REPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNINVERSITÉ MENTOURI-CONSTANTINE

FACULTÉ DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

N^0 D'ordre :………..
Série :………………

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister
En : **Mathématiques**

THEME

Fonction Zéta de Riemann et applications

Option :
Système Dynamiques et Topologie Algébrique

Présenté par :
Mr : GUERBOUSSA YASSINE

Devant le jury :

Président : Rahman Fouad Lazhar M.C : UMC.
Rapporteur : Zitouni Mohamed Pr : USTHB.
Examinateur : Benkafadar M. N Pr : UMC.
Examinateur : Boughaba S M.C : UMC.

Soutenu Le **:** 22/04/2010.

Sommaire :

Introduction

L'étude des nombres premiers est du domaine de la Théorie Analytique des Nombres. Cette théorie a passionné les scientifiques depuis des siècles. Nous ne considérons ici que les cas particuliers des Séries de nombres.

Euler a montré en 1749 que la série des inverses des nombres premiers est divergente :

$$\sum p^{-1} = \log\log\infty .$$

La série des puissances réelles $\sum_{n\geq 1} n^{-r}$, r réel ; est transformée en produit eulérien :

$$\sum_{n\geq 1} n^{-r} = \prod_{p} \left(1 - p^{-r}\right)^{-1},$$

p parcourt l'ensemble des nombres premiers.

Avec la factorisation $n = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \ldots p_s^{l_s}$, p_i premier, $l_i \geq 1$.

Bernhard Riemann, dans son mémoire [15] , en 1959 , sur le " nombre des nombres premiers inférieurs à une valeur donnée " a eu l'idée de plonger ces nombres dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$:

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s} = \prod_{p} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}, s = \sigma + it \in \mathbb{C}.$$

Cette fonction ζ(s) de la variable complexe s est devenue : Fonction Zéta de Riemann.

Riemann a calculé quelques zéros et a conjecturé que tous les zéros non triviaux de $\zeta(s)$ se trouvent sur la ligne critique $\sigma = \frac{1}{2}$ du plan complexe.

Cette conjecture a été incluse par Hilbert au Congrès mondial des Mathématiques de Paris en 1900, dans la liste des problèmes de Mathématiques non résolus.

Depuis, dans tous les centres de recherches scientifiques des équipes étudient cette fonction Zéta et ses applications. S'il est prouvé qu'il y a une infinité de zéros sur la ligne critique, il n'est pas prouvé qu'il n'y ait pas de zéros non triviaux ailleurs.

Dans ma thèse il y a 4 chapitres.

Dans le chapitre I j'ai rappelé les propriétés des fonctions d'une variable complexe, de la fonction Gamma Γ(s) et des séries de Dirichlet.

Le chapitre II est consacré à la fonction Zéta de Riemann, série infinie, produit eulérien, convergence, relations avec la fonction Gamma et les nombres de Bernoulli ; j'ai indiqué les zéros triviaux $s = 2n$ pour les entiers négatifs n et des valeurs particulières $\zeta(n)$. Nous avons établi une équation fonctionnelle de $\zeta(n)$.

Le chapitre III est réservé à la localisation des zéros non triviaux de $\zeta(s)$. Gram et Brendt ont laissé des listes de zéros ; nous avons étudié les fonctions $1/\zeta(s)$ et $\zeta'/\zeta(s)$.

Dans le chapitre IV, nous avons examiné quelques applications de la fonction Zéta de Riemann : fonction zéta de Dedekind, $\zeta_K(s)$ liée aux corps de nombres K, fonction Zéta d'Epstein $\sum_{(n,m)\neq(0,0)} \left(am^2 + bmn + cn^2\right)^{-s}$ pour $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que : $a \succ 0$ et $b^2 - 4ac \prec 0$, séries $L(E, s)$ de Dirichlet-Hasse de Courbes Elliptiques.

CHAPITRE I : FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE.

1. Nombres complexes.

Selon Godment (Algèbre - 4éme Ed. Herman-Paris), un nombre d est un carré dans le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels si et seulement si $d \geq 0$. Il en résulte que l'équation algébrique :

$$X^2 = -1 \text{ , } d = -1 \qquad (1)$$

N'admet pas de solution réelle.
Elle admet 2 solutions qui ne sont pas réelles et qui sont notées i et $-i$, ce sont des nombres imaginaires = des nombres complexes.

Définition 1.

1) L'unité complexe est le nombre i, non réel, de carré $i^2 = -1$.
2) Un nombre complexe est de la forme :

$$z = x + iy \text{, } x \text{ et } y \text{ réels,} \qquad (2)$$

3) L'ensemble des nombres complexes est un corps commutatif,

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy\} = \mathbb{R} + i\mathbb{R} \text{ .} \qquad (3)$$

Citons quelques propriétés des nombres complexes.
Le conjugué de i est $-i$; le conjugué de $z = x + iy$ est $\overline{z} = x - iy$, (4)
La conjugaison du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est la fonction :

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ de valeur } f(x + iy) = x - iy, \qquad (5)$$

La norme d'un nombre complexe $z = x + iy$ est égale à :

$$N(z) = z\overline{z} = x^2 + y^2 \text{ ,} \qquad (6)$$

Un nombre imaginaire pur est égal à :

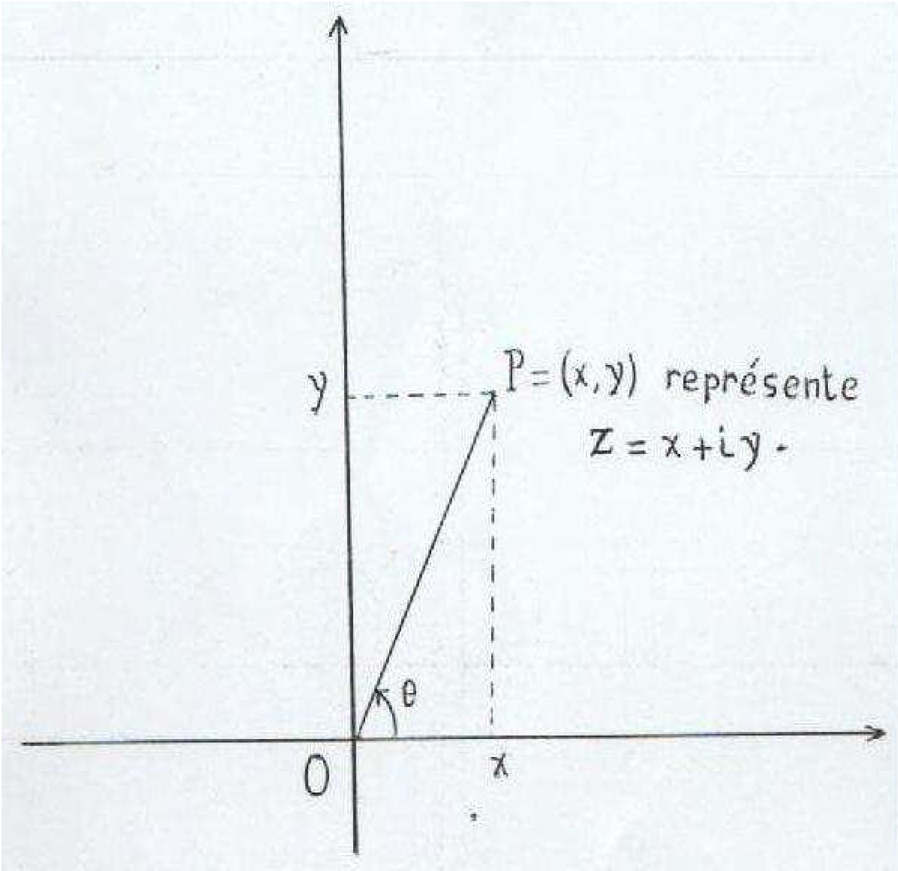
$$z = iy \text{, partie réelle } x = 0, \qquad (7)$$

L'inverse de $z = x + iy$ est le nombre complexe :

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2} \text{ ,} \qquad (8)$$

Tout nombre complexe $z = x + iy$ admet une représentation géomètrique dans le plan complexe Oxy par un point $P = (x, y)$:

CHAPITRE I : FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE.



Ox est l'axe des réels , Oy est l'axe des imaginaires.
z est l'affixe du point $P=(x,y)$, l'angle orienté $\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OP}\right)=\theta$ est l'argument de z, θ modulo 2π ; la longueur arithmétique $r=OP$ est le module de z, $r\geq 0$.

Il en résulte la formule trigonométrique :

$$z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right), \qquad (10)$$

Et la formule de Moivre :

$$\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos\left(n\theta\right) + i\sin\left(n\theta\right). \qquad (11)$$

Définition 2.

1) le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est algébriquement clos :
tout polynôme $f\left(X\right)$ de degré $n \geq 1$ de l'anneau $\mathbb{C}\left[X\right]$ admet un zéro dans $\mathbb{C}$.

2) le corps $\mathbb{C}$ est la clôture algébrique de $\mathbb{R}$.

2. Fonctions holomorphes – fonctions méromorphes.

Définition3.

Une fonction d'une variable complexe est une fonction :

$$f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ , } D = \textit{domaine},$$

de valeur $f\left(z\right) = u\left(x, y\right) + iu\left(x, y\right) = u + iv$.

Alors $\overline{f}\left(z\right) = u - iv$ et $f\left(z\right)\overline{f}\left(z\right) = u^2 + v^2$.

Exemples :

Pour $z = x + iy$.

1) $f\left(z\right) = \dfrac{1}{z} = u + iv$; alors $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ et $v = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$.

