

UNIVERSITE DE CONSTANTINE
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

THESE DE MAGISTER

**OPTION : MATHÉMATIQUES
APPLIQUÉES**

**MENTION: ANALYSE NUMÉRIQUE
DES E.D.P**

THEME

**METHODES MIXTES POUR LA
DISCRETISATION
DES EQUATIONS D'ELASTICITE AU MOYEN
DES ELEMENTS FINIS**

PRESENTEE PAR

***M^{lle}* ABADA Nadjat**

Soutenu Le 06/10/1995 : Devant La Commission d'Examen

1- H.SISSAOUI	MC (Université d'Annaba)	PRESIDENT
2- N.KECHKAR	MC (Université de Constantine)	RAPPORTEUR
3- F.REBBANI	MC (Université d'Annaba)	EXAMINATEUR
4- F.Z. NOURI	MC (Université d'Annaba)	EXAMINATEUR
5- M. DENCHE	MC (Université de Constantine)	EXAMINATEUR

RESUME

L'objet de ce travail réside dans l'extention de la nouvelle méthodologie de la stabilisation des méthodes mixtes des éléments finis pour la résolution numérique des équations d'ELASTICITE. En particulier, l'introduction de termes additionnels adéquats à la formulation discrète de Galerkin permet à certaines méthodes notoirement prohibées, d'être utilisées. Des conditions suffisantes sur ces termes, qui s'avèrent réalisables, rétablissent la stabilité et la convergence des méthodes mentionnées. L'efficacité de la présente approche peut être illustrée au moyen d'exemples pratiques.

MOIS CLES

EQUATIONS D'ELASTICITE, ELEMENTS FINIS, STABILISATION.

REMERCIEMENTS

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance et mes sincères remerciements à Monsieur N. KECHKAR Maître de conférence à l'Université de Constantine, qui n'a cessé de me prodiguer de précieux conseils et m'a aimablement guidée le long de toutes mes recherches afin de faire aboutir cette thèse.

Je remercie vivement Monsieur H.SISSAOUI qui m'a fait l'honneur de présider le jury.

Je tiens également à remercier :

-M^{me} F.Z.NOURI de l'Université d'Annaba.

-M^{elle} F.REBANI de l'Université d'Annaba.

-M^{er} M.DENCHE De l'Université de Constantine.

qui ont bien voulu faire partie du jury.

Je remercie vivement les responsables de l'Institut de Technologie de Constantine pour toute l'aide précieuse qu'ils m'ont toujours fournie.

Bien sûr, je n'oublie pas d'exprimer ici mon immense reconnaissance ainsi que mon estime aux collègues et amies enseignantes de l'Institut de Mathématiques. Elles ont manifesté un intérêt constant à ce travail. Leurs présence a été pour moi une source permanente de soutien.

Ainsi qu'à tous ceux qui ont participés de près ou de loin à la réalisation de ce travail

Qu'ils trouvent tous ici, mon estime et l'expression de mon entière reconnaissance.

TABLE DE MATIERES

- INTRODUCTION	
- PREMIER CHAPITRE	
FORMULATION FAIBLE POUR LE PROBLEME D'ELASTICITE	
1-1. Equations d'ELASTICITE	1
1-2. Espaces de Sobolev	5
1-3. Formulation variationnelle	8
1-4. Methodes des éléments finis	25
- DEUXIEME CHAPITRE	
THEORIE GENERALE DES METHODES MIXTES D'ELEMENTS FINIS	
2-1. Methodes mixtes des éléments finis pour le problème du point-selle	34
2-2. Methodes mixtes d'éléments finis pour le problème d'ELASTICITE lineaire	38
2-3. Les couples d'éléments finis stables et instables pour le problème de STOKES	47
2-4. Une méthode stable de TAYLOR-HOOD pour le problème d'ELASTICITE	58
- TROISIEME CHAPITRE	
STABILISATION DES METHODES MIXTES POUR LE PROBLEME D'ELASTICITE	
3-1 Hypothèses générales	74
3-2 Stabilité des formulations discrètes	76
3-3 Convergence des solutions discrètes	96
- QUATRIEME CHAPITRE	
EXEMPLES DE STABILISATION	
4-1. Technique de stabilisation n°1	105
4-2. technique de stabilisation n°2	109
4-3. CONCLUSION GENERALE	115
- BIBLIOGRAPHIE	116

INTRODUCTION

Les sciences de l'ingénieur (mécanique des solides et des fluides, énergétique) permettent de décrire le comportement de systèmes physiques grâce à des équations aux dérivées partielles.

La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées, et la mieux développée durant les deux dernières dizaines d'années pour résoudre effectivement ces équations. C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique : problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions.

La méthode des éléments finis conforme est connue pour donner de bonnes approximations dans certains cas, mais elle peut conduire dans d'autres cas, à des approximations non convergentes, par exemple, le cas des équations d'élasticité linéaire incompressible. Ce qui montre l'insuffisance de cette méthode pour ce genre de cas. Alors, on se trouve à utiliser une autre méthode connue sous le nom : LES METHODES MIXTES DES ELEMENTS FINIS .

Les méthodes mixtes des éléments finis pour la résolution numérique des problèmes de point-selle sont assujetties à certaines conditions de consistance et de stabilité afin de garantir la convergence de la solution approchée vers la solution exacte . Ce sont la K-ellipticité et la célèbre BABUSKA-BREZZI qui ont été établies par BABUSKA [3] et BREZZI [9].

Pour le problème d'élasticité linéaire incompressible, la

vérification de la condition de BABUSKA-BREZZI est immédiate, la difficulté réside dans la satisfaction de la condition d'ellipticité. Cependant, cette difficulté peut être transportée à un problème de Stokes associé, et se transforme par la vérification de la condition de BABUSKA-BREZZI pour ce dernier.

Parmi les couples des éléments finis stables les plus connus, nous citons, l'élément mixte TAYLOR-HOOD, le mini-élément, l'élément RAVIART-THOMASMalheureusement, quelques uns de ces éléments ne sont pas simples à réaliser du fait de leur coût élevé. Malgré tout, l'obstacle créé par la satisfaction de la condition d'ellipticité rend prohibée l'utilisation de beaucoup de combinaisons convenables pour les espaces approchés, en particulier, celles utilisant le même ordre d'interpolation ainsi que le bas ordre.

Le soucis d'employer les méthodes mentionnées ci dessus a obligé beaucoup de chercheurs à penser à contourner l'obéissance directe à la technique de Galerkin et ce, en changeant la formulation approchée par l'addition de certains termes de perturbation (cf BREZZI-PIIKARANTA [10], FRANCA [14], FRANCA-HUGHES [15], LUULA [22]. entre autres).

Dans le présent travail, on se propose d'étendre l'expérience acquise avec le problème de Stokes (voir ZAAMA [34]) pour construire de nouvelles formulations approchées pour le problème d'Elasticité. Evidemment, la principale condition imposée à ces dernières est qu'elles permettent l'emploi d'une classe plus large de méthodes mixtes des éléments finis, sans toute fois perdre en termes de consistance et de convergence, et c'est le but

de notre travail.

Dans le premier chapitre, on présente une brève introduction sur les équations d'élasticité avec leurs conditions aux limites. De plus, quelques notions et résultats d'analyse fonctionnelle sont donnés. Ensuite, on déduit une formulation variationnelle du problème d'élasticité. Enfin, on termine en donnant un bref aperçu sur la méthode des éléments finis.

Dans le deuxième chapitre, on présente les méthodes mixtes des éléments finis pour l'approximation numérique du problème d'élasticité et sa théorie classique sur la stabilité. De plus, on donnera quelques exemples des méthodes mixtes stables et instables pour le problème de Stokes, ainsi que pour le problème d'élasticité.

L'objet du troisième chapitre réside dans l'extension de la nouvelle méthodologie de la stabilisation des méthodes mixtes des éléments finis pour la résolution numérique des équations d'élasticité. ceci consiste à modifier la formulation approchée tout en gardant les mêmes espaces d'approximation; en particulier, celles qu'étaient non fiables dans le cadre de la méthode de Galerkin, et ceci en y ajoutant des termes de perturbation. Des conditions suffisantes imposées à ces dernières nous permettent d'utiliser une classe plus large de méthodes mixtes des éléments finis, sans toute fois perdre la consistance et la convergence.

Dans le dernier chapitre, on illustre numériquement la validité de la théorie développée dans le chapitre précédemment au moyen d'exemples simples.

PREMIER CHAPITRE

FORMULATION VARIATIONNELLE DU PROBLÈME D'ÉLASTICITÉ

1-1 EQUATIONS D'ÉLASTICITÉ

1-2 ESPACES DE SOBOLEV

1-3 FORMULATION VARIATIONNELLE

1-4 MÉTHODES DES ÉLÉMENTS FINIS

Dans ce chapitre, on donne une brève introduction sur les équations d'élasticité avec leurs conditions aux limites. De plus, quelques notions et résultats d'analyse fonctionnelle sont énoncés

Ensuite, la formulation variationnelle du problème considéré est déduite. On termine le présent chapitre en donnant un bref aperçu sur la méthode des éléments finis.

1-1 EQUATIONS D'ELASTICITE

Soit Ω un domaine de corps élastique dans \mathbb{R}^n , ($n = 2, 3$); Γ étant sa frontière, supposée régulière.

On considère, ici, une réaction linéaire élastique d'un corps homogène et isotropique, avec l'imposition d'un déplacement nul sur la frontière Γ et soumis à un champ de forces $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Le problème consiste à trouver le tenseur symétrique $\sigma = \sigma^t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, et le champ de déplacements $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, qui satisfont :

(a)- L'équation d'équilibre :

$$\operatorname{div} \sigma + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1-1)$$

(b)- L'équation constitutive :

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \left[\sigma - \frac{1-\rho}{n} (\operatorname{tr} \sigma) \cdot I \right] \quad \text{dans } \Omega \quad (1-2)$$

avec

$$\varepsilon(u) = \frac{\nabla u + (\nabla u)^t}{2} \quad (1-3)$$

(c)- Les conditions aux limites

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (1-4)$$

On note que :

$$\rho = \frac{2 \mu}{2 \mu + n \lambda} \quad (1-5)$$

où $\mu > 0$, $\lambda + \frac{2}{n} \mu > 0$ sont les constantes de Lamé du matériel.
 ρ est un paramètre représentant habituellement la compressibilité du matériel.

$\epsilon(v)$ est le tenseur donnée par :

$$\epsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \quad (1-6)$$

On note que l'opérateur "trace" appliqué à un tenseur, est donné par :

$$\text{tr } \tau = \sum_{i=1}^n \tau_{ii} = \tau : I \quad (1-7)$$

où $I = (I_{ij})$ est la matrice unité d'ordre n et

$$\tau : \xi = \sum_{i,j=1}^n \tau_{ij} \cdot \xi_{ij} \quad (1-8)$$

De plus, div est l'opérateur différentiel défini sur les tenseurs symétriques par :

$$\begin{aligned} \text{div } \tau &= \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \tau_{1i}}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tau_{2i}}{\partial x_i}, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tau_{ni}}{\partial x_i} \right] \\ &= \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} \right]_{j=1, n} \end{aligned} \quad (1-9)$$

En tenant compte de ce qui précède, les équations (1-1), (1-2) et (1-3) peuvent être écrites dans le cas $n = 2$ sous la forme :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1-10)$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2 = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1-11)$$

$$\varepsilon(u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (1-12)$$

et

$$\sigma(u) = \frac{1}{2\mu} \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \frac{1-\rho}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \frac{1-\rho}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{bmatrix} \quad (1-13)$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_{11} - \frac{1-\rho}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \right] \quad (1-14)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_{22} - \frac{1-\rho}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \right] \quad (1-15)$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] = \sigma_{12} = \sigma_{21} \quad (1-16)$$

REMARQUES 1-1 :

(i)- L'équation constitutive pour un corps élastique incompressible est obtenue en prenant la limite $\lambda \longrightarrow +\infty$, ce qui implique $\rho \longrightarrow 0$ dans (1-5).

(ii) Les équations usuelles de Stokes, qui gouvernent l'écoulement incompressible d'un fluide visqueux, sont obtenues à

partir de (1-1), (1-2) avec $\rho = 0$, comme suit :

(a)- En prenant la trace de l'équation (1-2), on aura :

$$\text{tr } \varepsilon(u) = \frac{1}{2} \left[\text{tr } \sigma - \frac{1}{n} \text{tr } \sigma \cdot \text{tr } I \right] = 0$$

Mais,

$$\text{tr } \varepsilon(u) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ii}(u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \text{div } u$$

D'où,

$$\text{div } u = 0 \quad (1-17)$$

qui représente la condition d'incompressibilité.

(b)- En dénotant la pression hydrostatique par :

$$p = -\frac{1}{n} \text{tr } \sigma, \quad (1-18)$$

l'équation (1-2) devient

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2\mu} (\sigma + p.I) \quad (1-19)$$

En résolvant pour σ , puis en substituant dans (1-1), on obtient:

$$\text{div} (2\mu \varepsilon(u) - p.I) + f = 0$$

i.e.

$$2\mu \left(\text{div } \varepsilon(u) \right) - \text{div} (p.I) + f = 0 \quad (1-20)$$

D'abord, on constate que :

$$\text{div} (p.I) = \nabla p \quad (1-21)$$

car,

$$\text{div} (p.I) = \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial p}{\partial x_n} \right) = \nabla p$$

D'autre part,

$$\operatorname{div} \tau(u) = \frac{1}{2} \Delta u \quad (1-22)$$

car,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \varepsilon(u) &= \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} \right]_{i=1, n} \\ &= \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) \right]_{i=1, n} \\ &= \left[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial^2 x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) \right]_{i=1, n} \\ &= \left[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u_i}{\partial^2 x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \right]_{i=1, n} \\ &= \left[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u_i}{\partial^2 x_j} \right]_{i=1, n} = \frac{1}{2} [\Delta u_i]_{i=1, n} \end{aligned}$$

(d'après (1-17)).

Alors, on peut écrire (1-20) comme suit,

$$\mu \Delta u - \nabla p + f = 0 \quad (1-23)$$

Le problème de Stokes consiste donc à :

Trouver $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $p : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant (1-4), (1-17) et (1-23).

On note que dans ce contexte, u représente la vitesse du fluide.

1-2 ESPACES DE SOBOLEV

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et Γ sa frontière supposée régulière. On dénote par $L^2(\Omega)$, l'espace (de Lebesgue) des fonctions à carré

intégrable sur Ω , muni du produit scalaire :

$$(f, g)_{\Omega} = \int_{\Omega} f \cdot g \, d\Omega \quad \forall f, g \in L^2(\Omega) \quad (1-24)$$

et de la norme correspondante :

$$\|f\|_{0, \Omega} = (f, f)_{0, \Omega}^{1/2} \quad (1-25)$$

On utilisera aussi l'espace :

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) / \int_{\Omega} f \, d\Omega = 0 \right\} \quad (1-26)$$

On désigne par $H^m(\Omega)$, l'espace (de SOBOLEV) d'ordre m des fonctions $f \in L^2(\Omega)$ telles que $D^j f \in L^2(\Omega)$ pour $|j| \leq m$ où $j = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ est un n -couple de nombres entiers non négatifs. D^j dénote l'opérateur différentiel d'ordre $|j| = j_1 + j_2 + \dots + j_n$ donné pour toute fonction $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ par :

$$D^j f = \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2} \dots \partial x_n^{j_n}}$$

Donc,

$$H^m(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) / D^j f \in L^2(\Omega), 0 \leq |j| \leq m \right\} \quad (1-27)$$

$H^m(\Omega)$ est muni de la norme:

$$\|f\|_{m, \Omega} = \left(\sum_{|j| \leq m} \int_{\Omega} |D^j f|^2 \, d\Omega \right)^{1/2} \quad (1-28)$$

et de la semi norme :

$$\|f\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|j|=m} \int_{\Omega} |D^j f| \, d\Omega \right)^{1/2} \quad (1-29)$$

On sait que $H^m(\Omega)$ est un espace de HILBERT pour la norme $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ (voir [1],[8],[24]).

On remarque que $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$. Pour des considérations qui seront précisées plus tard, on utilise aussi l'espace, dénoté par $H_0^1(\Omega)$, des fonctions de $H^1(\Omega)$ qui s'annulent sur la frontière Γ , i.e.

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ f \in H^1(\Omega) / f = 0 \text{ sur } \Gamma \right\} \quad (1-30)$$

Notons que si Ω est borné, la semi-norme (1-29) est une norme sur $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme induite par (1-28) (voir [1],[24]).

Pour les fonctions vectorielles, on définit les espaces :

$$\mathbb{H}^m(\Omega) = \left[H^m(\Omega) \right]^n = \left\{ t = (t_1, \dots, t_n) / t_i \in H^m(\Omega), i = \overline{1, n} \right\} \quad (1-31)$$

munis des normes:

$$\|t\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^n \|t_i\|_{m,\Omega}^2 \right)^{1/2} \quad (1-32)$$

et des semi-normes:

$$\|t\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^n |t_i|_{m,\Omega}^2 \right)^{1/2} \quad (1-33)$$

De même, on définit:

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) = \left[H_0^1(\Omega) \right]^n = \left\{ t / t_i \in H_0^1(\Omega), i = \overline{1, n} \right\} \quad (1-34)$$

De plus, on munit l'espace $H_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ de la norme:

$$\|(f, g)\| = \|f\|_1 + \|g\|_0 \quad (1-35)$$

Plus de détails, peuvent être trouvés dans GIRAULT-RAVIART [18].

1-3 FORMULATION VARIATIONNELLE

Soient W et V les espaces (de HILBERT) définis par:

$$W = \left\{ \tau = [\tau_{ij}] / \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L_0^2(\Omega) , i, j = \overline{1, n} \right\} \quad (1-36)$$

$$V = H_0^1(\Omega) \quad (1-37)$$

munis respectivement des normes :

$$\|\tau\|_W = \left[\int_{\Omega} \tau : \tau \, d\Omega \right]^{1/2} = \left[\sum_{i, j=1}^n \int_{\Omega} \tau_{ij}^2 \, d\Omega \right]^{1/2} \quad \forall \tau \in W \quad (1-38)$$

$$\|v\|_V = \|v\|_{1, \Omega} \quad \forall v \in V \quad (1-39)$$

Les équations d'Elasticité incompressible peuvent être écrites sous la forme variationnelle en multipliant scalairement, d'abord, (1-1) par une fonction-test v de V et (1-2) par un tenseur-test τ de W , puis, en intégrant sur Ω , les équations obtenues. Il vient:

$$\int_{\Omega} [\operatorname{div} \sigma + f] \cdot v \, d\Omega = 0 \quad (1-40)$$

$$- \int_{\Omega} [\varepsilon(u) : \tau] \, d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2\mu} \left[\sigma : \tau - \frac{1-\rho}{n} \operatorname{tr} \sigma \cdot I : \tau \right] \, d\Omega = 0 \quad (1-41)$$

D'après (1-9), (1-40) devient:

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial x_i} v_1 + \dots + \frac{\partial \sigma_{ni}}{\partial x_i} v_n \right) + f_1 v_1 + \dots + f_n v_n \right] d\Omega = 0 \quad (1-42)$$

En utilisant la formule de GREEN, on obtient:

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^n \left(-\sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + f_j v_j \right) \right] d\Omega = 0 \quad (1-43)$$

Mais,

$$- \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} d\Omega = - \int_{\Omega} \sigma : \epsilon(v) d\Omega \quad (1-44)$$

En effet;

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \sigma : \epsilon(v) d\Omega &= - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} \epsilon_{ij}(v) d\Omega \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] d\Omega \\ &= - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \sigma_{ij} \right] d\Omega \\ &= - \frac{1}{2} \left[\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} d\Omega + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \sigma_{ij} d\Omega \right] \\ &= - \frac{1}{2} \left[\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \sigma_{ji} d\Omega + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \sigma_{ij} d\Omega \right] \\ &= - \frac{1}{2} \left[\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \sigma_{ij} d\Omega + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \sigma_{ij} d\Omega \right] \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \sigma_{ij} d\Omega \end{aligned}$$

D'où,

$$-\int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(v) \, d\Omega + \int_{\Omega} f \cdot v \, d\Omega = 0$$

De plus, on a:

$$(\text{tr } \sigma) \cdot I : \tau = \text{tr } \sigma \cdot \text{tr } \tau \quad (1-45)$$

En effet, à partir de (1-7) et (1-8), on déduit que

$$\begin{aligned} (\text{tr } \sigma) \cdot I : \tau &= \left(\sum_{k=1}^n \sigma_{kk} \right) \cdot I : \tau = \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \sigma_{kk} \right) \cdot I_{ij} \tau_{ij} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \sigma_{kk} \right) \left(\sum_{i,j=1}^n I_{ij} \tau_{ij} \right) = \left(\sum_{k=1}^n \sigma_{kk} \right) \left(\sum_{i=1}^n \tau_{ii} \right) \\ &= \text{tr } \sigma \cdot \text{tr } \tau \end{aligned}$$

Par conséquent, (1-40) est équivalente à

$$-\int_{\Omega} \left[\varepsilon(u) : \tau \right] d\Omega + \frac{1}{2\mu} \int_{\Omega} \left[\sigma : \tau - \frac{1-\rho}{n} \text{tr } \sigma \cdot \text{tr } \tau \right] d\Omega = 0 \quad (1-46)$$

Finalement, la formulation variationnelle, dite de HELLINGER-REISSNER ([20],[25]), s'écrit:

<p>Trouver $(\sigma, u) \in W \times V$ telle que :</p>	
$-\int_{\Omega} \varepsilon(v) : \sigma \, d\Omega = -\int_{\Omega} f \cdot v \, d\Omega \quad \forall v \in V$	(1-47)
$\frac{1}{2\mu} \int_{\Omega} \left[\sigma : \tau - \frac{1-\rho}{n} \text{tr } \sigma \cdot \text{tr } \tau \right] d\Omega - \int_{\Omega} \left[\varepsilon(u) : \tau \right] d\Omega = 0 \quad \forall \tau \in W$	(1-48)

Le problème (1-47) et (1-48) fait partie d'une classe plus large de problèmes de la forme abstraite:

PROBLEME (P.)

Etant données $l \in W'$ et $\varphi \in V'$, trouver $\{\sigma, u\} \in W \times V$
tel que :

$$a(\sigma, \tau) + b(u, \tau) = \mathcal{L}(\tau) \quad \forall \tau \in W \quad (1-49)$$

$$b(\sigma, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in V \quad (1-50)$$

Ici, V et W sont des espaces de HILBERT avec des normes $\|\cdot\|_V$ et $\|\cdot\|_W$ respectivement; V' et W' étant les espaces de duaux. $a: W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ et $b: W \times V \rightarrow \mathbb{R}$ sont des formes bilinéaires, $\mathcal{L}: W \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctionnelles linéaires.

L'existence et l'unicité de la solution du problème (P) sont régies par le résultat suivant :

THEOREME 1-1

Supposons que :

(A1) Continuité de $a(\dots)$ et $b(\dots)$

Il existe deux constantes $0 < M, k < \infty$ telles que:

$$|a(\xi, \tau)| \leq M \|\xi\|_W \|\tau\|_W \quad \forall \xi, \tau \in W \quad (1-51)$$

$$|b(\tau, v)| \leq k \|\tau\|_W \|v\|_V \quad \forall \tau \in W, \forall v \in V \quad (1-52)$$

(H1) K-ellipticité de $a(\dots)$:

Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que:

$$|a(\tau, \tau)| \geq \alpha \|\tau\|_W^2 \quad \forall \tau \in K \quad (1-53)$$

où

$$K = \left\{ \tau \in W / b(\tau, v) = 0, \forall v \in V \right\} \quad (1-54)$$

(H2) Condition de LADYSHENSKAYA-BABUSKA BREZZI

Il existe une constante $\beta > 0$ telle que:

$$\sup_{\substack{\tau \in W \\ \tau \neq 0}} \frac{b(\tau, v)}{\|\tau\|_W} \geq \beta \|v\|_V \quad \forall v \in V \quad (1-55)$$

Alors, le problème (P) admet une solution unique $\{\sigma, u\} \in W \times V$.

La démonstration de ce Théorème est donnée par BREZZI [9].

Le fait que la formulation de HELLINGER-REISSNER, (1-47) et (1-48) est un cas particulier du problème (P), qui peut être vu aisément en utilisant les définitions suivantes:

$$W = \left(L^2(\Omega) \right)^s \text{ avec } s = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad V = \left(H_0^1(\Omega) \right)^n$$

$$a(\sigma, \xi) = a_\rho(\sigma, \xi) = \frac{1}{2\mu} \int_{\Omega} \left[\xi : \tau - \frac{1-\rho}{n} \text{tr } \xi \cdot \text{tr } \tau \right] d\Omega \quad (1-56)$$

$$b(\tau, v) = d(\tau, v) = - \int_{\Omega} \tau : \epsilon(v) d\Omega \quad (1-57)$$

$$\mathcal{L}(\tau) = 0 \quad (1-58)$$

$$\varphi(v) = - \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega \quad (1-59)$$

pour tous $\xi, \tau \in W$ et $v \in V$

Les normes correspondantes de V et W sont dans ce cas $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_0$, respectivement.

Pour montrer qu'il existe une solution unique $(\sigma, u) \in W \times V$ pour la formulation de HELLINGER-REISSNER, on doit vérifier les hypothèses, (A1), (H1), et (H2).

(A1) peut être immédiatement vérifiée, en utilisant la formule de CAUCHY-SCHWARTZ. En effet, en décomposons τ comme suit:

$$\tau = s - q.I \quad (1-60)$$

où $q = -\frac{1}{n} \text{tr } \tau$

on constate que $\text{tr } s = 0$

En effet,

$$\begin{aligned} \text{tr } s &= \text{tr} \left(\tau - \frac{1}{n} \text{tr } \tau . I \right) = \text{tr } \tau - \frac{1}{n} \text{tr } \tau . \text{tr } I \\ &= \text{tr } \tau - \frac{1}{n} \text{tr } \tau . n = 0 \end{aligned}$$

De même on note que

$$\|\tau\|_W^2 = \|s\|_W^2 + n \|q\|_W^2 \quad (1-61)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \|\tau\|_W^2 &= \|s - q.I\|_W^2 = \int_{\Omega} (s - q.I) : (s - q.I) \, d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} (s : s + q.I : q.I - 2 s : q.I) \, d\Omega \end{aligned}$$

Mais,

$$\begin{aligned} s : (q.I) &= \sum_{i,j=1}^n s_{ij} . (q.I_{ij}) = q \sum_{i,j=1}^n s_{ij} . I_{ij} = q \sum_{i,j=1}^n s_{ii} \\ &= q . \text{tr } s = 0 \end{aligned}$$

On obtient alors;

$$\|\tau\|_W^2 = \|s\|_W^2 + \|q.I\|_W^2$$

D'où,

$$\|\tau\|_W^2 = \|s\|_W^2 + n \|q\|_W^2 \quad (1-62)$$

En substituant dans la définition de $a_\rho(\dots)$, il vient,

$$\begin{aligned}
|a_\rho(\xi, \tau)| &= \left| \frac{1}{2\mu} \int_{\Omega} \left[\xi : \tau - \frac{1-\rho}{n} \operatorname{tr} \xi \cdot \operatorname{tr} \tau \right] d\Omega \right| \\
&= \frac{1}{2\mu} \left| \int_{\Omega} \left[\xi : \tau - \frac{1-\rho}{n} \xi \cdot (\operatorname{tr} \tau \cdot I) \right] d\Omega \right| \\
&= \frac{1}{2\mu} \int_{\Omega} \left| \xi : \left(\tau - \frac{1-\rho}{n} \operatorname{tr} \tau \cdot I \right) \right| d\Omega \\
&\leq \frac{1}{2\mu} \left(\int_{\Omega} |\xi|^2 d\Omega \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \left| \tau - \frac{1-\rho}{n} \operatorname{tr} \tau \cdot I \right|^2 d\Omega \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{2\mu} \|\xi\|_W \left\| \tau - \frac{1-\rho}{n} \operatorname{tr} \tau \cdot I \right\|_W \\
&\leq \frac{1}{2\mu} \|\xi\|_W \left\| s - q \cdot I - \frac{1-\rho}{n} \operatorname{tr} (s - q \cdot I) \right\|_W \\
&\leq \frac{1}{2\mu} \|\xi\|_W \left\| s - \rho q \cdot I \right\|_W
\end{aligned}$$

Mais,

$$\|s - \rho q \cdot I\|_W^2 = (s - \rho q \cdot I) : (s - \rho q \cdot I) = \|s\|_W^2 + \rho^2 \|q \cdot I\|_W^2$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}
\|s - \rho q \cdot I\|_W^2 &= \|s\|_W^2 + \rho^2 \|q \cdot I\|_W^2 \leq \max\{1, \rho^2\} \left[\|s\|_W^2 + \|q \cdot I\|_W^2 \right] \\
&\leq \max\{1, \rho^2\} \|u\|_W^2
\end{aligned}$$

D'où,

$$|a_\rho(\xi, \tau)| \leq \frac{1}{2\mu} \max\{1, \rho\} \|\tau\|_W \|\xi\|_W \quad (1-63)$$

Alors, (1-51) est vérifiée pour:

$$M = \frac{1}{2\mu} \max\{1, \rho\}$$

Pour $d(u, v) = - \int_{\Omega} \tau : \varepsilon(v) d\Omega$, on a :

$$\begin{aligned}
|d(\tau, u)| &= \left| - \int_{\Omega} \tau : \varepsilon(v) \, d\Omega \right| \\
&\leq \int_{\Omega} |\tau : \varepsilon(v)| \, d\Omega \\
&\leq \left(\int_{\Omega} |\tau|^2 \, d\Omega \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\varepsilon(v)|^2 \, d\Omega \right)^{1/2} \\
&\leq \|\tau\|_{\mathbf{W}} \|\nabla v\|_0 \\
&\leq \|\tau\|_{\mathbf{W}} \|v\|_{\mathbf{V}}
\end{aligned}$$

D'où,

$$|d(\tau, u)| \leq k \|\tau\|_{\mathbf{W}} \|u\|_{\mathbf{V}} \quad (1-64)$$

avec $k=1$.

