République Démocratique et Populaire Algérienne

Ministère de L'enseignement supérieur

Et de la Recherche Scientifique

Universitaire Mentouri Constantine

Faculté des sciences exactes

Département de mathématiques

N° d'ordre :...........

N° série :................

Mémoire pour obtenir le diplôme de magister en mathématiques

Option : Probabilités - statistiques

Thème

Inférence statistique dans les modèles non linéaires à temps continu

Application aux processus COGARCH

Présenté par :

MEGHRAOUI FATIMA ZOHRA

Devant le jury :

Présidente :	S. Boughaba	M.C.	Université Mentouri
Rapporteur :	A. Bibi	Prof.	Université Mentouri
Examinateur :	M. Bousseboua	M.C.	Université Mentouri
Examinateur :	S. Djezzar	M.C.	Université Mentouri

Soutenu le :.................

Remerciements

Je tiens à remercier infiniment le Dr. Abdelwahab BIBI, Professeur à l'université de Constantine de m'avoir encadré et d'avoir pu bénéficier aussi bien de leurs conseils et ses compétences scientifiques, de m'avoir témoigné une grande confiance en me laissant une large part d'initiative. Son soutient incessant aussi bien moral, ses conseils et ses encouragements furent déterminants.

J'adresse également mes remerciements à Mme S. BOUGHABA, Maître de Conférences à l'université de Constantine, de l'honneur qu'elle m'a fait de présider le jury de mon magister.

Mes sincères remerciements ont aussi adressé aux Messieurs, M. BOUSSEBOUA et S. DJAZAR, maîtres de conférences à l'université de Constantine, d'avoir accepté la lourde tâche d'être examinateurs de ce travail. Leurs conseils, critiques et remarques vont significativement améliorer la qualité de ce mémoire. Je souhaite qu'ils trouvent ici l'assurance de ma gratitude.

Je tiens à remercier une autre fois mon encadreur, Professeur Dr. Abdelwahab BIBI, de l'aide apportée à la finalisation de cette recherche en vue de présenter un travail incontestable en sa forme et son fond.

Je remercie enfin toutes les personnes qui ont contribué d'une manière directe ou indirecte à ce travail.

Résumé

La résolution des équations différentielles stochastiques pose un problème très complexe. Pour cette raison, nous avons présenté une étude approfondie des processus COGARCH (**Co**ntinuous **G**eneralized **A**uto **R**egressive **C**onditioned **H**éteroscedastique), largement appliquée en finances mathématiques et en économétrie.

Dans la première partie, nous avons présenté les définitions nécessaires et les propriétés de tous les processus utilisés dans ce mémoire. Ensuite, nous avons balayé le calcul de l'intégrale stochastique en utilisant la formule de Itô. Dans ce cadre, l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques ont été étudiés.

Dans la seconde partie de ce mémoire, nous avons présenté d'une façon générale l'équation différentielle du processus COGARCH. Une étude approfondie du processus de volatilité est illustrée. Cette étude est basée sur la stationnarité et la non négativité de ce processus. La fonction d'autocorrelation des carrés des accroissements est présentée pour estimer les paramètres du processus COGARCH.

Dans la troisième partie, on a présenté deux méthodes différentes d'estimation des paramètres du processus COGARCH pour le cas particulier COGARCH (1,1) et leurs consistances. Il s'agit de la méthode des moments et la méthode de quasi-maximum de vraisemblance.

Enfin, nous sommes arrivés à enlever le voile sur les propriétés probabilistes statistiques des processus COGARCH.

Abstract

The resolution of stochastic differential equations put a very complex problem. For this raison, we have presented a deep study (**Co**ntinuous **G**eneralized **A**uto **R**egressive **C**onditioned **H**eteroscedastic) **(**COGARCH), largely applied in financial mathematics and in economy.

In the first part of this memoir, we have presented necessary definitions and properties of all processes used in this study. Then, we have sweep the computing of stochastic integral using Itô method. In this context, the existence, the unique and the stability of solutions of stochastic differential equations have been studied.

In the second part of this memoir, we have presented in general manner the differential equation of COGARCH process. Therefore, a deep study of volatility process has been illustrated. This study is based on the stationary and the non negativity of this process. The autocorrelation function of squares increases is presented to estimate the process parameters of COGARCH.

In the third part, we have presented two different methods of estimation of process parameters only for the particularly case COGARCH (1,1) and its consistencies. It's acted of moment method and quasi-maximum of vraisemblance.

Finally, we arrived to push the sail from statistical and probabilistic properties of COGARCH processes.

ملخص

إن حل المعادلات التفاضلية الإحصائية أدى إلى توسع في هذا الميدان. ولهذا السبب قدمنا دراسة معمقة عن صنف ارتدادي تلقائي المشروط COGARCH التي يكثر استعمالها في الرياضيات المالية و الاقتصاد.

في الجزء الأول تعرضنا إلى التعاريف المهمة و خواص الأصناف المستعملة في هذا البحث وقدمنا دراسة معمقة على التكامل التصادفي . في هدا الجزء أيضا درسنا المعادلات التفاضلية التصادفية من حيث وجود ووحدانية و استقرار الحلول.

في الجزء الثاني لهذا البحث قدمنا بصفة عامة التوابع COGARCH فقمنا بدراسة معمقة على تقلب المتغير .هذه الدراسة تركز على استقرار و عدم سلبية هذا الصنف. و قد تعرضنا إلى التوابع المرتبطة خطيا لمربعات التزايد التي تظهر عند تقدير معاملات الصنف COGARCH.

في الجزء الثالث قدمنا نوعان من طرق تقدير الأصناف COGARCH في الحالة الخاصة COGARCH (1¸1) وثبات حلول كل من هما و تتمثلان في طريقة العزم و طريقة الحد الأقصى لشبه المقدرون.

في الأخير نكون قد درسنا الخواص الاحتمالية و الإحصائية للصنف COGARCH.

Introduction

Le concept des équations différentielles stochastiques (EDS) en anglais ; stochastic differential equations (SDE) généralise celui des équations différentielles ordinaires aux processus stochastiques. La formalisation théorique a posé d'énormes problèmes aux mathématiciens et il a fallu donc attendre les années 1940 et les travaux du célèbre mathématicien Itô sur l'intégrale stochastique. Il s'agit détendre la notion d'intégrale de Lebesgue-Stieljes aux processus stochastiques selon un mouvement brownien. Notre but consiste à la présentation d'une étude sur les équations différentielles stochastiques et ses applications dans l'analyse des séries temporelles (chap.3) et pour atteindre ce but, il est nécessaire d'illustrer les propriétés de l'intégrale stochastique (chap. 2). Dans ce contexte, on construira cette intégrale et on donnera un sens à l'expression de l'intégrale : $\int_s^T X(s)\,dW(s)$ où $X(s)$ est un processus stochastique satisfaisant les propriétés suffisamment régulières. À partir de la théorie de l'intégration, on formule les expressions des EDS qui se sont utilisées dans les différentes branches des sciences fondamentales et dans la théorie de la modélisation stochastique. Ces équations ayant la forme suivante

$$dX(t) = \alpha X(t)\,dt + \beta X(t)\,dW(t) \tag{0.1}$$

où $(W(t), t \geq 0)$ est un movement brownian, Par une simple intégration, on trouve

$$X(t) = X(0) + \alpha \int_0^t X(s)\,ds + \beta \int_0^t X(s)\,dW(s).$$

L'équation (0.1) représente l'évolution exponentielle d'une population à un taux α avec une incertitude proportionnelle à la taille de population. C'est également l'équation du modèle de Black-Scholes pour l'évaluation du prix $X(t)$ d'une option sous-jacente à une action de volatilité β, lorsque le taux d'intérêt est α. Les processus $GARCH$ (autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques) à temps continu ($COGARCH$) sont des modèles populaires préférés par les chercheurs en finance et en économétrie lorsque les observations sont irrégulières où sont données avec des fréquences fortes.

Notre objectif est de dégager le voile sur les propriétés probabilistes et statistique des modèles $COGARCH$. Plus précisément, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes assurant l'existence et l'unicité de solution pour une équation différentielle stochastique associée au processus $COGARCH$. Ensuite, nous déduisons les propriétés du second ordre de notre modèle.

0.0.1 Structure de la thèse

Le présent mémoire est divisé en cinq chapitres répartis comme suit :

1. Le chapitre 1 constitue un préliminaire sur les processus stochastiques à temps continu. Dans la section 1.1, on a défini les processus stochastiques et les martingales. Dans la section 1.2, on a exposé plusieurs exemples des processus stochastiques, tels que : les processus gaussiens, les processus markoviens, le mouvement brownien, le processus de diffusion, le processus de Poisson et de Lévy.

2. Dans le chapitre 2, on s'intéresse à l'intégrale stochastique et la formule de Itô.

3. Le chapitre 3 est consacré aux équations différentielles stochastiques où nous étudions le problème d'existence, d'unicité, et de la stabilité de solutions.

4. Dans la dernière partie, nous illustrons quelques exemples d'équations différentielles stochastiques. Dans le même contexte, la simulation numérique de quelques processus a été établie et commentée. Ce chapitre contient une présentation globale des processus $COGARCH(p,q)$, où nous étudions les conditions de stationnarité et la fonction d'autocorrelation du carré des accroissements $([5])$.

5. L'estimation des paramètres du processus $COGARCH(1,1)$ est présentée dans le chapitre cinq. Pour atteindre le but recherché, nous avons étudié deux méthodes d'estimation : la méthode des moments et la méthode de quasi-maximum de vraisemblance et leurs consistances.$([11])$, $([12])$, $([23])$, $([24])$, $([40])$.

Abréviation

$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels
$\mathbb{Z}$	L'ensemble des entiers
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	Espace de probabilité
$\mathcal{F}$	Tribu des évenements
$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$	La tribu borélienne sur $\mathbb{R}$
i.i.d.	Indépendante et identiquement distribuée
i.e.,	C'est-à-dire
p.s.	Presque sûrement
EDS	Équation différentielle stochastique
MB	Mouvement brownien
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	La loi normale de moyen μ et de variance σ^2
P_X	Loi de probabilité d'une variable aléatoire X
$\mathbb{L}_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$	L'espace des variables aléatoires de carrés intégrables
$C^2(\mathbb{R})$	L'ensemble des fonctions dérivables et de dériveé continues sur $\mathbb{R}$
$\mathcal{F}_w^U$	La filtration générée par $(U(t), (W(t)))_{t \geq 0}$
$H_{p.s}$	L'espace hilbertien engendré par des processus stochastiques
$H_{v.a}$	L'espace hilbertien engendré par des variables aleatoires
$vec(A)$	Le vecteur colonne dans $\mathbb{C}^{q^2}$.
$\Vert A \Vert$	Une norme matricielle
$C([a, b])$	L'ensemble des fonctions continus sur $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$

Table des matières

Première partie

OUTILS D'ANALYSE STOCHASTIQUE

Chapitre 1

Processus stochastiques

Les processus aléatoires décrivent l'évolution d'une grandeur aléatoire en fonction du temps (ou de l'espace). Il existe de nombreuses applications des processus aléatoires notamment en physique statistique (par exemple le ferromagnétisme, les transitions de phases, etc), en biologie (évolution, génétique et génétique des populations), médecine (croissance de tumeurs, épidémie), et bien entendu les sciences de l'ingénieur. Dans ce dernier domaine, les applications principales sont pour l'administration des réseaux, de l'internet, de la télécommunication et bien entendu dans les domaines économiques et financiers.

L'étude des processus aléatoires s'insère dans la théorie des probabilités dont elle constitue l'un des objectifs les plus profonds. Elle soulève des problèmes mathématiques intéressants et souvent très compliqués. Dans ce chapitre, nous présentons les définitions et les propriétés des processus stochastiques à temps continu accompagnées de quelques exemples qui nous semblent nécessaires pour les chapitres suivants.

1.1 Généralités sur les processus à temps continu

1.1.1 Regularité des trajéctoires

Commençons tout d'abord par préciser ce que l'on entend par processus à temps continu

Définition 1.1 *On appelle processus stochastique à temps continu et à valeurs dans un espace E muni d'une tribu $\mathcal{B}$, une famille $X = (X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans $(E, \mathcal{B})$.*

Remarque 1.1 *1. Dans la pratique l'indice t représente le temps.*

2. *Un processus peut aussi être vu comme une fonction aléatoire, i.e., à chaque $w \in \Omega$ on associe la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans E, $t \to X(t, w)$, appelée trajectoire du processus*

3. *Un processus peut être considéré comme une application de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dans E, nous supposerons toujours que cette application est mesurable lorsque l'on munit $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ de la tribu $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_+} \otimes \mathcal{F}$ et E de la tribu $\mathcal{B}$.*

4. *En considérera aussi des processus indexés par un intervalle de temps $[0, T]$ borné.*

C'est un enjeu que de savoir si un processus admet des trajectoires mesurables, continues, dérivables ou encore plus régulières.

Définition 1.2 *Un processus $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ réel est dit stochastiquement continu (ou continu en probabilité) si $P \lim_{s \to t} X(s) = X(t)$, $s, t \in \mathbb{R}_+$, i. e., $\forall t \in \mathbb{R}_+$ et $\forall \varepsilon > 0$, on a $\lim_{s \to t} P(|X(t) - X(s)| \geq \varepsilon) = 0$.*

De la définition précédente, on peut déduire facilement les propriétés suitantes. Soient $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ et $Y = (Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ deux processus réels continus en probabilité, alors

Propriétés 1.1 *:*

1. Le processus $(X(t) + Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est continu en probabilité

2. Le processus $(-X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est continu en probabilité

3. Le processus $(X(t) - Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est continu en probabilité

4. Le processus $(|X(t)|)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est continu en probabilité

5. Le processus $(X(t) Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est continu en probabilité

Remarque 1.2 *Si dans la définition 1.2, la notion de la continuité en probabilité est remplacée par celui de la continuité p.s, i.e., il existe une parties $D \in \mathcal{F}$ négligeable et $\lim_{t \to s} X(t, w) = X(s, w)$ pour tout $w \in D^c$. On définit également la continuité à droite (rep. à gauche) en probababilié et p.s et cependant les propriétés $1 - 5$ restent vraies.*

Etant donné un processus stochastique $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$les lois finidimensionnelles de X sont les lois de tous les vecteurs $(X(t_1), ..., X(t_n))$ pour toute suite finie croissante de temps $\{t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n\}$. L'ensemble des lois finidimensionnelles caractérise la loi P_X du processus X. Dans la suite quand nous écrirons $X \overset{\mathcal{L}}{=} Y$ égalité en loi de deux processus, nous signifierons l'égalité de toutes les loi fini dimensionnelles de X et de Y, i.e., $(X(t_1), ..., X(t_n)) \overset{\mathcal{L}}{=} (Y(t_1), ..., Y(t_n))$ pour tout $t_1, t_2, ..., t_n$ et $n \in \mathbb{N}$.

Il y a plusieurs façons pour des processus stochastiques X et Y d'être égaux :

Définition 1.3 *Deux processus X et Y, sont dits équivalents s'ils ont même loi (égalité de toutes les lois finidimensionnelles). On écrira $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$. On dira que Y est une version du processus X si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(X(t) = Y(t)) = 1$. On parle encore d'équivalence au sens fort. Deux processus X et Y sont dit indistinguables si $P(X(t) = Y(t), \forall t \in \mathbb{R}) = 1$.*

Il est facile de voir que pour deux processus stochastiques X et Y :

Proposition 1.1 *indistinguable $\Rightarrow$ équivalence forte $\Rightarrow$ équivalence.*

L'´equivalence forte définit une relation d'équivalence pour les processus stochastiques et deux processus fortement équivalent sont équivalents pour cette relation.

Souvent lorsqu'on considèrre un processus stochastique $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$, on en cherche une version $(Y(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ dont les trajectoires ont de bonnes propriétés de régularité.

Théorème 1.1 *(Kolmogorov) Soit $X = (X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus tel qu'il existe $a, b, c > 0$ vérifiant pour tout s, t :*

$$E\{|X(t) - X(s)|^a\} \leq c\,|t - s|^{b+1} \tag{1.1}$$

Alors il existe une version continue $\widetilde{X}$ de X.

En fait, les trajectoires de $\widetilde{X}$ ont mêmes $\gamma-$höldériennes pour tout $\gamma < \dfrac{b}{a}$.

Remarque 1.3 1. *La condition du théorème 1.1 porte sur les lois de dimension 2.*

$$E\{|X(t) - X(s)|^a\} = \textstyle\int_{\mathbb{R}^2} |x-y|^a \, dP_{(X,Y)}(dx, dy)$$

ce qui en pratique n'est pas trop difficile à calculer

2. *A priori, dans le théorème 1.1 les paramètres a et b sont non liés. En réalité, on peut toujours prendre choisire $a \geq 1 + b$. En effet, si $a < 1 + b$, alors (1.1) se réécrit*

$$E\left\{\left|\frac{X(t) - X(s)}{t-s}\right|^a\right\} \leq c\,|t-s|^{b-a+1}$$

avec avec $1 + b - a > 0$. En faisant $s \to t$, la dérivée dans au sens $\mathbb{L}_a$ de $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est nulle et $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est donc constant. Ce n'est donc pas trés interéssant d'utiliser le théorème 1.1 dans un tel cas. Puisque le processus initial est en fait constant, il est évident qu'il est aussi continue.

3. *La condition $b > 0$ est capitale : Pour $b = 0$, on a un contre exemple avec le processus de Poisson : Soit $X(t) = Y(t) - t$ où $(Y(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus de Poisson d'intensité $t > 0$. On a $E\left\{|X(t) - X(s)|^2\right\} = Var\{X(t) - X(s)\} = Var\{X(t-s)\} = t - s$. On a donc (1.1) avec $a = 2$, $b = 0$ et $c = 1$. Or les trajectoires du processus de Poisson sont en escalier avec des sauts.*

1.1.2 Temps d'arrêt et martingales

Comme dans le cas discet, on introduit la notion de filtration

Définition 1.4 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, une filtration $(\mathcal{F}(t))_{t\geq 0}$ est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$. La tribu $\mathcal{F}(t)$ représente l'information dont on dispose à l'instant t. On dit qu'un processus $(X(t))_{t\geq 0}$ est adapté à $(\mathcal{F}(t))_{t\geq 0}$, si $X(t)$ est $\mathcal{F}(t)-$ mesurable pour tout t.*

Remarque 1.4 *Dans la suite, les filtrations que l'on considérera, auront la propriété suivante*

$$\forall t : \mathcal{F}(t) \text{ contient } \mathcal{N} : \text{l'ensemble des parties } P-\text{négligeables} \qquad \textbf{(H)}$$

ceci nous permet d'afirmer que si $X = Y$ p.s et si Y est $\mathcal{F}(t)-$ mesurable alors X est $\mathcal{F}(t)-$ mesurable

On peut construire une filtration a partir d'un processus $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ en posant $\mathcal{F}_X(t) = \sigma(X(s), s \leq t)$. Cette filtration ne vérifie pas en général l'hypothèse **H** précédente. Cependant, si on remplace $\mathcal{F}(t)$ par la tribu complitée, i.e., par $\mathcal{F}^c(t) = \sigma(\mathcal{F}_X(t), \mathcal{N})$ on obtient une filtration vérifiant l'hypothèse **H**. On appelle cette filtration la filtration naturelle du processus $(X(t))_{t\geq 0}$. On convient donc, lorsque on parle de filtration pour un processus $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ sans aucune précision, il s'agit de sa filtration natrelle.

La notion de temps d'arrêt est aussi utile. Un temps d'arrêt modélise un temps aléatoire qui depend de l'historique d'un processus $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$

Définition 1.5 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et $(\mathcal{F}(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ une filtration. Une variable aléatoire τ définie sur Ω à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ est appelée un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ si $\forall t \in \mathbb{R}_+ :\quad \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$. Intuitivement, $\mathcal{F}(t)$ contient tous les évenements qui ne dépendent que de l'histoire du processus jusqu' au temps t. Un temps d'arrêt τ est dit fini si $P(\tau = \infty) = 0$. On définit ainsi, la tribu $\mathcal{F}(\tau)$ comme étant la tribu des événements antérieurs à τ : $\mathcal{F}(\tau) = \{\Lambda \in \mathcal{F}(\infty) : \Lambda \cap [\tau = t] \in \mathcal{F}(t),\ \forall t \geq 0\}$ où $\mathcal{F}(\infty) = \sigma\left(\underset{t\geq o}{\cup}\mathcal{F}(t)\right) \subset \mathcal{F}$.*

Propriétés 1.2 *: Soient s et τ deux temps d'arrêts*

1. Si $\tau = k$ (constant) alors τ est un temps d'arrêt, de même $s \wedge \tau = \inf\{s, \tau\}$, $s \vee \tau = \sup\{s, \tau\}$, $\tau \wedge a$ où $a \in [0, +\infty[$ sont aussi des temps d'arrêts.

2. Si $A \in \mathcal{F}(s)$ alors $A \cap \{s \leq \tau\} \in \mathcal{F}(\tau)$.

3. Si $s \leq \tau$ alors $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(\tau)$.

4. $\mathcal{F}(s \wedge \tau) = \mathcal{F}(s) \cap \mathcal{F}(\tau)$.

5. $\mathcal{F}(s \vee \tau) = \sigma\{\mathcal{F}(s), \mathcal{F}(\tau)\}$. Si $A \in \mathcal{F}(s \wedge \tau)$ alors $A \cap \{s \leq \tau\} \in \mathcal{F}(\tau)$.

Les martingales en temps continu est un outil fondamental pour la théorie des équations différentielles stochastiques. La définition suivante est une extension de celle du temps discret.

Définition 1.6 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité muni d'une filtration* $(\mathcal{F}(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$, $M = (M(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *une famille adaptée de variables aléatoires intégrables. Alors la famille* $(M(t), \mathcal{F}(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est appelée*

1. *Une martingale, si pour tout* $s \leq t$, $E\{M(t)|\mathcal{F}(s)\} = M(s)$, *p.s.*

2. *Une surmartingale, si pour tout* $s \leq t$, $E\{M(t)|\mathcal{F}(s)\} \leq M(s)$, *p.s.*

3. *Une sousmartingale, si pour tout* $s \leq t$, $E\{M(t)|\mathcal{F}(s)\} \geq M(s)$, *p.s.*

Propriétés 1.3

1. *Une martingale* $(M(t), \mathcal{F}(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est constante en moyenne i.e.,* $t \to E\{M(t)\}$ *est constante, une surmatingale est croissante en moyenne et une sousmartingale est décroissante en moyenne.*

2. *Si* $(M(t), \mathcal{F}(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est une martingale et* φ *est une fonction convexe (resp. concave) telle que* $\varphi(M(t))$ *soit intégrable, alors* $(\varphi(M(t)))_{t\geq 0}$ *est une sousmartingale (resp. surmatringale).*

3. *Si* $(M(t), \mathcal{F}(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est une martingale (resp. surmartingale, sousmartingal), alors* $(M(t), \mathcal{F}_M(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est automatiquement une martingale (resp. surmartingale, sousmartingal).*

4. $(M(t), \mathcal{F}_M(t))_{t\in I}$ *est une martingale pour tout ensemble fini* $I \subset \mathbb{R}_+$, *alors* $(M(t), \mathcal{F}_M(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est une martingale. En effet, soit* $(r_i)_{1\leq i\leq n}$ *une suite finie d'éléments de* I *avec* $r_n = s < t$. *Si* $A \in \sigma\{M(r_1), ..., M(r_1)\}$, *alors*

$$\begin{aligned}\textstyle\int_A E\{M(t)|M(r), r \leq t\}\, dP &= \textstyle\int_A M(t) dP \\ &= \textstyle\int_A E\{M(t)|M(r_1), ..., M(r_n)\}\, dP \\ &= M(r_n) = M(s)\end{aligned}$$

et par le théorème de classe monotone[1], *ceci reste vraie* $\forall A \in \mathcal{F}_M(t)$.

[1] La forme la plus célèbre est : Soit $(X(t))_{t\in\mathbb{T}}$ une famille de fonctions de Ω dans un $(\mathbb{E}, \Re)$, et soit $\mathcal{A} := \sigma\{X(t), t \in \mathbb{T}\}$, $\mathcal{H}$ un espace vectoriel vérifiant 1.) $\forall\ t_1, ..., t_n \in \mathbb{T}$ et $A_1, ..., A_n \in \Re$ la fonction $\prod_{i=1}^n I_{A_i}(X(t_i) \in \mathcal{H}$. 2.) pour toute suite croissante de fonctions de $\mathcal{H}$ de limite finie (resp. bornée) la limite est dans $\mathcal{H}$. Alors $\mathcal{H}$ contient toutes les fonctions $\mathcal{A}-$mesurables finies (resp. bornées)

5. *Si* $(M(t), \mathcal{F}_M(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est une martingale (resp. sousmartingale), alors* $(M(t), \mathcal{F}_M(t))_{t\in I}$ *est une martingale (resp. sousmartingale) pour tout ensemble fini* $I \subset \mathbb{R}_+$.

6. *Si* $(M(t), \mathcal{F}(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est une martingale,* τ *un temps d'arrêt, alors* $(M_\tau(t), \mathcal{F}(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est une martingale, où le processus* $(M_\tau(t))_{t\geq 0}$ *est défin par* $M_\tau(t) = M(t \wedge \tau)$.

Remarque 1.5 *: Notons d'un processus de Poisson* $(N(t))_{t\geq 0}$ *d'intensité* λ *n'est pas une martingale, en revanche* $(N(t) - \lambda t, \mathcal{F}_N(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est une martingale.*

1.2 Exemples de processus

La loi d'un processus aléatoire est caractérisée par la donnée des lois finidimensionnelles. En fait, on parle de la loi du processus $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ lorsque l'on connait la loi conjointe du vecteur $(X(t_1), ..., X(t_n))$ pour toute suite finie croissante de temps $\{t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n\}$. Cette loi est entièrement déterminée soit par la fonction de répartition finidimensionnelle

$$F_{(t_1,...,t_n)}(x_1, ..., x_n) = P(X(t_1) \leq x_1, ..., X(t_n) \leq x_n)$$

ou par la fonction caractéristique

$$\begin{aligned} \varphi_{(t_1,...,t_n)}(u_1, ..., u_n) &= E\left\{\exp\left\{i\sum_{i=1}^{n} u_i X(t_i)\right\}\right\} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{i\sum_{i=1}^{n} u_i x_i\right\} d^n F_{(t_1,...,t_n)}(x_1, ..., x_n). \end{aligned}$$

Ce type de définitions est peu pratique à manipuler. Nous y ferons parfois référence de manière implicite afin de conserver la fluidité de notre discussion.

