RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ FRÈRES MENTOURI CONSTANTINE 1
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

THESE

Soumise pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT en Sciences

Option : **Analyse**

Thème :

Contributions aux problèmes variationnels et aux inclusions différentielles dans les espaces de Banach

Présentée par :

Djalal BOUNEKHEL

Devant le Jury :

Président :	**M. DEGHDAK**	Pr.	Uni. Frères Mentouri (Constantine)
Rapporteur :	**N. KECHKAR**	Pr.	Uni. Frères Mentouri (Constantine)
Examinateur :	**L. GUEDDA**	Pr.	Uni. Ibn Khaldoun (Tiaret)
Examinateur :	**A. AIBECHE**	Pr.	Uni. Ferhat Abbas (Sétif)
Membre Invité :	**M. BOUNKHEL**	Pr.	King Saud University (Riyadh, KSA)

Date de soutenance : 03/11/2021

Année universitaire : 2020-2021

Remerciements

Tout au début, je tiens à signaler que sans l'aide de bon Dieu, le tout puissant, cette thèse n'aurait jamais pu être achevée.

J'aimerais remercier mon directeur de thèse, Prof. **N. Kechkar**, pour m'avoir appris à être plus autonome tout au long de ce travail de recherche. qu'il trouve ici toute ma reconnaissance.

J'adresse mes vifs remerciements à tous les membres du jury.

L'honneur pour moi est immense que Prof. **M. Deghdak** ait accepté de présider le jury. Je tiens à lui adresser toute ma reconnaissance.

Je tiens à remercier le Prof. **A. Aibeche** et le Prof. **L. Guedda** d'avoir accepter d'être examinateurs de ma thèse.

Il m'est très honorable de témoigner ma reconnaissance au Prof. **M. Bounkhel** qui a guidé mes premiers pas dans la recherche et qui a accepté d'être membre invité de ma thèse.

Mes remerciements vont aussi à ma famille et tous mes amis.

Résumé.

La thèse se compose de trois chapitres. Dans le premier, nous énonçons toutes les définitions et concepts nécessaires et quelques résultats préliminaires. Dans le chapitre 2, nous étudions l'existence de solutions pour des problèmes quasi-variationnels non convexes dans des espaces de Banach réflexifs lisses. Le troisième chapitre est consacré à l'étude de l'existence de solutions pour les processus de rafle non convexe dépendants de l'état dans des espaces de Banach réflexifs lisses. À la fin de la thèse, nous énonçons une conclusion de tous les résultats obtenus avec une liste de quelques problèmes ouverts qui peuvent intéresser les chercheurs dans le domaine.

Abstract.

The thesis consists in three chapters. In the first one, we state all needed definitions and concepts and some preliminary results. In Chapter 2, we study the existence of solutions for nonconvex quasi-variational problems in smooth reflexive Banach spaces. The third chapter is devoted to the study of existence of solutions for nonconvex state dependent sweeping processes in smooth reflexive Banach spaces. At the end of the thesis, we state a conclusion of all obtained results together with a list of some open problems that may interest the researchers in the field.

ملخص:

تشتمل الرسالة على ثلاثة فصول. في الفصل الأول تم ذكر جميع التعاريف والمفاهيم الأساسية والنتائج التمهيدية المهمة التي نحتاجها في الرسالة. في الفصل الثاني: تمت دراسة وجود الحلول للمسائل التغييرية غير المحدبة في فضاءات بناخ انعكاسية وملساء. في الفصل الثالث: تم إثبات وجود حلول متصلة مطلقا لإحتواءات تفاضلية غير محدبة من الدرجة الأولى من نوع sweeping process في فضاءات بناخ انعكاسية وملساء. في نهاية الرسالة تم عرض ملخص النتائج المثبتة وبعض نقاط البحث التي قد تهم الباحثين في مجال التخصص.

Table des Matières

Introduction

Dans cette thèse on s'intéresse à l'extension des résultats d'existence des solutions des inégalités variationnelles non convexes (Chapitre 2) et des inclusions différentielles non convexes du type processus de rafle (Chapitre 3), du cas des espaces de Hilbert au cas des espaces de Banach lisses. Dans le premier chapitre, on rassemble les notations et les concepts communs entre les deux chapitres formant les résultats principaux de notre thèse. Dans le deuxième chapitre, nous allons attaquer le cas des inégalités variationnelles et quasi-variationnelles non convexes dans les espaces de Banach réflexifs et lisses. Dans ce chapitre on propose le problème quasi-variationnel non convexe suivant:

$$\text{Trouver } \bar{x} \in C(\bar{x}) \quad \text{tel que} \quad [-\partial^\pi F(\bar{x}, \cdot)(\bar{x})] \cap N^\pi(C(\bar{x}); \bar{x}) \neq \emptyset, \quad (PQVN[C, F])$$

où ∂^π (resp. N^π) désigne le sous-différentiel V-proximal (resp. le cône normal V-proximal) introduit et étudié dans [11].

Ce problème est l'extension appropriée au cas non convexe dans les espaces de Banach de l'inégalité quasi-variationnele convexe suivante:

$$\text{Trouver } \bar{x} \in C(\bar{x}) \quad \text{tel que} \quad F(\bar{x}, x) \geq 0 \quad \forall x \in C(\bar{x}). \qquad (IQ[C, F]).$$

Notre objectif dans ce chapitre est de prouver la convergence des algorithmes que nous proposons vers des solutions de notre problème quasi-variationnel non convexe proposé. Les résultats de ce chapitre font l'objet d'un article qui a été publié dans Journal of Functions Spaces (JFS) (voir [7]). Nos résultats de ce chapitre généralisent plusieurs résultats du cas convexe au cas nonconvexe et du cas des espaces de Hilbert au cas des espaces de Banach lisses. Nous citons entre autres les références suivantes: [4, 6, 9, 10, 22, 23, 24, 25, 27].

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse à l'existence des solutions des inclusions différentielles non convexes (type processus de rafle) dans les espaces de Banach réflexifs et lisses. Nous proposons le problème suivant:

Trouver $u : [0,T] \to X$ telle que $J(u) : [0,T] \to X^*$ est absolument continue et

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt}J(u(t)) & \in & N^C(C(t,u(t));u(t)) \text{ p.p sur } [0,T]; \\ u(t) & \in & C(t,u(t)), \quad \forall t \in [0,T], \end{cases} \qquad (SDNSP)$$

où $J : X \to X^*$ est l'application de dualité normalisée définie de X dans X^*.

Clairement, le problème (SDNSP) coincide avec le problème de rafle convexe et non convexe introduits et étudiés dans les cas des espaces de Hilbert dans lequel l'application J est l'application identité. L'étude de l'existence des solutions de (SDNSP) dans les espaces de Hilbert a été étudiée dans pulsieurs papiers (voir par exemple Chapter 3 dans [4] et les reférences là-dedans) et l'existence des solutions dans le cas convexe dans les espaces de Banach a été prouvé dans [13, 12]. Notre résultat principal de ce chapitre est l'existence d'une solution absolument continue de (SDNSP) sous certaines conditions naturelles sur la multifonction C et l'espace X. Les résultats de ce chapitre font l'objet d'un deuxième article publié dans le journal portugais Portugaliea Mathematica [8]. Nos résultats de ce troisième chapitre généralisent des résultats d'existence de solutions du processus de rafle du cas convexe au cas nonconvexe et du cas des espaces de Hilbert au cas des espaces de Banach (voir les références suivantes: [4, 12, 13, 14, 16]).

1 Préliminaires sur les espaces de Banach

Pour préparer la plateforme de travail de notre étude on a besoin de rappeler, dans ce premier chapitre, tous les concepts et les outils de base communs entre les deux autres chapitres et qui seront utilisées tout au long du reste de la thèse. Soit X un espace de Banach et X^* son dual topologique. L'espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$ est dit *lisse* pourvu que la limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t}$$

existe pour tout $x, y \in X$ satisfaisant $\|x\| = \|y\| = 1$. Dans ce cas, la norme de X est Gâteaux differentiable (voir [19]). Nous notons par d_S la fonction distance usuelle associée à un ensemble non vide fermé S, c-à-d, $d_S(x) := \inf_{s\in S} \|x - s\|$. L'application de dualité normalisée $J : X \rightrightarrows X^*$ est définie par

$$J(x) = \{j(x) \in X^* : \langle j(x), x\rangle = \|x\|^2 = \|j(x)\|^2\}.$$

Similairement, on définit sur X^* l'application de dualité normalisée $J^* : X^* \rightrightarrows X$. Plusieurs propriétés de cette application de dualité ont été prouvées dans [2]. Pour plus de détails et de résultats sur J et J^*, nous renvoyons le lecteur à [28, 29]. Citons ici quelques propriétés de J:

(J_1) Pour tout $x \in X$, $J(x)$ est non vide;

(J_2) Pour tout $x \in X$ et tout réel positif α, $J(\alpha x) = \alpha J(x)$;

(J_3) Si X^* est strictement convexe, alors la multifonction J est univoque;

(J_4) J est continue dans les espaces de Banach lisses;

(J_5) Si X est strictement convexe, alors J est injective;

(J_6) J est l'application identité quand l'espace X est un espace de Hilbert.

Rappelons aussi la classe des espaces de Banach qui sera utilisée dans ce travail. On dit qu'un espace de Banach X est (voir par exemple [11, 19]) un espace p-uniformément convexe (resp. q-uniformément lisse) s'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\delta_X(\epsilon) \geq c\epsilon^p \text{ (resp. } \rho_X(t) \leq ct^q),$$

avec δ_X et ρ_X sont définies respectivement par

$$\delta_X(\epsilon) = \inf \left\{ 1 - \|\frac{x+y}{2}\| : \|x\| = \|y\| = 1 \text{ et } \|x-y\| = \epsilon \right\}, 0 \leq \epsilon \leq 2,$$

et

$$\rho_X(t) = \sup \left\{ \frac{1}{2}(\|x+y\| + \|x-y\|) - 1 : \|x\| = 1, \|y\| = t \right\}, t > 0.$$

Notons que les constantes p et q dans la définition précédente toujours vérifient $p \geq 2$ et $q \in (1, 2]$. On a aussi besoin de rappeler de [11] le concept de *sous-différentiel V-proximal* $\partial^\pi f(x)$. Un élément $x^* \in X^*$ appartient à $\partial^\pi f(x)$ s'il existe $\sigma > 0$ tel que

$$\langle x^*, x' - x \rangle \leq f(x') - f(x) + \sigma V(J(x), x')), \tag{1.0.1}$$

pour tout x' très proche de x, avec $V : X^* \times X \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle définie par

$$V(x^*, x) = \|x^*\|^2 - 2\langle x^*, x \rangle + \|x\|^2, \text{ pour tout } x^* \in X^* \text{ et } x \in X. \tag{1.0.2}$$

Pour un ensemble fermé non vide S de X et $\bar{x} \in S$, les auteurs dans [11] ont introduit le concept de *cône normal V-proximal* $N^\pi(S; \bar{x})$ par $N^\pi(S; \bar{x}) = \partial^\pi \psi_S(\bar{x})$, avec ψ_S désignant la fonction indicatrice associée à S, i.e., $\psi_S(x) = 0$ si $x \in S$ et $\psi_S(x) = +\infty$ si $x \notin S$. Rappelons respectivement les concepts de sous-différentiel de Fréchet limite ∂^{LF} et de sous-différentiel V-proximal limite $\partial^{L\pi}$ (voir [5]):

$$\partial^{L\pi} f(x) = \limsup_{x' \to x} \partial^\pi f(x') := \{w - \lim_n x_n^* : x_n^* \in \partial^\pi f(x_n) \text{ avec } x_n \to^f x\},$$

et

$$\partial^{LF} f(x) = \limsup_{x' \to x} \partial^F f(x') := \{w - \lim_n x_n^* : x_n^* \in \partial^F f(x_n) \text{ avec } x_n \to^f x\},$$

où $x_n \to^f x$ veut dire $x_n \to x$ avec $f(x_n) \to f(x)$ et

$$\partial^F f(x) = \{x^* \in X^* : \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \langle x^*, x' - x \rangle \leq f(x') - f(x) + \epsilon \|x' - x\|, \forall x' \in x + \delta \mathbb{B}.$$

De la même facon, le cône normal de Fréchet limite est défini par

$$N^{LF}(S; x) = \limsup_{x' \to x} N^F(S; x') := \{w - \lim_n x_n^* : x_n^* \in N^F(S; x_n) \text{ avec } x_n \to^S x\},$$

où $x_n \to^S x$ désigne $x_n \to x$ avec $x_n \in S$ et $N^F(S; x)$ désigne le cône normal de Fréchet qui est défini par $N^F(S; \bar{x}) = \partial^F \psi_S(\bar{x})$.

Tous ces objets non convexes coincident avec leurs analogues définis dans l'analyse convexe chaque fois que les données sont convexes comme le montre la proposition suivante (voir [11]).

Proposition 1.0.1. *Soit X un espace de Banach réflexif.*

1. *Si $f : X \to \mathbb{R} \cup +\infty$ est une fonction convexe s.c.i et $\bar{x} \in X$ avec $f(\bar{x}) < \infty$, alors*

$$\begin{aligned} \partial^\pi f(x) &= \partial^F f(x) = \partial^{LF} f(x) = \partial^{L\pi} f(x) \\ &= \partial^{Con.} f(x) := \{x^* \in X^* : \langle x^*; x - \bar{x} \rangle \leq f(x) - f(\bar{x}), \forall x \in X\}. \end{aligned}$$

2. *Si S est un ensemble convexe fermé de X et $\bar{x} \in S$, alors*

$$\begin{aligned} N^\pi(S; \bar{x}) &= N^F(S; \bar{x}) = N^{LF}(S; \bar{x}) = N^{L\pi}(S; \bar{x}) \\ &= N^{Con.}(S; \bar{x}) := \{x^* \in X^* : \langle x^*; x - \bar{x} \rangle \leq 0, \forall x \in S\}. \end{aligned}$$

Dans notre étude on a besoin du résultat suivant qui a été prouvé dans [5].

Théorème 1.0.2. *Soit X un espace de Banach q-uniformément lisse et p-uniformément convexe. Supposons que X admet une norme équivalente $\|\cdot\|$ telle que $\|\cdot\|^s$ (pour un $s \geq 2$) est C^2-differentiable sur $X \setminus \{0\}$ et soit V la fonctionnelle associée à cette norme $\|\cdot\|$.*

1. *Si $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, est une fonction s.c.i. en $\bar{x} \in dom\, f$, alors*

$$\partial^{L\pi} f(\bar{x}) = \partial^{FL} f(\bar{x}). \tag{1.0.3}$$

2. *Si S est un ensemble fermé non vide de X, alors*

$$N^{FL}(S; \bar{x}) = N^{L\pi}(S; \bar{x}).$$

Signalons que la classe des espaces qui vérifient les hypothèses du théorème précédent est très large et elle contient les espaces de Hilbert, les espaces L^p et les espaces de Sobolev $W^{p,m}$ avec $p \geq 2$ (voir Théorème 1.1 dans Section 5 dans [19]). Pour plus d'exemples et de discussions, nous renvoyons le lecteur à [19, 20].

Rappelons aussi la définition du cône normal proximal $N^P(S; \bar{x})$ et du cône normal de Clarke $N^C(S; \bar{x})$ (voir par exemple [4]).

Définition 1.0.1. Soit X un espace de Banach réflexif et lisse. Alors

$$N^P(S; \bar{x}) \;=\; \{x^* \in X^* : \exists \sigma > 0, \langle x^*, x - \bar{x} \rangle \leq \sigma \|x - \bar{x}\|^2, \forall x \in S\} \text{ et}$$

$$N^C(S; \bar{x}) \;=\; \overline{co}^w N^P(S; \bar{x}),$$

où $\overline{co}^w$ désigne la férméture faible de l'enveloppe convexe.

Les inclusions suivantes: $N^\pi(S; \bar{x}) \subset N^P(S; \bar{x}) \subset N^C(S; \bar{x})$ sont valides quand X est un espace de Banach 2-uniformément lisse (voir [15]).

En se basant sur la fonctionnelle V, l'ensemble $\pi_S(x^*)$ des projections généralisées de $x^* \in X^*$ sur S est défini comme suit (voir [1]).

Définition 1.0.2. Soit S un ensemble férmé non vide de X et soit $x^* \in X^*$. S'il existe un point $\bar{x} \in S$ satisfaisant

$$V(x^*, \bar{x}) = d_S^V(x^*) := \inf_{x \in S} V(x^*, x),$$

alors $\bar{x}$ est appelé *projection généralisée de x^* sur S*. L'ensemble de ces points est noté par $\pi_S(x^*)$. Quand l'espace X est nonreflexif $\pi_S(x^*)$ peut être vide pour certain $x^* \in X^*$ même quand S est fermé convexe (voir Exemple 1.4. dans [21]).

