



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la recherche Scientifique
Université des Frères Mentouri Constantine

Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

N° d'ordre :.....

N° de série :.....

THÈSE

Présentée pour l'Obtention de Diplôme de Doctorat en Sciences

Par: LATELI Ahcene

Option : Analyse Numérique

THÈME

**Autour des Méthodes Spectrales pour la
Résolution des Équations aux Dérivées
Partielles**

Soutenue le: 27/01/2022

Devant le jury :

Khaled BESSILA	MCA.	Université des Frères Mentouri	Président
Tayeb HAMAIZIA	Prof.	Université des Frères Mentouri	Rapporteur
Amor BOUTAGHOU	MCA.	Université Yahia Fares - Médéa	Co-Rapporteur
Ali BOUSSAYOUD	MCA.	Université de Jijel	Examineur

Année Universitaire 2021/2022

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier **ALLAH** le Tout Puissant qui m'a donné la force, la volonté, la patience et le courage pour accomplir ce modeste travail.

Je voudrais remercier vivement mon directeur de recherche, le professeur **Tayeb HAMAIZIA**, pour avoir accepté de diriger ce travail, pour sa gentillesse, sa bonne volonté, sa disponibilité et sa patience ainsi que ces orientations et ces guidances avisées et son soutien indéfectible durant la préparation de ce travail. Dès le début de sa confiance à mon égard et à mon travail, il m'a donnée une énergie et une inspiration de surmonter toutes les difficultés.

J'adresse mes remerciements les plus sincères à mon co-encadrant **Dr. Amor BOUTAGHOU**, pour les conseils qu'il m'a prodigués pendant l'élaboration de cette thèse et durant cette période. Il m'a beaucoup apporté par son exigence de clarté et de rigueur ainsi que par son expérience.

J'adresse mes sincères remerciements à monsieur **Dr.Khaled BESSILA**, qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider ce jury.

Je remercie chaleureusement, monsieur **Dr. Ali BOUSSAYOUD**, d'avoir accepté d'examiner mon travail.

Enfin je remercie tous mes amis et tous ceux qui, de près ou de loin, m'ont permis de mener ce travail à son terme.

TABLE DES FIGURES

4.1 Le comportement de conditionnement de la matrice A , $(N, \ln(\rho(A)))$ (cas explicite)	80
4.2 Les graphes des fonctions b_k (cas explicite), k varié de 1 à 10 lorsque $N = 12$	80
4.3 Le comportement de l'erreur $(N, \ u - u_N\ _{L^2(\Lambda)})$, (cas explicite) lorsque $N = 12$	80
4.4 Graphe de la solution exacte de l'équation de diffusion de la chaleur avec source (cas explicite), lorsque $N = 12$	81
4.5 Graphe de la solution approximative de l'équation de diffusion de la chaleur avec source (cas explicite), lorsque $N = 12$	81
4.6 Graphe de la solution exacte de diffusion (cas explicite), lorsque $N = 12$	81
4.7 Graphes de la solution approximative de la diffusion (cas explicite), lorsque $N = 12$	81
4.8 Propriétés de la solution exacte de l'équation de la chaleur avec source (cas explicite), lorsque la variable t prend des valeurs constantes	81
4.9 Propriétés de la solution approximative de l'équation de la chaleur avec source (cas explicite), lorsque la variable t prend des valeurs constantes	81
4.10 Graphe de la solution approximative de l'équation de diffusion de la chaleur avec source (cas implicite), lorsque $N = 12$	82
4.11 Graphe de la solution de diffusion (cas implicite), lorsque $N = 12$	82
4.12 Les graphes des fonctions b_k (cas implicite), k varié de 1 à 10 lorsque $N = 12$	82
4.13 Propriétés de la solution approximative de l'équation de la chaleur avec source (cas implicite), lorsque la variable t prend des valeurs constantes	82

Table des matières

Introduction et présentation historique	3
1 Espaces et polynômes orthogonaux	7
1.1 Introduction	7
1.2 Espaces et normes	7
1.2.1 Espaces de Sobolev	7
1.2.2 Rappels sur le lemme de Lax-Milgram	10
1.2.3 Espaces discrets	11
1.3 Polynômes orthogonaux	12
1.3.1 Propriétés des polynômes orthogonaux dans $L^2(\Lambda)$	13
1.3.2 Propriétés des polynômes orthogonaux dans $L_1^2(\Lambda)$	31
2 Formules de quadrature	37
2.1 Introduction	37
2.2 Formules de quadrature dans $L^2(\Lambda)$	37
2.3 Formules de quadrature pondérée dans $L_1^2(\Lambda)$	51
2.4 Approximation polynomiale dans un rectangle	62
3 Etude de problème différentiel	64
3.1 Introduction	64
3.2 Problème continu	65
3.2.1 Espaces et normes	65
3.2.2 Formulation variationnelle	66
3.2.3 Existence et unicité de la solution	67
3.3 Problème discret	68
3.3.1 Formulation variationnelle	68

3.3.2	Existence et unicité de la solution	70
3.4	Estimation d'erreur	71
4	Approche numérique du problème différentiel	73
4.1	Introduction	73
4.2	Système linéaire et matrices	73
4.3	Resolution d'équation différentielle ordinaire	76
4.4	Solution approchée du problème	77
4.5	Intégration numérique	77
4.6	Conditionnement d'une matrice	78
4.7	Figures d'illustrations	79
4.7.1	Solution explicite	79
4.7.2	Solution implicite	82
4.8	Programmation	83
	Conclusion	89
	Perspectives	90
	Bibliographie	91

Introduction et présentation historique

Très peu d'équations différentielles sont solutionnées analytiquement. De plus chaque type d'équations requiert une méthode particulière de résolution. Par suite, la résolution de la plupart de ces équations nécessite l'utilisation de méthodes numériques. Un aspect très intéressant de ces méthodes est que chacune d'elles peut-être appliquée à la résolution d'un très grand nombre d'équations différentielles.

Les méthodes numériques de résolution des équations différentielles jouent un rôle très important dans plusieurs domaines scientifiques. Avec l'avantage des machines de computation numérique, notamment les ordinateurs, ces méthodes sont devenues aujourd'hui un outil essentiel pour résoudre les différents problèmes fondamentaux de notre assimilation des phénomènes scientifiques qui était difficile à résoudre dans le passé. Plusieurs méthodes numériques sont disponibles dans la littérature. Les principales méthodes sont les suivantes :

- Méthodes des différences finies.
- Méthodes des éléments finis.
- Méthodes des volumes finis.
- Méthodes spectrales.

Les méthodes spectrales sont des techniques d'approximation des solutions d'équations aux dérivées partielles. Leur principale caractéristique est que les solutions discrètes sont cherchées dans des espaces de polynômes de haut degré. En ce sens, la précision de ces méthodes n'est limitée que par la régularité de la fonction à approcher, au contraire des autres types d'approximation tels que les différences finies ou les éléments finis (il est en effet bien connu que la distance d'une fonction analytique à un espace de polynômes de degré $\leq N$ décroît exponentiellement avec le paramètre N). La technique pour calculer la solution approchée repose essentiellement sur la formulation variationnelle du problème continu : la discrétisation s'effectue alors en remplaçant l'espace de fonctions test par un

espace de polynômes et en évaluant les intégrales au moyen de formules de quadrature appropriées [12].

Les méthodes spectrales ont été introduites il y a près d'un demi-siècle, pour des problèmes munis de conditions aux limites périodiques. L'espace où est cherchée la solution approchée est dans ce cas formé de sommes finies de séries de Fourier. La combinaison de ce type d'approximation, connu depuis longtemps pour les techniques de développements asymptotiques, avec la Transformée de Fourier Rapide inventée par Cooley et Tukey [44] en 1965, a rendu ces méthodes compétitives dans le cadre du calcul scientifique. Les premières idées sont dues indépendamment à Kreiss et Olinger [34] et à Orszag [61], [62] et [63] et un grand nombre de résultats des dix premières années figurent dans le livre de Gottlieb et Orszag [23]. On réfère aussi au livre de Mercier [6] pour l'analyse numérique des méthodes spectrales en séries de Fourier.

Les méthodes spectrales consistent une classe de la discrétisation spatiale des équations différentielles, elles cherchent des solutions en termes d'une série de fonctions connues, régulières (les fonctions de base). À partir de ses fonctions on peut distinguer trois types de méthodes, à savoir **Galerkin**¹, **Tau** et **Collocation** [18] :

- **La méthode Tau** est une modification de la méthode de Galerkin, qui est applicable à des problèmes avec des conditions aux limites non périodiques, elle peut être vue comme un cas particulier de la méthode de Petrov-Galerkin (Zienkiewicz et Cheung (1967) [53], Babuska et Aziz (1972) [35]). Lanczos (1938) développa cette méthode (méthode de Tau) [21], et Orszag (1971) l'a appliquée et dans ce cas les fonctions de base sont les polynômes de Tchebyshev qui produisent des solutions très précises à la dynamique des fluides [63].

- **La méthode de Collocation** a été utilisée pour la première fois par Slater (1934) [38] et par Kantorovich (1934) [47] dans des applications spécifiques. Puis en 1937, Frazer, Jones et Skan [60] l'ont développée comme une méthode générale de résolution des équations différentielles ordinaires, ils ont utilisé une variété de fonctions de base et une distribution arbitraire des points de Collocation. Le travail de Lanczos (1938) [21] fut le premier travail présentant un bon choix soit pour les fonctions de base, soit pour la distribution des points de Collocation. La méthode de Collocation orthogonale a été reprise par Clenshaw (1957) [20], Clenshaw et Norton (1963) [19] et Wright (1964) [45]. qui appliquèrent les développements en polynômes de Chebyshev à des problèmes aux valeurs initiales. Cette technique fut développée pour les problèmes aux conditions limites par Villadsen et Stewart [43]. La méthode spectrale de collocation fut également

¹Boris Grigoryevitch Galerkin, né le 20 février 1871 à Polotsk (Biélorussie) et mort le 12 juillet 1945, est un mathématicien et un ingénieur russe. Son nom reste lié à une méthode de résolution approchée des structures élastiques.

appliquée aux équations aux dérivées partielles, pour des problèmes aux conditions limites périodiques par Kreiss et Olinger en 1972, qui l'ont appelée « méthode de Fourier » [34] et par Orszag en 1972, qui la qualifia de « pseudo-spectrale » [61].

- **La méthode de Galerkin** est applicable pour les équations avec des conditions aux limites périodiques ou homogènes [18]. La première application connue de cette méthode, qui est peut-être la plus esthétique pour les équations aux dérivées partielles, était pour la modélisation météorologique par Silberman [36] en 1954. La méthode spectrale de Galerkin reste difficilement utilisable, pour des problèmes comprenant des termes non linéaires plus compliqués.

Lanczos [21] a développé la méthode Tau. Bien qu'elle soit difficilement applicable à des problèmes non linéaires, elle reste bien utile pour des problèmes à coefficients constants ou pour des sous-problèmes linéaires, par exemple, pour des algorithmes semi-implicites en temps. En 1977, dans leur ouvrage [23], Gottlieb et Orszag décrivent l'état de l'art de la théorie des méthodes spectrales, ce qui contribua grandement à leur popularité. Plus récemment, l'ouvrage de Canuto, Hussaini, Quarteroni et Zang [17] donne un panorama de ces méthodes dans le domaine de la mécanique des fluides, ainsi que des résultats de simulations numériques et des résultats de convergence. Pour l'analyse numérique des méthodes spectrales on peut citer [4], [9], [11], [13], [23], [49], [56], [62] et [63].

Dans ce travail, on étudiera, par une méthode spectrale, un problème des équations aux dérivées partielles de type parabolique, posé dans un rectangle et munies des conditions aux limites de Dirichlet avec une condition initiale; la discrétisation reposant sur les polynômes orthogonaux de Legendre qui sont des fonctions propres d'opérateurs de Sturm-Liouville. On traitera également les problèmes donnés dans des espaces d'approximation formés de polynômes et on remplacera les intégrales figurant dans les formulations variationnelles discrètes par les formules de quadratures numérique de type Gaussienne. On utilisera un nombre de noeuds égal à la dimension de l'espace $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$.

On obtiendra alors que la solution approximative de l'équation de diffusion de la chaleur avec source par la méthode spectrale étudiée donne des résultats très satisfaisants et l'erreur décroît exponentiellement avec le paramètre N (le degré du polynôme de Legendre), et le conditionnement de chaque matrice du système est petit. Donc, la résolution du système linéaire est un problème stable par rapport aux perturbations du second membre.

Le plan de cette thèse est le suivant.

Dans le **premier chapitre**, on effectue quelques rappels sur les résultats de base qui seront utilisés par la suite : il contient, d'une part, quelques rappels sur les espaces de Sobolev avec ses normes associées et, d'autre part, on va aborder quelques rappels sur les polynômes orthogonaux sans et avec poids et leurs principales propriétés, et introduit

quelques transformations associées où les polynômes orthogonaux sont très largement utilisés en théorie de l'approximation.

Le deuxième chapitre expose de façon claire et élégante les formules de quadrature de Gauss, de Gauss-Lobatto et la formule de quadrature pondérée ainsi que l'étude de quelques estimations. Ces formules de quadrature étudiées servent à la construction de formules de quadrature numérique de grande précision.

Le troisième chapitre représente une application des polynômes orthogonaux pour la résolution numérique du problème donné avec les conditions aux limites de Dirichlet et de condition initiale. Ce chapitre commence par la formulation variationnelle du problème continu qui donne un accès à des résultats fondamentaux sur les caractères bien posé de l'équation, c'est -à- dire l'existence, l'unicité de la solution et la stabilité de cette solution par rapport à des perturbations de données, puis on effectue la discrétisation en remplaçant l'espace de fonctions tests par un espace de polynôme et en évaluant les intégrales au moyen des formules de quadrature appropriées. La formule de quadrature utilisée est la formule de Gauss-Lobatto de type Legendre appliquée dans la direction des x . Cette méthode équivaut à une méthode de collocation. Finalement on termine par l'étude d'erreur.

Le but du quatrième chapitre est de développer une méthode spectrale pour résoudre le problème de l'équation de diffusion de la chaleur avec source, en utilisant les matrices, de convertir le problème différentiel à un système d'équations ordinaires facile à résoudre ou à un système linéaire, d'indiquer comment le problème discret défini dans le chapitre trois peut être mis en œuvre sur ordinateur ; d'étudier le comportement de conditionnement de système, de donner une illustration graphique dans les cas des solutions explicites et implicites, et de faire la programmation en Maple.

Enfin, nous concluons sur les principaux résultats obtenus, nous présentons nos recommandations et nous projetons sur des perspectives d'avenir.

Liste des publications parues ou acceptées

A. Lateli, A. Boutaghou, T. Hamaizia, Spectral Method for Diffusion Equation With a Source Term. International Journal of Nonlinear Analysis and Applications, 2001-2082, (accepté le 04 September 2021).

Chapitre 1

Espaces et polynômes orthogonaux

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on rappelle quelques définitions et propriétés fondamentales des espaces de Sobolev et des espaces des polynômes qui constituent le cadre de l'analyse numérique des méthodes spectrales [12]. On utilise ces espaces pour donner la formulation variationnelle de problème fondamental donné, le lemme de Lax–Milgram permet alors de prouver l'existence et l'unicité de la solution. Puis, on étudie les propriétés de deux familles de polynômes orthogonaux sans et avec poids définissent sur Λ ; la famille des polynômes de Legendre dans $L^2(\Lambda)$ et une autre famille des polynômes qu'ils sont des combinaisons linéaires des polynômes de Legendre dans $L_1^2(\Lambda)$, qui seront sans cesse utilisées par la suite. On réfère à Szegö [31] et Bernardi, Maday, et Rapetti [12] pour des résultats beaucoup plus complets dans cette direction. On utilise ces propriétés pour la construction des formules de quadrature numérique de type Gaussienne, pour évaluer les intégrales intervenant dans la formulation variationnelle.

1.2 Espaces et normes

1.2.1 Espaces de Sobolev

Les notations utilisées dans cette thèse pour les espaces de Sobolev sont classiques. Les démonstrations des propriétés indiquées figurent en particulier dans les ouvrages de référence suivants : Adams [58], Dautray et Lions [59], Grisvard [54], Brezis [32], Lions et Magenes [54] et Nečas [41], et dans le livre de Bernardi, Dauge et Maday [14] pour les espaces à poids.

Dans ce qui suit, On désigne par Λ l'intervalle ouvert $] -1, 1[$, Le symbole ∂ suivi d'un nom d'ouvert, désigne sa frontière.

Notation 1.2.1 La dérivée d'une fonction (ou d'une distribution) u définie sur \mathbb{R} ou Λ sera notée u' ou $d_x u$; la dérivée d'ordre $\ell \in \mathbb{N}$ est notée $d_x^\ell u$. La dérivée partielle par rapport à x , resp. t , d'une fonction (ou d'une distribution) u définie sur \mathbb{R}^2 , Λ^2 ou $\Omega_2 =] -1, 1[\times] 0, T[$ est notée $\partial_x u$, resp. $\partial_t u$. Pour $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$ la dérivée d'ordre α_1 en x et d'ordre α_2 en t est notée $\partial_x^{\alpha_1} \partial_t^{\alpha_2} u$. On note $|\alpha|$ la longueur de α , i.e. $\alpha_1 + \alpha_2$. Ainsi $|\alpha|$ est l'ordre de la dérivée ci-dessus.

Définition 1.2.2 On note maintenant $L^2(\Lambda)$, l'espace des fonctions de carré intégrable sur Λ pour la mesure de Lebesgue

$$L^2(\Lambda) = \left\{ \varphi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}, \text{mesurable}; \int_{-1}^1 \varphi^2(x) dx < +\infty \right\}. \quad (1.1)$$

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(\Lambda)} = \int_{\Lambda} u(x)v(x) dx. \quad (1.2)$$

On note $\|\cdot\|_{L^2(\Lambda)}$ la norme

$$\|v\|_{L^2(\Lambda)} = \left(\int_{\Lambda} (v(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.3)$$

Définition 1.2.3 On désigne par $L_1^2(\Lambda)$, l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure $(1+x) dx$

$$L_1^2(\Lambda) = \left\{ \varphi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}, \text{mesurable}; \int_{-1}^1 \varphi^2(x) (1+x) dx < +\infty \right\}, \quad (1.4)$$

et on le munit de la norme

$$\|v\|_{L_1^2(\Lambda)} = \left(\int_{\Lambda} (v(x))^2 (1+x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Notation 1.2.4 **Définition 1.2.5** On note $L^2(\Omega_2)$, l'espace des fonctions de carré intégrable sur Ω_2 pour la mesure de Lebesgue

$$L^2(\Omega_2) = \left\{ \varphi : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}, \text{mesurable}; \int_{\Omega_2} \varphi^2(x, t) dx dt < +\infty \right\}.$$

On munit $L^2(\Omega_2)$ du produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(\Omega_2)} = \int_{\Lambda} u(x, t)v(x, t)dxdt. \quad (1.5)$$

La norme associée est donnée par

$$\|v\|_{L^2(\Omega_2)} = \left(\int_{\Omega_2} (v(x, t))^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.6)$$

Définition 1.2.6 On définit l'espace de Sobolev $H^1(\Lambda)$, l'espace des fonctions de $L^2(\Lambda)$ dont la dérivée au sens des distributions est associée à une fonction qui appartient également à $L^2(\Lambda)$, i.e.

$$H^1(\Lambda) = \{v \in L^2(\Lambda) / v_x \in L^2(\Lambda)\}$$

On munit $H^1(\Lambda)$ du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Lambda)} = \int_{\Lambda} (uv + u_x v_x) dx. \quad (1.7)$$

La norme associée est donnée par

$$\|v\|_{H^1(\Lambda)} = \left(\int_{\Lambda} ((v(x))^2 + (v_x(x))^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.8)$$

Définition 1.2.7 L'espace $H_0^1(\Lambda)$ est un sous-espace fermé de $H^1(\Lambda)$ donné par :

$$H_0^1(\Lambda) = \{v \in L^2(\Lambda) / v_x \in L^2(\Lambda), v(1) = v(-1) = 0\}.$$

Définition 1.2.8 Pour tout entier positif m , $H^m(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions u dans $L^2(\mathbb{R})$ telles que leurs dérivées jusqu'à l'ordre m appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$, il est muni de la semi-norme

$$|u|_{H^m(\mathbb{R})} = \|d_x^m u\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad (1.9)$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^m(\mathbb{R})} = \left(\sum_{\ell=0}^m \|d_x^\ell u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.10)$$

Sur Λ , les définitions sont analogues.

Définition 1.2.9 Pour tout entier positif m , $H^m(\mathbb{R}^2)$ est l'espace des fonctions u dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ telles que leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre m appartiennent à $L^2(\mathbb{R}^2)$, il est

muni de la semi-norme

$$\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^2)} = \left(\sum_{\alpha, |\alpha|=m} \|\partial_x^{\alpha_1} \partial_t^{\alpha_2} u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.11)$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^2)} = \left(\sum_{\alpha, |\alpha|\leq m} \|\partial_x^{\alpha_1} \partial_t^{\alpha_2} u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.12)$$

Sur Λ^2 et Ω_2 , les définitions sont analogues.

Définition 1.2.10 On désigne par $H_0^m(\Omega_2)$, l'adhérence dans $H^m(\Omega_2)$ de $\mathcal{D}(\Omega_2)$, ensemble des fonctions de classe C^∞ et à support compact dans Ω_2 .

Notation 1.2.11 *Définition 1.2.12* Soit m un entier positif. On note $H^{-m}(\Omega_2)$ le dual de l'espace $H_0^m(\Omega_2)$, et on le munit de la norme duale

$$\|f\|_{H^{-m}(\Omega_2)} = \sup_{v \in H_0^m(\Omega_2), v \neq 0} \frac{\langle f, v \rangle}{\|v\|_{H^m(\Omega_2)}},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit de dualité entre $H_0^m(\Omega_2)$ et son dual.

1.2.2 Rappels sur le lemme de Lax-Milgram

On écrit tout de suite l'énoncé de ce lemme, dû à Lax-Milgram [57] qui est à la base de l'étude de certaines équations aux dérivées partielles.

Lemme 1.2.13 (Théorème de Lax-Milgram) Soit V un espace de Hilbert séparable muni de la norme $\|\cdot\|_V$, et soit $l(\cdot)$ et $a(\cdot, \cdot)$ des formes linéaire et bilinéaire sur V et $V \times V$ respectivement ($l \in V'$), (l'espace dual de V).

On suppose que

1. $a(\cdot, \cdot)$ est continue :

$$\exists C_1 > 0, \forall u, v \in V, |a(u, v)| \leq C_1 \|u\|_V \cdot \|v\|_V. \quad (1.13)$$

2. $a(\cdot, \cdot)$ est coercive (elliptique) :

$$\exists C_2 > 0, \forall u \in V, a(u, u) \geq C_2 \|u\|_V^2. \quad (1.14)$$

3. $l(\cdot)$ est continue :

$$\exists C_3 > 0, \forall u \in V, |l(u)| \leq C_3 \|u\|_V, \quad (1.15)$$

alors il existe une unique solution u dans V du problème variationnel :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ dans } V \text{ tel que :} \\ \forall v \in V, a(u, v) = l(v) \end{cases} . \quad (1.16)$$

De plus cette solution vérifie

$$\|u\|_V \leq \frac{\|l\|_{V'}}{C_3}.$$

Preuve. Voir [59]. ■

1.2.3 Espaces discrets

On définit les espaces de polynômes, tout d'abord en dimension $d = 1$, puis dans des domaines de dimension $d = 2$ qui sont produits d'intervalles.

Notation 1.2.14 Pour tout entier positif ou nul n , on définit \mathbb{P}_n comme l'espace des polynômes sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} de degré $\leq n$. Pour tout intervalle ouvert borné Λ de \mathbb{R} , on note $\mathbb{P}_n(\Lambda)$ l'espace des polynômes à une variable de degré $\leq n$, restreints à Λ .

Définition 1.2.15 Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathbb{P}_n^0(\Lambda)$ le sous-espace des polynômes de $\mathbb{P}_n(\Lambda)$ qui s'annulent aux deux extrémités de Λ .

$$\mathbb{P}_n^0(\Lambda) = \{p_n \in \mathbb{P}_n(\Lambda) / p_n(-1) = p_n(1) = 0\}.$$

L'une des bases de $\mathbb{P}_n(\Lambda)$ est formée par les x^m , $0 \leq m \leq n$, on en déduit facilement le résultat suivant :

$$\dim \mathbb{P}_n(\Lambda) = n + 1, \quad \dim \mathbb{P}_n^0(\Lambda) = n - 1.$$

En dimension 2, on travaille dans le domaine tensorisé $\Omega_2 = \Lambda \times I$, où $I =]0, T[$.

Définition 1.2.16 Pour tout entier $n \geq 0$, on note $\mathbb{P}_n(\Omega_2)$ l'espace des restrictions à Ω_2 des polynômes à valeurs dans \mathbb{R} et de degré $\leq n$ par rapport à chaque variable x, t .

Notation 1.2.17 D'après cette définition, tout polynôme p_n de $\mathbb{P}_n(\Omega_2)$ s'écrit sous la forme

$$p_n(x, t) = \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^n \alpha_{mk} x^m t^k,$$

où les α_{mk} sont des réels. On en déduit la propriété de tensorisation suivante

Proposition 1.2.18 [12] Soit le rectangle Ω_2 . Pour tout entier $n \geq 0$ et toute base $\{\varphi_m; 0 \leq m \leq n\}$ de $\mathbb{P}_n(\Lambda)$, les polynômes $\varphi_m \otimes \varphi_k$ définis par

$$(\varphi_m \otimes \varphi_k)(x, t) = \varphi_m(x) \varphi_k(t),$$

forment lorsque m et k décrit les entiers de 0 à n , une base de $\mathbb{P}_n(\Omega_2)$.

Notation 1.2.19 Pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout ouvert Ω_2 de \mathbb{R}^2 , on note $\mathbb{P}_n^0(\Omega_2)$ la sous-espace des polynômes de $\mathbb{P}_n(\Omega_2)$ qui s'annulent sur $\partial\Omega_2$.

Proposition 1.2.20 Soit le rectangle Ω_2 . Pour tout entier $n \geq 0$ et toute base $\{\psi_m; 1 \leq m \leq n-1\}$ de $\mathbb{P}_n^0(\Lambda)$, les polynômes $\psi_m \otimes \psi_k$ définis par

$$(\psi_m \otimes \psi_k)(x, t) = \psi_m(x) \psi_k(t),$$

forment lorsque m et k décrit les entiers de 1 à $n-1$, une base de $\mathbb{P}_n^0(\Omega_2)$.

