

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES

DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

N° d'ordre :

N° série :

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister

OPTION : Proba- Stat

PAR

Safia Leulmi

THEME

Inférence statistique dans les modèles linéaires à temps continu

Applications aux modèles CARMA

SOUTENU PUBLIQUEMENT LE :

DEVANT LE JURY COMPOSE DE :

Présidente	: F. L. Rahmani	MC.	UMC
Rapporteur	: A. Bibi	MC.	UMC
Examineur	: M. Dakhmouche	Pr.	UMC
Examineur	: S. Djeddar	MC.	UMC

PROMOTION : 2008-20011

REMERCIEMENTS

A Mr. A. Bibi, Professeur à l'UMC, de m'avoir encadré et d'avoir contribué de très près dans ce travail. Mes sincères reconnaissances lui sont divulguées pour toutes ses qualités de maître, en la matière.

A Mr. F. Rahmani, Professeur à l'UMC, pour avoir accepté de présider le jury et surtout pour ses fructueux conseils et discussions.

A Mrs. M. Dakhmouche, Professeur à l'UMC et S. Djezzar, Maître de Conférences à l'UMC pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être examinateurs de mon modeste travail et pour leurs conseils et discussions souhaités.

A Mme K. Kababi épouse Kitouni pour son important aide dans la simulation et la programmation et ses orientations et conseils innombrables.

A Mr. S. Leulmi, Professeur à l'Université du 20 Août 1955, Skikda qui grâce à ses conseils et ses discussions, sur le plan fond et forme, le mémoire a vu son actuel finalité.

A Mr. F. Rahmani, Professeur à l'UMC, pour ses aides administratifs, ses fructueux conseils en tant qu'enseignant et parent. Mes sincères reconnaissances lui sont divulguées pour toutes ses qualités de responsable, en la matière.

A tous mes enseignants qui ont contribué à ma formation, du primaire, au secondaire sans oublier ceux de l'université (en graduation & en post graduation) qu'ils trouvent, tous, ici mes reconnaissances et ma gratitude envers eux.....

A mes collègues de la promotion pour leurs services et aides appréciables et surtout pour leur soutien morale qu'ils m'ont toujours manifestée.....Un grand merci.

S. LEULMI

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE	5
1 Formulation du problème	6
2 Objectifs et contributions souhaités	7
3 Organisation du mémoire	7
INTRODUCTION GENERALE	10
I RAPPELS ET COMPLEMENTS	12
1 Outils	13
1.1 Préambule	13
1.2 Processus aléatoires	13
1.3 Filtration	15
1.4 Temps d'arrêt	15
1.5 Martingales	16
1.6 Exemples de processus	16
1.6.1 Processus gaussiens	16
1.6.2 Processus de comptage	17
1.6.3 Processus de Poisson	17
1.6.4 Processus de Lévy	18
1.6.5 Mouvement brownien	19
1.6.6 Processus de Markov et processus de diffusion	21
2 CALCUL STOCHASTIQUE	23
2.1 Préambule	23
2.2 Intégrale stochastique et Martingale	24
2.3 Intégrale stochastique par rapport à un temps d'arrêt	25
2.4 Propriétés élémentaires de l'intégrale d'Itô	25
2.5 Intégrale de Itô des processus de Wiener multidimensionnels	26
2.6 Calcul des moments	28

2.7	Différentielle stochastique	29
2.8	Formule de Itô	31
2.9	Théorème de représentation des martingales	32
2.10	Différentielle stochastique multidimensionnelle	34
3	EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES DU PREMIER ORDRE	35
3.1	Préambule	35
3.2	Définition	35
3.3	Théorème d'existence et d'unicité	36
3.4	Théorèmes et propriétés	37
3.4.1	Solutions fortes	38
3.4.2	Solutions faibles	38
3.4.3	Exemples	38
3.5	Propriétés des solutions Markoviennes	42
3.5.1	Processus de diffusion comme solution de l'équation différentielle stochastique	43
3.5.2	Propriétés fortes de Markov de la solution de l'équation différentielle stochastique :	43
3.6	Théorème de Girsanov	44
3.7	Equation de Kolmogorov	45
3.8	Stabilité des équations différentielles stochastiques	47
3.9	CONCLUSIONS DE LA PARTIE 1	49
II	VERS LES PROCESSUS CARMA	50
4	PROCESSUS CARMA GOUVERNE PAR UN PROCESSUS DE LÉVY	51
4.1	Introduction	51
4.2	Processus CARMA à coefficients constants	52
4.2.1	Propriétés du processus CARMA	54
4.2.2	Exemples	58
4.3	Connexions avec les processus ARMA à temps discret	59
4.4	Processus CARMA à coefficients variables	60
4.4.1	Définition du processus CARMA à coefficients variables	60
4.4.2	Stabilité du processus CARMA à coefficients variables	62
5	ESTIMATION DANS LES PROCESSUS CARMA	64
5.1	Estimation dans les processus CAR(p)	64
5.1.1	Estimation dans les processus CAR(1)	64

5.1.2	Estimation dans les processus CAR(2)	68
5.1.3	Estimation dans les processus CAR(p)	71
5.2	Estimation dans les processus CARMA stables	73
5.2.1	Estimation dans les processus CARMA (2, 1) stable	74
5.3	CONCLUSION DE LA PARTIE 2	75
6	ETUDE EXPERIMENTALE	76
6.1	Simulation du mouvement brownien	76
6.1.1	Simulation des trajectoires du mouvement brownien	76
6.1.2	Simulation de mouvement brownien comme limite d'une marche aléatoire	78
6.1.3	Simulation du mouvement brownien comme une expansion de $L^2[0, T]$	79
6.1.4	Mouvement brownien géométrique	80
6.1.5	Simulation des trajectoires du pont brownien	82
6.2	Conclusions, interprétations, comparaisons et commentaires	82
	CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	84
1	CONCLUSIONS	85
2	PERSPECTIVES	86

88

ANNEXES	88
A. Code de simulation des trajectoires du mouvement brownien	88
B. Code de simulation de Mouvement brownien comme limite d'une marche aléatoire	88
C. Code de simulation de mouvement brownien comme une expansion de $L^2[0,T]$.	88
D. Code de simulation de mouvement brownien géométrique	89
E. Code de simulation des trajectoires du pont brownien	89
Bibliographie	90

INTRODUCTION GENERALE

Formulation du problème

Les mécanismes fondamentaux qui régissent le comportement de plusieurs systèmes physiques, mécaniques, électriques, météorologiques, macro-économiques, financiers, écologiques, sociaux... etc, sont tous modélisés, simulés ou mêmes décrits, convenablement, par les équations différentielles déterministes ou plutôt stochastiques. Comme, en prépondérance ou en majorité, ils interfèrent et interagissent avec leur environnement complexe et imprévisible, il devient, donc, nécessaire de les caractériser par des phénomènes stochastiques. Par exemple, nous citons :

- Dans une plateforme pétrolière, les effets de la houle et du vent sont là et doivent, par conséquent, être pris en charge;
- Dans la caractérisation exacte du prix d'un actif financier, les effets des taux d'intérêts et de l'activité globale de l'économie sont, eux-aussi, fondamentalement, important à prendre en considération;
- Dans un marché d'électricité dérégulé, le modèle *CARMA*(2, 1) simule et représente bien les prix du nouveau marché d'électricité à travers le monde industriel de production et de fourniture d'électricité. La qualité de cette estimation est renforcée et dépitée dans plusieurs études.

Dans tous ces cas, l'environnement, s'il a une régularité statistique, il est fondamentalement chaotique; il agit comme un bruit à l'évolution déterministe des systèmes considérés.

Dans notre travail, nous allons considérer un processus stochastique (en général, vectoriel) sur un espace filtré adéquat, pour décrire l'environnement. Si l'environnement est un processus (vectoriel) décrivant l'état du système, on doit étudier l'équation d'évolution temporelle, supposée comme une fonction aléatoire, avec des conditions initiales.

Dans cette étude, on va se limiter au cas des équations vectorielles du premier ordre. Comme dans le cas des équations différentielles déterministes, il devient très difficile d'obtenir, sous leur forme générale, des résultats intéressants. C'est, plutôt, l'étude et l'analyse des cas particuliers des systèmes d'équations qui peuvent engendrer ou dégager des résultats et des propriétés intéressants sur l'existence et la nature des solutions. Cependant, même dans ces

cas simples, on doit en tenir compte d'une difficulté supplémentaire introduite ou caractérisée par la présence de l'aléa. Dans le chapitre 1, on a caractérisé certains processus stochastiques, tel que le bruit blanc, par un comportement très singulier puisqu'ils n'existent qu'au sens de distributions.

On appelle équations différentielles stochastiques régulières, les équations différentielles stochastiques où les processus décrivant l'environnement sont réguliers, c'est à dire ils sont caractérisés par des fonctions. Leur étude est très similaire au cas des équations différentielles déterministes. La situation se complique davantage, lorsque le processus décrivant l'environnement devient un processus aléatoire. Dans ce dernier cas, la solution du système des équations différentielles stochastiques, si elle existe, est une distribution. En outre, la condition initiale ne suffit pas pour déterminer la solution; Par conséquent, il faut en plus donner un sens à l'intégrale stochastique. Sous ces hypothèses ou conditions, on parle alors d'équations différentielles stochastiques singulières au sens de Itô ou de Stratonovich. Selon l'endroit où l'aléa apparaît dans l'équation, on peut classer les équations différentielles stochastiques en :

- équations avec des conditions initiales aléatoires;
- équations avec partie inhomogène aléatoire;
- équations avec coefficients aléatoires.

Parmi les plus importants processus caractérisés par les équations différentielles, ceux d'*ARMA* à temps continu et à densité spectrale rationnelle, ont été, pour de nombreuses années et le sont aussi de nos jours, d'un grand intérêt. Par conséquent, ils sont de plus en plus considérés [31].

Au cours des 20 dernières années, il y a eu un regain d'utilisation des processus à temps continu, surtout en raison de leur application très réussie dans les modèles des systèmes d'équations différentielles stochastiques aux problèmes relatifs à l'économie financière (financement). Ceci est, très bien, illustrée par la dérivation de la formule de Black-Scholes et ses généralisations (Hull et White (1987)).

Objectifs et contributions souhaités

Parmi les objectifs tracés pour cette étude, nous mentionnons ce qui suit :

- Etude, analyse et synthétisation des phénomènes ou processus à caractère déterministe bruités par un environnement stochastique.
- Compréhension, maîtrise et emploi des équations différentielles stochastiques du type *CARMA*.
- Maîtrise du logiciel *R* et son utilisation pour la simulation et l'implémentation des systèmes sus-cités.

Organisation du mémoire

Ce travail traite des modèles linéaires à temps continu dans les modèles *CARMA*. Il commence par une introduction générale qui met en relief la formulation du problème, les objectifs et l'organisation du mémoire et se termine par une conclusion générale et des perspectives pour, éventuellement, susciter et introduire de futurs travaux de recherche doctorales ou autres. Entre ces 2 bornes, l'étude comporte 3 parties principales. Chacune est subdivisée en chapitres:

- **Rappels et compléments.**
- **Processus ARMA à temps continu.**
- **Etude expérimentale ou simulation.**

La 1^{ère} partie contient 3 chapitres importants. Le chapitre 1 traitera, brièvement, la théorie des processus stochastiques à temps continu. Il va, aussi, énoncer les définitions et les théorèmes de base sur les processus à accroissements indépendants, martingales, et les processus de Markov. Les 2 classes fondamentales des processus, à savoir, ceux de Poisson et de Wiener seront, elles-aussi, introduites avec la plus grande et plus générale classe du processus de Lévy, enfin du même chapitre [57]. Le chapitre 2 est basé sur la théorie de Itô. Nous allons, en premier lieu, donner la définition de l'intégrale de Itô. Certains résultats fondamentaux du calcul de Itô, et les différentielles stochastiques dont la formule de Itô, ainsi que les résultats connexes, comme le théorème de représentation des martingales sont, eux-aussi, évoqués en deuxième position. Le chapitre 3 sera consacré à l'analyse des équations différentielles stochastiques entraînées par des processus de Wiener et des diffusions de Itô [57] et [37]. On s'intéressera aussi, dans ce même chapitre, à l'étude du problème d'existence et d'unicité de la solution des équations différentielles stochastiques, ainsi qu'à leurs propriétés par l'utilisation et l'illustration des exemples [32] et [2].

Dans la deuxième partie, nous considérerons, dans un premier temps, les processus *ARMA* à temps continu (noté *CARMA*) gouverné par un processus de Lévy à coefficients constants [11] et [14]. Comme, la plupart des applications financières sont des processus du second moment, elles sont et mêmes seront, généralement, considérées comme suffisantes. Les procédés analogues, sous l'hypothèse du second ordre, sont pris en compte dans Brockwell (2001). De même, nous allons examiner la définition et les propriétés, qui découlent des fonctions du noyau et d'autocovariance, tout en précisant les fonctions caractéristiques communes et nous en discuterons, par la suite, la question de la causalité. Sous l'hypothèse d'existence des racines distinctes autorégressives, quelques représentations, particulièrement, dociles du noyau, la fonction d'autocovariance et le processus lui-même seront, eux-aussi, dérivés. La question de la récupération du processus gouverné par un processus (continu) sur un intervalle $[0, T]$ sera, également, évoquée. Au milieu de cette partie, nous entamerons l'étude et l'analyse des liens entre les processus *ARMA* à temps continu et ceux à temps discret. Dans

la dernière phase de cette partie, on analysera les processus *CARMA* à coefficients variables tout en insistant sur sa stabilité. Les estimateurs du maximum de vraisemblance dans les modèles *CARMA* à coefficients constants ont été, eux-aussi, énoncés et essayés ou utilisés [15], [16] et [50].

Dans la dernière partie, nous effectuerons une étude de simulation d'un mouvement brownien, à titre d'application de notre étude. Comme déjà cité plus haut, le travail se terminera par des conclusions et des perspectives pour, éventuellement, susciter et introduire de futurs travaux de recherche doctorales ou autres.

ABREVIATIONS

ARMA	Autorégressifs moyens mobiles.
CARMA	Autorégressifs moyens mobiles à temps continu.
càdlàg	Continue à droite avec des limites à gauche.
\otimes	Produit tensoriel des σ algèbres.
$C^k([a, b])$	Espace des fonctions réelles k fois continûment dérivables sur $]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$.
E. D. S	Equation différentielle stochastique.
i.e.,	C'est-à-dire.
I. I. D	Indépendant et identiquement distribué.
$L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$	L'espace des variables aléatoires du carré P – intégrable.
max	Maximum.
min	Minimum.
p. s.	Presque sûrement.
\mathbb{R}^n	Espace euclidien usuel.
v. a. r	Variable aléatoire réelle.

Part I

RAPPELS ET COMPLEMENTS

Chapitre 1

Outils

1.1 Préambule

Dans ce travail, nous nous basons sur la théorie de Kolmogorov relative aux processus stochastiques. Nous allons les considérer comme une famille de variables aléatoires définie sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) . Ainsi, on peut en définir une fonction aléatoire et une loi de probabilité sur l'espace des trajectoires du processus. Plus précisément, les processus stochastiques généralisent la notion des vecteurs aléatoires de dimension finie des variables aléatoires dans le cas d'une famille de variables aléatoires indexées par un ensemble quelconque T . En général, ce dernier représente le «temps» qui est un intervalle de \mathbb{R}_+ (dans le cas continu) ou de $\overline{\mathbb{N}}$ (dans le cas discret).

1.2 Processus aléatoires

Processus Stochastique Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace de probabilité et (E, \mathcal{B}) un espace probabilisable. Un processus aléatoire $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ défini sur (Ω, \mathcal{A}, P) et à valeurs dans (E, \mathcal{B}) est une famille de variables aléatoires indexée par un sous-ensemble de \mathbb{R}_+ , souvent assimilée au temps. C'est, donc, une fonction à 2 variables : le temps et l'état ω de l'univers. Pour chaque ω fixé de Ω , l'application qui à t associe $X(\omega, t)$ est appelée trajectoire du processus. Dans tout ce qui suit, on omit la variable ω . (E, \mathcal{B}) est appelé espace des phases ou des états.

σ -Algèbre générée par un processus stochastique Notons $\mathcal{F}_t = \sigma(X(s), s \leq t)$, c'est la plus petite σ -algèbre qui contient les ensembles de la forme $\{a \leq X(s) \leq b\}$ pour $s \leq t$ avec $t, a, b \in \mathbb{R}$. Ce sont les informations disponibles pour une observation du processus X à l'instant t .

Processus continu Un processus $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ à valeurs réelles est continu en probabilité si :

$$P - \lim_{s \rightarrow t} X(s) = X(t), \quad s, t \in \mathbb{R}_+.$$

i. e., $\forall t \in \mathbb{R}_+$ et $\varepsilon > 0$, on a :

$$\lim_{s \rightarrow t} P(|X(t) - X(s)| \geq \varepsilon) = 0.$$

Processus localement continu en probabilité Un processus $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est dit localement continu en probabilité si $\forall t \in \mathbb{R}_+$ et à tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} P(|X(t+h) - X(t)| > \varepsilon) = 0.$$

i. e., $\forall t \in \mathbb{R}_+$ et à tout couple $(\varepsilon, \eta) > 0$, on a :

$$P(|X(t+h) - X(t)| > \varepsilon) < \eta.$$

Processus à accroissements indépendants Un processus stochastique $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est dit à accroissements indépendants si $\forall n \geq 1; 0 < t_1 < \dots < t_n$, les accroissements $X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ sont indépendants.

Processus à accroissements stationnaires Dire que les accroissements sont stationnaires signifient que la loi de chaque accroissement $X(s) - X(t)$ ne dépend que de la longueur $s - t$ de l'intervalle de temps.

Processus càdlàg Le processus $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est dit continu à droite avec limite à gauche (càdlàg) s'il a des trajectoires continues à droite et ont des limites à gauche p.s.

Processus équivalents Un processus $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ s'appelle une modification (ou une équivalence) de $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ si :

$$P(\omega \in \Omega : X(t, \omega) = Y(t, \omega)) = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Fonction de covariance La fonction de covariance d'un processus $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ (lorsque elle existe) est définie par :

$$\begin{aligned} \gamma(r, s) &= Cov(X(r), X(s)) = E\{(X(r) - E\{X(r)\})(X(s) - E\{X(s)\})\} \\ &= E\{X(r)X(s) - E\{X(r)\}E\{X(s)\}\}, \quad \forall s, r \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Stationnarité au second ordre Un processus $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ de L^2 est dit stationnaire au second ordre si :

1. $E\{X(t)\} = m$. (ne dépend pas de t , $\forall t \in \mathbb{R}_+$).
2. $\gamma(r, s) = \gamma(s+1, r+1)$, $\forall t, s, r \in \mathbb{R}_+$. (i.e., $\gamma(r, s)$ est une fonction périodique de période 1).

Stabilité d'un processus stochastique Parmi les définitions de la stabilité, on retient dans tout ce qui suit la définition suivante : $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ doit satisfaire la condition suivante : $E|X(t)|^2 < +\infty$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

Processus linéaire Le processus $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est dit linéaire s'il admet la représentation suivante :

$$X(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Psi_j Z(t-j). \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

où $Z(t)$ est une suite de v. a centrée non corrélée et Ψ_j est une suite de constantes telles que la série précédente est convergente p.s.

Exponentielle d'une Matrice Soit A une matrice carrée. On pose :

$$e^{At} = I + \frac{1}{1!}At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}A^n t^n. \quad (1.1)$$

Cette série converge normalement pour tout A et pour chaque t .

Remarque 1.1 Pour calculer e^{At} , il est commode d'utiliser le théorème suivant :

Théorème Si A est une matrice carrée de dimension n alors :

$$e^{At} = a_{n-1}A^{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2}t^{n-2} + \dots + a_1At + a_0I.$$

où a_0, a_1, \dots, a_n sont des fonctions en t entièrement déterminées pour chaque matrice A .

1.3 Filtration

Une filtration sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}) est une collection de σ -algèbre $\{\mathcal{F}_t\}$ satisfaisant :

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F} \quad \text{pour tout } 0 < s < t < \infty.$$

Étant donné une filtration $\{\mathcal{F}_t\}$. On a $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t\right)$, On note \mathcal{F}_∞ est contenue dans \mathcal{F} , mais peut être incluse strictement dans \mathcal{F} . $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ est appelé un espace de probabilité filtré.

Un processus stochastique $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ sur cet espace est appelé adapté si pour tous t , $X(t)$ est \mathcal{F}_t -mesurable.

1.4 Temps d'arrêt

Dans tout ce qui suit, l'espace (Ω, \mathcal{F}, P) est un espace de probabilité. $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une filtration de (Ω, \mathcal{F}, P) .

Temps d'arrêt Une v.a. T à valeurs dans $[0, +\infty]$ est dite un temps d'arrêt si $\forall t \geq 0$: $[T = t]$ est \mathcal{F}_T -adaptée. On définit ainsi, la tribu \mathcal{F}_T la tribu des événements antérieurs à T :

$$\mathcal{F}_T = \{\Lambda \in \mathcal{F}_\infty : \Lambda \cap [T = t] \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0\}.$$

Lemme 1.2 Toute v.a. positive à valeurs dans $[0, +\infty[$ est un temps d'arrêt si et seulement si l'une des conditions suivantes soit satisfaite :

1. $\forall t \geq 0 : [T \leq t] \in \mathcal{F}_t$.
2. $\forall t \geq 0 : [T > t] \in \mathcal{F}_t$.

1.5 Martingales

Soit $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus défini sur l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) et soit $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ une filtration;

1. Le processus $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est dit \mathcal{F}_t -adapté si $\forall t \geq 0$, la variable aléatoire $X(t)$ est \mathcal{F}_t -mesurable.
2. Le processus $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est dit martingale si :
 - a. $\forall t \in \mathbb{R}_+, E(|X(t)|) < +\infty$.
 - b. $E(X(t) | \mathcal{F}_s) = X(s)$, p.s. si $0 < s < t$.
3. Si dans la propriété (2.b), le signe " = " est remplacé par " \geq " (resp. " \leq "), alors $(X(t); \mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est dite sous (resp. sur) martingale.
4. **Doob-Lévy martingale.** Soit Y une variable aléatoire intégrable, alors : $M(t) = E(Y | \mathcal{F}_t)$ est une martingale.
5. La sous martingale peut être traitée via la décomposition de Doob ou à travers quelques résultats simples de l'Inégalité de Jensen. En effet,

toute sous martingale $(X(t); \mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ admet une décomposition unique sous la forme :

$$X(t) = M(t) + A(t), \quad \forall t \geq 0.$$

où $(M(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une martingale et $(A(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus privisible.

6. Soient $(X(t); \mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ une martingale, φ une fonction convexe, telle que : $E(|\varphi(X(t))|) < +\infty$, alors $(\varphi(X(t)); \mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une sous martingale.

1.6 Exemples de processus

1.6.1 Processus gaussiens

Un processus $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ à valeurs dans \mathbb{R} est dit processus gaussien si toutes les combinaisons linéaires finies du processus $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ suivent une loi normale, i. e.,

$$\forall n \geq 1; t_1 < \dots < t_n; \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} : \alpha_1 X(t_1) + \dots + \alpha_n X(t_n) \rightsquigarrow N(m_t, \sigma_t^2).$$

Par conséquent, le vecteur aléatoire $\underline{X}(t) = (X(t_1), \dots, X(t_n))'$ est gaussien $\forall n \geq 1$; $\underline{t} = (t_1, \dots, t_n)$. La densité de probabilité est :

$$f(\underline{X}(t) | \underline{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det K}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\underline{X}(t) - \underline{m}(t))' K^{-1} (\underline{X}(t) - \underline{m}(t)) \right\}, \quad \underline{m}(t) = (m(t_1), \dots, m(t_n))$$

où :

$$\begin{cases} m_i = E(X(t_i)) & \text{avec } i = 1, \dots, n \\ K = \sigma_{ij} = \text{cov}(X(t_i), X(t_j)) & \text{avec } i, j = 1, \dots, n \end{cases}.$$

1.6.2 Processus de comptage

Soit $(\tau_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite strictement croissante de variables aléatoires positives sur l'espace (Ω, \mathcal{F}, P) , avec $\tau_0 \equiv 0$. Ensuite, le processus $(N(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ défini par :

$$N(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} I_{[\tau_i, +\infty[}(t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+,$$

à valeur dans $\overline{\mathbb{N}}$, est appelé un processus de comptage associé à la séquence $(\tau_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$. La variable aléatoire $\tau = \sup_{\tau_i}$ est le temps d'explosion du processus. Si $\tau = \infty$ presque sûrement, alors $(N(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est non explosifs.