1.2.1 Processus à accroissements indépendants

Définition 1.7 *Un processus réel* $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est dit processus à accroissements indépendants* (PAI)*, si*

a) $X(0) = 0$ *p.s (on se ramène à ce cas en considérant le processus* $(X(t) - X(0))_{t\in\mathbb{R}_+}$*)*

b) $\forall s < t$, $X(t) - X(s)$ *est indépendant de la tribu* $\mathcal{F}_X(s)$.

Si de plus

c) *l'accroissement* $X(t) - X(s)$ *a la même loi que* $X(t-s)$*, le* PAI *est dit* PAI *stationnaire* $(PAIS)$.

Propriétés 1.4 *1. Les propriétés b) et c) sont équivalentes à dire que si* $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$*, les variables* $X(t_1), X(t_2) - X(t_1), ..., X(t_n) - X(t_{n-1})$ *sont indépendantes et qu'on a la stationnarité*

2. Les proriétés b) et c) impliquent qu'un $PAIS$ *est un processus de Markov. En effet, on a presque sûrement*

$$E\left\{e^{iuX(t)}|\mathcal{F}(s)\right\} = e^{iuX(s)}E\left\{e^{iu(X(t)-X(s))}|\mathcal{F}(s)\right\} = e^{iuX(s)}E\left\{e^{iu(X(t)-X(s))}\right\}$$

d'où puisque le dernier membre est $\mathcal{F}_X(s)$ *−mesurable*

$$E\left\{e^{iuX(t)}|\mathcal{F}(s)\right\} = E\left\{e^{iuX(t)}|X(s)\right\}, \ p.s.$$

3. Si $X(0) \neq 0$*, en posant* $Y(t) = X(t) - X(0)$*, alors d'une part* $X(0), Y(t_1), Y(t_2) - Y(t_1), ..., Y(t_n) - Y(t_{n-1})$ *sont indépendantes et par suite* $X(0)$ *et* $\{Y(t_1), Y(t_2) - Y(t_1), ..., Y(t_n) - Y(t_{n-1})\}$ *sont aussi indépendantes, ainsi* $X(0)$ *et* $\{Y(t_1), Y(t_2), ..., Y(t_n)\}$ *le sont. Comme* $t_1, ..., t_n$ *sont arbitraire, alors le théorème de la classe monotone montre que* $X(0)$ *et* $\{Y(t), t \geq 0\}$ *sont indépendantes. D'autre part,* $Y(0) = 0, Y(t) - Y(s) = X(t) - X(s)$*,* $t < s$*, donc* $\{Y(t), t \geq 0\}$ *est un* PAI*.*

4. Si $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *un* $PAIS$ *intégrable, alors* $((X(t) - E(X(t)), \mathcal{F}_X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est une martingale. Sans perdre de généralité, on suppose que* $E\{X(t)\} = 0$*. Si* $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_{n+1}$*, alors les variables* $X(0), X(t_1) - X(0), X(t_2) - X(t_1), ..., X(t_{n+1}) - X(t_n)$ *sont indépendantes donc* $X(t_{n+1}) - X(t_n)$ *et* $\{X(0), X(t_1) - X(0), X(t_2) - X(t_1), ..., X(t_n) - X(t_{n-1})\}$ *le sont et par conséquent* $X(t_{n+1}) - X(t_n)$ *et* $\{X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n)\}$ *sont aussi indépendant et donc*

$$\begin{aligned} & E\{X(t_{n+1})|X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n)\} \\ = \ & X(t_n) + E\{X(t_{n+1}) - X(t_n)|X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n)\} \\ = \ & X(t_n) + E\{X(t_{n+1}) - X(t_n)\} \\ = \ & X(t_n). \end{aligned}$$

Donc $((X(t), \mathcal{F}_X(t))_{t\in I}$ *est une martingale pour tout sous ensemble fini de* $\mathbb{R}_+$ *et le resultat découle des propriétés des martingales 1. 4.*

PAIS et lois indéfinement divisibles

Soit $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ un $PAIS$ alors on a $X(t) = X(\frac{t}{n}) + (X(\frac{2t}{n}) - X(\frac{t}{n})) + ... + (X(t) - X(\frac{(n-1)t}{n}))$ pour tout t, les variables $X(\frac{kt}{n}) - X(\frac{(k-1)t}{n})$ sont indépendantes et de équidistribuées de sorte que pour tout n il existe des variables indépendantes équidistribuées

$(Y_i(n))_{1 \leq i \leq n}$ telle que $X(t) = \sum_{i=1}^{n} Y_i(n)$. Cette propriété est très remarquable et impose certaines caractéristiques à la lois de $X(t)$. Notons $\varphi_t(u)$ la fonction caractérisrique de $X(t)$ et $\varphi_{k,n}(u) = \varphi_{1,n}(u)$ celles des $Y_k(n)$ alors $\varphi_t(u) = \left(\varphi_{1,n}(u)\right)^n$. On voit que la loi de $X(t)$ est indéfinement divisible au sens de la définition suivante

Définition 1.8 *Une loi de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ est dite indéfinement divisible si sa fonction caractéristique $\varphi(u)$ est telle que pour tout n, il existe une fonction caractéristique $\varphi_n(u)$ telle que $\varphi(u) = (\varphi_n(u))^n$.*

A titre d'exembles, citons les lois suivantes

Exemples 1.1 *1. La loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est indéfinement divisible, car $\varphi(u) = \left(e^{ium/n - u^2\sigma^2/n}\right)^n$ et $e^{ium/n - u^2\sigma^2/n}$ est la fonction caractéristique de $\mathcal{N}\left(\frac{m}{n}, \frac{\sigma^2}{n}\right)$*

2. La lois de Poisson est indéfinement divisible, car $\varphi(u) = \left(e^{\lambda(e^{iu}-1)/n}\right)^n$

3. La loi de Cauchy indéfinement divisible, car $\varphi(u) = e^{-ic|u|} = \left(e^{-i\frac{c}{n}|u|}\right)^n$

1.2.2 Processus gaussiens

Définition 1.9 *Un processus réel $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est appelé processus gaussien si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(t_1, t_2, ..., t_n) \in \mathbb{R}_+^n$, le vecteur $(X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n))'$ est gaussien.*

Autrement dit $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est gaussien si toute combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n} a_i X(t_i)$ suit une loi gaussienne (pour tout $n \in N$,$t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}_+$ et a_1,...,$a_n \in \mathbb{R}$.

Il est connu que la loi d'un vecteur gaussien $(X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n))'$ est connue (via sa fonction caractéristique) par le vecteur moyenne $(E\{X(t_1)\}, ..., E\{X(t_n)\})'$ et la matrice de covariance $(Cov(X(t_i), X(t_j)), 1 \leq i, j \leq n)$. On comprend dés lors que toute la loi d'un processus gaussien est connue dés qu'on se donne la fonction moyenne $\mu(t) = E\{X(t)\}$ et l'opérateur de covariance $K(s,t) = Cov(X(s), X(t))$.En effet, la loi finidimensionnelle de $(X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n))'$ est alors la loi normale de dimension n, $\mathcal{N}(\underline{\mu}_n, K_n)$ avec $\underline{\mu}_n = (\mu(t_1), ..., \mu(t_n))'$ et $K_n = ((K(t_i, t_j))_{1 \leq i,j \leq n}$. Les fonctions $\underline{\mu}$ et K définissent donc toutes les lois finidimensionnelles du processus et donc aussi sa loi.

Remarque 1.6 *Toutes les marginales d'un processus gaussien sont bien sûr gaussiennes, et toute combinaison linéaire de marginales d'un processus gaussien est encore gaussienne.*

Des bonnes conditions pour avoir une version assez régulière d'un processus gaussien sont données dans le resultat suivant dû au théorème 1.1.

Théorème 1.2 *Soit* $X = (X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *un processus gaussien centré de fonction de covariance* $r(s,t)$. *On suppose qu'il existe* $\alpha > 0$ *tel que pour tout* s,t *:*

$$r(t,t) + r(s,s) - 2r(s,t) \leq c|t-s|^{\alpha}.$$

Alors il existe une version continue $\widetilde{X}$ *de* X. *De plus, pour tout* $\gamma < \dfrac{\alpha}{2}$, *les trajectoires de* $\widetilde{X}$ *sont p.s höldériennes de coefficient* γ.

Preuve. En utilisant l'identité $E\{X^{2m}\} = \dfrac{(2m)!}{2^m m!}Var(X)^m$si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$. Donc. $E\left\{|X(t)-X(s)|^{2m}\right\} \leq c\dfrac{(2m)!}{2^m m!}|t-s|^{\alpha m}$. On choisit m tel que $\alpha m > 1$. D'aprés le théorème 1.1. avec $b = \alpha m - 1, a = 2m$, $\frac{b}{a} = \dfrac{\alpha m - 1}{2m} \to \dfrac{\alpha}{2}$ quand $m \to \infty$, on a une version $\gamma-$höldérienne du processus pour tout $\gamma < \dfrac{\alpha}{2}$. ■

1.2.3 Mouvement brownien réel

Le mouvement brownien (MB) est associé à l'analyse de mouvements qui évoluent au cours du temps de manière désordonnée qu'il semble difficile de prévoir leur évolution, même dans un intervalle de temps très court. Il joue un rôle central dans la théorie des processus stochastiques, notamment parce que dans de nombreux problèmes théoriques ou appliqués, le mouvement brownien ou les diffusions (qui lui sont associées) fournissent des modèles simples sur lesquels de nombreux calculs peuvent être faits. Un botaniste anglais, Robert Brown [2] d´ecrit en 1827 le mouvement de fines particules organiques en suspension dans un gaz ou un fluide. Au 19‘eme siècle, aprés lui, plusieurs physiciens reconnaissent que ce mouvement est trés irrégulier et ne semble pas admettre de tangente. On ne pourrait donc pas parler de sa vitesse, ni a fortiori lui appliquer les lois de la mécanique ! Il constitue un bon exemple de processus gaussiens.

Définition 1.10 *Un processus réel* $W = (W(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est appelé mouvement brownien* (MB) *(ou encore processus de Wiener) s'il satisfait les conditions suivantes*

1. $W(0) = 0$ *p.s.*

2. $(W(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est un processus à accroissements indépendants.*

[2]**ROBERT BROWN** né le 21 décembre 1773 à Montrose (Angus) et décédé le 10 juin 1858 à Londres est un botaniste écossais ; il est paradoxalement connu pour une découverte non "botanique" le mouvement brownien.

3. *Si* $0 \leq s < t$, $W(t) - W(s) \rightsquigarrow W(t-s)$ *ou encore la loi* $\mathcal{N}(0, t-s)$

Remarque 1.7 *Comme exemple de processus gaussien, le processus* $U = (U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ *d'Ornstein-Uhlebeck (OU) défini par* $U(t) = \exp\left\{-\frac{t}{2}\right\} W(e^t)$. *On montre facilement que* $U(t) \rightsquigarrow N(0,1)$, *ce processus est donc stationnaire. Sa fonction de covariance est donnée par* $r(t,s) = \exp\left\{-\frac{|t-s|}{2}\right\}$. *Elle ne dépend que de la différence* $t - s$, *il s'agit bien d'un processus stationnaire de fonction de covariance plus simplement donnée par* $r(h) = \exp\left\{-\frac{|h|}{2}\right\}$. *Elle est donnée sous forme intégrale avec la mesure spectrale* $d\upsilon(u) = \dfrac{du}{\pi(1+u^2)}$.

Proposition 1.2 *Si* $W = (W(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est un* MB *standard, alors*

1. *[Propriété* $dif\,f$*érentielle]* $\{W(t+s) - W(t)\}_{t\geq 0}$ *est un* MB *standard pour tout* $s > 0$, *indépendant de* $\sigma(W(u), u < t)$
2. *[Propriété d'échelle] Pour tout* $c > 0, \{cW(t/c^2)\}_{t\geq 0}$ *est un* MB *standard.*
3. *[Symétrie]* $(-W(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est un* MB *standard.*
4. *[Processus gaussien] Un* MB *est gaussien de moyenne nulle et de function de covariance* $Cov(W(t), W(s)) \equiv E(W(t)W(s)) = s \wedge t$.
5. *[Renversement du temps] Le processus* $\left(\tilde{W}(t)\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *défini par* $\tilde{W}(t) = tW(1/t)\,\delta_{\{t>0\}}$ *est un* MB *standard.*

Preuve. Pour les propriétés différentielle, d'échelle,symétrie et de processus gaussien la vérification est immédiate. Quant à $\left(\tilde{W}(t)\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$ c'est un processus gaussien centré de fonction de covariance $r(t,s) = stE\{W(1/t)W(1/s)\} = t \wedge s$.Evidemment $\tilde{W}(t)$ est continu sur$]0,+\infty[$. On a, puisque $(W(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $\left(\tilde{W}(t)\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$ ont même loi pour tout $\alpha > 0$, $P\left(\sup\limits_{0<s<t}\left|\tilde{W}(t)\right| > \alpha\right) = P\left(\sup\limits_{0<s<t}|W(t)| > \alpha\right) \downarrow 0$ quand $t \downarrow 0$ et $\tilde{W}(t) \downarrow 0$ $p.s$ quand $t \downarrow 0$. ■

Proposition 1.3 *[*MB *comme martingales]Si* $(W(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est un* MB *standard, alors*

1. $(W(t), \mathcal{F}_W(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est une martingale.*
2. $(W^2(t) - t, \mathcal{F}_W(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est une martingale.*
3. $\left(exp\left\{\sigma W(t) - \frac{\sigma^2}{2}t\right\}, \mathcal{F}_W(t)\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est une martingale.*

Preuve.

1. La première propriété, découle des propriétés des PAI.

2. Remarquons que

$$
\begin{aligned}
& E\left\{W^2(t)-W^2(s)\,|\mathcal{F}_W(s)\right\} \\
= \;& E\left\{(W(t)-W(s))^2+2W(s)(W(t)-W(s))\,|\mathcal{F}_W(s)\right\} \\
= \;& E\left\{(W(t)-W(s))^2\,|\mathcal{F}_W(s)\right\}+2E\left\{W(s)(W(t)-W(s))\,|\mathcal{F}_W(s)\right\} \\
= \;& E\left\{(W(t)-W(s))^2\,|\mathcal{F}_W(s)\right\}
\end{aligned}
$$

La stationnarité et l'indépendance des accroissements du MB permettent de plus d'affirmer que

$$E\left\{(W(t)-W(s))^2\,|\mathcal{F}_W(s)\right\}=E\left\{W^2(t-s)\right\}=t-s$$

d'où le résultat.

3. Si $s<t$ alors

$$
\begin{aligned}
& E\left\{exp\left\{\sigma W(t)-\frac{\sigma^2}{2}t\right\}|\mathcal{F}_W(s)\right\} \\
= \;& exp\left\{\sigma W(s)-\frac{\sigma^2}{2}t\right\}E\left\{exp\left\{\sigma(W(t)-W(s))\right\}|\mathcal{F}_W(s)\right\} \\
= \;& exp\left\{\sigma W(s)-\frac{\sigma^2}{2}t\right\}E\left\{exp\left\{\sigma(W(t)-W(s))\right\}\right\} \\
= \;& exp\left\{\sigma W(s)-\frac{\sigma^2}{2}t\right\}E\left\{exp\left\{\sigma W(t-s)\right\}\right\} \\
= \;& exp\left\{\sigma W(s)-\frac{\sigma^2}{2}t\right\}exp\left\{\frac{\sigma^2}{2}(t-s)\right\} \\
= \;& exp\left\{\sigma W(s)-\frac{\sigma^2}{2}s\right\}.
\end{aligned}
$$

■

Propriétés 1.5 *1. D'après les propriétés des PAI, un MB est un processus markovien.*

2. Si $(W(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un MB à valeurs réelles alors il a des trajectoires $p.s$ continues.

3. *Soit* $(W(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *un* MB *à valeurs réelles. Si* $a>0$, *alors* $P\left(\max\limits_{0\leq\ s\ \leq t} W(s)>a\right) = 2P(W(t)>a)$. *En effet, on définit le processus de Wiener* $\left(\tilde{W}(t)\right)_{t\in\mathbb{R}}$ *par*

$$\begin{cases} \tilde{W}(t) = W(t) & \text{si } W(s) < a, \forall s < t, \\ \tilde{W}(t) = 2aW(t) & \text{si } \exists s < t \text{ tel que } W(s) = 0. \end{cases}$$

alors presque sûrement $\max\limits_{0\leq\ s\ \leq t} W(s) > a$ *si et seulement si* $W(t) > a$ *où* $\tilde{W}(t) > a$ *et on a* $P\left(\max\limits_{0\leq\ s\ \leq t} W(s)>a\right) = P(W(t)>a) + P\left(\tilde{W}(t)>a\right) = 2P(W(t)>a)$ *parce que les processus* $W(t)$ *et* $\tilde{W}(t)$ *ayant la même loi de probabilité.*

4. *Si* $(W(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est un* MB *à valeurs réelles alors* $\forall h>0$: $P\left(\max\limits_{0\leq\ s\ \leq h} W(s)>0\right) = P\left(\min\limits_{0\leq\ s\ \leq h} W(s)<0\right) = 1$. *En effet si* $h>0$ *et* $a>0$ *il est évident que* $P\left(\max\limits_{0\leq\ s\ \leq h} W(s)>0\right) \geq P\left(\max\limits_{0\leq\ s\ \leq h} W(s)>a\right)$ *et d'après la propriété précédente on a :*

$$P\left(\max_{0\leq\ s\ \leq h} W(s)>a\right) = 2P(W(h)>a) = 2\left(1-\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{h}}\right)\right)$$

lorsque $a \longrightarrow 0$, $2\left(1-\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{h}}\right)\right) \longrightarrow 1$, *et que* $P\left(\max\limits_{0\leq\ s\ \leq h} W(s)>0\right) = 1$, *de plus* $P\left(\min\limits_{0\leq\ s\ \leq h} W(s)<0\right) = P\left(\max\limits_{0\leq\ s\ \leq h} (-W(s))>0\right) = 1$, *et*

$$P\left(\max_{0\leq\ s\ \leq h} W(s)>0,\ \forall h>0\right) \geq P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\max_{0<\ s\ <\frac{1}{n}} W(s)>0\right)\right) = 1$$

D'où $P\left(\max\limits_{0\leq\ s\ \leq h} W(s)>0,\ \forall h>0\right) = 1$, $P\left(\min\limits_{0\leq\ s\ \leq h} W(s)<0,\ \forall h>0\right) = 1$.

Comportement asymptotique des trajectoires

Il existe des résultats trés fins sur le comportement des trajectoires du MB (cf. [33]). On se contente de résultats relativement grossiers mais caractéristiques.

Proposition 1.4 $(W(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est un* MB *à valeurs réelles, alors presque sûrement*

1. $\limsup\limits_{t\to\infty} \dfrac{W(t)}{\sqrt{t}} = +\infty$ *et* $\liminf\limits_{t\to\infty} \dfrac{W(t)}{\sqrt{t}} = -\infty$

2. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{W(t)}{t} = 0$

3. $\limsup\limits_{t\to 0} \dfrac{W(t)}{\sqrt{t}} = +\infty$ *et* $\liminf\limits_{t\to 0} \dfrac{W(t)}{\sqrt{t}} = -\infty$

Preuve.

1. Soit $R = \limsup\limits_{t\to\infty} \dfrac{W(t)}{\sqrt{t}}$. Pour tout $s > 0$, on a

$$R = \limsup_t \frac{W(t+s)}{\sqrt{t+s}} = \limsup_t \frac{W(t+s)}{\sqrt{t}} = \limsup_t \frac{W(t+s) - W(s)}{\sqrt{t}}.$$

   Donc R est indépendante de $\sigma(W(u), u \leq s)$. Ceci étant vrai pour tout s, R est donc indépendante de $\sigma(W(u), 0 \leq u)$. On a, soit $P(R = +\infty) = 1$ soit $P(R = \alpha) = 1$. Supposons que $R = \alpha$, *p.s*. On a alors pour tout $\beta > \alpha$, $P\left(\dfrac{W(t)}{\sqrt{t}} > \beta\right) \to 0$ quand $t \to \infty$, mais $P\left(\dfrac{W(t)}{\sqrt{t}} > \beta\right) = P(W(1) > \beta) > 0$. Donc $R = +\infty$ *p.s*. Pour la deuxi'eme limite, il suffit de considérer $\{-W(t)\}$.

2. Soit $s = \dfrac{1}{t}$ et $Z(t) = tW(\frac{1}{t})$. On a $\dfrac{W(t)}{t} = sW(s) = Z(s) \to 0$ *p.s* quand $s \to 0$ puisque $Z(s)$ est un mouvement brownien.

3. Il suffit de considérer le mouvement brownien $\left(Z(t) = tW(\frac{1}{t})\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

■

Corollaire 1.1 *1. Presque sûrement,* $W = (W(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *passe une infinité de fois par tout point.*

2. Pour tout $s \geq 0$, $(W(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *n'est pas dérivable ni à droite ni à gauche en* s.

Preuve.

1. Ceci résulte immédiatement de la continuité des trajectoires.

2. $(W(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ n'est p.s. pas dérivable à droite en 0 puisque $\limsup\limits_{t\to 0} \dfrac{W(t) - W(0)}{\sqrt{t}} = +\infty$ *p.s*. Considérant les mouvements browniens $(W(t+s) - W(s))_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $(Z(t) = tW(\frac{1}{t}))_{t\in\mathbb{R}_+}$ on a d'abord la non dérivabilité à droite puis la non dérivabilité à gauche en $s > 0$.

■

En fait ces résultats sont des cas très particuliers de la loi du logarithme itéré de Paul Lévy.

Proposition 1.5 $(W(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est un MB à valeurs réelles, alors presque sûrement*

1. $\limsup\limits_{t\to\infty} \dfrac{W(t)}{\sqrt{2t\log\log t}} = +1$ *et* $\liminf\limits_{t\to\infty} \dfrac{W(t)}{\sqrt{2t\log\log t}} = -1,$

2. $\limsup\limits_{t\to 0^+} \dfrac{W(t)}{\sqrt{2t\log\log t}} = 1$ *et* $\liminf\limits_{t\to 0^+} \dfrac{W(t)}{\sqrt{2t\log\log t}} = -1,$

1.2.4 Processus de Lévy

Dans cette sous section, nous étudions des PAI. Les processus que nous allons étudier ne sont pas les PAI les plus généraux, mais leur construction donne une idée de la constriction qui permit à Paul Lévy de caractériser les $PAIS$ et les lois indéfiniment divisibles.

Définition 1.11 *Un processus réel* $L = (L(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est appelé processus de Lévy si*

1. $L(0) = 0$ *p.s,*
2. $L = (L(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est un $PAIS$*
3. $L = (L(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est stochastiquement continu.*

Remarque 1.8 *La propriété de continuité est quasiment caractéristique du mouvement brownien parmis les processus de Lévy. En effet, on peut montrer que tout processus de Lévy* $L = (L(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *tel que presque toute trajectoire est continue s'écrit sous la forme* $L(t) = \alpha t + \beta M(t)$ *pour chaque* $t \geq 0$, $(M(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ *étant un MB et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Théorème 1.3 [*Formule de Lévy-Khintchine*] *Soit* $L = (L(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *une processus de Lévy, alors il existe* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *et une mesure de Lévy*[3] υ *tels que*

$$E\left\{e^{iL(t)u}\right\} = \exp\left\{t(ibu - \frac{u^2}{2}a + \int\limits_{\mathbb{R}^*} \left(e^{iyu} - 1 - i\,yuI_{\{|y|<1\}}\right) d\upsilon(y)\right\}$$

Preuve. cf. [33]. ■

Propriétés 1.6 1. *Si* $L = (L(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est un processus de Lévy, alors* $L(t)$ *est une loi infiniment divisible pour tout* $t \geq 0$. *En effet pour tout* $n \geq 0$ *on peut ecrire*

$$L(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(L\left(\frac{k}{n}t\right) - L\left(\frac{k-1}{n}t\right)\right).$$

Pour conclure, on remarque ensuite que les variables $\left\{L\left(\frac{k}{n}t\right) - L\left(\frac{k-1}{n}t\right), 1 \leq k \leq n\right\}$ *sont i.i.d par indépendance et stationnarité des accroissements.*

---

[3] Une mesure υ sur $\mathbb{R}^*$ est appellée mesure de Lévy si $\int\limits_{\mathbb{R}^*} (1 \wedge y^2) d\upsilon(y) < +\infty$. C'est une mesure $\sigma-$finie.

2. *Si $L = (L(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus de Lévy, alors sa fonction caractéristique est donnée par $\phi_t(u) = e^{t\eta(u)}$ où η est le symbole de Lévy de $L(1)$. Ceci résulte du fait que L est un $PAIS$.*

3. *Les MB et les processus de Poisson sont des processus de Lévy.*

4. *La somme de deux processus de Lévy indépendants est encore un processus de Lévy.*

5. *Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $(L_u(t), \Im_L(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale où $L_u(t) = \exp\{iuL(t)$ $-t\eta(u)\}$. C'est une conséquence directe des propriétés des MB.*

6. *Tout processus de Lévy admet une version càdlàg qui est encore un processus de Lévy avec les mêmes caractéristiques.*

Proposition 1.6 *Si $L = (L(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus et s'il existe une suite $L^{(n)} = \left(L^{(n)}(t)\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de processus de Lévy telle que*

1. *$L^{(n)}(t)$ converge en probabilité vers $L(t)$ pout tout $t \geq 0$*

2. $\forall\varepsilon > 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} \limsup\limits_{t\to 0} P\left\{\left|L^{(n)}(t) - L(t)\right| > \varepsilon\right\} = 0$

Alors $L = (L(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus de Lévy.

