RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mentouri-Constantine
Faculté des Sciences Exactes
École Doctorale de Mathématiques
Département de Mathématiques

N° d'ordre : ....
N° série : ....

MÉMOIRE
Pour l'obtention du grade de
MAGISTER
SPÉCIALITÉ : **Mathématiques Appliquées**
OPTION : **Théorie du contrôle**

Présenté par : **LABED BOUDJEMA**

Intitulé :

STABILISATION D'UN SYSTÈME DE TIMOSHENKO NON DISSIPATIF AVEC UN FEEDBACK INTERNE

Soutenu publiquement le 12/04/2010 à Université de Constantine devant le jury composé de :

Mr Denche Mohamed	Prof	Université de Constantine	Président
Mr Ayadi Abdelhamid	Prof	Université de O-E-Bouaghi	Rapporteur
Mr Aïssa Guesmia	M-C-H	Université de Metz	Directeur de thèse
Mr Djezzar Salah	M-C	Université de Constantine	Examinateur
Mr Djebarni Marzoug	M-C	Université de O-E-Bouaghi	Examinateur

Remerciements

Grâce à mon Dieu le tout puissant, j'ai pu terminer ce travail.

Tous mes remerciements et respects les plus profonds aux messieurs AISSA GUESMIA , maître de conférences habilité au département de mathématiques de l'université de Metz, et AYADI ABDELHAMID , professeur au département de mathématiques de l'université de Oum El Bouaghi qui m'ont guidé et encadré pour réaliser ce travail.

Mes sincères remerciements à Monsieur DENCHE MOHAMED, professeur au département de mathématiques de l'université de Constantine, d'avoir accepté de présider le jury de soutenance. Je tiens à remercier Monsieur DJEZZAR SALAH, maître de conférence au département de mathématiques de l'université de Constantine, et DJEBARNI MARZOUG, maître de conférence au département de mathématiques de l'université de Oum El Bouaghi d'avoir examiné mon travail et d'être membres de mon jury, sans oublier tous mes enseignants.

MERCI

Dédicace

C'est avec plaisir que je présente mes meilleurs voeux et sentiments à toute ma famille, en particulier mes parents.

Je dédie ce travail à tous mes chers amis sans exception. Sans oublier mes collègues de travail.

Table des matières

Notations

Ω	un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.
Γ	$= \partial\Omega$ la frontière de l'ensemble Ω.
H	espace de Hilbert.
A^*	adjoint de A.
γ_0	opérateur de trace.
$\mathcal{C}^k(\Omega)$	l'espace des fonctions k fois dérivable et la dérivé d'ordre k est contuine.
$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$	l'espace des fonctions indéfiniment dérivable à support compact.
$L^p(\Omega)$	l'espace de Lebesgue, $1 \leq p \leq \infty$.
$\mathfrak{D}(\Omega)$	l'espace des distributions.
$\nabla f(x)$	$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$, le gradient de la fonction f en $x \in \mathbb{R}^n$.
$W^{m,p}(\Omega)$	l'espace de Sobolev, $1 \leq p \leq \infty$.
$W_0^{m,p}(\Omega)$	la fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.
$H^m(\Omega)$	$= W^{m,2}(\Omega)$.
Δ	le Laplacian $\left(\Delta = \Sigma_{i=0}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)$.
$Im(A)$	l'image de A.
p.p.	presque partout.
φ_t	$= \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi'$ la dérivée de φ par rapport à t.
ψ_t	$= \frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi'$ la dérivée de ψ par rapport à t.
φ_{tt}	$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ la dérivée d'ordre 2 de φ par rapport à t.
ψ_{tt}	$= \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ la dérivée d'ordre 2 de ψ par rapport à t.
φ_x	$= \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ la dérivée de φ par rapport à x.
ψ_x	$= \frac{\partial \psi}{\partial x}$ la dérivée de ψ par rapport à x.
φ_{xx}	$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ la dérivée d'ordre 2 de φ par rapport à x.
ψ_{xx}	$= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ la dérivée d'ordre 2 de ψ par rapport à x.
φ_{xt}	$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}$ la dérivée d'ordre 2 de φ par rapport à x par rapport à t.
ψ_{xt}	$= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t}$ la dérivée d'ordre 2 de ψ par rapport à x par rapport à t.

Introduction

Un modèle simple décrivant la vibration transversale d'un faisceau a été développé dans [30] et donné par le système des équations hyperboliques couplées suivant :

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = (k(u_x - \varphi))_x \quad \text{dans} \quad (0, L) \times (0, +\infty) \\ I_\rho \varphi_{tt} = (EI\varphi_x)_x + k(u_x - \varphi) \quad \text{dans} \quad (0, L) \times (0, +\infty), \end{cases} \tag{1}$$

où t désigne la variable de temps, x est la variable de l'espace le long du faisceau de longueur L dans sa configuration d'équilibre, u est le déplacement transversal du faisceau, φ est l'angle de rotation du filament du faisceau, et ρ, I_ρ, E, I et k désignent, respectivement, la densité (la masse par unité de longueur), le moment polaire de l'inertie d'une coupe, module de Young d'élasticité, le moment de l'inertie d'une coupe, et le module de cisaillement.

Kim et Renardy [24] ont considéré (1) avec deux contrôles sur le bord de la forme

$$\begin{cases} k\varphi(L,t) - k\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = \alpha\frac{\partial u}{\partial t}(L,t), \ \forall t \geq 0 \\ EI\frac{\partial \varphi}{\partial x}(L,t) = -\beta\frac{\partial \varphi}{\partial t}(L,t), \ \forall t \geq 0 \end{cases}$$

et ont utilisé les techniques de multiplicateurs pour établir un résultat de stabilité exponentielle pour l'énergie normale de (1). Ils ont également fourni des évoluations numériques aux valeurs propres de l'opérateur liées au système (1). Un résultat analogue a été également établi par Feng [12] où la stabilisation d'un système de Timoshenko a été étudiée. Raposo et al [9] ont étudié (1) avec des conditions aux limites de type Dirichlet homogènes et des contrôles linéaires ; ils ont regardé le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - k(u_x - \varphi)_x + u_t = 0 \quad \text{dans} \quad (0, L) \times (0, +\infty) \\ \rho_2 \varphi_{tt} - b\varphi_{xx} - k(u_x - \varphi) + \varphi_t = 0 \quad \text{dans} \quad (0, L) \times (0, +\infty) \\ u(0,t) = u(L,t) = \varphi(0,t) = \varphi(L,t) = 0, \ \forall t \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

et ont montré que l'énergie liée à (2) décroit exponentiellement. Ce résultat est semblable celui obtenu par Taylor [31]. La méthode utilisée est différente de l'habituelle telle que la méthode classique d'énergie. Il emploie principalement la théorie de semi-groupes. Soufyane et Wehbe [8] ont prouvé que c'est possible de stabiliser uniformément (1) en employant un feedback localement distribué unique. Ainsi ils ont considéré

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = (k(u_x - \varphi))_x \quad \text{dans} \quad (0,L) \times (0,+\infty) \\ I_\rho \varphi_{tt} = (EI\varphi_x)_x + k(u_x - \varphi) - b\varphi_t \quad \text{dans} \quad (0,L) \times (0,+\infty) \\ u(0,t) = u(L,t) = \varphi(0,t) = \varphi(L,t) = 0, \ \forall t \geq 0, \end{cases} \tag{3}$$

où b est une fonction positive et continue qui satisfait

$$b(x) \geq b_0 > 0, \quad \forall x \in [a_0, a_1] \subset [0, L].$$

En fait, ils ont montré que la stabilité uniforme de (3) tient si et seulement si les vitesses de propagation sont égales $\left(\frac{k}{\rho} = \frac{EI}{I_\rho}\right)$; autrement, seulement la stabilité asymptotique a été prouvée. Xu et Yung [17] ont étudié un système de Timoshenko et ont examiné la stabilité du système en utilisant les valeurs propres et les fonctions propres. Mũnoz Rivera et Racke [22] ont traité un système non linéaire de la forme

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \gamma(\varphi_x + \psi)_x = 0 \quad \text{dans} \quad (0,L) \times (0,+\infty) \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x = 0 \quad \text{dans} \quad (0,L) \times (0,+\infty) \\ \rho_3 \theta_t - K\theta_{xx} + \delta\psi_{xt} = 0 \quad \text{dans} \quad (0,L) \times (0,+\infty), \end{cases}$$

où φ, ψ et θ sont des fonctions de (x,t) modèlisant le déplacement transversal du faisceau, l'angle de rotation du filament et la température de différence, respectivement. Sous des conditions appropriées sur $\gamma, \rho_i, b, k, \delta, \ (i = 1,2,3)$, ils ont prouvé la stabilité exponentiel du système dans le cas des mêmes viteses de propagation. Ammar Khodja et al [14] ont considéré un système de Timoshenko linéaire avec un contrôle de type mémoire de la forme

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(s)ds + k(\varphi_x + \psi) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

dans $(0,L) \times (0,+\infty)$, avec conditions aux limites de type Dirichlet homogènes. Ils ont employé la technique de multiplicateur et ont montré que le système est uniformément stable si et seulement si les vitesses de propagation sont égales $\left(\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}\right)$ et g décroit exponentiellement vers 0, et la stabilité polynômiale si g décroit polynômialement. Ils ont également considéré quelques conditions techniques supplémentaires sur g' et g'' pour obtenir leur résultat. Les feedbacks de type mémoire ont été également employé par De Lima Santos [25] où ils ont considéré un système de Timoshenko et ont montré à que la présence des deux feedbacks du type mémoire sur une partie de la frontière stabilise le système uniformément.

Ils ont également obtenu le taux de décroissance de l'énergie en fonction des feedbacks. Shi et Feng [11] ont étudié un système de Timoshenko non uniforme rayonné de relaxation soumis à des contrôles localement distribués et ont montré la stabilité exponentielle du système.

A. Guesmia et S. A. Messaoudi [3] ont considéré le système suivant :

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - (\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\ \psi_{tt} - \psi_{xx} + \varphi_x + \psi + \int_0^t g(t-s)(a(x)\psi_x(s))_x ds + b(x)h(\psi_t) = 0, \quad (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\ \varphi(0,t) = \varphi(1,t) = \psi(0,t) = \psi(1,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \quad x \in (0,1) \\ \psi(x,0) = \psi_0(x), \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \quad x \in (0,1) \end{cases} \tag{5}$$

(soumis à un contrôle frictional et un contrôle de type mémoire complémentaires) et ont étudié l'influence de ces contrôles sur le taux de stabilité des solutions. Ils ont obtenu la stabilité exponentielle et polynômiale sous des conditions plus faibles sur la fonction de relaxation g.

Dans ce travail, nous considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k_1(\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad (0,L) \times \mathbb{R}_+ \\ \rho_2\psi_{tt} - k_2\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + h(\psi_t) = 0, \quad (0,L) \times \mathbb{R}_+ \\ \varphi(0,t) = \varphi(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \quad x \in (0,L) \\ \psi(x,0) = \psi_0(x), \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \quad x \in (0,L), \end{cases} \tag{6}$$

où $\rho_1, \ \rho_2, \ k_1, \ k_2, \ k, \ L \in \mathbb{R}_+$ et $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée, et nous montrerons la stabilité exponentielle de (P) ; c'est-à-dire

$$\exists \ c, w > 0 \ \text{ tq } \ E(t) \leq ce^{-wt}, \quad \forall t \geq 0, \tag{7}$$

où $E : \ \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est l'énergie de (P) (voir chapitre 3 pour la définition) dans le cas $\dfrac{k_1}{\rho_1} = \dfrac{k_2}{\rho_2}$ et $k - k_1$ est assez petit.

Notre que, si $k_1 \neq k$, alors (6) n'est pas nécessairement dissipatif (c'est-à-dire son énergie E n'est pas nécessairement décroissante) contrairement au cas des systèmes cités ci-dessus.

L'objectif de ce travail est de montrer que la stabilité exponentielle (7) reste vrai si $k - k_1$ est assez petit.