Dans [12], la définition géométrique équivalente du cône normal V-proximal est donnée par:

Définition 1.0.3. Soit X un espace de Banach reflexif et lisse. Le cône normal V-proximal à S en $\bar{x}$ peut aussi être défini par:

$$N^\pi(S; \bar{x}) = \{x^* \in X^* : \exists \alpha > 0, \quad \bar{x} \in \pi_S(J(\bar{x}) + \alpha x^*)\}.$$

Rappelons maintenant les deux concepts suivants de V-prox-régularité uniforme des fonctions et des ensembles (voir [13]).

Définition 1.0.4. Soit S un ensemble fermé non vide dans un espace de Banach réflexif X et soit $\bar{x} \in S$. L'ensemble S est dit *uniformément V-prox-régulier généralisé* relativement à une constante positive $r > 0$ si est seulement si pour tout $x \in S$ et pour tout élément non nul $x^* \in N^\pi(S; x)$ le point x est la projection généralisée de $Jx + r\frac{x^*}{\|x^*\|}$ sur S, c-à-d, $x \in \pi_S(Jx + r\frac{x^*}{\|x^*\|})$.

Exemple 1.0.3.

1. *Tout ensemble convexe fermé est uniformément V-prox-regulier généralisé relativement à tout $r > 0$;*

2. *L'ensemble $S := \mathbb{B} \cup (x_0 + \mathbb{B})$ (avec $\|x_0\| > 3$) est fermé non convexe qui est uniformément V-prox-regulier généralisé relativement à un certain nombre*

positif $r > 0$ *(pour la démonstration de cet exemple on renvoie le lecteur à [15]).*

Une définition analytique équivalente des ensembles uniformément V-prox-réguliers généralisés peut être donnée comme suit:

Définition 1.0.5. Un ensemble S est V-uniformément prox-régulier généralisé relativement à r si pour tout $x \in S$ et tout élément non nul $x^* \in N^\pi(S; x)$ on a

$$\langle \frac{x^*}{\|x^*\|}, x' - x\rangle \leq \frac{1}{2r} V(J(x), x')), \forall x' \in S. \tag{1.0.4}$$

Nous utilisons la convention $\frac{1}{r} = 0$ pour $r = +\infty$.

Evidemment, cette classe généralise la classe des ensembles uniformément prox-régulier ([18, 26]) du cas des espaces de Hilbert au cas des espaces de Banach lisses car on a toujours $V(J(x), x')) = \|x - x'\|^2$ quand X est un espace de Hilbert et aussi on a le cône normal V-proximal $N^\pi(S; x)$ coincide avec le cône normal proximal $N^P(S; x)$.

Définition 1.0.6. Soit X un espace de Banach réflexif lisse. Soit $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i. et soit $S \subset dom\, f := \{x \in X : f(x) < \infty\}$ un ensemble fermé non vide de X. Nous rappellons de [13] que f est dite uniformément V-prox-regulière sur S si pour tout $x \in S$ et tout $x^* \in \partial^\pi f(x)$ on a

$$\langle x^*, x' - x\rangle \leq f(x') - f(x) + \frac{1}{2r} V(J(x), x')), \forall x' \in S. \tag{1.0.5}$$

On dit que f est uniformément V-prox-régulière autour de $\bar{x} \in dom\, f$ si f est uniformément V-prox-régulière sur tout voisinage fermé de $\bar{x}$, c'est-à-dire, il existe un voisinage fermé $V_{\bar{x}}$ de $\bar{x}$ tel que $\forall x \in V_{\bar{x}}, \forall x^* \in \partial^\pi f(x)$ l'inégalitée (1.0.5) est vérifiée pour tout $x' \in V_{\bar{x}}$.

Citons l'exemple suivant des fonctions uniformément V-prox-régulières qui est extrait de [13]. Pour la preuve de cet exemple, on renvoie le lecteur à [13].

Exemple 1.0.4.

1. *Toute fonction propre convexe s.c.i. est uniformément V-prox-régulière sur tout ensemble fermé non vide S dans son domaine avec $r = +\infty$.*

2. *La fonction indicatrice ψ_S et la fonction distance d_S associées à un ensemble uniformément V-prox-régulier généralisé S sont uniformément V-prox-régulières sur S avec la même constante r.*

3. *Toute fonction f lower-C^2 sur un ensemble convexe fortement compact K de X est uniformément V-prox-régulière sur K avec $r \in (0, +\infty]$.*

Les deux lemmes suivants sont importants pour nos preuves dans Chapitre 2. Les preuves de ces deux lemmes sont données dans [11, 1] respectivement.

Lemme 1.0.5. *Soit X un espace de Banach p-uniformément convexe et q-uniformément lisse, et S un ensemble borné. Alors pour certains $\eta, \kappa > 0$ on a:*

$$\eta^{-1}\|x-y\|^p \leq V(J(x), y) \leq \kappa^{-1}\|x-y\|^q, \text{ pour tout } x, y \in S.$$

Lemme 1.0.6. *Si X est un espace de Banach uniformément convexe, alors l'inégalité*

$$V(J(x), y) \geq 8C^2\delta_X\left(\frac{\|x-y\|}{4C}\right)$$

est vérifiée pour tous x et y dans X, avec $C = \sqrt{\frac{\|x\|^2+\|y\|^2}{2}}$.

La proposition suivante établit une propriété très importante des ensembles uniformément V-prox-reguliers généralisés qui est un outil clé de la preuve du résultat principal du Chapitre 3. Pour plus de propriétés et charactérisations de cette classe d'ensembles, nous renvoyons le lecteur à [15].

Proposition 1.0.7. *Soit X un espace de Banach réflexif. Si S est uniformément V-prox-regulier généralisé relativement à un certain nombre positif $r > 0$, alors la*

propriété suivante est satisfaite:
Pour tout $x^* \in U_S^V(r) := \{x^* \in X^* : d_S^V(x^*) < r^2\}$*, la projection généralisée de* x^* *sur* S *existe, c-à-d,* $\pi_S(x^*) \neq \emptyset$.

Les résultats du lemme suivant sont prouvés dans [2, 14].

Lemme 1.0.8. *Soit* X *un espace de Banach* 2*-uniformément lisse et* q*-uniformément convexe. Pour tout* $R > 0$ *il existe* $\nu_R > 0$, φ_R, ν_R^*, $\beta_R > 0$ *(tous dépendants de* R *et de l'espace* X*) tels que*

1. $$\|J(x) - J(y)\| \leq \nu_R \|x - y\|, \text{ pour tout } \|x\| \leq R, \|y\| \leq R,$$

2. $$V(J(x); y) \leq \beta_R \|x - y\|^2, \text{ pour tout } \|x\| \leq R, \|y\| \leq R.$$

3. $$\|x - y\|^q \leq \varphi_R V(J(x); y), \text{ pour tout } \|x\| \leq R, \|y\| \leq R.$$

4. $$\|J^*(x^*) - J^*(y^*)\| \leq \nu_R^* \|x^* - y^*\|^{\frac{1}{q-1}}, \text{ pour tout } \|x^*\| \leq R, \|y^*\| \leq R.$$

La proposition suivante est prouvée dans [15].

Proposition 1.0.9. *Soit* X *un espace de Banach réflexif et soit* S *un ensemble fermé non vide de* X*. Supposons que* S *est borné i.e., (*$S \subset \alpha\mathbb{B}$ *pour un certain* $\alpha > 0$*). Si* S *est uniformément* V*-prox-regulier généralisé relativement à* $r > 0$*, alors pour tout* $x \in S$ *et tout élément non nul* $x^* \in N^\pi(S; x)$ *on a:*

$$\langle \frac{x^*}{\|x^*\|}; y - x \rangle \leq \frac{(r + 2\alpha)}{r} d_S(y) + \frac{1}{2r} V(Jx; y), \quad \forall y \in X.$$

Nous clôturons ce chapitre en listant quelques propriétés importantes de la fonctionnelle V qui seront nécessaires dans nos preuves, quand X est un espace de Banach réflexif lisse.

i) $V(x^*, x) \geq 0$;

ii) $(\|x^*\| - \|x\|)^2 \leq V(x^*, x) \leq (\|x^*\| + \|x\|)^2$;

iii) $V(J(x), x) = 0$;

iv) $V(x^*, x)$ est continue et V est convexe par rapport à x quand x^* est fixé et convexe par rapport à x^* quand x est fixé;

v) $V(x^*, x)$ est differentiable par rapport à x quand x^* est fixé;

vi) $\mathrm{grad}_x V(x^*, x) = 2(J(x) - x^*)$. Cette propriété est vraie dans les espaces de Banach uniformément convexe et uniformément lisse.

vii) $V(x^*, x) = 0$ si et seulement si $x^* = J(x)$.

2 Schémas itératifs pour les problèmes quasi-variationnels non convexes dans les espaces de Banach

Dans ce chapitre, on démontre l'extension des problèmes de quasi-équilibre du cas convexe au cas non convexe et du cas des espaces de Hilbert au cas des espaces de Banach. Le problème proposé est appelé *problème quasi-variationnel.* On étudie la convergence de quelques algorithmes vers des solutions du problèmes non convexes proposés dans les espaces de Banach.

2.1 Introduction

Soientt X un espace de Banach, X^* son dual topologique et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit de dualité. Soit $C : X \rightrightarrows X$ une multifonction à valeurs fermées non vides et soit $F : X \times X \to \mathbb{R}$ une bifonction satisfaisant $F(x,x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{Fix}(C) := \{x \in X : x \in C(x)\}$. Associons à la multifonction **convexe fermée** C et la bifonction **convexe** F, le problème de quasi-équilibre suivant:

$$\text{Trouver } \bar{x} \in C(\bar{x}) \quad \text{tel que} \quad F(\bar{x},x) \geq 0 \quad \forall x \in C(\bar{x}). \qquad (PQE[C,F])$$

Dans ce chapitre on propose l'extension du (PQE[C,F]) du cas convexe au cas non convexe dans les espaces de Banach. On associe à C et F le problème quasi-variationnel non convexe suivant:

$$\text{Trouver } \bar{x} \in C(\bar{x}) \quad \text{tel que} \quad [-\partial^{\pi} F(\bar{x}, \cdot)(\bar{x})] \cap N^{\pi}(C(\bar{x}); \bar{x}) \neq \emptyset, \quad (PQVN[C,F])$$

où ∂^{π} (resp. N^{π}) désigne le sous-différentiel V-proximal (resp. le cône normal V-proximal) introduit et étudié dans [11].

Il existe dans la littérature plusieurs problèmes de quasi-équilibre et inégalitées quasi-variationnelles qui peuvent être écrits sou la forme du problème quasi-variationnel non convexe proposé (PQVN[C,F]).

1. Si X est un espace de Hilbert, le problème proposé ($PQVN[C,F]$) devient

$$\text{Trouver } \bar{x} \in C(\bar{x}) \quad \text{tel que} \quad [-\partial^{P} F(\bar{x}, \cdot)(\bar{x})] \cap N^{P}(C(\bar{x}); \bar{x}) \neq \emptyset,$$

(où ∂^P et N^P sont le sous-différentiel proximal usuel et le cône normal proximal usuel dans les espaces de Hilbert). Ce problème a été introduit et étudié dans [9]. Depuis ce travail [9], ce problème a été étudié intensivement et étendu dans plusieurs directions dans les espaces de Hilbert dans [6] et dans [23] et dans d'autres papiers (voir par example [24, 25]).

2. Si X est un espace de Hilbert, C est un ensemble convexe fermé dans X, F est une bifonction convexe, et $\rho = 0$, alors ($PQVN[C,F]$ devient le problème d'équilibre convexe suivant:

$$\text{Trouver } \bar{x} \in C \quad \text{tel que} \quad F(\bar{x}, x) \geq 0 \quad \forall x \in C,$$

qui a été étudié dans plusieurs papiers (voir par example [22, 24] et les références dedans).

3. Si $F(x, y) = \langle T(x), y - x \rangle$, avec $T : X \to X^*$ est un operateur nonlinéaire, alors $(PQVN[C, F])$ se réduit au problème suivant

$$\text{Trouver } \bar{x} \in C(\bar{x}) \quad \text{tel que} \quad -T(\bar{x}) \in N^\pi(C(\bar{x}); \bar{x}).$$

On va démontrer dans la section 4, que ce problème est équivalent dans le cas uniformément V-prox-régulier généralisé à l'inégalité quasi-variationnelle suivante:

$$\text{Trouver } \bar{x} \in C(\bar{x}) \quad \text{tel que} \quad \langle T(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle + \rho V(J(\bar{x}), x) \geq 0, \quad \forall x \in C(\bar{x}),$$

pour un certain $\rho \geq 0$. Cette inégalité est nouvelle dans le cas des espaces de Banach. Cependant, elle a été étudiée dans les espaces de Hilbert dans [9], quand C est un ensemble uniformément V-prox-régulier (voir aussi [10, 24, 25]). Dans le cas où $\rho = 0$ et $C(x) \equiv C$ la dernière inégalitée devient:

$$\text{Trouver } \bar{x} \in C \quad \text{tel que} \quad \langle T(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C,$$

qui est trés bien connue avec le nom: Inégalitée Variationnelle Classique (IVC) et elle a été introduite et étudiée dans [27] et elle a fait l'objet des milliers de papiers depuis la publication [27].

Notre objectif principal dans ce chapitre est de démontrer la convergence de quelques algorithmes vers des solutions du problème quasi-variationnel non convexe $(PQVN[C, F])$.

2.2 Résultats principaux

Tout d'abord, on montre dans la proposition suivante que dans le cas convexe le problème variationnel (PQVN[C,F]) coincide avec le problème de quasi-équilibre (PQE[C,F]) suivant:

$$\text{Trouver } \bar{x} \in C(\bar{x}) \quad \text{tel que} \quad F(\bar{x}, x) \geq 0 \quad \forall x \in C(\bar{x}). \qquad (PQE[C, F])$$

Proposition 2.2.1. *Soit X un espace de Banach réflexif. Supposons que C est un ensemble convexe fermé et F est une bifonction convexe vérifiant $F(x,x) = 0$ pour tout $x \in Fix(C)$. Alors, on a (PQVN[C,F]) $\Longleftrightarrow$(PQE[C,F]).*

Preuve. Soit $\bar{x}$ une solution de (PQVN[C,F]). Alors, il existe $y^* \in \partial^\pi F(\bar{x},\cdot)(\bar{x})$ tel que $-y^* \in N^\pi(C(\bar{x}),\bar{x})$. Comme $C(\bar{x})$ est un ensemble convexe fermé, le cône normal V-proximal $N^\pi(C(\bar{x}),\bar{x})$ coincide avec le cône normal convexe $N^{Con.}(C(\bar{x}),\bar{x})$ (de la Proposition 1.0.1) et donc

$$\langle y^*; x - \bar{x}\rangle \geq 0, \quad \forall x \in C(\bar{x}).$$

D'autre part, la convexité de la bifonction F et la Proposition 1.0.1 nous donnent l'inégalité suivante:

$$\langle y^*; x - \bar{x}\rangle \leq F(\bar{x},x) - F(\bar{x},\bar{x}), \quad \forall x \in X.$$

Comme $\bar{x} \in C(\bar{x})$ on a $F(\bar{x},\bar{x}) = 0$ (par hypothèse) et d'après les deux inégalitées précédentes on obtient

$$F(\bar{x},x) \geq 0, \quad \forall x \in C(\bar{x}),$$

d'où, $\bar{x}$ est une solution de $(PQE[C,F])$).

Réciproquement, soit $\bar{x}$ une solution de $(PQE[C,F])$), c-à-d, $F(\bar{x},x) \geq 0, \quad \forall x \in C(\bar{x})$. Comme $C(\bar{x})$ est un ensemble convexe fermé et la fonction $F(\bar{x},\cdot)$ est convexe, alors la fonction $x \mapsto h(x) := F(\bar{x},x) + \psi_{C(\bar{x})}(x)$ admet un minimum global sur X en $\bar{x}$. Il suit donc que

$$0 \in \partial^{Con.}h(\bar{x}) = \partial^{Con.}F(\bar{x},\cdot)(\bar{x}) + \partial^{Con.}\psi_{C(\bar{x})}(\bar{x}) = \partial^{Con.}F(\bar{x},\cdot)(\bar{x}) + N^{Con.}(C(\bar{x});\bar{x}),$$

ce qui est équivalent à $[-\partial^{Con.}F(\bar{x},\cdot)(\bar{x})] \cap N^{Con.}(C(\bar{x});\bar{x}) \neq \emptyset$ et donc la preuve est achevée puisque $\partial^\pi F(\bar{x},\cdot)(\bar{x}) = \partial^{Con.}F(\bar{x},\cdot)(\bar{x})$ et $N^\pi(C(\bar{x}),\bar{x}) = N^{Con.}(C(\bar{x}),\bar{x})$. $\square$

Dans la proposition suivante, on établit une charactérisation en terme d'inégalité du problème quasi-variationnel non convexe (PQVN[C,F]) que nous proposons dans ce travail lorsque les données C et F sont uniformément V-prox-régulières.