Preuve. On presque sûrement $L(0) = 0$ car on peut trouver une sous-suite $\left(L^{(n)}(0)\right)_{n\geq 1}$ qui converge vers $L(0)$ $p.s.$ Pour $t, s \geq 0$ on a

$$\begin{aligned} E\left\{e^{iu(L(t+s)-L(t))}\right\} &= \lim_{n\to\infty} E\left\{e^{iu\left(L^{(n)}(t+s)-L^{(n)}(t)\right)}\right\} = \lim_{n\to\infty} E\left\{e^{iu\left(L^{(n)}(s)-L^{(n)}(0)\right)}\right\} \\ &= E\left\{e^{iu(L(s)-L(0))}\right\} \end{aligned}$$

On prouve de la même façon l'indépendance des accroissements. Il reste à montrer que L est stochastiquement continu. Soit $\varepsilon > 0$, on a pou tout $t \geq 0$

$$P(|L(t)| > \varepsilon) \leq P\left(\left|L(t) - L^{(n)}(t)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(\left|\ L^{(n)}(t)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

d'où

$$\begin{aligned} \limsup_{t\to 0} P(|L(t)| > \varepsilon) &\leq \limsup_{t\to 0} P\left(\left|L(t) - L^{(n)}(t)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + \limsup_{t\to 0} P\left(\left|\ L^{(n)}(t)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &\leq \limsup_{t\to 0} P\left(\left|L(t) - L^{(n)}(t)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right). \end{aligned}$$

Pour conclure, ilsuffit de prendre la limite en $n \to \infty$ et d'utiliser la condition 2 du théorème. ■

Théorème 1.4 [*Propriété de Markov forte*] *Si* $L = (L(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est un processus de Lévy et si* τ *est un temps d'arrêt adapté à la filtration* $(\Im_L(t))_{t\geq 0}$*, alors, sur* $\{\tau \leq \infty\}$ *on a*

1. *Le processus* $L^\tau = (L^\tau(t) = L(t+\tau) - L(\tau))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est un processus de Lévy indépendant de la tribu* $\Im_L(\tau)$
2. *Pour tout* $t \geq 0$*,* $L^\tau(t)$ *a même loi que* $L(t)$
3. L^τ *est à trajectoires càdlàg et est* $\Im_L(t+\tau)-$*adapté.*

Preuve. On fait la preuve dans le cas où ■ est borné. Soient $A \in \Im_L(\tau)$, $(n,u) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}$, $0 = t_0 < ... < t_n$ et considérons la martingale $L_u(t) = \exp\{iuL(t) - t\eta(u)\}$. On a

$$\begin{aligned} & E\left\{ I_A \exp\left\{ iu \sum_{j=1}^{n} (L^\tau(t_j) - L^\tau(t_{j-1}) \right\}\right\} \\ = \; & E\left\{ I_A \exp\left\{ iu \sum_{j=1}^{n} (L(\tau+t_j) - L(\tau+t_{j-1}) \right\}\right\} \\ = \; & E\left\{ I_A \prod_{j=1}^{n} \frac{L_u(t_j+\tau)}{L_u(t_{j-1}+\tau)} \prod_{j=1}^{n} \phi_{t_j - t_{j-1}}(u) \right\} \end{aligned}$$

où $\phi_t(u) = E\left\{e^{iuL(t)}\right\}$. On remarque que pour $0 < a < b < +\infty$

$$E\left\{ I_A \; \frac{L_u(b+\tau)}{L_u(a+\tau)} \right\} = E\left\{ I_A \; \frac{1}{L_u(a+\tau)} E\left\{ L_u(b+\tau) \, | \Im_L(a+\tau) \right\} \right\} = P(A).$$

En répétant cet argument dans la première égalité, on obtient

$$E\left\{ I_A \exp\left\{ iu \sum_{j=1}^{n} (L^\tau(t_j) - L^\tau(t_{j-1}) \right\}\right\} = P(A) \prod_{j=1}^{n} \phi_{t_j - t_{j-1}}(u).$$

La formule précédente permet facilement de vérifierque L^τ est un processus de Lévy et que L^τ est indépendant de $\Im_L(\tau)$. En particulier, pour $n = 1$ et $t_1 = t$ on obtient $E\left\{e^{iuL^\tau(t)}\right\} = E\left\{e^{iuL(t)}\right\}$ d'où (2). Pour la continuité stochastique, ça résulte de $E\left\{e^{iuL^\tau(t)}\right\} = E\left\{e^{iuL(t)}\right\}$ en faisant tendre t vers 0. ■

A l'aide de la propriété de Markov forte, on peut montrer

Théorème 1.5 *Soit* $L = (L(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est un processus de Lévy à valeurs réelles*

1. *Si L est presque sûrement croissant et ne faisant que des sauts de taille1,alors L est un processus de Poisson.*
2. *Si L est càdlàg et presque sûrement à trajectoires constantes par morceaux, alors L est un processus de Poisson composé. La réciproque est trivialement vraie.*

Preuve. C.f. [6]. ■

Chapitre 2

Intégrale stochastique et calcul d'Itô

Dans toute cette partie $W = (W(t))_{t\geq 0}$ est un MB standard défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \Im, P)$. Cette espace de probabilité est de plus équipé de la filtration naturelle $(\Im_W(t))_{t\geq 0}$.

La construction de l'intégrale stochastique (ou de Itô) se construit de façon semblable à celle de l'intégrale classique de Riemann-Stiljes. L'intégrale est tout d'abord définie sur une classe de processus étagés (ou élémentaires) notée $\mathcal{E}([0,T]\times\Omega)$ et ensuite elle est étendue à une classe plus large par approximation.

2.1 L'intégrale stochastique sur $\mathcal{E}([0,T]\times\Omega)$

Un processus $X = (X(t))_{t\geq 0}$ est appelé processus étagé s'il existe une suite de réels $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$, et une suite de variables aléatoires $(X_j)_{0\leq j\leq n}$ telles que X_j soit $\Im_W(t_j)$ −mesurable, appartiènne à $L_2([0,T])$ et $X(t) = X_j$ pour tout $t \in [t_j, t_{j+1}[$, soit $X(t) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} X_i I_{[t_i,t_{i+1}[}(t)$. On définit alors l'intégrale stochastique sur $\mathcal{E}([0,T]\times\Omega)$ par :

$$\int_0^T X(t)\,dW(t) = \sum_{j=1}^{n-1} X_j\left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right). \tag{2.1}$$

Remarque 2.1 *Lorsque* $t \in [0,T]$ *on définit naturellement*

$$\int_0^t X(s)\,dW(s) = \int_0^T X(s)\,I_{[0,t]}(s)dW(s) = \sum_{k=1}^{n-1} X_k\left(W(t_{k+1}\wedge t) - W(t_k\wedge t)\right).$$

Cependant, il est important de noter qu'en général le processus $\int_0^t X(s)\,dW(s)$ *n'a aucune raison d'être gaussien.*

2.1.1 Propriétés de l'intégrale stochastique sur $\mathcal{E}([0,T]\times\Omega)$

Sur l'ensemble $\mathcal{E}([0,T]\times\Omega)$ l'intégrale stochastique satisfait les propriétés suivantes

1. [Linéairité] : $\int_0^t (\alpha X(s)+\beta Y(s))\,dW(s) = \alpha\int_0^t X(s)\,dW(s)+\beta\int_0^t Y(s)\,dW(s)$ pour tout α et β réels.
2. Pour $0\leq s<u<t\leq T$: $\int_s^t X(v)\,dW(v) = \int_s^u X(v)\,dW(v) + \int_u^t X(v)\,dW(v)$.
3. Le processus $\left(\int_0^t X(s)\,dW(s)\right)_{t\in[0,T]}$ est $(\Im_W(t))_{t\in[0,T]}$ −adapté.
4. Le processus $\left(\int_0^t X(s)\,dW(s)\right)_{t\in[0,T]}$ est à trajectoires continues.
5. Si $\int_0^t E\left[X(t)^2\right]dt < \infty$ pour tout $t\leq T$, alors $E\left[\int_0^t X(s)\,dW(s)\right] = 0$ et $Var\left(\int_0^t X(s)\,dW(s)\right) = \int_0^t E\left\{X^2(s)\right\}ds$ (l'isométrie de Itô).
6. On a pour tout $0\leq s\leq t\leq T$,
$$\begin{aligned} E\left[\int_0^t X(u)\,dW(u)\,|\Im_W(s)\right] &= 0, \\ E\left[\left(\int_0^t X(u)\,dW(u)\right)^2 |\Im_W(s)\right] &= E\left[\int_0^t X^2(u)\,d(u)\,|\Im_W(s)\right] \end{aligned}$$
7. Le processus $\left(\int_0^t X(s)\,dW(s), \Im_W(t)\right)_{t\in[0,T]}$ est une martingale continue de $L_2([0,T])$.
8. Pour tout $t\leq T$
$$E\left[\left(\int_0^t X(s)\,dW(s)\right)\left(\int_0^t Y(s)\,dW(s)\right)\right] = \int_0^t E\left\{X(s)\,Y(s)\right\}ds.$$

Preuve. La preuve des ces propriétés, découle de la définition de l'intégrale et des propriétés des MB. ■

Remarque 2.2 *L'isométrie de Itô, traduit le fait que l'application* $X \to \int\limits_0^T X(s)\,dW(s)$ *est une isométrie de* $\mathcal{E}([0,T]\times\Omega)$ *sur l'espace des martingales sur* $[0,T]$*, continues et*

de carré intégrable (espace que l'on notera dorénavant $M_2([0,T])$), ces espaces étant munis de leur norme naturelle.

2.2 Extension à $\mathbb{L}_2$

On peut prolonger la définition de l'intégrale sur $\mathcal{E}([0,T]\times\Omega)$ à une classe plus large de processus. On perd le caractère gaussien de l'intégrale, ce qui est déja le cas pour le cas de processus étagé.

On définit les processus *càglàd* de carré intégrable (appartenant à $\mathbb{L}_2$) comme l'ensemble Υ des processus X adaptés continus à gauche limités à droite et $\Im_W(t)$ −adaptés tels que

$$\|X\|^2 = E\left\{\int_0^\infty X^2(s)ds\right\} < +\infty.$$

Evidement, les processus étagés appartiennent à Υ. On dit que la suite $X_n = (X_n(t))_{n\geq 0}$ converge vers X dans $\mathbb{L}_2$ si $\|X - X_n\|^2 \to 0$ quand $n\to\infty$ (i.e., $\mathcal{E}([0,T]\times\Omega)$ est dense dans $\mathbb{L}_2$). L'application $X \to \|X\|^2$ définit une norme qui fait de Υ un espace complet.

On peut définir $\int\limits_0^\infty X(t)\,dW(t)$ pour tous les processus X de Υ : on approche X par des processus étagés, soit $X(t) = \lim\limits_{n\to\infty} X_n(t)$ où $X_n(t) = \sum\limits_{i=1}^{k(n)} \widetilde{X}_i^{(n)} I_{[t_i,t_{i+1}[}(t)$ avec $\widetilde{X}_i^{(n)} \in \Im_W(t_i)$ et la limite étant au sens de $\mathbb{L}_2$. L'intégrale $\int\limits_0^\infty X(t)\,dW(t)$ est alors la limite dans $\mathbb{L}_2$des sommes $\sum\limits_{i=1}^{k(n)} \widetilde{X}_i^{(n)}(W(t_{j+1}) - W(t_j))$ dont l'éspérance est 0 et de variance $E\left\{\int\limits_0^\infty X^2(t)\,dt\right\}$

Remarque 2.3 *Notons que* $\int\limits_0^t X(s)\,dW(s) = \int\limits_0^\infty X(s)\,I_{[0,t[}(s)dW(s)$*. Si* X *est étagé* $\int\limits_0^t X(s)\,dW(s) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} X_i(W(t_{j+1}\wedge t) - W(t_j\wedge t))$*. Plus généralement si* τ *est un temps d'arrêt, le processus* $I_{[0,\tau[}(t)$ *est adapté et on définit*

$$\int\limits_0^{t\wedge\tau} X(s)\,dW(s) = \int\limits_0^t X(s)\,I_{[0,\tau[}(s)dW(s)$$

2.2.1 Propriétés de l'intégrale stochastique sur $\mathbb{L}_2$

Dans $\mathbb{L}_2$ l'intégrale stochastique satisfait les propriétés suivantes

1. [Linéairité] : $X \to \int_0^t X(s)\, dW(s)$ est linéaire

2. Pour $0 \leq s < u < t \leq T$: $\int_s^t X(v)\, dW(v) = \int_s^u X(v)\, dW(v) + \int_u^t X(v)\, dW(v)$.

3. Le processus $\left(\int_0^t X(s)\, dW(s) \right)_{t \geq 0}$ est $(\Im_W(t))_{t \geq 0}$ −adapté.

4. Le processus $\left(\int_0^t X(s)\, dW(s) \right)_{t \geq 0}$ est à trajectoires continues.

5. Si $E\left\{ \int_0^t X^2(t)\, dt \right\} < \infty$ pour tout $t \geq 0$, alors $E\left[\int_0^t X(s)\, dW(s) \right] = 0$ et $Var\left(\int_0^t X(s)\, dW(s) \right) = \int_0^t E\left\{ X^2(s) \right\} ds$ (l'isométrie de Itô).

6. On a pour tout $0 \leq s \leq t$, $E\left\{ \int_0^t X(u)\, dW(u) \,|\Im_W(s) \right\} = 0$ et
$$E\left\{ \left(\int_0^t X(u)\, dW(u) \right)^2 |\Im_W(s) \right\} = E\left\{ \int_0^t X^2(u)\, d(u) \,|\Im_W(s) \right\}$$

7. Le processus $\left(\int_0^t X(s)\, dW(s), \Im_W(t) \right)_{t \geq 0}$ est une martingale continue de $\mathbb{L}_2$.

8. Pour tout $t \geq 0$, on a
$$E\left[\left(\int_0^t X(s)\, dW(s) \right) \left(\int_0^t Y(s)\, dW(s) \right) \right] = \int_0^t E\left\{ X(s)\, Y(s) \right\} ds.$$

2.3 Calucl de Itô

Nous allons maintenant introduire un calcul différentiel sur ces intégrales stochastiques. On appelle ce calcul "calcul d'Itô" et l'outil essentiel en est la "formule d'Itô". La formule d'Itô donne, en particulier, la façon de différencier $t \to f(W(t))$ si f est de classe $\mathcal{C}^{(2)}([0, T])$. L'exemple suivant prouve que le prolongement naïf du calcul différentiel usuel est voué à l'échec. Supposons que l'on veille "différencier" $t \to W(t)$

et l'exprimer en fonction de "$dW(t)$". Pour une fonction f différentiable nulle en 0, en $f^2(t) = 2\int_0^t f(s)f'(s)ds = 2\int_0^t f(s)df(s)$. Dans les cas du mouvement brownien et de l'intégrale stochastique, on ne peut avoir une telle formule du même type $W^2(t) = 2\int_0^t W(s)dW(s)$. En effet, d'après ce qui précède $\int_0^t W(s)dW(s)$ est une martingale (car $\int_0^t W^2(s)d(s) < +\infty$) nulle en 0. Si elle était égale à $W^2(t)$, elle serait une martingale positive nulle en 0, mais elle ne peut être positive que si elle est nulle.

Definition 1 *Un processus d'Itô est un processus $X = (X(t))_{0\leq\ t\leq T}$ adapté et continu sur $[0,T]$ de la forme*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a\left(s\right) ds + \int_0^t b\left(s\right) dW\left(s\right).$$

Où $a = (a(t))_{t\geq 0}\,, b = (b(t))_{t\geq 0}$ deux processus de $\mathbb{L}_2\left([0,T]\right)$ et $X(0)$ est $\Im_W\left(0\right)-$mesurable. On adoptera souvent la notation différentielle stochastique suivante

$$dX(t) = a\left(t\right) dt + b\left(t\right) dW\left(t\right)$$

Exemples 2.1 *1. La différentielle stochastique de $\left(W^2\left(t\right)\right)_{t\geq 0}$ est donnée par $dW^2\left(t\right) = dt + 2W\left(t\right) dW\left(t\right).$*

2. La différentielle stochastique du processus $\left(tW\left(t\right)\right)_{t\geq 0}$ est donnée par $d\left(tW\left(t\right)\right) = W\left(t\right) dt + tdW\left(t\right).$

3. Pour tout $\mathrm{n} \geq 2$ et tout un mouvement brownien $\left(W\left(t\right)\right)_{t\geq 0}$ on a

$$d\left(W^{\mathrm{n}}\left(t\right)\right) = nW^{n-1}\left(t\right) dW\left(t\right) + \frac{n\left(n-1\right)}{2}W^{n-2}\left(t\right) dt$$

4. Pour tout polynôme P, on peut vérifier que

$$d\left(P(W\left(t\right))\right) = P'(W\left(t\right))dW\left(t\right) + \frac{1}{2}P''(W\left(t\right))dt$$

5. Si $f \in \mathrm{C}^2\left(\mathbb{R}\right),$ alors on a

$$d\left(f(W\left(t\right))\right) = f\ '(W\left(t\right))dW\left(t\right) + \frac{1}{2}f''(W\left(t\right))dt$$

2.3.1 La formule de Itô

La formule de Itô permet de déterminer de manière générale l'effet d'un changement de variables sur une différentielle stochastique. Elle prend la forme suivante (nous admettons sans démonstration et nous renvoyons à Oksendal [32] pour une démonstration plus complète).

Théorème 2.1 [**formule de Itô**] *Si $X = (X(t))_{t\geq 0}$ est un processus d'Itô :*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s)\,ds + \int_0^t b(s)\,dW(s).$$

et f une fonction de classe $\mathrm{C}^2(\mathbb{R})$ alors on a

$$f(X(t)) = f(X(0)) + \int_0^t f'(X(s))dX(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X(s))d\langle X, X\rangle(s)$$

où, par définition $\langle X, X\rangle(t) = \int_0^t b^2(s)\,d(s)$, et

$$\int_0^t f'(X(s))dX(s) = \int_0^t f'(X(s))a(s)\,ds + \int_0^t f'(X(s))b(s)\,dW(s).$$

De même, si $(t, x) \rightarrow f(t, x)$ est une fonction deux fois différentiables en x et deux fois différentiables en t, ces dérivées étant continues en (t, x), on a

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) &= f(0, X(0)) + \int_0^t f'_s(s, X(s))ds + \int_0^t f'_x(s, X(s))dX(s) \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, X(s))d\langle X, X\rangle(s) \end{aligned}$$

Exemples 2.2 1. *Traitons le cas ou $f(x) = x^2$ et $X(t) = W(t)$, donc $a(t) = 0$ et $b(t) = 1$, et $W^2(t) = 2\int_0^t W(s)dW(s) + \frac{1}{2}\int_0^2 2ds$ d'où $W^2(t) - t = 2\int_0^t W(s)dW(s)$. Comme $E\left\{\int_0^t W^2(s)ds\right\} < +\infty$, on retrouve le fait que $W^2(t) - t$ est une martingale*

2. *Intéressons nous aux solutions $(S(t))_{t\geq 0}$ de*

$$S(t) = x(0) + \int_0^t S(s)(\mu ds + \sigma dW(s)) \tag{2.1}$$

que l'on écrit souven sous ce type d'équations sous la forme

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)), \ S(0) = x(0)$$

Donc, nous cherchons un processus $(S(t))_{t\geq 0}$ *adapté tel que les intégrales* $\int_0^t S(s)ds$ *et* $\int_0^t S(s)dW(s)$ *aient un sens et qui vérifie presque sûrement pour chaque* $t \geq 0$

$$S(t) = x(0) + \mu\int_0^t S(s)ds + \sigma\int_0^t S(s)dW(s)$$

Autrement dit, $S(t)$ *est un processus de Itô avec* $a(t) = \mu S(t)$ *et* $b(t) = \sigma S(t)$. *En appliquant la formule de Itô pour la fonction* $f(x) = \log(x)$ *on obtient*

$$\log(S(t)) = \log(S(0)) + \int_0^t \frac{dS(s)}{S(s)} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\sigma^2}{S^2(s)} S^2(s)ds$$

En posant $Y(t) = \log(S(t))$, *on obtient*

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) ds + \int_0^t \sigma dW(s)$$

On en déduit

$$Y(t) = \log(S(t)) = \log(S(0)) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W(t)$$

Donc, une solution de notre équation est donc donnée par

$$S(t) = x(0)\exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W(t)\right\}.$$

En effet, posons $S(t) = f(t, W(t))$ *où* $f(t,x) = x(0)\exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma x\right\}$. *La formule de Itô donne*

$$\begin{aligned} f(t, W(t)) &= f(0, W(0)) + \int_0^t f'_s(s, W(s))ds + \int_0^t f'_x(s, W(s))dW(s) \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, W(s))d\langle W, W\rangle(s) \end{aligned}$$

comme $\langle W, W\rangle(s) = s$, *alors*

$$\begin{aligned} S(t) &= x(0) + \int_0^t S(s)\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) ds + \sigma\int_0^t S(s)dW(s) + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t S(s)ds \\ &= x(0) + \mu\int_0^t S(s)ds + \sigma\int_0^t S(s)dW(s) \end{aligned}$$

Remarque 2.4 *On aurait pu obtenir le resultat précédent en appliquant la formule de Itô à* $S(t) = \phi(Z(t))$ *où* $Z(t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)$ *(qui est un processus de Itô) et* $\phi(x) = x(0)\exp\{x\}$.

Proposition 2.1 [*Formule d'intégration par parties*] *Soient* $X = (X(t))_{t\geq 0}$ *et* $Y = (Y(t))_{t\geq 0}$ *deux processus de Itô :*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s)\,ds + \int_0^t b(s)\,dW(s)\,, Y(t) = Y(0) + \int_0^t a'(s)\,ds + \int_0^t b'(s)\,dW(s)$$

Alors

$$X(t)Y(t) = X(0)Y(0) + \int_0^t X(s)\,dY(s) + \int_0^t Y(s)\,dX(s) + \langle X, Y\rangle(t)$$

avec la convention $\langle X, Y\rangle(t) = \int_0^t b(s)b'(s)ds$.

Preuve. On a d'après la formule de Itô,

$$\begin{aligned}
(X(t) + Y(t))^2 &= (X(0) + Y(0))^2 + \int_0^t (X(s) + Y(s))\,d(X(s) + Y(s)) \\
&\quad + \int_0^t (b(s) + b'(s))^2\,ds \\
X^2(t) &= X^2(0) + 2\int_0^t X(s)\,dX(s) + \int_0^t b^2(s)\,ds \\
Y^2(t) &= Y^2(0) + 2\int_0^t Y(s)\,dY(s) + \int_0^t b'^2(s)\,ds
\end{aligned}$$

D'où le résultat en faisant la différence entre la première ligne et les deux suivantes ■

La proposition précédente nous permet de montrer l'unicité de la solution de l'équation (2.1). noton que $S(t) = x(0)\exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right\}$ est une solution de (2.1), et supposons que $X = (X(t))_{t\geq 0}$ en soit une autre. Cherchons tout d'abord la "différentielle stochastique" du processus $\left(\frac{X(t)}{S(t)}\right)_{t\geq 0}$. Posons

$$Z(t) = \frac{S(0)}{S(t)} = \exp\left\{\left(\mu' - \frac{\sigma'^2}{2}\right)t + \sigma' W(t)\right\}$$

où $.\mu' = -\mu + \sigma^2$ et $\sigma' = -\sigma$. Donc

$$\begin{aligned} Z(t) &= 1 + \int_0^t Z(s)(\mu' ds + \sigma' dW(s)) \\ &= 1 + \int_0^t Z(s)(\left(-\mu + \sigma^2\right)\ ds - \sigma dW(s)) \end{aligned}$$

On peut alors exprimer la différentielle de $X(t)Z(t)$ grâce à la formule d'intégration par parties

$$d(X(t)Z(t)) = X(t)dZ(t) + Z(t)dX(t) + d\left\langle X, Z\right\rangle(t)$$

ici $\left\langle X, Z\right\rangle(t) = \left\langle \int_0^{\cdot} X(s)\sigma dW(s), -\int_0^{\cdot} Z(s)\sigma dW(s)\right\rangle(t) = \sigma^2 \int_0^t X(s)Z(s)ds$. D'où

$$\begin{aligned} d(X(t)Z(t)) &= X(t)Z(t)(\left(-\mu + \sigma^2\right)\ dt - \sigma dW(t)) + Z(t)X(t)(\mu\ dt + \sigma dW(t)) \\ -\sigma^2 X(t)Z(t)dt &= 0 \end{aligned}$$

$X(t)Z(t) = X(0)Z(0) = x(0)$, ce qui implique que presque sûrement $X(t) = x(0)Z^{-1}(t) = S(t)$ et comme les processus $X(t)$ et $Z(t)$ sont continus, alors presque sûrement $\forall t \geq 0$: $X(t) = x(0)Z^{-1}(t) = S(t)$. D'où

Théorème 2.2 *Soient μ et σ^2 deux nombres réels, $W = (W(t))_{t\geq 0}$ un MB, T un nombre réel positif. Il existe un processus de Itô unique $S = (S(t))_{T\geq t\geq 0}$ vérifiant*

$$S(t) = x(0) + \int_0^t S(s)(\mu ds + \sigma dW(s))$$

Ce processus est donné par

$$S(t) = x(0)\exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right\}$$

Remarque 2.5

1. *Lorsque $\mu = 0$, le processus S est une martingale (Voir chapitre 1), ce type de processus porte le nom de martingale exponentielle.*

2. *Soit Θ un ouvert de $\mathbb{R}$ et $X = (X(t))_{T\geq t\geq 0}$ un processus de Itô qui vérifie $\forall t \leq T : X(t) \in \Theta$. Si de plus f est une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^{(2)}(\Theta)$ on peut justifier rigoureusement l'extension de la formule de Itô dans ce cas*

$$f(X(t)) = f(X(0)) + \int_0^t f'(X(s))dX(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X(s))b^2(s)ds$$

Ce résultat permet de justifier en particulier, l'application de la formule de Itô pour les processus positifs et les fonctions log.

.