2) $f\left(z\right) = z^2 = u + iv$; alors $u = x^2 - y^2$ et $v = 2xy$.

3) $f\left(z\right) = \dfrac{az + b}{cz + d}$, avec $cz + d \neq 0$, a,b,c,d réels,

alors : $u = \dfrac{ac\left(x^2 + y^2\right) + \left(ad + bc\right)x + acy^2}{\left(cx + d\right)^2 + c^2y^2}$ et $v = \dfrac{\left(ad + bc\right)y}{\left(cx + d\right)^2 + c^2y^2}$.

Définition 4.

1) Une fonction $f : D \to \mathbb{C}, D \subset \mathbb{C}$, est continue en un point z_0 de D si elle satisfait :

$$\lim_{h \to 0} f(z_0 + h) = f(z_0).$$

2) f est dérivable en un point z_0 de D si elle satisfait :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \textit{nombre complexe } l,$$

Alors $l = df/dz = f'(z_0) =$ *dérivée de f en* z_0.

3) f est dérivable sur le domaine complexe D si elle est dérivable en tout point de D.

Les conditions de dérivabilité d'une fonction $f(z)$ sont précisées par la :

Proposition 1.

Soit une fonction $f : D \to \mathbb{C}, D \subset \mathbb{C}$**, d'une variable complexe z,**

$$f(z) = u(x, y) + iu(x, y) = u + iv.$$

Alors $f(z)$ **est dérivable sur** D **si elle satisfait le système des dérivées partielles :** $\partial U/\partial x = \partial V/\partial y$ **et** $\partial U/\partial y = -\partial V/\partial x$**.**

Preuve : cf : Lang, serge : complexe analysis, 3e Ed. GTM-103(1985).

□

Exemple :

$$f(z) = z^2 = u + iv \ , \ u = x^2 - y^2 \text{ et } v = 2xy.$$

Alors les dérivées partielles sont :

$$\partial U/\partial x = 2x, \partial U/\partial y = -2y, \partial V/\partial x = 2y \text{ et } \partial V/\partial y = 2x.$$

Définition 5.

Les conditions de dérivabilité de $f(z) = u + iv$ *sont les conditions de Cauchy-Riemann.*

Proposition 2.

Soient 2 fonctions dérivables $f, g : D \to \mathbb{C}, \ D \subset \mathbb{C}$**.**

1) **la dérivée de la somme est égale à :**

$$(f + g)' = f' + g' \ ;$$

2) **la dérivée du produit est égale à :**

$$(fg)' = f'g + fg' \ ;$$

3) la dérivée du quotient f/g, $g(z) \neq 0$ est égale à :

$$(f/g)' = (f'g - fg')/g^2 \ ;$$

Preuve :
On utilise les formules des dérivées des fonctions réelles.
□

Définition 6.

1) un domaine D de $\mathbb{C}$ est connexe s'il n'est pas réunion de deux ouverts disjoints.

2) un domaine D de $\mathbb{C}$ est connexe par arcs si 2 points M et l de D peuvent être joints par une ligne continue.

Il y a 2 types de développement en séries infinie de $f(z)$: un développement en série entière et un développement en série de Laurent.

Définition 7.

Une fonction holomorphe en a est une fonction $f(z)$ qui admet un développement en série entière de la forme :

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + \dots + a_n(z-a)^n + \dots \quad , \ a_n \in \mathbb{C}.$$

Définition 8.

Une fonction méromorphe est une fonction $f(z)$ qui admet un développement en série de Laurent de la forme :

$$f(z) = g(z)/(z-a)^n \ , n \geq 1 \ ; \ g(z) = \text{série entière.}$$

a est un pôle de $f(z)$ d'ordre n.

Alors :

$$f(z) = \frac{g(a)}{(z-a)^n} + \dots + \frac{g^{(p)}(a)}{p!(z-a)^{n-p}} + \dots + \frac{g^{(n)}(a)}{n!} + \frac{g^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a) + \dots \quad ,$$

$$f(z) = \sum_{k \geq -n} a_k (z-a)^k \, , a_k = \frac{g^{(n+k)}(a)}{(n+k)!} \ ;$$

Avec $g^{(d)}$ = dérivée d'ordre $d \geq 0$ de g et $k = -n, -n+1, \dots$

Le coefficient a_{-1} est le résidu de la fonction $f(z)$ au pôle $z=a$ de $f(z)$.

Exemple :

$f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z+1)^2}$; cette fonction admet un pôle simple en $z=1$ et un pôle double en $z=-1$.

Les résidus sont égaux à :

$a_{-1}=1/4$ pour le pôle $z=1$ et $a_{-1}=-1/4$ pour le pôle $z=-1$.

3. Fonction Gamma $\Gamma(s)$ complexe.

Définition 8.

La fonction $\Gamma(s)$ d'une variable complexe s est l'intégrale :

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}\exp(-x).x^{s-1}dx \quad ,s=\sigma+it\in\mathbb{C}.$$

Elle satisfait la formule de Weierstrss :

$$\Gamma(s)=s^{-1}\exp(-\gamma s)\prod_{n\geq 1}(1-s/n)^{-1}\exp(s/n), \text{ où}$$

$$\gamma=\lim_n\left(\sum_{k=1}^{n}k^{-1}-\log n\right) \text{ est la constante d'Euler.}$$

Cf : Lang.

Proposition 3.

La fonction analytique $\Gamma(s)$ satisfait les propriétés :

1) le résidu de $\Gamma(s)$ **en** $s=-n$ **est égal à** $(-1)^n/n!$ **,**

2) $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$**,**

3) $\Gamma(n+1)=n!$ **, pour** $n\geq 0$**,**

4) $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\pi/\sin\pi s$**, (Formule des compléments)**

5) $\Gamma(s)\Gamma\left(1+\dfrac{s}{2}\right)=2^{1-2s}\sqrt{\pi}\Gamma(2s)$**, (Formule de Duplication)**

6) $log\Gamma(s) = (s - 1/2)\log s - s + 1/2\log 2\pi - \int_0^{+\infty} \frac{\{x\} - 1/2}{s + x} dx$**,**

(Formule de Stirling).

Preuve : cf Lang.

□

Calcul de valeurs particulières de $\Gamma(s)$.

Avec la formule 3, nous trouvons :

$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 2$,$\Gamma(4) = 6$,$\Gamma(5) = 24$, $\Gamma(6) = 120$, etc…

Avec la formule 4, nous trouvons :

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \ ,$$

La formule 6 de Stirling est liée au comportement asymptotique de la $\Gamma(s)$:

$$\lim_{|s|\to\infty} \Gamma(s) \big/ s^{s-1/2} \exp(-s)\sqrt{2\pi} = 1.$$

Il existe une autre fonction Γ, algébrique, liée au groupe spécial linéaire $SL(2;\mathbb{Z})$ des 2×2 matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, a, b, c, d$\in \mathbb{Z}$, de $\det(A) = 1$.

Définition 9. *(Silverman)*

Pour chaque entier $N \geq 1$ *le groupe* $SL(2;\mathbb{Z})$ *contient les sous groupes :*

$$\Gamma_0(N) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2;\mathbb{Z}), c \equiv 0 \bmod N \right\},$$

$$\Gamma_1(N) = \left\{ A \in SL(2;\mathbb{Z}), c \equiv 0 et a \equiv d \equiv 1 \bmod N \right\},$$

$$\Gamma(N) = \left\{ A \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod N \right\},$$

Un sous groupe de congruence de $SL(2;\mathbb{Z})$ *est un sous groupe* Γ *qui contient un* $\Gamma(N)$ *pour certain entier* $N \geq 1$.

4. **Séries de Dirichlet.** [1], [3]

Elles sont utilisées dans la Théorie Analytique des Nombres.

Définition 10.

Une série de Dirichlet est une série infinie :

$$\sum_{n \geq 1} f(n) n^{-s} \quad \text{, } s \text{ complexe,}$$

f = fonction arithmétique $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$.

Proposition 4.

Si une série de Dirichlet $\sum_{n \geq 1} f(n) n^{-s}$ **converge pour** $s = s_0$ **; alors elle converge uniformément sur tout domaine** $\sigma \geq \sigma_0$ **et** $\left|\arg(s - s_0)\right| \leq \alpha \prec \pi/2$**.**

Preuve : cf [1], [3].

□

Pour $f(n) = 1$, la série de Dirichlet est la fonction Zéta de Riemann :

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s} \text{ ,}$$

Cette série converge pour $\operatorname{Re}(s) = \sigma \succ 1$.

Soient 2 séries de Dirichlet $\sum_{n \geq 1} f(n) n^{-s}$ et $\sum_{n \geq 1} g(n) n^{-s}$ qui convergent dans le domaine $\sigma \geq \sigma_0$.

Leur produit est précisé par la :

Définition 11.

Le produit de 2 séries de Dirichlet $\sum_{n \geq 1} f(n) n^{-s}$ *et* $\sum_{n \geq 1} g(n) n^{-s}$ *est la série de Dirichlet* $\sum_{n,m \geq 1} f(n) g(m) (nm)^{-s}$.

Dans ces séries de Dirichlet *f* et *g* sont des fonctions arithmétiques. Ces fonctions sont traitées dans plusieurs ouvrages :
« Introduction to Number Theory » de James .E. SHOCKLEY, « An introduction to The Theory of Numbers » de NIVEN et ZUCKERMAN, etc…

Définition 12.