Proposition 2.2.2. *Soient X un space de Banach réflexif et $\bar{x} \in X$. Supposons que $C(\bar{x})$ est uniformément V-prox-régulier avec une constante $r \in (0, \infty]$ et que $F(\bar{x}, \cdot)$ est uniformément V-prox-régulière sur $C(\bar{x})$ avec une constante $r' \in (0, \infty]$. Supposons aussi que $F(\bar{x}, \cdot)$ est γ-Lipschitz autour de $\bar{x}$ et $F(x, x) = 0$ pour tout $x \in Fix(C)$. Si $\bar{x}$ est une solution de (PQVN[C,F]), alors $\bar{x}$ est une solution du problème de quasi-equilibre non convexe suivant: Trouver $\bar{x} \in C(\bar{x})$ tel que*

$$F(\bar{x}, x) + \rho V(J\bar{x}, x) \geq 0, \quad \forall x \in C(\bar{x}). \qquad (PQEN[C, F])$$

pour un certain réel nonegatif $\rho \geq 0$.

Preuve. Supposons que $\bar{x}$ est une solution de $(PQVN[C, F])$, i.e., il existe un élément $y^* \in \partial^\pi F(\bar{x}, \cdot)(\bar{x})$ tel que $-y^* \in N^\pi(C(\bar{x}); \bar{x})$. D'après l'uniforme V-prox-régularité généralisée de l'ensemble $C(\bar{x})$ on a

$$\langle -y^*, x - \bar{x} \rangle \leq \frac{\|y^*\|}{2r} V(J\bar{x}, x), \quad \forall x \in C(\bar{x}).$$

La continuité γ-Lipschitz de la fonction $F(\bar{x}, \cdot)$ assure que $\|y^*\| \leq \gamma$ et donc on obtient

$$\langle -y^*, x - \bar{x} \rangle \leq \frac{\gamma}{2r} V(J\bar{x}, x), \quad \forall x \in C(\bar{x}). \qquad (2.2.1)$$

D'une autre part, d'après l'uniforme V-prox-régularité de la fonction $F(\bar{x}, \cdot)$ sur $C(\bar{x})$ avec la constante $r' > 0$ on a

$$\langle y^*, x - \bar{x} \rangle \leq \frac{1}{2r'} V(J\bar{x}, x) + F(\bar{x}, x) - F(\bar{x}, \bar{x}), \quad \forall x \in C(\bar{x}). \qquad (2.2.2)$$

Combinons cette inégalité (2.2.2) avec (2.2.1). On obtient

$$F(\bar{x}, x) - F(\bar{x}, \bar{x}) + \frac{1}{2r'} V(J\bar{x}, x) \geq -\frac{\gamma}{2r} V(J\bar{x}, x) \quad \forall x \in C(\bar{x}). \qquad (2.2.3)$$

Puisque $\bar{x} \in C(\bar{x})$ on a $F(\bar{x}, \bar{x}) = 0$ et donc, (3.2.13) devient

$$F(\bar{x}, x) + \rho V(J\bar{x}, x) \geq 0 \quad \forall x \in C(\bar{x}),$$

avec $\rho := \frac{\gamma}{2r} + \frac{1}{2r'} \geq 0$. Ainsi, la preuve est complète. $\square$

Une question naturelle se pose ici: *Quand est-ce-que la réciproque de la proposition précédente est vraie?* La réponse est affirmative pourvu que certaines hypothèses additionnelles sur l'espace X et C et F soient vérifiées, comme le montre la proposition suivante:

Proposition 2.2.3. *Soit X un espace de Banach q-uniformément lisse et p-uniformément convexe. Supposons que:*

(1) X admet une norme équivalente $\|\cdot\|$ telle que $\|\cdot\|^s$ (pour un certain $s \geq 2$) est C^2-différentiable sur $X \setminus \{0\}$ et soit V la fonctionnelle associée à cette norme $\|\cdot\|$.

(2) $C(\bar{x})$ est V-proximalement normalement régulier en $\bar{x}$, c-à-d, $N^{\pi}(C(\bar{x}), \bar{x}) = N^{L\pi}(C(\bar{x}), \bar{x})$ et que $F(\bar{x}, \cdot)$ est V-proximalement sousdifférentiellement régulière en $\bar{x}$, i.e., $\partial^{\pi} F(\bar{x}, \cdot)(\bar{x}) = \partial^{L\pi} F(\bar{x}, \cdot)(\bar{x})$.

(3) $F(x, x) = 0$ pour tout $x \in Fix(C)$.

Si $\bar{x}$ est une solution de (PQEN[C,F])) pour un certain $\rho \geq 0$, alors $\bar{x}$ est une solution de (PVNQ[C,F])).

Preuve. Soit $\bar{x}$ une solution de $(PQEN[C, F]))$ pour un certain $\rho \geq 0$, c-à-d,

$$F(\bar{x}, x) + \rho V(J\bar{x}, x) \geq 0 \quad \forall x \in C(\bar{x}).$$

Alors, $\bar{x}$ est un minimum global de la fonction $x \mapsto h(x) = F(\bar{x}, x) + \rho V(J\bar{x}, x) + \psi_{C(\bar{x})}(x)$ sur X et donc

$$0 \in \partial^{\pi} h(\bar{x}) \subset \partial^{L\pi} h(\bar{x}) = \partial^{L\pi}[F(\bar{x}, \cdot) + \rho V(J\bar{x}, \cdot) + \psi_{C(\bar{x})}(\cdot)](\bar{x}).$$

Notons que la fonction $x \mapsto V(J(\bar{x}), x)$ est différentiable et que son gradient est donné par $\mathrm{grad}(V(J(\bar{x}), \cdot))(x) = 2(J(x) - J(\bar{x}))$. En utilisant le fait que le sous-différentiel V-proximal limite coincide avec le sous-différentiel Fréchet limite (d'après Théorème 1.0.2) et en utilisant la règle exacte de la somme des sous-différentiel Fréchet limite (voir par exemple [4]), on peut écrire

$$\begin{aligned}
0 &\in \partial^{L\pi}[F(\bar{x}, \cdot) + \rho V(J\bar{x}, \cdot) + \psi_{C(\bar{x})}(\cdot)](\bar{x}) \\
&\in \partial^{LF}[F(\bar{x}, \cdot) + \rho V(J\bar{x}, \cdot) + \psi_{C(\bar{x})}(\cdot)](\bar{x}) \\
&\in \partial^{LF}F(\bar{x}, \cdot))(\bar{x}) + \partial^{LF}(\rho V(J\bar{x}, \cdot))(\bar{x}) + \partial^{LF}\psi_{C(\bar{x})}(\cdot)(\bar{x}) \\
&\in \partial^{LF}F(\bar{x}, \cdot))(\bar{x}) + 2\rho(J(\bar{x}) - J(\bar{x})) + N^{LF}(C(\bar{x}); \bar{x}). \\
&\in \partial^{LF}F(\bar{x}, \cdot))(\bar{x}) + N^{LF}(C(\bar{x}); \bar{x}).
\end{aligned}$$

Ceci est équivalent à dire que $[-\partial^{LF}F(\bar{x}, \cdot)(\bar{x})] \cap N^{LF}(C(\bar{x}); \bar{x}) \neq \emptyset$. Ainsi, se termine la preuve car $\partial^{\pi}F(\bar{x}, \cdot)(\bar{x}) = \partial^{L\pi}F(\bar{x}, \cdot)(\bar{x}) = \partial^{LF}F(\bar{x}, \cdot)(\bar{x})$ et $N^{\pi}(C(\bar{x}), \bar{x}) = N^{L\pi}(C(\bar{x}); \bar{x}) = N^{LF}(C(\bar{x}); \bar{x})$. □

Le résultat de la proposition suivante a son propre intéret. Il est aussi ustilisé pour démontrer l'équivalence entre $(PQVN[F, C])$ et $(PQEN[F, C])$ lorsque C et F sont supposés uniformément V-prox-régulières.

Proposition 2.2.4. *Soient X un espace de Banach réflexif et $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction semi-continue inférieurement et soit $\bar{x} \in \mathrm{dom}\, f$. Si f est uniformément V-prox-régulière autour de $\bar{x}$, alors $\partial^{\pi}f(\bar{x}) = \partial^{L\pi}f(\bar{x})$, i.e., la fonction f est V-proximalement sous-différentiellement régulière en $\bar{x}$. Par conséquent, pour tout ensemble fermé uniformément V-prox-régulier généralisé S en $\bar{x} \in S$ on a $N^{\pi}(S, \bar{x}) = N^{L\pi}(S; \bar{x})$, i.e., l'ensemble S est V-proximalement normalement régulier en $\bar{x}$.*

Preuve. Démontrons seulement la première conclusion de la proposition. La seconde conclusion suit directement de la première et de Exemple 1.0.4(2). Puisque on a toujours l'inclusion $\partial^{\pi} f(\bar{x}) \subset \partial^{L\pi} f(\bar{x})$, il est suffisant de prouver l'inclusion inverse, i.e., $\partial^{L\pi} f(\bar{x}) \subset \partial^{\pi} f(\bar{x})$. Soit $x^* \in \partial^{L\pi} f(\bar{x})$, i.e., il existe $x_n \to^f x$ et $x_n^* \in \partial^{\pi} f(x_n)$ tels que $x^* = w - \lim_n x_n^*$. D'après l'uniforme V-prox-régularité de f autour de $\bar{x}$, ils existent $r > 0$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $x \in \bar{x} + \delta\mathbb{B}$ et tout $y^* \in \partial^{\pi} f(x)$

$$\langle y^*, x' - x \rangle \leq \frac{1}{2r} V(Jx, x') + f(x') - f(x), \quad \forall x' \in x + \delta\mathbb{B}. \tag{2.2.4}$$

Puisque $x_n \to \bar{x}$ on peut écrire pour n assez grand que $x_n \in \bar{x} + \frac{\delta}{2}\mathbb{B}$ et donc d'après (2.2.4), on obtient

$$\langle x_n^*, x' - x_n \rangle \leq \frac{1}{2r} V(Jx_n, x') + f(x') - f(x_n), \quad \forall x' \in x_n + \delta\mathbb{B}. \tag{2.2.5}$$

Fixons $y \in \bar{x} + \frac{\delta}{2}\mathbb{B}$. On a clairement $y \in x_n + \frac{\delta}{2}\mathbb{B} + \frac{\delta}{2}\mathbb{B} \subset x_n + \delta\mathbb{B}$ et donc, (2.2.5) donne

$$\begin{aligned} \langle x^*, y - \bar{x} \rangle &= \langle x^* - x_n^*, y - \bar{x} \rangle + \langle x_n^*, y - x_n \rangle + \langle x_n^*; x_n - \bar{x} \rangle \\ &\leq \langle x^* - x_n^*, y - \bar{x} \rangle + \langle x_n^*; x_n - \bar{x} \rangle + \tfrac{1}{2r} V(Jx_n, y) + f(y) - f(x_n). \end{aligned}$$

En utilisant maintenant le fait que $x_n \to^f \bar{x}$, la continuité de J, la continuité de V, et la convergence faible de x_n^* à x^*, on peut passer à la limite quand n tend vers ∞ pour obtenir

$$\langle x^*, y - \bar{x} \rangle \leq \tfrac{1}{2r} V(J\bar{x}, y) + f(y) - f(\bar{x}),$$

pour tout $y \in \bar{x} + \frac{\delta}{2}\mathbb{B}$. Ceci assure par définition que $x^* \in \partial^{\pi} f(\bar{x})$ et donc la preuve est achevée. $\square$

En utilisant ce résultat avec Proposition 2.2.2 et Proposition 2.2.3 on obtient l'équivalence entre $(PQVN[C, F])$ et $(PQEN[C, F])$.

Proposition 2.2.5. *Soient X un espace de Banach q-uniformément lisse et p-uniformément convexe et soit $\bar{x} \in X$. Supposons que:*

(1) X admet une norme équivalente $\|\cdot\|$ telle que $\|\cdot\|^s$ (pour un certain $s \geq 2$) est C^2-différentiable sur $X \setminus \{0\}$ et soit V la fonctionnelle associée à cette norme $\|\cdot\|$.

(2) $C(\bar{x})$ est uniformément V-prox-régulière avec la constante $r \in (0, \infty]$ et que $F(\bar{x}, \cdot)$ est uniformément V-prox-régulière sur $C(\bar{x})$ avec la constante $r' \in (0, \infty]$.

(3) $F(\bar{x}, \cdot)$ est γ-Lipschitz autour de $\bar{x}$ et $F(x, x) = 0$ pour tout $x \in Fix(C)$.

Alors, $\bar{x}$ est une solution de $(PQVN[C, F])$ si et seulement si $\bar{x}$ est une solution de $(PQEN[C, F])$ pour un certain $\rho \geq 0$.

2.3 Analyse de la convergence des algorithmes

2.3.1 Cas 1: C est une multifonction constante

Dans ce cas, le problème variationnel proposé devient comme suit:

$$\text{Trouver } \bar{x} \in C \quad \text{t.q.} \quad [-\partial^{\pi} F(\bar{x}, \cdot)(\bar{x})] \cap N^{\pi}(C; \bar{x}) \neq \emptyset. \tag{$PVN[C,F]$}$$

Dans cette sous-section, on propose l'algorithme suivant:

Algo.1: Soient $\rho \geq 0$ et $\lambda_n > 0$ pour tout $n \geq 1$;

1. Fixons $x_0 \in C$;

2. Pour tout $n \geq 1$ nous choisissons $x_{n+1} \in C$ tel que

$$\lambda_n^{-1} \langle J(x_n) - J(x_{n+1}), x - x_{n+1} \rangle \leq F(x_n, x) + \rho V(J(x_n), x), \quad \forall x \in C.$$

Théorème 2.3.1. *Soient X un espace de Banach q-uniformément lisse, C un ensemble fermé nonvide de X et $F : C \times C \to \mathbb{R}$ une bifonction satisfaisant $F(x,x) = 0$ pour tout $x \in C$ et $\{x_n\}_n$ une suite engendrée par Algo.1. Supposons que:*

1. *C est uniformément V-prox-régulière avec une constante $r \in (0, \infty]$;*

2. *C est boule-compacte, c-à-d, $C \cap \eta B$ est compacte pour tout $\eta > 0$;*

3. *l'ensemble des solutions de $(PQVN[C,F])$ est nonvide;*

4. *F est W-fortement monotone sur C pour un certain $\sigma \geq 0$, i.e.,*

$$F(x,y) + F(y,x) \leq -\sigma W(x,y), \forall x, y \in C,$$

   où $W(x,y) := \frac{1}{2}[V(J(x),y) + V(J(y),x)]$;

5. *F est semi-continue supérieurement relativement à la permière variable sur C, i.e.,*

$$\limsup_{x' \to x} F(x',y) \leq F(x,y) \quad \forall \quad x, y \in C;$$

6. *la bifonction F est γ-Lipschitz et uniformément V-prox-régulière relativement à la seconde variable sur C avec une constante $r' \in (0, +\infty]$;*

7. *il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda_n \geq \lambda$ pour tout n;*

8. *les paramètres $r, r', \gamma, \rho, \sigma$ vérifient l'inégalité: $2\rho \leq \frac{\gamma}{2r} + \frac{1}{2r'} \leq \frac{\sigma}{3}$.*

Alors, il existe une sous-suite de $\{x_n\}$ qui converge vers une solution $\tilde{x} \in C$ de $(PVN[C,F])$.