Pour vérifier la condition de LADYSHENKAYA-BABUSKA-BREZZI pour ce cas particulier, on a besoin de l'important résultat suivant:

LEMME 1-1 : (Inégalité de KORN; voir [24])

Soit Ω un ouvert borné de frontière Γ . Alors, il existe une constante $c = c(\Omega) > 0$ telle que:

$$\sum_{i,j=1}^n \left[\int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(v) \cdot \varepsilon_{ij}(v) \, d\Omega + \int_{\Omega} v_i \cdot v_i \, d\Omega \right] \geq c \|v\|_1^2 \quad (1-65)$$

$$\forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Ce résultat n'est pas une banalité. En effet le premier membre de (1-65) ne fait intervenir que certaines combinaisons de dérivées premières, à savoir $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$, alors que le deuxième membre contient toutes les dérivées premières. Evidemment,

l'inégalité "inverse" est évidente, de sorte que (1-65) équivaut à dire que :

$\left[\sum_{i,j=1}^n \left[\int_{\Omega} \epsilon_{ij}(v) \cdot \epsilon_{ij}(v) \, d\Omega + \int_{\Omega} v_i \cdot v_i \, d\Omega \right] \right]^{1/2}$ est une norme sur V , équivalente à $\|v\|_V$.

Pour la démonstration du lemme 1-1, on utilise le résultat plus général suivant :

THEOREME 1-2 (voir RAVIART-THOMAS [24] ou TEMAM [32]).

Soit Ω un ouvert borné de frontière régulière. Si v est une distribution sur Ω telle que :

$$v \in H^{-1}(\Omega) \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x_i} \in H^{-1}(\Omega) \quad , \quad \forall i = \overline{1,n} \quad (1-66)$$

alors,

$$v \in L^2(\Omega) \quad (1-67)$$

DEMONSTRATION DU LEMME 1-1

Posons :

$$E = \left\{ v \in (L^2(\Omega))^n \ / \ \epsilon_{ij}(v) \in L^2(\Omega) \ , \ \forall i,j = \overline{1,n} \right\} \quad (1-68)$$

E est un espace de HILBERT pour la norme

$$\left[\sum_{i,j=1}^n \left[\int_{\Omega} \epsilon_{ij}(v) \cdot \epsilon_{ij}(v) \, d\Omega + \int_{\Omega} v_i \cdot v_i \, d\Omega \right] \right]^{1/2}$$

On a

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right] = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\epsilon_{ik}(v) + \frac{\partial}{\partial x_k} \epsilon_{ij}(v) - \frac{\partial}{\partial x_i} \epsilon_{jk}(v) \right] \quad (1-69)$$

Si $v \in E$, alors $\varepsilon_{ij}(v) \in L^2(\Omega)$. Et donc, $\frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{ij}(v) \in H^{-1}(\Omega)$

$\forall i, j, k$.

Par conséquent, (1-69) donne :

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} \in H^{-1}(\Omega) \quad \forall i, j, k \quad (1-70)$$

En appliquant le Théorème 1-2 pour $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$, on constate que (1-70)

entraîne que $\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \in L^2(\Omega)$, $\forall i, k$. D'où $v \in [H^1(\Omega)]^n$. on obtient

ainsi l'égalité algébrique $E = [H^1(\Omega)]^n$.

L'injection de $[H^1(\Omega)]^n \longrightarrow E$ est continue et comme elle est, d'après ce qui précède, surjective, alors d'après le Théorème du graphe fermé (voir BREZIS [8]), c'est un homéomorphisme. D'où, la validité de l'inégalité (1-65). ■

Comme conséquence du Lemme 1-1, on déduit le résultat suivant :

LEMME 1-2

Soit Ω un ouvert borné de frontière Γ , C^1 par morceaux. Alors, il existe une constante $c_0 > 0$ telle que:

$$\forall v \in V = H_0^1(\Omega), \quad \sum_{i,j=1}^n \|\varepsilon_{ij}(v)\|_{0,\Omega}^2 \geq c_0 \|v\|_{1,\Omega}^2 \quad (1-71)$$

DEMONSTRATION

Montrons d'abord que $v \longrightarrow \left[\sum_{i,j=1}^n \|\varepsilon_{ij}(v)\|_{0,\Omega}^2 \right]^{1/2}$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$. En effet, posons:

$$R = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) ; \varepsilon_{ij}(v) = 0, 1 \leq i, j \leq n \right\} \quad (1-72)$$

Lorsque $n = 2$, on vérifie aisément que toute fonction $v = (v_1, v_2)$ $\in R$ est de la forme:

$$v_1(x) = a_1 + b \cdot x_2, \quad v_2(x) = a_2 - b \cdot x_1$$

où a_1, a_2, b sont des constantes réelles.

En effet, si $v \in R$ alors,

$$\varepsilon_{ij}(v) = 0 \quad \forall i, j = 1, 2$$

i.e

$$\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] = 0 \quad \forall i, j = 1, 2$$

D'où,

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = 0 \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} v_1 = b \cdot x_2 + a_1 \\ v_2 = c_1 \cdot x_1 + a_2 \\ b + c_1 = 0 \end{cases}$$

Finalement,

$$v_1(x) = a_1 + b \cdot x_2, \quad v_2(x) = a_2 - b \cdot x_1$$

Comme l'ouvert Ω est connexe, on déduit que

$$R = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) / \exists a_1, a_2, b \in \mathbb{R}; v_1(x) = a_1 + b \cdot x_2, v_2(x) = a_2 - b \cdot x_1 \right\}$$

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad (1-73)$$

Lorsque $n = 3$, on vérifie, de la même manière, que

$$R = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) / \exists a, b \in \mathbb{R}^3, v(x) = a + b \wedge x, \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3 \right\}$$

où \wedge dénote le produit vectoriel.

En effet, si $v \in R$ alors

$$\varepsilon_{ij}(v) = 0 \quad \forall i, j = 1, 2, 3$$

D'où,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} = 0 \end{array} \right.$$

Par conséquent,

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(x) = a_1 - b_3 \cdot x_2 + b_2 \cdot x_3 \\ v_2(x) = a_2 + b_3 \cdot x_1 - b_1 \cdot x_3 \\ v_3(x) = a_3 - b_2 \cdot x_1 + b_1 \cdot x_2 \end{array} \right.$$

Mais, par définition,

$$b \wedge x = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = (b_2 \cdot x_3 - b_3 \cdot x_2) \vec{i} + (b_3 \cdot x_1 - b_1 \cdot x_3) \vec{j} + (b_1 \cdot x_2 - b_2 \cdot x_1) \vec{k}$$

Par conséquent,

$$v(x) = a + b \wedge x$$

Un note, qu'en mécanique, R est appelé ensemble des déplacements rigides dans Ω .

Il est, maintenant, immédiat de vérifier que la seule fonction v de R qui s'annule en deux points distincts de \mathbb{R}^2 , lorsque $n = 2$ (respectivement, en 3 points non alignés de \mathbb{R}^3 lorsque $n = 3$), est la fonction $v = 0$ sur \mathbb{R}^2 (respectivement \mathbb{R}^3).

On déduit que $V \cap R = \{ 0_{\mathbb{R}^n} \}$, ce qui établit que $v \longrightarrow$

$$\left[\sum_{i,j=1}^n \| \varepsilon_{ij}(v) \|_{0,\Omega}^2 \right]^{1/2} \text{ est une norme sur } V .$$

Montrons qu'il existe deux constantes $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, telle que :

$$C_1 \|v\|_{1,\Omega} \leq \left[\sum_{i,j=1}^n \| \varepsilon_{ij}(v) \|_{0,\Omega}^2 \right]^{1/2} \leq C_2 \|v\|_{1,\Omega} \quad (1-74)$$

La seconde inégalité étant évidente avec $C_2 = 1$, il suffit de vérifier la première. Pour cela raisonnons par l'absurde. Supposons qu'on peut trouver une suite $\{w_m\}$ de fonctions de $V = [H_0^1(\Omega)]^n$ telle que

$$\frac{1}{m} \|w_m\|_{1,\Omega} > \left[\sum_{i,j=1}^n \| \varepsilon_{ij}(w_m) \|_{0,\Omega}^2 \right]^{1/2} \quad (1-75)$$

En posant $v_m = \frac{w_m}{\|w_m\|_{1,\Omega}}$, on obtient une suite $\{v_m\}$ de fonctions \mathcal{V} de telles que

$$\|v_m\|_{1,\Omega} = 1 \quad (1-76)$$

et, d'après (1-75), on a

$$\left[\sum_{i,j=1}^n \|\varepsilon_{ij}(v_m)\|_{0,\Omega}^2 \right]^{1/2} < \frac{\left[\sum_{i,j=1}^n \|\varepsilon_{ij}(w_m)\|_{0,\Omega}^2 \right]^{1/2}}{\|w_m\|_{1,\Omega}} < \frac{1}{m} \quad (1-77)$$

Il en résulte, alors, que de la suite $\{v_m\}$; on peut extraire une sous suite $\{v_\mu\}$ telle que $v_\mu \longrightarrow v$ dans $L^2(\Omega)$.

D'après (1-77), on a:

$$\forall i, j = \overline{1, n}, \quad \varepsilon_{ij}(v_\mu) \xrightarrow[\mu \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \quad (1-78)$$

Puisque l'espace $\mathcal{V} = H_0^1(\Omega)$, muni de la norme $\|\cdot\|_{1,\Omega}$, est complet, on obtient

$$v_\mu \longrightarrow v \quad \text{dans } H_0^1(\Omega)$$

D'où,

$$\varepsilon_{ij}(v) = 0 \quad \forall i, j = \overline{1, n} \quad (1-79)$$

Puisque $\left[\sum_{i,j=1}^n \|\varepsilon_{ij}(v)\|_{0,\Omega}^2 \right]^{1/2}$ est une norme sur $L^2(\Omega)$, alors $v = 0$,

et par conséquent, $v_\mu \longrightarrow 0$ dans $L^2(\Omega)$. Ceci est impossible car,

$$\|v\|_{1,\Omega} = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \|v_\mu\|_{1,\Omega} = 1 \quad (1-80)$$

Ceci complète la démonstration du Lemme 1-2. ■

Revenons, maintenant à la vérification de la condition de LADYSHENSKAYA-BABUSKA-BREZZI.

Pour tout $v \in V$, il existe $\bar{\tau} \in W$ telle que:

$$\bar{\tau} = -\varepsilon(v)$$

On a

$$d(\bar{\tau}, v) = - \int_{\Omega} \bar{\tau} : \varepsilon(v) \, d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon(v) : \varepsilon(v) \, d\Omega$$

alors,

$$\|\bar{\tau}\|_W^2 = \int_{\Omega} \varepsilon(v) : \varepsilon(v) \, d\Omega = d(\bar{\tau}, v)$$

Ainsi, en utilisant "l'inégalité de KORN" (1-71) du Lemme 1-2, on obtient

$$\sqrt{C_0} \|v\|_V \leq \frac{d(\bar{\tau}, v)}{\|\bar{\tau}\|_W} \leq \sup_{\tau \in W} \frac{d(\tau, v)}{\|\tau\|_W}$$

Et donc, (1-55) est vérifiée pour $\beta = \sqrt{C_0}$.

Vérifions maintenant l'hypothèse (H1) du Théorème 1-1.

Décomposons τ comme dans (1-60). En substituant dans la définition de $a_\rho(\dots)$, il vient:

$$\begin{aligned} |a_\rho(v, v)| &= \left| \int_{\Omega} \frac{1}{2\mu} \left(v : \tau - \frac{1-\rho}{n} \operatorname{tr} \tau \cdot \operatorname{tr} \tau \right) d\Omega \right| \\ &= \frac{1}{2\mu} \left| \int_{\Omega} \left(s : s + n q^2 - \frac{1-\rho}{n} (-q n)(-q n) \right) d\Omega \right| \\ &= \frac{1}{2\mu} \left| \int_{\Omega} \left(s : s + \rho n q^2 \right) d\Omega \right| \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\mu} \left(\|s\|_W^2 + \rho n \|q\|_W^2 \right)$$

i.e

$$|a_\rho(t, t)| = \frac{1}{2\mu} \left(\|s\|_W^2 + \rho n \|q\|_W^2 \right) \quad (1-81)$$

L'hypothèse (H1) est directement déduite de (1-61) et (1-81), en prenant $\alpha = \min \left\{ \frac{1}{2\mu}, \frac{\rho}{2\mu} \right\}$.

On remarque que pour le cas incompressible (ie pour $\rho = 0$) cette valeur de α n'est pas acceptable; on obtiendrait $\alpha = 0$. Cependant, cette difficulté peut être contournée en prenant $t = s - q.I \in K$ dans (1-57). On aura:

$$\begin{aligned} d(\tau, v) &= - \int_{\Omega} \tau : \varepsilon(v) \, d\Omega = - \int_{\Omega} (s - q.I) : \varepsilon(v) \, d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} (s : \varepsilon(v) - q.I : \varepsilon(v)) \, d\Omega \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

Mais,

$$\begin{aligned} \varepsilon(v) : q.I &= \sum_{i,j=1}^n \varepsilon_{ij}(v) \cdot q.I_{ij} = q \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ii}(v) \\ &= q \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = q \cdot \text{div } v \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

D'où, puisque $t \in K$,

$$d(\tau, v) = - \int_{\Omega} \tau : \varepsilon(v) \, d\Omega = - \int_{\Omega} (s : \varepsilon(v) - q \cdot \text{div } v) \, d\Omega = 0 \quad \forall v \in V$$

Par conséquent,

$$\int_{\Omega} s : \varepsilon(v) \, d\Omega = \int_{\Omega} q \cdot \text{div } v \, d\Omega \quad \forall v \in V \quad (1-82)$$

D'après une propriété de l'opérateur "div". (voir GIRAULT-RAVIART

[18]), on a

$\forall q \in L^2(\Omega) / \mathbb{R}, \exists \bar{v} \in V$ tel que :

$$\operatorname{div} \bar{v} = q \quad (1-83)$$

et

$$\|\bar{v}\|_1 \leq \frac{c}{\sqrt{n}} \|q\|_0 \quad (1-84)$$

où c est une constante positive.

En remplaçant v par \bar{v} dans (1-82), il vient

$$\int_{\Omega} s : \varepsilon(\bar{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} q \cdot \operatorname{div} \bar{v} \, d\Omega = \|q\|_0^2$$

D'où,

$$\begin{aligned} \|q\|_0^2 &= \|s\|_w \| \varepsilon(\bar{v}) \|_0 \\ &\leq \|s\|_w \| \nabla \bar{v} \|_0 \leq \|s\|_w \| \bar{v} \|_1 \leq \|s\|_w \frac{c}{\sqrt{n}} \|q\|_0 \end{aligned}$$

i.e

$$\|q\|_0 \leq \frac{c}{\sqrt{n}} \|s\|_w \quad (1-85)$$

D'après (1-81), il vient

$$\begin{aligned} |a_{\rho}(\tau, \tau)| &= \frac{1}{2\mu} \left(\|s\|_w^2 + \rho n \|q\|_0^2 \right) \\ &\geq \frac{1}{2\mu} \|s\|_w^2 \end{aligned} \quad (1-86)$$

D'autre part, d'après (1-85), on a

$$c^2 \|s\|_w^2 \geq n \|q\|_0^2$$

Donc,

$$\|s\|_w^2 + c^2 \|s\|_w^2 \geq \|s\|_w^2 + n \|q\|_0^2$$

Ainsi,

$$(1 + c^2) \|s\|_w^2 \geq \|s\|_w^2 + n \|q\|_0^2 = \|\tau\|_w^2$$

1.0.

$$\|s\|_W^2 \leq \frac{1}{1+c^2} \|t\|_W^2 \quad (1-87)$$

De (1-86) et (1-87), on obtient que

$$|a_p(t, t)| \geq \frac{1}{2\mu(1+c^2)} \|t\|_W^2$$

L'hypothèse (H1) est ainsi satisfaite pour $\alpha = \frac{1}{2\mu(1+c^2)}$.

Finalement, (A1), (H1) et (H2) sont toutes vérifiées.

D'après le théorème 1-1, il existe donc une solution unique (σ, u) de $\tilde{W} \times V$ du problème (P), avec

$$\tilde{W} = \left\{ \tau \in W / \tau = s - q \cdot I, \operatorname{tr} \tau = 0, \int_{\Omega} q \, d\Omega = 0 \right\} \quad (1-88)$$

1-4 METHODE DES ELEMENTS FINIS :

Soit Ω un domaine dans \mathbb{R}^n , et X un espace de fonctions définies sur Ω .

La méthode des éléments finis, dans sa simple forme, est un procédé spécifique de construction d'un sous-espace X_h de X (de dimension fini) appelé ESPACE D'ELEMENTS FINIS. Ceci est caractérisé par trois principes de base.

1) - Le premier principe, et certainement le plus caractéristique de la méthode, réside dans la construction d'une subdivision \mathcal{G}_h du domaine Ω . Ainsi, Ω est subdivisé en une réunion d'un nombre fini de sous-ensembles K , appelés éléments, tels que:

$$(1) \quad \bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{G}_h} K$$

- (ii) $\forall K \in \mathcal{T}_h, K = \bar{K}, \text{ et } \overset{\circ}{K} \neq \emptyset$
- (iii) $\forall K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h, \overset{\circ}{K}_1 \cap \overset{\circ}{K}_2 = \emptyset$
- (iv) $\forall K \in \mathcal{T}_h, \partial K = \Gamma_K$ est assez régulière
- (v) $\forall K_i, K_j \in \mathcal{T}_h, \text{ si } K_i \neq K_j \text{ alors:}$
 - soit $K_i \cap K_j = \emptyset$
 - soit $K_i \cap K_j = \text{un sommet commun}$
 - soit $K_i \cap K_j = \text{un côté entier commun}$

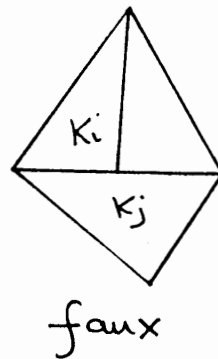
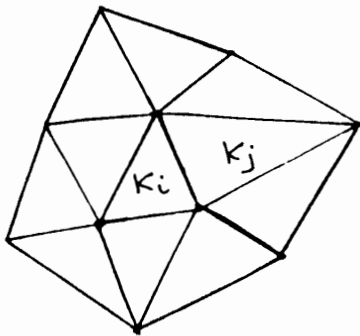
On rappelle que \bar{K} et $\overset{\circ}{K}$ représentent respectivement la fermeture et l'intérieur de l'élément K .

Le nombre h , habituellement appelé paramètre de discrétisation, est défini par:

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$$

ou h_K est le diamètre de K .

EXEMPLE



2)- Le second principe, une fois la subdivision \mathcal{T}_h effectuée, consiste à construire un espace X_h de dimension fini. Celui-ci est constitué de fonctions définies sur Ω , dont les restrictions à chaque K appartiennent à P_K , où P_K est un espace de dimension fini, et composé de fonctions polynômiales sur K . Ainsi, on pose:

$$X_h = \left\{ v_h / \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in P_K \right\}$$

3)- Le troisième principe caractéristique de la méthode des éléments finis est que l'on peut décrire X_h à l'aide d'une base de fonctions dont les supports sont les éléments de \mathcal{T}_h en question. On introduit l'ensemble des noeuds des éléments finis:

$$\Sigma = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \Sigma_K = \{ \alpha_j \}_{j=1}^M$$

où $\Sigma_K = \{ \alpha_j \}_{j=1}^N$ est l'ensemble des noeuds distincts dans K .

On peut définir une base de P_K par:

$$\Phi_i(\alpha_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq j \leq M$$

où
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Dans les exemples que nous considérons ici, K sera un polyèdre de \mathbb{R}^n , P_K sera un espace de polynômes et les formes linéaires Φ_i seront des types suivantes, pour tout $p \in P_K$,

(a) - $\Phi_i : p \longrightarrow p(\alpha_i)$, $\alpha_i \in K$

(b) - $\Phi_i : p \longrightarrow Dp(\alpha_i) \cdot \xi_i$, où $Dp(\alpha_i)$ désigne la dérivée première au point α_i de l'application $x \longrightarrow p(x)$ et ξ_i est un vecteur de \mathbb{R}^n .

(c) - $\Phi_i : p \longrightarrow D^2 p(\alpha_i) (\xi_i, \eta_i)$, où $D^2 p(\alpha_i)$ désigne la dérivée seconde au point α_i de l'application $x \longrightarrow p(x)$ et ξ_i, η_i sont deux vecteurs de \mathbb{R}^n .

Lorsque toutes les formes linéaires sont du type (a), on dit qu'on a un élément fini de type "LAGRANGE"; Si elles sont des types (a) et (b), on dit qu'on a un élément fini de type "HERMITE" d'ordre 1. Tandis que, si elles sont des types (a), (b) et (c), on

dit qu'on a un élément fini du type "HERMITE" d'ordre 2.

Soit \hat{K} l'élément fini de référence. Pour connaître notre élément fini, il nous suffira de connaître l'application affine qui envoie \hat{K} sur K . La proposition suivante permet de déduire les fonctions de bases associées à l'élément fini à partir de celles associées à l'élément fini de référence équivalent.

PROPOSITION I-1 (CROUZEIX [13])

Soit K un élément fini équivalent à l'élément fini de référence \hat{K} par l'intermédiaire d'une application linéaire affine F_K définie par :

$$x = F_K(\hat{x}) = B \hat{x} + b$$

où $B \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. B est inversible et $b \in \mathbb{R}^n$; de sorte que:

$$K = F_K(\hat{K})$$

et de plus $\sum_K = F(\sum_{\hat{K}})$

$$\text{ou } \sum_{\hat{K}} = \{ \alpha_j \}_{j=1}^{j=M}$$

Soit p est la fonction obtenue à l'aide d'une fonction \hat{p} par :

$$p(x) = \hat{p}(\hat{x}) \quad \hat{p} \in R_k(\hat{K})$$

où $R_k(\hat{K})$ est un espace de fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à k sur l'élément \hat{K} .

Alors, les fonctions de bases $\{\varphi_i\}_{i=1,N}$ relatives à P_K s'obtiennent à l'aide des fonctions de base $\{\hat{\varphi}_i\}_{i=1,N}$ relatives à $R_k(\hat{K})$ par:

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= \hat{\varphi}_i(\hat{x}) = \hat{\varphi}_i(F_K^{-1}(x)) \\ &= \hat{\varphi}_i \circ F_K^{-1}(x) \quad 1 \leq i \leq N \end{aligned}$$

REMARQUES 1-2

(i) - on note $P_k(\hat{K})$ par $P_k(\hat{K})$ si \hat{K} est un triangle ou tétraèdre ($n = 2, 3$) ou par $Q_k(\hat{K})$ si \hat{K} est un quadrilatère ou hexaèdre.

(ii) - Si l'élément fini est de type de LAGRANGE alors :

$$P_k(\hat{K}) = \left\{ \hat{p} / \hat{p}(\hat{x}) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j \leq k}}^k \hat{a}_{ij} \hat{x}_1^i \hat{x}_2^j \right\}$$

$$Q_k(\hat{K}) = \left\{ \hat{p} / \hat{p}(\hat{x}) = \sum_{i,j=0}^k \hat{b}_{ij} \hat{x}_1^i \hat{x}_2^j \right\}$$

(iii) - L'espace d'éléments finis X_h peut être réécrit de façon suivante :

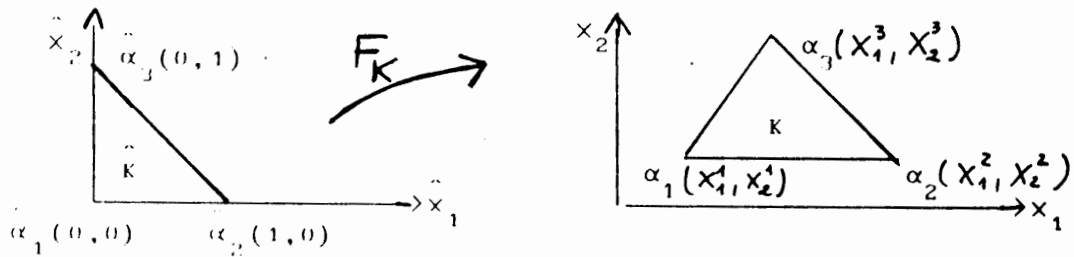
$$X_h = \left\{ v_h \in X / v_h|_K = \hat{v} \circ F_K^{-1} \quad \hat{v} \in P_k(\hat{K}), \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}$$

EXEMPLES

(1) - Élément fini de LAGRANGE d'ordre 1 dans le cas triangulaire

Soit F_K une application affine de \hat{K} vers K , donnée par :

$$F_K : \begin{cases} x_1 = x_1^1 + \hat{x}_1(x_1^2 - x_1^1) + \hat{x}_2(x_1^3 - x_1^1) \\ x_2 = x_2^1 + \hat{x}_2(x_2^2 - x_2^1) + \hat{x}_2(x_2^3 - x_2^1) \end{cases}$$



D'après la Proposition précédente,

$$\sum_K \hat{\alpha}_i = \{ \hat{\alpha}_i \}_{i=1}^3 \Rightarrow \sum_K = F_K \left(\sum_K \hat{\alpha}_i \right) = \{ \alpha_i \}_{i=1}^3$$

i.e

$$\alpha_i = F_K(\hat{\alpha}_i) \quad i = \overline{1,3}$$

Les fonctions de base $\{\hat{\varphi}_i\}_{i=1,3}$ associées à $R_1(\hat{K}) = P_1(\hat{K})$ sont :

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = 1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2 \\ \hat{\varphi}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{x}_1 \\ \hat{\varphi}_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{x}_2 \end{cases}$$

D'où, les fonctions $\{\varphi_i\}_{i=1,3}$ associées à P_K s'obtiennent à l'aide de

$$\varphi_i(x) = \hat{\varphi}_i(\hat{x}) = \hat{\varphi}_i \circ F_K^{-1}(x) \quad , \quad \forall i = 1,2,3$$

où $F_K(\hat{x}) = x$

De même, il est clair que $\hat{x} = F_K^{-1}(x)$ donne:

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = \frac{(x_1 - x_1^1)(x_2^3 - x_2^1) - (x_2 - x_2^1)(x_1^3 - x_1^1)}{(x_1^2 - x_1^1)(x_2^3 - x_2^1) - (x_2^2 - x_2^1)(x_1^3 - x_1^1)} \\ \hat{x}_2 = \frac{-(x_1 - x_1^1)(x_2^2 - x_2^1) + (x_2 - x_2^1)(x_1^2 - x_1^1)}{(x_1^2 - x_1^1)(x_2^3 - x_2^1) - (x_2^2 - x_2^1)(x_1^3 - x_1^1)} \end{cases}$$

Par conséquent ,

$$\psi_1(x_1, x_2) = \hat{\psi}_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = 1 - \frac{(x_1 - x_1^1)(x_2^3 - x_2^2) + (x_2 - x_2^1)(x_1^2 - x_1^3)}{(x_1^2 - x_1^1)(x_2^3 - x_2^2) - (x_2^2 - x_2^1)(x_1^3 - x_1^1)}$$

$$\psi_2(x_1, x_2) = \hat{\psi}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \frac{(x_1 - x_1^1)(x_2^3 - x_2^1) - (x_2 - x_2^1)(x_1^3 - x_1^1)}{(x_1^2 - x_1^1)(x_2^3 - x_2^2) - (x_2^2 - x_2^1)(x_1^3 - x_1^1)}$$

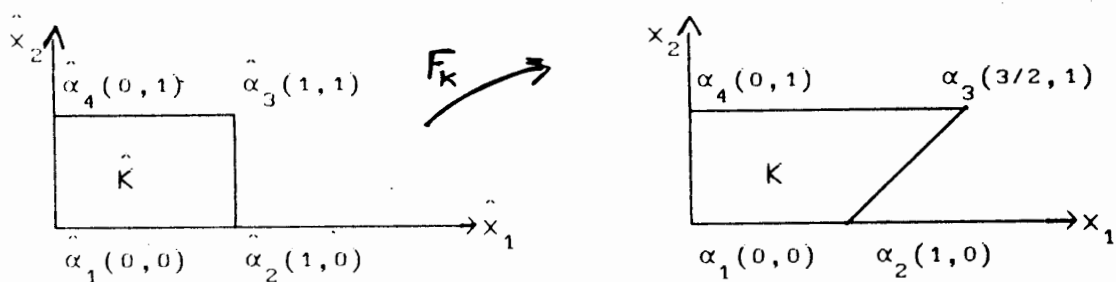
$$\psi_3(x_1, x_2) = \hat{\psi}_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \frac{-(x_1 - x_1^1)(x_2^2 - x_2^1) + (x_2 - x_2^1)(x_1^2 - x_1^1)}{(x_1^2 - x_1^1)(x_2^3 - x_2^2) - (x_2^2 - x_2^1)(x_1^3 - x_1^1)}$$

On note que les fonctions $\{\psi_i\}$ présentent la même forme que les fonctions $\{\hat{\psi}_i\}$.