1) une fonction arithmétique est une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$,

2) *f est multiplicative si* $f(n.m) = f(n)f(m)$ *pour n et m premiers entre eux,*
3) *f est additive si* $f(n+m) = f(n) + f(m)$.

Exemples :

1. la fonction arithmétique d'Euler : $\varphi(n)=$nombre d'entier d, $1 \le d \le n$ premiers à n : $\varphi(n) = \sum_{1 \le d \le n, (d,n)=1} 1$,

Elle prend les valeurs :
$\varphi(1)=\varphi(2)=1$, $\varphi(3)=\varphi(4)=2$, $\varphi(5)=4=\varphi(10)$,...
Elle est multiplicative.

1. fonction $\tau(n) =$ nombre de diviseurs positifs de n.
2. fonction $\sigma(n) =$ somme des diviseurs positifs de n.
3. fonction $\sigma_k(n) =$ somme des puissances d^k des diviseurs positifs de n.
4. fonction de Möbius $\mu(n)$:

$\mu(n)=0$ si n a un facteur carré : $n = a^2 n'$,

$\mu(1)=1$ et $\mu(n) = (-1)^k$ si $n = p_1 p_2 ... p_k$, p_i premiers.

Cette fonction est multiplicative ; elle satisfait la relation :

$$\sum_{d/n} \mu(d) = 0 \quad \text{, pour } n \succ 1.$$

Cette fonction satisfait la formule d'inversion de Möbius :

Si $F(n) = \sum_{d/n} f(d)$, d parcourt l'ensemble des diviseurs positifs de n, alors

$$f(n) = \sum_{d/n} \mu(d) F(n/d) \; .$$

Dans l'ensemble des fonctions arithmétiques, la théorie introduit l'opération de produit de Dirichlet (ou convolution) $f * g$.

Définition 13.

Le produit de Dirichlet (ou convolution) de 2 fonctions arithmétiques $f(n)$ *et* $g(n)$ *est la fonction arithmétique* $f * g$ *de valeur :*

$$f * g(n) = \sum_{d/n} f(d) g(n/d) = \sum_{ab=n} f(a) g(b).$$

Ce produit est commutatif : $f * g = g * f$.

Etudiant le produit de 2 séries de Dirichlet.

Proposition 5.

Soit 2 séries de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} f(n) n^{-s}$ **et** $\sum_{n\geq 1} g(n) n^{-s}$ **qui convergent sur le domaine** $\sigma \geq \sigma_0$ **; alors leur produit de Dirichlet est égal à :**

$$\sum_{n,m\geq 1} f(n) g(m) (nm)^{-s} = \sum_{n\geq 1} f * g(n) n^{-s}.$$

Preuve : on applique la règle de multiplication de 2 séries.

□

Exemple :

La fonction arithmétique de Von Mangoldt :

$\Lambda : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ de valeur

$\Lambda(n) = \log p$ si $n = p^k$, puissance d'un nombre premier *p*.

et $\Lambda(n) = 0$ sinon.

Cette fonction satisfait la relation :

$$\sum_{d/n} \Lambda(d) = \log n,$$

Elle admet un produit de Dirichlet avec les fonctions arithmétiques :

$$u : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}, \; u(n) = 1,$$

$$\Lambda * u = \log.$$

Cette fonction satisfait la relation :

$$\log * \mu = \Lambda, \quad \mu = \text{fonction de Möbius.}$$

CHAPITRE II : FONCTION ZETA DE RIEMANN.

Tout entier naturel n admet une factorisation unique,

$$n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_t^{r_t} \quad , \; p_i \text{ premiers.} \qquad (1)$$

En 1749, Euler a prouvé que la série réelle infinie,

$$S\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p} + \dots \text{ , p premier,} \qquad (2)$$

est divergente : $S\left(\frac{1}{p}\right) = \log\log\infty$. (3)

En 1800, Legendre, publie dans « Théorie des Nombres » une formule empirique évaluant le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à un nombre réel x :

$$\pi(x) \sim x/(A\log x + B), \text{ A et B constantes réelles.}$$

En 1849, Gauss montre que la densité des nombres premiers $p \le x$ est équivalent à $1/\log x$.

Vers 1859, dans son fameux mémoire « UBER DIE ANZAHL DER PRIMAZAHLEN UNTERHALB EINER GEGEBENEN GRŐSSE », Bernhard RIEMANN consacre 8 pages « Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une valeur donnée ».

La contribution décisive de Riemann est dans la méthode, c'est lui qui le premier considère la fonction $\zeta(s) = \sum_{n\ge1} n^{-s}$ comme une fonction analytique d'une variable complexe s.

1. Développement en série et forme d'Euler.

La fonction Zéta de Riemann est la fonction complexe,

$$\zeta(s) = \sum_{n\ge1} n^{-s} \; , \quad s = \sigma + it \in \mathbb{C} \qquad (1)$$

Cette série converge absolument sur le demi-plan $\sigma = \operatorname{Re}(s) \succ 1$.

Posons : $\zeta(s) = 1 + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} n^{-s}$, (2)

La fonction $f(x) = x^{-s}$ admet des dérivées d'ordre $k \ge 1$,

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k s(s+1)\dots(s+k-1)x^{-s-k}, \qquad (3)$$

Avec la formule de la « somme d'Euler-Mac Lauren » nous obtenons,

$$\zeta(s)=1+\lim_{N\to\infty}\{\int_1^N x^{-s}dx+\frac{1}{2}\left(N^{-s}-1\right)-\sum_{r=2}^{k}\frac{B_r}{r!}s(s+1)...(s+r-2)\left(N^{-s-r+1}-1\right)$$

$$-\frac{1}{k!}s(s+1)...(s+k-1)\int_1^N B_k\left(x-[x]\right)x^{-s+k}dx\}\ , \qquad (4)$$

où les B_k sont les polynômes de Bernoulli et [x] = partie entière du nombre réel x.
En passant à la limite, (4) devient :

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}+\sum_{r=2}^{k}\frac{B_r}{r!}s(s+1)...(s+r-2)$$

$$-\frac{1}{k!}s(s+1)...(s+k-1)\int_1^\infty B_k\left(x-[x]\right)x^{-s+k}dx, \qquad (5)$$

Cette intégrale converge sur le demi plan $\sigma \succ 1-k$, (6)
Il en résulte que $\zeta(s)$ est une fonction méromorphe avec un pôle simple en $s=1$. (7)

La fonction $\zeta(s)$ admet une forme de produit d'Euler,

$$\zeta(s)=\sum_{n\geq1}n^{-s}=\prod_p\left(1-p^{-s}\right)^{-1} \ \text{, pour} \quad \sigma\succ1, \qquad (8)$$

(8) implique les formules,

$$\log\zeta(s)=\sum_p\sum_{m\geq1}1\big/mp^{ms}\ \text{, } p \text{ premiers,} \qquad (9)$$

$$\zeta'\big/\zeta(s)=-\sum_p\sum_{m\geq1}\log p\big/p^{ms}=\sum_{n\geq1}\Lambda(n)n^{-s}\ , \qquad (10)$$

où $\Lambda(n)=$ fonction arithmétique de Von Mangoldt.

2. Fonction Zéta et fonction Gamma.

Selon [20] il existe une autre représentation de $\zeta(s)$ liée à la fonction $\Gamma(s)$, définition 8, chapitre I.
En inversant l'ordre de sommation et d'intégration dans :

$$\Gamma(s)n^{-s}=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\exp(-nx)dx\ , \qquad (1)$$

Nous obtenons la forme :

$$\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx,\ \text{pour}\ \sigma\succ 1, \qquad (2)$$

et
$$\zeta(s)=\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_C\frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}dz \qquad (3)$$

sur un contour convenable C d'intégration.

La fonction $\zeta(s)$ est une fonction méromorphe qui admet une seule singularité : un pôle $s=1$ de résidu égal à 1.

3. Fonction Zéta et nombres de Bernoulli.

Les nombres de Bernoulli sont les coefficients B_m dans le développement en série infinie :

$$\frac{t}{e^t-1}=1+\sum_{m\geq 1}B_m\frac{t^m}{m!}\quad . \qquad (1)$$

Une méthode de calcul des B_m utilise le :

Théorème 1.

Les nombres de Bernoulli satisfont la relation de récurrence :

$$1+\sum_{k=1}^{m-1}\binom{m}{k}B_k=0\ ,\ m\geq 2,\binom{m}{k}=\frac{m!}{k!(m-k)!}\quad .$$

Preuve : Borevich-Théorie des Nombres.

□

Nous obtenons les nombres B_m de Bernoulli :

$B_1=-\frac{1}{2}$; $B_2=\frac{1}{6}$; $B_4=-\frac{1}{30}$ **;** $B_6=\frac{1}{42}$ **;** $B_8=B_4=-\frac{1}{30}$ **;** $B_{10}=\frac{5}{66}$ **;**

$B_{12}=-\frac{691}{2730}$ **;** $B_{14}=\frac{7}{6}$ **;** $B_{16}=-\frac{3617}{510}$**,** etc…

Théorème 2.

1) **tous les nombres de Bernoulli** B_{2m+1} **,** $m\succ 0$**, sont nuls ;**
2) **les nombres de Bernoulli** B_{4m+2} **sont positifs ;**

3) **les nombres de Bernoulli B_{4m} sont négatifs.**

Preuve : Borevich-Théorie des Nombres.