D'après les propositions (1.2.18) et (1.2.20), on déduit facilement la dimension des espaces $\mathbb{P}_n(\Omega_2)$ et $\mathbb{P}_n^0(\Omega_2)$ lorsque Ω_2 est un ouvert tensorisé de \mathbb{R}^2 ,

$$\dim \mathbb{P}_n(\Omega_2) = (n+1)^2, \quad \dim \mathbb{P}_n^0(\Omega_2) = (n-1)^2.$$

Introduction

1.3 Polynômes orthogonaux

Les polynômes orthogonaux (ceux de Legendre, ceux de Tchebychev¹, ceux de Jacobi², ceux d'Hermite et ceux de Laguerre) sont un sujet d'étude pour les mathématiciens depuis longtemps³. À titre d'exemple, **Adrien-Marie Legendre**⁴ en était arrivé dès le début du 19^{ème} siècle à considérer la suite de polynômes auxquels son nom est maintenant

¹Les polynômes de Tchebychev sont nommés ainsi en l'honneur du mathématicien russe Pafnouti Lvovitch Tchebychev (1821-1894).

²Nommés ainsi car c'est Charles Gustave Jacob Jacobi, mathématicien allemand (10 décembre 1804 - 18 février 1851) qui les a introduits.

³Le domaine des polynômes orthogonaux a été développé durant le 19^{ème} siècle par le mathématicien néerlandais Thomas-Joannes Stieltjes (1856-1894), comme outil de la théorie analytique des fractions continues généralisées. De multiples applications en ont découlé en mathématiques et en physique.

⁴Mathématicien français né le 18 septembre 1752 à Paris et mort le 10 janvier 1833 dans la même ville, dans lesquels il introduisit de nouveaux outils d'analyse, qui portent toujours son nom, par exemple les « fonctions de Legendre », « équations différentielles de Legendre », « polynômes de Legendre », « symbole de Legendre », « transformation de Legendre ».

associé, les polynômes de Legendre⁵, dans le cadre de ses calculs concernant la mécanique céleste. Depuis cette époque jusqu'à aujourd'hui, la théorie concernant ces polynômes n'a cessé de croître en précision et aussi en importance, puisque d'autres applications se sont développées. En effet, avec l'avènement des ordinateurs, les polynômes orthogonaux sont devenus des outils d'approximation et d'encodage-décodage très utiles. C'est pourquoi leur étude continue encore aujourd'hui.

1.3.1 Propriétés des polynômes orthogonaux dans $L^2(\Lambda)$

Définition 1.3.1 On appelle famille des polynômes de Legendre la famille $(L_n)_n$; deux à deux orthogonaux dans l'espace $L^2(\Lambda)$ et pour tout entier positif ou nul n , le polynôme L_n soit de degré n et vérifie : $L_n(1) = 1$.

Théorème 1.3.2 Le polynôme de Legendre de degré n est la solution de l'équation de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0, \quad (1.17)$$

voir [67]

Théorème 1.3.3 La fonction g définie par

$$g(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad |t| < 1, \quad (1.18)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n, \quad (1.19)$$

est la fonction génératrice des polynômes de Legendre $L_n(x)$, $n \geq 0$, voir [33].

Lemme 1.3.4 Pour tout entier positif n , les zéros du polynôme L_n sont réels distincts et strictement compris entre -1 et 1 , et pour $n \geq 2$, les racines sont symétriques par rapport à zéro (0).

Preuve. [52]

1) Montrons que les racines x_j , sont réels dans Λ .

Si L_n n'a aucune racines réels dans Λ , on a

$$\int_{-1}^1 L_n(x) dx \neq 0, \quad n \geq 1,$$

⁵Nommés ainsi car c'est Legendre les a étudiés dès 1785, donc avant l'introduction des polynômes de Jacobi

ce qui contredit à l'orthogonalité du polynôme L_n à tout les polynômes de degré $\leq n - 1$, donc L_n a une racine réelle dans Λ .

S'il n'admet qu'une racine dans Λ , notée α , on a

$$L_n(x) = (x - \alpha) Q_{n-1}(x),$$

où $Q_{n-1}(x)$ est un polynôme de degré $n - 1$ de signe constant sur Λ . Or dans ce cas on a encore

$$\int_{-1}^1 L_n(x) (x - \alpha) dx = \int_{-1}^1 (x - \alpha)^2 Q_{n-1}(x) dx \neq 0,$$

ce qui contraire à l'orthogonalité du polynôme L_n à tout les polynôme de degré $\leq n - 1$. Donc Q_{n-1} a une racine dans Λ et donc $L_n(x)$ admet deux racines réelles dans Λ .

En continuant ainsi, on montre que L_n admet n racines réelles toutes dans Λ .

2) Montrons que les racines $x_j, j = \overline{1, n}$, sont toutes distinctes.

Si L_n avait une racine α d'ordre $r > 1$, on aurait

$$L_n(x) = (x - \alpha)^r Q_{n-r+1}(x),$$

donc si r est pair ($r = 2k$) on a

$$\int_{-1}^1 L_n(x) Q_{n-r+1}(x) dx = \int_{-1}^1 (x - \alpha)^{2k} Q_{n-r+1}^2(x) dx \neq 0,$$

et si r est impair ($r = 2k + 1$) on a

$$\int_{-1}^1 L_n(x) (x - \alpha) Q_{n-r+1}(x) dx = \int_{-1}^1 (x - \alpha)^{2k+2} Q_{n-r+1}^2(x) dx \neq 0,$$

ce qui contraire à l'orthogonalité du polynôme L_n à tout les polynôme de degré $\leq n - 1$ donc $r = 1$. ■

Remarque 1.3.5 *On voit que les fenêtres au voisinage de -1 et 1 devient plus petites.*

Notation 1.3.6 *Pour tout entier $n \geq 0$, on note k_n le coefficient de x^n dans L_n .*

Proposition 1.3.7 *Pour tout entier $n \geq 0$, le polynôme L_n vérifie l'équation différentielle*

$$\frac{d}{dx} \left((1 - x^2) L_n' \right) + n(n + 1) L_n = 0. \quad (1.20)$$

Preuve. [9] On remarque que le polynôme

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) L'_n \right)$$

est de degré égale à n et pour tout polynôme φ de degré $\leq n-1$, on calcule l'intégrale

$$I = \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left((1-x^2) L'_n \right) (x) \varphi(x) dx,$$

par intégration - deux fois - par parties on obtient

$$I = - \int_{-1}^1 (1-x^2) L'_n(x) \varphi'(x) dx = \int_{-1}^1 L_n(x) \frac{d}{dx} \left((1-x^2) \varphi' \right) (x) dx = 0.$$

Car l'orthogonalité de polynôme L_n à tous les polynômes de degré $\leq n-1$, donc à $\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \varphi' \right)$. On en déduit qu'il existe un nombre réel λ_n tel que

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) L'_n \right) (x) + \lambda_n L_n(x) = 0.$$

Pour calculer λ_n , on regarde le coefficient k_n de x^n dans l'égalité ci-dessus et on obtient

$$\lambda_n = n(n+1).$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Une conséquence immédiate de l'équation (1.20) la proposition suivante

Proposition 1.3.8 *Pour tous entiers m et n positifs ou nuls*

$$\int_{-1}^1 L'_m(x) L'_n(x) (1-x^2) dx = n(n+1) \int_{-1}^1 L_m(x) L_n(x) dx. \quad (1.21)$$

Preuve. Par intégration par parties et application de l'équation (1.20), on obtient

$$\int_{-1}^1 L'_m(x) L'_n(x) (1-x^2) dx = n(n+1) \int_{-1}^1 L_m(x) L_n(x) dx.$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Remarque 1.3.9 *Pour tout entier $n \geq 1$, les polynômes L'_n , forment une famille de polynômes deux à deux orthogonaux pour la mesure $(1-x^2) dx$ dans Λ .*

Lemme 1.3.10 (Formule de Rodrigues⁶) *Pour tout entier positif n , le polynôme L_n*

⁶La formule de Rodrigues (anciennement appelée formule de Ivory-Jacobi) est une formule impliquant

est donné par

$$L_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((1-x^2)^n). \quad (1.22)$$

Preuve. On remarque que la fonction $(1-x^2)^n$ est un polynôme de degré $2n$ qui s'annule en ± 1 , ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$. En intégrant n fois par parties, on vérifie que pour tout polynôme φ de degré $\leq n-1$,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} ((1-x^2)^n) \varphi(x) dx &= [(1-x^2)^n \varphi(x)]_{-1}^1 + (-1)^n \int_{-1}^1 (1-x^2)^n \frac{d^n}{dx^n} (\varphi(x)) dx, \\ &= 0. \end{aligned}$$

car φ est de degré $\leq n-1$. On en déduit que $\frac{d^n}{dx^n} ((1-x^2)^n)$ est égal à une constante que multiplie L_n c'est-à-dire

$$L_n(x) = \lambda_n \frac{d^n}{dx^n} ((1-x^2)^n),$$

pour déterminer la constante, on calcule $\frac{d^n}{dx^n} ((1-x^2)^n)$ au point $x=1$,

$$\frac{d^n}{dx^n} ((1-x^2)^n) = \frac{d^n}{dx^n} ((1-x)^n (1+x)^n),$$

par la formule de Leibnitz, on trouve

$$\frac{d^n}{dx^n} ((1-x)^n (1+x)^n) (1) = (-1)^n n! 2^n,$$

et

$$L_n(1) = (-1)^n n! 2^n \lambda_n,$$

donc

$$L_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((1-x^2)^n).$$

■

Proposition 1.3.11 *On peut écrire les polynômes de Legendre sous la forme*

$$L_n(x) = \frac{1}{2^k} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^l \binom{k}{l} \binom{2k-2l}{k} x^{k-2l}, \quad k=0,1,2,\dots \quad (1.23)$$

les polynômes de Legendre, indépendamment découverte par Olinde Rodrigues, James Ivory et Charles Gustave Jacob Jacobi. Le nom « formule de Rodrigues » a été introduit par Eduard Heine en 1878, après que Hermite eut souligné, dès 1865, que Rodrigues a été le premier à la découvrir en 1815. Le terme est également utilisé pour décrire des formules similaires pour d'autres polynômes orthogonaux. Richard Askey décrit l'histoire de la formule de Rodrigues en détail.

où $\left[\frac{k}{2}\right]$ est la partie entière de $\frac{k}{2}$ voir [4].

Remarque 1.3.12 L'équation (1.20) peut s'écrire sous la forme

$$-2xL'_n + (1 - x^2)L''_n + n(n+1)L_n = 0. \quad (1.24)$$

Au point $x = 1$, on obtient

$$L'_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (1.25)$$

et au point $x = -1$, on obtient

$$L'_n(-1) = -\frac{n(n+1)}{2}L_n(-1),$$

d'autre part on a

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left[C_n^0 (x-1)^n n! + \sum_{k=1}^n C_n^k ((x-1)^n)^{(k)} ((1+x)^n)^{(n-k)} \right],$$

d'où

$$\begin{aligned} L_n(-1) &= \frac{1}{2^n n!} ((-2)^n n!), \\ &= (-1)^n, \end{aligned}$$

donc

$$L'_n(-1) = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}. \quad (1.26)$$

Corollaire 1.3.13 Pour tout entier $n \geq 0$, le coefficient k_n est égal à $\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$.

Corollaire 1.3.14 Pour tout entier $n \geq 0$, le polynôme L_n vérifie

$$\int_{-1}^1 L_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}. \quad (1.27)$$

Preuve. D'après (1.22) on a

$$\int_{-1}^1 L_n^2(x) dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} ((1-x^2)^n) (x) L_n(x) dx,$$

en intégrant n fois par parties, et on obtient

$$\int_{-1}^1 L_n^2(x) dx = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n n! k_n dx,$$

D'après le corollaire (1.3.13) on trouve

$$\int_{-1}^1 L_n^2(x) dx = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx.$$

La dernière intégrale est une intégrale de Wallis⁷, que l'on sait calculer par récurrence, on a

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = 2 \int_0^1 (1-x^2)^n dx,$$

on utilise le changement de variable, $x = \cos \theta$ et on trouve

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2n+1} d\theta,$$

on pose

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2n+1} d\theta, \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2n-1} (1 - (\cos \theta)^2) d\theta, \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2n-1} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2n-1} (\cos \theta)^2 d\theta, \\ &= I_{2n-1} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2n-1} \cos \theta \cos \theta d\theta, \end{aligned}$$

pour la deuxième intégrale, on utilise

$$((\sin \theta)^{2n})' = 2n (\sin \theta)^{2n-1} \cos \theta,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2n-1} \cos \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\sin \theta)^{2n})' \cos \theta d\theta,$$

par intégration par parties on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2n-1} \cos \theta \cos \theta d\theta = \left[\frac{1}{2n} \cos \theta (\sin \theta)^{2n} \right]_{-1}^1 + \frac{1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2n+1} d\theta,$$

d'où

$$I_{2n+1} = I_{2n-1} - \frac{1}{2n} I_{2n+1},$$

⁷Les intégrales de Wallis ont été introduites par le mathématicien anglais **John Wallis** (né le 23 novembre 1616 à Ashford, et mort le 28) octobre 1703 à Oxford, notamment pour développer le nombre π en un produit infini de rationnels : le produit de Wallis.

c'est-à-dire

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1},$$

par récurrence on a

$$I_{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1} I_{2n-3},$$

de plus on a

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \frac{2n(2n-2)(2n-4)(2n-6)\dots 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)(2n-5)\dots 3} I_1, \\ &= \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} I_1, \end{aligned}$$

alors

$$I_{2n+1} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!},$$

donc on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx &= \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}, \\ \int_{-1}^1 L_n^2(x) dx &= \frac{2}{2n+1}. \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Proposition 1.3.15 *Pour tous entiers m et n positifs ou nuls on a*

$$\int_{-1}^1 L_m(x) L_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}. \quad (1.28)$$

Où δ_{mn} est le symbole de **Kronecker** ($\delta_{mn} = 1$ si $m = n$, $\delta_{mn} = 0$ si $m \neq n$).

Preuve. Il suffit d'utiliser le corollaire (1.3.14) et l'orthogonalité des polynômes de Legendre. ■

Lemme 1.3.16 (Équation intégrale) *Pour tout entier positif n , on a la formule*

$$\int_{-1}^x L_n(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2n+1} (L_{n+1}(x) - L_{n-1}(x)). \quad (1.29)$$

Preuve. Soit P_{n+1} la fonction $\int_{-1}^x L_n(\zeta) d\zeta$, qui est en fait un polynôme de degré $n+1$.

On note d'abord que P_{n+1} s'annule en ± 1 . on en déduit l'identité, vraie pour tout entier

$m \geq 0$

$$\int_{-1}^1 P_{n+1}(x)L_m(x)dx = - \int_{-1}^1 L_n(x)P_{m+1}(x)dx. \quad (1.30)$$

pour la démonstration, en utilisant l'intégration par parties, ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_{n+1}(x)L_m(x)dx &= [P_{n+1}(x)P_{m+1}(x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 L_n(x)P_{m+1}(x)dx, \\ &= - \int_{-1}^1 L_n(x)P_{m+1}(x)dx. \end{aligned}$$

Cette quantité est nulle pour $m > n + 1$ et pour $n > m + 1$, par suite on peut écrire P_{n+1} sous la forme

$$P_{n+1} = \alpha_{n-1}L_{n-1} + \alpha_n L_n + \alpha_{n+1}L_{n+1}. \quad (1.31)$$

Le coefficient α_n est nul, puisque les polynômes, L_n d'une part, P_{n+1} , L_{n-1} et L_{n+1} d'autre part, sont de parité différentes.

Il reste donc à calculer α_{n-1} et α_{n+1} , en comparant les coefficients de x^{n+1} dans la formule (1.31), on voit que

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \int_{-1}^x (k_n \zeta^n + q_{n-1}(\zeta)) d\zeta, \\ &= \frac{k_n}{n+1} x^{n+1} + \int_{-1}^x q_{n-1}(\zeta) d\zeta, \end{aligned}$$

où q_{n-1} est un polynôme de degré $\leq n - 1$, donc on trouve que

$$\frac{k_n}{n+1} = \alpha_{n+1}k_{n+1},$$

d'après le corollaire (1.3.13), on obtient :

$$\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2 (n+1)} = \alpha_{n+1} \frac{(2n+2)!}{2^{n+1} [(n+1)!]^2},$$

alors

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{2n+1}.$$

Puis on dérive l'équation (1.31) par rapport à x et on calcule la valeur en 1, on trouve

$$1 = L_n(1) = \alpha_{n-1}L'_{n-1}(1) + \alpha_{n+1}L'_{n+1}(1),$$

donc

$$\alpha_{n-1} = -\frac{1}{2n+1}.$$

D'ou le résultat. ■

Remarque 1.3.17 *D'après (1.29) on a*

$$\int_{-1}^x L_n(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2n+1} (L_{n+1}(x) - L_{n-1}(x)),$$

on applique l'equation (1.20), on trouve

$$L_n(\zeta) = -\frac{1}{n(n+1)} \frac{d}{d\zeta} \left((1 - \zeta^2) L_n' \right) (\zeta),$$

alors on a

$$-\frac{1}{n(n+1)} \int_{-1}^x \frac{d}{d\zeta} \left((1 - \zeta^2) L_n' \right) (\zeta) d\zeta = \frac{1}{2n+1} (L_{n+1}(x) - L_{n-1}(x)),$$

c'est-à-dire

$$(1 - x^2) L_n'(x) = -\frac{n(n+1)}{2n+1} (L_{n+1}(x) - L_{n-1}(x)), \quad (1.32)$$

ce qui donne

$$\int_{-1}^1 \left((1 - x^2) L_n'(x) \right)^2 dx = \left(\frac{n(n+1)}{2n+1} \right)^2 \int_{-1}^1 (L_{n+1}(x) - L_{n-1}(x))^2 dx,$$

et d'après l'orthogonalité des polynômes de Legendre, et l'utilisation de (1.27) et de (1.32), on obtient

$$\int_{-1}^1 \left((1 - x^2) L_n'(x) \right)^2 dx = 4 \frac{n^2 (n+1)^2}{(4n^2 - 1)(2n+3)}. \quad (1.33)$$

Lemme 1.3.18 *Pour tout entier positif n , on a la formule de récurrence*

$$L_{n+1}(x) = \frac{k_{n+1}}{k_n} x L_n(x) - \left(\frac{\|L_n(x)\|_{L^2(\Delta)}}{\|L_{n-1}(x)\|_{L^2(\Delta)}} \right)^2 \frac{k_{n-1} k_{n+1}}{k_n^2} L_{n-1}(x). \quad (1.34)$$

Preuve. On voit que le polynôme $L_{n+1} - \frac{k_{n+1}}{k_n} x L_n$ est de degré $\leq n$, et orthogonal à tous les polynômes de degré $\leq n-2$. Alors il existe deux constantes α_n et β_n telles que

$$L_{n+1} - \frac{k_{n+1}}{k_n} x L_n = \alpha_n L_n - \beta_n L_{n-1}, \quad (1.35)$$

on a déjà remarqué que les polynômes L_{n+1} , xL_n et L_{n-1} ont la même parité que $n+1$, par contre L_n est de parité n , ceci prouve que α_n est nul. Il reste à calculer β_n .

D'après l'orthogonalité de la famille $(L_n)_n$ on a

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-1}^1 L_{n+1}(x)L_{n-1}(x)dx, \\
&= \frac{k_{n+1}}{k_n} \int_{-1}^1 xL_n(x)L_{n-1}(x)dx - \beta_n \int_{-1}^1 L_{n-1}(x)L_{n-1}(x)dx, \quad \text{voir (1.35),} \\
&= \frac{k_{n+1}}{k_n} \int_{-1}^1 xL_n(x)L_{n-1}(x)dx - \beta_n \int_{-1}^1 (L_{n-1}(x))^2 dx.
\end{aligned}$$

En peut écrire $xL_{n-1}(x)$ sous la forme $\frac{k_{n-1}}{k_n}L_n(x) + P_{n-1}$, où P_{n-1} est un polynôme de degré $\leq n-1$ et on obtient

$$0 = \frac{k_{n+1}}{k_n} \int_{-1}^1 \left(\frac{k_{n-1}}{k_n}L_n(x) + P_{n-1} \right) L_n(x) dx - \beta_n \int_{-1}^1 (L_{n-1}(x))^2 dx,$$

Comme L_N est orthogonal à tous les polynômes de degré $\leq N-1$, donc à P_{n-1} , alors

$$0 = \frac{k_{n+1}k_{n-1}}{k_n^2} \int_{-1}^1 (L_n(x))^2 dx - \beta_n \int_{-1}^1 (L_{n-1}(x))^2 dx.$$

On utilise (1.27) on obtient

$$\beta_n = \frac{k_{n+1}k_{n-1}}{k_n^2} \left(\frac{\|L_n(x)\|_{L^2(\Delta)}}{\|L_{n-1}(x)\|_{L^2(\Delta)}} \right)^2.$$

Ce qui termine la démonstration. ■

En utilisant le corollaire (1.3.13) et le corollaire (1.3.14) donc à partir de la formule (1.34), et on trouve la relation de récurrence pour les polynômes de Legendre

Définition 1.3.19 (*Relation de récurrence*) La famille $(L_n)_n$ est donnée par les relations

$$\begin{cases} L_0(x) = 1 & \text{et} & L_1(x) = x \\ (n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x), & n \geq 1 \end{cases} \quad (1.36)$$

Lemme 1.3.20 (*Formule de Christoffel-Darboux*⁸) Pour tout entier $n \geq 0$, on a la formule

⁸introduite par Elwin Bruno Christoffel (1858) et Jean Gaston Darboux (1878)

$$\forall x \in \Lambda, \forall \eta \in \Lambda, \sum_{k=0}^n (2k+1) L_k(x) L_k(\eta) = (n+1) \frac{L_{n+1}(x)L_n(\eta) - L_{n+1}(\eta)L_n(x)}{x-\eta}. \quad (1.37)$$

Preuve. Cette formule étant évidente pour $n = 0$, la démonstration s'effectue par récurrence sur n , à partir de l'égalité, on suppose que la formule

$$\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) L_k(x) L_k(\eta) = (n) \frac{L_n(x) L_{n-1}(\eta) - L_n(\eta) L_{n-1}(x)}{x-\eta}, \quad (1.38)$$

est vraie, et on démontre qu'elle est vraie pour n et d'après (1.36) on obtient

$$\begin{aligned} & (n+1) \frac{L_{n+1}(x) L_n(\eta) - L_{n+1}(\eta) L_n(x)}{x-\eta} \\ &= \frac{1}{x-\eta} [((2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x))L_n(\eta)] - [((2n+1)\eta L_n(\eta) - nL_{n-1}(\eta))L_n(x)], \\ &= (2n+1)L_n(x)L_n(\eta) + n \frac{L_n(x)L_{n-1}(\eta) - L_n(\eta)L_{n-1}(x)}{x-\eta}, \end{aligned}$$

d'après (1.38), on obtient

$$\sum_{k=0}^n (2k+1) L_k(x) L_k(\eta) = (n+1) \frac{L_{n+1}(x) L_n(\eta) - L_{n+1}(\eta) L_n(x)}{x-\eta}.$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Proposition 1.3.21 *En faisant tendre η vers x dans la formule de Christoffel-Darboux (1.37), on obtient en outre la formule :*

$$\forall x \in \Lambda, \sum_{k=0}^n (2k+1) L_k^2(x) = (n+1) \left(L'_{n+1}(x) L_n(x) - L_{n+1}(x) L'_n(x) \right). \quad (1.39)$$

Preuve. D'après la formule de Christoffel-Darboux (1.37), on a

$$\begin{aligned} \forall x \in \Lambda, \forall \eta \in \Lambda, \quad & L_0(x)L_0(\eta) + 3L_1(x)L_1(\eta) + \dots + (2n+1)L_n(x)L_n(\eta) \\ &= (n+1) \left[\frac{(L_{n+1}(x) - L_{n+1}(\eta))}{x - \eta} L_n(\eta) - L_{n+1}(\eta) \frac{(L_n(x) - L_n(\eta))}{x - \eta} \right]. \end{aligned}$$

Passant à la limite quand η vers x , on obtient

$$\forall x \in \Lambda, \quad L_0^2(x) + 3L_1^2(x) + \dots + (2n+1)L_n^2(x) = (n+1) \left(L_{n+1}'(x)L_n(x) - L_{n+1}(x)L_n'(x) \right).$$

Ce qui termine la démonstration ■

Définition 1.3.22 On pose donc, pour tout entier $n \geq 0$, une famille des polynômes orthonormaux $(L_n^*)_n$ dans l'espace $L^2(\Lambda)$;

$$L_n^* = \frac{L_n}{\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}} = \sqrt{n + \frac{1}{2}} L_n. \quad (1.40)$$

On désigne par k_n^* le coefficient de x^n dans $L_n^*(x)$.

Remarque 1.3.23 D'après la définition des polynômes L_n^* (1.40), on a :
Pour tout entier positif n

$$k_n^* = \frac{k_n}{\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}}. \quad (1.41)$$

$$L_{n+1}^*(x) = \frac{k_{n+1}^*}{k_n^*} x L_n^*(x) - \frac{k_{n-1}^* k_{n+1}^*}{k_n^{*2}} L_{n-1}^*(x), \quad n \geq 1. \quad (1.42)$$

$$\sum_{k=0}^n L_k^*(x) L_k^*(\eta) = \frac{k_n^*}{k_{n+1}^*} \frac{L_{n+1}^*(x) L_n^*(\eta) - L_{n+1}^*(\eta) L_n^*(x)}{x - \eta}. \quad (1.43)$$

$$\forall x \in \Lambda, \quad \sum_{k=0}^n L_k^{*2}(x) = \frac{k_n^*}{k_{n+1}^*} \left(L_{n+1}'^*(x) L_n^*(x) - L_{n+1}^*(x) L_n'^*(x) \right). \quad (1.44)$$

Proposition 1.3.24 Soit une fonction positive, continue et décroissante sur l'intervalle $[0, \infty[$, alors pour tout entier positif n on a l'inégalité

$$\int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n) \leq \int_0^n f(t) dt, \quad n \geq 1,$$

par addition on peut écrire

$$\int_1^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{n=1}^n f(n) \leq \int_0^n f(t)dt,$$

donc l'intégral $\int_0^x f(t)dt$ et la série de terme générale $f(n)$ sont de même nature.

