REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MENTOURI - CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre :............................
Série :..................................

# MEMOIRE

*Présenté pour obtenir le Diplôme de* **Magister**
En : **Mathématiques**

**THEME**

## *Techniques de construction des fonctionnelles de Lyapunov en gradient pour une classe des systèmes de réaction-diffusion*

**Option :**

*Equations aux Dérivées Partielles*

**Présenté par :**

**ABDELMALEK SALEM**

**Devant le jury :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Président : | Denche Mohamed. | Prof. | U. Mentouri |
| Rapporteur : | Kouachi Saïd. | M.C. | C.U.Tebessa |
| Examinateur : | Marhoune A. Lakhdar. | M.C. | U. Mentouri |
| Examinateur : | Ayadi Abdelhamid. | M.C. | U. Mentouri |

**Soutenu Le :** 28.05.2002.......

# REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier particulièrement mon encadreur Monsieur. **Kouachi Saïd**, de m'avoir dirigé avec souplesse et compréhension pour mener à terme ce travail.

Je remercie aussi toutes les personnes qui se sont engagées en toute confiance dans le jury de soutenance : Le professeur **Denche Mohamed** pour m'avoir fait l'honneur de le présider, messieurs **Marhoune Lakhdar** et **Djezzar Salah** pour leur participation.

Je remercie aussi monsieur **Brahmi Mourad** et **abdelmalek salim** pour leurs soutient lors de la rédaction de ce mémoire.

# *TABLE DES MATIERES*

# INTRODUCTION GENERALE

La plus grande partie de ce travail est consacrée à l'étude des techniques de construction des fonctionnelles de Lyapunov en gradient permettant de prouver l'existence globale en temps des solutions d'une classe de systèmes formés d'équations aux dérivées partielles du type parabolique appellés *Systèmes de réaction-diffusion*.

**Au chapitre.0: (Notations et Notions générales)** On a deux parties: La première partie contient la définition des symboles utilisés dans ce travail; certains opérateurs et quelques espaces avec leurs normes; afin de faciliter aux lecteurs la compréhension de notre travail. La deuxième contient des définitions, des théorèmes, des propositions avec démonstrations et des remarques qui seront utilsées dans les chapitres suivants pour expliquer le contenu avec injections continues (voir H. Bresis [5] ) et la formule de Green (voir H. Bresis [5] et R. Dautray & J. L. Lions [9]).

**Au chapitre I: (Les Systèmes de réaction-diffusion )** on a quatres parties: Dans la première partie on va donner une définition courte, générale et précise pour les *Systèmes de réaction-diffusion*, et son importance dans ces dernières années au solutions de plusieurs problèmes dans les différents domaines [ en **physique**, en **biophysique** (comme la propagation des pulsations éléctriques à travers l'axe nerveux), en **chimie** (comme les réactions oscillantes), en **biologie**, et en **biochimie** ...etc ].

Et dans la deuxième partie; la partie de la modélisation, on va éxposer les méthodes générales qui transforment les phénomènes naturelles cités ci-dessus à des *systèmes de réaction-diffusion*. Les conditions aux bords et les conditions initiales seront bien choisies. On donnera aussi des remarques importantes qui permettent de ramener une matrice de diffusion à une matrice diagonale (remarques 1.1.1 & 1.1.2 & 1.1.3). Ensuite dans la troisième partie; pour faire mieux clair on étudiera deux exemples; le premier en chimie, où on prend un phénomène naturel qui est l'ébullition de l'eau, et à partir de la réaction classique de sa formation utilsant la loi de la conservation de la masse, la seconde loi de Fick et prenant en considération la variation des concentrations des réactants et des produits avec le temps nous aboutirons à un système d'équation aux dérivées partielles du type réaction-diffusion (voir S. L. Hollis[17] et Morgan [27]). En physique c'est notre seconde exemple où on donnera le *système de réaction-diffusion* décrivant un phénomène de la physique nucléaire.

Enfin au dernière partie de ce chapitre nous parlerons à des fonctionnelles de Lyapunov (définitions, théorèmes, exemples,...) et leurs relation avec l'existence globale.

**Au chapitre II: (Les Techniques de construction des fonctionnelles de**

**Lyapunov en gradient**) nous allons essayer de construire une fonctionnelle de Lyapunov en gradient pour le système de réaction-diffusion qu'on va étudier. Au début on va chercher une fonctionnelle $L_1(t)$ qui contient: $|\nabla u|^2$ dont la dérivée par rapport à $t$ est la somme de deux sous-expressions, la première est une forme quadratique qui peut être positive, mais la deuxième ne l'est pas, ce qui ne nous permet pas de conserver le signe de $L_1'(t)$ et d'en déduire que $L_1(t)$ est de Lyapunov. Pour cela on ajoute à $L_1(t)$ une autre expression $L_2(t)$ qui contient $|\nabla v|^2$. Suivant les mêmes techniques, on rencontre deux formes quadratiques dont l'une a une matrice $5 \times 5$ (difficile à étudier). Alors on ajoute une troisième expression $L_3(t)$ qui contient $\nabla u \nabla v$ et la fonctionnelle de Lyapunov deviendra de la forme:

$$L_1(t) + L_2(t) + L_3(t);$$

qui est un trinôme $\nabla u$ et $\nabla v$ à coefficients variables ( en fonction de $u$ et $v$). Après élimination des coefficients en $\nabla u \nabla v$, on obtient une forme quadratique $4 \times 4$, mais encore la matrice reste toujours non définit positive.

Dans le **chapitre III**: (**Forme générale de fonctionnelle de Lyapunov en gradient**) on va étudier la fonctionnelle proposée au chapitre II et qui est de la forme

$$\mathrm{L}(t) = \int_\Omega \Phi(u,v)|\nabla u|^2 dx + \int_\Omega \Psi(u,v)\nabla u \nabla v dx + \int_\Omega \varphi(u,v)|\nabla u|^2 dx.$$

On notera les difficultés rencontrées lors de la recherche de ce type de fonctionnelles.

# CHAPITRE.0

## *Notations et Notions Générales*

(Définitions,Théoréme et Propositions)

# 0.1 Notations générales

On définit les différents symboles, certains opérateurs (avec leurs normes), et les éspaces utilisés dans notre travail.

$\Omega$ un domaine borné inclu dans $\mathbb{R}^n$, avec frontière $\partial\Omega = \Gamma$ et $d\sigma$ est mesure de surface sur $\Gamma$.

Soit une matrice carée $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est symétrique ($A = A^T$) si $A^T$ désigne la matrice transposé de $A$.

Les **déterminants principaux successifs** de $A$ sont notés par det1, det2, det3,..., det$n$.

on l'écrivent

$$\det 1 = a_{11}, \det 2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \det n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Les déterminants

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_2j_1} & \ldots & a_{i_pj_1} \\ a_{i_1j_2} & a_{i_2j_2} & \ldots & a_{i_pj_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_1j_p} & a_{i_2j_p} & \ldots & a_{i_pj_p} \end{vmatrix},$$

avec

$$\left( \begin{array}{l} 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_p \leq n \end{array} ; p \leq n \right)$$

et

$$i_1 = j_1, i_2 = j_2, \ldots i_p = j_p$$

sont appelés les **déterminants principaux**.

$D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$ où $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ la dérivée au sens des distributions.

$\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ désigne la dérivée normale de $u$ extérieure à $\partial\Omega$, c'est-à-dire:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \bullet \overrightarrow{\eta}$$

où $\overrightarrow{\eta}$ est le vecteur unitaire de la normale extérieure à $\Gamma$.

Le gradient de $u$

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}), \text{ alors } |\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2. \tag{0.1.1}$$

La divergence de $u$

$$\operatorname{div} u = \nabla \bullet u = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}. \tag{0.1.2}$$

Le laplacien de $u$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}. \tag{0.1.3}$$

$\mathcal{L}(E,F)$ désigne l'espace des opérateurs linéaires et continues (ou bornées) de $E$ dans $F$ muni de la norme

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x \in E, \|x\|_E \leq 1} \|Ax\|_F. \tag{0.1.4}$$

On pose $\mathcal{L}(E,E) = \mathcal{L}(E)$.

$\mathbb{L}^p(\Omega) = \left\{ u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ tel que } \int_\Omega |u|^p dx < \infty, 1 \leq p < \infty \right\}$ muni de la norme

$$\|u\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} = \left[ \int_\Omega |u|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}. \tag{0.1.5}$$

$\mathbb{L}^\infty(\Omega) = \left\{ u \text{ mesurable et } \exists\, C^{te}, \text{ telle que } |u| \leq C \ p.p \text{ sur } \Omega \right\}$ muni de la norme

$$\|u\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} = \inf\left\{C ; |u| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\right\}. \tag{0.1.6}$$

$\mathbb{C}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues dans $\Omega$ muni de la norme

$$\|u\|_{\mathbb{C}(\Omega)} = \max_{x \in \Omega} |u(x)|. \tag{0.1.7}$$

$\mathbb{C}^k(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions $k$ fois continûment différentiable sur $\Omega$ ($k$ entier positif) et on écrit

$$\mathbb{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} \mathbb{C}^k(\Omega).$$

$\mathcal{D}(\Omega)$ c'est l'espace des fonctions $\mathbb{C}^\infty$ à support compact contenu dans $\Omega$.

$\mathcal{D}'(\Omega)$ désigne l'espace des distributions sur $\Omega$ c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaire continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$:

$$\mathcal{D}'(\Omega) \stackrel{def}{=} \mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega), \mathbb{R})$$

$\mathbb{H}^1(\Omega) = \left\{ u \in \mathbb{L}^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbb{L}^2(\Omega), 1 \leq i \leq n \right\}$ c'est l'espace de **Sobolev** muni de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left( \int_\Omega |u|^2 dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left( \int_\Omega |u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{0.1.8}$$

$\mathbb{H}^1_0(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$, et on écrit

$$\mathbb{H}^1_0(\Omega) = \{u \in \mathbb{H}^1(\Omega) : u/_\Gamma = 0\}.$$

D'une façon générale pour $m \in \mathbb{N}$, on définit $\mathbb{H}^m(\Omega) = \left\{ u \in \mathbb{L}^2(\Omega), D^\alpha u \in \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ vérifiant } |\alpha| \leq m \right\}$ muni de la norme

$$\|u\|_{\mathbb{H}^m(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{0.1.9}$$

D'une manière générale pour tout réel $p$, on définit l'espace $\mathbb{W}^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathbb{L}^p(\Omega); D^\alpha u \in \mathbb{L}^p(\Omega), |\alpha| \leq m \right\}$ muni de la norme

$$\|u\|_{m,p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < +\infty \tag{0.1.10}$$

donc $\mathbb{W}^{2,1}(\Omega) = \mathbb{H}^1(\Omega)$ et $\mathbb{W}^{m,2}(\Omega) = \mathbb{H}^m(\Omega)$.

$\mathbb{H}^{-m}(\Omega) \stackrel{Def}{=} \mathcal{L}(\mathbb{H}^m_0(\Omega), \mathbb{R})$ désigne l'espace dual de $\mathbb{H}^m_0(\Omega)$.

$$\mathbb{L}^p(0,T,\mathbb{X}) = \left\{ u \text{ mesurable de } [0,T] \to \mathbb{X}, \int_0^T \|u\|^p_{\mathbb{X}} dt < \infty, \text{si } 1 \leq p < \infty \right\}$$

muni de la norme:

$$\|u\|_{\mathbb{L}^p(0,T,\mathbb{X})} = \left( \int_0^T \|u\|_{\mathbb{X}}^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\mathbb{L}^\infty(0,T,\mathbb{X}) = \left\{ u \text{ mesurable de } [0.T] \to \mathbb{X}, \quad \sup_{t\in(0,T)} ess \; \|u\|_{\mathbb{X}} < \infty \right\} \text{ muni}$$

de la norme :

$$\|u\|_{\mathbb{L}^\infty(0,T,\mathbb{X})} = \sup_{t\in(0,T)} ess \; \|u\|_{\mathbb{X}}. \tag{0.1.12}$$

Naturellement, on a: $\mathbb{L}^p(0,T,\mathbb{L}^p(\Omega)) = \mathbb{L}^p(\Omega \times (0,T))$.

# 0.2 Notions générales

On donnera des propositions, des théorèmes avec démonstrations et des remarques utilisées dans les chapitres suivants.

**Proposition 0.2.1**: *Si $m$, $m' \in \mathbb{N}$ telle que $m \geq m'$, $\mathbb{H}^m(\Omega)$ est contenu, avec injection continue, dans $\mathbb{H}^{m'}(\Omega)$, on écrit*

$$\mathbb{H}^m(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{H}^{m'}(\Omega). \tag{0.2.1}$$

**Preuve**:

Cette proposition est évidente car il est facile de voir que si $m \geq m'$, $u \in \mathbb{H}^m(\Omega)$ implique $u \in \mathbb{H}^{m'}(\Omega)$ et $\|u\|_{m',\Omega} \leq \|u\|_{m,\Omega}$. (voir R. Dautray & J. L. Lions[9]).

**Remarque 0.2.2**: *On a donc l'inclusion suivante* :

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathbb{H}^m(\Omega) \subset \mathbb{H}^{m-1}(\Omega) \subset ... \subset \mathbb{H}^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega), \tag{0.2.2}$$

*pour tout $m \in \mathbb{N}$.*

**Proposition 0.2.3**: *Soient $m \geq 1$ un entier et $1 \leq p < \infty$. On a*

*si* $m < \frac{n}{p}$ *alors*

$$\mathbb{W}^{m,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^q(\Omega) \text{ où } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}, \tag{0.2.3}$$

*si* $m = \frac{n}{p}$ *alors*

$$\mathbb{W}^{m,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^q(\Omega), \ \forall q \in [p, +\infty[, \tag{0.2.4}$$

*si* $m > \frac{n}{p}$ *alors*

$$\mathbb{W}^{m,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^\infty(\Omega), \tag{0.2.5}$$

*avec injections continues.*

*De plus, si $m - \frac{n}{p} > 0$ n'est pas entier, on pose*

$$k = \left[ m - \frac{n}{p} \right] \text{ et } \theta = m - \frac{n}{p} - k, \ (0 < \theta < 1).$$

*On a, pour tout $u \in \mathbb{W}^{m,p}(\Omega)$*

$$\|D^\alpha u\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} \leq C\|u\|_{\mathbb{W}^{m,p}(\Omega)}, \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq k \tag{0.2.6}$$

*et*

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C\|u\|_{\mathbb{W}^{m,p}(\Omega)}|x-y|^\theta p.p.x,y \in \Omega, \forall\alpha, |\alpha| = k. \tag{0.2.7}$$

*En particulier*

$$\mathbb{W}^{m,p}(\Omega) \subset \mathbb{C}^k(\Omega). \tag{0.2.8}$$

**Remarque 0.2.4**: *ce corollaire s'obtient par application réitérée du théorème* IX.9, *du corollaire* IX.11 *et du théorème* IX.12; (voir H. Bresis [5]).

**Théoreme D'otrogradski 0.2.5**: (*ou théorème de la divergence*) *Soit S une surface, frontière d'un domaine de volume V. Choisissons comme sens positif de la normale à la surface, le sens qui va de l'intérieur du domaine à l'extérieur, et désignons par* $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ les angles que fait cette normale avec la direction des $x$, $y$ et $z$ *positifs respectivement.*

Alors, si $A_1$, $A_2$ et $A_3$ *sont des fonctions continues dans le domaine, le théorème de la divergence s'exprime ainsi*:

$$\int_V \left( \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) dV = \int_S A_1 dxdz + A_2 dzdx + A_3 dxdy. \tag{0.2.9}$$

*Sous forme vectorielle avec* $A = (A_1, A_2, A_3)$, ceci peut s'écrire simplemet

$$\int_V \nabla \bullet A dV = \int_S A \bullet \eta dS. \tag{0.2.10}$$

Ce théorème, est appelé encore le théorème de Green dans l'espace.

