



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES FRERES MENTOURI CONSTANTINE

FACULTE DES SCIENCES EXACTES

DEPARTEMENT DE MATEMATIQUE

N<sup>o</sup> d'ordre : 20/05/2020

N<sup>o</sup> de série : 03/Math/2020

**THESE**

Présentée pour l'obtention de Diplôme de

**Doctorat en Sciences**

Par

**KAOUACHE Smail**

Option : Analyse

**Synchronisation des systèmes chaotiques et  
hyperchaotiques : Application à la sécurisation des  
communications**

Soutenue le 27/02/2020.

**Devant le jury :**

Berkane Abdelhak	M.C.A	Université Frères Mentouri	Président
Abdelouahab Med-Salah	M.C.A	Centre Univ. de Mila	Rapporteur
Hamri Nasr-Eddine	Prof.	Centre Univ. de Mila	Examineur
Denche Mohammed	Prof.	Université Frères Mentouri	Examineur
Halim Yacine	M.C.A	Centre Univ. de Mila	Examineur

Année Universitaire 2019/2020

## ملخص:

تحتوي هذه الأطروحة على موضوعين هامين جدا . المشاركات الأساسية للموضوع الأول تكمن فيما يلي:

1. دراسة مشكلة التزامن الشامل بين نظامين فوضويين دواتا رتب اشتقاق كسرية مختلفة وكدا دواتا أبعاد مختلفة.

2. اقتراح مخطط جديد لمعالجة مشكلة التزامن الاسقاطي المعدلة بين نظام فوق الفوضوي دو رتبة اشتقاق طبيعية و نظام فوق الفوضوي دو رتبة اشتقاق كسرية. في جميع مخططات التزامن المقترحة، نقوم باستخدام تقنية نظام التحكم الفعال من أجل معالجة استقرار أنظمة أخطاء التزامن. بينما في الموضوع الثاني سنقوم بدراسة مخطط جديد نعالج فيه مسألة الاتصالات الآمنة مستعملين في ذلك طريقة التزامن الاسقاطي للأنظمة الفوضوية و تشفير المعلومة السرية. للتحقق من فعالية مخططات التزامن المقترحة نستشهد ببعض نتائج المحاكاة العددية.

## **الكلمات المفتاحية:**

الأنظمة الفوضوية ذوات رتب اشتقاق كسرية، التزامن، التحكم الفعال، التحكم المنسجم، الاتصالات الآمنة.

## **Résumé :**

L'objectif de cette thèse porte principalement sur deux sujets majeurs.

Les principales contributions du premier sujet de ce travail sont:

1. Un problème de la synchronisation généralisée entre deux systèmes chaotiques d'ordres fractionnaires non commensurables et de dimensions différentes est présenté.

2. Un nouveau schéma de la synchronisation projective modifiée entre un système hyperchaotique d'ordre entier et un système hyperchaotique d'ordre fractionnaire est également proposé. Dans tous les schémas des synchronisations proposés de ce premier sujet, on va utiliser une technique de contrôle continu pour l'analyse de la stabilité des systèmes des erreurs de synchronisation.

Le deuxième sujet consiste à réaliser un nouveau schéma de communication sécurisée à base du chaos, il repose d'une part sur la synchronisation projective des systèmes chaotiques fractionnaires et d'une autre sur le masquage de l'information secrète. Les schémas de synchronisation proposée sont illustrés par l'intermédiaire des exemples numériques.

## ***Mots-clés:***

Systemes chaotiques fractionnaires, Synchronisation, Contrôle continu, Contrôle adaptative, Communication sécurisée.

**Abstract:**

The objective of this thesis concerns principally two major subjects. The main contributions of the first subject of this work are:

1. The problem of generalized synchronization between two chaotic fractional non-commensurate order systems with different dimensions is presented.
2. A new scheme of modified projective synchronization between integer order and fractional order hyperchaotic systems is proposed. In all synchronization schemes, the active controller is employed to analyze the asymptotic stability of the synchronization errors.

In the second subject, we propose a new approach to investigate the chaos projective synchronization of the fractional-order hyperchaotic systems as well as that of the secure and confidential information transmitted. Numerical simulations are performed to show the effectiveness of the proposed synchronization scheme.

***Keywords:***

Fractional chaotic systems, Synchronization, Active controller, Adaptive controller, Secure communication.

# Remerciements



*Avant tout je remercie ALLAH le tout puissant et miséricordieux qui m'a donné la force, la réussite et la patience d'accomplir ce modeste travail.*

*Je tiens tout particulièrement à exprimer ma reconnaissance à Mr ABDELOUA-HAB Mohammed -Salah mon directeur de thèse, pour ses précieux conseils tout au long de ce travail. Ses qualités humaines et scientifiques ont été pour moi une source de motivation.*

*J'exprime mes sincères remerciements à Mr. Berkane Abdelhak, maître de conférence à l'université Frères Mentouri de Constantine 1 qui ma fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.*

*Je suis honoré dans la présence de ce jury de Mr. Hamri Nasr-Eddine, professeur au centre universitaire de Mila, de Mr. Denche Mohammed, professeur à l'université des Frères Mentouri de Constantine1, de Mr. Halim Yacine, maître de conférence au centre universitaire de Mila, et de l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. Qu'ils trouvent ici l'expression de mon profond respect.*

*Mes remerciements vont bien entendu à toutes les enseignants des département de Mathématiques de centre universitaire de Mila et l'université de Constantine 1.*

*Ces remerciements ne seraient pas complets si je ne mentionner pas mes parents, ma femme et mes collègues dont les encouragements m'ont accompagné durant cette thèse.*

# Table des matières

<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Généralités sur les systèmes dynamiques chaotiques</b>	<b>5</b>
1.1 Systèmes dynamiques . . . . .	6
1.1.1 Systèmes dynamiques continus . . . . .	6
1.1.2 Systèmes dynamiques discrets . . . . .	6
1.1.3 Systèmes autonomes ou non autonomes . . . . .	6
1.1.4 Systèmes conservatifs ou dissipatifs . . . . .	7
1.2 Attracteurs et bassin d'attraction . . . . .	7
1.2.1 Attracteurs réguliers . . . . .	8
1.2.2 Attracteurs chaotiques . . . . .	8
1.2.3 Bassin d'attraction . . . . .	9
1.3 Points d'équilibre . . . . .	10
1.4 Notions de stabilité . . . . .	10
1.4.1 Méthode directe . . . . .	11
1.4.2 Méthode indirecte . . . . .	11
1.5 Section de Poincaré . . . . .	12
1.6 Caractérisation du comportement chaotique . . . . .	13
1.6.1 Le chaos et l'hyperchaos . . . . .	13
1.6.2 Caractéristiques principales du comportement chaotique . . . . .	14
1.6.3 Scénarios de transition vers le chaos . . . . .	17
1.6.4 Avantage du Chaos . . . . .	19
1.6.5 Exemple d'un système hyperchaotique . . . . .	19
1.7 Conclusion . . . . .	22
<b>2 Systèmes dynamiques fractionnaires</b>	<b>23</b>
2.1 Quelques concepts de base de la théorie de dérivation non entière . . . . .	24
2.1.1 Fonctions spéciales pour la dérivation fractionnaire . . . . .	24
2.1.2 Transformation de Laplace . . . . .	26

2.1.3	Définitions des dérivées fractionnaires . . . . .	28
2.2	Équations différentielles fractionnaires . . . . .	34
2.2.1	Équations différentielles fractionnaires au sens de Caputo "EDFSC" . . . . .	34
2.2.2	Résolution analytique des EDFSC linéaires . . . . .	36
2.2.3	Résolution numérique des équations fractionnaires . . . . .	43
2.3	Systèmes chaotiques fractionnaires . . . . .	45
2.3.1	Systèmes d'ordre fractionnaire par rapport systèmes d'ordre entier . . . . .	46
2.3.2	Conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité . . . . .	46
2.3.3	Condition nécessaire pour le chaos . . . . .	48
2.3.4	Méthode directe de Lyapounov fractionnaire basée sur les fonctions de classe $\kappa$ . . . . .	49
2.3.5	Fonctions candidates de Lyapounov à la stabilité des systèmes fractionnaires . . . . .	55
2.4	Conclusion . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Synchronisation des systèmes chaotiques et hyperchaotiques</b> . . . . .	<b>60</b>
3.1	Systèmes couplés . . . . .	60
3.1.1	Accouplement bidirectionnel . . . . .	61
3.1.2	Accouplement unidirectionnel . . . . .	61
3.2	Différents types de synchronisation . . . . .	62
3.2.1	Synchronisation complète . . . . .	62
3.2.2	Anti-synchronisation . . . . .	63
3.2.3	Synchronisation projective . . . . .	63
3.2.4	Synchronisation projective modifiée . . . . .	63
3.2.5	Synchronisation généralisée de type $Q - S$ . . . . .	63
3.3	Problème de synchronisation généralisée entre deux systèmes chaotiques d'ordres fractionnaires non commensurables et de dimensions différentes . . . . .	64
3.3.1	Position du problème . . . . .	65
3.3.2	Synchronisation généralisée de dimension augmentée . . . . .	66
3.3.3	Synchronisation généralisée de dimension réduite . . . . .	67
3.3.4	Résultats de simulation (dimension augmentée) . . . . .	68
3.3.5	Résultats de simulation (dimension réduite) . . . . .	72
3.4	Problème de synchronisation projective modifiée entre un système hyperchaotique d'ordre entier et un système hyperchaotique d'ordre fractionnaire . . . . .	74

3.4.1	Nouveau système hyperchaotique et leur comportements dynamiques . . . . .	75
3.4.2	SPM entre un système hyperchaotique d'ordre entier et un système hyperchaotique d'ordre fractionnaire . . . . .	78
3.5	Conclusion . . . . .	82
<b>4</b>	<b>Communication sécurisée par synchronisation projective des systèmes chaotiques</b>	<b>84</b>
4.1	Techniques de communications sécurisées à base du chaos . . . . .	85
4.1.1	Masquage chaotique . . . . .	85
4.1.2	Modulation paramétrique . . . . .	85
4.2	Position du problème . . . . .	85
4.2.1	Modulation . . . . .	87
4.2.2	Émetteur . . . . .	87
4.2.3	Récepteur . . . . .	88
4.2.4	Démodulation . . . . .	90
4.2.5	Résultats de simulation . . . . .	90
4.3	Conclusion . . . . .	95
	<b>Conclusion générale</b>	<b>97</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>99</b>



# Table des figures

1.1	Point fixe, Cycle limite et Tore. . . . .	8
1.2	Attracteurs chaotiques du système de Lorenz. . . . .	9
1.3	Section de Poincaré . . . . .	13
1.4	Aspects aléatoires des états chaotiques du système de Lú (1.21). . . . .	14
1.5	Evolution temporelle de la trajectoire $u$ du système de Lú (1.21) avec trois conditions initiales différentes très proches. . . . .	15
1.6	Diagramme de bifurcations de l'application logistique. . . . .	17
1.7	Transition vers le chaos par doublement de période de l'application logistique. . . . .	18
1.8	Portrait de phase du système de Lú (1.21). . . . .	20
1.9	Exposants de Lyapounov du système de Lú. . . . .	21
2.1	Graphe de la fonction $\Gamma$ . . . . .	25
2.2	Fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre. . . . .	25
2.3	Fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres. . . . .	26
2.4	Courbes de la dérivée fractionnaire de la fonction $t^\alpha$ , pour différentes valeurs de $\alpha$ . . . . .	32
2.5	Régions de stabilité d'un système fractionnaire, où $0 < \alpha < 1$ . . . . .	48
2.6	L'évolution temporelle des états du système (2.196). . . . .	57
2.7	L'évolution temporelle des états du système (2.203). . . . .	58
3.1	Attracteur chaotique du système SCM, avec $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0.97, 0.98, 0.98)$ . . . . .	69
3.2	Attracteur chaotique du système de Lorenz avec $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0.97, 0.98, 0.98, 0.97)$ . . . . .	70
3.3	L'évolution des fonctions d'erreur du système (3.58). . . . .	72
3.4	L'évolution des fonctions d'erreur du système (3.68). . . . .	74
3.5	Projections de portrait de phase du système (3.74) . . . . .	77
3.6	Les trois plus grand exposants de Lyapunov du système (3.74). . . . .	78
3.7	Projections de portrait de phase du système (3.92). . . . .	81
3.8	les courbes de l'erreur de synchronisation (3.97.) . . . . .	82

4.1	Diagramme principal de communication sécurisée proposé. . . . .	86
4.2	Attracteurs hyperchaotique du système résultant (4.3) . . . . .	91
4.3	L'évolution temporelle de l'erreur de synchronisation. Cas du signal d'information borné : $m(t) = 3 - \cos(2t) - 2 \cos(3t)$ . . . . .	91
4.4	L'évolution temporelle de paramètre, paramètre d'estimation et erreur de paramètre d'estimation. Cas du signal d'information borné : $m(t) = 3 - \cos(2t) - 2 \cos(3t)$ . . . . .	92
4.5	L'évolution temporelle de message origine, message récupéré et erreur de message récupéré. Cas du signal d'information borné : $m(t) = 3 - \cos(2t) - 2 \cos(3t)$ . . . . .	92
4.6	Attracteurs hyperchaotique du système résultant (4.3) . . . . .	94
4.7	L'évolution temporelle des erreurs de synchronisation. Cas du signal d'information non borné : $m(t) = 0.05(t + \sin(t))$ . . . . .	94
4.8	L'évolution temporelle de paramètre, paramètre d'estimation et erreur d'estimation. Cas du signal d'information non borné : $m(t) = 0.05(t + \sin(t))$ . . . . .	95
4.9	L'évolution temporelle de message origine, message récupéré et erreur de message récupéré. Cas du signal d'information non borné : $m(t) = 0.05(t + \sin(t))$ . . . . .	95

# Introduction Générale

Le "chaos" est un phénomène d'apparence aléatoire non linéaire qui est déterministe et très sensible aux conditions initiales. Il définit un état spécial d'un système dont le comportement imprévisible ne se répète jamais.

De très nombreux systèmes ont été présentés ces dernières années exploitant les comportements chaotique dans les domaines physiques [1], chimiques [2], biologiques [3] et économiques [4], etc. L'étude de tels systèmes est liée à la théorie du chaos qui a été reconnue à partir des années 1960, grâce aux travaux d'un grand nombre de chercheurs notamment ceux de Lorenz [5], et grâce à la découverte de nouveaux outils de calculs.

Le concept d'utilisation de la théorie du chaos pour les systèmes de communication a été essentiellement inspiré des travaux de Pecora et Carroll en 1990 [6]. Ils ont découvert que deux systèmes chaotiques identiques avec des conditions initiales différentes peuvent se synchroniser s'ils sont convenablement couplés.

La transmission chaotique est un mode de communication sécurisée qui est née par l'inclusion du chaos dans les systèmes de transmissions. L'idée principale consiste à injecter le message dans un signal chaotique pour masquer cette information et de l'envoyer vers le récepteur à travers un canal public. Ainsi, après la synchronisation des deux systèmes (émetteur et récepteur), l'information cryptée est donc récupérée au niveau du récepteur.

D'autre part, dans la littérature, on trouve souvent le concept de la dérivation fractionnaire qui est la généralisation de la dérivation à un ordre arbitraire. Les concepts de dérivation et d'intégration fractionnaire sont souvent associés aux noms de Riemann-Liouville, alors que l'interrogation sur la généralisation de ces concepts est plus ancienne.

Avec une attention particulière des physiciens aussi bien que des ingénieurs, des activités de recherches remarquables ont été consacrés au calcul fractionnaire. Ils ont affirmé que l'usage des opérateurs de dérivations et d'intégrations fractionnaires sont souhaitable pour la description des propriétés de plusieurs matériaux. En effet, on a

constaté que plusieurs études théoriques et expérimentales montrent que certains systèmes thermiques (diffusion de la chaleur) [7], physiques (électricité) [8] et réologiques (viscoélasticité) [9] sont régis par des équations différentielles à dérivées fractionnaires. L'étude de la stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire est plus délicate que pour leurs homologues, les systèmes d'ordre entier. En effet, dans la théorie de la stabilité des systèmes linéaires, d'ordre entier, nous savons bien qu'un système est stable, si et seulement si, les racines du polynôme caractéristique sont à parties réelles négatives, c'est-à-dire situées sur la moitié gauche du plan complexe. Par ailleurs, la notion de la stabilité des systèmes fractionnaires linéaires est un peu différente de celle des systèmes classiques. En effet, on a bien constaté que les systèmes fractionnaires stables peuvent bien avoir des racines du polynôme caractéristique dans la moitié droite du plan complexe, ce qui montre que les systèmes fractionnaires sont des systèmes à mémoire qui sont plus stables (lorsque l'ordre fractionnaire est inférieur à 1) comparés aux systèmes d'ordre entier, et par conséquent, ils affichent un comportement dynamique beaucoup plus sophistiquée, ce qui présente une grande importance notamment dans le domaine de la communication sécurisée.

Les phénomènes de synchronisation du chaos ont fait l'objet d'un intérêt particulier dans l'étude des systèmes dynamiques chaotiques, car ils peuvent s'appliquer à de vastes domaines de l'ingénierie et des sciences de l'information, notamment en communication sécurisée [10] et cryptologie [11].

La configuration de base d'un système de synchronisation est constituée de deux systèmes : l'un est dit système émetteur et l'autre est dit système récepteur. On rappelle que ces systèmes peuvent être identiques avec des conditions initiales différentes ou complètement différents. Le système émetteur synchronise le système récepteur via un signal ou plusieurs signaux d'accouplement. Dans la littérature, plusieurs méthodes de contrôle ont été appliquées pour réaliser la synchronisation, à savoir le contrôle continu [12], le contrôle adaptatif [13], le contrôle de mode glissant [14] et le contrôle adaptatif flou [15]. À l'aide de ces méthodes, plusieurs concepts de synchronisation chaotique d'ordre entier ont été également étendus, à savoir la synchronisation complète [16], l'anti-synchronisation [17], la synchronisation généralisée [18], la synchronisation projective [19], la synchronisation projective modifiée [20] et la synchronisation généralisée de type  $Q - S$  [21].

Récemment, la synchronisation des systèmes chaotiques et hyperchaotique d'ordre fractionnaire est encore considérée comme un sujet de recherche stimulant en raison de leurs applications nombreuses et potentielles. Par exemple, dans [22], les auteurs ont recherché la synchronisation des réseaux de neurones chaotiques d'ordre fractionnaire.

Le concept de la synchronisation de type  $Q - S$  du système unifié d'ordre fractionnaire a été étudiée également dans [23]. En outre, et sur la base des théorèmes de stabilité du système linéaire d'ordre fractionnaire, un contrôle de mode glissant actif a été proposé par Xingyuan Wang et all [24], pour étudier le problème de la synchronisation projective modifiée du système chaotique d'ordre fractionnaire.

Motivé par les considérations ci-dessus, les travaux présentés dans cette thèse s'inscrivent en général dans ce contexte particulier. Ils portent fondamentalement sur la conception de la synchronisation des systèmes chaotiques et hyperchaotiques de type maître-esclave fractionnaires. Ensuite, nous présentons une application potentielle dans la communication sécurisée à base de synchronisation projective. Les principales contributions de ce travail de thèse sont :

1. Un problème de la synchronisation généralisée de type  $Q - S$  entre deux systèmes chaotiques d'ordres fractionnaires non commensurables et de dimensions différentes est présenté [25].
2. Un nouveau schéma de la SPM entre un système hyperchaotique d'ordre entier et un système hyperchaotique d'ordre fractionnaire est également proposé [26].
3. Un nouveau schéma de communication sécurisée basé sur la synchronisation projective des systèmes chaotiques fractionnaires est employé [27].

La suite de cette thèse est organisée de la façon suivante :

Le premier chapitre présente les principales notions de base des systèmes dynamiques déterministes. Il énonce également quelques concepts introductifs à la théorie du chaos.

Le deuxième chapitre est consacré aux études des définitions de base du calcul fractionnaire, des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire ainsi que les différentes définitions relatives à la stabilité de tels systèmes.

Le troisième chapitre constitue véritablement l'objet de notre contribution. L'objectif de ce chapitre porte principalement sur deux sujets majeurs. Dans le premier sujet, un problème de la synchronisation généralisée entre deux systèmes chaotiques d'ordres fractionnaires non commensurables et de dimensions différentes est étudié. Dans l'autre sujet, le problème de synchronisation projective modifiée entre un système hyperchaotique d'ordre entier et un système hyperchaotique d'ordre fractionnaire est considéré. Dans tous les schémas de synchronisation de ce chapitre, une technique de contrôle continu sera employée.

Le quatrième chapitre consiste à réaliser un nouveau schéma de communication sécurisée à base du chaos, il repose d'une part sur la synchronisation projective des systèmes chaotiques et d'une autre sur le masquage de l'information secrète. Ce schéma

se compose de deux oscillateurs hyperchaotiques identiques liés par un canal de transmission publique, des messages seront cryptés puis envoyés à partir de l'oscillateur émetteur. Notre objectif est de récupérer ces signaux utiles en utilisant la technique de modulation paramétrique.

Enfin, cette thèse est clôturée par une conclusion générale et quelques perspectives.

# Chapitre 1

## Généralités sur les systèmes dynamiques chaotiques

Les systèmes dynamiques chaotiques constituent une classe de systèmes déterministes non linéaires restés méconnus jusqu'au 19<sup>me</sup> siècle. A la fin du ce siècle, le mathématicien Henri Poincaré [28] avait déjà découvert le phénomène de sensibilité aux conditions initiales à travers le problème d'interactions de trois corps célestes. Poincaré a proposé, au lieu de s'intéresser à une solution particulière du système donné par exemple par des conditions initiales ou des conditions aux limites, d'utiliser des arguments géométriques et topologiques, afin de trouver les propriétés de l'ensemble des solutions, considérées comme orbites ou trajectoires dans un espace état. Plus tard, en 1963, le météorologue Lorenz a mis en évidence une méthode lui permettant de prévoir les phénomènes météorologiques. En effet, c'est par pur hasard qu'il observa qu'une petite modification des données initiales pouvait engendrer des comportements très éloignés. Lorenz venait de découvrir le phénomène de sensibilité aux conditions initiales. Ce phénomène est connu sous le nom d'effet papillon. La notion des systèmes exprimant à cette propriété est introduite à partir de 1975 par Li et Yorke [29] sous le nom : les systèmes dynamiques chaotiques.

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques brèves notions sur le phénomène chaotique qui apparaît dans un système dynamique déterministe. Nous commencerons par définir la notion des systèmes dynamiques, puis nous aborderons d'autres notions mathématiques notamment les systèmes dissipatifs et les systèmes conservatifs, la section de Poincaré, les attracteurs, le bassin d'attraction, les points d'équilibres et quelques notions de stabilité. Enfin nous présenterons la caractérisation du comportement chaotique.

## 1.1 Systèmes dynamiques

Dans la littérature, un système dynamique est une structure qui évolue au cours de temps de façon à la fois :

1. Causale, où son avenir ne dépend que des phénomènes du passé ou du présent.
2. Déterministe, c'est-à-dire, la connaissance exacte de l'état du système à un instant initial, nous permet de calculer son évolution à n'importe quel autre moment.

Du point de vue mathématiques, les systèmes dynamiques sont classés en deux catégories :

- Systèmes dynamiques continus.
- Systèmes dynamiques discrets.

### 1.1.1 Systèmes dynamiques continus

L'évolution d'un système dynamique continue dans le cas entier est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x, t, v), \quad (1.1)$$

où,  $x \in E$  ( $E$  un ensemble non vide de  $\mathbb{R}^n$  appelé espace de phase) est le vecteur d'état,  $v \in \mathbb{R}^p$  est un vecteur des paramètres et  $f : E \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p$  est le champ de vecteur, qui représente la dynamique du système (1.1).