2.3.2 Théorème de la représentation de Itô

Théorème 2.3 *Soit* $(X(t))_{t\in[0,T]} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un processus stochastique, alors il existe un processus unique* $(f(t))_{t\in[0,T]} \in \mathcal{C}([0,T])$ *tel que*

$$\forall t \in [0,T] \ : \ X(t) = E(X(0)) + \int_0^t f(s)\, dW(s).$$

Preuve. La démonstration de ce théorème est basée sur le fait que l'espace linéaire des variables aléatoires de la forme $\exp\{\int_0^T h(t)\, dW(t) - \frac{1}{2}\int_0^T h^2(t)\, dt\}$ est dense dans $L^2(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ avec $(h(t))_{t\in[0,T]} \in L^2([0,T])$. Supposons donc que $(X(t))_{t\in[0,\ T]}$ est sous la forme

$$X(t) = \exp\{\int_0^t h(s)\, dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t h^2(s)\, ds\}, \qquad \forall t \in [0,\ T],$$

pour $(h(t))_{t\in[0,\ T]} \in L^2([0,\ T])$. Soit $Y(t)$ donné par

$$Y(t) = \exp\{\int_0^t h(s)\, dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t h^2(s)\, ds\}, \qquad \forall t \in [0,\ T],$$

et en utilisant la formule d'Itô, on obtient :

$$dY(t) = Y(t)\left(h(t)\, dW(t) - \frac{1}{2}h^2(t)\, dt\right) = Y(t)h(t)\, dW(t).$$

Par conséquent $Y(t) = 1 + \int_0^t Y(s)h(s)\, dW(s), \quad \forall t \in [0,\ T]$. Après avoir pris les espérances, on obtient $E\{X(t)\} = 1$. Maintenant, par le lemme précédent, nous pouvons étendre la démonstration de tout $(X(t))_{t\in[0,T]} \in L^2(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$. Pour prouver que le processus $(h(t))_{t\in[0,\ T]}$ est unique, supposons qu' il existe deux processus $h_1(t)$, $h_2(t) \in C([0,\ T])$ tel que

$$X(T) = E[X(0)] + \int_0^T h_1(t)\, dW(t) = E[X(0)] + \int_0^T h_2(t)\, dW(t).$$

En faisant la soustraction des deux intégrales et en prenant l'espérence de l'écart quadratique, nous obtenons :

$$E\left[\left(\int_0^T (h_1(t) - h_2(t))\, dW(t)\right)^2\right] = 0,$$

et par l'isométrie de Itô on a $\int_0^T E[h_1(t) - h_2(t)]^2\, dt = 0$ ceci implique que $h_1(t) = h_2(t)$ presque sûrement pour tout $t \in [0,\ T]$. ■

Chapitre 3

Équations différentielles stochastiques

Une équation différentielle stochastique peut être interprétée comme une équation ordinaire perturbuée par un bruit blanc dont l'intensité $a(t, X(t))$ dépend du temps t et de la position $X(t)$). La différentielle de $X(t)$ s'écrit cependant sous la forme : $dX(t) = a(t, X(t))\,dt + b(t, X(t))\,dW(t)$ où a et b deux fonctions données et $W(t)$ est un MB. Dans ce chapitre, nous voulons exposer la représentation de l'équation différentielle stochastique et les conditions assurant l'existence et l'unicité et la stabilité de solutions.

Définition 3.1 *Soientt $W = (W(t))_{t\in[0,T]}$ un MB défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni de la filtration $(\mathcal{F}_W(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$, $a(t,x), b(t,x)$ deux fonctions réelles, mesurables définies sur $[0,T]\times\mathbb{R}$ et $(X(t))_{t\in[0,T]}$ un processus. Alors $X(t)$ est une solution de l'équation différentielle stochastique suivante*

$$\begin{cases} dX(t) = a(t, X(t))\,dt + b(t, X(t))\,dW(t) \\ X(0) = X_0 \quad p.s \end{cases} \tag{3.1}$$

où X_0 est une variable aléatoire, si

1. X_0 est $\mathcal{F}_W(0)$ −mesurable.

2. $b(t, X(t)), |a(t, X(t))|^{\frac{1}{2}} \in C^{(1)}([0,T])$

3. $X(t)$ est différentiable vérifiant (3.1) et on peut écrire

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))\,ds + \int_0^t b(s, X(s))\,dW(s), \qquad t\in]0,T].$$

Remarque 3.1 *Si* $b(t, X(t)) = 0$ *dans* (3.1) *alors* $X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))\, ds$ *est une équation différentielle stochastique ordinaire car pour tout* $w \in \Omega$ *:* $a(t, X(t, w)) : [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction réelle mais* $X(0)$ *est une variable aléatoire.*

3.1 L' existence et l'unicité de la solution des équations différentielles stochastiques

Théorème d'existence et d'unicité Si les conditions suivantes sont satisfaites

1. **Condition de Lipschitz locale** : Pour tout $t \in [0, T]$ et tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$|\ a(t, x) - \ a(t, y)| + |\ b(t, x) - b(t, y)| \leq k^* |x - y|$$

   où k^* est une constante positive.

2. pour tout $t \in [0, T]$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$|\ a(t, x)| \leq \lambda (1 + |x|) \ , \ |\ b(t, x)| \leq \beta (1 + |x|)$$

   (où λ, β sont deux constantes positives)

3. $E\left(|X_0|^2\right) < \infty.$

4. X_0 est indépendant de $\mathcal{F}_W(t)$.

alors, il existe une solution unique $(X(t))_{t\in[0;T]}$ de (3.1) telle que :

- $(X(t))_{t\in[0;T]}$ est continu p.s.
- $(X(t))_{t\in[0;T]} \in C([0, T])$.

Preuve. Voir ([10]). ■

Remarque 3.2 *Si* $(X_1(t))_{t\in[0,T]}, (X_2(t))_{t\in[0,T]}$ *sont deux solutions de l'équation* (3.1) *alors*

$$P\left(\sup_{0\leq\ t\ \leq T} |X_1(t) - X_2(t)| = 0\right) = 1\ .$$

Définition 3.2 *1. Une solution* $(X(t))_{t\in[0;T]}$ *de l'équation* (3.1) *est dite forte sur l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *relativement au mouvement brownien* $(W(t))_{t\geq 0}$ *avec la condition initiale* $X(0) = X_0$ *si elle est indépendante du mouvement brownien* $W = (W(t))_{t\geq 0}$ *et si* $(X(t))_{t\in[0;T]}$ *est à trajectoire p.s. continue et* $\mathcal{F}_W-$ *adaptée.*

2. *Une solution* $(X(t))_{t\in[0,\ T]}$ *de l'équation* (3.1) *est dite faible sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *relativement au mouvement brownien si* $(X(t))_{t\in[0,\ T]}$ *est continue et* $\mathcal{F}_W-$*adaptée et des fonctions* $a(t,x)$ *et* $b(t,x)$ *de* L^1 *et de* L^2 *respectivement.*

Théorème 3.1 *Soient* a *et* b *deux fonctions mesurables sur* $\mathbb{R}$ *telles que*

$$|a(x) - a(y)| + |b(x) - b(y)| \leq k|x-y| \quad \text{pour tout} \quad k > 0\ , x; y \in \mathbb{R}$$

alors pour tout $X(0) \in L^2\ (\Omega, \mathcal{F}(0), P)$ *indépendant de* $\mathcal{F}(t)$, *il existe une solution unique* $(X(t))_{t\in[0,T]}$ *de*

$$\begin{cases} dX(t) = a(X(t))\,dt + \ b(X(t))\,dW(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

tel que $(X(t))_{t\in[0,T]}$ *est p.s. continu et* $(X(t))_{t\in[0,T]} \in C([0,T]\ )$.

Preuve. Voir ([9]). ■

3.1.1 Exemples

Exemples 3.1 *On suppose que :* $a \equiv 0$ *et* $b(t, X(t)) = g(t)\,X(t)$ *dans l'equation* (3.1) *alors, le système s'écrit sous la forme*

$$\begin{cases} dX(t) = g(t)\,X(t)\,dW(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

admet une solution donnée par

$$X(t) = \ X_0 \exp\left\{\int_0^t g(s)\,dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t g^2(s)\,ds\right\}.$$

Preuve. Posons

$$X(t) = \int_0^t g(s)\,dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t g^2(s)\,ds$$

et $y(t) = \exp\{X(t)\} = f(X(t))$, alors $X(t) = X_0\ y(t)$, on peut montrer que $X_0 dy(t) = g(t)\,X(t)\,dW(t)$ car

$$dX(t) = \frac{-1}{2}g^2(t)\,dt + g(t)\,dW(t)$$

En utilisant la formule de Itô, on trouve

$$\begin{aligned} dy(t) &= \left(\frac{-1}{2}(g(t))^2 \exp\{X(t)\} + \frac{1}{2}(g(t))^2 \exp\{X(t)\}\right) dt + g(t)\exp\{X(t)\}\,dW(t) \ \ dy(t) \\ &= y(t)\,g(t)\,dW(t)\,. \end{aligned}$$

■

Exemples 3.2 *1. Le mouvement brownien arithmétique*

$$\begin{cases} dX\left(t\right) = adt + \ bdW\left(t\right) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

une intégration directe du système d'équation conduit $X\left(t\right) = X_0 + a\left(t - t_0\right) \ + bW\left(t\right).$

2. ***Le mouvement brownien géométrique***

$$\begin{cases} dX\left(t\right) = aX\left(t\right)dt + \ bX\left(t\right)dW\left(t\right) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

On calcule la différentielle stochastique $d\left(\ln\left(X\left(t\right)\right)\right)$ *par la formule d'Itô, soit* $d\left(\ln\left(X\left(t\right)\right)\right) = \left(a - \frac{1}{2}b^2\right)dt + bdW\left(t\right)$. *En faisant une intégration directe, on trouve*

$$\ln\left(X\left(t\right)\right) = \ln\left(X_0\ \right) + \left(a - \frac{1}{2}b^2\right)\left(t - t_0\right) + bW\left(t\right)$$

i.e., $X\left(t\right) = X_0\ \exp\left\{\left(a - \frac{1}{2}b^2\right)\left(t - t_0\right) + bW\left(t\right)\right\}$. *Ce processus est caractérisé par des accroissements indépendants et multiplicatifs, et définit comme une fonction de* MB

$$X\left(t\right) = X_0\ \exp\left\{\left(a - \frac{1}{2}b^2\right)\left(t - t_0\right) + bW\left(t\right)\right\}, \quad t > 0$$

avec $X\left(t\right) = X_0, X_0 \in \mathbb{R}$, *et* $b > 0$ *et* a *est une constante.*

3. ***Le processus de Oinstein-Uhlenbeck (* OU*)***

$$\begin{cases} dX\left(t\right) = \left(a - bX\left(t\right)\right)dt + cdW\left(t\right) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

On considère le facteur $\phi = \exp\left\{bt\right\}$, *alors* $d\left(\phi\left(X\left(t\right)\right)\right) = \phi\left(bX\left(t\right) + dX\left(t\right)\right) = \phi\left(at + cdW\left(t\right)\right)$ *d'où*

$$X\left(t\right) = \frac{a}{b}\exp\left\{bt_0\right\} + X_0\exp\left\{-b\left(t - t_0\right)\right\} + c\int_{t_0}^{t}\exp\left\{-b\left(t - s\right)\right\}dW\left(s\right).$$

Exemples 3.3 *Soit le système d'équations suivantes*

$$\begin{cases} dX\left(t\right) = dt + X\left(t\right)dW\left(t\right). \\ X(0) = 0. \end{cases}$$

alors $X(t) = t + \int_0^t X(s)\, dW(s)$ *.Sachant que l'espérence* $E(X(t)) = t$ *et en utilisant la formule de Itô pour* $F(t, X) = X$, *on trouve que*

$$d(X(t))^2 = \left[2X(t) + (X(t))^2\right] dt + 2(X(t))^2\, dW(t).$$

Propriétés 3.1 *:*

1. Soit $h(t) \in L^2([0, T])$ une fonction $W = (W(t))_{t\geq 0}$ est un MB et on définit le processus $Y = (Y(t))_{t\geq 0}$

$$Y(t) = \exp\left\{\int_0^t h(s)\, dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t h^2(s)\, ds\right\}, t \in [0, T]$$

   et en utilisant la formule de Itô, on obtient $dY(t) = Y(t)\, h(t)\ dW(t)$.

2. Soit $V(s) \in C([0, T]\ )$ avec $0 < T \leq \infty$ et on définit $Z(t)$ par $Z(t) = \exp\left\{\int_0^t V(s)\, dW(s) -\right.$ En faisant recours à la formule de Itô, on trouve que $dZ(t) = Z(t)\, V(t)\, dW(t)$.

3. Si 1. et 2. sont remplies et la condition de Novikov est vérifiée

$$E\left(\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T |V(s)|^2\, ds\right\}\right) < +\infty$$

   alors $(Z(t))_{t\in[0;T]}$ est une martingale et $E(Z(t)) = E(Z(0)) = 1$.

3.1.2 Équations de Kolmogorov

On considère l'E.D.S définie par

$$dX(t) = a(t, X(t))\, dt + b(t, X(t))\, dW(t) \tag{3.2}$$

et en supposant que les fonctions a et b satisfont les conditions de l'existence et de l'unicité de la solution et pour $s \leq t \leq T$, on note par $X(t, x)$ la solution de (3.2) qui vérifie la condition initiale $X(s, s, x) = x$ p.s. (où $x \in \mathbb{R}$).

Remarque 3.3 *Si les coefficients* a *et* b *satisfont les conditions de l'existence et de l'unicité de la solution et si* $f(t, x)$ *est continue et vérifiant* $|f(t, x)| \leq k(1 + |x|^m)$ *où* $k, m \in \mathbb{R}^+$, *alors*

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_h^{t+h} E[f(s, X(s, t, x))]\, ds = f(t, x),\ \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_{t-h}^{h} E[f(s, X(s, t, x))]\, ds = f(t, x).$$

Lemme 3.1 *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ où $f\in C^2$. On suppose qu'il existe $c>0$ et $m>0$ tel que*

$$|f(x)|+|f'(x)|+|f''(x)|\leq c\left(1+|x|^m\right),\qquad x\in\mathbb{R}.$$

Soient $a(t,x)\,, b(t,x)$ satisfont les conditions de l'existences et de l'unicité de la solution, alors

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\left(E\left(f\left(X\left(t,t-h,x\right)\right)\right)-f\left(x\right)\right)=a\left(t,x\right)f'\left(x\right)+\frac{1}{2}b^2\left(t,x\right)f''\left(x\right).$$

Preuve. 'utilisation de la formule de Itô, on peut écrire

$$\begin{aligned} f\left(u\left(t,t-h,x\right)\right)-f\left(x\right) &= \int_{t-h}^{t} a\left(s,u\left(s,t-h,x\right)\right)f'\left(u\left(s,t-h,x\right)\right)ds \\ &\quad+\int_{t-h}^{t}\frac{1}{2}b^2\left(s,u\left(s,t-h,x\right)\right)f''\left(u\left(s,t-h,x\right)\right)ds \\ &\quad+\int_{t-h}^{t} b\left(s,u\left(s,t-h,x\right)\right)f'\left(u\left(s,t-h,x\right)\right)dW(s). \end{aligned}$$

avec l'utilisation de l'espérance mathématique, on trouve

$$\begin{aligned} &E\left[f\left(u\left(t,t-h,x\right)\right)\right]-f\left(x\right) \\ =\; &E\left[\int_{t-h}^{t} a\left(s,u\left(s,t-h,x\right)\right)f'\left(u\left(s,t-h,x\right)\right)ds\right] \\ &+\int_{t-h}^{t}\frac{1}{2}b^2\left(s,u\left(s,t-h,x\right)\right)f''\left(u\left(s,t-h,x\right)\right)ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h}\left(E\left[f\left(u\left(t,t-h,x\right)\right)\right]-f\left(x\right)\right) \\ =\; &\frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} E\left[a\left(s,u\left(s,t-h,x\right)\right)f'\left(u\left(s,t-h,x\right)\right)\right]ds \\ &+\int_{t-h}^{t} E\left[\frac{1}{2}b^2\left(s,u\left(s,t-h,x\right)\right)f''\left(u\left(s,t-h,x\right)\right)ds\right]. \end{aligned}$$

■

Théorème 3.2 *Si $(X(t))_{t\in[0,T]}$ est un processus de diffusion de coefficient de dérivé $a(t,x)$ et de coefficient de diffusion $c(t,x)$, tels que*

1. *$a(t,x)$ est continu et $|a(t,x)| \leq k(1+|x|)$ où k est une constante positive.*

2. *$c(t,x)$ est continu et ses dérivées $\frac{\partial}{\partial t}c(t,x)$, $\frac{\partial}{\partial x}c(t,x)$ sont simultanément continues et bornées avec $\frac{1}{c(t,\ x)}$ est aussi borné.*

3. *s'il existe une fonction $\psi(x)$ positive indépendante de t et que*

$$\psi(x) > 1+|x| \quad , \sup_{0\leq t\ \leq T} E[\psi(u(t))] < +\infty$$

avec

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega (y-x)\,p(t,x,t+h,dy)\right| + \left|\int_\Omega (y-x)^2 P(t,x,t+h,dy)\right| &\leq \psi(x)\,h\\ \int_\Omega \left(|y|+y^2\right) P(t,x,t+h,dy) &\leq \psi(x)\end{aligned}$$

alors, il existe un mouvement brownien $W(t)$, tel que : $X(t)$ satisfait l'E.D.S suivante

$$dX(t) = a(t,X(t))\,dt + \sqrt{c(t,X(t))}dW(t).$$

Preuve. Voir [6]. ∎

3.2 Stabilité de solutions d'une E.D.S

On considère l'équation différentielle stochastique suivante

$$d\underline{X}(t) = a(\underline{X}(t))\,dt + \ b(\underline{X}(t))\,d\underline{W}(t).$$

et on suppose que $b(\underline{x}) \neq \underline{0}$ pour tout $\underline{x} \in \overline{\Omega}$ (où $\overline{\Omega}$ est un compacte de $\mathbb{R}^m$).

Théorème 3.3 *On considère le cas où le point $\underline{0}$ est un point d'équilibre pour b. On suppose $\underline{a}(\underline{0}) = \underline{b}(\underline{0}) = \underline{0}$, alors l'E.D.S*

$$\begin{cases} d\underline{X}(t) = \underline{a}(t,\underline{X}(t))\,dt + \ b(t,\underline{X}(t))\,d\underline{W}(t) & t > t_0\\ \underline{X}(t_0) = \underline{c} \end{cases} \tag{3.3}$$

satisfait :

1. les conditions de l'existence et l'unicité de la solution sur $[t_0, +\infty[$.

2. $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont continues.

3. $\underline{c} \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur constant.

alors il existe une solution unique $\underline{X}(t, t_0, \underline{c})$ qui est le processus de diffusion de Markov à coefficient de dérive $\underline{a}$ et de matrice de diffusion $(bb\prime)$ avec $\underline{c}$ est un vecteur constant.

Théorème 3.4 *:*

1. Le point $\underline{0}$ est stable d'équilibre stochastiquement pour (3.3) si

$$\lim_{\underline{c}\to\underline{0}} P\left(\sup_{t_0\leq t\leq+\infty} |X(t, t_{0,}\underline{c})| \geq \varepsilon\right) = 0 \qquad , \forall\varepsilon > 0$$

2. Le point $\underline{0}$ est un point de stabilité asymptotique et stochastiquement si

$$\begin{cases} \underline{0} \text{ est un point de stabilité stochastique.} \\ P\left(\lim_{t\longrightarrow+\infty} X(t, t_{0,}\underline{c}) = \underline{0}\right) = 1 \quad , \forall\underline{c} \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

Preuve. Voir ([4]) . ■

3.3 Exemples

1. L'équation déffirentielle stochastique $dX(t) = \frac{-1}{4}X^3(t)\,dt + \frac{1}{2}X^2(t)\,dW(t)$ où $X(0) = \frac{1}{2}$ est une équation de coefficients non linéaires.

2. " **Stabilité asymptotiques du point** 0 **pour l'E.D.S** " Considérons l'E D.S. linéaire de dimension *1* suivante

$$\begin{cases} dX(t) = aX(t)\,dt + \; bX(t)\,dW(t) \\ X(0) = X_0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Le système (3.4) possède une solution donnée par

$$X(t) = X_0 \exp\left\{\left(a - \frac{b^2}{2}\right)t + bW(t)\right\}.$$

D'après la loi forte des grands nombres, on peut vérifier que

$$\frac{W(t)}{t} \longrightarrow 0 \;\; p.s \;\; \text{quand} \;\; t \longrightarrow +\infty.$$

et on a

$$\begin{cases} X(t) \longrightarrow 0 \;\; p.s \quad \text{si } a - \frac{b^2}{2} < 0. \\ X(t) \longrightarrow +\infty \;\; p.s \;\; \text{si } a - \frac{b^2}{2} > 0. \end{cases}$$

Si $a = \frac{b^2}{2}$, alors

$$X(t) = X_0 exp\{bW(t)\} \text{ et en plus } P\left(\lim_{t\longrightarrow+\infty} \sup X(t) = +\infty\right) = 1.$$

3. On considère la fonction $v(x) = |x|^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+$, alors

$$L[v](x) = \left(a + \frac{1}{2}b^2(\alpha - 1)\right)\alpha |x|^\alpha$$

Si $a - \frac{b^2}{2} < 0$ on peut choisir $0 < \alpha < 1 - \frac{2a}{b^2}$ pour obtenir la fonction v de Lyapunov avec

$$L[v](x) \leq -kv(x)$$

pour $k > 0$, cela confirme la stabilité asymptotique globale du point 0 pour (3.4).

Exemples 3.4 *"**Solution exacte**" Considérons l'E.D.S., suivante*

$$dX(t) = -\alpha X(t)\,dt + \sigma dW(t)$$

$X(0) = X_0$ avec α, σ et X_0 sont des constantes. Soit $F(t, X) = X(t)\exp\{\alpha t\}$ et en utilisant la formule de Itô, on obtient

$$\begin{aligned} d(X(t)\exp\{\alpha t\}) &= [\alpha X(t)\exp\{\alpha t\} - \alpha X(t)\exp\{\alpha t\} + \sigma\exp\{\alpha t\}\,dW(t)] \\ X(t)\exp\{\alpha t\} - X(0) &= \int_0^t \sigma\exp\{\alpha s\}\,dW(s) \end{aligned}$$

$$X(t)\exp\{\alpha t\} - X(0) = \int_0^t \sigma\exp\{\alpha s\}\,dW(s)$$

sachant que la solution exacte est donnée par

$$X(t) = X(0)\exp\{-\alpha s\} + \exp\{-\alpha t\}\int_0^t \sigma\exp\{\alpha s\}\,dW(s).$$

Deuxième partie

VERS LES PROCESSUS COGARCH

Chapitre 4

Les processus $COGARCH$

Dans ce chapitre, une classe très importante de modèles conditionnellement hétéroscédastiques et plus précisément la classe des modèles $GARCH(p,q)$ à temp continu, est introduite. Les modèles $ARCH$ (autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques) ont été présentés pour la première fois par Engle (1982) et ensuite généralisés ($ARCH$ généralisés) par Bollerslev (1986). Ces modèles ont essentiellement trouvé leurs applications en finance mathématique et en économétrie. Le processus $COGARCH(1,1)$ est principalement dû aux chercheurs Klüppelberg, Lindner et Maller. Sa construction est explicitement basée sur la prise en compte de la limite de la représentation du processus $COGARCH(1,1)$ en temps discret pour obtenir celui du cas continu. Dans le présent travail, nous suiverons la proche décrite en vue de construire un système E.D.S gouvernés par les processus de Lévy.

Dans ce chapitre, le travail est divisé en deux étapes différentes :

1. L'étude du $COGARCH$ à coefficients constants.
2. D'autre part, pour les $COGARCH$ à coefficients variables.

Description générale et étapes de la démarche :

Diverses tentatives ont été faites pour capturer les caractéristiques des séries financières en utilisant les modèles à temps continu. L'intérêt dans les modèles à temps continu s'applique à partir de leurs utilisations dans la modélisation des données irrégulièrement espacées et leur utilisation dans des applications financières. Parmi les tentatives utilisées, on peut citer l'approche de diffusion $GARCH$ de Nelson. Bien que le processus $GARCH$ est gouverné par une suite de processus de bruit unique, dans ce cas, la limite de diffusion est entraînée par deux mouvements browniens indépendants $(W^1(t))$ et $(W^2(t))$. Par exemple, la limite de diffusion $GARCH(1,1)$ satisfait

$$\begin{cases} dG(t) = \sigma(t)\, dW^1(t), \\ d\sigma^2(t) = \theta\left(\gamma - \sigma^2(t)\right) dt + \rho\sigma^2(t)\, dW^2(t). \end{cases} \tag{4.1}$$

Le comportement de cette limite de diffusion est assez différente de celui du processus $GARCH$ puisque le processus de la volatilité $(\sigma^2(t))_{t\geq 0}$ évolue indépendamment du processus $W^1(t)$ dans (4.1).

Une autre approche consiste en utilisant le modèle à volatilité stochastique des Barndorff-Nielsen et Shephard dans laquelle le processus de volatilité σ^2 est un processus Ornstein-Uhlenbeck (O-U) conduisant par le processus de Lévy croissant et G satisfait l'équation $dG(t) = \mu dt + \sigma(t)\, dW(t)$, où W est un mouvement brownien indépendant du processus de Lévy.

La fonction d'autocorrélation du processus de volatilité de Lévy-driven O-U a la forme $\rho(h) = \exp(-c|h|)$ pour $c > 0$, mais cette classe de processus peut être prolongée en spécifiant que la volatilité est une superposition de plusieurs processus O-U. Comme dans la limite de diffusion de Nelson, le processus G est conduit par deux bruit blanc indépendants et le processus de volatilité σ^2 évolue indépendamment du processus de W dans l'équation pour G.

Le processus $GARCH(1,1)$ en temps continu, noté $COGARCH(1,1)$, est récemment formulé par Klüppelberg, Lindner et Maller. Sa construction est fondée en tenant en compte la représentation explicite du processus $GARCH(1,1)$ pour obtenir un processus continu. Comme aucune telle représentation s'existe pour un ordre supérieur du processus $GARCH$ en temps discret, une approche différente est nécessaire pour construire un processus d'ordre supérieur à temps continu.

Dans ce mémoire de magister, nous voulons atteindre ce but en spécifiant un système d'équations différentielles stochastiques de Lévy-driven pour le processus G et σ^2. Particulièrement, si le processus de volatilité σ^2 est strictement stationnaire, nous faisons recours au processus G qui est le processus $COGARCH(p,q)$. Dans le cas particulier $p = q = 1$, nous obtenons le processus de Klüppelberg, Lindner et Maller ($COGARCH(1,1)$). En général, nous acquérons une classe de processus G avec des accroissements non corrélés dans lesquelles la volatilité correspondante et le processus des acroissements présentent un large éventail de fonctions d'autocorrélation. Le processus de volatilité a la fonction d'autocorrélation d'un processus $ARMA$ en temps continu. Pour atteindre le but voulu, nous avons exécuté les étapes suivantes :

- Au premier lieu, nous spécifions un système d'équations différentielles stochastiques pour le processus G qui est un processus $COGARCH(p,q)$ et du processus de volatilité associée, noté V. Ceci est directement motivée par la structure de processus $GARCH(p,q)$ en temps discret correspondant. Nous montrent alors que la solution de ces équations coïncide avec celle de la $COGARCH(1,1)$ si $p = q = 1$.

- Au second lieu, nous nous s'interessons à la structure d'autocorrélation du processus de volatilité stationnaire. Tout comme le processus de volitilité du processus $GARCH$ en temps discret a la fonction d'autocorrélation d'un processus $ARMA$, le processus de volatilité $COGARCH$ a aussi la fonction d'autocorrélation d'un processus de $CARMA$.