**Remarque 0.2.6** : Pour *la Preuve de ce théorème voir M. R. Spiegel* [32].

**Théoreme 0.2.7**: *On suppose que* $\Omega$ *est un ouvert de frontière* $C^1$ *par morceaux.*

*Alors, si u et v sont des fonctions de* $H^1(\Omega)$, *on a*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma uv\eta_i d\sigma, \ 1 \leq i \leq n, \tag{0.2.11}$$

*on désigne par* $\eta_i$ *le* $i^{\text{ème}}$ *cosinus directeur de la normale* $\eta$ *à* $\Gamma$ *dirigée vers l'extérieur de* $\Omega$ *et on écrit* $\eta_i = (\overrightarrow{\eta}.\overrightarrow{e_i})$.

**Preuve:**

Si $u$ ( resp .$v$) appartient à $\mathbb{H}^1(\Omega)$, il existe une suite $(u_m)$ ( resp. $(v_p)$) de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ qui converge vers $u$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$ (resp . vers $v$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$) [$\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ dense dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$].

On a pour les fonction $u_m$ et $v_p$ de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$

$$\int_\Omega \frac{\partial u_m}{\partial x_i} v_p dx = - \int_\Omega u_m \frac{\partial v_p}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma u_m v_p \eta_i d\sigma,\ 1 \leq i \leq n,$$

(0.2.12)

on obtient l'expression (0.2.11) par passage à la limite dans la formule de Green précédente.

**Corollaire 0.2.8**: *Pour toute fonction $u$ de $\mathbb{H}^2(\Omega)$ et toute fonction $v$ de $\mathbb{H}^1(\Omega)$, on a la formule de Green*

$$\int_\Omega (\Delta u)v = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma - \int_\Omega \nabla u \nabla v. \tag{0.2.13}$$

**Preuve**:

Donnons une conséquence de Théorème (0.2.7).

On pose $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, le Laplacien d'une distribution $u$. Alors, si $u$ est une fonction de $\mathbb{H}^2(\Omega)$, on a d'aprés (0.2.11) pour toute fonction $v$ de $\mathbb{H}^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
- \int_\Omega (\Delta u)v &= - \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_i} v \eta_i d\sigma \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma \\
&= \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma.
\end{aligned}$$

**Définition 0.2.9**: *Une forme quadratique est un polynôme homogène du second degré relativement aux $n$ variables $u_1, u_2, ..., u_n$. Une forme quadratique a toujours la représentation*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j \quad (a_{ij} = a_{ji};\ j = 1,2,...,n), \tag{0.2.14}$$

*où*

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

*est une matrice symétrique.*

*Si nous désignons matrice-colonne $(u_1, u_2, ..., u_n)$ par $u$ et la forme quadratique par*

$$A(u,u)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_iu_j, \tag{0.2.15}$$

*nous pouvons écrire*

$$A(u,u)=u^TAu=Au\bullet u. \tag{0.2.16}$$

*Si*

$$A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$$

*est une matrice symétrique réelle, la forme* (0.2.15) *est dite forme quadratique réelle. Dans ce travail, nous aurons surtout affaire à des formes quadratiques réelles.*

**Définition 0.2.10**: *Une forme quadratique* (0.2.15) *est dite définie non-négative si, pour des valeurs réelles arbitraires des variables*

$$A(u,u)\ge 0. \tag{0.2.17}$$

**Définition 0.2.11**: *Une forme quadratique* (0.2.15) *est dite définie positive si, pour des valeurs arbitrraires des variables non toutes nulles* ($u\ne 0$); on a

$$A(u,u)>0. \tag{0.2.18}$$

**Théorème 0.2.12**: *Une forme quadratique* (0.2.15) *est dite définie positive si, et seulement si, tous les déterminants principaux de cette matrice des coefficients, sont positifs*

$$\det 1>0,\det 2>0,\dots,\det n>0. \tag{0.2.19}$$

**Remarque 0.2.13**: Pour *la Preuve de ce théorème voir F. R. Gantmacher* [12].

**Corollaire 0.2.14**: *Dans une forme quadratique définie positive* (0.2.15) *tous les déterminants principaux de la matrice des coefficients, sont positifs, lorsque les déterminants principaux successifs d'une matrice symétrique réelle sont positifs, tous les déterminants principaux restants sont positifs.*

**Remarque 0.2.15**: *Si les déterminants principaux successifs sont non-négatifs*

$$\det 1\ge 0,\det 2\ge 0,\dots,\det n\ge 0, \tag{0.2.20}$$

*il ne résulte pas que $A(u,u)$ soit définie non-négative. Ainsi la forme*

$$a_{11}u_1^2+2a_{12}u_1u_2+a_{22}u_2^2, \tag{0.2.20}$$

*dans laquelle $a_{11}=a_{12}=0, a_{22}<0$, satisfait* (0.2.20) *mais n'est pas définie* *non-négative.*

Nous avons cependant le théorème suivant:

**Théorème 0.2.16**: *Une forme quadratique* (0.2.15) *est dite définie non-négative si, et seulement si, tous les déterminants principaux de sa matrice des coefficients sont non-négatifs*

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_p \end{pmatrix} \geq 0, \left(1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n,\ p \leq n\right).$$

(*voir F. R. Gantmacher* [12]).

# CHAPITRE .I

## *Systèmes de Réaction-Diffusion*

(Introduction, Modélisation et Exemples)

# I.0 Introduction aux systèmes de réaction-diffusion

Durant les années récentes, *les systèmes de réaction-diffusion* ont reçu un grand traité d'attention, motivé par leur incident répandu dans des modèles de phénomènes biologiques et chimiques, et par la richesse de la structure de leurs ensembles de solution. Vu les applications nombreuses et variantes de ces systèmes; on donnera les démarches suivies pour modéliser certains problèmes chimiques comme les réactions chimiques oscillantes (Brusselateur). Les individus diffèrent d'un problème à un autre: En chimie, par exemple, ils représentent des substances chimiques . En biochimie, ils peuvent représenter des molécules. En métallurgie, des atomes. En dynamique des populations, ce sont des humains. En génétique des populations, ils représentent des caractères. En biophysique, des charges électriques ou bien des différences de potentiel. En environnement, ils peuvent représenter les animaux ou les plantes d'une forêt , d'une mer ou bien d'un fleuve...Pour la plus grande partie de ces problèmes, on montre qu'on aboutit à des *systèmes de réaction-diffusion*.
Les conditions aux bords seront choisies selon l'origine et la nature du problème étudié: s'il n'y a pas d'immigration des individus à travers la frontière du domaine $\Omega$ sur lequel le problème est posé, on choisit les conditions aux bords homogènes de Neumann. S'il n'y a pas d'individus sur la frontière, on prend les conditions aux bords homogènes de Dirichlet.
L'inconnue ( la solution qu'on cherche ) est un vecteur dont les composantes sont généralement des fonctions positives: en chimie, par exemple, c'est un vecteur de concentrations chimiques. En biochimie ou en métallurgie, c'est un vecteur de concentrations en nombres de molécules ou d'atomes respectivement. En dynamique des populations et en environnement, c'est un vecteur de densités de populations humaines, animales ou végétales...Les conditions initiales sont généralement positives; puisqu'il s'agit de concentrations, densités, charges électriques ...

Tous ces problèmes s'écrivent sous la forme:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f(u), \tag{I.0.1}$$

où $u(x,t) = (u_1(x,t), \ldots, u_m(x,t))$ est un vecteur de variables dépendantes, et c'est l'inconnue, $f(x,t,u(x,t)) = (f_1(x,t,u(x,t)), \ldots, f_m(x,t,u(x,t)))$ c'est la réaction (généralement non linéaire) et $D(x,t,u(x,t))$ est une matrice carrée $m \times m$ définie positive et diagonalisable appelée matrice de diffusion. Les termes de réaction sont le résultat de toute interaction entre les composantes de

$u$:

Par exemple, en chimie $u$ est un vecteur de concentrations chimiques et $f$ représente l'effet des réactions chimiques sur ces concentrations. Le terme $D\Delta u$ représente les diffusions moléculaires à travers la frontière de réaction.

On va établir les équations de réaction-diffusion dans le cas d'une réaction chimique et d'une diffusion moléculaire et indiquer les hypothèses nécessaires pour leurs applications dans des situations diverses.

# I.1 Modélisation

Nous allons donner la démarche suivie pour établir (1.0.1); d'ailleurs qui est la même pour tous les phénomènes cités à l'introduction, puis nous donnons des exemples.

On considère une région bornée $\Omega$ de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ ( qui peut être une surface géographique, une cellule vivante ou des molécules) dans laquelle des réactions se réalisent (ces réactions peuvent être une épidémie, une rumeur ou bien une réaction moléculaire; d'ailleurs la cellule vivante est le siège de plusieurs réactions chimiques, ainsi que les surfaces géographiques forment les lieux de milliers de virus et rumeurs circulant entre les individus des populations...).

Si on note par $u_i(x,t)$ la concentration de la $i^{ème}$ espèce prenant part dans ces réactions, $f_i(x,\ t,\ u_1(x,t),\ldots,\ u_m(x,t))$ son taux de formation dans la réaction en question au point $x$ et à l'instant $t > 0$ et soit $J_i$ le flux de ces espèces à travers la frontière $\Gamma$ de notre région $\Omega$. Considérons un volume $V$ infiniment petit de la région $\Omega$ de frontière $S = \partial V$. La vitesse de formation de la $i^e$ espèce dans le volume $V$ est égale à la quantité formée par la réaction ôtée de son flux à travers la surface $S$: en termes d'équations

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V u_i(x,t)dx = \int_V f_i(x,\ t,\ u_1(x,t),\ldots,\ u_m(x,t))dx - \int_S J_i d\sigma, \qquad \text{(I.1.1)}$$

après application directe du théorème de la divergence au terme désignant le flux, (voir la thèoréme (0.2.5)) on obtient

$$\int_V \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} - f_i + \nabla \bullet J_i\right)dx = 0, \qquad \text{(I.1.2)}$$

puisque le volume V est infiniment petit et arbitraire, on en déduit

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \nabla \bullet J_i = f_i\ ,\ i = 1,\ldots,\ m, \qquad \text{(I.1.3)}$$

**Remarque I.1.1**: *Dans le cas d'une réaction chimique, le terme de réaction $f_i$ vient de l'application (sur le plan microscopique) de la loi d'action des masses (ou loi de Gulberg et Waage). D'ailleurs dans le cas des populations (plan macroscopique) on applique une loi semblable. Le flux (ou la diffusion) est donné par la loi de Fick (seconde loi de Fick)*

$$J_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \nabla u_j\ , \qquad \text{(I.1.4)}$$

*où*

$$A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le m},$$

*est une matrice définie positive appelée matrice de diffusion. En substituant* (I.1.4) *dans* (I.1.3), *on obtient*

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \nabla \bullet (\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \nabla u_j) = f_i \,. \qquad \text{(I.1.5)}$$

*normalement les $a_{ij}$ sont constants, quoi qu' ils peuvent dependre de t, x et u. aussi on va considerer des termes de réactions dependant seulement de u. dans ce cas on a*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A\Delta u = f(u), \qquad \text{(I.1.6)}$$

**Remarque I.1.2**: *Par un simple changement de variables linéaire, la matrice $A$ peut être ramenée à une matrice diagonale $D = (d_1, \dots, d_m)$ avec $d_i > 0$, $i = 1, \dots, m$, et le système* (I.1.6) *devient:*

$$\frac{\partial v}{\partial t} + D\Delta v = g(v). \qquad \text{(I.1.6)}$$

**Remarque I.1.3**: *Remarquant que, pour établir* (I.1.6), *on a simplifié plusieurs termes, si non on aboutirait à des équations très compliquées et difficiles à étudier.*

# I.2 Exemples

## I.2.1 En chimie:

Considérons le schéma réactionnel

$$\sum_{i \in I} n_i R_i \underset{l}{\overset{h}{\rightleftharpoons}} \sum_{j \in J} n_j R_j, \qquad \text{(I.2.1)}$$

avec

$$I \cup J = \{1,.., p\} \text{ et } I \cap J = \emptyset,$$

où $n_1, n_2, ..., n_p$ sont respectivement les nombres de molécules des réactants $R_1, R_2, ..., R_p$ intervenants dans la réaction, les constantes $h$ et $l$ dépendent de la température, de la position $x$ et du temps $t$. L'application de la loi de conservation de masse et de la seconde loi de Fick (flux) donne

$$n_k \frac{\partial c_k}{\partial t} = \nabla \bullet d_k \nabla c_k + h \prod_{i \in I} c_i^{n_i} - l \prod_{j \in J} c_j^{n_j}, \; k = 1, 2, ..., p, \qquad \text{(I.2.2)}$$

où $c_1, c_2, ..., c_p$ représentent les concentrations des réactants $R_1, R_2, ..., R_p$ et $n_1, n_2, ..., n_p$ sont des constantes positives appelées ordres de $R_1, R_2, ..., R_p$ respectivement. Les constantes $h$ et $l$ sont positives.

**Remarque I.2.1**: *La matrice diagonale $D$ peut dépendre de $t$, $x$ et $u$, comme elle peut ne pas être diagonale (c'est le cas où la diffusion d'une espèce affecte le taux de production des autres).*

Pour l'ébullition de l'eau, par exemple, on prend dans (I.2.1) $p = 3$, $I = \{1,2\}$, $J = \{3\}$, $n_1 = n_3 = 2$ et $n_2 = 1$, $R_1$ =hydrogène, $R_2$ =oxygène et $R_3$ =l'eau, on obtient la réaction classique

$$2H_2 + O_2 \underset{l}{\overset{h}{\rightleftharpoons}} 2H_2O. \qquad \text{(I.2.3)}$$

Les équations décrivantes cette réaction s'écrivent alors d'après (I.2.2)

$$
\begin{cases}
2\dfrac{\partial[H_2]}{\partial t} = d_1\Delta[H_2]-h[H_2]^2[O_2]+l[H_2O]^2 \\[2ex]
\dfrac{\partial[O_2]}{\partial t} = d_2\Delta[O_2]-h[H_2]^2[O_2]+l[H_2O]^2 \qquad x \in \Omega\,,\ t > 0, \\[2ex]
2\dfrac{\partial[H_2O]}{\partial t} = d_3\Delta[H_2O]+h[H_2]^2[O_2]-l[H_2O]^2
\end{cases}
\tag{I.2.4}
$$

avec conditions aux bords appropriées (par exemple $\dfrac{\partial[H_2]}{\partial\eta} = \dfrac{\partial[O_2]}{\partial\eta} = \dfrac{\partial[H_2O]}{\partial\eta} = 0,\ t > 0,\ x \in \partial\Omega$) et conditions initiales positives (i.e)

$$[H_2]_{t=0} = [H_2]_0 > 0, [O_2]_{t=0} = [O_2]_0 > 0, [H_2O]_{t=0} = [H_2O]_0 > 0.$$

Les coefficients $h$ et $l$ sont supposés des constantes positives, quoi qu'ils peuvent dépendre de la température:

$$h,\ l \approx cT^{\beta}\exp\text{-}\left(\frac{E}{R}T\right),\ 1 \leq \beta \leq 2\,, \tag{I.2.5}$$

voir S. L. Hollis [17] et J.Morgan [27] avec différentes conditions aux bords.