1.6.3 Processus de Poisson

Processus de Poisson Un processus de comptage $(N(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est appelé processus de Poisson de densité (intensité) λt ($\lambda > 0$), s'il vérifie les propriétés suivantes :

1. $N(0) = 0$.
2. Le processus $(N(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est à accroissements indépendants.
3. $(N(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ suit une loi de Poisson de densité λt . i. e.,

$$\begin{aligned} P(N(t) = n) &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}. \\ E[N(t)] &= \lambda t, \quad \text{Var}[N(t)] = \lambda t. \end{aligned}$$

Proposition 1.3 Soit $(N(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus de comptage $(N(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $N(0) = 0$.
2. $N(t)$ est à accroissements stationnaires.
3. $N(t)$ est à accroissements indépendants. (i. e., pour $s, t \in \mathbb{R}_+$, $N(t+s) - N(t)$ est indépendant de \mathcal{F}_t).
4. $N(t)$ est localement continu en probabilité.

Alors le processus $(N(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus de Poisson.

1.6.4 Processus de Lévy

Soit $(L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ avec $L(0) = 0$ p.s., le processus $(L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est dit de Lévy, s'il est :

1. à accroissements indépendants.
2. à accroissements stationnaires.
3. continu en probabilité.

La fonction caractéristique du processus de Lévy $(L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$, $\phi_t(\theta) = E(\exp(i\theta L(t)))$ admet la représentation de Lévy-Khintchine :

$$\phi_t(\theta) = \exp(t\zeta(\theta)),$$

où :

$$\zeta(\theta) = i\theta m - \frac{1}{2}\theta^2 \sigma^2 + \int_{\mathbb{R}^*} \left(e^{i\theta x} - 1 - ix\theta I_{\{|x| < 1\}} \right) \nu(dx), \quad m \in \mathbb{R}, \quad \sigma \geq 0.$$

La mesure ν est sur les sous-ensembles de Borel de $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. ν est la mesure du processus de Lévy $(L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ qui satisfait :

$$\int_{\mathbb{R}^*} \frac{u^2}{1+u^2} \nu(dx) < \infty,$$

Une richesse de distributions pour $L(t)$ est atteinte ou obtenue par un choix convenable de la mesure ν comme le montre Baradorff-Nielsen et Shephard (2001) :

- Si $\nu = 0 \implies (L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien de moyenne $E(L(t)) = mt$ et de variance $Var(L(t)) = \sigma^2 t$.
- Si $m = \sigma^2 = 0$, $\int_{\mathbb{R}^*} \frac{|u|}{1+u^2} \nu(dx) < \infty \implies (L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus de Poisson composé avec la dérive.
- Si $\nu(du) = \alpha u^{-1} e^{-\beta u} du \implies (L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus gamma avec $\zeta(\theta) = \int_{\mathbb{R}^*} (e^{i\theta x} - 1) \nu(dx) = (1 - i\theta/\beta)^{-\alpha t}$.
- Si $\nu(du) = \frac{1}{2}\alpha |u|^{-1} e^{-\beta|u|} du \implies (L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus gamma symétrisée ($L(1)$ – $L(2)$).
- Si $\nu(du) = \exp(-c|\theta|^\alpha)$, $0 < \alpha \leq 2 \implies (L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus symétrique stable.

Pour éviter les problèmes d'identification des paramètres, nous devons supposer que $Var(L(1)) = 1$. Par conséquent, pour tout $t \geq 0$, $Var(L(t)) = t$, il existe une constante réelle μ telle que $E(L(t)) = \mu t$, pour tout $t \geq 0$. Dans ce travail, nous nous intéressons à ce type de processus $(L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ dit processus de Lévy standard du second ordre, dénoté "SSLP".

1.6.5 Mouvement brownien

Mouvement brownien à valeurs réelles

Un processus $(W(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ réel est dit mouvement brownien standard ¹ (ou processus de Wiener) s'il est à accroissements indépendants, $W(0) = 0$ et pour tout $t \geq 0$; $W(t) \sim N(0, t)$.

Propriétés

- Le processus $(\tilde{W}(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ défini par $\tilde{W}(t) = W(t) + a$ est un mouvement brownien et dans ce cas, on aura : $\tilde{W}(t) \rightsquigarrow N(0, at)$.
- Le processus $(Z(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ défini par $Z(t) = \sigma W(t)$ est un mouvement non standard.
- Tout processus réel continu $(W(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ à accroissements indépendants est dit processus brownien.
- Le mouvement brownien $(W(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus gaussien.
- Soit $(W(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien, alors :
 1. $(W(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une martingale.
 2. $(W^2(t) - t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une martingale.
 3. $\exp\left\{uW(t) - \frac{u^2}{2}t\right\}$ est une martingale, pour tout u .
 4. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $E[W(t)] = 0$ est une différence de martingale.
 5. $\gamma(s, t) = \text{cov}(W(t), W(s)) = \min\{s, t\}$, $s, t \in \mathbb{R}_+$.
 6. Si $(W(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien à valeurs réelles, alors il a des trajectoires p.s., continues.
 7. Si $(W(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien à valeurs réelles, alors :

$$\forall h > 0 : P\left(\max_{0 \leq s \leq h} W(s) > 0\right) = P\left(\min_{0 \leq s \leq h} W(s) < 0\right) = 1.$$

Ce dernier poids mérite une clarification $t \in \mathbb{R}_+$ et $h > 0$ et comme $(W_{t+h} - W_t) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, h)$, posons $Z_{t,h} = \frac{W_{t+h} - W_t}{\sqrt{h}}$, alors il existe un $r > 0$ tel que :

$$E[|Z_{t,h}|^r] > 0 \text{ et que } E[|W_{t+h} - W_t|^r] = E[|Z_{t,h}|^r] h^{r/2}.$$

¹Le mouvement brownien est le nom donné aux trajectoires irrégulières du pollen en suspension dans l'eau, observé par le botaniste **Robert Brown** en 1828.

Si on prend $r = 2(1 + \varepsilon)$, on trouve, d'une part que $E[|W_{t+h} - W_t|^r] = ch^{1+\varepsilon}$, où $c = E[|Z_{t,h}|^r]$ et d'autre part :

$$\begin{aligned} P\left(\max_{0 \leq s \leq h} W(s) > a\right) &= 2P(W(h) > a) \\ &= 2P\left(\frac{W(h)}{\sqrt{h}} > \frac{a}{\sqrt{h}}\right) \\ &= 2\left(1 - \phi\left(\frac{a}{\sqrt{h}}\right)\right). \end{aligned}$$

Lorsque $a \rightarrow 0$, $2\left(1 - \phi\left(\frac{a}{\sqrt{h}}\right)\right) \rightarrow 1$, et $P\left(\max_{0 \leq s \leq h} W(s) > 0\right) = 1$. De plus, on a :

$$P\left(\min_{0 \leq s \leq h} W(s) < 0\right) = P\left(\max_{0 \leq s \leq h} (-W(s)) > 0\right) = 1,$$

on peut observer que :

$$P\left(\max_{0 \leq s \leq h} W(s) > 0, \forall h > 0\right) \geq P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\max_{0 < s < \frac{1}{n}} W(s) > 0\right)\right) = 1.$$

D'où :

$$P\left(\max_{0 \leq s \leq h} W(s) > 0, \forall h > 0\right) = 1, P\left(\min_{0 \leq s \leq h} W(s) < 0, \forall h > 0\right) = 1.$$

Mouvement brownien à valeurs dans \mathbb{R}^n

- Un processus stochastique $(\underline{W}(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$, ($\underline{t} = (t_1, \dots, t_n)$, $\underline{W}(\underline{t}) = (W(t_1), \dots, W(t_n))'$) à valeurs dans \mathbb{R}^n est dit mouvement brownien si :
 1. Pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, le $(W_i(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien.
 2. Pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, les $(W_i(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ sont indépendants.
- La variable aléatoire $\underline{W}(\underline{t}) = (W(t_1), \dots, W(t_n))$ est gaussienne centrée et de matrice de variance-covariance notée $\Lambda = (\min(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

Proposition 1.4

1. **Variable aléatoire maximale** : Soit $(\underline{W}(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien standard pour $a > 0$, on a :

$$P\left(\sup_{0 \leq s \leq t} W(s) \geq a\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{|a|}{\sqrt{2\pi}}}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

2. Soit $(\underline{W}(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ le mouvement brownien standard, alors $\underline{W}(t)$ n'est dérivable en aucun $t \in \mathbb{R}_+$ p.s.

Exemple 1.5 Le processus de Wiener et le processus de Poisson sont des processus de Lévy.

1.6.6 Processus de Markov et processus de diffusion

Processus de Markov

Définition Soit $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus défini sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) , à valeurs dans (E, \mathcal{B}) et adapté à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$. $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus de Markov par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ si la condition suivante est satisfaite :

$$\forall B \in \mathcal{B}, \forall (s, t) \in \mathbb{R}_+^2, s < t : P(X(t) \in A | \mathcal{F}_s) = P(X(t) \in A | X(s)).$$

où (\mathcal{F}_t) est la filtration associée au processus $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$.

Exemple 1.6 *Tout processus stochastique à valeurs réelles $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ et à accroissements indépendants est un processus de **Markov**.*

Probabilité de transition Soient $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$; $x \in \mathbb{R}$ et $0 < s < t < \infty$. La probabilité $P(X(t) \in A | X(s))$ notée $p(s, X(s), t, A)$ est appelée probabilité de transition du processus de Markov si $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ satisfait les propriétés suivantes :

1. Pour tout $0 \leq s < t < \infty$, et tout $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $p(s, \cdot, t, A)$ est $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ -mesurable.
2. Pour tout $0 \leq s < t < \infty$, et tout $x \in \mathbb{R}$, $p(s, x, t, \cdot)$ est une probabilité sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.
3. p satisfait les équations de Chapman-Kolmogorov :

$$p(s, x, t, A) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(s, x, r, dy) p(r, y, t, A) \quad \forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq s < r < t.$$

Les propriétés 1 et 2 expriment que la probabilité de transition $p(s, X(s), t, A)$ est un noyau de transition et conservent les équations de Chapman-Kolmogorov. Ces dernières résultent des propriétés des espérances conditionnelles.

Processus homogènes de Markov Un processus de Markov $(X(t))_{t \in [t_0, T]}$ est dit homogène si la probabilité de transition $p(s, x, t, A)$ ne dépend que de l'écart temporel $t - s$. Par conséquent, pour tous $(s, t) \in [t_0, T]^2$, $s < t$, pour tout $u \in [0, T - t]$, pour tout $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $p(s, x, t, A) = p(s + u, x, t + u, A)$, p.s.

Processus de diffusion

Définition Un processus de Markov $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est dit un processus de diffusion si son noyau de transition $p(s, x, t, A)$ satisfait les propriétés suivantes :

1. Pour tout $\varepsilon > 0$ et $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$:

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|x-y| > \varepsilon} p(t, x, t+h, dy) = 0.$$

2. Il existe 2 fonctions $a(t, x)$ et $b(t, x)$ telles que pour tous $\varepsilon > 0$; $t \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}$:

2.a. $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|x-y|>\varepsilon} (y-x) p(t, x, t+h, dy) = a(t, x).$

2.b. $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|x-y|>\varepsilon} (y-x)^2 p(t, x, t+h, dy) = b(t, x).$

La fonction $a(t, x)$ est appelée fonction de dérive ou de déplacement et $b(t, x)$ est appelée fonction de diffusion.

Exemple 1.7 *Le mouvement brownien standard est un processus de diffusion de coefficient de dérive $a(t; x) = 0$, et coefficient de diffusion $b(t; x) = 1$.*

Chapitre 2

CALCUL STOCHASTIQUE

2.1 Préambule

Les théories de l'intégrale stochastique et des équations différentielles stochastiques ont été, initialement, développées par Kiyosi Itô vers 1940 (un des premiers articles importants a été publié en 1942).

Le calcul différentiel est la base fondamentale du théorème des équations différentielles ordinaires, qui sert de modèle caractérisant les phénomènes variables dans le temps. La présence des perturbations aléatoires dans ces équations a été générée par l'introduction d'un mouvement brownien non différentiable. Ensuite, on construit une intégrale par rapport au mouvement brownien définissant; ainsi; la notion d'équation différentielle stochastique.

L'intégrale stochastique se construit de façon semblable à celle classique de Riemann-Stiljes. L'intégrale est, d'abord, définie sur une classe de processus constants par morceaux. Ensuite, elle est étendue à une classe plus large par approximation. Il y a, cependant, 2 grandes différences entre l'intégrale de Riemann et l'intégrale d'Itô :

1. La première est le type de convergence : Les approximations de l'intégrale de Riemann converge dans \mathbb{R} tandis que l'intégrale d'Itô est approchée par des séquences de variables aléatoires qui convergent dans L^2 , l'espace des variables aléatoires de carrés intégrables (variance finie).
2. La deuxième différence est la suivante :

- Les sommes de Riemann approchant l'intégrale d'une fonction $f : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ sont de la forme :

$$\sum_{j=0}^{n-1} f_j(s_j)(t_{j+1} - t_j),$$

avec $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ et s_j un point arbitraire dans $[t_{j+1}, t_j]$ pour tout j . La valeur de l'intégrale de Riemann ne dépend pas du choix des points $s_j \in [t_{j+1}, t_j]$.

- Les sommes stochastique approximantes prennent la forme :

$$I(f_n) = \sum_{j=0}^{n-1} f_j(s_j) (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}).$$

La limite de telles approximations dépend du choix des points intermédiaires $s_j \in [t_{j+1}, t_j]$. De façon à lever l'ambiguïté on prend $s_j = t_j$ pour tout j . Comme on prend la borne inférieure de l'intervalle, les approximations à une certaine date ne dépendent que de l'information connue à cette date et pas des événements futurs.

L'intégrale d'Itô se note $\int_0^\infty f(s) dW(s)$ et est définie de telle façon que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E \left[\left| \int_0^\infty f(s) dW(s) - I(f_n) \right|^2 \right] = 0.$$

2.2 Intégrale stochastique et Martingale

Définition 2.1 Soient $[a, b] \in [0, +\infty[$ et $(W(t))_{t \in [a, b]}$ un processus de Wiener défini sur l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) et \mathcal{C} l'ensemble des fonctions $f_t(\omega) : [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions suivantes :

1. f est $\mathcal{B}_{[0, T]} \otimes \mathcal{F}_{t-}$ mesurable.
2. Pour tout $t \in [a, b]$, $f(t, \cdot) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est \mathcal{F}_{t-} mesurable, où $\mathcal{F}_t = \sigma(X(s), a \leq s \leq t)$.
3. Pour tout $t \in [a, b]$, $f(t, \cdot) \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $\int_a^b E[|f_t(\omega)|^2] dt < \infty$.

Définition 2.2 Soit \mathcal{C}_1 l'ensemble des fonctions $f(t, \omega) : [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de telle sorte que les conditions 1 et 2 de la caractérisation de la classe \mathcal{C} sont satisfaites, mais, au lieu de la condition 3, nous utilisons la condition suivante :

$$P \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty \right) = 1.$$

Théorème 2.3

- Si $f \in \mathcal{C}$ et pour tout $t \in [a, b]$; $X(t) = \int_a^t f(s) dW(s)$, alors $(X(t))_{t \in [a, b]}$ est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(W(s); a \leq s \leq t)$.
- La martingale $(X(t))_{t \in [a, b]}$ est continue..
- Si $f \in \mathcal{C}_1$, alors le processus $(X(t))_{t \in [a, b]}$ admet une modification continue.

Preuve. Voir [55] pages 139 – 140. ■

2.3 Intégrale stochastique par rapport à un temps d'arrêt

- Soit $f \in \mathcal{C}_1$, $(W(t))_{t \in [a,b]}$ un processus de Wiener. τ_1 et τ_2 sont 2 temps d'arrêt tel que : $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq T$, ($T > 0$), alors :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t) dW(t) = \int_0^{\tau_2} f(t) dW(t) - \int_0^{\tau_1} f(t) dW(t).$$

- δ_i sont \mathcal{F}_t -mesurables ($i = 1, 2$), où

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq \tau_i \\ 0 & \text{si } t < \tau_i \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

- $\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t) dW(t) = \int_0^T \delta_2 f(t) dW(t) + \int_0^T \delta_1 f(t) dW(t)$.

Théorème 2.4 Si $f \in \mathcal{C}_1$ et τ_1, τ_2 sont 2 temps d'arrêt tel que $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq T$, alors :

1. $E \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t) dW(t) \right] = 0$.
2. $E \left[\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t) dW(t) \right)^2 \right] = E \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} |f(t)|^2 dt \right]$.

Preuve. Voir [55] page 134. ■

2.4 Propriétés élémentaires de l'intégrale d'Itô

Pour tout $f, g \in H_{p,s}$, l'intégrale $I(f)$ donnée par :

$$I(f) = \int_0^t f(s) dW(s),$$

satisfait :

1. **Linéarité :**

$$\int_0^t (f(s) + g(s)) dW(s) = \int_0^t f(s) dW(s) + \int_0^t g(s) dW(s),$$

et

$$\int_0^t (cf(s)) dW(s) = c \int_0^t f(s) dW(s).$$

2. **Additivité** : Pour $0 \leq s < u < t \leq T$:

$$\int_s^t f(v) dW(v) = \int_s^u f(v) dW(v) + \int_u^t f(v) dW(v).$$

3. Si $\int_0^t E[f(t)^2] dt < \infty$, alors pour tout $t \leq T$:

$$E \left[\int_0^t f(s) dW(s) \right] = 0.$$

et

$$E \left[\left(\int_0^t f(s) dW(s) \right)^2 \right] = \int_0^t E[f(s)^2] dt, \text{ (l'isométrie de It\^o).}$$

4. Pour tout $t \leq T$:

$$E \left[\left(\int_0^t f(t) dW(t) \right) \left(\int_0^t g(t) dW(t) \right) \right] = \int_0^t E(f(t)g(t))dt.$$

5. **Propriétés de martingale** :

$$E \left[\int_0^t f(u) dW(u) | \mathcal{F}_s \right] = \int_0^s f(u) dW(u).$$

L'intégrale stochastique sert de base à la définition des processus de diffusion.

Preuve. Voir [55]. ■

2.5 Intégrale de Itô des processus de Wiener multidimensionnels

On note par $\mathcal{M}_{n \times m}$ l'ensemble des matrices réelles $n \times m$ et par $(\underline{W}(t) = (W(t_1), \dots, W(t_n))')$, $t_i \in [a, b]$ un processus de Wiener n -dimensionnel.

Soit $[a, b] \subset [0, +\infty[$. Posons :

$$\mathcal{C}_{\underline{W}}([a, b]) = \{f : [a, b] \times \Omega \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times m} : \forall 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq m; f_{ij} \in \mathcal{C}_{\underline{W}_j}([a, b])\},$$

$$\mathcal{C}_{\underline{W}_1}([a, b]) = \{f : [a, b] \times \Omega \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times m} : \forall 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq m; f_{ij} \in \mathcal{C}_{1W_j}([a, b])\}.$$

où $\mathcal{C}_{W_j}([a, b])$ et $\mathcal{C}_{1W_j}([a, b])$ correspondent aux classes $\mathcal{C}([a, b])$ et $\mathcal{C}_1([a, b])$, respectivement.

Proposition 2.5 • Soit $f : [a, b] \times \Omega \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times m}$ appartenant à $\mathcal{C}_1([a, b])$, alors l'intégrale stochastique par rapport à $\underline{W}(t)$: (vecteur m – dimensionnel) est définie par :

$$\int_a^b f(t) d\underline{W}(t) = \left(\sum_{j=1}^n \int_a^b f_{ji}(t) dW_j(t) \right)'_{1 \leq i \leq n}.$$

où chacune des intégrales du côté droit est définie dans le sens de Itô.

- Si $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ et $f_i : [a, b] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$; $f_j : [a, b] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$; f_i et $f_j \in \mathcal{C}([a, b])$, alors :

$$E \left(\int_a^b f_i(t) dW_i(t) \int_a^b f_j(t) dW_j(t) \right) = \delta_{ij} E \left(\int_a^b f_i(t) f_j(t) dt \right),$$

où :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

- Soient $f : [a, b] \times \Omega \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times m}$ et $g : [a, b] \times \Omega \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times m}$, alors :

1. Si $f \in \mathcal{C}_{\underline{W}}([a, b])$, alors :

$$E \left(\int_a^b f(t) d\underline{W}(t) \right) = \underline{0} \in \mathbb{R}^m.$$

2. Si $f, g \in \mathcal{C}_{\underline{W}}([a, b])$, alors :

$$E \left(\left(\int_a^b f(t) dW_i(t) \right) \left(\int_a^b g(t) dW_j(t) \right)' \right) = E \left(\int_a^b f(t) g'(t) dt \right).$$

3. Si $f \in \mathcal{C}_{\underline{W}}([a, b])$, alors :

$$E \left(\left| \int_a^b f(t) dW_i(t) \right|^2 \right) = E \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right),$$

$$\text{où : } |f|^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (f_{ij})^2 \text{ et } \left| \int_a^b f(t) d\underline{W}(t) \right|^2 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n f_{ij}(t) dW_j(t) \right)^2.$$

Preuve. 1. Soit $f \in \mathcal{C}_{\underline{W}}([a, b])$, alors :

$$\begin{aligned} E \left[\left(\int_a^b f(t) d\underline{W}(t, w) \right) \right] &= \left(E \left[\sum_{j=1}^n \int_a^b f_{ij}(t) dW_j(t, w) \right] \right)'_{1 \leq i \leq m} \\ &= \left(\sum_{j=1}^n E \left[\int_a^b f_{ij}(t) dW_j(t, w) \right] \right)'_{1 \leq i \leq m} \\ &= \underline{0} \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

2. Soit $f, g \in \mathcal{C}_W([a, b])$, et $(1, k) \in \{1, \dots, m\}^2$, alors :

$$\begin{aligned}
& E \left[\left(\int_a^b f(t) d\underline{W}(t, w) \right) \left(\int_a^b f(t) d\underline{W}(t, w) \right)' \right] \\
&= E \left(\sum_{j=1}^n \int_a^b f_{lj}(t) dW_j(t, w) \right) \times \left(\sum_{j'=1}^n \int_a^b g_{j'k}(t) dW_{j'}(t, w) \right) \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{j'=1}^n E \left[\int_a^b f_{lj}(t) dW_j(t, w) \int_a^b g_{j'k}(t) dW_{j'}(t, w) \right] \\
&= \sum_{j=1}^n E \left[\int_a^b f_{lj}(t) g_{jk}(t) dt \right] = E \left[\sum_{j=1}^n \int_a^b f_{lj}(t) g_{jk}(t) dt \right] \\
&= E \int_a^b \sum_{j=1}^n (f_{lj}(t) g_{jk}(t)) dt = E \left[\int_a^b (f(t)) (g(t))' dt \right].
\end{aligned}$$

3. Soit $f \in \mathcal{C}_W([a, b])$, par 2., alors on :

$$E \left[\left(\int_a^b f(t) d\underline{W}(t, w) \right) \left(\int_a^b f(t) d\underline{W}(t, w) \right)' \right] = E \left[\int_a^b f(t) (f(t))' dt \right].$$

■

2.6 Calcul des moments

Proposition 2.6 Si f et g sont 2 fonctions de $\mathcal{C}([a, b])$, alors :

1. $E \left(\int_a^b f(t) dW(t) \right) = 0$.
2. $E \left[\left(\int_a^b f(t) dW(t) \right)^2 \right] = \int_a^b E \left[(f(t))^2 \right] dt$. (Isométrie de Itô).
3. $E \left[\int_a^b f(t) dW(t) \int_a^b g(t) dW(t) \right] = \int_a^b E(f(t)g(t)) dt$.

Preuve. 1. et 2. Voir [55] pages 133 – 134.

3. Notons les intégrales d' Itô $I_1 = \int_a^b f(t) dW(t)$ et $I_2 = \int_a^b g(t) dW(t)$. Donnons leur produit en utilisant l'identité : $I_1 I_2 = (I_1 + I_2)^2 / 2 - I_1^2 / 2 - I_2^2 / 2$. Ensuite, nous utilisons la propriété d'isométrie.

■

2.7 Différentielle stochastique

Définition 2.7 Soit $(u(t))_{t \in [0, T]}$ un processus tel que pour tout $(t_1, t_2) \in [0, T]^2$, $t_1 < t_2$:

$$u(t_1) - u(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} b(t) dW(t).$$

Où $a \in \mathcal{C}^1([0, T])$ et $b \in \mathcal{C}^1([0, T])$. On dit que le processus $(u(t))_{t \in [0, T]}$ est stochastiquement différentiable si :

$$du(t) = a(t) dt + b(t) dW(t),$$

sur $[0, T]$.