Lorsque l'application  $f$  est continue et vérifiée la condition Lipschitzienne sur un certain intervalle  $I$  de la variable  $x$ , on peut assurer l'existence et l'unicité de la solution pour toute condition initiale  $x_0 \in I$ .

### 1.1.2 Systèmes dynamiques discrets

La forme générale d'un système dynamique à temps discret est décrit par une équation aux différences non linéaire suivante :

$$x_{n+1} = f(x_n, v), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

### 1.1.3 Systèmes autonomes ou non autonomes

Lorsque le champ de vecteur  $f$  ne dépend pas explicitement du temps, le système (1.1) est dit autonome. Dans le cas contraire, il est dit non autonome.

En utilisant un changement de variable approprié, on peut facilement transformer un système non autonome de dimension  $n$  en un système autonome équivalent de dimension  $n + 1$ .



### 1.1.4 Systèmes conservatifs ou dissipatifs

Chez les physiciens, un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale. Par ailleurs, un système dissipatif est un système qui dissipe de l'énergie.

**Définition 1.1.1.** Soit  $U$  un sous ensemble non vide de  $\mathbb{R}^n$ , on note par :

$$\varphi(U) = \{\varphi(x), x \in U\}, \quad (1.3)$$

l'ensemble des points de  $U$  transportés par le flot. Son volume est défini par :

$$V(\varphi(U)) = \int_{\varphi(U)} dx = \int_{\varphi(U)} dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (1.4)$$

Il s'écrit aussi :

$$V(\varphi(U)) = \int_{\varphi(U)} |\det D_\varphi(x)| dx, \quad (1.5)$$

où  $D_\varphi(x) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$  est la matrice jacobienne de  $\varphi$  en  $x$ .

On a alors la proposition suivante :

**Proposition 1.1.1.** 1.  $V(\varphi(U)) < V(U)$  pour tout  $U$  (i.e. le volume diminue) si et seulement si  $|\det D_\varphi(x)| < 1$ , pour tout  $x \in U$ . On dit que l'application est **dissipative**.

2.  $V(\varphi(U)) > V(U)$  pour tout  $U$  (i.e. le volume augmente) si et seulement si  $|\det D_\varphi(x)| > 1$ , pour tout  $x \in U$ . On dit que l'application est **expansive**.

3.  $V(\varphi(U)) = V(U)$  pour tout  $U$  (i.e. le volume est conservé) si et seulement si  $|\det D_\varphi(x)| = 1$ , pour tout  $x \in U$ . On dit que l'application est **conservative**.

**Preuve 1.1.1.** Il suffit d'effectuer le changement de variable,  $x = \varphi(y)$ , et donc  $dx = |\det D_\varphi(y)| dy$ .

**Exemple 1.1.1.** Soit  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , l'application linéaire définie par :

$$\varphi(x, y) = (x, 0.1y). \quad (1.6)$$

Puisque :

$$|\det D_\varphi(x)| = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix} \right| = 0.1 < 1, \quad (1.7)$$

la dynamique du système est donc dissipative.

## 1.2 Attracteurs et bassin d'attraction

La région de l'espace de phases vers laquelle convergent toutes les trajectoires d'un système dynamique dissipatif s'appelle un attracteur. Les attracteurs sont donc des formes géométriques qui caractérisent l'évolution à long terme des systèmes dynamiques.

Il en existe deux types d'attracteurs : attracteurs réguliers et attracteurs étranges [30].

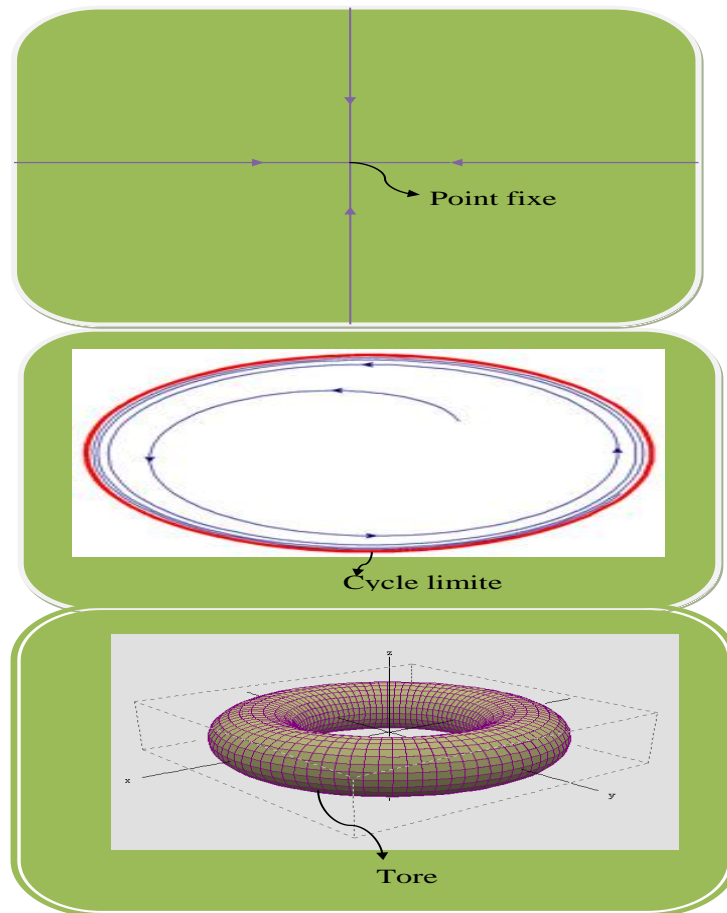


FIGURE 1.1 – Point fixe, Cycle limite et Tore.

### 1.2.1 Attracteurs réguliers

Il existe trois types distincts d'attracteurs réguliers.

- ❶ L'attracteur "point fixe" : c'est l'attracteur le plus simple. Il est représenté par un point dans l'espace des phases. C'est donc une solution constante et stationnaire.
- ❷ L'attracteur "cycle limite" : c'est une trajectoire fermée qui attire toutes les orbites proches. C'est donc une solution périodique du système.
- ❸ L'attracteur "quasi-périodique" : représente les mouvements résultant de deux ou plusieurs fréquences, que l'on appelle parfois "tore".

### 1.2.2 Attracteurs chaotiques

Un attracteur chaotique est bien plus complexe que les autres attracteurs, il est caractérisé par :

- ❶ Un volume nul.
- ❷ une dimension fractale (non-entière)  $d$ ,  $2 < d < n$ , où  $n$  est la dimension de l'espace de phase.
- ❸ Une séparation exponentiellement rapide de deux trajectoires initialement proches.

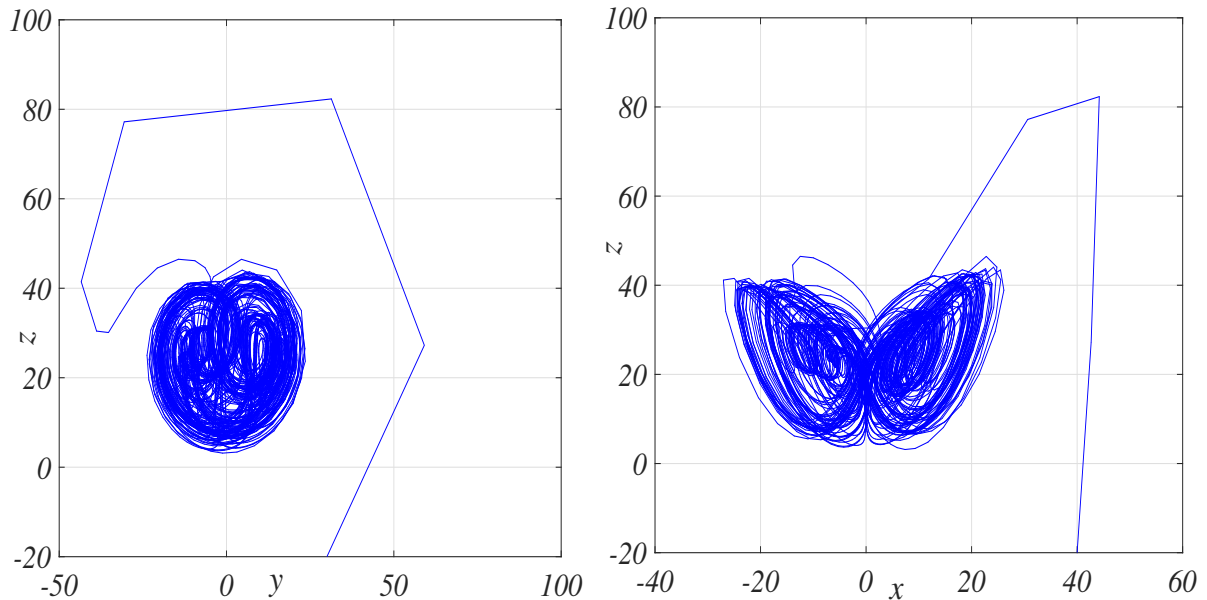


FIGURE 1.2 – Attracteurs chaotiques du système de Lorenz.

**Définition 1.2.1.** Soit  $A$  un sous ensemble compact de l'espace de phases  $E$ . Un attracteur  $A$  du système (1.1) vérifie les quatre conditions suivantes :

- ❶  $A$  est invariant sous l'action du flot  $\varphi_t$ , c'est-à-dire :  $\varphi_t(A) = A$ .
- ❷  $A$  est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.
- ❸ Il existe une orbite dense dans  $A$ .
- ❹  $A$  est indécomposable, c'est-à-dire que la réunion de deux attracteurs ne peut pas être un attracteur .

### 1.2.3 Bassin d'attraction

**Définition 1.2.2.** Lorsque  $A$  est un attracteur, l'ensemble :

$$B(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(x) \in A \right\}, \quad (1.8)$$

est appelé le bassin d'attraction de  $A$ . C'est donc, l'ensemble des points pour lesquels les trajectoires convergent asymptotiquement vers  $A$ .

## 1.3 Points d'équilibre

En général, on ne sait pas résoudre explicitement des équations différentielles non linéaires. On fait alors une étude qualitative de ses solutions. Cette étude va commencer par la recherche des points d'équilibre de l'équation différentielle (1.1).

En ce point d'équilibre, la vitesse s'annule :

$$\dot{x} = 0. \quad (1.9)$$

Les points d'équilibre, que nous notons  $x_{eq}$ , vérifient alors l'équation suivante :

$$f(x_{eq}) = 0. \quad (1.10)$$

Dans l'espace de phase, un point d'équilibre se représente par un point. Sa valeur est déterminée à savoir la condition initiale choisie. Par ailleurs, pour des conditions initiales différentes nous pouvons trouver plusieurs points d'équilibre. De plus, ces points peuvent être stables ou instables, à savoir la convergence ou la divergence entre les trajectoires voisines.

## 1.4 Notions de stabilité

La notion de stabilité d'un système dynamique caractérise le comportement de ses trajectoires au voisinage des points d'équilibre. L'analyse de la stabilité d'un système dynamique permet alors d'étudier l'évolution de sa trajectoire d'état lorsque l'état initial est très proche d'un point d'équilibre. La théorie de stabilité au sens de Lyapunov est valable pour toute équation différentielle. Cette notion signifie que la solution d'une équation différentielle initialisée au voisinage d'un point d'équilibre en reste toujours suffisamment proche.

**Définition 1.4.1. (Stabilité)** Le point d'équilibre  $x_{eq}$  du système (1.1) est stable au sens de Lyapunov si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que } \|x_0 - x_{eq}\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x_0) - x_{eq}\| < \epsilon \quad \forall t \geq t_0. \quad (1.11)$$

**Définition 1.4.2. (Attractivité)** Le point d'équilibre  $x_{eq}$  du système (1.1) est attractif si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que } \|x_0 - x_{eq}\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t, x_0) - x_{eq}) = 0. \quad (1.12)$$

**Définition 1.4.3. (Stabilité asymptotique)** Le point d'équilibre  $x_{eq}$  du système (1.1) est asymptotiquement stable, s'il est stable et attractif.

**Définition 1.4.4. (Stabilité exponentielle)** Le point d'équilibre  $x_{eq}$  du système (1.1) est exponentiellement stable, s'il existe deux constantes strictement positives  $a$  et  $b$  et s'il existe  $t_0 > 0$ , tels que :

$$\|x(t, x_0) - x_{eq}\| < a \exp(-bt), \text{ pour tout } t \geq t_0. \quad (1.13)$$

**Remarque 1.1.** Notons que l'utilisation des définitions précédentes, pour réaliser la stabilité de (1.1), au voisinage de son point d'équilibre, exige la résolution explicite de l'équation (1.1), ce qui est souvent très difficile dans la plupart des cas. De ce fait là, les deux méthodes suivantes de Lyapounov nous permettent de contourner cet obstacle.

### 1.4.1 Méthode directe

La méthode directe de Lyapounov nous permet d'analyser localement la stabilité de système (1.1), sans le résoudre explicitement. Le problème de la stabilité se ramène alors à chercher une telle fonction (dite fonction de Lyapounov), qui est fourni des informations sur la stabilité du système. Le théorème suivant va résumer cette méthode.

**Théorème 1.4.1. [31]** Le point d'équilibre  $x_{eq}$  du système (1.1) est dit stable (respectivement asymptotiquement stable) au sens de Lyapounov s'il existe un voisinage  $D(x_{eq})$  et une fonction  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  (dite fonction de Lyapounov) de classe  $C^1$  ayant les propriétés suivantes :

1.  $V(x_{eq}) = 0$  et  $V(x) > V(x_{eq})$ , pour tout  $x \neq x_{eq}$  dans  $D$ .
2.  $\dot{V}(x) \leq 0$  (respectivement  $\dot{V}(x) < 0$ ), pour tout  $x \neq x_{eq}$  dans  $D$ .

### 1.4.2 Méthode indirecte

La seconde méthode de Lyapounov est basée sur l'examen de la linéarisation au voisinage du point d'équilibre  $x_{eq}$  du système (1.1). Plus précisément, on examine les valeurs propres  $x_{eq}$  de la matrice jacobienne associée à ce point d'équilibre.

La linéarisation revient à poser :

$$x = x_{eq} + \delta x, \quad (1.14)$$

où  $\delta x$  est une petite perturbation appliquée au voisinage du point d'équilibre  $x_{eq}$ . On a alors :

$$\dot{x} = \dot{x}_{eq} + \delta \dot{x}. \quad (1.15)$$

Le système (1.1) devient alors :

$$\dot{x}_{eq} + \delta \dot{x} = f(x_{eq} + \delta x). \quad (1.16)$$

En utilisant un développement de Taylor du premier ordre de  $f$  au voisinage  $x_{eq}$ , on obtient :

$$f(x_{eq} + \delta x) = f(x_{eq}) + J_f(x_{eq})(x - x_{eq}), \quad (1.17)$$

où  $J_f$  représente la matrice jacobienne de  $f$ . D'où

$$\delta\dot{x} = J_f(x_{eq})\delta x. \quad (1.18)$$

Cette équation montre l'évolution de la perturbation  $\delta x$  au voisinage du point d'équilibre. Nous avons donc le théorème suivant :

**Théorème 1.4.2.** (Théorème de Hartmann-Grobman) [32] Si la matrice jacobienne  $J_f(x_{eq})$  admet des valeurs propres non nulles ou imaginaires pures, alors il existe un homéomorphisme qui transforme les orbites du flot non linéaire vers celles du flot linéaire dans certain voisinage de  $x_{eq}$ .

**Remarque 1.2.** Ce théorème nous permet de lier la dynamique du système non linéaire (1.1) à la dynamique du système linéarisé (1.18).

L'extension du théorème sur la linéarisation est alors :

**Théorème 1.4.3.** Soit  $x_{eq}$  un point d'équilibre du système (1.1).

1- Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne  $J_f(x_{eq})$  ont des parties réelles strictement négatives, alors  $x_{eq}$  est dit exponentiellement stable.

2- Si la matrice jacobienne ayant au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive, le point  $x_{eq}$  est dit instable.

## 1.5 Section de Poincaré

La section de Poincaré est un outil mathématique simple permettant de transformer un système dynamique continu en un système dynamique discret.

Soit maintenant un système dynamique continu, décrit dans un espace d'état de dimension  $n$  et une surface de dimension  $(n-1)$ . L'application de Poincaré est le système dynamique en temps discret dont la suite des itérés correspond aux coordonnées des points d'intersection successifs de la trajectoire avec cette surface. L'ensemble des points d'intersections, situés sur la surface, représente la section de Poincaré.

**Remarque 1.3.** Si le système dynamique continue défini sur un espace de dimension  $n$ , on aurait une application de Poincaré définie sur un espace de dimension  $n - 1$ .

**Remarque 1.4.** L'application de Poincaré est aussi un outil pour l'étude de la stabilité des orbites périodiques. En effet, l'intérêt de l'application de Poincaré : son étude est plus simple que celle du flot. Par exemple le point d'équilibre  $c = P(c)$  est un point attractif. Cette propriété est équivalente à l'existence d'un cycle limite attractif pour le flot.

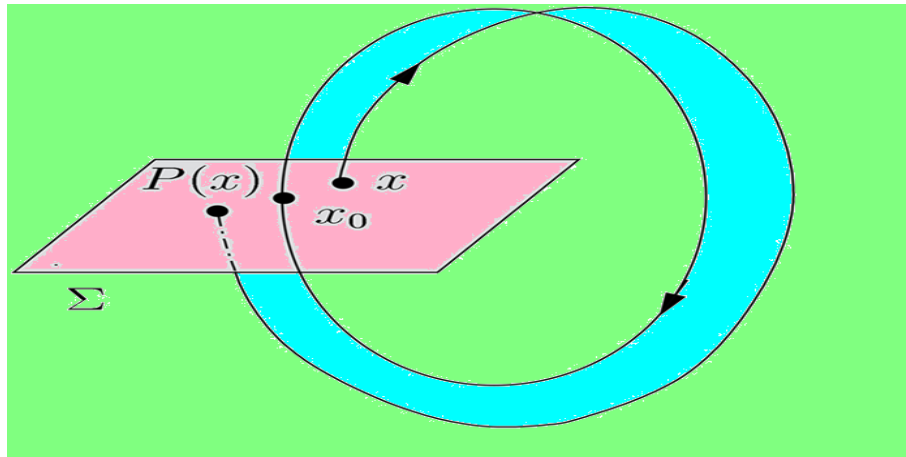


FIGURE 1.3 – Section de Poincaré

## 1.6 Caractérisation du comportement chaotique

L'objectif de cette partie est de mieux faire connaître les caractéristiques permettant de reconnaître un comportement chaotique. En première approche, nous rappelons quelques approches de définitions du chaos, ensuite nous présentons des caractéristiques principales du comportement chaotique d'un système dynamique déterministe. Nous citons également quelques scénarios de transition vers le chaos. Enfin, nous terminons cette partie par une application sur les systèmes chaotiques.

### 1.6.1 Le chaos et l'hyperchaos

En général, il n'existe pas une définition formelle du chaos. Cependant, il existe plusieurs approches de définitions possibles du chaos. Ces approches ne sont pas toutes équivalentes, mais elles convergent vers certaines propriétés communes caractérisant le chaos. Par exemple, la définition du chaos selon Li-Yorke [33] est la suivante :

Une application continue  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  est chaotique, s'il y a un ensemble indénombrable  $S \subset [0, 1]$ , tel que les trajectoire de deux points distincts  $x_1, x_2 \in S$  sont proximaux et non asymptotique ; c'est-à-dire :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} (|f^{(n)}(x_1) - f^{(n)}(x_2)| = 0) \text{ et } \limsup_{n \rightarrow +\infty} (|f^{(n)}(x_1) - f^{(n)}(x_2)| > 0). \quad (1.19)$$

D'après Devaney [34] : un système dynamique est chaotique si et seulement si :

- a) Il est topologiquement transitif, c'est-à-dire si l'on considère deux voisinages arbitraires de deux états distincts d'un système dynamique, alors il existe une trajectoire qui passe de l'un à l'autre.
- b) Il possède un ensemble dense d'orbites périodiques.

c) Il possède la propriété de sensibilité aux conditions initiales.

## 1.6.2 Caractéristiques principales du comportement chaotique

Ci-dessous, nous rappelons quelques caractéristiques qui nous permettent de mieux comprendre les points marquants d'un système chaotique.

### Non-linéarité

La non-linéarité est l'une des caractéristiques fondamentales des systèmes chaotiques. En effet, tout système linéaire ne peut pas être chaotique.

### Déterminisme

Un système chaotique est déterministe (plutôt que probabiliste), c'est-à-dire qu'il soumit à des lois qui décrivent complètement son mouvement. La notion de déterminisme signifie donc la capacité de prédire l'état futur d'un phénomène à partir d'un événement passé. Cependant, dans les phénomènes aléatoires, il est impossible de prévoir les trajectoires d'une quelconque particule.

### Aspects aléatoires

La Figure 1.4 illustre l'évolution temporelle des trajectoires chaotiques du système de Lü (1.21). Le système représente une évolution complexe, non périodique et imprévisible. C'est donc l'aspect aléatoire des systèmes chaotiques.

L'évolution temporelle d'une trajectoire chaotique apparaît comme aléatoire, cepen-

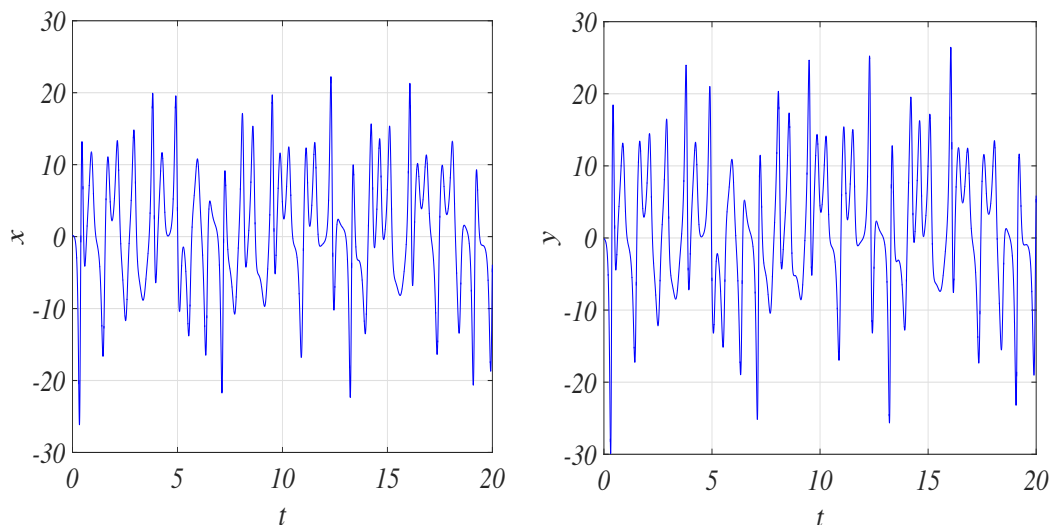


FIGURE 1.4 – Aspects aléatoires des états chaotiques du système de Lü (1.21).



dant l'observation de cette trajectoire dans l'espace des phases, au voisinage de l'infini, décrit une forme particulière dont la structure est fractale ; c'est l'attracteur chaotique.

### Attracteurs chaotiques

La figure géométrique particulière qui représente l'attracteur d'un système chaotique dans l'espace des phases en fonction du temps, appelé attracteur chaotique. Ainsi, cet attracteur se produit à l'aide de deux opérations simultanées à savoir l'étirement, responsable de la sensibilité aux conditions initiales et de l'instabilité, et le repliement, responsable du côté étrange. D'autre part, on parle d'attracteur chaotique lorsque sa dimension est fractale. Grâce de cette propriété particulière, fractale, ces attracteurs sont qualifiés d'étranges(chaotiques). Ils représentent la signature du chaos qui nous permet d'authentifier un comportement chaotique.