## I.2.2 En physique nucleaire:

Le modèle décrivant une réaction nucléaire est décrit par le *système de réaction-diffusion*

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = d_1\Delta u+u(av\text{-}b) \\[2ex]
\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur } \Omega \times (0,+\infty), \\[2ex]
\dfrac{\partial v}{\partial t} = d_2\Delta v+cv
\end{cases}
\tag{I.2.6}
$$

avec conditions aux bords homogènes de Newman et conditions initiales positives. On montre que (voir Pao [29]), pour $a > 0$, $b \geq 0$ et $c > 0$, la solution du système (I.2.6) avec conditions aux bords bien choisies et conditions initiales positives explose en temps fini (cesse d'exister). Cette réaction est analogue à celle de deux enzymes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = u_{xx}-\sigma u \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = v_{xx}+\sigma v \end{cases} \quad \text{sur : } (0,1)\times(0,+\infty), \tag{I.2.7}$$

avec les conditions aux bords

$$\begin{cases} u_x(0,t) = ag_1(v(0,t)), \;\; u_x(1,t) = 0 \\ \\ v_x(0,t) = 0, \;\; v_x(1,t) = ag_2(u(1,t)) \end{cases} \quad t > 0 \tag{I.2.8}$$

et conditions initiales positives. Ce modèle a été étudié par Pao [28], Thomas & Aronson [33] et Turner & Ames [34].

# I.3 Fonctionnelles de Lyapunov classiques

Pour démontrer l'existence des solutions des systèmes de réaction diffusion, il y a plusieurs méthodes telles que la méthode des régions invariantes, méthode de l'effet régularisant, méthodes fonctionnelles basées sur des estimations à priori ou sur des fonctionnelles de Lyapunov. Ici, nous n'exposons pas les deux premières méthodes puisqu'elles ne donnent pas toujours l'existence globale vu la diffuclté et la complexité des termes de réaction de certains systèmes de réaction-diffusion, mais nous nous consacrons à la dernière méthode qui donne des résultats satisfaisants. Il est bien connu que (voir J. Smoller [31] ), pour démontrer l'existence global des solutions d'un système de réaction-diffusion, il suffit de montrer que les termes de réaction sont dans $\mathbb{L}^{\infty}(0,T_{\max};\mathbb{L}^{p})$ pour un certain $p > n/2$.

**Théorème I.3.1 (Existence Globale par effet régularisant):** *Soit l'équation*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\Delta u = f(t,x,u) \quad sur\ [0,T[\times\Omega \\ u = 0 \quad sur\ [0,T[\times\partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) \quad x\in\Omega, \end{cases} \tag{I.3.1}$$

*si*

$$f(t,x,u)\in\mathbb{L}^{\infty}(0,T,\mathbb{L}^{p}(\Omega)) \ \ pour\ p > \frac{n}{2},\ où\ n = \dim\Omega. \tag{I.3.2}$$

*(i.e)*

$$f(t,x,u)\in\mathbb{L}^{\infty}(0,T,\mathbb{L}^{p}(\Omega)) \ \Leftrightarrow \sup_{\substack{0\le t\le T\\ x\in\Omega}} \|f(t,x,u)\|_{\mathbb{L}^{p}(\Omega)} < +\infty$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Omega} |f(t,x,u)|^{p}dx \le c, \forall t\in[0,T], \tag{I.3.3}$$

*alors la solution de l'équation est globale* (voir D. Henry [14]).

**Définition I.3.2 (fonctionnelle de Lyapunov):** *On appelle fonctionnelle de Lyapunov associée à un système de réaction-diffusion formé de m* *équations, toute fonction*

$$\mathrm{L} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \tag{I.3.4}$$

*telle que*

$\dfrac{d\mathrm{L}(u_1(t,\bullet),\ldots,u_m(t,\bullet))}{dt} \leq 0$ *pour tout* $t > 0$ *et toute solution* $(u_1(t,\bullet),\ldots,u_m(t,\bullet))$.

Par exemple (voir S. Kouachi & A. Youkana [25] ), la fonctionnelle $L_2$ définie par

$$t \to \mathrm{L}_2(t) = \int_\Omega (M-u(t,x))^{-\gamma} \exp \beta v(t,x)dx, \tag{I.3.5}$$

où $u$ et $v$ est la solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = -f(u,v) \\ & t > 0,\ x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = f(u,v) \end{cases} \tag{I.3.6}$$

avec les conditions aux bords :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \qquad \text{sur} \qquad \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \tag{I.3.7}$$

et les données initiales :

$$u(0,x) = u_0(x) \geq 0\ , \qquad v(0,x) = v_0(x) \geq 0 \qquad \text{dans } \Omega \tag{I.3.8}$$

est de Lyapunov pour toute constantes positives $\beta$ et $\gamma$ telles que

$$\beta M < \gamma < \frac{4ab}{(a-b)^2}, \tag{I.3.9}$$

et tout $M$ satisfaisant:

$$\|u_0\|_{\mathbb{L}^\infty} \leq M \tag{I.3.10}$$

sous la condition

$$\lim_{s \to +\infty} \left[ \frac{\ln(1+f(r,s))}{s} \right] < \alpha^*, \quad r \geq 0, \tag{I.3.10}$$

où

$$\alpha^* = \frac{2ab}{n(a-b)^2 \|u_0\|_\infty}.$$

On a, après application de la formule de Green (voir corollaire 0.2.8)

$$\mathrm{L}'(t) = \frac{d\mathrm{L}(t)}{dt} = \mathrm{I}+\mathrm{J} \tag{I.3.11}$$

avec

$$I = -\int_\Omega T(\nabla u, \nabla v)(M-u)^{-\gamma-2} e^{\beta v} dx$$

où

$$\begin{aligned} T(\nabla u, \nabla v) = \gamma(a(\gamma+1)|\nabla u|^2 + & \\ & \beta(M-u)(a+b)\gamma\nabla u \nabla v + \\ & b\beta^2(M-u)^2|\nabla v|^2 \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{J} = \int_\Omega (M\mu\beta - \lambda\gamma)(M-u)^{-\gamma-1} e^{\beta v} f(u,v) dx.$$

Donc il est clair que la dérivée de cette fonctionnelle avec les conditions (I.3.9)-(I.3.10) est négative.

La condition (I.3.10) implique l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$1 + f(r,s) \leq Ce^{\alpha s}, \quad \text{pour tous } s \geq 0 \text{ et } r \in [0, M], \tag{I.3.12}$$

puisque

$$\alpha < \frac{2ab}{n\|u_0\|_\infty (a-b)^2},$$

et on peut choisir $p > n/2$ telque

$$p\alpha < \frac{ab}{(a-b)^2 \|u_0\|_\infty}. \tag{I.3.13}$$

Posons $\beta = p\alpha$, alors

$$\beta \|u_0\|_\infty < \frac{ab}{(a-b)^2}; \tag{I.3.14}$$

alors on peut choisir $\gamma$ et $M$ tels que (I.3.9) et (I.3.10) soient satisfaits. Donc

$e^{\beta v(t,.)} = (e^{\alpha v(t,.)})^p \in \mathbb{L}^\infty([0, T^*[; \mathbb{L}^1(\Omega));$

puis

$e^{\alpha v(t,.)} \in \mathbb{L}^\infty([0, T^*[; \mathbb{L}^p(\Omega)),$

finalement

$f(u(t,.), v(t,.)) \in \mathbb{L}^\infty([0, T^*[; \mathbb{L}^p(\Omega))$ pour un certain $p > n/2$.

# CHAPITRE .II

## Les Techniques de Construction des Fonctionnelles de Lyapunov en Gradient

Construire une fonctionnelle de Lyapunov suffisement régulière pour un système de réaction-diffusion c'est trouver des estimations à priori de la solution. En d'autres termes c'est résoudre ce problème, donc cette construction est un problème très délicat. Dans ce chapitre on va essayer de construire des fonctionnelles en gradient dont le but de décrire les difficultés rencontrées lors de la construction et de faire de notre mieux pour simplifier certains obstacles qui peuvent bloquer cette recherche.

Considérons le système formé de deux équations aux dérivées partielles du type réaction-diffusion:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = -f(u,v) & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = +f(u,v) & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega \end{cases} \tag{II.1}$$

avec les conditions aux bords:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \qquad sur \quad \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \ . \tag{II.2}$$

et les données initiales:

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad v(0,x) = v_0(x) \qquad \text{dans } \Omega, \tag{II.3}$$

où $\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe $C^1$, $a$ et $b$ sont constantes positives. Les conditions initiales sont supposées être non négatives. La fonction $f(r,s)$ est continument différentiable sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ et non négative avec $f(0,s) = 0$ pour tous $s \geq 0$.

On définit la fonctionnelle:

$$L_1(t) = a\gamma(\gamma+1) \int_\Omega (M-u)^{-\gamma-2} e^{\beta v} |\nabla u|^2 dx, \tag{II.4}$$

dérivant $L_1(t)$ par rapport à $t$

$$\begin{aligned} L_1'(t) &= a\gamma(\gamma+1) \int_\Omega \begin{bmatrix} (\gamma+2)(a\Delta u - f)(M-u)^{-1}|\nabla u|^2 + \\ 2\nabla u \nabla(a\Delta u - f) + \beta|\nabla u|^2(b\Delta v + f) \end{bmatrix} (M-u)^{-\gamma-2} e^{\beta v} dx \\ &= a\gamma(\gamma+1)(I_1 + J_1) \end{aligned} \tag{II.5}$$

avec

$$I_1 = \int_\Omega [a(\gamma+2)(M-u)^{-1}|\nabla u|^2 \Delta u + b\beta|\nabla u|^2 \Delta v + 2a\nabla u \nabla \Delta u](M-u)^{-\gamma-2} e^{\beta v} dx. \tag{II.6}$$

On applique la formule de Green:

$$I_1 = -\int_\Omega a(\gamma+2)\nabla u\left[\begin{array}{c}(\gamma+3)\nabla u(M-u)^{-1}|\nabla u|^2+\\ \beta\nabla v|\nabla u|^2+2\nabla u\Delta u\end{array}\right](M-u)^{-\gamma-3}e^{\beta v}dx$$
$$-\int_\Omega 2a\Delta u[(\gamma+2)(M-u)^{-1}|\nabla u|^2+\beta\nabla u\nabla v+\Delta u](M-u)^{-\gamma-2}e^{\beta v}dx$$
$$-\int_\Omega b\beta\nabla v\left[\begin{array}{c}\nabla u(\gamma+2)(M-u)^{-1}|\nabla u|^2+\\ \beta\nabla v|\nabla u|^2+2\nabla u\Delta u\end{array}\right](M-u)^{-\gamma-2}e^{\beta v}dx,$$

(II.7)

donc

$$I_1 = -\int_\Omega \left[\begin{array}{c}(a+b)\beta(\gamma+2)(M-u)\nabla u\nabla v|\nabla u|^2+\\ 2(a+b)(M-u)^2\beta\Delta u\nabla u\nabla v+\\ 4a(\gamma+2)(M-u)\Delta u|\nabla u|^2+a(\gamma+2)(\gamma+3)|\nabla u|^4+\\ 2a(M-u)^2|\Delta u|^2+b\beta^2(M-u)^2|\nabla u|^2|\nabla v|^2\end{array}\right](M-u)^{-\gamma-4}e^{\beta v}dx$$

(II.8)

et

$$J_1 = \int_\Omega [(-(\gamma+2)(M-u)^{-1}f+\beta f-2f_u)|\nabla u|^2-2f_v\nabla u\nabla v](M-u)^{-\gamma-2}e^{\beta v}dx,$$

(II.9)

on remarque que $I_1$ est une forme quadratique en fonction de ($\nabla u\nabla v, |\nabla u|^2, \Delta u$ et $|\nabla v|^2$) qui peut être positive, mais $J_1$ ne l'est pas (puisque le coefficient de $|\nabla v|^2$ est nul). Alors, on additionne à $L_1$

$$L_2(t) = b\beta^2\int_\Omega (M-u)^{-\gamma}e^{\beta v}|\nabla v|^2dx, \tag{II.10}$$

la fonctionnelle devient:

$$L_1(t)+L_2(t) = \int_\Omega [a\gamma(\gamma+1)(M-u)^{-\gamma-2}|\nabla u|^2+b\beta^2(M-u)^{-\gamma}|\nabla v|^2]e^{\beta v}dx.$$

(II.11)

Calculons la dérivée de $L_2(t)$ par rapport à $t$

$$L_2'(t) = b\beta^2 \int_\Omega \begin{bmatrix} \gamma(M-u)^{-\gamma-1}|\nabla v|^2(a\Delta u-f)+ \\ \beta(M-u)^{-\gamma}|\nabla v|^2(b\Delta v+f)+ \\ 2(M-u)^{-\gamma}\nabla v\nabla(b\Delta v+f) \end{bmatrix} e^{\beta v}dx$$

$$= b\beta^2(I_2+J_2) \tag{II.12}$$

avec

$$I_2 = \int_\Omega (M-u)^{-\gamma}[a\gamma(M-u)^{-1}|\nabla v|^2\Delta u+b\beta|\nabla v|^2\Delta v+2b\nabla v\nabla\Delta v]e^{\beta v}dx, \tag{II.13}$$

on applique la formule de Green

$$I_2 = -\int_\Omega a\gamma\nabla u \begin{bmatrix} (\gamma+1)(M-u)^{-1}\nabla u|\nabla v|^2+ \\ \beta\nabla v|\nabla v|^2+2\nabla v\Delta v \end{bmatrix} (M-u)^{-\gamma-1}e^{\beta v}dx$$

$$-\int_\Omega b\beta\nabla v \begin{bmatrix} \gamma(M-u)^{-1}\nabla u|\nabla v|^2+ \\ \beta\nabla v|\nabla v|^2+2\nabla v\Delta v \end{bmatrix} (M-u)^{-\gamma}e^{\beta v}dx$$

$$-\int_\Omega 2b\Delta v[\gamma(M-u)^{-1}\nabla u\nabla v+\beta|\nabla v|^2+\Delta v](M-u)^{-\gamma}e^{\beta v}dx, \tag{II.14}$$

alors

$$I_2 = -\int_\Omega \begin{bmatrix} a\gamma(\gamma+1)|\nabla u|^2|\nabla v|^2+b\beta^2(M-u)^2|\nabla v|^4+ \\ (a+b)\beta\gamma(M-u)\nabla u\nabla v|\nabla v|^2+ \\ 2(a+b)\gamma(M-u)\nabla u\nabla v\Delta v+ \\ 4b\beta(M-u)^2|\nabla v|^2\Delta v+2b(M-u)^2|\Delta v|^2 \end{bmatrix} (M-u)^{-\gamma-2}e^{\beta v}dx \tag{II.15}$$

et

$$J_2 = \int_\Omega \begin{bmatrix} (2(M-u)f_v-\gamma f+\beta(M-u)f)|\nabla v|^2+ \\ 2(M-u)f_u\nabla u\nabla v \end{bmatrix} (M-u)^{-\gamma-1}e^{\beta v}dx \tag{II.16}$$

d'où

$$a\gamma(\gamma+1)J_1+b\beta^2J_2 =$$

$$\int_\Omega (M-u)^{-\gamma-3}e^{\beta v}\begin{bmatrix} a\gamma(\gamma+1)(\beta(M-u)f-(\gamma+2)f-2(M-u)f_u)|\nabla u|^2- \\ 2(M-u)(a\gamma(\gamma+1)f_v-b\beta^2(M-u)^2f_u)\nabla u\nabla v+ \\ b\beta^2(M-u)^2(\beta(M-u)f-\gamma f+2(M-u)f_v)|\nabla v|^2 \end{bmatrix}dx$$