□

La relation (1) devient,

$$\frac{t}{e^t-1}=1-\frac{t}{2}+\sum_{m\geq 1}B_{2m}\frac{t^{2m}}{(2m)!}.$$

Théorème 3. (Von STAUD)

Soit un nombre premier p, un nombre impaire $2m$ et les nombres de Bernoulli B_{2m}. Alors

1) **Si $p-1$ ne divise pas $2m$, alors B_{2m} est $p-$entier : il ne contient pas p au dénominateur ;**
2) **Si $p-1$ divise pas $2m$, alors $pB_{2m}\equiv -1 \bmod p$.**

Les nombres de Bernoulli sont liés à la fonction Zéta $\zeta(s)$ par le

Théorème 4.

Soit la fonction $\zeta(s)$ et les nombres B_{2m} , alors :

$$\zeta(2m)=-\frac{B_{2m}(2\pi i)^{2m}}{2.(2m)!}.$$

Preuve : avec le développement de la cotangente,

$$\pi z\cot\pi z=\pi zi+\frac{2\pi iz}{e^{2\pi iz}-1}$$
$$=1+\sum_{n\geq 1}\frac{2z^2}{z^2-n^2}.$$

□

4. Equation fonctionnelle de la fonction Zéta.

Considérons la fonction eulérienne :

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}\exp(-x).x^{s-1}dx, \qquad (1)$$

et la formule de la fonction Zéta précédente :

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}+\sum_{r=2}^{3}\frac{B_r}{r!}s(s+1)...(s+r-2)$$
$$-\frac{1}{6}s(s+1)(s+2)\int_1^\infty B_3(x-[x])x^{-s+3}dx \ , \qquad (2)$$

On utilise le développement des polynômes de Bernoulli :

$$B_{2k-1}(x-[x])=(-1)^k\,2(2k-1)!\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(2\pi nx)}{(2\pi n)^{2k-1}} ,\ k\succ 1, \qquad (3)$$

On utilise l'intégrale :

$$\int_0^\infty \sin(x)x^{s-1}dx=\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(s) \ , \qquad (4)$$

Les formules (2), (3), et (4) impliquent la relation :

$$\zeta(s)=2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\sin\frac{\pi s}{2}\zeta(1-s), \qquad (5)$$

C'est l'équation fonctionnelle de Riemann de $\zeta(s)$.

Appliquons la formule de duplication de Legendre :

$$\Gamma(s)\Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)=2^{1-2s}\sqrt{\pi}\Gamma(2s) \ , \qquad (6)$$

Transformons (6) avec le changement $2s\to 1-s$:

$$\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)=2^{s}\sqrt{\pi}\Gamma(1-s), \qquad (7)$$

Appliquons (7) à l'équation fonctionnelle de Riemann :

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{(s-1)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) \ , \qquad (8)$$

Posons :

$$F(s)=\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) \ , \qquad (9)$$

Cette fonction $F(s)$ satisfait la relation :

$$F(s)=F(1-s) \ , s=\sigma+it\in\mathbb{C}, \qquad (10)$$

C'est donc l'équation fonctionnelle de la fonction Zéta sous une autre forme.

CHAPITRE II : FONCTION ZETA DE RIEMANN.

Dans (9), les pôles $s=-2,-4,-6,\ldots,-2k,\ldots$ de $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ sont neutralisés par les zéros triviaux de $\zeta(s)$.

Pour $s=0$, $\zeta(0)=-\frac{1}{2}$.

Il en résulte que la fonction $F(s)$ de (9) est une fonction méromorphe qui admet des pôles du $1^{ér}$ ordre en $s=0$ et $s=1$.

CHAPITRE III : LOCALISATION DES ZEROS.

La fonction Zéta admet des zéros triviaux déterminés précédemment :

$$s = -2, -4, -6, ..., -2k, ...$$

Il faut trouver les zéros $s = \sigma + it$ pour $\sigma \succ 0$.

1. Bande critique et ligne critique.

Nous commençons par déterminer le domaine du plan complexe qui peut contenir les zéros non triviaux de $\zeta(s)$.

Le produit eulérien :

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - p^{-s}\right)^{-1} \text{ , p premier,} \qquad (1)$$

entraîne $\zeta(s) \neq 0$ dans le demi-plan $\operatorname{Re}(s) = \sigma \succ 1$,

Dans le demi-plan $\operatorname{Re}(s) = \sigma \prec 0$, l'équation fonctionnelle de $\zeta(s)$ implique $\zeta(s) = 0$ pour les zéros triviaux de $\zeta(s)$.

Il en résulte le

Théorème 1.

Les zéros non triviaux de $\zeta(s)$**, s'ils existent, se trouvent dans le domaine** $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$**.**

□

D'après l'équation fonctionnelle $F(s)$ de $\zeta(s)$, si ρ est un zéro de $\zeta(s)$, alors $1 - \rho$ est aussi un zéro, non trivial. La relation $\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$ implique :

Corollaire.

Les zéros non triviaux de $\zeta(s)$ **sont symétrique par rapport à l'axe** $\sigma = \operatorname{Re}(s) = 1/2$**.**

□

Définition 1.

1) *la bande critique associée à la fonction Zéta de Riemann est le domaine* $0 \prec \operatorname{Re}(s) \prec 1$.
2) *La ligne critique relative à la fonction Zéta de Riemann est la droite d'équation* $\sigma = 1/2$ *du plan complexe.*

Pour montrer qu'il n'y a pas de zéros sur la droite $s = 1 + it$ nous utilisons la relation :

CHAPITRE III : LOCALISATION DES ZEROS.

$$3+4\cos x+\cos 2x = 2\left(1+\cos x\right)^2 \geq 0 \qquad (1)$$

Si $s=1+it_0$ est un zéro de $\zeta(s)$, la formule d'Euler implique :

$$\zeta(s) = \exp\left(\sum_p \log\left(1-p^{-s}\right)^{-1}\right) = \exp\left(\sum_{p,m\geq 1} \frac{p^{-ms}}{m}\right) = \exp\left(\sum_{n\geq 1} c_n n^{-s}\right), \qquad (2)$$

avec $c_n = m^{-1}$ si $n=p^m$, p premier, et $c_n = 0$ sinon.
On en déduit la valeur,

$$\left|\zeta(\sigma+it)\right| = \exp\left(\operatorname{Re}\left(\sum_{n\geq 1} c_n n^{-s}\right)\right) = \exp\left(\sum_{n\geq 1} c_n n^{-\sigma}\cos t\right), \qquad (3)$$

Il en résulte,

$$\left|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma+it_0)\zeta(\sigma+i2t_0)\right| = \exp\left(\sum_{n\geq 1} c_n n^{-\sigma}\left(3+4\cos t_0+\cos 2t_0\right)\right), \qquad (4)$$

Cela implique la relation :

$$\left|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma+it_0)\zeta(\sigma+i2t_0)\right| \geq e^0 = 1, \qquad (5)$$

Il en résulte la relation :

$$\left|\left((\sigma-1)\zeta(\sigma)\right)^3\left(\zeta(\sigma+it_0)/(\sigma-1)\right)^4\zeta(\sigma+i2t_0)\right| \geq (\sigma-1)^{-1}, \qquad (6)$$

Lorsque $\sigma \to 1^+$, le membre à gauche de (4) tend vers un nombre fini $\left|\left(\zeta'(1+it_0)\right)^4\zeta(1+i2t_0)\right|$, mais le deuxième membre tend vers l'infini, ce qui contredit l'hypothèse $s=1+it_0$ est un zéro de la fonction $\zeta(s)$.
Nous avons montré que la fonction Zéta n'admet pas de zéros $\rho = 1+it$ et pas de zéros $\rho = it$. (7)

2. Calcul des premiers zéros de la fonction Zéta.

Les premières informations numériques sur les zéros sur la ligne critique $\sigma = 1/2$ ont été fournies par Gram en 1903.
Gram a utilisé la formule développée :

$$\zeta(1/2+t) = \sum_{k\leq n} k^{-1/2}\left(\cos(t\log k) - i\sin(t\log k)\right) - n^{-1/2} \times$$
$$\left(\cos(t\log n) - i\sin(t\log n)\right) \times$$

$$\left[\frac{n+2nti}{T}+\frac{1}{2}+\frac{1+2ti}{4n}\left(A_1B_3+A_1A_2B_5+...\right)\right]=C(t)+iS(t) \qquad (1)$$

avec $T=t^2+1/4$, $A_1=\dfrac{T-4-4ti}{3.4n^2}$, $A_2=\dfrac{T-16-8ti}{5.6n^2}$,… (2)

$$A_k=\frac{T-4k^2-4kti}{(2k+1)(2k+2)n^2}\ ,\ k=3,4,... \qquad (3)$$

Gram a commencé par le calcul des 10 premiers zéros $\rho_k=1/2+i\gamma_k$.

$\gamma_1=14,1347...$, $\gamma_2=21,0220...$, $\gamma_3=25,0108...$
$\gamma_4=30,4248...$, $\gamma_5=32,9350...$, $\gamma_6=37,5861...$
$\gamma_7=40,9187...$, $\gamma_8=43,3270...$, $\gamma_9=48,0051...$
$\gamma_{10}=49,7738...$

Zéros suivants,

$\gamma_{11}=50,8...$, $\gamma_{12}=56,4...$, $\gamma_{13}=59,4...$
$\gamma_{14}=61,0...$, $\gamma_{15}=65,0...$

Backlun a démontré l'existence de 79 zéros dans l'intervalle $0\prec t\prec 200$.
Hutchinson a calculé les zéros jusqu'à $t=300$.
Brent Richard P (Math of Comput. 33 (1979), 1361-1372) a publié les zéros $\rho_k=1/2+i\gamma_k$ pour $k\le 75000$.
Actuellement les méthodes modernes basées sur les logiciels de mathématiques permettent de calculer un nombre considérable de zéros $\rho=1/2+it$.