Preuve. Soit $\bar{x} \in C$ une solution de $(PVN[C,F])$. Alors, d'après Proposition 2.2.2 on a

$$F(\bar{x},x) + \rho_0 V(J(\bar{x}),x) \geq 0 \quad \forall x \in C,$$

pour $\rho_0 := \frac{\gamma}{2r} + \frac{1}{2r'}$. D'après la W-forte monotonie de F sur C on a

$$F(x,\bar{x}) + F(\bar{x},x) \leq -\sigma W(x,\bar{x}), \forall x \in C.$$

En posant $x = x_n$ dans ces deux inégalités on obtient

$$F(x_n,\bar{x}) + F(\bar{x},x_n) \leq -\sigma W(x_n,\bar{x}) \text{ et } -F(\bar{x},x_n) \leq \rho_0 V(J(\bar{x}),x_n).$$

La combinaison de ces deux inégalités nous donne

$$F(x_n,\bar{x}) \leq \rho_0 V(J(\bar{x}),x_n) - \sigma W(x_n,\bar{x}) \leq (2\rho_0 - \sigma) W(x_n,\bar{x}).$$

En utilisant maintenant la 8 ème hypothèse du théorème (le choix des paramètres), on obtient $2\rho_0 - \sigma \leq -\rho_0$ et donc

$$F(x_n,\bar{x}) \leq -\rho_0 W(x_n,\bar{x}).$$

Cette inégalité combinée avec Algo.1 donne

$$\begin{aligned} \langle x^*_{n+1}, \bar{x} - x_{n+1} \rangle &\leq F(x_n,\bar{x}) + \rho V(J(x_n),\bar{x}) \\ &\leq -\rho_0 W(x_n,\bar{x}) + \rho V(J(x_n),\bar{x})) \\ &\leq (2\rho - \rho_0) W(x_n,\bar{x}), \end{aligned}$$

avec $x^*_{n+1} := \lambda_n^{-1}[J(x_n) - J(x_{n+1})]$. Par conséquent,

$$\langle J(x_n) - J(x_{n+1}), \bar{x} - x_{n+1} \rangle \leq \lambda_n (2\rho - \rho_0) W(x_n,\bar{x}). \tag{2.3.6}$$

On définit maintenant une suite de nombres réels nonnegatifs $\phi_n = \frac{1}{2} V(J(x_n),\bar{x})$. On peut aisément vérifier l'égalité suivante:

$$2[\phi_{n+1} - \phi_n] + V(J(x_n),x_{n+1}) = 2\langle J(x_n) - J(x_{n+1}), \bar{x} - x_{n+1} \rangle. \tag{2.3.7}$$

En effet,

$$2[\phi_{n+1} - \phi_n] \;=\; V(J(x_{n+1}),\bar{x}) - V(J(x_n),\bar{x})$$

$$\begin{aligned}
&= [\|J(x_{n+1})\|^2 - 2\langle J(x_{n+1}), \bar{x}\rangle + \|\bar{x}\|^2] - [\|J(x_n)\|^2 - 2\langle J(x_n), \bar{x}\rangle + \|\bar{x}\|^2] \\
&= \|J(x_{n+1})\|^2 + 2\langle J(x_n) - J(x_{n+1}), \bar{x}\rangle - \|J(x_n)\|^2 \\
&= 2\langle J(x_n) - J(x_{n+1}), \bar{x}\rangle - \|J(x_{n+1})\|^2 - \|J(x_n)\|^2 + 2\langle J(x_{n+1}), x_{n+1}\rangle \\
&= 2\langle J(x_n) - J(x_{n+1}), \bar{x}\rangle - V(J(x_n), x_{n+1}) - 2\langle J(x_n), x_{n+1}\rangle + 2\langle J(x_{n+1}), x_{n+1}\rangle \\
&= 2\langle J(x_n) - J(x_{n+1}), \bar{x}\rangle - V(J(x_n), x_{n+1}) - 2\langle J(x_n) - J(x_{n+1}), x_{n+1}\rangle \\
&= 2\langle J(x_n) - J(x_{n+1}), \bar{x} - x_{n+1}\rangle - V(J(x_n), x_{n+1}).
\end{aligned}$$

Il s'en suit donc

$$\phi_{n+1} - \phi_n \quad \leq \quad \langle J(x_n) - J(x_{n+1}), \bar{x} - x_{n+1}\rangle,$$

ce qui assure avec (2.3.6) que

$$\phi_{n+1} - \phi_n \quad \leq \quad \lambda_n(2\rho - \rho_0)W(x_n, \bar{x}).$$

En utilisant l'inégalité $\rho_0 \geq 2\rho$ dans la 8 ème hypothèse on obtient

$$\phi_{n+1} \leq \phi_n.$$

Par conséquent, la suite réelle $\{\phi_n\}$ est décroissante et convergente vers une certaine limite et elle est bornée par un certain réel positif $\alpha > 0$. Ainsi, d'après les propriétés de la fonctionnelle V on obtient

$$(\|\bar{x}\| - \|x_n\|)^2 \leq V(J(x_n), \bar{x}) = 2\phi_n \leq 2\alpha$$

et donc

$$\|x_n\| \leq \|\bar{x}\| + \sqrt{2\alpha},$$

i.e., $\{x_n\}$ est bornée. D'après la q'-uniforme convexité de l'espace dual X^* (d'après Lemme 1.0.5), on obtient pour un certain $\eta > 0$ dépendant de α et de l'espace dual X^* l'inégalité suivante:

$$\|J(x_{n+1}) - J(x_n)\|^{q'} \leq \eta V_*(J^*(J(x_{n+1})), J(x_n)) = \eta V(J(x_n), x_{n+1}),$$

où $J^* : X^* \to X^{**}(= X)$ est l'application de dualité normalisée sur X^* et $V_* : X^{**} \times X^* \to \mathbb{R}$ est la fonctionnelle définie par

$$V_*(x^{**}; x^*) := \|x^{**}\|^2 - 2\langle x^{**}; x^*\rangle + \|x^*\|^2, \quad \forall x^* \in X^*, \, x^{**} \in X^{**}.$$

En utilisant maintenant (2.3.6), (2.3.7) et l'hypothèse $\rho_0 \geq 2\rho$ on obtient

$$\frac{1}{2}V(J(x_n), x_{n+1}) \leq \phi_n - \phi_{n+1}.$$

Par suite, il découle de la 7ème hypothèse du théorème que

$$\begin{aligned}
\|x^*_{n+1}\|^{q'} &= \lambda_n^{-q'}\|J(x_{n+1}) - J(x_n)\|^{q'} \\
&\leq \lambda^{-q'}\|J(x_{n+1}) - J(x_n)\|^{q'} \\
&\leq \lambda^{-q'}\eta V(J(x_n), x_{n+1}) \\
&\leq \frac{2\eta}{\lambda^{q'}}[\phi_n - \phi_{n+1}] \to 0 \text{ quand } n \to \infty,
\end{aligned} \qquad (2.3.8)$$

ce qui assure que $\lim\limits_{n\to\infty} x^*_{n+1} = 0$. D'une autre part, comme la suite $\{x_n\}$ est bornée dans C lequel est boule-compacte, alors il existe une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ qui converge vers une limite $\tilde{x} \in C$. D'après Algo.1, cette sous-suite vérifie

$$\langle x^*_{n_k+1}, x - x_{n_k+1}\rangle \leq F(x_{n_k}, x) + \rho V(J(x_{n_k}), x), \quad \forall k, \quad \forall x \in C. \qquad (2.3.9)$$

Ainsi, en passant à la limite quand $k \to \infty$ dans l'inégalité (2.3.9) et en prenant en considération la semi-continuité supérieure de F et la continuité de V et J, on obtient

$$0 \leq F(\tilde{x}, x) + \rho V(J(\tilde{x}), x), \quad \forall x \in C.$$

Ceci signifie que $\tilde{x}$ est une solution de $(PEN[C, F])$. Finalement, en utilisant maintenant Proposition 2.2.5 on obtient $\tilde{x}$ est une solution de $(PVN[C, F])$ et donc la preuve est terminée. $\square$

2.3.2 Cas 2: C est une multifonction générale

Dans ce cas général nous proposons l'algorithme suivant:

Algo.2: Soit $\rho \geq 0$ et $\lambda_n > 0$ pour tout $n \geq 1$;

1. Choissons $x_0 \in C(x_0)$;

2. Pour tout $n \geq 1$ choisissons $x_{n+1} \in C(x_n)$ tel que

$$\lambda_n^{-1}\langle J(x_n) - J(x_{n+1}), x - x_{n+1}\rangle \leq F(x_n, x) + \rho V(J(x_n), x), \quad \forall x \in Im\,C,$$

   où $M > 0$ est un nombre réel positif donné et $Im\,C$ est l' image de C, c-à-d, $Im\,C := \{y \in X : \exists x \in X \text{ tel que } y \in C(x)\}$.

Il est Clair que Algo.2 coincide avec Algo.1 quand C est une multifonction constante. Cependant, les hypothèses imposées sur F dans la sous-section précédente ne sont pas suffisantes pour démontrer la convergence de la suite $\{x_n\}$ engendrée par Algo.2 vers une solution de $(PQVN[C, F])$. On a besoin de remplacer la W-forte monotonie par la W-forte monotonie relaxée de la bifonction F sur $Im\,C$ et on ne suppose pas la nonvacuité de l'ensemble des solutions du problème proposé. On dit que F est W-fortement monotone relaxée sur $Im\,C$ pourvu que pour un certain $\sigma \geq 0$ on a

$$F(x, y) \leq -\sigma W(x, y), \forall x, y \in Im\,C.$$

Par symmétrie de W, il est clair que toute bifonction W-fortement monotone relaxée relativement à $\sigma \geq 0$ est W-fortement monotone relativement à 2σ. Cette hypothèse relaxée de F a été utilisée pour les espaces de Hilbert dans [23] et pour les espaces de Banach dans [13]. Le théorème suivant est notre résultat principal de cette sous-section.

Théorème 2.3.2. *Soit X un espace de Banach q-uniformément convexe. Soient $C : X \rightrightarrows X$ une multifonction à valeurs férmées non vides et $F : Im\,C \times Im\,C \to \mathbb{R}$*

une bifonction satisfaisant $F(x,x) = 0$ pour tout $x \in Fix(C)$. Soit $\{x_n\}_n$ une suite engendrée par Algo.2. Supposons que:

1. *les valeurs de C sont uniformément V-prox-régulières avec une constante $r \in (0, \infty]$;*

2. *les valeurs de C sont boule-compactes dans X et son graph est fermé;*

3. *F est W-fortement monotone relaxée sur $Im\, C$ avec une constante $\sigma > 0$;*

4. *F est semi-continue supérieurement relativement à la première variable sur $Im\, C$;*

5. *$F(x_n, \cdot)$ est uniformément V-prox-régulière sur $Im\, C$ avec une constante $r' \in (0, +\infty]$;*

6. *il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda_n \geq \lambda$ pour tout n;*

7. *le paramètre non negatif ρ est pris dans l'interval $[0, \frac{\sigma}{2}]$.*

Alors, il existe une sous-suite de $\{x_n\}$ qui converge vers une solution de ($PQVN[C,F]$).

Preuve. Soit $\bar{x} \in Im\, C$. D'après la W-forte monotonie relaxée de F sur $Im\, C$ on a

$$F(x_n, \bar{x}) \leq -\sigma W(x_n, \bar{x}), \forall n \geq 1.$$

D'après Algo.2 on a

$$\langle x^*_{n+1}, \bar{x} - x_{n+1} \rangle \leq F(x_n, \bar{x}) + \rho V(J(x_n), \bar{x}).$$

avec $x^*_{n+1} := \lambda_n^{-1}[J(x_n) - J(x_{n+1})]$. Combinons ces deux inegalités pour obtenir

$$\begin{aligned} \langle x^*_{n+1}, \bar{x} - x_{n+1} \rangle &\leq \rho V(J(x_n), \bar{x}) - \sigma W(x_n, \bar{x}) \\ &\leq (2\rho - \sigma) W(x_n, \bar{x}). \end{aligned}$$

Par la suite,

$$\langle J(x_n) - J(x_{n+1}), \bar{x} - x_{n+1} \rangle \leq \lambda_n (2\rho - \sigma) W(x_n, \bar{x}). \tag{2.3.10}$$

Considérons maintenant la même suite non négative réelle $\phi_n = \frac{1}{2} V(J(x_n), \bar{x})$ utilisée dans la preuve du Théorème 2.3.1. Donc, on a

$$\phi_{n+1} - \phi_n \quad \leq \quad \langle J(x_n) - J(x_{n+1}), \bar{x} - x_{n+1} \rangle,$$

ce qui assure avec (2.3.10) que

$$\phi_{n+1} - \phi_n \quad \leq \quad \lambda_n (2\rho - \sigma) W(x_{n+1}, \bar{x}).$$

L'ypothèse $\sigma \geq 2\rho$ donne donc

$$\phi_{n+1} \leq \phi_n.$$

En suivant le même raisonnement que dans la preuve du Théorème 2.3.1 et en utilisant la boule-compacité des images de C, on obtient une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ qui converge vers une limite $\tilde{x}$ vérifiant $\tilde{x} \in C(\tilde{x})$ par fermeture du graphe de C. D'après Algo.2, cette sous-suite vérifie l'inégalité

$$\langle x^*_{n_k+1}, x - x_{n_k+1} \rangle \leq F(x_{n_k+1}, x) + \rho V(J(x_{n_k+1}), x), \, \forall k, \forall x \in Im\, C. \tag{2.3.11}$$

Ainsi, en passant à la limite quand $k \to \infty$ dans l'inégalité (2.3.11) et en tenant compte de la semi-continuité supérieure de F et la continuité de V et J, on obtient

$$0 \leq F(\tilde{x}, x) + \rho V(J(\tilde{x}), x), \quad \forall x \in C(\tilde{x}).$$

Ceci assure que $\tilde{x}$ est une solution de $(PQEN[C, F])$ ce qui entraine d'après la Proposition 2.2.5 que la solution $\tilde{x}$ est aussi une solution de $(PQVN[C, F])$. Ainsi, la preuve est complète. □

2.3.3 Cas 3: F est de la forme: $F(x,y) = \langle T(x), y-x\rangle$.

Dans cette sous-section on restreint notre attention sur la forme suivante de la bi-fonction F:

$$F(x,y) = \langle T(x), y-x\rangle,$$

où $T : X \to X^*$ est un opérateur nonlinéaire. Dans ce cas $\partial^\pi F(\bar{x},\cdot)(\bar{x}) = \{T(\bar{x})\}$ et $(PQVN[C,F]))$ devient donc

$$\text{Trouver } \bar{x} \in C(\bar{x}) \text{ tel que } \quad T(\bar{x}) \in -N^\pi(C(\bar{x}),\bar{x}). \qquad (PQVN[C,T])$$

On propose l'algorithme suivant pour résoudre le problème $(PQVN[C,T])$ sous certaines hypothèses naturelles et bien appropriées sur C et T.

Algo.3: Soit $\delta_n \downarrow 0$ avec δ_0 suffisament petit.

- Choisissons $x_0 \in C(x_0)$, $y_0^* = T(x_0)$, et $\rho > 0$;
- Pour $n \geq 0$,
  - Calculons $z_{n+1} := J^*(J(x_n) - \rho y_n^*)$;
  - Calculons $x_{n+1} := \pi_{C(x_n)}(J(z_{n+1}))$ et $y_{n+1}^* := T(x_{n+1})$,

Démontrons le lemme suivant qui est nécessaire dans la preuve du résultat principal de cette sous-section.