Exemple 2.8

1. La différentielle stochastique de $(W^2(t))_{t \geq 0}$ est donnée par :

$$dW^2(t) = dt + 2W(t) dW(t).$$

2. La différentielle stochastique du processus $(tW(t))_{t \geq 0}$ est donnée par :

$$d(tW(t)) = W(t) dt + t dW(t).$$

Preuve. 1. En effet si $0 \leq t_1 < t_2$, alors :

$$\int_{t_1}^{t_2} W(t) dW(t) = \frac{1}{2} (W^2(t_2) - W^2(t_1)) - \frac{1}{2} (t_2 - t_1),$$

i. e.,

$$(W^2(t_2) - W^2(t_1)) = (t_2 - t_1) + 2 \int_{t_1}^{t_2} W(t) dW(t),$$

il est sous la forme :

$$X(t_2) - X(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} b(t) dW(t),$$

avec $a(t) = 1$, $b(t) = 2W(t)$, $t \geq 0$. ■

Proposition 2.9 Si la différentielle stochastique de $(u(t))_{t \in [0, T]}$ est donnée par :

$$du_i(t) = a_i(t) dt + b_i(t) dW(t),$$

alors $(u_1(t)u_2(t))_{t \in [0, T]}$ a la différentielle stochastique :

$$d(u_1(t)u_2(t)) = u_1(t)du_2(t) + u_2(t)du_1(t) + b_1(t)b_2(t)dt,$$

et donc, pour tous les $0 \leq t_1 \leq t_2 < T$:

$$\begin{aligned} u_1(t_2)u_2(t_2) - u_1(t_1)u_2(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} u_1(t)a_2(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} u_1(t)b_2(t)dW(t) \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} u_2(t)a_1(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} u_2(t)b_1(t)dW(t) + \int_{t_1}^{t_2} b_1(t)b_2(t)dt. \end{aligned}$$

Corollaire 2.10 1. Pour tout $m \geq 2$, on a :

$$d[(W(t))^m] = m(W(t))^{m-1}dW(t) + \frac{m(m-1)}{2}(W(t))^{m-2}dt.$$

Preuve. La preuve résulte de la proposition précédente par induction. ■

Corollaire 2.11 2. Si P est un polynôme en x , alors :

$$dP(W(t)) = P'(W(t))dW(t) + \frac{1}{2}P''(W(t))dt.$$

Preuve. La dérivée seconde de $P(W(t))$ est nécessaire pour sa différentielle. ■

Proposition 2.12 • Soient $t_1 < t_2$ et $\{\delta_0^{(n)}, \delta_1^{(n)}, \dots, \delta_q^{(n)}\}$ une subdivision de $[t_1; t_2]$ de diamètre δ_n si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0$, alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(W(\delta_{k+1}^{(n)}) - W(\delta_k^{(n)}) \right)^2 \xrightarrow{P} t_2 - t_1.$$

• Pour $t_1 < t_2$, on a :

$$\int_{t_1}^{t_2} W(t)dW(t) = \frac{1}{2} \left(W(t_2)^2 - W(t_1)^2 \right) + \frac{1}{2}(t_2 - t_1).$$

• Soit f une fonction réelle de x de classe $C^2(\mathbb{R})$, alors :

$$df(W(t)) = f'(W(t))dW(t) + \frac{1}{2}f''(W(t))dt.$$

Preuve. 1. La preuve résulte de l'intégrale de Itô multidimensionnelle par induction.

2. Soient $t_1 < t_2$ et $\{\delta_0^{(n)}, \delta_1^{(n)}, \dots, \delta_q^{(n)}\}$ une subdivision de $[t_1; t_2]$ de diamètre δ_n si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0$, alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(W(\delta_{k+1}^{(n)}) - W(\delta_k^{(n)}) \right)^2 \xrightarrow{P} t_2 - t_1,$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} W(t) dW(t) &= P - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(W^2(\delta_{k+1}^{(n)}) - W^2(\delta_k^{(n)}) - \left(W(\delta_{k+1}^{(n)}) - W(\delta_k^{(n)}) \right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(W(t_2)^2 - W(t_1)^2 \right) - P - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(W(\delta_{k+1}^{(n)}) - W(\delta_k^{(n)}) \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \left(W(t_2)^2 - W(t_1)^2 \right) - P - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} \left(W(t_2)^2 - W(t_1)^2 \right) + \frac{1}{2} (t_1 - t_2).
\end{aligned}$$

3. La preuve tient compte de l'intégration par parties de la formule :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \int_0^x (x-y) f''(y) dy.$$

Voir [55] pages 138 – 140. ■

Exemple 2.13 1. En prenant $f(x) = x^m$, $m \geq 2$, alors :

$$W^m(t) = m \int_0^t W^{m-1}(s) dW(s) + \frac{m(m-1)}{2} \int_0^t W^{m-2}(s) ds.$$

2. Avec $m = 2$,

$$W^2(t) = 2 \int_0^t W(s) dW(s) + t.$$

On retrouve le résultat sur l'intégrale stochastique :

$$\int_0^t W(s) dW(s) = \frac{1}{2} W^2(t) + \frac{1}{2} t.$$

3. En prenant $f(x) = e^x$,

$$e^{W(t)} = 1 + \int_0^t e^{W(s)} dW(s) + \frac{1}{2} \int_0^t e^{W(s)} ds.$$

L'exemple précédent montre que $Y(t) = e^{W(t)}$ est stochastiquement différentiable et :

$$de^{W(t)} = e^{W(s)} dW(s) + \frac{1}{2} e^{W(s)} ds,$$

où :

$$dY(t) = Y(t) dW(t) + \frac{1}{2} Y(t) dt.$$

2.8 Formule de Itô

La formule de Itô ¹ est considérée comme l'un des thèmes les plus importants du mouvement brownien. Elle représente l'équivalent stochastique du théorème de Taylor au sujet

¹La formule d'Itô a été démontrée pour la première fois par le mathématicien japonais **Kiyoshi Itô** dans les années 1940.

de l'expansion des fonctions. Elle caractérise le concept clé qui rapproche l'analyse réelle à l'analyse stochastique.

Soient $a \in L^1$, $b \in L^2$, $(u(t))_{t \in [0, T]}$ un processus et $(W(t))_{t \in [0, T]}$ est un processus de Wiener.

Théorème 2.14 *Si $u(t, x) : [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et a des dérivées partielles u_t , u_x , u_{xx} continues, alors :*

$$du(t, W(t)) = \left(u_t(t, W(t)) + \frac{1}{2} u_{xx}(t, W(t)) \right) dt + u_x(t, W(t)) dW(t).$$

Cette équation est appelée la formule de Itô.

Preuve. Voir [35]. ■

Théorème 2.15 [Représentation de Itô]. *Soit $(X(t))_{t \in [0, T]} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un processus stochastique, alors il existe un processus unique $(f(t))_{t \in [0, T]} \in \mathcal{C}([0, T])$ tel que :*

$$\forall t \in [0, T] : X(t) = E(X(0)) + \int_0^t f_s(w) dW_s(w).$$

2.9 Théorème de représentation des martingales

Le théorème de représentation des martingales établit la relation entre une martingale et l'existence d'un vice-versa processus.

Théorème de représentation des martingales 1 *Soit $(M(t))_{t \in [0, T]}$ une martingale de L^2 avec le processus de Wiener $(W(t))_{t \in [0, T]}$ et $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ sa filtration naturelle, alors il existe un processus unique $(f(t))_{t \in [0, T]} \in \mathcal{C}([0, T])$ telle que : $M(t) - M(0) = \int_0^t f(s) dW(s)$, p.s.*

Théorème de représentation des martingales 2 *Soit $(M(t))_{t \in [0, T]}$ une martingale de L^2 avec le processus de Wiener $(W(t))_{t \in [0, T]}$ et $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ sa filtration naturelle, alors il existe un processus unique $(f(t))_{t \in [0, T]} = \langle M(t) \rangle \in \mathcal{C}_1([0, T])$ telle que :*

$$M(t) - M(0) = \int_0^t f(s) dW(s), \text{ p.s.}$$

Les théorèmes de représentation des martingales sont une conséquence directe du théorème suivant (voir [42]).

Théorème de représentation de Itô *Soit $(X(t))_{t \in [0, T]} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, alors il existe un processus stochastique unique $(f(t))_{t \in [0, T]}$ telle que :*

$$\forall t \in [0, T] : X(t) = E(X(0)) + \int_0^t f(s) dW(s).$$

Pour la démonstration du théorème de représentation de Itô, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.16 *L'espace linéaire des variables aléatoires de la forme :*

$$\exp\left\{\int_0^T h(t) dW(t) - \frac{1}{2} \int_0^T h^2(t) dt\right\},$$

est dense dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ avec $h \in L^2([0, T])$.

Preuve. [du théorème de représentation de Itô]. Initialement, supposons que $(X(t))_{t \in [0, T]}$ est de la forme exponentielle Doléans

$$X(t) = \exp\left\{\int_0^t h(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t h^2(s) ds\right\}, \quad \forall t \in [0, T],$$

pour un processus déterministe $(h(t))_{t \in [0, T]} \in L^2([0, T])$. Ensuite, définissons :

$$Y(t) = \exp\left\{\int_0^t h(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t h^2(s) ds\right\}, \quad \forall t \in [0, T],$$

Enfin, invoquons la formule d'Itô, pour avoir ou obtenir :

$$\begin{aligned} dY(t) &= Y(t) \left(h(t) dW(t) - \frac{1}{2} h^2(t) dt \right) \\ &= Y(t) h(t) dW(t). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$Y(t) = 1 + \int_0^t Y(s) h(s) dW(s), \quad \forall t \in [0, T],$$

et en particulier :

$$X(T) = Y(T) = 1 + \int_0^T Y(s) h(s) dW(s),$$

de sorte que, après avoir pris les espérances, on obtient $E[X(T)] = 1$. Maintenant, par le lemme précédent, nous pouvons étendre la preuve de tout arbitraire $(X(t))_{t \in [0, T]} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Pour prouver que le processus $(h(t))_{t \in [0, T]}$ est unique, supposons que 2 processus $h^1(t), h^2(t) \in C([0, T])$ existent avec :

$$\begin{aligned} X(T) &= E[X(0)] + \int_0^T h^1(t) dW(t) \\ &= E[X(0)] + \int_0^T h^2(t) dW(t). \end{aligned}$$

En sous contractant les 2 intégrales et en prenant l'attente de l'écart quadratique, nous obtenons :

$$E \left[\left(\int_0^T (h^1(t) - h^2(t)) dW(t) \right)^2 \right] = 0,$$

et en utilisant l'isométrie de Itô, nous obtenons :

$$\int_0^T E [h^1(t) - h^2(t)]^2 dt = 0,$$

ceci implique que $h^1(t) = h^2(t)$ presque sûrement pour tout $t \in [0, T]$. ■

2.10 Différentielle stochastique multidimensionnelle

Soit $(u(t))_{t \in [0, T]}$ un processus m -dimensionnels et :

$$a : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m, \text{ et } b : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{mn}, \text{ où } a, b \in \mathcal{C}_{1W}([0, T]).$$

La différentielle stochastique de $u(t)$ est donnée par :

$$du(t) = a(t)dt + b(t)dW(t).$$

Si pour tout $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$:

$$u(t_2) - u(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(s) ds + \int_{t_1}^{t_2} b(s) dW(s),$$

on obtient, ainsi, pour $1 \leq i \leq n$:

$$du_i(t) = a_i(t) dt + \sum_{j=1}^n b_{ij}(t) dW_j(t).$$

Si $(W_1(t))_{t \in [0, T]}$ et $(W_2(t))_{t \in [0, T]}$ sont 2 processus de Wiener indépendants, alors :

$$d(W_1(t) W_2(t)) = W_1(t) dW_2(t) + W_2(t) dW_1(t).$$

Preuve. Comme $W_1(t)$ et $W_2(t)$ sont indépendants, on peut montré que $W(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1(t) + W_2(t))$ est un processus de **Wiener**. De plus, pour un processus $W(t)$ de Wiener, on a :

$$dW^2(t) = dt + 2W(t) dW(t),$$

et comme

$$W_1(t) W_2(t) = W^2(t) - \frac{1}{2}W_1^2(t) - \frac{1}{2}W_2^2(t),$$

alors :

$$\begin{aligned} d(W_1(t) W_2(t)) &= dW^2(t) - \frac{1}{2}dW_1^2(t) - \frac{1}{2}dW_2^2(t) \\ &= dt + 2W(t) dW(t) - \frac{1}{2}dt - W_1(t) dW_1(t) - \frac{1}{2}dt - W_2(t) dW_2(t) \\ &= 2 \left(\frac{1}{2}W_1(t) dW_1(t) + \frac{1}{2}W_1(t) dW_1(t) + \frac{1}{2}W_2(t) dW_2(t) + \frac{1}{2}W_2(t) dW_2(t) \right) \\ &\quad - W_1(t) dW_1(t) - W_2(t) dW_2(t) \\ &= W_1(t) dW_2(t) + W_2(t) dW_1(t). \end{aligned}$$

■

Si W_1, \dots, W_n sont des processus indépendants de Wiener et :

$$du_i(t) = a_i(t) dt + \sum_{j=1}^n b_{ij}(t) dW_j(t), \quad i = 1, 2,$$

alors :

$$d(u_1 u_2)(t) = u_1(t) du_2(t) + u_2(t) du_1(t) + \sum_{j=1}^n b_{1j}(t) b_{2j}(t) dt.$$

Chapitre 3

EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES DU PREMIER ORDRE

3.1 Préambule

L'objectif essentiel de ce chapitre est de diffuser les principes de bases pour la résolution des équations différentielles stochastiques et d'étudier le problème d'existence et d'unicité de leur solution. Considéré comme un thème très vaste en pleine effervescence et évolution rapide, nous serons très loin de son exhaustivité. Nous allons, donc, rappeler les définitions et propriétés fondamentales concernant les processus stochastiques ainsi que ceux des équations différentielles stochastiques. Nous renvoyons, enfin, les lecteurs concernés par ce domaine à plusieurs ouvrages de base relatifs aux processus stochastiques.

3.2 Définition

Une équation différentielle stochastique (E. D. S) est une généralisation de la notion d'équation différentielle en présence d'un terme de bruit blanc. Les E. D. S permettent de modéliser des trajectoires aléatoires, tels que les cours de bourse et les mouvements de particules soumises à des phénomènes de diffusion. Elles permettent aussi de traiter théoriquement ou numériquement des problèmes issus de la théorie des équations aux dérivées partielles.

Les domaines d'application des E. D. S sont vastes. Nous pouvons en citer; par exemple :

- **Modélisation de phénomènes de diffusion en physique** (mécanique des fluides, géophysique, ...) : c'est à l'origine de la motivation de l'étude du mouvement brownien ;

- **Dynamique des populations, écologie, ...** : modélisation de la localisation de la population d'une espèce donnée, ou encore de sa taille...
- **Méthodes de Monte-Carlo** : résolution de certaines équations aux dérivées partielles par des méthodes aléatoires ;
- **Mathématiques financières** : modélisation des cours de bourse ;
- **Théorie du contrôle stochastique** : il s'agit de trouver des stratégies permettant de minimiser ou maximiser certaines quantités soumises à des fluctuations aléatoires mais spécifiées par des paramètres que l'on peut faire varier (valeur d'un portefeuille d'actions, régulation du débit d'un barrage, ...)
- **Systèmes dynamiques aléatoires** ;
- **Résonance stochastique, modélisation en neuroscience, climatologie** (des modèles de climat sur de très longues périodes utilisent des E. D. S).
- **Modèles d'écoulements de polymères multi-échelles.**

On appelle équation différentielle stochastique du premier ordre, une équation de la forme :

$$du(t) = a(t, (u(t)))dt + b(t, u(t))dW(t), \quad (3.1)$$

où les $(a(t, x))_{t \in [0, T]}$, $(b(t, x))_{t \in [0, T]}$ et $(u(t))_{t \in [0, T]}$ sont des processus stochastiques. $(W(t))_{t \in [0, T]}$ est un processus de Wiener. Soit $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ la filtration naturelle associée à $(W(t), u(t))_{t \in [0, T]}$. Soient L^1 et L^2 les espaces de processus $(f(t))_{t \in [0, T]}$ tel que tout processus $f(t)$ est $\mathcal{B}_{[0, T]} \otimes \mathcal{F}_t$ - mesurable et $\int_0^T |f(t)| dt < +\infty$ p.s.

3.3 Théorème d'existence et d'unicité

Soit $(W(t))_{t \in [0, T]}$ un processus de Wiener sur l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) équipé par la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$.

En outre, soient $a(t, x)$ et $b(t, x)$ deux fonctions mesurables définies sur $[0, T] \times \mathbb{R}$ et $(u(t))_{t \in [0, T]}$ un processus stochastique. On dit que $u(t)$ est la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$du(t) = a(t, (u(t)))dt + b(t, u(t))dW(t),$$

avec la condition initiale :

$$u(0) = u^0 \text{ p.s. } (u^0 \text{ est une variable aléatoire}), \quad (3.2)$$

Si :

1. u^0 est \mathcal{F}_0 -mesurable;
2. $|a(t, u(t))|^{\frac{1}{2}}, b(t, u(t)) \in \mathcal{C}_1([0, T])$;
3. Le processus $(u(t))_{t \in [0, T]}$ est différentiable et $du(t) = a(t, u(t))dt + b(t, u(t))dW(t)$.
Cependant :

$$u(t) - u(0) = \int_0^t a(s, u(s))ds + \int_0^t b(s, u(s))dW(s). \quad (3.3)$$

Si de plus $b(t, u(t)) = 0$, alors sous la condition initiale (3.2), l'équation (3.1) peut être considérée comme une équation différentielle ordinaire et peut être résolue pour chaque réalisation ω . Dans ce cas, la solution de l'équation (3.3) s'écrit :

$$u(t) - u(0) = \int_0^t a(s, u(s))ds.$$

Nous avons, maintenant, tous les éléments en main pour définir la notion de solution d'une équation différentielle stochastique (E. D. S), de la forme

$$du(t) = a(t, u(t))dt + b(t, u(t))dW(t).$$

3.4 Théorèmes et propriétés

Si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. Pour tout $t \in [0, T]$ et tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq K^*|x - y|$.
2. Pour tous $t \in [0, T]$ et tout $x \in \mathbb{R} : |a(t, x)| \leq K(1 + |x|), |b(t, x)| \leq K(1 + |x|)$. (K^* ; K sont des constantes).
3. $E[|u^0|^2] < \infty$.
4. u^0 est indépendant de \mathcal{F}_t (i. e., u^0 est \mathcal{F}^0 -mesurable).

alors, il existe une unique solution $(u(t))_{t \in [0, T]}$ de (3.1) avec la condition initiale (3.2), telles que :

- $(u(t))_{t \in [0, T]}$ est continue p.s. (Par conséquent, presque toute trajectoire est continue).
- $(u(t))_{t \in [0, T]} \in \mathcal{C}([0, T])$.

Preuve. Voir [55] pages 162 – 170. ■

Unicité de la solution Si les coefficients $a(t, x)$ et $b(t, x)$ de l'équation (3.1) sont définis et mesurables sur $[0, T] \times \mathbb{R}$, et s'ils satisfont une condition de Lipchitz globale, i.e., qu'il existe une constante K tels que pour tous $t \in [0, T]$ et tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$: $|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|$ est, alors, une solution de l'équation (3.1). Si elle existe, elle est unique au sens que si $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sont 2 solutions de l'équation (3.1), alors :

$$P(\sup_{0 \leq t \leq T} |u_1(t) - u_2(t)| = 0) = 1.$$

Le caractère aléatoire des E. D. S. impose plusieurs notions d'existence et d'unicité. Cependant, 2 types de solutions s'imposent :

3.4.1 Solutions fortes

Une solution $(u(t))_{t \in [0, T]}$ de l'E. D. S est dite une solution forte sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) relativement au mouvement brownien standard $(W(t))_{t \in [0, T]}$ et la condition initiale U_0 si :

1. $(u(t))_{t \in [0, T]}$ est indépendant du mouvement brownien $(W(t))_{t \in [0, T]}$.
2. $(u(t))_{t \in [0, T]}$ a des trajectoires continues p.s..
3. $(\mathcal{F}_w^{U_0})$ est la filtration générée par $u_0(t)$ et $(W(t))_{t \in [0, T]}$.

3.4.2 Solutions faibles

Une solution $(u(t))_{t \in [0, T]}$ de l'E. D. S est dite faible sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) relativement au mouvement brownien standard si $(u(t))_{t \in [0, T]}$ est continue et \mathcal{F} est adaptée et les processus $a(t, x)$ et $b(t, x)$ sont des paires du processus $(u(t))_{t \in [0, T]}$ qui satisfont : $a \in L^1$ et $b \in L^2$.

3.4.3 Exemples

Exemple 3.1 1. Nous avons vu que $X(t) = \exp(W(t) - t/2)$ est une solution de la stochastique E. D. S exponentielle $dX(t) = X(t)dW(t)$, $X(0) = 1$.

2. Considérons le système :

$$\begin{cases} dX(t) = dt + X(t) dW(t) \\ X(0) = 0 \end{cases},$$

alors :

$$X(t) = t + \int_0^t X(s) dW(s),$$

et on a : $E(X(t)) = t$, l'utilisation de la formule de **Itô** pour $F(t, X) = X(t)$, donne :

$$d(X(t))^2 = [2X(t) + (X(t))^2] dt + 2(X(t))^2 dW(t).$$

3. Considérons $dX(t) = W(t)dW(t)$. Il est clair que $X(t) = X(0) + \int_0^t W(s) dW(s)$ et en utilisant l'intégration par parties (ou une formule de **Itô**), nous obtenons :

$$X(t) = X(0) + \frac{1}{2}(W^2(t) - t).$$

4. On suppose que dans l'équation différentielle stochastique (3.1), $a(t, x) = 0$ et $b(t, x) = g(t)u(t)$, alors l'équation différentielle stochastique est :

$$\begin{cases} u_0(t) = u^0 \\ du(t) = g(t)u(t)dW(t) \end{cases} .$$

La solution est, donc :

$$u(t) = u^0 \exp \left\{ \int_0^t g(s)dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t g^2(s) ds \right\}.$$

Posons : $X(t) = \int_0^t g(s)dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t g^2(s) ds$ et $Y(t) = \exp \{X(t)\} = f(X(t))$, alors :

$$u(t) = u^0 Y(t) \text{ et } du(t) = u^0 dY(t).$$

On va avoir que :

$$u^0 dY(t) = g(t)u(t)dW(t),$$

parce que :

$$dX(t) = -\frac{1}{2}g^2(t) dt + g(t)dW(t).$$

L'utilisation de la formule de **Itô** donne :

$$\begin{aligned} dY(t) &= \left(-\frac{1}{2}g^2(t) f_x(X(t)) + \frac{1}{2}g^2(t) f_{xx}(X(t)) \right) dt + g(t) f_x(X(t)) dW(t) \\ &= \left(-\frac{1}{2}g^2(t) \exp \{X(t)\} + \frac{1}{2}g^2(t) \exp \{X(t)\} \right) dt + g(t) \exp \{X(t)\} dW(t) \\ &= Y(t)g(t)dW(t). \end{aligned}$$

Le résultat est :

$$du(t) = u^0 Y(t)g(t)dW(t) = g(t)u(t)dW(t).$$

5. **Pont brownien** : Fixons $0 < t < 1$. L' E. D. S devient :

$$dX(t) = \frac{X(t)}{1-t} dt + dW(t), \quad \text{pour } 0 < t < T, \text{ avec une condition initiale } X_0 = 0.$$

Le facteur d'intégration :

$$Z(t) = \exp \left\{ \int_0^t \frac{ds}{1-s} \right\} = \frac{1}{1-t},$$

aide à déterminer la solution :

$$X(t) = (1-t) \int_0^t \frac{1}{1-s} dW(s).$$

Pour vérifier que ceci résoud l'E. D. S, appliquons la formule du produit

$$d(U(t)V(t)) = U(t)dV(t) + V(t)dU(t) + d[U(t), V(t)],$$

avec

$$U(t) = 1 - t,$$

et

$$V(t) = \int_0^t (1-s)^{-1} dW(s) = (1-t)^{-1} X(t).$$

Avec

$$\begin{aligned} dU(t) &= -dt, \\ dV(t) &= (1-t)^{-1} dW(t), \end{aligned}$$

et

$$[U, V] = 0.$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned} dX(t) &= d(U(t)V(t)) = (1-t)(1-t)^{-1} dW(t) - (1-t)^{-1} X(t) dt \\ &= dW(t) - (1-t)^{-1} X(t) dt, \end{aligned}$$

qui est exactement notre initiale E. D. S.

La solution est définie pour $0 < t < 1$. On peut montrer qu'elle converge vers 0 quand $t \rightarrow 1$.

