transformée de Laplace et convolution

#### Définition 4

En mathématiques et en particulier en analyse fonctionnelle, la transformée de Laplace d'une fonction  $f(t)$  définie pour tout nombre réel  $t \geq 0$  est la fonction  $F$ , définie par :

$$F(s) = \mathbf{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (7.8)$$

#### Inversion

L'inversion de la transformation de Laplace s'effectue par le moyen d'une intégrale dans le plan complexe. On démontre presque sans difficulté que pour  $t$  positif,

$$f^{-1}(t) = \mathbf{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s) ds \quad (7.9)$$

où  $\gamma$  est choisi pour que l'intégrale soit convergente, ce qui implique que  $\gamma$  soit supérieur à la partie réelle de toute singularité de  $F(s)$ .

propriétés :

- Linéarité

$$\mathbf{L}\{\alpha \cdot f + \beta \cdot g\} = \alpha \cdot \mathbf{L}\{f\} + \beta \cdot \mathbf{L}\{g\} \quad (7.10)$$

- Dérivation :

$$\mathbf{L}\{f^n(t)\} = s^n \mathbf{L}\{f(s)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \quad (7.11)$$

- Intégration :

$$\mathbf{L}\left\{\int_0^t f(\mu) d\mu\right\} = \frac{1}{s} \mathbf{L}\{f\} \quad (7.12)$$

$$\mathbf{L}\left\{\int_a^t f(\mu) d\mu\right\} = \frac{1}{s} \mathbf{L}\{f\} + \frac{1}{s} \int_a^0 f(\mu) d\mu \quad (7.13)$$

- Valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (7.14)$$

•—Valeur initiale :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (7.15)$$

•—Convolution :

$$\mathbb{L}\{f * g\} = \mathbb{L}\{f\} \times \mathbb{L}\{g\} \quad (7.16)$$

## 7.2 Annexe 2 Critère de Routh-Hurwitz pour un Système fractionnaire

Rappelons que le critère de **Routh-Hurwitz** est un critère algébrique qui permet d'étudier la stabilité d'un Système sans avoir les pôles

Soit le Système fractionnaire :

$$D^q x(t) = f(x, t) \quad (7.17)$$

Où  $0 < q \leq 1$ , et  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Nous avons vu dans le chapitre troisième la condition nécessaire et suffisante pour que le Système soit asymptotiquement stable(local) :

$$|\arg(\lambda_i)|_{i=1,n} > q \times \pi/2 \quad (7.18)$$

pour toutes les valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice Jacobiënne de  $f$ .

La condition (7.18) pose une question intéressante à savoir quelles sont les conditions pour les quelles toutes les racines du polynôme :

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n \quad (7.19)$$

verifient :

$$|\arg(\lambda_i)|_{i=1,n} > q \times \pi/2$$

• Si  $\alpha = 1$  la condition (7.18) signifie que toutes les valeurs propres ont des parties réelles négatives et ça equivaut à la condition de **Routh-Hurwitz** :

$$a_1 > 0, \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \dots \quad (7.20)$$

• Si  $\alpha \in ]0, 1[$  cette condition est suffisante mais pas necessaire.

**Définition 1**

le discriminant  $D(f)$  du polynôme

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots a_n \quad (7.21)$$

est définie par :

$$D(f) = (-1)^{n(n-1)/2} R(f, f') \quad (7.22)$$

Où  $f'$  est la dérivée de  $f$

si

$$g(x) = x^l + b_1x^{l-1} + b_2x^{l-2} + \dots b_l \quad (7.23)$$

$R(f, g)$  est le determinant  $(n + l) \otimes (n + l)$

Dans le cas  $n = 3$  on a :

$$D(f) = 18a_1a_2a_3 + (a_1a_2)^2 - 4a_3(a_1)^3 - 4(a_2)^3 - 27(a_3)^2 \quad (7.24)$$

**Proposition 1**

(i)–Pour  $n = 1$  la condition (7.18) sera  $a_1 > 0$

(ii)–Pour  $n = 2$  la condition (7.18) soit la condition de **Routh-Hurwitz** ou la condition :

$$a_1 < 0, 4a_2 > (a_1)^2, \left| \tan^{-1} \left( \sqrt{4a_2 - (a_1)^2} \right) / a_1 \right| > q \cdot \pi/2$$