(II.17)

et

$$a\gamma(\gamma+1)I_1+b\beta^2I_2 = -\int_\Omega \left[\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \end{pmatrix} Z\bullet Z\right]dx$$

(II.18)

avec $Y=\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \end{pmatrix}$ une matrice en blocs telle que

$$Y_{11} = \begin{pmatrix} 2a^2\gamma(\gamma+1)(M-u)^{-\gamma-2} & 2a^2\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(M-u)^{-\gamma-3} \\ 2a^2\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(M-u)^{-\gamma-3} & a^2\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(M-u)^{-\gamma-4} \\ a\gamma\beta(\gamma+1)(a+b)(M-u)^{-\gamma-2} & \frac{1}{2}a\beta\gamma(a+b)(\gamma+1)(\gamma+2)(M-u)^{-\gamma-3} \end{pmatrix},$$

$$Y_{12} = \begin{pmatrix} a\gamma\beta(\gamma+1)(a+b)(M-u)^{-\gamma-2} \\ \frac{1}{2}a\beta\gamma(a+b)(\gamma+1)(\gamma+2)(M-u)^{-\gamma-3} \\ 2ab\gamma(\gamma+1)\beta^2(M-u)^{-\gamma-2} \end{pmatrix},$$

$$Y_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Y_{22} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b(a+b)\beta^3\gamma(M-u)^{-\gamma-1} \\ b\beta^2(a+b)\gamma(M-u)^{-\gamma-1} \end{pmatrix}.$$

$$Y_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2}b(a+b)\beta^3\gamma(M-u)^{-\gamma-1} & b\beta^2(a+b)\gamma(M-u)^{-\gamma-1} \end{pmatrix},$$

$$Y_{23} = \begin{pmatrix} b^2\beta^4(M-u)^{-\gamma} & 2b^2\beta^3(M-u)^{-\gamma} \\ 2b^2\beta^3(M-u)^{-\gamma} & 2b^2\beta^2(M-u)^{-\gamma} \end{pmatrix}$$

et

$$Z = \begin{pmatrix} \Delta u \\ |\nabla u|^2 \\ \nabla u \nabla v \\ |\nabla v|^2 \\ \Delta v \end{pmatrix},$$

la matrice $Y$ doit être définie positive, mais on a

$$\begin{vmatrix} b^2\beta^4(M-u)^{-\gamma} & 2b^2\beta^3(M-u)^{-\gamma} \\ 2b^2\beta^3(M-u)^{-\gamma} & 2b^2\beta^2(M-u)^{-\gamma} \end{vmatrix} = -2b^4\beta^6((M-u)^{-\gamma})^2 < 0, \tag{II.19}$$

donc elle n'est pas définie positive. Ajoutons

$$L_3(t) = \beta\gamma(a+b)\int_\Omega (M-u)^{-\gamma-1}e^{\beta v}\nabla u\nabla v dx, \tag{II.20}$$

la fonctionnelle devient

$$\begin{aligned} L(t) &= L_1(t)+L_2(t)+L_3(t) \\ &= \int_\Omega \left[ \begin{array}{c} a\gamma(\gamma+1)(M-u)^{-\gamma-2}|\nabla u|^2+b\beta^2(M-u)^{-\gamma}|\nabla v|^2 \\ +(a+b)\beta\gamma(M-u)^{-\gamma-1}\nabla u\nabla v \end{array} \right] e^{\beta v}dx, \end{aligned} \tag{II.21}$$

dérivons $L_3(t)$ par rapport à $t$

$$\begin{aligned} L_3'(t) &= \beta\gamma(a+b)\int_\Omega \left[ \begin{array}{c} (\gamma+1)(a\Delta u-f)(M-u)^{-1}\nabla u\nabla v+ \\ \nabla u\nabla(b\Delta v+f)+\nabla v\nabla(a\Delta u-f)+ \\ \beta(b\Delta v+f)\nabla u\nabla v \end{array} \right] (M-u)^{-\gamma-1}e^{\beta v}dx \\ &= \beta\gamma(a+b)(I_3+J_3) \end{aligned} \tag{II.22}$$

avec

$$I_3 = \int_\Omega \begin{bmatrix} a(\gamma+1)(M-u)^{-1}\nabla u\nabla v\Delta u + b\beta\nabla u\nabla v\Delta v + \\ b\nabla u\nabla\Delta v + a\nabla v\nabla\Delta u \end{bmatrix} (M-u)^{-\gamma-1}e^{\beta v}dx, \tag{II.23}$$

on utilise la formule de Green

$$\begin{aligned} I_3 = &\int_\Omega [a(\gamma+1)(M-u)^{-1}\nabla u\nabla v\Delta u + b\beta\nabla u\nabla v\Delta v](M-u)^{-\gamma-1}e^{\beta v}dx \\ &- \int_\Omega b\Delta v[(\gamma+1)(M-u)^{-1}|\nabla u|^2+\beta\nabla u\nabla v+\Delta u](M-u)^{-\gamma-1}e^{\beta v}dx \\ &- \int_\Omega a\Delta u[(\gamma+1)(M-u)^{-1}\nabla u\nabla v+\beta|\nabla v|^2+\Delta v](M-u)^{-\gamma-1}e^{\beta v}dx, \end{aligned}$$

alors

$$I_3 = -\int_\Omega \begin{bmatrix} b(\gamma+1)(M-u)^{-1}|\nabla u|^2\Delta v + \\ (a+b)\Delta u\Delta v + a\beta|\nabla v|^2\Delta u \end{bmatrix} (M-u)^{-\gamma-1}e^{\beta v}dx. \tag{II.24}$$

et

$$J_3 = \int_\Omega \begin{bmatrix} (M-u)f_u|\nabla u|^2-(M-u)f_v|\nabla v|^2 + \\ [(M-u)f_v-(M-u)f_u+\beta(M-u)f-(\gamma+1)f]\nabla u\nabla v \end{bmatrix} (M-u)^{-\gamma-2}e^{\beta v}x. \tag{II.25}$$

On trouve

$$L'(t) = I+J \tag{II.26}$$

avec

$$\begin{aligned} I &= a\gamma(\gamma+1)I_1+b\beta^2I_2+\beta\gamma(a+b)I_3 \\ &= -\int_\Omega \left[ \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \end{pmatrix} Z \bullet Z \right] dx \end{aligned} \tag{II.27}$$

où $R=\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \end{pmatrix}$ une matrice en blocs telle que

$$R_{11} = \begin{pmatrix} 2a^2\gamma(\gamma+1)(M-u)^{-\gamma-2} & 2a^2\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(M-u)^{-\gamma-3} \\ 2a^2\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(M-u)^{-\gamma-3} & a^2\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(M-u)^{-\gamma-4} \\ a\gamma\beta(\gamma+1)(a+b)(M-u)^{-\gamma-2} & \frac{1}{2}a\beta(a+b)\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(M-u)^{-\gamma-3} \end{pmatrix},$$

$$R_{12} = \begin{pmatrix} a\gamma\beta(\gamma+1)(a+b)(M-u)^{-\gamma-2} \\ \frac{1}{2}a\beta(a+b)\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(M-u)^{-\gamma-3} \\ 2ab\gamma(\gamma+1)\beta^2(M-u)^{-\gamma-2} \end{pmatrix},$$

$$R_{13} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a(a+b)\beta^2\gamma(M-u)^{-\gamma-1} & \frac{1}{2}\beta\gamma(a+b)^2(M-u)^{-\gamma-1} \\ 0 & \frac{1}{2}b\beta(a+b)\gamma(\gamma+1)(M-u)^{-\gamma-2} \\ \frac{1}{2}b(a+b)\beta^3\gamma(M-u)^{-\gamma-1} & b\beta^2(a+b)\gamma(M-u)^{-\gamma-1} \end{pmatrix},$$

$$R_{21} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a(a+b)\beta^2\gamma(M-u)^{-\gamma-1} & 0 \\ \frac{1}{2}\beta\gamma(a+b)^2(M-u)^{-\gamma-1} & \frac{1}{2}b(a+b)\beta\gamma(\gamma+1)(M-u)^{-\gamma-2} \end{pmatrix},$$

$$R_{22} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b(a+b)\beta^3\gamma(M-u)^{-\gamma-1} \\ b\beta^2(a+b)\gamma(M-u)^{-\gamma-1} \end{pmatrix}$$

et

$$R_{23} = \begin{pmatrix} b^2\beta^4(M-u)^{-\gamma} & 2b^2\beta^3(M-u)^{-\gamma} \\ 2b^2\beta^3(M-u)^{-\gamma} & 2b^2\beta^2(M-u)^{-\gamma} \end{pmatrix}.$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{J} &= a\gamma(\gamma+1)J_1+b\beta^2J_2+\beta\gamma(a+b)J_3 \\ &= \int_\Omega \gamma\begin{bmatrix} a(\gamma+1)(\beta(M-u)f-(\gamma+2)f-2(M-u)f_u) \\ +(a+b)\beta(M-u)^2f_u \end{bmatrix}|\nabla u|^2(M-u)^{-\gamma-3}e^{\beta v}dx+ \\ &\quad \int_\Omega \begin{bmatrix} (a+b)\beta\gamma((M-u)(f_v-f_u+\beta f)-(\gamma+1)f) \\ -2a\gamma(\gamma+1)f_v+2b\beta^2(M-u)^2f_u \end{bmatrix}\nabla u\nabla v(M-u)^{-\gamma-2}e^{\beta v}dx+ \\ &\quad \int_\Omega \beta[b\beta(-\gamma f+\beta(M-u)f+2(M-u)f_v)-(a+b)\gamma f_v]|\nabla v|^2(M-u)^{-\gamma-1}e^{\beta v}dx. \end{aligned} \tag{II.28}$$

On a

$$\begin{vmatrix} b^2\beta^4(M-u)^{-\gamma} & 2b^2\beta^3(M-u)^{-\gamma} \\ 2b^2\beta^3(M-u)^{-\gamma} & 2b^2\beta^2(M-u)^{-\gamma} \end{vmatrix} = -2b^4\beta^6((M-u)^{-\gamma})^2 < 0. \tag{II.29}$$

$I$ est une forme quadratique $5 \times 5$ et sa matrice n'est pas définie positive.

Notre but maintenant est d'essayer d'éliminer les coefficients en $\nabla u \nabla v$ afin d'obtenir une forme quadratique $4 \times 4$ en $(\Delta u, |\nabla u|^2, |\nabla v|^2$ et $\Delta v)$.

On a

$$L_1'(t) = a\gamma(\gamma+1)(I_1+J_1)$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_\Omega [a(\gamma+2)(M-u)^{-1}|\nabla u|^2\Delta u + b\beta|\nabla u|^2\Delta v + 2a\nabla u\nabla\Delta u](M-u)^{-\gamma-2}e^{\beta v}dx \\ &= \int_\Omega [a(\gamma+2)(M-u)^{-1}|\nabla u|^2\Delta u + b\beta|\nabla u|^2\Delta v](M-u)^{-\gamma-2}e^{\beta v}dx - \\ &\quad 2a\int_\Omega \nabla(\nabla u(M-u)^{-\gamma-2}e^{\beta v})\Delta u dx \\ &= -\int_\Omega \begin{bmatrix} 2a|\Delta u|^2 + a(\gamma+2)|\nabla u|^2\Delta u(M-u)^{-1} + \\ 2a\beta\nabla v\nabla u\Delta u - b\beta|\nabla u|^2\Delta v \end{bmatrix}(M-u)^{-\gamma-2}e^{\beta v}, \end{aligned}$$

en plus on a

$$\begin{aligned} &-\int_\Omega (M-u)^{-\gamma-2}e^{\beta v}\nabla u\nabla v\Delta u dx \\ &= \int_\Omega \nabla((M-u)^{-\gamma-2}e^{\beta v}\nabla u\nabla v)\nabla u dx \\ &= \int_\Omega \begin{bmatrix} \nabla u\nabla v\Delta u + |\nabla u|^2\Delta v + \beta|\nabla u|^2|\nabla v|^2 \\ +(\gamma+2)(M-u)^{-1}|\nabla u|^2\nabla u\nabla v \end{bmatrix}(M-u)^{-\gamma-2}e^{\beta v}dx \end{aligned} \quad (II.30)$$

on peut l'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (M-u)^{-\gamma-2}e^{\beta v}\nabla u\nabla v\Delta u dx \\ &= \frac{-1}{2}\int_\Omega \begin{bmatrix} |\nabla u|^2\Delta v + \beta|\nabla u|^2|\nabla v|^2 + \\ (\gamma+2)(M-u)^{-1}|\nabla u|^2\nabla u\nabla v \end{bmatrix}(M-u)^{-\gamma-2}e^{\beta v}dx, \end{aligned} \quad (II.31)$$

d'autre part

$$- \int_\Omega (M-u)^{-\gamma-3} e^{\beta v} |\nabla u|^2 \Delta u dx$$

$$= \int_\Omega \nabla((M-u)^{-\gamma-3} e^{\beta v} |\nabla u|^2) \nabla u dx$$

$$= \int_\Omega \begin{bmatrix} 2|\nabla u|^2 \Delta u + \beta |\nabla u|^2 \nabla u \nabla v + \\ (\gamma+3)(M-u)^{-1} |\nabla u|^4 \end{bmatrix} (M-u)^{-\gamma-3} e^{\beta v} dx, \qquad \text{(II.32)}$$

implique

$$- \int_\Omega \beta (M-u)^{-\gamma-3} e^{\beta v} |\nabla u|^2 \nabla u \nabla v dx$$

$$= \int_\Omega \begin{bmatrix} 3|\nabla u|^2 \Delta u + \\ (\gamma+3)(M-u)^{-1} |\nabla u|^4 \end{bmatrix} (M-u)^{-\gamma-3} e^{\beta v} dx, \qquad \text{(II.33)}$$

alors

$$\beta \int_\Omega (M-u)^{-\gamma-2} e^{\beta v} \nabla u \nabla v \Delta u dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_\Omega \begin{bmatrix} -\beta |\nabla u|^2 \Delta v - \beta^2 |\nabla u|^2 |\nabla v|^2 + \\ 3(\gamma+2)(M-u)^{-1} |\nabla u|^2 \Delta u + \\ (\gamma+2)(\gamma+3)(M-u)^{-2} |\nabla u|^4 \end{bmatrix} (M-u)^{-\gamma-2} e^{\beta v} dx, \qquad \text{(II.34)}$$

donc $I_1$ sera sous la forme

$$I_1 = - \int_\Omega \begin{bmatrix} a(\gamma+2)(M-u)^{-1} |\nabla u|^2 \Delta u - b\beta |\nabla u|^2 \Delta v + 2a |\Delta u|^2 - \\ a\beta |\nabla u|^2 \Delta v + 3a(\gamma+2)(M-u)^{-1} |\nabla u|^2 \Delta u + \\ a(\gamma+2)(\gamma+3)(M-u)^{-2} |\nabla u|^4 - a\beta^2 |\nabla u|^2 |\nabla v|^2 \end{bmatrix} (M-u)^{-\gamma-2} e^{\beta v} dx$$

$$= - \int_\Omega \begin{bmatrix} 2a(M-u)^2 |\Delta u|^2 - (a+b)\beta (M-u)^2 |\nabla u|^2 \Delta v + \\ 4a(\gamma+2)(M-u) |\nabla u|^2 \Delta u + \\ a(\gamma+2)(\gamma+3) |\nabla u|^4 - a\beta^2 (M-u)^2 |\nabla u|^2 |\nabla v|^2 \end{bmatrix} (M-u)^{-\gamma-4} e^{\beta v} dx.$$