Proposition 1.3.25 Pour tout polynôme $\varphi_N \in P_N(\Lambda)$ / $\varphi_N(x) = \sum_{n=0}^N \alpha_n L_n(x)$ il existe deux positives constantes c'_1, c'_2 telle que :

$$c'_1 \log(2N + 1) \leq \|\varphi\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq c'_2 \log(\exp(2)(2N + 1)), \quad (1.45)$$

est équivalente à,

$$c_1 \log(N + 1) \leq \|\varphi\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq c_2 \log(N + 1), \quad (1.46)$$

où c_1, c_2 sont constantes positives .

Preuve. Utilisant la propriété d'orthogonalité du polynome de Legendre et on compare l'intégrale

$$\int_0^x f(t)dt, \text{ où } f(t) = \frac{2}{2t + 1},$$

avec la somme

$$\sum_{n=0}^N \frac{2}{2n + 1}.$$

■

Proposition 1.3.26 Pour tout polynôme $\varphi_N \in P_N^0(\Lambda)$ / $\varphi_N(x) = \sum_{n=1}^{N-1} \alpha_n h_n(z)$ il existe deux constantes positives c_5, c_6 telle que :

$$c_5 \log(N + 1) \leq \|\varphi\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq c_6 N^2 \log(N + 1). \quad (1.47)$$

Preuve. On utilise (1.32), on peut écrire

$$\varphi_N(x) = \sum_{n=0}^N \gamma_n L_n(x), \quad \frac{4}{9} c'_5 \leq \gamma_n^2 \leq c'_6 N^2, \quad (c'_5, c'_6) = (\min(\alpha_n^2), \max(\alpha_n^2)), \quad n=\overline{1, N-1},$$

et on utilise (1.46) donc le résultat. ■

Lemme 1.3.27 [2] Pour tout nombre entier positif N et tout nombre réels $a_k, k \geq 0$, il

existe une constante positive c telle que :

$$\left(\sum_{k=0}^N a_k \right)^2 \leq c \sum_{k=0}^N (a_k^2), \quad (1.48)$$

Théorème 1.3.28 (L'inégalité inverse) *Sur un espace de polynômes définis à l'ouvert Λ de degré inférieur à un entier positif fixé il existe une constante ne dépendant que de cet entier et du diamètre de Λ telle que la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Lambda)}$ des polynômes soit majorée par cette constante fois leur norme $\|\cdot\|_{L^2(\Lambda)}$. Pour tout polynôme*

$$p_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda), \quad p_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n L_n(x),$$

on a

$$\|p_N\|_{H^1(\Lambda)} \leq \sqrt{3}N^2 \|p_N\|_{L^2(\Lambda)}. \quad (1.49)$$

Preuve. Pour les détails (voir [9]). ■

Définition 1.3.29 *L'opérateur de projection orthogonale π_N de $L^2(\Lambda)$ sur $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ est défini par*

$$\begin{aligned} \pi_N : L^2(\Lambda) &\rightarrow \mathbb{P}_N(\Lambda) \\ \varphi &\rightarrow \pi_N \varphi \end{aligned} \quad (1.50)$$

et vérifié la propriété suivante :

$$\forall \psi_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda), \quad \int_{-1}^1 (\varphi - \pi_N \varphi)(x) \psi_N(x) dx = 0. \quad (1.51)$$

Voir [9] et [12] pour les détails.

Définition 1.3.30 *L'opérateur*

$$\begin{aligned} \pi_N^{1,0} : H_0^1(\Lambda) &\rightarrow \mathbb{P}_N^0(\Lambda) \\ \varphi &\rightarrow \pi_N^{1,0} \varphi \end{aligned} \quad (1.52)$$

est un opérateur de projection orthogonale de $H_0^1(\Lambda)$ sur $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$ associé au semi norm $\|\cdot\|_{H^1(\Lambda)}$ et vérifié

$$\forall \psi_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda), \quad \int_{-1}^1 (\varphi' - (\pi_N \varphi)')(z) \psi_N'(x) dx = 0. \quad (1.53)$$

Voir [9] et [12] pour les détails.

Proposition 1.3.31 *Pour tout polynôme $\varphi_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda)$, il existe une constante positive c telle que on a :*

$$\|\varphi_N\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq c \|\varphi'_N\|_{H^1(\Lambda)}^2. \quad (1.54)$$

Preuve. Soit

$$\varphi_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda) / \varphi_N(x) = \sum_{n=1}^{N-1} \varphi(n) h_n(x),$$

en utilisant les inégalités (1.32) et (1.48), aussi la propriété de l'orthogonalité de Legendre on obtient l'inégalité :

$$\|\varphi_N\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq c \sum_{n=1}^{N-1} (\varphi(n))^2 \|h_n\|_{L^2(\Lambda)}^2, \quad \|h_n\|_{L^2(\Lambda)}^2 = \frac{4(n(n+1))^2}{(4n^2-1)(2n+3)}, \quad (1.55)$$

et on de l'équation différentielle (1.20)

$$h'_n(x) = -n(n+1)L_n(x), \quad (1.56)$$

on peut écrire

$$\varphi'_N(x) = - \sum_{n=1}^{N-1} n(n+1)\varphi(n) L_n(x),$$

et en fin on a :

$$\|\varphi'_N\|_{H^1(\Lambda)}^2 = \sum_{n=1}^{N-1} (\varphi(n))^2 \|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2, \quad \|h'_n\|_{L^2(\Lambda)}^2 = \frac{2(n(n+1))^2}{2n+1}, \quad (1.57)$$

pour tout entier $n \geq 1$, $\|h'_n\|_{L^2(\Lambda)}^2 \geq \|h_n\|_{L^2(\Lambda)}^2$, et donc le resultat. ■

Remarque 1.3.32 *L'opérateur A défini par*

$$AL_n = -\frac{d}{dx} \left((1-x^2) L'_n \right), \quad (1.58)$$

est auto-adjoint et positif dans $L^2(\Lambda)$, est de type Sturm-Liouville (voir [9, 15]) et [59]), l'équation (1.20) se traduit par le fait que tous les polynômes de Legendre sont des fonctions propres.

Lemme 1.3.33 *Pour tout entier $l \geq 0$, l'opérateur A est continu de $H^{l+2}(\Lambda)$ dans $H^l(\Lambda)$*

Preuve. Utilisant la formule de Leibniz on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dx^k} (A\varphi) &= \sum_{n=0}^{k+1} c_k^n ((x^2 - 1)^{(n)} \varphi^{(k+2-n)} + (2x)^{(n)} \varphi^{(k+1-n)}), \\ &= (x^2 - 1) \varphi^{(k+2)} + 2(1+k)x\varphi^{(k+1)} + k(k+1)\varphi^{(k)}, \end{aligned} \quad (1.59)$$

on voit que, pour tout k , $0 \leq k \leq l$,

$$\left\| \frac{d^k}{dx^k} (A\varphi) \right\|_{L^2(\Lambda)} \leq 2(k+1)k \left(\left\| \frac{d^{k+2}\varphi}{dx^{k+2}} \right\|_{L^2(\Lambda)} + \left\| \frac{d^{k+1}\varphi}{dx^{k+1}} \right\|_{L^2(\Lambda)} + \left\| \frac{d^k\varphi}{dx^k} \right\|_{L^2(\Lambda)} \right). \quad (1.60)$$

■

Théorème 1.3.34 *Pour chaque entier positif m , il existe une constante positive c dépendant que de m telle que pour toute fonction φ dans $H^m(\Lambda)$ [9], on a l'estimation*

$$\|\varphi - \varphi_N\|_{L^2(\Lambda)} \leq cN^{-m} \|\varphi\|_{H^m(\Lambda)}, \quad \varphi_N = \pi_N \varphi. \quad (1.61)$$

Preuve. La démonstration se fait en deux étapes lorsque m est pair et lorsque m est impaire et par l'utilisation de la continuité de l'opérateur de Sturm-Liouville (1.58) voir [9, 15]. ■

Théorème 1.3.35 *Pour une constante positive m , il existe une constante positive c dépend que de m telle que pour toute fonction φ dans $H^m(\Lambda) \cap H_0^1(\Lambda)$ [9], on a l'estimation*

$$|\varphi - \pi_N^{1,0} \varphi|_{H_0^1(\Lambda)} \leq cN^{(1-m)} \|\varphi\|_{H^m(\Lambda)}, \quad (1.62)$$

et

$$\|\varphi - \pi_N^{1,0} \varphi\|_{L^2(\Lambda)} \leq cN^{-m} \|\varphi\|_{H^m(\Lambda)}, \quad (1.63)$$

Preuve. Toute fonction $\varphi \in H^m(\Lambda) \cap H_0^1(\Lambda)$ admet l'extension :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (1-x^2) L'_k(x),$$

la projection orthogonale associée avec la semi-norme $|\cdot|_{H^1(\Lambda)}$ est définie par :

$\pi_N^{1,0} \varphi = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_n (1-x^2) L'_n(x)$, alors on peut écrire :

$$\begin{cases} \varphi'(x) = - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_n n(n+1) L_n(x) \\ \pi_N^{1,0} \varphi' = - \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_n n(n+1) L_n(x) \end{cases},$$

en utilisant (1.54), on peut écrire :

$$\|\varphi - \pi_N^{1,0} \varphi\|_{L^2(\Lambda)} \leq c' \|\varphi' - \pi_N^{1,0} \varphi'\|_{L^2(\Lambda)} = c' \|\varphi - \pi_N^{1,0} \varphi\|_{H^1(\Lambda)}.$$

Le degré de l'opérateur $\pi_N^{1,0} \varphi'$ est $\leq N-1$, en utilisant le théorème 1.1.35 on peut écrire :

$$\begin{aligned} c' \|\varphi' - \pi_N^{1,0} \varphi'\|_{L^2(\Lambda)} &\leq c(N-1)^{(1-m)} \|\varphi'\|_{H^{m-1}(\Lambda)}, \\ &\leq cN^{1-m} \|\varphi\|_{H^m(\Lambda)}, \end{aligned}$$

on voit pour tout $m > 1$, $1-m < 0$, alors $\frac{N}{N-1} < c$, $1 < c < 2$. et on utilise (1.54) et (1.61) on peut écrire :

$$\begin{aligned} \|\varphi - \pi_N^{1,0} \varphi\|_{L^2(\Lambda)} &\leq c_1(N-1)^{-m} \|\varphi\|_{H^m(\Lambda)}, \\ &\leq c_1 N^{-m} \|\varphi\|_{H^m(\Lambda)}. \end{aligned}$$

■

Avec le changement de variable

$$t = \frac{T}{2} (x+1), \quad (1.64)$$

on trouve les polynômes $p_n(t) = L_n(\frac{2}{T}t-1)$ qui sont orthogonaux et vérifient les propriétés suivantes

1- Les polynômes p_n , $n \geq 0$ sont orthogonaux dans $L^2(I)$ et vérifient :

$$\int_0^T \frac{2}{T} p_n(t) p_m(t) dt = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{2}{(2n+1)}, & n = m \end{cases}. \quad (1.65)$$

2- Les polynômes $t_n(t) = (t - \frac{t^2}{T}) p'_n(t)$ vérifient l'égalité :

$$t_n(t) = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)} (p_{n-1}(t) - p_{n+1}(t)). \quad (1.66)$$

alors

$$p'_{n+1}(t) - p'_{n-1}(t) = \frac{2(2n+1)}{T} p_n. \quad (1.67)$$

3- L'équation intégrale,

$$\forall n \geq 1, \int_0^t p_n(s) ds = \frac{T}{(2n+1)} (p_{n+1}(t) - p_{n-1}(t)). \quad (1.68)$$

4- La relation de récurrence

$$\begin{cases} p_0(t) = 1 \text{ et } p_1(t) = \frac{2}{T}t - 1 \\ p_{n+1}(t) = \left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \left(\frac{2}{T}t - 1\right) p_n(t) - \left(\frac{n}{n+1}\right) p_{n-1}(t) \end{cases} \quad (1.69)$$

5- L'équation différentielle

$$t'_n(t) = -\frac{n(n+1)}{T} p_n(t), \quad (1.70)$$

où

$$t_n(t) = \left(t - \frac{t^2}{T}\right) p'_n(t). \quad (1.71)$$

6- Aux points $t = T$, $t = 0$ on a,

$$\begin{cases} p'_n(T) = \frac{n(n+1)}{T} \\ p'_n(0) = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{T} \end{cases} \quad (1.72)$$

7- De (1.66) et (1.68) on déduit :

$$\forall n \geq 1, \int_0^t p_n(s) ds = -\frac{T}{n(n+1)} t_n(t). \quad (1.73)$$

8- L'opérateur A défini par :

$$Ap_n = -t'_n(t), \quad (1.74)$$

est un opérateur auto-adjoint dans $L^2(I)$.

Proposition 1.3.36 *Pour tout polynôme $\varphi_N \in \mathbb{P}_N(I)$ / $\varphi_N(t) = \sum_{n=0}^N \alpha_n p_n(t)$ il existe deux constantes positives c'_3, c'_4 et on a la double inégalité :*

$$c'_3 \log(2N+1) \leq \|\varphi\|_{L^2(I)}^2 \leq c'_4 \log(\exp(2)(2N+1)), \quad (1.75)$$

(1.75) est équivalente à ,

$$c_3 \log(N+1) \leq \|\varphi\|_{L^2(I)}^2 \leq c_4 \log(N+1), \quad (1.76)$$

où c_3, c_4 sont des constantes positives .

Preuve. On utilise la propriété d'orthogonalité des polynômes de Légendre et on compare l'intégrale $\int_0^N f(t)dt$, ($f(t) = \frac{1}{2t+1}$) avec la somme $\sum_{n=0}^N \frac{1}{2n+1}$. ■

Proposition 1.3.37 *Pour tout polynôme $\varphi_N \in \mathbb{P}_N^0(I)$ / $\varphi_N(t) = \sum_{n=1}^{N-1} \alpha_n t_n(t)$ il existe deux constantes positives c_7, c_8 telle que :*

$$c_7 \log(N+1) \leq \|\varphi\|_{L^2(I)}^2 \leq c_8 N^2 \log(N+1), \quad (1.77)$$

Preuve. En utilisant (1.68) on peut écrire

$$\varphi_N(t) = \sum_{n=0}^N \gamma_n p_n(t), \quad \frac{4}{18} c'_7 \leq \gamma_n^2 \leq c'_8 N^2, \quad (c'_7, c'_8) = (\min(\alpha_n^2), \max(\alpha_n^2)), \quad n = \overline{1, N-1}.$$

et de (1.66) on a le resultat. ■

Remarque 1.3.38 *Par le changement de variable $t = \frac{x+1}{2}$, on obtient une inégalité similaire que (1.54)*

$$\|\varphi_N\|_{L^2(I)} \leq c |\varphi'_N|_{H^1(I)}. \quad (1.78)$$

1.3.2 Propriétés des polynômes orthogonaux dans $L_1^2(\Lambda)$

Notation 1.3.39 *Soit*

$$M_n(x) = \frac{L_n(x) + L_{n+1}(x)}{1+x}. \quad (1.79)$$

M_n est un polynôme de degré n .

Remarque 1.3.40 [2] *On peut écrire le polynôme M_n sous la forme*

$$M_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)} \sum_{k=0}^n (-1)^k (2k+1) L_k(x). \quad (1.80)$$

Proposition 1.3.41 *Pour tout entier positif ou nul n , on a*

$$M_n(1) = 1, \quad (1.81)$$

$$M_n(-1) = (-1)^n (n+1). \quad (1.82)$$

Preuve. D'après (1.22), on peut écrire le polynôme M_n sous la forme

$$M_n(x) = \frac{1}{1+x} \left[\alpha_n \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2-1)^n \right) + \alpha_{n+1} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left((x^2-1)^{n+1} \right) \right],$$

avec

$$\alpha_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}.$$

On utilise la formule de Leibnitz, on trouve

$$\begin{aligned} M_n(x) &= \frac{\alpha_n}{1+x} \left[n! (1+x)^n + \frac{1}{2(n+1)} (n+1)! (x+1)^{n+1} \right. \\ &\quad + \sum_{k=1}^n C_n^k ((x+1)^n)^{(k)} ((x-1)^n)^{(n-k)} + \\ &\quad \left. + \frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^k ((x+1)^{n+1})^{(k)} ((x-1)^{n+1})^{(n+1-k)} \right], \end{aligned}$$

au point $x = 1$, on a

$$\begin{aligned} M_n(1) &= \frac{\alpha_n}{2} \left[2^n n! + \frac{1}{2(n+1)} 2^{n+1} (n+1)! \right], \\ &= \frac{\alpha_n}{2} (2^{n+1} n!) = \alpha_n 2^n n! = 1. \end{aligned}$$

Il reste à démontrer que $M_n(-1) = (-1)^n (n+1)$. On a aussi

$$(1+x) M_n(x) = L_n(x) + L_{n+1}(x),$$

on dérive cette égalité, on obtient

$$\frac{d}{dx} ((1+x) M_n(x)) = L'_n(x) + L'_{n+1}(x),$$

c'est-à-dire

$$(1+x) M'_n(x) + M_n(x) = L'_n(x) + L'_{n+1}(x),$$

Au point $x = -1$, on trouve

$$M_n(-1) = L'_n(-1) + L'_{n+1}(-1),$$

on utilise (1.26), ce qui termine la démonstration ■

Proposition 1.3.42 *Pour tous entiers m et n positifs ou nuls, tel que $m < n$ on a*

$$\int_{-1}^1 M_n(x) M_m(x) (1+x) dx = \int_{-1}^1 (L_n(x) + L_{n+1}(x)) M_m(x) dx, \quad (1.83)$$

d'après l'orthogonalité de polynôme L_{n+1} à tous les polynômes de degré $\leq n$, donc à M_m , d'une part, d'autre part l'orthogonalité de polynôme L_n à tous les polynômes de degré $\leq n-1$, donc à M_m , on obtient

$$\int_{-1}^1 M_n(x)M_m(x)(1+x) dx = 0. \quad (1.84)$$

En déduit que les polynômes M_n , $n \geq 0$, forment une famille de polynômes deux à deux orthogonaux dans $L_1^2(\Lambda)$.

Proposition 1.3.43 Pour tout entier $n \geq 0$, le polynôme M_n vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dx} \left((1+x)^2 (1-x) M_n' \right) + n(n+2)(1+x) M_n = 0. \quad (1.85)$$

Preuve. On remarque que le polynôme $(1+x)^{-1} \frac{d}{dx} \left((1+x)^2 (1-x) M_n' \right)$ est de degré égal à n , qu'il est orthogonal à tous les polynômes de degré $\leq n-1$.

Alors on déduit qu'il existe un nombre réel λ_n tel que

$$(1+x)^{-1} \frac{d}{dx} \left((1+x)^2 (1-x) M_n' \right) + \lambda_n M_n(x) = 0,$$

C'est-à-dire

$$\frac{d}{dx} \left((1+x)^2 (1-x) M_n' \right) + \lambda_n (1+x) M_n(x) = 0.$$

Pour calculer λ_n , on regarde le coefficient de x^{n+1} dans l'égalité ci-dessus et on obtient

$$\lambda_n = n(n+2).$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Lemme 1.3.44 (Relation de récurrence) Pour tout entier $n \geq 0$, la famille $(M_n)_n$ est donnée par les relations

$$\begin{cases} M_0(x) = 1 \\ (n+1)M_n(x) = (2n+1)L_n(x) - nM_{n-1}(x) \end{cases}. \quad (1.86)$$

Preuve.

$$(n+1)M_n(x) = \frac{(n+1)L_{n+1}(x) + (n+1)L_n(x)}{1+x},$$

et de (1.36) on peut écrire

$$\begin{aligned}(n+1)M_n(x) &= \frac{(2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x) + (n+1)L_n(x)}{1+x}, \\ &= (2n+1)L_n(x) - nM_{n-1}(x).\end{aligned}$$

Ce qui fait la démontrer. ■

Lemme 1.3.45 *Pour tout entier $n \geq 0$, le polynôme M_n vérifie*

$$\int_{-1}^1 M_n^2(x)(1+x)dx = \frac{2}{n+1}. \quad (1.87)$$

Preuve. D'après (1.79), on a

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 M_n^2(x)(1+x)dx &= \int_{-1}^1 (L_n(x) + L_{n+1}(x))M_n(x)dx, \\ &= \int_{-1}^1 L_n(x)M_n(x)dx.\end{aligned}$$

Car le polynôme L_{n+1} est orthogonal à tous les polynômes de degré $\leq n$, donc à M_n , on utilise (1.86) et on obtient

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 L_n(x)M_n(x)dx &= \int_{-1}^1 L_n(x) \left(\frac{(2n+1)}{n+1}L_n(x) - \frac{n}{n+1}M_{n-1}(x) \right) dx, \\ &= \frac{(2n+1)}{n+1} \int_{-1}^1 L_n^2(x)dx.\end{aligned}$$

Car le polynôme L_n est orthogonal à tous les polynômes de degré $\leq n-1$, donc à M_{n-1} , et d'après (1.27) on trouve

$$\int_{-1}^1 M_n^2(x)(1+x)dx = \frac{(2n+1)}{n+1} \int_{-1}^1 L_n^2(x)dx = \frac{2}{n+1}.$$

Ce qui fait la démontrer. ■

Lemme 1.3.46 *Pour tout entier positif n , on a la relation de récurrence*

$$\begin{cases} M_0(x) = 1 \text{ et } M_1(x) = \frac{1}{2}(3x-1) \\ \frac{n+2}{2n+3}M_{n+1}(x) = \left(x - \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right)M_n(x) - \frac{n}{2n+1}M_{n-1}(x), n \geq 1 \end{cases} \quad (1.88)$$

Preuve. D'après (1.27) on a : $M_0(x) = 1$ et pour $n = 1$, on trouve, $2M_1(x) = 3L_1(x) - M_0(x)$, alors $M_1(x) = \frac{1}{2}(3x - 1)$.

D'après (1.36), pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$(n + 2) L_{n+2}(x) = (2n + 3) x L_{n+1}(x) - (n + 1) L_n(x),$$

$$(n + 2) (L_{n+2}(x) + L_{n+1}(x)) = (n + 2) L_{n+1}(x) + (2n + 3) x L_{n+1}(x) - (n + 1) L_n(x),$$

$$= [(2n + 1) x L_n(x) - n L_{n-1}(x)] + (2n + 3) x L_{n+1}(x) - (n + 1) L_n(x) + L_{n+1}(x),$$

$$= (2n + 3) x (L_{n+1}(x) + L_n(x)) - \frac{1}{2n + 1} (L_{n+1}(x) + L_n(x)) - n L_{n-1}(x) \\ - (n + 1) L_n(x) + L_{n+1}(x) - 2x L_n(x) + \frac{1}{2n + 1} (L_{n+1}(x) + L_n(x)).$$

On utilise (1.36) alors

$$= \left((2n + 3) x - \frac{1}{2n + 1} \right) (L_{n+1}(x) + L_n(x)) - n L_{n-1}(x) - (n + 1) L_n(x) - 2x L_n(x) \\ + 2x L_n(x) - \frac{2n}{2n + 1} L_{n-1}(x) + \frac{1}{2n + 1} L_n(x),$$

$$= \left((2n + 3) x - \frac{1}{2n + 1} \right) (L_{n+1}(x) + L_n(x)) - \left(n + \frac{2n}{2n + 1} \right) L_{n-1}(x) \\ - n L_n(x) + \left(\frac{1}{2n + 1} - 1 \right) L_n(x),$$

$$= \left((2n + 3) x - \frac{1}{2n + 1} \right) (L_{n+1}(x) + L_n(x)) - n \left(\frac{2n + 3}{2n + 1} \right) (L_{n-1}(x) + L_n(x)).$$

Il suffit de diviser sur la quantité $(2n + 3)(1 + x)$ on obtient la relation de récurrence

$$\frac{n + 2}{2n + 3} M_{n+1}(x) = \left(x - \frac{1}{(2n + 1)(2n + 3)} \right) M_n(x) - \frac{n}{2n + 1} M_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Proposition 1.3.47 *Pour tout entier positif n , $n \geq 1$, on a la formule de récurrence*

$$(1 - x^2) M'_n(x) = -n(n + 2) \left(\frac{M_{n+1}(x)}{2n + 3} + \left(\frac{2}{(2n + 1)(2n + 3)} \right) M_n(x) - \frac{M_{n-1}(x)}{2n + 1} \right). \quad (1.89)$$

Preuve. D'après (1.85) on a

$$\frac{d}{dt} \left((1+t)^2 (1-t) M'_n(t) \right) = -n(n+2) (1+t) M_n(t),$$

on intègre cette formule on trouve

$$\int_{-1}^x d \left((1+t)^2 (1-t) M'_n(t) \right) = -n(n+2) \int_{-1}^x (1+t) M_n(t) dt,$$

c'est-à-dire

$$(1-x^2) (1+x) M'_n(x) = -n(n+2) \int_{-1}^x (L_{n+1}(t) + L_n(t)) dt,$$

à partir de (1.29) on obtient

$$(1-x^2) (1+x) M'_n(x) = -n(n+2) \left(\left(\frac{L_{n+2}(x) - L_n(x)}{2N+3} \right) + \left(\frac{L_{n+1}(x) - L_{n-1}(x)}{2N+1} \right) \right),$$

on ajoute et on élimine la quantité $\frac{L_{n+1}(x)}{2N+3} + \frac{L_n(x)}{2N+1}$, donc on a

$$\begin{aligned} (1-x^2) (1+x) M'_n(x) &= -n(n+2) \left(\left(\frac{L_{n+2}(x) + L_{n+1}(x)}{2N+3} \right) - \left(\frac{L_{n+1}(x) + L_n(x)}{2N+3} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{L_{n+1}(x) + L_n(x)}{2N+1} \right) - \left(\frac{L_n(x) + L_{n-1}(x)}{2N+1} \right) \right), \end{aligned}$$

on divise sur $(1+x)$, on obtient le résultat

$$(1-x^2) M'_n(x) = -n(n+2) \left(\frac{M_{n+1}(x)}{2n+3} + \left(\frac{1}{(2n+1)} - \frac{1}{(2n+3)} \right) M_n(x) - \frac{M_{n-1}(x)}{2n+1} \right),$$

ce qui termine la démonstration. ■

Chapitre 2

Formules de quadrature

2.1 Introduction

Il est bien connu que les zéros et les extrema des polynômes de Legendre (ou appartenant à une famille quelconque de polynômes orthogonaux) servent à la construction de formules de quadrature numérique de grande précision, c'est-à-dire qui sont exactes sur un espace de polynômes de degré élevé : il s'agit principalement des formules de Gauss et de Gauss-Lobatto et la formule de quadrature pondérée. On réfère à Crouzeix et Mignot [49] et à Davis et Rabinowitz [56] pour leur analyse numérique complète. Une famille de formules englobant les deux précédentes est étudiée en détail dans Bernardi et Maday [10].