(iii)–Pour  $n = 3$

Si le discriminant  $D(p)$  du polynôme  $P(\lambda)$  est positif dans ce cas la condition du **Routh-Hurwitz** sera équivalente à la condition (7.18)  $\forall \alpha \in ]0,1[$ ,ie.

$$a_1 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 > a_3 \text{ si } D(p) > 0 \quad (7.25)$$

(iv)–Si  $D(p) < 0, a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, a_3 > 0, \alpha < (2/3)$  alors la condition (7.18) est satisfaite .

Aussi , Si  $D(p) < 0, a_1 < 0, a_2 < 0, \alpha > (2/3)$  alors toutes les racines du  $P(\lambda)$  vérifient

$$|\arg(\lambda_i)|_{i=1,n} < q \times \pi/2 \quad (7.26)$$

(v)–Si  $D(p) < 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_1 a_2 = a_3$ , alors (7.18) est satisfaite pour tous  $\alpha \in [0,1[$  .

(vi)–Pour tout  $n, a_n > 0$  est une condition nécessaire pour (7.18).

(vii)–Si  $\forall \lambda, P(\lambda) = P(-\lambda)$  puis définir  $x = \lambda^2$  et les conditions du **Routh-Hurwitz** sont nécessaire- pour le polynôme résultant en  $x$  - pour (7.18)  $\forall q \in [0,1[$  .

(viii)–Pour  $n > 1$ , la condition nécessaire et suffisante pour (7.18) est :

$$\int_0^\infty dz/P(z) \Big|_{C_2} + \int_{-\infty}^0 dz/P(z) \Big|_{C_1} = 0 \quad (7.27)$$

**Preuve(voir [67])**



# Bibliographie

- [1] **D. del-Castillo-Negrete**, Fractional calculus : basic theory and applications, in : Lectures Presented at the Institute of Mathematics UNAM, Mexico, August 2005.
- [2] **R.L. Bagley, R.A. Calico**, Fractional order state equations for the control of visco-elastically damped structures, *J. Guidance Control Dyn.* 14 (1991) 304–311.
- [3] **Ch. Friedrich, H. Braun**, Linear viscoelastic behavior of complex behavior of complex polymeric materials : a fractional calculus approach, *Acta Polym.* 46 (1995).
- [4] **Y.A. Rossikhin, M.V. Shitikova**, Application of fractional derivatives to the analysis of damped vibrations of viscoelastic single mass system, *Acta Mech.* (1997).
- [5] **O. Heaviside**, *Electromagnetic Theory*, Chelsea, New York, 1971.
- [6] **N. Engheta**, On fractional calculus and fractional multipoles in electromagnetism, *IEEE Trans. Antennas Propag.* 44 (4) (1996) 554–566.
- [7] **Poludbny, I.**, fractional differential equations *Mathematics in Science and Engineering*, 198, Academic Press, (1999)
- [8] **Kamel Haouam** : Existence et non-existence de solutions des equations différentielles fractionnaires
- [9] **A. Le Méhauté** , *Les Géométries Fractales*, Editions Hermès, Paris, France, 1990
- [10] **R. de Levie**, Fractals and rough electrodes, *J. Electroanal. Chem.* 281 (1990) 1–21.
- [11] **S. Westerlund**, Dead matter has memory! (capacitor model), *Phys. Scrip.* 43 (2) (1991) 174–179.