Sans perte de généralité (et juste pour simplifier les calculs), on suppose que

$$\rho_1 = \rho_2 = k_1 = k_2 = L = 1.$$

Donc on va considérer la forme suivante :

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - (\varphi_x + \psi)_x = 0 \quad \text{dans} \quad (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\ \psi_{tt} - \psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + h(\psi_t) = 0 \quad \text{dans} \quad (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\ \varphi(0,t) = \varphi(1,t) = \psi(0,t) = \psi(1,t) = 0, \qquad t \geq 0 \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x),\ \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \qquad x \in (0,1) \\ \psi(x,0) = \psi_0(x),\ \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \qquad x \in (0,1). \end{cases} \tag{P}$$

Notre travail est partagé en trois chapitres :

- Chapitre 1 : Rappels.
- Chapitre 2 : Inégalités intégrale.
- Chapitre 3 : Stabilité exponentielle.

Chapitre 1

Rappels et notions préliminaires

1.1 Quelques espaces et inégalités connus

1.1.1 Espaces L^p

Définition 1.1.1 : $L^p(\Omega),\ \ p \in [1, +\infty]$.

On définit $L^p(\Omega)$ ($p \in [1, +\infty]$) par :

- Si $p \in [1, +\infty[$:

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{ tq} \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}.$$

On définit sur $L^p(\Omega)$ la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- Si $p = +\infty$:

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{ tq } \exists\ c \in \mathbb{R} \text{ vérifiant : } |f| \leq c \quad p\,.\,p \ \text{ sur } \Omega \}.$$

On définit sur $L^\infty(\Omega)$ la norme

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ c \in \mathbb{R} \ \text{ tq } \ |f| \leq c \ \ p\,.\,p \ \text{ sur } \Omega \}.$$

Proposition 1.1.2 :

1) Si $p \in [1, +\infty]$, alors $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach (i.e. normé complet).

2) Si $p \in [1, +\infty[$, alors $L^p(\Omega)$ est séparable (i.e. il existe un ensemble dénombrable dense dans $L^p(\Omega)$).

3) $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$< f, g >_{L^2(\Omega)}= \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

Théorème 1.1.3 :

Soit Ω un domaine ouvert de $\mathbb{R}^n$ de frontière de classe C^m. Pour tous $m \geq 1$ et $1 \leq p < \infty$, on a

1) $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0 \implies W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \ \ \forall q \in [p, q^*]$ où $\dfrac{1}{q^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$.

2) $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0 \implies W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \ \ \forall q \in [p, +\infty]$.

3) $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} < 0 \implies W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

1.1.2 Espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ $(m \in \mathbb{N}, \ p \in [1, +\infty])$

Définition 1.2.1 : $W^{m,p}(\Omega)$**.**

Soient $(m, p) \in \mathbb{N} \times [1, +\infty]$. On définit $W^{m,p}(\Omega)$ par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \text{ tq } \forall \ \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ avec } |\alpha| \leq m, \ \exists £_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ vérifiant :}$$

$$\textstyle\int_\Omega f(x)D^\alpha\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega £_\alpha(x)\varphi(x)dx, \ \ \forall\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)\big\}.$$

On pose $D^\alpha f = £_\alpha$

On définit sur $W^{m,p}(\Omega)$ la norme

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|£_\alpha\|_{L^p(\Omega)} .$$

Si $1 \leq p < +\infty$, on peut considérer sur $W^{m,p}(\Omega)$ la norme équivalente

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|£_\alpha(x)\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Cas particulier :

1) $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

2) $p = 2 : W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

Proposition 1.2.2 :

$H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\forall f, g \in H^m(\Omega) : \langle f, g \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha f(x) D^\alpha g(x) dx = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha f, D^\alpha g \rangle_{L^2(\Omega)} .$$

Remarque : $C^m(\Omega) \subset H^m(\Omega)$ mais l'inverse n'est pas vrait.

Proposition 1.2.3 :

$\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Remarque : en général $\mathfrak{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^1(\Omega)$.

Définition 1.2.4 : $H_0^m(\Omega)$.

On définit $H_0^m(\Omega) = \overline{\mathfrak{D}(\Omega)}$ (par rapport à la norme de $H^m(\Omega)$) ;
c'est-à-dire :

$$H_0^m(\Omega) = \left\{ f \in H^m(\Omega) / \exists (\varphi_k) \in \mathfrak{D}(\Omega) \text{ vérifient : } \|\varphi_k - f\|_{H^m(\Omega)} \to 0 \text{ tand } \ k \to +\infty \right\}.$$

De même $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathfrak{D}(\Omega)}$ par rapport à la norme de $W^{m,p}(\Omega)$.

Définition 1.2.5 : Dérivée normale.

On définit la dérivée normale d'une fonction f, notée par $\dfrac{\partial f}{\partial \nu}$, comme étant $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} \nu_i(x)$ pour tout $x \in \Gamma$.

On pose

$$\begin{aligned} \gamma : \mathfrak{D}(\overline{\Omega}) &\longrightarrow L^2(\Gamma) \\ \varphi &\longrightarrow \gamma(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} /_\Gamma ; \\ \gamma_0 : \mathfrak{D}(\overline{\Omega}) &\longrightarrow L^2(\Gamma) \\ \varphi &\longrightarrow \gamma_0(\varphi) = \varphi /_\Gamma . \end{aligned}$$

L'application γ_0 se prolonge par continuité à $H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Gamma) \\ f &\longrightarrow \gamma_0(f) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \varphi_n /_\Gamma \end{aligned}$$

(γ_0 est dit l'application de trace).

Théorème 1.2.6 :

Si Γ est de classe C^2 alors γ se prolonge sur $H^2(\Omega)$

$$\gamma : H^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$
$$f \longrightarrow \gamma(f) = \frac{\partial f}{\partial \nu}/_{\Gamma}.$$

Définition 1.2.7 : $H_0^2(\Omega)$.

$H_0^2(\Omega) = \overline{\mathfrak{D}(\Omega)}$ (par rapport la norme de $H^2(\Omega)$).

Proposition 1.2.8 :

Si Γ est de classe C^2, alors $H_0^2(\Omega) = \ker \gamma_0 \bigcap \ker \gamma$ (i.e. $f \in H^2(\Omega)$ tq : $f = 0$ p . p sur Γ et $\dfrac{\partial f}{\partial \nu} = 0$ p . p sur Γ). De même, $H_0^1(\Omega) = \ker \gamma_0 = \{f \in H^1(\Omega) \text{ tq : } f = 0 \text{ p . p sur } \Gamma\}$ si Γ est de classe C^1.

1.1.3 Inégalité d'interpolation :

Soit $m \in \mathbb{N}/\{0,1\}$ et $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_m \in [1, +\infty]$ tq : $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \ldots\ldots + \dfrac{1}{p_m} \geq 1$. On pose $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \ldots\ldots + \dfrac{1}{p_m}$. On a : $\forall f_i \in L^{p_i}(\Omega),\ i = 1, \ldots\ldots, m$, alors $f = f_1.f_2\ldots\ldots f_m \in L^p(\Omega)$ et on a : $\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \prod\limits_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}$.

1.1.4 Inégalité de Hölder :

Soient $p, q \in [1, +\infty]$ tq $1 = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$. Alors pour tous $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$: $fg \in L^1(\Omega)$ et on a :

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

$$\left(i.e. \begin{cases} \int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \text{ si } p, q \in]1, +\infty[, \\ \int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \leq \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |f(x)|\, dx \text{ si } p = 1 \text{ et } q = +\infty \end{cases} \right).$$

1.1.5 Formule de Green :

Soient $f, g \in H^1(\Omega)$ (où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné) de frontière Γ de classe C^1. Alors

$$\int_\Omega \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} g(x) dx = -\int_\Omega f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma f(x) g(x) \nu_i(x) dx.$$

1.1.6 Inégalité de Young :

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et pour tous $p, q \in]1, +\infty[$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a :

$$|ab| \leq \frac{1}{p} |a|^p + \frac{1}{q} |b|^q .$$

1.1.7 Inégalité de Poincaré :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Il existe une constante $c > 0$ vérifiant :

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall f \in H_0^1(\Omega),$$

où $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$, c'est-à-dire :

$$\int_\Omega f^2(x)dx \leq c \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^2 dx.$$

1.2 Théorie de semi-groupes

Soit H un espace de Hilbert réel ou complexe muni de la norme $x \longrightarrow \|x\|_H$. On désigne par $L(H)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de H en lui même.
$L(H)$ est un espace de Banach pour la norme $S \longrightarrow \|S\|$ définie par :

$$\|S\| = \sup_{\|x\|_H=1} \|Sx\|_H = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Sx\|_H}{\|x\|_H}. \tag{1.1}$$

Définition 1.2.1 :

On appelle l'application $S : [0, +\infty[\longrightarrow L(H)$ semi-groupes fortement continu dans H si elle vérifie les propriétés suivantes :

i) $S(0) = I_d$.

ii) $S(t + s) = S(t)S(s), \quad \forall t \geq 0, \ \forall s \geq 0$.

iii) $\forall x \in H$, l'application $S(.)x$ est continue sur $[0, +\infty[$ dans H.

Dans la suite, on appelle une telle application semi-groupes de classe C_0 et on la note par C_0-semi-groupe.

Proposition 1.2.2 :

Si $(S(t))_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupes dans H, alors l'opérateur adjoint $(S^*(t))_{t\ \geq 0}$ est aussi semi-groupes de classe C_0 dans H.

Lemme 1.2.3 :

Soit $S(t)$ un C_0-semi-groupes Alors

$$\exists M \geq 1, \exists w \in \mathbb{R} \text{ tels que : } \|S(t)\| \leq Me^{wt}, \quad \forall t \geq 0. \tag{1.2}$$

Preuve : Considérons le compact $[0,1]$, comme $(S(t))_{t\geq 0}$ est fortement continue, alors l'application $t \longmapsto S(t)x$ est continue. Donc l'image de $[0,1]$ par cette application est compacte, et par conséquent

$$\exists M_x \text{ tel que : } \|S(t)x\| \leq M_x, \ \forall t \in [0,1].$$

D'après le théorème de Banach-Steinhauss :

$$\exists M \text{ tel que : } \quad \|S(t)\| \leq M, \ \forall t \in [0,1].$$

On remarque que la constante $M \geq 1$ $(1 = \|S(0)\| \leq M)$.

Maintenant si $t \notin [0,1]$, on écrit $t = n + \theta$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in]0,1[$ donc

$$\begin{aligned} S(t) &= S(n+\theta) \\ &= S(n)S(\theta) \\ &= (S(1))^n S(\theta). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \|S(t)\| = \|(S(1))^n S(\theta)\| &\leq \|(S(1))^n\| \, \|S(\theta)\| \\ &\leq M^n M \\ &\leq Me^{n \log M} \end{aligned}$$

On pose $\log M = w$, donc

$$\|S(t)\| \leq Me^{nw} \leq Me^{tw}.$$

Remarque : Si $(S(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupes fortement continu à l'origine vérifiant la majoration (1.2), alors il est fortement continue.

Preuve :

- Si $s \geq 0$:

$$\|S(t+s)x - S(t)x\|_H = \|S(t).S(s)x - S(t)x\|_H .$$

On pose $y = S(t)x$ donc

$$\|S(t+s)x - S(t)x\|_H = \|S(s)y - y\|_H \underset{s \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

(car $(S(t))_{t\geq 0}$ est fortement continue à l'origine).

- Si $s < 0$:

$$\begin{aligned}
\|S(t+s)x - S(t)x\|_H &= \|S(t+s)x - S(-s)S(t+s)x\|_H \\
&= \|-S(t+s)\left[S(-s)x - x\right]\|_H \\
&\leq \|S(t+s)\|_H \|S(-s)x - x\|_H \\
&\leq Me^{w(t+s)} \|S(-s)x - x\|_H \underset{s \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Maintenant on va voir que l'estimation (1.2) peut être améliorée. En effet, posons $w(t) = \log \|S(t)\|,\ \forall t > 0$ et $w_0 = \inf_{t>0} \dfrac{w(t)}{t}$.
Soit $\varepsilon \geq 0$ suffisamment petit, alors il existe une constante $\alpha \geq 0$ telle que :

$$\frac{w(\alpha)}{\alpha} \leq w_0 + \varepsilon$$

Soit $t = k\alpha + r$ avec $k \in \mathbb{N}^*, 0 < r < \alpha$, donc :

$$\begin{aligned}
\frac{w(t)}{t} &= \frac{w(k\alpha + r)}{k\alpha + r} \\
&\leq \frac{kw(\alpha) + w(r)}{k\alpha + r} \\
&\leq w_0 + \varepsilon + \frac{w(r)}{t}
\end{aligned}$$

d'où

$$\|S(t)\| \leq Me^{t(w_0+\varepsilon)}.$$

Si en plus $w_0 = -\infty$, alors il existe $N > 0$ tel que $\|S(t)\| \leq Me^{-tN}$.