(II.35)

$I_3$ reste inchangé, mais on va calculer $I_2$ par l'application de la formule de Green
on a

$$I_2 = \int_\Omega [a\gamma(M-u)^{-1}|\nabla v|^2\Delta u + b\beta|\nabla v|^2\Delta v + 2b\nabla v\nabla\Delta v](M-u)^{-\gamma}e^{\beta v}dx$$
$$= \int_\Omega [a\gamma(M-u)^{-1}|\nabla v|^2\Delta u + b\beta|\nabla v|^2\Delta v](M-u)^{-\gamma}e^{\beta v}dx -$$
$$2b\int_\Omega \nabla(\nabla v(M-u)^{-\gamma}e^{\beta v})\Delta v dx$$
$$= -\int_\Omega \begin{pmatrix} 2b|\Delta v|^2 + 2b\gamma\nabla v\nabla u\Delta v(M-u)^{-1} + \\ b\beta|\nabla v|^2\Delta v - a\gamma(M-u)^{-1}|\nabla v|^2\Delta u \end{pmatrix}(M-u)^{-\gamma}e^{\beta v}dx,$$

d'autre part on a

$$-\int_\Omega (M-u)^{-\gamma-1}e^{\beta v}|\nabla v|^2\Delta u dx$$
$$= \int_\Omega \nabla((M-u)^{-\gamma-1}e^{\beta v}|\nabla v|^2)\nabla u dx$$
$$= \int_\Omega \begin{bmatrix} 2\nabla u\nabla v\Delta v + \beta|\nabla v|^2\nabla u\nabla v + \\ (\gamma+1)(M-u)^{-1}|\nabla u|^2|\nabla v|^2 \end{bmatrix}(M-u)^{-\gamma-1}e^{\beta v}dx \qquad \text{(II.36)}$$

et

$$-\int_\Omega (M-u)^{-\gamma}e^{\beta v}|\nabla v|^2\Delta v dx$$
$$= \int_\Omega \nabla((M-u)^{-\gamma}e^{\beta v}|\nabla v|^2)\nabla v dx$$
$$= \int_\Omega \begin{bmatrix} \gamma\nabla u\nabla v|\nabla v|^2 + \beta(M-u)|\nabla v|^4 + \\ 2(M-u)|\nabla v|^2\Delta v \end{bmatrix}(M-u)^{-\gamma-1}e^{\beta v}dx, \qquad \text{(II.37)}$$

donc

$$\int_\Omega \gamma(M-u)^{-\gamma-1}e^{\beta v}\nabla u\nabla v|\nabla v|^2 dx$$
$$= -\int_\Omega [|\nabla v|^2\Delta v + \beta|\nabla v|^4 + 2|\nabla v|^2\Delta v](M-u)^{-\gamma}e^{\beta v}dx, \qquad \text{(II.38)}$$

alors

$$- \int_\Omega \gamma(M-u)^{-\gamma-1} e^{\beta v}|\nabla v|^2 \Delta u dx$$

$$= \int_\Omega \gamma(M-u)^{-\gamma-2} e^{\beta v}\left[\begin{array}{c} 2(M-u)\nabla u \nabla v \Delta v+(\gamma+1)|\nabla u|^2|\nabla v|^2+ \\ \beta(M-u)|\nabla v|^2 \nabla u \nabla v \end{array}\right] dx$$

$$= \int_\Omega \gamma(M-u)^{-\gamma-2} e^{\beta v}\left[\begin{array}{c} 2\nabla u \nabla v \Delta v+(\gamma+1)|\nabla u|^2|\nabla v|^2- \\ \beta(M-u)^2(\beta|\nabla v|^4+3|\nabla v|^2\Delta v) \end{array}\right] dx, \tag{II.39}$$

on trouve

$$2 \int_\Omega \gamma(M-u)^{-\gamma-1} e^{\beta v}\nabla u \nabla v \Delta v dx$$

$$= - \int_\Omega (M-u)^{-\gamma-2} e^{\beta v}\left[\begin{array}{c} \gamma(M-u)|\nabla v|^2 \Delta u+\gamma(\gamma+1)|\nabla u|^2|\nabla v|^2 \\ -\beta(M-u)^2(3|\nabla v|^2\Delta v+\beta|\nabla v|^4) \end{array}\right] dx. \tag{II.40}$$

Alors $I_2$ peut être écrite sous la forme

$$I_2 = - \int_\Omega (M-u)^{-\gamma-2} e^{\beta v}\left[\begin{array}{c} 4b\beta(M-u)^2|\nabla v|^2\Delta v+b\beta^2(M-u)^2|\nabla v|^4- \\ (a+b)\gamma(M-u)|\nabla v|^2\Delta u+2b(M-u)^2|\Delta v|^2 \\ -b\gamma(\gamma+1)|\nabla u|^2|\nabla v|^2 \end{array}\right] dx, \tag{II.41}$$

donc I devient sous la forme

$$I = - \int_\Omega \left[\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tilde{Z} \bullet \tilde{Z}\right] dx \tag{II.42}$$

avec $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ une matrice en blocs où

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 2a^2\gamma(\gamma+1)(M-u)^{-\gamma-2} & 2a^2\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(M-u)^{-\gamma-3} \\ 2a^2\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(M-u)^{-\gamma-3} & a^2\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(M-u)^{-\gamma-4} \end{pmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a-b)\beta^2(a+b)\gamma(M-u)^{-\gamma-1} & \frac{1}{2}\beta\gamma(a+b)^2(M-u)^{-\gamma-1} \\ -\frac{1}{2}(a^2+b^2)\gamma(\gamma+1)\beta^2(M-u)^{-\gamma-2} & \frac{1}{2}(b^2-a^2)\gamma(\gamma+1)\beta(M-u)^{-\gamma-2} \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a^2-b^2)\beta^2\gamma(M-u)^{-\gamma+1} & -\frac{1}{2}(a^2+b^2)\gamma(\gamma+1)\beta^2(M-u)^{-\gamma-2} \\ \frac{1}{2}\beta\gamma(a+b)^2(M-u)^{-\gamma-1} & \frac{1}{2}(b^2-a^2)\gamma(\gamma+1)\beta(M-u)^{-\gamma-2} \end{pmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} b^2\beta^4(M-u)^{-\gamma} & 2b^2\beta^3(M-u)^{-\gamma} \\ 2b^2\beta^3(M-u)^{-\gamma} & 2b^2\beta^2(M-u)^{-\gamma} \end{pmatrix}$$

et

$$\widetilde{Z} = \begin{pmatrix} \Delta u \\ |\nabla u|^2 \\ |\nabla v|^2 \\ \Delta v \end{pmatrix}.$$

la matrice $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ n'est pas définie positive puisque $A_{22}$ ne l'est pas malgré le passage d'une forme quadratique $5 \times 5$ à une autre $4 \times 4$.

# CHAPITRE.III

## Forme Générale des Fonctionnelles de Lyapunov en Gradient

Les fonctionnelles qu'on va chercher sont de la forme

$$\boxed{\mathrm{L}(t) = \int_\Omega \Phi(u,v)|\nabla u|^2 dx + \int_\Omega \Psi(u,v)\nabla u \nabla v dx + \int_\Omega \varphi(u,v)|\nabla v|^2 dx,} \tag{III.1}$$

où $\Phi$, $\Psi$ et $\varphi$ sont des fonctions suffisement régulières (deux fois continument dérivables sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$). Après dérivation de l'expression (III.1) et application de la formule de Green, on aboutit à

$$\mathrm{L}'(t) = \mathrm{I}+\mathrm{J} \tag{III.2}$$

avec

$$\mathrm{I} = -\int_\Omega \left[ \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \widetilde{Z} \cdot \widetilde{Z} \right] dx \tag{III.3}$$

où $\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$ une matrice en blocs :

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 2a\Phi & 2a\Phi_u \\ 2a\Phi_u & a\Phi_{u.u} \end{pmatrix},$$

$$M_{21} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a\Psi_v-(a+b)\varphi_u) & \frac{-1}{2}(a\Phi_{vv}+b\varphi_{uu}) \\ \frac{1}{2}(a+b)\Psi & \frac{1}{2}(b\Psi_u-(a+b)\Phi_v) \end{pmatrix},$$

$$M_{12} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a\Psi_v-(a+b)\varphi_u) & \frac{1}{2}(a+b)\Psi \\ -\frac{1}{2}(a\Phi_{vv}+b\varphi_{uu}) & \frac{1}{2}(b\Psi_u-(a+b)\Phi_v) \end{pmatrix},$$

$$M_{22} = \begin{pmatrix} b\varphi_{vv} & 2b\varphi_v \\ 2b\varphi_v & 2b\varphi \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{Z} = \begin{pmatrix} \Delta u \\ |\nabla u|^2 \\ |\nabla v|^2 \\ \Delta v \end{pmatrix}$$

et $\mathrm{J} = J_1 + J_2 + J_3$ où

$$J_1 = \int_\Omega \{[(\Phi_v-\Phi_u)f-2\Phi f_u]|\nabla u|^2-2f_v\Phi\nabla u\nabla v\}dx, \tag{III.4}$$

$$J_2 = \int_\Omega \{ f_u \Psi |\nabla u|^2 + [(\Psi_v - \Psi_u) f + (f_v - f_u)\Psi] \nabla u \nabla v - f_v \Psi |\nabla v|^2 \} dx \qquad \text{(III.5)}$$

et

$$J_3 = \int_\Omega \{ 2\varphi f_u \nabla u \nabla v + [2\varphi f_v + (\varphi_v - \varphi_u) f] |\nabla v|^2 \} dx \qquad \text{(III.6)}$$

d'où

$$\mathbf{J} = \int_\Omega \left\{ \begin{array}{c} [(\Phi_v - \Phi_u) f - 2\Phi f_u + f_u \Psi] |\nabla u|^2 + \\ [2\varphi f_v + (\varphi_v - \varphi_u) f - f_v \Psi] |\nabla v|^2 + \\ [(\Psi_v - \Psi_u) f + (f_v - f_u)\Psi + 2\varphi f_u - 2 f_v \Phi] \nabla u \nabla v \end{array} \right\} dx \qquad \text{(III.7)}$$

on va essayer de caractériser les propriètés des fonctions $\Phi$, $\Psi$ et $\varphi$ telles que **I** et **J** soient négatives.

Posons, par exemple

$$\Phi = \varphi = \frac{-1}{2}\Psi, \qquad \text{(III.8)}$$

donc l'expression de **I** devient de la forme suivante

$$\mathbf{I} = -\int_\Omega \left[ \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \tilde{Z} \cdot \tilde{Z} \right] dx \qquad \text{(III.9)}$$

où $\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}$ une matrice en blocs :

$$H_{11} = \begin{pmatrix} 2a\Phi & 2a\Phi_u \\ 2a\Phi_u & a\Phi_{uu} \end{pmatrix},$$

$$H_{21} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2}(2a\Phi_v + (a+b)\Phi_u) & \frac{-1}{2}(a\Phi_{vv} + b\Phi_{uu}) \\ -(a+b)\Phi & \frac{-1}{2}((a+b)\Phi_v + 2b\Phi_u) \end{pmatrix},$$

$$H_{12} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2}(2a\Phi_v + (a+b)\Phi_u) & -(a+b)\Phi \\ \frac{-1}{2}(a\Phi_{vv} + b\Phi_{uu}) & \frac{-1}{2}((a+b)\Phi_v + 2b\Phi_u) \end{pmatrix}$$

et

$$H_{22} = \begin{pmatrix} b\Phi_{vv} & 2b\Phi_v \\ 2b\Phi_v & 2b\Phi \end{pmatrix}.$$

Afin de simlifier les calculs, on choisit

$$\Phi(u+v), \tag{III.10}$$

on trouve une autre expression de I moins compliquée

$$I = -\int_{\Omega} \left[ G \begin{pmatrix} \Delta u \\ |\nabla u|^2 \\ |\nabla v|^2 \\ \Delta v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta u \\ |\nabla u|^2 \\ |\nabla v|^2 \\ \Delta v \end{pmatrix} \right] dx \tag{III.11}$$

avec

$$G = \begin{pmatrix} 2a\Phi & 2a\Phi' & -\frac{1}{2}(3a+b)\Phi' & -(a+b)\Phi \\ 2a\Phi' & a\Phi'' & -\frac{1}{2}(a+b)\Phi'' & -\frac{1}{2}(a+3b)\Phi' \\ -\frac{1}{2}(3a+b)\Phi' & -\frac{1}{2}(a+b)\Phi'' & b\Phi'' & 2b\Phi' \\ -(a+b)\Phi & -\frac{1}{2}(a+3b)\Phi' & 2b\Phi' & 2b\Phi \end{pmatrix}.$$

On va calculer les déterminants principaux successifs de la matrice $G$ dans le but de trouver une forme de $\Phi$ qui peut donner la positivité de $(-I)$

$$\det 4 = \frac{1}{16}(a-b)^4(3(\Phi')^2-2\Phi''\Phi)^2, \tag{III.12}$$

$$\det 3 = \frac{1}{4}\Phi'' a(a-b)^2(3(\Phi')^2-2\Phi''\Phi), \tag{III.13}$$

$$\det 2 = 2a^2(\Phi\Phi''-2(\Phi')^2) \tag{III.14}$$

et

$$\det 1 = 2a\Phi \tag{III.15}$$

la matrice ci-dessus est définie positive si det 1, det2, det3 et det4 sont positifs. On remarque que det 1 et det4 sont positifs, puisque

$$\det 1 > 0 \Leftrightarrow \Phi > 0 \tag{III.16}$$

et

$$\det 4 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{16}(a-b)^4(3(\Phi')^2-2\Phi''\Phi)^2 > 0, \tag{III.17}$$

mais d'autre part on a

$$\det 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{\Phi''\Phi}{(\Phi')^2} > 2 \tag{III.18}$$

et

$$\det 3 > 0 \Leftrightarrow 3/2 > \frac{\Phi''\Phi}{(\Phi')^2}, \tag{III.19}$$

on remarque l'impossibilité de trouver la fonction $\Phi$ pour que les deux conditions (III.18) et (III.19) soient vérifiées; puisque on aboutit à une contradiction:

$$\frac{3}{2} > \frac{\Phi''\Phi}{(\Phi')^2} > 2. \qquad \text{(III.20)}$$

Notre but est de dégager les difficultés rencontées lors de la recherche des fonctionnelles de Lyapunov en gradient. Normalement on arrête les calculs à cette étape puisqu'on n'est pas arrivé a montrer que I ≤ 0. Cherchons le signe de J; pour cela on utilise la condition (III.8)

$$\mathbf{J} = \int_\Omega \left\{ \begin{array}{c} [(\Phi_v-\Phi_u)f-4\Phi f_u]|\nabla u|^2+ \\ [4\Phi f_v+(\Phi_v-\Phi_u)f]|\nabla v|^2+ \\ 2[-(\Phi_v-\Phi_u)f-2(f_v-f_u)\Phi]\nabla u\nabla v \end{array} \right\} dx$$

$$= J_1 + J_2 \qquad \text{(III.21)}$$

avec

$$J_1 = \int_\Omega (\Phi_v-\Phi_u)\{|\nabla u|^2-2\nabla u\nabla v+|\nabla v|^2\}f dx \qquad \text{(III.22)}$$

et

$$J_2 = \int_\Omega -4\Phi\{f_u|\nabla u|^2+(f_v-f_u)\nabla u\nabla v-f_v|\nabla v|^2\}dx. \qquad \text{(III.23)}$$

On calcule les discriminants respectifs de $J_1$ et $J_2$

$$D_1 = 0. \qquad \text{(III.24)}$$

Alors $J_1 \leq 0$ si on choisit

$$\Phi_v \leq \Phi_u. \qquad \text{(III.25)}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= (f_v-f_u)^2+4f_uf_v \\ &= (f_v+f_u)^2; \end{aligned} \qquad \text{(III.26)}$$

ce qui montre que ce choix (III.8) ne donne pas la non positivité de **J**.