- [12] **V.E. Arkhincheev**, Anomalous diffusion in inhomogeneous media : Some exact results, *Model. Meas. Contr. A* 26 (2) (1993) 11–29.
- [13] **A.M.A. El-Sayed**, Fractional-order diffusion-wave equation, *Int. J. Theor. Phys.* 35 (2) (1996) 311–322.
- [14] **M. Ichise, Y. Nagayanagi, T. Kojima**, An analog simulation of non-integer order transfer functions for analysis of electrode process, *J. Electroanal. Chem.* 33 (1971) 253–265.
- [15] **T. Kaplan, L.J. Gray, S.H. Liu**, Self-affine fractal model for a metal-electrolyte interface, *Phys. Rev. B* 35 (10) (1987) 5379–5381.
- [16] **A. Le Méhauté, G. Crepy**, Introduction to transfer and motion in fractal media : the geometry of kinetics, *Solid State Ionics* 9 & 10 (1983) 17–30.
- [17] **M. Nakagawa, K. Sorimachi**, Basic characteristics of a fractance device, *IEICE Trans. Fundamentals* E75-A (12) (1992) 1814–1819.
- [18] **K.B. Oldham, C.G. Zoski**, Analogue instrumentation for processing polarographic data, *J. Electroanal. Chem.* 157 (1983) 27–51.
- [19] **G. Chen, G. Friedman**, An RLC interconnect model based on Fourier analysis, *IEEE Trans. Comput. Aided Des. Integr. Circuits Syst.* 24 (2) (2005) 170–183.
- [20] **V.G. Jenson, G.V. Jeffreys**, *Mathematical Methods in Chemical Engineering*, second ed, Academic Press, New York, 1977.
- [21] **K.S. Cole**, Electric conductance of biological systems, in : *Proc. Cold Spring Harbor Symp. Quant. Biol.*, Cold Spring Harbor, New York, 1993, pp. 107–116.
- [22] **T.J. Anastasio**, The fractional-order dynamics of brainstem vestibule-oculomotor neurons, *Biol. Cybern.* 72 (1994) 69–79.
- [23] **A. Oustaloup**, From fractality to non integer derivation through recursivity, a property common to these two concepts : a fundamental idea for a new process control strategy, in : *Proceeding of the 12th IMACS World Congress*, Paris, July 1988, vol. 3, pp. 203–208.

- [24] **N. Laskin**, Fractional market dynamics, *Physica A* 287 (2000) 482–492.
- [25] **R. Hilfer (Ed.)**, Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific Pub Co, Singapore, 2000.
- [26] **B. Mandelbrot, J.W. Van Ness**, Fractional brownian motions, fractional noises and applications, *SIAM Rev.* 10 (4) (1968) 422–437.
- [27] **A. Oustaloup**, *La Dérivation Non Entière : Théorie, Synthèse et Applications*, Editions Hermès, Paris, 1995.
- [28] **I. Podlubny**, Fractional-order systems and PIDm-controllers, *IEEE Trans. Automat. Control* 44 (1) (1999)
- [29] **H. Linares, Ch. Baillot, A. Oustaloup, Ch. Ceyral**, Generation of a fractal ground : Application in robotics, in : International Congress in IEEE-SMC CESA'96 IMACS Multiconf., Lille, July 1996.
- [30] **F.B.M. Duarte, J.A.T. Macado**, Chaotic phenomena and fractional-order dynamics in the trajectory control of redundant manipulators, *Nonlinear Dyn.* 29 (2002) 315–342.
- [31] **T.T. Hartley, C.F. Lorenzo, H.K. Qammer**, Chaos in a fractional order Chua's system, *IEEE Trans. CAS-I* 42 (1995) 485–490.
- [32] **P. Arena, R. Caponetto, L. Fortuna, D. Porto**, Chaos in a fractional order Duffing system, in : Proceedings ECCTD, Budapest, 1997, pp. 1259–1262.
- [33] **W.M. Ahmad, J.C. Sprott**, Chaos in fractional-order autonomous nonlinear systems, *Chaos, Solitons Fractals* 16 (2003) 339–351.
- [34] **J.G. Lu, G. Chen**, A note on the fractional-order Chen system, *Chaos, Solitons Fractals* 27 (3) (2006) 685–688
- [35] **J.G. Lu**, Chaotic dynamics of the fractional-order Lu'' system and its synchronization, *Phys. Lett. A* 354 (4) (2006) 305–311
- [36] **C. Li, G. Chen**, Chaos and hyperchaos in the fractional-order Ro''ssler equations, *Phys. A : Stat. Mech. Appl.* 341 (2004) 55–61.