Dans ce chapitre, sont rappelées les caractéristiques des formules de Gauss, de Gauss-Lobatto et la formule de quadrature pondérée, pour approcher les intégrales intervenant dans la formulation variationnelle.

Notation 2.1.1 *Pour tout entier positif ou nul n , on note $\mathbb{P}_n(\Lambda)$ l'espace des polynômes à une variable de degré $\leq n$, restreints à Λ .*

2.2 Formules de quadrature dans $L^2(\Lambda)$

Proposition 2.2.1 [9] (*Formule de quadrature de Gauss*) *Soit N un entier positif fixé. Il existe un unique ensemble de N points x_j de Λ , $1 \leq j \leq N$, et un unique ensemble de N réels ω_j , $1 \leq j \leq N$, tels que l'égalité suivante ait lieu pour tout polynômes φ de $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$*

$$\int_{-1}^1 \varphi(x) dx = \sum_{j=1}^N \varphi(x_j) \omega_j. \quad (2.1)$$

Les $x_j, 1 \leq j \leq N$, sont les zéros du polynôme L_N . Les $\omega_j, 1 \leq j \leq N$, sont positifs.

Preuve. Soit $x_j, 1 \leq j \leq N$, sont les zéros de L_N . Pour $1 \leq k \leq N$, on note ℓ_k le polynôme de Lagrange¹ associé à x_k , c'est -à-dire l'unique polynôme de $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$ qui vaut 1 en x_k et s'annule en $x_j, 1 \leq j \leq N, j \neq k$. On pose

$$\omega_k = \int_{-1}^1 \ell_k(x) dx.$$

On vérifie alors que, pour tout $1 \leq j \leq N$,

$$\int_{-1}^1 \ell_k(x) dx = \ell_k(\xi_k) \omega_k = \sum_{j=1}^N \ell_k(x_j) \omega_j,$$

car $\ell_k(\xi_k) = 1$, de sorte que l'égalité (2.1) est vraie lorsque φ appartient à l'ensemble $\{\ell_1, \dots, \ell_N\}$. Comme cet ensemble forme une base de $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$, est satisfaite pour tout polynômes φ de $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$. Soit maintenant φ un polynôme quelconque de $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$, on effectue sa division euclidienne par L_N , alors il existe deux polynômes Q et R , nécessairement dans $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$, tels que φ soit égal à $QL_N + R$. On calcule alors

$$\int_{-1}^1 \varphi(x) dx = \int_{-1}^1 Q(x) L_N(x) dx + \int_{-1}^1 R(x) dx.$$

Comme L_N est orthogonal à tous les polynômes de degré $\leq N - 1$, donc à Q , et que l'égalité (2.1) est exacte pour le polynôme R , on déduit

$$\int_{-1}^1 \varphi(x) dx = \int_{-1}^1 R(x) dx = \sum_{j=1}^N R(x_j) \omega_j.$$

Finalement, comme les nœuds de la formule de quadrature sont les zéros de L_N , on obtient

$$\int_{-1}^1 \varphi(x) dx = \sum_{j=1}^N (QL_N + R)(x_j) \omega_j = \sum_{j=1}^N R(x_j) \omega_j,$$

ce qui prouve l'exactitude de la formule de quadrature sur $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$. Comme les $\ell_j, 1 \leq$

¹En analyse numérique, les polynômes de Lagrange, du nom de **Joseph-Louis Lagrange**, permettent d'interpoler une série de points par un polynôme qui passe exactement par ces points appelés aussi nœuds. Cette technique d'interpolation polynomiale a été découverte par Edward Waring en 1779 et redécouverte plus tard par Leonhard Euler en 1783. C'est un cas particulier du théorème des restes chinois.

$j \leq N$, appartient à $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$, alors les ℓ_j^2 appartiennent à $\mathbb{P}_{2N-2}(\Lambda)$, et on a

$$\omega_j = \int_{-1}^1 \ell_j^2(x) dx,$$

ce qui montre que les ω_j sont positifs. Réciproquement, soit x_j et ω_j , $1 \leq j \leq N$, $2N$ nombres réels tels que la formule (2.1) soit vraie pour tout φ dans $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$, on note ℓ_j , $1 \leq j \leq N$, les polynômes de Lagrange associé à x_j dans $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$, et en appliquant la formule à ℓ_j , on voit que l'on a nécessairement

$$\omega_j = \int_{-1}^1 \ell_j(x) dx,$$

donc les ω_j , $1 \leq j \leq N$, sont déterminés de façon unique en fonction des x_j . Comme L_N est orthogonal à tous les polynômes de degré $\leq N-1$, donc à ℓ_j , alors on a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^1 L_N(x) \ell_j(x) dx, \\ &= \int_{-1}^1 (L_N \ell_j)(x) dx. \end{aligned}$$

puis, en appliquant la formule de quadrature sur $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$, car $\varphi = L_N \ell_j$ dans $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$,

$$0 = \int_{-1}^1 L_N(x) \ell_j(x) dx = \sum_{k=1}^N L_N(\xi_k) h_j(\xi_k) \omega_k = L_N(x_j) \omega_j.$$

comme ω_j est égal à $\int_{-1}^1 \ell_j^2(x) dx$, donc est positif et $L_N(x_j)$ est nul, et les N points distincts x_j , $1 \leq j \leq N$, sont les zéros du polynôme L_N .

Dans tout ce qui suit, on désignera par x_j , $1 \leq j \leq N$, les zéros du polynôme L_N , qui sont les nœuds de la formule de quadrature et par ω_j , $1 \leq j \leq N$, les poids qui leur sont associés de façon unique d'après la proposition (2.2.1). la formule de quadrature

$$\int_{-1}^1 \varphi(x) dx \simeq \sum_{j=1}^N \varphi(x_j) \omega_j. \quad (2.2)$$

est appelée formule de Gauss de type Legendre à N points. ■

Remarque 2.2.2 En utilisant la formule de Christoffel -Darboux (1.43) avec $\eta = x_j$

$$L_0^*(x) L_0^*(x_j) + \dots + L_{N-1}^*(x) L_{N-1}^*(x_j) = \frac{k_{N-1}^* L_N^*(x) L_{N-1}^*(x_j)}{k_N^* (x - x_j)}. \quad (2.3)$$

Car les x_j , $1 \leq j \leq N$, sont les zéros de L_N . En intégrant l'équation (2.3) on obtient

$$\int_{-1}^1 (L_0^*(x) L_0^*(x_j) + \dots + L_{N-1}^*(x) L_{N-1}^*(x_j)) dx = \frac{k_{N-1}^*}{k_N^*} L_{N-1}^*(x_j) \int_{-1}^1 \frac{L_N^*(x)}{x - x_j} dx,$$

comme L_N est orthogonal à tous les polynômes de degré $\leq N - 1$, on déduit que

$$1 = \frac{k_{N-1}^*}{k_N^*} L_{N-1}^*(x_j) \int_{-1}^1 \frac{L_N^*(x)}{x - x_j} dx. \quad (2.4)$$

Car

$$\int_{-1}^1 L_0^*(x) L_0^*(x_j) dx = 1.$$

Remarque 2.2.3 D'après le lemme (1.3.4), on peut écrire L_N à sous forme

$$\begin{aligned} L_N(x) &= \alpha_N \prod_{k=1}^N (x - x_k), \text{ où } \alpha_N \text{ est une constante,} \\ &= \alpha_N (x - x_j) \prod_{k=1, k \neq j}^N (x - x_k). \end{aligned}$$

d'après (1.40), on a

$$\begin{aligned} L_N^*(x) &= \alpha_N^* \prod_{k=1}^N (x - x_k), \text{ avec } \alpha_N^* = \frac{\alpha_N}{\|L_N\|_{L^2(\Lambda)}}, \\ &= \alpha_N^* (x - x_j) \prod_{k=1, k \neq j}^N (x - x_k). \end{aligned}$$

on pose

$$Q_{N-1}(x) = \prod_{k=1, k \neq j}^N (x - x_k),$$

alors on a

$$\frac{L_N^*(x)}{(x - x_j)} = \alpha_N^* Q_{N-1}(x). \quad (2.5)$$

de plus on obtient

$$L_N^{*'}(x) = \alpha_N^* \left(Q_{N-1}(x) + (x - x_j) Q_{N-1}'(x) \right),$$

au point x_j , on trouve

$$L_N^{*'}(x_j) = \alpha_N^* Q_{N-1}(x_j). \quad (2.6)$$

On utilise (2.5), dans l'égalité (2.4)

$$1 = \frac{k_{N-1}^*}{k_N^*} L_{N-1}^*(x_j) \int_{-1}^1 \alpha_N^* Q_{N-1}(x) dx,$$

comme le polynôme Q_{N-1} , appartient à $P_{N-1}(\Lambda)$, alors on a

$$1 = \frac{k_{N-1}^*}{k_N^*} L_{N-1}^*(x_j) \alpha_N^* Q_{N-1}(x_j) \omega_j,$$

d'après (2.6)

$$1 = \frac{k_{N-1}^*}{k_N^*} L_{N-1}^*(x_j) L_N'(x_j) \omega_j. \quad (2.7)$$

En utilisant le corollaire (1.3.13), l'égalité (1.40) et (1.41) on obtient

$$1 = \frac{N}{2} \frac{L_{N-1}^*(x_j) L_N'(x_j)}{\sqrt{N - \frac{1}{2}} \sqrt{N + \frac{1}{2}}} \omega_j,$$

car la quantité $\frac{k_{N-1}^*}{k_N^*}$ est égale $\frac{N}{2N-1} \sqrt{\frac{N-\frac{1}{2}}{N+\frac{1}{2}}}$. Finalement on déduit que

$$\omega_j = \frac{2}{N L_N'(x_j) L_{N-1}(x_j)}. \quad (2.8)$$

Remarque 2.2.4 D'après le corollaire (1.3.13), l'égalité (1.40) et (1.41), on a

$$k_n^* = \sqrt{n + \frac{1}{2}} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}. \quad (2.9)$$

En peut écrire la formule de récurrence (1.42) sous forme

$$x L_n^*(x) = \frac{k_n^*}{k_{n+1}^*} L_{n+1}^*(x) + \frac{k_{n-1}^*}{k_n^*} L_{n-1}^*(x).$$

Comme $\frac{k_{n-1}^*}{k_n^*}$ est égale à $\frac{n}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$ pour tout $n \geq 0$, alors on a

$$\begin{cases} x L_0^*(x) = L_1^*(x) \\ x L_n^*(x) = \frac{n+1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}} L_{n+1}^*(x) + \frac{n}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} L_{n-1}^*(x) \end{cases}. \quad (2.10)$$

Si l'on pose $\beta_n = \frac{n}{\sqrt{4n^2-1}}$, la formule (2.10) équivaut à

$$x \begin{pmatrix} L_0^* \\ L_1^* \\ \dots \\ L_{N-2}^* \\ L_{N-1}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & \dots & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{N-1} \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{N-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_0^* \\ L_1^* \\ \dots \\ L_{N-2}^* \\ L_{N-1}^* \end{pmatrix} + \beta_N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ L_N^* \end{pmatrix}.$$

En d'autres termes, les $x_j, 1 \leq j \leq N$, sont les valeurs propres de la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & \dots & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{N-1} \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{N-1} & 0 \end{pmatrix},$$

qui est tridiagonale symétrique à diagonale nulle; on les calcule donc facilement, avec par exemple un algorithme de Givens-Householder (voir le paragraphe 6.2) Ciarlet [55].

Remarque 2.2.5 On remarque également qu'en appliquant une fois la formule de Christoffel-Darboux (1.44) au point x_j

$$L_0^{*2}(x_j) + L_1^{*2}(x_j) + \dots + L_{N-1}^{*2}(x_j) = \frac{k_{N-1}^*}{k_N^*} L_N'(x_j) L_{N-1}^*(x_j),$$

En utilisant cette formule dans (2.7), on a l'expression

$$\omega_j = \left(L_0^{*2}(x_j) + L_1^{*2}(x_j) + \dots + L_{N-1}^{*2}(x_j) \right)^{-1},$$

et on déduit que, si x_{j0} est la première composante d'un vecteur propre normé de la matrice M , associé à la valeur propre x_j , ω_j est égale à $2x_{j0}^2$.

On étudie maintenant une autre formule de quadrature, qui diffère de la première essentiellement par le fait que les extrémités -1 et 1 de l'intervalle sont des noeuds de la formule.

Proposition 2.2.6 [9] (**Formule de quadrature de Gauss-Lobatto**) Soit N un entier positif fixé. On pose $\xi_0 = -1$ et $\xi_N = 1$. Il existe un unique ensemble de $N - 1$ points ξ_j de Λ , $1 \leq j \leq N - 1$, et un unique ensemble de $N + 1$ réels ρ_j , $0 \leq j \leq N$, tels que

l'égalité suivante ait lieu pour tout polynôme φ de $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$

$$\int_{-1}^1 \varphi(x) dx = \sum_{j=0}^N \varphi(\xi_j) \rho_j. \quad (2.11)$$

Les ξ_j , $1 \leq j \leq N-1$, sont les zéros du polynôme L'_N . Les ρ_j , $0 \leq j \leq N$, sont réels positifs.

Preuve. On note d'abord que, si F_{N-1} désigne le polynôme $\prod_{j=1}^{N-1} (x - \xi_j)$, tout polynôme φ de $\mathbb{P}_{2n-1}(\Lambda)$ s'écrit sous la forme

$$\varphi(x) = \varphi(-1) \frac{(1-x) F_{N-1}(x)}{2F_{N-1}(-1)} + \varphi(1) \frac{(1-x) F_{N-1}(x)}{2F_{N-1}(1)} + (1-x^2) \Psi(x),$$

où Ψ est un polynôme de $\mathbb{P}_{2n-3}(\Lambda)$. En posant

$$\begin{cases} \rho_0 = \frac{1}{2F_{N-1}(-1)} \int_{-1}^1 (1-x) F_{N-1}(x) dx \\ \rho_N = \frac{1}{2F_{N-1}(1)} \int_{-1}^1 (1+x) F_{N-1}(x) dx \end{cases}, \quad (2.12)$$

on voit que la première partie de la proposition est équivalente à l'énoncé suivante : il existe un unique ensemble de $N-1$ points ξ_j de Λ , $1 \leq j \leq N-1$, et un unique ensemble de $N-1$ réels ρ_j , $1 \leq j \leq N-1$, tels que l'égalité suivante ait lieu pour tout polynôme Ψ de $\mathbb{P}_{2n-3}(\Lambda)$

$$\int_{-1}^1 \Psi(x) (1-x^2) dx = \sum_{j=1}^{N-1} \Psi(\xi_j) (1-\xi_j^2) \rho_j. \quad (2.13)$$

Ceci similaire à la proposition (2.2.1), avec N remplacé par $N-1$ et la mesure dx remplacée par la mesure $(1-x^2) dx$. On termine donc la proposition (2.2.6) exactement par les mêmes arguments que pour la proposition (2.2.1) en remarquant que, d'après la formule (1.21), les polynômes L'_n , $n \geq 1$, forment une famille orthogonale pour la mesure $(1-x^2) dx$ dans Λ .

Dans ce qui suit, on notera ξ_j , $0 \leq j \leq N$ les zéros de $(1-x^2) L'_N$ rangés par ordre croissant et ρ_j , $0 \leq j \leq N$, les poids qui leur associés de façon unique d'après la proposition (2.2.1). La formule de quadrature

$$\int_{-1}^1 \varphi(x) dx \simeq \sum_{j=0}^N \varphi(\xi_j) \rho_j, \quad (2.14)$$

est appelée formule de **Gauss-Lobatto** de type **Legendre** à $N+1$ point. Le mode de

calcul des poids ρ_j , $0 \leq j \leq N$, est donné dans les deux lemmes suivants. ■

Lemme 2.2.7 *Les poids ρ_0 et ρ_N sont donnés par*

$$\rho_0 = \rho_N = \frac{2}{N(N+1)}.$$

Preuve. On déduit que la formule (2.12) est équivalente à la formule

$$\begin{cases} \rho_0 = \frac{1}{2L'_N(-1)} \int_{-1}^1 (1-x) L'_N(x) dx \\ \rho_N = \frac{1}{2L'_N(1)} \int_{-1}^1 (1+x) L'_N(x) dx \end{cases},$$

ce qui conduit à distinguer les deux cas : N pair et N impair.

1) Lorsque N est impair, le polynôme L'_N est pair, et d'après (1.25) et (1.26) on a : $2L'_N(1)$ et $2L'_N(-1)$ sont tous égaux à $N(N+1)$; de plus, le polynôme xL'_N est impair, donc d'intégrale nulle sur Λ . On en déduit

$$\rho_0 = \rho_N = \frac{1}{N(N+1)} \int_{-1}^1 L'_N(x) dx = \frac{1}{N(N+1)} (L_N(1) - L_N(-1)),$$

d'où le résultat.

2) Lorsque N est pair, les arguments de symétrie impliquent

$$\rho_0 = \rho_N = \frac{1}{N(N+1)} \int_{-1}^1 xL'_N(x) dx,$$

on intègre par parties

$$\rho_0 = \rho_N = \frac{1}{N(N+1)} (L_N(1) - L_N(-1)) - \int_{-1}^1 L_N(x) dx,$$

et d'après l'orthogonalité de L_N , on obtient le résultat cherché. ■

Lemme 2.2.8 *Les poids ρ_j , $0 \leq j \leq N$, sont donnés par*

$$\rho_j = \frac{2}{N(N+1)L_N^2(\xi_j)}. \quad (2.15)$$

Preuve. On peut écrire le polynôme $(1 - x^2) L'_N(x)$ sous forme

$$(1 - x^2) L'_N(x) = \alpha_N \prod_{k=0}^N (x - \xi_k), \text{ où } \alpha_N \text{ est une constante,}$$

$$\frac{(1 - x^2) L'_N(x)}{x - \xi_j} = \alpha_N \prod_{k=0, k \neq j}^N (x - \xi_k).$$

On pose

$$Q_N(x) = \prod_{k=0, k \neq j}^N (x - \xi_k),$$

Alors on a

$$(1 - x^2) L'_N(x) = \alpha_N (x - \xi_j) \prod_{k=0, k \neq j}^N (x - \xi_k),$$

$$= \alpha_N (x - \xi_j) Q_N(x), \tag{2.16}$$

De plus on obtient

$$\frac{d}{dx} \left((1 - x^2) L'_N \right) (x) = \alpha_N \left(Q_N(x) + (x - \xi_j) Q'_N(x) \right),$$

au point ξ_j , on trouve

$$\frac{d}{dx} \left((1 - x^2) L'_N \right) (\xi_j) = \alpha_N Q_N(\xi_j).$$

D'autre part on a

$$\int_{-1}^1 \frac{(1 - x^2) L'_N(x)}{x - \xi_j} dx = \alpha_N \int_{-1}^1 Q_N(x) dx,$$

Comme le polynôme Q_N est dans $\mathbb{P}_N(\Lambda)$, en appliquant la formule (2.14)

$$\int_{-1}^1 \frac{L'_N(x)}{x - \xi_j} (1 - x^2) dx = \alpha_N Q_N(\xi_j) \rho_j,$$

$$= \frac{d}{dx} \left((1 - x^2) L'_N \right) (\xi_j) \rho_j,$$

d'où, d'après l'équation différentielle (1.20)

$$\rho_j = \frac{1}{N(N+1)L_N(\xi_j)} \int_{-1}^1 \frac{L'_N(x)}{x-\xi_j} (1-x^2) dx. \quad (2.17)$$

Pour évaluer l'intégrale, on va calculer par récurrence sur n la quantité

$$S_n(x, \eta) = \frac{L'_{n+1}(x)L'_n(\eta) - L'_{n+1}(\eta)L'_n(x)}{x-\eta}.$$

A partir de la relation de récurrence (1.36) vérifiée par les L'_n , $n \geq 1$, on a

$$(n+1)L'_{n+1}(x) = (2n+1)xL'_n(x) + (2n+1)L_n(x) - nL'_{n-1}(x). \quad (2.18)$$

En utilisant l'égalité suivante, d'après (1.29)

$$(2n+1)L_n(x) = L'_{n+1}(x) - L'_{n-1}(x). \quad (2.19)$$

On obtient

$$nL'_{n+1}(x) = (2n+1)xL'_n(x) - (n+1)L'_{n-1}(x). \quad (2.20)$$

En utilisant cette formule, on a

$$S_n(x, \eta) = \frac{(2n+1)(x-\eta)L'_n(x)L'_n(\eta) - (n-1)(L'_{n-1}(x)L'_n(\eta) - L'_{n-1}(\eta)L'_n(x))}{n(x-\eta)},$$

on peut écrire

$$\frac{S_n(x, \eta)}{n+1} = \frac{2n+1}{n(n+1)}L'_n(x)L'_n(\eta) + \frac{S_{n-1}(x, \eta)}{n}.$$

En outre, S_0 est identiquement nul. On obtient donc

$$\frac{L'_{n+1}(x)L'_n(\eta) - L'_{n+1}(\eta)L'_n(x)}{x-\eta} = (n+1) \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k(k+1)} L'_k(x)L'_k(\eta),$$

qui est en fait la formule de Christoffel-Darboux (1.39) pour les L'_n , $n \geq 1$. On utilise cette formule avec $n = N-1$ et $\eta = \xi_j$: on la multiplie par $(1-x^2)$ et on l'intègre sur Λ par rapport à x . En rappelant que les polynômes L'_n sont deux à deux orthogonaux pour la mesure $(1-x^2)dx$ dans Λ , donc l'intégrale est nulle pour cette mesure lorsque $N \geq 2$, on en déduit que

$$L'_{N-1}(\xi_j) \int_{-1}^1 \frac{L'_N(x)}{x-\xi_j} (1-x^2) dx = \frac{3N}{2} \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = 2N.$$

En combinant ce résultat avec (2.17), on obtient

$$\rho_j = -\frac{2}{(N+1)L_N(\xi_j)L'_{N-1}(\xi_j)}. \quad (2.21)$$

La formule (2.20) et la formule (2.19), appliquée en ξ_j , on trouve

$$NL'_{N+1}(\xi_j) = -(N+1)L'_{N-1}(\xi_j) \text{ et } (2N+1)L_N(\xi_j) = L'_{N+1}(\xi_j) - L'_{N-1}(\xi_j),$$

donc

$$L'_{N-1}(\xi_j) = -NL_N(\xi_j),$$

ce qui termine la démonstration. ■

Définition 2.2.9 On définit le produit discret pour toutes fonctions continues f et g dans $\bar{\Lambda}$ par

$$(f, g)_N = \sum_{j=0}^N \beta_j f(t_j) g(t_j) \rho_j, \quad (2.22)$$

Remarque 2.2.10 D'autres formules équivalentes sont possibles pour donner la valeur des ρ_j , $1 \leq j \leq N-1$, consiste à exhiber une matrice symétrique dont ils sont les valeurs propres. Pour cela, on pose

$$J_n^*(x) = L'_{n+1}(x) \sqrt{\frac{n + \frac{3}{2}}{(n+1)(n+2)}},$$

ce qui signifie que les J_n^* , $0 \leq n \leq N$, forment une base orthonormée de $P_N(\Lambda)$, pour le produit scalaire $\int_{-1}^1 uv(1-x^2)dx$. La formule de récurrence (2.20)

$$n \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{n + \frac{3}{2}}} J_n^*(x) = (2n+1) \sqrt{\frac{n(n+1)}{n + \frac{1}{2}}} x J_{n-1}^*(x) - (n+1) \sqrt{\frac{n(n-1)}{n - \frac{1}{2}}} J_{n-2}^*(x),$$

où encore

$$2x J_{n-1}^*(x) = \sqrt{\frac{n(n+2)}{(n + \frac{1}{2})(n + \frac{3}{2})}} J_n^*(x) + \sqrt{\frac{(n-1)(n+1)}{(n - \frac{1}{2})(n + \frac{1}{2})}} J_{n-2}^*(x),$$

cette dernière relation prouve que les points de Gauss-Lobatto sont les valeurs propres de

la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 & \dots & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma_{N-1} \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_{N-1} & 0 \end{pmatrix},$$

avec

$$\gamma_n = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n(n+2)}{(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})}}, \quad 1 \leq n \leq N-2.$$

Cette matrice est encore tridiagonale symétrique et à diagonale nulle, et les poids ρ_j , $1 \leq j \leq N-1$, peuvent se calculer soit à partir des vecteurs propres de cette matrice comme pour la formule de Gauss, soit par la formule (2.15). Les poids ρ_0 et ρ_N sont donnés dans le lemme(2.2.7).

Définition 2.2.11 Le polynôme R_{2N-1} de degré $2N-1$ est de la forme

$$R_{2N-1}(x) = \left((1-x^2) L'_{N-1}(x) \right)^2 + \beta(N) (1-x^2) L_N^2(x), \quad (2.23)$$

$$\text{où } \beta(N) = \left(\frac{N-1}{2N-1} \right)^2.$$

Lemme 2.2.12 Les polynômes $h_{N-1} = (1-x^2) L'_{N-1}(x) \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda)$ vérifient la double inégalité

$$\|h_{N-1}\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq (h_{N-1}, h_{N-1})_N \leq \frac{3}{2} \|h_{N-1}\|_{L^2(\Lambda)}^2. \quad (2.24)$$

Respectivement tels que le sous-espace $\mathbb{P}_N^0(\Lambda) = \{p_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda) / p_N(-1) = p_N(1) = 0\}$.