(2)-Élément fini de LAGRANGE d'ordre 1 dans le cas quadrangulaire

Soit F_K une application affine de \hat{K} vers K , donnée par :

$$F_K: \begin{cases} x_1 = x_1^1 + \hat{x}_1(x_1^2 - x_1^1) + \hat{x}_2(x_1^4 - x_1^1) + \hat{x}_1\hat{x}_2(x_1^1 - x_1^2 + x_1^3 - x_1^4) \\ x_2 = x_2^1 + \hat{x}_2(x_2^2 - x_2^1) + \hat{x}_2(x_2^4 - x_2^1) + \hat{x}_1\hat{x}_2(x_2^1 - x_2^2 + x_2^3 - x_2^4) \end{cases}$$



Soit F_K une application affine de \hat{K} vers K , donnée par: (voir figure)

$$F_K : \begin{cases} \tilde{x}_1 = \bar{x}_1 + \frac{1}{2} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \\ \tilde{x}_2 = \bar{x}_2 \end{cases}$$

D'après la Proposition précédente,

$$\sum_K \tilde{\alpha} = \{ \tilde{\alpha}_i \}_{i=1}^{i=4} \text{ alors } \sum_K = F_K \left(\sum_K \tilde{\alpha} \right) = \{ \alpha_i \}_{i=1}^{i=4}$$

i.e $\alpha_i = F_K(\tilde{\alpha}_i) \quad , \quad i = \overline{1,4}$

Les fonctions de bases $\{\tilde{\varphi}_i\}_{i=1,4}$ associées à $R_1(\hat{K}) = Q_1(\hat{K})$ sont :

$$\tilde{\varphi}_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (1 - \tilde{x}_1)(1 - \tilde{x}_2)$$

$$\tilde{\varphi}_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \tilde{x}_1(1 - \tilde{x}_2)$$

$$\tilde{\varphi}_3(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \tilde{x}_1 \tilde{x}_2$$

$$\tilde{\varphi}_4(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (1 - \tilde{x}_1) \tilde{x}_2$$

d'où les fonctions $\{\varphi_i\}_{i=1,4}$ associées à P_K s'obtiennent à l'aide de:

$$\varphi_i(x) = \tilde{\varphi}_i(\tilde{x}) = \tilde{\varphi}_i \circ F_K^{-1}(x) \quad , \quad i = \overline{1,4}$$

où $F_K(\tilde{x}) = x$

$$F_K^{-1} : \begin{cases} \tilde{x}_1 = \frac{2x_1}{2 + x_2} \\ \tilde{x}_2 = x_2 \end{cases}$$

Par conséquent ,

$$\varphi_1(x_1, x_2) = \left(1 - \frac{2x_1}{2 + x_2}\right) (1 - x_2)$$

$$\varphi_2(x_1, x_2) = \frac{2x_1}{2 + x_2} (1 - x_2)$$

$$\varphi_3(x_1, x_2) = \frac{2x_1x_2}{2 + x_2}$$

$$\varphi_4(x_1, x_2) = \left(1 - \frac{2x_1}{2 + x_2}\right) x_2$$

Contrairement, au cas triangulaire, on note malgré que les fonctions $\{\varphi_i\}$ sont bilinéaires, les fonctions $\{\hat{\varphi}_i\}$ sont rationnelles.

REMARQUE 1-4

En général, les fonctions de bases $\{\varphi_i(x)\}_{i=1,N}$ ne sont utilisées que pour des éléments simples. Elles sont le plus souvent remplacées par les fonctions de bases de référence $\{\hat{\varphi}_i(\hat{x})\}_{i=1,N}$ où x et \hat{x} sont liés par une application linéaire affine F_k définie dans la Proposition 1-1.

REMARQUE 1-5

On note que les fonctions $\varphi_i(x)$ dépendent des coordonnées des noeuds de l'élément et sont donc différentes pour chaque élément. Par contre les fonctions de bases $\hat{\varphi}_i(\hat{x})$ sont indépendantes de la géométrie de l'élément de référence \hat{K} . Et de plus, les mêmes fonctions de bases $\hat{\varphi}_i(\hat{x})$ peuvent être utilisées pour tous les éléments possédant le même élément de référence caractérisé par sa forme, ses sommets géométrique et ses noeuds d'interpolation.

DEUXIEME CHAPITRE

THÉORIE GÉNÉRALE DES MÉTHODES MIXTES D'ÉLÉMENTS FINIS

2-1 MÉTHODES MIXTES D'ÉLÉMENTS FINIS POUR LE
PROBLÈME DU POINT-SELLE

2-2 MÉTHODES MIXTES D'ÉLÉMENTS FINIS POUR LE
PROBLÈME D'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

2-3 LES COUPLES D'ÉLÉMENTS FINIS STABLES ET
INSTABLES POUR LE PROBLÈME DE STOKES

2-4 UNE MÉTHODE STABLE DE TAYLOR-HOOD POUR LE
PROBLÈME D'ÉLASTICITÉ

Dans ce chapitre, on présente les méthodes mixtes d'éléments finis pour l'approximation numérique du problème d'Elasticité. On montre qu'elles sont assujetties à certaines conditions de consistance et de stabilité afin de garantir la convergence des solutions approchées.

Parmi ces conditions, on verra que la condition de ellipticité joue un rôle important dans la stabilité .

A la fin de ce chapitre, on donnera quelques exemples des méthodes mixtes stables et instables pour le problème de Stokes , et une méthode mixte stable de TAYLOR-HOOD pour le problème d'Elasticité .

2-1 METHODES MIXTES DES ELEMENTS FINIS POUR LE PROBLEME DU POINT-

- SELLE

Une fois que la formulation variationnelle de HELLINGER - REISSNER a été établie, le problème discret se détermine de la manière suivante .

Premièrement , on choisit les espaces d'approximations d'éléments finis, comme définis à la fin du chapitre précédent .

Soient,

$$W_h = \left\{ \sigma \in W / \sigma|_K = \bar{\sigma} \circ F_K^{-1}, \bar{\sigma} \in R_k(\hat{K}), K \in \mathcal{T}_h \right\} \quad (2-1)$$

et

$$V_h = \left\{ v \in V / v|_K = \hat{v} \circ F_K^{-1}, \hat{v} \in R_\ell(K), K \in \mathcal{T}_h \right\} \quad (2-2)$$

où \mathcal{T}_h est la subdivision de Ω . Cette subdivision \mathcal{T}_h est constituée de triangles ou quadrilatères si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, de tétraèdres ou hexaèdres si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Alors, avec W_h et V_h , on associe le problème discret (P_h) suivant :

Trouver $\sigma_h \in W_h$, $v_h \in V_h$ telle que :

$$a(\sigma_h, \tau_h) + b(\tau_h, v_h) = \mathcal{L}(\tau_h) \quad \forall \tau_h \in W_h \quad (2-3)$$

$$b(\sigma_h, v_h) = \varphi(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (2-4)$$

Si on choisit des bases pour V_h et W_h , il est clair que (2-3) et (2-4) sont équivalentes à un système linéaire d'équations algébriques. En effet, si $\{\tau_k, k = \overline{1, \mathcal{K}}\}$ et $\{v_j, j = \overline{1, \mathcal{J}}\}$ désignent des bases pour W_h et V_h respectivement, on peut alors écrire

$$v_h = \sum_{j=1}^{\mathcal{J}} \alpha_j v_j \quad \text{et} \quad \tau_h = \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \beta_k \tau_k$$

pour certaines constantes α_j , $j = \overline{1, \mathcal{J}}$ et β_k , $k = \overline{1, \mathcal{K}}$.

En substituant dans (2-3) et (2-4), on obtient

$$\sum_{k=1}^{\mathcal{K}} a(\tau_k, \tau_\ell) \beta_k + \sum_{j=1}^{\mathcal{J}} b(\tau_\ell, v_j) \alpha_j = \mathcal{L}(\tau_\ell) \quad \forall \ell = \overline{1, \mathcal{K}} \quad (2-5)$$

$$\sum_{k=1}^{\mathcal{K}} b(\tau_k, v_i) \beta_k = \varphi(v_i) \quad \forall i = \overline{1, \mathcal{J}} \quad (2-6)$$

Maintenant, on définit le sous-espace

$$K_h = \left\{ \tau_h \in W_h / b(\tau_h, v_h) = 0, \forall v_h \in V_h \right\} \quad (2-7)$$

En général, on a $K_h \not\subset K$, où K est donné par (1-55) .

L'existence et l'unicité de la solution du problème (P_h) et sa convergence vers la solution du problème (P) , sont données par le résultat suivant, qui constitue une version "discrète" du Théorème 1-1.

THEOREME.2-1 (GIRAULT-RAVIART [18])

Supposons les hypothèses suivantes :

(H1) K_h -ellipticité de $a(\dots)$

Il existe une constante $\alpha^* > 0$, indépendante de h , telle que

$$|a(\tau_h, \tau_h)| \geq \alpha^* \|\tau_h\|_W^2 \quad \forall \tau_h \in K_h \quad (2-8)$$

(H2) condition de BABUSKA-BREZZI

Il existe une constante $\beta^* > 0$, indépendante de h , telle que

$$\sup_{\tau_h \in W_h} \frac{b(\tau_h, v_h)}{\|\tau_h\|_W} \geq \beta^* \|v_h\|_V, \quad \forall v_h \in V_h \quad (2-9)$$

Alors , le problème (P_h) a une solution unique $\{\sigma_h, u_h\} \in W_h \times V_h$.
De plus , il existe une constante $c > 0$, indépendante de h , telle que :

$$\|\sigma - \sigma_h\|_W + \|u - u_h\|_V \leq c \left\{ \inf_{\tau \in W_h} \|\sigma - \tau\|_W + \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V \right\} \quad (2-10)$$

où $\{\sigma, u\}$ est la solution du problème (P) ((1-50) et (1-51)).

REMARQUE 2-1

La condition de BABUSKA-BREZZI est équivalente à :

$$\forall v_h \in V_h, \exists \tau_h \in W_h \text{ telle que :}$$
$$b(\tau_h, v_h) \geq \beta^* \|v_h\|_V \|\tau_h\|_W$$

où β^* est une constante positive indépendante de h et du choix particulier de $v_h \in V_h$.

REMARQUE 2-2

La vérification de (H1) s'avère facile pour certains problèmes comme celui de Stokes, alors que pour d'autres, c'est l'hypothèse (H2) qui est aisément vérifiable; ceci est le cas du problème d'Elasticité linéaire. Plus de détails peuvent être trouvés dans FRANCA-HUGHES [15].

REMARQUE 2-3

Pour des raisons pratiques, on écrit le problème (P_h) sous la forme équivalente :

Soit $f \in V'$ et $g \in W'$, trouver $\{\sigma_h, u_h\} \in W_h \times V_h$ telle que :

$$B(\{\sigma_h, u_h\} ; \{\tau_h, v_h\}) = L(\tau_h, v_h), \quad (2-11)$$

pour tout $\{\tau_h, v_h\} \in W_h \times V_h$

Où

$$B(\{\sigma_h, u_h\} ; \{\tau_h, v_h\}) = a(\sigma_h, \tau_h) + b(\tau_h, u_h) + b(\sigma_h, v_h) \quad (2-12)$$

$$L(\tau_h, v_h) = \mathcal{L}(\tau_h) + \varphi(v_h) = (f, v_h) + (g, \tau_h) \quad (2-13)$$

La principale motivation pour l'utilisation de cette forme équivalente du problème (P_h) est le résultat suivant démontré par

BABUSKA dans [3].

THEOREME 2-2

Soient W_1 et W_2 deux espaces de hilbert, avec les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ respectivement. De plus, soit $B(\dots)$ une forme bilinéaire sur $W_1 \times W_2$ telle que :

$$(a) \quad |B(s,r)| \leq c_1 \|s\|_1 \|r\|_2 \quad \forall (s,r) \in W_1 \times W_2$$

$$(b) \quad \sup_{s \in W_1} \frac{|B(s,r)|}{\|s\|_1} \geq c_2 \|r\|_2 \quad \forall r \in W_2$$

$$(c) \quad \sup_{r \in W_2} \frac{|B(s,r)|}{\|r\|_2} \geq c_3 \|s\|_1 \quad \forall s \in W_1$$

avec $c_2 > 0$, $c_3 > 0$, $c_1 < \infty$. De plus, soit L une fonctionnelle linéaire sur W_2 . i.e. $L \in W_2'$. Alors, il existe un élément $s_0 \in W_1$ tel que :

$$B(s_0, r) = L(r) \quad \forall r \in W_2$$

avec $\|s_0\|_1 \leq \frac{\|L\|_*}{c_3}$

et $\|L\|_* = \sup_{t \in W_2} \frac{|L(t)|}{\|t\|_2}$

2-2 METHODES MIXTES D'ELEMENTS FINIS POUR LE PROBLEME
D'ELASTICITE LINEAIRE

On suppose que quelque soit $h > 0$, les espaces d'éléments finis W_h et V_h satisfont

$$W_h \subset W = [L^2(\Omega)]^{\frac{n(n+1)}{2}}, \quad V_h \subset V = [H_0^1(\Omega)]^n \quad (2-14)$$

Ce type de méthodes est appelé méthode conforme , contrairement aux méthodes non conformes où les inclusions (2-14) ne sont pas vérifiées, simultanément ou pas du tout.

Avec ces espaces donnés, la formulation mixte de HELLINGER-RIESSNER ([20],[25]) du problème discret d'Elasticité s'écrit comme suit

PROBLEME (M^h)

trouver $(\sigma_h, u_h) \in W_h \times V_h$ telle que :

$$a_\rho(\sigma_h, \tau_h) + d(\tau_h, u_h) = 0 \quad \forall \tau_h \in W_h \quad (2-15)$$

$$d(\sigma_h, v_h) = f(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (2-16)$$

où

$$a_\rho(\sigma_h, \tau_h) = \frac{1}{2\mu} \left[(\xi_h, \tau_h) - \frac{1-\rho}{n} (\text{tr } \xi_h, \text{tr } \tau_h) \right] \quad \forall \xi_h, \tau_h \in W_h$$

$$d(\sigma_h, v_h) = - (\xi_h, \varepsilon(v_h)) \quad \forall v_h \in V_h$$

$$f(v_h) = - (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

On note que les inclusions (2-14) ne sont pas suffisantes pour garantir l'existence et l'unicité de la solution du problème discret (M^h). En le comparant avec le problème (P_h), on constate que l'hypothèse (H2) du Théorème 2-1 est facile à vérifier. En effet, comme dans le cas continu, (H2) est triviale. Quant à W_h et V_h, on les choisit de telle manière que le degré d'interpolation des polynômes dans V_h soit égale ou supérieur à celui des polynômes dans W_h. Dans ce cas, on a $\varepsilon(v_h) \in W_h$, pour chaque $v_h \in V_h$, et on peut définir $\bar{\tau}_h \in W_h$ par :

$$\bar{\tau}_h = - \varepsilon(v_h)$$

Pour ce choix, on a :

$$d(\bar{\tau}_h, v_h) = - \int_{\Omega} \varepsilon(v_h) \cdot \bar{\tau}_h \, d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon(v_h) \cdot \varepsilon(v_h) \, d\Omega$$

Mais,

$$\|\bar{\tau}_h\|_W^2 = \int_{\Omega} \varepsilon(v_h) \cdot \varepsilon(v_h) \, d\Omega = \|\varepsilon(v_h)\|_{0,\Omega}^2$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité de KÖRN, on déduit que la norme $\|\varepsilon(v_h)\|_{0,\Omega}$ est équivalente à $\|v_h\|_V$, d'où l'existence d'une constante $c(\Omega) > 0$ telle que :

$$c(\Omega) \|v_h\|_V \leq \frac{d(\bar{\tau}_h, v_h)}{\|\bar{\tau}_h\|_W} = \|\varepsilon(v_h)\|_{0,\Omega} \leq \sup_{\tau_h \in W_h} \frac{d(\tau_h, v_h)}{\|\tau_h\|_W}$$

Ce qui donne l'hypothèse (H2) avec $\beta^* = c(\Omega)$, indépendante de h ([18]).

La difficulté réside maintenant dans la vérification de la condition de K_h -ellipticité de $a_\rho(\dots)$ pour certains choix.

Cependant, cette difficulté peut être transportée à un problème discret de Stokes associé.

En effet, on utilisant la remarque 1-1, on définit le problème de Stokes suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mu \Delta u - \nabla p + f = 0 & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (2-17)$$

avec,

$$p = - \frac{1}{n} \operatorname{tr} \tau$$

Ce dernier possède la formulation variationnelle, suivante:

Etant donnée $f \in L^2(\Omega)$, trouver $(u, p) \in H_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ telle que:

$$\begin{cases} \mu (\nabla u, \nabla v) - (p, \operatorname{div} v) = (f, v) & \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ - (q, \operatorname{div} u) = 0 & \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{cases} \quad (2-18)$$

Ou, sous la forme abstraite suivante :

PROBLEME (S)

Etant données $l \in V'$ et $\varphi \in Q'$, trouver $\{u, p\} \in V \times Q$ telle que :

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(p, v) &= l(v) & v \in V \\ b(q, u) &= \varphi(q) & q \in Q \end{aligned} \quad (2-19)$$

avec $a(u, v) = \mu (\nabla u, \nabla v)$, $b(p, v) = - (q, \operatorname{div} v)$

$l(v) = (f, v)$, $\varphi(q) = 0$

$V = [H_0^1(\Omega)]^n = H_0^1(\Omega)$, $Q = L_0^2(\Omega)$

on s'assure aisément que, dans ce cas, toutes les hypothèses du Théorème 1-1 sont vérifiées. En effet, en utilisant les inégalités de CAUCHY-SCHWARTZ, FRIEDRICHS-POINCARÉ et les propriétés de "div" (cf GIRAULT-RAVIART [18]), les hypothèses (A1), (H1) et (H2) sont vérifiées avec $M = \mu$, $k = 1$, $\alpha = 1$ et $\beta = \frac{1}{c_*}$, où c_* est la constante positive (voir GIRAULT-RAVIART

[18], page 42) . D'où, le problème (S) admet une solution unique (u,p) dans $H_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$.

Une fois la formulation variationnelle établie , le problème discret, qui détermine la solution approchée, est défini comme suit:

PROBLEME (S^h)

Etant données $l \in V'$ et $\varphi \in Q'$, trouver $\{u_h, p_h\} \in V_h \times Q_h$ telle que :

$$\begin{cases} a(u_h, v_h) + b(p_h, v_h) = l(v_h) & \forall v_h \in V_h \\ b(q_h, u_h) = \varphi(q_h) & \forall q_h \in Q_h \end{cases} \quad (2-20).$$

où $V_h \subset V$ et $Q_h \subset Q$.

L'existence et l'unicité de la solution du problème (S^h) sont régies par le Théorème 2-1. L'hypothèse (H1) du Théorème est facilement satisfaite, la seule condition qui peut poser des difficultés est la condition de BABUSKA-BREZZI correspondante.

LEMME. 2-1

S'il existe une constante $\beta_0 > 0$, indépendante de h , telle que

$$\sup_{v_h \in V_h} \frac{(\text{div } v_h, q_h)}{\|v_h\|_1} \geq \beta_0 \|q_h\|_0, \quad q_h = -\frac{1}{n} \text{tr } \tau_h, \quad (2-21)$$

alors, la K_h -ellipticité de $a_\rho(\dots)$ pour le problème discret d'élasticité (M^h) est vérifiée .

DEMONSTRATION

La condition (2-21) peut s'écrire de la manière suivante :

$\forall \tau_h \in K_h$ ($q_h = -\frac{1}{n} \text{tr } \tau_h$), $\exists \bar{v}_h \in V_h$ tel que :

$$(\text{div } \bar{v}_h, q_h) = \|q_h\|_0^2 \quad \text{et} \quad \|\bar{v}_h\|_1 \leq \frac{1}{\beta_0} \|q_h\|_0$$

Posons $\tau_h = s_h - q_h I$, $\forall \tau_h \in K_h$. Par définition, on a

$$(\text{div } v_h, q_h) = (s_h, \varepsilon(v_h)) \quad \forall v_h \in V_h \quad (2-22)$$

En substituant pour $v_h = \bar{v}_h$ dans (2-22), on aura :

$$\begin{aligned} \|q_h\|_0^2 &= (s_h, \varepsilon(\bar{v}_h)) \leq \|s_h\|_0 \|\varepsilon(\bar{v}_h)\|_0 \\ &\leq \|s_h\|_0 \|\bar{v}_h\|_1 \\ &\leq \|s_h\|_0 \frac{1}{\beta_0} \|q_h\|_0 \end{aligned}$$

D'où,

$$\|q_h\|_0 \leq \frac{1}{\beta_0} \|s_h\|_0, \quad \forall \tau_h = s_h - q_h I \in K_h \quad (2-23)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|s_h\|_0^2 + n \|q_h\|_0^2 &\leq \|s_h\|_0^2 + \frac{n}{\beta_0^2} \|s_h\|_0^2 \\ &\leq \left(1 + \frac{n}{\beta_0^2}\right) \|s_h\|_0^2 \end{aligned} \quad (2-24)$$

Comme on sait, pour $\tau_h = s_h - q_h I \in K_h$ on a :

$$\|\tau_h\|_0^2 = \|s_h - q_h I\|_0^2 = \|s_h\|_0^2 + n \|q_h\|_0^2$$

D'où, en tenant compte de (2-24),

$$\|\tau_h\|_0^2 \leq \left[1 + \frac{n}{\beta_0^2}\right] \|s_h\|_0^2 \quad (2-25)$$

En vertu de (1-81) et (2-25), on obtient:

$$\begin{aligned}
 |a_\rho(t_h, t_h)| &= \frac{1}{2\mu} \left[\|s_h\|_0^2 + \rho n \|q_h\|_0^2 \right] \\
 &\geq \frac{1}{2\mu} \|s_h\|_0^2 \\
 &\geq \frac{1}{2\mu} \frac{1}{\left[1 + \frac{n}{\beta_0^2}\right]} \|\tau_h\|_0^2 \\
 \text{i.e. } |a_\rho(\tau_h, \tau_h)| &\geq \frac{\beta_0^2}{2\mu(\beta_0^2 + n)} \|\tau_h\|_0^2 \tag{2-26}
 \end{aligned}$$

Il est maintenant clair que la K_h -ellipticité de $a_\rho(\dots)$ est satisfaite pour $\alpha^* = \frac{\beta_0^2}{2\mu(\beta_0^2 + n)}$, qui est évidemment indépendante de h et ρ .

La convergence de la solution approchée vers la solution exacte du problème se déduit comme suit:

D'abord, on introduit la forme bilinéaire $B : (W_h \times V_h)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et la fonctionnelle $L : W_h \times V_h \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$B(\{\sigma, u\}; \{\tau, v\}) = a_\rho(\sigma, \tau) + d(u, \tau) + d(v, \sigma) \tag{2-27}$$

et

$$L(\tau, v) = (f, v) \tag{2-28}$$

Le problème discret d'élasticité (M^h) peut être réécrit sous la forme

PROBLEME (M₁^h)

Trouver $(\sigma_h, \tau_h) \in W_h \times V_h$ tel que :

$$B((\sigma_h, u_h); (\tau, v)) = L(\tau, v) \quad \forall (\tau, v) \in W_h \times V_h \quad (2-29)$$

THEOREME 2-3

Supposons l'existence d'une constante $\gamma > 0$, indépendante de h , telle que pour tout $(\xi_h, w_h) \in W_h \times V_h$

$$\sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0, 0)}} \frac{B((\xi_h, w_h); (\tau, v))}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \geq \gamma \left(\|\xi_h\|_0 + \|w_h\|_1 \right) \quad (2-30)$$

Alors, on a l'estimation d'erreur:

$$\|\sigma - \sigma_h\|_0 + \|u - u_h\|_1 \leq c \left\{ \inf_{\tau \in W_h} \|\sigma - \tau\|_0 + \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_1 \right\} \quad (2-31)$$

où la constante $c > 0$ est indépendante de h et (σ, u) dénote la solution exacte du problème (M).

REMARQUE 2-4

Il est important de noter que l'inégalité (2-30) peut être utilisée pour prouver l'unicité et l'existence de la solution approchée (σ_h, u_h) par l'application du Théorème 2-2.

DEMONSTRATION DU THEOREME 2-3

Soit $u \in V_h$ un interpolant de u dans V_h , et $\tilde{\sigma}$ un interpolant de σ sur W_h . Pour tout $(\tau, v) \in W_h \times V_h$ on a :

$$B(\{\sigma_h - \tilde{\sigma}, u_h - \tilde{u}\}; \{\tau, v\}) = B(\{\sigma_h, u_h\}; \{\tau, v\}) - B(\{\tilde{\sigma}, \tilde{u}\}; \{\tau, v\})$$

et

$$B(\{\sigma - \tilde{\sigma}, u - \tilde{u}\}; \{\tau, v\}) = B(\{\sigma, u\}; \{\tau, v\}) - B(\{\tilde{\sigma}, \tilde{u}\}; \{\tau, v\})$$

Mais, en utilisant (2-29), on a:

$$\begin{aligned} B(\{\sigma_h, u_h\}; \{\tau, v\}) &= L(\tau, v) \\ &= B(\{\sigma, u\}; \{\tau, v\}) \quad \forall (\tau, v) \in W_h \times V_h \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} B(\{\sigma_h - \tilde{\sigma}, u_h - \tilde{u}\}; \{\tau, v\}) &= B(\{\sigma - \tilde{\sigma}, u - \tilde{u}\}; \{\tau, v\}) \\ &\quad \forall (\tau, v) \in W_h \times V_h \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $a_\rho(\dots)$ et $d(\dots)$ sont continues,

il s'ensuit:

$$\begin{aligned} B(\{\sigma_h - \tilde{\sigma}, u_h - \tilde{u}\}; \{\tau, v\}) &= a_\rho(\sigma - \tilde{\sigma}, \tau) + d(u - \tilde{u}, \tau) + d(\sigma - \tilde{\sigma}, v) \\ &\leq M \|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 \|\tau\|_0 + k \|u - \tilde{u}\|_1 \|\tau\|_0 + k \|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 \|v\|_1 \\ &\leq \max\{M, k\} \|\tau\|_0 \left[\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u - \tilde{u}\|_1 \right] + k \|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 \|v\|_1 \\ &\leq \max\{M, k\} \left[\|\tau\|_0 + \|v\|_1 \right] \left[\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u - \tilde{u}\|_1 \right] \end{aligned}$$

i.e

$$B(\{\sigma_h - \tilde{\sigma}, u_h - \tilde{u}\}; \{\tau, v\}) \leq C_1 \left[\|\tau\|_0 + \|v\|_1 \right] \left[\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u - \tilde{u}\|_1 \right]$$

avec $C_1 = \max\{M, k\}$.