Définition 1.2.4 :

On dit que $S(t)$ est un semi-groupes borné si

$$\exists M \geq 0 \text{ tel que } \|S(t)\| \leq M, \quad \forall t \geq 0.$$

Remarque : Si $M \leq 1$, $S(t)$ est dit de contraction.

Définition 1.2.5 :

Soit $S(t)$ est C_0-semi-groupes, et soit $Ax = \lim\limits_{h \longrightarrow 0^+} \dfrac{S(h)x - x}{h}$. L'opérateur A est un opérateur linéaire et continue. On défini son domaine A par :

$$D(A) = \left\{ x \in H, \text{tel que : } \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \text{ existe} \right\}.$$

L'opérateur A est appellé générateur infinitésimal de semi-groupe $S(t)$ sur H.

Proposition 1.2.6 :

Pour tout $x \in D(A)$, vérifiant $S(t)x \in D(A)$, on a :

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

Preuve : Soit $x \in D(A)$. Posons $y(t) = S(t)x, \quad \forall t \geq 0$ on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} \\
&= \lim_{h \longrightarrow 0^+} S(t) \frac{S(h)x - x}{h} \\
&= S(t)Ax.
\end{aligned}$$

De même manière on a aussi :

$$\begin{aligned}
\lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} \\
&= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h} S(t)x \\
&= AS(t)x.
\end{aligned}$$

Théorème 1.2.7 :

Si A est un générateur infinitésimal de semi-groupes $S(t)$, alors A est un opérateur fermé.

Preuve : Pour la démonstration, voir [19].

Proposition 1.2.8 :

Le domaine $D(A)$ d'un générateur infinitésimal A de semi-groupes $S(A)$ est un espace vectoriel dense dans H.

Preuve : Pour la démonstration, voir [19].

Corollaire 1.2.9 :

Soit $S(t)$ un C_0-semi-groupes sur H de générateur infinitésimal A. Alors pour tout $u_0 \in D(A)$, le système :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

admet une unique solution $u \in C^1([0, +\infty[\,; H) \bigcap C([0, +\infty[\,; D(A))$ donnée par

$$u(t) = S(t)u_0. \tag{1.4}$$

Preuve : Pour la démonstration, voir [7].

Corollaire 1.2.10 :

Supposons que u_0 dans $D(A)$ et f est continue sur $\mathbb{R}_+$, alors

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^{+\infty} S(t-s)f(s)ds \tag{1.5}$$

est la solution du système non homogène suivant :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t), \quad \forall t \geq 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Exemple de semi-groupes 1.2.11 :

Exemple 1 : Soit H espace de Hilbert, soit A un opérateur linéaire continue sur H. Alors

$$S(t) = e^{At} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{t^i A^i}{i!}$$

est un C_0-semi-groupes puisque :
$S(0) = I,\ S(t+s) = e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As} = S(t)S(s)$ et $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \dfrac{e^{At}x - x}{t} = Ax.$
Donc A est générateur infinitésimal d'un semi-groupes $S(t)$.

Exemple 2 : Soit $H = C([-\infty, +\infty])$ l'espace des fonctions uniformément continues muni de la norme : $\|x(t)\| = \sup\limits_{t \geq 0} |x(t)|$. Soit $(S(t)x)(s) = x(t+s)$. Alors $S(t)$ est un opérateur linéaire de C_0-semi-groupes, et son générateur infinitésimal est défini par : $Ax = \dfrac{d}{ds}x$.

Exemple 3 : Soit $H = C([-\infty, +\infty])$ et $\|x(t)\| = \sup\limits_{t \geq 0} |x(t)|$. Soit $K_t(y) = (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y^2}{2t}}$ pour tous $y \in]-\infty, +\infty[$ et $t > 0$. On pose $S_s(t)x = \int_{-\infty}^{+\infty} K_t(s-y)x(y)dy, \ \ \forall t > 0$. L'opérateur $S(t)$ est un semi-groupes de classe C_0 et A son générateur infinitésimal est donné par : $Ax = \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2}{ds^2}x$.

Exemple 4 : Soit ℓ_2 l'espace défini par :

$$\ell_2 = \left\{ x = (x_1, ...x_n, ...), \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^2 < +\infty \right\}$$

$(S(t)x)_n = \left(e^{-\frac{t}{n}} x_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un C_0-semi-groupes et $(Ax)_n = \left(-\dfrac{x^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est son générateur infinitésimal.

1.3 Opérateur maximal monotone

Soit H un espace de Hilbert et $A : D(A) \longrightarrow H$ un opérateur donné où $D(A)$ est son domaine de définition défini par $D(A) = \{u \in H \ \text{ tq } \ Au \in H\}$.

Définition 1.3.1 :

On dit que A est monotone si

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_H \geq 0, \quad \forall u, v \in D(A).$$

Remarque : Si A est linéaire, alors A est monotone si $\langle Au, u\rangle_H \geq 0, \quad \forall u \in D(A)$.

Définition 1.3.2 :

On dit que A est maximal si $I_d + A : D(A) \longrightarrow H$ est surjectif ; c'est-à-dire

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A) \text{ tq : } \; u + Au = f.$$

Proposition 1.3.3 :

Soit H un espace de Hilbert (réel). Les propriété suivantes sont équivalentes :

1) A est maximal monotone dans H.

2) $(I + \lambda A)^{-1}$ est de contraction pour tout $\lambda \geq 0$.

3) A est monotone et il existe λ positif tel que $(I + \lambda A)$ est surjectif.

Théorème 1.2.4 :

Supposons que A est maximal monotone. Alors :

1) Pour tout $u_0 \in \overline{D(A)}$, le système (1.3) admet une solution unique $u \in C(\mathbb{R}_+, H)$ (c'est-à-dire $\forall t_0 \in \mathbb{R}_+ : \|u(t) - u(t_0)\|_H \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow t_0$). La solution u est dite faible (u n'est pas dérivable au sens classique mais vérifie (1.3) au sens des distributions $\langle u'(t) + Au(t), v\rangle_H = 0, \; \forall v \in H$).

2) Si $u_0 \in D(A)$, alors $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, H) \bigcap W^{0,\infty}(\mathbb{R}_+, D(A))$ où sur $D(A)$ on considère la norme du graphe $\|u\|_{D(A)} = \sqrt{\|u\|_H^2 + \|Au\|_H^2}$. La solution u est dite forte (la régularité de u signifie que : $\sup\limits_{t\geq 0} \|u(t)\|_H < \infty$, $\sup\limits_{t\geq 0} \|u(t)\|_{D(A)} < \infty$ et u est dérivable au sens des distributions).

3) Si A est linéaire et $u_0 \in D(A)$, alors $u \in C(\mathbb{R}_+, D(A)) \bigcap C^1(\mathbb{R}_+, H)$. La solution u est dite classique.

Remarque : Si A est linéaire, alors $\overline{D(A)} = H$.

Remarque : Si A est linéaire, alors on a le résultat plus général que (3) suivant :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall u_0 \in D(A^n), u \in \bigcap_{k=0}^{n} C^{n-k}(\mathbb{R}_+, D(A^k))$ où $D(A^0) = H$, $D(A^1) = D(A)$, $D(A^n) = \{u \in D(A^{n-1}) \text{ tq } Au \in D(A^{n-1})\}$, $\forall n \geq 1$ et

$$\|u\|_{D(A^n)} = \sqrt{\|u\|_H^2 + \|Au\|_H^2 + \|A^2u\|_H^2 + ... + \|A^nu\|_H^2}.$$

Chapitre 2

Inégalités intégrales

2.1 Cas dissipatif

Les résultats de nombreux auteurs concernant l'estimation de décroissance de l'énergie de certaines problèmes dissipatifs sont basés sur le lemme suivant :

Lemme 2.1.1 (A. Haraux [5, 6], V. Komornik [32], P. Martinez [28]) :

Soient $E : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue décroissante et $\phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction strictement croissante de classe C^1 telle que

$$\phi(0) = 0 \text{ et } \lim_{t \longrightarrow +\infty} \phi(t) = +\infty. \tag{2.1}$$

Supposons qu'il existe $r \geq 0$ et $d > 0$ tels que

$$\int_s^{+\infty} \phi'(t) E^{r+1}(t) dt \leq \frac{1}{d} E^r(0) E(s), \quad \forall s \geq 0. \tag{2.2}$$

Alors E vérifie les estimations suivantes :

$$E(t) \leq E(0) e^{1-d\phi(t)} \quad si \quad r = 0; \tag{2.3}$$

$$E(t) \leq E(0) \left(\frac{1+r}{1+rd\phi(t)} \right)^{\frac{1}{r}} \quad si \quad r > 0. \tag{2.4}$$

Ce lemme a été démontré et utilisé par A. Haraux [6] dans le cas $r = 0$ et $\phi(t) = t$ sur $\mathbb{R}^+$ pour l'étude de la stabilisation de certains problèmes linéaires dissipatifs. A. Haraux [5] a démontré aussi le lemme 1.1 dans le cas particulier $r = \dfrac{1}{2}$ et $\phi(t) = t$ sur $\mathbb{R}^+$, et V. Komornik [32] l'a généralisé au cas $r > 0$ et $\phi(t) = t$ sur $\mathbb{R}^+$ pour étudier la stabilisation des problèmes dissipatifs non nécessairement linéaires. V. Komornik [32] a démontré aussi l'optimalité de (2.3) et (2.4) dans ce cas-là.

Quand $\phi(t) = t$ sur $\mathbb{R}^+$, la fonction E est forcément intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et converge vers zéro au moins polynômialement. En utilisant un changement de variables, P. Martinez [28] a démontré (2.3) et (2.4) ce qui lui a permis de considérer des fonctions décroissantes qui convergent vers zéro plus lentement que $t \longrightarrow \dfrac{1}{(t+1)^p}$ pour tout $p > 0$ (comme par exemple, $E(t) = \dfrac{1}{\ln(t+2)}$).

En combinant la méthode des multiplicateurs et les techniques d'analyse micro-locale développées par C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [10], I. Lasiecka et D. Tataru [20] et I. Lasiecka et R. Triggiani [21] ont traité le cas de l'équation des ondes dissipative (avec des conditions de Dirichlet ou de Neumann sur le bord) sous des hypothèses géométriques plus générales avec un feedback non linéaire sans hypothèse de croissance à l'origine. Le taux de décroissance obtenu pour l'énergie dépend de celui d'une équation différentielle ; plus précisément, ils ont déduit l'estimation

$$E(t) \leq h\left(\frac{t}{t_0} - 1\right), \quad \forall t \geq t_0, \tag{2.5}$$

où $t_0 > 0$ et h est la solution de l'équation différentielle

$$h'(t) + q(h(t)) = 0, \quad \forall t \geq 0 \text{ et } h(0) = E(0), \tag{2.6}$$

et q est une fonction qui fait intervenir implicitement la nonlinéarité du feedback, en montrant que E vérifie

$$(Id - q)^{-1}\left(E((m+1)t_0)\right) \leq E(mt_0), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Dans l'objectif de trouver une formule générale qui permet d'obenir le taux de décroissance de l'énergie de certains systèmes hyperboliques dissipatifs en fonction du comportement au voisinage de zéro du terme de dissipation (ce qui permet d'unifier tous les cas et notamment ceux pour lesquels le feedback croît polynômialement et ceux pour lesquels il s'écrase exponentiellement en zéro lorsque $t \longrightarrow +\infty$), M. Eller, J. E. Lagnese et S. Ncaise [26] et F. Alabau-Boussouira [13] ont considéré le cas d'une fonction décroissante $E : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\int_s^{+\infty} \varphi(E(t))dt \leq \frac{1}{d}E(s), \quad \forall s \geq 0, \tag{2.7}$$

où d est un réel strictement positif et $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction convexe et strictement croissante vérifiant $\varphi(0) = 0$ et ils ont montré les résultats suivants :

Lemme 2.1.2 (M. Eller , E. Lagnese et S. Nicaise [26]) :

Soit $E : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue décroissante vérifiant (2.7). Alors il existe trois réels strictement positifs t_0, c_0, c_1 tels que

$$E(t) \leq \varphi^{-1}\left(\frac{\psi^{-1}(c_0 t)}{c_1 t}\right), \quad \forall t \geq t_0, \tag{2.8}$$

où $\psi : \mathbb{R}^*_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\psi(s) = \int_s^1 \frac{1}{\varphi(t)} dt, \quad \forall s \geq 0. \tag{2.9}$$