Remplaçons donc la condition (III.8) par la condition

$$\Phi = \varphi = \frac{1}{2}\Psi. \qquad \text{(III.27)}$$

Pour commencer, on a

$$\mathbf{J} = \int_\Omega (\Phi_v-\Phi_u)\{|\nabla u|^2+2\nabla u\nabla v+|\nabla v|^2\}f dx, \qquad \text{(III.28)}$$

nous remarquons que $D = 0$; alors

$$\Phi_v \leq \Phi_u \Rightarrow \mathbf{J} \leq 0, \qquad \text{(III.29)}$$

donc les conclusions sont

$$\left\{\begin{array}{l}\Psi = 2\varphi = 2\Phi \\ \quad\text{et} \\ \Phi_v \leq \Phi_u\end{array}\right. \Rightarrow J \leq 0. \tag{III.30}$$

d'autre part

$$I = -\int_{\Omega} \left[ \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \tilde{Z} \bullet \tilde{Z} \right] dx \tag{III.31}$$

avec $\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$ une matrice en blocs où

$$L_{11} = \begin{pmatrix} 2a\Phi & 2a\Phi_u \\ 2a\Phi_u & a\Phi_{uu} \end{pmatrix},$$

$$L_{21} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(2a\Phi_v-(a+b)\Phi_u) & \frac{-1}{2}(a\Phi_{vv}+b\Phi_{uu}) \\ (a+b)\Phi & \frac{1}{2}(2b\Phi_u-(a+b)\Phi_v) \end{pmatrix},$$

$$L_{12} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(2a\Phi_v-(a+b)\Phi_u) & (a+b)\Phi \\ \frac{-1}{2}(a\Phi_{vv}+b\Phi_{uu}) & \frac{1}{2}(2b\Phi_u-(a+b)\Phi_v) \end{pmatrix}$$

et

$$L_{22} = \begin{pmatrix} b\Phi_{vv} & 2b\Phi_v \\ 2b\Phi_v & 2b\Phi \end{pmatrix}.$$

Si on pose

$$\Phi(u+v), \tag{III.32}$$

alors

$$J = 0 \tag{III.33}$$

et

$$I = -\int_{\Omega} \left[ N\tilde{Z}.\tilde{Z} \right] dx \tag{III.34}$$

avec

$$N = \begin{pmatrix} 2a\Phi & 2a\Phi' & \frac{1}{2}(a-b)\Phi' & (a+b)\Phi \\ 2a\Phi' & a\Phi'' & \frac{-1}{2}(a+b)\Phi'' & \frac{1}{2}(b-a)\Phi' \\ \frac{1}{2}(a-b)\Phi' & \frac{-1}{2}(a+b)\Phi'' & b\Phi'' & 2b\Phi' \\ (a+b)\Phi & \frac{1}{2}(b-a)\Phi' & 2b\Phi' & 2b\Phi \end{pmatrix}$$

et

$$\tilde{Z} = \begin{pmatrix} \Delta u \\ |\nabla u|^2 \\ |\nabla v|^2 \\ \Delta v \end{pmatrix}.$$

On va calculer les déterminants principaux successifs de la matrice $N$ intervenant dans l'expression (III.34)

$$\det 4 = \frac{1}{4}\frac{\Phi\Phi''}{(\Phi')^2}(a-b)^2\left(\frac{\Phi\Phi''}{(\Phi')^2}(a-b)^2-(a^2-10ab+b^2)\right)+$$
$$\frac{1}{16}(a^2+14ab+b^2)^2, \qquad \text{(III.35)}$$

$$\det 3 = \frac{-1}{4}a\Phi''\left(2\Phi\Phi''(a-b)^2+(\Phi')^2(a+3b)(5a-b)\right), \qquad \text{(III.36)}$$

$$\det 2 = 2a^2(\Phi\Phi''-2(\Phi')^2) \qquad \text{(III.37)}$$

et

$$\det 1 = 2a\Phi. \qquad \text{(III.38)}$$

Cette matrice est définie positive si det 1, det2, det3 et det4 sont positifs. (III.38) est triviale, puisque

$$\det 1 > 0 \Leftrightarrow \Phi > 0, \qquad \text{(III.39)}$$

de plus

$$\det 4 > 0 \qquad \text{(III.40)}$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{1}{4}\Phi\Phi''(a-b)^2\left(\Phi\Phi''(a-b)^2-(\Phi')^2(a^2-10ab+b^2)\right)+\frac{1}{16}(\Phi')^4(a^2+14ab+b^2)^2 > 0 \qquad \text{(III.41)}$$

ou bien

$$\left[\frac{\Phi\Phi''}{(\Phi')^2}\right]^2(a-b)^2-\frac{\Phi\Phi''}{(\Phi')^2}(a^2-10ab+b^2) > -\frac{1}{4}\frac{(a^2+14ab+b^2)^2}{(a-b)^2} \qquad \text{(III.42)}$$

il suffit que

$$\left[\frac{\Phi\Phi''}{(\Phi')^2}\right]^2(a\text{-}b)^2\text{-}\frac{\Phi\Phi''}{(\Phi')^2}(a^2\text{-}10ab\text{+}b^2) > 0, \tag{III.43}$$

sachant que $\frac{\Phi\Phi''}{(\Phi')^2} \geq 0$ ; on divise par $\frac{\Phi\Phi''}{(\Phi')^2}$

$$\frac{\Phi\Phi''}{(\Phi')^2}(a\text{-}b)^2\text{-}(a^2\text{-}10ab\text{+}b^2) > 0 \Leftrightarrow \frac{\Phi\Phi''}{(\Phi')^2} > \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2\text{-}10\frac{a}{b}\text{+}1}{\left(\frac{a}{b}\right)^2\text{-}2\frac{a}{b}\text{+}1} \tag{III.44}$$

posons

$$\frac{a}{b} = x,$$

alors

$$\frac{\Phi\Phi''}{(\Phi')^2} > \frac{x^2\text{-}10x\text{+}1}{x^2\text{-}2x\text{+}1}.$$

Il suffit de prendre

$$2 \geq \frac{x^2\text{-}10x\text{+}1}{x^2\text{-}2x\text{+}1} \Leftrightarrow x^2\text{+}6x\text{+}1 \geq 0,$$

la solution est sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} x \leq -3\text{-}2\sqrt{2} \\ \quad \text{ou} \\ x \geq -3\text{+}2\sqrt{2} \end{array}\right. \tag{III.45}$$

donc

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{a}{b} \leq -\left(3\text{+}2\sqrt{2}\right) \\ \text{ou} \\ \frac{a}{b} \geq -3\text{+}2\sqrt{2} \end{array}\right. \tag{III.46}$$

comme $a$ et $b$ sont positives l'expression $\left[\frac{a}{b} \geq -3\text{+}2\sqrt{2}\right]$ est toujours vérifiée. Alors

$$\frac{\Phi''\Phi}{(\Phi')^2} > 2 \Rightarrow \det 4 > 0. \tag{III.47}$$

En revenant au det2 où

$$\det 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{\Phi''\Phi}{(\Phi')^2} > 2. \tag{III.48}$$

Maintenant, le problème se pose pour det3. On a

$$\det 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{\Phi\Phi''}{(\Phi')^2} < -\frac{(a+3b)(5a-b)}{2(a-b)^2} \tag{III.49}$$

les deux conditions (III.48) et (III.49) sont en contradiction

$$2 < \frac{\Phi\Phi''}{(\Phi')^2} < -\frac{(a+3b)(5a-b)}{2(a-b)^2} \tag{III.50}$$

puisque

$$\frac{-(a+3b)(5a-b)}{2(a-b)^2} > 2 \Leftrightarrow -(a+3b)(5a-b) > 4(a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow -8ab+4a^2+4b^2 < -5a^2+3b^2-14ab$$

$$\Leftrightarrow 9a^2+6ab+b^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow (3a+b)^2 < 0, \tag{III.51}$$

donc le problème qui se pose c'est la positivité de det2 et det3, pour cela essayons d'abord de trouver une solution de l'inégalité différentielle ordinaire (i.e det2 > 0):

$$\frac{\Phi''\Phi}{(\Phi')^2} > 2 \tag{III.52}$$

qui n'est pas en contradiction avec la positivité avec det3. On a

$$\left(\frac{\Phi}{\Phi'}\right)' = \frac{(\Phi')^2-\Phi''\Phi}{(\Phi')^2} \tag{III.53}$$

d'où

$$\frac{\Phi''\Phi}{(\Phi')^2} = 1-\left(\frac{\Phi}{\Phi'}\right)',$$

on remplace dans (III.52)

$$1-\left(\frac{\Phi}{\Phi'}\right)' > 2 \Leftrightarrow \left(\frac{\Phi}{\Phi'}\right)' < -1 \tag{III.54}$$

Alors

$$\left(\frac{\Phi}{\Phi'}\right)' < -1 \Leftrightarrow -\frac{\Phi}{\Phi'} > (u+v)+C_1 \text{ où } C_1 \in \mathbb{R} \tag{III.55}$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{\Phi}{C_2} > -\ln(C_1+(u+v)) \quad \text{où } C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Phi > \frac{C_1}{C_2+(u+v)} \tag{III.56}$$

**Exemple**: dans cet exemple on essayon l'application des techniques précidentes dans le cas :

$$\Phi = \frac{C_1}{C_2+(u+v)}$$

pour essayer d'éviter la contradiction dans l'expression (III.50).

On pose $C_1 = 1$ et $C_2 = 0$ on aura $\Phi = \frac{1}{u+v}$

dans ce cas $L(t)$ est défini par

$$L(t) = \int_\Omega \frac{1}{u+v}|\nabla u|^2 dx + 2\int_\Omega \frac{1}{u+v}\nabla u \nabla v dx + \int_\Omega \frac{1}{u+v}|\nabla v|^2 dx \tag{III.57}$$

on calcule la dérivée de $L(t)$ par rapport à $t$ pour avoir une idée sur son signe

Premièrement on dérive

$$2\int_\Omega \frac{1}{u+v}\nabla u \nabla v dx, \tag{III.58}$$

on a

$$\begin{aligned}
\frac{2d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{u+v}\nabla u\nabla v dx &= 2\int_\Omega \left[ \begin{array}{c} \frac{-1}{(u+v)^2}(u_t+v_t)\nabla u \nabla v + \frac{1}{u+v}\nabla u_t \nabla v + \\ \frac{1}{u+v}\nabla u \nabla v_t \end{array} \right] dx \\
&= 2\left( \begin{array}{c} \int_\Omega \left[ \begin{array}{c} \frac{-1}{(u+v)^2}(a\Delta u + b\Delta v)\nabla u \nabla v + \\ \frac{a}{u+v}\nabla \Delta u \nabla v + \frac{b}{u+v}\nabla u \nabla \Delta v \end{array} \right] dx \\ + \int_\Omega \frac{1}{u+v}[\nabla u - \nabla v]\nabla f dx \end{array} \right)
\end{aligned} \tag{III.59}$$

alors

$$\begin{aligned}
I_2 &= 2\int_\Omega \left[ \begin{array}{c} \frac{-1}{(u+v)^2}(a\Delta u + b\Delta v)\nabla u \nabla v + \\ \frac{a}{u+v}\nabla \Delta u \nabla v + \frac{b}{u+v}\nabla u \nabla \Delta v \end{array} \right] dx \\
&= 2\int_\Omega \left[ \begin{array}{c} \frac{-a}{(u+v)^2}\nabla u \nabla v \Delta u - \frac{b}{(u+v)^2}\nabla u \nabla v \Delta v + \\ \frac{a}{u+v}\nabla \Delta u \nabla v + \frac{b}{u+v}\nabla u \nabla \Delta v \end{array} \right] dx,
\end{aligned} \tag{III.60}$$

par application de la formule de Green nous trouvons les expressions suivantes

$$\int_\Omega \frac{a}{u+v}\nabla\Delta u\nabla v dx = \int_\Omega \left[ \begin{array}{c} \frac{a}{(u+v)^2}|\nabla v|^2\Delta u - \frac{a}{u+v}\Delta u\Delta v + \\ \frac{a}{(u+v)^2}\nabla u\nabla v\Delta u \end{array} \right] dx$$

(III.61)

et

$$\int_\Omega \frac{b}{u+v}\nabla u\nabla\Delta v dx = \int_\Omega \left[ \begin{array}{c} \frac{b}{(u+v)^2}\nabla v\nabla u\Delta v - \frac{b}{u+v}\Delta u\Delta v + \\ \frac{b}{(u+v)^2}|\nabla u|^2\Delta v \end{array} \right] dx.$$

(III.62)

Alors

$$I_2 = 2\int_\Omega \left[ \frac{a}{(u+v)^2}|\nabla v|^2\Delta u - \frac{(a+b)}{u+v}\Delta u\Delta v + \frac{b}{(u+v)^2}|\nabla u|^2\Delta v \right] dx$$

(III.63)

et aussi

$$J_2 = 2\int_\Omega \frac{1}{u+v}[\nabla u - \nabla v]\nabla f dx, \qquad \text{(III.64)}$$

deuxiémememt on dérive

$$\int_\Omega \frac{1}{u+v}|\nabla u|^2 dx \qquad \text{(III.64)}$$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{u+v}|\nabla u|^2 dx = \int_\Omega \left[ \frac{-1}{(u+v)^2}(u_t+v_t)|\nabla u|^2 + \frac{2}{u+v}\nabla u\nabla u_t \right] dx$$

(III.65)

on trouve

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{u+v}|\nabla u|^2 dx = \int_\Omega \left[ \begin{array}{c} \frac{-a}{(u+v)^2}a\Delta u|\nabla u|^2 + \frac{2a}{u+v}\nabla u\nabla\Delta u - \\ \frac{1}{(u+v)^2}b\Delta v|\nabla u|^2 \end{array} \right] dx$$

$$- \int_\Omega \frac{2}{u+v}\nabla u\nabla f dx,$$

(III.66)

alors

$$I_1 = \int_\Omega \left[ \frac{-a}{(u+v)^2}\Delta u|\nabla u|^2 - \frac{b}{(u+v)^2}\Delta v|\nabla u|^2 + \frac{2a}{u+v}\nabla u\nabla\Delta u \right] dx, \tag{III.67}$$