- A la fin de cette section, nous avons traité les conditions garantissant la positivité de la volatilité, tandis que la structure d'autocorrélation des carrées des accroissements du processus lui-même est obtenu $COGARCH$ dans la section ultérieure

4.1 Les processus $COGARCH\,(1,1)$

Définition 4.1 *: La construction du processus* $COGARCH(1,1)$ *en raison du processus de Klüppelberg, Lindner et Maller s'initie à partir des équations définies du processus* $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *dans le processus* $GARCH(1,1)$ *à temps discrêt*

$$\begin{cases} \xi_n = \varepsilon_n \sigma_n \\ \sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \xi_{n-1}^2 + \beta_1 \sigma_{n-1}^2 \qquad , n \in \mathbb{N}_0 \end{cases} \tag{4.2}$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$ *sont des constantes strictement positives et* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$*une suite de v.a., i.i.d., de moyenne* 0 *et de variance* 1. *En itérant l'équation* (4.2), *on obtient*

$$\sigma_n^2 = \left(\sigma_0^2 + \alpha_0 \int_0^n \exp\left[-\sum_{j=0}^{\lfloor s \rfloor} \log(\beta_1 + \alpha_1 \varepsilon_j^2) \right] ds \right) \times \exp\left[(\sum_{j=0}^{n-1} \log\left(\beta_1 + \alpha_1 \varepsilon_j^2\right) \right]. \tag{4.3}$$

où $\lfloor s \rfloor$ *est la partie entière de* $s \in \mathbb{R}$. *L'équation du processus* $COGARCH\,(1,1)$ *est obtenue en substituant le b.b (bruit blanc)* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *par les sauts* $\Delta L\,(t) = L\,(t) - L\,(t^-)$, $t \geq 0$ *du processus de Lévy. Plus précisément, on observe que*

$$\sum_{j=0}^{n-1} \log\left(\beta_1 + \alpha_1 \varepsilon_j^2\right) = n \log \beta_1 + \sum_{j=0}^{n-1} \log\left(1 + \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) \varepsilon_j^2\right)$$

pour $\beta_1 > 0$ *et si on remplace* $(-\log \beta_1)$ *par* η *et* α_0 *par* β *et* α_1 *par* φ, *on trouve*

$$\begin{cases} dG\,(t) \quad = \sigma\,(t)\, dL\,(t) \\ G\,(0) = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

où

$$\sigma^2\,(t) = \left(\sigma^2\,(0) + \beta \int_0^t e^{X(s)} ds \right) e^{-X\left(t^-\right)} \qquad , t \geq 0 \tag{4.5}$$

avec

$$X\left(t^{-}\right)=\eta t-\sum_{0<\ s\leq\ t}\log\left(1+\varphi\left(\Delta L\left(s\right)\right)^{2}\right)$$

tel que $\beta>0$, $\alpha_1\geq 0$ *et* $\eta>0$ *avec l'indépendance* $\sigma^2(0)$ *de* $(L(t))_{t\geq 0}$. *Le processus* $COGARCH(1,1)$ *est la solution de l'équation* $G(t)$. *En ajoutant des conditions supplémentaires sur les coefficients de distribution de* $\sigma^2(0)$, *le processus de volatilité* $\sigma^2(t)$ *est strictement stationnaire et* $G(t)$ *est à accroissements stationnaires. En outre, plusieurs caractéristiques du processus* $COGARCH(1,1)$ *peuvent être obtenues dans un contexte plus général.*

Remarque 4.1 *: Un processus* $COGARCH(1,1)$ *est un processus* $G=(G(t))_{t\geq 0}$ *solution de l'E.D.S suivante*

$$\begin{cases} dG(t) & =\sigma(t)\,dL(t) \\ d\sigma^{2}(t^{+}) & =(\beta-\eta\sigma^{2}(t))\,dt+\varphi\sigma^{2}(t)\,d\left[L,L\right]^{(d)}(t) \end{cases} \tag{4.6}$$

où $\beta,\eta>0$, $\varphi\geq 0$ *et* $[L,L]^{(d)}(t)=\sum\limits_{0<s\ \leq t}(\Delta L(s))^2$ *est la partie discrète de la variation quadratique du processus* $[L,L]$ *celui de Lévy* L. σ, *on peut assurer que* L *est càdlàg* [1] *en notant par* ν_L *la mesure non triviale du processus de Lévy et par* $\tau_L^2\geq 0$ *la variance du mouvement brownien de* L. *La quantité* $\sigma^2(t)$ *est appelée la volatilité instantanée. On remarque que les sauts de* G *sont au même temps avec ceux du processus de Lévy* L. *Cette dernière a la taille suivante* $\Delta G(t)=\sigma(t)\,\Delta L(t)$, *telle que* $\Delta L(t)$ *est indépendant de* $\sigma(t^-)=\sigma(t)$. *La solution de l'équation* $d\sigma^2(t^+)=(\beta-\eta\sigma^2(t))\,dt+\varphi\sigma^2(t)\,d[L,L]^{(d)}(t)$ *est obtenue par l'utilisation du processus auxiliaire de Lévy* $X=(X(t))_{t\geq 0}$ *défini par*

$$X(t)=\eta t-\sum_{0<\ s\leq\ t}\log\left(1+\varphi\left(\Delta L\left(s\right)\right)^{2}\right) \tag{4.7}$$

4.2 La représentation des processus $COGARCH\,(p,q)$

Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$une suite i.i.d. des v.a. et soit $p,q\geq 0$, on définit le processus $GARCH\,(p,q)$ $(\xi_n)_{n\ \epsilon\mathbb{N}_0}$ par

$$\begin{cases} \xi_n=\varepsilon_n\sigma_n \\ \sigma_n^2=\alpha_0+\alpha_1\xi_{n-1}^2+...+\alpha_p\xi_{n-p}^2+\beta_1\sigma_{n-1}^2+...+\beta_q\sigma_{n-q}^2, \qquad n\geq s \end{cases} \tag{4.8}$$

où $s=\max(p,q)$, et $\sigma_0^2,...,\sigma_{s-1}^2$ sont i.i.d. et indépendant de la suite $(\varepsilon_n)_{n\geq s}$. L'équations (4.8) montre que le processus de volatilité $(\sigma_n^2)_{n\epsilon\mathbb{N}_0}$apparait comme un processus

[1] Le processus $(L(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ est continue à droite limite à gauche (càdlàg) si : à des trajectoires continues à droite limite à gauche p.s.

$ARMA\,(q,p-1)$. Dans ce cas, on définit le processus $(G\,(t))_{t\geq 0}$ à temps continu d'ordre (p,q) par

$$\begin{cases} dG\,(t) & = \sigma\,(t)\,dL\,(t)\ \ ,\ \ t>0 \\ G\,(0)=0 \end{cases}$$

où $(\sigma^2\,(t))_{t\geq 0}$ est un processus $CARMA(q,p-1)$.

La représentation espace d'état du processus $CARMA$ gouverné par un processus de Lévy

Soit $(\Psi\,(t))_{t\geq 0}$ un processus $ARMA(p,q)$ du second ordre à temps continu gouverné par un processus de Lévy $(L\,(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$, où p et q sont des nombres entiers non négatifs tels que $q<p$, est défini à travers la représentation d'espace d'état d'équation formelle :

$$a(D)\Psi\,(t)=\sigma b(D)DL(t),\quad t\geq 0.$$

où σ est un paramètre d'échèlle scalaire strictement positif. D désigne l'opérateur de la différentiation par rapport à t, $L=(L\,(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ tel que

$$\begin{aligned} a(z) &= z^p+a_1z^{p-1}+\cdots+a_p; \\ b(z) &= b_0+b_1z^1+\cdots+b_{p-1}z^{p-1}. \end{aligned}$$

Les coefficients b_j satisfairent les conditions $b_q=1$ et $b_j=0$ pour $j>q$. En raison du paramètre σ il n'y a clairement aucune perte de généralité en supposant que $L=(L\,(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$où $Var(L(1))=1$. Pour éviter des complications triviales ou insignifiantes et facilement éliminées, nous considérons que $a\,(z)$ et $b\,(z)$ n'ont pas de racines commune entre eux.

L' E. D. S. définissant est interprétée par la formulation d'équation d'espace d'état donnée par les équations d'observation et d'état.

Remarque 4.2 *:Kallsen et Vesenmayer montrent que tout processus $COGARCH$ peut être représenter comme une limite en loi d'une suite de processus $GARCH(1,1)$.*

Remarque 4.3 *Les accroissements du processus gouverné au temps discret sont définis par*

$$R_n^{(d)}=\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i^2=\sum_{i=0}^{n-1}\sigma_i^2\varepsilon_i^2 \tag{4.9}$$

et pour obtenir le cas continu, on substitue l'innovation ε_n par les sauts $\Delta\,(L\,(t))$ du processus de Lévy $(L\,(t))_{t\geq 0}$ c.à.d.,

$$R\,(t)=\sum_{0<s\ \leq t}\sigma^2\left(s^-\right)(\Delta L\,(s))^2\,,\quad t>0$$

alors :

1. Si le processus de Lévy $(L(t))_{t\geq 0}$ a une partie gaussienne nulle $[i.e.,\ \tau_L^2 = 0]$, on obtient $R(t)$ comme une covariance quadratique du processus $(G(t))_{t\geq 0}$ donné par

$$R(t) = \sum_{0<s\leq t} \sigma^2\left(s^-\right)(\Delta L(s))^2 = \int_0^t \left(\sigma\left(s^-\right)\right)^2 d[L,L](s) = [G,G](t).$$

2. Si L a une partie gaussienne non nulle alors $\left(\sum_{0<s\leq t} (\Delta L(s))^2 = [L,L]^{(d)}\right)$ est la partie discrete de la covariance quadratique. Dans ce cas, les accroissements du processus gouverné est donné par

$$R(t) = \int_0^t \left(\sigma\left(s^-\right)\right)^2 d\left([L,L]^{(d)}\right)(s) \text{ où } dR(t) = \left(\sigma\left(s^-\right)\right)^2 d\left([L,L]^{(d)}\right)(t)$$

Remarque 4.4 *Dans l'étude qui suit, on précise que le processus de volatilité V (où $V = \sigma^2$) satisfait les équations du processus $CARMA$ gouverné par le processus R définie ci- dessus et lorsque V est p.s. non négative, on définit le processus $G(t)$ par l'équation suivante*

$$\begin{cases} dG(t) = \sqrt{V(t)}dL(t) \\ G(0) = G_0 \end{cases} \tag{4.10}$$

4.3 PREMIÈR ÉTAPE : les processus COGARCH à coefficients constants

4.3.1 La représentation matricielle du $COGARCH(p,q)$

Dans cette partie, on montre une représentation matricielle du processus $COGARCH$ et en se basant sur la matrice associée à la construction espace d'état du processus de volatilité. Si p et q deux entiers, tel que $q \geq p \geq 1$ et $\alpha_0 > 0, \alpha_1, ..., \alpha_p \in \mathbb{R}$, $\beta_1, ..., \beta_q \in \mathbb{R}$ et $\alpha_{p+1} = ... = \alpha_q = 0$. On définit la matrice associée B, les vecteurs $\underline{a}$ et $\underline{e}$ par :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\beta_q & -\beta_{q-1} & -\beta_{q-2} & \cdots & -\beta_1 \end{bmatrix},\ \underline{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{q-1} \\ \alpha_q \end{bmatrix},\ \underline{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

où $B = -\beta_1$ si $q = 1$. Alors si $L = (L(t))_{t\geq 0}$ est le processus de Lévy, le processus de volatilité $(V(t))_{t\geq 0}$(supposé continu à gauche) possédant les paramètres $B, \underline{a}, \alpha_0$, gouverné par le processus de Lévy L, est défini par

$$\begin{cases} V(t) = \alpha_0 + \underline{a}'\underline{Y}(t^-), & t > 0 \\ V(0) = \alpha_0 + \underline{a}'\underline{Y}(0) \end{cases} \tag{4.11}$$

où le processus d'état $(\underline{Y}(t))_{t\geq 0}$ est la solution unique et càdlàg de l'E.D.S suivante

$$d\underline{Y}(t) = B\underline{Y}\left(t^-\right) dt + \underline{e}(\alpha_0 + \underline{a}'\underline{Y}\left(t^-\right))d\left([L, L]^{(d)}\right)(t), \ t > 0 \tag{4.12}$$

avec une valeur initiale $\underline{Y}(0)$ indépendante du processus de Lévy $(L(t))_{t\geq 0}$. Si le processus de volatilité $(V(t))_{t\geq 0}$ est strictement stationnaire et p.s. non négatif, on dit que $G = (G(t))_{t\geq 0}$ dans (4.10) est un processus $COGARCH(p, q)$ avec les paramètres B, $\underline{a}$, α_0 et gouverné par le processus de Lévy L.

Remarque 4.5 *: Lorsque la solution de* (4.12) *est unique pour tout* $\underline{Y}(0)$ *vecteur de départ aléatoire suit les théorèmes standards sur les équations différentielles stochastiques les intégrales stochastiques sont interprétés par rapport à la filtration* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}(t))_{t\ \geq\ 0}$, $(L(t))_{t\ \geq\ 0}$ *est adapté et* $\underline{Y}(0)$ *est* $\mathcal{F}(0)$*-mesurable.*

Théorème 4.1 *Soit l'E.D.S suivante*

$$\begin{cases} d\underline{Y}(t) = B\underline{Y}(t)dt + \underline{b}(t) \\ \underline{Y}(0) = \underline{Y}_0 \end{cases} \tag{4.13}$$

où B *est une matrice constante, et*

$$\underline{b}(t) = \underline{e}(\alpha_0 + \underline{a}'\underline{Y}\left(t^-\right))d\left([L, L]^{(d)}\right)(t).$$

le système (4.13) *admet donc une solution sous la forme*

$$\underline{Y}(t) = e^{(t-t_0)B}\underline{Y}_0 + \int_0^t e^{(t-s)B}\underline{b}(s)ds$$

Pour $\underline{Y}_0 = \underline{0}$ *, alors la solution est donnée par* $\underline{Y}(t) = \int_0^t e^{(t-s)B}\underline{b}(s)ds.$

Par la suite, on montre que les valeurs propres de la matrice B pouvant assurer la stabilité des solutions de l'E.D.S définie dans (4.13).

Théorème 4.2 *Supposons que la matrice* B *est constante, alors :*

1. Si la matrice B ayant des valeurs propres dont les parties réelles sont positives, alors la solution de (4.13) est instable sur $[0, \infty)$.

2. Les valeurs propres dont leurs parties réelles sont nulles, sont considérées simples et les valeurs propres restantes sont obligatoirement négatives afin d'assurer la stabilité de (4.13) sur $[0, \infty)$.

3. Lorsque les parties réelles des valeurs propres sont négatives de B, la solution de (4.13) est globalement asymptotique stable sur $[0, \infty)$.

Preuve. oir $([15])$. ■

Théorème 4.3 *On suppose que* $p = q = 1$ *et* α_0, α_1, $B = -\beta_1$ *sont strictement positifs, les processus* $(G(t))_{t\geq 0}$ *et* $(V(t))_{t\geq 0}$ *définis dans* (4.10) *sont respectivement* $(G(t))_{t\geq 0}$ *et* $(\sigma^2(t))_{t\geq 0}$ *précédemment définis dans* (4.6) *avec le changement paramtrique :* $\beta = \alpha_0\beta_1$, $\varphi = \alpha_1 \exp(-\beta_1)$, $\eta = \beta_1$.

Preuve. our (4.12) et $V(t^+) = \alpha_0 + \alpha_1 \underline{Y}(t)$, alors

$$\begin{aligned}
dV\left(t^+\right) &= \alpha_1 d\underline{Y}(t) \\
&= -\beta_1\alpha_1\underline{Y}(t)\,dt + \alpha_1 V\left(t^+\right) d\left([L,L]^{(d)}\right)(t) \\
&= -\beta_1\alpha_1\frac{V(t)-\alpha_0}{\alpha_1}dt + \alpha_1 V\left(t^+\right) d\left([L,L]^{(d)}\right)(t) \\
&= \left(-\beta_1 V(t) + \alpha_0\beta_1\right) dt + \alpha_1 V\left(t^+\right) d\left([L,L]^{(d)}\right)(t)
\end{aligned}$$

alors

$$V\left(t^+\right) = \alpha_0\beta_1 t - \beta_1\int_0^t V(s)\,ds + \alpha_1 \sum_{0<s\leq t} V(s)\left(\Delta L(s)\right)^2 + V(0).$$

On constate que $\sigma^2(t)$ défini dans (4.6) vérifie cette équation mettant $\beta = \alpha_0\beta_1$, $\varphi = \alpha_1 \exp(-\beta_1)$, $\eta = \beta_1$. ■

Définition 4.2 *:*

1. Soit $\underline{a}$ et B les paramètres du processus *COGARCH*, alors leurs polynômes caractéristiques sont donnés par

$$a(z) = \alpha_1 + \alpha_2 z + ... + \alpha_p z^{p-1} \qquad , z \in \mathbb{C}$$

$$b(z) = z^q + \beta_1 z^{q-1} + ... + \beta_q \qquad , z \in \mathbb{C}$$

2. Les valeurs propres de la matrice B sont exactement les racines de b qui On note par $\lambda_1, ..., \lambda_q$ sont classées suivant l'ordre décroissant de leur partie réelle i.e.,

$$R(\lambda_q) \leq R(\lambda_{q-1}) \leq ... \leq R(\lambda_1)$$

où $R(\lambda_i)$ est la partie réelle de λ_i. Dans la suite, on remplace $R(\lambda_1)$ par $\lambda = \lambda(B)$ où B désigne l'opérateur de retard.

Notation 4.1 *: Pour $x \in \mathbb{R}$, nous substituons $log(max\{1, x\})$ par $log^+(x)$. La transposée d'un vecteur colonne $c \in \mathbb{C}^q$ est notée par le vecteur ligne c'. Si $\|.\|$ est une norme vectorielle dans $\mathbb{C}^q$ alors la norme matricielle naturelle de la matrice C d'ordre $(q \times q)$ est definie par $\|C\| = sup_{c \in \mathbb{C}^q \setminus \{0\}} \frac{\|C_c\|}{\|c\|}$. De même, pour $r \in [1, \infty]$, nous désignons par $\|.\|_r$, la norme du vecteur dans L^r.*

4.3.2 Les conditions de stationnarité des processus $COGARCH$

Nous allons chercher dans quelles conditions il existe des processus $COGARCH$ stationnaires. Nous examinons tout d'abord le cas du modèle $COGARCH(1, 1)$.

Le processus $COGARCH\,(1, 1)$

On suppose que le processus de volatilité $(V(t))_{t \geq 0}$ est strictement stationnaire. Donc, la condition (4.14) établie dans le théorème 4.5 est nécessaire et suffisante pour que $COGARCH(1, 1)$ est stationnaire.

Le processus $COGARCH$

On suppose que le processus de volatilité $(V(t))_{t \geq 0}$ est strictement stationnaire. L'unique condition (4.14) est suffisante pour que le processus $COGARCH$ soit stationnaire.

Remarque 4.6 *:*

1. Pour les valeurs de p, q assez grandes, généralement on suppose que la matrice B est diagonalisable. Comme les vecteurs propres correspondent aux valeurs propres λ_i de B sont des multiples des constants de $\left[1, \lambda_i, \lambda_i^2, ..., \lambda_i^{q-1}\right]'$, les valeurs propres de la matrice B sont distinctes.

2. La matrice B est une matrice diagonalisable s'il existe une matrice S telle que la matrice $S^{-1}BS$ est une matrice diagonale.

Par exemple, on peut choisir

$$S=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{q-2} & \lambda_2^{q-2} & \lambda_3^{q-2} & \cdots & \lambda_q^{q-2} \\ \lambda_1^{q-1} & \lambda_2^{q-1} & \lambda_3^{q-1} & \cdots & \lambda_q^{q-1} \end{bmatrix}$$

Ce choix particulier conduit à $S^{-1}BS = diag\left(\lambda_1, ..., \lambda_q\right)$.

Les conditions de stationnarité de processus de volatilité et de processus d'état

Dans cette section, nous considérons les conditions dans lesquelles le processus de volatilité $(V\left(t\right))_{t\,\geq\,0}$ spécifie dans la définition 4.1 est strictement stationnaire. Les paramètres B**,** $\underline{a}$ et α_0 et le processus de l'État $(Y\left(t\right))_{t\,\geq\,0}$ sont illustrés précident. La condition (4.14) établie dans le théorème 4.5 est nécessaire et suffisante de stationnarité dans le cas particulier $p = q = 1$.

Dans ce cas, le théorème suivant est très important parce qu'il offre une condition assurant la stationnarité stricte des processus espace d'état et des volatilités.

Théorème 4.4 *Soit* $\left(\underline{Y}\left(t\right)\right)_{t\geq 0}$ *le processus espace d'état associé au processus* $COGARCH\left(p,q\right)$ *avec les paramètres* B**,** $\underline{a}$ *et* α_0*. Suppose que toutes les valeurs propres de* B *sont distinctes. Soit* L *un processus de Lévy avec une mesure non triviale* ν_L *et on suppose qu'il existe un* $r \in [1,\infty]$ *tel que*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \log\left(1+\left\|S^{-1}\underline{e}\ \underline{a}'S\right\|_r\ y^2\right) d\nu_L\left(y\right) < -\lambda = -\lambda\left(B\right) \tag{4.14}$$

où la matrice S *vérifie que* $S^{-1}BS$ *est diagonale. Alors* $\underline{Y}\left(t\right)$ *converge en distribution vers une variable aléatoire finie* $\underline{Y}_\infty$ *quand* $t \longrightarrow \infty$*. Il s'ensuit que si* $\underline{Y}_0 = \underline{Y}_\infty$**,** *alors* $(\underline{Y}\left(t\right))_{t\geq 0}$ *et* $(V\left(t\right))_{t\geq 0}$ *sont strictement stationnaire.*

Proposition 4.1 *:*

1. Si $\left(V\left(t\right)\right)_{t\geq 0}$ est un processus de volatilité du processus $COGARCH\left(1,1\right)$ avec les paramètres $B = -\beta_1 < 0$, $\alpha_0 > 0$ et $\alpha_1 > 0$ alors $\|S^{-1}\underline{e}\ \underline{a}'S\|_r = \alpha_1$, la condition (4.14) est nécessaire et suffisante pour l'existence d'un processus de volatilité de $COGARCH\left(1,1\right)$ strictement stationnaire.

2. Pour $q \geq 2$, la quantité $\|S^{-1}\underline{e}\ \underline{a}'S\|_r$ dépend de S et r. On observe qu'il est nécessaire de trouver les matrices S et les nombres réels r, pour que l'équation (4.14) soit vérifiée.

Preuve. oir ([5]) . ■

4.3.3 Étude d'espace d'état

La démonstration du théorème 4.5 est un usage intensif de la théorie générale des équations de récurrence multivariées aléatoires. Le vecteur d'état du processus $COGARCH$ satisfait telle équation de réccurence à plusieurs variables aléatoires, comme il s'est indiqué dans le théorème suivant.

Théorème 4.5 *Soit $(\underline{Y}(t))_{t\geq 0}$ le processus espace d'état du processus $COGARCH\,(p,q)$ avec des paramètres $B, \underline{a}$ et α_0 et gouverné par le processus de Lévy L, alors il existe une famille $\left(J_{s,t},\ \underline{K}_{s,t}\right)_{t\geq 0}$ de matrices aléatoires $(J_{s,t})$ d'ordre $(q\times q)$ ainsi de vecteurs aléatoires $\underline{K}_{s,t}$ dans $\mathbb{R}^q$, tels que*

$$\underline{Y}(t) = J_{s,t}\ \underline{Y}(s) + \underline{K}_{s,t} \quad , \ 0 \leq s \leq t \tag{4.15}$$

De plus, la distribution de $\left(J_{s,t}, \underline{K}_{s,t}\right)$ dépend que de $(t-s)$, $\left(J_{s_1,t_1}, \underline{K}_{s_1,t_1}\right)$ et $\left(J_{s_2,t_2}, \underline{K}_{s_2,t_2}\right)$ sont independants pour $0 \leq s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2$; et pour $0 \leq s \leq u \leq t$:

$$J_{s,t} = J_{u,t}J_{s,u} \tag{4.16}$$

Si, de plus, la condition du théorème (4.4) est vérifiée, alors la distribution de vecteur $\underline{Y}_\infty$,et pour tout $h > 0$, est l'unique solution de l'équation de point fixe aléatoire :

$$\underline{Y}_\infty = J_{0,h}\underline{Y}_\infty + \ \underline{K}_{0,h} \tag{4.17}$$

avec $\underline{Y}_\infty$ est indépendant de $\left(J_{0,h}, \underline{K}_{0,h}\right)$.

Preuve. oir([23]) ■

Remarque 4.7 *:*

1. La condition de stationnarité faible du processus espace d'état du processus $COGARCH\,(p,q)$ est l'existence d'une norme $\|.\|$ de vecteur, et $t_0 > 0$ telle que J_{0,t_0} et $\underline{K}_{0,t_0}$ satisfaisont les conditions suivantes

$$E\log\|J_{0,t_0}\| < 0 \quad , \qquad E\log^+\left\|\underline{K}_{0,t_0}\right\| < \infty \tag{4.18}$$

par (4.16) , $E\log\|J_{0,t_0}\|<0$ est équivalente à la condition qu'il y ait une valeur strictement positive du t_1 de telle sorte que l'exposant de Lyapunov de la suite $\left(J_{t_1n},J_{t_1(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$i.i.d., qui est :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n}E\left(\log\left\|J_{t_1(n-1)},t_{1n,\dots},J_{0,t_1}\right\|\right)=\inf_{n\in\mathbb{N}}(\frac{1}{n}E(\log\left\|J_{t_1(n-1)},t_{1n,\dots},J_{0,t_1}\right\|). \tag{4.19}$$

(qui est indépendant de la norme spécifique), est strictement négatif. Et si

$$E\log^+\|J_{0,t_1}\|<\infty\ ,\ E\log^+\left\|\underline{K}_{0,t_1}\right\|<\infty. \tag{4.20}$$

alors la négativité stricte de l'exposant de Lyapunov est non suffisante mais aussi nécessaire pour l'existence de solutions stationnaires de ces équations de récurrence aléatoires.

2. La condition du théorème 4.4 conduit aux conditions (4.20) . On définit la norme matricielle comme la norme naturelle par

$$\|A\|_{B,r}=\left\|S^{-1}AS\right\|_r$$

et la mesure correspondante du vecteur par

$$\|\underline{c}\|_{B,r}=\left\|S^{-1}\underline{c}\right\|_r,\quad \underline{c}\in\mathbb{C}^q \tag{4.21}$$

Dans ces conditions, on observe que les conditions du théorème 4.4 sont en général non nécessaires pour la stationnarité du processus d'état.