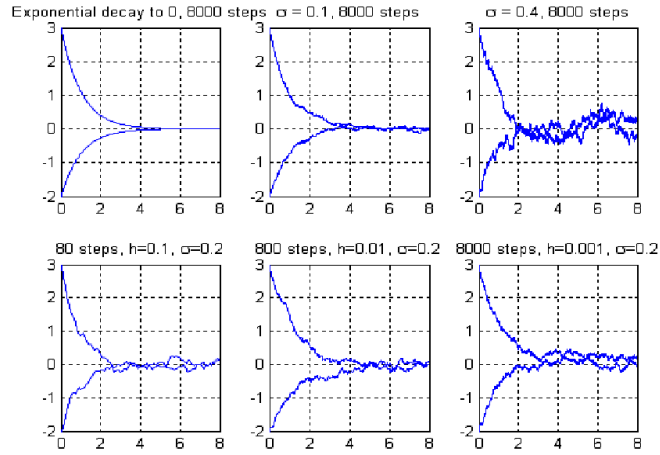
6. Equation de Langevin

Si on rajoute de la friction au mouvement brownien $X' = \sigma \xi$, on obtient :

$$\begin{cases} X(0) = X_0 \\ du(t) = -bX(t) dt + \sigma dW(t) \end{cases},$$

pour une distribution initiale X_0 indépendante du mouvement brownien. C'est l'équation de Langevin dont la solution est :

$$X(t) = e^{-bt} X_0 + \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)} dW(s), \quad t \geq 0.$$



Exemple 3.2 Quelques E. D. S remarquables : Il y a 3 équations différentielles stochastiques très importantes qui ont plusieurs applications dans les modèles mathématiques des finances. Elles sont :

1. *Mouvement brownien arithmétique*

$$\begin{cases} u_0(t) = u^0 \\ du(t) = adt + bdW(t) \end{cases} .$$

Par un calcul direct, on trouve que la solution de cette équation est de la forme :

$$u(t) = u^0 + a(t - t_0) - bW(t) .$$

2. *Mouvement brownien géométrique*

$$\begin{cases} u_0(t) = u^0 \\ du(t) = au(t)dt + bu(t)dW(t) \end{cases} .$$

Dans ce qui suit, on va calculer la différentielle stochastique $d \ln u(t)$. Par la formule de **Itô**, on obtient :

$$d \ln u(t) = \left(a - \frac{1}{2}b^2 \right) dt + b dW(t) . \tag{3.4}$$

L'intégration des 2 membres de l'équation (3.4) donne :

$$d \ln u(t) = \ln u^0 + \left(a - \frac{1}{2}b^2 \right) (t - t_0) + bW(t) ,$$

i.e.,

$$u(t) = u^0 \exp \left\{ \left(a - \frac{1}{2}b^2 \right) (t - t_0) + bW(t) \right\} .$$

3. Processus Ornstein–Uhlenbeck

$$\begin{cases} u_0(t) = u^0 \\ du(t) = (a - bu(t)) dt + c dW(t) \end{cases} .$$

La solution de cette équation est donnée par l'utilisation du facteur d'intégration $\phi = \exp\{bt\}$:

$$d\phi(u(t)) = \phi(du(t) - bu(t)) = \phi(adt + cdW(t)) .$$

Par conséquent :

$$u(t) = \frac{a}{b} \exp\{bt\} + u^0 \exp\left\{b(t - t_0) + c \int_{t_0}^t \exp(-b(t - s)) dW(s)\right\} .$$

Remarque 3.3 Soit $(X(t))_{t \in [0, T]}$ un processus continu en probabilité, stationnaire et gaussien, alors il est de la forme $X(t) = Y(t) + c$, où $Y(t)$ est un processus Ornstein–Uhlenbeck et c est une constante.

Théorème 3.4 Sous les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité, si $E[(u^0)^{2n}] < +\infty$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors :

1. $E[(u(t))^{2n}] \leq (1 + E[(u^0)^{2n}])e^{ct}$.
2. $E\left[\sup_{0 \leq s \leq t} |u(s) - u^0|^{2n}\right] \leq \bar{c}(1 + E[(u^0)^{2n}])t^n e^{ct}$.

où c et \bar{c} sont des constantes qui dépendent que de K, T et n .

3.5 Propriétés des solutions Markoviennes

Lemme 3.5 Si $h(x, w)$ est une fonction à valeurs réelles définies pour toute $(x, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ telle que :

1. h est $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{F}_t$ - mesurable.
2. h est bornée.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $h(x, \cdot)$ indépendante de \mathcal{F}_t , alors :

$$\forall s \in [t_0, T] : E(h(u(s), \cdot) | \mathcal{F}_s) = E(h(u(s), \cdot) | u(s)), \text{ p. s.}$$

Théorème 3.6 Si $(u(t))_{t \in [t_0, T]}$ est un processus Markovien par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(u(s); t_0 \leq s \leq t)$, alors il satisfait la condition :

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \forall s \in [t_0, T] : P(u(s) \in B | \mathcal{F}_s) = P(u(s) \in B | u(s)), \text{ p.s.}$$

Théorème 3.7 Si $(u(t))_{t \in [t_0, T]}$ est une solution de :

$$\begin{cases} u_0(t) = c, \text{ p.s.} \\ du(t) = a(t, (u(t))dt + b(t, u(t))dW(t) \end{cases} ,$$

définie pour tout $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$; $t_0 \leq s < t \leq T$; $x \in \mathbb{R}$:

$$p(s, x, t, B) = P(u(t) \in B | u(s) = x) = P(u(t, s, x) \in B),$$

alors p est une probabilité de transition du processus Markovien $(u(t))$.

Preuve. Voir [55]. ■

3.5.1 Processus de diffusion comme solution de l'équation différentielle stochastique

Théorème 3.8 La solution $(u(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ de l'équation différentielle stochastique :

$$du(t) = a(t, (u(t))dt + b(t, u(t))dW(t),$$

dont les coefficients $a(t, x)$ et $b(t, x)$, satisfaisant les conditions du théorème d'existence et d'unicité, sont des processus de Markov de noyau de transition définie par :

$$P(s, x, t, A) = P(u_{x,s}(t) \in A),$$

où $u_{x,s}(t)$ est une solution de l'équation :

$$u_{x,s}(t) = x + \int_s^t a(v, (u_{x,s}(v))dv + \int_s^t b(v, u_{x,s}(v))dW(v),$$

sur l'intervalle $[0, T]$.

Théorème 3.9 Si pour :

$$\begin{cases} u_0(t) = c, \text{ p. s.} \\ du(t) = a(t, (u(t))dt + b(t, u(t))dW(t) \end{cases} .$$

Si les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité sont satisfaites, avec $a(t, x)$ et $b(t, x)$ sont deux processus continus sur $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, alors la solution $u(t)$ est un processus de diffusion avec le coefficient de dérive $a(t, x)$ et le coefficient de diffusion $b(t, x)$.

3.5.2 Propriétés fortes de Markov de la solution de l'équation différentielle stochastique :

Lemme 3.10 Sous les hypothèses 1 et 2 du théorème d'existence et d'unicité, on a :

$$\forall R > 0, \forall T > 0 : E \left(\sup_{r \leq t \leq T} |u(t, s, x) - u(t, r, y)|^2 \right) \leq C (|x - y|^2 + |s - r|),$$

pour $|x| \leq R$; $|y| \leq R$; $0 \leq s \leq r \leq T$, avec C une constante indépendante de T et R .

Théorème 3.11 *Par les hypothèses 1 et 2 du théorème d'existence et d'unicité $(u(t, s, x))_{t \in [0, T]}$ est la solution de :*

$$du(t) = a(t, u(t))dt + b(t, u(t))dW(t),$$

qui satisfait les propriétés de la structure solide de Markov.

3.6 Théorème de Girsanov

Le théorème de Girsanov¹ est un changement du théorème de la mesure pour les processus stochastiques. Dans l'inférence pour les processus de diffusion, ce théorème est utilisé pour obtenir le rapport de vraisemblance sur lequel est fondée l'inférence de vraisemblance.

Définition 3.12 *Deux mesures P et Q sont dites équivalentes, si elles opèrent sur le même espace échantillonné. De plus, si A est un événement dans l'espace échantillonné, alors :*

$$P(A) > 0 \iff Q(A) > 0.$$

En d'autres termes P est absolument continue par rapport à Q et Q est absolument continue par rapport à P .

Théorème 3.13 *Caractérisation du mouvement Brownien (Théorème de Lévy). Soit $(X(t))_{t \in [0, T]}$ un processus à valeurs réelles dans l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) , alors les 2 propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $(X(t))_{t \in [0, T]}$ est un P -mouvement brownien.
2. $(X(t))_{t \in [0, T]}$ et $X^2(t) - t$ sont P -martingales (resp. à la filtration naturelle).

Preuve. Voir [32]. ■

Exemple 3.14 *Considérons l'intégrale stochastique suivante :*

$$X(t) = \int_0^t h(s) dW(s), \quad t \in [0, T],$$

comme $h(s) \in C([0, T])$ est bornée, alors :

$$M(t) = X^2(t) - \int_0^t |f(s)|^2 ds, \quad t \in [0, T],$$

est une martingale et $\langle X(t) \rangle = \int_0^t |f(s)|^2 ds$ est un processus à variation quadratique de la martingale $X(t)$.

¹Des résultats de ce type ont été prouvés pour la première fois dans les années 1940 par Cameron-Martin puis en 1960 par Girsanov. Par la suite ils ont été étendus à des classes plus vastes de processus allant en 1977 jusqu'à la forme générale de Lengart.

Théorème 3.15 *Si P et Q sont des mesures équivalentes, et $(X(t))_{t \in [0, T]}$ est un processus \mathcal{F}_t -adapté, alors les résultats suivants s'obtiennent :*

$$E_Q \{X(t)\} = E_P \left\{ \frac{dQ}{dP} X(t) \right\},$$

$$E_Q \{X(t) | \mathcal{F}_s\} = L_s^{-1} E_P \{L_s X(t) | \mathcal{F}_s\},$$

où :

$$L_s = E_P \left\{ \frac{dQ}{dP} | \mathcal{F}_s \right\}.$$

Dans ce cas L_t est la dérivée de Radon-Nikodym de Q par rapport à P . Le premier résultat montre, essentiellement, qu'il s'agit

d'une martingale, et la seconde est une version en temps continu du théorème de Bayes.

Théorème 3.16 (Théorème de Girsanov) *Soient M une martingale localement continue et Z la martingale exponentielle associée:*

$$Z(t) = \exp \left(M(t) - \frac{1}{2} \langle M(t) \rangle \right).$$

Si Z est uniformément intégrable, puis une nouvelle mesure Q équivalente à P peut être définie par :

$$\frac{dQ}{dP} = Z(\infty).$$

Ensuite, si X est une martingale locale continue à P , alors $X - \langle X, M \rangle$ est une Q martingale locale.

3.7 Equation de Kolmogorov

Considérons l'équation différentielle stochastique :

$$du(t) = a(t, u(t))dt + b(t, u(t))dW(t),$$

tels que les coefficients $a(t, x)$ et $b(t, x)$ satisfont les conditions du théorème d'existence et d'unicité. On note par $u(t, x)$, pour $s \leq t \leq T$, la solution de l'équation (3.1) est subjective à la condition initiale :

$$u(s, s, x) = x, \quad \text{p.s. } (x \in \mathbb{R}).$$

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction 2 fois continûment différentiables et s'il existe $C > 0$ et $m > 0$ telle que :

$$|f(t)| + |f'(t)| + |f''(t)| \leq C(1 + |x|^m).$$

Lemme 3.17 *Si les coefficients $a(t, x)$ et $b(t, x)$ satisfassent asymptotiquement aux propriétés 1 et 2 du théorème d'existence et d'unicité, alors :*

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} (E[f(u(t, t-h, x))] - f(x)) = a(t, x) f'(x) + \frac{1}{2} b(t, x) f''(x).$$

Preuve. Par la formule de Itô, on trouve :

$$\begin{aligned} f(u(t, t-h, x)) - f(x) &= \int_{t-h}^t a(s, u(s, t-h, x)) f'(u(s, t-h, x)) ds \\ &\quad + \int_{t-h}^t \frac{1}{2} b^2(s, u(s, t-h, x)) f''(u(s, t-h, x)) ds \\ &\quad + \int_{t-h}^t b(s, u(s, t-h, x)) f'(u(s, t-h, x)) dW(s), \end{aligned}$$

en utilisant l'espérance mathématique, on trouve :

$$\begin{aligned} E[f(u(t, t-h, x))] - f(x) &= E \left[\int_{t-h}^t a(s, u(s, t-h, x)) f'(u(s, t-h, x)) ds \right] \\ &\quad + \int_{t-h}^t \frac{1}{2} b^2(s, u(s, t-h, x)) f''(u(s, t-h, x)) ds, \end{aligned}$$

et comme :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (E[f(u(t, t-h, x))] - f(x)) &= \frac{1}{h} \int_{t-h}^t E[a(s, u(s, t-h, x)) f'(u(s, t-h, x))] ds \\ &\quad + \int_{t-h}^t E \left[\frac{1}{2} b^2(s, u(s, t-h, x)) f''(u(s, t-h, x)) ds \right]. \end{aligned}$$

■

Lemme 3.18 Si $u(t)$ est une solution de Markov de l'équation différentielle homogène (3.1) et \mathcal{A} est le générateur infinitésimal associé, alors pour $f \in BC(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$, le processus :

$$M(t) = f(u(t)) - \int_0^t [\mathcal{A}f](u(s)) ds,$$

est une martingale.

Théorème 3.19 Si les coefficients $a(t, x)$ et $b(t, x)$ sont continus et ont des dérivées partielles continues $a'_x(t, x)$, $a''_{xx}(t, x)$, $b'_x(t, x)$ et $b''_{xx}(t, x)$ et s'il existe un $k > 0$ et un $m > 0$ telles que :

$$|a(t, x)| + |b(t, x)| \leq k(1 + |x|),$$

$$|a'_x(t, x)| + |a''_{xx}(t, x)| + |b'_x(t, x)| + |b''_{xx}(t, x)| \leq k(1 + |x|^m),$$

et si la fonction $f(x)$ est une fonction 2 fois continûment différentiables avec :

$$|f(t)| + |f'(t)| + |f''(t)| \leq C(1 + |x|^m),$$

alors, la fonction :

$$q(t, x) \equiv E[f(u(s, t, x))], \quad 0 < t < s, \quad x \in \mathbb{R}, \quad s \in [0, T[,$$

satisfait l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t}q(t, x) + a(t, x) \frac{\partial}{\partial x}q(t, x) + \frac{1}{2}b(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x^2}q(t, x) = 0, \quad (3.5)$$

avec la condition bornée :

$$\lim_{t \uparrow s} q(t, x) = f(x).$$

L'équation (3.5) est dite équation différentielle réverse (**Backward**) de Kolmogorov.

3.8 Stabilité des équations différentielles stochastiques

Le point 0 est stable équilibré, si :

$$\lim_{c \rightarrow 0} P \left(\sup_{t_0 \leq t \leq +\infty} |u(t, t_0, c)| \geq \varepsilon \right) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Le point 0 est asymptotiquement stable, si :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ est stochastiquement stable} \\ \lim_{c \rightarrow 0} P \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, t, c) = 0 \right) = 1 \end{array} \right. .$$

La point 0 est globalement stable asymptotiquement, si :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ est stochastiquement stable} \\ P \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, t_0, c) = 0 \right) = 1, \quad \forall c \in \mathbb{R}^m \end{array} \right. .$$

Exemple 3.20

- Considérons l'équation du premier ordre pour $a, b \in \mathbb{R}$:

$$du(t) = au(t)dt + bu(t)dW(t),$$

est subjective pour toute condition initiale $u(0) = u^0$. On sait que la solution est donnée par :

$$u(t) = u^0 \exp \left\{ \left(a - \frac{b^2}{2} \right) t + bW(t) \right\},$$

Par le théorème des grands nombres : $\frac{W(t)}{t} \rightarrow 0$ p. s. pour $t \rightarrow +\infty$, nous aurons aussi :

1. $u(t) \rightarrow 0$ p.s., si $a - \frac{b^2}{2} < 0$.

2. $u(t) \rightarrow +\infty$ p.s., si $a - \frac{b^2}{2} > 0$.

Si $a = \frac{b^2}{2}$, alors, d'une part, on a :

$$u(t) = u^0 \exp\{bW(t)\},$$

et d'autre part, nous aurons :

$$P\left(\limsup_{t \rightarrow +\infty} u(t) = +\infty\right) = 1.$$

• "Solution exacte" Considérons l'E. D. S, suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = -\alpha X(t) dt + \sigma dW(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases},$$

avec α, σ , et X_0 sont des constantes, soit $F(t, X) = X(t) \exp\{\alpha t\}$, alors par la formule de Itô, on obtient :

$$d(X(t) \exp\{\alpha t\}) = [\alpha X(t) \exp\{\alpha t\} - \alpha X(t) \exp\{\alpha t\} + \sigma \exp\{\alpha t\} dW(t)].$$

Donc :

$$X(t) \exp\{\alpha t\} - X(0) = \int_0^t \sigma \exp\{\alpha s\} dW(s),$$

est la solution exacte donnée par :

$$X(t) = X(0) \exp\{-\alpha t\} + \exp\{-\alpha t\} \int_0^t \sigma \exp\{\alpha s\} dW(s).$$

3.9 CONCLUSIONS DE LA PARTIE 1

Dans cette 1^{ère} partie, nous avons traité la théorie de Kolmogorov relative aux processus stochastiques considérés comme une famille de variables aléatoires définie sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) pour en définir une fonction aléatoire et une loi de probabilité sur l'espace des trajectoires du processus. Plus précisément, les processus stochastiques généralisent la notion des vecteurs aléatoires de dimension finie des variables aléatoires dans le cas d'une famille de variables aléatoires indexées par un ensemble quelconque T . En général, ce dernier représente le «temps» qui est un intervalle de \mathbb{R}_+ (dans le cas continu) ou de $\overline{\mathbb{N}}$ (dans le cas discret).

Les 3 importants chapitres, constituant cette importante partie, se sont caractérisés, respectivement, par :

- Exemple 3.21** • *Le chapitre 1 s'est consacré à la théorie des processus stochastiques à temps continu. Il a, aussi, énoncé les définitions et les théorèmes de base sur les processus à accroissements indépendants, martingales, et les processus de Markov. Les 2 classes fondamentales des processus, à savoir, ceux de Poisson et de Wiener ont été, elles-aussi, discutées avec la plus grande et plus générale classe du processus de Lévy.*
- *Le chapitre 2 principalement basé sur la théorie de Itô, a mis en œuvre la définition de l'intégrale de Itô. Certains résultats fondamentaux du calcul de Itô, et les différentielles stochastiques dont la formule de Itô, ainsi que les résultats connexes, comme le théorème de représentation des martingales ont été, eux-aussi, évoqués en deuxième position.*
 - *Le chapitre 3 a été consacré à l'analyse des équations différentielles stochastiques entraînées par des processus de Wiener et des diffusions de Itô. L'étude du problème d'existence et d'unicité de la solution des équations différentielles stochastiques, ainsi que leurs propriétés ont animées par l'utilisation et l'illustration des exemples.*
 - *Dans ce qui suit, nous allons en discuter ou étudier les processus CARMA gouvernés, principalement, par un processus de Lévy.*

Part II

VERS LES PROCESSUS CARMA

Chapitre 4

PROCESSUS CARMA GOUVERNE PAR UN PROCESSUS DE LÉVY

4.1 Introduction

En raison de la procédure d'échantillonnage ou de la présence des données manquantes, de nombreuses données de séries chronologiques, par exemple $Y(t_i)$, $i = 0, \dots, N$, sont échantillonnées avec des intervalles de temps inégaux. Dans de nombreux cas, les données sont obtenues à partir d'un processus sous-jacents d'échantillonnage irrégulier à temps continu. Autrement dit, il existe un processus à temps continu $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ telle que $Y(t_i) = X(t_i)$. D'une façon générale, $Y(t_i)$ peut être une certaine fonctionnelle du processus sous-jacent à temps continu, mesurée avec une erreur d'observation. Le processus sous-jacent à temps continu est, souvent, modélisé par des équations différentielles stochastiques linéaires, par exemple, par un modèle *ARMA* en temps continu (*CARMA*).

Quand faisons nous l'étude des modèles à temps continu? En effet :

- Lors du traitement des données irrégulièrement espacées.
- Lors des applications financières telle que la mise en valeur des prix.
- Lors du profit de la disponibilité à grande échelle actuelle de données à haute fréquence.

Ces dernières années, diverses tentatives ont été faites pour l'utilisation des séries temporelles à temps continu afin de saisir ou capturer les caractéristiques que l'on appelle séries chronologiques financières :

- La lourdeur de queue.
- La dépendance sans corrélation.
- Le groupement de volatilité.

Avant d’aller plus loin, nous avons besoin de quelques notions essentielles concernant les processus de Lévy. Protter (2004) a présenté un rapport détaillé sur les propriétés pertinentes des processus de Lévy. D’autres ouvrages tels que Applebaum (2004), Bertoin (1996) et Sato (1999) se sont penchés beaucoup plus à d’autres types de propriétés.

Supposons qu’on dispose d’un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, P)$ où \mathcal{F}_0 contient tous les ensembles de probabilité négligeables ou nulle de \mathcal{F} et (\mathcal{F}_t) est continue à droite. (Voir Processus de Lévy au chapitre 1).

Les processus autorégressifs moyens mobiles à temps continu (*CARMA*) avec un noyau non négatif et gouverné par un processus non décroissant de Lévy constituent une classe de processus continu stationnaire et non négatif. Ces derniers ont été employés, en particulier, pour modéliser la volatilité stochastique.

4.2 Processus CARMA à coefficients constants

Dans cette section, nous allons résumer les définitions et les propriétés fondamentales qui découlent du noyau et des fonctions d’autocovariance, en précisant les fonctions communes caractéristiques tout en discutant la question de la causalité. Dans l’hypothèse de racines autorégressives distinctes quelques représentations, particulièrement, dociles du noyau, la fonction d’autocovariance et le processus lui-même sont dérivés. La question de la récupération du processus de conduite d’une réalisation du processus (continu) sur un intervalle $[0, T]$ est également évoquée.

Les processus autorégressifs moyens mobiles à temps continu (*CARMA*) avec un noyau non négatif et gouverné par un processus non décroissant de Lévy constituent une classe globale utile des processus continus stationnaires et non négatifs de temps. Ces derniers ont été employés, en particulier, pour modéliser la volatilité stochastique.

Processus *CARMA* du second ordre gouverné par un processus de Lévy

Soit un processus $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ du second ordre *ARMA*(p, q) à temps continu gouverné par un processus de Lévy $(L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$. $(L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un *SSLP*, où p et q sont des nombres entiers non négatifs tels que $q < p$, est défini à travers la représentation d’espace d’état d’équation formelle :

$$a(D)Y(t) = \sigma b(D)DL(t), \quad t \geq 0, \tag{4.1}$$

où σ est un paramètre d’échelle scalaire strictement positif. D désigne l’opérateur de la différentiation par rapport à t , $L = (L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un *SSLP* telles que :

$$a(z) = z^p + a_1 z^{p-1} + \dots + a_p; \quad b(z) = b_0 + b_1 z^1 + \dots + b_{p-1} z^{p-1}.$$

Les coefficients b_j satisfassent les conditions $b_q = 1$ et $b_j = 0$ pour $j > q$. En raison du paramètre σ d’échelle du côté droit de (4.1), il n’y a clairement aucune perte de généralité en

supposant que $L = (L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un *SSLP* où $Var(L(1)) = 1$. Pour éviter des complications triviales ou insignifiantes et facilement éliminées, nous considérons que $a(z)$ et $b(z)$ n'ont pas de racines commune entre eux.

L' E. D. S. définissant (4.1) est interprété par la formulation d'équation d'espace d'état donnée par les équations d'observation et d'état.

On suppose que $\sigma = 1$,

$$\underline{Y}(t) = \underline{b}'\underline{X}(t), \quad t \geq 0, \quad (4.2)$$

et

$$d\underline{X}(t) = A\underline{X}(t)dt + \underline{e}dL(t), \quad (4.3)$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_p & -a_{p-1} & -a_{p-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \underline{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{p-2} \\ b_{p-1} \end{bmatrix}, \quad \underline{X}(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ X^{(1)}(t) \\ X^{(2)}(t) \\ \vdots \\ X^{(p-1)}(t) \end{bmatrix}.$$

(Si $p = 1$, A est défini comme étant $-a_1$, alors (4.3) sera : $dX(t) = -aX(t)dt + dL(t)$). La fonction de la matrice A est appelée matrice compagnon de l'équation différentielle considérée.