### Sensibilité aux conditions initiales

Les systèmes chaotiques sont extrêmement très sensibles aux conditions initiales. De très petites perturbations sur l'état initial d'un système peuvent être mener finalement à un comportement strictement différent dans son état final. La Figure 1.5 illustre l'évolution temporelle d'une trajectoire du système de Lú (1.21) avec trois conditions initiales différentes très proches.

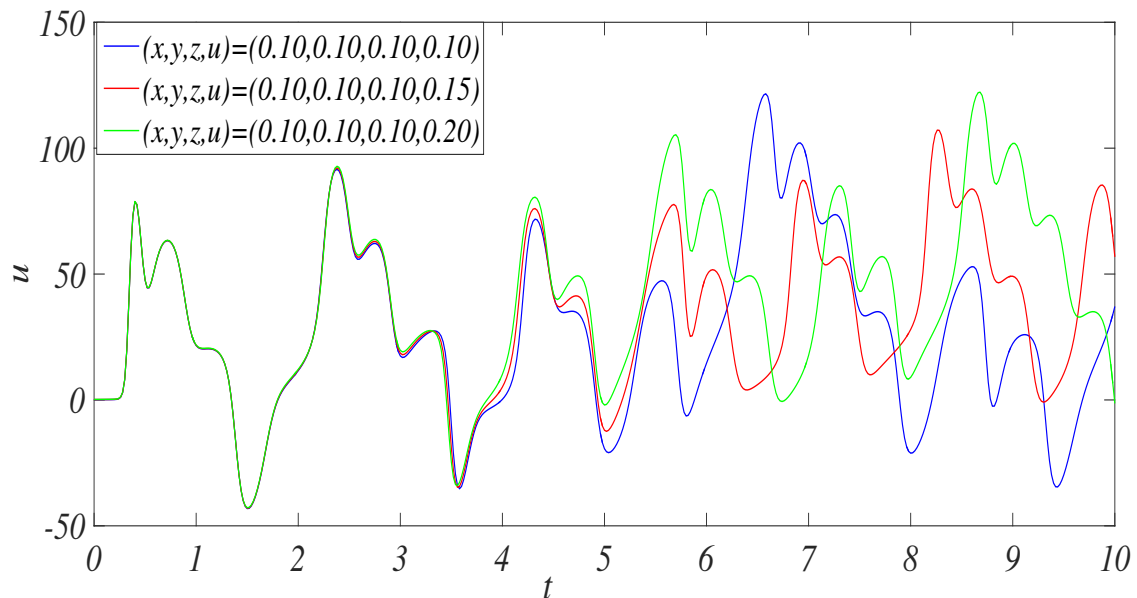


FIGURE 1.5 – Evolution temporelle de la trajectoire  $u$  du système de Lú (1.21) avec trois conditions initiales différentes très proches.

## Exposants de Lyapounov

La vitesse de divergence de deux trajectoires initialement voisines peut être étudiée à partir des exposants de Lyapounov afin de caractériser la nature du chaos détecté. L'exposant de Lyapounov sert à mesurer le taux de divergence des deux trajectoires. A titre d'exemple, on considère un système dynamique de dimension 4. Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  et  $\lambda_4$  les exposants de Lyapounov de ce système satisfaisant  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$ . Alors ce système se comporte de la manière suivante :

- Si  $\lambda_4 < \lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$ . Il s'agit d'un point d'équilibre asymptotiquement stable.
- Si  $\lambda_1 = 0, \lambda_4 < \lambda_3 < \lambda_2 < 0$ . Il s'agit d'un cycle limite stable.
- Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_4 < \lambda_3 < 0$ . Il s'agit d'un tore stable.
- Si  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 < \lambda_4 < 0$  et  $\sum_{i=1}^4 \lambda_i < 0$ . Il s'agit d'un système chaotique.
- Si  $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 < 0$  et  $\sum_{i=1}^4 \lambda_i < 0$ . Il s'agit d'un système hyperchaotique.

**Remarque 1.5.** *Un exposant de Lyapounov négatif selon une direction, indique que les trajectoires se rapprochent et par conséquent on perd l'information sur les conditions initiales. l'orbite est donc attractive vers une orbite périodique ou un point fixe. Il caractérise les systèmes dissipatifs. Ce genre de système exhibe une stabilité asymptotique.*

*Un exposant de Lyapounov positif selon une direction, indique que la divergence entre deux trajectoires voisines augmente exponentiellement avec le temps. les trajectoires divergent, l'orbite est donc chaotique. Intuitivement, c'est la sensibilité aux conditions initiales.*

*Un exposant de Lyapounov nul, les orbites issues de conditions initiales différentes, gardent une séparation constante, ni convergent, ni divergent l'une par rapport à l'autre. Dans ce cas, un tel système physique est dit conservatif.*

**Remarque 1.6.** *Notons qu'il existe plusieurs algorithmes pour calculer les exposants de Lyapounov, l'un des plus connus étant l'algorithme de Wolf [35]. Cet algorithme nous permet de calculer les exposants de Lyapounov à partir du calcul effectif de la divergence de deux trajectoires par rapport à la perturbation introduite parallèlement.*

## Diagramme de bifurcations

On dit qu'il y a une bifurcation lorsqu'un tel changement qualitatif de la structure d'un système se produit à l'occasion de la variation quantitative de l'un de ses paramètres (qu'on l'appelle valeur de bifurcation). Les graphiques qui représentent ces bifurcations, sont appelés diagrammes de bifurcation. Donc le diagramme de bifurcation est un outil très important pour évaluer les comportements possibles d'un système en fonction des valeurs de bifurcation. La Figure 1.6 illustre le diagramme de bifurcations de l'application logistique définie sur le segment  $[0, 1]$  par :

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad (1.20)$$

où  $n = 0, 1, 2, \dots$  dénote le temps discret, et  $r \in [0, 4]$  un paramètre de contrôle.

Selon la Figure 1.6, on peut constater trois états différents du système selon la valeur du paramètre  $r$  : un régime stable, puis périodique à plusieurs états et enfin un régime chaotique.

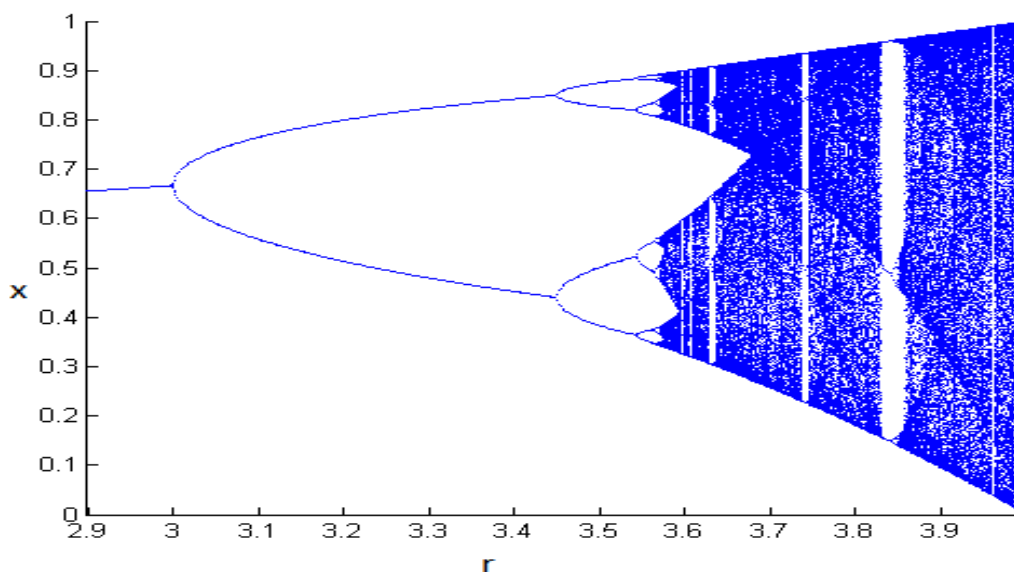


FIGURE 1.6 – Diagramme de bifurcations de l'application logistique.

### 1.6.3 Scénarios de transition vers le chaos

Le changement continu de ces paramètres de bifurcation conduit à une complexification progressive du régime dynamique développé par le système. Ainsi, le système peut passer d'un état stationnaire à un état périodique, puis au-delà d'un certain seuil, suivre un scénario de transition et enfin devient chaotique.

En général les trois scénarios de transition vers le chaos sont les suivants :

## Intermittence

L'intermittence vers le chaos se caractérise par un mouvement périodique entrecoupé par des bouffées chaotiques, puis le régime redevient périodique et ainsi de suite. La survenance des bouffées apparaît de manière irrégulière dans le temps. L'augmentation d'un paramètre réalise l'augmentation de la fréquence des perturbations, puis les bouffées sont rares et espacées et finalement le chaos domine le comportement du système.

## Doublement de période

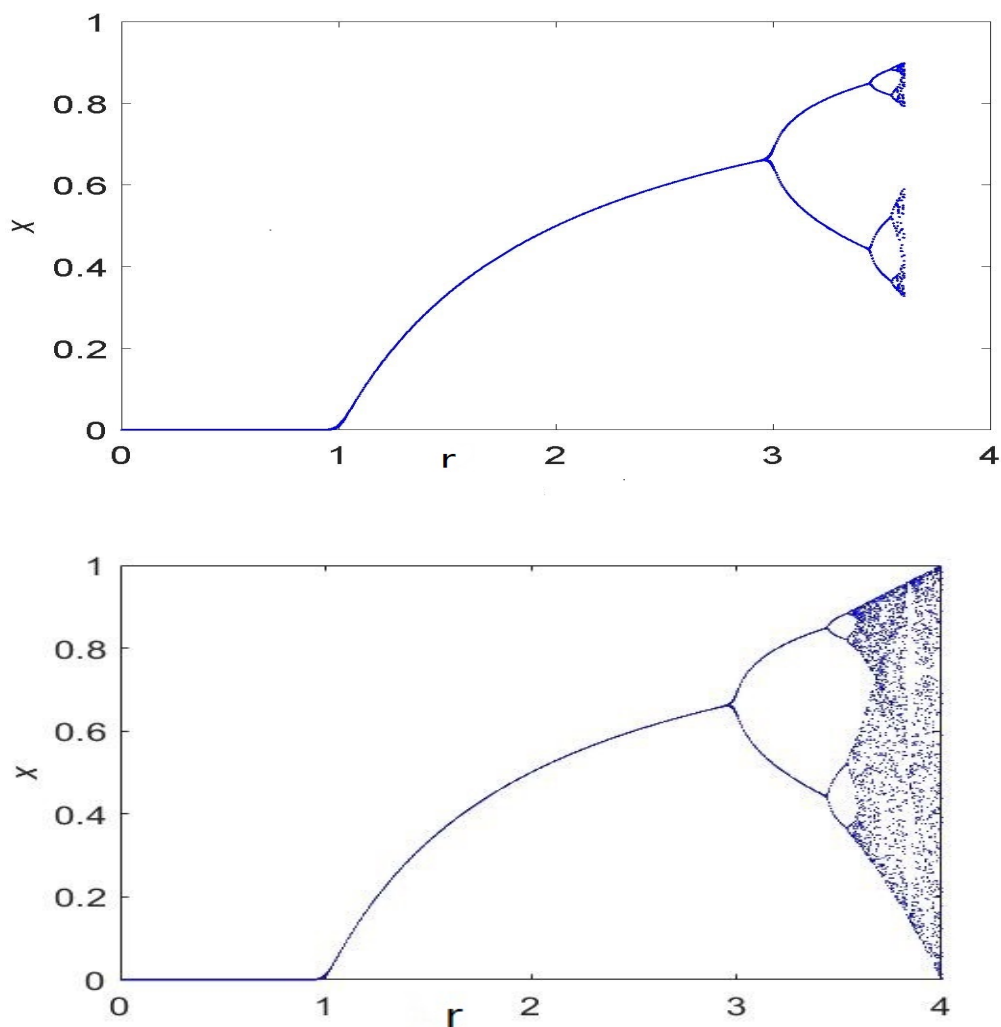


FIGURE 1.7 – Transition vers le chaos par doublement de période de l'application logistique.

Par l'augmentation progressive de la valeur de bifurcation, la période d'un système forcé est multipliée par deux, puis par quatre, par huit, etc..., ces doublements de

période étant de plus en plus rapprochés, lorsque la période est infinie, le système devient chaotique (Voire Figure 1.7).

### Quasi périodicité

Le troisième scénario de transition vers le chaos est la quasi périodicité, qui intervient quand un deuxième système perturbe un système initialement périodique. Si le rapport des périodes des deux systèmes en présence n'est pas rationnel, alors le système est dit quasi périodique. Ce régime peut, à son tour, perdre la stabilité et devenir alors soit directement chaotique, soit par la survenance d'une troisième fréquence.

### 1.6.4 Avantage du Chaos

Comme il a été déjà mentionné dans l'introduction, le chaos déterministe peut générer des comportements dynamiques d'apparences aléatoires. Il serait donc intéressant d'utiliser ces derniers comme porteuses d'informations en communications sécurisées.

### 1.6.5 Exemple d'un système hyperchaotique

Plusieurs systèmes chaotiques et hyperchaotiques ont été étudié dans la littérature. Parmi ces systèmes, on retrouve le système de Lorenz [36], le système de Chen [37], le système de Liu [38], le système de Qai [39] et le système de Lú [40].

Prenons comme exemple de systèmes hyperchaotiques continue, le système de Lú [40] donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) + u, \\ \dot{y} = -xz + cy, \\ \dot{z} = xy - bz, \\ \dot{u} = xz + du, \end{cases} \quad (1.21)$$

où  $a, b, c$  sont des constants et  $d$  est le paramètre de contrôle.

Généralement, ce type de système est qualifié d'autonome, puisque la dynamique de ce système est de la forme :  $\dot{x} = f(x(t))$ .

Dans ce qui suit, nous vérifions, que lorsque les paramètres  $a, b, c$  et  $d$  prennent les valeurs suivantes :

$$a = 36, b = 3; c = 20 \text{ et } d = 0.625, \quad (1.22)$$

avec des conditions initiales :

$$x(0) = -10, y(0) = 5, z(0) = 10, \text{ et } u(0) = 15, \quad (1.23)$$

le système (1.21) est hyperchaotique. Dans ce cas, le portrait de phase de ce système est représenté dans la Figure 1.8.

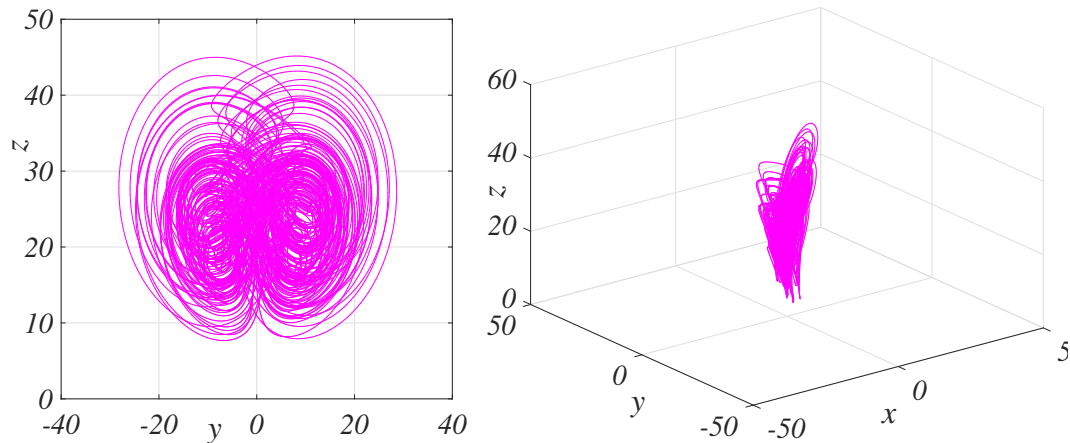


FIGURE 1.8 – Portrait de phase du système de Lú (1.21).

Ce système ayant les propriétés suivantes :

### Points d'équilibre

Les points d'équilibre de ce système sont la solution de l'équation :

$$\begin{cases} a(y - x) + u = 0, \\ -xz + cy = 0, \\ xy - bz = 0, \\ xz + du = 0. \end{cases} \quad (1.24)$$

Si  $c - ad \neq 0$ , le système admet en général trois points fixes :

$$O(0, 0, 0, 0), P_1 \left( \sqrt{bc}, -\frac{ad\sqrt{bc}}{c-ad}, -\frac{acd}{c-ad}, \frac{ac\sqrt{bc}}{c-ad} \right) \text{ et } P_2 \left( -\sqrt{bc}, \frac{ad\sqrt{bc}}{c-ad}, -\frac{acd}{c-ad}, -\frac{ac\sqrt{bc}}{c-ad} \right). \quad (1.25)$$

Lorsque  $a = 36, b = 3, c = 20$  et  $d = 0.625$ , les valeurs propres du point d'équilibre  $O$  sont  $20, 0.625, -3, -36$ , ainsi puisque  $P_1$  et  $P_2$  sont symétriques par rapport des axes  $x, y$  et  $u$ , les valeurs propres de  $P_1$  et  $P_2$  sont  $22.54, 0.03, -20, 48 \pm -29.56i$ . Ce qui montre l'instabilité de ces points.

### Exposants de Lyapounov

En utilisant l'algorithme de Wolf [35], la Figure 1.9 représente le spectre des exposants de Lyapounov du système (1.21), avec une augmentation du paramètre  $d$  dans l'intervalle  $[0.55, 1.15]$  et  $a = 36, b = 3, c = 20$ .

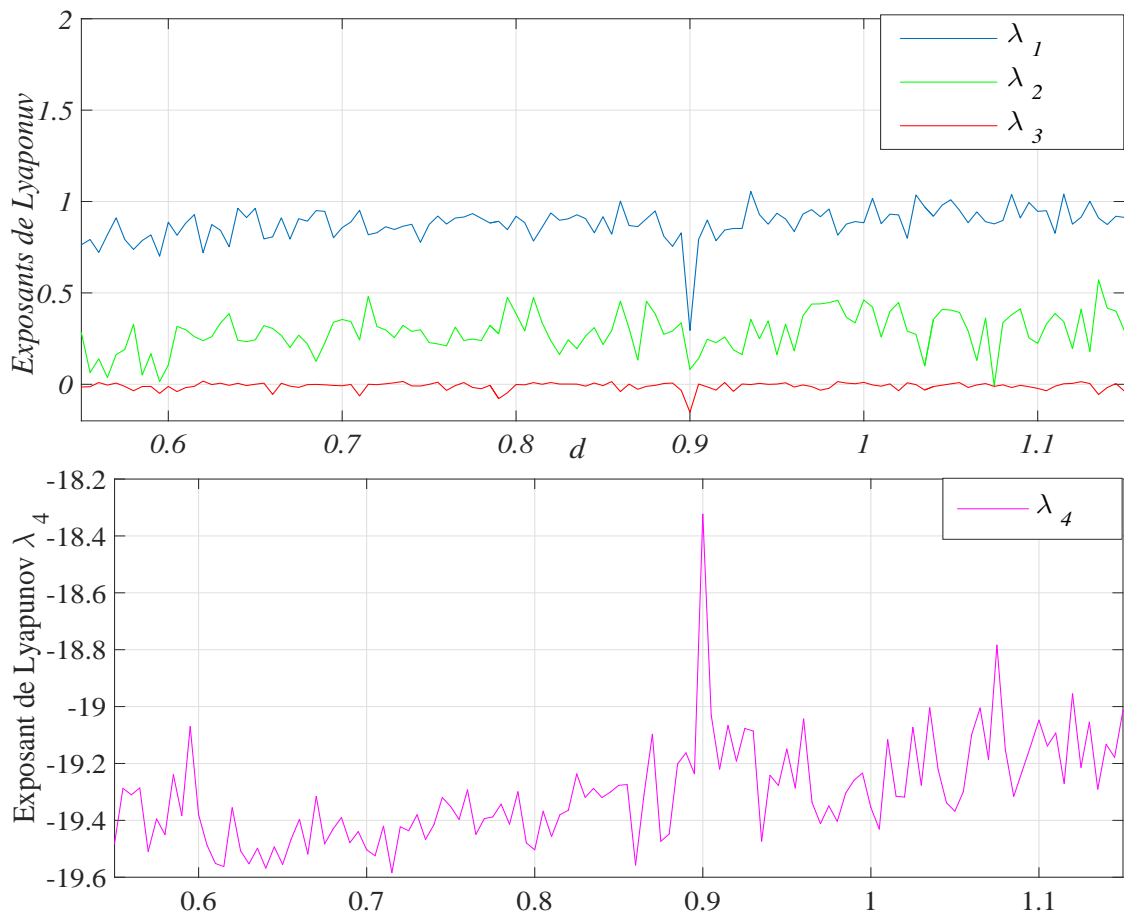


FIGURE 1.9 – Exposants de Lyapounov du système de Lú.

En particulier, lorsque  $d = 0.625$ , nous pouvons également calculer les quatre exposants de Lyapounov du système (1.21) comme suit :

$$\lambda_1 = 0.84, \lambda_2 = 0.33, \lambda_3 = 0 \text{ et } \lambda_4 = -19.55. \quad (1.26)$$

Nous constatons bien qu'il y a deux exposants de Lyapounov positifs, ce qui signifie que le système (1.21) est bien hyperchaotique.

## 1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exhibé quelques notions de base des systèmes dynamiques. Nous avons présenté également les définitions mathématiques relatives au chaos et les différentes caractéristiques intrinsèques aux systèmes chaotiques.



# Chapitre 2

## Systemes dynamiques fractionnaires

Il est très important de comprendre que le terme "systemes fractionnaires" signifie tout simplement "systemes qui sont mieux caracterises par des modeles dynamiques d'ordre fractionnaire", le systeme lui-meme n'est pas fractionnaire au vrai sens du terme, c'est le modele qui l'est.

Les systemes fractionnaires sont egalement consideres comme des systemes a memoire, notamment pour la description des proprietes de plusieurs materiaux comme les polymeres. En effet, la derivee fractionnaire procure un excellent instrument pour la description de la propriete de memoire de plusieurs materiaux et processus puisque la derivee fractionnaire d'une fonction tient compte de tout l'historique de la fonction et ne reflète pas uniquement des caracteristiques locales comme dans le cas de la derivee classique.

Ce chapitre est ainsi consacré d'une maniere unifiee à l'etude des elements sur la theorie du calcul fractionnaire et de la stabilisation des systemes lineaires et non lineaires fractionnaires, sur lesquels s'appuient nos resultats decrits dans le troisieme chapitre. Quelques concepts de base de la theorie de derivation non entiere, en particulier, la fonction Gamma, la fonction de Mittag-Leffler, la transformation de Laplace et les differentes definitions des derivees fractionnaires, sont presentes d'abord dans la section 2.1. Dans la section 2.2, nous rappelons les elements necessaires de la theorie des equations differentielles fractionnaires au sens de Caputo, en mettant en exergue le resultat d'existence et d'unicite de la solution d'un probleme à valeurs initiales pour une equation fractionnaire, puis la resolution explicite des equations differentielles fractionnaires lineaires, et nous terminons cette section par la presentation d'une methode numerique necessaire à la resolution des equations fractionnaires. Dans la section 2.3, le probleme de la stabilite des systemes differentielles d'ordre fractionnaire est etudie. Nous souhaitons egalement etudier la stabilisation asymptotique des systemes frac-

tionnaires, en utilisant une nouvelle extension de la méthode directe de Lyapounov d'ordre fractionnaire.