Les matrices $J_{s,t}$ et les vecteurs $\underline{K}_{s,t}$ sont construit explicitement quand L est le processus composant de Poisson. Dans le théorème suivant, on fait une comparaison entre la stationnarité en distribution de vecteur d'état $\underline{Y}_\infty$ avec celle du vecteur aléatoire $\widetilde{\underline{Y}}$ définie ci-dessous.

Théorème 4.6 *:*

1. Soit $(\underline{Y}(t))_{t\geq0}$ processus espace d'état du celui de $COGARCH(p,q)$ avec les paramètres $B,\underline{a}$ et α_0 et gouverné par le processus de Lévy. On suppose que la mesure ν_L du processus de Lévy est finie et la composante du processus de Poisson s'écrit sous la forme

$$\left([L,L]^{(d)}\right)(t)=\sum_{0<s\leq t}(\Delta L(s))^2=\sum_{i=1}^{N(t)}Z_i$$

où $N(t)$ est le nombre des sauts de L dans l'intervalle $(0,t]$, et Z_i est le carré du i^{eme} saut et on note par T_1 le temps dans lequel le premier saut apparaisse. Soient

$T_j : j = 2, 3, ...$ les temps d'intervalles entre les j^{eme} et $(j-1)^{eme}$ sauts. En plus, soit la paire (T_0, Z_0) est indépendant de $(T_i, Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ayant la même distribution de (T_1, Z_1). Pour tout $i \in \mathbb{N}_0$, soit

$$C_i = (I + Z_i \underline{e}\ \underline{a}')\, e^{T_i B} \quad \text{et} \quad \underline{D}_i = \alpha_0 Z_i \underline{e} \tag{4.22}$$

et $\Gamma_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$ (où $\Gamma_0 = 0$). Alors le processus $(\underline{Y}(\Gamma_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ à temps discret satisfaisant en récurrence l'équation aléatoire

$$\underline{Y}(\Gamma_{n+1}) = C_{n+1}\underline{Y}(\Gamma_n) + \underline{D}_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{4.23}$$

En plus, pour tout $t > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\underline{Y}(t) &= e^{\left(t-\Gamma_{N(t)}\right)B}\left[1_{\{N(t)\neq 0\}}\underline{D}_{N(t)} + \sum_{i=0}^{N(t)-2} C_{N(t)}...C_{N(t)-i}\underline{D}_{N(t)-i-1} + C_{N(t)}...C_1\underline{Y}(0)\right] \\
&\stackrel{d}{=} e^{\left(t-\Gamma_{N(t)}\right)B}\left[1_{\{N(t)\neq 0\}}\underline{D}_1 + \sum_{i=0}^{N(t)-1} C_1...C_i\underline{D}_{i+1} + C_1...C_{N(t)}\underline{Y}(0)\right].
\end{aligned} \tag{4.24}$$

2. Si la condition (4.18) est satisfaite alors la somme infinie $\sum_{i=0}^{\infty} C_1...C_i\underline{D}_{i+1}$ converge absolument p.s. vers le vecteur aléatoire $\widetilde{\underline{Y}}$, tel que $\widetilde{\underline{Y}}$ a une distribution stationnaire de la suite $(\underline{Y}(\Gamma_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$. Le vecteur d'état $\underline{Y}_\infty$ stationnaire satisfait

$$\underline{Y}_\infty \stackrel{d}{=} e^{TB}\widetilde{\underline{Y}}$$

où T indépendante de $(T_i, Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ayant la même distribution de T_1 et $\underline{Y}_\infty$ est la solution unique en distribution de l'équation $\underline{Y}_\infty \stackrel{d}{=} Q\underline{Y}_\infty + \underline{R}$, tel que

$$Q = e^{T_0 B}(I + Z(0)\,\underline{e}\ \underline{a}') \quad \text{et} \quad \underline{R} = \alpha_0 Z(0)\, e^{T_0 B}\underline{e}.$$

où $\underline{Y}_\infty$ indépendant de $(Q, \underline{R})$.

Preuve. .Faisant référence à l'équation (4.12), $\underline{Y}(t)$ satisfait l'équation différentielle $d\underline{Y}(t) = B\underline{Y}(t^-)\,dt$ pour $t \in [\Gamma_n, \Gamma_{n+1}]$, alors que

$$\underline{Y}(t) = e^{B(t-\Gamma_n)}\underline{Y}(\Gamma_n), t \in [\Gamma_n, \Gamma_{n+1}] \ , \ n \in \mathbb{N}_0$$

Au temps Γ_{n+1}, la taille du saut $e(\alpha_0 + \underline{a}'\underline{Y}(\Gamma_{n+1^-})Z_{n+1})$ s'apparaît, alors que

$$\begin{aligned}
\underline{Y}(\Gamma_{n+1}) &= \underline{Y}(\Gamma_{n+1^-}) + \underline{e}(\alpha_0 + \underline{a}'\underline{Y}(\Gamma_{n+1^-}))Z_{n+1} \\
&= (I + Z_{n+1}\underline{ea}')\,\underline{Y}(\Gamma_{n+1^-}) + \alpha_0 Z_{n+1}\underline{e} \\
&= C_{n+1}\underline{Y}(\Gamma_n) + \underline{D}_{n+1},\ n \in \mathbb{N}_0
\end{aligned}$$

Qui est la relation (4.23). La résolution de cette récurrence donne le vecteur d'espace d'état

$$\underline{Y}(\Gamma_n) = \underline{D}_n + \sum_{i=0}^{n-2} C_n ... C_{n-i} \underline{D}_{n-i-1} + C_n ... C_1 \underline{Y}(0), \quad n \in \mathbb{N}$$

La vérification de cette équation nous a permis de démontrer la première égalité de l'équation (4.24) et $\underline{Y}(t) = e^{B(t-N(t))}\underline{Y}(\Gamma(N(t)))$.

Tandis que la deuxième égalité de (4.24) est une conséquence de l'effet de l'élément aléatoire finis $\left(N(t), \ \Gamma(N(t)), \ C_{N(t)}, \underline{D}_{N(t)}, ..., C_1, \underline{D}_1, 0, 0, ...\right)$ ayant la même distribution que $\left(N(t), \ \Gamma(N(t)), \ C_1, \ \underline{D}_1, ..., \ C_{N(t)}, \ \underline{D}_{N(t)}, \ 0, \ 0, ...\right)$, en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et $c \geq 0$, les vecteurs aléatoires $(C(1), \ \underline{D}(1)), ..., (C(n), \ \underline{D}(n))$ sont i.i.d et dépendent de $\{N(t) = n, \Gamma(N(t)) \geq c\}$ uniquement en fonction de termes $\sum\limits_{i=1}^{n} T_i$ et T_{n+1}mais non en fonction des termes ultérieurs $T_i, i = 1, ..., n$.

2. Soit S tel que la matrice $S^{-1}BS = \curlywedge$ est diagonale et la norme du vecteur est $\|\underline{c}\|_{B,r} = \|S^{-1}\underline{c}\|_r$ donnée par la formule (4.21) alors la norme matricielle associée est $\|A\|_{B,r} = \|S^{-1}AS\|_r$. Donc, on a pour $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \left\|e^{tB}\right\|_{B,r} &= \left\|Se^{t\curlywedge}S^{-1}\right\|_{B,r} \\ &= \left\|e^{t\curlywedge}\right\|_r = e^{\lambda t} \end{aligned}$$

cela donne

$$\|C_1)\|_{B,r} \leq \left(1 + Z_1 \|\underline{e} \ \underline{a}'\|_{B,r}\right) e^{\lambda T_1} \quad \text{et} \quad \|\underline{D}_1\| = \alpha_0 \|\underline{e} \ \|_{B,r} Z_1$$

et en utilisant

$$\nu_{[L,L]}([x, \infty)) = \nu_L \left\{y \in \mathbb{R} : |y| \geq \sqrt{x}\right\} \text{ pour } x \geq 0$$

on obtient

$$\begin{aligned} E \log \|C(1)\|_{B,r} &\leq \lambda E(T_1) + E \log \left(1 + Z_1 \|\underline{e} \ \underline{a}'\|_{B,r}\right) \\ &= \frac{\lambda}{\nu_L(\mathbb{R})} + \frac{\lambda}{\nu_L(\mathbb{R})} \int\limits_{(0,\infty)} \log \left(1 + \|\underline{e} \ \underline{a}'\|_{B,r} y^2\right) d\nu_L(y) < 0 \end{aligned}$$

par (4.14) et

$$E \log^+(Z_1) = \frac{1}{\nu_L(\mathbb{R})} \int\limits_{\mathbb{R}} \log^+\left(y^2\right) d\nu_L(y) < \infty$$

A partir du théorème général des équations de récurrence aléatoires, cela implique la convergence absolument p.s de $\sum\limits_{i=0}^{\infty} C_1 ... C_i \underline{D}_{i+1}$ vers $\widetilde{\underline{Y}}$ ayant la distribution stationnaire de $(\underline{Y}(\Gamma_n))_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Pour démontrer l'égalité $\underline{Y}_\infty = e^{TB}\underline{\widetilde{Y}}$ pour $m \in \mathbb{N}$:
soit

$$\underline{\widetilde{Y}}_m = \sum_{i=0}^{m-1} C_1...C_i\underline{D}_{i+1} + C_1...C_m\underline{Y}(0)$$

et

$$\underline{Y}_{t,m} = e^{B(t-\Gamma(N(t)))}\underline{\widetilde{Y}}_m, \quad t \geq 0$$

Sachant que la variable aléatoire $(t - \Gamma(N(t)))$ est asymptotiquement indépendant de $T_1, Z_1, ..., T_m, Z_m$ (pour $t \longrightarrow \infty$, m fixé), il suit que $e^{B(t-\Gamma(N(t)))}$ est asymptotiquement indépendant de $\underline{\widetilde{Y}}_m$ et $\underline{Y}_{t,m}$ converge en distribution vers $e^{TB}\underline{\widetilde{Y}}_m$ quand $t \longrightarrow \infty$, ou T est exponentiellement distribué avec les paramètres $\nu_L(\mathbb{R})$ et il est indépendant de $T_1, Z_1, ..., T_m, Z_m$.

En plus, $e^{TB}\underline{\widetilde{Y}}_m$ converge p.s en distribution vers $e^{TB}\underline{\widetilde{Y}}$ quand $m \longrightarrow \infty$

On note par :

$$\underline{\widetilde{Y}}_t \overset{d}{=} e^{\left(t-\Gamma_{N(t)}\right)B}\left[1_{\{N(t)\neq 0\}}\underline{D}_1 + \sum_{i=0}^{N(t)-1} C_1...C_i\underline{D}_{i+1} + C_1...C_{N(t)}\underline{Y}(0)\right]$$

Alors $\underline{Y}_\infty = e^{TB}\underline{\widetilde{Y}}$ et, en particulier, l'existence de variable limite $\underline{Y}_\infty$ dans le cas de processus Poisson-composant peut être inspirée à partir de l'équation (4.24) ainsi que le théorème de slutsky est vérifié :

$$\lim_{m\longrightarrow\infty}\lim_{t\longrightarrow\infty}\sup P\left(\left\|\underline{\widetilde{Y}}_t - \underline{Y}_{t,m}\right\|_{B,r} > \epsilon\right) = 0, \quad \forall\epsilon > 0$$

Sachant que $\left\|e^{B(t-\Gamma(N(t)))}\right\|_{B,r} < 1$ et $1_{\{N(t)\neq 0\}}\underline{D}_1 + \sum_{i=0}^{N(t)-1} C_1...C_i\underline{D}_{i+1} + C_1...C_{N(t)}\underline{Y}(0) - \underline{\widetilde{Y}}_m$ converge p.s, alors il converge en probabilité quand $t \longrightarrow \infty$ vers

$$\sum_{i=m}^{\infty} C_1...C_i\underline{D}_{i+1} + C_1...C_m\underline{Y}(0)$$

qui converge lui même vers 0 p.s quand $m \longrightarrow \infty$. Cette limite

$$\lim_{m\longrightarrow\infty}\lim_{t\longrightarrow\infty}\sup P\left(\left\|\underline{\widetilde{Y}}_t - \underline{Y}_{t,m}\right\|_{B,r} > \epsilon\right) = 0, \forall\epsilon > 0$$

est vérifiée et que $\underline{Y}_\infty = e^{TB}\underline{\widetilde{Y}}$ s'ensuit. Dans ce cas, $\underline{Y}_\infty$ satisfait $\underline{Y}_\infty \overset{d}{=} Q\underline{Y}_\infty + \underline{R}$, cela est claire à partir de $\underline{Y}_\infty = e^{TB}\underline{\widetilde{Y}}$ qui est la solution unique pouvant être obtenue à parir de

$$E\log\|Q\|_{B,r} < 0 \text{ et } E\log^+\|\underline{R}\|_{B,r} < \infty$$

La démonstration du théorème 4.6(2) montre toujours l'existence de la variable limite $\underline{Y}_\infty$ pour le cas du processus gouverné de Poisson-composant. ■

4.3.4 Les propriétés de second ordre du processus de volatilité

Soit $(\underline{Y}(t))_{t\geq 0}$ est le processus espace d'état associé à celui du $COGARCH(p,q)$, avec des paramètres $B, \underline{a}$ et α_0 et gouverné par le processus de Lévy L. Le but de cette section est d'étudier la fonction d'autocorrélation du processus de volatilité $(V(t))_{t\geq 0}$.
Soit :

$$\mu = \int_{\mathbb{R}} y^2 d\nu_L(y) \quad \text{et} \quad \rho = \int_{\mathbb{R}} y^4 d\nu_L(y)$$

Si $\mu < \infty$ (i.e., $E\{L^2(1)\} < \infty$), on définit la matrice $\widetilde{B}$ par $\widetilde{B} = B + \mu\ \underline{e}\ \underline{a}'$. On remarque que $\widetilde{B}$ et B ont la même forme hormis la dernière ligne porte $\left(-\beta_q + \mu\alpha_1, ..., -\beta_1 + \mu\alpha_q\right)$. Dans ce cadre, on doit citer les conditions suffisantes pour l'existence des moments du processus espace d'état $(\underline{Y}(t))_{t\geq 0}$.

Proposition 4.2 *Supposons que les valeurs propres de la matrice B sont distinctes et $\lambda = \lambda(B) < 0$, $\|.\|$ est une norme de vecteur dans $\mathbb{C}^q$ et $k \in \mathbb{N}$, alors on a les résultats suivant*

1. Si $E\left\{|L(1)|^{2k}\right\} < \infty$ et $E\left\{\|\underline{Y}(0)\|^k\right\} < \infty$, alors $E\left\{\|\underline{Y}(t)\|^k\right\} < \infty$,$\forall t \geq 0$.

2. Si $E\left\{|L(1)|^{2k}\right\} < \infty$, $r \in [1,\infty]$ et S une matrice vérifiant que $S^{-1}BS$ est diagonale et

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\left(1 + \left\|S^{-1}\ \underline{e}\ \underline{a}'S\right\|_r\ y^2\right)^k - 1\right) d\nu_L(y) < -\lambda k$$

puis S et r satisfont l'équation (4.14) et $E\left\{\|\underline{Y}_\infty\|^k\right\} < \infty$. Particulièrement, $E(\underline{Y}_\infty)$ existe si

$$E\left\{(L(1))^2\right\} < \infty \qquad \text{et} \qquad \left\|S^{-1}\underline{e}\ \underline{a}'S\right\|_r \mu < -\lambda. \tag{4.25}$$

de même, la matrice de covariance de $\underline{Y}_\infty$(notée par cov($\underline{Y}_\infty$)) existe aussi si

$$E\left\{\left(L^4(1)\right)\right\} < \infty\ ,\ \text{et}\ \left\|S^{-1}\underline{e}\ \underline{a}'S\right\|_r^2 \rho < 2\left(-\lambda - \left\|S^{-1}\underline{e}\ \underline{a}'S\right\|_r \mu\right). \tag{4.26}$$

De plus (4.26) implique (4.25) et (4.25) implique que les valeurs propres de $\tilde{B}$ a des partie réelles strictement négative, en particulier $\tilde{B}$ est inversible et $\beta_q \neq \alpha_1\mu$.

Preuve. Toutes les affirmations peuvent être obtenues par l'implication (4.25) $\Longrightarrow \lambda\left(\tilde{B}\right) < 0$, suivent immédiatement pour le lemme ci-dessous (cela montre que l'existance de $E\left\{\|\underline{Y}(t)\|^k\right\}$ est indépendant de la norme matricielle spécifiée) et les propriétés correspondantes au processus $COGARCH(1,1)$.

L'équation (4.25) implique $\lambda\left(\tilde{B}\right) < 0$ est une conséquence des résultats de perturbation de Bauer-Fike sur les valeurs propres, pour toute valeur propre $\tilde{\lambda}_j$ de $\tilde{B}$ on a

$$\min_{i=1,..,q}\left|\lambda_i - \tilde{\lambda}_j\right| \leq \left\|S^{-1}\left(\tilde{B}-B\right)S\right\|_r = \mu\left\|S^{-1}\underline{e}\ \underline{a}'S\right\|_r .$$

■

Lemme 4.1 *: Soit $(\underline{Y}(t))_{t\geq0}$; le processus espace d'état associé au processus $COGARCH(p,q)$; avec les paramètres B, $\underline{a}$ et α_0. On suppose que toutes les valeurs propres de B sont distinctes et que $\lambda = \lambda(B) < 0$. Soit $r \in [1,\infty]$ et S tel que la matrice $S^{-1}BS$ est diagonale. De plus,$\left(\overline{Y}(t)\right)_{t\geq0}$; le processus espace d'état associé au processus $COGARCH(1,1)$; qui satisfait (4.12) avec les paramètres $(B,\ \underline{a}\ ,\ \alpha_0)$ substitués par $\left(\lambda, \|\underline{e}\ \underline{a}'\|_{B,r}, \alpha_0\|\underline{e}\|_{B,r}\right)$ et le vecteur initial $\overline{Y}(0) = \|\underline{Y}(0)\|_{B,r}$ alors*

$$\|\underline{Y}(t)\|_{B,r} \leq \overline{Y}(t), \qquad t\geq 0.$$

Si (4.14) satisfait pour $r\in[1,\infty]$, alors il existe $\underline{Y}_\infty$ et $\overline{Y}_\infty$ tel que

$$\|\underline{Y}_\infty\|_{B,r} \leq \overline{Y}_\infty$$

Théorème 4.7 *: Soit $(V(t))_{t\geq0}$ un processus de volatilité et soit $(\underline{Y}(t))_{t\geq0}$ le processus espace d'état du processus $COGARCH(p,q)$. On suppose que $E(L^4(1)) < \infty$ et $E\left\{\|\underline{Y}(t)\|^2\right\} < \infty$, $\forall t\geq 0$, alors*

$$cov(V(t+h), V(t)) = \underline{a}'e^{h\widetilde{B}}cov(\underline{Y}(t))\,\underline{a} \quad , \qquad t,h\geq 0. \tag{4.27}$$

où $\widetilde{B} = B + \mu\underline{e}\ \underline{a}'$.

Lemme 4.2 *Si toutes les valeurs propres de la matrice B sont distinctes et les conditions (4.25) sont satisfaites, alors*

$$E(\underline{Y}_\infty) = -\alpha_0\mu\widetilde{\beta}^{-1}\underline{e} = \frac{\alpha_0\mu}{B_q - \alpha_1\mu}\underline{e}_1 \tag{4.28}$$

où $\widetilde{B} = B + \mu\ \underline{e}\ \underline{a}'$ et $\underline{e}_i$ est les vecteurs canoniques avec la i^{eme} composante égale à 1 et en substituant le vecteur $\underline{e}_q$ par $\underline{e}$. Dans la suite, on montre que la fonction d'autocorrélation de processus de volatilité stationnaire du processus $COGARCH$ est la même de celui du processus $CARMA$.

Preuve. On suppose premièrement que la mesure de Lévy ν_L est finie et soient les expressions Q et$\underline{R}$ définies dans le théorème 4.6(2) alors l'application du lemme 4.3, leurs espérences peuvent écrites sous la forme :

$$\begin{aligned} E(Q) &= \left(I - C^{-1}B\right)^{-1}\left(I + E(Z)\,\underline{ea}'\right) \\ E(\underline{R}) &= \alpha_0 E(Z)\left(I - C^{-1}B\right)^{-1}\underline{e}. \end{aligned}$$

En applicant $\underline{Y}_\infty \overset{d}{=} Q\underline{Y}_\infty + \underline{R}$ conduit à

$$E(\underline{R}) = (I - E(Q))\, E(\underline{Y}_\infty)$$

de plus

$$\begin{aligned}\left(I - C^{-1}B\right)(I - E(Q)) &= \left[\left(I - C^{-1}B\right) - I - E(Z)\,\underline{e}\ \underline{a}'\right]\\ &= \frac{-1}{C}\left(B + \mu\underline{e}\ \underline{a}'\right)\end{aligned}$$

donnant

$$\begin{aligned}E(\underline{Y}_\infty) &= -C\left(B + \mu\underline{e}\ \underline{a}'\right)^{-1}\left(I - C^{-1}B\right)E(\underline{R})\\ &= -\alpha_0\mu\left(B + \mu\underline{e}\ \underline{a}'\right)^{-1}\underline{e}\end{aligned}$$

on pose $\underline{U} = (U_1, ..., U_q)' = \left(B + \mu\underline{e}\ \underline{a}'\right)^{-1}\underline{e}$, il est facilement de montrer que $U_2 = ... = U_q = 0$ et $U_1 = \frac{1}{\alpha_1\mu - \beta_q}$. Dans le cas où la mesure de Lévy ν_L est infinie le résultat obtenue par lemme 4.1, utilisant $\underline{Y}_\infty$ qui est intégrable et majoré par (4.25). ■

Lemme 4.3 *:Soit T distribué de façon exponentielle avec le paramètre c et supposons que $\lambda(B) < 0$. Soit*

$$M = E\left(e^{BT} \otimes e^{BT}\right)$$

alors

$$E\left(e^{BT}\right) = \left(I - C^{-1}B\right)^{-1}, M^{-1} = I_{q^2} - \left(I \otimes \left(C^{-1}B\right)\right) - \left(\left(C^{-1}B\right) \otimes I\right)$$

En plus $(I \otimes B) + (B \otimes I)$ est inversible.

Théorème 4.8 *Soit $(\Psi(t))_{t\geq 0}$un processus $CARMA(q, p-1)$ stationnaire, de paramètre local 0, des coefficients des moyennes mobiles $\alpha_1, ..., \alpha_p$, des coefficients d'autorégressives $\beta_1 - \mu\alpha_q, \beta_2 - \mu\alpha_{q-1}, ..., \beta_q - \mu\alpha_1$ et gouverné par le processus de Poisson $\widetilde{L}$, est correspondant au processus d'état $(\varphi(t))_{t\geq 0}$. Supposons que $E\left(\widetilde{L}_1\right)^2 < \infty$, $E\left(\widetilde{L}_1\right) = \mu$, var $\left(\widetilde{L}_1\right) = \rho$ et on définit var $(\Psi(t))$ par*

$$m = \rho \int_0^\infty \underline{a}' e^{t\widetilde{B}}\underline{e}\ \underline{e}' e^{t\widetilde{B}'}\underline{a}\,dt = var\{\Psi(t)\}$$

alors $0 \leq m < 1$, et

$$\begin{aligned}cov(\underline{Y}_\infty) &= \frac{\alpha_0^2\beta_q^2}{\left(\beta_q - \mu\alpha_1\right)^2(1-m)} cov(\varphi_\infty)\\ &= \frac{\alpha_0^2\beta_q^2\rho}{\left(\beta_q - \mu\alpha_1\right)^2(1-m)}\int_0^\infty e^{t\widetilde{B}}\underline{e}\ \underline{e}' e^{t\widetilde{B}'}dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} var\left(V_{\infty}\right) &= \frac{\alpha_0^2\beta_q^2}{\left(\beta_q-\mu\alpha_1\right)^2}\,\frac{m}{1-m} \\ E\left(V_{\infty}\right) &= \frac{\alpha_0\beta_q}{\beta_q-\mu\alpha_1}\ ,\ E\left(\Psi_{\infty}\right)=\frac{\alpha_1\mu}{\beta_q-\mu\alpha_1}. \end{aligned}$$

Si $(\underline{V}(t))_{t\geq 0}$ est un processus de volatilité stationnaire du processus COGARCH , alors

$$cov\left(V\left(t+h\right),V\left(t\right)\right)=\frac{\alpha_0^2\beta_q^2}{\left(\beta_q-\mu\alpha_1\right)^2\left(1-m\right)}cov\left(\Psi\left(t+h\right),\Psi\left(t\right)\right)\qquad ,t,h\geq 0.$$

Dans ce concept, on peut déduire que le processus COGARCH pouvant être piloté par le même processus de Poisson $\widetilde{L}$ du processus $CARMA(q,p-1)$.

Preuve. oir([20]) . ■

Remarque 4.8 *: Le produit de Kronecker de deux des matrices A et B d'ordre $(q\times q)$ est noté par $A\otimes B$ et par $vec(A)$,le vecteur colonne dans $\mathbb{C}^{q^2}$ qui découle d'un en empilant les colonnes de vecteur A.*

Proposition 4.3 *On constate que V et Ψ ont p.s. la même fonction d'autocorrélation. Si les valeurs propres $\widetilde{\lambda}_1,...,\widetilde{\lambda}_q$ de $\widetilde{B}$ (où $\widetilde{B}=B+\mu\ \underline{e}\ \underline{a}'$) sont distinctes et $a\left(Z\right),\widetilde{b}\left(Z\right)$ sont respectivement les polynômes caractéristiques associés à $\underline{a}$ et $\widetilde{B}$, alors*

$$cov\left(V\left(t+h\right),V\left(t\right)\right)=\frac{\alpha_0^2\beta_q^2\rho}{\left(\beta_q-\mu\alpha_1\right)^2\left(1-m\right)}\times\sum_{j=1}^{q}\frac{a\left(\widetilde{\lambda}_j\right)a\left(-\widetilde{\lambda}_j\right)}{\widetilde{b}'\left(\widetilde{\lambda}_j\right)\widetilde{b}\left(-\widetilde{\lambda}_j\right)}e^{\widetilde{\lambda}_j h}\ ,\qquad t,h\geq 0. \tag{4.29}$$

où $\widetilde{b}'$est la dérivée de $\widetilde{b}$.