Théorème 4.1 (EXISTENCE ET UNICITE DE LA SOLUTION). *Supposons que*

A est une matrice constante sur un intervalle I , alors le problème aux limites :

$$\begin{cases} \underline{X}(t_0) = \underline{X}_0 \\ d\underline{X}(t) = A\underline{X}(t)dt \end{cases},$$

où $t \in I$ et \underline{X}_0 est un vecteur constant $n \times 1$, admet une solution unique \underline{X} qui est une solution sur tout l'intervalle I .

Théorème 4.2 *Supposons que A est une matrice $n \times n$ constante et \underline{b} est un vecteur fonction $n \times 1$ d'un processus continu sur un intervalle I , alors la solution $(\underline{X}(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ du problème aux conditions initiales :*

$$\begin{cases} \underline{X}(t_0) = \underline{X}_0 \\ d\underline{X}(t) = A\underline{X}(t)dt + \underline{b}(t) \end{cases},$$

où $t \in I$ et $\underline{X}_0 \in \mathbb{R}^n$ (condition initiale), est donnée par :

$$\underline{X}(t) = e^{At}\underline{X}(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}\underline{b}(s)ds,$$

Dans le cas particulier où $(L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien standard, (4.3) est une équation de Itô avec une solution $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ satisfaisant la relation :

$$\underline{X}(t) = e^{At} \underline{X}(0) + \int_0^t e^{A(t-u)} \underline{e} dL(u). \quad (4.4)$$

4.2.1 Propriétés du processus CARMA

Proposition 4.3 *Si $\underline{X}(0)$ est indépendant de $(L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ et $E(L(1)) < \infty$, alors la solution $(\underline{X}(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ donnée par (4.4) est strictement (et faiblement) stationnaire si et seulement si les valeurs propres de la matrice A ont toutes des parties réelles strictement négatives et $\underline{X}(0) \sim \int_0^\infty e^{Au} \underline{e} dL(u)$.*

Preuve. Voir [11]. ■

On peut, facilement, démontrer que les valeurs propres de la matrice A sont les zéros du polynôme autorégressif $a(z)$. Les valeurs propres correspondantes sont :

$$\left[1 \ \lambda_j \ \lambda_j^2 \ \dots \ \lambda_j^{p-1} \right]', \quad j = 1, \dots, p.$$

Il est, parfois, utile de définir le processus *CARMA* pour toutes les valeurs réelles de t .

Extension à tous les t Soit $(M(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ une copie indépendante de $(L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ définie par :

$$L^*(t) = L(t)I_{[0, \infty)}(t) - M(-t)I_{(-\infty, 0]}(t),$$

Si les valeurs propres de A ont des parties réelles négatives, alors :

$$\underline{X}(t) = \int_{-\infty}^t e^{A(t-u)} \underline{e} dL^*(u),$$

est un processus strictement stationnaire qui satisfait :

$$\underline{X}(t) = e^{A(t-s)} \underline{X}(s) + \int_s^t e^{A(t-u)} \underline{e} dL^*(u).$$

Nous sommes, maintenant, en position de définir un processus *CARMA* $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ sous la condition :

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0, \quad j = 1, \dots, p. \quad (4.5)$$

Processus CARMA causal Si les racines $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ du polynôme autorégressif $a(z)$ satisfont (4.5), alors le processus $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ gouverné par le *SSLP* $(L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ avec des coefficients $\{a_j, 1 \leq j \leq p; b_j, 0 \leq j \leq q; \sigma\}$ est un processus strictement stationnaire :

$$\underline{Y}(t) = \sigma \underline{b}' \underline{X}(t),$$

où :

$$\underline{X}(t) = \int_{-\infty}^t e^{A(t-u)} \underline{e} dL(u),$$

i.e.,

$$\underline{Y}(t) = \sigma \int_{-\infty}^t \underline{b}' e^{A(t-u)} \underline{e} dL(u), \quad (4.6)$$

$(Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une fonction causale en $(L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$,

Remarque 4.4 Sous Condition (4.5), nous constatons de (4.6) que $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une fonction causale de $(L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ car elle est de la forme :

$$Y(t) = \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u) dL(u), \quad (4.7)$$

où :

$$g(t) = \begin{cases} \sigma \underline{b}' e^{At} \underline{e}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}. \quad (4.8)$$

La fonction g est appelée le noyau du processus CARMA $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$. Sous la condition (4.5), la fonction g définie par (4.8) peut être écrite comme :

$$g(t) = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} \frac{b(i\lambda)}{a(i\lambda)} d\lambda, \quad (4.9)$$

Pour établir (4.9) quand les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont distinctes, nous utilisons l'expression explicite des vecteurs propres de A pour remplacer e^{At} en (4.8) par sa représentation spectrale. La même expression est obtenue lorsque le côté droit de (4.9) est évaluée par l'intégration du contour. Lorsque il y a présence de valeurs propres multiples (communes), le résultat est obtenu en séparant légèrement les valeurs propres et en prenant la limite des valeurs propres répétées convergeant à leur valeur commune. Il est intéressant d'observer que la représentation (4.7) et (4.9) de $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ définit un processus strictement stationnaire, même dans des conditions moins restrictives de (4.5) à savoir :

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) \neq 0, \quad j = 1, \dots, p,$$

Ainsi, (4.7) et (4.9) fournissent une définition plus générale du processus de CARMA que la définition, ci-dessus, de causalité. Toutefois, si l'une des racines de $a(z)$ est la partie réelle supérieure à 0, la représentation (4.7) de $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ ne sera plus de causalité, comme c'est le cas lorsque (4.5) est satisfait. Cette distinction, entre les processus de CARMA causaux et non causaux, est analogue à la classification des temps discrets du processus ARMA causal ou autrement, selon qu'il y a ou qu'il n'y a pas des racines du polynôme autorégressif qui sont en dehors du cercle de l'unité (voir par exemple Brockwell et Davis (1991)).

Nous allons restreindre notre attention sur les processus de CARMA causaux, i.e., nous supposons que (4.5) est maintenue de sorte que l'expression générale (4.9) pour le noyau g peut également être écrite sous la forme (4.8) Toutefois, les 2 formes du noyau vont se révéler utile.

Propriétés du second ordre De la représentation (4.6) d'un processus de *CARMA* causal gouverné par un *SSLP* $(L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ avec $EL\{(1)\} = \mu$, nous avons, immédiatement :

$$E\{\underline{Y}(t)\} = -\sigma \underline{b}' A^{-1} \underline{e} \mu = \underline{e} \mu \underline{b}_0 / a_p,$$

et :

$$\gamma(h) = Cov(Y(t+h), Y(t)) = \sigma^2 \underline{b}' e^{|h|A} \Sigma \underline{b}, \quad (4.10)$$

où :

$$\Sigma = \int_0^{+\infty} e^{yA} \underline{e} \underline{e}' e^{yA'} dy.$$

De la représentation (4.7) de $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$, on voit que γ peut également être exprimée par :

$$\gamma(h) = Cov(Y(t+h), Y(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(h-u)g(u)du,$$

où $\tilde{g}(x) = g(-x)$ et \tilde{g} est définie dans (4.9). En utilisant le théorème de convolution pour les transformées de Fourier, nous constatons que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi h} \gamma(h) dh = \sigma^2 \left| \frac{b(i\xi)}{a(i\xi)} \right|^2,$$

Ceci montre que la densité spectrale du processus $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est donnée par :

$$f(\xi) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \frac{b(i\xi)}{a(i\xi)} \right|^2, \quad (4.11)$$

et la fonction d'autocovariance est déterminée par :

$$\gamma(h) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi h} \left| \frac{b(i\xi)}{a(i\xi)} \right|^2 d\xi. \quad (4.12)$$

La densité spectrale de (??) est clairement une fonction rationnelle de la fréquence ξ . La famille de processus de *CARMA* gaussienne est en fait identique à la classe des processus gaussiens stationnaires avec une densité spectrale rationnelle.

Racines autorégressives distinctes : Représentation canonique d'état et simulation de Y

Lorsque les zéros $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de $a(z)$ sont distincts et satisfont la condition de causalité (4.5), l'expression du noyau g prend une forme particulièrement simple. L'expansion sous forme fractionnelle de la fonction à intégrer dans (4.9) et l'intégration de chaque terme donne l'expression simple :

$$g(h) = \sigma \sum_{r=1}^p \frac{b(\lambda_r)}{a'(\lambda_r)} e^{\lambda_r h} I_{[0, \infty[}(h). \quad (4.13)$$

L'utilisation du même argument à (4.12) donne une expression correspondant à la fonction d'autocovariance. i.e.,

$$\gamma(h) = Cov(Y(t+h), Y(t)) = \sigma^2 \sum_{r=1}^p \frac{b(\lambda_r) b(-\lambda_r)}{a'(\lambda_r) a(-\lambda_r)} e^{\lambda_r h}. \quad (4.14)$$

Lorsque les racines autorégressives sont distinctes, on obtient une représentation très utile du processus de $CARMA(p, q)$ $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ de (4.13) définie par :

$$\alpha_r = \sigma \frac{b(\lambda_r)}{a'(\lambda_r)}; \quad r = 1, \dots, p, \quad (4.15)$$

nous pouvons, ainsi, écrire :

$$\underline{Y}(t) = \sum_{r=1}^p \underline{Y}_r(t), \quad (4.16)$$

où :

$$\underline{Y}_r(t) = \int_{-\infty}^t \alpha_r e^{\lambda_r(t-u)} dL(u); \quad r = 1, \dots, p, \quad (4.17)$$

Cette expression montre que les composantes des processus Y_r satisfaisons les équations simples :

$$\underline{Y}_r(t) = \underline{Y}_r(s) e^{\lambda_r(t-s)} + \int_s^t \alpha_r e^{\lambda_r(t-u)} dL(u), \quad t \geq s; \quad r = 1, \dots, p, \quad (4.18)$$

En prenant $s = 0$ et en utilisant le lemme d'Eberlein et Raible (1999), nous obtenons :

$$\underline{Y}_r(t) = \underline{Y}_r(0) e^{\lambda_r t} + \alpha_r L(t) + \int_0^t \alpha_r \lambda_r e^{\lambda_r(t-u)} dL(u) du, \quad t \geq 0, \quad (4.19)$$

où la dernière intégrale est une intégrale de Riemann. L'égalité reste valable pour tout t fini ($t \geq 0$) avec la probabilité 1. Définissons :

$$\underline{Y}(t) = [1, \dots, 1]' \mathbf{Y}(t),$$

nous obtenons, ainsi, des (4.4), (4.13) et de (4.17)

$$\underline{\mathbf{Y}}(t) = \sigma B R^{-1} \underline{\mathbf{X}}(t), \quad (4.20)$$

où $B = \text{diag}[b(\lambda_i)]_{i=1}^p$ et $R = [\lambda_j^{i-1}]_{i,j=1}^p$. Les valeurs initiales $\underline{Y}_r(0)$ en (4.19) peuvent donc être obtenues à partir de celles des composantes du vecteur d'état $\underline{\mathbf{X}}(0)$. Le processus $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ nous donne une représentation d'état canonique en remplacement de $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$, à savoir :

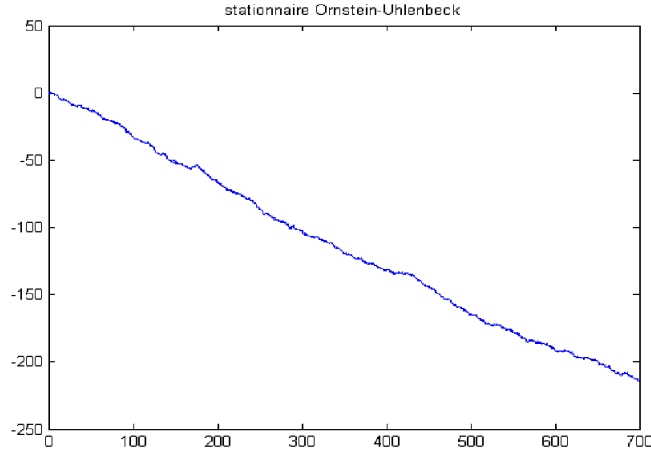
$$\underline{Y}(t) = [Y_1(t), \dots, Y_p(t)]',$$

où $(\underline{\mathbf{Y}}(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est la solution de :

$$\underline{\mathbf{Y}}(t) = \text{diag}[\lambda_i]_{i=1}^p \underline{\mathbf{Y}} dt + \sigma B R^{-1} e dL,$$

avec $\underline{\mathbf{Y}}(0) = \sigma B R^{-1} \underline{\mathbf{X}}(0)$.

Notons que la représentation canonique du processus $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ réduit le problème de la simulation de $CARMA(p, q)$ aux racines des processus autorégressifs distincts à un problème beaucoup plus simple pour simuler les composants des $CAR(1)$ (probablement à valeurs complexes) traités dans (4.17) et de les additionner ensembles.



4.2.2 Exemples

Exemple 1 : Le processus CAR(1). (stationnaire Ornstein-Uhlenbeck) satisfait (4.1) avec $b(z) = 1$ et $a(z) = z - \lambda$ où $\lambda < 0$. De (4.13) et (4.14), nous avons immédiatement $g(h) = e^{\lambda h} I_{[0, +\infty[}(h)$ et $\gamma(h) = \sigma^2 e^{\lambda|h|} / (2|h|)$. Dans ce cas, les 1×1 matrices B et R sont toutes 2 égales à 1 tels que les vecteurs d'état monodimensionnels X et Y sont identiques et la représentation d'état de l'espace donnée par (4.2) et (4.3) est déjà sous forme canonique.

Les équations (4.16) et (4.17) se réduisent à :

$$Y(t) = Y_1(t),$$

respectivement ($\lambda_1 = \lambda$ et $\alpha_1 = \sigma$).

Exemple 2 : Le processus CARMA(2, 1). Dans ce cas, $b(z) = b_0 + z$ et $a(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)$ et les parties réelles de λ_1 et λ_2 sont toutes 2 négatives. En supposant que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, nous obtenons de (4.13) que : $g(h) = (\alpha_1 e^{\lambda_1 h} + \alpha_2 e^{\lambda_2 h}) I_{[0, \infty[}(h)$, où $\alpha_r = \sigma(b_0 + \lambda_r) / (\lambda_r - \lambda_{3-r})$, $r = 1, 2$. Une expression analogue peut être déduite pour $\gamma(h)$ de (4.14). De (4.20), le vecteur d'état canonique est :

$$\underline{Y}(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix} = \frac{\sigma}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_2(b_0 + \lambda_1) & -(b_0 + \lambda_1) \\ -\lambda_1(b_0 + \lambda_2) & (b_0 + \lambda_2) \end{bmatrix} \underline{X}(t),$$

et à partir de (4.16) et (4.17), la représentation canonique de $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est :

$$\underline{Y}(t) = Y_1(t) + Y_2(t),$$

où :

$$Y_r(t) = \int_{-\infty}^t \alpha_r e^{\lambda_r(t-u)} dL(u), \quad r = 1, 2.$$

4.3 Connexions avec les processus ARMA à temps discret

Processus ARMA(p,q) Le processus $(Y(t))_{t \in \mathbb{N}}$ est dit processus autorégressif moyen mobile d'ordre p et q noté $ARMA(p, q)$, si $(Y(t))_{t \in \mathbb{N}}$ est stationnaire du 2nd ordre et $\forall t \in \mathbb{N}$, (mettons $t = n$) on a :

$$Y(n) - \phi_1 Y(n-1) - \dots - \phi_p Y(n-p) = Z(n) + \theta_1 Z(n-1) + \dots + \theta_q Z(n-q). \quad (2.27)$$

Avec $\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q \in \mathbb{R}$ et $Z(n) \sim BB(0, \sigma^2)$.

On dira que $(Y(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est un processus $ARMA(p, q)$ de moyenne μ si $(Y(n) - \mu)$ est un processus $ARMA(p, q)$.

Soit \mathbf{B} l'opérateur retard i.e., $\mathbf{B}^k X(t) = X(t-k); \forall k$.

Si on introduit l'opérateur retard \mathbf{B} : (2.27) $\iff (\phi(\mathbf{B})Y(n) = \theta(\mathbf{B})Z(n))$.

Où $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p$ et $\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \dots + \theta_q z^q$.

$\phi(z), \theta(z)$ sont souvent appelés polynômes autorégressifs moyens mobiles.

Processus causal Un processus $ARMA(p, q)$ défini par $\phi(\mathbf{B})Y(n) = \theta(\mathbf{B})Z(n)$ est dit causal s'il existe une suite de constantes Ψ_j telles que : $\sum_{j=1}^{+\infty} |\Psi_j| < +\infty$ et $Y(n) = \sum_{j=1}^{+\infty} \Psi_j Z(n-j)$. et $Y(n) = \Psi(\mathbf{B})Z(n)$ où $\Psi(\mathbf{B}) = \sum_{j=1}^{+\infty} \Psi_j Z(n-j)$.

Processus inversible Un processus $ARMA(p, q)$ défini par $\phi(\mathbf{B})Y(n) = \theta(\mathbf{B})Z(n)$ est dit inversible s'il existe une suite de constantes Π_j telles que : $\sum_{j=1}^{+\infty} |\Pi_j| < +\infty$ et

$$Z(n) = \sum_{j=1}^{+\infty} \Pi_j Y(n-j).$$

Supposons que les polynômes de $\theta(z)$ et $\phi(z)$ n'ont pas de zéros communs et $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p$ est non nulle pour tous les nombres complexes z tels que $|z| \leq 1$. Cette dernière condition garantit l'existence d'une solution unique fixe de (2.27). Elle est, aussi, de causalité i.e., elle est exprimable sous la forme $Y(n) = \sum_{j=1}^{+\infty} \Psi_j Z(n-j)$ pour certaines séquences, absolument, sommables $\{\Psi_j\}$. Il ressort de cette représentation que la moyenne du processus $ARMA$ défini de (2.27) est égale à zéro. Une définition plus restrictive du processus $ARMA$ impose la condition supplémentaire que les variables aléatoires $Z(n)$ sont indépendantes et identiquement distribuées. Dans ce cas, nous écrivons $Z(n) \sim IID(0, \sigma^2)$. Le processus $(Y(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est, alors, strictement (et faiblement) stationnaire. Par conséquent, $(Y(n))_{n \in \mathbb{N}}$ devient un processus stricte $ARMA$. Si, de plus, nous imposons la contrainte que chaque $Z(n)$ est gaussien, alors nous pouvons écrire $Z_n \rightsquigarrow I.I.D.(0, \sigma^2)$ et se référer à $(Y(n))_{n \in \mathbb{N}}$ comme un processus gaussien $ARMA$.

Comme nous pouvons le constater ou s'y attendre, il y a beaucoup de similitudes structurelles entre les processus *ARMA* et *CARMA*. Dans le cas où les réciproques ou inverses ζ_1, \dots, ζ_p des zéros du polynôme $\phi(z)$ sont distinctes et $q < p$, il y a une analogie de (4.16) pour la fonction d'autocovariance du processus *ARMA*, à savoir :

$$\gamma_d(h) = -\sigma^2 \sum_{j=1}^p \frac{\zeta_j^{|h|+1} \theta(\zeta_j) \theta(\zeta_j^{-1})}{\phi(\zeta_j) \phi'(\zeta_j^{-1})}; \quad h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.28)$$

Il y a aussi une correspondante représentation canonique analogue à celle étudiée dans la partie des zéros distincts autorégressifs de la section 1. Elle prend la forme ((4.16) et (4.17)) :

$$Y(t) = \sum_{r=1}^p Y_{r,n}, \quad (4.29)$$

et :

$$Y_{r,n} = \sum_{k=-\infty}^n \beta_r \zeta_r^{n-k} Z_k, \quad r = 1, \dots, p. \quad (4.30)$$

où $\zeta_r, r = 1, \dots, p$, sont les inverses des zéros (distincts) de $\phi(z)$ et :

$$\beta_r = -\zeta_r \frac{\theta(\zeta_j^{-1})}{\phi'(\zeta_j^{-1})}, \quad r = 1, \dots, p. \quad (4.31)$$

De (4.30) nous obtenons, également, les relations :

$$Y_{r,n} = \zeta_r Y_{r,n-1} + \beta_r Z_n, \quad n = 0, \pm 1, \dots; \quad r = 1, \dots, p. \quad (4.32)$$

Lorsque $q < p$ et les racines autorégressives sont distinctes, les équations (4.32) et (4.17) montrent que les processus *ARMA* et *CARMA* peuvent être représentés comme une somme de processus autorégressifs d'ordre 1. Notons, cependant, que dans les 2 cas, les processus composants ne sont pas indépendants et sont, en général, de valeurs complexes.

4.4 Processus CARMA à coefficients variables

4.4.1 Définition du processus CARMA à coefficients variables

Dans tout ce qui suit, nous allons travailler sur un espace de probabilité filtré satisfaisant les conditions habituelles de complétude et de la continuité à droite. Soit $(L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus de Lévy stable :

1. $L(0) = 0$ p.s.
2. L est à accroissements indépendants.
3. Pour chaque $0 \leq s < t < 1$, la variable aléatoire :

$$L(t) - L(s) \sim S_\alpha(c(t-s)^\frac{1}{\alpha}, \beta, \mu).$$

4. L a des càdlàg trajectoires.

Un processus du second ordre $ARMA(p, q)$ à temps continu gouverné par un processus $(L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ de Lévy $SSLP$ et stable $(L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$, où p et q sont des entiers non négatifs tels que $q < p$ est défini par l'espace d'état de l'équation formelle :

$$a_t(D)Y(t) = \sigma b_t(D)DL(t), \quad t > 0, \quad (4.21)$$

où σ est un paramètre d'échelle strictement positif. D désigne l'opérateur de différentiation par rapport à t :

$$a_t(z) = z^p + a_1(t) z^{p-1} + \dots + a_p(t),$$

$$b_t(z) = b_0(t) + b_1(t) z^1 + \dots + b_{p-1}(t) z^{p-1},$$

et les coefficients $b_j(t)$ satisfont $b_q = 1$ et $b_j = 0$ pour $j > q$ et $E|L(1)|^2 < \infty$.

Puisque la dérivée $DL(t)$ n'existe pas dans le sens habituel, nous interprétons (4.21) comme étant équivalente à l'observation et aux équations d'état :

$$\underline{Y}(t) = \underline{b}'(t) \underline{X}(t), \quad t \geq 0, \quad (4.22)$$

$$d\underline{X}(t) = A(t) \underline{X}(t)dt + \underline{e}dL(t), \quad (4.23)$$

où :

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_p(t) & -a_{p-1}(t) & -a_{p-2}(t) & \dots & -a_1(t) \end{bmatrix}, \quad \underline{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\underline{b}(t) = \begin{bmatrix} b_0(t) \\ b_1(t) \\ \vdots \\ b_{p-2}(t) \\ b_{p-1}(t) \end{bmatrix}, \quad \underline{X}(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ X^{(1)}(t) \\ X^{(2)}(t) \\ \vdots \\ X^{(p-1)}(t) \end{bmatrix}.$$

(Si $p = 1$, $A(t)$ est définie comme étant $-a_1(t)$).

Hypothèses :

- Les polynômes caractéristiques $a(\cdot)$ et $b(\cdot)$ n'ont pas de facteurs communs et toutes les racines de $a(\cdot)$ sont distinctes.

- Toutes les composantes du processus $(\underline{X}(t))$ et du processus *CARMA* $(\underline{Y}(t))$ sont causales et strictement stationnaires.

Théorème 4.5 (Existence et unicité de la solution). *Supposons que $A(t)$ est une matrice $n \times n$ des fonctions continues sur un intervalle I , alors l'équation :*

$$d\underline{X}(t) = A(t) \underline{X}(t)dt, \quad \underline{X}(t_0) = \underline{X}_0,$$

où $t \in I$ et \underline{X}_0 est un vecteur constant $n \times 1$, admet une solution unique $\underline{X}(t)$ sur tout l'intervalle I .

Théorème 4.6 *Supposons que $A(t)$ est une matrice $n \times n$ des fonctions continues et $\underline{b}(t)$ est un vecteur de fonctions continues $n \times 1$ sur un intervalle I , alors la solution \underline{X} de :*

$$d\underline{X}(t) = A(t) \underline{X}(t)dt + \underline{b}(t), \quad \underline{X}(t_0) = \underline{X}_0,$$

où $t \in I$ et $\underline{X}_0 \in \mathbb{R}^n$, est donnée par :

$$\underline{X}(t) = e^{A(t)} \underline{X}(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} \underline{b}(s) ds.$$

Dans le cas particulier où $(L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien standard, (3.3) est une équation de Itô avec une solution $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ satisfaisant :

$$\underline{X}(t) = e^{At} \underline{X}(0) + \int_0^t e^{A(t-u)} \underline{e}dL(u). \quad (4.24)$$

4.4.2 Stabilité du processus CARMA à coefficients variables

Dans le cas d'un processus *CARMA* à coefficients variables, il n'y a pas toujours de stationnarité. Pour cette raison, on va étudier la stabilité du processus *CARMA* à coefficients variables.