La formule de Green donne

$$\int_\Omega \frac{2a}{u+v}\nabla u\nabla\Delta u dx = \int_\Omega \left[ \begin{array}{c} \frac{2a}{(u+v)^2}\nabla u\nabla v\Delta u - \frac{2a}{u+v}|\Delta u|^2 + \\ \frac{2a}{(u+v)^2}|\nabla u|^2\Delta u \end{array} \right] dx, \tag{III.68}$$

mais

$$\int_\Omega \frac{2a}{(u+v)^2}\nabla u\nabla v\Delta u = -\int_\Omega \nabla\left(\frac{2a}{(u+v)^2}\nabla u\nabla v\right)\nabla u dx, \tag{III.69}$$

$$\int_\Omega \frac{2a}{(u+v)^2}\nabla u\nabla v\Delta u = -\int_\Omega \left[ \begin{array}{c} \frac{-4a}{(u+v)^3}|\nabla u|^2\nabla v\nabla u - \frac{4a}{(u+v)^3}|\nabla u|^2|\nabla v|^2 + \\ \frac{2a}{(u+v)^2}\Delta u\nabla u\nabla v + \frac{2a}{(u+v)^2}|\nabla u|^2\Delta v \end{array} \right] dx \tag{III.70}$$

donc

$$\int_\Omega \frac{2a}{(u+v)^2}\nabla u\nabla v\Delta u = \int_\Omega \left[ \begin{array}{c} \frac{2a}{(u+v)^3}|\nabla u|^2\nabla v\nabla u + \frac{2a}{(u+v)^3}|\nabla u|^2|\nabla v|^2 - \\ \frac{a}{(u+v)^2}|\nabla u|^2\Delta v \end{array} \right] dx, \tag{III.71}$$

toujours la formule de Green implique

$$-\int_\Omega \frac{a}{(u+v)^2}|\nabla u|^2\Delta u dx = \int_\Omega \left[ \begin{array}{c} \frac{-2a}{(u+v)^3}|\nabla u|^4 - \frac{2a}{(u+v)^3}|\nabla u|^2\nabla u\nabla v + \\ \frac{2a}{(u+v)^2}|\nabla u|^2\Delta u \end{array} \right] dx, \tag{III.72}$$

alors

$$I_1 = \int_\Omega \left[ \begin{array}{c} \frac{-2a}{(u+v)^3}|\nabla u|^4 - \frac{a+b}{(u+v)^2}\Delta v|\nabla u|^2 - \frac{2a}{u+v}|\Delta u|^2 + \\ \frac{4a}{(u+v)^2}|\nabla u|^2\Delta u + \frac{2a}{(u+v)^3}|\nabla u|^2|\nabla v|^2 \end{array} \right] dx \tag{III.73}$$

et

$$J_1 = -\int_\Omega \frac{2}{u+v}\nabla u\nabla f dx, \tag{III.74}$$

troisièmememt on dérive

$$\int_\Omega \frac{1}{u+v}|\nabla v|^2 dx, \tag{III.75}$$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{u+v}|\nabla v|^2 dx = \int_\Omega \left[ \frac{-1}{(u+v)^2}(u_t+v_t)|\nabla v|^2 + \frac{2}{u+v}\nabla v\nabla v_t \right] dx \tag{III.76}$$

on trouve aprés simplification

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{u+v}|\nabla v|^2 = \int_\Omega \left[ \frac{-a}{(u+v)^2}\Delta u|\nabla v|^2 + \frac{-b}{(u+v)^2}\Delta v|\nabla v|^2 + \frac{2b}{u+v}\nabla v\nabla\Delta v \right] dx$$
$$+ \int_\Omega \frac{2}{u+v}\nabla v\nabla f dx, \tag{III.77}$$

alors

$$I_3 = \int_\Omega \left[ \frac{-a}{(u+v)^2}\Delta u|\nabla v|^2 + \frac{-b}{(u+v)^2}\Delta v|\nabla v|^2 + \frac{2b}{u+v}\nabla v\nabla\Delta v \right] dx. \tag{III.78}$$

La formule Green donne

$$\int_\Omega \frac{2b}{u+v}\Delta v\nabla\Delta v dx = \int_\Omega \left[ \begin{array}{c} \frac{2b}{(u+v)^2}\Delta v|\nabla v|^2 - \frac{2b}{u+v}|\Delta v|^2 + \\ \frac{2b}{(u+v)^2}\nabla u\nabla v\Delta v \end{array} \right] dx, \tag{III.79}$$

mais

$$\int_\Omega \frac{2b}{(u+v)^2}\nabla u\nabla v\Delta v dx = -\int_\Omega \nabla\left(\frac{2b}{(u+v)^2}\nabla u\nabla v\right)\nabla v dx = \tag{III.80}$$

$$-\int_{\Omega}\begin{bmatrix}\frac{-4b}{(u+v)^3}|\nabla u|^2|\nabla v|^2-\frac{4b}{(u+v)^3}|\nabla v|^2\nabla u\nabla v+\\ \frac{2b}{(u+v)^2}\Delta u|\nabla v|^2+\frac{2b}{(u+v)^2}\nabla u\nabla v\Delta v\end{bmatrix}dx \qquad \text{(III.81)}$$

ce qui implique

$$\int_{\Omega}\frac{2b}{(u+v)^2}\nabla u\nabla v\Delta v dx=\int_{\Omega}\begin{bmatrix}\frac{2b}{(u+v)^3}|\nabla u|^2|\nabla v|^2-\frac{b}{(u+v)^2}\Delta u|\nabla v|^2+\\ \frac{2b}{(u+v)^3}|\nabla v|^2\nabla u\nabla v\end{bmatrix}dx$$

(III.82)

d'autre part

$$-\int_{\Omega}\frac{b}{(u+v)^2}|\nabla v|^2\Delta v dx=\int_{\Omega}\nabla\left(\frac{b}{(u+v)^2}|\nabla v|^2\right)\nabla v dx$$

$$=\int_{\Omega}\begin{bmatrix}\frac{-2b}{(u+v)^3}|\nabla v|^2\nabla u\nabla v-\frac{2b}{(u+v)^3}|\nabla v|^4+\\ \frac{2b}{(u+v)^2}|\nabla v|^2\Delta v\end{bmatrix}dx,$$

(III.83)

alors

$$I_3=-\int_{\Omega}\begin{bmatrix}\frac{(a+b)}{(u+v)^2}\Delta u|\nabla v|^2+\frac{2b}{(u+v)^3}|\nabla v|^4-\frac{4b}{(u+v)^2}|\nabla v|^2\Delta v-\\ \frac{2b}{(u+v)^3}|\nabla u|^2|\nabla v|^2+\frac{2b}{u+v}|\Delta v|^2\end{bmatrix}dx$$

(III.84)

et

$$J_3=\int_{\Omega}\frac{2}{u+v}\nabla v\nabla f dx. \qquad \text{(III.85)}$$

Finalement on aura

$$\mathrm{L}'(t)=\mathrm{I}+\mathrm{J} \qquad \text{(III.86)}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathrm{J} &= J_1+J_2+J_3\\ &= -\int_\Omega \frac{2}{u+v}\nabla u\nabla f dx + \int_\Omega \frac{2}{u+v}[\nabla u-\nabla v]\nabla f dx + \int_\Omega \frac{2}{u+v}\nabla v\nabla f dx\\ &= \int_\Omega \left[-\frac{2}{u+v}\nabla u+\frac{2}{u+v}\nabla u-\frac{2}{u+v}\nabla v+\frac{2}{u+v}\nabla v\right]\nabla f dx = 0,\end{aligned}$$

(III.87)

alors

$$\begin{aligned}L'(t) &= \mathrm{I}\\ &= I_1+I_2+I_3\end{aligned}$$ (III.88)

où

$$\mathrm{I} = -\int_\Omega \left[ P\begin{pmatrix}\Delta u\\ |\nabla u|^2\\ |\nabla v|^2\\ \Delta v\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}\Delta u\\ |\nabla u|^2\\ |\nabla v|^2\\ \Delta v\end{pmatrix}\right] dx$$ (III.89)

et

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2a}{u+v} & -\frac{2a}{(u+v)^2} & \frac{b-a}{2(u+v)^2} & \frac{a+b}{u+v}\\ -\frac{2a}{(u+v)^2} & \frac{2a}{(u+v)^3} & -\frac{a+b}{(u+v)^3} & \frac{a-b}{2(u+v)^2}\\ \frac{b-a}{2(u+v)^2} & -\frac{a+b}{(u+v)^3} & \frac{2b}{(u+v)^3} & -\frac{2b}{(u+v)^2}\\ \frac{a+b}{u+v} & \frac{a-b}{2(u+v)^2} & -\frac{2b}{(u+v)^2} & \frac{2b}{u+v}\end{pmatrix}$$

les déterminants principaux successifs de la matrice $P$ sont

$$\det 4 = \frac{(a+3b)^2(3a+b)^2}{16(u+v)^8},\ \det 3 = -\frac{a(3a+b)^2}{2(u+v)^8},\ \det 2 = 0 \text{ et } \det 1 = \frac{2a}{u+v}$$

(III.90)

on remaque que toutes les conditions sont vérifiées sauf deux qui sont: $\det 3 > 0$ et $\det 2 > 0$. Donc la matrice $P$ n'est pas définit positive et impossible sera définit non-négative puisque $\det 3 < 0$. Alors:

$$L(t) = \int_\Omega \frac{1}{u+v}|\nabla u|^2 dx + 2\int_\Omega \frac{1}{u+v}\nabla u\nabla v dx + \int_\Omega \frac{1}{u+v}|\nabla v|^2 dx$$

(III.91)

n'est pas une fonctionnelle de Lyapunov.

On va essayer de chercher $\Phi$ de la forme

$$\Phi(u+\alpha v),\quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{III.92}$$

les dérivées de $\Phi$ par rapport à $u$ et $v$

$$\Phi_u = \Phi',\ \Phi_v = \alpha\Phi' \tag{III.93}$$

pour que $\mathbf{J} \leq 0$ il faut que

$$\Phi_v \leq \Phi_u \Leftrightarrow \alpha\Phi' \leq \Phi' \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \leq 1 : \ \Phi' \geq 0 \\ \alpha \geq 1 : \ \Phi' \leq 0 \end{cases} \tag{III.94}$$

nous avons

$$\mathbf{I} = -\int_{\Omega} \left[ V\tilde{Z}\bullet\tilde{Z} \right] dx \tag{III.95}$$

où

$$V = \begin{pmatrix} 2a\Phi & 2a\Phi' & \frac{1}{2}((2\alpha-1)a-b)\Phi' & (a+b)\Phi \\ 2a\Phi' & a\Phi'' & -\frac{1}{2}(a\alpha^2+b)\Phi'' & \frac{1}{2}((2-\alpha)b-\alpha a)\Phi' \\ \frac{1}{2}((2\alpha-1)a-b)\Phi' & -\frac{1}{2}(a\alpha^2+b)\Phi'' & \alpha^2 b\Phi'' & 2\alpha b\Phi' \\ (a+b)\Phi & \frac{1}{2}((2-\alpha)b-\alpha a)\Phi' & 2\alpha b\Phi' & 2b\Phi \end{pmatrix}$$

on calcule les déterminants principaux successifs de la matrice $V$

$$\begin{aligned} \det 4 = {} & \frac{1}{16}a^4\alpha^2((1-2\alpha)(\Phi')^2+2\alpha\Phi''\Phi)^2 - \\ & \frac{1}{4}ba^3\left( \begin{array}{c} -(\Phi')^4\alpha(2\alpha-1)(\alpha^2+5\alpha+1)+2(\Phi'')^2\alpha^2\Phi^2(\alpha^2+1) \\ -\Phi''(\Phi')^2\Phi(-\alpha^3-2+12\alpha^2+\alpha+2\alpha^4) \end{array} \right) + \\ & \frac{1}{8}a^2b^2\left( \begin{array}{c} (\Phi')^4(59\alpha^2+18\alpha^3+18\alpha+2\alpha^4+2)+ \\ 2(\Phi'')^2\Phi^2(4\alpha^2+1+\alpha^4)+ \\ 2\Phi''(\Phi')^2\Phi(2\alpha^2+7\alpha+2)(\alpha^2-4\alpha+1) \end{array} \right) - \\ & \frac{1}{4}ab^3\left( \begin{array}{c} \Phi''(\Phi')^2\Phi(2\alpha^4+\alpha-\alpha^3-2-12\alpha^2) \\ 2(\Phi'')^2\Phi^2(\alpha^2+1)+(\Phi')^4(\alpha-2)(\alpha^2+5\alpha+1) \end{array} \right) + \\ & \frac{1}{16}b^4((\alpha-2)(\Phi')^2+2\Phi\Phi'')^2, \end{aligned} \tag{III.96}$$

$$\det 3 = -\frac{1}{4}a\Phi''\left(\begin{array}{c} 2\Phi\Phi''(a\alpha^2-b)^2+ \\ (\Phi')^2(4a\alpha^2+2a\alpha-a-b)(3b+2a\alpha-a) \end{array}\right),$$

(III.97)

$$\det 2 = 2a^2(\Phi\Phi''-2(\Phi')^2) \qquad \text{(III.98)}$$

et

$$\det 1 = 2a\Phi \qquad \text{(III.99)}$$

On cherche maintenant les conditions pour que les det 1, det2 , det3 et det4 sont positifs : L'inégalité

$$\det 1 > 0 \qquad \text{(III.100)}$$

est triviale.

$$\det 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{\Phi\Phi''}{(\Phi')^2} > 2. \qquad \text{(III.101)}$$

et

$$\det 3 > 0 \Leftrightarrow 2\Phi\Phi''(a\alpha^2-b)^2+(\Phi')^2(4a\alpha^2+2a\alpha-a-b)(3b+2a\alpha-a) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Phi\Phi''}{(\Phi')^2} < -\frac{(4a\alpha^2+2a\alpha-a-b)(3b+2a\alpha-a)}{2(a\alpha^2-b)^2}$$

(III.102)

de (III.101) et (III.102) on a

$$2 < -\frac{(4a\alpha^2+2a\alpha-a-b)(3b+2a\alpha-a)}{2(a\alpha^2-b)^2} \qquad \text{(III.103)}$$

Après simplification de (III.103), on aboutit à

$$(b-a+2a\alpha+2a\alpha^2)^2 < 0 \qquad \text{(III.104)}$$

cette inégalité n'est pas vérifiée quelque soit $a$ et $b$ deux nombres positifs, alors la matrice $V$ n'est pas définit positive, maintenant on va essayer de chercher les conditions pour que la matrice $V$ soit définit non-négative. Donc on remplace l'inégalité (III.104) par l'inégalité suivante:

$$(b-a+2a\alpha+2a\alpha^2)^2 \leq 0$$

et pour que cette inégalité soit vérifiée, il suffit de prendre

$$2a\alpha^2+2a\alpha+b-a = 0 \qquad \text{(III.105)}$$

cette équation algébrique admet deux solutions $\alpha_1$, $\alpha_2$

$$\alpha_1 = \frac{-1}{2a}\left(a+\sqrt{(3a^2-2ab)}\right), \alpha_2 = \frac{1}{2a}\left(-a+\sqrt{(3a^2-2ab)}\right)$$