D'où,

$$\sup_{(\tau, v) \in W_h \times V_h} \frac{B(\{\sigma_h - \tilde{\sigma}, u_h - \tilde{u}\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \leq C_1 \left[\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u - \tilde{u}\|_1 \right] \quad (2-32)$$

De l'inégalité (2-30), il vient

$$\gamma \left[\|\sigma_h - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u_h - \tilde{u}\|_1 \right] \leq \sup_{(\tau, v) \in W_h \times V_h} \frac{B(\{\sigma_h - \tilde{\sigma}, u_h - \tilde{u}\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \quad (2-33)$$

En combinant (2-32) et (2-33), on obtient

$$\gamma \left[\|\sigma_h - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u_h - \tilde{u}\|_1 \right] \leq C_1 \left[\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u - \tilde{u}\|_1 \right]$$

i.e.

$$\left[\|\sigma_h - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u_h - \tilde{u}\|_1 \right] \leq \frac{C_1}{\gamma} \left[\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u - \tilde{u}\|_1 \right] \quad (2-34)$$

D'autre part, on a :

$$\|\sigma - \sigma_h\|_0 = \|\sigma - \sigma_h + \tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}\|_0 \leq \|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 + \|\sigma_h - \tilde{\sigma}\|_0$$

et

$$\|u - u_h\|_1 = \|u - u_h + \tilde{u} - \tilde{u}\|_1 \leq \|u - \tilde{u}\|_1 + \|u_h - \tilde{u}\|_1$$

D'où ,

$$\begin{aligned} \|\sigma - \sigma_h\|_0 + \|u - u_h\|_1 &\leq \|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u - \tilde{u}\|_1 + \frac{C_1}{\gamma} \left[\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u - \tilde{u}\|_1 \right] \\ &\leq \left[1 + \frac{C_1}{\gamma} \right] \left[\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u - \tilde{u}\|_1 \right] \quad \forall (\tilde{\sigma}, \tilde{u}) \in W_h \times V_h \end{aligned}$$

Par conséquent, l'inégalité (2-31) est vérifiée pour $c = 1 + \frac{C_1}{\gamma}$. ■

2-3 LES COUPLES D'ELEMENTS FINIS STABLES ET INSTABLES POUR LE

CAS DU PROBLEME DE STOKES

Comme on vient de voir, les méthodes mixtes des éléments finis pour la résolution numérique des problèmes de point-selle sont assujetties à certaines conditions de consistance et de

stabilité pour garantir la convergence de la solution approchée vers la solution exacte. Parmi ces dernières, la condition de BABUSKA-BREZZI joue un rôle important dans la stabilité pour certains problèmes comme ceux de NAVIER-STOKES et de STOKES.

Dans ce paragraphe, on présente quelques couples d'approximations vitesse-pression qui vérifient la condition de BABUSKA-BREZZI en dimension deux. Malheureusement, beaucoup de ces méthodes ne sont pas simples à réaliser du fait de leur coût élevé.

On suppose que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est subdivisé en une réunion d'un nombre fini d'éléments K (triangles ou quadrilatères). Soit \mathcal{T}_h la subdivision ainsi obtenue. On dénote \hat{K} l'élément de référence et pour chaque $K \in \mathcal{T}_h$, F_K la transformation affine de \hat{K} dans K . Soit $P_k(\hat{K})$ (respectivement $Q_k(\hat{K})$) l'espace des fonctions polynomiales de degré $\leq k$ par rapport aux deux variables (respectivement par rapport à chaque variable) définies sur le triangle \hat{K} (respectivement sur le carré \hat{K}). $C^0(\bar{\Omega})$ désigne l'espace des fonctions continues sur Ω .

Parmi les couples stables d'éléments finis les plus connus, nous citons l'élément mixte de TAYLOR-HOOD, habituellement dénoté par Q_2-Q_1 pour le cas quadrilatère, et par P_2-P_1 pour le cas triangulaire.

L'élément Q_2-Q_1 est caractérisé par la paire d'espaces d'éléments finis $\{V_h, W_h\}$ donnée par :

$$V_h = \left\{ v \in \left(C^0(\bar{\Omega}) \right)^2 ; v|_K = \hat{v} \circ F_K^{-1}, \hat{v} \in \left(Q_2(\hat{K}) \right)^2, \forall K \in \mathcal{T}_h, \right. \\ \left. v = 0 \text{ sur } \Gamma \right\} \quad (2-35a)$$

$$Q_h = \left\{ q \in C^0(\bar{\Omega}) ; q|_K = \hat{q} \circ F_K^{-1}, \hat{q} \in Q_1(\hat{K}), \forall K \in \mathcal{T}_h, \right. \\ \left. \int_{\Omega} q \, d\Omega = 0 \right\} \quad (2-35b)$$

On note que V_h et Q_h sont construits sur le même maillage. La paire satisfait à la condition de BABUSKA-BREZZI, (voir par exemple, BERCOVIER et PIRONNEAU dans [4]). De plus, si la solution (u, p) du problème continu est suffisamment régulière, la convergence est optimale; plus précisément,

si $u \in \left(H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \right)^2$ et $p \in H^{m-1}(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ avec $m = 2$ ou 3 ,

alors on a :

$$\begin{cases} \|u - u_h\|_1 = \mathcal{O}(h^{m-1}) \\ \|u - u_h\|_0 = \mathcal{O}(h^m) \\ \|p - p_h\|_0 = \mathcal{O}(h^{m-1}) \end{cases} \quad (2-36)$$

Ces résultats ont été établis par plusieurs chercheurs (voir, par exemple, GIRAULT-RAVIART [18]). En particulier, si $u \in \left(H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \right)^2$ et $p \in H^2(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$, alors on obtient une précision d'ordre 3 pour la vitesse et une d'ordre 2 pour la pression en norme L^2 .

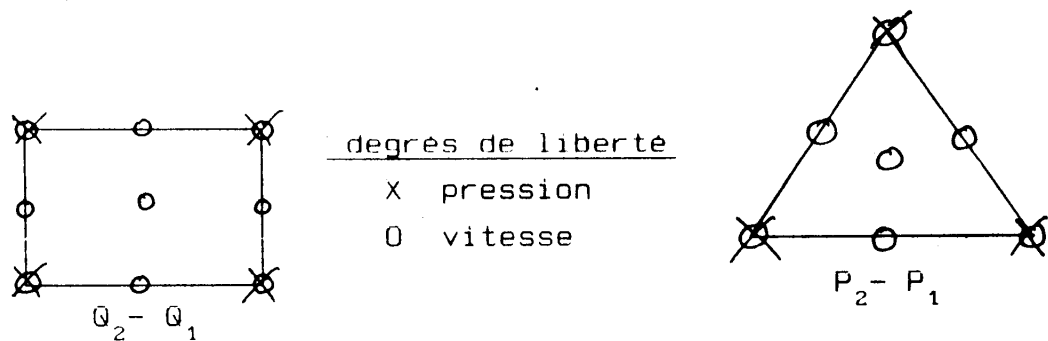
Pour le cas de l'élément mixte (de TAYLOR-HOOD) $P_2 - P_1$, on a les espaces :

$$V_h = \left\{ v \in \left(C^0(\bar{\Omega}) \right)^2 ; v|_K = \hat{v} \circ F_K^{-1}, \hat{v} \in \left(P_2(\hat{K}) \right)^2, \forall K \in \mathcal{T}_h \right. \\ \left. v = 0 \text{ sur } \Gamma \right\} \quad (2-37a)$$

$$Q_h = \left\{ q \in C^0(\bar{\Omega}) ; q|_K = \hat{q} \circ F_K^{-1}, \hat{q} \in P_1(\hat{K}), \forall K \in \mathcal{T}_h \right. \\ \left. \int_{\Omega} q \, d\Omega = 0 \right\} \quad (2-37b)$$

De nouveau, cette paire satisfait, a la condition de BABUSKA-BREZZI et engendre les estimations d'erreur (2-36) (cf VERFURTH [33], SILVESTER et THATCHER [27], BONLAND-NICOLAIDES [5]).

Les deux éléments mixtes $Q_2 - Q_1$ et $P_2 - P_1$ sont illustrés par la figure (1) :



- figure (1) -

Remarquons, finalement, que les arguments précédents peuvent être généralisés pour toutes les méthodes de type TAYLOR-HOOD :

$$V_h = \left\{ v \in \left(H_0^1(\Omega) \right)^2; v|_K = \hat{v} \circ F_K^{-1}, \hat{v} \in \left(Q_{\ell}(\hat{K}) \right)^2, \forall K \in \mathcal{T}_h \right\} \quad (2-38a)$$

$$Q_h = \left\{ q \in C^0(\bar{\Omega}) \cap L_0^2(\Omega); q|_K = \hat{q} \circ F_K^{-1}, \hat{q} \in Q_{\ell-1}(\hat{K}), \forall K \in \mathcal{T}_h \right\} \quad (2-38b)$$

avec $\ell \geq 2$, (cf STENBERG [30]).

Malheureusement, ceci n'est pas le cas, lorsque $\ell = 1$
 $(Q_1 - Q_0, P_1 - P_0)$.

Le premier exemple de méthodes instables de ce type est caractérisé par la paire d'espaces d'éléments finis $\{ V_h, Q_h \}$ donnée par:

$$V_h = \left\{ v \in \left(C^0(\bar{\Omega}) \right)^2; v|_K = \hat{v} \circ F_K^{-1}, \hat{v} \in \left(Q_1(\hat{K}) \right)^2 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \right. \\ \left. v = 0 \quad \text{sur } \Gamma \right\} \quad (2-39a)$$

$$Q_h = \left\{ q \in L_0^2(\Omega); q|_K = \hat{q} \circ F_K^{-1}, \hat{q} \in Q_0(\hat{K}) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\} \quad (2-39b)$$

BOLAND et NICOLAIDES [7] ont montré que cette paire ne satisfait pas la condition de BABUSKA-BREZZI. En particulier, comme démontré par SANI et AL [26], il peut arriver que, pour au moins un $q_h \in Q_h$ non nul, on a :

$$(\text{div } v_h, q_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

De ce fait, la constante β de la condition de BABUSKA-BREZZI ne

peut être que nulle. En pratique, cela signifie que la matrice de divergence est du type (m,n) , où m est le nombre de degrés de liberté pour la vitesse et n est le nombre de degrés de liberté pour la pression, avec un rang inférieur à $\min\{m,n\}$. D'autre part, il peut arriver, comme l'ont montré BOLAND et NICOLAIDES dans [6], qu'il existe certains $q_h \in Q_h$ pour lesquels:

$$c_1 h \|q_h\|_0 \leq \sup_{0 \neq v_h \in V_h} \frac{(\operatorname{div} v_h, q_h)}{\|v_h\|_1} \leq c_2 h \|q_h\|_0 \quad (2-40)$$

où les constantes positives c_1, c_2 sont indépendantes de h . L'inégalité de gauche dans (2-40) a été montrée auparavant par JOHNSON-PIIKARANIA dans [21]. Dans ce cas, la constante β de la condition de BABUSKA - BREZZI dépend de h , plus précisément $\beta = \beta(h)$. Le même résultat a été établi par ODEN et JACQUOTTE dans [23].

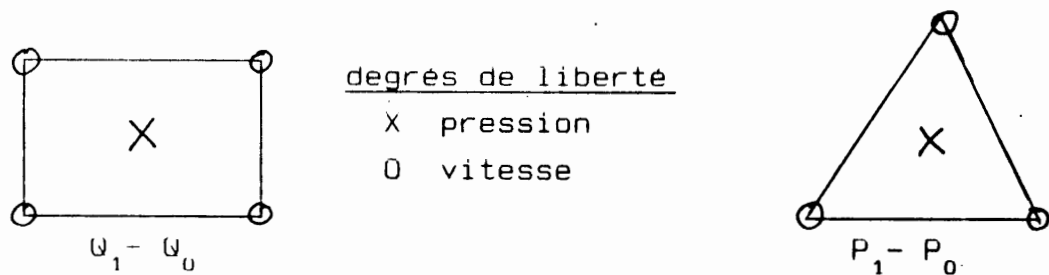
Le second exemple, et certainement le plus catastrophique du point de vue de l'instabilité, est donné par la paire:

$$V_h = \left\{ v \in \left(C^0(\bar{\Omega}) \right)^2; v|_K = \hat{v} \circ F_K^{-1}, \hat{v} \in \left(P_1(\hat{K}) \right)^2 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right. \\ \left. v = 0 \text{ sur } \Gamma \right\} \quad (2-41a)$$

$$Q_h = \left\{ q \in L_0^2(\Omega); q|_K = \hat{q} \circ F_K^{-1}, \hat{q} \in P_0(\hat{K}) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\} \quad (2-41b)$$

Ce couple est dénoté par $P_1 - P_0$. Pour ce choix, il arrive que le seul champ de vitesse $u_h \in V_h$ appartenant à K_h , est $u_h = 0$. Cette

solution approchée est sans intérêt car $u_h = 0$ ne peut être une bonne approximation de la solution exacte du problème considéré. Ce résultat est, sans doute dû au fait que la matrice de divergence discrète $(\text{div } v_h, q_h)$ possède plus de lignes indépendantes que de colonnes. La représentation de ces couples est donnée par la figure (2).



- figure (2) -

On note que jusqu'à maintenant, on a défini V_h et Q_h sur le même maillage \mathcal{T}_h . Cependant, en utilisant pour la vitesse un maillage plus fin que celui de la pression, des paires stables basées sur des pressions discrètes, constantes par morceaux, peuvent être construites.

Considérons une subdivision \mathcal{T}_h du domaine Ω en triangles (respectivement en quadrilatères). Ensuite, on divise chaque triangle (respectivement chaque quadrilatère) de \mathcal{T}_h en 4 triangles (respectivement 4 quadrilatères) en joignant les milieux des côtés. On définit ainsi la subdivision $\mathcal{T}_{h/2}$.

Deux choix sont possibles pour les espaces des éléments finis V_h et Q_h . Le premier s'écrit, dans le cas triangulaire :

$$V_h = \left\{ v \in \left(H_0^1(\Omega) \right)^2; v|_K = \hat{v} \circ F_K^{-1}, \hat{v} \in \left(P_1(\hat{K}) \right)^2, \forall K \in \mathcal{T}_{h/2} \right\} \quad (2-42a)$$

$$Q_h = \left\{ q \in L_0^2(\Omega); q|_K = \hat{q} \circ F_K^{-1}, \hat{q} \in P_0(\hat{K}), \forall K \in \mathcal{T}_h \right\} \quad (2-42b)$$

respectivement dans le cas quadrilatère:

$$V_h = \left\{ v \in \left(H_0^1(\Omega) \right)^2; v|_K = \hat{v} \circ F_K^{-1}, \hat{v} \in \left(Q_1(\hat{K}) \right)^2, \forall K \in \mathcal{T}_{h/2} \right\} \quad (2-42c)$$

$$Q_h = \left\{ q \in L_0^2(\Omega); q|_K = \hat{q} \circ F_K^{-1}, \hat{q} \in Q_0(\hat{K}), \forall K \in \mathcal{T}_h \right\} \quad (2-42d)$$

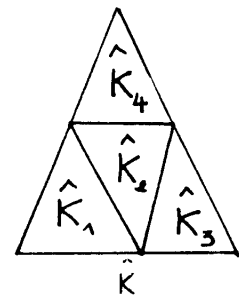
Tandis que pour le deuxième choix, on définit l'espace V_h comme dans (2-42a) (resp respectivement dans (2-42c)), et pour Q_h , on introduit trois fonctions de bases définies comme suit: (voir figure (3)).

cas du triangle

$$\xi_1 = \begin{cases} 1 & \text{dans } \hat{K}_1 \text{ et } \hat{K}_2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\xi_2 = \begin{cases} 1 & \text{dans } \hat{K}_2 \text{ et } \hat{K}_3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\xi_3 = \begin{cases} 1 & \text{dans } \hat{K}_2 \text{ et } \hat{K}_4 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

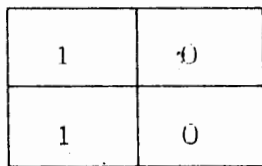
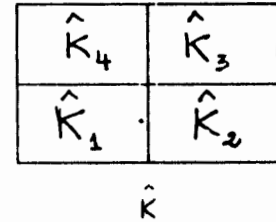


cas du quadrilatère

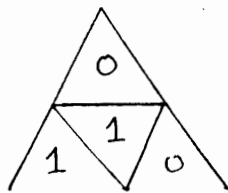
$$\xi_1 = \begin{cases} 1 & \text{dans } \hat{K}_1 \text{ et } \hat{K}_4 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\xi_2 = \begin{cases} 1 & \text{dans } \hat{K}_1 \text{ et } \hat{K}_4 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

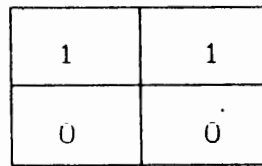
$$\xi_3 = \begin{cases} 1 & \text{dans } \hat{K}_1 \text{ et } \hat{K}_4 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



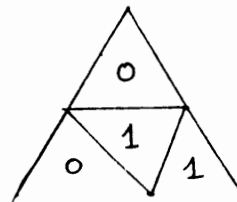
ξ_1



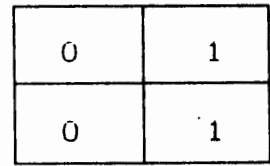
ξ_1



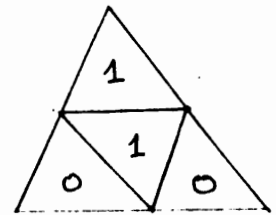
ξ_2



ξ_2



ξ_3



ξ_3

-figure(3)-

On pose alors,

$$\mathcal{Q}_h = \left\{ q \in L^2_0(\Omega); q|_K = \hat{q} \circ F_K^{-1}, \hat{q}|_{\hat{K}} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \xi_i \quad \forall K \in \mathcal{T}_{h/2} \right\} \quad (2-43)$$

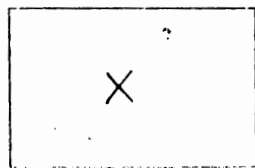
Les couples (2-42) et (2-43) vérifient la condition de BABUSKA

-BREZZI et satisfont les estimations d'erreurs suivantes (cf GUNZBURGER [19])

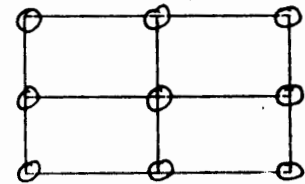
$$\begin{cases} \|u - u_h\|_1 = \mathcal{O}(h) \\ \|u - u_h\|_0 = \mathcal{O}(h^2) \\ \|p - p_h\|_0 = \mathcal{O}(h) \end{cases} \quad (2-44)$$

si la solution exacte (u,p) vérifie: $u \in \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \right)^2$ et $p \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$

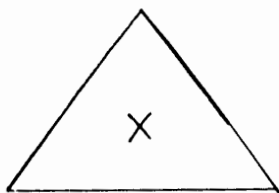
La représentation de ces couples est donnée par la figure (4):



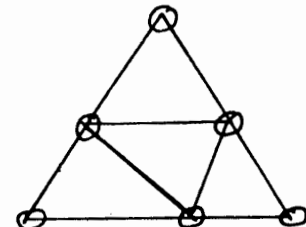
quadrilatère associé avec q_h dans \mathcal{T}_h



4 quadrilatères associés avec v_h dans $\mathcal{T}_{h/2}$



triangle associé avec q_h dans \mathcal{T}_h



4 triangles associés avec v_h dans $\mathcal{T}_{h/2}$

-figure(4)-

On peut aussi faire coupler des approximations linéaires pour la vitesse et la pression, et obtenir des espaces satisfaisant la condition de BABUSKA-BREZZI et donnant les estimations d'erreurs (2-44).

De telles couples ont été introduits par BERCOVIER-PIRONNEAU [4] et une analyse de la stabilité a été faite par VERFURTH [33]. Ils sont donnés par:

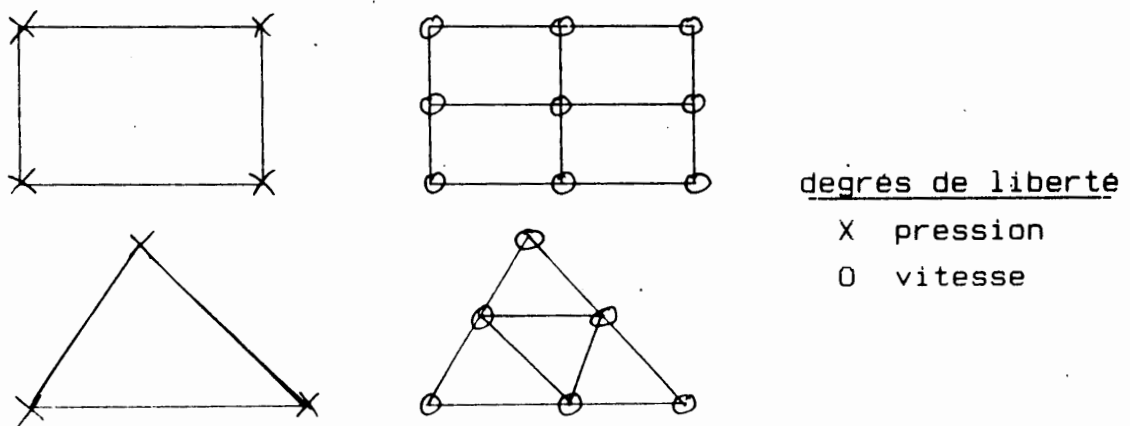
l'espace V_h est défini comme dans (2-42) et l'espace Q_h comme suit: (voir figure (5))

Cas quadrangulaire

$$Q_h = \left\{ q \in L_0^2(\Omega); q|_K = \tilde{q} \circ F_K^{-1}, \tilde{q} \in Q_1(\hat{K}), K \in \mathcal{T}_h \right\} \quad (2-45a)$$

Cas triangulaire

$$Q_h = \left\{ q \in L_0^2(\Omega); q|_K = \tilde{q} \circ F_K^{-1}, \tilde{q} \in P_1(\hat{K}), K \in \mathcal{T}_h \right\} \quad (2-45b)$$



-figure (5)-

REMARQUE 2-5

Par suite du couplage entre les erreurs de la pression et la vitesse, on ne peut profiter de la capacité d'une bonne approximation de l'espace de la pression. Ainsi, le taux de

convergence de l'élément mixte linéaire -linéaire (2-45) n'est pas meilleur que celui du couple d'élément stable linéaire-constant (2-42). Pourtant, en pratique, on trouve que celui-ci est le meilleur élément mixte basé sur une approximation linéaire pour la vitesse, dans le sens où il donne plus de précision pour des valeurs pratiques de h . De plus, cet élément linéaire -linéaire produit d'habitude moins d'inconnues pour une même subdivision.

2-4 UNE METHODE STABLE DE TAYLOR - HOOD POUR LE PROBLEME D'ELASTICITE

Soit Ω un domaine polygonal dans \mathbb{R}^n , on suppose que Ω est subdivisé en une réunion d'un nombre fini d'éléments K (triangles ou quadrilatères si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, de tétraèdres ou hexaèdres si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$). \mathcal{T}_h étant la subdivision obtenue. On dénote par \hat{K} l'élément de référence et pour tout $K \in \mathcal{T}_h$, par F_K la transformation affine de \hat{K} dans K .

D'autre part, soit $R_\ell(\hat{K}) = Q_\ell(\hat{K})$ (respectivement $P_\ell(\hat{K})$) l'espace des fonctions polynomiales de degré $\leq \ell$ par rapport à chaque variable (respectivement par rapport aux deux variables) définies sur le carré \hat{K} (respectivement sur le triangle \hat{K}). $C^0(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues sur Ω .

On définit alors,

$$V_h = \left\{ v \in \left(C^0(\Omega) \right)^n ; v|_K = \hat{v} \circ F_K^{-1}, \hat{v} \in \left(R_\ell(\hat{K}) \right)^n, K \in \mathcal{T}_h, \right. \\ \left. v = 0 \text{ sur } \Gamma \right\} \quad (2-46)$$

$$W_h = \left\{ \tau_h = (\tau_{ij}^h) \in \left(L^2(\Omega) \right)^{n \times n} / \tau_{ij}^h = \tau_{ji}^h \quad i, j = \overline{1, n}, \quad \tau_{ij}^h|_K = \hat{\tau}_{ij} \circ F_K^{-1}, \right. \\ \left. \hat{\tau}_{ij} \in \left(R_\ell(\tilde{K}) \right)^{n \times n}, \quad K \in \mathcal{T}_h \right\} \quad (2-47a)$$

ou

$$W_h = \left\{ \tau_h = (\tau_{ij}^h) \in \left(C^0(\Omega) \right)^{n \times n} \cap \left(L^2(\Omega) \right)^{n \times n} / \tau_{ij}^h = \tau_{ji}^h \quad i, j = \overline{1, n}, \right. \\ \left. \tau_{ij}^h|_K = \hat{\tau}_{ij} \circ F_K^{-1}, \quad \hat{\tau}_{ij} \in \left(R_\ell(\tilde{K}) \right)^{n \times n}, \quad K \in \mathcal{T}_h \right\} \quad (2-47b)$$

avec $\ell \geq 1$ pour V_h et $\ell \geq 0$ pour (2-47a) et $\ell \geq 1$ pour (2-47b).

L'existence et l'unicité de la solution du problème (M^h) sont données par le résultat suivant:

PROPOSITION 2-1 (FRANCA-HUGHES [15])

Si les espaces (V_h, W_h) satisfont

$$(1) \quad \sup_{0 \neq v_h \in V_h} \frac{(\operatorname{div} v_h, q_h)}{\|v_h\|_1} \geq \beta_0 \|q_h\|_0 \quad \forall q_h \in Q_h \quad (2-48)$$

$$(2) \quad \sup_{0 \neq \tau_h \in W_h} \frac{(\tau_h, \varepsilon(v_h))}{\|\tau_h\|_0} \geq \beta^* \|v_h\|_1 \quad \forall v_h \in V_h \quad (2-49)$$

avec $0 < \beta_0, \beta^* < +\infty$, indépendante de ρ et

$$Q_h = \left\{ q_h \in L^2_0(\Omega) / q_h = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \tau_h, \quad \tau_h \in W_h \right\} \quad (2-50)$$

Alors, le problème (M^h) admet une solution unique $(\sigma_h, v_h) \in \tilde{W}_h \times V_h$.

où

$$\tilde{W}_h = \left\{ \tau_h \in W_h / \tau_h = s_h - q_h \cdot I, \text{ tr } s_h = 0 \text{ avec } s_h \in W_h \text{ et } q_h \in Q_h \right\} \quad (2-51)$$

On constate que (2-49) est facile à démontrer en utilisant l'inégalité de KORN. La difficulté réside, en fait dans la vérification de la condition (2-48). A cette fin, on utilise des résultats préliminaires.

On définit un macroélément M comme étant la réunion d'un ou plusieurs éléments adjacents de \mathcal{T}_h . Supposons que les éléments de \mathcal{T}_h peuvent être regroupés en un macroélément. un macroélément M est dit équivalent à un macroélément de référence \hat{M} s'il existe une application affine $F_M: \hat{M} \longrightarrow M$, qui satisfait les conditions suivantes:

(i) F_M est continue

(ii) $F_M(\hat{M}) = M$

(iii) si $\hat{M} = \bigcup_{j=1}^m \hat{K}_j$, où \hat{K}_j , $j = \overline{1, m}$, sont des éléments dans

\hat{M} , alors $K_j = F_M(\hat{K}_j)$, $j = \overline{1, m}$, sont des éléments dans M .

(iv) $F_M|_{K_j} = F_{K_j} \circ F_{\hat{K}_j}^{-1}$, $j = \overline{1, m}$, où F_{K_j} et $F_{\hat{K}_j}$ sont des applications de l'élément de référence \hat{K} vers K_j et \hat{K}_j respectivement.

La classe de tous les macroéléments équivalents au

macroélément de référence \hat{M} est dénotée par $\mathfrak{X}_M^{\hat{}}$.