## 2.1 Quelques concepts de base de la théorie de dérivation non entière

Les définitions et les résultats proposés dans cette section sont indispensables à la bonne compréhension de cette thèse. Nous regroupons un ensemble de définitions sur le thème du calcul fractionnaire et nous rappelons quelques théorèmes.

### 2.1.1 Fonctions spéciales pour la dérivation fractionnaire

Dans cette partie, nous présentons la fonction Gamma d'Euler et les fonctions de Mittag-Leffler. On rappelle que ces fonctions jouent des rôles très importants dans la théorie du calcul fractionnaire (la fonction de Mittag-Leffler joue le même rôle que la fonction exponentielle).

#### Fonction Gamma

L'une des fonctions de base dans la théorie du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler  $\Gamma(z)$ . Elle est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} \exp(-t) dt, \quad z > 0. \quad (2.1)$$

L'une des propriétés importantes de la fonction de Gamma est la suivante :

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), \quad z > 0. \quad (2.2)$$

- Prolongement de  $\Gamma(z)$  pour  $z$  négative

De la relation (2.1), on peut écrire :

$$\Gamma(z - 1) = \frac{\Gamma(z)}{z - 1} \quad -1 < z - 1 < 0$$

$$\Gamma(z - 2) = \frac{\Gamma(z - 1)}{z - 2} \quad -2 < z - 2 < -1.$$

De la même manière, on peut trouver :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z + 1)}{z} \quad -n < z < -(n - 1). \quad (2.3)$$

On en déduit alors que la fonction Gamma est également définie pour toutes les valeurs négatives de  $z$ .

La Figure 2.1 représente le graphe de la fonction Gamma d'Euler.

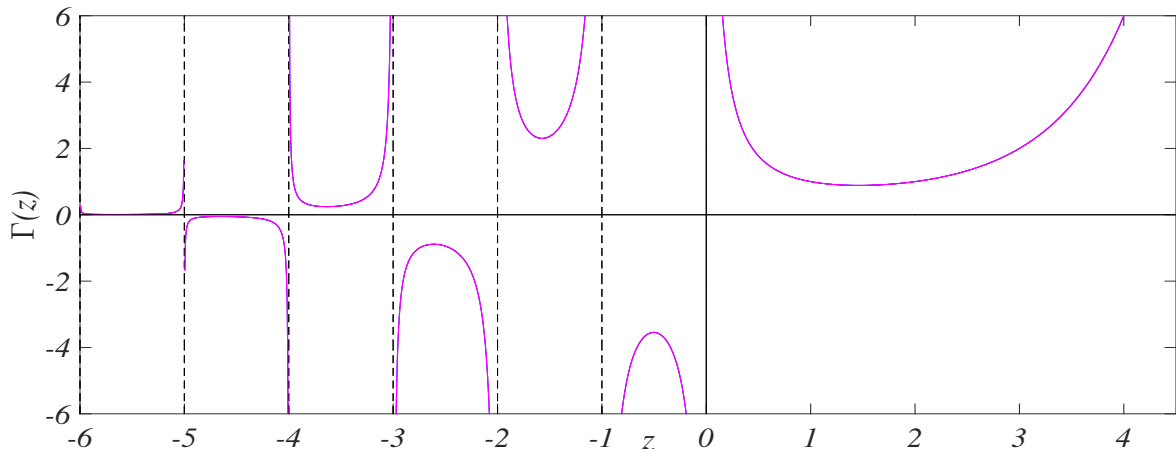


FIGURE 2.1 – Graphe de la fonction  $\Gamma$ .

### Fonction Mittag-Leffler

La fonction exponentielle, joue un rôle très important dans la résolutions des équations différentielles d'ordre entier. La fonction de Mittag-Leffler est une généralisation de la fonction exponentielle, elle est souvent utilisée dans la résolution des problèmes physiques décrits par des équations à dérivée fractionnaire.

La fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre a été introduite par G.M. Mittag-Leffler [41]. Elle est définie par :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} E_\alpha(z), \quad \alpha > 0. \quad (2.4)$$

La Figure 2.2 illustre le comportement de la fonction de Mittag-Leffler pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

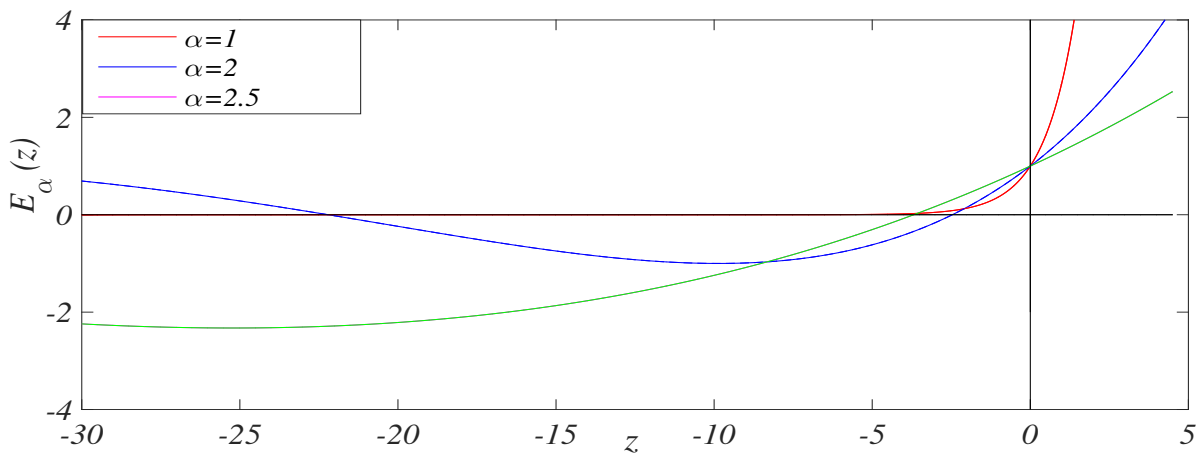


FIGURE 2.2 – Fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre.

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres a été introduite par Agarwal [42]. Elle

est définie par :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \quad (2.5)$$

En particulier, pour  $\beta = 1$ , on trouve la relation (2.4).

La Figure 2.3 illustre le comportement de la fonction de Mittag-Leffler, pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ .

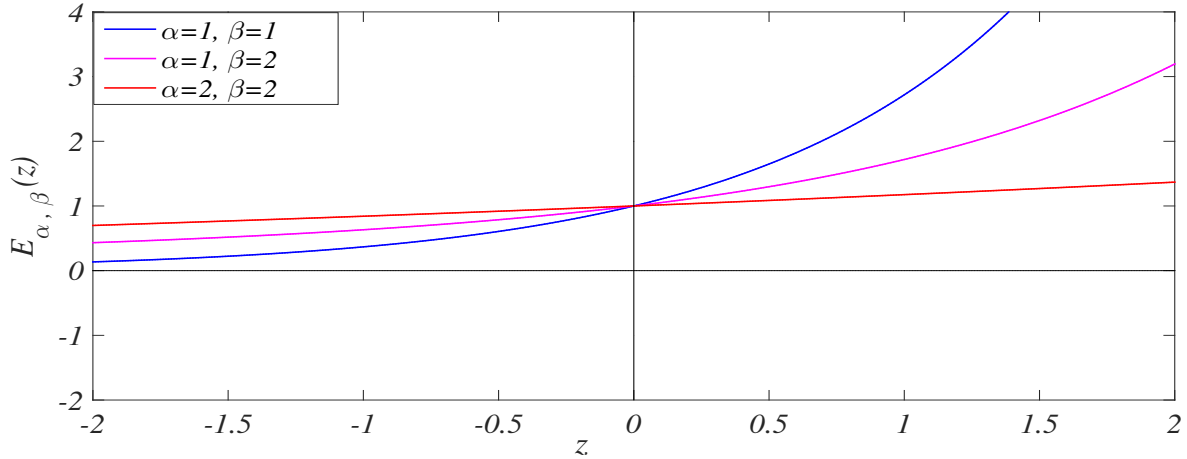


FIGURE 2.3 – Fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres.

A partir de la relation (2.5), on trouve :

$$E_1(z) = \exp(z), \quad E_2(z) = \cosh(\sqrt{z}). \quad (2.6)$$

La dérivée  $n$ -ième de la fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre est donné par :

$$E_{\alpha}^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!z^k}{k!\Gamma(\alpha k + \alpha n + 1)}. \quad (2.7)$$

Tandis que la dérivée  $n$ -ième de la fonction Mittag-Leffler à deux paramètres est donnée par :

$$E_{\alpha,\beta}^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!z^k}{k!\Gamma(\alpha k + \alpha n + \beta)}. \quad (2.8)$$

## 2.1.2 Transformation de Laplace

L'utilisation de la technique de transformation de Laplace est souvent nécessaire et joue un rôle très important dans la résolution des équations à dérivée fractionnaire.

Soit  $F$ , la transformée de Laplace de  $f$  définie par :

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} \exp(-st)f(t)dt, \quad s \in \mathbb{C}, \quad (2.9)$$

où  $f$  est la fonction originale qui peut être obtenue à l'aide de la transformation réciproque de Laplace :

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \exp(st)F(s)ds \quad (\gamma = \Re(s) > \gamma_0), \quad (2.10)$$

où  $\gamma_0$  est l'indice de convergence de l'intégrale (2.9).

Si  $F(s) = L\{f(t)\}$ , alors  $L\{-tf(t)\} = \frac{d}{ds}\{F(s)\}$ . Par récurrence, on trouve :

$$L\{(-t)^n f(t)\} = \frac{d^n}{ds^n}\{F(s)\}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

A titre d'exemple, la transformée de Laplace de la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres vérifie la relation suivante :

$$L\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha), s\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + \lambda}, \quad (\Re(s) > |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}}, t \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}). \quad (2.12)$$

Le produit de convolution de deux fonctions  $f(t)$  et  $g(t)$  est donné par :

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau. \quad (2.13)$$

La transformée de Laplace du produit de convolution des fonctions  $f$  et  $g$  peut s'écrire sous la forme :

$$L\{f(t) * g(t), s\} = F(s)G(s). \quad (2.14)$$

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre entier  $n$  de  $f(t)$  est donnée par :

$$L\{f^{(n)}(t), s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0). \quad (2.15)$$

**Théorème 2.1.1.** [43] (Théorème de la valeur initiale) Si les limites indiquées existent, alors :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s). \quad (2.16)$$

**Preuve 2.1.1.** Nous avons :

$$L\{\dot{f}(t)\} = \int_0^{+\infty} \exp(-st)\dot{f}(t)dt. \quad (2.17)$$

Faisons l'intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} L\{\dot{f}(t)\} &= [\exp(-st)f(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -s \exp(-st)f(t)dt \\ &= -f(0) + sF(s). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Si  $\dot{f}(t)$  est continu et d'ordre exponentiel, alors :

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \exp(-st)\dot{f}(t)dt = 0. \quad (2.19)$$

Par conséquent :

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s) = f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t). \quad (2.20)$$

**Théorème 2.1.2.** [43] (Théorème de la valeur finale)

Si les limites indiquées existent, alors :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s). \quad (2.21)$$

**Preuve 2.1.2.** D'après la preuve du théorème précédent, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} (-f(0) + sF(s)) &= \lim_{s \rightarrow 0} L\{f(t)\} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \exp(-st) \dot{f}(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \dot{f}(t) dt \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) - f(0). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Par conséquent :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ .

**Remarque 2.1.** Dans de nombreuses applications de ces théorèmes,  $L\{f(t)\}$  sera connu, mais  $f(t)$  ne le sera pas. On peut aussi montrer que le théorème de la valeur finale ne peut pas être appliqué, s'il existe une valeur de  $s$  avec une partie réelle non négative pour laquelle  $sF(s)$  n'est pas bornée. A titre d'exemple :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s^2 + 1} = 0, \quad (2.23)$$

le théorème ne peut pas être appliqué à  $F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$ , puisque cette fonction n'est pas bornée aux valeurs  $s = \pm i$ . Dans ce cas  $f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \sin(t)$ , et  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sin(t)$  n'existe pas.

### 2.1.3 Définitions des dérivées fractionnaires

Dans cette thèse, les symboles de la dérivée fractionnaire ont été normalisés comme suit [44] :

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{(dt)^\alpha}, & \alpha > 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ \int_a^t d\tau^{(-\alpha)}, & \alpha < 0, \end{cases} \quad (2.24)$$

où  ${}_a D_t^\alpha$  désigne l'opérateur de dérivation d'ordre  $\alpha$ ,  $a$  et  $t$  sont respectivement des limites inférieure et supérieure de cet opérateur.

Il existe plusieurs définitions pour les intégrales et les dérivées fractionnaires. Malheureusement toutes les définitions considérées, en générale ne sont pas toutes équivalentes. Nous rappelons dans cette thèse celles qui sont les plus célèbres.

## Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov

La définition au sens de Grünwald-Letnikov est basée sur une approche aux différences finies fractionnaires, où toute la différence par rapport au cas entier se situe dans l'extension de la factorielle, à travers la fonction Gamma d'Euler.

La dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov d'une fonction  $f$  est définie par :

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\left[ \frac{t-\alpha}{h} \right]} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh), \quad (2.25)$$

où  $\left[ \frac{t-\alpha}{h} \right]$  désigne la partie entière de  $\frac{t-\alpha}{h}$  et  $\binom{\alpha}{k}$  sont des coefficients binomiaux.

## Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

La définition de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est basée sur l'intégrale  $k$ -ième d'une fonction, qui peut naturellement s'étendre au réel  $\alpha$ , avec  $n - 1 < \alpha \leq n$ .

Une intégrale  $k$ -ième ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) de  $f$  est donnée par :

$${}_a D_t^{-k} f(t) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_a^t (t - \tau)^{k-1} f(\tau) d\tau, \quad (2.26)$$

s'étend naturellement aux réels  $\alpha > 0$ , comme suit :

$$\begin{aligned} {}_a J_t^\alpha f(t) &= {}_a D_t^{-\alpha} f(t) \\ &= {}_a D_t^{-\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.27)$$

A partir de l'expression (2.27), il vient :

$${}_a D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{t^{p-1}}{\Gamma(p)} * f(t), \quad (2.28)$$

où  $*$  désigne le produit de convolution.

Soit maintenant  $n - 1 < \alpha \leq n$ , alors la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha > 0$  d'une fonction intégrable  $f$  est donnée par :

$$\begin{aligned} {}_a D_t^\alpha f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} ({}_a D_t^{-(n-\alpha)} f(t)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t - \tau)^{(n-\alpha-1)} f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.29)$$

## Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

La formulation suivante des dérivées fractionnaires, dite dérivée au sens de Caputo est souvent utilisée, puisque sa transformée de Laplace conduit à des conditions initiales, qui prennent la même forme que pour les systèmes entiers, avec des interprétations physiques claires.

La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction  $f$  est définie par :

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha f(t) &= {}_a D_t^{-(n-\alpha)} \left( \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right), \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \end{aligned} \quad (2.30)$$

où  $n-1 < \alpha \leq n$ .

La dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville sont reliées par la formule :

$${}^C D_t^\alpha f(t) = {}^R D_t^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha}, \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad (2.31)$$

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est :

$$L\{{}^C D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad n-1 < \alpha \leq n. \quad (2.32)$$

Supposons que toutes les conditions initiales sont nulles, l'équation (2.32) peut être réduite à :

$$L\{{}^C D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s). \quad (2.33)$$

Puisque l'opérateur de la dérivation au sens de Caputo est plus cohérent que celui de RL, c'est cet opérateur qui sera employé tout au long de cette thèse. En outre, la méthode d'Adams-Bashforth-Moulton [45] qui sera défini ultérieurement, sera utilisée pour toutes les simulations numériques des systèmes fractionnaires.

Les propriétés suivantes de la dérivée d'ordre fractionnaire de Caputo seront également considérées par la suite :

**Propriété 1 :** La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle.

**Propriété 2 :** La dérivée fractionnaire de la fonction  $f(t) = (t-a)^\beta$  est donnée par :

$${}^C D_t^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}, \quad \text{pour tout } \beta > \alpha. \quad (2.34)$$

**Propriété 3 :** Pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $n-1 < \alpha \leq n$ , on a :

$${}^C D_t^\alpha ({}^C D_t^m f(t)) = {}^C D_t^{\alpha+m} f(t). \quad (2.35)$$



**Propriété 4 :** Pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $n - 1 \leq \alpha < n$ , on a :

$${}_a D_t^m ({}_a^C D_t^\alpha f(t)) = {}_a^C D_t^{m+\alpha} f(t) + \sum_{k=n}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k - (\alpha + m) + 1)} (t - a)^{k - (\alpha + m)}. \quad (2.36)$$

En particulier, si  $f^{(k)}(a) = 0$  pour  $k = n, n + 1, \dots, n + m - 1$ , il vient :

$${}_a D_t^m ({}_a^C D_t^\alpha f(t)) = {}_a^C D_t^\alpha ({}_a D_t^m f(t)) = {}_a^C D_t^{m+\alpha} f(t). \quad (2.37)$$

**Preuve 2.1.3. Propriété 1** Soit  $f(t) = c$ . Puisque  $f^{(n)} = 0$ , on a alors :

$${}_a^C D_t^\alpha c = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau = 0 \quad (2.38)$$

**Propriété 2** On rappelle que la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville sont reliées par la formule :

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^R D_t^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (t - a)^{k - \alpha}. \quad (2.39)$$

Si  $\alpha > \beta$ , on a :  $f^{(k)}(a) = 0$ , pour tout  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ , ce qui implique :

$${}_a^C D_t^\alpha (t - a)^\beta = {}_a^R D_t^\alpha (t - a)^\beta \quad (2.40)$$

Calculons maintenant  ${}_a^R D_t^\alpha t^\beta$ .

Soit  $n - 1 < \alpha \leq n$ , alors, pour tout  $\beta > \alpha$ , on a :

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-(n-\alpha)} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{(n-\alpha-1)} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{(n-\alpha-1)} \tau^\beta d\tau. \end{aligned} \quad (2.41)$$

En utilisant le changement de variables :  $\tau = xt$ , l'équation (2.41) devient alors :

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-(n-\alpha)} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^1 (1 - x)^{(n-\alpha-1)} t^{(n-\alpha-1)} x^\beta t^{\beta+1} dx \\ &= \frac{t^{(n-\alpha+\beta)}}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^1 (1 - x)^{(n-\alpha-1)} x^\beta dx \\ &= \frac{t^{(n-\alpha+\beta)}}{\Gamma(n - \alpha)} \beta(n - \alpha, \beta + 1) \\ &= t^{(n-\alpha+\beta)} \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha + \beta + 1)}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

En appliquant maintenant la relation (2.29), on trouve :

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^\alpha f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} ({}_a D_t^{-(n-\alpha)} f(t)) \\ &= {}_a^R D_t^\alpha (t - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

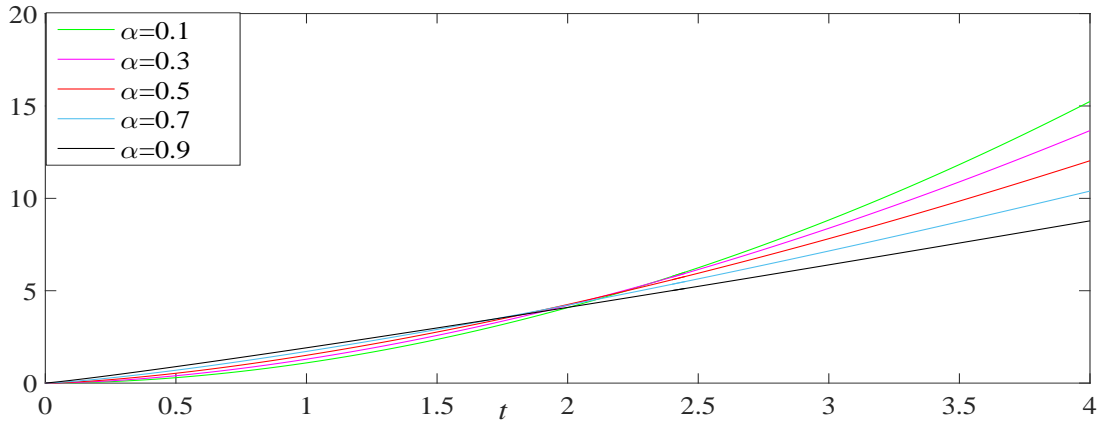


FIGURE 2.4 – Courbes de la dérivée fractionnaire de la fonction  $t^2$ , pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

En tenant compte (2.43), (2.40) devient :

$${}_a^C D_t^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}. \quad (2.44)$$

En particulier, si  $\beta = 2$  et  $a = 0$ , la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de  $f(t) = t^2$  est donnée par :

$${}_0^C D_t^\alpha t^2 = \frac{2}{\Gamma(3-\alpha)} t^{2-\alpha}. \quad (2.45)$$

La Figure 2.4 illustre les courbes de la dérivée fractionnaire de la fonction  $t^2$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

**Propriété 3** Par définition, on a :

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^\alpha ({}_a D_t^m f(t)) &= {}_a D_t^{-(n-\alpha)} {}_a D_t^n ({}_a D_t^m f(t)) \\ &= {}_a D_t^{-(n-\alpha)} {}_a D_t^{n+m} f(t) \\ &= {}_a^C D_t^{m+\alpha} f(t). \end{aligned} \quad (2.46)$$

**Propriété 4** Moyennant de la relation (2.31), on trouve :

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^m ({}_a^C D_t^\alpha f(t)) &= {}_a D_t^m [{}_a^R D_t^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha}] \\
&= {}_a^R D_t^{m+\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} {}_a D_t^m (t-a)^{k-\alpha} \\
&= {}_a^R D_t^{m+\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(\alpha+m)+1)} (t-a)^{k-(\alpha+m)} \\
&= {}_a^R D_t^{m+\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(\alpha+m)+1)} (t-a)^{k-(\alpha+m)} \\
&\quad - \sum_{k=n}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(\alpha+m)+1)} (t-a)^{k-(\alpha+m)} \\
&\quad + \sum_{k=n}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(\alpha+m)+1)} (t-a)^{k-(\alpha+m)} \\
&= {}_a^R D_t^{m+\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(\alpha+m)+1)} (t-a)^{k-(\alpha+m)} \\
&\quad + \sum_{k=n}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(\alpha+m)+1)} (t-a)^{k-(\alpha+m)} \\
&= {}_a^C D_t^{m+\alpha} f(t) + \sum_{k=n}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(\alpha+m)+1)} (t-a)^{k-(\alpha+m)}. \tag{2.47}
\end{aligned}$$

En particulier, si  $f^{(k)}(a) = 0$ , pour tout  $k = n, n+1, \dots, n+m-1$ , la relation suivante est bien vérifiée :

$${}_a D_t^m ({}_a^C D_t^\alpha f(t)) = {}_a^C D_t^{m+\alpha} f(t). \tag{2.48}$$

### Autres propriétés fondamentales des dérivées fractionnaires

Les définitions des dérivées fractionnaires sont basées sur celles des intégrations d'ordre fractionnaire, une dérivation d'ordre fractionnaire prend un caractère global contrairement à la dérivation entière.

Certaines propriétés d'intégration et de différentiation d'ordre fractionnaire sont :

- 1- Les opérateurs d'intégration d'ordre fractionnaire satisfaisaient la propriété de semi-groupe. Par contre, les opérateurs de dérivation d'ordre fractionnaire (réel ou complexe), ne vérifient cette propriété que sous certaines conditions.
- 2- L'intégration et la différentiation d'ordre fractionnaire sont des opérations linéaires.