3. Hypothèse de Riemann.

Riemann a conjecturé la

Conjecture de Riemann : *tous les zéros non triviaux de la fonction $\zeta(s)$ sont sur la ligne critique $\sigma=1/2$.*

Cette conjecture a été vérifiée par le calcul de millions de zéros ; mais on ne connaît pas de démonstration de cette conjecture.

4. Fonctions $1/\zeta(s)$ et $\zeta'/\zeta(s)$.

Ces fonctions sont étudiées avec la forme :

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s} = \prod_p \left(1 - p^{-s}\right)^{-1} \text{, pour } s = \sigma + it \text{,} \qquad (1)$$

Alors on en déduit,

$$1/\zeta(s) = \prod_p \left(1 - p^{-s}\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(n) n^{-s} \ \text{, } \mu = \text{fonction de Möbius} \qquad (2)$$

$$\mu(1) = 1 \ \text{, } \mu\left(a^2 b\right) = 0 \text{, } \mu\left(p_1 ... p_t\right) = (-1)^t \qquad (3)$$

Il en résulte la relation,

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| \leq \sum_{n\geq 1} \mu(n) n^{-\sigma} = \prod_p \left(\frac{1 - p^{-2\sigma}}{1 - p^{-\sigma}}\right) = \frac{\zeta(\sigma)}{\zeta(2\sigma)} \text{,} \qquad (4)$$

Calcul du logarithme.

$$\log\left(\zeta(s)\right) = \sum_p \sum_{m\geq 1} \frac{1}{m p^{ms}} = \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s \log n} \text{,} \qquad (5)$$

Fonction $\zeta'/\zeta(s)$.

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_p \sum_{m\geq 1} \frac{\log p}{p^{ms}} = -\sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \text{,} \qquad (6)$$

La conjecture de Riemann influe sur d'autres hypothèses de mathématique :

Théorème 2. (Mertens)

Si la conjecture de Riemann est vraie, alors $M(x) = O\left(x^{1/2}\right)$

où $M(x) = \sum_{n\leq x} \mu(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-iT}^{2+iT} \frac{x^s}{s\zeta(s)} ds + O\left(x^3/T\right)$

où $T =$ **nombre réel positif.**

□

CHAPITRE III : LOCALISATION DES ZEROS.

Théorème 3. (Cramer et Landau**)**
Si l'hypothèse de Mertens est vraie, alors tous les zéros de la fonction $\zeta(s)$ sont simples.

□

Riemann a conjecturé que le nombre $N(T)$ de zéros non triviaux $\rho=\beta+i\gamma$ de partie imaginaire $0\le\gamma\le T$, est égal à :

$$N(T)=\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+O(\log T).$$

Cette formule a été prouvée par Von Mangoldt.

Théorème de Titchmarsh relatif au carré de $\left|\zeta(1/2+it)\right|$.

Soit $\zeta(1/2+it)=\left(1-2^{1/2+it}\right)^{-1}\sum_{n\ge1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{1/2+it}}$ **. Alors :**

$$\int_0^T\left|\zeta(1/2+it)\right|^2dt=T\log T-(1+\log 2\pi-2\varphi)T+O\left(T^{\varphi+\varepsilon}\right)$$

Pour $\varphi=1/3$**.**

□

Théorème 4. [7]
Soit une fonction arithmétique multiplicative $f(n)$. Alors sa fonction génératrice est égale à :

$$F(s)=\sum_{n\ge1}f(n)n^{-s}, \qquad (1)$$

$$=\prod_p\left(\sum_{k\ge0}f\left(p^k\right)p^{-ks}\right) \qquad (2)$$

lorsque la série (1) est convergente.

□

Exemples.

1) la fonction génératrice de la fonction arithmétique de Möbius est égale à :

$$F(s)=\sum_{n\ge1}\mu(n)n^{-s}=\prod_p\left(1-p^{-s}\right).$$

2) la fonction génératrice de la fonction arithmétique $\varphi(n)$ d'Euler est égale à : $F(s)=\sum_{n\geq 1}\varphi(n)n^{-s}=\prod_{p}\frac{1-p^{-s}}{1-p^{1-s}}$

.

CHAPITRE IV : APPLICATIONS DE LA FONCTION ZETA DE RIEMANN.

La fonction Zéta de Riemann admet plusieurs applications.
Nous considérons dans la suite des applications aux corps de nombres, aux formes quadratiques et aux Courbes Elliptiques.

1. Fonction Zéta de Dedekind $\zeta_K(s)$.

La fonction Zéta de Riemann a été étendue aux corps de nombres algébriques par Dedekind (1831-1916).
Nous commençons par quelques points de la théorie des corps de nombres.

Définition 1.

1) *un corps de nombres algébriques est une extension algébrique du corps* $\mathbb{Q}$ *des nombres rationnels engendré par un nombre* θ, *racine d'un polynôme irréductible* $f(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + ... + a_n$ *de l'anneau* $\mathbb{Q}[X]$, θ *non rationnel.*
2) *ce nombre* θ *est l'élément primitif du corps* $K = \mathbb{Q}(\theta)$.
3) *Le corps* $K = \mathbb{Q}(\theta)$ *est galoisien s'il contient les n racines simples* θ_1 , θ_2 ,…, θ_n *de* $f(X)$.
4) *Le polynôme* $f(X)$ *est le polynôme minimal de* θ.

Exemples.

1) $f(X) = X^2 - 10$ admet 2 zéros : $\theta_1 = \sqrt{10}$ et $\theta_2 = -\sqrt{10}$; le corps $K = \mathbb{Q}(\theta_1)$ contient θ_2, il est donc galoisien.
2) $f(X) = X^4 + 10X^2 + 39$ admet 4 zéros $\theta_i = \pm\sqrt{3} \pm \sqrt{10}$; le corps $K = \mathbb{Q}(\theta_1)$ contient les autres zéros, il est donc galoisien.
3) $f(X) = X^3 - 5$ admet 3 zéros : $\theta_1 = \sqrt[3]{5}$, $\theta_2 = j\sqrt[3]{5}$ et $\theta_3 = j^2\sqrt[3]{5}$, où j est une racine cubique de 1 : $j^3 = 1$, $1 + j + j^2 = 0$, donc le corps $K = \mathbb{Q}(\theta_1)$ n'est pas galoisien.
Les trois éléments primitifs θ_i admettent le même polynôme minimal, $f(\theta_1) = f(\theta_2) = f(\theta_3) = 0$.

CHAPITRE IV : APPLICATIONS DE LA FONCTION ZETA DE RIEMANN.

Définition 2.

Soit un corps $K=\mathbb{Q}(\theta)$ *galoisien, de polynôme minimal :*

$f(X)=(X-\theta_1)(X-\theta_2)\ldots(X-\theta_n)$, θ_i *non rationnel.*

Alors le groupe de Galois du corps $K=\mathbb{Q}(\theta)$ *est le groupe* $G=Gal(K/\mathbb{Q})$ *qui permute les n zéros* $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n$ *:*

$G=\{\sigma_1=Id,\sigma_2,\ldots,\sigma_n\}$, $\sigma_1(\theta_1)=\theta_1$, $\sigma_2(\theta_1)=\theta_2,\ldots,\sigma_n(\theta_1)=\theta_n$.

C'est un groupe fini d'élément neutre $\sigma_1=Id$ *et d'ordre n.*

Les images $\sigma_t(K)$ du corps K sont des corps réels ou complexes.
Il en résulte la relation :

$n=r_1+2r_2$, r_1 conjugués réels $\sigma_1(K),\ldots,\ \sigma_{r_1}(K)$,

et $2r_2$ conjugués complexes $\sigma_{r_1+1}(K),\ldots,\ \sigma_{r_1+r_2}(K)$ et leurs r_2 conjugués par $a+ib\to\overline{a+ib}=a-ib$.

Nous nous intéresserons à 2 types de corps de nombres :
Les corps quadratiques et les corps cyclotomiques.

Corps quadratiques d'après Weiss (Théorie Algébrique des Nombres).
Un corps quadratique est un corps $K=\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, où m est un entier rationnel sans facteur carré.
K est réel si $m\succ 0$; alors $r_1=2$, $r_2=0$ et $n=2$.
K est complexe si $m\prec 0$; alors $r_1=0$, $r_2=1$ et $n=2$.
Le groupe de Galois est $G=\{Id,\sigma\}$, il opère sur K :

$$\sigma\left(a+b\sqrt{m}\right)=a-b\sqrt{m}\text{, pour tout } a,b\in\mathbb{Q}.$$

L'anneau des entiers de K est un anneau commutatif $A(K)$ de base :

$$e_1=1,\ e_2=\sqrt{m}\qquad \text{si } m\equiv 2,3 \bmod 4,$$

$$e_1=1,\ e_2=\frac{1+\sqrt{m}}{2}\qquad \text{si } m\equiv 1 \bmod 4.$$

Il en résulte le discriminant de K :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{m} \\ 1 & -\sqrt{m} \end{vmatrix}^2 = 4m \qquad \text{si} \quad m \equiv 2,3 \bmod 4,$$

$$\text{et} \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 1+\sqrt{m}/2 \\ 1 & 1-\sqrt{m}/2 \end{vmatrix}^2 = m \qquad \text{si} \quad m \equiv 1 \bmod 4.$$

L'anneau $A(K)$ des entiers de K est un anneau de Dedekind. Il contient des idéaux premiers et des idéaux composés. La décomposition d'un idéal de cet anneau dépend du symbole de Legendre d'un nombre premier $p \in \mathbb{N}$ et d'un nombre $a \in \mathbb{Z}$.