Pour un macroélément M , on définit les espaces:

$$V_M^h = \left\{ v_h \in (C^0(M))^n; v_h|_K = \hat{v} \circ F_K^{-1}, \hat{v} \in (R_K(\hat{K}))^n, \forall K \subset M, \right. \\ \left. v|_{\Gamma_M} = 0 \right\} \quad (2-52)$$

$$W_M^h = \left\{ \tau_h = (\tau_{ij}^h) \in (L^2(M))^{n \times n} / \tau_{ij}^h = \tau_{ji}^h \quad i, j = \overline{1, n}, \right. \\ \left. \tau_{ij}^h|_K = \hat{\tau}_{ij} \circ F_K^{-1}, \hat{\tau}_{ij} \in (R_\rho(\hat{K}))^{n \times n}, \forall K \in M \right\} \quad (2-53a)$$

ou

$$W_M^h = \left\{ \tau_h = (\tau_{ij}^h) \in (C^0(M))^{n \times n} \cap (L^2(M))^{n \times n} / \tau_{ij}^h = \tau_{ji}^h \quad i, j = \overline{1, n}, \right. \\ \left. \tau_{ij}^h|_K = \hat{\tau}_{ij} \circ F_K^{-1}, \hat{\tau}_{ij} \in (R_\rho(\hat{K}))^{n \times n}, \forall K \in M \right\} \quad (2-53b)$$

De plus, on pose

$$Q_M^h = \left\{ q_h \in L_0^2(M) / q_h = -\frac{1}{2} \text{tr } \tau_h, \tau_h \in W_M^h \right\} \quad (2-54)$$

$$N_M = \left\{ q_h \in Q_M^h / (\text{div } v_h, q_h) = 0, v_h \in V_M^h \right\} \quad (2-55)$$

LEMME 2-2 (STENBERG [28], [29])

Supposons que pour tout $M \in \mathfrak{X}_M^{\hat{}}$, l'espace N_M est de dimension une, constitué de fonctions qui sont constantes sur M . Alors, il existe une constante $\beta_M^{\hat{}}$ telle que la condition:

macroélément de référence \hat{M} est dénotée par $\mathfrak{X}_M^{\hat{}}$.

Pour un macroélément M , on définit les espaces:

$$V_M^h = \left\{ v_h \in \left(C^0(M) \right)^n ; v_h|_K = \hat{v} \circ F_K^{-1}, \hat{v} \in \left(R_\ell(\hat{K}) \right)^n, \forall K \in M, \right. \\ \left. v|_{\Gamma_M} = 0 \right\} \quad (2-52)$$

$$W_M^h = \left\{ t_h = (t_{ij}^h) \in \left(L^2(M) \right)^{n \times n} / t_{ij}^h = t_{ji}^h \quad i, j = \overline{1, n}, \right. \\ \left. t_{ij}^h|_K = \hat{t}_{ij} \circ F_K^{-1}, \hat{t}_{ij} \in \left(R_\ell(\hat{K}) \right)^{n \times n}, \forall K \in M \right\} \quad (2-53a)$$

ou

$$W_M^h = \left\{ \tau_h = (\tau_{ij}^h) \in \left(C^0(M) \right)^{n \times n} \cap \left(L^2(M) \right)^{n \times n} / \tau_{ij}^h = \tau_{ji}^h \quad i, j = \overline{1, n}, \right. \\ \left. \tau_{ij}^h|_K = \hat{\tau}_{ij} \circ F_K^{-1}, \hat{\tau}_{ij} \in \left(R_\ell(\hat{K}) \right)^{n \times n}, \forall K \in M \right\} \quad (2-53b)$$

De plus, on pose

$$Q_M^h = \left\{ q_h \in L_0^2(M) / q_h = -\frac{1}{2} \text{tr } \tau_h, \tau_h \in W_M^h \right\} \quad (2-54)$$

$$N_M = \left\{ q_h \in Q_M^h / (\text{div } v_h, q_h) = 0, v_h \in V_M^h \right\} \quad (2-55)$$

LEMME 2-2 (STENBERG [28], [29])

Supposons que pour tout $M \in \mathfrak{X}_M^{\hat{}}$, l'espace N_M est de dimension une, constitué de fonctions qui sont constantes sur M . Alors, il existe une constante $\beta_M^{\hat{}}$ telle que la condition:

$$\sup_{0 \neq v_h \in V_M^h} \frac{(\operatorname{div} v_h, q_h)_M}{\|v_h\|_1} \geq \beta_M^{\wedge} \|q_h\|_{0,M} \quad \forall q_h \in Q_M^h \quad (2-56)$$

est vérifiée pour tout $M \in \mathcal{E}_M^{\wedge}$.

THEOREME 2-4 (STENBERG [28],[29])

Supposons qu'il existe un nombre fixé de classes d'équivalence \mathcal{E}_M^{\wedge} , $i = \overline{1,n}$, de macroéléments, et un partitionnement de macroéléments M_h telle que:

(M1) Pour tout $M \in \mathcal{E}_M^{\wedge}$, $i = \overline{1,n}$, l'espace N_M est de dimension une, constitué de fonctions qui sont constantes sur M ;

(M2) Chaque $M \in M_h$ appartient à une des classes $\mathcal{E}_{M_i}^{\wedge}$, $i = \overline{1,n}$.

Alors, l'inégalité (2-49) est vérifiée.

EXEMPLE

Soit Ω un domaine polygonal dans \mathbb{R}^2 , et Soit \mathcal{T}_h une subdivision de Ω en quadrilatères convexe.

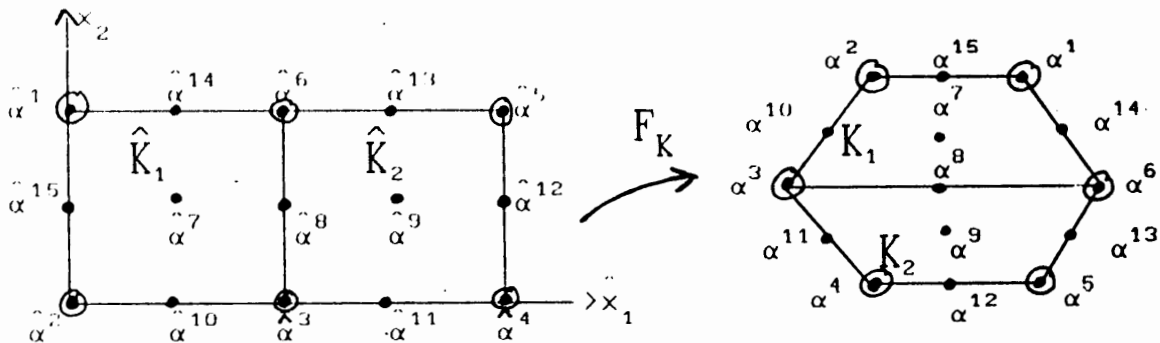
On définit l'élément $Q_2 - Q_1$ par la paire d'espaces d'éléments finis $\{V_h, W_h\}$:

$$V_h = \left\{ v \in \left(C^0(\Omega) \right)^n ; v|_K = \hat{v} \circ F_K^{-1}, \hat{v} \in \left(Q_2(\hat{K}) \right)^n, K \in \mathcal{T}_h, \right. \\ \left. v = 0 \text{ sur } \Gamma \right\} \quad (2-57)$$

$$W_h = \left\{ \tau_h = (\tau_{ij}^h) \in \left(C^0(\Omega) \right)^{n \times n} \cap \left(L^2(\Omega) \right)^{n \times n} / \tau_{ij}^h = \tau_{ji}^h \quad i, j = \overline{1,n} \right\}$$

$$\tau_{ij}^h|_K = \hat{\tau}_{ij} \circ F_K^{-1}, \quad \hat{\tau}_{ij} \in (Q_1(\hat{K}))^{n \times n}, \quad K \in \mathcal{T}_h \quad (2-58)$$

Soit $M = K_1 \cup K_2$ un macroélément constituée de deux quadrilatères et le macroélément de référence correspondant $\hat{M} = \hat{K}_1 \cup \hat{K}_2$, comme dans la figure au dessous:



Pour un macroélément M , on définit les espaces:

$$V_M^h = \left\{ v_h \in (C^0(M))^n; v_h|_K = \hat{v} \circ F_K^{-1}, \quad \hat{v} \in (Q_2(\hat{K}))^n, \quad \forall K \subset M, \right. \\ \left. v|_{\Gamma_M} = 0 \right\} \quad (2-59)$$

$$W_M^h = \left\{ \tau_h = (\tau_{ij}^h) \in (C^0(M))^{n \times n} \cap (L^2(M))^{n \times n} / \tau_{ij}^h = \tau_{ji}^h \quad i, j = \overline{1, n}, \right. \\ \left. \tau_{ij}^h|_K = \hat{\tau}_{ij} \circ F_K^{-1}, \quad \hat{\tau}_{ij} \in (Q_1(\hat{K}))^{n \times n}, \quad \forall K \in M \right\} \quad (2-60)$$

En utilisant la formule de GREEN, pour tous $v_h \in \mathcal{V}_M^h$ et $q_h \in \mathcal{Q}_M^h$, on peut écrire:

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} v_h, q_h) &= - (v_h, \nabla q_h)_M \\ &= - \sum_{j=1}^2 (v_h, \nabla q_h)_{K_j} \end{aligned}$$

$$\text{Soit } F_M = \begin{cases} F_{K_1}(\hat{x}) & \text{si } \hat{x} \in \hat{K}_1 \\ F_{K_2}(\hat{x}) & \text{si } \hat{x} \in \hat{K}_2 \end{cases}$$

une application continue, bilinéaire par morceaux de \hat{M} vers M .

On définit pour $v_h \in \mathcal{V}_M^h$ et $q_h \in \mathcal{Q}_M^h$, \hat{v} et \hat{q} sur \hat{M} par $\hat{v}(\hat{x}) = v_h(F_M(\hat{x}))$ et $\hat{q}(\hat{x}) = q_h(F_M(\hat{x}))$, il vient alors:

$$(v_h, \nabla q_h)_{K_j} = \int_{\hat{K}_j} \hat{v}(\hat{x})^t J_{F_M}^{-t}(\hat{x}) \nabla \hat{q}(\hat{x}) |J_{F_M}(\hat{x})| d\hat{x} \quad j = 1, 2$$

où J_{F_M} est la matrice jacobienne de F_M , $|J_{F_M}|$ est le déterminant de J_{F_M} et $J_{F_M}^{-t}$ est la transposée de $J_{F_M}^{-1}$. Comme $\hat{v}(\hat{x})$ et $\nabla \hat{q}(\hat{x})$ sont des vecteurs colonnes et:

$$J_{F_M}^{-t}(\hat{x}) |J_{F_M}(\hat{x})| = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{K_1}(\hat{x})}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial F_{K_1}(\hat{x})}{\partial \hat{x}_2} \\ \frac{\partial F_{K_1}(\hat{x})}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial F_{K_1}(\hat{x})}{\partial \hat{x}_2} \end{bmatrix} \quad (2-61)$$

et, de (2-54) et (2-61) alors :

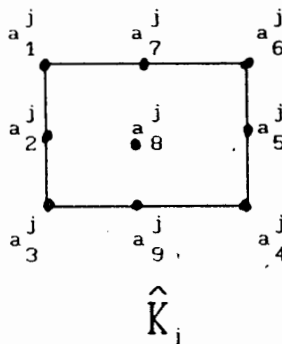
$$J_{F_M}^{-t}(\hat{x}) \nabla \hat{q}(\hat{x}) |J_{F_M}(\hat{x})| \Big|_{\hat{K}_j} \in \left(\theta_1(\hat{K}_j) \right)^2, \quad j = 1, 2 \quad (2-62)$$

En tenant compte de (2-59), (2-62) implique,

$$\hat{v}(\hat{x})^t J_{F_M}^{-t}(\hat{x}) \nabla \hat{q}(\hat{x}) |J_{F_M}(\hat{x})| \Big|_{\hat{K}_j} \in \left(\theta_3(\hat{K}_j) \right)^2, \quad j = 1, 2$$

et d'après la formule de SIMPSON générale, on a la valeur exacte pour l'intégrale:

$$\begin{aligned} & \int_{\hat{K}_j} \left[\hat{v}(\hat{x})^t J_{F_M}^{-t}(\hat{x}) \nabla \hat{q}(\hat{x}) |J_{F_M}(\hat{x})| \right] d\hat{x} = \\ & = \frac{1}{9} \left[\sum_{i=1}^6 \hat{v}(\hat{a}_i^j) J_{F_M}^{-t}(\hat{a}_i^j) \nabla \hat{q}(\hat{a}_i^j) |J_{F_M}(\hat{a}_i^j)| + \right. \\ & \quad \left. + 4 \sum_{i=7}^9 \hat{v}(\hat{a}_i^j) J_{F_M}^{-t}(\hat{a}_i^j) \nabla \hat{q}(\hat{a}_i^j) |J_{F_M}(\hat{a}_i^j)| \right] \end{aligned}$$



Comme $\hat{v}_h = 0$ sur Γ_M , alors

$$\int_{\hat{K}_1} \left[\hat{v}(\hat{x})^t J_{F_M}^{-t}(\hat{x}) \nabla \hat{q}(\hat{x}) |J_{F_M}(\hat{x})| \right] d\hat{x} =$$

$$= \frac{1}{9} \left[4 \hat{v}(\hat{\alpha}^7) J_{F_M}^{-t}(\hat{\alpha}^7) \nabla \hat{q}(\hat{\alpha}^7) |J_{F_M}(\hat{\alpha}^7)| + \hat{v}(\hat{\alpha}^8) J_{F_M}^{-t}(\hat{\alpha}^8) \nabla \hat{q}(\hat{\alpha}^8) |J_{F_M}(\hat{\alpha}^8)| \right]_{\hat{K}_1}$$

$$\int_{\hat{K}_2} \left[\hat{v}(\hat{x})^t J_{F_M}^{-t}(\hat{x}) \nabla \hat{q}(\hat{x}) |J_{F_M}(\hat{x})| d\hat{x} = \right. \\ \left. = \frac{1}{9} \left[4 \hat{v}(\hat{\alpha}^9) J_{F_M}^{-t}(\hat{\alpha}^9) \nabla \hat{q}(\hat{\alpha}^9) |J_{F_M}(\hat{\alpha}^9)| + \hat{v}(\hat{\alpha}^8) J_{F_M}^{-t}(\hat{\alpha}^8) \nabla \hat{q}(\hat{\alpha}^8) |J_{F_M}(\hat{\alpha}^8)| \right]_{\hat{K}_2} \right.$$

D'où

$$(\operatorname{div} v_h, q_h)_M = - \frac{1}{9} \left[\left[4 \hat{v}(\hat{\alpha}^7) J_{F_M}^{-t}(\hat{\alpha}^7) \nabla \hat{q}(\hat{\alpha}^7) |J_{F_M}(\hat{\alpha}^7)| + \hat{v}(\hat{\alpha}^8) J_{F_M}^{-t}(\hat{\alpha}^8) \nabla \hat{q}(\hat{\alpha}^8) |J_{F_M}(\hat{\alpha}^8)| \right]_{\hat{K}_1} + \left[4 \hat{v}(\hat{\alpha}^9) J_{F_M}^{-t}(\hat{\alpha}^9) \nabla \hat{q}(\hat{\alpha}^9) |J_{F_M}(\hat{\alpha}^9)| + \hat{v}(\hat{\alpha}^8) J_{F_M}^{-t}(\hat{\alpha}^8) \nabla \hat{q}(\hat{\alpha}^8) |J_{F_M}(\hat{\alpha}^8)| \right]_{\hat{K}_2} \right]$$

De plus, par définition, on a $\hat{q} = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \hat{\tau}$ avec $\hat{\tau} \in \tilde{W}_M^h$.

où

$$\tilde{W}_M^h = \left\{ \tau_h \in W_M^h / \tau_h = s_h - q_h \cdot I, \operatorname{tr} s_h = 0, \text{ avec } s_h \in W_M^h \text{ et } q_h \in Q_M^h \right\}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div} v_h, q_h)_M = \frac{1}{18} & \left[\left[4 \hat{v}(\hat{\alpha}^7) J_{F_M}^{-t}(\hat{\alpha}^7) |J_{F_M}(\hat{\alpha}^7)| \left(\nabla \hat{\tau}_{11}(\hat{\alpha}^7) + \nabla \hat{\tau}_{22}(\hat{\alpha}^7) \right) \right. \right. \\
& + \left. \left. \hat{v}(\hat{\alpha}^8) J_{F_M}^{-t}(\hat{\alpha}^8) |J_{F_M}(\hat{\alpha}^8)| \left(\nabla \hat{\tau}_{11}(\hat{\alpha}^8) + \nabla \hat{\tau}_{22}(\hat{\alpha}^8) \right) \right] \right]_{\hat{K}_1} + \\
& + \left[4 \hat{v}(\hat{\alpha}^9) J_{F_M}^{-t}(\hat{\alpha}^9) |J_{F_M}(\hat{\alpha}^9)| \left(\nabla \hat{\tau}_{11}(\hat{\alpha}^9) + \nabla \hat{\tau}_{22}(\hat{\alpha}^9) \right) \right. \\
& \left. \left. + \hat{v}(\hat{\alpha}^8) J_{F_M}^{-t}(\hat{\alpha}^8) |J_{F_M}(\hat{\alpha}^8)| \left(\nabla \hat{\tau}_{11}(\hat{\alpha}^8) + \nabla \hat{\tau}_{22}(\hat{\alpha}^8) \right) \right] \right]_{\hat{K}_2}
\end{aligned}$$

Maintenant, $v_h \in \mathcal{V}_M^h$ est choisi tel que $\hat{v}(\hat{\alpha}^i) = (0,0)$, $i = 8,9$ et $\hat{v}(\hat{\alpha}^7) = 1$, $\hat{v}(\hat{\alpha}^8) = 0$. De plus, soit $\hat{\tau} \in \tilde{W}_M^h$ tel que $\hat{\tau} = \hat{\tau}$.

Alors, la condition $(\operatorname{div} v_h, q_h)_M = 0$ implique que:

$$\hat{v}(\hat{\alpha}^7) J_{F_M}^{-t}(\hat{\alpha}^7) |J_{F_M}(\hat{\alpha}^7)| \nabla \hat{\tau}_{11}(\hat{\alpha}^7) = 0$$

D'où,

$$\nabla \hat{\tau}_{11}(\hat{\alpha}^7) = 0$$

On a:

$$\hat{\tau}_{11}(\hat{x}) = \sum_{i=1}^6 \beta_i \hat{\phi}_i(\hat{x}),$$

où $\hat{\phi}_i(\hat{x})$ est la base globale définie sur \hat{M} , $\beta_i = \tau_{11}^h(\alpha^i) = \hat{\tau}_{11}(\hat{\alpha}^i)$
 $i = \overline{1,6}$.

Rappelons les bases de \hat{K}_1 , \hat{K}_2 et \hat{M} :

DANS \hat{K}_1 :

$$\hat{\varphi}_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (1 - \hat{x}_1)(1 - \hat{x}_2)$$

$$\hat{\varphi}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{x}_1(1 - \hat{x}_2)$$

$$\hat{\varphi}_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{x}_1 \hat{x}_2$$

$$\hat{\varphi}_4(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (1 - \hat{x}_1) \hat{x}_2$$

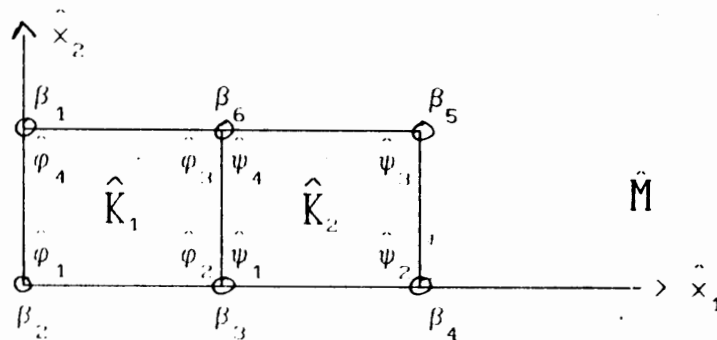
DANS \hat{K}_2 :

$$\hat{\psi}_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (2 - \hat{x}_1)(1 - \hat{x}_2)$$

$$\hat{\psi}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = - (1 - \hat{x}_1)(1 - \hat{x}_2)$$

$$\hat{\psi}_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = - (1 - \hat{x}_1) \hat{x}_2$$

$$\hat{\psi}_4(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (2 - \hat{x}_1) \hat{x}_2$$



DANS \hat{M} :

$$\hat{\Phi}_1(\hat{x}) = \begin{cases} \hat{\varphi}_4 & \text{dans } \hat{K}_1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\hat{\Phi}_2(\hat{x}) = \begin{cases} \hat{\varphi}_1 & \text{dans } \hat{K}_1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\hat{\Phi}_3(\hat{x}) = \begin{cases} \hat{\varphi}_2 & \text{dans } \hat{K}_1 \\ \hat{\psi}_1 & \text{dans } \hat{K}_2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\hat{\phi}_4(\hat{x}) = \begin{cases} \hat{\psi}_2 & \text{dans } \hat{K}_2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\hat{\phi}_5(\hat{x}) = \begin{cases} \hat{\psi}_3 & \text{dans } \hat{K}_2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\hat{\phi}_6(\hat{x}) = \begin{cases} \hat{\psi}_3 & \text{dans } \hat{K}_1 \\ \hat{\psi}_4 & \text{dans } \hat{K}_2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Par conséquent, avec $\hat{\alpha}^7(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$,

$$\nabla_{\hat{x}_1} \hat{\tau}_{11}(\hat{\alpha}^7) = (0, 0)$$

D'où,

$$\left[\sum_{i=1}^6 \beta_i \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial \hat{x}_1}(\hat{\alpha}^7), \sum_{i=1}^6 \beta_i \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial \hat{x}_2}(\hat{\alpha}^7) \right]_{\hat{K}_1} = (0, 0)$$

i.e.

$$\begin{cases} \beta_1 \frac{\partial \hat{\phi}_4}{\partial \hat{x}_1}(\hat{\alpha}^7) + \beta_2 \frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial \hat{x}_1}(\hat{\alpha}^7) + \beta_3 \frac{\partial \hat{\phi}_2}{\partial \hat{x}_1}(\hat{\alpha}^7) + \beta_6 \frac{\partial \hat{\phi}_3}{\partial \hat{x}_1}(\hat{\alpha}^7) = 0 \\ \beta_1 \frac{\partial \hat{\phi}_4}{\partial \hat{x}_2}(\hat{\alpha}^7) + \beta_2 \frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial \hat{x}_2}(\hat{\alpha}^7) + \beta_3 \frac{\partial \hat{\phi}_2}{\partial \hat{x}_2}(\hat{\alpha}^7) + \beta_6 \frac{\partial \hat{\phi}_3}{\partial \hat{x}_2}(\hat{\alpha}^7) = 0 \end{cases}$$

Et donc,

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \beta_1 - \frac{1}{2} \beta_2 + \frac{1}{2} \beta_3 + \frac{1}{2} \beta_6 = 0 \\ +\frac{1}{2} \beta_1 - \frac{1}{2} \beta_2 - \frac{1}{2} \beta_3 + \frac{1}{2} \beta_6 = 0 \end{cases}$$

Alors.

$$\beta_6 = \beta_2 \quad \text{et} \quad \beta_1 = \beta_3 \quad (2-63)$$

De même façon, si on prend

$$\hat{v}(\hat{\alpha}^1) = 0 \quad , \quad i = 7, 8 \quad \text{et} \quad \hat{v}_1(\hat{\alpha}^9) = 1 \quad , \quad \hat{v}_2(\hat{\alpha}^9) = 0$$

et de plus,

$$\hat{\tau}_{11}(\hat{x}) = \hat{\tau}_{22}(\hat{x}),$$

alors,

$$\nabla \hat{\tau}_{11}(\hat{\alpha}^9) = 0 \quad \text{sur} \quad \hat{K}_2$$

D'où,

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \beta_3 + \frac{1}{2} \beta_4 + \frac{1}{2} \beta_5 - \frac{1}{2} \beta_6 = 0 \\ -\frac{1}{2} \beta_3 - \frac{1}{2} \beta_4 + \frac{1}{2} \beta_5 + \frac{1}{2} \beta_6 = 0 \end{cases}$$

Et donc,

$$\beta_5 = \beta_3 \quad \text{et} \quad \beta_4 = \beta_6 \quad (2-64)$$

Les équations dans (2-63) et (2-64), sont linéairement indépendantes et possèdent comme solution:

$$\begin{cases} \beta_1 = \beta_3 = \beta_5 = a \\ \beta_2 = \beta_4 = \beta_6 = b \end{cases} \quad (2-65)$$

où a et b sont des scalaires arbitraires.

Maintenant, si on choisit $v_h \in \mathcal{V}_M^h$ telle que:

$\hat{v}(\hat{\alpha}^i) = 0$, $i = 7, 9$ et $\hat{v}(\hat{\alpha}^8) \neq (0, 0)$, et de plus, on choisit

aussi $\hat{\tau} \in \hat{W}_M^h$ telle que:

$$\hat{\tau}_{11}(\hat{x}) = \hat{\tau}_{22}(\hat{x})$$

alors la condition $(\text{div } v_h, q_h) = 0$ implique :

$$\begin{aligned} & \left[\hat{v}(\hat{\alpha}^B) J_{F_M}^{-t}(\hat{\alpha}^B) \nabla \hat{q}(\hat{\alpha}^B) |J_{F_M}(\hat{\alpha}^B)| \right]_{\hat{K}_1} + \\ & \left[\hat{v}(\hat{\alpha}^B) J_{F_M}^{-t}(\hat{\alpha}^B) \nabla \hat{q}(\hat{\alpha}^B) |J_{F_M}(\hat{\alpha}^B)| \right]_{\hat{K}_2} = 0 \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} & \left[\hat{v}(\hat{\alpha}^B) J_{F_M}^{-t}(\hat{\alpha}^B) \nabla \hat{\tau}_{11}(\hat{\alpha}^B) |J_{F_M}(\hat{\alpha}^B)| \right]_{\hat{K}_1} + \\ & \left[\hat{v}(\hat{\alpha}^B) J_{F_M}^{-t}(\hat{\alpha}^B) \nabla \hat{\tau}_{11}(\hat{\alpha}^B) |J_{F_M}(\hat{\alpha}^B)| \right]_{\hat{K}_2} = 0 \end{aligned} \quad (2-66)$$

Si on prend $v_h(\alpha^B) = \hat{v}(\alpha^B) = x^6 x^3$, avec $x^6 x^3$ désignant le vecteur de x^6 vers x^3 , alors on a:

$$\begin{aligned} \hat{v}(\hat{\alpha}^B) J_{F_M}^{-t}(\hat{\alpha}^B) \Big|_{\hat{K}_i} &= \hat{e}_2 \quad i = 1, 2 \\ &= \hat{x}^6 \hat{x}^3 \end{aligned}$$

avec $\hat{e}_2 = (0, 1)$. Puisque $\frac{\partial \hat{\tau}_{11}}{\partial x_2}$ est continue en $\hat{\alpha}^B$, (2-66)

devient:

$$\frac{\partial \hat{\tau}_{11}}{\partial x_2}(\hat{\alpha}^B) \left[|J_{F_M}(\hat{\alpha}^B)| \Big|_{\hat{K}_1} + |J_{F_M}(\hat{\alpha}^B)| \Big|_{\hat{K}_2} \right] = 0$$

$$\text{D'où, } 0 = \frac{\partial \hat{\tau}_{11}}{\partial x_2} (\hat{\alpha}^h) = \alpha_3 - \alpha_6 = a - b$$

Donc, on conclut que $a = b$ et l'espace N_M est de dimension une. D'où l'hypothèse (M1) est satisfaite, d'après le Théorème 2-4, l'inégalité (2-49) est vérifiée.

Finalement, tous les hypothèses de la Proposition 2-1 sont vérifiées alors le problème (M^h) admet une solution unique $(\sigma_h, u_h) \in \tilde{W}_h \times V_h$. Et de plus, on a l'estimation d'erreur:

$$\|u - u_h\|_1 + \|\tau - \tau_h\|_0 \leq C h^2 \left[|u|_3 + |\tau|_2 \right]$$

REMARQUE 2-6

Compte tenu des résultats obtenus ci-dessus concernant les couples des éléments finis les plus utilisés en pratique, rendus stables, on constate que l'usage de deux maillages différents pour la vitesse et la pression est difficile à manipuler en termes d'implantation, et de plus, ils ne sont pas simples à réaliser du fait de leur coût élevé. D'une part, on note que le nombre de degrés de liberté de la vitesse aussi bien que la pression du couple TAYLOR-HOOD, est identique au celui du couple (2-45). Donc le temps d'élaboration de la solution du système discret pour le couple TAYLOR-HOOD ainsi que le couple (2-43) est le même, en utilisant la même subdivision pour la pression. Et d'autre part, sur la même maillage, le coût d'assemblage du TAYLOR-HOOD est en général le plus élevé, puisque cela exige l'utilisation de la règle quadratique d'ordre supérieurs pour intégrer le degré le plus haut des fonctions polynômiales du couple des éléments finis

TAYLOR-HOOD. Mais on remarque que le temps d'assemblage est négligeable par rapport au temps de trouver la solution, par conséquent, le surcroît du coût de cette dernière est un sérieux inconvénient pour les chercheurs .