Les conditions pour que les processus de volatilité soient positifs

Pour l'écriture $dG\left(t\right)=\sqrt{V\left(t\right)}dL(t)$ du processus $COGARCH$, il est nécessaire que le processus de volatilité $\left(V\left(t\right)\right)_{t\geq 0}$ est non négatif pour tout $t\geq 0$. Les théorèmes ci-dessous offrent les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\left(V\left(t\right)\right)_{t\geq 0}$ soit non négatif.

Théorème 4.9 *:*

1. Soit $(\underline{Y}\left(t\right))_{t\geq 0}$ un vecteur d'espace état de processus $COGARCH(p,q)$ et $\left(V\left(t\right)\right)_{t\geq 0}$ le processus de volatilité, avec les paramètres $B,\underline{a}$ et $\alpha_0>0$, et soit $\nu\geq-\alpha_0$ une constante réelle. Si les conditions suivantes :

$$\underline{a}'e^{tB}\underline{e}\geq 0\ \ ,\forall t\geq 0 \tag{4.30}$$

$$\underline{a}' e^{tB} \underline{Y}_0 \geq \nu \quad p.s \ , \forall t \geq 0 \tag{4.31}$$

donc pour tout processus gouverné par le processus de Lévy L , avec la probabilité certaine, on a

$$V(t) \geq \alpha_0 + \nu \geq 0 \qquad , \forall t \geq 0 \tag{4.32}$$

Contrairement, si (4.31)est vérifiée ou bien (4.31) avec $\nu > -\alpha_0$ et (4.30) sont simultanément vérifiées, alors il existe un processus gouverné composé de celui de Lévy avec $t_0 \geq 0$, tel que $P(V(t_0) < 0) > 0$.

2. Supposons que toutes les valeurs propres de B sont distinctes et (4.30) et(4.14) sont vérifiées, alors avec la probabilité certaine, le processus de volatilité stationnaire du processus $COGARCH(p,q)$ satisfait $V(t) \geq \alpha_0 > 0$, $\forall t \geq 0$.

Preuve. . On suppose que (4.30) et (4.31) sont vérifiées. En utilisant le lemme ci-dessous**,** il est suffisant pour montrer que (4.32) particulièrement pour le cas où $[L,L] = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$ est un processus de Poisson-composant avec les temps de saut $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors, il est facile avec l'induction de 4.12 et le lemme 4.4 que :

$$\underline{Y}(t) = e^{tB}\underline{Y}(0) + \sum_{i=1}^{N(t)} e^{B(t-\Gamma_i)} \underline{e} V_{\Gamma_i} Z_i, t \geq 0$$

Pour $S \geq 0$, alors

$$\begin{aligned} \underline{a}' e^{SB} \underline{Y}(t) &= \underline{a}' e^{B(S+t)} \underline{Y}(0) + \sum_{i=1}^{N(t)} \underline{a}' e^{B(S+t-\Gamma_i)} \underline{e} V_{\Gamma_i} Z_i & (4.33) \\ &\geq \gamma + \sum_{i=1}^{N(t)} \underline{a}' e^{B(S+t-\Gamma_i)} \underline{e} V_{\Gamma_i} Z_i & (4.34) \end{aligned}$$

posons $S = 0$, il résulte que

$$V(t) = \alpha_0 + \underline{a}' \underline{Y}\left(t^-\right) \geq \alpha_0 + \gamma, \qquad \text{pour } t \in [0, \Gamma_1]$$

et comme

$$V_{\Gamma_{1+}} \geq \alpha_0 + \gamma \geq 0$$

par (4.30) et (4.34) et une induction argumentale montre que $V(t) \geq \alpha_0 + \gamma$ pour $t \geq 0$ qui conduit que (4.32) est vérifiée.

Supposons maintenant que l'équation (4.31) est non vérifiée. En utilisant la continuité de la fonction $t \longrightarrow e^{tB}$, il résulte qu'il existe un couple $(t_1, t_2) \subset (0, \infty)$ tel que

$$P\left(\alpha_0 + \underline{a}' e^{tB} \ \underline{Y}(0) < 0 \ , \forall t \in (t_1, t_2)\right) > 0$$

et comme $P(\Gamma_1 > t_2) > 0$, on obtient notre demande à partir de la relation (4.33).

Supposons que (4.31) soit vérifiée avec $\gamma > \alpha_0$ avec la non vérification de (4.30).

On suppose que le support de la mesure de Lévy du processus $[L, L]$ du Poisson-composant est non borné. Considérons que $(t_3, t_4) \subset (0, \infty)$ est un intervalle tel que

$$\underline{a}' e^{tB} \underline{e} \leq -c_1 < 0 \text{ pour tout } t \in (t_3, t_4)$$

pour $c_1 < 0$.

En utilisant l'équation (4.31) , on obtient $P(V_{\Gamma_1} \geq \alpha_0 + \gamma) = 1$, alors on peut facilement montrer que l'ensemble

$$A = \{\Gamma_1 < t_5 < \Gamma_2, t_5 - \Gamma_1 \in (t_3, t_4), V_{\Gamma_1} \geq \alpha_0 + \gamma\}$$

a une probabilité positive pour $t_5 > t_4$.

L'utilisation de l'équation (4.33) sur l'ensemble A, on obtient :

$$V_{t_5} = \alpha_0 + \underline{a}' e^{t_5 B}\ \underline{Y}(0) + \underline{a}' e^{(t_5 - \Gamma_1)B}\ \underline{e} V_{\Gamma_1} Z_1$$

avec $\underline{a}' e^{(t_5 - \Gamma_1)B}\ \underline{e} \leq -c_1$ et en choisissant Z_1suffisement large, on obtient

$$P(V_{t_5} < 0) > 0$$

2. En tenant compte du théorème cité ci-dessus, il reste donc à montrer que $\underline{Y}_\infty$ satisfait (4.31) . Pour démontrer cela, il est suffisant par le lemme 4.1 dans lequel on suppose que $[L, L]$ est un processus de Poisson-composant.

Soit $\left(\underline{\tilde{Y}}_t\right)_{t \geq 0}$ est un processus d'état avec $\underline{\tilde{Y}}(0) = 0$ alors (4.31) est vérifiée pour $\underline{\tilde{Y}}(0)$ avec $\gamma = 0$, et il résulte à partir de (4.34), (4.30) et (4.32) que $\underline{a}' e^{SB}\ \underline{\tilde{Y}}(t) \geq 0$ pour tout $S, t \geq 0$.

Sachant que $\underline{\tilde{Y}}(t)$ converge en distribution vers $\underline{Y}_\infty$ quand $t \longrightarrow \infty$, alors (4.31) est vérifiée avec $\gamma = 0$. ■

Lemme 4.4 *:Soit $(\underline{Y}(t))_{t \geq 0}$; un vecteur d'espace état du processus $COGARCH(p, q)$, alors $\underline{Y}^{(\varepsilon)}(t)$ converge en probabilité vers $\underline{Y}(t)$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$. où $\underline{Y}^{(\varepsilon)}(t)$ est le vecteur d'espace état du processus $COGARCH(p, q)$ gouverné par le processus $\left(L^{(\varepsilon)}(t)\right)_{t \geq 0}$ avec*

$$L^{(\varepsilon)}(t) = \sum_{0 < s \leq t, |\triangle L(s)| \geq \sqrt{\varepsilon}} \triangle L(s), \ t \geq 0.$$

et L est le processus de Lévy.

Proposition 4.4 *Soit $\underline{a}, B$ les paramètres du processus $COGARCH(p, q)$. Si $\lambda(B) < 0$ et $\alpha_1 > 0$, on obtient les résultats suivants :*

1. Pour un processus $COGARCH(p,q)$, l'inégalité (4.30) est vérifiée si et seulement si les racines du polynôme caractéristique $a(.)/b(.)$ est complètement monotone dans $[0,\infty[$.

2. Une condition suffisante pour que (4.30) soit vérifiée dans le cas de processus $COGARCH(1,q)$ lorsque une des conditions suivantes est satisfaite.

   (a) Toutes les valeurs propres de B sont réelles et négatives.

   (b) Si $(\lambda_{i_1},\lambda_{i_1+1})\dots(\lambda_{i_r},\lambda_{i_r+1})$ est une partition de l'ensemble de toute paire conjuguée des valeurs propres complexes de la matrice B. Dans ce cas, il existe une application

   $$\mu:\{1,...,r\}\longrightarrow\{1,...,q\}$$

   injective, telle que $\lambda_{\mu(j)}$ est une valeur propre réelle de B satisfaisant $\lambda_{\mu(j)}\geq R(\lambda_{ij})$.

3. Une condition nécessaire pour que (4.30) soit vérifiée dans le cas des processus $COGARCH(1,q)$ s'il existe une valeur propre réelle de B dont la composante réelle est maximale.

4. lorsque $2\leq p\leq q$ et toutes les valeurs propres de B sont négatives et p.s. en ordre. Si les racines γ_j de $a(Z)$ sont négatives et ordonnées de façon $\gamma_{p-1}\leq...\leq\gamma_1<0$, alors une condition suffisante pour que (4.30) soit satisfaite dans le cas des processus $COGARCH(p,q)$, est :

   $$\sum_{i=1}^{k}\gamma_i\leq\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \qquad ,\forall k\in\{1,...,p-1\}.$$

5. Une condition nécessaire et suffisante vérifiant l'équation (4.30) dans le cas des processus $COGARCH(2,2)$, est de l'existence des valeurs propres réelles de B avec $\alpha_2\geq 0$ et $\alpha_1\geq-\,\alpha_2\,\lambda(B)$.

4.3.5 La fonction d'autocorrélation des carrés des accroissements du processus $COGARCH$

Nous supposons que le processus de volatilité V est strictement stationnaire et non négatif. On définie pour tout $r>0$

$$G^{(r)}(t)=G(t+r)-G(t)=\int_{(t,t+r]}\sqrt{V(s)}dL(s)\,,\quad t\geq 0$$

avec $G^{(r)}(t)$ est l'accroissement du processus $COGARCH$. Dans cette partie, nous voulons étudier la fonction d'autocorrélation des carrés des accroissements du processus $COGARCH$.

Théorème 4.10 *Soit $\underline{a}, B$ et α_0 les paramètres de processus $COGARCH(p,q)$ gouverné par le processus de Lévy L. Ce dernier a espérance nulle. Dans le cas où les valeurs propres de B sont distinctes et les conditions* (4.25) *et* (4.30) *sont satisfaites et $(V(t))$ un processus stationnaire, alors que pour tout $t \geq 0$ et $h \geq r > 0$*

$$E\left(G^{(r)}(t)\right) = 0$$

$$E\left(\left(G^{(r)}(t)\right)^2\right) = \frac{\alpha_0 \beta_q r}{\beta_q - \mu\alpha_1} E\left((L(1))^2\right) \quad , cov\left(G^{(r)}(t), G^{(r)}(t+h)\right) = 0$$

En plus, si (4.26) *est vérifiée, on peut écrire*

$$cov\left(\left(G^{(r)}(t)\right)^2, \left(G^{(r)}(t+h)\right)^2\right) = \underline{a}' e^{h\widetilde{B}} \underline{H}(r) \qquad , h \geq r.$$

où $\underline{H}(r) = E(L^2(1))\, \widetilde{B}^{-1}\left(I - e^{-r\widetilde{B}}\right) cov\left(\underline{Y}(r), (G(r))^2\right)$ et $\widetilde{B} = B + \mu\, \underline{e}\, \underline{a}'$.

Remarque 4.9 *Les moments du processus $COGARCH(1,1)$ peuvent être obtenus en utilisant la transformation de Laplace appliquée au processus auxiliaire X défini dans la définition 4.1 et qui satisfait $E\left(e^{-sX_t}\right) = e^{t\Psi(s)}$, avec*

$$\Psi(s) = -\eta s + \int_{\mathbb{R}} \left(\left(1 + \varphi x^2\right)^s - 1\right) \nu_L(dx) \quad , s \geq 0 \tag{4.35}$$

pour s fixé, la transformation de Laplace est finie pour tout $t > 0$ si et seulement si l'intégrale donnée en (4.35) *est finie. Cela est équivalent à $E\left|L(1)\right|^{2s} < \infty$. D'une autre manière, on suppose que le processus de Lévy $(L(t))_{t\geq 0}$ a une variance finie et une espérance nulle, dans cet environnement, on peut considérer la proposition suivante.*

Proposition 4.5 *Soit $(G(t))_{t\geq 0}$ un processus $COGARCH(1,1)$, le processus de Lévy $(L(t))_{t\geq 0}$ a une variance finie et une espérance nulle, $\Psi(1) < 0$, et soit $(\sigma^2(t))_{t\geq 0}$ un processus de volatilité stationnaire, alors le processus $(G(t))_{t\geq 0}$ a des accroissements stationnaires, $E\left((G(t))^2\right) < \infty$ pour $t \geq 0$ et pour tout $t, h \geq r > 0$*

$$E\left(G^{(r)}(t)\right) = 0$$

et

$$E\left(\left(G^{(r)}(t)\right)^2\right) = \frac{\beta r}{|\Psi(1)|} E\left(L^2(1)\right)$$

$$cov\left(\left(G^{(r)}(t)\right)^2, \left(G^{(r)}(t+h)\right)^2\right) = 0 \tag{4.36}$$

De même, si $\varphi > 0, E\left(L^4(1)\right) < \infty$ *et* $\Psi(2) < 0$, *alors* $E\left(G^4(t)\right) < \infty$ *pour* $t \geq 0$. *Si la mesure* ν_L *du processus de Lévy vérifie* $\int_{\mathbb{R}} x^3 \nu_L(dx) = 0$, *alors on peut écrire pour tout* t *et* $h \geq r > 0$

$$\begin{aligned}
E\left(\left(G^{(r)}(t)\right)^4\right) &= 6E\left(L^2(1)\right)\frac{\beta^2}{(\Psi(1))^2}\left(2\eta\varphi^{-1} + 2\tau_L^2 - E\left(L^2(1)\right)\right) \\
&\quad \times\left(\frac{2}{|\Psi(2)|} - \frac{1}{|\Psi(1)|}\right)\left(r - \frac{1-e^{-r|\Psi(1)|}}{|\Psi(1)|}\right) \\
&\quad + \frac{2\beta^2}{\varphi^2}\left(\frac{2}{|\Psi(2)|} - \frac{1}{|\Psi(1)|}\right)r + 3\frac{\beta^2}{(\Psi(1))^2}E\left(L^2(1)\right)r^2
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
cov\left(\left(G^{(r)}(t)\right)^2, \left(G^{(r)}(t+h)\right)^2\right) &= E\left(L^2(1)\right)\frac{\beta^2}{|\Psi(1)|^3}\left(2\eta\varphi^{-1} + 2\tau_L^2 - E\left(L^2(1)\right)\right) \\
&\quad \times\left(\frac{2}{|\Psi(2)|} - \frac{1}{|\Psi(1)|}\right)\left(1 - e^{-r|\Psi(1)|}\right) \\
&\quad \times\left(e^{r|\Psi(1)|} - 1\right)e^{-h|\Psi(1)|}
\end{aligned}$$

Remarque 4.10 *Soit* $(G(t))$ *un processus* $COGARCH(1,1)$ *et* $(\sigma^2(t))$ *le processus de volatilité associé. Les moments* $E\left(\sigma^{2k}\right)$ *du processus de volatilité stationnaire pour* $k \in \mathbb{N}$ *existe si et seulement si* $E\left(L^{2k}(1)\right) < \infty$ *et* $\Psi(k) < 0$ *en particulier si* $E\left(L^4(1)\right)$ *et* $\Psi(2) < 0$, *alors pour tout* $t, h \geq 0$

$$E\left(\sigma^2(t)\right) = \frac{\beta}{|\Psi(1)|}$$

$$E\left(\sigma^4(t)\right) = \frac{2\beta}{|\Psi(1)\Psi(2)|}$$

$$\begin{aligned}
cov\left(\sigma^2(t), \sigma^2(t+h)\right) &= \beta^2\left(\frac{2}{|\Psi(1)\Psi(2)|} - \frac{1}{(\Psi(1))^2}\right)e^{-h|\Psi(1)|} \\
&= var\left(\sigma^2(t)\right)e^{-h|\Psi(1)|}.
\end{aligned}$$

Preuve. oir [12]. ■

Remarque 4.11 *Les moments d'ordre* k *de* $\sigma^2(\infty)$ *sont finis si et seulement si* $E\left(L(1)^{2k}\right) < \infty$ *et* $\Psi(k) < 0$ *où* $k \in \mathbb{N}$. *Dans ce cas*

$$E\left(\sigma^{2k}(\infty)\right) = k!\beta^k \prod_{l=1}^{k} \frac{1}{-\Psi(l)}.$$

4.3.6 Les processus $COGARCH\,(1,1)$ et de Poisson

Définition 4.3 *: Le processus $COGARCH\,(1,1)$ est gouverné par le processus de Poisson correspondant au processus de Lévy $(L\,(t))_{t\geq 0}$ donné par*

$$L\,(t) = \sum_{k=1}^{N_t} y_k, t \geq 0$$

où N_t est un processus de Poisson d'intensité $c > 0$ et $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont i.i.d. des variables aléatoires indépendantes de N. Soit y une variable aléatoire ayant la même distribution que y_k. On note par $\mathcal{F}_y$ la mesure de Lévy qui a la formulation $\nu\,(dx) = c\mathcal{F}_y\,(dx)$. Donc, on définit l'exposant de Laplace par

$$\Psi\,(s) = -\eta s + c \int_{\mathbb{R}} \left(\left(1+\varphi y^2\right)^s - 1\right) \mathcal{F}_y\,(dy)$$

D'ou

$$\Psi\,(1) = -\eta + \varphi c E\left(y^2\right) \quad \textit{et} \quad \Psi\,(2) = -2\eta + 2\varphi c E\left(y^2\right) + \varphi^2 c E\left(y^4\right)$$

Si on a $E\,(L\,(1)) = 0$ et $var\,(L\,(1)) = 1$, alors il faut que $E\,(y^2) = \frac{1}{c}$ pour calculer $p = |\Psi\,(1)| = \eta - \varphi$. Les conditions $E\,(L^4\,(1)) = 0$ et $\int_{\mathbb{R}} x^3 \nu_L\,(dx) = 0$ seront transformées respectivement par $E\,(y^4) < \infty$ et $E\,(y^3) = 0$. De plus, on obtient

$$\begin{aligned} \Psi\,(2) &= 2\,(\varphi - \eta) + \varphi^2 \frac{E\,(y^4)}{E\,(y^2)} \\ &= -2p + \varphi^2 \frac{E\,(y^4)}{E\,(y^2)}. \end{aligned}$$

et la condition $\Psi\,(2) < 0$ est substituée par $\varphi^2 < \frac{2p}{cE(y^4)}$. Cette condition satisfit le processus gouverné par celui de Poisson avec une intensité unitaire $c = 1$.

4.4 DEUXÈME ÉTAPE les processus $COGARCH\,(p,q)$ à coefficients variables

Definition 2 *On définit le processus $COGARCH\,(p,q)$ avec les paramètres $M(t)$, $\underline{a}(t)$, $\alpha_0(t)$ et gouverné par le processus de Lévy L correspondant à :*

$$\begin{cases} dG\,(t) = \sqrt{V\,(t)}dL\,(t) \quad ,t > 0 \\ G\,(0) = G_0 \end{cases}$$

où $L = (L(t))_{t\geq 0}$ est le processus de Lévy avec une mesure non triviale et $(V(t))_{t\geq 0}$ est un processus de volatilité (continué a gauche). Soit $(\alpha_i(t))_{0\leq\ i\leq\ q}$ et $\left(\beta_j(t)\right)_{0\leq\ j\leq\ q}$ des suits des fonctions telles que : $\alpha_{p+1}(t) = ... = \alpha_q(t) = 0$ et le processus de volatilité est défini par

$$\begin{cases} V(t) = \alpha_0(t) + (\underline{a}(t))' \underline{Y}(t^-) & , \quad t > 0 \\ V(0) = \alpha_0(t) + (\underline{a}(t))' \underline{Y}(0) \end{cases}$$

où $\underline{a}(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), ..., \alpha_q(t))'$, $\alpha_0(t) \geq 0$ et le processus espace d'état $(\underline{Y}(t))_{t\geq 0} = \underline{Y}$ qui est la solution unique et càdlàg de l'E.D.S suivante

$$d\underline{Y}(t) = M(t)\underline{Y}\left(t^-\right) dt + \underline{e}(t)(\alpha_0(t) + (\underline{a}(t))' \underline{Y}\left(t^-\right))d\left([L, L]^{(d)}\right)(t) \quad , \quad t > 0$$

où $\underline{e}(t) = (0, ...0, h(t))'$ tels que $h(t)$ est une fonction de t. Cette équation peut être écrite sous la forme suivante

$$\underline{Y}'(t) = M(t)\underline{Y}(t)\, dt + \underline{b}(t). \tag{4.37}$$

où $\underline{b}(t) = \underline{e}(t)(\alpha_0(t) + (\underline{a}(t))' \underline{Y}(t^-))d\left([L, L]^{(d)}\right)(t)$.

L'étude de l'E.D.S (4.37) est identique à l'étude de l'.E.D.S à paramètres scalaires d'ordre q qui est défini par

$$\phi_q x^{(q)} + \phi_{n-1}(t)\, x^{(q-1)} + ... + \phi_1(t)\, x = r(t)$$

et si les dérivées de x à q sont continues sur T, alors

$$\phi_q x^{(q)}(t) + \phi_{q-1}(t)\, x^{(q-1)}(t) + ... + \phi_1(t)\, x(t) = r(t)$$

pour tout $t \in T$, on pose $\phi_j = \beta_j$ et $y_i(t) = x^{(i-1)}(t)$. Pour $1 \leq i \leq q$, le vecteur de composantes y_i est la solution de cette équation, si

$$M(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\phi_1(t) & -\phi_1(t) & -\phi_2(t) & \cdots & -\phi_q(t) \end{bmatrix} ;\ \underline{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ r(t) \end{bmatrix}$$

La matrice $M(t)$ est appelée matrice compagne.

Théorème 4.11 *Si la matrice $M(t)$ est continue sur T, alors le système suivant possède une solution unique $\underline{Y}(t)$.*

$$\begin{cases} d\underline{Y}(t) = M(t)\underline{Y}(t)\, dt \\ \underline{Y}(t_0) = \underline{Y}_0 \end{cases} \tag{4.38}$$

tel que $t_0 \in T$ et $\underline{Y}_0$ est le vecteur constant.

Théorème 4.12 *Supposons que la matrice $M(t)$ est continue sur T, $\underline{b}(t)$ est un vecteur continu et $\psi(t) = e^{M(t)}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors l'E.D.S suivante*

$$\begin{cases} d\underline{Y}(t) = M(t)\underline{Y}(t)\,dt + \underline{b}(t) \\ \underline{Y}(t_0) = \underline{Y}_0 \end{cases}$$

où $t_0 \in T$ et $\underline{Y}_0 \in \mathbb{R}^q$, admet la solution

$$\underline{Y}(t) = \psi(t)\,\psi^{-1}(t_0)\,\underline{Y}_0 + \psi(t)\int_{t_0}^{t} \psi^{-1}(s)\,\underline{b}(s)ds$$

pour tout $t \in T$.

Preuve. oir([15]) ■

Définition 4.4 *Soit $\psi(t, \underline{Y}_0) = e^{M(t)}\underline{Y}_0$ la solution de (4.38), alors*

1. On dit que la solution est stable si pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $\|\underline{Y}_0\| < \delta$, alors $\|\psi(t, \underline{Y}_0)\| < \varepsilon$ pour tout $t \geq 0$.
2. On dit que la solution est stable globalement asymptotique sur $[0, \infty)$ si elle est stable sur $[0, \infty)$ et pour tout $\underline{Y}_0 \in \mathbb{R}^q$, $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} \psi(t, \underline{Y}_0) = 0$.

Troisième partie

ESTIMATION DANS LES PROCESSUS $COGARCH\,(1,1)$

Chapitre 5

L'estimation dans les processus $COGARCH\,(1,1)$

On présente dans ce chapitre deux méthodes différentes d'estimation du processus $COGARCH(1,1)$. Au premier lieu, on expose la méthode des moments établie par les chercheurs : Haug, Klüpplebrg, Lindner, et Zapp. Dans le même concept, on montre les algorithmes d'estimation des paramètres et de la consistance de cette méthode ([11] et [12]). Au second lieu, on illustre la méthode d'estimation semi-paramétrique des paramètres du processus $COGARCH(1,1)$ en utilisant la méthode quasi-maximum de vraisemblance et sa consistance publiée par Alexender Szimayer [40].

5.1 La méthode des moments dans les processus $COGARCH(1,1)$

La première approche d'estimation des paramètres du processus $COGARCH(1,1)$ a été établie par Haug, Klüpplebrg, Lindner, et Zapp (2005) ([11]). La première restriction de cette méthode est conditionnée par des observations des processus équidistances. Le but de cette section est d'estimer les paramètres (β, η, φ) du modèle défini dans (4.4) avec des observations équidistances. Pour des raisons simplificatrices, on considère $r = 1$, $E\left(L\left(1\right)\right) = 0$ et $var\left(L\left(1\right)\right) = 1$ ([12]).

Théorème 5.1 *Supposons que le processus de Lévy $\left(L\left(t\right)\right)_{t\geq 0}$ satisfait $E\left(L\left(1\right)\right) = 0$, $Var\left(L\left(1\right)\right) = 1$ et la variance τ_L^2 du M.B est connue avec $0 \leq \tau_L^2 < Var\left(L\left(1\right)\right) = 1$, $E\left(L^4\left(1\right)\right) = 0$, et $\int_{\mathbb{R}} x^3 \nu_L\left(dx\right) = 0$ ainsi que $\Psi\left(2\right) < 0$ doit être assuré en notant par $\left(G_i^{(1)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ les accroissements stationnaires du processus $COGARCH(1,1)$ avec les* *paramètres $\beta, \eta, \varphi > 0$.Soit $\mu, \gamma(0), k, p > 0$,les constantes*

$$E\left(\left(G_i^{(1)}\right)^2\right) = \mu \tag{5.1}$$

$$Var\left(\left(G_i^{(1)}\right)^4\right) = \gamma(0) \tag{5.2}$$

$$\rho(h) = corr\left(\left(G_i^{(1)}\right)^2, \left(G_{i+h}^{(1)}\right)^2\right) = ke^{-hp} \qquad , \ h \in \mathbb{N} \tag{5.3}$$

et on définie

$$M_1 = \gamma(0) - 2\mu^2 - 6\frac{1-p-e^{-p}}{(1-e^p)(1-e^{-p})}k\gamma(0)$$

$$M_2 = \frac{2k\gamma(0)\,p}{M_1(e^p-1)(1-e^{-p})}$$

On peut constater que $M_1, M_2 > 0$. Les paramètres cités ci-dessus sont exprimés en fonction par μ, $\gamma(0)$, k et p, et leurs formulations sont

$$\beta = p\mu \tag{5.4}$$

$$\varphi = p\sqrt{1+M_2} - p \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} \eta &= p\sqrt{1+M_2}\left(1-\tau_L^2\right) + p\tau_L^2 \\ &= p + \varphi\left(1-\tau_L^2\right) \end{aligned} \tag{5.6}$$

Algorithme 5.1 *:Les paramètres sont estimés en faisant recours aux hypothèses suivantes :*

(H$_1$) Les observations $G_i, i = 0, ..., n$ sont équidistantes et on définit les accroissements par : $G_i^{(1)} = G_i - G_{i-1}, i = 1, ..., n$.