Lemme 2.1.3 (F. Alabau-Boussouira [13]) :

Soit $E : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue décroissante vérifiant (2.7) avec

$$\varphi(t) = tF^{-1}(t), \quad \forall t \geq 0 \tag{2.10}$$

et $F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [0, b[$ est une fonction strictement croissante vérifiant, pour un réel $b > E(0)$, $F(0) = 0$ et $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} F(t) = b$. Alors il existe trois réels strictement positifs t_0, c_0, c_1 tels que

$$E(t) \leq F\left(\frac{1}{\psi^{-1}(c_0 t)}\right), \quad \forall t \geq t_0 \tag{2.11}$$

où $\psi : [c_0 t_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\psi(s) = s + \int_{F(\frac{1}{s})}^{c_1} \frac{1}{\varphi(t)} dt, \quad \forall s \geq c_0 t_0. \tag{2.12}$$

2.2 Cas non dissipatif

Lemme 2.2.1 (A. Guesmia [2]) :

Soient $E : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction dérivable, $a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^*_+$ et $\lambda : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues. Supposons qu'il existe $r \geq 0$ tel que

$$\begin{cases} \int_s^{+\infty} E^{r+1}(t) dt \leq a(s) E(s), & \forall s \geq 0 \\ E'(t) \leq \lambda(t) E(t), & \forall t \geq 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Alors E vérifie, pour tout $t \geq 0$, les estimations suivantes :

$$E(t) \leq \frac{E(0)}{w(0)} w(h(t)) e^{\check{\lambda}(t)-\check{\lambda}(h(t))} e^{-\int_0^{h(t)} w(\tau) d\tau} \quad \text{si} \quad r = 0; \tag{2.14}$$

$$E(t) \leq w(h(t)) e^{\check{\lambda}(t)-\check{\lambda}(h(t))} \left(\left(\frac{w(0)}{E(0)} \right)^r + r \int_0^{h(t)} (w(\tau))^{r+1} \, d\tau \right)^{\frac{-1}{r}} \quad \text{si} \quad r > 0 \tag{2.15}$$

où

$$\check{\lambda}(t) = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau, \quad h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \in \left[0, D^{-1}(\frac{\alpha^r}{w})\right] \\ g^{-1}(t) = K^{-1}(D(t)) & \text{si} \quad t \in \left]D^{-1}(\frac{\alpha^r}{w}), +\infty\right[\end{cases}$$

avec $\alpha = \dfrac{1}{E(0)}$ et $w = \dfrac{1}{a}$ et K, D sont les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$K(t) = D(t) + e^{(r+1)\check{\lambda}(t)} \left(rt + \frac{\alpha^r}{w} \right), \quad D(t) = \int_0^t e^{(r+1)\check{\lambda}(\tau)} d\tau.$$

Lemme 2.2.2 (A. Guesmia [1]) :

Sous les hypothèses du Lemme 2.2.1, E vérifie pour tout $t > 1$, les estimations suivantes :

$$E(t) \leq \frac{E(0)}{w(0)} e^{\check{\lambda}(t)} \left(\int_{t-1}^t e^{\check{\lambda}(\tau)} d\tau \right)^{-1} e^{-\int_0^{t-1} w(\tau) d\tau} \quad \text{si} \quad r = 0; \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} E(t) \leq e^{\check{\lambda}(t)} & \left(\int_{t-1}^t e^{(r+1)\check{\lambda}(t)} d\tau \right)^{\frac{-1}{r+1}} \times \\ & \left(\left(\frac{w(0)}{E(0)} \right)^r + r \int_0^{t-1} (w(\tau)))^{r+1} d\tau \right)^{\frac{-1}{r(r+1)}} \quad \text{si} \quad r > 0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Lemme 2.2.3 (A. Guesmia [1]) :

Sous les hypothèses du Lemme 2.2.1 et si $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $a(s) = c_1 e^{-c_2 s}$ avec $c_1 > 0$ et $c_2 \in \mathbb{R}$, alors il existe une constante $c > 0$ telle que E vérifie, pour tout $t > 1$, les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} E(t) &\leq ce^{-\frac{1}{c_1}t} && \text{si} \quad r = c_2 = 0; \\ E(t) &\leq ce^{-\frac{e^{-c_2}}{c_1 c_2} e^{c_2 t}} && \text{si} \quad r = 0 \text{ et } c_2 \neq 0; \\ E(t) &\leq ct^{\frac{-1}{r(r+1)}} && \text{si} \quad r > 0 \text{ et } c_2 = 0; \\ E(t) &\leq c \left(\frac{e^{(r+1)c_2(t-1)} - 1}{c_2} \right)^{\frac{-1}{r(r+1)}} && \text{si} \quad r > 0 \text{ et } c_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Lemme 2.2.4 (A. Guesmia [1]) :

Sous les hypothèses du Lemme 2.2.1 et si $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $a(s) = c_1(s+1)^{-c_2}$ avec $c_1 > 0$ et $c_2 \in \mathbb{R}$, alors il existe une constante $c > 0$ telle que E vérifie, pour tout $t > 1$, les estimations suivantes :

$$\begin{array}{lcll}
E(t) & \leq & ct^{-\frac{1}{c_1}} & \text{si} \quad r = 0 \text{ et } c_2 = -1; \\
E(t) & \leq & ce^{\frac{-1}{c_1(c_2+1)}t^{c_2+1}} & \text{si} \quad r = 0 \text{ et } c_2 \neq -1; \\
E(t) & \leq & c(\ln(t))^{\frac{-1}{r(r+1)}} & \text{si} \quad r > 0 \text{ et } c_2 = \dfrac{-1}{r+1}; \\
E(t) & \leq & c\left(\dfrac{t^{c_2(r+1)+1}-1}{c_2(r+1)+1}\right)^{\frac{-1}{r(r+1)}} & \text{si} \quad r > 0 \text{ et } c_2 \neq \dfrac{-1}{r+1}.
\end{array}$$

Lemme 2.2.5 (A. Guesmia [1]) :

Sous les hypothèses du Lemme 2.2.1 et si $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $a(s) = c_1(\ln(s+2))^{-c_2}$ avec $c_1 > 0$ et $c_2 \in \mathbb{R}$, alors il existe une constante $c > 0$ telle que E vérifie, pour tout $t > 1$, les estimations suivantes :

$$\begin{array}{lcll}
E(t) & \leq & c(\ln(t+1))^{\frac{-2}{c_1}} & \text{si} \quad r = 0 \text{ et } c_2 = -1; \\
E(t) & \leq & ce^{-\frac{-2}{c_1(c_2+1)}(\ln(t+1))^{c_2+1}} & \text{si} \quad r = 0 \text{ et } c_2 \neq -1; \\
E(t) & \leq & c(\ln(\ln(t+1)))^{\frac{-1}{r(r+1)}} & \text{si} \quad r > 0 \text{ et } c_2 = \dfrac{-1}{r+1}; \\
E(t) & \leq & c\left(\dfrac{(\ln(t+1))^{c_2(r+1)+1}-1}{c_2(r+1)+1}\right)^{\frac{-1}{r(r+1)}} & \text{si} \quad r > 0 \text{ et } c_2 \neq \dfrac{-1}{r+1}.
\end{array}$$

Lemme 2.2.6 (A. Guesmia [2]) :

Soient $E : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction dérivable, $a_3 \in \mathbb{R}^+$, $a_1, a_2 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^*_+$ et $\lambda : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ trois fonctions continues. Supposons qu'il existe $r, p \geq 0$ tels que

$$a_3(r+1)\sup_{t\geq 0}\{\lambda(t)\} < 1$$

et, pour tout $0 \leq s \leq T < +\infty$,

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\int_s^T E^{r+1}(t)dt & \leq & a_1(s)E(s) + a_2(s)E^{p+1}(s) + a_3E^{r+1}(T), \quad \forall 0 \leq s \leq T \\
E'(t) & \leq & \lambda(t)E(t), \quad \forall t \geq 0.
\end{array}\right. \tag{2.18}$$

Alors E vérifie (2.14) et (2.15) où

$$\check{\lambda}(t) = \int_0^1 \lambda(\tau)d\tau, \quad w = \frac{1}{a}, \quad a = \frac{a_1(s) + a_2(s)(d(s))^p + a_3(s)(d(s))^r}{1 - a_3(r+1)\sup\limits_{t\geq 0}\{\lambda(t)\}},$$

$$d(s) = \min\left\{E(0)e^{\check{\lambda}(s)}, \left(\frac{b(0)E(0)}{f_0(s)}\right)^{\frac{1}{r+1}}\right\}, \quad \forall s \geq 0 \text{ et } \quad f_0(s) = e^{-(r+1)\check{\lambda}(s)}\int_0^s e^{(r+1)\check{\lambda}(\tau)}d\tau.$$

Lemme 2.2.7 (A. Guesmia [1]) :

Soient $E : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction dérivable, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+^*$ et $a_3, r, p, \lambda \in \mathbb{R}^+$.
Supposons que

$$\begin{cases} \int_s^T E^{r+1}(t)dt \leq a_1(s)E(s) + a_2E^{p+1}(s) + a_3E^{r+1}(T), \quad 0 \leq s \leq T \\ \qquad E'(t) \leq \lambda(t)E(t), \qquad \forall t \geq 0. \end{cases}$$

Si $a_3\lambda(r+1) < 1$, alors il existe deux constantes strictement positives w et c telles que, pour tout $t \geq 0$,

$$E(t) \leq ce^{-wt} \qquad \text{si} \qquad r = 0; \tag{2.19}$$

$$E(t) \leq c(1+t)^{\frac{-1}{r}} \text{ si } r > 0 \text{ et } \lambda = 0; \tag{2.20}$$

$$E(t) \leq c(1+t)^{\frac{-1}{r(r+1)}} \text{ si } r > 0 \text{ et } \lambda > 0. \tag{2.21}$$

Lemme 2.2.8 (A. Guesmia [1]) :

Soient $E : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction dérivable, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction convexe et strictement croissante vérifiant : $\varphi(0) = 0$.
Supposons que

$$\begin{cases} \int_s^{+\infty} \varphi(E(t))dt \leq E(s) \text{ si } s \geq 0 \\ \quad E'(t) \leq \lambda E(t) \quad \text{si} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Alors E vérifie l'estimation suivante :

$$E(t) \leq g^{-1}\left(e^{\lambda(t-h(t))}\varphi\left(\psi^{-1}\left(h(t) + \psi\left(E(0)\right)\right)\right)\right), \quad \forall t > T_0 \tag{2.22}$$

où

$$\psi(t) = \int_t^1 \frac{1}{\varphi(s)}ds, \quad \forall t > 0, \quad g(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si} \quad \lambda = 0, \\ \int_0^t \frac{\varphi(s)}{s}ds & \text{si} \quad \lambda > 0, \end{cases} \quad \forall t \geq 0,$$

$$h(t) = \begin{cases} Z^{-1}(D(t)), & \forall t > T_0 \\ 0, & t \in [0, T_0] \end{cases} \qquad \text{avec} \;\; T_0 = D^{-1}\left(\frac{E(0)}{\varphi(E(0))}\right),$$

et

$$\begin{cases} Z(t) = D(t) + \dfrac{\psi^{-1}(t + \psi(E(0)))}{\varphi(\psi^{-1}(t + \psi(E(0))))} e^{\lambda t}, & \forall t \geq 0 \\ D(t) = \int_0^t e^{\lambda s} ds, & \forall t \geq 0. \end{cases} \tag{2.23}$$

Remarque : Pour la démonstration de ces lemmes, voir [1].