Le souci d'employer les méthodes mentionnées ci dessus a obligé beaucoup de chercheurs (BREZZI-PITKARANTA [10], FRANCA [14], FRANCA-HUGHES [15], STENBERG [30], entres autres) à penser à contourner l'obeissance directe à la technique de GALERKIN et ce, en changeant la formulation approchée par l'addition de termes de perturbation. Ceci représente la nouvelle méthodologie de stabilisation. En conclusion, on se propose d'étendre notre expérience avec le problème de Stokes pour construire de nouvelles formulations approchées pour le problème d'Elasticité. Evidemment, la principale condition imposée à ces dernières est qu'elles permettent l'emploi d'une classe plus large de méthodes mixtes des éléments finis, sans toute fois perdre en termes de consistance et de convergence.

TROISIEME CHAPITRE

STABILISATION DES METHODES MIXTES POUR LE PROBLEME D'ÉLASTICITÉ

3-1 HYPOTHÈSES GÉNÉRALES

3-2 STABILITÉ DES FORMULATIONS DISCRÈTES

3-3 CONVERGENCE DES SOLUTIONS DISCRÈTES

Dans ce chapitre, on se propose d'étendre l'expérience acquise avec le problème de Stokes (voir ZAAMA [34]) pour construire de nouvelles formulations approchées pour le problème d'Elasticité.

La présente approche est basée sur la modification de la formulation approchée standard tout en gardant les mêmes espaces d'approximation, en particulier, ceux qui étaient non fiables dans le cadre de la méthode de Galerkin, et ceci en y ajoutant des termes de perturbation.

Des conditions suffisantes imposées à ces derniers permettent l'utilisation d'une classe plus large de méthodes mixtes d'éléments finis, sans toutefois perdre la consistance et la convergence.

3-1 HYPOTHESES GENERALES

En suivant l'idée de la stabilisation précédemment annoncée, on définit une forme bilinéaire symétrique $E_h(\{\dots\};\{\dots\})$ sur $(W \times V)^2$, vérifiant les hypothèses suivantes :

-(H1) CONTINUITÉ

Il existe une constante $0 < C_1 < +\infty$, indépendante de h , telle que :

$$\left| E_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) \right| \leq C_1 \left(\|\xi\|_0 + \|w\|_1 \right) \left(\|\tau\|_0 + \|v\|_1 \right)$$

$$\forall (\xi, w), (\tau, v) \in W \times V$$

-(H2) ELLIPTICITE PRIMALE

Il existe une constante $\beta > 0$, indépendante de h , telle que

$$E_h(\{0, \tau\}; \{0, \tau\}) \geq \beta \|\tau\|_0^2 \quad \forall \tau \in W_h$$

-(H3) ELLIPTICITE MOYENNE

Il existe une constante $\theta > 0$, indépendante de h , telle que

$$E_h(\{-q, I, v\}; \{-q, I, -v\}) \geq \theta \left(\|q, I\|_0 + \|v\|_1 \right)^2 \quad \forall (q, v) \in Q_h \times V_h$$

où $Q_h = \left\{ q \in L_0^2(\Omega) / q = -\frac{1}{n} \operatorname{tr} \tau, \tau \in W_h \right\}$

-(H4) ELLIPTICITE COMPLETE

Il existe une constante $\theta' > 0$, indépendante de h , telle que

$$E_h(\{\tau, v\}; \{\tau, v\}) \geq \theta' \left(\|\tau\|_0 + \|v\|_1 \right)^2 \quad \forall (\tau, v) \in W_h \times V_h$$

-(H5) PSEUDO-ELLIPTICITE

Il existe une constante $\theta^* > 0$, indépendante de h , telle que

$$2 d(v, \tau) + E_h(\{\tau, v\}; \{\tau, v\}) \geq \theta^* \left(\|\tau\|_0 + \|v\|_1 \right)^2 \quad \forall (\tau, v) \in W_h \times V_h$$

Maintenant, on peut définir la forme bilinéaire généralisée

$\mathcal{B}_h(\{\dots\}; \{\dots\})$ sur $(W \times V)^2$ par :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) &= a_\rho(\xi, \tau) + d(w, \tau) + d(v, \xi) + \\ &+ E_h(\{\xi_h, w_h\}; \{\tau, v\}) \end{aligned} \quad (3-1)$$

$$\forall (\xi, w), (\tau, v) \in W \times V$$

et la fonctionnelle linéaire L_h sur $W \times V$ par :

$$L_h(\tau, v) = - (f, v) \quad \forall (\tau, v) \in W \times V \quad (3-2)$$

3-2 STABILITE DES FORMULATIONS DISCRETES

Ces hypothèses vont être combinées pour démontrer la stabilité de certaines nouvelles formulations discrètes du problème d'élasticité.

Ainsi, une formulation stabilisée du problème approché d'élasticité peut être énoncée comme suit :

PROBLEME (P')

Trouver $(\sigma_h, u_h) \in W_h \times V_h$ telle que :

$$\mathcal{B}_h((\sigma_h, u_h); (\tau, v)) = \mathcal{F}_h(\tau, v) \quad \forall (\tau, v) \in W_h \times V_h \quad (3-3)$$

Avant de passer à la présentation de nos principales contributions, donnons les résultats préliminaires suivantes :

LEMME 3-1 (GIRAULT-RAVIART [18])

Pour tout $q \in L_0^2(\Omega)$, il existe $z \in H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$(\operatorname{div} z, q) = \|q\|_0^2 \quad \text{et} \quad \|z\|_1 \leq C_2 \|q\|_0 \quad (3-4)$$

où C_2 est une constante positive, indépendante de h .

LEMME 3-2 (CLEMENT [12])

Pour tout $z \in H_0^1(\Omega)$, il existe $z_h \in V_h$ tel que :

$$\|z_h\|_1 \leq C_3 \|z\|_1 \quad (3-5)$$

où C_3 est une constante positive, indépendante de h .

Passons maintenant aux résultats principaux du présent travail.

THEOREME 3-1

Sous les hypothèses (H1), (H2), (H3), si les conditions suivantes :

$$\beta > C_1 - \frac{1}{2\mu} \quad , \quad \theta > C_1 - \frac{\rho}{2\mu} \quad (3-6)$$

sont satisfaites alors, il existe une constante $\gamma > 0$, indépendante de h , telle que

$$\sup_{\substack{(t,v) \in W_h \times V_h \\ (t,v) \neq (0,0)}} \frac{\mathcal{E}_h(\{\xi_h, w_h\}; \{t, v\})}{\|t\|_0 + \|v\|_1} \geq \gamma \left(\|\xi\|_0 + \|w\|_1 \right) \quad (3-7)$$

$\forall (\xi, w) \in W_h \times V_h$

DEMONSTRATION

Soit (ξ, w) un élément arbitraire de $W_h \times V_h$.

Décomposons ξ comme suit :

$$\xi = s - q.I$$

où $q = -\frac{1}{n} \text{tr } \xi$ et $\text{tr } s = 0$ tel que $s \in W_h$.

Pour ce q ainsi défini, d'après le Lemme 3-1, il existe $z \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ tel que :

$$\|z\|_1 \leq C_2 \|q\|_0$$

De plus, d'après le Lemme 3-2, il existe $z_h \in V_h$ tel que :

$$\|z_h\|_1 \leq C_3 \|z\|_1$$

En fait, il existe un $z_h \in V_h$ tel que :

$$\|z_h\|_1 \leq C_4 \|q\|_0 \quad (3-8)$$

Avec $C_4 = C_3 C_2$, indépendante de h .

D'autre part, définissons $v \in V_h$ et $\tau \in W_h$ par :

$$\begin{cases} v = w + \delta z_h \\ \tau = \xi = s - q \cdot I \end{cases} \quad (3-9)$$

où $\delta > 0$, est une constante qu'on déterminera convenablement par la suite. On a :

$$\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) = \mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\xi, -w\}) + \mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{0, \delta z_h\}) \quad (3-10)$$

Mais,

$$\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\xi, -w\}) = a_\rho(\xi, \xi) + E_h(\{\xi, w\}; \{\xi, -w\})$$

où,

$$a_\rho(\xi, \xi) = \frac{1}{2\mu} \left(\|s\|_0^2 + \rho \|q \cdot I\|_0^2 \right)$$

De même,

$$\begin{aligned} E_h(\{\xi, w\}; \{\xi, -w\}) &= E_h(\{s, 0\}; \{s, 0\}) + 2 E_h(\{-q \cdot I, 0\}; \{s, 0\}) \\ &\quad + E_h(\{-q \cdot I, w\}; \{-q \cdot I, -w\}) \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w\}) &= \frac{1}{2\mu} \left(\|s\|_0^2 + \rho \|q \cdot I\|_0^2 \right) + E_h(\{s, 0\}; \{s, 0\}) + \\ &\quad + 2 E_h(\{-q \cdot I, 0\}; \{s, 0\}) + E_h(\{-q \cdot I, w\}; \{-q \cdot I, -w\}) \end{aligned} \quad (3-11)$$

Et donc,

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\xi, -w\}) &\geq \frac{1}{2\mu} \left(\|s\|_0^2 + \rho \|q \cdot I\|_0^2 \right) + \beta \|s\|_0^2 - 2 C_1 \|q \cdot I\|_0 \|s\|_0 + \\ &\quad + \theta \left(\|w\|_1 + \|q \cdot I\|_0 \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{2\mu} \|s\|_0^2 + \frac{\rho}{2\mu} \|q.I\|_0^2 + \beta \|s\|_0^2 - 2C_1 \|q.I\|_0 \|s\|_0 + \\
&\qquad\qquad\qquad + \theta \|w\|_1^2 + \theta \|q.I\|_0^2 + 2\theta \|q.I\|_0 \|w\|_1 \\
&\geq \left(\frac{1}{2\mu} + \beta \right) \|s\|_0^2 + \left(\frac{\rho}{2\mu} + \theta \right) \|q.I\|_0^2 + \theta \|w\|_1^2 + \\
&\qquad\qquad\qquad + 2\theta \|q.I\|_0 \|w\|_1 - 2C_1 \|q.I\|_0 \|s\|_0 \tag{3-12}
\end{aligned}$$

On a évidemment.

$$2C_1 \|q.I\|_0 \|s\|_0 \leq C_1 \left(\|s\|_0^2 + \|q.I\|_0^2 \right)$$

Et l'inégalité (3-12) devient alors :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w\}) &\geq \left(\frac{1}{2\mu} + \beta \right) \|s\|^2 + \left(\frac{\rho}{2\mu} + \theta \right) \|q.I\|^2 + \theta \|w\|^2 + \\
&\qquad\qquad\qquad + 2\theta \|q.I\|_0 \|w\|_1 - C_1 \left(\|s\|_0^2 + \|q.I\|_0^2 \right) \\
&\geq \left(\frac{1}{2\mu} + \beta - C_1 \right) \|s\|_0^2 + \left(\frac{\rho}{2\mu} + \theta - C_1 \right) \|q.I\|_0^2 + \\
&\qquad\qquad\qquad \theta \|w\|_1^2 + 2\theta \|q.I\|_0 \|w\|_1 \\
&\geq C_5 \left(\|s\|_0^2 + \|q.I\|_0^2 + \|w\|_1^2 + 2 \|q.I\|_0 \|w\|_1 \right)
\end{aligned}$$

$$\text{ou } C_5 = \min \left(\frac{1}{2\mu} + \beta - C_1, \frac{\rho}{2\mu} + \theta - C_1, \theta \right) \tag{3-13}$$

Finalement, on obtient

$$\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w\}) \geq C_5 \left(\|s\|_0^2 + \|q.I\|_0^2 + \|w\|_1^2 \right) \tag{3-14}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_h(\{\xi, w\}; \{0, \delta z_h\}) &= d(\delta z_h, \xi) + E_h(\{\xi, w\}; \{0, \delta z_h\}) \\
&= \delta d(z_h, \xi) + \delta E_h(\{\xi, w\}; \{0, z_h\}) \\
&\geq -\delta \|z_h\|_1 \|\xi\|_0 - \delta C_1 (\|\xi\|_0 + \|w\|_1) \|z_h\|_1
\end{aligned}$$

Comme,

$$\|q\|_0 = \frac{1}{\sqrt{n}} \|q \cdot I\|_0$$

alors,

$$\|z_h\|_1 = \frac{C_4}{\sqrt{n}} \|q \cdot I\|_0$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_h(\{\xi, w\}; \{0, \delta z_h\}) &\geq -\delta \frac{C_4}{\sqrt{n}} \|q \cdot I\|_0 \|\xi\|_0 - \delta \frac{C_1 C_4}{\sqrt{n}} (\|\xi\|_0 + \|w\|_1) \|q \cdot I\|_0 \\
&\geq -\delta \frac{C_4}{\sqrt{n}} \|q \cdot I\|_0 (\|s\|_0 + \|q \cdot I\|_0) - \delta \frac{C_1 C_4}{\sqrt{n}} \|q \cdot I\|_0 (\|s\|_0 + \|q \cdot I\|_0 + \|w\|_1) \\
&\geq -\delta \frac{C_4}{\sqrt{n}} (1 + C_1) \|q \cdot I\|_0^2 - \delta \frac{C_4}{\sqrt{n}} (1 + C_1) \|s\|_0 \|q \cdot I\|_0 - \delta \frac{C_4 C_1}{\sqrt{n}} \|w\|_1 \|q \cdot I\|_0 \\
&\geq -\delta \frac{C_4}{\sqrt{n}} (1 + C_1) \|q \cdot I\|_0^2 - \delta \frac{C_4}{2\sqrt{n}} (1 + C_1) (\|s\|_0^2 + \|q \cdot I\|_0^2) - \\
&\quad - \delta \frac{C_4 C_1}{2\sqrt{n}} (\|w\|_1^2 + \|q \cdot I\|_0^2) \\
&\geq -\delta \frac{C_4}{\sqrt{n}} \left(\frac{3}{2} + 2C_1\right) \|q \cdot I\|_0^2 - \delta \frac{C_4}{2\sqrt{n}} (1 + C_1) \|s\|_0^2 - \delta \frac{C_4 C_1}{2\sqrt{n}} \|w\|_1^2
\end{aligned}$$

i.e.

$$\mathcal{E}_h(\{\xi, w\}; \{0, -\delta z_h\}) \geq -\delta \frac{C_4}{\sqrt{n}} \left(\frac{3}{2} + 2C_1\right) (\|s\|_0^2 + \|q \cdot I\|_0^2 + \|w\|_1^2) \quad (3-15)$$

En combinant (3-10), (3-14) et (3-15), on obtient :

$$\mathfrak{E}_h(\{\xi, w\}; \{u, v\}) \geq C_5 \left(\|s\|_0^2 + \|q \cdot I\|_0^2 + \|w\|_1^2 \right) - \delta \frac{C_4}{\sqrt{n}} \left(\frac{3}{2} + 2C_1 \right) \left(\|s\|_0^2 + \|q \cdot I\|_0^2 + \|w\|_1^2 \right)$$

i.e

$$\mathfrak{E}_h(\{\xi, w\}; \{u, v\}) \geq \left(C_5 - \delta \frac{C_4}{\sqrt{n}} \left(\frac{3}{2} + 2C_1 \right) \right) \left(\|s\|_0^2 + \|q \cdot I\|_0^2 + \|w\|_1^2 \right)$$

En choisissant, par exemple,

$$\delta = \frac{C_5 \sqrt{n}}{C_4 (3 + 4C_1)} \quad (3-16)$$

on obtient,

$$\mathfrak{E}_h(\{\xi, w\}; \{u, v\}) \geq \frac{C_5}{2} \left(\|s\|_0^2 + \|q \cdot I\|_0^2 + \|w\|_1^2 \right)$$

Comme

$$\|s\|_0^2 + \|q \cdot I\|_0^2 + \|w\|_1^2 \geq \frac{1}{4} \left(\|s\|_0 + \|q \cdot I\|_0 + \|w\|_1 \right)^2$$

alors,

$$\mathfrak{E}_h(\{\xi, w\}; \{u, v\}) \geq \frac{C_5}{8} \left(\|\xi\|_0 + \|w\|_1 \right)^2$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \|u\|_0 + \|v\|_1 &= \|\xi\|_0 + \|w - \delta z_h\|_1 = \|s - q \cdot I\|_0 + \|w - \delta z_h\|_1 \\ &\leq \|s\|_0 + \|q \cdot I\|_0 + \|w\|_1 + \delta \|z_h\|_1 \\ &\leq \|s\|_0 + \|w\|_1 + \left(1 + \frac{\delta C_4}{\sqrt{n}} \right) \|q \cdot I\|_0 \\ &\leq \left(1 + \frac{C_5}{(3 + 4C_1)} \right) \left(\|\xi\|_0 + \|w\|_1 \right) \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$\frac{\mathcal{B}_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \geq \frac{C_5}{8 C_6} \left(\|\xi\|_0 + \|w\|_1 \right)$$

avec

$$C_6 = 1 + \frac{C_1}{(3 + 4C_1)} \quad (3-17)$$

Et donc,

$$\sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0, 0)}} \frac{\mathcal{B}_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \geq \frac{C_5}{8 C_6} \left(\|\xi\|_0 + \|w\|_1 \right)$$

L'inégalité (3-7) est ainsi établie avec $\gamma = \frac{C_5}{8 C_6}$, qui est évidemment indépendante de h . ■

THEOREME 3-2

Sous les hypothèses (H1), (H4), si la condition suivante :

$$\theta' > \frac{1}{2} \quad (3-18)$$

est satisfaite alors, il existe une constante $\gamma' > 0$, indépendante de h , telle que

$$\sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0, 0)}} \frac{\mathcal{B}_h(\{\xi_h, w_h\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \geq \gamma' \left(\|\xi\|_0 + \|w\|_1 \right) \quad (3-19)$$

$\forall (\xi, w) \in W_h \times V_h$

DEMONSTRATION

Soit (ξ, w) un élément arbitraire de $W_h \times V_h$. Décomposons ξ comme suit :

$$\xi = s - q.I$$

où

$$q = -\frac{1}{n} \operatorname{tr} \xi \quad \text{et} \quad \operatorname{tr} s = 0 \quad \text{tel que} \quad s \in W_h.$$

Soient, maintenant, $v \in V_h$ et $\tau \in W_h$ définis par :

$$\begin{cases} v = w - \delta z_h \\ \tau = \xi = s - q.I \end{cases} \quad (3-20)$$

où $\delta > 0$ est une constante qu'on déterminera convenablement par la suite.

On a :

$$\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{t, v\}) = \mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w\}) + \mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{0, -\delta z_h\})$$

Mais,

$$\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w\}) = a_\rho(\xi, \xi) + 2d(w, \xi) + E_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w\})$$

avec,

$$a_\rho(\xi, \xi) = \frac{1}{2\mu} \left(\|s\|_0^2 + \rho \|q.I\|_0^2 \right)$$

D'où,

$$\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w\}) = \frac{1}{2\mu} \left(\|s\|_0^2 + \rho \|q.I\|_0^2 \right) + 2d(w, \xi) + E_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w\}) \quad (3-21)$$

Et donc,

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w\}) &\geq \frac{1}{2\mu} \left(\|s\|_0^2 + \rho \|q.I\|_0^2 \right) - 2\|w\|_1 \|\xi\|_0 + \theta' \left(\|w\|_1 + \|\xi\|_0 \right)^2 \\ &\geq \frac{1}{2\mu} \|s\|_0^2 + \frac{\rho}{2\mu} \|q.I\|_0^2 - 2\|w\|_1 \|\xi\|_0 + \theta' \|w\|^2 + \theta' \|\xi\|_0^2 + \\ &\quad + 2\theta' \|\xi\|_0 \|w\|_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{2\mu} \|s\|_0^2 + \frac{\rho}{2\mu} \|q.I\|_0^2 + 2(\theta' - 1) \|w\|_1 \|\xi\|_0 + \theta' \|w\|_1^2 + \\
&\quad \theta' \left(\|s\|_0^2 + \|q.I\|_0^2 \right) \\
&\geq \left(\frac{1}{2\mu} + \theta' \right) \|s\|_0^2 + \left(\frac{\rho}{2\mu} + \theta' \right) \|q.I\|_0^2 + \theta' \|w\|_1^2 + \\
&\quad + 2(\theta' - 1) \|w\|_1 \|\xi\|_0 \quad (3-22)
\end{aligned}$$

(1) si $\theta' \geq 1$, l'inégalité (3-22) devient alors

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w\}) &\geq \left(\frac{1}{2\mu} + \theta' \right) \|s\|_0^2 + \left(\frac{\rho}{2\mu} + \theta' \right) \|q.I\|_0^2 + \theta' \|w\|_1^2 \\
&\geq \theta' \left(\|s\|_0^2 + \|q.I\|_0^2 + \|w\|_1^2 \right)
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w\}) \geq \theta' \left(\|s\|_0^2 + \|q.I\|_0^2 + \|w\|_1^2 \right) \quad (3-23)$$

D'autre part, comme dans (3-15), on a

$$\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{0, -\delta z_h\}) \geq -\delta \frac{C_4}{\sqrt{n}} \left(\frac{3}{2} + 2C_1 \right) \left(\|s\|_0^2 + \|q.I\|_0^2 + \|w\|_1^2 \right) \quad (3-24)$$

En combinant (3-23) et (3-24), on obtient

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{u, v\}) &\geq \theta' \left(\|s\|_0^2 + \|q.I\|_0^2 + \|w\|_1^2 \right) - \delta \frac{C_4}{\sqrt{n}} \left(\frac{3}{2} + 2C_1 \right) \\
&\quad \left(\|s\|_0^2 + \|q.I\|_0^2 + \|w\|_1^2 \right)
\end{aligned}$$

i.e.

$$\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{u, v\}) \geq \left(\theta' - \delta \frac{C_4}{\sqrt{n}} \left(\frac{3}{2} + 2C_1 \right) \right) \left(\|s\|_0^2 + \|q.I\|_0^2 + \|w\|_1^2 \right)$$

En choisissant, par exemple,

$$\delta = \frac{\theta' \sqrt{n}}{C_4 (3 + 4C_1)} \quad (3-25)$$

on obtient

$$\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) \geq \frac{\theta'}{2} \left(\|s\|_0^2 + \|q \cdot I\|_0^2 + \|w\|_1^2 \right) \quad (3-26)$$

Comme

$$\|s\|_0^2 + \|q \cdot I\|_0^2 + \|w\|_1^2 \geq \frac{1}{4} \left(\|s\|_0 + \|q \cdot I\|_0 + \|w\|_1 \right)^2$$

alors,

$$\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) \geq \frac{\theta'}{8} \left(\|\xi\|_0 + \|w\|_1 \right)^2$$

Il s'ensuit,

$$\frac{\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \geq \frac{\theta'}{8 C_6} \left(\|\xi\|_0 + \|w\|_1 \right)$$

où C_6 est donné comme dans (3-17). D'où,

$$\sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0, 0)}} \frac{\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \geq \frac{\theta'}{8 C_6} \left(\|\xi\|_0 + \|w\|_1 \right)$$

L'inégalité (3-19) est ainsi établie avec $\gamma' = \frac{\theta'}{8 C_6} > 0$, qui est clairement indépendante de h .

(2) Si $\frac{1}{2} < \theta' < 1$, on a évidemment

$$2(\theta' - 1) \|\xi\|_0 \|w\|_1 \geq (\theta' - 1) \left(\|\xi\|_0^2 + \|w\|_1^2 \right)$$

L'inégalité (3-22) devient alors

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w\}) \geq & \left(\frac{1}{2\mu} + \theta' \right) \|s\|_0^2 + \left(\frac{\rho}{2\mu} + \theta' \right) \|q \cdot I\|_0^2 + \theta' \|w\|_1^2 + \\ & + \left(\theta' - 1 \right) \left(\|q \cdot I\|_0^2 + \|s\|_0^2 + \|w\|_1^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \geq \left(\frac{1}{2\mu} + 2\theta' - 1 \right) \|s\|_0^2 + \left(\frac{\rho}{2\mu} + 2\theta' - 1 \right) \|q.I\|_0^2 + \\ & \quad + \left(2\theta' - 1 \right) \|w\|_1^2 \\ & \leq \left(2\theta' - 1 \right) \left(\|s\|_0^2 + \|q.I\|_0^2 + \|w\|_1^2 \right) \end{aligned}$$

D'où,

$$\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w\}) \geq \left(2\theta' - 1 \right) \left(\|s\|_0^2 + \|q.I\|_0^2 + \|w\|_1^2 \right) \quad (3-27)$$

D'autre part, en combinant (3-23) et (3-27), on obtient

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{u, v\}) & \geq \left(2\theta' - 1 \right) \left(\|s\|_0^2 + \|q.I\|_0^2 + \|w\|_1^2 \right) - \delta \frac{C_4}{\sqrt{n}} \left(\frac{3}{2} + 2C_1 \right) \\ & \quad \left(\|s\|_0^2 + \|q.I\|_0^2 + \|w\|_1^2 \right) \end{aligned}$$

i.e.

$$\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{u, v\}) \geq \left(2\theta' - 1 - \delta \frac{C_4}{\sqrt{n}} \left(\frac{3}{2} + 2C_1 \right) \right) \left(\|s\|_0^2 + \|q.I\|_0^2 + \|w\|_1^2 \right)$$

En choisissant, par exemple,

$$\delta = \frac{(2\theta' - 1) \sqrt{n}}{C_4 (3 + 4C_1)} \quad (3-28)$$

on obtient

$$\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{u, v\}) \geq \frac{2\theta' - 1}{2} \left(\|s\|_0^2 + \|q.I\|_0^2 + \|w\|_1^2 \right) \quad (3-29)$$

Comme

$$\|s\|_0^2 + \|q.I\|_0^2 + \|w\|_1^2 \geq \frac{1}{4} \left(\|s\|_0 + \|q.I\|_0 + \|w\|_1 \right)^2$$

alors,

$$\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{u, v\}) \geq \frac{2\theta' - 1}{8} \left(\|s\|_0 + \|q.I\|_0 + \|w\|_1 \right)^2$$

Il s'ensuit

$$\frac{\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \geq \frac{2\theta' - 1}{8 C_6} (\|\xi\|_0 + \|w\|_1)$$

où C_6 est donné comme dans (3-17). p'ou,

$$\sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0, 0)}} \frac{\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \geq \frac{2\theta' - 1}{8 C_6} (\|\xi\|_0 + \|w\|_1)$$

L'inégalité (3-19) est ainsi établie avec $\gamma' = \frac{2\theta' - 1}{8 C_6} > 0$,

qui est clairement indépendante de h . ■

THEOREME 3-3

Sous les hypothèses (H1), (H5), il existe une constante $\gamma^* > 0$, indépendante de h , telle que

$$\sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0, 0)}} \frac{\mathfrak{B}_h(\{\xi_h, w_h\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \geq \gamma^* (\|\xi\|_0 + \|w\|_1) \quad (3-30)$$

$\forall (\xi, w) \in W_h \times V_h$

DEMONSTRATION

Soit (ξ, w) un élément arbitraire de $W_h \times V_h$. Décomposons ξ comme suit :

$$\xi = s - q \cdot 1$$

où

$$q = -\frac{1}{n} \text{tr } \xi \quad \text{et} \quad \text{tr } s = 0 \quad \text{tel que } s \in W_h.$$

Soient, maintenant, $v \in V_h$ et $\tau \in W_h$ définies par :

$$\begin{cases} v = w - \delta z_h \\ \tau = \xi = s - q \cdot I \end{cases}$$

où $\delta > 0$, est une constante qu'on déterminera convenablement par la suite.