Lemme 2.3.3. *Soient S un ensemble férmé non vide dans X, $\bar{x} \in S$, $y^* \in X^*$ et $r > 0$. Si $\bar{x} \in \pi_S(J(\bar{x}) - ry^*)$, alors $\bar{x} \in \pi_S(J(\bar{x}) - \rho y^*)$ pour tout $\rho \in [0,r]$.*

Preuve. Soient $r > 0$, $y^* \in X^*$ et $\bar{x}$ un point vérifiant $\bar{x} \in \pi_S(J(\bar{x}) - ry^*)$. Supposons que $\rho \in [0,r]$. Soit $\lambda := \frac{\rho}{r} \in [0,1]$. Montrons

$$V(J(\bar{x}) - \rho y^*, \bar{x}) = \inf_{s\in S} V(J(\bar{x}) - \rho y^*, s).$$

Observons que pour tout $s \in S$ on a

$$\begin{aligned} 2\langle J(\bar{x}) - \rho y^* - J\bar{x}; s - \bar{x}\rangle &= 2\langle \lambda(J(\bar{x}) - ry^*) + (1-\lambda)J(\bar{x}) - J\bar{x}; s - \bar{x}\rangle \\ &= 2\lambda\langle (J(\bar{x}) - ry^*) - J(\bar{x}); s - \bar{x}\rangle. \end{aligned}$$

Si $\langle (J(\bar{x}) - ry^*) - J(\bar{x}); s - \bar{x}\rangle < 0$, alors on a clairement

$$2\langle J(\bar{x}) - \rho y^* - J\bar{x}; s - \bar{x}\rangle < 0 \leq V(J(\bar{x}), s). \tag{2.3.12}$$

Sinon, on a $\langle (J(\bar{x}) - ry^*) - J(\bar{x}); s - \bar{x}\rangle \geq 0$. Alors, puisque $0 \leq \lambda \leq 1$ on en déduit que

$$2\lambda\langle (J(\bar{x}) - ry^*) - J(\bar{x}); s - \bar{x}\rangle \leq 2\langle (J(\bar{x}) - ry^*) - J(\bar{x}); s - \bar{x}\rangle$$

et donc, on obtient

$$\begin{aligned} 2\langle J(\bar{x}) - \rho y^* - J\bar{x}; s - \bar{x}\rangle &\leq 2\langle (J(\bar{x}) - ry^*) - J(\bar{x}); s - \bar{x}\rangle \\ &\leq \|J(\bar{x}) - ry^*\|^2 - 2\langle (J(\bar{x}) - ry^*); \bar{x}\rangle + \|\bar{x}\|^2 + \\ &+ 2\langle (J(\bar{x}) - ry^*); s\rangle - \|J(\bar{x}) - ry^*\|^2 - \|s\|^2 \\ &+ \|s\|^2 - 2\langle J(\bar{x}); s - \bar{x}\rangle - \|\bar{x}\|^2 \\ &\leq V(J(\bar{x}) - ry^*, \bar{x}) - V(J(\bar{x}) - ry^*, s) + V(J(\bar{x}), s) \\ &\leq \inf_{z \in S} V(J(\bar{x}) - ry^*, z) - V(J(\bar{x}) - ry^*, s) + V(J(\bar{x}), s) \\ &\leq V(J(\bar{x}), s), \end{aligned}$$

i.e.,

$$2\langle J(\bar{x}) - \rho y^* - J\bar{x}; s - \bar{x}\rangle \quad \leq \quad V(J(\bar{x}), s). \tag{2.3.13}$$

Par conséquent, d'après (2.3.12) et (2.3.13) on a dans les deux cas

$$2\langle J(\bar{x}) - \rho y^* - J\bar{x}; s - \bar{x}\rangle \leq V(J(\bar{x}), s), \quad \forall s \in S.$$

D'où

$$2\langle J(\bar{x}) - \rho y^* - J\bar{x}; s - \bar{x}\rangle - V(J(\bar{x}), s) \leq 0, \quad \forall s \in S.$$

D'une autre part, on a la décomposition

$$\begin{aligned} 2\langle J(\bar{x}) - \rho y^* - J\bar{x}; s - \bar{x}\rangle - V(J(\bar{x}), s) \quad &= \quad 2\langle J(\bar{x}) - \rho y^*; s\rangle\rangle - 2\langle J(\bar{x}) - \rho y^*; \bar{x}\rangle + 2\|\bar{x}\| \\ -2\langle J\bar{x}; s\rangle - [\|\bar{x}\|^2 - 2\langle J\bar{x}; s\rangle + \|s\|^2] \quad &= \quad [\|J(\bar{x}) - \rho y^*\|^2 - 2\langle J(\bar{x}) - \rho y^*; \bar{x}\rangle + \|\bar{x}\|^2] - \\ [\|J(\bar{x}) - \rho y^*\|^2 - 2\langle J(\bar{x}) - \rho y^*; s\rangle + \|s\|^2] \quad &= \quad V(J(\bar{x}) - \rho y^*, \bar{x}) - V(J(\bar{x}) - \rho y^*, s). \end{aligned}$$

Il s'en suit

$$V(J(\bar{x}) - \rho y^*, \bar{x}) - V(J(\bar{x}) - \rho y^*, s) \leq 0, \text{ pour tout } s \in S,$$

i.e.,

$$V(J(\bar{x}) - \rho y^*, \bar{x}) = \inf_{s \in S} V(J(\bar{x}) - \rho y^*, s),$$

ce qui montre que $\bar{x} \in \pi_S(J(\bar{x}) - \rho y^*)$. $\square$

Maintenant, énonçons et prouvons notre théorème pour $(PQVN[C,T])$.

Théorème 2.3.4. *Soient X un espace de Banach 2-uniformément lisse, $C : X \rightrightarrows X$ une multifonction à valeurs férmées non vides, $T : X \to X^*$ et $\{x_n\}_n$ une suite engendrée par Algo.3. Supposons que:*

1. *l'ensemble des solutions de $PQVN[F,T]$ est non vide;*
2. *T est borné par une constante $L > 0$;*
3. *T est J-Lipschitz avec une constante $\beta > 0$, c-à-d,*

$$\|T(x_1) - T(x_2)\| \leq \beta \|J(x_1) - J(x_2)\|, \, \forall x_i \in X, , i = 1, 2;$$

4. *T est J-fortement monotone avec une constante $\alpha > 0$, c-à-d,*

$$\langle J^*(T(x_1) - T(x_2)); J(x_1) - J(x_2)\rangle \geq \alpha \|J(x_1) - J(x_2)\|^2, \, \forall x_1, x_2 \in X;$$

5. *les valeurs de C vérifient pour un certain $r \in (0, \infty]$:*

$$\bar{u} \in \pi_{C(\bar{u})}(J(\bar{u}) + ru^*), \forall u^* \in X^*$$

pour tout vecteur unitaire u^* in X^* et tout $\bar{u}$ solution de (PQVN[C,T]);

6. *ils existent deux constantes $k \in (0,1)$ et $\xi > 0$ telles que*

$$\|J(\pi_{C(x_1)}(x_1^*)) - J(\pi_{C(x_2)}(x_2^*))\| \leq \xi \|x_1^* - x_2^*\| + k \|J(x_1) - J(x_2)\|,$$

pour tout $x_i \in X$, $x_i^* \in X^*, i = 1, 2$;

7. *les constantes positives α et β vérifient l'inégalité: $\alpha > \beta \sqrt{1 - \frac{(1-k)^2}{c\xi^2}}$;*
8. *Le paramètre ρ dans Algo.3 vérifie:*

$$\frac{\alpha}{\beta^2} - \bar{\epsilon} < \rho < \min \left\{ \frac{r}{L}, \frac{1}{2\alpha}, \frac{\alpha}{\beta^2} + \bar{\epsilon} \right\}, \, \bar{\epsilon} := \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 (1 - \frac{(1-k)^2}{c\xi^2})}}{\beta^2}.$$

Alors, la suite $\{x_n\}_n$ engendrée par Algo.3 converge vers une solution de $(PQVN[C,T])$.

Preuve. Soit $\bar{x} \in C(\bar{x})$ une solution de $(PQVN[C,T])$, i.e., $-T(\bar{x}) \in N^\pi(C(\bar{x}); \bar{x})$. Alors, d'après la charactérisation du cône normal V-proximal dans Définition 1.0.3, il existe une constante $\lambda > 0$ telle que $\bar{x} \in \pi_{C(\bar{x})}(J(\bar{x}) - \lambda T(\bar{x}))$. En utilisant Lemme 2.3.3 on obtient $\bar{x} \in \pi_{C(\bar{x})}(J(\bar{x}) - \tau T(\bar{x}))$ pour tout $\tau \in [0, \lambda]$. D'après l'hypothèse (5) on peut supposer que $\lambda \leq \frac{r}{L}$ et donc on obtient $\rho \leq \frac{r}{L}$. Donc, $\bar{x} \in \pi_{C(\bar{x})}(J(\bar{z}))$ pour $\bar{z} := J^*(J(\bar{x}) - \rho T(\bar{x}))$. Puisque X est 2-uniformément lisse on a X^* est 2-uniformément convexe, i.e.,

$$\delta_{X^*}(\epsilon) \geq 2c^{-1}\epsilon^2,$$

pour une certaine constante $c > 0$ (dépendant seulement de l'espace dual X^*). Alors, d'après le Lemme 1.0.6 on obtient

$$V_*(J^*x^*, y^*) \geq 8C^2\delta_{X^*}\left(\frac{\|x^* - y^*\|}{4C}\right) \geq c^{-1}\|x^* - y^*\|^2, \quad \forall x^*, y^* \in X^*.$$

Ainsi, on peut écrire

$$\|\rho[T(x_n) - T(\bar{x})] - (J(x_n) - J(\bar{x})\|^2 \leq c\left[V_*(\rho J^*(T(x_n) - T(\bar{x})); J(x_n) - J(\bar{x}))\right]$$

Par la suite, on obtient,

$$\begin{aligned}
\|J(z_{n+1}) - J(\bar{z})\|^2 &= \|J(x_n) - \rho T(x_n) - J(\bar{x}) + \rho T(\bar{x})\|^2 \\
&\leq c\left[V_*(\rho J^*(T(x_n) - T(\bar{x})); J(x_n) - J(\bar{x}))\right] \\
&\leq c\left[\rho^2\|T(x_n) - T(\bar{x})\|^2 + \|J(x_n) - J(\bar{x})\|^2\right] \\
&- 2c\rho\langle J^*(T(x_n) - T(\bar{x})); J(x_n) - J(\bar{x})\rangle.
\end{aligned}$$

D'après la J-Lipschitz continuité de T avec une constante β on a

$$\|T(x_n) - T(\bar{x})\|^2 \leq \beta^2\|J(x_n) - J(\bar{x})\|^2$$

et aussi la J-forte monotonie de T avec la constante α assure que

$$\langle J^*(T(x_n) - T(\bar{x})); J(x_n) - J(\bar{x})\rangle \geq \alpha\|J(x_n) - J(\bar{x})\|^2.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}\|J(z_{n+1}) - J(\bar{z})\|^2 &\leq c\left[\rho^2\beta^2\|J(x_n) - J(\bar{x})\|^2 + \|J(x_n) - J(\bar{x})\|^2\right] \\ &- 2c\rho\alpha\|J(x_n) - J(\bar{x})\|^2 \\ &\leq c(1 + \rho^2\beta^2 - 2\rho\alpha)\|J(x_n) - J(\bar{x})\|^2\end{aligned}$$

et donc,

$$\|J(z_{n+1}) - J(\bar{z})\| \leq \sqrt{c(1 + \rho^2\beta^2 - 2\rho\alpha)}\|J(x_n) - J(\bar{x})\|.$$

D'une autre part, d'après l'hypothèse (6) on a:

$$\begin{aligned}\|J(x_{n+1}) - J(\bar{x})\| &= \|J(\pi_{C(x_n)}(J(z_{n+1})) - J(\pi_{C(\bar{x})}(J(\bar{z}))\| \\ &\leq \xi\|J(z_{n+1}) - J(\bar{z})\| + k\|J(x_n) - J(\bar{x})\|.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|J(x_{n+1}) - J(\bar{x})\| \leq \left(k + \xi\sqrt{c(1 + \rho^2\beta^2 - 2\rho\alpha)}\right)\|J(x_n) - J(\bar{x})\|.$$

Nos hypothèses et le choix de ρ assurent que $\left(k + \xi\sqrt{c(1 + \rho^2\beta^2 - 2\rho\alpha)}\right) < 1$ et donc, $\|J(x_n) - J(\bar{x})\| \to 0$ ce qui donne $x_n \to \bar{x}$ d'après l'uniforme continuité de J^*. □

3 Résultats d'existence pour les processus de rafle non convexes dépendants de l'état dans les espaces de Banach lisses

Dans ce chapitre, nous étendons du cas convexe au cas non convexe dans les espaces de Banach 2-uniformément lisses, les résultats d'existence pour des processus de rafle non convexes dépendants de l'état introduits et prouvés récemment dans [14]. Dans notre étude, nous allons utiliser des nouveaux résultats sur les ensembles uniformément V-prox-reguliers prouvés dans [15].

3.1 Introduction

Dans [14], les auteurs ont étudié l'extention suivante du processus de rafle convexe dépendant de l'état du cas des espaces de Hilbert H au cas des espaces de Banach réflexifs et lisses X:

> Trouver $u : [0,T] \to X$ telle que $J(u) : [0,T] \to X^*$ est absolument continue et
>
> $$\begin{cases} -\frac{d}{dt}J(u(t)) & \in & N(C(t,u(t)); u(t)) \text{ p.p sur } I; \\ u(t) & \in & C(t,u(t)), \quad \forall t \in [0,T] \end{cases} \qquad (SDSP)$$

où $J : X \to X^*$ est l'application de dualité normalisée définie de X dans X^*.

En prenant la multifonction C à valeurs non convexes et en remplaçant le cône normal $N(C(t,u(t));u(t))$ dans (SDSP) par le cône normal de Clarke $N^C(C(t,u(t));u(t))$, on obtient le problème de rafle non convexe dépendant de l'état suivant:

Trouver $u : [0,T] \to X$ telle que $J(u) : [0,T] \to X^*$ est absolument continue et

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt}J(u(t)) & \in & N^C(C(t,u(t));u(t)) \text{ p.p sur } I; \\ u(t) & \in & C(t,u(t)), \quad \forall t \in [0,T] \end{cases} \tag{$SDNSP$}$$

Le problème (SDNSP) coincide clairement avec le problème de rafle non convexe introduit et étudié pour le cas des espaces de Hilbert dans lequel l'application de dualité J n'est rien d'autre que l'application identité. L'étude de l'existence des solutions de (SDNSP) dans les espaces de Hilbert a été abordée dans plusieurs papiers (voir par exemple Chapter 3 dans [4] et les reférences dedans) et l'existence des solutions dans le cas convexe dans les espaces de Banach a été prouvé dans [13, 12].

3.2 Résultats principaux

Le résultat principal de ce chapitre est comme suit:

Théorème 3.2.1. *Soient X un espace de Banach 2-uniformément lisse et q-uniformément convexe, $T > 0$, $I = [0,T]$, et $C : I \times X \rightrightarrows X$ une multifonction bornée et à valeurs uniformément V-prox-regulières généralisées avec une constante $r > 0$, et satisfaisant pour tous $t, t' \in I$, $x, x' \in X$ et $u \in X$*

$$|d_{C(t',x')}(u) - d_{C(t,x)}(u)| \leq |v(t') - v(t)| + \lambda \|J(x') - J(x)\|, \tag{3.2.1}$$

où $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction absolument continue et $\lambda > 0$. De plus, supposons que la fonction v dans (3.2.1) est convexe, $\lambda \in (0, \min\{1, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta_l^*}{\beta_l}}\})$[1] *et la condition de compacité suivante est satisfaite:*

$\forall t \in I$ et tout ensemble borné A dans X^* avec $\gamma(A) > 0$, $L > 0$ on a

$$\gamma(J(C(t, J^*(A))) \cap L\mathbb{B}^*) < \gamma(A), \tag{3.2.2}$$

où γ est une mesure de non-compacité (Kuratowski ou Hausdorff) sur X^*. Alors, le problème $(SDNSP)$ a au moins une solution $u : I \to X$ avec $J(u) : I \to X^*$ étant absolument continue telle que

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt}J(u(t)) & \in & N^C(C(t, u(t)); u(t)) \text{ p.p sur } I; \\ u(t) & \in & C(t, u(t)), \quad \forall t \in I. \end{cases} \tag{SDNSP}$$

Preuve. En premier lieu, soit $l > 0$ la borne de la multifonction C, i.e.,

$$C(t, x) \subset l\mathbb{B}, \quad \forall t \in I, \forall x \in X.$$

En utilisant Lemme 1.0.8 on obtient un certain $\beta > 0$ dépendant de la constante l et de l'espace X tels que

$$V(J(x), y) \leq \beta_l \|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in l\mathbb{B}. \tag{3.2.3}$$

De même, puisque X^* est 2-uniformément convexe, on obtient d'après Partie 3 du Lemme 1.0.8, l'existence d'un réel positif $\beta_l^* > 0$ dépendant seulement de X^* tel que:

$$\beta_l^* \|J(x) - J(y)\|^2 \leq V_*(J^*(J(y)), J(x)), \quad \forall x, y \in l\mathbb{B}, \tag{3.2.4}$$

où V_* est définie sur $X^{**} \times X^*$ similairement à la fonctionnelle V, i.e., $V_* : X^{**} \times X^* \to \mathbf{R}$ est définie par

$V_*(x^{**}, x^*) = \|x^{**}\|^2 - 2\langle x^{**}, x^* \rangle + \|x^*\|^2$, pour tout $x^* \in X^*$ et tout $x^{**} \in X^{**}$.