- [37] **J.G. Lu**, Chaotic dynamics and synchronization of fractional-order Arneodo's systems, *Chaos, Solitons Fractals* 26 (4) (2005)1125–1133.
- [38] **L.J. Sheu, H.K. Chen, J.H. Chen, L.M. Tam, W.C. Chen, K.T. Lin, Y. Kang**, Chaos in the Newton-Leipnik system with fractional order, *Chaos, Solitons Fractals*, 2006,doi :10.1016/j.chaos.2006
- [39] **E. Ott, C. Grebogi, J.A. Yorke**, Controlling chaos, *Phys. Rev. Lett.* 64 (1990) 1196–1199.
- [40] **D. Matignon**, Stability results for fractional differential equations with applications to control processing, *Computational Engineering in Systems and Application multi-conference*, vol. 2, IMACS, in : IEEE-SMC Proceedings, Lille, France, July 1996, pp. 963–968.
- [41] **W. Deng, C.P. Li**, Chaos synchronization of the fractional Lu system, *Physica A* 353 (2005) 61–72.
- [42] **W. Deng, C. Li**, Synchronization of chaotic fractional Chen system, *J. Phys.Soc. Jpn* 74 (6) (2005)
- [43] **C.P. Li, W.H. Deng, D. Xu**, Chaos synchronization of the Chua system with a fractional order, *Physica A* 360 (2006) 171–185.
- [44] **Ahmad M. Harb, Wajdi M. Ahmad** "Chaotic systems synchronization in secure communication systems."Electrical Engineering Dept. Jordan Univ. of Science and Technology Irbid, Jordan.
- [45] **Alan Layec**, "Développement de modèles de CAO pour la simulation système des systèmes de communication. Application aux communications chaotiques." Thèse" 2006.
- [46] **T. Shinbrot, C. Grebogi, E. Ott, et al.**, *Nature* 363 (6) (1993) 411.
- [47] **G.R. Michael, S.P. Arkady, K. Jurgen**, *Lett. Phys. Rev.* 78 (22) (1997) 4193.
- [48] **X. Yu, Y. Song**, *Int. J. Bifur. Chaos* 11 (6) (2001) 1737.
- [49] **X.S. Yang**, *Appl. Math. Comput.* 122 (1) (2001) 71.

- [50] **M.C. Ho, Y.C. Hung, C.H. Chou**, Phys. Lett. A 296 (1) (2002) 43.
- [51] **E.M. Shahverdiev, S. Sivaprakasam**, K.A. Shore, Phys. Lett. A 292 (6) (2002).
- [52] **S.G.Samko, A.A.Kilbas and O.I.Maritchev**, Intégrals and Derivatives of the Fractional Order and Some of Their application, Nouka,Technika, Minsk, 1987 (in Rissian)
- [53] **R. L. BAGLEY and P.J. TORVIK** "On The Fractional Calculus Model of Viscoelastic Behavior" Journal of Rheology
- [54] **K.S. MILLER and B.Ross**, An introduction to the fractional derivatives and the Taylor-Riemann seris, uppsada University, Departement of Mathématiques,2004
- [55] G.Chen,T.Ueta,Int.J.Bifur.Chaos 9(1999)1465
- [56] **Vedat Suat Erturk a**, Shaher Momani b, Zaid Odibat c Application of generalized
- [57] **J.G. Lu, G. Chen**, Chaos Solitons Fractals 27 (3) (2006) 685.
- [58] **J. Lü, G. Chen, S. Zhang**, Int. J. Bifur. Chaos 12 (3) (2002) 659.
- [59] **J.G. Lu**, Phys. Lett. A 354 (4) (2006) 305.
- [60] **Mohammad Saleh Tavazoei, Mohammad Haeri** \*A necessary condition for double scroll attractor existence in fractional-order systems
- [61] **L.O. Chua, M. Komuro, T. Matsumoto**, IEEE Trans. Circuits Syst. 33 (November 1986) 1072.
- [62] **J. Lü, G. Chen, X. Yu, H. Leung**, IEEE Trans. Circuits Syst. I (Reg. Papers) 51 (12) (December 2004)
- [63] **J.D.Munkhammar** Riemann-Liouville fractional derivatives and the Taylor-Riemann Series ( pdf Juni 2004)
- [64] **ANTOLY A.KILBAS** :They Application of Fractional Differential Equations ESEEVIER 2006
- [65] **A.V.Letnikov**,Theory of differentiation of an arbitrary order, Maths Sb vol 3,1868, p1-68(in Russian)