On a :

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) &= \mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w - \delta z_h\}) \\ &= \mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w\}) + \mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{0, -\delta z_h\}) \end{aligned}$$

D'autre part, comme dans (3-21), on a

$$\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w\}) = \frac{1}{2\mu} \left(\|s\|_0^2 + \rho \|q \cdot I\|_0^2 \right) + 2d(w, \xi) + E_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w\})$$

Et donc,

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w\}) &\geq \frac{1}{2\mu} \left(\|s\|_0^2 + \rho \|q \cdot I\|_0^2 \right) + \theta^* \left(\|w\|_1 + \|\xi\|_0 \right)^2 \\ &\geq \frac{1}{2\mu} \|s\|_0^2 + \frac{\rho}{2\mu} \|q \cdot I\|_0^2 + \theta^* \|w\|_1^2 + \theta^* \|\xi\|_0^2 + 2\theta^* \|\xi\|_0 \|w\|_1 \\ &\geq \frac{1}{2\mu} \|s\|_0^2 + \frac{\rho}{2\mu} \|q \cdot I\|_0^2 + \theta^* \|w\|_1^2 + \theta^* \left(\|s\|_0^2 + \|q \cdot I\|_0^2 \right) \\ &\geq \left(\frac{1}{2\mu} + \theta^* \right) \|s\|_0^2 + \left(\frac{\rho}{2\mu} + \theta^* \right) \|q \cdot I\|_0^2 + \theta^* \|w\|_1^2 \\ &\geq \theta^* \left(\|s\|_0^2 + \|q \cdot I\|_0^2 + \|w\|_1^2 \right) \end{aligned}$$

i.e

$$\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w\}) \geq \theta^* \left(\|s\|_0^2 + \|q \cdot I\|_0^2 + \|w\|_1^2 \right) \quad (3-31)$$

D'autre part, comme dans (3-15), on a

$$\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{0, -\delta z_h\}) \geq -\delta \frac{C_4}{\sqrt{n}} \left(\frac{3}{2} + 2C_1 \right) \left(\|s\|_0^2 + \|q \cdot I\|_0^2 + \|w\|_1^2 \right) \quad (3-32)$$

En combinant (3-31) et (3-32), on obtient

$$\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) \geq \theta^* \left(\|s\|_0^2 + \|q \cdot I\|_0^2 + \|w\|_1^2 \right) - \delta \frac{C_4}{\sqrt{n}} \left(\frac{3}{2} + 2C_1 \right) \left(\|s\|_0^2 + \|q \cdot I\|_0^2 + \|w\|_1^2 \right)$$

i.e.

$$\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) \geq \left(\theta^* - \delta \frac{C_4}{\sqrt{n}} \left(\frac{3}{2} + 2C_1 \right) \right) \left(\|s\|_0^2 + \|q \cdot I\|_0^2 + \|w\|_1^2 \right)$$

En choisissant, par exemple,

$$\delta = \frac{\theta^* \sqrt{n}}{C_4 (3 + 4C_1)} \quad (3-33)$$

on obtient

$$\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) \geq \frac{\theta^*}{2} \left(\|s\|_0^2 + \|q \cdot I\|_0^2 + \|w\|_1^2 \right)$$

Comme

$$\|s\|_0^2 + \|q \cdot I\|_0^2 + \|w\|_1^2 \geq \frac{1}{4} \left(\|s\|_0 + \|q \cdot I\|_0 + \|w\|_1 \right)^2$$

alors,

$$\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) \geq \frac{\theta^*}{8} \left(\|\xi\|_0 + \|w\|_1 \right)^2$$

Il s'ensuit;

$$\frac{\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \geq \frac{\theta^*}{8 C_6} \left(\|\xi\|_0 + \|w\|_1 \right)$$

où C_6 est donné comme dans (3-17). D'où,

$$\sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0, 0)}} \frac{\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \geq \frac{\theta^*}{8 C_6} \left(\|\xi\|_0 + \|w\|_1 \right)$$

L'inégalité (3-30) est ainsi établie avec $\gamma^* = \frac{\theta^*}{8 C_6} > 0$, qui est évidemment indépendante de h. ■

Ayant établie la stabilité, l'existence et l'unicité de la solution discrète des formulations stabilisées sont régies par:

THEOREME 3-4

Supposons que l'une des trois situations suivantes a lieu:

- (1)- (H1), (H2) et (H3) sont vérifiées avec la condition (3-6);
- (2)- (H1) et (H4) sont vérifiées avec la condition (3-18);
- (3)- (H1) et (H5) sont vérifiées ;

Alors, le problème (P') admet une solution unique dans $W_h \times V_h$.

Avant de présenter la démonstration de ce théorème, donnons un résultat intermédiaire de continuité.

LEMME 3-3

Sous l'hypothèse (H1), il existe une constante positive C^* telle que :

$$B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) \leq C^* \left(\|\xi\|_0 + \|w\|_1 \right) \left(\|\tau\|_0 + \|v\|_1 \right) \quad (3-34)$$

$$\forall (\xi, w), (\tau, v) \in W_h \times V_h$$

DEMONSTRATION

En utilisant l'inégalité de SCHWARTZ, on a

$$B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) = a_\rho(\xi, \tau) + d(w, \tau) + d(v, \xi) + E_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})$$

$$\begin{aligned}
&\leq M\|\xi\|_0\|\tau\|_0 + \|w\|_1\|\tau\|_0 + \|v\|_1\|\xi\|_0 + \\
&\quad + C_1\left(\|\xi\|_0 + \|w\|_1\right)\left(\|\tau\|_0 + \|v\|_1\right) \\
&\leq \max(M, 1)\|\xi\|_0\left(\|\tau\|_0 + \|v\|_1\right) + \|w\|_1\|\tau\|_0 + \\
&\quad + C_1\left(\|\xi\|_0 + \|w\|_1\right)\left(\|\tau\|_0 + \|v\|_1\right) \\
&\leq \max(M, 1)\left(\|\xi\|_0 + \|w\|_1\right)\left(\|\tau\|_0 + \|v\|_1\right) + \\
&\quad + C_1\left(\|\xi\|_0 + \|w\|_1\right)\left(\|\tau\|_0 + \|v\|_1\right) \\
&\leq \left(\max(M, 1) + C_1\right)\left(\|\xi\|_0 + \|w\|_1\right)\left(\|\tau\|_0 + \|v\|_1\right)
\end{aligned}$$

L'inégalité (3-34) est ainsi établie avec

$$C^* = C_1 + \max(M, 1) > 0 \quad (3-35) \quad \blacksquare$$

DEMONSTRATION DU THEOREME 3-4

On munit $W_h \times V_h$ le produit scalaire

$$\left(\left(\{\tau, v\}; \{\xi, w\} \right) \right) = \int_{\Omega} (\tau \cdot \xi + v \cdot w + \nabla v \cdot \nabla w) \, d\Omega \quad (3-36)$$

$\forall (\tau, v), (\xi, w) \in W_h \times V_h$

et de la norme correspondante:

$$\| \| (\tau, v) \| \| = \left(\|\tau\|_0^2 + \|v\|_1^2 \right)^{1/2} \quad \forall (\tau, v) \in W \times V \quad (3-37)$$

La norme $\| \| (\dots) \| \|$ est, évidemment, une norme équivalente à $\|\cdot\|_0 + \|\cdot\|_1$.

En fait, on a:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\|\tau\|_0 + \|v\|_1 \right) \leq \| \| (\tau, v) \| \| \leq \sqrt{2} \left(\|\tau\|_0 + \|v\|_1 \right) \quad (3-38)$$

Puisque la fonctionnelle linéaire L_h est continue sur $W_h \times V_h$, alors, il existe d'après le théorème de représentation de RIESZ (voir BREZIS [8]), un élément unique (ξ_0, w_0) dans $W_h \times V_h$ tel que :

$$\left((\xi_0, w_0), (\tau, v) \right) = L_h(\tau, v) \quad \forall (\tau, v) \in W_h \times V_h \quad (3-39)$$

De même, (ξ, w) étant fixé dans $W_h \times V_h$, la forme bilinéaire $(\tau, v) \longrightarrow \mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})$ est continue sur $W_h \times V_h$. En appliquant à nouveau le théorème de RIESZ, on déduit l'existence d'un élément unique $\mathcal{A}(\xi, w) \in W_h \times V_h$ tel que :

$$\left(\mathcal{A}(\xi, w), (\tau, v) \right) = \mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) \quad \forall (\tau, v) \in W_h \times V_h \quad (3-40)$$

Ceci définit un opérateur linéaire \mathcal{A} de $W_h \times V_h$ dans $W_h \times V_h$. De plus, \mathcal{A} est continue. En effet, d'après la continuité de $\mathfrak{B}_h(\{\dots\}; \{\dots\})$ et (3-37), on a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}(\xi, w)\| &= \sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0, 0)}} \frac{\left(\mathcal{A}(\xi, w), (\tau, v) \right)}{\|(\tau, v)\|} \quad \forall (\xi, w) \in W_h \times V_h \\ &= \sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0, 0)}} \frac{\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|(\tau, v)\|} \\ &\leq \sqrt{2} \sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0, 0)}} \frac{\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \\ &\leq \sqrt{2} C^* \left(\|\xi\|_0 + \|w\|_1 \right) \leq 2C^* \|(\xi, w)\| \end{aligned}$$

i.e

$$\|\mathcal{A}(\xi, w)\| \leq 2C^* \|(\xi, w)\| \quad (3-41)$$

Ainsi, le problème (P') est équivalent à :

Trouver $(\sigma_0, u_0) \in W_h \times V_h$ tel que :

$$\mathcal{A}(\sigma_0, u_0) = (\xi_0, w_0)$$

On est donc ramené à montrer que \mathcal{A} est une bijection de $W_h \times V_h$ sur lui même. Montrons d'abord que \mathcal{A} est injectif . D'après (3-7) (ou (3-19), ou (3-30)) on a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}(\xi, w)\| &= \sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0, 0)}} \frac{\left(\mathcal{A}(\xi, w), (\tau, v) \right)}{\|(\tau, v)\|} \\ &= \sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0, 0)}} \frac{\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|(\tau, v)\|} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0, 0)}} \frac{\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \geq \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \left(\|\xi\|_0 + \|w\|_1 \right) \end{aligned}$$

i.e

$$\|\mathcal{A}(\xi, w)\| \geq \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \|(\xi, w)\| \tag{3-42}$$

Et donc, si

$$\mathcal{A}(\xi, w) = 0_{W_h \times V_h}$$

alors,

$$\|(\xi, w)\| = 0_{W_h \times V_h}$$

Il est possible de montrer autrement que \mathcal{A} est injectif. montrons que \mathcal{A}^{-1} est un opérateur borné de $W_h \times V_h$ dans $W_h \times V_h$.

Tout d'abord, on déduit de (3-7) ou (3-19), ou (3-30) que :

$$\forall (\xi, w) \in W_h \times V_h$$

$$\gamma \|\mathcal{A}(\xi, w)\| \leq \sqrt{2} \gamma \left(\|\xi\|_0 + \|w\|_1 \right) \leq \sqrt{2} \sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0, 0)}} \frac{\mathfrak{B}_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1}$$

$$\leq 2 \sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0, 0)}} \frac{\left(\left(\mathcal{A}(\xi, w), (\tau, v) \right) \right)}{\|(\tau, v)\|} = 2 \|\mathcal{A}(\xi, w)\|$$

i.e.

$$\forall (\xi, w) \in W_h \times V_h$$

$$\|\mathcal{A}(\xi, w)\| \geq \frac{\gamma}{2} \|\mathcal{A}(\xi, w)\| = \frac{\gamma}{2} \left(\|\xi\|_0^2 + \|w\|_1^2 \right)^{1/2} \quad (3-43)$$

Ceci prouve que \mathcal{A} est injective.

Il reste à montrer que $\mathcal{A}(W_h \times V_h)$ est fermé dans $W_h \times V_h$ et que $(\mathcal{A}(W_h \times V_h))^\perp$ est réduit dans $W_h \times V_h$ à $\{0_{W_h \times V_h}\}$.

En effet, soit $(\mu, t) \in \overline{\mathcal{A}(W_h \times V_h)}$, et $\{\mathcal{A}(\xi_n, w_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{A}(W_h \times V_h)$ qui converge vers (μ, t) dans $W_h \times V_h$. En vertu de (3-43), on a :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}(\xi_n, w_n) - \mathcal{A}(\xi_m, w_m)\| &= \|\mathcal{A}(\xi_n - \xi_m, w_n - w_m)\| \\ &\geq \frac{\gamma}{2} \|(\xi_n - \xi_m, w_n - w_m)\| \\ &\geq \frac{\gamma}{2} \left(\|\xi_n - \xi_m\|_0^2 + \|w_n - w_m\|_1^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

De sorte que (ξ_n, w_n) est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert $W_h \times V_h$ et $\mathcal{A}(\xi_n, w_n)$ converge vers $\mathcal{A}(\xi, w)$ puisque \mathcal{A} est continu. D'où,

$$(\mu, t) = \mathcal{A}(\xi, w)$$

$$(0,0) = (0, \lambda^0)$$

i.e.

$$\|M^h X^h\|_0 = \|(0, \lambda^0)\|$$

□.ii

$$\|M^h X^h\|_0 = \frac{\sup_{(\xi, M) \in (M, \xi)} \|(0,0) \neq (M, \xi)\|}{\sup_{(\xi, M) \in (M, \xi)} \|(0, \lambda^0)\|} \|(0, \lambda^0)\|$$

$$\leq \frac{\sup_{(\xi, M) \in (M, \xi)} \|(0,0) \neq (M, \xi)\|}{\sup_{(\xi, M) \in (M, \xi)} \|(0, \lambda^0)\|} \|(0, \lambda^0)\|$$

$$\leq \frac{\sup_{(\xi, M) \in (M, \xi)} \|(0,0) \neq (M, \xi)\|}{\sup_{(\xi, M) \in (M, \xi)} \|(0, \lambda^0)\|} \|(0, \lambda^0)\| \leq \sqrt{2} \|(0, \lambda^0)\| + \|(0, \lambda^0)\| \leq \sqrt{2} \|(0, \lambda^0)\| + \|(0, \lambda^0)\|$$

D'après la symétrie de $B_h(\{ \cdot, \cdot \})$, on a :

$$\|M^h X^h\|_0 = \|(0, \lambda^0)\| \quad \forall (\xi, M) \in M^h X^h$$

i.e.

$$\text{Soit } (0, \lambda^0) \in \mathcal{A}(M^h X^h)$$

$$\text{montrer que } \mathcal{A}(M^h X^h) = \{0, \lambda^0\}$$

Enfinement, pour montrer que $M^h X^h = \mathcal{A}(M^h X^h)$, il revient à

$$M^h X^h = \mathcal{A}(M^h X^h)$$

écrire

Ce qui prouve que $\mathcal{A}(M^h X^h)$ est fermé dans $M^h X^h$. Donc, on peut

$$(h, t) \in \mathcal{A}(M^h X^h)$$

i.e.

Ceci montre que $(\mathcal{A}(W_h \times V_h))^\perp$ est réduit à $\{0_{W_h \times V_h}\}$.

Par conséquent, cela prouve que \mathcal{A} est surjectif.

L'opérateur \mathcal{A} est donc bijectif de $W_h \times V_h$ sur lui-même. De plus on peut déduire de (3-43) que :

$$\forall (\tau, v) \in W_h \times V_h,$$

$$\|\mathcal{A}^{-1}(\tau, v)\| \leq \frac{2}{\gamma} \|(\tau, v)\|$$

i.e. \mathcal{A}^{-1} est continu. ■

3-3 CONVERGENCE DES SOLUTIONS DISCRETES :

Dans ce paragraphe, on présente les résultats de convergence des solutions approchées des formulations stabilisées précédemment vers la solution exacte du problème d'Elasticité.

THEOREME 3-5

Sous les hypothèses du Théorème 3-4, si le problème (P') est consistant. i.e.

$$E_h(\{\sigma, u\}; \{\tau, v\}) = 0 \quad \forall (\tau, v) \in W_h \times V_h \quad (3-44)$$

alors on a l'estimation d'erreur suivante :

$$\|\sigma - \sigma_h\|_0 + \|u - u_h\|_1 \leq C \left\{ \inf_{\tau \in W_h} \|\sigma - \tau\|_0 + \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_1 \right\} \quad (3-45)$$

où la constante $C > 0$ est indépendante de h ; (σ, u) dénotant la solution exacte du problème (P).

DEMONSTRATION

Soit $\tilde{u} \in V_h$ et $\tilde{\sigma} \in W_h$ deux interpolants de u et σ respectivement. On a (pour tout $(t, v) \in W_h \times V_h$):

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_h(\{\sigma - \tilde{\sigma}, u - \tilde{u}\}; \{t, v\}) &= a_\rho(\sigma - \tilde{\sigma}, t) + d(u - \tilde{u}, t) + d(v, \sigma - \tilde{\sigma}) + \\ &+ E_h(\{\sigma - \tilde{\sigma}, u - \tilde{u}\}; \{\tau, v\}) \end{aligned} \quad (3-46)$$

Mais, d'après (3-44),

$$\mathfrak{B}_h(\{\sigma_h - \tilde{\sigma}, u_h - \tilde{u}\}; \{t, v\}) = \mathfrak{B}_h(\{\sigma - \tilde{\sigma}, u - \tilde{u}\}; \{\tau, v\})$$

Où,

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_h(\{\sigma - \tilde{\sigma}, u - \tilde{u}\}; \{t, v\}) &\leq M \|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 \|t\|_0 + \|u - \tilde{u}\|_1 \|\tau\|_0 + \|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 \|v\|_1 \\ &+ C_1 (\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u - \tilde{u}\|_1) (\|\tau\|_0 + \|v\|_1) \\ &\leq \max\{M, 1\} (\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u - \tilde{u}\|_1) (\|\tau\|_0 + \|v\|_1) \\ &+ C_1 (\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u - \tilde{u}\|_1) (\|\tau\|_0 + \|v\|_1) \\ &\leq \max\{M+C_1, 1+C_1\} (\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u - \tilde{u}\|_1) \\ &\quad (\|\tau\|_0 + \|v\|_1) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\sup_{\substack{(t, v) \in W_h \times V_h \\ (t, v) \neq (0, 0)}} \frac{\mathfrak{B}_h(\{\sigma_h - \tilde{\sigma}, u_h - \tilde{u}\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \leq \max\{M+C_1, 1+C_1\} (\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u - \tilde{u}\|_1) \quad (3-47)$$

D'autre part, d'après (3-7) on a :

$$\gamma \left(\|\sigma_h - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u_h - \tilde{u}\|_1 \right) \leq \sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0, 0)}} \frac{\mathfrak{B}_h(\{\sigma_h - \tilde{\sigma}, u_h - \tilde{u}\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \quad (3-48)$$

En combinant (3-47) et (3-48), on obtient :

$$\gamma \left(\|\sigma_h - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u_h - \tilde{u}\|_1 \right) \leq \max\{M+C_1, 1+C_1\} \left(\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u - \tilde{u}\|_1 \right)$$

D'où,

$$\|\sigma_h - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u_h - \tilde{u}\|_1 \leq \frac{\max\{M+C_1, 1+C_1\}}{\gamma} \left(\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u - \tilde{u}\|_1 \right)$$

Mais,

$$\|\sigma - \sigma_h\|_0 = \|\sigma - \tilde{\sigma} + \tilde{\sigma} - \sigma_h\|_0 \leq \|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 + \|\tilde{\sigma} - \sigma_h\|_0$$

$$\|u - u_h\|_1 = \|u - \tilde{u} + \tilde{u} - u_h\|_1 \leq \|u - \tilde{u}\|_0 + \|\tilde{u} - u_h\|_1$$

D'où,

$$\begin{aligned} \|\sigma - \sigma_h\|_0 + \|u - u_h\|_1 &\leq \|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u - \tilde{u}\|_1 + \|\sigma_h - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u_h - \tilde{u}\|_1 \\ &\leq \|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u - \tilde{u}\|_1 + \frac{\max\{M+C_1, 1+C_1\}}{\gamma} \left(\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u - \tilde{u}\|_1 \right) \\ &\leq \left[1 + \frac{\max\{M+C_1, 1+C_1\}}{\gamma} \right] \left(\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u - \tilde{u}\|_1 \right) \end{aligned}$$

i.e

$$\|\sigma - \sigma_h\|_0 + \|u - u_h\|_1 \leq C \left(\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u - \tilde{u}\|_1 \right) \quad (3-49)$$

$$\text{avec } C = 1 + \frac{\max\{M+C_1, 1+C_1\}}{\gamma} \quad (3-50)$$

Par conséquent,

$$\|\sigma - \sigma_h\|_0 + \|u - u_h\|_1 \leq C \left\{ \inf_{\tau \in W_h} \|\sigma - \tau\|_0 + \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_1 \right\} \quad \blacksquare$$

REMARQUE 3-1

Si la condition de consistance (3-44) n'est pas vérifiée, un terme exprimant l'erreur de consistance apparaîtra dans le membre de droite de l'estimation (3-45).

Les espaces W_h et V_h ont des propriétés d'approximation bien connues suivantes: (voir, par exemple, CIARLET [11], ou GIRAULT-RAVIART [18])

LEMME 3-4

Si $v \in \left[H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \right]^n$, alors il existe un $\tilde{v} \in V_h$ tel

que :

$$\|v - \tilde{v}\|_1 \leq C_1^* h^k |v|_{k+1} \quad (3-51)$$

pour $C_1^* > 0$ indépendante de h .

LEMME 3-5

Si $t \in \left[H^{m+1}(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \right]^{n \times n}$, alors il existe un $\tilde{t} \in W_h$ tel

que :

$$\| \sigma - \tilde{\sigma} \|_0 \leq C_2^* h^{m+1} |\sigma|_{m+1} \quad (3-52)$$

pour $C_2^* > 0$ indépendante de h .

CORROLAIRE 3-1

Avec les estimations du LEMME 3-4 et du LEMME 3-5, on obtient l'estimation d'erreur:

$$\| \sigma - \sigma_h \|_0 + \| u - u_h \|_1 \leq C_3^* (h^{m+1} |\sigma|_{m+1} + h^k |u|_{k+1}) \quad (3-53)$$

où $C_3^* > 0$, est indépendante de h .

REMARQUE 3-2

Il est clair que sous les hypothèses du THEOREME 3-5, la solution discrète (σ_h, u_h) converge vers la solution (σ, u) du problème (P), i.e.

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\| \sigma - \sigma_h \|_0 + \| u - u_h \|_1) = 0 \quad (3-54)$$

De plus, l'ordre de convergence est optimal pour le couple des éléments finis $\{W_h, V_h\}$ si $m+1 = k$.

Pour l'estimation de l'erreur dans L^2 pour le déplacement, on a besoin en plus de la supposition que la solution exacte (σ, u) du problème continu (P) satisfait l'inégalité de régularité suivante:

$$\| u \|_2 + \| \sigma \|_1 \leq C_4^* \| f \|_0 \quad (3-55)$$

(voir GIRAULT-RAVIART [18], STENBERG-FRANCA [31]). En particulier,

THEOREME 3-6

Si $v \in \left[H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \right]^n$ et $\tau \in \left[H^{m+1}(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \right]^{n \times n}$, et de plus, si l'inégalité (3-54) est vérifiée, alors on a:

$$\|u - u_h\|_0 \leq C_5^* \left(h^{m+2} |\sigma|_{m+1} + h^{k+1} |u|_{k+1} \right) \quad (3-56)$$

où $C_5^* > 0$ est indépendante de h .

DEMONSTRATION

Supposons que l'inégalité (3-54) est vérifiée de sorte que la solution $(\tau, v) \in W \times V$ du problème:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \tau = u - u_h & \text{sur } \Omega \\ \tau(v) = \frac{1}{2\mu} \left[\tau - \frac{1-\rho}{n} \operatorname{tr} \tau \cdot I \right] & \text{sur } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (3-57)$$

satisfasse

$$\|v\|_2 + \|\tau\|_1 \leq C_4^* \|u - u_h\|_0 \quad (3-58)$$

Soient \tilde{v} et $\tilde{\tau}$ deux interpolants de v et τ respectivement dans V_h et W_h définis comme dans les Lemmes 3-4 et 3-5. En utilisant (3-3) et (3-57), on obtient:

$$\|u - u_h\|_0^2 = \mathfrak{B}_h(\{\sigma - \sigma_h, u - u_h\}; \{\tau - \tilde{\tau}, v - \tilde{v}\}) \quad (3-59)$$

D'autre part, d'après (3-34),

$$\mathfrak{B}_h(\{\sigma - \sigma_h, u - u_h\}; \{\tau - \tilde{\tau}, v - \tilde{v}\}) \leq C^* \left(\|\sigma - \sigma_h\|_0 + \|u - u_h\|_1 \right) \left(\|\tau - \tilde{\tau}\|_0 + \|v - \tilde{v}\|_1 \right) \quad (3-60)$$

Puisque le problème (3-3) est régulier, alors

$u \in \left[H^{m+1}(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \right]^{n \times n}$ et $v \in \left[H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \right]^n$. Ainsi la puissance de h dans (3-56) est obtenue du LEMME 3-4 avec $k = 1$ et du LEMME 3-5 avec $m = 0$. Ce qui donne:

$$\|v - \tilde{v}\|_1 \leq C_1^* h |v|_2, \quad \|\tau - \tilde{\tau}\|_0 \leq C_2^* h |\tau|_1$$

Par conséquent,

$$\|u - u_h\|_0^2 \leq C^* \left(C_1^* h |v|_2 + C_2^* h |\tau|_1 \right) \left(\|\sigma - \sigma_h\|_0 + \|u - u_h\|_1 \right)$$

i.e

$$\|u - u_h\|_0^2 \leq C_6^* h \left(|v|_2 + |\tau|_1 \right) \left(\|\sigma - \sigma_h\|_0 + \|u - u_h\|_1 \right) \quad (3-61)$$

avec $C_6^* = C^* \max\{C_1^*, C_2^*\} > 0$, indépendante de h .

Donc, en combinant (3-58) et (3-61), on obtient,

$$\|u - u_h\|_0^2 \leq C_6^* h C_4^* \|u - u_h\|_0 \left(\|\sigma - \sigma_h\|_0 + \|u - u_h\|_1 \right)$$

D'où

$$\|u - u_h\|_0 \leq C_7^* h \left(\|\sigma - \sigma_h\|_0 + \|u - u_h\|_1 \right) \quad (3-62)$$

Avec $C_7^* = C_6^* C_4^* > 0$, indépendante de h .

De plus, d'après (3-53) et (3-62), on a:

$$\|u - u_h\|_0 \leq C_7^* h C_3^* \left(h^{m+1} |\sigma|_{m+1} + h^k |u|_{k+1} \right)$$

i.e

$$\|u - u_h\|_0 \leq C_5^* \left(h^{m+2} |\sigma|_{m+1} + h^{k+1} |u|_{k+1} \right)$$

où $C' = C' C' > 0$, indépendante de h .

D'où l'inégalité (3-56) est ainsi établie. ■

La construction des conditions suffisantes pour la stabilité et la convergence du problème proposé s'avèrent réalisables et permettent d'utiliser une classe plus large de méthodes mixtes des éléments finis, en particulier, les méthodes mixtes des éléments finis de bas ordre. Ceci est justifié par les exemples donnés dans le chapitre suivant.

QUATRIEME CHAPITRE

EXEMPLES DE STABILISATION

- 4-1 TECHNIQUE DE STABILISATION N°1
- 4-2 TECHNIQUE DE STABILISATION N°2
- 4-3 CONCLUSION GÉNÉRALE

Le but de ce chapitre est d'illustrer numériquement la validité de la théorie développée dans le chapitre présent en se basant sur des exemples concrets.

Les présents choix du terme de stabilisation $E_h(\{\dots\}, \{\dots\})$ ont été inspirés de FRANCA-HUGHES [15] et STENBERG-FRANCA [31].

On suppose que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est subdivisé en réunion d'un nombre fini d'éléments K (triangles ou quadrilatères si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, tétraèdres ou hexaèdres si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$). Soit \mathcal{T}_h la subdivision ainsi obtenue. On dénote \hat{K} l'élément de référence et pour chaque $K \in \mathcal{T}_h$, F_K la transformation affine de \hat{K} dans K . Soit $R_\ell(\hat{K})$ l'espace des fonctions polynômiales de degré $\leq \ell$ définies sur l'élément \hat{K} .

$$R_\ell(\hat{K}) = \begin{cases} P_\ell(\hat{K}) & \text{si } \hat{K} \text{ est triangle ou tétraèdre} \\ Q_\ell(\hat{K}) & \text{si } \hat{K} \text{ est quadrilatère ou hexaèdre} \end{cases}$$

$C^0(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues sur Ω .

On définit alors:

$$V_h = \left\{ v \in (C^0(\Omega))^n / v|_K = \tilde{v} \circ F_K^{-1}, \tilde{v} \in (R_\ell(\hat{K}))^n, \forall K \in \mathcal{T}_h \right. \\ \left. v = 0 \text{ sur } \Gamma \right\} \quad (4-1)$$

$$W_h = \left\{ \tau \in (L^2(\Omega))^{n \times n} / \tau|_K = \tilde{\tau} \circ F_K^{-1}, \tilde{\tau} \in (R_\ell(\hat{K}))^{n \times n}, \forall K \in \mathcal{T}_h \right\} \quad (4-2a)$$

ou

$$W_h = \left\{ L \in (C^0(\Omega))^{n \times n} \cap (L^2(\Omega))^{n \times n} / \tau|_K = \hat{\tau} \circ F_K^{-1}, \hat{\tau} \in (R_\ell(\hat{K}))^{n \times n}, \right. \\ \left. \forall K \in \mathcal{T}_h \right\} \quad (4-2b)$$

avec $\ell \geq 1$ pour V_h et $\ell \geq 0$ pour (4-2a) et $\ell \geq 1$ pour (4-2b).