[1] *Les constantes β_l^* et β_l sont comme dans la preuve du Théorème 3.2.1*

Puisque X est réflexif ($X^{**} = X$), la fonctionnelle V_* a la forme plus simple suivante:

$V_*(x, x^*) = \|x\|^2 - 2\langle x, x^*\rangle + \|x^*\|^2 = V(x^*, x)$, pour tout $x^* \in X^*$ et tout $x \in X$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} V_*(J^*(J(y)), J(x)) &= \|J^*(J(y))\|^2 - 2\langle J^*(J(y)), J(x)\rangle + \|J(x)\|^2 \\ &= \|y\|^2 - 2\langle y, J(x)\rangle + \|x\|^2 = V(J(x), y), \end{aligned}$$

et donc l'inégalité (3.2.4) devient

$$\beta_l^* \|J(x) - J(y)\|^2 \leq V(J(x), y), \quad \forall x, y \in l\mathbb{B}. \tag{3.2.5}$$

Supposons que $\lambda \in (0, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta_l^*}{\beta_l}})$. Sans perte de généralité, supposons que $T = 1$ et $\dot{v}(t) \geq 0$ pour presque tout $t \in I$. Considérons pour tout $n \in N$ la partition suivante de I

$$I_{n,0} = \{0\}, \quad I_{n,i+1} = (t_{n,i}, t_{n,i+1}], \quad t_{n,i} = \frac{i}{2^n}, \quad 0 \leq i \leq 2^n - 1.$$

Posons: $\mu_n := \dfrac{1}{2^n}$, $\epsilon_{n,i} := \displaystyle\int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} \dot{v}(s)ds$ et $\epsilon_n := \max\{\epsilon_{n,i};\quad 0 \leq i \leq 2^n - 1\}$. On a clairement, $\epsilon_n \downarrow 0$ et donc, on peut fixer un certain $n_0 \geq 1$ assez large tel que l'inégalité suivante soit satisfaite

$$\epsilon_n < \frac{r}{2\sqrt{\beta_l}}, \text{ pour tout } n \geq n_0.$$

On définit par induction mathématique l'algorithme suivant: Pour tout $n \geq n_0$ soit

$$\begin{aligned} u_{n,0} &:= x_0; \\ u_{n,i+1} &\in \pi(C(t_{n,i+1}, u_{n,i}); J(u_{n,i})), \text{ pour tout } 0 \leq i \leq 2^n - 1. \end{aligned}$$

Commençons d'abord par prouver la bonne définition de l'algorithme précédent, en utilisant la V-prox-régularité généralisée uniforme des valeurs de C. Pour cela, on doit démontrer l'affirmation suivante:

Affirmation 1. $\{u^*_{n,i} := J(u_{n,i})\}_n \subset U^V_{C(t_{n,i+1},u_{n,i})}(r), \quad \forall n \geq n_0, \forall\, 0 \leq i \leq 2^n - 1$.

Fixons $n \geq n_0$. En utilisant le fait que $u_{n,0} \in C(t_{n,0}, u_{n,0})$ et l'hypothèse (3.2.1) sur C, on obtient:

$$\begin{aligned} d_{C(t_{n,1},u_{n,0})}(u_{n,0}) &= d_{C(t_{n,1},u_{n,0})}(u_{n,0}) - d_{C(t_{n,0},u_{n,0})}(u_{n,0}) \\ &\leq \int_{t_{n,0}}^{t_{n,1}} \dot{v}(s)ds \leq \epsilon_{n,0} \leq \epsilon_n. \end{aligned}$$

D'après (3.2.3) et le fait que $u_{n,0} \in l\mathbb{B}$, on peut écrire

$$V(J(u_{n,0}), y) \leq \beta_l \|u_{n,0} - y\|^2, \quad \forall y \in C(t_{n,1}, u_{n,0}) \subset l\mathbb{B}$$

et donc,

$$\begin{aligned} d^V_{C(t_{n,1},u_{n,0})}(J(u_{n,0})) &= \inf_{y\in C(t_{n,1},u_{n,0})} V(J(u_{n,0}), y) \\ &\leq \beta_l \inf_{y\in C(t_{n,1},u_{n,0})} \|u_{n,0} - y\|^2 \\ &\leq \beta_l d^2_{C(t_{n,1},u_{n,0})}(u_{n,0}) \leq \beta_l \epsilon^2_{n,0} < \beta_l \epsilon^2_n < r^2, \end{aligned}$$

i.e., $J(u_{n,0}) \in U^V_{C(t_{n,1},u_{n,0})}(r)$ de sorte que l'affirmation soit vraie pour $i = 0$. Supposons maintenant que l'affirmation est vraie pour tout $0 \leq i \leq k - 1$, i.e., $J(u_{n,k-1}) \in U^V_{C(t_{n,k},u_{n,k-1})}(r)$ et on doit la montrer pour k, i.e., $J(u_{n,k}) \in U^V_{C(t_{n,k+1},u_{n,k})}(r)$. En premier lieu, on peut définir d'après Proposition 1.0.7 le point $u_{n,k}$ comme une projection généralisée de $J(u_{n,k-1})$ et donc $u_{n,k} \in C(t_{n,k}, u_{n,k-1})$ avec $V(J(u_{n,k-1}); u_{n,k}) = d^V_{C(t_{n,k},u_{n,k-1})}(J(u_{n,k-1}))$.
Ainsi, d'après (3.2.1) on obtient

$$d_{C(t_{n,k+1},u_{n,k})}(u_{n,k}) = d_{C(t_{n,k+1},u_{n,k})}(u_{n,k}) - d_{C(t_{n,k},u_{n,k-1})}(u_{n,k})$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_{t_{n,k}}^{t_{n,k+1}} \dot{v}(s)ds + \lambda \|J(u_{n,k}) - J(u_{n,k-1})\| \\ &\leq \epsilon_{n,k} + \lambda \|J(u_{n,k}) - J(u_{n,k-1})\|. \end{aligned}$$

En utilisant une deuxième fois (3.2.3) et le fait que $u_{n,k} \in C(t_{n,k}, u_{n,k-1}) \subset l\mathbb{B}$, on obtient

$$V(J(u_{n,k}), y) \leq \beta_l \|u_{n,k} - y\|^2, \quad \forall y \in C(t_{n,k+1}, u_{n,k}) \subset l\mathbb{B}$$

et donc, d'après (3.2.1) une deuxième fois on obtient

$$\begin{aligned} d^V_{C(t_{n,k+1},u_{n,k})}(J(u_{n,k})) &\leq \beta_l d^2_{C(t_{n,k+1},u_{n,k})}(u_{n,k}) \\ &\leq \beta_l(\epsilon_n + \lambda \|J(u_{n,k}) - J(u_{n,k-1})\|)^2. \quad (3.2.6) \end{aligned}$$

D'une autre part, puisque $u_{n,k}, u_{n,k-1} \in l\mathbb{B}$, on a d'après (3.2.5)

$$\|J(u_{n,k}) - J(u_{n,k-1})\|^2 \leq \frac{1}{\beta_l^*} V(J(u_{n,k-1}); u_{n,k}) = \frac{1}{\beta_l^*} d^V_{C(t_{n,k},u_{n,k-1})}(J(u_{n,k-1})) \leq \frac{r^2}{\beta_l^*}.$$

Par conséquent, l'inégalité (3.2.6) devient

$$\begin{aligned} d^V_{C(t_{n,k+1},u_{n,k})}(J(u_{n,k})) &\leq \beta_l(\epsilon_n + \lambda \|J(u_{n,k}) - J(u_{n,k-1})\|)^2 \\ &\leq \beta_l(\epsilon_n + \lambda \frac{r}{\sqrt{\beta_l^*}})^2 < r^2, \quad (3.2.7) \end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle du choix de λ et n_0. Cette inégalité (3.2.7) signifie que $J(u_{n,k}) \subset U^V_{C(t_{n,k+1},u_{n,k})}(r)$. L'affirmation 1 est donc prouvée pour k. Par récurrence, elle est vraie pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $0 \leq i \leq 2^n - 1$. En combinant l'affirmation ci-dessus et Proposition 1.0.7, la projection généralisée dans notre construction est bien définie et donc, la suite de points $\{u_{n,i}\}_{0 \leq i \leq 2^n - 1}$ est bien définie, pour tout $n \geq n_0$. En utilisant ces points, nous définissons sur

I une suite d'applications affines par morceaux $(u_n^*)_n$ et une suite d'applications non linéaires $(u_n)_n$ comme suit:

$$\begin{aligned} u_n^*(0) &= u_{n,0}^*, \\ u_n^*(t) &:= u_{n,i}^* + \frac{(v(t)-v(t_{n,i}))}{\epsilon_{n,i}}(u_{n,i+1}^* - u_{n,i}^*), \quad \forall t \in I_{n,i+1}, \\ u_n(t) &:= J^*(u_n^*(t)). \end{aligned}$$

Il est clair que l'application u_n^* est continue sur I et differentiable p.p. sur I avec $\dot{u}_n^*(t) = \frac{u_{n,i+1}^* - u_{n,i}^*}{\epsilon_{n,i}}\dot{v}(t)$, p.p sur I.

En utilisant la définition de cône normal V-proximal, on peut écrire

$$u_{n,i+1}^* - u_{n,i}^* \in -N^\pi\left(C(t_{n,i+1}, u_{n,i}); u_{n,i+1}\right), \text{ pour p.t. } t \in I,$$

ce qui donne

$$-\dot{u}_n^*(t) = -\dot{v}(t)\frac{u_{n,i+1}^* - u_{n,i}^*}{\epsilon_{n,i}} \in N^\pi\left(C(t_{n,i+1}, u_{n,i}); u_{n,i+1}\right). \quad (3.2.8)$$

On définit maintenant sur tout sous-intervalle $I_{n,i+1}$, deux fonctions $\theta_n, \rho_n : I \to I$ par

$$\theta_n(0) = \rho_n(0) = 0, \quad \rho_n(t) = t_{n,i}; \quad \theta_n(t) = t_{n,i+1}, \text{ pour tout } t \in I_{n,i+1}.$$

Ainsi, l'inclusion (3.2.8) devient

$$-\dot{u}_n^*(t) \in N^\pi(C(\theta_n(t), u_n(\rho_n(t))); u_n(\theta_n(t))) \quad \text{pour p.t. } t \in I. \quad (3.2.9)$$

De même, on a par construction

$$u_n(\theta_n(t)) \in C(\theta_n(t), u_n(\rho_n(t))), \forall t \in I \text{ et tout } n \geq n_0. \quad (3.2.10)$$

Montrons la compacité de la suite des applications $\{u_n^*\}_n$.

Affirmation 2. Compacité de $\{u_n^*\}_n$.

Commençons tout d'abord par trouver une borne supérieure de l'expression $\|u_{n,i+1}^* - u_{n,i}^*\|$ qui va être utilisée dans la suite. Puisque X est 2-uniformément lisse, alors X^* est 2-uniformément convexe et donc on peut écrire pour certaines constantes $\beta_l > 0$ et $\beta_l^* > 0$ d'après Lemme 1.0.8 les deux inégalités suivantes:

$$V(J(x), y) \leq \beta_R \|y - x\|^2, \forall x, y \in l\mathbb{B}, \tag{3.2.11}$$

et

$$V_*(J^*(x^*), y^*) \geq \beta_l^* \|y^* - x^*\|^2, \forall x^*, y^* \in l\mathbb{B}_*. \tag{3.2.12}$$

En combinant le fait que $V_*(x, x^*) = V(x^*, x)$, pour tous $x^* \in X^*$ et $x \in X$ avec les inégalités (3.2.11) et (3.2.12) on obtient les estimations suivantes:

$$\beta_l^* \|J(x) - J(y)\|^2 \leq V(J(x), y) \leq \beta_l \|y - x\|^2, \forall x, y \in l\mathbb{B}. \tag{3.2.13}$$

En appliquant ces estimations avec la suite des points $\{u_{n,i}\}_n$, qui est bornée par l, on obtient

$$\beta_l^* \|J(u_{n,i+1}) - J(u_{n,i})\|^2 \leq V(J(u_{n,i}), u_{n,i+1}) \leq \beta_l \|u_{n,i+1} - u_{n,i}\|^2,$$

ce qui assure d'après la construction de la suite $\{u_i^n\}_n$ et de l'inégalité (3.2.13) que

$$\beta_l^* \|J(u_{n,i+1}) - J(u_{n,i})\|^2 \leq d^V_{C(t_{n,i+1}, u_{n,i})}(J(u_{n,i})) \leq \beta_l d^2_{C(t_{n,i+1}, u_{n,i})}(u_{n,i}).$$

D'où,

$$\|J(u_{n,i+1}) - J(u_{n,i})\| \leq \beta d_{C(t_{n,i+1}, u_{n,i})}(u_{n,i})$$

où $\beta := \sqrt{\frac{\beta_l}{\beta_l^*}}$. En utilisant (3.2.1) on obtient

$$\|J(u_{n,i+1}) - J(u_{n,i})\| \quad \leq \quad \beta \left[d_{C(t_{n,i+1}, u_{n,i})}(u_{n,i}) - d_{C(t_{n,i}, u_{n,i-1})}(u_{n,i})\right]$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \beta\left[v(t_{n,i+1}) - v(t_{n,i}) + \lambda \|J(u_{n,i}) - J(u_{n,i-1})\|\right] \\
&\leq \beta\epsilon_{n,i} + \beta\lambda\|J(u_{n,i}) - J(u_{n,i-1})\|
\end{aligned}
$$

et donc, par récurrence,

$$
\begin{aligned}
\|J(u_{n,i+1}) - J(u_{n,i})\| &\leq \beta\epsilon_{n,i} + \beta\lambda\left[\beta\epsilon_{n,i-1} + \beta\lambda\|J(u_{n,i-1}) - J(u_{n,i-2})\|\right] \\
&\leq \beta\epsilon_{n,i} + \beta^2\lambda\epsilon_{n,i-1} + (\beta\lambda)^2\|J(u_{n,i-1}) - J(u_{n,i-2})\| \\
&\leq \beta\epsilon_{n,i} + \beta^2\lambda\epsilon_{n,i-1} + \beta^3\lambda^2\epsilon_{n,i-2} + \beta^3\lambda^3\|J(u_{n,i-2}) - J(u_{n,i-3})\| \\
&\vdots \\
&\leq \beta\epsilon_{n,i} + \beta^2\lambda\epsilon_{n,i-1} + \cdots + \beta^i\lambda^{i-1}\epsilon_{n,1} + \beta^i\lambda^i\|J(u_{n,1}) - J(u_{n,0})\|
\end{aligned}
$$

En utilisant le fait que $u_{n,0} \in C(0, u_{n,0})$ et l'hypothèse (3.2.1) sur C on obtient

$$
\|J(u_{n,1}) - J(u_{n,0})\| \leq \beta[d_{C(t_{n,1},u_{n,0})}(u_{n,0}) - d_{C(t_{n,0},u_{n,0})}(u_{n,0})] \leq \beta\epsilon_{n,0}. \quad (3.2.14)
$$

Maintenant, on applique la convexité de la fonction v pour pouvoir écrire:

$$
\epsilon_{n,0} \leq \epsilon_{n,1} \leq \cdots \leq \epsilon_{n,i-1} \leq \epsilon_{n,i}, \text{ pour tout } 0 \leq i \leq 2^n - 1.
$$

Avec l'inégalité (3.2.14), ceci donne

$$
\begin{aligned}
\|J(u_{n,i+1}) - J(u_{n,i})\| &\leq \beta\epsilon_{n,i} + \beta^2\lambda\epsilon_{n,i-1} + \cdots + \beta^i\lambda^{i-1}\epsilon_{n,1} + \beta^{i+1}\lambda^i\epsilon_{n,0} \\
&\leq \beta\epsilon_{n,i}(1 + \beta\lambda + \cdots + \beta^{i-1}\lambda^{i-1} + \beta^i\lambda^i) \\
&\leq \beta\epsilon_{n,i}\sum_{j=0}^{i}(\beta\lambda)^j = \beta\epsilon_{n,i}\frac{1-(\beta\lambda)^{i+1}}{1-\beta\lambda}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, notre condition sur λ assure que $\beta\lambda \in (0, 1)$ et donc

$$
\|J(u_{n,i+1}) - J(u_{n,i})\| \leq \frac{\beta\epsilon_{n,i}}{1-\beta\lambda}, \text{ pour tout } 0 \leq i \leq 2^n - 1. \quad (3.2.15)
$$

En tenant compte de la définition de u_n^*, cette inégalité donne

$$\|\dot{u}_n^*(t)\| = \frac{\dot{v}(t)}{\epsilon_{n,i}} \|J(u_{n,i+1}) - J(u_{n,i})\| \leq \delta \dot{v}(t), \quad \text{p.p. } t \in I, \tag{3.2.16}$$

où $\delta := \frac{\beta}{1-\beta\lambda}$.

Les suites u_n^* et u_n sont clairement continues sur tout l'intervale I et u_n^* est différentiable sur $I \setminus \{t_{n,i}; 0 \leq i \leq 2^n - 1\}$ avec $\dot{u}_n^*(t) = \frac{\dot{v}(t)}{\epsilon_{n,i}} \left[u_{n,i+1}^* - u_{n,i}^*\right]$,pour tout $t \in I \setminus \{t_{n,i}; 0 \leq i \leq 2^n - 1\}$. On doit vérifier que u_n^* est absolument continue sur I. On peut facilement, vérifier que, pour tout $t, t' \in I_{n,i}$

$$u_n^*(t') - u_n^*(t) = \frac{v(t') - v(t)}{\epsilon_{n,i}} \left[u_{n,i+1}^* - u_{n,i}^*\right].$$

Donc pour tout $t, t' \in I_{n,i}$ avec $t \leq t'$, on obtient

$$\|u_n^*(t') - u_n^*(t)\| \leq \frac{\|u_{n,i+1}^* - u_{n,i}^*\|}{\epsilon_{n,i}} \left[v(t') - v(t)\right] \leq \delta \left[v(t') - v(t)\right], \tag{3.2.17}$$

et donc, par addition, cette inégalité reste valide pour tout $t, t' \in I$ avec $t \leq t'$. Ceci assure que l'application u_n^* est continue absolument sur I, pour tout $n \geq n_0$.