Preuve. En posant ,

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{-1}^1 h_{N-1}^2(x) dx, \\ &= \int_{-1}^1 \left((1-x^2) L'_{N-1}(x) \right)^2 dx, \end{aligned}$$

en utilisant (1.33), on trouve

$$J_1 = 4 \frac{(N-1)^2 N^2}{(4N^2 - 8N + 3)(2N+1)}. \quad (2.25)$$

Et en posant ,

$$J_2 = \int_{-1}^1 (1-x^2) L_N^2(x) dx.$$

Par intégration par parties et d'après (1.27), on obtient

$$J_2 = N(N+1) \int_{-1}^1 L_N^2(x) dx,$$

c'est-à-dire

$$J_2 = 2 \frac{N(N+1)}{(2N+1)}. \quad (2.26)$$

Finalement on a

$$J_3 = \int_{-1}^1 R_{2N-1}(x) dx = J_1 + \beta(N) J_2,$$

d'après la formule de quadrature (2.11) qui est exacte pour le polynôme $R_{2N-1}(x)$, alors

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_{-1}^1 R_{2N-1}(x) dx = \sum_{j=0}^N R_{2N-1}(\xi_j) \rho_j, \\ &= \sum_{j=0}^N \left(\left((1 - (\xi_j)^2) L'_{N-1}(\xi_j) \right)^2 + \beta(N) \left(1 - (\xi_j)^2 \right) L_N^2(\xi_j) \right) \rho_j, \end{aligned}$$

comme les ξ_j , $0 \leq j \leq N$, sont les zéros du polynôme $(1-x^2)L'_N$, on déduit

$$J_3 = \sum_{j=0}^N \left((1 - (\xi_j)^2) L'_{N-1}(\xi_j) \right)^2 \rho_j = \sum_{j=0}^N h_{N-1}^2(\xi_j) \rho_j. \quad (2.27)$$

Nous concluons que

$$\|h_{N-1}\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq (h_{N-1}, h_{N-1})_N,$$

permettent de définir γ tel que $\gamma \frac{J_1}{J_3} \geq 1$, c'est-à-dire

$$\gamma \geq \frac{J_3}{J_1},$$

alors on a

$$\begin{aligned} \gamma &\geq 1 + \beta(N) \frac{J_2}{J_1}, \\ \gamma &\geq 1 + \frac{(N+1)(2N-3)}{2N(2N-1)}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\gamma \geq \frac{3(2N^2 - N - 1)}{2(2N^2 - N)},$$

on étudier la fonction g dans \mathbb{R}^+ où

$$g(x) = \frac{3(2x^2 - x - 1)}{2(2x^2 - x)},$$

on déduit que

$$g'(x) = \frac{3(4x - 1)}{2(2x^2 - x)^2},$$

on déduit que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $g'(x) > 0$, donc g est croissante dans \mathbb{R}^{+*} , c'est-à-dire

$$\max_{x \in \mathbb{R}^{+*}} |g(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{3}{2},$$

on peut prendre

$$\gamma = \frac{3}{2}.$$

Enfin on trouve

$$J_3 \leq \gamma J_1.$$

Ce qui donne le résultat. ■

Proposition 2.2.13 [2] Avec le changement de variable $x = \frac{2t}{T} - 1$, alors $t \in \bar{I} = [0, T]$. et il existe un unique ensemble de $N + 1$ nœuds t_j , $0 \leq j \leq N$, dans \bar{I} et $N + 1$ points w_j , $0 \leq j \leq N$, telle que :

$$\forall q \in \mathbb{P}_{2N-1}(I), \quad \int_0^T q(t) dt = \sum_{j=0}^N q(t_j) w_j, \quad (2.28)$$

$t_j = \frac{T}{2}(1 + \xi_j)$, $0 \leq j \leq N$ sont les zéros du polynôme $(t - \frac{t^2}{T})p'_N(t)$ et w_j , $0 \leq j \leq N$ sont positifs et définis par

$$\begin{cases} w_0 = w_N = \frac{1}{TN(N+1)} \\ w_j = \frac{w_0}{2p_N^2(t_j)}, \quad 1 \leq j \leq N-1 \end{cases}, \quad (2.29)$$

Lemme 2.2.14 Le produit discret dans (2.22) satisfait

$$\forall q_N \in \mathbb{P}_N^0(I), \quad \frac{1}{6} \|q_N\|_{L^2(I)}^2 \leq (q_N, q_m)_N \leq \frac{3}{2} \|q_N\|_{L^2(I)}^2, \quad 1 \leq m < N, \quad (2.30)$$

$$\forall q_N \in \mathbb{P}_N^0(I), \quad \|q_N\|_{L^2(I)}^2 \leq (q_N, q_N)_N \leq \frac{3}{2} \|q_N\|_{L^2(I)}^2, \quad (2.31)$$

et le sous espace ,

$$\mathbb{P}_N^0(I) = \{q_N \in \mathbb{P}_N(I) / q(T) = q(0) = 0\}, \quad (2.32)$$

où $\mathbb{P}_N(I)$ est l'espace de polynôme de degré $\leq N$ voir [3].

Preuve. On a $p_N(t) = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i t_i(t)$, $t_i(t) = (t - \frac{t^2}{T})p'_i(t)$, de la formule de quadrature exacte on peut écrire,

$$(t_{N-1}, t_m)_N = \int_0^T t_{N-1}(t)t_m(t)dt, \quad 1 \leq m \leq N.$$

il reste à démontrer $(t_{N-1}, t_{N-1})_N$:

On applique la formule de quadrature avec le polynôme

$$q_{2N-1}(t) = ((t - t^2)p'_{N-1}(t))^2 + b(N)(t - t^2)(p'_N(t))^2,$$

où,

$$b(N) = \frac{(N-1)^2}{4(2N-1)^2},$$

alors on compare l'intégrale avec la formule de quadrature on a

$$\|t_{N-1}\|_{L^2(I)}^2 \leq (t_{N-1}, t_{N-1})_N \leq \frac{3}{2} \|t_{N-1}\|_{L^2(I)}^2. \quad (2.33)$$

■

2.3 Formules de quadrature pondérée dans $L^2_1(\Lambda)$

Proposition 2.3.1 Soit N un entier positif fixé. On pose $x_1^{(2)} = -1$ et $x_{N+1}^{(2)} = 1$ il existe un unique ensemble de $N-1$ points $x_j^{(2)}$ de Λ , $2 \leq j \leq N$, et un unique ensemble de $N+1$ réels $\omega_j^{(2)}$, $1 \leq j \leq N+1$, tels que l'égalité suivante ait lieu pour tout polynôme Φ de $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$

$$\int_{-1}^1 \Phi(x)(1+x)dx = \sum_{j=1}^{N+1} \Phi(x_j^{(2)})\omega_j^{(2)}. \quad (2.34)$$

Les $x_j^{(2)}$, $2 \leq j \leq N$, sont les zéros du polynôme M'_N , les $\omega_j^{(2)}$, $1 \leq j \leq N+1$, sont positifs.

Preuve. Soit $x_j^{(2)}$, $1 \leq j \leq N+1$, sont les zéros de M'_N . Pour $1 \leq k \leq N+1$, on note $\ell_k^{(2)}$ le polynôme de Lagrange associé à $x_k^{(2)}$, c'est -à-dire l'unique polynôme de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ qui

vaut 1 en ξ_k et s'annule en $x_j^{(2)}$, $1 \leq j \neq k \leq N+1$. On pose

$$\omega_k^{(2)} = \int_{-1}^1 \ell_k^{(2)}(x) (1+x) dx.$$

On vérifie alors que, pour tout $1 \leq j \leq N+1$,

$$\int_{-1}^1 \ell_k^{(2)}(x) (1+x) dx = \ell_k(x_k^{(2)}) \omega_k^{(2)} = \sum_{j=1}^{N+1} \ell_k^{(2)}(x_j^{(2)}) \omega_j^{(2)},$$

car $\ell_k^{(2)}(x_k^{(2)}) = 1$, de sorte que l'égalité (2.34) est vraie lorsque Φ appartient à l'ensemble $\{\ell_1^{(2)}, \dots, \ell_{N+1}^{(2)}\}$. Comme cet ensemble forme une base de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$, est satisfaite pour tout polynômes Φ de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$. Soit maintenant Φ un polynôme quelconque de $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$, on note d'abord que, si P désigne le polynôme $\prod_{j=2}^N (x - x_j^{(2)})$, on effectue la division euclidienne de Φ par $(1-x^2)P$, alors il existe deux polynômes Q dans $\mathbb{P}_{N-2}(\Lambda)$ et R dans $\mathbb{P}_N(\Lambda)$, tels que Φ soit égal à $Q(1-x^2)P + R$. On calcule alors

$$\int_{-1}^1 \Phi(x) (1+x) dx = \int_{-1}^1 Q(x) (1-x^2) P(x) (1+x) dx + \int_{-1}^1 R(x) (1+x) dx.$$

Comme $P(x)$ est orthogonal à tous les polynômes de degré $\leq N-2$ pour la mesure $(1-x^2)(1+x) dx$, donc à Q , et que l'égalité (2.34) est exacte pour le polynôme R , on déduit

$$\int_{-1}^1 \Phi(x) (1+x) dx = \int_{-1}^1 R(x) (1+x) dx = \sum_{j=1}^{N+1} R(x_j^{(2)}) \omega_j^{(2)}.$$

Finalement, comme les noeuds de la formule de quadrature sont les zéros de $(1-x^2)P$, on obtient

$$\int_{-1}^1 \Phi(x) (1+x) dx = \sum_{j=1}^{N+1} (Q(1-x^2)P + R)(x_j^{(2)}) \omega_j^{(2)} = \sum_{j=1}^{N+1} R(x_j^{(2)}) \omega_j^{(2)},$$

ce qui prouve l'exactitude de la formule de quadrature sur $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$. Les poids qui leur associés de façon unique d'après la proposition (2.3.1). La formule de quadrature

$$\int_{-1}^1 \Phi(x) (1+x) dx \simeq \sum_{j=1}^{N+1} \Phi(x_j^{(2)}) \omega_j^{(2)},$$

est appelée formule de Gauss-Lobatto pour la mesure $(1+x) dx$ à $N+1$ point. Les poids

$\omega_j^{(2)}, 1 \leq j \leq N+1$, sont positifs car

$$\omega_j^{(2)} = \left(1 + x_j^{(2)}\right) \int_{-1}^1 \frac{\left(\ell_j^{(2)}(x)\right)^2}{1+x} (1+x) dx, \quad 2 \leq j \leq N+1,$$

$$\omega_1^{(2)} = \frac{1}{2M_N'^2(-1)} \int_{-1}^1 M_N'^2(x) (1-x)(1+x) dx.$$

■

Lemme 2.3.2 Les poids $\omega_j^{(2)}, 1 \leq j \leq N+1$, sont donnés par

$$\begin{cases} \omega_1^{(2)} = \frac{8}{N(N+2)M_N'^2(-1)} \\ \omega_j^{(2)} = \frac{4}{N(N+2)M_N'^2(x_j^{(2)})}, \quad 2 \leq j \leq N+1 \end{cases} \quad (2.35)$$

Preuve. Pour $2 \leq j \leq N$, en appliquant la formule (2.34) pour le polynôme $(1-x^2) \frac{M_N'(x)}{(x-x_j^{(2)})}$

$$\int_{-1}^1 (1-x^2) \frac{M_N'(x)}{(x-x_j^{(2)})} (1+x) dx = \left(1-x_j^{(2)2}\right) M_N^r(x_j^{(2)}) \omega_j^{(2)},$$

d'où

$$\omega_j^{(2)} = \frac{1}{\left(1-x_j^{(2)2}\right) M_N^r(x_j^{(2)})} \int_{-1}^1 (1-x^2) \frac{M_N'(x)}{(x-x_j^{(2)})} (1+x) dx. \quad (2.36)$$

On peut écrire la formule de récurrence pour les polynômes M_n' , $n \geq 1$,

$$M_{n+1}'(x) = (\lambda_n x + \mu_n) M_n'(x) - \nu_n M_{n-1}'(x). \quad (2.37)$$

D'après (1.86) on a

$$M_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)}{(n+2)} L_{n+1}(x) - \frac{(n+1)}{(n+2)} M_n(x),$$

on dérive cette égalité par rapport à x , et on trouve

$$M_{n+1}'(x) = \frac{(2n+1)}{(n+2)} L_{n+1}'(x) - \frac{(n+1)}{(n+2)} M_n'(x),$$

puis en remplaçant la valeur de $M_{n+1}'(x)$ dans (2.37), on obtient

$$\frac{(2n+1)}{(n+2)} L_{n+1}'(x) - \frac{(n+1)}{(n+2)} M_n'(x) = (\lambda_n x - \mu_n) M_n'(x) - \nu_n M_{n-1}'(x).$$

Pour calculer λ_n , on regarde le coefficient de x^n dans l'égalité ci-dessus et on obtient

$$\frac{(2n+3)}{(n+2)}(n+1)k_{n+1} = \lambda_n((n+1)k_{n+1} - k_{n+1}),$$

c'est-à-dire

$$\lambda_n = \frac{(2n+3)(n+1)}{n(n+2)}. \quad (2.38)$$

Il reste à calculer ν_n , en multipliant la formule (2.37), par le polynôme $M'_n(x)$, puis en intégrant la formule pour la mesure $(1-x^2)(1+x)dx$, et comme les polynômes M'_n , $n \geq 1$, forment une famille orthogonale pour cette mesure, on en déduit que

$$0 = \int_{-1}^1 M'_{n+1}(x)M'_n(x)(1-x^2)(1+x)dx,$$

on utilise la formule (2.37), pour $M'_n(x)$ et $M'_{n+1}(x)$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^1 \left((\lambda_n x + \mu_n) M'_n(x) - \nu_n M'_{n-1}(x) \right) \left((\lambda_{n-1} x + \mu_{n-1}) M'_{n-1}(x) - \nu_{n-1} M'_{n-2}(x) \right) \\ &\quad (1-x^2)(1+x)dx, \\ &= \int_{-1}^1 \left(\lambda_n M'_n(x) \left(\lambda_{n-1} x M'_{n-1}(x) - \nu_{n-1} M'_{n-2}(x) \right) - \lambda_{n-1} \nu_n M_{n-1}'^2(x) \right) (1-x^2)(1+x)dx, \end{aligned}$$

alors on a

$$\begin{aligned} &\lambda_{n-1} \nu_n \int_{-1}^1 M_{n-1}'^2(x) (1-x^2)(1+x)dx \\ &= \lambda_n \int_{-1}^1 M'_n(x) \left(\lambda_{n-1} x M'_{n-1}(x) - \nu_{n-1} M'_{n-2}(x) \right) (1-x^2)(1+x)dx, \end{aligned}$$

de plus on a

$$\begin{aligned} &\lambda_{n-1} \nu_n \left\| M'_{n-1} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_1^2(\Lambda)}^2 \\ &= \lambda_n \int_{-1}^1 M'_n(x) \left((\lambda_{n-1} x + \mu_{n-1}) M'_{n-1}(x) - \nu_{n-1} M'_{n-2}(x) \right) (1-x^2)(1+x)dx, \\ &= \lambda_n \int_{-1}^1 M_n'^2(x) (1-x^2)(1+x)dx, \end{aligned}$$

d'ou

$$\nu_n = \frac{\lambda_n \left\| M'_n (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_1^2(\Lambda)}^2}{\lambda_{n-1} \left\| M'_{n-1} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_1^2(\Lambda)}^2}. \quad (2.39)$$

On utilise la formule de Christoffel-Darboux pour M'_n , alors on a

$$\frac{M'_N(x)M'_{N-1}(\eta) - M'_N(\eta)M'_{N-1}(x)}{x - \eta} = \lambda_{N-1} \left\| M'_{N-1} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_1^2(\Lambda)}^2 \sum_{k=1}^{N-1} \frac{M'_k(x)M'_k(\eta)}{\left\| M'_k (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_1^2(\Lambda)}^2},$$

puis on applique cette formule pour $\eta = x_j^{(2)}$,

$$\frac{M'_N(x)M'_{N-1}(x_j^{(2)})}{x - \eta} = \lambda_{N-1} \left\| M'_{N-1} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_1^2(\Lambda)}^2 \sum_{k=1}^{N-1} \frac{M'_k(x)M'_k(x_j^{(2)})}{\left\| M'_k (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_1^2(\Lambda)}^2},$$

car les $x_j^{(2)}$, $2 \leq j \leq N$, sont des zéros de M'_N . On intègre cette formule une fois par rapport à la mesure $(1-x^2)(1+x) dx$,

$$\begin{aligned} & M'_{N-1}(x_j^{(2)}) \int_{-1}^1 \frac{M'_N(x)}{x - \eta} (1-x^2)(1+x) dx \\ &= \lambda_{N-1} \left\| M'_{N-1} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_1^2(\Lambda)}^2 \sum_{k=1}^{N-1} \int_{-1}^1 \frac{M'_k(x)M'_k(x_j^{(2)})}{\left\| M'_k (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_1^2(\Lambda)}^2} (1-x^2)(1+x) dx, \\ &= \lambda_{N-1} \left\| M'_{N-1} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_1^2(\Lambda)}^2 \int_{-1}^1 \frac{M'_1(x)M'_1(x_j^{(2)})}{\left\| M'_1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_1^2(\Lambda)}^2} (1-x^2)(1+x) dx, \end{aligned}$$

car les polynômes M'_n , $n \geq 1$, forment une famille orthogonale pour la mesure $(1-x^2)(1+x) dx$.

Et comme $M'_1(x)$ est égal à $M'_1(x_j^{(2)})$, on trouve

$$M'_{N-1}(x_j^{(2)}) \int_{-1}^1 \frac{M'_N(x)}{x - \eta} (1-x^2)(1+x) dx = \lambda_{N-1} \left\| M'_{N-1} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_1^2(\Lambda)}^2,$$

on utilise ce résultat dans l'égalité (2.36), on obtient

$$\omega_j^{(2)} = \frac{1}{\left(1 - x_j^{(2)2}\right) M'_N(x_j^{(2)}) M'_{N-1}(x_j^{(2)})} \lambda_{N-1} \left\| M'_{N-1} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_1^2(\Lambda)}^2,$$

on peut calculer $\left\|M'_{N-1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^2_1(\Lambda)}^2$, par itégration par parties et on utilise (1.85)

$$\begin{aligned}\left\|M'_{N-1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^2_1(\Lambda)}^2 &= \int_{-1}^1 M'^2_{N-1}(x)(1-x^2)(1+x)dx, \\ &= (N-1)(N+1) \int_{-1}^1 M^2_{N-1}(x)(1+x)dx, \\ &= (N-1)(N+1) \frac{2}{N}..\end{aligned}$$

On déduit

$$\omega_j^{(2)} = \frac{2(2N+1)}{\left(1-x_j^{(2)2}\right)M''_N(x_j^{(2)})M'_{N-1}(x_j^{(2)})}, \quad (2.40)$$

où

$$\lambda_{N-1} = \frac{N(2N+1)}{(N-1)(N+1)}.$$

Finalement, d'après (1.85), on a $\left(1-x_j^{(2)2}\right)M''_N(x_j^{(2)})$ égale $-N(N+2)M_N(x_j^{(2)})$, et on applique la formule (2.37) en $x_j^{(2)}$ on trouve

$$M'_{N+1}(x_j^{(2)}) = -\nu_N M'_{N-1}(x_j^{(2)}),$$

puis on dérive la formule (1.88). Au point $x = x_j^{(2)}$ on trouve

$$\frac{N+2}{2N+3}M'_{N+1}(x_j^{(2)}) = M'_N(x_j^{(2)}) - \frac{N}{2N+1}M'_{N-1}(x_j^{(2)}),$$

et d'après (2.38) et (2.39) ν_N est donnée par

$$\nu_N = \frac{\lambda_N}{\lambda_{N-1}} \frac{N(N+2)}{(N-1)(N+1)} \frac{\frac{2}{N+1}}{\frac{N}{2}} = \frac{2N+3}{2N+1}.$$

On déduit

$$M'_{N-1}(x_j^{(2)}) = -\frac{2N+1}{2}M_N(x_j^{(2)}),$$

d'où

$$\omega_j^{(2)} = \frac{4}{N(N+2)M_N^2(x_j^{(2)})}.$$

2- En appliquant la formule (2.34) pour le polynôme $(1+x)M'_N$, on obtient

$$\int_{-1}^1 M'_N(x)(1+x)^2 dx = \sum_{j=1}^{N+1} \left(1+x_j^{(2)}\right) M'_N(x_j^{(2)}) \omega_j^{(2)},$$

comme les $x_j^{(2)}, 1 \leq j \leq N$, sont des zéros du $(1+x) M'_N$ on déduit

$$\int_{-1}^1 M'_N(x) (1+x)^2 dx = \left(1 + x_{N+1}^{(2)}\right) M'_{N+1}(x_{N+1}^{(2)}) \omega_{N+1}^{(2)},$$

c'est-à-dire

$$\omega_{N+1}^{(2)} = \frac{1}{2M'_N(1)} \int_{-1}^1 M'_N(x) (1+x)^2 dx,$$

par intégration par parties

$$\omega_{N+1}^{(2)} = \frac{2M_N(1)}{M'_N(1)},$$

où

$$M'_N(1) = \frac{N(N+2)M_N^2(1)}{2}.$$

3) En appliquant la formule (2.34) pour le polynôme $(1-x) M'_N$, on obtient

$$\int_{-1}^1 M'_N(x) (1-x^2) dx = \sum_{j=1}^{N+1} \left(1 - x_j^{(2)}\right) M'_N(x_j^{(2)}) \omega_j^{(2)},$$

comme les $x_j^{(2)}, 2 \leq j \leq N+1$, sont des zéros du $(1-x) M'_N$ on déduit

$$\int_{-1}^1 M'_N(x) (1-x^2) dx = \left(1 - x_1^{(2)}\right) M'_N(x_1^{(2)}) \omega_1^{(2)},$$

c'est-à-dire

$$\omega_1^{(2)} = \frac{1}{2M'_N(-1)} \int_{-1}^1 M'_N(x) (1-x^2) dx,$$

par intégration par parties on a

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 M'_N(x) (1-x^2) dx &= \left[(1-x^2) M_N(x)\right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 2x M_N(x) dx, \\ &= \int_{-1}^1 (2x+2) M_N(x) dx - 2 \int_{-1}^1 M_N(x) dx, \\ &= -2 \int_{-1}^1 M_N(x) dx, \end{aligned}$$

donc on a

$$\omega_1^{(2)} = -\frac{1}{M'_N(-1)} \int_{-1}^1 M_N(x) dx. \quad (2.41)$$

D'une part on peut écrire $M'_N(-1)$ en fonction de $M_N(-1)$, il suffit d'utiliser (1.85) au

point $x_1^{(2)}$

$$2(1-x)M'_N - (1+x)M'_N + (1+x)M''_N + N(N+2)M_N = 0,$$

c'est-à-dire au point $x_1^{(2)}$ on trouve

$$M'_N(-1) = \frac{-N(N+2)}{4}M_N(-1). \quad (2.42)$$

D'autre part, on peut calculer l'intégrale $\int_{-1}^1 M_N(x)dx$ par récurrence, et on utilise la formule (1.86)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 M_N(x)dx &= \frac{(2N+1)}{(N+1)} \int_{-1}^1 L_N(x)dx - \frac{N}{(N+1)} \int_{-1}^1 M_{N-1}(x)dx, \\ &= -\frac{N}{(N+1)} \int_{-1}^1 M_{N-1}(x)dx, \\ &= -\frac{N}{(N+1)} \times -\frac{(N-1)}{N} \times -\frac{(N-2)}{(N-1)} \times \dots \times -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 M_0(x)dx, \end{aligned}$$

on déduit que

$$\int_{-1}^1 M_N(x)dx = 2 \times \frac{(-1)^N}{N+1}. \quad (2.43)$$

Il reste à utiliser (2.42) et (2.43) dans (2.41),

puis comme $M_N(-1) = L'_N(-1) + L'_{N+1}(-1) = (-1)^N(N+1)$, on déduit

$$\omega_1^{(2)} = \frac{4}{N(N+2)M_N^2(x_j^{(2)})}.$$

D'ou le résultat. ■

Proposition 2.3.3 *Le polynôme q_{2N-1} de degré $2N-1$ est de la forme*

$$q_{2N-1}(x) = \left((1-x^2)M'_{N-1}(x) \right)^2 + \alpha(N)(1-x^2)M_N'^2(x), \quad (2.44)$$

$$\text{où } \alpha(N) = \left(\frac{(2N-1)(N^2-1)}{N(4N^2-1)} \right)^2.$$

Preuve. En dérivant la formule (1.86), par rapport à x

$$M'_N(x) = \frac{(2N+1)}{(N+1)}L'_N(x) - \frac{N}{(N+1)}M'_{N-1}(x), \quad (2.45)$$

$$M'_{N-1}(x) = \frac{(2N-1)}{N} L'_{N-1}(x) - \frac{(N-1)}{N} M'_{N-2}(x), \quad (2.46)$$

on voit que le coefficient de x^{2N} est nul dans (2.44), et à partir de (2.45) et (2.46) on déduit

$$\left(\frac{(2N-1)}{N} (N-1) k_{N-1} \right)^2 - \alpha(N) \left(N \frac{(2N+1)}{(N+1)} k_N \right)^2 = 0,$$

comme la quantité $\frac{k_{N-1}}{k_N}$ est égale $\frac{N}{2N-1}$, on obtient

$$\alpha(N) = \left(\frac{(2N-1)(N^2-1)}{N(4N^2-1)} \right)^2.$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Lemme 2.3.4 *Les polynômes $t_{N-1} = (1-x^2) M'_{N-1}(x) \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda)$ vérifient la double inégalité*

$$\|t_{N-1}\|_{L_1^2(\Lambda)}^2 \leq (t_{N-1}, t_{N-1})_N \leq \frac{3}{2} \|t_{N-1}\|_{L_1^2(\Lambda)}^2.$$

Respectivement tels que le sous espace $\mathbb{P}_N^0(\Lambda) = \{p_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda) / p_N(-1) = p_N(1) = 0\}$.