Le théorème suivant montre comment les valeurs propres de $A(t)$ déterminent la stabilité de la solution triviale de $d\underline{X} = A(t) \underline{X}$.

Théorème 4.7 (Théorème de stabilité). *Supposons que A est une matrice $n \times n$ des fonctions continues.*

- *Si A a une fonction propre de partie réelle positive, alors la solution triviale est instable sur $[0, +\infty[$.*
- *Si toutes les fonctions propres de A ayant des parties réelles nulles simples (d'ordre 1) et toutes les autres fonctions propres de A ont des parties réelles négatives, alors la solution triviale est stable sur $[0, +\infty[$.*

- Si toutes les fonctions propres de A ont des parties réelles négatives, alors la solution triviale de $x' = Ax$ est globalement asymptotiquement stable sur $[0, +\infty[$.

Théorème 4.8 Soit $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus stochastique :

- $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est strictement stable si et seulement si toutes les combinaisons linéaires sont strictement stables.
- $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est stable symétrique si et seulement si toutes les combinaisons linéaires sont stables symétriques.
- $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est α -stable si et seulement si toutes les combinaisons linéaires sont α -stable, étant donné $\alpha \geq 1$.

Chapitre 5

ESTIMATION DANS LES PROCESSUS CARMA

Il existe plusieurs méthodes pour estimer les modèles stochastiques à temps continu à partir des mesures à temps discret. Nous commencerons par décrire un cadre général applicable à une grande classe des modèles à temps continu.

5.1 Estimation dans les processus CAR(p)

Dans ce qui suit, nous supposons que le processus *CARMA* est observé à des intervalles de temps étroitement et uniformément répartis $0, h, 2h, \dots, Nh$, où $h > 0$ est pré spécifié et $N = [T/h]$ est la partie entière de l'inférence de T/h . Par conséquent, l'inférence sera basée sur les observations $\{Y(nh), n = 0, \dots, [T/h]\}$ du processus échantillonné en le considérant continu sur l'intervalle $[0, T]$. Sous cette hypothèse, il est possible de calculer, sous la condition initiale $X(0)$, les estimateurs exactes du maximum de vraisemblance de a_1, \dots, a_p . Pour traiter les cas des observations faites seulement dans les temps $0, h, 2h, \dots$, nous rapprochons la solution exacte basée sur des observations continues en utilisant celles disponibles à temps discret. Cette approche a l'avantage que pour des observations très étroitement espacées, elle s'opère bien et est extrêmement simple pour son implémentation.

5.1.1 Estimation dans les processus CAR(1)

Ce travail s'intéresse à l'évaluation des paramètres d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck conduit par un processus échantillonné non négatif et des paramètres gouvernés par le processus de Lévy, basé sur des observations établies dans des intervalles de temps étroitement et uniformément répartis. L'idée essentielle est d'obtenir un estimateur fortement efficace *CAR(1)* de coefficient en estimant le coefficient correspondant du processus échantillonné de *AR(1)* à l'aide de l'estimateur de Davis et de McCormick (1989) pour des processus non négatifs du temps discret *AR(1)*. L'uniformité faible de cet estimateur était montré par Jongbloed

et autres (2005). L'estimateur est alors utilisé pour estimer la réalisation correspondante du processus gouverné par un processus de Lévy. Le rétablissement exacte du processus gouverné par un processus de Lévy exige l'observation continue du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Les expressions intégrales déterminant le processus gouverné par un processus de Lévy sont, donc, remplacées en rapprochant des sommes par les observations disponibles à temps discret.

Estimation

Si $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est le processus $CAR(1)$, alors le processus prélevé est le processus $AR(1)$ stricte :

$$Y^{(h)}(n) = \phi Y^{(h)}(n-1) + Z(n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

où :

$$\phi = \exp(-ah),$$

et :

$$Z(n) = \sigma \int_{(n-1)h}^{nh} e^{-a(nh-u)} dL(u).$$

La séquence du bruit $\{Z(n)\}$ est I. I. D et $(Z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ a la distribution infiniment divisible avec le cgf :

$$\int_0^h \xi(\sigma \theta e^{-au}) du,$$

où $\xi(\theta)$ est le log de la fonction caractéristique de $L(1)$.

Pour le processus $CARMA(p, q)$ avec $p > 1$, la situation est plus compliquée. Si les racines $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de $AR(1)$ sont toutes distinctes alors, de la représentation canonique, le processus échantillonné est :

$$Y(nh) = \sum_{r=1}^p Y_r(nh),$$

où $\{Y_r(nh)\}$ est le processus $AR(1)$ stricte :

$$Y_r(nh) = e^{\lambda_r h} Y_r((n-1)h) + Z_r(n), \quad n = 0, \pm 1, \dots,$$

avec :

$$Z_r(n) = \alpha_r \int_{(n-1)h}^{nh} e^{-\lambda_r(nh-u)} dL(u), \quad \text{et} \quad \alpha_r = \sigma \frac{b(\lambda_r)}{a'(\lambda_r)}.$$

Estimation pour $CAR(1)$ non négatif

Soit $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ le processus $CAR(1)$ gouverné par un processus $(L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ de Lévy avec des accroissements non négatifs, i.e., $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est la solution stationnaire de l'équation stochastique :

$$dY(t) + aY(t)dt = \sigma dL(t).$$

Pour tout $h > 0$, le processus échantillonné $\{Y^{(h)}(n) = Y(nh), n = 0, \dots\}$ est un processus $AR(1)$ du temps discret qui satisfait :

$$Y_n^{(h)} = \phi Y_{n-1}^{(h)} + Z_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

où $\phi = \exp(-ah)$, (évidemment $0 < \phi < 1$), et :

$$Z_n = \sigma \int_{(n-1)h}^{nh} e^{-a(nh-u)} dL(u).$$

La séquence du bruit $(Z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est I. I. D et $(Z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est I. I. D et positive puisque $(L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ a des accroissements stationnaires, indépendants, et positifs.

Si on observe le processus $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ parfois $0, h, 2h, \dots, Nh$, où $h > 0$ est pré spécifié et $N = [T/h]$ est la partie entière du nombre entier de l'inférence de T/h , alors, puisque les innovations $(Z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ du processus $\{Y^{(h)}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sont non négatifs et $0 < \phi < 1$, nous pouvons utiliser l'estimateur fortement efficace de Davis-McCormick de ϕ :

$$\hat{\phi}_N^{(h)} = \min_{1 \leq n \leq N} Y^{(h)}(n) / Y^{(h)}(n-1).$$

Pour obtenir la distribution asymptotique de $\hat{\phi}_N^{(h)}$ avec h fixé, nous avons besoin de supposer que la distribution F de $Z(n)$ satisfait $F(0) = 0$ et que F varie régulièrement à zéro avec l'exposant α , i.e.,

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{F(tx)}{F(t)} = x^\alpha, \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Avec ces conditions sur F , les résultats de Davis et McCormick(1989) impliquent que $\hat{\phi}_N^{(h)} \longrightarrow \phi$ p.s. quand $N \longrightarrow \infty$ avec h fixé et que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left[\kappa_\alpha^{-1} \left(\hat{\phi}_N^{(h)} - \phi \right) c_\alpha \leq x \right] = G_\alpha(x),$$

où $\kappa_\alpha = F^{-1}(N^{-1})$, $c_\alpha = \left[E \left(Y_1^{(h)\alpha} \right) \right]^{1/\alpha}$ et G_α est la fonction de distribution de Weibull :

$$G_\alpha(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-x^\alpha) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Des observations $\{Y(nh), n = 0, \dots, N\}$, nous obtenons, ainsi, l'estimateur $\hat{\phi}_N^{(h)}$, et par conséquent l'estimateur de a est

$$\hat{a}_N^{(h)} = -h \log \hat{\phi}_N^{(h)}.$$

En utilisant une approximation de la série de Taylor, nous trouvons :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left[(-h) e^{-ah} \kappa_\alpha^{-1} \left(\hat{a}_N^{(h)} - a \right) c_\alpha \leq x \right] = G_\alpha(x),$$

où G_α est la distribution de Weibull indiquée ci-dessus.

A partir de $Var(Y^{(h)}) = \sigma^2 / (2a)$, nous utilisons l'estimateur :

$$\sigma^2 = \frac{2\hat{a}_N^{(h)}}{N} \sum_{i=1}^p \left(Y_i^{(h)} - \bar{Y}_N^{(h)} \right)^2,$$

pour estimer σ^2 .

Récupération des accroissements de Lévy

Afin de proposer un modèle paramétrique approprié pour $(L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ et estimer les paramètres, il est important de récupérer une approximation de $(L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ formant les données observées. Si le processus $CAR(1)$ est observé continuellement sur l'intervalle $[0, T]$, nous avons :

$$L(t) = \sigma^{-1} \left[Y(t) - Y(0) + a \int_0^t Y(s) ds \right].$$

En remplaçant les paramètres $CAR(1)$ par leurs estimateurs et l'intégrale par une approximation trapézoïdale, nous obtenons l'estimateur pour les accroissements de Lévy $\Delta L_n^{(h)} = L(nh) - L((n-1)h)$ sur l'intervalle $[(n-1)h, nh]$, donné par :

$$\Delta \hat{L}_n^{(h)} = \hat{\sigma}_N^{-1} \left[Y_n^{(h)} - Y_{n-1}^{(h)} + \hat{a}_N^{(h)} h \left(Y_n^{(h)} + Y_{n-1}^{(h)} \right) / 2 \right].$$

Estimation pour $CAR(1)$ à suivre-observé

Pour une réalisation continuellement observée sur l'intervalle $[0, T]$ d'un processus $CAR(1)$ gouverné par un processus de Lévy non décroissant avec la dérive $m = 0$, la valeur de a peut être identifiée exactement avec la probabilité 1. Ceci se contredit fortement avec le cas d'un processus $CAR(1)$ gaussien. Ceci résulte d'un corollaire du théorème suivant :

Théorème 5.1 *Si $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus $CAR(1)$ qui est conduit ou gouverné par un processus de Lévy non décroissant $(L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ avec la dérive m et la mesure ν d'échantillonnage, alors pour chaque t fixé :*

$$\frac{Y(t+h) - Y(t)}{h} + aY(t) \longrightarrow m \text{ p.s. } \text{ quand } h \downarrow 0.$$

Corollaire 5.2 *Si $m = 0$ dans le théorème précédent (c'est le cas où le point zéro appartient à la fermeture de l'appui de $L(1)$), puis avec la probabilité 1 :*

$$a = \sup_{0 \leq s < t \leq T} \frac{\log Y(t) - \log Y(s)}{t - s}.$$

Pour des observations disponibles aux temps $\{nH : n = 0, 1, 2, \dots, [T/h]\}$, notre estimateur peut être exprimé comme :

$$\hat{a}_T^{(h)} = \sup_{0 \leq n < [T/h]} \frac{\log Y(nh) - \log Y((n+1)h)}{t - s}.$$

L'estimateur analogue, basé sur un espace étroitement mais parfois irrégulièrement espacé d'observations t_1, t_2, \dots, t_N tels que $0 \leq t_1 < t_2, \dots < t_N < T$, est :

$$\hat{a}_T = \sup_n \frac{\log Y(t_{n+1}) - \log Y(t_n)}{t_{n+1} - t_n}.$$

Conclusions :

- Nous avons montré que si la dérive du processus gouverné par un processus de Lévy est zéro et T est un temps quelconque positif fine, les 2 estimateurs :

$$\hat{a}_T^{(h)} = \sup_{0 \leq n < [T/h]} \frac{\log Y(nh) - \log Y((n+1)h)}{t-s},$$

et :

$$\hat{a}_T = \sup_n \frac{\log Y(t_{n+1}) - \log Y(t_n)}{t_{n+1} - t_n},$$

convergent presque sûrement à a quand l'espacement maximum entre les observations successives converge vers zéro.

- Nous avons utilisé une méthode très efficace, basée sur des observations dans les temps $0, 1h, 2h, \dots, Nh$, pour estimer les paramètres d'un processus stationnaire Ornstein-Uhlenbeck conduit ou dirigé par un processus de Lévy non décroissant.
- Dans des conditions spécifiques sur le processus *CARMA* gouverné par un processus de Lévy, le comportement asymptotique des estimateurs peut être déterminé.
- Si le processus *CARMA* gouverné par un processus de Lévy n'a pas de dérive, alors le coefficient a du processus *CAR(1)* est déterminé presque sûrement par une réalisation d'observations continues de Y sur un intervalle $[0, T]$.
- Si l'espacement échantillonné h est petit, nous avons employé une approximation discrète à la représentation intégrale exacte en termes de $\{Y(s), s \leq t\}$ pour estimer les accroissements du processus gouverné par un processus de Lévy, et par conséquent on peut estimer les paramètres du processus de Lévy.
- Si le processus gouverné par un processus de Lévy ne présente pas de dérive, alors le coefficient *CAR(1)* de a est déterminé presque sûrement par une réalisation de Y observée continuellement sur un interval $[0, T]$.
- L'expression de a suggère un estimateur basé sur des observations discrètes, qui pour des observations uniformément espacées, est identique à l'estimateur développé ci-dessus et établit la convergence presque sûre de notre estimateur pour tout T fixé quand $h \rightarrow 0$.
- Des procédures analogues pour les processus non-négatif de Lévy axée sur les processus *ARMA* à temps continu sont, actuellement, à l'étude.

5.1.2 Estimation dans les processus CAR(2)

Dans cette section, nous allons remplacer le processus de Lévy par un processus gaussien. Pour le processus *CAR(2)* gouverné par un bruit blanc gaussien, nous utilisons la distribution

asymptotique des estimateurs du maximum de vraisemblance des coefficients du processus $ARMA \{Y^{(h)}(n)\}$ pour dériver la distribution asymptotique. En premier lieu, on fait tendre $T \rightarrow \infty$ et puis $h \rightarrow 0$, des estimateurs des coefficients du processus fondamental. $CAR(p)$.

Pour le processus $CAR(2)$ défini par :

$$(D^2 + a_1 D + a_2) Y(t) = bDW(t),$$

le processus échantillonné $\{Y^{(h)}(t) = Y(nh), n = 0, 1, 2, \dots\}$ satisfait :

$$Y^{(h)}(n) - \phi_1^{(h)} Y^{(h)}(n-1) - \phi_2^{(h)} Y^{(h)}(n-2) = Z(n) + \theta^{(h)} Z(n-1), \quad Z(n) \sim WN(0, \sigma^2(h)),$$

pour h fixé, lorsque $T \rightarrow \infty$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\beta = (\phi_1^{(h)}, \phi_2^{(h)}, \theta^{(h)})^T$ basé sur les observations $Y_1^{(h)}, \dots, Y_{[T/h]}^{(h)}$ satisfait (voir [17] page 258) :

$$\sqrt{T/h} (\hat{\beta} - \beta) \rightarrow N(0, M(\beta)), \quad (5.1)$$

où :

$$M(\beta) = \sigma^2 \begin{bmatrix} E[U(t)U^T(t)] & E[V(t)U^T(t)] \\ E[U(t)V^T(t)] & E[V(t)V^T(t)] \end{bmatrix}^{-1},$$

et les vecteurs aléatoires $\underline{U}(t)$ et $\underline{V}(t)$ sont définis comme $\underline{U}(t) = (U(t), \dots, U(t+1-p))^T$ et $\underline{V}(t) = (V(t), \dots, V(t+1-p))^T$ où $\underline{U}(t)$ et $\underline{V}(t)$ sont les solutions stationnaires des équations autorégressives :

$$\phi(B)U(t) = Z(t) \quad \text{et} \quad \theta(B)V(t) = Z(t).$$

Pour déterminer le comportement asymptotique, lorsque $T \rightarrow \infty$, des estimateurs du maximum de vraisemblance $(\hat{\phi}_1(h), \hat{\phi}_2(h))^T$, nous considérons la matrice M_2 constituée des éléments du coin gauche supérieur 2×2 de la matrice M . Pour h petit et quand $h \rightarrow 0$, nous constatons que M_2 a la représentation :

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left(2a_1 h + \frac{2}{\sqrt{3}} (2 - \sqrt{3}) a_1^2 h^2 + \frac{4}{3} (2 - \sqrt{3}) a_1^3 h^3 \right) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} a_1 a_2 h^3 + o(h^4).$$

L'image ou la superposition de (ϕ_1, ϕ_2) à (a_1, a_2) se fait comme suit :

$$\begin{aligned} a_1 &= -\log(\phi_2)/h. \\ a_2 &= \frac{1}{h^2} \log \left(\frac{\phi_1}{2} + \sqrt{\frac{\phi_1^2}{4} + \phi_2} \right) \log \left(\frac{\phi_1}{2} - \sqrt{\frac{\phi_1^2}{4} + \phi_2} \right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

La matrice :

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial \phi_1} & \frac{\partial a_1}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial a_2}{\partial \phi_1} & \frac{\partial a_2}{\partial \phi_2} \end{bmatrix},$$

a, donc, l'expansion asymptotique :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{h} \left(a_1 h + \frac{a_1^2}{2} h^2 + \dots \right) \\ -\frac{1}{h^2} \left(\frac{a_1}{2} h + \frac{a_1^2 + 2a_2}{12} h^2 + \dots \right) & -\frac{1}{h^2} \left(\frac{a_1}{2} h + \frac{a_1^2 - 4a_2}{12} h^2 + \dots \right) \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

De (5.2) et de (5.3), nous trouvons que :

$$CM_2C^T = -\frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2a_1 & 0 \\ 0 & a_1 a_2 \end{bmatrix} (1 + o(1)), \quad \text{quand } h \rightarrow 0.$$

Par conséquent, de (5.1) l'estimateur du maximum de vraisemblance \hat{a} de $a = (a_1, a_2)^T$ basé sur des observations de Y dans les intervalles de temps $0, h, 2h, \dots, h[T/h]$ satisfait :

$$\sqrt{T}(\hat{a} - a) \rightarrow N(0, V), \quad \text{quand } T \rightarrow \infty$$

où :

$$V = \begin{bmatrix} 2a_1 & 0 \\ 0 & a_1 a_2 \end{bmatrix} (1 + o(1)). \quad (5.4)$$

Remarque :

1. D'après le coefficient moyen mobile $\theta^{(h)}$, le processus échantillonné est également une fonction des paramètres a_1 et a_2 et par conséquent de $\phi_1^{(h)}$ et $\phi_2^{(h)}$. La question posée est de savoir si la maximisation de vraisemblance de temps discret devrait être effectuée sous la contrainte imposée par la relation fonctionnelle entre $\phi_1^{(h)}$, $\phi_2^{(h)}$ et $\theta^{(h)}$. Cependant, comme nous le verrons après, l'estimation sans contrainte, que nous avons considérée dans l'exemple précédent, conduit à une distribution asymptotique des estimateurs qui, lorsque $h \rightarrow 0$, converge à celui des estimateurs du maximum de vraisemblance basé sur le processus continuellement observé sur l'intervalle $[0, T]$. Ceci indique, du moins asymptotiquement, qu'il n'y a aucun gain dans l'utilisation de la maximisation de vraisemblance contraignante et plus compliquée, alors que des techniques d'interpolation standards *ARMA* sont largement disponibles et peuvent, donc, être utilisées.
2. Lorsque l'espacement h converge à zéro, les racines autorégressives de $\exp(-\lambda_i h)$ convergent à 1, menant à des difficultés numériques en effectuant la maximisation du temps discret. Pour cette raison, nous considérons ensuite une approche qui utilise des résultats exacts pour les processus continuellement observés pour développer les estimateurs approximatifs du maximum de vraisemblance pour un espace fermé des observations de temps discret étroitement espacées. La même approche peut être employée, non seulement, pour des auto-régressions linéaires continues dans le temps, mais également pour des auto-régressions non linéaires tels que des analogues de temps continus des modèles de seuils de Tong (1983).

5.1.3 Estimation dans les processus CAR(p)

Dans ce qui suit, nous allons définir le processus $CAR(p)$ gouverné par le bruit blanc gaussien et nous indiquons brièvement la relation entre le processus $CAR(p)$ $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ et le processus échantillonné $\{Y^{(h)}(n) = Y(nh), n = 0, 1, 2, \dots\}$.

Le processus $\{Y^{(h)}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est un processus $ARMA$ à temps discret utilisé par Phillips (1959) pour obtenir des estimations du maximum de vraisemblance des paramètres du processus à temps continu basé sur des observations de $\{Y^{(h)}(n)\}$ de la représentation de l'espace d'état du processus $CAR(p)$. Il est, également, possible d'exprimer la probabilité des observations de $\{Y^{(h)}(n)\}$ directement en termes des paramètres du processus $CAR(p)$. Ainsi, les estimations des paramètres du maximum de vraisemblance peuvent être déterminés selon Jones (1981) et Bergstrom (1985).

Un processus autorégressif gaussien à temps continu d'ordre $p > 0$ est défini symboliquement pour être une solution stationnaire de l'équation stochastique :

$$a(D)Y(t) = bDW(t), \quad (5.5)$$

où :

$$a(D) = D^p + a_1 D^{p-1} + \dots + a_p,$$

D désigne l'opérateur de la différentiation par rapport à t . g est un mouvement brownien standard. Puisque $DW(t)$ n'existe pas en tant que fonction aléatoire, nous pouvons donner une signification à l'équation (5.5) en la réécrivant sous la forme d'espace d'état :

$$Y(t) = (b, 0, \dots, 0) X(t).$$

Pour le processus $CAR(p)$ défini par (5.5) dénotant le processus d'état réalisé sur $[0, T]$ par $x(s) = \{(x_0(s), x_1(s), \dots, x_{p-1}(s))^T, 0 \leq s \leq T\}$, et (voir [19] page 8) défini par :

$$M(\xi, T) = \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^T G^2(\xi, s) ds + \int_0^T G(\xi, s) dW(s) \right],$$

où :

$$G = a_1 x_{p-1}(s) - a_2 x_{p-2}(s) - \dots - a_p x_0(s).$$

$M(\xi, T)$ est la densité au point $\xi \in C[0, T]$ conditionnelle de $X(0) = x$, de la distribution de $X(t)$.

Nous pouvons calculer les estimateurs conditionnels du maximum de vraisemblance des paramètres inconnus en maximisant $M(\xi, T)$:

$$-2 \log M(x_{p-1}, s) = \int_0^T G^2 ds - 2 \int_0^T G dW(s).$$

La différenciation partielle du $\log M$ par rapport au paramètres a_1, a_2, \dots, a_p et la mise à zéro des dérivées donnent les estimateurs du maximum de vraisemblance conditionnels à

$X(0) = x_0$,

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^T x_{p-1}^2 ds & \cdots & \int_0^T x_{p-1} x_0 ds \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^T x_{p-1} x_0 ds & \cdots & \int_0^T x_0^2 ds \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \int_0^T x_{p-1} dx_0 \\ \vdots \\ \int_0^T x_0 dx_{p-1} \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

Noter que cette expression pour les estimateurs du maximum de vraisemblance reste inchangée si x est remplacé par y partout, où y dénote le processus $CAR(p)$ observé et le y_j caractérise sa j^{ieme} dérivée. La différenciation, 2 fois, de $\log M$ par rapport aux paramètres a_1, a_2, \dots, a_p tout en prenant les valeurs espérées et la supposition que tous zéros du polynôme autorégressif a ont des parties réelles négatives, permettent d'écrire :

$$-E \frac{\partial^2 \log M}{\partial a^2} \sim T \Sigma \text{ quand } T \rightarrow \infty,$$

où Σ est la limite de la matrice de covariance de la distribution du vecteur aléatoire $(X_0(t), X_1(t), \dots, X_{p-1}(t))$ lorsque $T \rightarrow \infty$. Il est connu (voir l'**Arat** (1982)) que :

$$\Sigma^{-1} = 2 [m_{ij}]_{i,j=1}^p, \quad (5.7)$$

où $m_{ij} = m_{ji}$ et pour $j \geq i$

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } j - i \text{ est impair} \\ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_{i-1-k} a_{j+k} & \text{ailleurs} \end{cases},$$

où $a_0 = 1$ et $a_p = 0$ si $j > p$ ou $j < 0$, et les estimateurs donnés par (5.6) satisfont :

$$\sqrt{T}(\hat{a} - a) \rightarrow N(0, \Sigma^{-1}), \quad (5.8)$$

où Σ^{-1} est donné par (5.7). Le résultat asymptotique (5.8) reste, également, valable pour l'estimation de Yule-Walker de a comme démontré par Hyndman (1993).