Chapitre 3

Stabilisation non dissipative du système (P)

Hypothèses : Dans l'étude du système de Timoshenko (P), nous considérons les hypothèses suivantes :

H1) $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue croissante tel que :

$$\exists c_1, c_2 > 0 : \quad c_2|s| \leq |h(s)| \leq c_1|s|, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Remarque : L'hypothèse (H1) $\Longrightarrow$ $sh(s) \geq 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$

3.1 Existence et unicité de solution du système (P)

Proposition 3.1.1 :

Soient $(\varphi_0, \varphi_1), (\psi_0, \psi_1) \in H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$. Alors le système (P) admet une solution globale (faible) unique vérifiant :

$$\varphi\ ,\ \psi \in C\left(\mathbb{R}_+; H_0^1(0,1)\right) \bigcap C^1\left(\mathbb{R}_+; L^2(0,1)\right). \tag{3.1}$$

Si

$$(\varphi_0, \varphi_1), (\psi_0, \psi_1) \in \left(H^2(0,1) \bigcap H_0^1(0,1)\right) \times H_0^1(0,1),$$

alors la solution satisfait (dite forte) :

$$\varphi\ ,\ \psi \in L^\infty\left(\mathbb{R}_+; H^2(0,1) \bigcap H_0^1(0,1)\right) \bigcap W^{1,\infty}\left(\mathbb{R}_+; H_0^1(0,1)\right) \bigcap W^{2,\infty}\left(\mathbb{R}_+; L^2(0,1)\right).$$

Remarque : Si h est linéaire et

$$(\varphi_0, \varphi_1)\ ,\ (\psi_0, \psi_1) \in \left(H^2(0,1) \bigcap\ H_0^1(0,1)\right) \times H_0^1(0,1)$$

alors

$$\varphi\ ,\ \psi \in C\left(\mathbb{R}_+; H^2(0,1) \bigcap H_0^1(0,1)\right) \bigcap C^1\left(\mathbb{R}_+; H_0^1(0,1)\right) \bigcap C^2\left(\mathbb{R}_+; L^2(0,1)\right). \tag{3.2}$$

Remarque : Ce résultat peut être prouvé en utilisant des arguments standards de la méthode de semi-groupes non linéaire.
Il est important de montrer ces résultats d'existence de la solution en ecrivant (P) sous la forme (1.3), en montrant que A est maximal monotone et en appliquant le Théorème 1.2.4.

Maintenant ; nous présentons la fonction d'énergie définie par :

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\varphi_t^2 + \psi_t^2 + \psi_x^2 + (\varphi_x + \psi)^2\right) dx. \tag{3.3}$$

Le résultat de stabilité de notre travail est le suivant :

Théorème 3.1.2 :

Supposons que $|k-1|$ est assez petit. Soient $(\varphi_0, \varphi_1), (\psi_0, \psi_1) \in H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$. Alors il existe deux constantes positives c et w telles que la solution de (P) satisfait :

$$E(t) \leq ce^{-wt}, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.4}$$

3.2 Stabilisation de système (P) :

Dans cette section nous prouvons notre résultat principal. Pour cela, nous allons démontrer plusieurs lemmes.

Lemme 3.2.1 :

Soit (φ, ψ) une solution de (P), alors l'énergie satisfait :

$$E'(t) = -\int_0^1 \psi_t h(\psi_t)dx + (1-k)\int_0^1 (\varphi_x + \psi)\,\psi_t dx \tag{3.5}$$

Donc

$$E'(t) \leq |1-k|\, E(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve : En multipliant les deux équations de (P) par φ_t et ψ_t, respectivement, intégrant sur $(0,1)$, utilisant l'intégration par partie et la formule de Green, on obtient

$$\begin{cases} \left(\varphi_{tt} - (\varphi_x + \psi)_x\right)\varphi_t = 0 \\ \left(\psi_{tt} - \psi_{xx} + k\left(\varphi_x + \psi\right) + h(\psi_t)\right)\psi_t = 0, \end{cases}$$

Donc

$$\int_0^1 (\varphi_{tt} - (\varphi_x + \psi)_x)\varphi_t dx + \int_0^1 (\psi_{tt} - \psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + h(\psi_t))\psi_t dx = 0$$

$$\Longrightarrow \int_0^1 \varphi_{tt}\varphi_t dx - \int_0^1 \varphi_{xx}\varphi_t dx - \int_0^1 \psi_x\varphi_t dx + \int_0^1 \psi_{tt}\psi_t dx - \int_0^1 \psi_{xx}\psi_t dx + k\int_0^1 (\varphi_x + \psi)\psi_t dx$$

$$+\int_0^1 \psi_t h(\psi_t)dx = 0$$

$$\Longrightarrow \int_0^1 \varphi_{tt}\varphi_t dx - \int_0^1 \varphi_{xx}\varphi_t dx - \int_0^1 \psi_x\varphi_t dx + \int_0^1 \psi_{tt}\psi_t dx - \int_0^1 \psi_{xx}\psi_t dx + k\int_0^1 (\varphi_x + \psi)\psi_t dx$$

$$+\int_0^1 \psi_t h(\psi_t)dx + \int_0^1 (\varphi_x + \psi)\psi_t dx - \int_0^1 (\varphi_x + \psi)\psi_t dx = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 (\varphi_t^2)_t dx + \frac{1}{2}\int_0^1 (\psi_t^2)_t dx + \int_0^1 \varphi_x\varphi_{xt} dx + \int_0^1 \psi\varphi_{tx} dx + (k-1)\int_0^1 (\varphi_x + \psi)\psi_t dx$$

$$+\int_0^1 \psi_x\psi_{xt} dx + \int_0^1 \psi_t h(\psi_t)dx + \int_0^1 \varphi_x\psi_t dx + \int_0^1 \psi\psi_t dx = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 (\varphi_t^2)_t dx + \frac{1}{2}\int_0^1 (\psi_t^2)_t dx + \frac{1}{2}\int_0^1 (\varphi_x^2)_t dx + \frac{1}{2}\int_0^1 (\psi_x^2)_t dx + \int_0^1 \psi_t h(\psi_t) dx$$

$$+ \int_0^1 (\psi\varphi_{tx} + \varphi_x\psi_t) dx + (k-1)\int_0^1 (\varphi_x + \psi)\psi_t dx + \frac{1}{2}\int_0^1 (\psi^2)_t dx = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 (\varphi_t^2)_t dx + \frac{1}{2}\int_0^1 (\psi_t^2)_t dx + \frac{1}{2}\int_0^1 (\varphi_x^2)_t dx + \frac{1}{2}\int_0^1 (\psi_x^2)_t dx + \frac{1}{2}\int_0^1 (\psi^2)_t dx$$

$$+ \int_0^1 (\varphi_x\psi)_t dx + (k-1)\int_0^1 (\varphi_x + \psi)\psi_t dx + \int_0^1 \psi_t h(\psi_t) dx = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 (\varphi_t^2 + \psi_t^2 + \varphi_x^2 + \psi_x^2 + \psi^2 + 2\varphi_x\psi)_t dx = -\int_0^1 \psi_t h(\psi_t) dx + (1-k)\int_0^1 (\varphi_x + \psi)\psi_t dx$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 (\varphi_t^2 + \psi_t^2 + +\psi_x^2 + (\varphi_x + \psi)^2)_t dx = -\int_0^1 \psi_t h(\psi_t) dx + (1-k)\int_0^1 (\varphi_x + \psi)\psi_t dx.$$

On pose

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^1 (\varphi_t^2 + \psi_t^2 + \psi_x^2 + (\varphi_x + \psi)^2) dx,$$

et on a

$$E'(t) = -\int_0^1 \psi_t h(\psi_t) dx + (1-k)\int_0^1 (\varphi_x + \psi)\,\psi_t dx.$$

On plus et en utilisant l'inégalité de Young et le fait que $sh(s) \geq 0,\ \forall s \in \mathbb{R}$

$$E'(t) \leq -\int_0^1 \psi_t h(\psi_t) dx + \frac{|1-k|}{2}\int_0^1 \left((\varphi_x + \psi)^2 + \psi_t^2\right) dx$$

$$\leq \frac{|1-k|}{2}\int_0^1 \left((\varphi_x + \psi)^2 + \psi_t^2\right) dx \text{ (car } sh(s) \geq 0, \forall s \in \mathbb{R})$$

$$\leq \frac{|1-k|}{2}\int_0^1 \left((\varphi_x + \psi)^2 + \psi_t^2 + \psi_x^2 + \varphi_t^2\right) dx$$

$$\leq |1-k|\, E(t).$$

Et par conséquent

$$E'(t) \leq |1-k|\, E(t) \Longrightarrow \left(e^{-|1-k|t} E(t)\right)' \leq 0$$

$$\Longrightarrow e^{-|1-k|t} E(t) - E(0) \leq 0$$

$$\Longrightarrow E(t) \leq E(0) e^{|1-k|t}.$$

Remarque : Nous obtenons donc (3.5) pour n'importe quelle solution régulière. Cette égalité reste valable pour toute solution faible (par arguments simples de densité).

Pour montrer la stabilité exponentielle, on va construire une fonction de Lypunov F équivalente à E vérifiant :

$$\exists \lambda > 0 \text{ tel que } \; F'(t) \leq -\lambda F(t), \;\; \forall t \geq 0.$$

Pour cela, nous allons définir plusieurs fonctions qui nous permetterant d'obtenir des estimations nécessaires.

Dans toute la suite, c désigne une constante positive générique (qui peut changer d'une ligne à une autre) mais qui ne dépend pas de k.

Lemme 3.2.2 :

La fonction J définie par :

$$J(t) := -\int_0^1 (\psi\psi_t + \varphi\varphi_t) dx$$

satisfait l'estimation :

$$J'(t) \leq -\int_0^1 (\psi_t^2 + \varphi_t^2) dx - (1-k)\int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi) dx + \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx \tag{3.6}$$

$$+c\int_0^1 \psi_x^2 dx + c\int_0^1 h^2(\psi_t) dx.$$

Preuve : L'exploitation des équations (P) implique

$$J'(t) = -\int_0^1 (\psi_t^2 + \psi\psi_{tt} + \varphi_t^2 + \varphi\varphi_{tt})dx$$

$$= -\int_0^1 (\psi_t^2 + \varphi_t^2)dx - \int_0^1 \psi(\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) - h(\psi_t))dx - \int_0^1 \varphi(\varphi_x + \psi)_x dx$$

$$= -\int_0^1 (\psi_t^2 + \varphi_t^2)dx - \int_0^1 \psi\psi_{xx}dx + k\int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi)dx + \int_0^1 \psi h(\psi_t)dx$$

$$-\int_0^1 \varphi\varphi_{xx}dx - \int_0^1 \varphi\psi_x dx.$$

En utilisant la formule de Green, on a :

$$J'(t) = -\int_0^1 (\psi_t^2 + \varphi_t^2)dx + \int_0^1 \psi_x^2 dx - (1-k)\int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi)dx + \int_0^1 \psi h(\psi_t)dx$$

$$+\int_0^1 \varphi_x^2 dx - \int_0^1 \varphi\psi_x dx + \int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi)dx$$

$$= -\int_0^1 (\psi_t^2 + \varphi_t^2)dx + \int_0^1 \psi_x^2 dx - (1-k)\int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi)dx + \int_0^1 \psi h(\psi_t)dx$$

$$+\int_0^1 \varphi_x^2 dx - \int_0^1 \varphi\psi_x dx + \int_0^1 \psi\varphi_x dx + \int_0^1 \psi^2 dx$$

$$= -\int_0^1 (\psi_t^2 + \varphi_t^2)dx + \int_0^1 \psi_x^2 dx - (1-k)\int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi)dx + \int_0^1 \psi h(\psi_t)dx$$

$$+\int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx.$$

D'après l'inégalité de Young et l'inégalité de Poincaré :

$$J'(t) \leq -\int_0^1 (\psi_t^2 + \varphi_t^2)dx - (1-k)\int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi)dx + \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx$$

$$+c\int_0^1 \psi_x^2 dx + c\int_0^1 h^2(\psi_t)dx.$$

Lemme 3.2.3 :

La fonction K définie par :

$$K(t) := \int_0^1 \psi_t(\varphi_x + \psi)dx + \int_0^1 \psi_x \varphi_t dx$$

satisfait l'estimation :

$$K'(t) \leq [\varphi_x \psi_x]_{x=0}^{x=1} + (1-k)\int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx - (1-\varepsilon)\int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx \tag{3.7}$$

$$+ \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{c}{\varepsilon}\int_0^1 h^2(\psi_t)dx$$

pour tout $0 < \varepsilon < 1$.