## 2.2 Équations différentielles fractionnaires

Dans cette section, on s'intéresse seulement aux éléments nécessaires de la théorie des équations différentielles fractionnaires au sens de Caputo. Nous rappelons le résultat d'existence et d'unicité de la solution d'un problème à valeurs initiales pour une équation différentielle fractionnaire au sens de Caputo, puis la résolution explicite des équations différentielles fractionnaires linéaires, et nous terminons cette partie par la présentation d'une méthode numérique nécessaire à la résolution des équations fractionnaires.

### 2.2.1 Équations différentielles fractionnaires au sens de Caputo "EDFSC"

Considérons le problème aux valeurs initiales suivantes :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha y(t) = f(t, y(t)) \\ {}^C D^j y(0) = y_0^{(j)}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \end{cases} \quad (2.49)$$

où  ${}^C D_t^\alpha$  désigne l'opérateur de dérivation au sens de Caputo, et  $n-1 < \alpha \leq n$ .

Le théorème suivant nous permet d'affirmer l'existence et l'unicité de la solution du problème aux valeurs initiales (2.49).

#### **Théorème 2.2.1.** [46]

Soient  $K > 0$ ,  $h^* > 0$  et  $y_0^{(i)} \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , et soit  $f : G = [0, h^*] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction continue, satisfaisant la condition de Lipschitz par rapport à  $y$  :

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| < L|y_1 - y_2|, \quad (2.50)$$

et soit :

$$h = \min\{h^*, (K\Gamma(\alpha + 1)/M)^{1/\alpha}\}, \quad (2.51)$$

où

$$M = \sup_{t, z \in G} |f(t, z)|, \quad (2.52)$$

alors, le problème (2.49), admet une seule solution  $y \in C[0, h]$ .

#### **Théorème 2.2.2.** [46]

Sous les hypothèses du théorème 2.2.1, le problème aux conditions initiales (2.49) est équivalent à l'équation d'intégrale de Volterra :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau. \quad (2.53)$$

**Preuve 2.2.1.**

Supposons que  $y$  est une solution de l'équation (2.53). Cette dernière peut se réécrire sous la forme :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + {}_0D_t^{-\alpha} f(t, y(t)). \quad (2.54)$$

En appliquant l'opérateur de différentiation  ${}_0^C D_t^\alpha$  sur les deux cotés de cette relation, on trouve :

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha y(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} {}_0^C D_t^\alpha t^k}{k!} + {}_0^C D_t^\alpha {}_0D_t^{-\alpha} f(t, y(t)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} {}_0^C D_t^\alpha t^k}{k!} + f(t, y(t)). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Puisque  $k < \alpha$ , donc  ${}_0^C D_t^\alpha t^k = 0$

Par conséquent  $y$  est une solution de l'équation (2.49).

Il reste à montrer que :  ${}_0^C D_t^j y(0) = y_0^{(j)}$ .

En effet, en appliquant maintenant l'opérateur  ${}_0^C D_t^j$ ,  $0 \leq j \leq n-1$  sur l'équation de Volterra (2.53), on obtient :

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^j y(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} {}_0^C D_t^j t^k}{k!} + {}_0^C D_t^j {}_0D_t^{-j} {}_0D_t^{-(\alpha-j)} f(t, y(t)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} {}_0^C D_t^j t^k}{k!} + {}_0D_t^{-(\alpha-j)} f(t, y(t)). \end{aligned} \quad (2.56)$$

On rappelle que :

$${}_0^C D_t^j t^k = \begin{cases} 0, & \text{si } j > k \\ \Gamma(k+1), & \text{si } j = k \\ \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-j+1)} t^{k-j}, & \text{si } j < k. \end{cases} \quad (2.57)$$

Ce qui implique :

$${}_0^C D_t^j t^k \Big|_{t=0} = \begin{cases} 0, & \text{si } j > k \\ \Gamma(k+1), & \text{si } j = k \\ 0, & \text{si } j < k. \end{cases} \quad (2.58)$$

D'autre part  $\alpha - j \geq 1$ , ce qui implique que l'intégrale  ${}_0D_t^{-(\alpha-j)} f(t, y(t)) \Big|_{t=0}$  est nulle. Par suite  ${}_0^C D_t^j y(0) = y_0^{(j)}$ .

Supposons maintenant que  $y$  est une solution de l'équation (2.49) et montrons que  $y$  est la

solution de (2.53).

Posons  $z(t) = f(t, y(t))$ , on a alors :

$$\begin{aligned}
z(t) &= f(t, y(t)) = {}^C_0D_t^\alpha y(t) = {}^R_0D_t^\alpha y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \\
&= {}^R_0D_t^\alpha y(t) - {}^R_0D_t^\alpha \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^k}{k!} \\
&= {}^R_0D_t^\alpha (y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^k}{k!}) \\
&= {}^R_0D_t^\alpha (y - T_{n-1}[y, 0])(t) \\
&= {}_0D_t^n {}_0D_t^{-(n-\alpha)} (y - T_{n-1}[y, 0])(t), \tag{2.59}
\end{aligned}$$

où  $T_{n-1}[y, 0](t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)}$ , est le polynôme de Taylor de degré  $n-1$ .

En appliquant l'opérateur  ${}_0D_t^{-n}$  sur les deux membres de cette dernière équation, il vient :

$${}_0D_t^{-n} z(t) = {}_0D_t^{-(n-\alpha)} (y - T_{n-1}[y, 0])(t) + q(t), \tag{2.60}$$

où  $q$  est un polynôme de degré  $\leq n-1$ .

Puisque la fonction  $z$  est continue, la fonction  ${}_0D_t^{-n} z$  a un zéro d'ordre au moins  $n$  à l'origine.

En outre, la différence  $y - T_{n-1}[y, 0]$  ayant la même propriété par construction.

Et donc la fonction  ${}_0D_t^{-(n-\alpha)} (y - T_{n-1}[y, 0])$  doit également avoir un zéro d'ordre  $n$ .

Par suite le polynôme  $q$  ayant la même propriété, mais comme il est de degré  $\leq n-1$ , il en résulte que  $q = 0$ .

Par conséquent :

$${}_0D_t^{-n} z(t) = {}_0D_t^{-(n-\alpha)} (y - T_{n-1}[y, 0])(t). \tag{2.61}$$

Ce qui entraîne :

$$\begin{aligned}
y(t) &= T_{n-1}[y, 0](t) + {}_0D_t^{-\alpha} z(t) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau. \tag{2.62}
\end{aligned}$$

## 2.2.2 Résolution analytique des EDFSC linéaires

Dans cette partie, on s'intéresse à résoudre explicitement une équation différentielle fractionnaire linéaire au sens Caputo.

## Cas d'une équation unidimensionnelle

### Théorème 2.2.3. [47]

Soient  $\alpha > 0$  et  $n = \lceil \alpha \rceil + 1$ . La solution générale du problème :

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha y(t) = \lambda y(t) + q(t), & \lambda \in \mathbb{R}, \text{ et } q \text{ une fonction continue.} \\ y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}, & k = 0, 1, \dots, n-1, \end{cases} \quad (2.63)$$

est donnée par la formule suivante :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} u_k(t) + \tilde{y}(t), \quad (2.64)$$

où :

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} {}_0 D_t^{-\alpha} q(t), & \text{si } \lambda = 0 \\ \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t-\tau) u_0'(\tau) d\tau, & \text{si } \lambda \neq 0, \end{cases} \quad (2.65)$$

et :

$$u_k(t) = D^{-k} e_\alpha(t), \text{ avec } e_\alpha(t) = E_\alpha(\lambda t^\alpha), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.66)$$

**Preuve 2.2.2.** • Si  $\lambda = 0$ , le problème (2.63) devient :

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha y(t) = q(t) \\ y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}, & k = 0, 1, \dots, n-1. \end{cases}$$

Puisque  $e_\alpha(t) = E_\alpha(0) = 1$ , on a alors  $u_k(t) = \frac{t^k}{k!}$ , pour tout  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

En appliquant la relation entre la dérivée au sens de Riemann-Liouville et celle de Caputo, on trouve :

$${}_0^C D_t^\alpha y(t) = {}_0^R D_t^\alpha y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha} = q(t). \quad (2.67)$$

Ce qui implique :

$${}_0^R D_t^\alpha y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha} + q(t). \quad (2.68)$$

En appliquant l'intégrale de Riemann-Liouville sur les deux cotés de l'équation (2.68), on trouve :

$$\begin{aligned} {}_0 D_t^{-\alpha} {}_0^R D_t^\alpha y(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0) {}_0 D_t^{-\alpha} t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + {}_0 D_t^{-\alpha} q(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0) t^k}{k!} + {}_0 D_t^{-\alpha} q(t). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Cette dernière est équivalente à :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y^{(k)}(0)u_k(t) + \tilde{y}(t), \quad \text{où} \quad \tilde{y}(t) = {}_0D_t^{-\alpha}q(t). \quad (2.70)$$

• Supposons maintenant que  $\lambda \neq 0$ . La preuve se fait en deux étapes (a) et (b).

a) La fonction  $u_k$  satisfait l'équation différentielle homogène, c'est à dire :

${}_0^C D_t^\alpha u_k = \lambda u_k, \forall k = 1, \dots, n-1$  et vérifie les conditions initiales  $u_k^{(j)}(0) = \delta_{kj}$  (delta de Kronecker) pour  $j, k = 0, \dots, n-1$ .

b) La fonction  $\tilde{y}$  est une solution de l'équation différentielle non homogène, avec les conditions initiales homogènes.

On commence par (a). Un calcul simple montre que :

$$e_\alpha(t) = E_\alpha(\lambda t^\alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j t^{\alpha j}}{\Gamma(\alpha j + 1)}. \quad (2.71)$$

Par suite :

$$u_k = D^{-k}e_\alpha(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j t^{\alpha j+k}}{\Gamma(\alpha j + 1 + k)}. \quad (2.72)$$

Montrons maintenant que  $u_k$  est une solution de l'équation différentielle homogène. En effet :

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha u_k(t) &= {}_0^C D_t^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j t^{\alpha j+k}}{\Gamma(\alpha j + 1 + k)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{\Gamma(\alpha j + 1 + k)} {}_0^C D_t^\alpha t^{\alpha j+k} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{\Gamma(\alpha(j-1) + 1 + k)} t^{\alpha(j-1)+k} \\ &= \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{\Gamma(\alpha j + 1 + k)} t^{\alpha j+k} \\ &= \lambda u_k(t). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Ce qui assure que  $u_k$  est une solution de l'équation homogène.

De plus, si  $j = k$ , on a :

$$u_k^{(k)}(0) = D^k D^{-k} e_\alpha(0) = e_\alpha(0) = 1. \quad (2.74)$$

Pour  $j < k$ , on a :

$$u_k^{(j)}(0) = D^j D^{-k} e_\alpha(0) = D^{-(k-j)} e_\alpha(0) = 0. \quad (2.75)$$

Et pour  $j > k$ , on a :

$$u_k^{(j)}(0) = D^j D^{-k} e_\alpha(0) = D^{(j-k)} e_\alpha(0) = 0. \quad (2.76)$$



D'autre part :

$$\begin{aligned}
\tilde{y}(t) &= \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t-\tau) u'_0(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t-\tau) e'_\alpha(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t) e'_\alpha(t-\tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{2.77}$$

On rappelle que cette intégrale existe toujours, quelque soit  $t > 0$ , car  $q$  est une fonction continue,  $e'_\alpha$  intégrable, et  $\tilde{y}(0) = 0$ .

D'après une propriété de la différentiation des intégrales dépendant d'un paramètre, on a :

$$D\tilde{y}(t) = \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t) e''_\alpha(t-\tau) d\tau + \frac{1}{\lambda} q(t) \underbrace{e'_\alpha(0)}_{=0}. \tag{2.78}$$

En utilisant la continuité de  $q$  et la singularité faible de  $e''_\alpha$ , on peut vérifier facilement que  $D^{(1)}\tilde{y}(0) = 0$ .

De la même manière, on trouve également :

$$D^k \tilde{y}(t) = \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(\tau) e_\alpha^{(k+1)}(t-\tau) d\tau, \text{ pour tout } k = 0, \dots, n-1. \tag{2.79}$$

Donc,  $D^k \tilde{y}(0) = 0$ .

Alors  $\tilde{y}$  satisfait toutes les conditions initiales homogènes.

Montrons maintenant que  $\tilde{y}$  est une solution de l'équation différentielle non homogène.

Puisque :

$$e'_\alpha(u) = \frac{d}{du} e_\alpha(u) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j u^{\alpha j-1}}{\Gamma(\alpha j)}. \tag{2.80}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\tilde{y}(t) &= \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(\tau) e'_\alpha(t-\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(\tau) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j (t-\tau)^{\alpha j-1}}{\Gamma(\alpha j)} d\tau \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} \frac{1}{\Gamma(\alpha j)} \int_0^t q(\tau) (t-\tau)^{\alpha j-1} d\tau \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{(j-1)} {}_0D_t^{-\alpha j} q(t).
\end{aligned} \tag{2.81}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
{}_0^C D_t^\alpha \tilde{y}(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} {}_0^C D_t^\alpha {}_0 D_t^{-\alpha j} q(t) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} {}_0 D_t^{-\alpha(j-1)} q(t) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j {}_0 D_t^{-\alpha j} q(t) \\
&= q(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j {}_0 D_t^{-\alpha j} q(t) \\
&= q(t) + \lambda \tilde{y}(t).
\end{aligned} \tag{2.82}$$

### Exemple 2.2.1.

A titre d'exemple, on prend :

$$\begin{cases}
{}_0^C D_t^\alpha y(t) = y(t) - 2, \alpha \in (0, 1), \\
y(0) = 0, y'(0) = 0
\end{cases} \tag{2.83}$$

Puisque :  $\lambda = 1$  et  $q(t) = -2$ . On a alors :

$$\begin{aligned}
\tilde{y}(t) &= \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t-\tau) u'_0(\tau) d\tau \\
&= \int_0^t -2 u'_0(\tau) d\tau \\
&= -2 [E_\alpha(\tau^\alpha)]_0^t \\
&= 2 - 2E_\alpha(t^\alpha).
\end{aligned} \tag{2.84}$$

D'autre part :

$$\sum_{k=0}^1 y_0^{(k)} u_k(t) = y(0) E_\alpha(t^\alpha) + y'(0) \int_0^t E_\alpha(\tau^\alpha) d\tau = 0. \tag{2.86}$$

Ce qui implique que la solution générale du problème (2.83), est donnée par :

$$y(t) = 2 - 2E_\alpha(t^\alpha). \tag{2.87}$$

### Cas d'une équation multidimensionnelle

Considérons maintenant l'équation différentielle fractionnaire suivante [47] :

$${}_0^C D_t^\alpha y(t) = Ay(t) + q(t), \tag{2.88}$$

où  $0 < \alpha < 1$ ,  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^n$  et  $q : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

On commence par résoudre le problème homogène :

$${}_0^C D_t^\alpha y(t) = Ay(t). \tag{2.89}$$

Nous distinguons deux cas :

• **Cas 1** : Supposons que la matrice  $A$  ayant des valeurs propres simples.

Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ses valeurs, et  $v_1, v_2, \dots, v_n$  les vecteurs propres associés. Dans ce cas, la solution de (2.89) est donnée par :

$$y(t) = \sum_{k=1}^n c_k v_k E_\alpha(\lambda_k t^\alpha), \quad (2.90)$$

où  $c_k \in \mathbb{R}, \forall k = 1, \dots, n$ .

• **Cas 2** : Supposons maintenant que  $A$  ayant des valeurs propres multiples. Soient  $\lambda$  sa valeur propre, de degré de multiplicité  $k$ . Nous avons donc :

\* Si le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants associés à  $\lambda$  est égale à  $k$ , dans ce cas, la solution de (2.89) est de la forme (2.90).

\* Si le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants associés à  $\lambda$  est égale à  $m$  (où  $m < k$ ), dans ce cas, les autres solutions ( $k - m$ ), qui sont linéairement indépendantes sont données par :

$$y^{(i)}(t) = \sum_{j=m}^i u^{(j)} t^{(i-j)\alpha} E_\alpha^{(i-j)}(\lambda t^\alpha), \quad \text{pour tout } i = m + 1, \dots, k, \quad (2.91)$$

où les vecteurs propres  $u^{(j)}$  sont les solutions du système linéaire non homogène :

$$(A - \lambda I)u^{(j+1)} = u^{(j)}. \quad (2.92)$$

**Remarque 2.2.** Soient  $(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T$  la solution du problème homogène (2.89), alors  $(Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t))^T$ , la solution du problème non homogène (2.88), avec la condition initiale  $y(0) = y_0$  est donnée par :

$$Y_i(t) = y_i(t) + \int_0^t y_i(t - \tau) q_i(\tau) d\tau \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.93)$$

**Exemple 2.2.2. (Cas1)**

Considérons le système fractionnaire suivant :

$${}_0^C D_t^\alpha y(t) = Ay(t), \quad y(t) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.94)$$

Les valeurs propres de  $A$  sont données par

$$\lambda_1 = 1 - \sqrt{2}, \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{2}, \quad (2.95)$$

et les vecteurs propres associées sont respectivement donnés par :

$$v_1 = (1 - \sqrt{2}, 1)^T, \quad v_2 = (1 + \sqrt{2}, 1)^T. \quad (2.96)$$

Par suite, la solution générale du système (2.94) est donnée par :

$$y(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} E_\alpha((1 - \sqrt{2})t^\alpha) + c_2 \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} E_\alpha((1 + \sqrt{2})t^\alpha). \quad (2.97)$$

Choisissons maintenant  $y(0) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ , on a alors  $c_1 = 1$  et  $c_2 = -1$ .

Ce qui implique :

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} E_\alpha((1 - \sqrt{2})t^\alpha) - \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} E_\alpha((1 + \sqrt{2})t^\alpha). \quad (2.98)$$

### Exemple 2.2.3. (Cas2)

Considérons maintenant le système fractionnaire suivant :

$${}_0^C D_t^\alpha y(t) = Ay(t), \quad y(t) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & -2 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad (2.99)$$

Les valeurs propres de  $A$  sont calculées comme :

$$\lambda_1 = 8 \text{ (de multiplicité) } 2, \quad \lambda_2 = 4, \quad (2.100)$$

et les vecteurs propres associés sont respectivement donnés par :

$$v_1 = (1, 0, 1)^T, \quad v_2 = (0, 1, 1)^T. \quad (2.101)$$

Puisque le nombre de vecteurs propres associé à  $\lambda_1 = 8$  est égale à  $(m = 1)$  qui est strictement inférieur à  $k = 2$  ( $k$  représente le degré de multiplicité), alors les autres  $(k - m)$  solutions du système, qui sont linéairement indépendants, sont données par :

$$\begin{aligned} y^{(2)}(t) &= \sum_{j=1}^2 u^{(j)} t^{(2-j)\alpha} E_\alpha^{(2-j)}(\lambda_1 t^\alpha) \\ &= u^{(1)} t^\alpha \dot{E}_\alpha(8t^\alpha) + u^{(2)} E_\alpha(8t^\alpha), \end{aligned} \quad (2.102)$$

où :  $u^{(1)} = (1, 0, 1)^T$  satisfaisant la condition suivante :

$$(A - \lambda_1 I)u^{(2)} = u^{(1)}. \quad (2.103)$$

Soit  $u^{(2)} = (a, b, c)^T$ . On a alors :

$$\begin{cases} 2a + 2b - 2c = 1, \\ 2a - 2b - 2c = 0, \\ 4a - 4c = 1. \end{cases} \quad (2.104)$$

Ce qui donne :  $(a, b, c) = (1/4, 1/4, 0)$ .

Par suite, la solution générale du système (2.99) est donnée par :

$$\begin{aligned} y(t) = & c_1(1, 0, 1)^T E_\alpha(8t^\alpha) + c_2(0, 1, 1)^T E_\alpha(4t^\alpha) \\ & + c_3((1, 0, 1)^T t^\alpha \dot{E}_\alpha(8t^\alpha) + (1/4, 1/4, 0)^T E_\alpha(8t^\alpha)). \end{aligned} \quad (2.105)$$

Sous la condition initiale  $y(0) = (0, 0, 1)$ , les constantes  $c_1, c_2$  et  $c_3$  sont données comme :

$$c_1 = 1/2, c_2 = 1/2, \text{ et } c_3 = -2. \quad (2.106)$$

Enfin, la solution du système (2.99) est donnée par :

$$\begin{aligned} y(t) = & (1/2, 0, 1/2)^T E_\alpha(8t^\alpha) + (0, 1/2, 1/2)^T E_\alpha(4t^\alpha) \\ & + ((-2, 0, 2)^T t^\alpha \dot{E}_\alpha(8t^\alpha) - (1/2, 1/2, 0)^T E_\alpha(8t^\alpha)). \end{aligned} \quad (2.107)$$

### 2.2.3 Résolution numérique des équations fractionnaires

En général, pour résoudre des équations différentielles non linéaire, nous utilisons des méthodes numériques, de fait que la résolution analytique dans ce cas est généralement impossible. Il existe plusieurs méthodes pour la résolution numérique des équations différentielles d'ordre fractionnaire, à savoir : la méthode des différences fractionnaires de Grünwald-Letnikov, la méthode de décomposition d'Adomian, la méthode d'itération variationnelle et la méthode d'Adams-Basheforth-Moulton.

Dans cette partie, on s'intéresse à la méthode numérique d'Adams-Bashforth-Moulton, pour résoudre une équation différentielle fractionnaire de type Caputo. Cette méthode est basée sur une formulation fractionnaire de la méthode classique d'Adams-Bashforth-Moulton. C'est la méthode numérique qu'on va utiliser le long de ce travail pour la simulation des systèmes dynamiques fractionnaires.

#### Méthode d'Adams-Basheforth-Moulton généralisée :

La méthode d'Adams-Basheforth-Moulton est une méthode numérique introduite par Diethelm et Freed [47], basée sur l'équation de Volterra (2.53).

On suppose que  $y_k$  est l'approximation de  $y(t_j)$ , pour tout  $j = 1, \dots, k$ , dans l'intervalle  $[0, T]$ .

Pour obtenir  $y_{k+1}$ , on remplace l'intégrale dans l'équation de Volterra (2.53), en utilisant la formule de produit de quadrature des trapèzes où les nœuds  $t_j$  pour  $j = 0, \dots, k + 1$ , s'en prennent respectivement à la fonction  $(t_{k+1} - \cdot)^{\alpha-1}$ .

On obtient alors l'approximation :

$$\int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - \tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau \approx \sum_{j=0}^{k+1} a_{j,k+1} g(t_j), \quad (2.108)$$

où

$$a_{j,k+1} = \int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - \tau)^{\alpha-1} \phi_{j,k+1} d\tau, \quad (2.109)$$

et

$$\phi_{j,k+1} = \begin{cases} \frac{\tau - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}, & \text{si } t_{j-1} < \tau < t_j \\ \frac{t_{j+1} - \tau}{t_{j+1} - t_j}, & \text{si } t_j < \tau < t_{j+1} \\ 0, & \text{si non.} \end{cases} \quad (2.110)$$

Puisque  $t_j = jh$ , pour tout  $j = 0, \dots, k+1$ , on a alors :

$$a_{j,k+1} = \begin{cases} \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} (k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha), & \text{si } j = 0 \\ \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} ((k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1}), & \text{si } 1 \leq j \leq k \\ \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)}, & \text{si } j = k+1 \end{cases} \quad (2.111)$$

On trouve alors l'équation implicite de la méthode à un pas d'Adams-Moulton :

$$y_{k+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t_{k+1}^j}{j!} y_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( \sum_{j=0}^k a_{j,k+1} f(t_j, y_j) + a_{k+1,k+1} f(t_{k+1}, y_{k+1}) \right). \quad (2.112)$$

Le problème de cette dernière formule, est que l'inconnue  $y_{k+1}$  apparait dans les deux membres de l'équation, et en raison de la non linéarité de  $f$ , on ne peut pas la résoudre pour  $y_{k+1}$  d'une manière directe. Pour cela, en insérant une valeur préliminaire approchée de  $y_{k+1}$  dans le membre droite de cette dernière égalité.