(III.106)

pour $\alpha_1$ et $\alpha_2$ soient réels, il faut que

$$\frac{3a-2b}{a} \geq 0 \Leftrightarrow 3a \geq 2b. \qquad \text{(III.107)}$$

Si on choisit

$$\alpha = \alpha_1 \text{ ou } \alpha_2 \text{ et } \frac{\Phi\Phi''}{(\Phi')^2} = 2 \qquad \text{(III.108)}$$

on a det2 = 0 et det3 = 0. D'autre part on a

$$\begin{aligned}
\det 4 = {} & \frac{1}{4}b\left(\begin{array}{c} b(\Phi'')^2\Phi^2(a-b)^2+b(\Phi')^4(a+b)^2- \\ 2\Phi''\Phi(\Phi')^2(a+b)(a-b)^2 \end{array}\right)+ \\
& \frac{1}{4}b\alpha(a+b)(\Phi')^2\left(\Phi\Phi''(a-b)^2-(\Phi')^2(a^2+b^2-10ba)\right)+ \\
& \frac{1}{16}\alpha^2\left(\begin{array}{c} (\Phi')^4(a^4-12a^3b+118a^2b^2+b^4-12ab^3)+ \\ 48ab\Phi\Phi''(\Phi')^2(a-b)^2-8ab(\Phi'')^2\Phi^2(a-b)^2 \end{array}\right)+ \\
& \frac{1}{4}a(a+b)\alpha^3(\Phi')^2\left(\Phi\Phi''(a-b)^2-(\Phi')^2(a^2+b^2-10ab)\right)+ \\
& \frac{1}{4}a\alpha^4\left(\begin{array}{c} -2\Phi\Phi''(\Phi')^2(a+b)(a-b)^2+ \\ a(\Phi')^4(a+b)^2+a\Phi^2(\Phi'')^2(a-b)^2 \end{array}\right)
\end{aligned} \qquad \text{(III.109)}$$

c'est un polynome en $\alpha$ de degré 4. Essayons de montrer que

$$\det 4 \geq 0 \qquad \text{(III.110)}$$

sous la condition (III.108). On divise les deux membre de l'inégalité (III.110) par $(\Phi')^4$, on obtient

$$\frac{1}{4}b\left(b\left(\frac{\Phi\Phi''}{(\Phi')^2}\right)^2(a-b)^2-2\frac{\Phi''\Phi}{(\Phi')^2}(a+b)(a-b)^2+b(a+b)^2\right)$$
$$+\frac{1}{4}b\alpha(a+b)\left(\frac{\Phi\Phi''}{(\Phi')^2}(a-b)^2-(a^2+b^2-10ba)\right)$$
$$+\frac{1}{16}\alpha^2\left(\begin{array}{c}48ab\frac{\Phi\Phi''}{(\Phi')^2}(a-b)^2-8ab\left(\frac{\Phi\Phi''}{(\Phi')^2}\right)^2(a-b)^2+\\(a^4-12a^3b+118a^2b^2+b^4-12ab^3)\end{array}\right)$$
$$+\frac{1}{4}a(a+b)\alpha^3\left(\frac{\Phi\Phi''}{(\Phi')^2}(a-b)^2-(a^2+b^2-10ab)\right)$$
$$+\frac{1}{4}a\alpha^4\left(\begin{array}{c}-2\frac{\Phi\Phi''}{(\Phi')^2}(a+b)(a-b)^2+a(a+b)^2+\\a\left(\frac{\Phi\Phi''}{(\Phi')^2}\right)^2(a-b)^2\end{array}\right)\geq 0$$

(III.111)

remplaçons $\frac{\Phi\Phi''}{(\Phi')^2}=2$ dans cette dernierre inégalité, alors on obtient

$$\frac{1}{4}b(9a^2b-2ab^2+b^3-4a^3)$$
$$+\frac{1}{4}b\alpha(a+b)(a^2+6ab+b^2)$$
$$+\frac{1}{16}\alpha^2(a^4+52ba^3-2b^2a^2+b^4+52ab^3)$$
$$+\frac{1}{4}\alpha^3a(a+b)(a^2+6ab+b^2)$$
$$+\frac{1}{4}\alpha^4a(a^3-2ba^2+9ab^2-4b^3)\geq 0, \qquad \text{(III.112)}$$

divisons( III.112) par $b^4$, on trouve

$$-\frac{1}{4}\left(2\frac{a}{b}+4\left(\frac{a}{b}\right)^3-9\left(\frac{a}{b}\right)^2-1\right)+\frac{1}{4}\alpha\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2+6\frac{a}{b}+1\right)+$$
$$\frac{1}{16}\alpha^2\left(-10\left(\frac{a}{b}\right)^2+52\frac{a}{b}+52\left(\frac{a}{b}\right)^3+\left(\frac{a}{b}\right)^4+1\right)+$$
$$\frac{1}{4}\alpha^3\frac{a}{b}\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2+6\frac{a}{b}+1\right)+\frac{1}{4}\alpha^4\frac{a}{b}\left(-4-2\left(\frac{a}{b}\right)^2+9\frac{a}{b}+\left(\frac{a}{b}\right)^3\right)\geq 0.$$

(III.113)

Si on pose $\frac{a}{b}=x$, alors (III.113) devient

$$-\frac{1}{4}(2x+4x^3-9x^2-1)+\frac{1}{4}\alpha(x+1)(x^2+6x+1)+\frac{1}{16}\alpha^2(-10x^2+52x+52x^3+x^4+1)$$
$$+\frac{1}{4}\alpha^3x(x+1)(x^2+6x+1)+\frac{1}{4}\alpha^4x(-4-2x^2+9x+x^3)\geq 0.$$

(III.114)

$\alpha_1$ s'écrit

$$\alpha_1 = \frac{-1}{2}\left(1+\sqrt{\left(3-\frac{2}{x}\right)}\right) \qquad \text{(III.115)}$$

remplaçons $\alpha$ par $\alpha_1$ dans l'expression (III.114), on obtient

$$\frac{1}{32x}\left(-9+6x^5-66x^2-37x^4+96x^3+26x\sqrt{(3x-2)x}\,(x^2+3)(3x^2-12x+5)\right)\geq 0.$$

(III.116)

Après simplification

$$-9+6x^5-66x^2-37x^4+96x^3+26x(x^2+3)(3x^2-12x+5)\sqrt{x(3x-2)}\geq 0.$$

(III.117)

l'inégalité ci-dessus est compliquée,donc on revient à $\alpha_2$

$$\alpha_2 = \frac{1}{4a}\left(-2a+2\sqrt{3a^2-2ab}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3-\frac{2}{x}}\right)$$

remplaçons $\alpha$ par $\alpha_2$ dans (III.114)

$$\frac{1}{32x}\left(\begin{array}{c}-33+48x^5+546x^2-157x^4+552x^3+224x-\\(-72x^3+254x^2-240x+63+27x^4)\sqrt{x(3x-2)}\end{array}\right)\geq 0$$

(III.118)

Après simplification

$$48x^5+546x^2-157x^4+552x^3+224x-33-(-72x^3+254x^2-240x+63+27x^4)\sqrt{x(3x-2)}\geq 0$$

(III.119)

cette expression est aussi compliquée.

# REFERENCES

[1] N. D. Alikakos, $L^p$ -Bounds of Solutions of Reaction-Diffusion Equations. Comm. Partial. Differential. Equations 4. (1979), 827-868.

[2] H. Amman, Nonhomogeneous Linear and Quasilinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems. Preprint. 1993.

[3] H. Amman, Parabolic Evolution Equations and Nonlinear Boundary Conditions. Journal of Differential Equations, Vol:72, n° 2, April 1988.

[4] D. G. Aronson et H. F. Weinberger, Nonlinear Diffusion in Population Genetics, Combustion and Nerve Pulse Propagation.

[5] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle théorie et applications. Masson, Paris, 1983.

[6] V. Capasso, A. Diliddo et L. Maddalena, Asymptotic Behaviour of Nonlinear Model for the Geographical Diffusion of Innovations. Preprint Univ Bari (Italy).

[7] H. Cohen, Nonlinear Diffusion Problems. Studies in Mathematics 7, Studies in Applied Mathmatics, Ed. A. Taub. Math.Assoc.of America & Prent Hall, (Englew-Cliffs, N. J) (1971), 27-63.

[8] E. D. Conway et J. A. Smoller, Diffusion and the Predator-Prey Interaction. Appl. Math. 33, (1977), 673-686.

[9] R. Dautray et J. L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques.Volume 3 Masson,1987.

[10] W. Feng, Coupled Systems of Reaction-Diffusion Equations and Applications. Ph. D. Thesis, North Carolina State University (1988).

[11] R. A. Fisher, The Advance of Avantageous Genes. Ann. of Engenics IC/91/251, May 1992.

[12] F. R. Gantmacher, Théorie des matrices. tome1. Paris (1966).

[13] I. M. Gelfand, Some Problems in the Theory of Quasilinear Equations. Usp. Math. Nauk (N. S) 14 (1959), American. Math. Soc. Transl ( 2 ), 29 ( 1963 ). 295-381.

[14] D.Henry, Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations Lecture Notes in Mathematics 840, springer-verlag, New-York, 1984.

[15] A. L. Hodgkin et A. F. Huxley, A Quantitative Description of

Membrane Current and its Application to Conduction and Excitation in Nerve. J. Physiol. 117 ( 1952 ), 500-544.

[16] S. L. Hollis . Global Existence and Buondedness in Reaction-Diffusion Systems. Ph. D. Thesis. North Carolina State University (1986).

[17] S. L. Hollis. On the Question of Global Existence for Reaction-Diffusion Systems with Mixed Boudary Conditions. Quarterly of Applied Mathematics Vol LI. Numb 2. June 1993. 241-250.

[18] S. L. Hollis et J.Morgan. Partly Dissipative Reaction-Diffusion Systems and a Model of Phosphorus Diffusion in Silicon. J. Nonlinear. Analysis. Theory. Methods and Applications. In Press.

[19] H. Hoshimo. On the Convergence Properties of Global Solutions for some Reaction-Diffusion Systems under Newman Boundary Conditions. Diff and Integ Equations. Vol. 9. n 4. 1996. 761-778.

[20] M. Kirane, Global Pointwise. a Priori Bounds and Large Time Behaviour for a Nonlinear System Describing the Spread of Infectious Disease. Inemat Center of Theoretical Physics. IC 91 251. (1992).

[21] M. Kirane et S. Kouachi. A strongly Nonlinear Reaction Diffusion Model for a Deterministic Diffusive Epidemic. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics. Vol 12. n 1. (1995). JAPAN.

[22] M. Kirane et S. Kouachi. Asymptotic Behaviour for a System Describing Epidemics with Migration and Spatial Spread of Infection. Dynamic Systems and Applics. Vol 2. n 1. (1993). USA.

[23] M. Kirane et S. Kouachi. Global Solutions to a System of Strongly Coupled Reaction-Diffusion Equations. Nonlinear Analysis Theory. Methods and Applications. Vol 26. n 8. (1996). USA.

[24] S. Kouachi. Global Existence for Solutions of Reaction-Diffusion Systems via a lyapunov functional. Elec. Journal of Diff. EQ. Vol 68 (2001) 2001.

[25] S. Kouachi and A. Youkana. Global Existence and Asymptotics for a Class of Reactions-Diffusion Systems.Bulletin of the Polish Academy of Sciences Vol. 49. N° 3 (2001).

~~[26] J. L. Lions. Quelques méthodes de résolution des problémes aux~~ limites non linéaires. 1969.

[27] J. Morgan, Global Existence for Semilinear Parabolic Systems. SIAM. J. Math. Anal 20. (1989). 1128-1144.

[28] C. V. Pao, On Nonlinear Diffusion Systems. J. Math. Analysis. Applic. 87. (1982). 165-198.

[29] C. V. Pao, Réaction-Diffusion Equations with Nonlinear Boundary Conditions. Nonlinear Analysis 5. (1981). 1077-1094.

[30] F. Roth, Global Solutions of Reaction-Diffusion Systems. Lecture Notes in Mathematics. 1072. Springer-Verlag. Berlin (1984).

[31] J. Smoller. Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. Springer-Verlag, New York (1983).

[32] M. R. Spiegel. Théorie et AplicationsdeL'analyse(1982).

[33] H. D. Thomas et D. G. Aronson. Oscillation in a Nonlinear Parabolic Model of Separated Cooperatively Coupled Enzymes. Nonlinear Systems and Applics. Academi Press. New York (1977).

[34] Turner et Ames. Twi-Sided Bounds for Linked Unknown Nonlinear Boundary Conditions of Reaction-Diffusion Systems. J. Math. Analysis and Applic..71. (1979). 336-378.

# ملخص

إنّ الهدف من هذا العمل أن نقدّم تقنيات لإنشاء دالة «Lyapunov» بالتدرّج «gradient» التي تسمح لنا أنْ نبرهن الوجود الكلي بالنسبة للزمن لحلول الأنظمة التي تشكلُ بالمعادلاتِ التفاضليةِ الجزئيةِ من النّوع الإهليلجية «parabolique» المسمّاة أنظمة ردّ الفعل والإنتشار « Systèmes de réaction-diffusion ».

من المشهور أنه لبرهان الوجود الكلي بالنسبة للزمن، يكفي أنْ نبرهن، باستعمال مبدأ تأثير التعديل (أنظر: D. Henry[14]) الذي ينص على أن يكون حدّ ردّ الفعل في الفضاء $L^\infty(0,T_{Max};L^p)$ من أجل كل $p>n/2$.

في الحالةِ حيث يكون ردّ الفعل يتضمن التزايد الأسّي مرفوعا إلى قوة كبيرة بما فيه الكفاية فإنّ دوال «Lyapunov» الأولية (كثيرات الحدود، ...) لا تعطينا الوجود الكلي (أنظر: S. Kouachi[24] et S.Kouachi & A.Youkana[25]). إنّ الدوال التي استعملتْ هنا يُمكنُ أنْ تعطي تقديرات الحل في الفضاءاتِ $L^2(0,T_{Max};H^1)$ إذن بتطبيقاتِ تباينات سوبوليف «des injections de Sobolev» يُمكنُ أنْ نستنتجَ الحل بشكل سهل في الفضاء $L^\infty(0,T_{Max};L^p)$ من أجل كل $p>n/2$ الذي يعطي الوجود الكلي للحل بالنسبة للزمن بمبدأ تأثير التعديل.

# *Abstract*

*The aim of this work is to present techniques of construction of Lyapunov functional in gradient allowing to prove the global existence in time for solutions of systems which are formed by partial differential equations of parabolic type calls Systems of reaction-diffusion equations.*

*It is well known that to show the global existence, it suffices to show, by using the regularizing effect (see D. Henry [14]) that the term of reaction is in $L^\infty(0,T_{Max}; L^p)$ for a certain $p>n/2$.*

*In the case where the reaction is of exponential growth with an exhibitor that is enough sufficient, the elementary Lyapunov functional (polynomials, ...)do not give the global existence (see S. Kouachi [24] and S. Kouachi & A. Youkana [25]). The functional which used here can give priori estimations of the solution in the spaces $L^2(0,T_{Max}; H^1)$, then by applications of Sobolev injections we can easily deduce the solution is in the space $L^\infty(0,T_{Max}; L^p)$ for a certain $p>n/2$ that gives the global existence of the solution by the regularizing effect's principle.*

## Cadre abstrait

*Le but de ce travail est de présenter des techniques de construction des fonctionnelles de Lyapunov en gradient permettant de prouver l'existence globale en temps des solutions d'une classe des systèmes formés d'équations aux dérivées partielles du type parabolique appelées Systèmes de réaction-diffusion.*

*Il est bien connu Pour démontrer l'existence globale, il suffit de montrer, en utilisant l'effet régularisant (voir D. Henry [14]) que le terme de réaction est dans* $L^\infty(0,T_{Max}; L^p)$ *pour un certain* $p>n/2$.

*Dans le cas où la réaction est à croissance exponentielle avec exposant suffisamment grand, les fonctionnelles de Lyapunov élémentaires (polynomiales,...) ne donnent pas l'existence globale (voir S. Kouachi [24] et S. Kouachi & A. Youkana [25]). Les fonctionnelles utilisées ici peuvent donner des estimations à priori sur la solution dans les espaces* $L^2(0,T_{Max}; H^1)$ *puis par applications des injections de Sobolev on en déduit facilement l'appartenance de la solution à un espace* $L^\infty(0,T_{Max}; L^p)$ *pour un certain* $p>n/2$ *qui donne l'existence globale de la solution d'après le principe de l'effet régularisant.*