Définition 3.

Soit un entier $a \in \mathbb{Z}$ est un nombre premier impair $p \in \mathbb{N}$; le symbole de Legendre associé $\left(\frac{a}{p}\right)$ est égal à :

$\left(\frac{a}{p}\right) = +1$ *si a est un carré modulo p ;*

$\left(\frac{a}{p}\right) = -1$ *si a n'est un carré modulo p ;*

$\left(\frac{a}{p}\right) = 0$ *si a est divisible par p.*

Exemples.

Pour $p = 37$.

$$\left(\frac{5^2}{37}\right) = \left(\frac{6^2}{37}\right) = \left(\frac{10^2}{37}\right) = \left(\frac{20^2}{37}\right) \; ;$$

il y a 18 carrés modulo 37, ce sont les entiers : 1, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 16, 17, 21, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 33, 34 ;

donc $\left(\frac{5}{37}\right) = \left(\frac{8}{37}\right) = \left(\frac{13}{37}\right) = \left(\frac{20}{37}\right) = -1$;

Ce symbole de Legendre satisfait la relation :

CHAPITRE IV : APPLICATIONS DE LA FONCTION ZETA DE RIEMANN.

$\left(\frac{a^2}{p}\right)=1$, $\left(\frac{a^2b}{p}\right)=\left(\frac{b}{p}\right)$ pour tous entiers $a,b\in\mathbb{Z}$.

Loi de réciprocité quadratique :

$$\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{p}{q}\right)=\left(-1\right)^{(p-1)(q-1)/4}$$ pour p et q premiers impaires.

Exemples :

$$\left(\frac{3}{11}\right)=\left(\frac{11}{3}\right)=\left(-1\right)^{2\times10/4}=-1\ ,$$

$$\left(\frac{5}{13}\right)=\left(\frac{13}{5}\right)=\left(-1\right)^{4\times12/4}=+1\ .$$

Le symbole de Legendre pour $p=2$.

$\left(\frac{a}{2}\right)=+1$ si $a\equiv 1 \bmod 8$ et $\left(\frac{a}{2}\right)=-1$ si $a\equiv 5 \bmod 8$.

Chaque nombre premier $p\in\mathbb{N}$ implique un idéal $pA(K)$ dans l'anneau $A(K)$. La décomposition de cet idéal est précisé par le

Théorème 1.

Soit un corps quadratique $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{m}\right)$**,** m **entier sans facteur carré ; soit un nombre premier** $p\in\mathbb{N}$ **et l'idéal** $pA(K)$ **qu'il engendre, alors :**

1) $pA(K)=P_1P_2$**,** P_i **idéaux premiers de** $A(K)$**, conjugués, de même norme** $N(P_1)=N(P_2)=p$**, si** p **premier à** m **et** $\left(\frac{m}{p}\right)=+1$**.**

2) $pA(K)=P^2$**,** $P=$ **idéal premier de norme** $N(P)=p$**, si** p **divise** m**.**

3) $pA(K)=P$**,** $P=$ **idéal premier de norme** $N(P)=p^2$**, si** $\left(\frac{m}{p}\right)=-1$ **.**

Preuve : Weiss- Algebraic Numbers Theory.

□

CHAPITRE IV : APPLICATIONS DE LA FONCTION ZETA DE RIEMANN.

Définition 4.

1) *un nombre premier impair p est décomposé dans* $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{m}\right)$ *si* $pA(K)=P_1P_2$,
2) *un nombre premier impair p est ramifié dans K si* $pA(K)=P^2$**,**
3) *un nombre premier impair est inerte dans K si* $pA(K)=P$.

Théorème 2.

Soit un corps quadratique $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{m}\right)$**,** m **entier sans facteur carré, de discriminant** D**. Alors :**

1) **si** $m\equiv 1 \bmod 8$ **,** $2A(K)=P_1P_2$ **,** $P_1=\left(2,1+\sqrt{m}/2\right)$ **et** $P_2=\left(2,1-\sqrt{m}/2\right)$ **idéaux premiers distincts de** $A(K)$**.**
2) **si** $m\equiv 5 \bmod 8$**,** $2A(K)=P=$ **idéal premier de** $A(K)$**.**

Preuve : Weiss.

□

Nous ne traiterons pas le chapitre relatif aux idéaux équivalents et aux classes d'idéaux d'un corps *K*, ces notions débordent le cadre de notre étude.

La fonction Zéta de Dedekind d'un corps quadratique *K* est égale à la fonction de la variable complexe s :

$$\zeta_K(s)=\prod_{p\ premier}\prod_{P/p}\left(1-N(P)^{-s}\right)^{-1}, \text{ où } P=\text{idéal premier de } K. \qquad (1)$$

L'existence de 3 types de décomposition des idéaux $pA(K)$ implique la décomposition de (1) en produit :

$$\zeta_K(s)=S_1S_2S_3 \quad ; \qquad (2)$$

Contribution à $\zeta_K(s)$ des idéaux p ramifiés :

$$S_1=\prod_{p\ ramifiés}\left(1-p^{-2s}\right)^{-1} \quad ; \qquad (3)$$

Contribution à $\zeta_K(s)$ des idéaux p décomposés :

$$S_2=\prod_{p\ décomposés}\left(1-p^{-s}\right)^{-2} \quad ; \qquad (4)$$

Contribution à $\zeta_K(s)$ des idéaux p inertes :

CHAPITRE IV : APPLICATIONS DE LA FONCTION ZETA DE RIEMANN.

$$S_3 = \prod_{p\ inertes} \left(1 - p^{-2s}\right)^{-1} \ . \qquad (5)$$

Cas des corps cyclotomiques.

Définition 5.

Le n^e corps cyclotomique est le corps $K = \mathbb{Q}(z_n)$ engendré par une racine primitive n^e de l'unité :

$$z_n = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right), \qquad (1)$$

Le polynôme minimal de z_n est le $n^{éme}$ polynôme cyclotomique.
Ces polynômes sont construits avec le polynôme $f(X) = X^n - 1$,

$$X^n - 1 = \prod_{d/n} f_d(X) \ . \qquad (2)$$

Il en résulte :

$$f_p(X) = \frac{X^p - 1}{X - 1} = X^{p-1} + X^{p-2} + ... + X + 1, \text{ pour tout nombre } 1^{\text{er}}\ p, \qquad (3)$$

$$f_n(X) = \prod_{d/n} \left(X^{n/d} - 1\right)^{\mu(n)} \ ; \qquad (4)$$

Théorème 3.

Le n^e corps cyclotomique $K = \mathbb{Q}(z_n)$ est une extension abélienne de degré $\varphi(n)$ du corps $\mathbb{Q}$, φ = fonction arithmétique d'Euler
Son groupe de galois est abélien d'ordre φ(n).

□

Théorème 4.

La décomposition des idéaux premiers $p\mathbb{Z}$ dans le n^e corps cyclotomique $K = \mathbb{Q}(z_n), n = p^2 n_0$, n_0 premier à p.

1) **Ramification de p.**

   $pA(K) = (p_1 ... p_g)^e$ **avec** $e = \phi(p^2)$, $p^f \equiv 1 \bmod n_0$, $fg = \phi(n_0)$.

   Et P_i = idéaux premiers conjugués de norme $NP_i = p^f$.

2) **Décomposition des nombres premiers q qui ne divisent pas n.**

CHAPITRE IV : APPLICATIONS DE LA FONCTION ZETA DE RIEMANN.

$qA(K) = p_1 ... p_g$ **avec** $q^f \equiv 1 \bmod n$ **,** $fg = \phi(n)$ **et** $NP_i = p^f$ **.**

□

La fonction Zéta de Dédekind du corps K_n est égale à :

$$\zeta_{K_n}(s) = \prod_{p \ premier} \prod_{P/p} \left(1 - N(P)^{-s}\right)^{-1}$$

$$= \prod_p \left(1 - p^{-fs}\right)^{-1}.$$

Exemple :

Le 15^e corps cyclotomique : $n = 15 = 3 \times 5$.
Il y a 2 nombres premiers ramifiés : $p = 3,5$.
Pour $p = 3$, $fg = 4$; $3^f \equiv 1 \bmod 5$ implique $f = 4$ et $g = 1$.
donc $3A(K) = P^2$ avec $N(P) = 3^4$.
Pour $p = 5$, $fg = 2$; $5^f \equiv 1 \bmod 3$ implique $f = 2$ et $g = 1$.
donc $5A(K) = P^2$ avec $N(P) = 5^2$.

Calcul des contributions S_1, S_2, S_3, S_4 à $\zeta_K(s)$.

$$S_1 = \left(3 - 1^{-8s}\right)^{-1}$$

$$S_2 = \prod_{p \equiv 1 \bmod 15} \left(1 - p^{-s}\right)^{-8}$$

$$S_3 = \prod_{p \equiv 4,11,14 \bmod 15} \left(1 - p^{-2s}\right)^{-4}$$

$$S_4 = \prod_{p \equiv 2,7,8,13 \bmod 15} \left(1 - p^{-4s}\right)^{-2} .$$

Nous en déduisons la fonction $\zeta_K(s)$ de Dedekind du 15^e corps cyclotomique

$$\zeta_K(s) = S_1 S_2 S_3 S_4 \ .$$

Cette fonction converge dans le domaine $\mathrm{Re}(s) > 1$.