Dans le cas $p = 1$, $\Sigma^{-1} = 2a_1$ et quand $p = 2$, Σ^{-1} est le même que le terme initial dans l'expansion de la matrice de covariance V dans (5.4).

Afin de dériver les estimateurs approximatifs du maximum de vraisemblance pour des observations étroitement espacées du processus de $CAR(p)$ défini par (4.1), nous utilisons le résultat (5.6) avec les intégrales stochastiques remplacées par leurs sommes approximatives. Ainsi, si des observations sont faites en temps $0, h, 2h, \dots$, nous remplaçons, par exemple :

$$\begin{aligned} \int_0^T x'(s)^2 ds & \quad \text{par} \quad \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{[T/h]-3} (x((i+1)h) - x(ih))^2, \\ \int_0^T x'(s) dx'(s) & \quad \text{par} \quad \frac{1}{h^2} \sum_{i=0}^{[T/h]-1} (x((i+1)h) - x(ih)), \\ & \quad \times (x((i+3)h) - 2x((i+2)h) + x((i+1)h)), \end{aligned}$$

en prenant en compte, dans le dernier exemple, pour préserver la propriété non anticipée de la fonction à intégrer dans la somme rapprochée approximative.

5.2 Estimation dans les processus CARMA stables

Le premier but déductif est d'obtenir un bon estimateur $\hat{\Delta}$ du vecteur $\Delta = (a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_{q-1})$ des paramètres du processus *CARMA* dans l'espace L^2 . [16] ont montré dans le cas gaussien que, pour h fixé, le meilleur processus échantillonné

$$\left\{ Y^{*(h)}(n) = Y^{(h)}(n) - E\left(Y^{(h)}(n)\right) \right\}_{n \in \mathbb{Z}},$$

satisfait les équations du processus *ARMA*(p, q), où le processus d'innovation n'est pas nécessairement I. I. D. Pour ce faire, le lecteur doit consulter (se référer) à la proposition 3.1 [31]. La preuve est basée sur le fait que chaque processus q -dépendant sur L^2 a une représentation *MA*(q); cf. Proposition 3.2.1 dans [17]. Pour la construction du processus bruit blanc, on emploie des projections dans L^2 , où 2 variables aléatoires de moyennes zéro sont orthogonales, si et seulement si, elles sont non-corrélatives.

Bien que pour $\alpha < 2$, quelques concepts d'orthogonalité ont été développés, par exemple, celle de James définie dans la section 2.9 de [48]. Dans ce cas, aucune analogie existe avec la proposition 3.2.1 de [17]. De plus, pour la définition d'un processus *ARMA* avec les innovations infinies de variance, les variables bruit blanc sont exigées pour être indépendantes. Par conséquent, il n'est pas clair d'entretenir ou justifier comment se comporter ou traiter la partie de *MA* ($p - 1$)-dépendant.

En ce qui concerne, l'estimation des coefficients, nous sommes sûrs, du moins, pour le modèle *ARMA*, puisque il a prouvé que l'estimation des paramètres des modèles *ARMA* de variance infinie peut être traitée non différemment que celui du modèle *ARMA* gaussien; cf. [21] et [40] et d'autres références. En effet, le taux de convergence est meilleur pour le cas d'un processus stable à queue lourde que celui du cas L^2 .

Par cette motivation, nous traiterons le cas $\alpha < 2$, tout simplement, comme le cas gaussien $\alpha = 2$. Nous voulons souligner que, malgré que les moments d'ordre 2 ou d'ordre supérieurs n'existent pas, leurs contreparties empiriques existent. Par conséquent, le plan empirique, nous pouvons calculer toutes les quantités nécessaires.

Le processus échantillonné Y satisfait les équations :

$$\phi(B)Y_n = \prod_{i=1}^p (1 - e^{\lambda_i h}) Y_n^{(h)} = U_n^{(h)}. \quad (5.9)$$

Dans un premier lieu, nous calculons la même projection que celle du cas L^2 . Alors, nous estimons les paramètres $\hat{\beta} = (\phi_1^{(h)}, \dots, \phi_p^{(h)}, \theta_1^{(h)}, \dots, \theta_{q-1}^{(h)})$ de *ARMA* par la méthode du maximum de vraisemblance. Alternativement, on pourrait également employer la méthode des moindres carrés. Ainsi, les paramètres de *ARMA* sont transformés en paramètres $\hat{\Delta} = (a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_{q-1})$ de *CARMA*.

Nous commençons par le membre gauche de (5.9) tout en remarquant que les coefficients auto-régessifs ϕ_1, \dots, ϕ_p dépendent des valeurs propres λ_r lorsque $r = 1, \dots, p$ et le temps h est fixé entre 2 observations successives. Pour le côté droit de (5.9), nous assumons d'abord

une représentation moyenne mobile pour $Y^{(h)}(n)$, tout en ignorant la $(p-1)$ -dépendance et le fait que nous ne sommes pas dans L^2 . Maintenant, nous estimons les paramètres $\hat{\beta} = (\phi_1^{(h)}, \dots, \phi_p^{(h)}, \theta_1^{(h)}, \dots, \theta_{q-1}^{(h)})$ de *ARMA* par la théorie du maximum de vraisemblance.

Pour obtenir les paramètres de *CARMA*, nous identifions le côté gauche de (4.1) avec le membre gauche de (5.9), pour obtenir, ainsi, les estimations (ϕ_1, \dots, ϕ_p) à partir des estimations (a_1, \dots, a_p) . Les estimations pour (b_0, \dots, b_{q-1}) résultent de l'argument d'identification de la fonction d'autocovariance (empirique) comme suit :

Notons que les auto-corrélations $Y^{(h)}(n)$ peuvent être déterminées en utilisant les auto-corrélations du processus original de *CARMA*, en calculant les auto-corrélations du processus $\phi(B)Y^{(h)}(n)$. Plus précisément et en raison de (5.9), nous pouvons écrire :

$$\gamma_U(k) = \text{cov} \left(\phi(B)Y^{(h)}(n), \phi(B)Y^{(h)}(n-k) \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (5.10)$$

Maintenant, on peut insérer dans (5.10) la formule exacte de $\gamma_U(\cdot)$ étudiée dans la section 2 de Brockwell et autres [5], par :

$$\gamma_U(k) = 2c^2 b' e^{A|k|} \Sigma b, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (5.11)$$

où c est le paramètre d'échelle du processus stable de Lévy. a et b sont définies comme dans les équations de l'espace d'état (4.2) et (4.3), et $\Sigma = \int_0^{+\infty} e^{Ay} e' e^{A'y} dy$. Finalement, nous obtenons (b_0, \dots, b_{q-1}) en identifiant $\gamma_U(k)$ pour diverses valeurs de k avec le côté droit de (5.10), où nous avons inséré les estimations de *ARMA*. Nous expliquons ceci, en détail, dans un exemple approprié. Nous insistons, une fois de plus, que la théorie nécessaire stable sera traitée ailleurs.

5.2.1 Estimation dans les processus CARMA(2, 1) stable

Supposons que nous avons observé une version échantillonnée *CARMA*(2, 1) du processus $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$, avec des paramètres $\Delta = (a_1, a_2, b_0)$ sur une grille avec la taille de grille $h > 0$. Sur cette base, nous avons estimé les paramètres $\beta = (\phi_1, \phi_2, \theta)$ et σ^2 du processus *ARMA*(2, 1). Nous obtenons, ainsi, immédiatement du membre gauche de (5.9) :

$$\phi_1 = e^{\lambda_1 h} + e^{\lambda_2 h}, \quad \phi_2 = -e^{(\lambda_1 + \lambda_2)h}.$$

De $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2$, nous obtenons $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$ donnant $\hat{a}_1 = -(\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2)$ et $\hat{a}_2 = -\hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2$. Pour obtenir un estimateur pour b_0 , nous procédons comme décrit ci-dessus. Pour calculer des expressions explicites pour $\gamma_U(0)$ et $\gamma_U(1)$, dénoter la fonction d'auto-corrélation de $\{Y^{(h)}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ par γ_Y . Nous évoquons (5.10) pour calculer $\gamma_U(0)$ et $\gamma_U(1)$ par :

$$\begin{aligned} \gamma_U(0) &= (1 + \phi_1^2 + \phi_2^2) \gamma_Y(0) + (2\phi_1\phi_2 - 2\phi_1) \gamma_Y(1) - 2\phi_2 \gamma_Y(2), \\ \gamma_U(1) &= -\phi_2 \gamma_Y(3) + \phi_1(\phi_2 - 1) \gamma_Y(2) + (\phi_1^2 + \phi_2^2 + 1 - \phi_2) \gamma_Y(1) + \phi_1(\phi_2 - 1) \gamma_Y(0). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Rappelons de l'exemple 3.1.1 de [16] que la fonction d'auto-corrélation aux retards 0 et 1 d'un processus *MA*(1) arbitraire à coefficient θ et à bruit blanc de variance σ^2 est donné par

:

$$\gamma_U(0) = \sigma^2(1 + \theta^2), \quad \gamma_U(1) = \sigma^2\theta^2,$$

Les 2 solution solutions seront :

$$\theta_{1,2} = \frac{\gamma_U(0)}{2\gamma_U(1)} \pm \sqrt{\frac{\gamma_U^2(0)}{4\gamma_U^2(1)} - 1}. \quad (6.2)$$

Puisque notre procédé d'évaluation a été appliqué dans l'acceptation d'un processus stationnaire, il correspond à cette solution $\theta = \theta_i$, pour laquelle $|\hat{\theta}^i| < 1$. Maintenant, rappelons (5.11) des formules exactes pour $\gamma_Y(\cdot)$, qui dépendent des paramètres a_1 , a_2 et b_0 de *CARMA*. Pour calculer le paramètre β_0 restant de *CARMA* nous en connectons les évaluations \hat{a}_1 , \hat{a}_2 aux expressions latérales droites de (6.1). Pour déterminer le paramètre restant b_0 du processus de *CARMA*, nous insérons les évaluations \hat{a}_1 , \hat{a}_2 dans le membre droit de l'équation (6.2). Il reste, maintenant, à résoudre numériquement cette équation non linéaire pour b_0 .

5.3 CONCLUSION DE LA PARTIE 2

Dans la deuxième partie, les processus *ARMA* à temps continu (noté *CARMA*) gouverné par un processus de Lévy à coefficients constants ont été étudiés et analysés. Les procédés analogues, sous l'hypothèse du second ordre, ont été pris en compte dans Brockwell (2001). De même, l'examen de la définition et des propriétés, qui découlent des fonctions du noyau et d'autocovariance, tout en précisant les fonctions caractéristiques communes ont été fructifiées tout en discutant la question de la causalité. Sous l'hypothèse d'existence des racines distinctes autorégressives, quelques représentations, particulièrement, dociles du noyau, la fonction d'autocovariance et le processus lui-même ont été, eux-aussi, dérivés. La question de la récupération du processus gouverné par un processus (continu) sur un interval $[0, T]$ est, également, évoquée. Nous avons, aussi, entamer l'étude et l'analyse des liens entre les processus *ARMA* à temps continu et ceux à temps discret. Les processus *CARMA* à coefficients variables tout en insistant sur sa stabilité ont été, aussi, un thème important dans ce travail. Les estimateurs du maximum de vraisemblance dans les modèles *CARMA* à coefficients constants ont été, eux-aussi, énoncés et essayés ou utilisés.

En conclusion, il a été montré que l'étude des modèles à temps continu s'effectue pour :

- Traiter les données irrégulièrement espacées.
- Etre appliquer à la gestion financières telle que la mise en valeur des prix.
- Profit ou bénéficier de la disponibilité à grande échelle actuelle de données à haute fréquence.

D'autres concepts importants sont, eux-aussi, étalés dans cette importante partie.

Chapitre 6

ETUDE EXPERIMENTALE

6.1 Simulation du mouvement brownien

6.1.1 Simulation des trajectoires du mouvement brownien

Etant donné un incrément fixe de temps $t > 0$, on peut facilement simuler une trajectoire du processus de Wiener dans l'intervalle de temps $[0, T]$. En effet, pour $W(\Delta t)$, on peut vérifier qu'il est vrai que :

$$W(\Delta t) = W(\Delta t) - W(0) \sim N(0, \Delta t) \sim \sqrt{\Delta t}.N(0, 1),$$

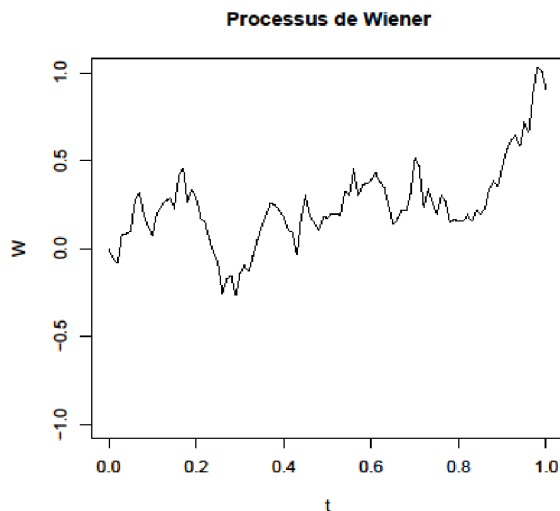
De même, il est, également, vrai pour n'importe quel autre incrément $W(t + \Delta t) - W(t)$ i. e.,

$$W(t + \Delta t) - W(t) \sim N(0, \Delta t) \sim \sqrt{\Delta t}.N(0, 1),$$

Fig. 6. 1. Chemin de simulation du processus de Wiener.

Ainsi, nous pouvons simuler un tel chemin comme suit. Diviser l'intervalle $[0, T]$ en une grille comme $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{N-1} \leq t_N = T$ avec $t_{i+1} - t_i = \Delta t$. Poser $i = 1$ et $W(0) = W(t_1) = 0$ et réitérer l'algorithme suivant :

1. Générer un (nouveau) nombre aléatoire z de la distribution gaussienne standard.
2. Poser $i = i + 1$.
3. Poser $W(t_i) = W(t_{i-1}) + z.\sqrt{\Delta t}$.
4. Si $i < N$, aller à l'étape 1.



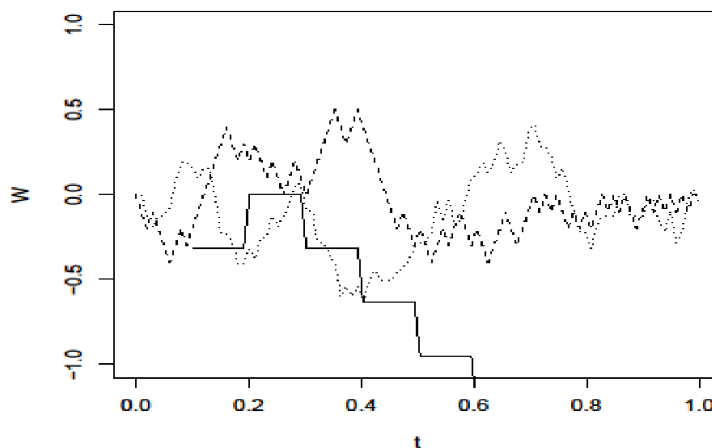
Cette méthode de simulation est valable, seulement, sur les points de la grille, mais entre 2 points quelconques t_i et t_{i+1} , la trajectoire est, habituellement, rapprochée par une interpolation linéaire. L'algorithme ci-dessus peut être, facilement, traduit en certains Code de R comme suit :

The interpolation entre les points de la trajectoire de $W(t)$ a été réalisée, graphiquement, en spécifiant le type = "l" paramètre dans la fonction "plot" ¹ (voir Fig. 6.1). Mais, le code ci-dessus peut être considéré comme très inefficace par les puristes R, car il met en œuvre une itération en utilisant une instruction "for" alors que cela n'est pas nécessaire du tous. Dans ce simple cas, toute la trajectoire peut être simulée en une seule ligne du code R comme dans [50].

Ceci est dû au fait que l'algorithme simule simplement une marche aléatoire avec un incrément gaussien de taille $\sqrt{\Delta t}.N(0,1)$. Le lecteur peut vérifier que les 2 algorithmes de produire exactement la même trajectoire en posant la graine "seed" du générateur des nombres aléatoires à la même valeur en le fixant avec l'instruction `set.seed(123)` (ou toute autre valeur) avant d'exécuter chacun des 2 codes R.

Les trajectoires du mouvement brownien peuvent être obtenues par d'autres caractérisations du processus. Nous les citons simplement par souci d'exhaustivité et de montrer certaines techniques de programmation.

¹On remarquera que nous avons mis en `ylim = c(-1,1)` dans la commande plot. L'intervalle $[-1,1]$ est le $1 - \sigma$ l'intervalle pour le poste du processus de Wiener à l'instant $t = 1$, c'est à dire, on devrait s'attendre à trouver au moins 68% de toutes les réalisations possibles du processus de Wiener à temps $t = 1$, donc cette spécification limite à axe vertical nous permet d'avoir, avec une forte probabilité, une exposition de toute la trajectoire de W .



6.1.2 Simulation de mouvement brownien comme limite d'une marche aléatoire

Une caractérisation du mouvement brownien suppose qu'elle ne peut être considérée comme la limite d'une marche aléatoire dans le sens suivant. Étant donné une séquence de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées X_1, X_2, \dots, X_n , ne prenant que 2 valeurs $+1$ et -1 avec une probabilité égale et compte tenu de la somme partielle :

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Puis, lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$P\left(\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}} < x\right) \rightarrow P(W(t) < x),$$

où $[x]$ est la partie entière du nombre réel x . Noter que ce résultat est un raffinement du théorème de la limite centrale qui, dans notre cas, affirme que $S_n/\sqrt{n} \rightarrow N(0,1)$. Le code R suivant donne une représentation graphique du nombre de variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n , que nous avons besoin de générer afin d'obtenir une bonne approximation.

Fig. 6. 2. Chemin du processus de Wiener comme limite d'une marche aléatoire; $n = 10$ (ligne continue), $n = 100$ (ligne discontinue) , et $n = 1000$ (pointillés).

Dans ce qui précède, nous avons d'abord simulé une séquence de variables aléatoires X_i prenant des valeurs $+1$ et -1 avec une probabilité égale à travers la distribution uniforme. Le commande R "runif " génère n nombres aléatoires de la distribution uniforme dans $[0, 1]$, et l'instruction `runif(n) > 0,5` les transforme en une séquence de 0 et des 1 (en fait, vrai et faux). Maintenant, si x est 0 ou 1, la fonction $2 * x - 1$ transforme le 0 en -1 et le 1 en 1. Ainsi, nous avons maintenant une séquence de n nombres aléatoires répartis également -1 et 1 et l'instruction "cumsum" calcule, pour nous, la somme S_n . La figure 4.2 montre les résultats de l'approximation pour $n = 10$, $n = 100$, et $n = 1000$.

6.1.3 Simulation du mouvement brownien comme une expansion de $L^2[0, T]$

Une autre caractérisation du processus de Wiener très utile en conjonction avec des procédés empiriques dans les statistiques est l'expansion de Karhunen-Loève de $(W(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$. L'expansion de Karhunen-Loève est un outil puissant qui n'est rien autre qu'une expansion des processus aléatoires $L^2([0, T])$ en termes d'une séquence de variables aléatoires et des coefficients indépendants. Ceci est, particulièrement, utile pour les processus à temps continu qui sont une collection non dénombrable de nombreuses variables aléatoires (comme le processus de Wiener qui est en fait une collection non dénombrable de nombreuses variables gaussiennes). L'expansion de Karhunen-Loève est, en fait, une série dénombrable seulement de nombreux termes qui est très utile pour représenter un processus sur un intervalle fixe $[0, T]$. Nous rappelons que $L^2[0, T]$, ou tout simplement L^2 , est l'espace des fonctions de $[0, T]$ pour \mathbb{R} définie comme :

$$L^2 = \{f : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R} / \|f\|_2 < \infty\}, \quad (6.1)$$

avec :

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Notons $X(t)$ la trajectoire du processus aléatoire $X(t, \omega)$ pour une donnée ω . Le processus de Wiener $(W(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ a des trajectoires appartenant à $L^2([0, T])$ pour presque tous les ω , et l'expansion Karhunen-Loève correspondante prend la forme :

$$W(t) = W(t, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} Z_i(\omega) \phi_i(t) \quad 0 \leq t \leq T,$$

avec :

$$\phi_i(t) = \frac{2\sqrt{2t}}{(2i+1)} \sin\left(\frac{(2i+1)\pi t}{2T}\right).$$

Les fonctions ϕ_i forment une base de fonctions orthogonales et Z_i est une séquence de I. I. D. des variables aléatoires gaussiennes.

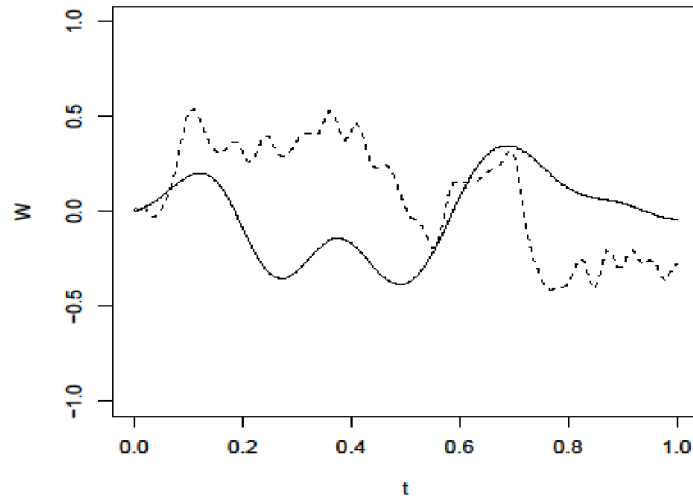
Fig.6. 3. Approximation de Karhunen-Loève du chemin du processus de Wiener avec $n = 10$ (ligne continue), $n = 50$ (ligne discontinue), et

$n = 100$ (pointillées) termes dans l'expansion.

Dans la figure 6. 3, trois différentes approximations de la trajectoire de Wiener, basées sur l'expansion de Karhunen-Loève, sont présentées. Plus le nombre de termes est grand, et plus le rapprochement (ou l'approximation) est meilleur. D'autres méthodes de L^2 , basée sur la théorie fractale et sur la fonction itérative des systèmes, ont été récemment introduites.

Quelle méthode faut-il choisir?

Quand on n'a besoin de simuler que la position du mouvement brownien à un moment donné du temps fixe (ce qui est assez commun dans la gestion financière à l'évaluation des retombées des créances éventuelles avec un temps d'exercice fixé), alors il est fortement conseillée d'utiliser la première méthode, car elle est suffisamment précise. Les 2 autres méthodes, en particulier la dernière, sont utiles si l'on a besoin de plus d'information, notamment si



l'on a besoin d'informations sur l'ensemble du chemin de $(W(t))$ (à nouveau dans la finance, par exemple dans l'évaluation des retombées des options asiatiques et de la barrière, mais aussi en physique quand on a besoin de l'évolution complète d'un système). L'expansion de Karhunen-Loève est bien sûr plus coûteuse en termes de temps CPU. Sa fiabilité dépend aussi, en principe, de la fiabilité de la mise en œuvre des fonctions trigonométriques. Mais, la décomposition de la méthode d'expansion de Karhunen-Loève est aussi assez puissante pour simuler des processus de chemins sans accroissements indépendants ou fonctionnels du mouvement brownien (quand les expansions L^2 sont connus). Ceci est, particulièrement, utile dans les techniques et les tests d'approximations et d'interpolation des systèmes.

6.1.4 Mouvement brownien géométrique

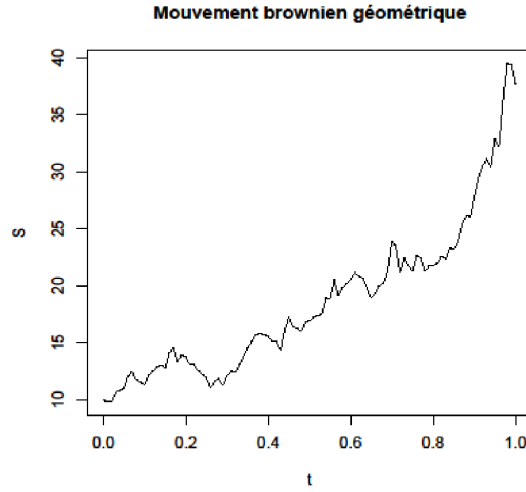
Un processus utilisé assez souvent dans la gestion financière pour modéliser la dynamique d'un actif est bien le mouvement brownien dit géométrique. Ce processus a la propriété d'avoir des incréments multiplicatifs indépendants. Ce dernier est défini comme une fonction du mouvement brownien standard :

$$S(t) = x \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right\},$$

avec $S(0) = x$, $x \in \mathbb{R}$ est la valeur initiale $\sigma > 0$ (interprétée comme la volatilité), et r (interprétée comme le taux d'intérêt) sont 2 constantes.