L'approximation préliminaire  $y_{k+1}^p$ , appelée le terme prédiction, est obtenue d'une manière similaire, juste, en remplaçant la formule de trapèze par la formule du rectangle :

$$y_{k+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t_{k+1}^j}{j!} y_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( \sum_{j=0}^k a_{j,k+1} f(t_j, y_j) + a_{k+1,k+1} f(t_{k+1}, y_{k+1}^p) \right). \quad (2.113)$$

Ainsi, pour déterminer  $y_{k+1}^p$ , on utilise une fois encore la méthode d'Adams-Bashforth à un pas (de la même manière pour la formule de correction), mais on remplace l'intégrale par la règle de produit des rectangles :

$$\int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - \tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau \approx \sum_{j=0}^k b_{j,k+1} g(t_j), \quad (2.114)$$

où :

$$b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} ((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha). \quad (2.115)$$

On a alors :

$$y_{k+1}^p = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t_{k+1}^j}{j!} y_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^k b_{j,k+1} f(t_j, y_j). \quad (2.116)$$

Enfin, les expressions (2.113) et (2.116), avec  $a_{j,k+1}$  et  $b_{j,k+1}$ , qui sont particulièrement calculées à partir de (2.109) et (2.115), respectivement, forment la méthode d'Adams-Bashforth- Moulton fractionnaire.

Cette méthode est dite de type PECE (Predict, Evaluate, Correct, Evaluate) car elle commence par calculer le prédicteur en utilisant la relation (2.116), puis elle évalue  $f(t_{k+1}, y_{k+1}^p)$ . L'utilisation de cette dernière évaluation, nous permet de calculer le correcteur via la relation (2.113), et finalement évaluer  $f(t_{k+1}, y_{k+1})$ .

## 2.3 Systèmes chaotiques fractionnaires

Le chaos ne peut pas se réaliser dans les systèmes dynamiques continus autonomes d'ordre inférieur à trois [?]. Le modèle d'un système chaotique peut être réorganisé en trois équations différentielles contiennent des dérivées fractionnaires.

Considérons maintenant un système non linéaire à dérivée fractionnaire comme :

$$D^\alpha x = f(x), \quad (2.117)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$  ( $0 < \alpha_i < 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ) et  $D^\alpha$  est l'opérateur de dérivation au sens de Caputo. Les points d'équilibre du système (2.117) sont calculés par la résolutions de l'équation suivante :

$$D^\alpha x = 0. \quad (2.118)$$

**Remarque 2.3.** Si  $x = 0$  est un point d'équilibre du système (2.117) et lorsqu'il existe  $t_1 \geq 0$  satisfaisant  $x(t_1) = 0$ , alors  $x(t) = 0$ , pour tout  $t \geq t_1$ .

**Remarque 2.4.** Dans l'équation (2.117), qui décrit la dynamique d'un système non linéaire d'ordre non entier, deux types de systèmes seront présentés : les systèmes commensurables (ou d'ordres commensurables) et les systèmes non commensurables (ou d'ordres non commensurables).

**Définition 2.3.1.** Si tous les ordres de dérivations  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  du système (2.117) sont égaux, on dit que le système est commensurable. Dans le cas contraire, le système est dit non commensurable

### 2.3.1 Systèmes d'ordre fractionnaire par rapport systèmes d'ordre entier

Considérons les deux systèmes suivants :

$$\dot{x}(t) = \beta t^{\beta-1}, \quad 0 < \beta < 1, \quad x(0) = x_0 \quad (2.119)$$

$$D^\alpha x(t) = \beta t^{\beta-1}, \quad 0 < \beta < 1, \quad 0 < \alpha < 1 \text{ et } x(0) = x_0 \quad (2.120)$$

Les solutions des systèmes (2.119) et (2.120) sont respectivement données par :

$$x(t) = t^\beta + x_0, \quad (2.121)$$

$$x(t) = \frac{\beta \Gamma(\beta) t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha + \beta)} + x_0. \quad (2.122)$$

On peut voir facilement, que la solution du système d'ordre entier (2.119) est asymptotiquement stable, pour tout  $0 < \beta < 1$ . Cependant, la solution du système fractionnaire (2.120) est asymptotiquement stable, lorsque  $0 < \beta < 2 - \alpha$ . Ce qui montre que les systèmes fractionnaires admettent des caractéristiques différentes de celles des systèmes d'ordre entier.

### 2.3.2 Conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité

Dans la théorie de la stabilité des systèmes linéaires d'ordre entier, nous savons bien qu'un système est stable si toutes les racines du polynôme caractéristique sont à parties réelles strictement négatives, c'est-à-dire situées sur la moitié gauche du plan complexe. Tandis que, dans le cas des systèmes fractionnaires linéaires, la définition de la stabilité est strictement différente de celle des systèmes classique. En effet, dans les systèmes fractionnaires, on peut avoir des racines dans la moitié droite du plan complexe et être stables.

Les théorèmes suivants, nous permettent d'affirmer les conditions nécessaires et suffisantes, pour la stabilité des systèmes fractionnaires.

**Théorème 2.3.1.** [48, 49] *Considérons le système non linéaire fractionnaire décrit par le modèle suivant ;*

$$\begin{cases} D^\alpha x = f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.123)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 < \alpha < 1$  et  $f \in \mathbb{R}^n$  une fonction non linéaire continue

1. Supposons que le système (2.123) est commensurable. Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres



de la matrice jacobienne  $\frac{\partial f}{\partial x}$  associée à  $f$  au point d'équilibre.

Alors, le système (2.123) est asymptotiquement stable, si et seulement si :

$$|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}, \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.124)$$

2. Supposons maintenant que le système (2.123) est non commensurable, c'est-à-dire  $\alpha_i \neq \alpha_j$ , pour tout  $i \neq j$ , et soit  $m$  le plus petit multiple commun des dénominateurs  $u_i$  de  $\alpha_i$ , tel que :

$$\alpha_i = \frac{u_i}{v_i}, \quad (u_i, v_i) = 1, \quad u_i, v_i \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.125)$$

Posons  $\gamma = \frac{1}{m}$ , et soient  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de l'équation caractéristique :

$$\det(\text{diag}(\lambda^{m\alpha_1}, \lambda^{m\alpha_2}, \dots, \lambda^{m\alpha_n}) - \frac{\partial f}{\partial x}) = 0. \quad (2.126)$$

Alors, le système non commensurable (2.123) est asymptotiquement stable, si et seulement si :

$$|\arg(\lambda_i)| > \gamma \frac{\pi}{2}, \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.127)$$

**Remarque 2.5.** Si le système étudié est linéaire, les conditions de stabilité dans les théorèmes précédents restent vrais, juste en remplaçant la matrice Jacobienne de  $f$  par sa partie linéaire.

La Figure 2.5, illustre les différentes régions de stabilité d'un système fractionnaire, où  $0 < \alpha < 1$ .

**Exemple 2.3.1.** Considérons le système non linéaire fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha x = 1 + x^2 y - 4x, \\ D^\alpha y = -x^2 y + 3x, \end{cases} \quad (2.128)$$

où  $D^\alpha$  est l'opérateur de dérivation de Caputo.

Les points d'équilibre de ce système sont les solutions de l'équation :

$$\begin{cases} 1 + x^2 y - 4x = 0, \\ -x^2 y + 3x = 0. \end{cases} \quad (2.129)$$

Le seul point d'équilibre du système (2.128) est  $P = (1, 3)$ .

La matrice Jacobienne du système, associée au point d'équilibre  $P$  est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.130)$$

Le polynôme caractéristique correspondant est :

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1. \quad (2.131)$$

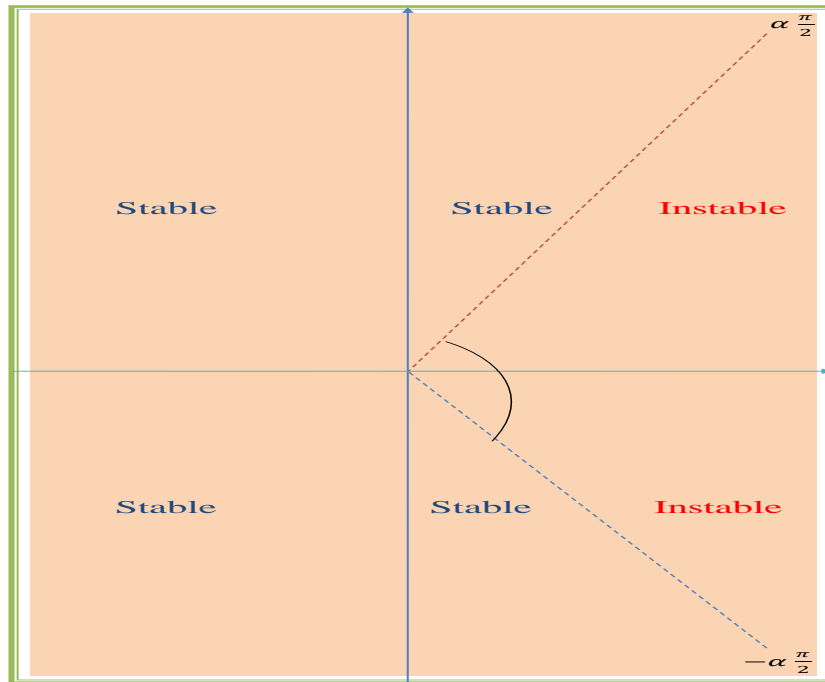


FIGURE 2.5 – Régions de stabilité d'un système fractionnaire, où  $0 < \alpha < 1$ .

Les valeurs propres du système, associées au point  $P$  sont données par :

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ et } \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \quad (2.132)$$

Lorsque  $\alpha = 0.65$ , on peut voir facilement que :

$$|\arg(\lambda_{1,2})| = 1.047 > \frac{\alpha\pi}{2} = 1.021. \quad (2.133)$$

L'utilisation du Théorème 2.3.1, montre la stabilité du point d'équilibre  $P$ . Cependant, dans le cas entier, le point d'équilibre  $P$  est instable.

### 2.3.3 Condition nécessaire pour le chaos

Considérons maintenant le système commensurable (2.123). On sait que les points d'équilibres de ce système sont les solutions de l'équation  $f(x) = 0$ . D'après le Théorème 2.3.1, ces points sont localement asymptotiquement stables, lorsque toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne  $\frac{\partial f}{\partial x}$  associée au point d'équilibre, vérifient la condition (2.124).

Dans la théorie des systèmes dynamiques en trois dimensions, un point selle est un point d'équilibre, pour lequel le système linéarisé équivalent, ayant au moins une valeur propre dans une région stable, et une dans une région instable, de plus, ce point

est dit un point selle **d'indice 1**, si et seulement si, une des valeurs propres est instable et les autres sont stables. Cependant, un point selle est **d'indice 2**, si et seulement si, deux valeurs propres sont instables et la troisième est stable.

Concernant les systèmes chaotiques, il est bien connu que "les scrolls" sont générés seulement autour d'un point selle d'indice 2. Tandis que, les points selles d'indice 1 prennent seulement la responsabilité de connecter ces scrolls.

Supposons maintenant qu'on a un système chaotique en trois dimension, possède un attracteur d'un seul scroll. Ce système admet alors un point selle d'indice 2, encerclé par cet attracteur. Supposons également que  $\lambda$  est une valeur propre de ce point selle et d'indice 2. Une condition nécessaire, pour que le système fractionnaire (2.117) peut être avoir un comportement chaotique, est de maintenir  $\lambda$  dans la région instable, ce qui entraîne :

$$\alpha > \frac{2}{\pi} \arctan\left(\left|\frac{\Re(\lambda)}{\Im(\lambda)}\right|\right). \quad (2.134)$$

### 2.3.4 Méthode directe de Lyapounov fractionnaire basée sur les fonctions de classe $\kappa$

Le concept de la méthode directe de Lyapounov, consiste à trouver une fonction de Lyapounov associée à un problème non linéaire. Lorsque cette fonction existe, le système est stable. Cette méthode est difficile à mettre en œuvre, cependant elle est d'une portée beaucoup plus générale. Notons que cette méthode nous permet de donner une condition suffisante de stabilité, c'est-à-dire, on peut démontrer la stabilité d'un système, même devant l'impossibilité de trouver une fonction de Lyapounov, puisqu'il n'y a pas de règle générale qui nous permet de trouver une telle fonction de Lyapounov. Cependant, dans les problèmes de physiques, l'énergie est souvent un bon candidat. Dans cette partie, nous étendons la méthode directe de Lyapounov des systèmes fractionnaire, en utilisant les fonctions de classe  $\kappa$ , pour étudier la stabilité asymptotique des solutions du système suivant :

$$D^\alpha x(t) = f(x(t)), \quad (2.135)$$

où  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  représente une fonction non linéaire,  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état et  $\alpha \in (0, 1)$ .

Pour atteindre cet objectif, nous regroupons un ensemble de définitions sur le thème des fonctions de classe  $\kappa$  [50], et nous rappelons quelques résultats de la stabilité au sens de Lyapounov, sur lesquels s'appuient nos travaux décrits dans la quatrième section du troisième chapitre.

**Définition 2.3.2.** [50] Une fonction continue  $\varphi : [0, \rho) \rightarrow \mathbb{R}_+$  ( $\rho > 0$ ) est dite de classe  $\kappa$ , si et seulement si elle est strictement croissante et vérifiée  $\varphi(0) = 0$ .

**Définition 2.3.3.** [50] Une fonction  $V(t, x)$  définie sur  $T_q \times S_\rho$ , où :

$$S_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq \rho\} \text{ et } T_q = \{q^n, q \in ]0, 1[ \text{ et } n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}, \quad (2.136)$$

est dite définie positive, si et seulement si  $V(t, 0) = 0$ , pour tout  $t \in T_q$ , et il existe  $\varphi(r) \in \kappa$ , telle que :

$$\varphi(r) \leq V(t, x), \|x\| = r, (t, x) \in T_q \times S_\rho. \quad (2.137)$$

**Définition 2.3.4.** [50] Une fonction  $V(t, x)$  définie sur  $T_q \times S_\rho$ , est dite décroissante, si et seulement si  $V(t, 0) = 0$ , pour tout  $t \in T_q$  et il existe  $\varphi(r) \in \kappa$ , telle que :

$$V(t, x) \leq \varphi(r), \|x\| = r, (t, x) \in T_q \times S_\rho. \quad (2.138)$$

**Lemme 2.3.1.** Si  $D^\alpha x(t) \geq D^\alpha y(t)$ , pour tout  $\alpha \in (0, 1)$ , et si  $x(0) = y(0)$ , alors  $x(t) \geq y(t)$ .

**Preuve 2.3.1.** Supposons que  $D^\alpha x(t) \geq D^\alpha y(t)$ , alors il existe une fonction positive  $m(t)$  satisfaisant :

$$D^\alpha x(t) = m(t) + D^\alpha y(t). \quad (2.139)$$

En appliquant la transformée de Laplace de l'équation (2.139), on obtient l'égalité suivante :

$$s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1}x(0) = M(s) + s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1}y(0). \quad (2.140)$$

Puisque  $x(0) = y(0)$ , l'égalité (2.140) peut s'écrire sous la forme :

$$X(s) = s^{-\alpha}M(s) + Y(s). \quad (2.141)$$

En appliquant la transformée inverse de Laplace de l'équation (2.141), on obtient l'égalité suivante :

$$x(t) = D^{-\alpha}m(t) + y(t). \quad (2.142)$$

Puisque  $m(t) \geq 0$ , il vient :

$$x(t) \geq y(t).$$

**Théorème 2.3.2.** [51] Supposons qu'ils existent une fonction de Lyapounov  $V$  et des fonctions  $\varphi_i, i = 1, 2, 3$  de classe  $\kappa$  satisfaisant :

$$\varphi_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \varphi_2(\|x\|), \quad (2.143)$$

et

$$D^\alpha V(t, x) \leq -\varphi_3(\|x\|), \quad (2.144)$$

où  $\alpha \in (0, 1)$ . Alors la solution du système fractionnaire (2.135) est asymptotiquement stable.

**Preuve 2.3.2.** Sous les hypothèses (2.143) et (2.144), l'inégalité suivante est bien vérifiée :

$$D^\alpha V \leq -\varphi_3(\varphi_1^{-1}(V)). \quad (2.145)$$

A partir du lemme 2.3.1,  $V$  est majorée par la solution de l'équation différentielle suivante :

$$D^\alpha g(t) = -\varphi_3(\varphi_1^{-1}(g(t))), \quad g(0) = V(0, x(0)). \quad (2.146)$$

Ce qui implique que  $g(t) = 0$ , pour tout  $t \geq 0$ , si  $g(0) = 0$ , car  $\varphi_3\varphi_1^{-1}$  est une fonction de classe  $\kappa$ .

Si non, la fonction  $g$  vérifiée :  $g(t) \geq 0$ , pour  $t \in [0, +\infty[$ .

Il vient alors d'après l'équation (2.146) que  $D^\alpha g(t) \leq 0$ .

Toujours, d'après le lemme 2.3.1 ci-dessus, nous avons :

$$g(t) \leq g(0), \quad \text{pour tout } t \in [0, +\infty[. \quad (2.147)$$

Alors la stabilité asymptotique du système (2.146) est démontré par contradiction.

**Cas 1 :** Supposons qu'il existe  $t_1 \geq 0$  satisfaisant :

$${}_0D_{t_1}^\alpha g(t) = -\varphi_3(\varphi_1^{-1}(g(t_1))) = 0. \quad (2.148)$$

On rappelle que l'opérateur de dérivation de Caputo  $D^\alpha g(t) = {}_0D_t^\alpha g(t)$ , ce qui implique :

$$D^\alpha g(t) = {}_0D_t^\alpha g(t) = {}_{t_1}D_t^\alpha g(t) = -\varphi_3(\varphi_1^{-1}(g(t))), \quad \text{pour tout } t \geq t_1. \quad (2.149)$$

Il est clair que  $g(t) = 0$  est le point d'équilibre du système précédent.

En tenant compte de la Remarque 2.3 et de la relation (2.148),  $g(t) = 0$ , pour  $t \geq t_1$ , si et seulement si  $g(t_1) = 0$ .

**Cas 2 :** Supposons qu'il existe une constante positive  $\epsilon$ , tel que :

$$g(t) \geq \epsilon, \quad \text{pour tout } t \geq 0. \quad (2.150)$$

L'utilisation de (2.147) et (2.150) donne :

$$\epsilon \leq g(t) \leq g(0), \quad \text{pour tout } t \geq 0. \quad (2.151)$$

En exploitant les inégalités précédentes, (2.146) devient :

$$-\varphi_3(\varphi_1^{-1}(g(t))) \leq -\varphi_3(\varphi_1^{-1}(\epsilon)) = -rg(0) \leq -rg(t), \quad (2.152)$$

où  $0 < r = \frac{\varphi_3(\varphi_1^{-1}(\epsilon))}{g(0)}$ . Par suite :

$$D^\alpha g(t) \leq -rg(t). \quad (2.153)$$

En tenant compte de la propriété précédente, il existe une fonction positive  $M(t)$  satisfaisant :

$$D^\alpha g(t) + M(t) = -rg(t). \quad (2.154)$$

En appliquant la transformé de Laplace de l'équation (2.154), on obtient l'égalité suivante :

$$s^\alpha g(s) - g(0)s^{\alpha-1} + M(s) = -rg(s). \quad (2.155)$$

Cette dernière est équivalente à :

$$g(s) = \frac{g(0)s^{\alpha-1} - M(s)}{s^\alpha + r}. \quad (2.156)$$

On rappelle que la transformée de Laplace de la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètre est donnée par :

$$L(t^{\alpha-1}E_{\alpha,\beta}(-rt^\alpha)) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + r}. \quad (2.157)$$

En appliquant maintenant la transformée inverse de Laplace de l'équation (2.156), on obtient l'égalité suivante :

$$g(t) = g(0)E_\alpha(-rt^\alpha) - M(t) * [t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-rt^\alpha)]. \quad (2.158)$$

Puisque les deux fonctions  $t^{\alpha-1}$  et  $E_{\alpha,\alpha}(-rt^\alpha)$  sont définies positives, il en résulte de l'équation (2.158), l'inégalité suivante :

$$g(t) \leq g(0)E_\alpha(-rt^\alpha), \quad (2.159)$$

ce qui contredit l'hypothèse  $g(t) \geq \epsilon$ .

Selon les discussions des deux cas précédents, on peut alors conclure sur la convergence de  $g$  vers zéro, quand  $t \rightarrow \infty$ .

En outre, puisque  $V$  est définie positive et est majorée par  $g$ , il vient que  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t, x) = 0$ .

Enfin, on vérifié bien à partir de l'inégalité (2.143) que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ , ce qui implique que la solution du système fractionnaire est asymptotiquement stable. Ceci termine la preuve du théorème.

**Théorème 2.3.3.** [52] Supposons qu'il existe une fonction positive  $V(t, x) \in C[T_q \times S_\rho, \mathbb{R}_+]$  satisfaisant ;

$$D^\alpha V(t, x(t)) \leq -\psi(V(t, x)), \text{ pour tout } t_0 \in T_q \text{ et } (t, x) \in T_q \times S_\rho, t \geq t_0, \quad (2.160)$$

où  $\psi \in \kappa$ , alors la solution du système fractionnaire (2.135) est asymptotiquement stable.

**Preuve 2.3.3.** Soit  $x(t) = x(t, t_0, x_0)$  une solution du système (2.135), et soit  $V(t, x)$  une fonction définie positive. Par définition, il existe  $\varphi \in \kappa$ , telle que :

$$\varphi(\|x\|) \leq V(t, x), \text{ pour tout } (t, x) \in T_q \times S_\rho. \quad (2.161)$$

Soit maintenant  $\epsilon > 0, 0 < \epsilon < \rho$ , on peut trouver alors  $\sigma = \sigma(t_0, \epsilon)$ , tel que :

$$\|x\| < \sigma \Rightarrow V(t_0, x_0) < \varphi(\epsilon). \quad (2.162)$$

Ce choix est possible, car  $V(t_0, 0) = 0$  et  $V(t_0, x)$  est continue par rapport à  $x$ .

On rappelle aussi que la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville de la fonction  $V$  sont reliées par :

$$D^\alpha V(t, x(t)) = {}^R D^\alpha V(t, x(t)) - \frac{(t - t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} V(t_0, x_0), \text{ pour tout } t \geq t_0 \text{ et } \alpha \in ]0, 1[, \quad (2.163)$$

et l'intégrale de Riemann de la fonction  $(t - t_0)^\beta$  est donnée par :

$${}^R D^{-\alpha} (t - t_0)^\beta = \frac{\Gamma(1 + \beta)}{\Gamma(\beta + \alpha + 1)} (t - t_0)^{\beta + \alpha}, \beta \in ]-1, +\infty[ \text{ et } \alpha \in ]0, 1[. \quad (2.164)$$

En particulier, si  $\beta = -\alpha$ , on a :

$${}^R D^{-\alpha} (t - t_0)^{-\alpha} = \Gamma(1 - \alpha). \quad (2.165)$$

Alors de l'inégalité  $D^\alpha V(t, x(t)) \leq -\psi(V(t, x)) \leq 0$ , et de la formule (2.165), il vient :

$$V(t, x(t)) \leq V(t_0, x_0), \text{ pour tout } t \geq t_0 \text{ et } x \in S_\rho. \quad (2.166)$$

En utilisant les relations (2.161), (2.162) et (2.166), on trouve alors :

$$\varphi(\|x\|) \leq V(t, x) \leq V(t_0, x_0) < \varphi(\epsilon). \quad (2.167)$$

Puisque  $\varphi \in \kappa$ , nous avons donc :

$$\|x(t)\| < \epsilon, \text{ pour tout } t \in T_q, \text{ et } t \geq t_0. \quad (2.168)$$

Ce qui montre que la solution du système (2.135) est stable.