(H$_2$) $E(L(1)) = 0$ et $var(L(1)) = 1$, i,e., σ^2 peut être interprété comme une volatilité.

(H$_3$) La variance τ_L^2 du M.B est connue dans $[0, 1)$.

(H$_4$) $\int_{\mathbb{R}} x^3 \nu_L(dx) = 0$, $E(L^4(1)) < \infty$ et $\Psi(2) < 0$.

On définit les vecteurs paramétriques $\underline{\theta} = (k, p)$ et $\underline{v} = (\beta, \eta, \varphi)$

Algorithme 5.2 *:*

étapes 1 On calcule l'estimateur de μ par

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(G_i^{(1)}\right)^2 \tag{5.7}$$

Pour toute valeur fixe de $d \geq 2$ l'autocovariance marginale s'écrit

$$\hat{\gamma}_n = \left(\hat{\gamma}_n\,(0)\,, \hat{\gamma}_n\,(1)\,, ..., \hat{\gamma}_n\,(d)\right)^T \tag{5.8}$$

où

$$\hat{\gamma}_n\,(h) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-h}\left(\left(G_{i+h}^{(1)}\right)^2 - \hat{\mu}_n\right)\left(\left(G_i^{(1)}\right)^2 - \hat{\mu}_n\right) \qquad , h = 0, ..., d.$$

étapes 2 On calcule l'autocorrelation marginale par

$$\underline{\hat{\rho}}_n = \left(\frac{\hat{\gamma}_n\,(1)}{\hat{\gamma}_n\,(0)}, ..., \frac{\hat{\gamma}_n\,(d)}{\hat{\gamma}_n\,(0)}\right)^T \tag{5.9}$$

étapes 3 De même, pour toute valeur fixe de $d \geq 2$, on définie l'application $H : \mathbb{R}_+^{d+2} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$H\left(\underline{\hat{\rho}}_n, \underline{\theta}\right) = \sum_{h=1}^{d}\left(\log\left(\hat{\rho}_n\,(h)\right) - \log k + ph\right)^2 \tag{5.10}$$

et on calcule l'estimateur $\underline{\hat{\theta}}_n$ par

$$\underline{\hat{\theta}}_n = \arg\min_{\underline{\theta}\in\mathbb{R}_+^2} H\left(\underline{\hat{\rho}}_n, \underline{\theta}\right) \tag{5.11}$$

étapes 4 On définit l'application $J : \mathbb{R}_+^4 \longrightarrow [0, \infty)^3$ par

$$J\left(\mu, \gamma\,(0)\,, \underline{\theta}\right) = \begin{cases} \left(p\mu,\ p\sqrt{1+M_2} - p,\ p\sqrt{1+M_2}\,(1-\tau_L^2) + p\tau_L^2\right) & \text{si } p, M_2 > 0 \\ (0,0,0) & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.12}$$

On calcule l'estimateur $\underline{\hat{v}}_n = J\left(\hat{\mu}_n, \hat{\gamma}_n, \underline{\hat{\theta}}_n\right)$, celui $\underline{\hat{\theta}}_n$ est basé sur la fonction d'autocovariance par contre l'estimateur choisi ci-dessous est considéré lorsque k est indépendant de β. Ce qui donne $k_p = cov\left(\left(G_i^{(1)}\right)^2, \left(G_{i+h}^{(1)}\right)^2\right)e^p$.

Si, on calcule le minimum de $H\left(\underline{\hat{\rho}}_n, \underline{\theta}\right)$, on obtient

$$\hat{p}_n^* = \frac{\sum_{h=1}^{d}\left(\log\left(\hat{\rho}_n\,(h)\right) - \overline{\log\left(\hat{\rho}_n\right)}\right)\left(h - \frac{d+1}{2}\right)}{\sum_{h=1}^{d}\left(h - \frac{d+1}{2}\right)^2}.$$

$$\hat{k}_n = \exp\left\{\overline{\log\left(\hat{\rho}_n\right)} + \frac{d+1}{2}\hat{p}_n^*\right\}.$$

avec $\overline{\log\left(\hat{\rho}_n\right)} = \frac{1}{d}\sum\limits_{h=1}^{d}\log\left(\hat{\rho}_n\left(d\right)\right)$ et $\hat{p}_n^*$ peut être négatif.

On définit l'estimateur de p par

$$\hat{p}_n = \max\left\{\hat{p}_n^*, 0\right\}.$$

lorsque $\hat{p}_n = 0$, il correspond à un état non stationnaire. On définit l'application $S : \mathbb{R}_+^{d+1} \longrightarrow \mathbb{R}_+^2$ par $\hat{p}_n^*$ et $\hat{p}_n$ et on note

$$\hat{\rho}_n\left(h\right) = \frac{\hat{\gamma}_n\left(h\right)}{\hat{\gamma}_n\left(0\right)}.$$

Enfin, on déduit l'estimateur $\underline{\hat{\theta}}_n = \left(\hat{k}, \hat{p}\right)$ comme une fonction de $\underline{\hat{\gamma}}_n$, c'est à dire

$$\underline{\hat{\theta}}_n = S\left(\underline{\hat{\gamma}}_n\right).$$

5.1.1 Les propriétés de la méthode d'estimation de moment

Théorème 5.2 *:Supposons $\left(L\left(t\right)\right)_{t\geq 0}$ vérifie $E\left(L^4\left(1\right)\right) < \infty$, et les paramètres du processus $COGARCH(1,1)$ satisfait $\Psi\left(2\right) < 0$ et $\left(\sigma^2\left(t\right)\right)_{t\geq 0}$ est un processus de volatilité strictement stationnaire, alors pour tout $r > 0$ le processus $\left(G_{ir}^{(r)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ est $\alpha-$mélange et décroissant. Si on assure que $\left(\sigma^2\left(t\right)\right)_{t\geq 0}$ est strictement stationnaire alors que le processus des accroissements est aussi strictement stationnaire avec les propriétés de forte mélange ce qui implique que $\left(G_{ir}^{(r)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ est ergodique est appelée le théorème d'ergodicité de Birkhoff.*

Preuve. oir ([12]) ■

Corollaire 5.1 *: lorsque les conditions du théorème précédent sont remplies, on peut obtenir quand $n \longrightarrow \infty$*

$$\begin{array}{lll} \hat{\mu}_n & \longrightarrow & E\left(\left(G^{(1)}\left(t\right)\right)^2\right) \qquad p.s. \\ \hat{\gamma}_n & \longrightarrow & \gamma \qquad\qquad\qquad\qquad p.s. \end{array}$$

Ce corollaire implique la consistance forte de l'estimateur $\left(\underline{\hat{v}}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'argodicité.

Proposition 5.1 *: Considérons les même conditions du théorème 5.1 et en ajoutant l'hypothèse suivante*

($\mathbf{H}_5$) Il existe une constante $\delta > 0$, telle que $E\left(G_1^{8+\delta}\right) < \infty$, alors quand $n \longrightarrow \infty$

$$\sqrt{n}\left(\left[\begin{array}{c}\hat{\mu}_n\\ \hat{\gamma}_n\end{array}\right] - \left[\begin{array}{c}\mu\\ \gamma\end{array}\right]\right) \longrightarrow \mathcal{N}_{d+2}\left(0, \sum\right) \quad \text{en distribution}$$

où la covariance $\sum$ à les composantes

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_{k+2,l+2} &= cov\left(\left(G_1^{(1)}\right)^2\left(G_{1+k}^{(1)}\right)^2, \left(G_1^{(1)}\right)^2\left(G_{1+l}^{(1)}\right)^2\right)\\ &\quad +2\sum_{j=1}^{\infty} cov\left(\left(G_1^{(1)}\right)^2\left(G_{1+k}^{(1)}\right)^2, \left(G_{1+j}^{(1)}\right)^2\left(G_{1+l+j}^{(1)}\right)^2\right).\end{aligned}$$

pour $k, l = 0, ..., d$

$$\sum\nolimits_{1,k+2} = cov\left(\left(G_1^{(1)}\right)^2, \left(G_1^{(1)}\right)^2\left(G_{1+k}^{(1)}\right)^2\right) + 2\sum_{j=1}^{\infty} cov\left(\left(G_1^{(1)}\right)^2, \left(G_{1+j}^{(1)}\right)^2\left(G_{1+k+j}^{(1)}\right)^2\right).$$

pour $k = 0, ..., d$ et $\sum_{1,1} = \gamma(0) + 2\sum\limits_{h=1}^{\infty} k_\gamma e^{-ph}$.

Corollaire 5.2 *On conserve les même conditions illustrées dans la proposition 5.1 alors quand $n \longrightarrow \infty$*

$$\sqrt{n}\left(\hat{\rho}_n - \rho\right) \longrightarrow \mathcal{N}_d\left(0, \sum\nolimits_p\right) \qquad \text{en distribution.}$$

Théorème 5.3 *De même, si les conditions du théorème 5.1 sont assurées, les hypothèses (H_1)-(H_4) sont satisfaites. Pour $S(\gamma)$, on définit l'application $Q : \mathbb{R}^{d+2} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ par $\left(\mu, \gamma^T\right) \longrightarrow Q\left(\left(\mu, \gamma^T\right)\right) = J\left(\mu, \gamma(0), S(\gamma)\right)$, alors quand $n \longrightarrow \infty$*

$$\underline{\hat{v}}_n \longrightarrow \underline{v}_0.$$

Lorsque l'hypothèse (H_5) est vérifiée et quand $n \longrightarrow \infty$

$$\sqrt{n}\left(\underline{\hat{v}}_n - \underline{v}_0\right) \longrightarrow \partial_{(\mu,\gamma)}Q\left(\left(\mu_0, \gamma_0\right)\right)\mathcal{N}_{d+2}\left(0, \sum\right) \qquad \text{en distribution.}$$

5.2 La méthode de quasi-maximum de vraisemblance pour l'estimation dans les processus $COGARCH\,(1,1)$

Dans cette partie, on estime le vecteur des paramètres $\underline{\theta}$ pour des observations au temps continu de G. Pour atteindre ce but, on utilise la méthode de quasi-maximum de vraisemblance. On note par $\underline{\theta}^0$ le vecteur des de valeurs vraies des paramètres. Sachant que le processus de volatilité est défini par

$$dv\,(t) = k\,(\overline{v} - v_{t^-})\,dt + \eta v_{t^-} d[L,L]\,(t) \quad , t > 0.$$

et le processus $COGARCH\,(1,1)\,,\ G = (G\,(t))_{t\geq 0}$ est défini par

$$dG\,(t) = \sqrt{v_{t^-}} dL\,(t)\,.$$

La question qui se pose est comment le vecteur de paramètre $\underline{\theta} = (k, \overline{v}, \eta)'$ pouvant être estimé.

Remarque 5.1 *: Pour simplifier le problème, on prend $E\,(L\,(t)) = 0$ et $E\,(L^2\,(t)) = t$.*

Définition 5.1 *On définit la base naturelle des fonctions martingales estimées par*

$$k_T\,(\underline{\theta}) = \int_0^T v_{t^-}\,(\underline{\theta})\,dt - [G,G]_T\,, \quad \text{pour } t \geq 0.$$

et leur ensemble par

$$\mathcal{M} = \left\{ \underline{S}_T\,(\underline{\theta}) = \int_0^T \alpha_t\,(\underline{\theta})\,dk_T\,(\underline{\theta}) \right\}. \tag{5.13}$$

où $\alpha\,(\underline{\theta}) = (\alpha_t\,(\underline{\theta}))_{t\geq 0}$ est un processus prédictable de dimension trois et deux fois continument différentiable en $\underline{\theta}$. Le but est de dériver la fonction d'estimation optimale $\underline{S}_T^*\,(\underline{\theta})$ [1].

Définition 5.2 *: On écrit la dérivé de la fonction estimée optimale sous la forme*

$$dv_t\,(\underline{\theta}) = k\,(v_{t^-}\,(\underline{\theta}))\,dt + \eta d\,[G,G]\,(t)\,, \qquad t > 0.$$

*l'expression de type de processus Oinstein-Uhlenbeck (**O.U**) gouverné par $\eta d\,[G,G]\,(t)$ donne la solution formelle*

$$v_t\,(\underline{\theta}) = v_0\,(\underline{\theta})\,e^{-kt} + \eta e^{-kt} \int_0^t e^{ks} d\,[G,G]\,(s)\,, \quad t \geq 0.$$

[1] Optimalité dans ce cas est que l'élément $\underline{S}_T\,(\underline{\theta})$ maximise l'information marginale $I_{\underline{S}}\,(\underline{\theta}) = \langle \underline{S}\,(\underline{\theta}) \rangle_T$, qui donne un zone de confiance minimum

Définition 5.3 *:La construction de la fonction d'estimation optimale pour la classe des fonctions marginales estimées donnée dans* (5.13)*, peut être écrite sous la forme*

$$\underline{S}_{kT}^{*}\left(\underline{\theta}\right)=-\int_{0}^{T}\frac{d\overline{k}_{t^{-}}\left(\underline{\theta}\right)}{d\left\langle k_{t}\left(\underline{\theta}\right)\right\rangle_{t^{-}}}dk_{t}\left(\underline{\theta}\right). \tag{5.14}$$

où

$$d\dot{k}_{t}\left(\underline{\theta}\right)=\dot{v}_{t^{-}}\left(\underline{\theta}\right)dt\ ;et\ \ d\overline{k}_{t^{-}}\left(\underline{\theta}\right)=\dot{v}_{t^{-}}\left(\underline{\theta}\right)dt\ ,\quad t>0.$$

et la projection pédictable de processus $k_t\left(\underline{\theta}\right)$ *est donnée par*

$$d\left\langle k_{t}\left(\underline{\theta}\right)\right\rangle_{t}=m_{4}v_{t^{-}}^{2}\left(\underline{\theta}\right)dt.$$

où $m_4=\int x^4\pi\left(dx\right)<\infty$*, alors le quasi-résultat est*

$$S_{T}^{*}\left(\underline{\theta}\right)=\frac{1}{m_{4}}\int_{0}^{T}\frac{\dot{v}_{t^{-}}\left(\underline{\theta}\right)}{v_{t^{-}}^{2}\left(\underline{\theta}\right)}\left(d\left[G,G\right](t)-v_{t^{-}}\left(\underline{\theta}\right)dt\right).$$

Pour quantifier l'estimateur $\underline{\hat{\theta}}_T$*, on résoudre l'équation*

$$\underline{S}_{T}^{*}\left(\underline{\hat{\theta}}_{T}\right)=\underline{0}.$$

Remarque 5.2 *:Les dérivées partielles de* $v_t\left(\underline{\theta}\right)$ *sont*

$$\frac{\partial v_{t}}{\partial k}\left(\underline{\theta}\right)=-t\left(v_{0}-\overline{v}\right)e^{-kt}-\eta\int_{0}^{t}\left(t-s\right)e^{-k(t-s)}d\left[G,G\right](s). \tag{5.15}$$

$$\frac{\partial v_{t}}{\partial\overline{v}}\left(\underline{\theta}\right)=1-e^{-kt}. \tag{5.16}$$

$$\frac{\partial v_{t}}{\partial\eta}\left(\underline{\theta}\right)=\int_{0}^{t}e^{-k(t-s)}d\left[G,G\right](s). \tag{5.17}$$

5.2.1 La consistance de la méthode de quasi-maximum de vraisemblance

Proposition 5.2 *La condition formelle pour la consistance forte (sur un événement* $A\in\Omega$*) est pour tout* $\delta>0$ *(petit)*

$$\lim_{T\longrightarrow\infty}\sup\left(\sup_{\left\|\underline{\theta}-\underline{\theta}^{0}\right\|=\delta}\pounds_{T}\left(\underline{\theta}\right)-\pounds_{T}\left(\underline{\theta}^{0}\right)\right)<0\quad p.s\quad(sur\ A).$$

où le quasi -maximum de vraisemblance $\pounds_T(\underline{\theta})$ est donné par

$$\pounds_T(\underline{\theta}) = -\frac{1}{m_4}\left(\int_0^T \log\left(v_{t^-}(\underline{\theta})\right)dt + \int_0^T \frac{1}{v_{t^-}(\underline{\theta})}d[G](t)\right).$$

par différentiabilité par rapport à $\underline{\theta}$, on vérifie que

$$\frac{\partial \pounds_T(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} = \underline{S}_T^*(\underline{\theta}).$$

Remarque 5.3 *Dans le quasi -maximum de vraisemblance, on montre que*

$$\lim_{T\longrightarrow\infty}\sup\left(\sup_{\left\|\underline{\theta}-\underline{\theta}^0\right\|=\delta}\frac{\pounds_T(\underline{\theta}) - \pounds_T\left(\underline{\theta}^0\right)}{T}\right) < 0 \quad p.s \quad (sur\ A). \tag{5.18}$$

alors pour une structure simple de quasi -maximum de vraisemblance, on peut montrer la consistance forte de cette méthode si (5.18) *est directement vérifiée.*

Théorème 5.4 *Si $E\left(L^4(1)\right) < \infty$, alors l'estimateur $\hat{\underline{\theta}}_T$ est forte consistance par la méthode de quasi -maximum de vraisemblance.*

Définition 5.4 *L'équation différentielle stochastique linéaire est de la forme*

$$dX(t) = (a_1(t)X(t) + a_2(t))\,dt + \sigma(t)\,dW(t), t \geq 0. \tag{5.19}$$

où a_1, a_2, σ sont des fonctions déterminées mesurables et localement bornées en t, et W est un M.B ainsi que X est un processus stochastique, l'E.D.Ordinaire de (5.19) *est donnée par*

$$\frac{dX(t)}{dt} = a_1(t)X(t), \quad t \geq 0.$$

admet la solution

$$\psi(t) = \exp\left(\int_0^t a_1(s)\,d(s)\right), \ t \geq 0.$$

avec $\psi(0) = 1$. La solution forte de (5.19) *vérifiant la condition initiale $X(0)$, est donnée par*

$$X(t) = \psi(t)\left(X(0) + \int_0^t \psi^{-1}(s)\,a_2(s)\,ds + \int_0^t \psi^{-1}(s)\,\sigma(s)\,dW(s)\right), \ t \geq 0. \tag{5.20}$$

Chapitre 6

CONCLUSIONS et PERSPECTIVES

6.1 Conclusions

Le travail que nous avons présenté illustre une recherche portée sur les équations différentielles stochastiques en utilisant le processus ($COGARCH$). En particulier, une application directe sur les processus $COGARCH$ est décrite.

Pour réaliser ce travail, nous avons étudié les modèles ($GARCH$) en temps continu en faisant recours au processus de Lévy largement appliqué en finance mathématique et économétrie.

Le but primordial de ce travail est de formuler le processus de ($COGARCH$) et pour atteindre ce but, il est nécessaire de présenter et d'analyser :

- La formulation de Itô.
- L'intégrale stochastique par rapport aux plusieurs processus.
- La différentielle stochastique.
- L'équation différentielle stochastique.
- La stabilité et l'existence des solutions de l'équation différentielle stochastique.

L'établissement et l'analyse des paramètres cités ci-dessus nous a conduit aux conclusions suivantes :

- La formulation du processus $COGARCH$:

$$\begin{cases} dG\left(t\right) & = \sigma\left(t\right) dL\left(t\right) \\ G\left(0\right) = 0 \end{cases}$$

La formulation différentielle obtenue est composée d'un processus de volatilité $\sigma\left(t\right)$ et celui de Lévy $L\left(t\right)$ dont leurs formulations sont

$$d\sigma^2\left(t^+\right) = \left(\beta - \eta\sigma^2\left(t\right)\right) dt + \varphi\sigma^2\left(t\right) d\left[L, L\right]^{(d)}\left(t\right),$$

$$\phi_t(\theta) = exp(t\eta\left(\theta\right))$$

avec $\phi_t(\theta)$ est la fonction caractéristique du processus de Lévy.

- Cette étude nous a permis d'identifier les propriétés des processus de volitilité et d'espace d'état. L'étude a permis de distinguer la positivité et la stationnarité du processus de volitilité. Dans le même concept, on a pu d'analyser la stationnarité du processus d'espace d'état.

- La stationnarité du processus $\left(COGARCH\right)$.La présente étude affirme que la stationnarité du processus $\left(COGARCH\right)$ est conditionnée par la stationnarité de celui de volatilité.

6.2 Perspectives

Suite aux difficultés confrentées lors de l'établissement de cette étude, nous pouvons dire que les axes suivantes pouvant être de sujets de recherche, à savoir :

- La simulation numérique du processus $\left(COGARCH\right)$.
- L'estimation de ce processus dans l'ordre supérieur.
- Etude de l'équation différentielle stochastique à coefficients variables.

Bibliographie

[1] E.Allen. (2007). Modelisating with Itô stochastic differential equations.Springer.

[2] Applebaum David. (2004). Lévy processes and sochastic calculus. Combridge.

[3] Baim Alan., (1998). Stochastic calculus.

[4] H.Brezis, R.G douglas et A.Jeffery. (2006). Stability of infinite dimentional stochastic differential equations with application.Kia liu.

[5] Brockwell Pter, Chaadaa Erdenebaatar, Lindner Alexander. (2006). Continuous -time GARCH processec. Vol.16.NO.2, pp.790-826.

[6] Capasso Vincenzo, Bakstein David. (2005). An introduction to continuous-time stochastic processes. Birkhauser, pp.1-203.

[7] Stochastic Processes. Wily 1953.

[8] Gami J, cheykle C, Jagers .p, Kurtz TG. (2009). Basics of applied stochastic processes. pp.169-183.

[9] GKelley Walter, C Peterson Allen. (2010). The theory of differtial equation classical and quadrative seconde dition.Springer, pp.1-283.

[10] Jaya P.N.Bishwal. (2008).Parameter estimation in stochastic differential equations.Springer.

[11] S.Haug, C.Klüppelberg, A.Lindner and Zapp. (2005). Estimating the COGARCH(1,1) model-afirst go. J. Economitrics.

[12] S.Haug, C.Klüppelberg, A.Lindner and Zapp. (2007). Method of moment estimation in the COGARCH(1,1) model. J. Economitrics.Vol.10, pp.320-341.

[13] Hui -Hsiun Kuo. (2000). Introduction to stochastic integration, pp.7-203.

[14] Kabanov. yu, R.Lipster, J.stoyanov. (2006). From stochastic calculus to mathematical finance.Springer.

[15] Kai Lio. (2006). Stability of infinite dimentional stochastic differential equations with application.Chapman & hall /CRC, pp.81-176.

[16] Kallsen Jan, Bernhard Versenmyer. (2009). COGARCH as a continuous -time limite of GARCH(1,1).Elsevier.

[17] Kioyosi Itô. (1984). Foundation of stochastic differential equation in infinite dimentional spaces.Siam, pp.1-63.

[18] Klüppelberg Claudia, Maller Ross and Szimayer Alexender. (2010). The COGARCH : Arrview with news on opton pricing and statistical inference.

[19] Klüppelberg Claudia, Lindner Alexender and Maller Ross. (2004). Continuous time volatility modelling COGARCH versus ornstein -Uhlenbeck models.

[20] Klüppelberg Claudia, Lindner Alexender and Maller Ross. (2000). Acontinuous time GARCH processes by Lévy processes stationarity and second ordr behaviour.

[21] Lawrence C. Evans. (1995). Antroduction to stochastic differential equation version 1.2.

[22] Ldzislav Brzezniak and Tomasz Lastaniak. (1999). Basic stochastic processes.Springer, pp.1-209.

[23] Lindner Alexender. (2004). GARCH processes continuous counterparts,part 2.

[24] Ross A.Maller, Muller Gernot and Szimayer Alex. (2008). COGARCH modelling in continuous time for irregulary spaced time seres data .ISI / BS in Bernoulli .Vol.14. NO.2, pp.519-542.

[25] Ross A.Maller, Gernot Müller and Alex Szimayer. (2000). GARCH modelling in continuous time for irregularly space time series data.Submitted to the bernoulli arxiv, math -PR.

[26] P.A Mayer. (1975). Un cours sur les intégrales stochastiques.Springer, pp.178-190.

[27] Paul-André Mayer. (1982). Probabilities and potential B, theory of martingales.

[28] M.Lacus Stefano.(2007). Simulation and Inference for Stochastique Differential Equations. Springer,pp.15-59.

[29] Michael Meyer . (2000). Continuous stochastic calculus with applications to finance.ISBN.

[30] Mörters Peter and Peres Yuval. (2003). Brownien Montion.

[31] J.Morel, F.Takens, B.Teissier. (2007). Lecture notes in mathematics.Springer.

[32] Oksendal Bernt. (2000). Stochastic differential equations, an intoduction with applications.Springer, pp.1-72.

[33] Revuz, D., and M.Yor :(1991) Continuous Martingales and Brownian Motion.Springer.

[34] B.Rozovskii et M.Yor. (2000). Stochastic modelling and applied probability, second edition .Springer, pp.243-310.

[35] Yacine Ait-sahalia, Kimmel Robert. (2007). Maximum likelihood estimation of stochastic volatility models.J.Financial economics 83, pp.413-452.

[36] Serfozo richard. (2009). Basics of applied stochastic processes.Springer, pp.169-387.

[37] Steven E.Shireve. (2000). Sochastic calculus for finance II, continuous -time models.Springer, pp.1-188.

[38] Sidney resnick. (1992). Adventures in stochastic processes. Birkhaüser, pp.482-502.

[39] Stefano M.Lacus. (2008). Simulation and Inference for stochastic Differential equation. Springer ; pp. 18-50.

[40] Szimayer Alexender. (2009). Semi parametric continuous time GARCH models, An estimation function approach.

[41] Todorov Victor. (2008). Estimation of continuous-time stochastic volatility models with jumps using High-Frequency data.

[42] Xiong Jie. (2008). An introduction to stochastic filtring theory.Oxford. Springer, pp.15-79.