Preuve. En posant

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^1 t_{N-1}^2(x) (1+x) dx, \\ &= \int_{-1}^1 \left((1-x^2) M'_{N-1}(x) \right)^2 (1+x) dx, \end{aligned}$$

en utilisant (1.89), on trouve

$$\begin{aligned} I_1 &= \alpha(N) \int_{-1}^1 \left(\frac{M_N(x)}{2N+1} + \left(\frac{1}{(2N-1)} - \frac{1}{(2N+1)} \right) M_{N-1}(x) - \frac{M_{N-2}(x)}{2N-1} \right)^2 (1+x) dx, \\ \alpha(N) &= ((N-1)(N+1))^2, \end{aligned}$$

comme les polynômes M_n , $n \geq 0$, forment une famille des polynômes deux à deux orthogonaux dans $L_1^2(\Lambda)$

$$\begin{aligned} I_1 &= \alpha(N) \left(\frac{\|M_N(x)\|_{L_1^2(\Lambda)}^2}{(2N+1)^2} + \left(\frac{2}{(2N+1)(2N-1)} \right)^2 \|M_{N-1}(x)\|_{L_1^2(\Lambda)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\|M_{N-2}(x)\|_{L_1^2(\Lambda)}^2}{(2N-1)^2} \right), \end{aligned}$$

en appliquant (1.87), on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &= \alpha(N) \left(\frac{2}{(N+1)(2N+1)^2} + \frac{8}{N(2N+1)^2(2N-1)^2} + \frac{2}{(2N-1)^2(N-1)} \right), \\ &= (N^2-1) \left(\frac{16N^4+28N^2-8}{N(4N^2-1)^2} \right), \end{aligned}$$

d'ou

$$I_1 = \frac{4(N^2-1)(N^2+2)}{N(4N^2-1)}. \quad (2.47)$$

Et en posant ,

$$I_2 = \int_{-1}^1 (1-x^2) M_N'^2(x) (1+x) dx.$$

Par intégration par parties et d'après (1.85), on obtient

$$I_2 = N(N+2) \int_{-1}^1 M_N^2(x) (1+x) dx,$$

c'est-à-dire

$$I_2 = \frac{2N(N+2)}{N+1}. \quad (2.48)$$

finalemt on a

$$I_3 = \int_{-1}^1 q_{2N-1}(x) (1+x) dx = I_1 + \alpha(N) I_2, \quad (2.49)$$

d'après la formule de quadrature (2.34) qui est exacte pour le polynôme $q_{2N-1}(x)$, alors

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{-1}^1 q_{2N-1}(x) (1+x) dx = \sum_{j=1}^{N+1} q_{2N-1}(x_j) \omega_j^{(2)}, \\ &= \sum_{j=1}^{N+1} \left(\left((1-x_j)^2 M_{N-1}'(x_j) \right)^2 + \alpha(N) (1-x_j)^2 M_N'^2(x_j) \right) \omega_j^{(2)}, \end{aligned}$$

comme les $x_j, 1 \leq j \leq N+1$, sont les zéros du polynôme $(1-x^2) M_N'$, on déduit

$$I_3 = \sum_{j=1}^{N+1} \left((1-x_j)^2 M_{N-1}'(x_j) \right)^2 \omega_j^{(2)} = \sum_{j=1}^{N+1} t_{N-1}^2(x_j) \omega_j^{(2)}. \quad (2.50)$$

Nous concluons que

$$\|t_{N-1}\|_{L_1^2(\Lambda)}^2 \leq (t_{N-1}, t_{N-1})_N,$$

de (2.49) on peut définir γ tel que $\gamma \frac{I_1}{I_3} \geq 1$, c'est-à-dire

$$\gamma \geq \frac{I_3}{I_1},$$

alors on a

$$\begin{aligned} \gamma &\geq 1 + \alpha(N) \frac{I_2}{I_1}, \\ \gamma &\geq 1 + \frac{(2N-1)(N-1)(N+2)}{2(2N+1)(N^2+2)}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\gamma \geq \frac{(6N^3 + 3N^2 + 3N + 6)}{(4N^3 + 2N^2 + 8N + 4)},$$

on étudie la fonction f dans \mathbb{R}^+ où

$$f(x) = \frac{(6x^3 + 3x^2 + 3x + 6)}{(4x^3 + 2x^2 + 8x + 4)},$$

on déduit que

$$f'(x) = \frac{(72x^3 + 18x^2 - 36)}{(4x^3 + 2x^2 + 8x + 4)^2},$$

on sépare les racines positives de f' , on voit que $f'(x) = 0$ possède une seule racine positive dans $[0, 1]$. On applique une méthode numérique pour déterminer cette racine, par exemple la méthode de Newton Raphsan, on obtient

$$x_2 = 0.7185101577,$$

on voit que

$$\max_{x \in \mathbb{R}^+} |f(x)| \leq \lim_{x \rightarrow \infty} f(x),$$

on peut prendre

$$\gamma = \frac{3}{2}.$$

Enfin on trouve

$$I_3 \leq \gamma I_1.$$

Ce qui donne le résultat. ■

2.4 Approximation polynomiale dans un rectangle

Définition 2.4.1 *L'espace polynomial $\mathbb{P}_N^0(\Omega_2)$ dense dans l'espace de fonctions continues sur $\overline{\Omega_2}$ alors dans l'espace $H_0^1(\Omega_2)$ alors toute fonction $u \in H_0^1(\Omega_2)$ peut s'écrire sous la forme*

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \beta(k, l) t_k(t) h_l(x). \quad (2.51)$$

Utilisant (1.32) et (1.66) on peut écrire :

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \gamma(k, l) p_k(t) L_l(x). \quad (2.52)$$

Proposition 2.4.2 *Pour tout polynôme φ dans $\mathbb{P}_{2N-1}(\Omega_2)$, on a*

$$\int_0^T \int_{-1}^1 \varphi(x, t) dx dt = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \varphi(\xi_n, t_m) \rho_n w_m. \quad (2.53)$$

Preuve. Utilisant (2.11), (2.28) on obtient le résultat. ■

Proposition 2.4.3 *Pour tout polynôme*

$$\varphi_N \in \mathbb{P}_N^0(\Omega_2) / \varphi_N(x, t) = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-1} \alpha_{nm} t_n(t) h_m(x),$$

il existe deux constantes positives c_9, c_{10} telle qu'on a la double inégalité :

$$c_9 \log(N+1) \leq \|\varphi\|_{L^2(\Omega_2)} \leq c_{10} N^2 \log(N+1). \quad (2.54)$$

Preuve. Utilisant (1.47), (1.77) on obtient le résultat. ■

Proposition 2.4.4 *Pour tout polynôme*

$$\varphi_N \in \mathbb{P}_N^0(\Omega_2) / \varphi_N(x, t) = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-1} \varphi(n, m) t_n(t) h_m(x), \quad (2.55)$$

on a

$$C_1 \log(2N+1) \leq \|\varphi_N\|_{L_1^2(\Omega_2)} \leq C_2 \log(\exp(2)(2N+1)). \quad (2.56)$$

Où C_1, C_2 sont réelles constantes positives.

Preuve. Utilisant (1.45) et (1.75) on peut écrire :

$$\varphi_N(x, t) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \gamma(n, m) p_n(t) L_m(x), \quad (2.57)$$

par les propriétés de l'orthogonalité des polynômes et la comparaison de l'intégrale avec la somme on obtient le résultat. ■

Notation 2.4.5 On note \sum_{N+1} l'ensemble des points

$$\sum_{N+1} = \{(\xi_i, t_j), \quad 1 \leq i, j \leq N + 1\}, \quad (2.58)$$

et S_{N+1} l'ensemble des points

$$S_{N+1} = \{\xi_i, \quad 1 \leq i \leq N + 1\}.$$

Chapitre 3

Etude de problème différentiel

3.1 Introduction

Ce chapitre présente une application des polynômes orthogonaux pour la résolution numérique du problème de l'équation de diffusion de la chaleur avec source avec les conditions aux limites de Dirichlet et de condition initiale. On commence par la formulation variationnelle du problème continu qui donne un accès à des résultats fondamentaux sur les caractères bien posé de l'équation, c'est -à- dire l'existence, l'unicité de la solution et la stabilité de cette solution par rapport à des perturbations de données, puis on effectue la discrétisation en remplaçant l'espace de fonctions tests par un espace de polynôme et en évaluant les intégrales au moyen des formules de quadrature appropriées. La formule de quadrature utilisée est la formule de Gauss-Lobatto de type Legendre appliquée dans la direction des x , puisque le fait que cette formule possède des nœuds aux extrémités de l'intervalle permet de traiter facilement les conditions aux limites. Cette méthode équivaut à une méthode de collocation (voir à ce sujet [5] et [69]). Finalement on termine par l'étude d'erreur.

Soit l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - a \partial_x^2 u(x, t) + cu(x, t) = f(x, t) & \text{dans } \Lambda \times \mathbb{R}^{*+} \\ u(x, t) = 0 & \text{sur } \partial\Lambda \times \mathbb{R}^{*+} \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Lambda \end{cases}, \quad (3.1)$$

Λ est un ensemble borné, $t \in \mathbb{R}^{*+}$ est la variable de temps, $x \in \bar{\Lambda}$ est la variable d'espace, $f(x, t)$ est le terme de la source de chaleur où $f(x, t) \neq 0$, $a \partial_x^2 u(x, t)$ est le terme la diffusion et a, c sont des constantes où $a \neq 0$, $c \neq 0$.

$u(x, t) = 0$ sur $\partial\Lambda \times \mathbb{R}^{*+}$ conditions aux limites, $u(x, t) = u_0(x), t = 0$ dans Λ la condition initiale [1].

Définition 3.1.1 *Conduction (ou diffusion) : résulte des collisions des molécules voisines dans les quelles l'énergie cinétique des vibrations d'une molécule est transférée à ses voisines. C'est le mode de transfert dans un milieu matériel [46].*

Dans ce chapitre, on s'intéresse à étudier le problème (3.1) dans les cas suivants :

3.2 Problème continu

3.2.1 Espaces et normes

Notation 3.2.1 *Avec la fonction poids $w(x) = 1$ on note les espaces*

$$L^2(\Lambda) = \left\{ v / \int_{\Lambda} v(x)^2 dx < \infty \right\},$$

$$H_0^1(\Lambda) = \{v \in L^2(\Lambda) / v_x \in L^2(\Lambda), v(1) = v(-1) = 0\},$$

associent respectivement aux normes

$$\|v\|_{L^2(\Lambda)}^2 = \int_{\Lambda} (v(x))^2 dx,$$

et

$$\|v\|_{H_0^1(\Lambda)}^2 = \int_{\Lambda} ((v(x))^2 + (v_x(x))^2) dx,$$

H^{-1} est le dual de l'espace H_0^1 sa norme est notée $\|\cdot\|_{H^{-1}(\Lambda)}$. L'espace de polynôme de degré inférieur ou égal à N est noté par $P_N(\Lambda)$ et le sous-espace

$$\mathbb{P}_N^0(\Lambda) = \{p_n \in P_N(\Lambda) / p_n(1) = p_n(-1) = 0\},$$

et les $\rho_i, \xi_i, i = \overline{0..N}$ sont les poids et les nœuds de quadrature de Gauss-Lobatto, et la norme définie sur P_N est notée par

$$\|v_N\|_N^2 = \sum_{i=0}^N v_N^2(\xi_i) \rho_i,$$

et le produit scalaire correspondant

$$(v_N, u_N)_N = \sum_{i=0}^N v_N(\xi_i) u_N(\xi_i) \rho_i,$$

pour le polynôme

$$v_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda), \quad v_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} v_k (1-x^2) L'_k(x),$$

3.2.2 Formulation variationnelle

On écrit une formulation variationnelle qui ressemble à une équation différentielle ordinaire du premier ordre. Alors nous multiplions l'équation (3.1) par une fonction test $v(x)$ qui ne dépend pas du temps

où $v \in H_0^1(\Lambda)$, $\Lambda =]-1, 1[$ on obtient

$$\int_{\Lambda} \partial_t u(x, t) v(x) dx - a \int_{\Lambda} \partial_{xx}^2 u(x, t) v(x) dx + c \int_{\Lambda} u(x, t) v(x) dx = \int_{\Lambda} f(x, t) v(x) dx, \quad (3.2)$$

et par intégration par parties on trouve

$$\int_{\Lambda} \partial_t u(x, t) v(x) dx + a \int_{\Lambda} \partial_x u(x, t) \partial_x v(x) dx + c \int_{\Lambda} u(x, t) v(x) dx = \int_{\Lambda} f(x, t) v(x) dx, \quad (3.3)$$

puisque l'intégrale est indépendant du temps on peut écrire

$$\frac{d}{dt} \int_{\Lambda} u(x, t) v(x) dx + a \int_{\Lambda} \partial_x u(x, t) \partial_x v(x) dx + c \int_{\Lambda} u(x, t) v(x) dx = \int_{\Lambda} f(x, t) v(x) dx, \quad (3.4)$$

où les variables x et t jouent des rôles très différents, nous séparons ces variables en considérant désormais la solution $u(x, t)$ et $f(x, t)$ comme une fonction du temps t à valeurs dans un espace de fonctions définies sur Λ , si l'on suppose un temps finale $T > 0$.

On considère que u est définie par

$$u :]0, T[\rightarrow H_0^1(\Lambda) \\ t \rightarrow u(t)$$

le choix de l'espace H_0^1 est évidemment dicté par la nature de problème, de même manière le terme source f est désormais considéré comme une fonction de t à valeurs dans $L^2(\Lambda)$

alors le produit scalaire de $L^2(\Lambda)$ et la forme linéaire $a(u, v)$ définis par

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Lambda)} = \int_{\Lambda} u(x)v(x)dx, \quad a(u, v) = a \int_{\Lambda} \partial_x u(x, t) \partial_x v(x) dx,$$

on choisit la fonction test dans H_0^1 on peut mettre (3.4) sous la forme d'une sorte d'équation différentielle ordinaires en t .

Alors la formulation variationnelle est de trouver $u(t)$ telle que

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle u(t), v \rangle_{L^2(\Lambda)} + a(u, v) + c \langle u(t), v \rangle_{L^2(\Lambda)} = \langle f(t), v \rangle_{L^2(\Lambda)}, & \forall v \in H_0^1(\Lambda), \quad 0 < t < T \\ u(t) = u_0, & t = 0 \end{cases}, \quad (3.5)$$

pour avoir plus de détails voir [29]

Le problème (3.1) peut s'écrire sous la forme variationnelle suivante

$$(u_t, v)_{L^2(\Lambda)} + a(u, v) + c(u, v)_{L^2(\Lambda)} = (f(t), v)_{L^2(\Lambda)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Lambda), \quad (3.6)$$

où le produit scalaire

$$(u, v) = \int_{\Lambda} u(x)v(x)dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Lambda),$$

et $a(u, v)$ est la forme bilinéaire définie sur $H_0^1(\Lambda)$ par

$$a(u, v) = a \int_{\Lambda} u_x(x)v_x(x)dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Lambda),$$

3.2.3 Existence et unicité de la solution

Théorème 3.2.2 *Pour toute fonction u de $H_0^1(\Lambda)$ on a*

$$\begin{aligned} A(u, u) &\geq \gamma_0 \|u\|_{H_0^1(\Lambda)}^2, \quad \gamma_0 = \min(a, c), \\ A(u, u) &\leq \gamma_1 \|u\|_{H_0^1(\Lambda)}^2, \quad \gamma_1 = \max(a, c), \end{aligned}$$

où $A(u, u) = a(u, u) + c(u, u)_{L^2(\Lambda)}$.

Preuve.

$$\begin{aligned} A(u, u) &= a \int_{\Lambda} u_x(x)u_x(x)dx + c \int_{\Lambda} u(x)u(x)dx, \\ &\geq \gamma \|u\|_{H_0^1}^2, \quad \gamma = \min(a, c), \end{aligned} \quad (3.7)$$

et

$$\begin{aligned} A(u, u) &= a \int_{\Lambda} u_x(x)u_x(x)dx + c \int_{\Lambda} u(x)u(x)dx, \\ &\leq \gamma_1 \|u\|_{H_0^1(\Lambda)}^2, \quad \gamma_1 = \max(a, c). \end{aligned} \quad (3.8)$$

L'ellipticité de la forme bilinéaire $A(u, u)$ assure pour les données u_0 dans $L^2(\Lambda)$ et $f \in L^2([0, T]; H^{-1})$, $0 < T < \infty$ le problème (3.1) admet une solution unique $u \in L^2([0, T]; H_0^1) \cap C([0, T], L^2)$ telle que $f \in L^2([0, T]; H^{-1})$ voir [39]. ■

Théorème 3.2.3 *Pour toute $f \in L^2([0, T]; H^{-1})$ la solution $u \in L^2([0, T]; H_0^1) \cap C([0, T], L^2)$ du problème (3.1) vérifie*

$$\|u\|_{H_0^1(\Lambda)} \leq \frac{1}{\gamma} \|f\|_{L^2(\Lambda)}, \quad \gamma = \min(a, c).$$

Preuve. Par (3.7) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a le résultat. ■

Théorème 3.2.4 *Soit $\Lambda =]-1, 1[$, soit un temps fixé $T > 0$, une donnée initiale $u_0 \in L^2(\Lambda)$ et un terme de source $f \in L^2(]0, T[, L^2(\Lambda))$ alors l'équation*

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - a \partial_x^2 u(x, t) + cu(x, t) = f(x, t), & \text{dans } \Lambda \times]0, T[\\ u(x, t) = 0 & \text{sur } \partial\Lambda \times]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Lambda \end{cases}, \quad (3.9)$$

admet une solution unique $u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Lambda)) \cap C([0, T], L^2(\Lambda))$.

3.3 Problème discret

3.3.1 Formulation variationnelle

Le problème (3.1) s'écrit dans l'espace polynomiale $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$

$$\begin{cases} \partial_t u_N(x, t) - a \partial_x^2 u_N(x, t) + cu_N(x, t) = f_N(x, t) & \text{dans } S_{N+1} \times]0, T[\cap \Lambda \times]0, T[\\ u_N = 0 & \text{sur } S_{N+1} \times]0, T[\cap \partial\Lambda \times]0, T[\\ u_N(x, 0) = 0 & \text{dans } S_{N+1} \end{cases}, \quad (3.10)$$

l'ensemble $\{\ell_n, 1 \leq n \leq N\}$ forme une base de l'espace $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$ alors la solution approximative s'écrit

$$u_N(x, t) = \sum_{n=1}^{N-1} b_n(t) \ell_n(x). \quad (3.11)$$

On écrit une formulation variationnelle qui ressemble à une équation différentielle ordinaire du premier ordre. Alors nous multiplions l'équation (3.10) par une fonction test $v_N(x)$ qui ne dépend pas du temps où $v_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda)$ et on applique la somme on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N-1} \partial_t u_N(\xi_k, t) v_N(\xi_k) \rho_k - a \sum_{k=1}^{N-1} \partial_x^2 u_N(\xi_k, t) v_N(\xi_k) \rho_k + c \sum_{k=1}^{N-1} u_N(\xi_k, t) v_N(\xi_k) \rho_k \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} f_N(\xi_k, t) v_N(\xi_k) \rho_k, \end{aligned} \quad (3.12)$$

où u_N est de degré N par rapport à la variable x dans $\partial_x^2 u_N(x, t)$ et de degré $N - 2$ de la formule de quadrature on peut écrire

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N-1} \partial_t u_N(\xi_k, t) v_N(\xi_k) \rho_k - a \int_{\Lambda} \partial_x^2 u_N(x, t) v_N(x) dx + c \sum_{k=1}^{N-1} u_N(\xi_k, t) v_N(\xi_k) \rho_k \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} f(\xi_k, t) v_N(\xi_k) \rho_k, \end{aligned} \quad (3.13)$$

et par intégration par parties on trouve

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N-1} \partial_t u_N(\xi_k, t) v_N(\xi_k) \rho_k + a \int_{\Lambda} \partial_x u_N(x, t) \partial_x v(x) dx + c \sum_{k=1}^{N-1} u_N(\xi_k, t) v_N(\xi_k) \rho_k \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} f(\xi_k, t) v_N(\xi_k) \rho_k, \end{aligned} \quad (3.14)$$

puisque la somme est indépendante du temps on peut écrire

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{N-1} u_N(\xi_k, t) v_N(\xi_k) \rho_k + a \int_{\Lambda} \partial_x u_N(x, t) \partial_x v_N(x) dx + c \sum_{k=1}^{N-1} u_N(\xi_k, t) v_N(\xi_k) \rho_k \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} f(\xi_k, t) v_N(\xi_k) \rho_k, \end{aligned} \quad (3.15)$$

de (3.11), (3.14) devienne

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{N-1} \frac{d}{dt} b_n(t) \left(\sum_{k=1}^{N-1} l_n(\xi_k) v_N(\xi_k) \rho_k + \sum_{n=1}^{N-1} \left(a \int_{\Lambda} \partial_x l_n(x) \partial_x v_N(x) dx \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + c \sum_{k=1}^{N-1} l_n(\xi_k) v_N(\xi_k) \rho_k \right) b_n(t) = \sum_{k=1}^{N-1} f(\xi_k, t) v_N(\xi_k) \rho_k, \end{aligned}$$

la fonction f est supposée continue sur $\bar{\Lambda}$ on peut définir le problème discret :
trouver u_N dans $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$ tel que :

$$\forall v_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda), \quad (u_N, v_N)_N + A(u_N, v_N) = (f, v_N)_N, \quad (3.16)$$

et

$$\begin{aligned} A(u_N, v_N) &= a(u_N, v_N) + c(u_N, v_N)_N, \\ &= \sum_{k=0}^N (a \partial_x u_N(\xi_k, t) \partial_x v_N(\xi_k, t) + c u_N(\xi_k, t) v_N(\xi_k, t)) \rho_k. \end{aligned}$$

Où $\rho_k, \xi_k, k = \overline{0, N}$ sont définis à la proposition (2.2.6).

3.3.2 Existence et unicité de la solution

Théorème 3.3.1 *La forme bilinéaire $A(.,.)$ satisfait les propriétés de continuité :*

$$\begin{aligned} \forall u_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda), \forall v_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda), A(u_N, v_N) &\leq \gamma \left(\|u_N\|_{H_0^1(\Lambda)} \|v_N\|_{H_0^1(\Lambda)} \right), \\ \gamma &= \max\left(a, \frac{3}{2}c\right), \end{aligned}$$

et d'ellipticité :

$$\forall u_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda), A(u_N, u_N) \geq \gamma_0 \left(\|u_N\|_{H_0^1(\Lambda)}^2 \right), \quad \gamma_0 = \min(a, c).$$

Preuve. $A(u_N, v_N) = \sum_{n=0}^N (a \partial_x u_N(\xi_k, t) \partial_x v_N(\xi_k, t) + c u_N(\xi_k, t) v_N(\xi_k, t)) \rho_k$.

on a $d^0 \partial_x u_N(x, t) = d^0 \partial_x v_N(x, t) = N - 1$ par rapport a x , donc

$$A(u_N, v_N) = a \int_{-1}^1 \partial_x u_N(x, t) \partial_x v_N(x, t) dx + \sum_{k=0}^N c u_N(\xi_k, t) v_N(\xi_k, t) \rho_k,$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient,

$$\begin{aligned} A(u_N, v_N) &\leq a \left(\int_{-1}^1 \partial_x u_N^2(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-1}^1 \partial_x v_N^2(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &\quad c \left(\sum_{k=0}^N u_N^2(\xi_k, t) \rho_k \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^N v_N^2(\xi_k, t) \rho_k \right)^{\frac{1}{2}}, \\ &\leq a |u_N|_{H_0^1(\Lambda)} \cdot |v_N|_{H_0^1(\Lambda)} + \frac{3}{2}c \|u_N\|_{L^2(\Lambda)} \cdot \|v_N\|_{L^2(\Lambda)}, \\ &\leq \gamma (|u_N|_{H_0^1(\Lambda)} \cdot |v_N|_{H_0^1(\Lambda)} + \|u_N\|_{L^2(\Lambda)} \cdot \|v_N\|_{L^2(\Lambda)}), \quad \gamma = \max\left(a, \frac{3}{2}c\right), \\ &\leq \gamma \left(\|u_N\|_{H_0^1(\Lambda)} \cdot \|v_N\|_{H_0^1(\Lambda)} \right). \end{aligned}$$

Ellipticité :

$$\begin{aligned}
A(u_N, u_N) &= \sum_{k=0}^N (a \partial_x u_N^2(\xi_k, t) + c u_N^2(\xi_k, t)) \rho_k, \\
&\geq \gamma_0 (\|u_N\|_{H_0^1(\Lambda)}^2 + \|u_N\|_{L^2(\Lambda)}^2), \\
&\geq \gamma_0 (\|u_N\|_{H_0^1(\Lambda)}^2), \quad \gamma_0 = \min(a, c).
\end{aligned}$$

■

Théorème 3.3.2 *Pour toute fonction f continue sur $\bar{\Lambda}$, le problème (3.16) admet une solution unique. De plus, cette solution vérifie*

$$\|u_N\|_{H_0^1(\Lambda)} \leq c_1 \|f_N\|_{L^2(\Lambda)}, \quad c_1 = \frac{3}{2\gamma_0}. \quad (3.17)$$

Preuve.

$$\gamma_0 \|u_N\|_{H_0^1(\Lambda)}^2 \leq A(u_N, u_N) \leq (f_N, u_N)_N,$$

puis on utilise (1.32) par rapport à la variable x on obtient :

$$\begin{aligned}
\|u_N\|_{H_0^1(\Lambda)}^2 &\leq \frac{3}{2\gamma_0} \|f_N\|_{L^2(\Lambda)} \|u_N\|_{L^2(\Lambda)}, \\
&\leq \frac{3}{2\gamma_0} \|f_N\|_{L^2(\Lambda)} \|u_N\|_{H_0^1(\Lambda)}, \\
\|u_N\|_{H_0^1(\Lambda)} &\leq c_1 \|f_N\|_{L^2(\Lambda)}, \quad c_1 = \frac{3}{2\gamma_0}.
\end{aligned}$$

■

3.4 Estimation d'erreur

Définition 3.4.1 *L'espace de polynôme $\mathbb{P}_N^0(\Omega_2)$ dense dans l'espace de fonctions continues sur Ω_2 , donc dans l'espace $H_0^1(\Omega_2)$, alors la fonction $u \in H_0^1(\Omega_2)$ admet l'extension*

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \alpha(k, l) h_k(x) t_l(t), \quad (3.18)$$

et par (1.69) on peut écrire

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \gamma(k, l) h_k(x) p_l(t), \quad (3.19)$$

Proposition 3.4.2 *Pour le problème discret (3.16) on a la majoration d'erreur*

$$\|u - u_N\|_{H^1(\Lambda)} \leq CN^{-2} \|f - f_N\|_{L^2(\Lambda)}. \quad (3.20)$$

Preuve. De (3.6) et (3.16) on peut écrire

$$\theta(u - u_N, u - u_N) = (f - f_N, u - u_N),$$

où la forme bilinéaire

$$\theta(u, v) = \int_{\Lambda} \partial_t u(x, t) v(x, t) + a \partial_x u(x, t) \partial_x v(x, t) + cu(x, t) v(x, t) dx,$$

$$\text{et de (3.17) on a } \gamma_0 \|u - u_N\|_{L^2(\Omega_2)}^2 \leq (f - f_N, u - u_N),$$

et par l'inégalité de Cauchy–Schwarz on a

$$\begin{aligned} \gamma_0 \|u - u_N\|_{L^2(\Lambda)}^2 &\leq C_2 \|f - f_N\|_{L^2(\Lambda)} \|u - u_N\|_{L^2(\Lambda)}, \\ &\leq \|f - f_N\|_{L^2(\Lambda)} \|u - u_N\|_{H^1(\Lambda)}, \end{aligned}$$

d'après de (3.19) on a

$$\|u - u_N\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq C_3 \sum_{k=Nl=N-1}^{\infty} \sum_{l=N-1}^{\infty} \gamma^2(k, l) \|h_k(x)\|_{L^2(\Lambda)}^2 \|p_l(t)\|_{L^2(\Lambda)}^2, \quad (3.21)$$

on utilise (1.20), (1.66) et les propriétés de l'orthogonalité (1.28) et (1.65) on obtient

$$\|\partial_x(u - u_N)\|_{L^2(\Lambda)}^2 = \sum_{k=Nl=N-1}^{\infty} \sum_{l=N-1}^{\infty} \gamma^2(k, l) \|h'_k(x)\|_{L^2(\Lambda)}^2 \|p_l(t)\|_{L^2(\Lambda)}^2,$$

on utilise (1.56) on a

$$\begin{aligned} \|\partial_x(u - u_N)\|_{L^2(\Lambda)}^2 &\geq C_4 \sum_{k=N}^{\infty} \sum_{l=N-1}^{\infty} k(k+1) \gamma^2(k, l) \|h_k(x)\|_{L^2(\Lambda)}^2 \|p_l(t)\|_{L^2(\Lambda)}^2, \\ &\geq C_4 N^2 \sum_{k=Nl=N-1}^{\infty} \sum_{l=N-1}^{\infty} \gamma^2(k, l) \|h_k(x)\|_{L^2(\Lambda)}^2 \|p_l(t)\|_{L^2(\Lambda)}^2, \\ &\geq C_4 N^2 \|u - u_N\|_{L^2(\Lambda)}^2, \end{aligned}$$

d'où le résultat : $C_4 N^2 \|u - u_N\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq C_5 \|f - f_N\|_{L^2(\Lambda)} \|u - u_N\|_{L^2(\Lambda)}.$

■

Chapitre 4

Approche numérique du problème différentiel

4.1 Introduction

Le but de ce chapitre, est de développer une méthode spectrale pour résoudre le problème donné en utilisant des transformations matricielle et on convertit le problème différentiel à un système d'équations ordinaires facile à résoudre ou à un système linéaire et d'indiquer comment le problème discret défini dans le chapitre trois peut être mis en œuvre sur ordinateur, étudier le comportement de condition de nombre, et donner une illustration graphique dans les cas des solutions explicites et implicites.