Montrons maintenant que  $x(t)$  est asymptotiquement stable.

Pour cela, supposons également que  $D^\alpha V(t, x(t)) \leq -\psi(V(t, x))$ . Toujours, d'après l'inégalité (2.166), on trouve :

$$V(t, x(t)) \leq V(t_0, x_0), \text{ pour tout } t \geq t_0 \text{ et } x \in S_\rho.$$

Ce qui assure que  $V(t, x(t))$  est décroissante et tend vers  $V_0$ , quand  $t \rightarrow +\infty$ , et de plus  $V_0 = 0$ .

En effet, si on suppose le contraire, c'est-à-dire que  $V(t, x) \geq V_0 > 0$ . Nous avons donc :

$$D^\alpha V(t, x(t)) < -\psi(V_0) = -C, \quad (2.169)$$

où  $C$  est une constante strictement positive.

En introduisant l'intégrale de Riemann sur les deux cotés de cette dernière égalité, et en utilisant la formule (2.164) avec  $\beta = 0$ , on trouve :

$$V(t, x(t)) - V(t_0, x_0) \leq \frac{-C}{\Gamma(\alpha + 1)} (t - t_0)^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (2.170)$$

En passant à la limite, quand  $t \rightarrow +\infty$ , on obtient alors :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t, x(t)) = -\infty. \quad (2.171)$$

Ce qui contredit le fait que  $V(t, x(t))$  est définie positive. On a alors :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t, x(t)) = V_0 = 0. \quad (2.172)$$

Par conséquent :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(x(t))\| = 0. \quad (2.173)$$

Et finalement :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0. \quad (2.174)$$

Maintenant, on peut en venir à un autre théorème de la stabilité au sens de Lyapounov sur lequel s'appuie nos travaux décrits dans la quatrième section du troisième chapitre.

**Théorème 2.3.4.** [53] *Lorsqu'il existe une fonction de Lyapounov positive  $V(x)$ , telle que  $D^\alpha(V(x)) < 0$ , pour tout  $t \geq t_0$ , alors la solution de système (2.135) est asymptotiquement stable.*

**Preuve 2.3.4.** *La preuve de ce théorème se déroule, en démontrant, la propriété suivante :*

$$D^\alpha(V(x)) < 0 \Leftrightarrow D^\alpha(V(x)) \leq -\Psi(V(x)), \quad \Psi \in \kappa, \quad (2.175)$$

ainsi que l'utilisation du Théorème 2.3.4 .

En effet, soit  $\Psi \in \kappa$ , telle que  $D^\alpha(V(x)) \leq -\Psi(V(x))$ .

Puisque  $V(x)$  est définie positive, et  $\Psi \in \kappa$ , on trouve alors  $\Psi(V(x)) > 0$ .

Par conséquent :

$$D^\alpha(V(x)) \leq -\Psi(V(x)) < 0. \quad (2.176)$$

Supposons maintenant que :

$$D^\alpha(V(x)) < 0. \quad (2.177)$$

En tenant compte de la propriété précédente, il existe alors une fonction définie positive  $m(x)$ , satisfaisant :

$$D^\alpha(V(x)) = -m(x). \quad (2.178)$$

Puisque  $m(x)$  et  $V(x)$  sont définies positives, les inégalités suivantes sont bien vérifiées :

$$m(x) \geq \varphi_1 \|x\|, \quad \varphi_1 \in \kappa, \quad (2.179)$$

et

$$V(x) \geq \varphi_2 \|x\|, \quad \varphi_2 \in \kappa. \quad (2.180)$$



En exploitant les inégalités (2.179) et (2.180), (2.177) devient :

$$D^\alpha V \leq -\varphi_1(\varphi_2^{-1}(V(x))) = -\psi(V(x)), \quad \psi \in \kappa. \quad (2.181)$$

Enfin, en tenant compte de la propriété (2.175) et du théorème 2.3.3, l'énoncé du théorème 2.3.4 a été prouvée.

### 2.3.5 Fonctions candidates de Lyapounov à la stabilité des systèmes fractionnaires

Cette partie présente une nouvelle propriété pour les dérivés fractionnaires au sens de Caputo, lorsque  $0 < \alpha < 1$ , qui permet de trouver une fonction candidate de Lyapounov simple pour de nombreux systèmes d'ordre fractionnaire, et par conséquent la preuve de leur stabilité, en utilisant l'extension de la méthode directe de Lyapounov d'ordre fractionnaire.

**Lemme 2.3.2.** [54] Soit  $x(t) \in \mathbb{R}$  une fonction dérivable au sens de Caputo. Alors, pour tout  $t > t_0$ ,

$$\frac{1}{2}D^\alpha x^2(t) \leq x(t)D^\alpha x(t), \quad \alpha \in (0, 1). \quad (2.182)$$

**Preuve 2.3.5.** Par définition, on a :

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{\dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \quad (2.183)$$

De même :

$$\frac{1}{2}D^\alpha x^2(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{x(\tau)\dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \quad (2.184)$$

Nous avons donc :

$$x(t)D^\alpha x(t) - \frac{1}{2}D^\alpha x^2(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{[x(t) - x(\tau)]\dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \quad (2.185)$$

En utilisant le changement de variable  $y(\tau) = x(t) - x(\tau)$ , l'équation (2.185), peut se réécrire sous la forme :

$$x(t)D^\alpha x(t) - \frac{1}{2}D^\alpha x^2(t) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{y(\tau)\dot{y}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \quad (2.186)$$

Faisons l'intégration par parties, en posant :

$$\begin{cases} du = y(\tau)\dot{y}(\tau)d\tau, \\ v = \frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \end{cases} \quad (2.187)$$

on trouve :

$$\begin{aligned} x(t)D^\alpha x(t) - \frac{1}{2}D^\alpha x^2(t) &= \lim_{t \rightarrow \tau} \frac{-y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha} + \frac{y^2(t_0)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-t_0)^\alpha} \\ &+ \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{y^2(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} d\tau. \end{aligned} \quad (2.188)$$

D'autre part, en utilisant la règle de l'hôpital, on trouve :

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \frac{-y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha} = \lim_{t \rightarrow \tau} \frac{2y(\tau)\dot{y}(\tau)}{2\alpha\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^{\alpha-1}} = 0. \quad (2.189)$$

Et enfin :

$$\begin{aligned} x(t)D^\alpha x(t) - \frac{1}{2}D^\alpha x^2(t) &= \frac{y^2(t_0)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-t_0)^\alpha} \\ &+ \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{y^2(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} d\tau \geq 0, \text{ pour tout } t \geq t_0. \end{aligned} \quad (2.190)$$

**Remarque 2.6.** Le lemme précédent reste vrai, si  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , et dans ce cas :

$$\frac{1}{2}D^\alpha x^T(t)x(t) \leq x^T(t)D^\alpha x(t), \text{ pour tout } \alpha \in (0, 1) \quad (2.191)$$

**Corollaire 2.3.1.** Considérons le système fractionnaire suivant :

$$D^\alpha x(t) = f(x(t)), \quad (2.192)$$

où  $\alpha \in (0, 1)$ . Soit  $x = 0$ , le point d'équilibre de ce système. Si la condition suivante est satisfaite.

$$x(t)f(x(t)) \leq 0, \forall x, \text{ (resp. } x(t)f(x(t)) < 0, \text{ pour tout } x \neq 0, \text{)} \quad (2.193)$$

alors le point d'équilibre 0 est stable (resp. asymptotiquement stable).

**Preuve 2.3.6.** Considérons la fonction de Lyapounov suivante :

$$V(x(t)) = \frac{1}{2}x^2(t) \quad (2.194)$$

En utilisant le lemme précédent, on trouve :

$$D^\alpha V(x(t)) \leq x(t)D^\alpha x(t) = x(t)f(x(t)) \leq 0, \forall x \text{ (resp. } < 0, \forall x \neq 0, \text{)} \quad (2.195)$$

Alors, d'après le théorème 2.3.4, le point d'équilibre 0 est stable (resp. asymptotiquement stable).

**Exemple 2.3.2.** Considérons le système fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = -\sin^2(t)x(t) - \sin(t)\cos(t)y(t), \\ D^\alpha y(t) = -\sin(t)\cos(t)x(t) - \cos^2(t)y(t), \end{cases} \quad (2.196)$$

Considérons également la fonction de Lyapounov suivante :

$$V(x(t), y(t)) = \frac{1}{2}(x^2(t) + y^2(t)). \quad (2.197)$$

En utilisant la propriété suivante :

$$\dot{x}(t) = D^{1-\alpha}D^\alpha x(t), \quad (2.198)$$

le système (2.196), peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -D^{1-\alpha} (\sin^2(t)x(t) - \sin(t) \cos(t)y(t)), \\ \dot{y}(t) = -D^{1-\alpha} (\sin(t) \cos(t)x(t) - \cos^2(t)y(t)). \end{cases} \quad (2.199)$$

Si on utilise la dérivée classique de la fonction de Lyapounov, on trouve :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), y(t)) &= x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t) + \\ &= -x(t)D^{1-\alpha} (\sin^2(t)x(t) - \sin(t) \cos(t)y(t)) \\ &\quad - y(t)D^{1-\alpha} (\sin(t) \cos(t)x(t) - \cos^2(t)y(t)). \end{aligned} \quad (2.200)$$

Comme nous le voyons très bien dans l'équation (2.200), il est difficile de reconnaître le signe de la première dérivée de la fonction de Lyapounov (2.197), et par conséquent, on ne peut pas conclure sur la stabilité.

Cependant, lorsque le lemme 2.3.2 est employé, la dérivée fractionnaire de la fonction de Lyapounov (2.197), satisfaisant :

$$D^\alpha V(x(t), y(t)) = \frac{1}{2}D^\alpha x^2(t) + \frac{1}{2}D^\alpha y^2(t) \quad (2.201)$$

$$\begin{aligned} &\leq x(t)D^\alpha x(t) + y(t)D^\alpha y(t) \\ &= -[x(t) \sin(t) + y(t) \cos(t)]^2 \\ &< 0, \text{ pour tout } (x, y) \neq (0, 0) \end{aligned} \quad (2.202)$$

De l'inégalité (2.202), la dérivée fractionnaire de la fonction de Lyapounov est définie négative sur  $\mathbb{R}^2$ , ce qui montre la stabilité asymptotique du système (2.196).

La Figure (2.6) illustre l'évolution temporelle des états du système (2.196), avec la condition initiale  $(x, y) = (-1, -2)$  et l'ordre de dérivé fractionnaire  $\alpha = 0.90$ .

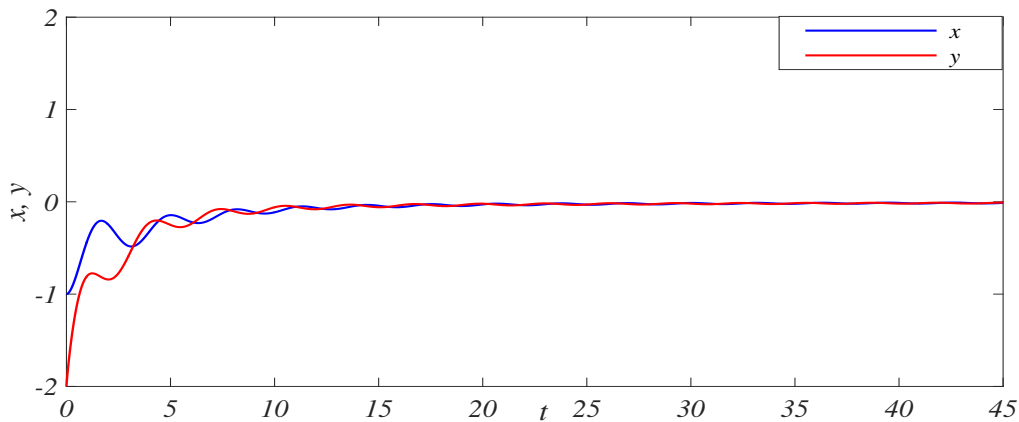


FIGURE 2.6 – L'évolution temporelle des états du système (2.196).

**Exemple 2.3.3.** *Considérons le système fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = -x(t) + y^3(t), \\ D^\alpha y(t) = -x(t) - y(t), \end{cases} \quad (2.203)$$

*Considérons également la fonction de Lyapounov :*

$$V(x(t), y(t)) = \frac{1}{2}x^2(t) + \frac{1}{4}y^4(t). \quad (2.204)$$

*Il est clair que  $V$  est définie positive.*

*D'autre part, l'utilisation du Lemme 2.3.2 donne :*

$$\begin{aligned} D^\alpha V(x(t), y(t)) &= \frac{1}{2}D^\alpha x^2(t) + \frac{1}{4}D^\alpha y^4(t) \\ &\leq x(t)D^\alpha x(t) + \frac{1}{2}y^2(t)D^\alpha y^2(t) \\ &\leq x(t)D^\alpha x(t) + y^3(t)D^\alpha y(t) \\ &\leq -x^2(t) - y^4(t) \\ &< 0, \text{ pour tout } (x, y) \neq (0, 0) \end{aligned} \quad (2.205)$$

*Comme nous pouvons voir dans l'inégalité (2.205), la dérivée fractionnaire de la fonction de Lyapounov est définie négative sur  $\mathbb{R}^2$ , ce qui montre la stabilité asymptotique du système (2.203).*

*La Figure (2.7) illustre l'évolution temporelle des états du système (2.203), avec la condition initiale  $(x, y) = (3, -3)$  et l'ordre de dérivé fractionnaire  $\alpha = 0.95$ .*

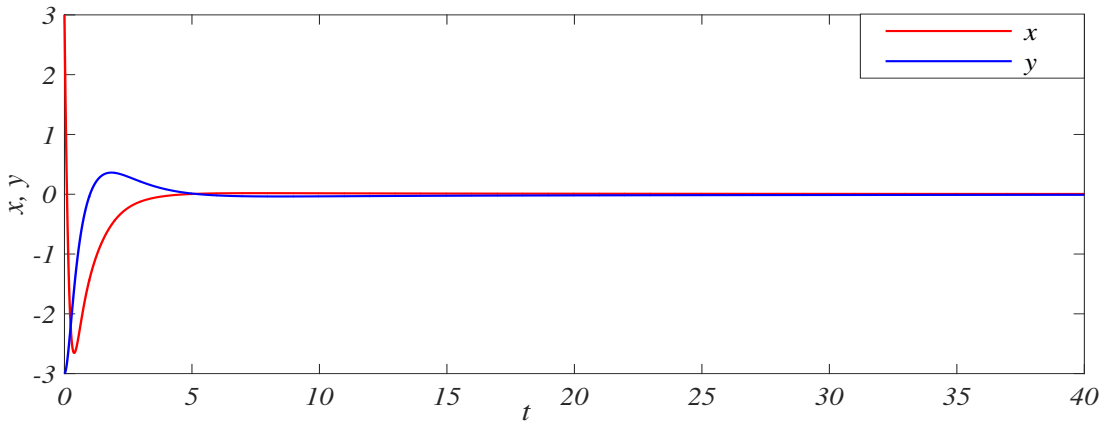


FIGURE 2.7 – L'évolution temporelle des états du système (2.203).

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exhibé quelques notions de base de calcul fractionnaire. La théorie de la dérivation fractionnaire a été introduite à partir de quelques

rappels sur les fonctions de Gamma d'Euler et de Mittag-Leffler et sur les différentes définitions et les propriétés de la dérivée fractionnaire. Nous avons ensuite décrit les équations d'ordre fractionnaire. Enfin, pour clôturer ce chapitre, nous avons présenté la stabilisation des systèmes chaotiques fractionnaires par l'approche d'une nouvelle extension de la méthode directe de Lyapounov d'ordre fractionnaire. L'utilisation de cette nouvelle approche va nous permettre ultérieurement de montrer sous certaines hypothèses adéquates, qu'on peut garantir la stabilisation asymptotique de tels systèmes.

# Chapitre 3

## Synchronisation des systèmes chaotiques et hyperchaotiques

L'objectif de ce chapitre porte principalement sur deux sujets majeurs. Dans le premier sujet, un problème de synchronisation généralisée entre deux systèmes chaotiques d'ordres fractionnaires non commensurables et de dimensions différentes est étudié. Dans l'autre sujet, le problème de synchronisation projective modifiée entre un système hyperchaotique d'ordre entier et un système hyperchaotique d'ordre fractionnaire est considéré. Dans tous les schémas de synchronisation de ce chapitre, une technique de contrôle continu [65], a été employé. De plus, dans le premier sujet de ce chapitre, la technique de la transformée de Laplace et le théorème de la valeur finale, sont considérés pour réaliser la synchronisation proposée. Tandis que dans le deuxième sujet, une nouvelle approche de Lyapounov pour les systèmes fractionnaires est adoptée pour effectuer la stabilité ainsi que la convergence de l'erreur de synchronisation. Quelques exemples numériques sont également fournis pour vérifier la capacité des schémas des synchronisations proposées.

Avant d'aborder en détail la création de ces problèmes, il est nécessaire de rappeler quelques définitions préliminaires concernant les différents types de synchronisations des oscillateurs chaotiques couplés.

### 3.1 Systèmes couplés

On dit que deux oscillateurs sont couplés, si l'existence d'une petite perturbation dans l'un des oscillateurs entraîne une perturbation dans l'autre. Physiquement, cet effet se traduit par un transfert d'énergie entre les deux oscillateurs. Ce type d'accouplement s'appelle en général accouplement mutuel.

### 3.1.1 Accouplement bidirectionnel

Supposons qu'on a deux systèmes chaotiques fractionnaires, présentés par des équations suivantes :

$$D^\alpha X(t) = f_1(X, t), \quad (3.1)$$

$$D^\alpha Y(t) = f_2(Y, t). \quad (3.2)$$

On dit que les deux systèmes (3.1) et (3.2) sont couplés, si on peut les réécrire sous les formes suivantes :

$$D^\alpha X(t) = g_1(X, X, Y, t) \quad (3.3)$$

$$D^\alpha Y(t) = g_2(Y, X, Y, t), \quad (3.4)$$

où  $g_1$  et  $g_2$  sont des fonctions non linéaires, et la première variable de chaque équation représente la variable du système, tandis que la deuxième et la troisième variable sont les résultats de l'effet d'accouplement.

La dernière représentation signifie que chaque système a un acte sur l'autre, c'est la définition de l'accouplement bidirectionnel.

### 3.1.2 Accouplement unidirectionnel

Supposons qu'on a deux systèmes identiques représentés par les deux équations suivantes :

$$D^\alpha X(t) = f(X, t), \quad (3.5)$$

$$D^\alpha Y(t) = f(Y, t). \quad (3.6)$$

Lorsque l'équation (3.6) va être modifier par l'effet d'accouplement, et si le résultat de cette modification nous donne de nouvelles équations suivantes :

$$D^\alpha X(t) = f(X, t), \quad (3.7)$$

$$D^\alpha Y(t) = g(Y, X, t), \quad (3.8)$$

tel que  $g(Y, X, t) = f(Y, t)$ , pour  $X = Y$ , dans ce cas on parle de l'accouplement unidirectionnel. le premier système s'appelle système émetteur (maître) et le deuxième système récepteur(esclave). La dernière représentation signifie que le système émetteur a un acte sur le récepteur et le contraire est faux. Il est bien clair que ce type d'accouplement est un cas particulier d'accouplement mutuel. Dans ce travail, on s'intéresse à l'accouplement unidirectionnel.

## 3.2 Différents types de synchronisation

Plusieurs types de synchronisation ont été employés dans la littérature, à savoir : la synchronisation complète (SC), l'anti-synchronisation (AS), la synchronisation projective (SP) et la synchronisation projective modifiée (SPM), etc.

Par exemple, dans la synchronisation complète, nous avons une coïncidence complète entre les variables d'états des deux systèmes maître-esclave synchronisés. Cependant par exemple, dans la synchronisation projective, l'état du système maître se synchronise avec un multiple (plusieur) de l'état du système esclave.

Considérons maintenant les systèmes maître et esclave respectivement suivants :

$$D^\alpha x = f(x), \quad (3.9)$$

$$D^\alpha y = g(y) + u, \quad (3.10)$$

où  $x, y \in \mathbb{R}^n$  ; sont les vecteurs d'état des systèmes maître et esclave, respectivement,  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont les vecteurs non linéaires des fonctions continues, et  $u$  est le vecteur de contrôle. L'objectif de cette partie consiste principalement à vérifier les performances de la méthode d'un contrôle pour différents types de synchronisation des systèmes chaotiques.

### 3.2.1 Synchronisation complète

La synchronisation complète (SC) a été réalisée grâce aux effets des forces d'accouplement unidirectionnelles des systèmes dynamiques. C'est la forme de la synchronisation la plus simple. On dit qu'il y a une SC entre les deux systèmes maître et esclave, s'il existe un contrôle  $u(t, x, y)$ , tel que l'équation :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - x(t)\| = 0, \quad (3.11)$$

est satisfaite pour toutes conditions initiales  $x(0)$  et  $y(0)$  des deux systèmes.

Si  $f = g$ , la SC est dite identique.

L'étude de synchronisation se ramène à l'étude de la stabilité au voisinage de l'origine d'un nouveau système qui s'appelle "système erreur", ce dernier est donnée par l'équation :

$$e = y - x \quad (3.12)$$



### 3.2.2 Anti-synchronisation

Le système maître et le système esclave sont dits prêts pour effectuer l'anti-synchronisation entre ces deux systèmes, s'il existe un contrôle  $u(t, x, y)$  tel que l'équation :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) + x(t)\| = 0, \quad (3.13)$$

est satisfaite, pour toutes conditions initiales  $x(0)$  et  $y(0)$  des deux systèmes.

### 3.2.3 Synchronisation projective

On dit qu'il y a une synchronisation projective (SP) entre les deux systèmes maître et esclave, s'il existe un contrôle efficace  $u(t, x, y)$ , de telle sorte que l'équation suivante :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - \theta x(t)\| = 0, \quad (3.14)$$

est satisfaite, pour toutes conditions initiales  $x(0)$  et  $y(0)$  des deux systèmes, où  $\theta$  est une constante non nulle, appelée facteur d'échelle.

### 3.2.4 Synchronisation projective modifiée

On dit qu'il y a une synchronisation projective modifiée (SPM) entre les deux systèmes maître et esclave, s'il existe un contrôle efficace  $u(t, x, y)$ , de telle sorte que l'équation suivante :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|By(t) - x(t)\| = 0, \quad (3.15)$$

est satisfaite pour toutes conditions initiales  $x(0)$  et  $y(0)$  des deux systèmes, où  $B$  est une matrice diagonale constante non nulle, appelée matrice d'échelle i.e ,

$$B = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n), \quad b_i \neq b_j, \quad \text{pour tout } i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.16)$$

**Remarque 3.1.** La synchronisation complète (respectivement, l'anti-synchronisation) est le cas particulier de synchronisation projective où le facteur d'échelle  $\theta = 1$  (respectivement  $\theta = -1$ ).

### 3.2.5 Synchronisation généralisée de type Q – S

On dit qu'il y a une synchronisation généralisée de type Q–S entre les deux systèmes, jusqu'à des matrices de mise à l'échelle  $Q$  et  $S$ , s'il existe un contrôle  $u(t, x, y)$ , tel que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Qy(t) - Sx(t)\| = 0, \quad (3.17)$$

pour toutes conditions initiales  $x(0)$  et  $y(0)$  des deux systèmes.