D'autre part, d'après la condition (3.2.1) sur C et le fait que $u_n(\theta_n(t)) \in C(\theta_n(t), u_n(\rho_n(t)))$, on peut écrire

$$\begin{aligned} d_{C(t,u_n(t))}(u_n(t)) &= \left[d_{C(t,u_n(t))}(u_n(t)) - d_{C(\theta_n(t),u_n(\rho_n(t)))}(u_n(t))\right] \\ &+ \left[d_{C(\theta_n(t),u_n(\rho_n(t)))}(u_n(t)) - d_{C(\theta_n(t),u_n(\rho_n(t)))}(u_n(\theta_n(t)))\right] \\ &\leq \left(\int_t^{\theta_n(t)} \dot{v}(s)ds\right) + \lambda\nu_l \|u_n(\rho_n(t)) - u_n(t)\| + \|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\|. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que X^* est q^*-uniformément lisse (car X est q-uniformément convexe) avec $q^* = \frac{q}{q-1}$) et la Partie 4 dans Lemme 1.0.8, on a la continuité de

Holder de J^* sur les ensembles bornés et donc on peut trouver un réel positif $\nu_l^* > 0$ tel que:

$$\begin{aligned}\|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\| &= \|J^*(u_n^*(\theta_n(t))) - J^*(u_n^*(t))\| \\ &\leq \nu_l^* \|u_n^*(\theta_n(t)) - u_n^*(t)\|^{\frac{1}{q-1}} \leq \nu_l^* [\delta\epsilon_n]^{\frac{1}{q-1}}\end{aligned}$$

et, similairement, on a

$$\|u_n(\rho_n(t)) - u_n(t)\| \leq \nu_l^* [\delta\epsilon_n]^{\frac{1}{q-1}}.$$

Ainsi, on obtient

$$d_{C(t,u_n(t))}(u_n(t)) \leq \epsilon_n + (\lambda\nu_l + 1)\nu_l^* [\delta\epsilon_n]^{\frac{1}{q-1}}.$$

Cela peut être reécrit comme suit:

$$u_n(t) \in C(t, u_n(t)) + \eta_n \mathbb{B}, \text{ pour tout } n \geq n_0 \text{ pour tout } t \in I,$$

où $\eta_n := \epsilon_n + (\lambda\nu_l + 1)\nu_l^* [\delta\epsilon_n]^{\frac{1}{q-1}}$. Ceci garantit que $u_n(t) = c_n(t) + \eta_n b_n(t)$ pour un certain $c_n(t) \in C(t, u_n(t))$ et $b_n(t) \in \mathbb{B}$. En utilisant, maintenant, la continuité Lispchitzienne de J dans les espaces 2-uniformément lisse du Lemme 1.0.8, on peut écrire

$$\begin{aligned}d_{J(C(t,u_n(t)))}(J(u_n(t))) &= d_{J(C(t,u_n(t)))}(J(c_n(t) + \eta_n b_n(t))) \\ &= d_{J(C(t,u_n(t)))}(J(c_n(t) + \eta_n b_n(t))) - d_{J(C(t,u_n(t)))}(J(c_n(t))) \\ &\leq \|J(c_n(t) + \eta_n b_n(t))) - J(c_n(t))\| \\ &\leq \nu_l \eta_n.\end{aligned}$$

Donc,

$$u_n^*(t) = J(u_n(t)) \in J(C(t, u_n(t))) + \nu_l \eta_n \mathbb{B}^*, \quad \forall t \in I, \forall n \geq n_0. \quad (3.2.18)$$

Nous allons montrer que la suite (u_n^*) admet une sous-suite uniformément convergente. Clairement, on a pour tout $n \geq n_0$ l'application u_n^* est absolument continue sur I avec $\|\dot{u}_n^*(t)\| \leq \delta \dot{v}(t)$ p.p. sur I. Donc, d'après le Théorème Arzela-Ascoli (voir [3]), il nous reste à montrer que $B^*(t) = \{u_n^*(t); n \geq n_0\}$ est relativement compacte dans X^* pour tout $t \in I$. Pour faire ceci, on suppose par contradiction que $B^*(t_0)$ n'est pas relativement compacte dans X^* pour un certain $t_0 \in I$. Donc, $\gamma(B^*(t_0)) > 0$. En utilisant la condition (3.2.2) et le fait que $B(t_0)$ est borné, il existe un nombre réel $\bar{\delta} \in (0, 1]$ tel que

$$\gamma(B^*(t_0)) - \gamma(J(C(t_0, J^*(B^*(t_0)))) \cap (l+1)\mathbb{B}^*) \geq 2\bar{\delta}.$$

Fixons, maintenant, un certain $n_1 \geq n_0$ tel que $\eta_n \leq \eta_{n_1} < \frac{\bar{\delta}}{2\nu_l}$, pour tout $n \geq n_1$.

Alors, l'inégalité (3.2.18) peut être reécrite sous la forme suivante:

$$u_n^*(t) \in J(C(t, J^*(B^*(t)))) + \nu_l \eta_n \mathbb{B}^* \subset J(C(t, J^*(B^*(t)))) \cap (l+1)\mathbb{B}^* + \nu_l \eta_{n_1} \mathbb{B}^*,$$

pour tout $n \geq n_1$ et tout $t \in I$, ce qui implique que

$$\{u_n^*(t); n \geq n_1\} \subset J(C(t, J^*(B^*(t))) \cap (l+1)\mathbb{B}^* + \nu_l \eta_{n_1} \mathbb{B}^*, \text{pour tout } t \in I.$$

Les propriétés de γ permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \gamma(B^*(t_0)) &= \gamma(\{u_n^*(t_0) : n \geq n_0\}) = \gamma(\{u_n^*(t_0) : n \geq n_1\}) \\ &\leq \gamma(J(C(t_0, J^*(B^*(t_0))) \cap (l+1)\mathbb{B}^*) + \gamma(\nu_l \eta_{n_1} \mathbb{B}^*) \end{aligned}$$

$$\leq \gamma(B^*(t_0)) - 2\bar{\delta} + 2\nu_l\eta_{n_1} < \gamma(B^*(t_0)) - 2\bar{\delta} + \bar{\delta} < \gamma(B^*(t_0)) - \bar{\delta},$$

ce qui contredit le fait que $\bar{\delta} > 0$. Par conséquent, l'ensemble $B^*(t)$ est relativement compacte dans X^* pour tout $t \in I$. Ainsi, le Théorème d'Arzela-Ascoli conclut que (u_n^*) admet une sous-suite (aussi notée u_n^*) qui converge uniformément vers une application u^* et la suite des dérivées $(\dot{u}_n^*)$ converge faiblement dans $L^1(I, X^*)$ vers $\dot{u}^*$. Puisque $\lim_n \theta_n(t) = t$, on peut écrire $\lim_n u_n^*(\theta_n(t)) = \lim_n u_n^*(t) = u^*(t)$ uniformément sur I. Alors, la suite $u_n = J^*(u_n^*)$ converge uniformément vers $u = J^*(u^*)$ sur I, parce que J^* est uniformément continue sur les ensembles bornés dans X^*.

Nous allons prouver que u^* est une solution du problème (SDNSP). Premièrement, on doit démontrer que $u(t) \in C(t, u(t))$ pour tout $t \in I$. On utislise une autre fois la condition (3.2.1) sur C pour écrire pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}
d_{C(t,u(t))}(u(t)) &= d_{C(t,u(t))}(u(t)) - d_{C(\theta_n(t),u_n(\rho_n(t)))}(u_n(\theta_n(t))) \\
&\leq \int_t^{\theta_n(t)} \dot{v}(s)ds + \|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| + \lambda\|J(u_n(\rho_n(t))) - J(u(t))\| \\
&\leq \epsilon_n + (\lambda\nu_l + 1)\|u_n - u\|_\infty. \qquad (3.2.19)
\end{aligned}$$

En passant à la limite quand $n \to \infty$ et en utilisant le fait que $\lim_n u_n(\theta_n(t)) = u(t)$ uniformément sur I, on obtient $d_{C(t,u(t))}(u(t)) = 0$. Cette égalité et la fermeture de l'ensemble $C(t, u(t))$ assurent que $u(t) \in C(t, u(t))$ pour tout $t \in I$. Revenons maintenant à (3.2.9). On a

$$-\dot{u}_n^*(t)) \in N^\pi(C(\theta_n(t), u_n(\rho_n(t))); u_n(\theta_n(t))), \text{ p.p. sur } I.$$

Donc, Proposition 1.0.9 donne pour presque tout $t \in I$ et pour tout $x \in C(t, u(t)) \subset l\mathbb{B}$

$$\langle -\frac{\dot{u}_n^*(t))}{\|\dot{u}_n^*(t))\|}; x - u_n(\theta_n(t))\rangle \leq \frac{2l + r}{r} d_{C(\theta_n(t),u_n(\rho_n(t)))}(x)$$

$$+ \quad \frac{1}{2r} V(J(u_n(\theta_n(t))); x). \tag{3.2.20}$$

Soient $t \in I$ pour lequel $\dot{u}_n^*(t)$ et $\dot{u}^*(t)$ existent, et $x \in C(t, u(t))$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
d_{C(\theta_n(t), u_n(\rho_n(t)))}(x) &= d_{C(\theta_n(t), u_n(\rho_n(t)))}(x) - d_{C(t,u(t))}(x) \\
&\leq \int_t^{\theta_n(t)} \dot{v}(s) ds + \lambda \nu_l \|u_n(\rho_n(t)) - u(t)\| \\
&\leq \epsilon_n + \lambda \nu_l \|u_n - u\|_\infty \to 0.
\end{aligned}$$

Posons $\bar{\epsilon}_n := \epsilon_n + \lambda \nu_l \|u_n - u\|_\infty$. Donc, $x \in C(\theta_n(t), u_n(\rho_n(t))) + \bar{\epsilon}_n \mathbb{B}$, i.e., $x = y_n(t) + \bar{\epsilon}_n b_n(t)$ avec $y_n(t) \in C(\theta_n(t), u_n(\rho_n(t)))$ et $b_n(t) \in \mathbb{B}$. Donc, (3.2.20) implique

$$\begin{aligned}
\langle -\dot{u}^*(t); x - u(t) \rangle &= \langle \dot{u}_n^*(t) - \dot{u}^*(t); x - u(t) \rangle + \langle -\dot{u}_n^*(t); x - u(t) \rangle \\
&= \langle \dot{u}_n^*(t) - \dot{u}^*(t); x - u(t) \rangle + \langle -\dot{u}_n^*(t); x - u_n(\theta_n(t)) \rangle \\
&+ \langle -\dot{u}_n^*(t); u_n(\theta_n(t)) - u(t) \rangle \\
&\leq \langle \dot{u}_n^*(t) - \dot{u}^*(t); x - u(t) \rangle + \langle -\dot{u}_n^*(t); u_n(\theta_n(t)) - u(t) \rangle \\
&+ \frac{(2l + r)\|\dot{u}_n^*(t)\|}{r} d_{C(\theta_n(t), u_n(\rho_n(t)))}(x) \\
&+ \frac{\|\dot{u}_n^*(t)\|}{2r} V(J(u_n(\theta_n(t))); x).
\end{aligned}$$

En utilisant la convergence faible dans X^* de $\dot{u}_n^*(t)$ vers $\dot{u}^*(t)$ et la convergence uniforme dans X de $u_n(\theta_n(t))$ et $u_n(\rho_n(t))$ vers $u(t)$, on peut passer à la limite dans l'inégalité précédente pour $n \to \infty$ pour obtenir

$$\begin{aligned}\langle -\dot{u}^*(t)); x - u(t)\rangle &\leq \frac{\delta \dot{v}(t)(2l+r)}{r} d_{C(t,u(t))}(x) + \frac{\delta \dot{v}(t)}{2r} V(J(u(t)); x) \\ &\leq \frac{\delta \dot{v}(t)}{2r} V(J(u(t)); x)\end{aligned}$$

de sorte que

$$\langle -\frac{\dot{u}^*(t))}{\dot{v}(t)}; x - u(t)\rangle \leq \frac{\delta}{2r} V(J(u(t)); x), \quad \forall x \in C(t, u(t)).$$

Par définition du cône normal V-proximal, ceci assure que

$$-\frac{d}{dt} J(u(t)) = -\dot{u}^*(t)) \in N^\pi(C(t, u(t)); u(t)) \subset N^C(C(t, u(t)); u(t)) \text{ p.p. } t \in I.$$

La preuve du Théorème 3.2.1 est donc achevée. □

Remarque 3.2.1.

1. Les hypothèses sur X sont satisfaites pour les espaces L^p, l^p, et $W^{k,p}$ avec $p \geq 2$ qui sont des espaces de Banach 2-uniformément lisses (voir par exemple [2]).

2. Une inspection de la preuve du résultat principal dans Théorème 3.2.1 montre que la condition (3.2.1) peut être remplacée par la condition suivante:

$$|d_{C(t',x')}(u) - d_{C(t,x)}(u)| \leq K(u, x, x')|v(t') - v(t)| + \lambda \|J(x') - J(x)\|, \tag{3.2.21}$$

pour tout $t, t' \in I$, $x', x \in X$, $u \in X$, où $K : X \times X \times X \to [0, \infty)$ est une fonction bornée sur les ensembles bornés.

3. Nous signalons que notre résultat d'existence dans Théorème 3.2.1 étend Théorème 3.1 dans [13], Théorème 4.5 dans [14] et Théorème 2.1 dans

[12] du cas convexe au cas non convexe dans les espaces de Banach q-uniformément convexes et 2-uniformément lisses. Dans le cas non convexe (ensembles uniformément V-prox-réguliers généralisés) nos résultats d'existence étendent Théorème 4.1 dans [16] du cas des espaces de Hilbert au cas des espaces de Banach 2-uniformément lisses et q-uniformément convexes.

Nous terminons avec deux résultats d'existence pour le problème de rafle non convexe perturbé. Ces résultats montrent l'importance des idées utilisées dans la preuve du Théorème 3.2.1 pour généraliser differents résultats d'existence du cas des espaces de Hilbert au cas des espaces de Banach. Nous commençons par

Théorème 3.2.2. *Soit X un espace de Banach séparable. Supposons que C vérifie toutes les hypothèses du Théorème 3.2.1. Soit $F : I \times X \rightrightarrows X^*$ une multifonction semicontinue supérieurement à valeurs convexes compactes dans X^* telle que $F(t,x) \subset \kappa$ pour tout $(t,x) \in I \times X$ pour un certain ensemble convexe compacte $\kappa \subset X^*$. Alors, pour tout point initial $x_0 \in C(0,x_0)$, il existe au moins une solution $u : I \to X$ telle que $J(u) : I \to X^*$ est absolument continue avec $J(u(t)) = J(x_0) + \int_0^t \dot{J}(u(s))ds$ et*

$$-\frac{d}{dt}J(u(t)) \in N^C(C(t,u(t));u(t)) + F(t,;u(t)) \text{ p.p sur } I.$$

avec $u(t) \in C(t,u(t)), \forall t \in I$.

Preuve. Nous utilisons les mêmes idées que dans la preuve du Théorème 3.2.1. Considérons l'algorithme suivant adapté au cas d'une perturbation multivoque:

$$\begin{aligned} u^*_{n,0} &:= J(x_0), \quad z^*_{n,0} \in F(t_{n,0}, J^*(u^*_{n,0})); \\ z^*_{n,i} &\in F(t_{n,i}, J^*(u^*_{n,i})); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{n,i+1} &\in \pi(C(t_{n,i+1},u_{n,i});u^*_{n,i}-\epsilon_{n,i}z^*_{n,i}), \text{ pour } 0\le i\le 2^n-1;\\ u^*_{n,i+1} &:= J(u_{n,i+1}), \end{aligned}$$

et pour tout $t\in I_{n,i}$ on pose

$$\begin{aligned} z^*_n(t) &:= z^*_{n,i};\\ u_n(t) &:= J^*(u^*_n(t));\\ u^*_n(t) &:= u^*_{n,i}+\frac{(v(t)-v(t_{n,i}))}{\epsilon_{n,i}}(u^*_{n,i+1}-u^*_{n,i}), \end{aligned}$$

et $u^*_n(0):=u^*_{n,0}$ et $z^*_n(0):=z^*_{n,0}$. Cet algorithme a été utilisé dans le Théorème 4.3 dans [12] dans le cas convexe avec C indépendante de l'état. La démonstration du théorème est une combinaison de la preuve du Théorème 3.2.1 et de celle du Théorème 4.3 dans [12]. La procédure suivie est décrite comme suit:

1. La preuve de la bonne définition de l'algorithme, la compacité des suites $\{u^*_n\}_n$ et $\{u_n\}_n$, et le passage à la limite, et la preuve que u^* est une solution de (SDNSPP) (Théorème 3.2.1);
2. La preuve de la compacité de la suite des applications $\{z^*_n\}_n$ vers une certaine limite z^* suit les mêmes idées de la preuve du Théorème 4.3 dans [12]. □

Dans le théorème suivant nous prouvons un résultat d'existence des solutions du problème de la rafle non convexe avec une forme spéciale d'une perturbation non bornée qui ne peut pas être déduit du théorème précédent.