- [66] **D.Karaali**, Synchronisation de quelques systèmes dynamiques chaotiques. Memoire de magistrale, université de Mentouri-constantine (2008)
- [67] **E.Ahmed, A.M.A El-Sayed. Hala. A.A. El-Saka** : On some Routh-Hurwitz conditions for fractional order differential equations and their applications in Lorenz, Rössler, Chua and Chen systems.
- [68] **M.Lakshman, K.Murali**, Chaos in Nonlinear Oscillators : Controlling and Synchronization, World Scientific, 1996

# Résumé

La synchronisation de deux systèmes consiste à rapprocher leurs trajectoires jusqu'à ce qu'elles finissent par être confondues, sous l'effet d'une force d'accouplement exercée sur les deux systèmes. La première partie de ce mémoire est consacrée à donner des notions de base sur les systèmes dynamiques et chaos suivies par une introduction sur les dérivées fractionnaires (définitions, interprétation géométrique et application en physique) et se termine par l'étude des trois systèmes chaotiques à dérivées fractionnaires (système de Chen, de Lü, et de Van der Pol modifié).

La deuxième partie analyse, dans un premier temps, la théorie du phénomène de la Synchronisation des systèmes chaotiques (notion d'accouplement des systèmes et ses types, notion de la synchronisation du chaos en la généralisant aux systèmes fractionnaires) et on finit par application des différents types de synchronisation (identique et généralisée) sur les systèmes étudiés précédemment.

# Mots clés

Systèmes Dynamiques, Chaos, Dérivées fractionnaires, Systèmes chaotiques à dérivées fractionnaires, accouplement unidirectionnel, Synchronisation, Synchronisation identique, Synchronisation généralisée.

# Abstract

The synchronization of two systems is to bring their paths until they end up being confused under a coupling force exerted on both systems. The first part of this thesis is devoted to provide a basic understanding of the dynamical systems and chaos followed by an introduction on the fractional derivatives (definitions, geometric interpretation and application in physics) and ends with the study of three chaotic systems based on fractional (Chen, Lu, and Van Der- Pol amended System). The second part analysis, first, the theory of the phenomenon of synchronization of chaotic systems (concept of mating systems and types, concept of synchronization of chaos in generalizing it to fractional systems, and we end up by various applications synchronization types (identical and generalized) of the systems studied previously.

# key-words

Dynamical Systems, Chaos, fractional derivatives, Chaotic systems with fractional derivative, coupling unidirectional, Synchronization, Synchronization identical, Synchronization widespread.





التزامن أو التوافق بين نظامين شواشيين يتمثل في تقريب مساريهما حتى ينتهي بهما الأمر إلى التطابق، وهذا بفعل قوى التزاوج أو الاقتران التي يمكن أن تربط بين النظامين. الجزء الأول لهذه المذكرة مكرس لتقديم المفاهيم الأساسية حول الأنظمة الديناميكية وظاهرة الشواش ثم تقديم درس حول المشتقات الكسرية (غير الصحيحة)، تعاريفها، خواصها و تفسيراتها البيانية والفيزيائية، وينتهي الجزء بدراسة أنظمة شواشية بمشتقات ذات رتب كسرية (نظام Chen، نظام Lü، نظام Van der Pol معدل). الجزء الثاني يقدم تحليلا لظاهرة التزامن أو التوافق بين نظامين شواشيين ( مفهومها، أنواعها و بعض الطرق التي يمكن استعمالها لتحقيق التزامن) ، وينتهي ذلك بتطبيقات عديدة وبطرق مختلفة حول التزامن الذاتي والمعمم على الأنظمة التي تمت دراستها سابقا.

## كلمات مفتاحية

الأنظمة الديناميكية، الشواش، المشتقات الكسرية، الأنظمة الديناميكية الشواشية بمشتقات ذات رتب كسرية، التزاوج أحادي الجانب، التزامن، التزامن الذاتي، التزامن المعمم.