4.2 Système linéaire et matrices

Le polynôme de Lagrange associé au point ξ_k , $1 \leq k \leq N + 1$ étant noté ℓ_k donc on a

$$\begin{aligned} u_N^1(x, t) &= u_N(x, t) + u_0(x), \\ u_N(x, t) &= \sum_{n=1}^{N-1} \ell_n(x) b_n(t). \end{aligned}$$

Aux points ξ_k , $1 \leq k \leq N - 1$ le problème (3.10) est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{N-1} (cl_n(\xi_k) - a(\ell_n''(\xi_k)))b_n(t) + \sum_{n=1}^{N-1} \ell_n(\xi_k)b_n'(t) \\ \qquad \qquad \qquad = \sum_{n=1}^{N-1} (f_n(t)\ell_n(\xi_k) - (-au_0''(\xi_k) + cu_0(\xi_k))) \\ u_N^1(\xi_k, t) = 0 \\ u_N(x, 0) = u_{N0}(x) \\ f(x, t) = \sum_{n=1}^{N-1} f_n(t)\ell_n(x), \quad f_n(t) = \sum_{j=1}^{N-1} f_{jn}\ell_j(t), \quad f_{jn} = f(x_j, t_n) \end{array} \right. , \quad (4.1)$$

les fonctions

$$cl_n(z) - a\ell_n''(z), \quad 1 \leq n \leq N - 1,$$

sont des polynômes de degré N , on multiplie les deux cotés de (4.1) par $\ell_m(\xi_k)\rho_k$ et on applique la somme on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{N-1} (cl_n(\xi_k)\ell_m(\xi_k) - a(\ell_n''(\xi_k)\ell_m'(\xi_k))\rho_k)b_n(t) \\ \quad + b_n'(t) \sum_{k=1}^{N-1} \ell_n(\xi_k)\ell_m(\xi_k)\rho_k \\ = \sum_{k=1}^{N-1} (f_n(t)\ell_n(\xi_k) - (-au_{N0}''(\xi_k) + cu_{N0}(\xi_k)))\ell_m(\xi_k)\rho_k \\ u_N(\xi_k, t) = 0 \\ u_N(x, 0) = u_{N0}(x) \\ f(x, t) = \sum_{n=1}^{N-1} f_n(t)\ell_n(x), \quad f_n(t) = \sum_{j=1}^{N-1} f_{jn}\ell_j(t) \\ u_N(x, t) = \sum_{n=1}^{N-1} \ell_n(x)b_n(t) \\ 1 \leq n, m \leq N - 1 \end{array} \right. , \quad (4.2)$$

en utilisant la formule de quadrature lorsque m varié de 1 à $N - 1$, on obtient un système linéaire de la forme :

$$-Ab + \Gamma Db = F, \quad (4.3)$$

où A est une matrice symétrique définie positive d'ordre $N - 1$ ses éléments sont de la forme :

$$\alpha_{mn} = (-cl_n(\xi_k)\ell_m(\xi_k) - a(\ell_n'(\xi_k)\ell_m'(\xi_k))\rho_k, \quad n = \overline{1, N-1}, \quad m = \overline{1, N-1},$$

Γ est une matrice diagonale inversible ses éléments sont :

$$\gamma_{mn} = \begin{cases} \rho_m, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}, \quad m, n = \overline{1, N-1},$$

F est le vecteur connu :

$$F = (f(1, t), f(2, t), f(3, t), \dots, f(N-2, t), f(N-1, t))^t,$$

où

$$f(m, t) = f_m(t)\rho_m, \quad m = \overline{1, N-1},$$

et le vecteur b est inconnu où,

$$b(t) = (b_1(t), b_2(t), b_3(t), \dots, b_{N-2}(t), b_{N-1}(t))^t,$$

et l'opérateur,

$$D = \frac{d}{dt},$$

multiplier (4.3) par la matrice inverse Γ^{-1} de la matrice Γ on trouve,

$$-\Gamma^{-1}Ab + Db = \Gamma^{-1}F, \quad (4.4)$$

la matrice $\Gamma^{-1}A$ est inversible, il existe une matrice inversible P tel que,

$$P^{-1}(\Gamma^{-1}A)P = C,$$

où C est une matrice diagonale, où les éléments de la diagonale

$$\lambda_i = \alpha_{ii}, \quad i = \overline{1, N-1},$$

sont les valeurs propres de la matrice $\Gamma^{-1}A$, on considère le vecteur v tel que

$$b = Pv,$$

alors le système (4.4) devient

$$-(\Gamma^{-1}A)Pv + PDv = \Gamma^{-1}F, \quad (4.5)$$

multiplier (4.5) par la matrice P^{-1} on obtient,

$$-Cv + Dv = P^{-1}\Gamma^{-1}F, \quad (4.6)$$

ce qui donne la forme

$$-Cv + Dv = H, \quad (4.7)$$

où $H = P^{-1}\Gamma^{-1}F$ est un vecteur de $N - 1$ composantes h_i , $1 \leq i \leq N - 1$, donc on obtient la forme matricielle suivante

$$- \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_{N-2} \\ v_{N-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \dots \\ v'_{N-2} \\ v'_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_{N-2} \\ h_{N-1} \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Cette forme matricielle (4.8) admet $N - 1$ équations linéaire définies par

$$v'_i(t) - \lambda_i v_i(t) = h_i(t), \quad (4.9)$$

$$\text{où } h_i(t) = - \sum_{j=1}^{N-1} p^{-1}(i, j) f_j(j, t), \quad 1 \leq i \leq N - 1,$$

avec $p^{-1}(i, j)$ sont les éléments de la matrice inversible P^{-1} .

4.3 Resolution d'équation différentielle ordinaire

On résout les équations (4.9) on obtient

$$v_i(t) = e^{\lambda_j t} \left(\int_0^t e^{-\lambda_j x} h_i(x) dx + d_i \right), \quad (4.10)$$

où d_i sont constantes à déterminés, utilisant les conditions aux limites on obtient les constantes

$$d_i = \sum_{n=1}^{N-1} p_{in}^{-1} u(\xi_n, 0),$$

où p_{in}^{-1} , $i = \overline{1, N-1}$ sont les éléments de la matrice inverse P^{-1} alors (4.10) prend la forme :

$$v_i(t) = e^{\lambda_j t} \left(\int_0^t e^{-\lambda_j x} h_i(x) dx + \sum_{n=1}^{N-1} p_{in}^{-1} u(\xi_n, 0) \right). \quad (4.11)$$

4.4 Solution approchée du problème

Finalement on obtient,

$$b_n(t) = \sum_{j=1}^{N-1} p_{nj} v_j(t),$$

où p_{nj} , $1 \leq n, j \leq N$ sont des éléments de la matrice P , utilisant (3.11) donc on obtient la solution approximative

$$u_N^1(x, t) = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} p_{nj} v_j(t) \ell_n(x).$$

4.5 Intégration numérique

La fonction q_i dans l'intégrale (4.10)

$$q_i(x) = e^{-\lambda_j x} h_i(x), \quad (4.12)$$

est explicite mais il n'est pas toujours possible de connaître explicitement sa primitive, dans ce cas là on utilise l'interpolation polynomiale et on cherche l'approximation numérique de cette intégrale.

Soit q_{Ni} Le polynôme d'interpolation de Lagrange de q_i . Nous avons

$$q_{Ni}(x) = \sum_{k=1}^{N+1} q_i(t_k) \ell_k(x), \quad (4.13)$$

où les points t_k , $k = \overline{1, N+1}$ sont les points de collocation définis par $t_k = \frac{T}{2}(\xi_k + 1)$, $k = \overline{1, N+1}$, où ξ_k , $k = \overline{1, N+1}$ les racines du polynôme $(1-x^2)L'_N(x)$ alors l'approximation de l'intégrale (4.10) est

$$v_{Ni}(t) = e^{\lambda_j t} \left(\int_0^t q_{Ni}(x) dx + d_i \right), \quad (4.14)$$

où d_i sont constantes à déterminés, utilisant les conditions aux limites on obtient les constantes

$$d_i = \sum_{n=1}^{N-1} p_{in}^{-1} u(\xi_n, 0),$$

où p_{in}^{-1} , $i = \overline{1, N-1}$ sont les éléments de la matrice inverse P^{-1} alors (4.10) prend la forme :

$$v_{Ni}(t) = e^{\lambda_j t} \left(\int_0^t q_{Ni}(x) dx + \sum_{n=1}^{N-1} p_{in}^{-1} u(\xi_n, 0) \right). \quad (4.15)$$

Finalement on obtient,

$$b_n(t) = \sum_{j=1}^{N-1} p_{nj} v_{Nj}(t),$$

où p_{nj} , $1 \leq n, j \leq N$ sont des éléments de la matrice P , utilisant (3.11) donc on obtient la solution approximative

$$u_N^1(x, t) = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} p_{nj} v_{Nj}(t) \ell_n(x).$$

4.6 Conditionnement d'une matrice

Définition 4.6.1 Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle subordonnée et A une matrice inversible. Le nombre

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|,$$

s'appelle le conditionnement de la matrice A , relativement à la norme matricielle considérée. Dans la littérature anglo-saxonne, ce nombre, appelé "condition number", est fréquemment noté $\kappa(A)$ (voir [55], [28] et [26]).

Définition 4.6.2 Le conditionnement d'une matrice A , de type $n \times n$ non-singulière est défini par

$$\kappa_P(A) = \|A\|_P \|A^{-1}\|_P, \quad (4.16)$$

où $\|A\|_P$ est le rayon spectrale défini par $\rho = \sqrt{\lambda}$, où λ la plus grande valeur propre de la matrice $A^t A$.

Remarque 4.6.3 Si le conditionnement de la matrice du système est petit la résolution du système linéaire est un problème stable par rapport aux perturbations du second membre c'est-à-dire plus le conditionnement de la matrice est grand, plus la solution du système linéaire est sensible aux perturbations des données [66].

Tableau de conditionnement de la matrice lorsque N varié de 3 à 12 on prend $\ln(\rho(A))$ donc on a les points $(N, \ln(\rho(A)))$

ln(conditionnement de A)		
N	$C(N)$	$\ln(\rho(A))$
3	2.428571428	.8873031948
4	5.255731541	1.659319203
5	9.709475384	2.273102252
6	16.71214219	2.816135532
7	27.47978952	3.313450808
8	43.37736939	3.769937862
9	65.86604686	4.187623087
10	96.55104667	4.570071850
11	137.2120316	4.921527405
12	189.8057255	5.246001052

4.7 Figures d'illustrations

4.7.1 Solution explicite

Hypothèses

On considère la solution explicite exacte

$$u(x, t) = \exp(-0.05\pi^2 t) \sin(\pi x),$$

la condition initiale

$$u(x, 0) = u_0(x) = \sin(\pi x),$$

et la fonction

$$f(x, t) = (((-1.05)\pi^2 + 1) \sin(\pi x)) \exp(-0.05\pi^2 t) - (-\pi^2 + 1) \sin(\pi x).$$

Les figures **4.1** et **4.2** présentent le comportement de conditionnement de la matrice on considère les points $(N, \ln(\rho(A)))$ et les graphes des fonctions b_k , k varié de 1 à 10 lorsque N est égale à 12.

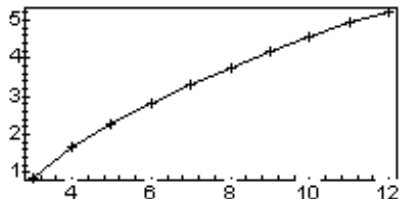


Figure 4.1

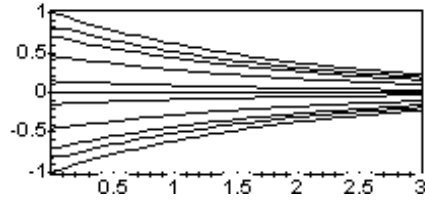


Figure 4.2

La figure 4.3 présente le comportement de l'erreur $(N, \|u - u_N\|_{L^2(\Lambda)})$ lorsque N est égale à 12.

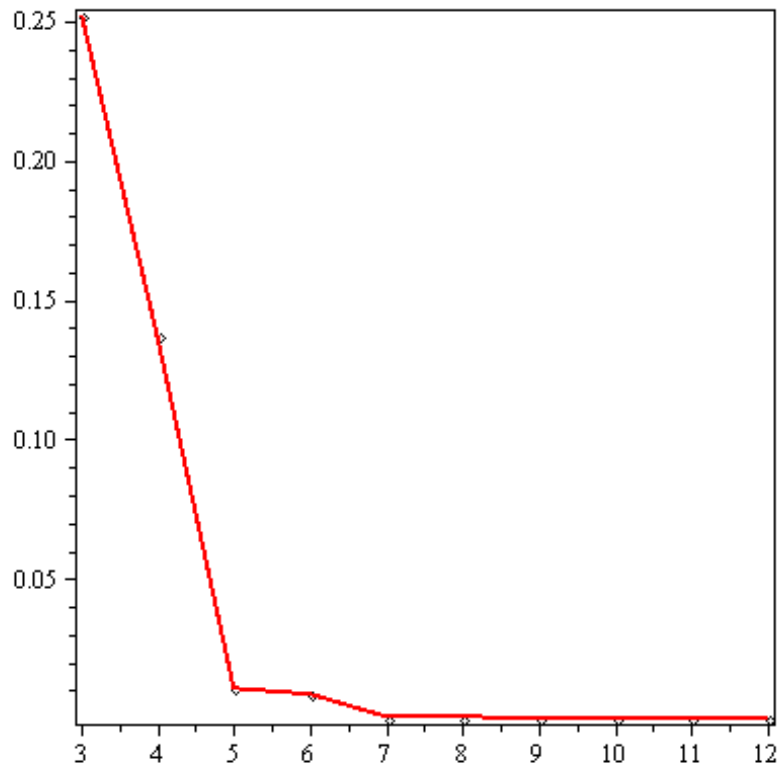


Figure 4.3

Les figures 4.4 et 4.5 présentent les graphes de la solution exacte et la solution approximative de l'équation de diffusion de la chaleur avec source respectivement lorsque N est égal 12.

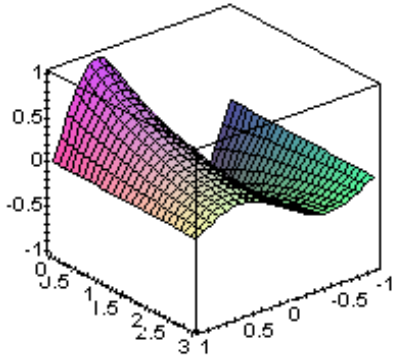


Figure 4.4

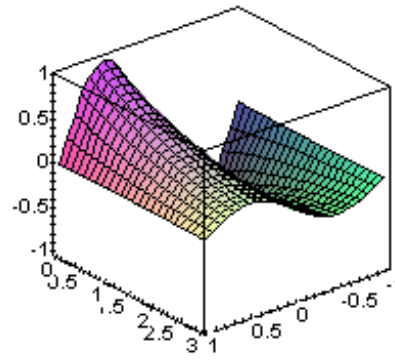


Figure 4.5

Les figures 4.6 et 4.7 présentent les graphes de la solution exacte et la solution approximative de la diffusion respectivement lorsque N est égal 12.

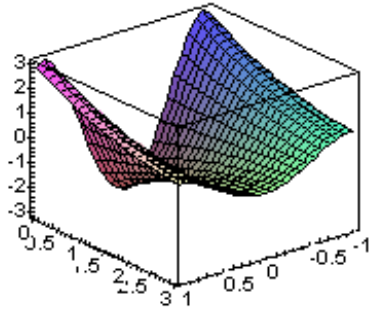


Figure 4.6

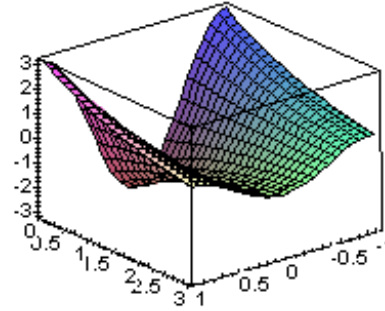


Figure 4.7

Les figures 4.8 et 4.9 présentent les propriétés de la solution exacte et approximative de l'équation de diffusion de la chaleur avec source respectivement lorsque la variable t prend des valeurs constantes.

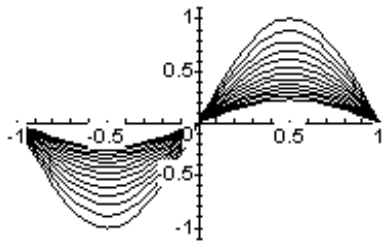


Figure 4.8

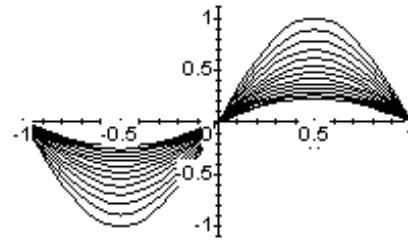


Figure 4.9

4.7.2 Solution implicite

Hypothèses

On considère la condition initiale

$$u(x, 0) = u_0(x) = x \sin(\pi x),$$

et la fonction

$$f(x, t) = ((\pi^2 + 0.95)x \sin(\pi x) - 2\pi \cos(\pi x)) \exp(-0.05t).$$

Les figures 4.10 et 4.11 présentent les graphes de la solution approximative et de la diffusion respectivement lorsque N est égal 12.

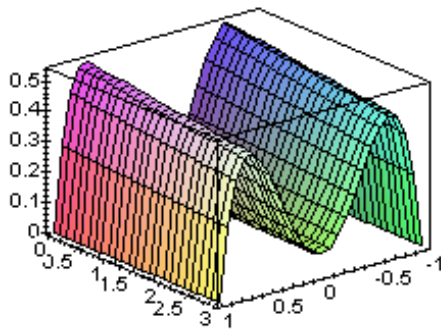


Figure 4.10

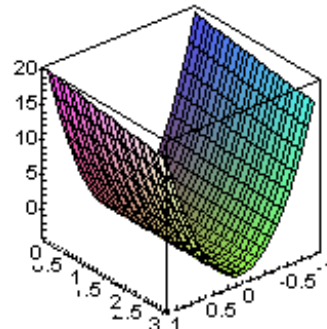


Figure 4.11

Les figures 4.12 et 4.13 présentent les graphes des fonctions b_k , k varié de 1 à 10, et les propriétés de la solution approximative de l'équation de diffusion de la chaleur avec source respectivement lorsque la variable t prend des valeurs constantes, lorsque N est égale à 12.

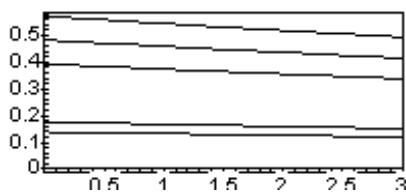


Figure 4.12

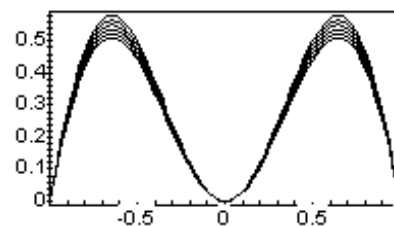


Figure 4.13

4.8 Programmation

I- EQUATION DE LA CHALEUR AVEC SOURCE LORSQUE LA SOLUTION EST EXACTE

with(orthopoly) :

Digits :=10 :

COEFFICIENTS

a1 :=1 :c :=1 :d :=0 :

LE TEMPS T

T :=3.0 :

LES POINTS DE COLLOCATION

N :=12 :

for k from 1 by 1 to N do

h1(k,x) :=diff(P(k,x),x) :

h(k,x) :=factor(h1(k,x)) ;od ;

AR :=matrix(N-1,1,[solve(1.0*(h(N,x)))]) :

z(N,1) :=-1 ;z(N,..N+1) :=1 ;

for k from 2 by 1 to N do

z(N,k) :=evalf(AR[k-1,1]) ;od ;

LES POIDS DE GAUSS-LOBATTO

rho(1) :=2/(N*(N,+1)) :

rho(N+1) :=2/(N*(N+1)) :

for i from 2 by 1 to N do :

rho(i) :=rho(1)/(limit((P(N,x))^2,x=z(N,i))) ;od :

POLYNOME DE LAGRANGE

for k from 1 by 1 to N+1 do

l(k,x) :=(product(x-z(N,j),j=1..k-1)*product(x-z(N,j),j=k+1..N+1))/((product(z(N,k)-z(N,j),j=1..k-1)*product(z(N,k)-z(N,j),j=k+1..N+1))) ;od :

for k from 1 by 1 to N do

ld(k,x) :=expand(diff(l(k,x),x)) :

ldd(k,x) :=expand(diff(l(k,x),x.,x)) ;od :

SOLUTION EXACTE

u(x,t) :=exp(-0.05*Pi^2*t)*sin(Pi*x) :

CONDITION INITIALE

u(x,0) :=sin(Pi*x) :

SOURCE

f(x,t) :=expand(-a1*diff(u(x,t),x,x)+diff(u(x,t),t)+c*u(x;t)-expand(-

$a1 * \text{diff}(u(x,0), x, x) + \text{diff}(u(x,0), t) + c * u(x,0)) :$

MATRICES DU SYSTEME LINEAIRE 4.3

LA MATRICE A

$\text{with}(\text{linalg}) :$

$A := \text{matrix}(((N-1), (N-1), [\text{seq}(\text{seq}(-a1 * (\text{int}(\text{ldd}(i, x) * l(m, x), x = 1..1)) + c * \text{sum}(\text{limit}(l(i, x) * l(m, x) * \text{rho}(i1), x = z(N, i1)), i1 = 1..N+1, i = 2..N), m = 2..N)])) :$

LA MATRICE G=GAMMA

$G := \text{matrix}(((N-1), (N-1), [\text{seq}(\text{seq}(\text{limit}(l(i; x) * l(m, x) * \text{rho}(m), x = z(N, m)) - 0 * (b * \text{int}(\text{ld}(i, x) * l(m, x) * (1+x), x = -1..1)), i = 2..N), m = 2..N)])) :$

G1 LA MATRICE INVESE DE GAMMA

$G1 := \text{inverse}(G) :$

LA MATRICE VECTUER F

$F := \text{matrix}(((N-1), 1, [\text{seq}(\text{limit}(f(x, t) * l(m, x) * \text{rho}(m), x = z(N, m)) - 0 * (b * \text{int}(\text{ld}(i, x) * l(m, x) * (1+x), x = -1..1)), m = 2..N)])) :$

MATRICES DU SYSTEME LINEAIRE 4.4

$G1A := \text{multiply}(G1, A) :$

$G1F := \text{multiply}(G1, F) :$

VALEURS PROPRES DE LA MATRICE GAMMA1

$VP := \text{matrix}(1, N-1, [\text{evalf}(\text{Eigenvals}(G1A, \text{vecs}))]) :$

MATRICE P

for k from 1 by 1 to N-1 do

alpha(N, k) := VP[1, k] ; od :

for k from 1 by 1 to N-1 do

V(k) := linalg[submatrix](vecs, 1..N-1, k..k) ; od :

$P := \text{matrix}(N-1, N-1, [\text{seq}(\text{seq}(P(k1)[m, 1], k1 = 1..N-1) ; m = 1..N-1)]) :$

LA MATRICE INVERSE DE LA MATRICE P

$IP := \text{inverse}(P) :$

for k from 2 by 1 to N do

bon(k-1) := limit(u(x, 0), x = z(N, k)) ; od :

for m from 1 by 1 to n- do

for k from 1 by 1 to N-1 do

pp(k, m) := IP[k; m] ; od ; od ;