La fonction Zéta de Dedekind d'un corps *K* est liée aux invariants de ce corps.

CHAPITRE IV : APPLICATIONS DE LA FONCTION ZETA DE RIEMANN.

Théorème 4.
Soit K un corps de nombres.

1) **la fonction Zéta de Dedekind $\zeta_K(s)$ admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec un pôle simple en s=1 de résidu:**

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(s)=\frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}h_K R_K}{\omega_K\sqrt{|D_K|}} .$$

où $n=r_1+2r_2$ **,** r_1 **conjugués réels et** $2r_2$ **conjugués complexes** $\sigma(K)$**,** $h_K=$ **nombre de classes d'idéaux de** K**,** $R_K=$ **régulateur de** K**,** $D_K=$ **discriminant de** K **et** ω_K **= nombre de racines de l'unité contenues dans** K **.**

2) **la fonction Zéta de Dedekind $\zeta_K(s)$ vérifie l'équation fonctionnelle:**

$$\xi_K(s)=\xi_K(1-s) .$$

Avec $\xi_K(s)=\left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-s/2}\right)^{r_1}\left((2\pi)^{-s}\Gamma(s)\right)^{r_2}(D_K)^{s/2}\zeta_K(s)$**.**

□

2. Fonction Zéta de formes quadratiques .

Soit une forme quadratique entière :

$$q(x,y)=ax^2+bxy+cy^2.$$

Alors sa fonction Zéta associée est égale à :

$$\zeta_q(s)=\sum_{x,y\in,q(x,y)\neq 0}|q(x,y)|^{-s};$$

$$=\prod_{p/q(x,y)}\left(1-p^{-s}\right)^{-1};$$

Exemple.

$$q(x,y)=2x^2-3xy+y^2;$$

Alors :

$$\zeta_q(s)=1+2^{-s}+4^{-s}+6^{-s}+13^{-s}+...,$$

pour les valeurs $q=1,2,4,6,\dots$

CHAPITRE IV : APPLICATIONS DE LA FONCTION ZETA DE RIEMANN.

Signalons la contribution de P.T.Bateman (Urbana, Illinois) et E.Grosswald (Philadelphia) à l'étude de la fonction Zéta d'Epstein :

$$Z(s)=\frac{1}{2}\sum\left(am^2+bmn+cn^2\right)^{-s} \text{ pour } \operatorname{Re}(s)\succ 1.$$

Polynôme $f(x,y)=aX^2+bXY+cY^2\in\mathbb{R}[x,y], a\succ 0, b^2-4ac\prec 0$.

Cela implique que

$f(m,n)=am^2+bmn+cn^2$ est une forme quadratique définie positive.

3. Séries de Dirichlet-Hasse des Courbes Elliptiques

Commençons par quelques éléments de la Théorie des Courbes Elliptiques :

D'après l'ouvrage de référence [18], une Courbe Elliptique est une cubique de Weierstrass d'équation spécifique :

$$E: y^2+a_1xy+a_3y=x^3+a_2x^2+a_4x+a_6\in K[x,y] \qquad (1)$$

où K est un corps global, local ou fini.

Elle possède des invariants :

$$b_2=a_1^2+4a_2 \;;\; b_4=a_1a_3+2a_4 \;;\; b_6=a_3^2+4a_6 \;,\; c_4=b_2^2-24b_4 \;;$$

Un discriminant :

$$\Delta(E)=9b_2b_4b_6-8b_4^3-27b_6^2-b_2^2b_8 \quad \text{avec } 4b_8=b_2b_6-b_4^2,$$

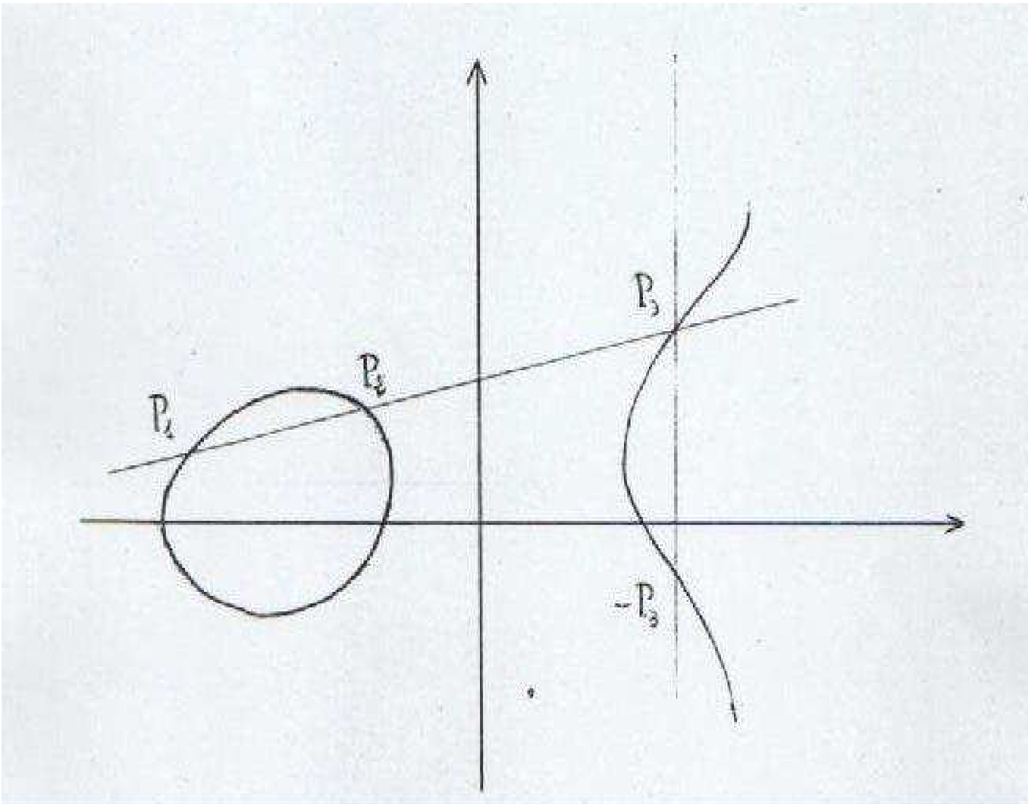
Un invariant modulaire $j(E)=\dfrac{c_4^3}{\Delta(E)}$, etc.

Il y a 4 types de cubiques de Weierstrass :

a) cubique singulière avec un nœud pour $\Delta(E)=0$ et $c_4\neq 0$,
b) cubique singulière avec un point de rebroussement pour $\Delta(E)=c_4=0$,
c) Courbe Elliptique formée d'une seule branche pour $\Delta(E)\prec 0$,
d) Courbe Elliptique formée d'une branche fermée finie et d'une branche ouverte infinie si $\Delta(E)\succ 0$.

CHAPITRE IV : APPLICATIONS DE LA FONCTION ZETA DE RIEMANN.

L'ensemble $E[K]$ des points $P=(x,y)$ rationnels de E est muni d'une structure de groupe abélien de type fini avec la règle géométrique de 3 points colinéaires de E.



Le point 0_E est le point à l'infini :

$0_E=(\infty,\infty)$ dans le plan affine, $\mathrm{A}^2=\{(x,y)\}$

$0_E=(0,1,0)$ dans plan projectif $\mathrm{P}^2=\{(x,y,z)\}$

CHAPITRE IV : APPLICATIONS DE LA FONCTION ZETA DE RIEMANN.

Définition 6. :
Le groupe addictif abélien $E(K)$ *est le groupe de Mordell-Weil de* E.

Théorème 5. (Mordell)
Le groupe de Mordell-Weil $E(K)$ **est isomorphe à un produit de 2 groupes abéliens :**

$$E(K) \simeq \mathbb{Z}^r \times Tor(E) \text{ ,}$$

où $\mathbb{Z}$ **est le groupe additif abélien** $\mathbb{Z}$, $Tor(E)$ **est le groupe de torsion de** E **qui est fini .**
$r = rg(E) =$ **entier naturel = rang arithmétique de la Courbe Elliptique** $E =$ **nombre de points** $P = (x, y)$ **de** E **d'ordre infini.**

□
Les groupes de torsion des Courbes Elliptiques $E/\mathbb{Q}$ ont été décrits par Mazur B. "Rational isogenies of prime degree, inventiones Mathematicae 44 (1978)- p 129-162" :

Théorème6.
Soit une Courbe Elliptique $E/\mathbb{Q}$ **. Alors son groupe de torsion** $T\left[E(\mathbb{Q})\right]$ **est l'un des 15 groupes abéliens finis suivants .**

$\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ **pour** $1 \le N \le 10$ **ou** $N = 12$ **;**
$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2N\mathbb{Z}$ **pour** $1 \le N \le 4$

□
Les séries $L(E,s)$ des Courbes Elliptiques fournissent des renseignements sur les réductions des Courbes Elliptiques. Elles ont engendré quelques conjectures.

Définition 7.
La série de Dirichlet-Hasse d'une Courbe Elliptique E/K *est le produit eulérien :*

$$L(E,s) = \prod_{v \in M(K)} L_v\left(q_v^{-s}\right)^{-1} \text{ ,}$$

où $M(K)$ *est l'ensemble des places du corps* K *où* E *admet une bonne réduction.*

CHAPITRE IV : APPLICATIONS DE LA FONCTION ZETA DE RIEMANN.