Fig. 6. 4 . Preuve graphique que les trajectoires du mouvement brownien ne sont pas différentiables.

Le graphe montre le comportement de la limite de $|W(0.5 + \Delta t) - W(0.5)|/\Delta t \rightarrow +\infty$ lorsque $\Delta t \rightarrow 0$. Il a été introduit dans la gestion financières par la [50]. Une implémentation pour simuler une trajectoire du mouvement brownien géométrique peut être basée sur des algorithmes précédents. En supposant que $(W(t))$ contient une trajectoire de $(W(t))$ et t



est le vecteur contenant tous les points dans le temps, un chemin peut être établie (Fig. 6.4) comme suit. :

Une façon équivalente de simuler une trajectoire du mouvement brownien géométrique est en simulant les tranches de S . En effet :

$$S(t + \Delta t) = S(t) e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t + \Delta t - t) + \sigma(W(t + \Delta t) - W(t))}, \quad (1)$$

qui se simplifie en :

$$S(t + \Delta t) = S(t) \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z \right\},$$

avec $Z \sim N(0, 1)$. L'expression 1, que nous développons formellement plus tard, est un cas particulière du mouvement brownien géométrique généralisé, qui est un processus débutant à partir de x au temps de s dont la dynamique est :

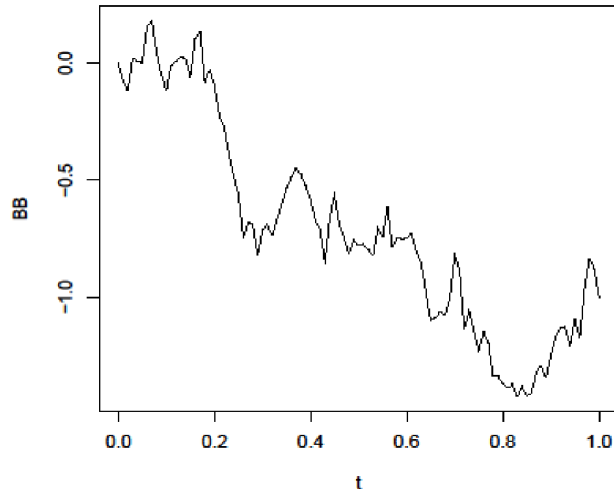
$$Z_{s,x}(t) = x \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - s) + \sigma (W(t) - W(s)) \right\}.$$

Bien sûr, $Z_{0,S(0)}(t) = S(t)$. De la même manière, on peut considérer le mouvement brownien translaté. Étant donné un mouvement brownien ($W(t)$), nous définissons un nouveau processus :

$$W_{0,x}(t) = x + W(t),$$

avec x une constante. Alors, $W_{0,x}(t)$ est un mouvement brownien débutant à partir x au lieu de 0. Si nous tenons, en outre, que cela se produise à un moment fixe au lieu de t_0 à l'instant 0, nous avons besoin de décaler la poursuite du processus par $W(t_0)$. Ainsi, on aura :

$$W_{t_0,x}(t) = x + W(t) + W(t_0), \quad t \geq t_0,$$



est un mouvement brownien à partir de x à t_0 . Plus précisément, c'est le processus $W_{t_0,x} = \{(W(t))_{0 \leq t \leq T}, |W(t_0) = x\}$ et, bien sûr avec la condition $W_{t_0,x}(t) = W(t)$. Par les propriétés du mouvement brownien, $W_{t_0,x}$ est égal en distribution à $x + W(t - t_0)$, et un moyen de simuler, c'est de simuler un mouvement brownien standard, ajouter la constante x , puis décaler le temps. Le code du listing 1.1 construit une telle trajectoire.

6.1.5 Simulation des trajectoires du pont brownien

Une autre manipulation utile et intéressante du processus de Wiener est le processus dit ou appelé pont brownien. C'est un mouvement brownien à partir de x au temps t_0 et passant par certains point y à l'instant T , $T > t_0$. Il est défini comme :

$$W_{T_0,x}^{T,y}(t) = x + W(t - t_0) - \frac{t - t_0}{T - t_0} (W(T - t_0) - y + x).$$

Plus précisément, c'est le processus $\{(W(t))_{t_0 \leq t \leq T} \setminus W(t_0) = x, W(T) = y\}$. Ce processus est, facilement, simulé à l'aide des trajectoires simulées du processus de Wiener.

Fig. 6. 5. Chemin simulé du pont brownien à partir de $x = 0$ à l'instant 0 et se terminant en $y = -1$ à l'instant T .

La figure 6. 5 montre un chemin simulé du pont brownien débutant de $x = 0$ au temps 0 et se terminant en $y = -1$ au temps T .

6.2 Conclusions, interprétations, comparaisons et commentaires

Dans cette dernière partie, nous avons effectué une étude de simulation d'un mouvement brownien, à titre d'application de notre modeste recherche. Pour conclure ou en clôturer cette

section, nous avons présenté quelques fonctions pour générer les chemins de la trajectoire de Wiener et d'autres processus connexes. Les fonctions, appelées *BM*, *GBM*, et *PB*, ont la possibilité de retourner ou rendre un objet invisible de classe "ts" (i.e., un objet de série temporelle régulières du software ou du langage *R*). Nous entendons par objets invisibles retournés par les fonctions *R*, les copies de l'objet qui peut être assigné à d'autres objets sans être imprimés sur la console *R*.

Les figures 6. 1; 6. 2; 6. 3 montrent, respectivement, une trajectoire de $\{(W(t))_{t_0 \leq t \leq T} | W(t_0) = x\}$, $W_{T_0, x}^{T, y}(t) = \{(W(t))_{t_0 \leq t \leq T} \setminus W(t_0) = x, W(T) = y\}$, et celle de mouvement brownien géométrique. Les fonctions *BM*, *GBM*, et *PB* sont contenues dans la boîte à outils ou logiciel E. D. S. Comme le montre la référence, [50], leur utilisation est très intuitive.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Conclusions

Ce modeste travail est une synthèse basée, essentiellement, sur un certain nombre d'articles et d'ouvrages très récents relatifs aux équations différentielles stochastiques et ses applications aux processus *ARMA* à temps continu (*CARMA*).

Dans cette étude, nous avons traité la théorie de Kolmogorov relative aux processus stochastiques considérés comme une famille de variables aléatoires définie sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) pour en définir une fonction aléatoire et une loi de probabilité sur l'espace des trajectoires du processus. Il est basé Plus précisément, les processus stochastiques généralisent la notion des vecteurs aléatoires de dimension finie des variables aléatoires dans le cas d'une famille de variables aléatoires indexées par un ensemble quelconque T . En général, ce dernier représente le «temps» qui est un intervalle de \mathbb{R}_+ (dans le cas continu) ou de $\overline{\mathbb{N}}$ (dans le cas discret).

Les 3 importants chapitres, constituant cette première importante partie, se sont caractérisés, respectivement, par :

- Le chapitre 1 s'est consacré à la théorie des processus stochastiques à temps continu. Il a, aussi, énoncé les définitions et les théorèmes de base sur les processus à accroissements indépendants, martingales, et les processus de Markov. Les 2 classes fondamentales des processus, à savoir, ceux de Poisson et de Wiener ont été, elles-aussi, discutées avec la plus grande et plus générale classe du processus de Lévy.
- Le chapitre 2 principalement basé sur la théorie de Itô, a mis en œuvre la définition de l'intégrale de Itô. Certains résultats fondamentaux du calcul de Itô, et les différentielles stochastiques dont la formule de Itô, ainsi que les résultats connexes, comme le théorème de représentation des martingales ont été, eux-aussi, évoqués en deuxième position.
- Le chapitre 3 a été consacré à l'analyse des équations différentielles stochastiques entraînées par des processus de Wiener et des diffusions de Itô. L'étude du problème

d'existence et d'unicité de la solution des équations différentielles stochastiques, ainsi que leurs propriétés ont animées par l'utilisation et l'illustration des exemples.

Dans la deuxième partie, les processus *ARMA* à temps continu (noté *CARMA*) gouverné par un processus de Lévy à coefficients constants ont été étudiés et analysés. Les procédés analogues, sous l'hypothèse du second ordre, ont été pris en compte dans Brockwell (2001). De même, l'examen de la définition et des propriétés, qui découlent des fonctions du noyau et d'autocovariance, tout en précisant les fonctions caractéristiques communes ont été fructifiées tout en discutant la question de la causalité. Sous l'hypothèse d'existence des racines distinctes autorégressives, quelques représentations, particulièrement, dociles du noyau, la fonction d'autocovariance et le processus lui-même ont été, eux-aussi, dérivés. La question de la récupération du processus gouverné par un processus (continu) sur un interval $[0, T]$ est, également, évoquée. Nous avons, aussi, entamer l'étude et l'analyse des liens entre les processus *ARMA* à temps continu et ceux à temps discret. Les processus *CARMA* à coefficients variables tout en insistant sur sa stabilité ont été, aussi, un thème important dans ce travail. Les estimateurs du maximum de vraisemblance dans les modèles *CARMA* à coefficients constants ont été, eux-aussi, énoncés et essayés ou utilisés.

En conclusions, il a été montré que l'étude des modèles à temps continu s'effectue pour :

- Traiter les données irrégulièrement espacées.
- Etre appliqué à la gestion financières telle que la mise en valeur des prix.
- Profit ou bénéficier de la disponibilité à grande échelle actuelle de données à haute fréquence.

D'autres concepts importants sont, eux-aussi, étalés dans cette si importante partie.

Outres les outils fondamentaux , une étude expérimentale basée sur la méthode de Monté Carlo et autres est présentée afin de motiver l'étude et l'analyse théorique divulguée ci-dessus. Cette étude expérimentable illustrative a montré et a donné des résultats très satisfaisants.

Perspectives

- En perspectives, nous suscitons et projetons les thèmes ci-dessous pour introduire de futurs travaux de recherche doctorales ou autres.
- Approfondissement dans l'étude et l'analyse des processus *CARMA* à coefficients variables dans le temps.
- Initiation et approfondissement de l'étude et le traitement des E. D. S non linéaires.
- Généralisation des études entamées ci-dessus aux équations différentielles stochastiques aux dérivées partielles linéaires et non linéaires.
- Recherche, exploitation et l'utilisation d'autres méthodes telles que les techniques dite d'intelligence artificielle, simples ou hybrides, qui s'apprentent bien aux modèles linéaires et non linéaires à caractère imprécis et un certain, à savoir :

- La logique floue.
- Les réseaux de neurones artificielles.
- Les algorithmes génétiques.
- Les réseaux ou systèmes neurone-flous.
- Toutes combinaisons ou hybridation des techniques intelligentes artificielles avec les méthodes classiques ou des techniques intelligentes artificielles entre elles-mêmes.

6.3

ANNEXES

```
> # ex1 .1. R
> set . seed (123)
> N <- 100 # number of end - points of the grid including T
> T <- 1 # length of the interval [0 ,T] in time units
> Delta <- T/N # time increment
> W <- numeric (N +1) # initialization of the vector W
> t <- seq (0,T, length =N +1)
> for (i in 2:( N +1))
+ W[i] <- W[i -1] + rnorm (1) * sqrt ( Delta )
> plot (t,W, type ="l", main =" Wiener process " , ylim =c( -1 ,1)).
> # ex1 .2. R
> set . seed (123)
> n <- 10 # far from the CLT
> T <- 1
> t <- seq (0,T, length =100)
> S <- cumsum (2*( runif (n ) >0.5) -1)
> W <- sapply (t, function (x) ifelse (n*x >0,S[n*x] ,0))
> W <- as. numeric (W)/ sqrt (n).
> # ex1 .3. R
> set . seed (123)
> n <- 10 # far from the CLT
> T <- 1
> t <- seq (0,T, length =100)
> S <- cumsum (2*( runif (n ) >0.5) -1)
> W <- sapply (t, function (x) ifelse (n*x >0,S[n*x] ,0))
> W <- as. numeric (W)/ sqrt (n)

> plot (t,W, type ="l",ylim =c( -1 ,1))
> n <- 100 # closer to the CLT
> S <- cumsum (2*( runif (n ) >0.5) -1)
> W <- sapply (t, function (x) ifelse (n*x >0,S[n*x] ,0))
```

```
> W <- as.numeric(W)/sqrt(n)
> lines(t,W, lty =2)
> n <- 1000 # quite close to the limit
> S <- cumsum(2*(runif(n) >0.5) -1)
> W <- sapply(t, function(x) ifelse(n*x >0,S[n*x],0))
> W <- as.numeric(W)/sqrt(n)
> lines(t,W, lty =3).
> # ex1 .4. R
> set.seed(123)
> r <- 1
> sigma <- 0.5
> x <- 10
> N <- 100 # number of end points of the grid including T
> T <- 1 # length of the interval [0 ,T] in time units
> Delta <- T/N # time increment
> W <- numeric(N +1) # initialization of the vector W
> t <- seq(0,T, length =N +1)
> for(i in 2:(N +1))
+ W[i] <- W[i -1] + rnorm(1) * sqrt(Delta)
> S <- x * exp((r - sigma ^2/2)*t + sigma *W)
> plot(t,S, type ="l",main =" geometric Brownian motion ").
> # ex1 .5. R
> set.seed(123)
> N <- 100 # number of end points of the grid including T
> T <- 1 # length of the interval [0 ,T] in time units
> Delta <- T/N # time increment
> W <- numeric(N +1) # initialization of the vector W
> t <- seq(0,T, length =N +1)
> for(i in 2:(N +1))
+ W[i] <- W[i -1] + rnorm(1) * sqrt(Delta)
> x <- 0
> y <- -1
> BB <- x + W - t/T * (W[N +1] - y +x)
> plot(t,BB , type ="l")
> abline(h=-1, lty =3).
```


Bibliographie

Bibliography

- [1] Agnieszka Wyłomańska. (2007) Stable CARMA Processus. Szklarska Poreba. U. K.
- [2] Alan Baim. (2007) Stochastic Calculus. Springer, pp 1-30. U. K.
- [3] E.Allen. (2007) Modelling with Itô Stochastic Differential Equations. Springer. pp 33-111. U. K.
- [4] Walter, G. Kelley and Allan, C. Peterson. (2010) The Theory of Differential Equations Classical and Qualitative, Second Edition. Springer Science +Business Media, pp 23-80. U. K.
- [5] Bela Bollobas and William Fulton.(2004) Lévy Processes and Stochastic Calculus. Cambridge University Press. Editorial Board.U. K.
- [6] Bertoin, J. (1996) Lévy Processes. Cambridge University Press, Cambridge. U. K.
- [7] Bordeaux. (2003) Mouvement Brownien, Intégrale Stochastique. Séminaire des doctorants.
- [8] Brockwell, P. J. (1995) A Note on the Embedding of Discrete Time ARMA Processes. J. Time Series Analysis, 16, pp 451-460.
- [9] Brockwell, P. J. and Brockwell, A. E. (1998) A Class of Non Embeddable ARMA Processes. J. Time Series Analysis, 20, pp 483-486.
- [10] Brockwell, P. J. (2000) Continuous Time ARMA Processes. In : C. R. Rao and D. N Shanbhag (Eds.). Stochastic Processes Theory and Methods, Handbook of Statist. 19, 249-276, North-Holland, Amsterdam.Hollande.
- [11] Brockwell, P. J. (2001) Lévy Driven CARMA Processes. Ann. Inst. Stat. Mat. 53, pp 113-124.
- [12] Brockwell, P. J. (2004) Representations of Continuous Time ARMA Processes. J. Appl. Probab. 41A, pp 375-382.
- [13] Brockwell, P. J. and Tina Marquardt. (2005) Lévy Driven and Fractionally Fntegrated ARMA Frocessus with Continus Cime Parameter. Statistica Sinica 15, pp 477-494.

-
- [14] Brockwell, P. J. (2007) Lévy Driven Continuous Time ARMA Processes. Handbook of Financial Time Series, pp 457-479.
- [15] Brockwell, P. J, Davis, R. A. and Yang, Y. (2007) Inference for Non Negative Levy Driven Ornstein-Uhlenbeck Processes. J. Appl. Prob., to appear.
- [16] Brockwell, P. J. , Richard A. Davis and Yu Yang. (2009) Estimation for Non-negative Lévy-driven Ornstein-Uhlenbeck Processes. Department of Statistics Colorado State University Fort Collins CO.80523-1877.AMS 2000 Mathematics Subject Classification :Primary 62M10. 60 H10 . Secondary 62M09. U. S. A.
- [17] Brockwell, P. J. and Davis, R. A. (1991) Time Series : Theory and Methods, 2nd. Springer, New York.U. S. A.
- [18] Brockwell, P. J. and Marquardt, T. (2005) Fractionally Integrated Continuous Time ARMA Processes. Statistica Sinica, 15, pp 477-494.
- [19] Brockwell, P. J., Richard Davis and Yu Yang. (2007) Continuous Time Gaussian Autoregression. Statistica Sinica, 17, pp 63-80.
- [20] Burk Hauser. **A**dvatures in Stochastic Processes. pp 482-511.
- [21] Davis, R. A. (1996) Gauss-Newton and M-Estimation for ARMA Processes with in Nite Variance. Stoch. Proc. Appl. 63, pp 75-95.
- [22] Eclzislán Brzezniak, Omasz Zastanniak. (2002) Basic Stochastic Processes : A Course Through Exercises. Springer-Verlage. U. S. A.
- [23] Erik K. Larsson, Magnus Mossberg, and Torsten Soderstrom. (2008) Estimation of Continuous Time Stochastic System Parameters1. Ericsson Research, Stockholm, Sweden .2 Karlstad University, Sweden. 3 Uppsala University, Sweden (Identification of Continuous-time Models from Sampled Data, Springer-Verlag London Limited. Library of Congress Control Number : 2007942577). Suède.
- [24] Fima C Klebaner. (2005) Introduction to Stochastic Calculus with Applications (Second Edition). Imperial College Press. pp 123-147.U. K.
- [25] Friedman A.. (1975) Stochastic Differential Equations and Applications. Academic Press, London. U. K.
- [26] Gami. J., C cheykle, P. jagers and T. G. Kurtz. Basics of Applied Stochastic Processes. pp 169-183.
- [27] Hans-Otto Georgii. (2008) Stochastics : Introduction to Probability and Statistics. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG.

-
- [28] Henghsiu Tsai and K. S. Chan. (2000) A note on The Covariance Structure of Continuous Time ARMA Process. *Statistica Sinica* 10, 989-998.
- [29] Henrik Madsen, Jan Nygaard Nielsen, Jon Lu Kieveke Gaard, Martin Vestergaad. (2000) Estimating Continuous Time Stochastic Volatility Models Using a Second Order Filter. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*.
- [30] Hui -Hsiun Kuo. (2000) Introduction to Stochastic Integration. pp 7-203.
- [31] Isabel García, Claudia Klüppelberg and Gernot Müller. (2010) Estimation of Stable CARMA Models with an Application to Electricity Spot Prices. AMS 2000 Subject Classifications: Primary: 62M10 ,60G52 , 91G70. Secondary: 62J25 , 62M0.
- [32] Ikeda N. & Watanabe S. (1989) Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. North-Holland, Kodansha.Hollande.
- [33] Jason, L. Speyer and Walter, H. (2008) Chung Stochastic Processes, Estimation, and Control. Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia.U. S. A.
- [34] Karatzas I., Shreve S.E. (1988) Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer.U. K.
- [35] Karatzas I. & Shreve S. E. (1991) Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer-Verlag, New York. U. S. A.
- [36] Kai Liu . (2006) Stability of Infinite Dimensional Stochastic Differential Equations with Applications. Library of Congress Cataloging-in-Publication Data. pp 81-176. U. S. A.
- [37] Lawrence C. Evans. (2009) An Introduction to Stochastic Differential Equation version 1.2. U C Berkeley.U. S. A.
- [38] Marcus J. Chambers and Michael A. Thornton. (2009) Discrete Time Representation of Continuous Time ARMA Processes J. E. L. classification number. C32.
- [39] Michael Mayer. (2001) Continuous Stochastic Calculus with Applications to Finance. Chapman & Hall/CRC.
- [40] Mikosch, T., Gadrich, T., Klüppelberg, C. and Adler, R. J. (1995) Parameter Estimation for ARMA Models with in Nite Variance Innovations. *Ann. Stat.* 23, pp 305-326.
- [41] Morel. J., F.Takens et B.Teissier. (2007) Lecture Notes in Mathematics. Springer. U. K.
- [42] Oksendal. B. K. (1995) Stochastic Differential Equations: An introduction with Applications, 4th ed., Springer-Verlag. U. S. A.
- [43] Olivier FAUGERAS. (2008) Equations différentielles stochastiques.
- [44] P.A Mayer. (1975) Un Cours sur les Intégrales Stochastique. pp 178-190.

-
- [45] Peter Morters and Yuval Peres. (2009) *Brownien Motion*.
- [46] Philip Protter. (1995). *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer. U. K.
- [47] Philip Protter. (2004) *L'intégration des Equations Différentielles Stochastiques (2d.)*, Springer, ISBN 3-540-00313-4. U. K.
- [48] Samorodnitsky, G. and Taqqu, M. S. (1994) *Stable Non-Gaussian Random Processes*. Chapman and Hall, London. U. K.
- [49] Stephan Haug Munich . (2004) *Fitting of Irregularly Sampled Time Series by CARMA Models*. (Stephan Haug, TU Munich). Germany.
- [50] Stefano M. Iacus. (2008) *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations: With Examples*. Springer Science+Business Media, LLC. U. K.
- [51] Thomas Mikosch. (1998) *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*. World Scientific Publishing pp 23-145.
- [52] Timo Seppalainen. (2003) *Basics of Stochastic Analysis*. Timo Seppalainen, pp195-234.
- [53] Viktor Todorov and George Tauchen. (2006) *Simulation Methods for Lévy Driven CARMA Stochastic Volatility Models*.
- [54] Viktor Todorov. (2008) *Estimation of Continuous Time Stochastic Volatility Models with Jumps Using High-Frequency Data*. Springer.
- [55] Vincenzo Cappasso and David Bakstein. (2005) *An Introduction to Continuous-Time Stochastic Processes*. Birkhäuser Boston, pp 1-203.
U. S. A.
- [56] Walter G. Kelley et Allan C. Peterson. (2010) *The Theory of Differential Equations*. Springer New York Dordrecht Heidelberg London, ISBN 978-1-4419-5782-5. U. S. A. & U. K.
- [57] Xiong Jie. (2008). *An Introduction to Stochastic Filtering Theory*. Oxford, pp.15-79. Springer.

ملخص

يهدف هذا العمل إلى دراسة و تحليل البنية ذات الرتبة الثانية و الشروط اللازمة و الكافية التي تضمن وجود حلول سببية لعمليات **ARMA** ذات الزمن المستمر (**CARMA**) و المنقادة بعمليات **Lévy**. التمثيل الظاهري لدالة التباين المشترك و بالخصوص مميزاتها تم تقديمه.

ثم يعالج هذا البحث المتواضع و يناقش وجود جذور الوحدة الخاصة بكثير الحدود **AR** إضافة إلى بعض التماثل الخاصة و المتعلقة به مع إنجاز تقدير **CARMA** و خواصه التقريبية. دراسة المحاكاة بينت و أعطت نتائج جد مرضية و مقبولة.

Résumé

Ce travail a pour objectif d'étudier et d'analyser la structure du second ordre et les conditions nécessaires et suffisantes assurant l'existence des solutions causales des processus ARMA à temps continu (CARMA) gouvernés par des processus de Lévy. Il caractérise, par la suite, explicitement, la fonction de covariance et évoque, également, ses caractéristiques et ses propriétés.

L'existence de racines unités dans le polynôme associé à la partie AR est, pleinement, traitée et discutée. De plus, certaines représentations particulières, qui lui sont liées, ont été illustrées et convenablement caractérisées. L'estimation dans les modèles CARMA et ses propriétés asymptotiques ont été élaborées. L'étude illustrative de simulation a montré et a donné des résultats très satisfaisants.

Abstract

The aim or goal of this work is to study and analyze the structure of the second order and the necessary and sufficient conditions ensuring the existence of causal solutions for ARMA processes with continuous time (CARMA) driven by Lévy processes. It characterizes, explicitly, the covariance function and explores, also, its characteristics and properties.

The existence of unit roots in the polynomial associated with the AR part has been, fully, treated and discussed. In addition, some particular representations related to this type of part, have been illustrated and adequately characterized. The estimate in the CARMA model and its asymptotic properties have been, also, elaborated. The illustrated simulation study has shown and has given very satisfying results.