Preuve : En exploitant les équations de (P) et on répétant le même procédé, on a :

$$K'(t) = \int_0^1 \psi_{tt}(\varphi_x + \psi)dx + \int_0^1 \psi_t(\varphi_x + \psi)_t dx + \int_0^1 \psi_{xt}\varphi_t dx + \int_0^1 \psi_x \varphi_{tt} dx$$

$$= \int_0^1 (\varphi_x + \psi)(\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) - h(\psi_t))dx + \int_0^1 \psi_t(\varphi_x + \psi)_t dx$$

$$+ \int_0^1 \psi_{xt}\varphi_t dx + \int_0^1 \psi_x(\varphi_x + \psi)_x dx$$

$$= \int_0^1 (\varphi_x + \psi)\psi_{xx} dx - \int_0^1 k(\varphi_x + \psi)^2 dx - \int_0^1 h(\psi_t)(\varphi_x + \psi)dx + \int_0^1 \psi_t^2 dx$$

$$+ \int_0^1 \psi_t \varphi_{xt} dx + \int_0^1 \psi_{xt}\varphi_t dx + \int_0^1 \psi_x \varphi_{xx} dx + \int_0^1 \psi_x^2 dx$$

$$= \int_0^1 \psi_x^2 dx + \int_0^1 \psi\psi_{xx} dx - \int_0^1 k(\varphi_x + \psi)^2 dx - \int_0^1 h(\psi_t)(\varphi_x + \psi)dx$$

$$+ \int_0^1 \psi_t^2 dx + \int_0^1 \psi_t \varphi_{xt} dx + \int_0^1 \psi_{xt}\varphi_t dx + \int_0^1 \psi_x \varphi_{xx} dx + \int_0^1 \varphi_x \psi_{xx} dx$$

$$= \int_0^1 \psi_x^2 dx - \int_0^1 \psi_x^2 dx - \int_0^1 k(\varphi_x + \psi)^2 dx - \int_0^1 h(\psi_t)(\varphi_x + \psi)dx$$

$$+\int_0^1 \psi_t^2 dx + \int_0^1 \psi_t \varphi_{xt} dx + \int_0^1 \psi_{xt}\varphi_t dx + \int_0^1 (\varphi_x \psi_{xx} + \varphi_{xx}\psi_x) dx$$

$$= \int_0^1 (\varphi_x\psi_x)_x dx + (1-k)\int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx - \int_0^1 h(\psi_t)(\varphi_x + \psi) dx + \int_0^1 \psi_t^2 dx$$

$$+\int_0^1 (\varphi_t\psi_t)_x dx - \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx$$

$$= [\varphi_x\psi_x]_{x=0}^{x=1} + (1-k)\int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx - \int_0^1 h(\psi_t)(\varphi_x + \psi) dx + \int_0^1 \psi_t^2 dx$$

$$-\int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx.$$

Et en utilisant l'inégalité de Young :

$$K'(t) \leq [\varphi_x\psi_x]_{x=0}^{x=1} + (1-k)\int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{c}{\varepsilon}\int_0^1 h^2(\psi_t) dx$$

$$+\int_0^1 \psi_t^2 dx - \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx$$

$$\leq [\varphi_x\psi_x]_{x=0}^{x=1} + (1-k)\int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx - (1-\varepsilon)\int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx$$

$$+\int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{c}{\varepsilon}\int_0^1 h^2(\psi_t) dx.$$

Lemme 3.2.4 :

Soit $m \in C^1([0,1])$ une fonction vérifiant $m(0) = -m(1) = 2$ (on peut prendre $m(x) = 2 - 4x$). Il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 m(x)\psi_t\psi_x dx \leq -\left(\psi_x^2(1,t) + \psi_x^2(0,t)\right) + (1-k)\int_0^1 \psi_x(\varphi_x + \psi) dx \tag{3.8}$$

$$+\varepsilon\int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + c\int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{c}{\varepsilon}\int_0^1 \psi_x^2 dx + c\int_0^1 h^2(\psi_t) dx.$$

et

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 m(x)\varphi_t\varphi_x dx \leq -\left(\varphi_x^2(1,t)+\varphi_x^2(0,t)\right)+c\int_0^1\left(\varphi_t^2+\varphi_x^2+\psi_x^2\right)dx. \tag{3.9}$$

Preuve : En exploitant les équations de (P) et en répétant le même procédé, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_0^1 m(x)\psi_t\psi_x dx &= \int_0^1 m(x)(\psi_{tt}\psi_x+\psi_t\psi_{xt})dx \\
&= \int_0^1 m(x)\psi_{tt}\psi_x dx+\int_0^1 m(x)\psi_t\psi_{xt}dx \\
&= \int_0^1 m(x)\psi_x(\psi_{xx}-k(\varphi_x+\psi)-h(\psi_t))dx+\int_0^1 m(x)\psi_t\psi_{xt}dx \\
&= \int_0^1 m(x)\psi_x\psi_{xx}dx+(1-k)\int_0^1 m(x)\psi_x(\varphi_x+\psi)dx-\int_0^1 m(x)\psi_x h(\psi_t)dx \\
&\quad +\int_0^1 m(x)\psi_t\psi_{xt}dx-\int_0^1 m(x)\psi_x(\varphi_x+\psi)dx \\
&= \left[\frac{1}{2}m(x)\psi_x^2\right]_{x=0}^{x=1}-\frac{1}{2}\int_0^1 m'(x)\psi_x^2dx+\left[\frac{1}{2}m(x)\psi_t^2\right]_{x=0}^{x=1}-\frac{1}{2}\int_0^1 m'(x)\psi_t^2dx \\
&\quad +(1-k)\int_0^1 m(x)\psi_x(\varphi_x+\psi)dx-\int_0^1 m(x)\psi_x h(\psi_t)dx-\int_0^1 m(x)\psi_x(\varphi_x+\psi)dx \\
&= \frac{1}{2}\left(m(1)\psi_x^2(1,t)-m(0)\psi_x^2(0,t)\right)-\frac{1}{2}\int_0^1 m'(x)\psi_x^2dx-\frac{1}{2}\int_0^1 m'(x)\psi_t^2dx \\
&\quad +(1-k)\int_0^1 m(x)\psi_x(\varphi_x+\psi)dx-\int_0^1 m(x)\psi_x h(\psi_t)dx-\int_0^1 m(x)\psi_x(\varphi_x+\psi)dx \\
&= \frac{1}{2}\left(-2\psi_x^2(1,t)-2\psi_x^2(0,t)\right)-\frac{1}{2}\int_0^1 m'(x)\psi_x^2dx-\frac{1}{2}\int_0^1 m'(x)\psi_t^2dx
\end{aligned}$$

$$+(1-k)\int_0^1 m(x)\psi_x(\varphi_x+\psi)dx-\int_0^1 m(x)\psi_x h(\psi_t)dx-\int_0^1 m(x)\psi_x(\varphi_x+\psi)dx$$

$$=-\left(\psi_x^2(1,t)+\psi_x^2(0,t)\right)-\frac{1}{2}\int_0^1 m'(x)\psi_x^2 dx-\frac{1}{2}\int_0^1 m'(x)\psi_t^2 dx$$

$$+(1-k)\int_0^1 m(x)\psi_x(\varphi_x+\psi)dx-\int_0^1 m(x)\psi_x(\varphi_x+\psi)dx-\int_0^1 m(x)\psi_x h(\psi_t)dx$$

$$\leq-\left(\psi_x^2(1,t)+\psi_x^2(0,t)\right)-\frac{1}{2}\int_0^1 m'(x)\psi_x^2 dx-\frac{1}{2}\int_0^1 m'(x)\psi_t^2 dx+\frac{c}{\varepsilon}\int_0^1 \psi_x^2 dx$$

$$+(1-k)\int_0^1 m(x)\psi_x(\varphi_x+\psi)dx+\varepsilon\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2 dx+c\int_0^1 h^2(\psi_t)dx$$

$$\leq-\left(\psi_x^2(1,t)+\psi_x^2(0,t)\right)+(1-k)\int_0^1 \psi_x(\varphi_x+\psi)dx+\varepsilon\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2 dx$$

$$+c\int_0^1 \psi_t^2 dx+\frac{c}{\varepsilon}\int_0^1 \psi_x^2 dx+c\int_0^1 h^2(\psi_t)dx.$$

De même

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 m(x)\varphi_t\varphi_x dx=\int_0^1 m(x)(\varphi_{tt}\varphi_x+\varphi_t\varphi_{xt})dx$$

$$=\int_0^1 m(x)\varphi_{tt}\varphi_x dx+\int_0^1 m(x)\varphi_t\varphi_{xt}dx$$

$$=\int_0^1 m(x)\varphi_x(\varphi_x+\psi)_x dx+\int_0^1 m(x)\varphi_t\varphi_{xt}dx$$

$$=\int_0^1 m(x)\varphi_x\varphi_{xx}dx+\int_0^1 m(x)\varphi_x\psi_x dx+\int_0^1 m(x)\varphi_t\varphi_{xt}dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}m(x)\varphi_x^2\right]_{x=0}^{x=1}-\frac{1}{2}\int_0^1 m'(x)\varphi_x^2 dx+\int_0^1 m(x)\varphi_x\psi_x dx$$

$$+\left[\frac{1}{2}m(x)\varphi_t^2\right]_{x=0}^{x=1}-\frac{1}{2}\int_0^1 m'(x)\varphi_t^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(m(1)\varphi_x^2(1,t)-m(0)\varphi_x^2(0,t)\right)-\frac{1}{2}\int_0^1 m'(x)\varphi_x^2dx$$

$$+\int_0^1 m(x)\varphi_x\psi_xdx-\frac{1}{2}\int_0^1 m'(x)\varphi_t^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(-2\varphi_x^2(1,t)-2\varphi_x^2(0,t)\right)-\frac{1}{2}\int_0^1 m'(x)\varphi_x^2dx$$

$$+\int_0^1 m(x)\varphi_x\psi_xdx-\frac{1}{2}\int_0^1 m'(x)\varphi_t^2dx$$

$$=-\left(\varphi_x^2(1,t)+\varphi_x^2(0,t)\right)-\frac{1}{2}\int_0^1 m'(x)\varphi_x^2dx-\frac{1}{2}\int_0^1 m'(x)\varphi_t^2dx$$

$$+\int_0^1 m(x)\varphi_x\psi_xdx$$

$$\leq-\left(\varphi_x^2(1,t)+\varphi_x^2(0,t)\right)+c\int_0^1(\varphi_x^2+\psi_x^2+\varphi_t^2)dx.$$

Lemme 3.2.5 :

La fonction L définie par :

$$L(t):=K(t)+\frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1 m(x)\psi_t\psi_xdx+\varepsilon\int_0^1 m(x)\varphi_t\varphi_xdx,$$

où $\varepsilon\in\,]0,1[$, satisfait l'estimation :

$$L'(t)\leq-\left(\frac{3}{4}-\varepsilon c\right)\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2dx+(1-k)\int_0^1(\varphi_x+\psi)\left(\varphi_x+\psi+\frac{1}{4\varepsilon}\psi_x\right)dx \tag{3.10}$$

$$+\frac{c}{\varepsilon}\int_0^1\psi_t^2dx+\frac{c}{\varepsilon^2}\int_0^1\psi_x^2dx+\varepsilon c\int_0^1\varphi_t^2dx+\frac{c}{\varepsilon}\int_0^1 h^2(\psi_t)dx.$$

Preuve : Lemme 3.2.3, Lemme 3.2.4 et l'inegalité de Young impliquent

$$L'(t) = K'(t) + \frac{1}{4\varepsilon}\frac{d}{dt}\int_0^1 m(x)\psi_t\psi_x dx + \varepsilon\frac{d}{dt}\int_0^1 m(x)\varphi_t\varphi_x dx$$

$$\leq [\varphi_x\psi_x]_{x=0}^{x=1} + (1-k)\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2 dx - (1-\varepsilon)\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2 dx + \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{c}{\varepsilon}\int_0^1 h^2(\psi_t)$$

$$+\frac{1}{4\varepsilon}\left[-\left(\psi_x^2(1,t)+\psi_x^2(0,t)\right) + (1-k)\int_0^1 \psi_x(\varphi_x+\psi)dx + \varepsilon\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2 dx + c\int_0^1 \psi_t^2 dx\right.$$

$$\left.+\frac{c}{\varepsilon}\int_0^1 \psi_x^2 dx + c\int_0^1 h^2(\psi_t)dx\right] + \varepsilon\left[-\left(\varphi_x^2(1,t)+\varphi_x^2(0,t)\right) + c\int_0^1 (\varphi_x^2+\psi_x^2+\varphi_t^2)dx\right]$$

$$\leq [\varphi_x\psi_x]_{x=0}^{x=1} - \frac{1}{4\varepsilon}\left(\psi_x^2(1,t)+\psi_x^2(0,t)\right) - \varepsilon\left(\varphi_x^2(1,t)+\varphi_x^2(0,t)\right) + \varepsilon c\int_0^1 (\varphi_x^2+\varphi_t^2)dx$$

$$+(1-k)\int_0^1 \left[(\varphi_x+\psi)^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\psi_x(\varphi_x+\psi)\right]dx - \left(1-\varepsilon-\frac{\varepsilon}{4\varepsilon}\right)\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2 dx$$

$$+\frac{c}{4\varepsilon}\int_0^1 \psi_t^2 dx + \left(\frac{c}{4\varepsilon^2}+\varepsilon c\right)\int_0^1 \psi_x^2 dx + \left(\frac{c}{\varepsilon}+\frac{c}{4\varepsilon}\right)\int_0^1 h^2(\psi_t).$$