La réduction d'une Courbe Elliptique E modulo un nombre premier p est l'application :

$$K \to \overline{K}$$
$$a \to \overline{a} \equiv a \bmod p.$$

Exemple.

$$E = y^2 + 39xy - 93y = x^3 + 48x^2 + 71x + 120 \in \mathbb{Q}[x, y]$$

La réduction modulo $p = 3$ transforme E en la courbe réduite

$$E(3) : \overline{y}^2 = \overline{x}^3 + 2\overline{x} \in \mathbb{F}_3[x, y]$$

La réduction modulo $p = 5$ transforme E en la courbe réduite

$$E(5) : \overline{y}^2 + 4\overline{x}\overline{y} + 3\overline{y} = \overline{x}^3 + 3\overline{x}^2 + \overline{x} \in \mathbb{F}_5[x, y]$$

La réduction est bonne si la courbe réduite est une Courbe Elliptique : $\Delta(E) \neq 0$

La réduction est mauvaise si la courbe réduite n'est pas une Courbe Elliptique : $\Delta(E) = 0$.

Sur le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, la série de Dirichlet-Hasse d'une Courbe Elliptique $E/\mathbb{Q}$ est de la forme :

$$L(E,s) = \prod_p \left(1 - a_p p^{-s}\right)^{-1} \prod_q \left(1 - a_q q^{-s} + q^{1-2s}\right)^{-1}$$

où $p =$ diviseurs premiers du discriminant $\Delta(E)$,

$q =$ les nombres premiers qui ne divisent pas $\Delta(E)$,

$a_r = p + 1 - t_r$

$t_r =$ nombre de points de la courbe réduite $\overline{E}$ modulo r ,

Ce produit $L(E,s)$ converge dans le domaine $\mathrm{Re}(s) \succ 3/2$.

Conjecture 1 :

La série $L(E,s)$ admet un prolongement analytique dans le plan complexe et elle satisfait une équation fonctionnelle :

$$F(s) = \pm F(2-s) \textbf{ où}$$

$$F(s) = N(E)^{s/2} L(E,s).\Gamma(s)(2\pi)^{-s} \textbf{ ;}$$

CHAPITRE IV : APPLICATIONS DE LA FONCTION ZETA DE RIEMANN.

$N(E) =$ ***conducteur de*** $E = \prod_p p^f$ **,** $p =$ ***diviseur de*** $\Delta(E)$ ***et*** $f \succ 0$**.**

D'après "Elliptic curves and wild ramification (Amer Jour of Math 89 (1967) p 1-21)

□

Conjecture 2 . (Taniyama-Weil)

Soit une Courbe Elliptique $E/\mathbb{Q}$ ***de conducteur*** $N(E)$ ***, sa série*** $L(E,s)$ ***et la transformée de Mellin*** $f(z) = \sum_n c_n \exp(2\pi i n z)$ ***de*** E***, alors :***

a) $f(z)$ ***est une forme parabolique pour le sous groupe de congruence*** $\Gamma_0(N)$ ***du groupe modulaire*** $SL(2;\mathbb{Z})$**.**

b) pour chaque premier p ***ne divisant pas*** $N(E)$ ***, soit l'opérateur de Hecke*** $T(p)$ ***; alors*** $T(p)f = c_p f$.

□

Conjecture de Birch et Swinnertan-Dyer .

a) $L(E,s)$ ***admet un zéro en*** $s = 1$ ***d'ordre égal au rang de*** E ***,***

b) soit $r =$ ***rang de*** $E(\mathbb{Q})$ ***; alors***

$$\lim_{s\to 1}(s-1)^{-r} L(E,s) = \Omega\left|Ш(E/\mathbb{Q})\right|.R(E).\left|Tor(Q)\right|^{-2}.\prod_p(c_p)$$

où $\prod_p(c_p)$ ***,*** $|T| =$***nombre d'éléments de*** T ***,***

$Ш(E/\mathbb{Q})$ ***= groupe de Shafarvich-Tate de*** $E/\mathbb{Q}$ ***.***

$R(E) =$ ***régulateur de*** E ***;***

$Tor(Q)$ ***= groupe de torsion du groupe de Mordell-Weil*** $E(\mathbb{Q})$ ***,***

$c_p =$ ***coefficient de*** $L(E,s) = \sum c_n n^{-s}$ ***pour*** $n = p$ ***.***

Cette conjecture B-S-D introduit un rang $r(E)$ qui n'est pas le rang arithmétique $r(E)$ du théorème de Mordell-Weil : $E(K) \simeq \mathbb{Z}^r \times Tor(E)$**.**

Le rang $r(E)$ de la conjecture est le rang analytique $r_{ana}(E)$.

L'égalité $r(E) = r_{ana}(E)$ a été vérifiée dans des cas particuliers. Elle n'a pas été prouvée à ce jour.

Conclusion.

Je constate que cette étude que je présente ici m'a demandé beaucoup d'efforts et beaucoup de références. Cependant, elle demeure incomplète. Il reste beaucoup à faire dans les domaines de la Théorie des Nombres, des fonctions de variables complexes (fonctions de Weierstrass, fonctions elliptiques), des Courbes Elliptiques (sur les corps finis, sur les corps locaux, invariants , etc.…)

Ce sera l'objectif de mes prochains travaux de recherche.

References.

[1] APOSTOL, Tom: Modular functions and Dirichlet series in Number Theory. Edit – Springer-GTM 41(1990).

[2] BRENDT Richard P : Les zéros de la fonction Zéta de Riemann sur la ligne critique. Mathematic of Computation 33-n° 148 (1979) p 1361-1377.

[3] EDWARDS. H.M : Riemann's Zeta function. Academic press(1974).

[4] GRAM.J.P : Sur les zéros de la fonction Zéta de Riemann. Acta Mathematica n° 27 (1903) p 289-304.

[5] HARDY. G.H: A course of Pure Mathematics. Tenth Ed. Cambridge University Press (1963).

[6] HARDY.G.H: Divergent Series. Oxford-Clarendon Press-London(1967).

[7] HARDY.G.H and WRIGHT.E: An introduction to The Theory of Numbers.Fourth Ed, Oxford University Press (1960).

[8] IVIC,Alexandear: The Riemann Zeta function. John Wiley-Sons-New York (1985).

[9] IVIC, Alexandar and Michel QUELLET: Some new estimates in The Dirichlet Division Problem. Acta Arithmetica 52 (1988) 12p.

[10] LANG, Serge: Elliptic Curves – Diphantine Analysis. SpringerVerlag-New York (1978).

[11] LANG, Serge: Complex Analysis. 3eEd-GTM 103 (1985).

[12] OGG, Andrew: Modular Forms and Dirichlet Series. University of California-W.A.Benjamin,INC, New York (1969).

[13] POITOU, Georges : Fonctions Zéta de Dedekind et leurs Applications. Séminaire de Théorie des nombres à Alger-USTHB-Octobre (1984).

[14] RADEMACHER, Hans : Topics in Analytic Number Theory-Spriger (1973).

[15] RIEMANN, Bernard : Uber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. Monatsber der Berliner Akad (1859).

[16] SERRE, Jean Pierre: A course of Arithmetic. GTM 7 –Springer (1993) 3eédition.

[17] SHIMURA, Goro: Introduction to The Arithmetic Theory of Automorphic Functions. Princeton University Press (1971).

[18] SILVERMAN, Joseph H: The Arithmetic of Elliptic Curves. GTM 106-Springer (1986).

[19] STARK.H.M : The Analytic Theory of Algebraic Numbers. Bulletin of the American Mathematical Soc.41-n°6 (Nov 1975).

[20] TITCHMARSH, E.C : The Theory of the Riemann Zeta function.Clarendon Press – Oxford-London (1951).
[21] ZITOUNI Mohamed : Géometrie, Arithmetique et Algorithmique des Courbes Elliptiques. OPU-Alger (2007).

Fonction Zéta de Riemann et applications.

Résumé :

Dans ce mémoire, j'ai étudié la fonction Zéta de Riemann, la localisation de ses zéros ; et nous avons examiné quelques applications de cette fonction : fonction Zéta de Dedekind liée aux corps de nombres algébriques, fonction Zéta d'Epstein liée aux formes quadratiques, et la série de Dirichlet-Hasse d'une Courbe Elliptique.

Mots clés :

Fonction Zéta de Riemann, fonction Zéta de Dedekind, corps de nombres, fonction Zéta d'Epstein, Série de Dirichlet-Hasse, Courbe Elliptique.

Riemann's Zeta function and applications.

Abstract :

In this Memory, I studied the Riemann Zeta function, the localization of its zeros; and I examined some applications of this function: the Dedekind Zeta function related to an algebraic number field, the Epstein Zeta function related to quadratic forms, and the Dirichlet-Hasse series of Elliptic curves.

Key words :

Riemann Zeta function, Dedekind Zeta function, algebraic number field, Epstein Zeta function, Dirichlet-Hasse series, Elliptic curves.

الدالة زيتا لريمان و تطبيقاتها

ملخص:
في هذه المذكرة، قمنا بدراسة الدالة زيتا لريمان، و تموقع أصفارها، وقمنا بفحص بعض تطبيقات هذه الدالة: الدالة زيتا لديدكند المتعلقة بحقول الأعداد الجبرية، الدالة زيتا لابشتين المتعلقة بالأشكال المربعية،وسلاسل ديريكلي-هاس المتعلقة بالمنحنيات الاهليلجية.

الكلمات المفاتيح:
الدالة زيتا لريمان، الدالة زيتا لديدكند، حقول الأعداد الجبرية، الدالة زيتا لابشتين، سلاسل ديريكلي-هاس، المنحنيات الاهليلجية.