LES MATRICES DU SYSTEME 4.6

$Q := \text{multiply}(IP, G1A, P) :$

$IPG1F := \text{multiply}(IP, G1F) :$

LE TERME DANS L'EQUATION 4.7

```

for k from 1 by 1 to N-1 do
f(k,N,x) :=limit(IPG1F[k,1],t=x) ;od :
LA SOLUTION DE L'EQUATION 4.7
for k from 1 by 1 to N-1 do
vv(k,N,t) :=exp(-alpha(N,k)*t)*int(expand(exp(alpha(N,k)*x)*f(k,N,x),x=0..t)+db(k) ;od :
CULCULE DE LA CONSTANTE EN UTILISANT LA CONDITION
INITIALE
VV :=matrix(((N-1),1,[seq(vv(m,N,t),m=1..N-1)])) :
Aa :=multiply(P,VV) :
for k from 1 by 1 to N-1 do
a(k,N,t) :=Aa[k,1] ;od :
LA SOLUTION APPROXIMATIVE
uap(N,x,t) :=sum(a(k3,N,t)*1(k3+1,x),k3=1..N-1) :
GRAPHES DE LA SOLUTION APPROXIMATIVE
with(plots) :
plot3d(uap(N,x,t),x=-1..1,t=0..T,title='Graphe de la solution approximative') ;
GRAPHES DE LA SOLUTION EXACTE
plot3d(u(x,t) ;x=-1..1,t=0..T,title='Graphe de la solution exacte') ;
SOLUTION APPROXIMATIVE LORSQUE LE TEMPS EST CONNUS
for k from 0 by 1 to N do
t(k) :=k*T/N :od :
for k from 0 by 1 to N do
Uap(N,x,k) :=limit(uap(N,x,t),t=t(k)) ;od :
GRAPHE DE SOLUTION APPROXIMATIVE LORSQUE LE TEMPS
EST CONNUS
with(plots) : display(seq(plot(Uap(N,x,k),x=-
1..1,style=line,color=black),k=0..N),axes=boxed,scaling=constrained,title='Graphes
des fonctions uap(x.,t), t constante') ;
SOLUTION EXACTE LORSQUE LE TEMPS EST CONNUS
u(x,t) :=exp(-0.05*Pi^2*t)*sin(Pi*x) :
for k from 0 by 1 to N do
t(k) :=k*T/N ;
U(N;k) :=limit(u(x.,t),t=t(k)) ;od :
GRAPHE DE SOLUTION EXACTE LORSQUE LE TEMPS EST CONNUS
with(plots) : display(seq(plot(U(N;,k),x=-
1..1,style=line,color=black),k=0..N),axes=boxed,scaling=constrained,title='Graphes
des fonctions u(x,t), t constante') ;

```


CONDITION DE NOMBRE

```
q1 :=inverse(G1A) :
q2 :=transpose(G1A) :
q3 :=transpose(q1) :
q4 :=multiply(q1,q3) :
q5 :=multiply(q2,G1A) :
q6 :=matrix(1,N-1,[evalf(Eigenvals(q4))]) :
q7 :=matrix(1,N-1,[evalf(Eigenvals(q5))]) :
sp1 :=max(seq(q6[1,k],k=1..N-1)) :
sp2 :=max(seq(q7[1,k],k=1..N-1)) :
C(N) :=(sp1)^(1/2)*(sp2)^(1/2);
C(3) := 2.428571428 :C(4) := 5.255731541 :C(5) := 9.709475384 :
C(6) := 16.71214219 :C(7) := 27.47978952 :C(8) := 43.37736939 :
C(9) := 65.86604686 :C(10) := 96.55104667 :C(11) := 137.2120316 :
C(12) := 189.8057255 :
```

LOGARITHME DE CONDITION DE NOMBRE

```
for k from 3 by 1 to 12 do
ln(rho(k)) :=ln(C(k));od :
```

GRAPHE DE CONDITION DE NOMBRE

```
F :=pointplot({seq([k,log(C(k))] ;k=3..N)}) :
G :=plot({seq([k,log(C(k))] ;,k=3..N)},style=line,color=black) :
display({F,G},axes=boxed,title='Condition de nombre');
```

GRAPHE DES FONCTIONS DEFINIES DANS 4.10

```
with(plots) : display(seq(plot(a(k,N,t);t=0..T1,style=line,color=black),k=1..N-1),axes=boxed,scaling=constrained,title='Graphes des fonctions a (t)');
```

I-EQUATION DE LA CHALEUR AVEC SOURCE ET SOLUTION IMPLICITE

```
with(orthopoly) :
```

LES DONNEES

```
v :=sin(Pi*x)*(x)*exp(-0..05*t) :
F(x,t) :=expand(-a1*diff(v,x,x)+diff(v,t)+c*v+d*diff(v,x)) :
g(x) :=sin(Pi*x)*(x) :
f(x,t) :=F(x,t)-expand(-a1*diff(g(x),x,x)+diff(g(x),t)+c*g(x)+d*diff(v,x)) :
```

LES MATRICES DU SYSTEME

```
with(linalg) :
```

```
A :=matrix(((N-1),(N-1),[seq(seq(-a1*(int(ldd(i,x)*l(m,x),x=-1..1))+c*sum(limit(l(i,x)*l(m,x)*rho(i1),x=z(N,i1)),i1=1..N+1)-
```

$0*(b*\int(\text{ld}(i,x)*l(m,x)*(1+x),x=-1..1));i=2..N,m=2..N))) :$
 $G := \text{matrix}(((N-1),(N-1),[\text{seq}(\text{seq}(\text{limit}(l(i,x)*l(m,x)*\rho(m),x=z(N,m))-$
 $0*(b*\int(\text{ld}(i,x)*l(m,x)*(1+x),x=-1..1)),i=2..N),m=2..N]))) :$

LA MATRICE INVERSE DE G

$G1 := \text{inverse}(G) ;$

LA MATRICE VECTEUR F

for k from 2 by 1 to N do

$f(k,t) := \text{limit}(f(x,t),x=z(N,k)) ; \text{od} :$

$F := \text{matrix}(((N-1),1,[\text{seq}(\text{limit}(f(m,t)*l(m,x)*\rho(m),x=z(N,m)),m=2..N)])) :$

MTRICE DU SYSTEME LINEAIRE 4.4

$G1F := \text{multiply}(G1,F) :$

$G1A := \text{multiply}(G1,A) :$

VALEURS PROPRES DE LA MMATRICE G1

$VP := \text{matrix}(1,N-1,;,[\text{evalf}(\text{Eigenvals}(G1A,\text{vecs})])) :$

MATRICE P

for k from 1 by 1 to N-1 do

$\alpha(N,k) := VP[1,k] ; \text{od} :$

for k from 1 by 1 to N-1 do

$V(k) := \text{linalg}[\text{submatrix}](\text{vecs},1..N-1, k..k) ; \text{od} :$

$P := \text{matrix}(N-1,N-1,[\text{seq}(\text{seq}(P(k1)[m,1],k1=1..N-1),m=1..N-1)]) :$

LA MATRICE INVERSE DE LA MATRICE P

$IP := \text{inverse}(P) ;$

LES MATRICES DU SYSTEME 4.6

$Q := \text{multiply}(IP,G1A,P) :$

$IPG1F := \text{multiply}(IP,G1F) :$

LE TERME DANS L'EQUATION 4.7

for k from 1 by 1 to N-1 do

$f(k,N,x) := \text{limit}(IPG1F[k,1],t=x) ; \text{od} :$

LE SOLUTION DE L'EQUATION 4.7

for k from 1 by 1 to N-1 do

$vv(k,N,t) := \exp(-\alpha(N,k)*t)*\int(\text{expand}(\exp(\alpha(N,k)*x)*f(k,N,x)),x=0..t)+db(k) ; \text{od} :$

CALCULE DES CONSTANTES EN UTILISANT LA CONDITION INITIALE

$VV := \text{matrix}(((N-1),1,[\text{seq}(vv(m,N,t),m=1..N-1)])) :$

$Aa := \text{multiply}(P,VV) :$

for k from 1 by 1 to N-1 do

$a(k,N,t) := Aa[k,1] ; \text{od} :$

LA SOLUTION APPROXIMATIVE

$uap(N,x,t) := \sum(a(k3,N,t)*1(k3+1,x),k3=1..N-1) :$

GRAPHE DE LA SOLUTION APPROXIMATIVE

with(plots) :

plot3d(uap(N,x,t),x=-1..1;,t=0..T,title='Graphe de la solution approximative');

for k from 0 by 1 to N do

t(k) :=k*T/N;

Uap(N,x,k) :=limit(uap(N,x,t),t=t(k));od :

SOLUTION APPROXIMATIVE LORSQUE LE TEMPS EST CONNUS

with(plots) : display(seq(plot(Uap(N,x,k),x=-

1..1,style=line,color=black);,k=0..N),axes=boxed,scaling=constrained,title='Graphes des fonctions uap(x,t), t constante');

GRAPHE DES FONCTIONS DEFINIES DANS 4.10

T1 :=T :T2 :=2.0 :T3 :=3.0 :

with(plots) : display(seq(plot(a(k,N,t),t=0..T1,style=line,color=black),k=1..N-1),axes=boxed,scaling=constrained,title='Graphes des fonctions a (t)');

Conclusion

Nous avons présenté dans cette thèse une étude numérique de l'équation de diffusion de la chaleur avec source, la discrétisation reposant sur les polynômes orthogonaux de Legendre qui sont des fonctions propres d'opérateurs de Sturm-Liouville, on réfère au [9] pour les résultats d'approximations par des polynômes dans des espace de Sobolev, et nous avons traité les problèmes donnés dans des espaces d'approximation formés de polynômes et nous avons remplacé les intégrales figurants dans les formulations variationnelles discrètes par les formules de quadrature numérique de type Gaussienne en utilisant un nombre de nœuds égal à la dimension de l'espace $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$.

la solution approximative de l'équation de diffusion de la chaleur avec source par la méthode spectrale étudiée donne des résultats très satisfaisants et l'erreur décroît exponentiellement avec le paramètre N (le degré du polynôme de Legendre), et le conditionnement de chaque matrice du système est petit. Donc, la résolution du système linéaire est un problème stable par rapport aux perturbations du second membre.

Le travail n'est pas terminé, il nous reste à étudier le problème dans des espaces avec poids.

Perspectives

Problème 4.8.1 *Application des polynômes de Chebychev à ce problème.*

Problème 4.8.2 *Etude de problème par la méthode des éléments finis et faire une comparaison.*

Problème 4.8.3 *Etude de problème par la méthode des différences finis et faire une comparaison.*

Problème 4.8.4 *Etude de problème axi-symétrique.*

Bibliographie

- [1] A. Lateli, A. Boutaghou, T. Hamaizia, Spectral Method for Diffusion Equation With a Source Term. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, 2001-2082, (accepté 2021).
- [2] A. Boutaghou, F. Nouri, On Finite Spectral Method for Axi-symmetric Elliptic problem. *Journal of Analysis and Applications* **4**(3), 149-168 (2006).
- [3] A. Boutaghou, F. Nouri, Stokes problem in the case of axi-symmetric data and homogeneous boundary conditions. *Far East Journal of Applied Mathematics*, ISSN 0972-0960, **21**(2), p219-239 (2005).
- [4] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Méthodes Numériques : Algorithmes, analyse et applications*. (Springer Science & Business Media, 2008).
- [5] A. T. Patera, A spectral element method for fluid dynamics : laminar flow in a channel expansion, *Journal of computational Physics* **54**, no. 3, 468-488 (1984).
- [6] B. Mercier, *An introduction to the numerical analysis of spectral methods*. (Springer, 1989).
- [7] B. Mercier, Stabilité et convergence des méthodes spectrales polynômiales. Application à l'équation d'advection. *RAIRO. Analyse numérique* **16**, 67-100 (1982).
- [8] C. Bernardi, Analysis, algorithms and applications of spectral and high order methods for partial differential equations selected papers from the International Conference on Spectral and High Order Methods (ICOSAHOM '92), Le Corum, Montpellier, France, 22-26 June 1992, pp. 507 S. (North-Holland, Amsterdam etc., 1994).
- [9] C. Bernardi, Y. Maday, *Approximations spectrales de problemes aux limites elliptiques*, Vol. **10**, Springer, 1992.
- [10] C. Bernardi, Y. Maday, Some spectral approximation of one-dimensional fourth-order problems. *Progress in approximation theory*. édité par P. Nevai & A. Pinkus, Boston : Academic Press, San Diego, p. 43-116 (1991).
- [11] C. Bernardi, Y. Maday, Spectral methods. *Handbook of numerical analysis* **5**, 209-485 (1997).

- [12] C. Bernardi, Y. Maday and F. Rapetti, *Discrétisations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques*, vol. **45**, Springer Science & Business Media, 2004.
- [13] C. Bernardi, M. Dauge, Y. Maday, *Numerical algorithms and tests due to Mejdí Azaïez, 1999 Spectral Methods for Axisymmetric Domains*. Editions scientifiques et médicales Elsevier France.
- [14] C. Bernardi, M. Dauge, Y. Maday, *Polynomials in the Sobolev world* (2007).
- [15] C. Bernardi, M. Dauge, Y. Maday, M. Azaïez, *Spectral methods for axisymmetric domains numerical algorithms and tests due to Mejdí Azaïez*. Series in applied mathematics, pp. V-345. (Gauthier-Villars, Paris Amsterdam Lausanne [etc.], 1999).
- [16] C. Canuto, *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer series in computational physics, pp. xiv, 567 p, (Springer-Verlag, Berlin ; New York, ed. Corr. 2nd print., 1988).
- [17] C. Canuto, M. Hussaini, A. Quarteroni, T. Zang, *Spectral Methods in Fluid Dynamics* Springer-Verlag New York. (1988).
- [18] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. Zang, *Spectral methods : fundamentals in single domains*. (Springer Science & Business Media, 2007).
- [19] C. Clenshaw, H. Norton, *The solution of nonlinear ordinary differential equations in Chebyshev series*. *The Computer Journal* **6**, 88-92 (1963).
- [20] C. Clenshaw, in *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. **53**, pp. 134-149. (Cambridge University Press, 1957).
- [21] C. Lanczos, *Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions*. *Journal of Mathematics and Physics* **17**, 123-199 (1938).
- [22] D. Gottlieb, *The stability of pseudospectral Chebyshev methods*. *Math Comput.* **36**, 107-118 (1981).
- [23] D. Gottlieb, S. A. Orszag, *Numerical analysis of spectral methods : theory and applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, No. **26**, 1977.
- [24] D.J. Acheson, *Elementary Fluid Dynamics*, Oxford University Press, New York 1990.
- [25] D. Richards., *Advanced mathematical methods with Maple*. (Cambridge University Press, Cambridge, UK ; New York, 2002).
- [26] D. Verwaerde, P. Laurent-Gengoux, *Analyse des équations aux dérivées partielles*.
- [27] E. P. Stephan, M. Suri, *On the convergence of the Mathematics of computation* **52**, 31-48 (1989).
- [28] F. Jedrzejewski, *Introduction aux méthodes numériques*. (Springer Science & Business Media, 2005).

- [29] G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. (Editions Ecole Polytechnique, 2005).
- [30] G. Berkooz, P. Chew, R. Palmer, R. Zippel, *Generating spectral methods solvers for partial differential equations*. Technical report, pp. 13 leaves. (Mathematical Sciences Institute, Cornell University, Ithaca, N.Y., 1992).
- [31] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, Colloquium Publications AMS, Providence (1978).
- [32] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle. Théorie Et Applications*. Collection Mathématiques Appliquées Pour La Maîtrise. (Masson, Paris, 1983).
- [33] Hans J. Weber, George B. Arfken, *Essential Mathematical Methods for Physicists*, Elsevier, Academic Press, San Diego, 2004.
- [34] H.-O. Kreiss, J. Oliger, *Comparison of accurate methods for the integration of hyperbolic equations*. *Tellus* **24**, 199-215 (1972).
- [35] I. Babuska, A. K. Aziz, "Lectures on mathematical foundations of the finite element method," (MARYLAND UNIV., COLLEGE PARK. INST. FOR FLUID DYNAMICS AND APPLIED MATHEMATICS., 1972).
- [36] I. Silberman, *Planetary waves in the atmosphere*. (New York University, 1953).
- [37] J. A. Blackburn, *Spectral analysis : methods and techniques*, pp. xi, 289 p. (M. Dekker, New York, 1970).
- [38] J. C. Slater, *Electronic energy bands in metals*. *Physical Review* **45**, 794 (1934).
- [39] J. De Frutos, and R. Munoz-Sola., 'Chebyshev Pseudospectral Collocation for Parabolic Problems with Nonconstant Coefficients', in *Proceedings of the third international conference on spectral and high order methods*, pp. 101-07. (Citeseer, 1996).
- [40] J. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications volume 1*, Dunod. *Travaux et recherches mathématiques*, (1968).
- [41] J. Nečas, *Les Méthodes Directes en Théorie des Équations Elliptiques*, Masson, Paris, MR227584, 1967.
- [42] J. P. Boyd, *Chebyshev and Fourier spectral methods*, pp. xvi, 668 p, (Dover Publications, Mineola, N.Y., ed. 2nd, 2001).
- [43] J. Villadsen, W. E. Stewart, *Solution of boundary-value problems by orthogonal collocation*. *Chemical Engineering Science* **22**, 1483-1501 (1967).
- [44] J. W. Cooley, J. W. Tukey, *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*. *Mathematics of computation* **19**, 297-301 (1965).
- [45] K. Wright, *Chebyshev collocation methods for ordinary differential equations*. *The Computer Journal* **6**, 358-365 (1964).

- [46] L. Pujo-Menjouet, Introduction aux équations différentielles, pujo@math.univ-lyon1.fr, Université Claude Bernard, Lyon I, 43, boulevard 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne cedex, France.
- [47] L. V. Kantorovich, On a new method of approximate solution of partial differential equations. Technical report, Dokl. Akad. SSSR, **4**, 1934.
- [48] Maple V, Release 4, Waterloo Maple Inc., 1995.
- [49] M. Crouzeix, A. L. Mignot., Analyse numérique des équations différentielles, (Masson, Paris, 1989).
- [50] M. Dauge, Spectral-Fourier Method for axi-symmetric Problems, ICOSAHOM 95 : Proceedings of the third International Conference on Spectral and High Order Methods, Houston Journal of mathematics, University of Houston, 1996.
- [51] M. Gisclon, A propos de l'équation de la chaleur et de l'analyse de Fourier. Le journal de maths des élèves **1**, 190-197 (1998).
- [52] M. S. Sibony, J.-C. Mardon, Approximations et équations différentielles, (Hermann, Paris, 1982).
- [53] O. Zienkiewicz, Y. Cheung, The finite element method in structural and continuum mechanics, (1967). Japanese by Yoshiki, M, 245 (1972).
- [54] P. Grisvard, Elliptic problems in nonsmooth domains. Pitman, Boston, MA. Monogr. Stud. Math **24**, (1985).
- [55] P. G. Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation. Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise, pp. XII-279. (Masson, Paris New York Barcelone, 1982).
- [56] P. J. Davis, P. Rabinowitz, Methods of numerical integration. Computer science and applied mathematics, pp. xiv, 612 p. (Academic Press, Orlando, ed. 2nd, 1984).
- [57] P. Lax, N. Milgram, Parabolic equations//Contributions to the Theory of Partial Differential Equations. Princeton, NJ. Annals of Math. Studies, (1954).
- [58] R. Adams, Sobolev Spaces (Academic Press, New York–San Francisco–London, 1975).
- [59] R. Dautray, J. L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, mason Paris, tome **3**, 1987.
- [60] R. Frazer, W. Jones, S. Skan, Approximations to functions and to the solutions of differential equations, Aeronautical Research Council Technical Report 1799, (London, 1937).
- [61] S. A. Orszag, Comparison of pseudospectral and spectral approximation. Studies in Applied Mathematics **51**, 253-259 (1972).

- [62] S. A. Orszag, Numerical methods for the simulation of turbulence. *The Physics of Fluids* **12**, II-250-II-257 (1969).
- [63] S. A. Orszag, Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries in Galerkin (spectral) representations, *Studies in Appl. Math.*, **50**, p. 293–327, 1971.
- [64] S. A. Orszag, Spectral methods for problems in complex geometries, *J. Comput. Phys.* **37**, 70-92, (1980).
- [65] S. Larsson, V. Thomée, *Partial differential equations with numerical methods. Texts in applied mathematics*, vol. **45**, pp. ix, 259 p, (Springer, Berlin ; New York, 2003).
- [66] T. N. Phillips, A.R. Davies, On semi-infinite spectral elements for Poisson problems with re-entrant boundary singularities, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **21**, 173-188, (1988).
- [67] V. I. Smirnov, J. Sisljan, *Cours de mathematiques superieures. Tome iii-deuxieme partie.* (Mir, 1972).
- [68] X. Chen, Finite difference smoothing solutions of nonsmooth constrained optimal control problems. *Numerical functional analysis and optimization* **26**, 49-68 (2005).
- [69] Y. Maday, A. T. Patera, Spectral element methods for the incompressible Navier-Stokes equations. IN : *State-of-the-art surveys on computational mechanics (A90-47176 21-64).* New York, 71-143 (1989).

Résumé

Cette thèse se compose de quatre chapitres distincts mais complémentaires. Le premier chapitre contient, d'une part, quelques rappels sur les espaces de Sobolev et les espaces des polynômes avec leurs normes associées qui constituent le cadre de l'analyse numérique des méthodes spectrales et, d'autre part, il est consacré aux rappels sur les polynômes orthogonaux sans et avec poids et leurs principales propriétés, et introduit quelques transformations associées où les polynômes orthogonaux sont très largement utilisés en théorie de l'approximation.

Le deuxième chapitre expose de façon claire et élégante les formules de quadrature de Gauss, de Gauss-Lobatto et la formule de quadrature pondérée ainsi que l'étude de quelques estimations. Ces formules de quadrature étudiées servent à la construction de formules de quadrature numérique de grande précision.

Le troisième chapitre porte sur l'étude de l'approximation du problème différentiel par la méthode spectrale, qui est une technique d'approximation des solutions d'équations aux dérivées partielles. Ses principales caractéristiques sont que les solutions discrètes sont cherchées dans des espaces de polynômes de haut degré. La discrétisation s'effectue alors en remplaçant l'espace de fonctions test par un espace de polynômes et en calculant les intégrales au moyen de formules de quadrature appropriées. La formule de quadrature utilisée est la formule de Gauss-Lobatto-Legendre appliquée dans la direction des x . Cette méthode équivaut à une méthode de collocation. On voit que l'erreur décroît exponentiellement lorsque N devient grand.

Le but du quatrième chapitre est de développer une méthode spectrale pour résoudre le problème posé en utilisant les matrices, de convertir le problème différentiel à un système d'équations ordinaires facile à résoudre ou à un système linéaire, d'indiquer comment le problème discret défini dans le chapitre trois peut être mis en œuvre sur ordinateur; d'étudier le comportement de conditionnement du système, de donner une illustration graphique dans les cas des solutions explicites et implicites, et de faire la programmation en Maple.

Mots clés : Méthodes Spectrales; Points de Collocation; Polynômes Orthogonaux; Formules de Quadrature; Matrice Orthogonale; Valeurs Propres; Estimation d'Erreur.

Abstract

This thesis consists of four distinct but complementary chapters. The first chapter contains, on the one hand, some reminders on Sobolev spaces and polynomial spaces with their associated norms, which constitute the framework of the numerical analysis of spectral methods and, on the other hand, it devotes to the reminders on orthogonal polynomials without and with weights and their main properties, and introduces some associated transformations where orthogonal polynomials are widely used in approximation theory.

The second chapter exposes in a clear and elegant the forms of Gaussian quadrature, Gauss-Lobatto quadrature formula and weighted formula and the study of some estimates. These quadrature formulas are considered to constrict of numerical quadrature formulas of high precision.

In the third chapter is the study of the approximation of the differential problem by the spectral method, which is a technique for approximating solutions of partial differential equations. Their main characteristics are that the discrete solutions are sought in high degree polynomial spaces. The discretization is then performed by replacing the space of test functions by a space of polynomials and by calculating the integrals by means of appropriate quadrature formulas. The quadrature formula used is the Gauss-Lobatto-Legendre formula applied in the x direction. This method is equivalent to a collocation method. We see that the error decreases exponentially when the discretization parameter N becomes large.

The purpose of the fourth chapter is to develop a spectral method to solve the given problem using the matrix; to convert the differential problem in a system of ordinary differential equations easier to solve or a linear system; to explain how the discrete problem identified in the Chapter Three can be implemented on computer; to study the behaviour of condition numbers; to solve the linear system and give a graphic illustration in the case of explicit and implicit solutions. Programming is done by Maple.

Keywords: Spectral Methods; Collocation Points; Orthogonal Polynomials; Quadrature Formulas; Orthogonal Matrix; Eigenvalues; Error Estimate.

ملخص

هذه المذكرة تتكون من أربعة فصول مختلفة لكنها متكاملة، يحتوي الفصل الأول، من ناحية، على بعض التذكيرات حول فضاءات سوبوليف وفضاءات كثيرات الحدود مع المعايير المرتبطة بها، والتي تشكل إطاراً للتحليل العددي للطرق الطيفية، ومن ناحية أخرى، مخصص للتذكيرات حول كثيرات الحدود المتعامدة بثقل أو بدون ثقل وخصائصها الرئيسية، و بعض التحويلات المرافقة حيث كثيرات الحدود المتعامد تلعب دوراً كبيراً في نظرية التقريب.

الفصل الثاني يعرض بشكل واضح الصيغ التريبعية لغوص، غوص-لوباطو و الصيغة التريبعية لغوص بثقل، وتطبيقاً في البحث عن الحلول التقريبية للتكامل العددي، دراسة الخطأ الناتج في هذه الطرق، المتراجعات العكسية لكثيرات الحدود، وبعض الملاحظات المهمة في دراسة الموضوع و المقارنة بين التكامل و المجموع.

الفصل الثالث تناول خصائص الفصل الأول والثاني لإيجاد الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية الجزئية (معادلة انتشار الحرارة) و ذلك باستعمال الطريقة الطيفية، حيث أن هذه الطريقة هي تقنية للبحث عن الحلول التقريبية للمعادلات التفاضلية الجزئية و أهم مميزات أن الحلول التقريبية تكون في فضاء كثيرات الحدود ذات أعلى درجة ممكنة، فالدراسة تتم باستبدال فضاء التوزيع المستمرة بفضاء كثيرات الحدود و حساب التكاملات يتم باستعمال الطريقة التريبعية المناسبة، إن الطريقة المستعملة في هذه المذكرة هي الطريقة التريبعية لغوص-لوباطو-ليجنندر وهي طريقة مكافئة لطريقة التجميع، نلاحظ الخطأ يتضاءل كلما كبرت درجة الحل التقريبي.

الفصل الرابع خصص للبرمجة، والهدف منه هو تطوير طريقة طيفية لحل المشكل المطروح و ذلك باستعمال المصفوفات، حيث حولت المشكل التفاضلي المطروح إلى جملة معادلات عادية سهلة الحل أو إلى جملة معادلات خطية، وبينت كيف يمكن حلها بواسطة الحاسوب، و لقد درست سلوك الشرط العددي و التفسير البياني للحلول الصريحة و الضمنية و كل هذا تم باستعمال لغة المابل.

الكلمات المفتاحية: الطرق الطيفية، نقاط التجميع، كثيرات الحدود المتعامدة، الصيغ التريبعية، المصفوفة المتعامدة، القيم الذاتية، تقدير الخطأ.