Or

$$\varphi_x^2 \leq 2(\varphi_x+\psi)^2 + 2\psi^2,$$

et

$$\varphi_x\psi_x \leq \varepsilon\varphi_x^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\psi_x^2\ ,$$

et d'après l'inégalité de Poincaré, on trouve

$$L'(t) \leq \varepsilon\left(\varphi_x^2(1,t)+\varphi_x^2(0,t)\right)+\frac{1}{4\varepsilon}\left(\psi_x^2(1,t)+\psi_x^2(0,t)\right)-\frac{1}{4\varepsilon}\left(\psi_x^2(1,t)+\psi_x^2(0,t)\right)$$

$$-\varepsilon\left(\varphi_x^2(1,t)+\varphi_x^2(0,t)\right)+(1-k)\int_0^1(\varphi_x+\psi)\left(\varphi_x+\psi+\frac{1}{4\varepsilon}\psi_x\right)dx$$

$$-\left(1-\varepsilon-\frac{1}{4}\right)\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2dx+\frac{c}{4\varepsilon}\int_0^1\psi_t^2dx+\varepsilon c\int_0^1\varphi_t^2dx+2\varepsilon c\int_0^1\psi^2dx$$

$$+\left(\frac{c}{4\varepsilon^2}+\varepsilon c\right)\int_0^1\psi_x^2dx+2\varepsilon c\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2dx+\frac{c}{\varepsilon}\int_0^1 h^2(\psi_t)dx$$

$$\leq-\left(\frac{3}{4}-\varepsilon c\right)\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2dx+(1-k)\int_0^1(\varphi_x+\psi)\left(\varphi_x+\psi+\frac{1}{4\varepsilon}\psi_x\right)dx$$

$$+\frac{c}{\varepsilon}\int_0^1\psi_t^2dx+\frac{c}{\varepsilon^2}\int_0^1\psi_x^2dx+\varepsilon c\int_0^1\varphi_t^2dx+\frac{c}{\varepsilon}\int_0^1 h^2(\psi_t)dx.$$

Lemme 3.2.6 :

Soit la fonction L_1 définie par :

$$L_1(t) := L(t)+2c\varepsilon J(t).$$

Alors nous avons l'inégalité suivante :

$$L_1'(t) \leq -\frac{1}{2}\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2dx+c|1-k|\int_0^1(\varphi_x^2+\psi_x^2)dx+c\int_0^1\psi_t^2dx \tag{3.11}$$

$$+c\int_0^1\psi_x^2dx-c\int_0^1\varphi_t^2dx+c\int_0^1 h^2(\psi_t)dx.$$

Preuve :

$$L_1(t) = L(t)+2c\varepsilon J(t) \Longrightarrow L_1'(t) = L'(t)+2c\varepsilon J'(t).$$

Les Lemme 3.2.5 et 3.2.2 impliquent

$$L_1'(t) \leq -\left(\frac{3}{4}-\varepsilon c\right)\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2dx+(1-k)\int_0^1(\varphi_x+\psi)\left(\varphi_x+\psi+\frac{1}{4\varepsilon}\psi_x\right)dx+\frac{c}{\varepsilon}\int_0^1\psi_t^2dx$$

$$+\frac{c}{\varepsilon^2}\int_0^1 \psi_x^2 dx + \varepsilon c\int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{c}{\varepsilon}\int_0^1 h^2(\psi_t)dx + 2c\varepsilon\left[-\int_0^1 (\psi_t^2+\varphi_t^2)dx\right.$$

$$\left.+\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2 dx + c\int_0^1 \psi_x^2 dx - (1-k)\int_0^1 \psi(\varphi_x+\psi)dx + c\int_0^1 h^2(\psi_t)dx\right]$$

$$\leq -\left(\frac{3}{4}-\varepsilon c - 2c\varepsilon\right)\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2 dx + (1-k)\int_0^1 (\varphi_x+\psi)\left(\varphi_x+\psi\left(1-2c\varepsilon\right)+\frac{1}{4\varepsilon}\psi_x\right)dx$$

$$+\left(\frac{c}{\varepsilon}-2c\varepsilon\right)\int_0^1 \psi_t^2 dx + \left(\frac{c}{\varepsilon^2}+2c^2\varepsilon\right)\int_0^1 \psi_x^2 dx + (\varepsilon c - 2c\varepsilon)\int_0^1 \varphi_t^2 dx + \left(\frac{c}{\varepsilon}+2c^2\varepsilon\right)\int_0^1 h^2(\psi_t)dx.$$

Donc, avec $\varepsilon \in]0,1[$ assez petit, on obtient

$$L_1'(t) \leq -\frac{1}{2}\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2 dx + c|1-k|\int_0^1 (\varphi_x^2+\psi_x^2)dx + c\int_0^1 \psi_t^2 dx$$

$$+c\int_0^1 \psi_x^2 dx - c\int_0^1 \varphi_t^2 dx + c\int_0^1 h^2(\psi_t)dx.$$

Comme dans [14], nous considérons la fonction w définie par :

$$-w_{xx} = \psi_x \quad \text{où} \quad w\left(0\right) = w\left(1\right) = 0. \tag{3.12}$$

On a :

$$w(x) = -\int_0^x \psi(y)dy + x\int_0^1 \psi(y)dy.$$

Lemme 3.2.7 :

La solution w de (3.12) satisfait :

$$\int_0^1 w_x^2 dx \leq \int_0^1 \psi^2 dx,$$

et

$$\int_0^1 w_t^2 dx \leq \int_0^1 \psi_t^2 dx.$$

Preuve : On multiplie l'équation (3.12) par w et on intégre par partie, on obtient

$$\int_0^1 -w_{xx}wdx = \int_0^1 \psi_x wdx$$

$$\Longrightarrow \int_0^1 w_x^2 dx = \int_0^1 \psi_x wdx = -\int_0^1 \psi w_x dx.$$

L'inégalité de Couchy-Schwarz implique alors

$$\int_0^1 w_x^2 dx \leq \frac{1}{2}\int_0^1 \psi^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 w_x^2 dx \Longrightarrow \int_0^1 w_x^2 dx \leq \int_0^1 \psi^2 dx.$$

De même

$$\int_0^1 w_{xt}^2 dx \leq \int_0^1 \psi_t^2 dx.$$

Et d'après l'inégalité de Poincaré, on a

$$\int_0^1 w_t^2 dx \leq \int_0^1 w_{xt}^2 dx,$$

alors

$$\int_0^1 w_t^2 dx \leq \int_0^1 \psi_t^2 dx.$$

lemme 3.2.8 :

La fonction J_1 définie par :

$$J_1(t) := \int_0^1 (\psi\psi_t + w\varphi_t)\,dx$$

satisfait l'estimation :

$$J_1(t) \leq -\frac{1}{2}\int_0^1 \psi_x^2 dx + (1-k)\int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi)dx + \frac{c}{\varepsilon_1}\int_0^1 \psi_t^2 dx + \varepsilon_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx \tag{3.13}$$

$$+c\int_0^1 h^2(\psi_t)dx$$

pour tout $0 < \varepsilon_1 < 1$.

Preuve :

$$J_1'(t) = \int_0^1 \left(\psi_t^2 + \psi\psi_{tt} + w_t\varphi_t + w\varphi_{tt}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \psi_t^2 dx + \int_0^1 \psi\psi_{tt} dx + \int_0^1 w_t\varphi_t dx + \int_0^1 w\varphi_{tt} dx$$

$$= \int_0^1 \psi_t^2 dx + \int_0^1 w_t\varphi_t dx + \int_0^1 \psi\left(\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) - h(\psi_t)\right) dx + \int_0^1 w(\varphi_x + \psi)_x dx$$

$$= \int_0^1 \psi_t^2 dx + \int_0^1 w_t\varphi_t dx - \int_0^1 \psi_x^2 dx - k\int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi) dx - \int_0^1 \psi h(\psi_t) dx$$

$$- \int_0^1 w_x(\varphi_x + \psi) dx$$

$$\leq \int_0^1 \psi_t^2 dx + \int_0^1 w_t\varphi_t dx - \int_0^1 \psi_x^2 dx + (1-k)\int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi) dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \psi_x^2 dx$$

$$+ c\int_0^1 h^2(\psi_t) dx - \int_0^1 w_x(\varphi_x + \psi) dx - \int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi) dx$$

$$\leq -\frac{1}{2}\int_0^1 \psi_x^2 dx + (1-k)\int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi) dx + \frac{c}{\varepsilon_1}\int_0^1 \psi_t^2 dx + \varepsilon_1\int_0^1 \varphi_t^2 dx$$

$$+ c\int_0^1 h^2(\psi_t) dx.$$

Lemme 3.2.9 :

Pour tous $N_1 > 1$ et $N_2 > 1$, On pose

$$£(t) = N_1 E(t) + N_2 J_1(t) + L_1(t).$$

Alors $£$ est équivalent à E et il existe $c > 0$ vérifiant

$$£'(t) \leq -cE(t) - cE'(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve :

$$\pounds\left(t\right)=N_{1}E\left(t\right)+N_{2}J_{1}\left(t\right)+L_{1}\left(t\right)$$

$$\Longrightarrow \pounds'\left(t\right)=N_{1}E'\left(t\right)+N_{2}J_{1}'\left(t\right)+L_{1}'\left(t\right).$$

Par l'addition des estimations (3.5), (3.11) et (3.13), on obtient

$$\pounds'\left(t\right)\leq N_{1}\left(-\int_{0}^{1}\psi_{t}h(\psi_{t})dx+(1-k)\int_{0}^{1}(\varphi_{x}+\psi)\psi_{t}dx\right)+N_{2}\left((1-k)\int_{0}^{1}\psi(\varphi_{x}+\psi)dx\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\psi_{x}^{2}dx+\frac{c}{\varepsilon_{1}}\int_{0}^{1}\psi_{t}^{2}dx+\varepsilon_{1}\int_{0}^{1}\varphi_{t}^{2}dx+c\int_{0}^{1}h^{2}(\psi_{t})\right)-\frac{1}{2}\int_{0}^{1}(\varphi_{x}+\psi)^{2}dx$$

$$+c|1-k|\int_{0}^{1}(\varphi_{x}^{2}+\psi_{x}^{2})dx+c\int_{0}^{1}\psi_{t}^{2}dx+c\int_{0}^{1}\psi_{x}^{2}dx-c\int_{0}^{1}\varphi_{t}^{2}dx+c\int_{0}^{1}h^{2}(\psi_{t})$$

$$\leq|1-k|\left(N_{1}\int_{0}^{1}|(\varphi_{x}+\psi)\psi_{t}|dx+c\int_{0}^{1}(\varphi_{x}^{2}+\psi_{x}^{2})dx+N_{2}\int_{0}^{1}\psi(\varphi_{x}+\psi)dx\right)$$

$$-\left(N_{1}-\frac{cN_{2}}{\varepsilon_{1}}-c\right)\int_{0}^{1}\psi_{t}^{2}dx-\left(\frac{N_{2}}{2}-c\right)\int_{0}^{1}\psi_{x}^{2}dx-\frac{1}{2}\int_{0}^{1}(\varphi_{x}+\psi)^{2}dx$$

$$-\left(\varepsilon_{1}N_{2}-c\right)\int_{0}^{1}\varphi_{t}^{2}dx-N_{1}\int_{0}^{1}\psi_{t}h(\psi_{t})dx+N_{2}c\int_{0}^{1}h^{2}(\psi_{t})dx+c\int_{0}^{1}h^{2}(\psi_{t})dx$$

$$\leq c|1-k|\int_{0}^{1}\left(\varphi_{x}^{2}+\psi_{x}^{2}+\psi_{t}^{2}\right)dx-\left(N_{1}-\frac{cN_{2}}{\varepsilon_{1}}-c\right)\int_{0}^{1}\psi_{t}^{2}dx-\left(\frac{N_{2}}{2}-c\right)\int_{0}^{1}\psi_{x}^{2}dx$$

$$-\left(\varepsilon_{1}N_{2}-c\right)\int_{0}^{1}\varphi_{t}^{2}dx-\frac{1}{2}\int_{0}^{1}(\varphi_{x}+\psi)^{2}dx-N_{1}\int_{0}^{1}\psi_{t}h(\psi_{t})dx$$

$$+N_{2}c\int_{0}^{1}h^{2}(\psi_{t})dx+c\int_{0}^{1}h^{2}(\psi_{t})dx$$

$$\leq c|1-k|E(t)-\left(N_1-\frac{cN_2}{\varepsilon_1}-c\right)\int_0^1\psi_t^2dx-\left(\frac{N_2}{2}-c\right)\int_0^1\psi_x^2dx$$

$$-\left(\varepsilon_1N_2-c\right)\int_0^1\varphi_t^2dx-\frac{1}{2}\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2dx+c\int_0^1\left(\psi_th(\psi_t)+h^2(\psi_t)\right)dx.$$