Théorème 3.2.3. *Supposons que toutes les hypothèses du Théorème 3.2.1 sont satisfaites et soit $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction integrable. De plus, on suppose que $\lambda\max_{s\in I}e^{\int_0^T f(s)ds}\in\left(0,\min\{1,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^*_{l_0}}{\beta_{l_0}}}\}\right)$ avec $l_0:=l\max_{s\in I}e^{\int_0^T f(s)ds}$. Alors, pour tout $x_0\in C(0,x_0)$, il existe au moins une solution $u:I\to X$ telle que*

$J(u) : I \to X^*$ est absolument continue avec $J(u(t)) = J(x_0) + \int_0^t \dot{J}(u(s))ds$ et

$$-\frac{d}{dt}J(u(t)) \in N^C(C(t, e^{\int_0^t f(s)ds}u(t)); u(t)) + f(t)J(u(t)) \ p.p.\ sur\ I. \tag{SDNSPUP}$$

et $u(t) \in C(t, u(t)), \forall t \in I$.

Preuve. Nous suivons l'idée de la preuve du Théorème 6.4 dans [4] (pour le cas convexe voir Théorème 4.1 dans [17]). On définit

$$g(t) := \int_0^t f(s)ds \quad \text{ et } \quad D(t) := e^{g(t)}C(t, x), \quad \forall t \in I, \forall x \in X.$$

On peut aisément vérifier la condition (3.2.1) pour la multifonction D. En effet, pour tous $t, t' \in I$, $x, x' \in X$ et pour tout $u \in X$, on a

$$\begin{aligned}
d_{D(t,x)}(u) - d_{D(t',x')}(u) &= d_{e^{g(t)}C(t,x)}(u) - d_{e^{g(t')}C(t',x')}(u) \\
&= e^{g(t)}d_{C(t,x)}(e^{-g(t)}u) - e^{g(t')}d_{C(t',x')}(e^{-g(t')}u) \\
&= e^{g(t)}\left[d_{C(t,x)}(e^{-g(t)}u) - d_{C(t',x')}(e^{-g(t)}u)\right] \\
&+ e^{g(t)}\left[d_{C(t',x')}(e^{-g(t)}u) - d_{C(t',x')}(e^{-g(t')}u)\right] \\
&+ \left[e^{g(t)} - e^{g(t')}\right]\left[d_{C(t',x')}(e^{-g(t')}u)\right].
\end{aligned}$$

D'autre part, observons que

$$\begin{aligned}
d_{C(t',x')}(e^{-g(t')}u) &= d_{C(t',x')}(e^{-g(t')}u) - d_{C(0,x_0)}(x_0) \\
&\leq \|x_0 - e^{-g(t')}u\| + \int_0^{t'} \dot{v}(s)ds + \lambda\|J(x') - J(x_0)\| \\
&\leq (1 + \lambda)\|x_0\| + \|u\| \max_{s \in I} e^{-g(s)} + \int_0^T \dot{v}(s)ds + \lambda\|x'\| \\
&:= \gamma(x', u).
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}
|d_{D(t,x)}(u) - d_{D(t',x')}(u)| &\leq \max_{s \in I} e^{g(s)} \int_t^{t'} \dot{v}(s)ds + \max_{s \in I} e^{g(s)}\lambda\|J(x') - J(x)\| \\
&+ \max_{s \in I} e^{g(s)}\|u\||e^{-g(t)} - e^{-g(t')}| + \gamma(x', u)|e^{g(t)} - e^{g(t')}|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \max_{s\in I} e^{g(s)} \int_t^{t'} \dot{v}(s)ds + \max_{s\in I} e^{g(s)} \lambda \|J(x') - J(x)\| \\
&+ \max_{s\in I} e^{g(s)} \|u\| \int_t^{t'} \dot{g}(s)e^{-g(s)}ds + \gamma(x', u) \int_t^{t'} \dot{g}(s)e^{g(s)}ds \\
&\leq K(x, x', u) \int_t^{t'} \dot{h}(s)ds + \lambda_0 \|J(x') - J(x)\|,
\end{aligned}
$$

avec

$$
\lambda_0 := \lambda \max_{s\in I} e^{g(s)}, \quad h(t) := \int_0^t \left(\dot{v}(s) + \dot{g}(s)\left[e^{-g(s)} + e^{g(s)}\right]\right) ds, \text{ et}
$$

$$
K(x, x', u) := \max\left\{\max_{s\in I} e^{g(s)}; \|u\| \max_{s\in I} e^{g(s)}; \gamma(x', u)\right\}.
$$

Il est clair que K est une fonction bornée sur les ensembles bornés dans $X \times X \times X$. De même, on peut vérifier que $\ddot{h}(t) \geq 0$ p.p. sur I puisque f est positive et croissante sur I. Par conséquent, la condition (3.2.21) citée dans la Remarque 3.2.1 est satisfaite pour la multifonction D. Nous allons vérifier maintenant que les valeurs de D sont uniformément V-prox-regulières généralisées relativement à un nombre réel positif $r' > 0$. Observons que $d^V_{\rho S}(\rho x^*) = \rho^2 d^V_S(x^*)$, pour tous $x^* \in X^*$ et $\rho > 0$. En utilisant maintenant cette égalité et la définition de l'uniforme V-prox-regularité généralisée dans Définition 1.0.4, on peut montrer que l'ensemble ρS est uniformément V-prox-regulière généralisée relativement à un nombre réel positif $\rho r > 0$ toutes les fois que l'ensemble S est uniformément V-prox-regulière généralisée relativement à $r > 0$. Ainsi, sous les hypothèses loncées, les valeurs $D(t, x)$ sont uniformément V-prox-regulières généralisées relativement à $r' := re^{g(t)}$ et donc, les valeurs de D sont uniformément V-prox-regulières généralisées relativement à $r' := r \max_{t\in I} e^{g(t)}$. Maintenant, on peut appliquer Théorème 3.2.1 avec la multifonction D pour déduire une solution $v : I \to X$ telle que $J(v) : I \to X^*$ est absolument continue avec $J(v(t)) = J(x_0) + \int_0^t \dot{J}(v(s))ds$,

$$
-\frac{d}{dt}J(v(t)) \in N^C(D(t, v(t)); v(t)) \text{ p.p. sur } I, \tag{3.2.22}
$$

et $v(t) \in D(t, v(t)), \forall t \in I$. On doit vérifier que $u(t) := e^{-g(t)}v(t)$ est une solution de (SDNSPUP). Il est clair que $J(u)$ est absolument continue sur I avec

$$J(u(t)) = J(x_0) + \int_0^t \dot{J}(u(s))ds$$

et

$$\frac{d}{dt}J(v(t)) = e^{g(t)}\left[f(t)u^*(t) + \frac{d}{dt}J(u(t))\right] \text{ p.p. sur } t \in I.$$

Alors, l'inclusion (3.2.22) implique

$$-\frac{d}{dt}J(u(t)) \in N^C(e^{g(t)}C(t, e^{g(t)}u(t)); e^{g(t)}u(t)) + f(t)J(u(t)) \text{ p.p. sur } I. \tag{3.2.23}$$

D'autre part, on a

$$N^C(\rho S; \rho x) = N^C(S; x).$$

Cela donne

$$N^C(e^{g(t)}C(t, e^{g(t)}u(t)); e^{g(t)}u(t)) \quad = \quad N^C(C(t, e^{g(t)}u(t)); u(t)).$$

Ainsi, l'inclusion (3.2.23) devient

$$-\frac{d}{dt}J(u(t)) \in N^C(C(t, e^{\int_0^t f(s)ds}u(t)); u(t)) + f(t)J(u(t)) \text{ p.p. sur } I.$$

Puisque nous avons toujours $u(t) \in C(t, e^{\int_0^t f(s)ds}u(t))$, $\forall t \in I$, alors l'application u est une solution de (SDNSPUP) et donc la preuve est terminée. $\square$

Conclusion

L'ensemble des travaux de cette thèse est composé de deux chapitres. Chaque chapitre fait l'object d'un article publié dans un journal international. Dans le premier travail on a démontré l'existence des solutions des inégalités variationnelles non convexes (voir Chapitre 2). Dans le deuxième on a prouvé des résultats d'existence des inclusions différentielles non convexes du type processus de rafle (voir Chapitre 3). Dans le deuxième chapitre, on a proposé le problème quasi-variationnel non convexe suivant dans les espaces de Banach réflexifs et lisses:

$$\text{Trouver } \bar{x} \in C(\bar{x}) \quad \text{tel que } [-\partial^{\pi} F(\bar{x}, \cdot)(\bar{x})] \cap N^{\pi}(C(\bar{x}); \bar{x}) \neq \emptyset, \quad (PQVN[C,F]).$$

Ce problème est l'extension appropriée au cas non convexe dans les espaces de Banach de l'inégalité quasi-variationnelle convexe suivante:

$$\text{Trouver } \bar{x} \in C(\bar{x}) \quad \text{tel que} \quad F(\bar{x}, x) \geq 0 \quad \forall x \in C(\bar{x}). \qquad (IQ[C,F]).$$

Notre objectif dans ce chapitre était de prouver la convergence des algorithmes que nous avons proposés vers des solutions du problème quasi-variationnelle non convexe (PQVN[C,F]).

Dans le troisième chapitre, on a proposé le problème non convexe suivant dans les espaces de Banach réflexifs et lisses:

Trouver $u : [0,T] \to X$ telle que $J(u) : [0,T] \to X^*$ est absolument continue et

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt}J(u(t)) & \in & N^C(C(t,u(t));u(t)) \text{ p.p sur } I; \\ u(t) & \in & C(t,u(t)), \quad \forall t \in [0,T], \end{cases} \qquad (SDNSP)$$

On a démontré l'existence des solutions absolument continues de (SDNSP) sous certaines conditions naturelles sur la multifonction C et l'espace X. Les résultats de ce chapitre étendent plusieurs résultats, qui existent dèja dans la littérature, du cas convexe au cas nonconvexe et du cas des espaces Hilbertiens au cas des espaces de Banach réflexifs lisses.

Comme perspectives dans cette direction de recherches, on est en train d'étudier d'autres problèmes nonconvexes du type: inclusions differentielles et problèmes variationnels, dans les espaces de Banach. On cite quelques problèmes ouverts qui pourront interesser les chercheurs:

1. Le cas second ordre des processus de rafle nonconvexes dans les espaces de Banach.
2. Le cas second ordre des processus de rafle nonconvexes et dépendants de l'état dans les espaces de Banach.
3. Etudier les propriétés topologiques (fermeture, compacité,..., etc) des ensembles de solutions des problèmes proposés.

Références Bibliographiques

[1] Y.I. Alber, Generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications, *Funct. Different. Equations*, Vol. **1**, No. 1, pp. 1-21, 1994.

[2] Y. Alber and I. Ryazantseva, *Nonlinear ill-posed problems of monotone type*, Springer, Dordrecht, 2006.

[3] J.P. Aubin and A. Cellina, *Differential Inclusions: Set-Valued Maps and Viability Theory*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1984.

[4] M. Bounkhel, *Regularity Concepts in Nonsmooth Analysis, Theory and Applications*, Springer Optimization and Its Applications, Vol. **59**, 2012.

[5] M. Bounkhel, *Calculus rules for V-proximal subdifferentials in smooth Banach spaces*, Journal of Function Spaces, Vol. 2016 (2016), Article ID 1917387, 17 pages

[6] M. Bounkhel and Dj. Bounekhel, Inégalités Variationnelles Nonconvexes, (French) [Nonconvex variational inequalities], ESAIM Control Optim. Calc. Var., (2005), 11, No. 4, pp. 574-594.

[7] M. Bounkhel and Dj. Bounekhel, *Iterative Schemes for Nonconvex Quasi-Variational Problems with V-Prox-Regular Data in Banach Spaces*, Journal of Function Spaces, Vol. 2017, Article ID 8708065, 11 pages.

[8] Dj. Bounekhel, M. Bounkhel, and M. Bachar *State dependent nonconvex sweeping processes in smooth Banach spaces*, **Portugal. Math.**, Vol. 77, Fasc. 2, 2020, 197-218.

[9] M. Bounkhel, L. Tadj, and A. Hamdi, *Iterative Schemes to Solve Nonconvex Variational Problems*, JIPAM, Vol. 4, Issue 1, Article 14, 2003.

[10] M. Bounkhel and B. R. Al-Sinan, *An iterative method for nonconvex equilibrium problems*, JIPAM., (2006), 7, No. 2, Article 75, 8 pp.

[11] M. Bounkhel and R. Al-Yusof, *Proximal Analysis in reflexive smooth Banach spaces*, Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications, Vol. 73, Issue 7, 1921-1939, 2010.

[12] M. Bounkhel and R. Al-Yusof, *First and second order Convex Sweeping Processes in Reflexive smooth Banach spaces*, Set-Valued Var. Anal. 18, no. 2, 151-182, 2010.

[13] M. Bounkhel, *Existence of Solutions for convex sweeping processes in p-uniformly smooth and q- uniformly convex Banach spaces*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2012, pp. 1-6, 2012.

[14] M. Bounkhel and C. Castaing, *State dependent Sweeping process in reflexive smooth Banach spaces*, Set-valued and Variational Analysis, Vol. 20, Issue 2, pp. 187-201, 2012.

[15] M. Bounkhel and M. Bachar, *Generalized prox-regularity in reflexive Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. , Vol. 475, Issue 1, Pages 699-729, 2019.

[16] M. Bounkhel and L. Thibault, *Nonconvex swereping process and proxregularity in Hilbert space*, J. Nonlinear and Convex Anal. 6, 359-374, 2001.

[17] C. Castaing and M.D.P. Monteiro-Marques, *Evolution problems associated with nonconvex closed moving sets with bounded variation*, Port. Math., Vol. 53, No. 1, pp. 73-87, 1996.

[18] F.H. Clarke, R.J. Stern, P.R. Wolenski, Proximal smoothness and the lower C^2 property, *J. Convex Anal.*, Vol. 2, No. 1, pp. 117-144, 1995.

[19] R. Deville, G. Godefroy, V. Zizler, *Smoothness and Renormings in Banach spaces*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Longman Scientific & Technical, Harlow, UK, 1993.

[20] R. Deville, R. Gonzalo, and J.A. Jaramilo, *Renormings of Lp(Lq)*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., Vol. **126**, pp. 155-169, 1999.

[21] J. Li, *The generalized projection operator on reflexive Banach spaces and its applications*, J. Math. Anal. Appl. Vol. 306, pp. 55-71, 2005.

[22] A. Moudafi, *Second-order differential proximal methods for Equilbrium problems*, JIPAM, Vol. 4, Issue 1, Article 15, 2003.

[23] M. A. Noor, *Iterative Schemes for Nonconvex Variational Inequalities*, JOTA, Vol. 121, No. 2, 2004.

[24] M. A. Noor and K. I. Noor, *On equalibrium Problems* , Applied Mathematics E-Notes (AMEN), Vol. 4, 2004.

[25] M. A. Noor, K. I. Noor, and S. Zainab, *Some Iterative Methods for Solving Nonconvex Bifunction Equilibrium Variational Inequalities*, Journal of Applied Mathematics, Vol. 2012, Article 280451, 10 pages, 2012.

[26] R.A. Poliquin, R.T. Rockafellar and L. Thibault, Local differentiability of distance functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 352, No. 11, pp. 5231-5249, 2000.

[27] G. Stampacchia, Formes Bilinéaires coercives sur les ensembles convexes, Compte rendus de l'académie des sciences, Paris, Vol. 258, 4413-4416, 1964.

[28] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, 2000.

[29] M.M. Vainberg, *Variational Methods and Method of Monotone Operators in the Theory of Nonlinear Equations*, John Wiley, New York, 1973.