4-1 TECHNIQUE DE STABILISATION N° 1

On définit sur $(W_h \times V_h)^2$, une forme bilinéaire symétrique $E_h(\{\dots\}; \{\dots\})$ par:

$$E_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) = \frac{\delta_1}{2\mu} \left(\tau - \frac{1-\rho}{n} (\text{tr } \tau) \cdot I, \xi - \frac{1-\rho}{n} (\text{tr } \xi) \cdot I \right) - \\ - \delta_2 (2\mu) (\varepsilon(w), \varepsilon(v)) \\ \forall (\xi, w), (\tau, v) \in W_h \times V_h \quad (4-3)$$

où $\delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$ sont des constantes qu'on déterminera convenablement par la suite.

On définit la forme bilinéaire généralisée $B_h(\{\dots\}; \{\dots\})$ sur $(W_h \times V_h)^2$ par:

$$B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) = a_\rho(\xi, \tau) + d(w, \tau) + d(v, \xi) + E_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) \\ \forall (\xi, w), (\tau, v) \in W_h \times V_h \quad (4-4)$$

où

$$a_\rho(\xi, \tau) = \frac{1}{2\mu} \left[(\xi, \tau) - \frac{1-\rho}{n} (\text{tr } \xi, \text{tr } \tau) \right]$$

$$d(w, \tau) = -(\tau, \varepsilon(w))$$

$E_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})$ est définie par (4-3).

La fonctionnelle linéaire $L_h \in W_h \times V_h$ est donnée par:

$$L_h(\tau, v) = \dots \quad \forall (\tau, v) \in W_h \times V_h \quad (4-5)$$

Ainsi, une formulation discrète stabilisée du problème d'élasticité peut être énoncée comme suit:

PROBLÈME (PS)

Trouver $(\sigma_h, u_h) \in W_h \times V_h$ tel que:

$$B_h(\{\sigma_h, u_h\}; \{\tau, v\}) = L_h(\tau, v) \quad \forall (\tau, v) \in W_h \times V_h \quad (4-6)$$

L'existence et l'unicité de la solution du problème (PS) dépendent de la satisfaction des hypothèses (H1), (H2), (H3) et la condition (3-6) du Théorème 3-1.

(1°) - (H1) peut être immédiatement vérifiée, en utilisant la formule de CAUCHY-SHWARTZ. En effet,

$$\begin{aligned} |B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})| &= \left| \frac{\delta_1}{2\mu} \left(\tau - \frac{1-\rho}{n} (\text{tr } \tau) \cdot I, \xi - \frac{1-\rho}{n} (\text{tr } \xi) \cdot I \right) - \delta_2 (2\mu) (\varepsilon(w), \varepsilon(v)) \right| \\ &\leq \frac{\delta_1}{2\mu} \left| \left(\tau - \frac{1-\rho}{n} (\text{tr } \tau) \cdot I, \xi - \frac{1-\rho}{n} (\text{tr } \xi) \cdot I \right) \right| + 2\mu \delta_2 \left| (\varepsilon(w), \varepsilon(v)) \right| \\ &\leq \frac{\delta_1}{2\mu} \left\| \tau - \frac{1-\rho}{n} (\text{tr } \tau) \cdot I \right\|_0 \left\| \xi - \frac{1-\rho}{n} (\text{tr } \xi) \cdot I \right\|_0 + 2\mu \delta_2 \|\varepsilon(w)\|_0 \|\varepsilon(v)\|_0 \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\delta_1}{2\mu} (\max\{1, \rho\})^2 \|\tau\|_0 \|\xi\|_0 + 2\mu \delta_2 \|w\|_1 \|v\|_1$$

$$\leq \max\left\{ \frac{\delta_1}{2\mu} \max\{1, \rho^2\}, 2\mu \delta_2 \right\} \left[\|\tau\|_0 + \|v\|_1 \right] \left[\|\xi\|_0 + \|w\|_1 \right]$$

D'où,

$$|E_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})| \leq \max\left\{ \frac{\delta_1}{2\mu} \max\{1, \rho^2\}, 2\mu \delta_2 \right\} \left[\|\tau\|_0 + \|v\|_1 \right] \left[\|\xi\|_0 + \|w\|_1 \right] \quad (4-7)$$

Ainsi l'hypothèse (H1) est satisfaite pour:

$$C_1 = \max\left\{ \frac{\delta_1}{2\mu} \max\{1, \rho^2\}, 2\mu \delta_2 \right\} \quad (4-8)$$

(2°) - Vérifions maintenant l'hypothèse (H2). On a:

$$E_h(\{\tau, 0\}; \{\tau, 0\}) = \frac{\delta_1}{2\mu} \|\tau\|_0^2 - \frac{1-\rho}{n} (\text{tr } \tau) \cdot \mathbb{I}_0^2$$

Décomposons τ comme suit:

$$\tau = s - q \cdot \mathbb{I} \quad \text{avec } q = -\frac{1}{n} \text{tr } \tau \quad \text{et } \text{tr } s = 0 \quad (4-9)$$

En substituant dans la définition de $E_h(\{\dots\}; \{\dots\})$, il vient:

$$\begin{aligned} E_h(\{\tau, 0\}; \{\tau, 0\}) &= \frac{\delta_1}{2\mu} \|\tau\|_0^2 - \frac{1-\rho}{n} (\text{tr } \tau) \cdot \mathbb{I}_0^2 = \frac{\delta_1}{2\mu} \left[\|s\|_0^2 + \rho^2 \|q \cdot \mathbb{I}\|_0^2 \right] \\ &\geq \frac{\delta_1}{2\mu} \min\{1, \rho^2\} \left[\|s\|_0^2 + \|q \cdot \mathbb{I}\|_0^2 \right] \\ &\geq \frac{\delta_1}{2\mu} \min\{1, \rho^2\} \|\tau\|_0^2 \end{aligned}$$

D'où,

$$E_h(\{\tau, 0\}; \{\tau, 0\}) \geq \frac{\delta_1}{2\mu} \min\{1, \rho^2\} \|\tau\|_0^2 \quad (4-10)$$

i.e. l'hypothèse (H2) est satisfaite pour:

$$\beta = \frac{\delta_1}{2\mu} \min\{1, \rho^2\} \quad (4-11)$$

(3) - Il reste à vérifier l'hypothèse (H3). Il vient:

$$\begin{aligned} E_h((-q.I, v); (-q.I, -v)) &= \frac{\delta_1}{2\mu} \|\rho q.I\|_0^2 + 2\mu \delta_2 \|\varepsilon(v)\|_0^2 \\ &\geq \frac{\delta_1}{2\mu} \rho^2 \|q.I\|_0^2 + 2\mu \delta_2 C_0 \|v\|_1^2 \\ &\geq \min\left\{ \frac{\delta_1}{2\mu} \rho^2, 2\mu \delta_2 C_0 \right\} \left[\|v\|_1^2 + \|q.I\|_0^2 \right] \\ &\geq \frac{1}{2} \min\left\{ \frac{\delta_1}{2\mu} \rho^2, 2\mu \delta_2 C_0 \right\} \left[\|v\|_1 + \|q.I\|_0 \right]^2. \end{aligned}$$

D'où,

$$E_h((-q.I, v); (-q.I, -v)) \geq \theta \left[\|v\|_1 + \|q.I\|_0 \right]^2 \quad (4-12)$$

avec,

$$\theta = \frac{1}{2} \min\left\{ \frac{\delta_1}{2\mu} \rho^2, 2\mu \delta_2 C_0 \right\} \quad (4-13)$$

(4) - En choisissant,

$$\delta_1 = \frac{1}{2 \left[\max\{1, \rho^2\} - \min\{1, \rho^2\} \right]} \quad (4-14)$$

et

$$\delta_2 = \frac{1}{8\mu^2} \left[\delta_1 \min\{1, \rho^2\} + 1 \right] \quad (4-15)$$

on obtient,

$$\beta > C_1 - \frac{1}{2\mu} \quad \text{et} \quad \theta > C_1 - \frac{\rho}{2\mu}.$$

Alors, la condition (3-6) est ainsi vérifiée.

Finalement, (H1), (H2), (H3) et la condition (3-6) sont toutes vérifiées. D'après le théorème 3-4, il existe une solution unique $(\sigma_h, u_h) \in W_h \times V_h$ du problème (PS).

4-2 TECHNIQUE DE STABILISATION N° 2

On définit sur $(W_h \times V_h)^2$, une forme bilinéaire symétrique $E_h(\{\dots\}; \{\dots\})$ par:

$$E_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) = \frac{\delta_1}{2\mu} \left[(\xi; \tau) + \frac{(1-\rho)^2}{n} (\text{tr } \xi, \text{tr } \tau) \right] + 2\mu \delta_1 (\varepsilon(w), \varepsilon(v)) \\ + \delta_2 \left[\left(\tau - \frac{1-\rho}{n} (\text{tr } \tau) \cdot I, \varepsilon(w) \right) + \left(\xi - \frac{1-\rho}{n} (\text{tr } \xi) \cdot I, \varepsilon(v) \right) \right] \\ \forall (\xi, w), (\tau, v) \in W_h \times V_h \quad (4-16)$$

où $\delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$ sont des constantes qu'on déterminera convenablement par la suite.

On définit la forme bilinéaire généralisée $B_h(\{\dots\}; \{\dots\})$ sur $(W_h \times V_h)^2$ comme dans (4-4).

L'existence et l'unicité de la solution du problème (PS) dépendent de la satisfaction des hypothèses du Théorème 3-2 ou du Théorème 3-3.

(A) Commençons par la vérification des hypothèses du Théorème 3-2.

(1) - (H1) peut être immédiatement vérifiée, en utilisant la formule de CAUCHY-SCHWARTZ. En effet,

$$|E_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})| \leq \frac{\delta_1}{2\mu} \left[\|\xi\|_0 \|\tau\|_0 + \frac{(1-\rho)^2}{n} \|\text{tr } \xi\|_0 \|\text{tr } \tau\|_0 \right] + \\ + 2\mu \delta_1 \|\varepsilon(w)\|_0 \|\varepsilon(v)\|_0 + \delta_2 \left\| \tau - \frac{1-\rho}{n} (\text{tr } \tau) \cdot I \right\|_0 \|\varepsilon(w)\|_0 + \\ + \delta_2 \left\| \xi - \frac{1-\rho}{n} (\text{tr } \xi) \cdot I \right\|_0 \|\varepsilon(v)\|_0 \\ = \frac{\delta_1}{2\mu} \left[\|\xi\|_0 \|\tau\|_0 + (1-\rho)^2 \|q \cdot I\|_0 \|\tau\|_0 \right] + 2\mu \delta_1 \|w\|_1 \|v\|_1 + \\ + \delta_2 \max\{1, \rho\} \|\tau\|_0 \|w\|_1 + \delta_2 \max\{1, \rho\} \|\xi\|_0 \|v\|_1$$

$$\leq \frac{\delta_1}{2\mu} \left[1 + (1-\rho)^2 \right] \|\xi\|_0 \|\tau\|_0 + 2\mu \delta_1 \|\mathbf{w}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1 + \delta_2 \max\{1, \rho\} \|\tau\|_0 \|\mathbf{w}\|_1 + \delta_2 \max\{1, \rho\} \|\xi\|_0 \|\mathbf{v}\|_1$$

$$\leq \max \left\{ \frac{\delta_1}{2\mu} (\rho^2 - 2\rho + 2), 2\mu \delta_1, \delta_2 \max\{1, \rho\} \right\} \left[\|\xi\|_0 + \|\mathbf{w}\|_1 \right] \left[\|\tau\|_0 + \|\mathbf{v}\|_1 \right]$$

Où,

$$|E_h(\{\xi, \mathbf{w}\}; \{\tau, \mathbf{v}\})| \leq C_1 \left[\|\xi\|_0 + \|\mathbf{w}\|_1 \right] \left[\|\tau\|_0 + \|\mathbf{v}\|_1 \right] \quad (4-17)$$

avec

$$C_1 = \max \left\{ \frac{\delta_1}{2\mu} (\rho^2 - 2\rho + 2), 2\mu \delta_1, \delta_2 \max\{1, \rho\} \right\} \quad (4-18)$$

(2) - Vérifions, maintenant l'hypothèse (H4). On a :

$$\begin{aligned} E_h(\{\xi, \mathbf{w}\}; \{\xi, \mathbf{w}\}) &= \frac{\delta_1}{2\mu} \left[\|\xi\|_0^2 + \frac{(1-\rho)^2}{n} \|\text{tr } \xi\|_0^2 \right] + 2\mu \delta_1 \|\varepsilon(\mathbf{w})\|_0^2 + \\ &\quad + 2\delta_2 \left(\xi - \frac{1-\rho}{n} (\text{tr } \xi) \cdot \mathbf{I} \right) \cdot \varepsilon(\mathbf{w}) \\ &\geq \frac{\delta_1}{2\mu} \left[\|\xi\|_0^2 + \frac{(1-\rho)^2}{n} \|\text{tr } \xi\|_0^2 \right] + 2\mu \delta_1 C_0 \|\mathbf{w}\|_1^2 - \\ &\quad - 2\delta_2 \left\| \xi - \frac{1-\rho}{n} (\text{tr } \xi) \cdot \mathbf{I} \right\|_0 \|\mathbf{w}\|_1 \\ &\geq \frac{\delta_1}{2\mu} \left[\|\xi\|_0^2 + \frac{(1-\rho)^2}{n} \|\text{tr } \xi\|_0^2 \right] + 2\mu \delta_1 C_0 \|\mathbf{w}\|_1^2 - \\ &\quad - 2\delta_2 \max\{1, \rho\} \|\xi\|_0 \|\mathbf{w}\|_1 \quad (4-19) \end{aligned}$$

Evidemment,

$$2\|\xi\|_0 \|\mathbf{w}\|_1 \leq \left[\|\xi\|_0^2 + \|\mathbf{w}\|_1^2 \right]$$

et l'inégalité (4-19) devient alors

$$E_n(\{\xi, w\}; \{\xi, w\}) \geq \left[\frac{\delta_1}{2\mu} - 2\delta_2 \max\{1, \rho\} \right] \|\xi\|_0^2 + \frac{\delta_1(1-\rho)^2}{2\mu n} \|\text{tr } \xi\|_0^2 + \\ + \left[2\mu \delta_1 C_0 - 2\delta_2 \max\{1, \rho\} \right] \|w\|_1^2$$

En décomposons ξ comme suit:

$$\xi = s - q \cdot I \quad \text{où} \quad q = -\frac{1}{n} \text{tr } \xi \quad \text{avec} \quad \text{tr } s = 0$$

on obtient,

$$E_n(\{\xi, w\}; \{\xi, w\}) \geq \left[\frac{\delta_1}{2\mu} - 2\delta_2 \max\{1, \rho\} \right] \left[\|s\|_0^2 + \|q \cdot I\|_0^2 \right] + \\ + \frac{\delta_1(1-\rho)^2}{2\mu} \|q \cdot I\|_0^2 + \left[2\mu \delta_1 C_0 - 2\delta_2 \max\{1, \rho\} \right] \|w\|_1^2$$

$$E_n(\{\xi, w\}; \{\xi, w\}) \geq \left[\frac{\delta_1}{2\mu} - 2\delta_2 \max\{1, \rho\} \right] \|\xi\|_0^2 + \\ + \left[2\mu \delta_1 C_0 - 2\delta_2 \max\{1, \rho\} \right] \|w\|_1^2$$

On doit choisir δ_1 et δ_2 tels que:

$$\begin{cases} \frac{\delta_1}{2\mu} - 2\delta_2 \max\{1, \rho\} > 0. \\ 2\mu \delta_1 C_0 - 2\delta_2 \max\{1, \rho\} > 0 \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} \delta_2 < \frac{\delta_1}{4\mu \max\{1, \rho\}} \\ \delta_2 < \frac{\delta_1 (2\mu C_0)}{2 \max\{1, \rho\}} \end{cases}$$

D'où,

$$\delta_2 < \frac{\delta_1}{2 \max\{1, \rho\}} \min\left\{ \frac{1}{2\mu}, 2\mu C_0 \right\} \quad (4-20)$$

Par conséquent, en posant

$$\delta_2 = \frac{\delta_1}{4 \max\{1, \rho\}} \min\left\{\frac{1}{2\mu}, 2\mu C_0\right\} \quad (4-21)$$

on aura:

$$\begin{aligned} E_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w\}) &\geq \left[\frac{\delta_1}{2\mu} - \frac{\delta_1}{2} \min\left\{\frac{1}{2\mu}, 2\mu C_0\right\} \right] \|\xi\|_0^2 + \\ &\quad + \left[2\mu \delta_1 C_0 - \frac{\delta_1}{2} \min\left\{\frac{1}{2\mu}, 2\mu C_0\right\} \right] \|w\|_1^2 \\ &\geq \frac{\delta_1}{2\mu} \|\xi\|_0^2 + \mu \delta_1 C_0 \|w\|_1^2 \\ &\geq \delta_1 \min\left\{\frac{1}{2\mu}, \mu C_0\right\} \left[\|\xi\|_0^2 + \|w\|_1^2 \right] \end{aligned}$$

D'où,

$$E_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w\}) \geq \theta' \left[\|\xi\|_0 + \|w\|_1 \right]^2 \quad (4-22)$$

avec

$$\theta' = \frac{\delta_1}{2} \min\left\{\frac{1}{2\mu}, \mu C_0\right\} \quad (4-23)$$

(3°) - Finalement, pour que la condition (3-18) soit vérifiée, on doit choisir δ_1 de telle manière que:

$$\theta' > \frac{1}{2} \quad (4-24)$$

i.e.:

$$\frac{\delta_1}{2} \min\left\{\frac{1}{2\mu}, \mu C_0\right\} > \frac{1}{2}$$

D'où,

$$\delta_1 > \frac{1}{\min\left\{\frac{1}{2\mu}, \mu C_0\right\}}$$

Par conséquent, on peut choisir

$$\delta_1 = \frac{2}{\min \left\{ \frac{1}{2\mu}, \mu C_0 \right\}} \quad (4-25)$$

En conclusion, (H1), (H4) et la condition (3-18) sont toutes vérifiées.

D'après le théorème 3-4, il existe donc une solution unique $(\sigma_h, u_h) \in W_h \times V_h$ du problème (PS).

(B) On peut appliquer le Théorème 3-3 sur le même exemple.

(1°) Premièrement, l'hypothèse (H1) est vérifiée d'après (4-19).

(2°) Il reste à vérifier l'hypothèse (H5). On a:

$$\begin{aligned} 2d(u, v) + E_h((u, v); (u, v)) &= -2(u(v), u) + \frac{\delta_1}{2\mu} \left[\|u\|_0^2 + \frac{(1-\rho)^2}{n} \|\text{tr } \tau\|_0^2 \right] + \\ &\quad + 2\mu \|\varepsilon(v)\|_0^2 + 2\delta_2 \left(\tau - \frac{1-\rho}{n} \text{tr } \tau, \varepsilon(v) \right) \\ &\geq -2 \|v\|_1 \|u\|_0 + \frac{\delta_1}{2\mu} \left[\|u\|_0^2 + \frac{(1-\rho)^2}{n} \|\text{tr } \tau\|_0^2 \right] + 2\mu \delta_1 C_0 \|v\|_1^2 - \\ &\quad - 2\delta_2 \left\| \tau - \frac{1-\rho}{n} \text{tr } \tau \right\|_0 \|v\|_1 \\ &\geq -2 \|v\|_1 \|\tau\|_0 + \frac{\delta_1}{2\mu} \|\tau\|_0^2 + 2\mu \delta_1 C_0 \|v\|_1^2 - 2\delta_2 \max\{1, \rho\} \|\tau\|_0 \|v\|_1 \\ &\geq \frac{\delta_1}{2\mu} \|\tau\|_0^2 + 2\mu \delta_1 C_0 \|v\|_1^2 - 2 \left[\delta_2 \max\{1, \rho\} + 1 \right] \|\tau\|_0 \|v\|_1 \\ &\geq \left[\frac{\delta_1}{2\mu} - \left[\delta_2 \max\{1, \rho\} + 1 \right] \right] \|\tau\|_0^2 + \left[2\mu \delta_1 C_0 - \left[\delta_2 \max\{1, \rho\} + 1 \right] \right] \|v\|_1^2 \end{aligned}$$

On doit choisir δ_1 et δ_2 tels que:

$$\begin{cases} \delta_1 < \frac{\delta_2 \max\{1, \rho\} + 1}{2\mu C_0} \\ \delta_1 < [\delta_2 \max\{1, \rho\} + 1](2\mu) \end{cases}$$

i.e.

$$\delta_2 \max\{1, \rho\} + 1 < \delta_1 \min\left\{\frac{1}{2\mu}, 2\mu C_0\right\}$$

D'où,

$$\delta_1 > \frac{\delta_2 \max\{1, \rho\} + 1}{\min\left\{\frac{1}{2\mu}, 2\mu C_0\right\}} \quad (4-26)$$

Si on prend, par exemple,

$$\delta_1 = \frac{2 \delta_2 \max\{1, \rho\} + 1}{\min\left\{\frac{1}{2\mu}, 2\mu C_0\right\}} \quad (4-27)$$

On obtiendra

$$2d(\tau, v) + E_h(\{\tau, v\}; \{\tau, v\}) \geq [\delta_2 \max\{1, \rho\} + 1] [\|\tau\|_0^2 + \|v\|_1^2]$$

D'où,

$$2d(\tau, v) + E_h(\{\tau, v\}; \{\tau, v\}) \geq \theta^* [\|\tau\|_0 + \|v\|_1]^2 \quad (4-28)$$

avec

$$\theta^* = [\delta_2 \max\{1, \rho\} + 1] \quad (4-29)$$

Finalement, (H1) et (H5) sont vérifiées. D'après le Théorème 3-4, il existe donc une solution unique $(\sigma_h, u_h) \in W_h \times V_h$ du problème (PS).

REMARQUE 4-1

Du point de vue pratique, l'approximation la plus adéquate est celle qui permet d'obtenir plus de précision pour les valeurs de h . et ce, en se basant sur une approximation linéaire ou quadratique pour le déplacement.

REMARQUE 4-2

Les exemples qui ont été construite ne satisfont pas le test de consistance. Ainsi, une erreur de consistance apparaîtra dans le membre droite de l'estimation d'erreur.

CONCLUSION GENERALE

On a présenté dans ce travail une nouvelle méthodologie de la stabilité des méthodes mixtes des éléments finis pour la résolution du problème d'ELASTICITE. Cette méthodologie consiste à modifier la formulation variationnelle du problème considéré en additionnant des termes de type de pénalisation tout en gardant les mêmes espaces d'approximations, en particulier, celles qui étaient non fiables dans le cadre de la méthode de Galerkin. Des conditions suffisantes sur ces termes permettent d'utiliser une classe plus large de méthodes mixtes des éléments finis, et de plus elles sont réalisables et rétablissent la stabilité et la convergence sans toutefois dérangé la consistance .

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R.ADAMS, Sobolev spaces, Academic press, New York (1975)
- [2] D.N.ARNOLD, F.BREZZI and M.FORTIN, A stable finite element for the Stokes equations, *Calcolo* 23(1984) 337-344.
- [3] I.BABUSKA, Error bounds for finite element method , *Numerische Mathematik* 16(1971) 322-333.
- [4] M.BERCOVIER and O.PIRONNEAU, Error estimates for finite element method solution of the Stokes problem in the primitive variables, *Numerische Mathematik* 33(1979) 211-224
- [5] J.M.BOLAND and R.A.NICOLAIDES, Stability of finite elements under divergence constraints, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 20(1983) 722-731.
- [6] J.M.BOLAND and R.A.NICOLAIDES, Stable and semistable low order finite element for viscous flows, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 22(1985) 474-492.
- [7] J.M.BOLAND and R.A.NICOLAIDES, On the stability of bilinear-constant velocity-pressure finite elements, *Numerische Mathematik* 44(1984) 219-222.
- [8] H.BREZZIS, *Analyse fonctionnelle - Théorie et application*

mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson, Paris,
(1983).

- [9] F.BREZZI, On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems, R.A.I.R.O. Analyse Numérique 8(1974) 129-151.

- [10] F.BREZZI and J.PITKARANTA, On the stabilisation of finite element approximations of the Stokes problem, in: W. Hackbuch, ed, Efficient solutions of Elliptic systems, Notes on Numerical Fluid Mechanics, Braunschweig, Vieweg (1984).

- [11] P.G.CIARLET, The finite element method for elliptic problems, North-Holland, Amsterdam (1978).

- [12] PH.CLEMENT, Approximation by finite element functions using local regularisation, R.A.I.R.O. Analyse numerique 8(1975) 77-84.

- [13] M.CROUZEIX, Analyse numérique des problèmes aux limites elliptiques, Cours de D.E.A Analyse Numérique (79-80), Laboratoire d'Analyse. Numerique, Université de P.M.CURIE, PARIS.

- [14] L.P.FRANCA, New mixed finite element methods, Ph.D Thesis Division of Applied Mechanics Stanford University. Stanford

California (1987).

- [15] L.P.FRANCA and T.J.R.HUGHES, Two classes of mixed finite element methods, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 68(1988).
- [16] L.P.FRANCA, T.J.R.HUGHES, A.F.D.LOULA and I.MIRANDA, A new family of stable elements for nearly incompressible elasticity based on a mixed Petrov-Galerkin finite element method, presented at the conference on the Impact of Mathematical Analysis on the solution of Engineering problems, University of Maryland, (1986).
- [17] L.P.FRANCA, T.J.R.HUGHES, A.F.D.LOULA, I.MIRANDA, A new family of stable elements for nearly incompressible Elasticity, Numerische Mathematik 53(1988) 123-141.
- [18] V.GIRAULT and P.A.RAVIART, Finite element methods for Navier-Stokes equations, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1986).
- [19] M.D.GUNZBURGER, Mathematical aspects of finite element methods for incompressible viscous flows, Academic Press, London (1989).
- [20] E.HELLINGER, Der allgemeine ansatz der mechanik der kontinua, Encyclopadie math wiss 4(1914) 602-694.

- [21] C.JOHNSON and J.PITKARANTA, Analysis of some mixed finite element methods related to reduced integration, *Mathematics of Computation* 38(1982) 375-400.
- [22] A.F.D.LOULA, L.P.FRANCA, T.J.R.HUGHES and I.MIRANDA, Stability, convergence and accuracy of a new finite element method of the circular arch problem, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 63(1987) 281-303.
- [23] J.T.ODEN and O.P.JACQUOTTE, Stability of some mixed finite element for Stokesian flows, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 43(1984) 231-247.
- [24] P.A.RAVIART and THOMAS, Introduction d'analyse numérique des equations aux dérivées partielles, *Masson* (1983)
- [25] E.REISSNER, On a variational theorem in Elasticity, *Journal of mathematics physics* 29(1950) 90-95.
- [26] R.L.SANI, P.M.GRESHO, LEE and D.F.GRIFFITHS, The cause and cure (?) of the spurious pressures generated by certain finite element method solutions of the incompressible Navier-Stokes equations, *International Journal of Numerical Methods in Fluids* Part 1, 1(1981) 17-43; Part 2, 1(1981) 171-204.

- [27] D.J.SILVESTER and R.W.THATCHER, The effect of the stability of mixed finite element approximations on the accuracy and rate of convergence of solution when solving incompressible flow problems, International Journal of Numerical Methods in Fluids 6(1986) 841-853.
- [28] R.STENBERG, Analysis of mixed finite element methods for the Stokes problem: A unified approach, Mathematics of Computation 42(1984) 9-23.
- [29] R.STENBERG, A technique for analysing finite element methods for viscous incompressible flow, Departement of Mathematics, University of Maryland (1989).
- [30] R.STENBERG, Error analysis of some mixed finite elements for the Stokes problem, Mathematics of Computation (1989).
- [31] R.STENBERG and L.FRANCA, Error analysis of some Galerkin-least-squares methods for the elasticity equations Unité de Recherche I.N.R.I.A -Rocquencourt 1054(1989).
- [32] R.TEMAM, Navier-Stokes equations, North-Holland, Amsterdam (1984).
- [33] R.VERFUTH, Error estimates for mixed finite element approximation of the Stokes problem, R.A.I.R.O. Analyse Numerique 18(1984) 175-182.

- [34] M.ZAAMA, Techniques de stabilisation des méthodes mixtes des éléments finis, Thèse de Magister, Université de Constantine, (1995).