Nous choisissons N_1 et N_2 assez grands et ε_1 assez petit tels que

$$N_1-\frac{cN_2}{\varepsilon_1}-c>0,\quad \frac{N_2}{2}-c>0\quad \text{et}\quad \varepsilon_1N_2-c>0,$$

On obtient

$$\pounds'(t)\leq -c\int_0^1\left(\psi_t^2+\psi_x^2+\varphi_t^2+(\varphi_x+\psi)^2\right)dx+c\int_0^1\left(\psi_th(\psi_t)+h^2(\psi_t)+\psi_t^2\right)dx$$
$$+c|1-k|E(t).$$

Nous choisissons $|1-k|$ assez petit, on trouve

$$\pounds'(t)\leq -c\int_0^1\left(\psi_t^2+\psi_x^2+\varphi_t^2+(\varphi_x+\psi)^2\right)dx+c\int_0^1\left(\psi_th(\psi_t)+h^2(\psi_t)+\psi_t^2\right)dx$$

$$\leq -cE(t)+c\int_0^1\left(\psi_th(\psi_t)+h^2(\psi_t)+\psi_t^2\right)dx.$$

Or

$$h^2(\psi_t)+\psi_t^2\leq c\psi_th(\psi_t),$$

donc, d'après (3.5),

$$\int_0^1\left(\psi_th(\psi_t)+h^2(\psi_t)+\psi_t^2\right)dx\leq c\int_0^1\psi_th(\psi_t)$$

$$\leq -cE'(t)+c(1-k)\int_0^1(\varphi_x+\psi)\psi_tdx$$

$$\leq -cE'(t)+c|1-k|E(t).$$

Donc

$$\pounds'(t)\leq -cE(t)-cE'(t)+c|1-k|E(t).$$

Avec $|1-k|$ assez petit, on obtient

$$(\pounds + cE)' \leq -cE(t).$$

D'autre par, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} |J_1(t)| \leq cE(t) \\ |L_1(t)| \leq cE(t) \end{array} \right. , \quad \forall t \geq 0.$$

Donc

$$\pounds(t) \leq cE(t).$$

De même, $\quad \pounds(t) \geq N_1 E(t) - N_2 cE(t) - cE(t)$.

Avec N_1 assez grand, on a

$$\pounds(t) \geq cE(t).$$

D'où donc $\quad \pounds \sim E$

On pose maintenant $F = \pounds + cE$, on obtient F est équivalante à E et

$$F'(t) \leq -cF(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} \exists \lambda \geq 0 \ \text{ tel que } F'(t) \leq -\lambda F(t) &\Longrightarrow \left(e^{\lambda t} F(t)\right)' \leq 0 \\ &\Longrightarrow e^{\lambda t} F(t) - F(0) \leq 0 \\ &\Longrightarrow F(t) \leq F(0) e^{-\lambda t} \\ &\Longrightarrow F(t) \leq c e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Donc, comme $F \sim E$,

$$E\,(t) \leq c e^{-\lambda t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Bibliographie

[1] A. Guesmia ; *Inegalités intégrales et applications a la stabilisation des systèmes distribués non dissipatifs,* HDR, LMAM, université paul verlaine-metz, (2006).

[2] A. Guesmia ; *Nouvelles inégalités intégrales et applications à la stabilisation des systèmes distribues non dissipatifs,* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. 1336 (2003), 801-804.

[3] A. Guesmia et S. A. Messaoudi ; *Frictional versus viscoelastic damping for Timoshenko-type systems,* Prépublication, LMAM, Université paul verlaine-metz (2006). 1-18.

[4] A. Guesmia et S. A. Messaoudi ; *On the control of a viscoelastic damping Timoshenko type system,* Appl. Math. and Computation, (2008), 1-15.

[5] A. Hareux ; *Oscillations forcées pour certains systèmes dissipatifs non linéarire,* Laboratoire d'analyse Numérique, Prépublication No. 78010, Université Paris 7 (1978).

[6] A. Hareux ; *Semi-groupes linéaires et équations d'évolutions linéaire périodiques,* Publication du Laboratoire d'analyse Numérique No. 78011, Université Pierre et Marie Curie, Paris (1978).

[7] A. Pazy ; *Semi Groupe of lineare operator and application to partial differential equation.* Springer (1983).

[8] A. Soufyane et A. Wehbe ; *Uniform stabilization for the Timoshenko beam by a locally distributed damping,* Electron. J. Differential Equations, no. 29 (2003), 1-14.

[9] C. A. Raposo, J. Ferreira, M. L. Santos et N. N. Castro ; *Expoenetial stability for the Timoshenko system with two weak dampings,* Applied Math Letters, 18 (2005), 535-541.

[10] C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch ; *Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves form the boundary,* SIAM. J. Control Optimal, 30 (1992), 1024-1065.

[11] D. H. Shi et D. X. Feng ; *Exponential decay rate of the energy of a Timoshenko beam with locally distributed feedback,* ANZIAM, J. 44 no. 2 (2002), 205-220.

[12] D. X. Feng, D. H. Shi et W. Zhang ; *Boundary feedback stabilization of Timoshenko beam with boundary dissipation,* Sci. China, Ser. A 41, no. 5 (1998), 483-490.

[13] F. Alabau Boussouira ; *On convexity and weighted integral inequalities for energy decay rates of nonlinear dissipative hyperbolic systems,* Appl. Math. Optim, 51 (2005), 61-105.

[14] F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, J. E. Mũnoz Rivera et R. Racke ; *Energy decay for Timoshenko systems of memory type,* J. Differential Equations, 194, no. 1 (2003), 82-115.

[15] F. Ammar-Khodja, S. Kerbel et A. Soufyane ; *Stabilization of the nonuniform Timoshenko beam,* J. Math and Appl, 327 (2007), 525-538.

[16] F. D. Araruna et J. E. S. Borges ; *Existence and boundary stabilization of the semilinear Mindlin-Timoshenko system,* EJQTDE, N. 34 (2008), 1-27.

[17] G. Q. Xu et S. P. Yung ; *Stabilization of Timoshenko beam by means of pointwise controls,* ESAIM, Control Optim. Calc. Var, 9 (2003), 579-600.

[18] H. Bresis ; *Analyse fonctionnelle théorie et application,* Masson Paris. (1983).

[19] Hiroki Tanabe ; *Equation of evolution,* Pitman landon sanfrancisco, Melbourne (1979).

[20] I. Lasiecka et D. Tataru ; *Uniform boundary stabilization of semlinear wave equations with nonlinear boundary damping,* J. Diff. Inte. Equa, 6 (1993), 507-533.

[21] I. Lasiecka et R. Triggiani ; *Uniform stabilization of the wave equation with Dirichlet or Neumann feedback control without geometrical conditions,* Appl. Math. Optim, 25 (1992), 189-224.

[22] J. E. Mũnoz Rivera et R. Racke ; *Global stability for damped Timoshenko systems, Discrete Contin,* Dyn. Syst, 9 no, 6 (2003), 1625-1639.

[23] J. E. Mũnoz Rivera et R. Racke ; *Timoshenko systems with indefinite damping,* J. Math Anal Appl, 341 (2008), 1068-1083.

[24] J. U. Kim et Y. Renardy ; *Boundary control of the Timoshenko beam,* SIAM J. Control Optim, 25, no. 6 (1987), 1417-1429.

[25] M. De Lima Santos ; *Decay rates for solutions of a Timoshenko system with a memory condition at the boundary,* Abstr. Appl. Anal, 7 no. 10 (2002), 531-546.

[26] M. Eller, J. E. Lagnese et S. Nicaise ; *Decay rates for solutions of a Maxwell system with nonlinear boundary damping,* Computational. Apll. Math, 21 (2002), 135-165.

[27] M. Gugat ; *controllability of a slowly rotating Timoshenko Beam,* ESAIM. Control Optimal. Calc. Var, 6 (2001), 333-360.

[28] P. Martinez ; *A new methode to abtain decay rate estimations for dissipative systems,* ESAIM. Control Optim. Calcul Varia, (1999), 419-444.

[29] S. A. Messaoudi et A. Soufyane ; *Boundary stabilization of solution of a nonlinear system of Timoshenko type,* Nonlinear Analysis, 67 (2007), 2107-2121.

[30] S. Timoshenko ; *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismaticbars,* Philisophical Magazine, 41 (1921), 744-746.

[31] S. W. Taylor ; *A smoothing property of a hyperbolic system and boundary controllability,* J. Comput. Appl. Math, 114 (2000), 23-40.

[32] V. Komornik ; *Exact controllability and stabilization. The multiplier methode.* Masson John Willey. Paris, (1994).

Résumé

Dans ce le travail, nous considérons le système de Timoshenko suivant :

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - (\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\ \psi_{tt} - \psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + h(\psi_t) = 0, \quad (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\ \varphi(0,t) = \varphi(1,t) = \psi(0,t) = \psi(1,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \quad x \in (0,1) \\ \psi(x,0) = \psi_0(x), \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \quad x \in (0,1) \end{cases}$$

où $k \in \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée.

Nous montrons, sous des hypothèses sur la fonction h et la constante k, que ce système est exponentiellement stable ; c'est-à-dire

$$\exists\ c, w > 0 \ \text{ tq } \ E(t) \leq ce^{-wt}, \quad \forall t \geq 0,$$

où $E : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est l'énergie du système.

La méthode de la démonstration est basée sur la méthode des multiplicateurs et quelques inégalités intégrales.

Mots clés : stabilité exponentielle, multiplicateurs, Timoshenko, inégalités itégrales.

Abstract

In this work we consider the following Timoshenko system

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - (\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\ \psi_{tt} - \psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + h(\psi_t) = 0, \quad (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\ \varphi(0,t) = \varphi(1,t) = \psi(0,t) = \psi(1,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \quad x \in (0,1) \\ \psi(x,0) = \psi_0(x), \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \quad x \in (0,1), \end{cases}$$

where $k \in \mathbb{R}$ and $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ is given function.

We establish that, under some hypotheses on the function h and the constant k, this system is exponentially stable ; that is

$$\exists\ c, w > 0 \ / \quad E(t) \leq ce^{-wt}, \quad \forall t \geq 0,$$

where $\quad E : \ \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ is the energy of system.

The method of proof is based on the multiplier method and some integral inequalities.

Key words : exponential decay, fractional damping, multipliers, Timoshenko, integral inequalities.

ملخّص

في هذّا العمل نعتبر جملة تيموشنكو التالية :

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - (\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\ \psi_{tt} - \psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + h(\psi_t) = 0, \quad (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\ \varphi(0,t) = \varphi(1,t) = \psi(0,t) = \psi(1,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \quad x \in (0,1) \\ \psi(x,0) = \psi_0(x), \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \quad x \in (0,1), \end{cases}$$

حيث $k \in \mathbb{R}$ و $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع معطى.

نبرهن تحت فرضيات على الدالة h و الثابت k أن هذه الجملة مستقرة أسيا أي

$$\exists \ c, w > 0 \ / \quad E(t) \leq ce^{-wt}, \quad \forall t \geq 0$$

حيث $E: \ \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ هي طاقة الجملة.

طريقة البرهان تعتمد على طريقة المضاعفات و عدة متراجحات تكاملية.

المفاتيح

الانحطاط الاسي، التضاؤل الاحتكاكي، تيموشنكو، متراجحات تكاملية.