### 3.3 Problème de synchronisation généralisée entre deux systèmes chaotiques d'ordres fractionnaires non commensurables et de dimensions différentes

Comme nous avons mentionné dans l'introduction, la configuration de base d'un système de synchronisation est constituée en général de deux systèmes : l'un est dit système émetteur et l'autre dit système récepteur. Notons que les systèmes émetteur et récepteur peuvent être identiques avec des conditions initiales différentes, ou complètement différents.

Dans la littérature, la plupart des auteurs ont étudié seulement la synchronisation des systèmes chaotiques de même dimension. Cependant, dans de nombreux systèmes réels, la synchronisation est réalisée à travers des oscillateurs de dimensions différentes, en particulier les systèmes en sciences biologiques et en sciences sociales. Par exemple, nous pouvons voir que deux systèmes circulatoires et respiratoires se comportent de façon synchrone, mais leurs modèles et leurs dimensions sont parfaitement différents [55].

Récemment, le calcul fractionnaire a attiré beaucoup d'attention des chercheurs aussi bien que des ingénieurs, et est devenu un moyen excellent pour décrire la dynamique de systèmes complexes.

Sur la base du critère de stabilité des systèmes fractionnaires linéaires, de nombreux systèmes chaotiques d'ordres fractionnaires peuvent être synchronisés [56, 57, 58, 59].

D'autre part, et en raison de perturbations de nature variée et de bruits inévitables, en particulier dans un système compliqué ou dans un système de grande taille, il est difficile de détecter toutes les variables d'état dans des systèmes réels.

En 1999, Yang a proposé pour la première fois le concept de synchronisation de type  $Q - S$  [60], qui nécessite simplement une synchronisation de variables observable entre un système émetteur et celui de récepteur. Depuis lors, la synchronisation des systèmes chaotiques de type  $Q - S$  a encore considérée comme un sujet de recherche stimulant [61, 62, 63, 64], en se basant sur la théorie de stabilité des équations linéaires d'ordre entier.

Plus récemment, A. Ouannas et M. Al-sawalha [65] ont conçu deux schémas pour réaliser la synchronisation entre des systèmes chaotiques de dimensions différentes, en utilisant deux matrices de mise à l'échelle. Cependant, on devrait mentionner que les résultats fondamentaux précédents ont été réalisés seulement aux systèmes chaotiques d'ordre entier. Donc, il est très important de les étendre au cas non entier.

Motivé par les considérations ci-dessus, dans cette partie, nous abordons un nouveau schéma de synchronisation généralisée de type  $Q - S$  entre deux systèmes chaotiques d'ordres fractionnaires non commensurables et de dimensions différentes. La technique de la transformée de Laplace et le théorème de la valeur finale sont adoptés pour démontrer la convergence et analyser la stabilité du système erreur.

### 3.3.1 Position du problème

Pour définir la synchronisation proposée, considérons les deux systèmes fractionnaires suivants :

$$D^\alpha X = f(X). \quad (3.18)$$

$$D^\alpha Y = g(Y) + U, \quad (3.19)$$

où  $X \in \mathbb{R}^n$ ,  $Y \in \mathbb{R}^m$ , ( $m > n$ ) sont des vecteurs d'état des systèmes maître-esclave respectivement,  $U = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T \in \mathbb{R}^m$  est un paramètre de contrôle,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  sont des fonctions non linéaires et continues,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  et  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  sont des ordres des dérivés fractionnaires, tel que  $\alpha_i$  compris entre 0 et 1, pour tout  $i = 1, 2, \dots, m$ , et  $D^\alpha$  (resp.  $D^\alpha$ ) est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

Notre objectif maintenant est de concevoir un contrôle continu approprié  $U$ , de tel sorte que la synchronisation généralisée de type  $Q - S$  entre les systèmes (3.18) et (3.19) est réalisée.

Pour quantifier cet objectif, on définit l'erreur de synchronisation de la manière suivante :

$$e(t) = QY(t) - SX(t), \quad e(t) \in \mathbb{R}^d, \quad (3.20)$$

où  $S$  et  $Q$  sont des matrices scalaires vérifiant  $q_{ij} = s_{kh} = 0$ , pour tout  $i \neq j$  et  $k \neq h$ .

Ce qui signifie que les systèmes (3.18) et (3.19) sont globalement synchronisés de manière asymptotique, c'est-à-dire :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = 0. \quad (3.21)$$

Dans cette partie de ce chapitre, on va essayer de contrôler les parties linéaires des systèmes maître-esclave. En particulier, lorsque la dimension du système erreur  $d = m$ , on parle à la synchronisation généralisée de dimension augmentée, tandis que lorsque la dimension du système erreur  $d = n$ , on parle à la synchronisation généralisée de dimension réduite.

### 3.3.2 Synchronisation généralisée de dimension augmentée

Ici, supposons que  $d = m$ . Dans ce cas, la dynamique du système erreur (3.20) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$D^\alpha e(t) = QD^\alpha Y(t) - SD^\alpha X(t), \quad (3.22)$$

ou de manière équivalente :

$$\begin{aligned} D^\alpha e(t) &= Q[g(Y(t)) + U(t)] - Sf(X(t)) \\ &= A_1 e(t) + K(Y(t), X(t)) + QU(t), \end{aligned} \quad (3.23)$$

où :

$$K(Y(t), X(t)) = -A_1 e(t) + Qg(Y(t)) - Sf(X(t)), \quad (3.24)$$

et  $A_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  est la partie linéaire du système (3.19).

Choisissons maintenant le contrôle  $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ , de telle sorte que la partie non linéaire du système (3.24) soit éliminée et le système erreur converge asymptotiquement vers zéro. Supposons alors que  $U$  satisfait la relation suivante :

$$QU(t) = -K(y(t), x(t)) + Be(t), \quad (3.25)$$

où  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$  est la matrice de gain, qui peut être choisie de telle sorte que l'erreur de synchronisation converge asymptotiquement vers zéro.

L'utilisation de l'hypothèse (3.25), nous permet de réécrire (3.23) comme suit :

$$D^\alpha e(t) = (A_1 + B)e(t). \quad (3.26)$$

Pour prouver que le système erreur (3.26) converge vers 0, on va utiliser la transformation de Laplace. Posons :

$$F(s) = L(e(t)). \quad (3.27)$$

En utilisant la formule :

$$L\{D^\alpha e(t)\} = s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1}e(0), \quad (3.28)$$

nous obtenons le nouveau système suivant :

$$s^\alpha F(s) = s^{\alpha-1}e(0) + (A_1 + B)F(s), \quad (3.29)$$

où :

$$F = (F_1, F_2, \dots, F_m)^T, \quad s^\alpha = (s^{\alpha_1}, s^{\alpha_2}, \dots, s^{\alpha_m}). \quad (3.30)$$

Nous avons donc le résultat suivant :

**Théorème 3.3.1.** *Si la matrice  $B$  est choisi de telle sorte que tous les pôles de  $sF_i$  (les  $F_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  sont des solutions du système (3.29)) sont situés dans la moitié gauche ouvert du plan complexe, alors la synchronisation souhaité entre les deux systèmes (3.18) et (3.19) est achevée, pour tout  $\alpha_i$  compris entre 0 et 1.*

**Preuve 3.3.1.** *Supposons que la matrice  $B$  est choisi de telle sorte que les pôles de  $sF_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  sont situés dans la moitié gauche ouvert du plan complexe. En utilisant la valeur finale du théorème de Laplace 2.1.2, on obtient :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e_i(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} sF_i(s) = 0, \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.31)$$

*De cette dernière formule, on peut facilement voir que le système maître (3.18) est complètement et pratiquement synchronisé avec le système esclave (3.19).*

### 3.3.3 Synchronisation généralisée de dimension réduite

Supposons maintenant que  $d = n$ . Dans le cadre de ce choix, la dynamique de système erreur peut s'écrire sous la forme suivante :

$$D^\alpha e(t) = QD^\alpha Y(t) - SD^\alpha X(t), \quad (3.32)$$

ou de manière équivalente :

$$D^\alpha e(t) = A_2 e(t) + H(Y(t), X(t)) + QU(t), \quad (3.33)$$

où :

$$H(Y(t), X(t)) = -A_2 e(t) + Qg(Y(t)) - Sf(X(t)), \quad (3.34)$$

et  $A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est la partie linéaire du système (3.18).

Choisissons maintenant le contrôle  $U = (u_1, u_2, \dots, u_n, 0, \dots, 0)^T$  de telle sorte que la partie non linéaire du système (3.34) soit éliminée et le système erreur converge asymptotiquement vers zéro. Pour cela, supposons que  $U$  satisfait la relation suivante :

$$Q^0 U^0 = -H(Y(t), X(t)) + Ce(t), \quad (3.35)$$

où  $U^0 = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ ,  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice de gain à déterminer et

$$Q^0 = \text{diag}(Q_{11}, Q_{22}, \dots, Q_{mm}). \quad (3.36)$$

Finalement, la dynamique du système erreur peut se réécrire sous la forme :

$$D^\alpha e(t) = (A_2 + C)e(t). \quad (3.37)$$

Pour prouver que le système erreur converge vers 0, cette fois encore, on va utiliser la transformation de Laplace. Posons :

$$F(s) = L(e(t)). \quad (3.38)$$

En utilisant la formule :

$$L\{D^\alpha e(t)\} = s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1}e(0), \quad (3.39)$$

nous obtenons le nouveau système suivant :

$$s^\alpha F(s) = s^{\alpha-1}e(0) + (A_2 + C)F(s), \quad (3.40)$$

où :

$$F = (F_1, F_2, \dots, F_n)^T, \quad s^\alpha = (s^{\alpha_1}, s^{\alpha_2}, \dots, s^{\alpha_n}). \quad (3.41)$$

Nous avons donc, le résultat suivant :

**Théorème 3.3.2.** *Si la matrice C est choisi de telle sorte que tous les pôles de  $sF_i$  (les  $F_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  sont des solutions du système (3.40)) sont situés dans la moitié gauche ouvert du plan complexe, alors la synchronisation souhaitée, entre les deux systèmes (3.18) et (3.19) est achevée, pour tout  $\alpha_i$  compris entre 0 et 1.*

**Preuve 3.3.2.** *La preuve est similaire de celle du Théorème 3.3.1.*

### 3.3.4 Résultats de simulation (dimension augmentée)

Dans ce cas, nous supposons que le système chaotique modifié basé sur un memristor (SCM) [66] est le système émetteur. La dynamique de ce système est donnée par le modèle mathématique :

$$\begin{cases} D^{\alpha_1} x_1(t) = a_1 x_2, \\ D^{\alpha_2} x_2(t) = -b_1(x_1 + M(x_3)x_2), \\ D^{\alpha_3} x_3(t) = -x_2 - c_1 x_3 + x_2^2 x_3, \end{cases} \quad (3.42)$$

où  $(x_1, x_2, x_3)$  est le vecteur d'état,  $a_1, b_1, c_1, \beta, \gamma$  sont des paramètres positifs,  $M$  est la fonction memristor définie par :

$$M(x_3(t)) = \gamma x_3^2(t) - \beta, \quad (3.43)$$

et  $\alpha_i, i = 1, 2, 3$  sont des nombres rationnels compris entre 0 et 1.

Pour toute simulation numérique, nous prenons les conditions initiales du système (3.42) comme suit :

$$x_1(0) = 0.1, x_2(0) = -0.5, x_3(0) = -1. \quad (3.44)$$

Les paramètres de système émetteur sont sélectionnées comme :

$$(a_1, b_1, c_1, \beta, \gamma) = (1, \frac{1}{3}, 0.9, 3, 0.4). \quad (3.45)$$

Les ordres des dérivées fractionnaires proposés sont choisis comme :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0.97, 0.98, 0.98). \quad (3.46)$$

Le système (3.42) présente un comportement chaotique, comme le montre à la Figure 3.1.

La partie linéaire  $A_2$  du système (3.42) est donnée par :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 \\ -b_1 & b_1\beta & 0 \\ 0 & -1 & -c_1 \end{pmatrix}.$$

Supposons que le système de Lorenz hyperchaotique d'ordre fractionnaire [67] est le

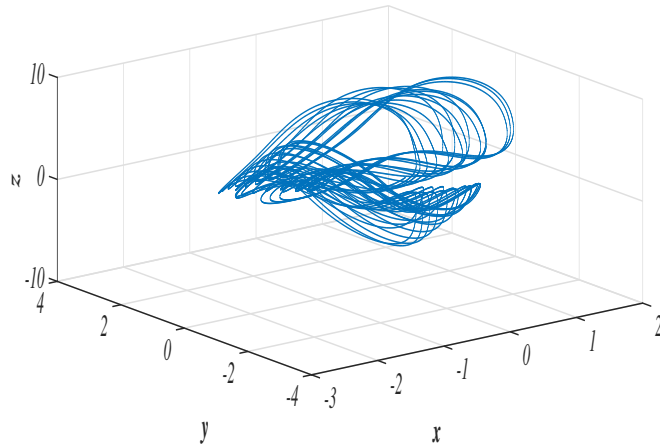


FIGURE 3.1 – Attracteur chaotique du système SCM, avec  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0.97, 0.98, 0.98)$ .

système récepteur. Le système hyperchaotique contrôlé de Lorenz est exprimé par le modèle mathématique :

$$\begin{cases} D^{\alpha_1} y_1(t) = a_2(y_2 - y_1) + y_4 + u_1, \\ D^{\alpha_2} y_2(t) = c_2 y_1 - y_2 - y_1 y_3 + u_2, \\ D^{\alpha_3} y_3(t) = y_1 y_2 - b_2 y_3 + u_3, \\ D^{\alpha_4} y_4(t) = -y_2 y_3 + r y_4 + u_4, \end{cases} \quad (3.47)$$

où  $(y_1, y_2, y_3, y_4)^T$  est le vecteur d'état de ce système,  $a_2, c_2, b_2, r$  sont des paramètres positifs et  $\alpha_i, i = 1, 2, 3, 4$  sont des nombres rationnels compris entre 0 et 1.

Pour toute simulation numérique, nous prenons les conditions initiales du système (3.47) comme :

$$y_1(0) = 1, y_2(0) = 1, y_3(0) = 0, y_4(0) = -1. \quad (3.48)$$

Les valeurs des paramètres sont sélectionnés comme :

$$(a_2, c_2, b_2, r) = (10, 28, \frac{8}{3}, 1.3). \quad (3.49)$$

Les ordres des dérivés fractionnaires proposés sont choisis comme :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0.97, 0.98, 0.98, 0.97). \quad (3.50)$$

Le système (3.47) (avec  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ ) présente un comportement chaotique,

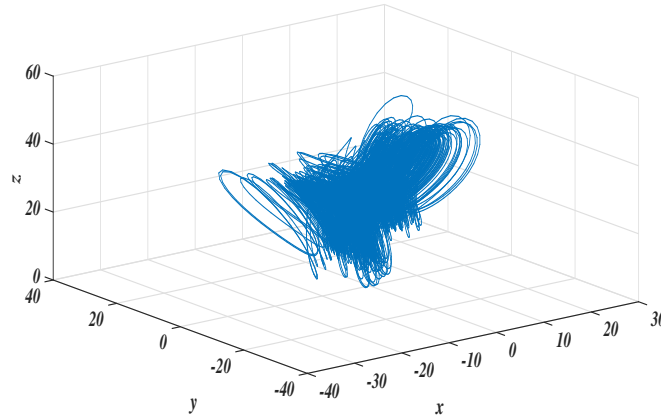


FIGURE 3.2 – Attracteur chaotique du système de Lorenz avec  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0.97, 0.98, 0.98, 0.97)$ .

comme le montre dans la Figure 3.2.

La partie linéaire  $A_1$  du système (3.47) est donnée par :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -a_2 & a_2 & 0 & 1 \\ c_2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{pmatrix}. \quad (3.51)$$

Ici, nous choisissons :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

Pour atteindre notre objectif, on définit le système erreur comme :

$$e(t) = QY(t) - SX(t). \quad (3.53)$$



C'est-à-dire :

$$\begin{cases} e_1 = -2x_1 + y_1, \\ e_2 = -2(x_2 - y_2), \\ e_3 = -3x_3 + y_3, \\ e_4 = 2y_4. \end{cases} \quad (3.54)$$

Dans ce cas, les conditions initiales du système erreur sont calculés par :

$$e_1(0) = 0.8, e_2(0) = 2, e_3(0) = -4, e_4(0) = -2. \quad (3.55)$$

Pour la simplicité, choisissons la matrice de gain  $B$ , de telle sorte que :

$$A_1 + B = \begin{pmatrix} -a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r \end{pmatrix}. \quad (3.56)$$

Par conséquent, nous pouvons choisir les coordonnées du contrôle  $U$  comme suit :

$$\begin{cases} u_1 = -e_1 a_2 + 2a_1 x_2 - y_4 + a_2 y_1 - a_2 y_2, \\ u_2 = -\frac{1}{2} b_2 e_1 - M b_1 x_2 x_3 + \frac{1}{2} x_2^2 x_3 - \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} c_1 x_3 - b_1 x_1 + y_2 - c_2 y_1 + y_1 y_3, \\ u_3 = -c_2 e_1 + 3x_2^2 x_3 - 3x_2 - 3c_1 x_3 + b_2 y_3 - y_1 y_2, \\ u_4 = -\frac{1}{2} r e_1 - r y_4 + y_2 y_3. \end{cases} \quad (3.57)$$

Dans le cadre de ce choix particulier, la dynamique de système erreur devient :

$$D^{\alpha_i} e_i(t) = (A_1 + B)e_i(t), \text{ pour tout } i = 1, 2, 3, 4. \quad (3.58)$$

Pour prouver que le système d'erreur converge vers 0, nous appliquons les formules (3.27) et (3.28), nous obtenons :

$$\begin{cases} s^{\alpha_1} F_1(s) = s^{\alpha_1-1} e_1(0) - a_2 F_1(s), \\ s^{\alpha_2} F_2(s) = s^{\alpha_2-1} e_2(0) - b_2 F_2(s), \\ s^{\alpha_3} F_3(s) = s^{\alpha_3-1} e_3(0) - c_2 F_3(s), \\ s^{\alpha_4} F_4(s) = s^{\alpha_4-1} e_4(0) - r F_4(s). \end{cases} \quad (3.59)$$

Il découle des équations du système (3.59) que :

$$\begin{cases} F_1(s) = \frac{s^{\alpha_1-1} e_1(0)}{s^{\alpha_1} + a_2}, \\ F_2(s) = \frac{s^{\alpha_2-1} e_2(0)}{s^{\alpha_2} + b_2}, \\ F_3(s) = \frac{s^{\alpha_3-1} e_3(0)}{s^{\alpha_3} + c_2}, \\ F_4(s) = \frac{s^{\alpha_4-1} e_4(0)}{s^{\alpha_4} + r}. \end{cases} \quad (3.60)$$

Puisque  $a_2, b_2, c_2, r$  sont des paramètres positifs, nous pouvons en conclure que tous les pôles de  $sF_i(s)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  se trouvent dans la moitié gauche ouvert du plan complexe. Ainsi, en utilisant le Théorème 2.1.2 (théorème de la valeur finale), on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e_i(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} sF_i(s) = 0, \quad \text{pour tout } i = 1, 2, 3, 4. \quad (3.61)$$

Cela signifie que le système émetteur (3.42) et le système récepteur (3.47) réalisent la synchronisation.

L'évolution des fonctions d'erreur, est illustrée à la Figure 3.3.

D'après la Figure 3.3, on remarque qu'après un temps très court, les erreurs du système

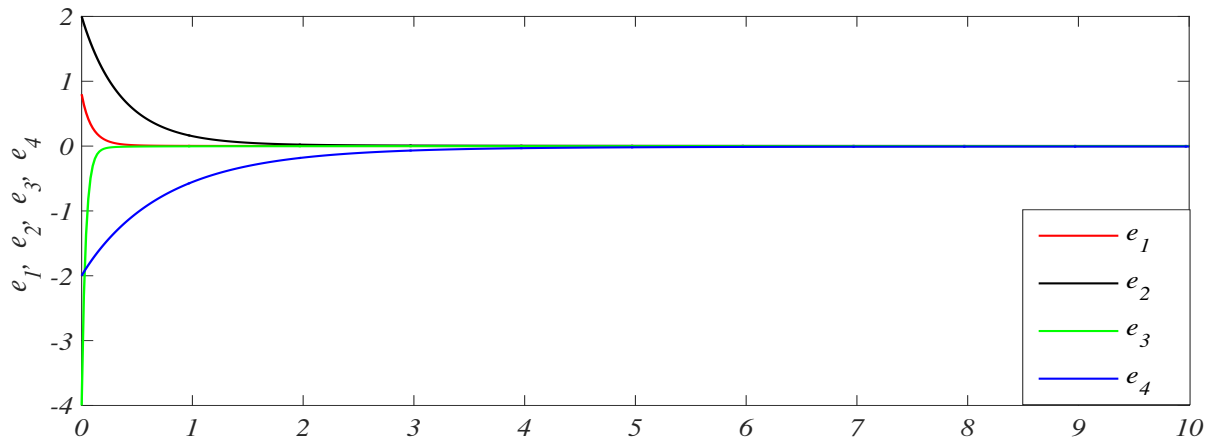


FIGURE 3.3 – L'évolution des fonctions d'erreur du système (3.58).

(3.58) convergent rapidement vers zéro, ce qui montre que la synchronisation souhaité, entre les deux systèmes (3.42) et (3.47) est achevée.

### 3.3.5 Résultats de simulation (dimension réduite)

Prenons les mêmes systèmes précédents. Ici, nous choisissons :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}, \quad (Q^0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et } S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.62)$$

Toujours, pour étudier la synchronisation généralisée des systèmes (3.42) et (3.47), on définit l'état de l'erreur comme suit :

$$e(t) = QY(t) - SX(t), \quad (3.63)$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} e_1 = -2x_1 + y_1, \\ e_2 = -3x_2 + 2y_2, \\ e_3 = -x_3 + \frac{1}{2}y_3. \end{cases} \quad (3.64)$$

Dans ce cas, les conditions initiales du système erreur sont calculés par :

$$e_1(0) = 1, e_2(0) = 3.5, e_3(0) = -1. \quad (3.65)$$

Pour la simplicité, choisissons la matrice de gain  $C$ , de telle sorte que :

$$(A_2 + C) = \begin{pmatrix} -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -b_1\beta & 0 \\ 0 & 0 & -c_1 \end{pmatrix}. \quad (3.66)$$

Par conséquent

$$\begin{cases} u_1 = -a_1 e_1 + 2a_1 x_2 - y_4 + a_2 y_1 - a_2 y_2, \\ u_2 = -\frac{1}{2} b_1 \beta e_1 - \frac{3}{2} M b_1 x_2 x_3 - \frac{3}{2} b_1 x_1 + y_2 - c_2 y_1 + y_1 y_3, \\ u_3 = -2e_1 - 2x_2 - 2c_1 x_3 + 2x_2^2 x_3 + b_2 y_3 - y_1 y_2 - 2c_1, \\ u_4 = 0. \end{cases} \quad (3.67)$$

La dynamique des erreurs de synchronisation devient :

$$D^{\alpha_i} e_i(t) = (A_2 + C)e_i(t), \text{ pour tout } i = 1, 2, 3. \quad (3.68)$$

Pour prouver que le système d'erreur converge vers 0, nous appliquons les formules (3.27) et (3.28), nous obtenons :

$$\begin{cases} s^{\alpha_1} F_1(s) = s^{\alpha_1-1} e_1(0) - a_1 F_1(s), \\ s^{\alpha_2} F_2(s) = s^{\alpha_2-1} e_2(0) - b_1 \beta F_2(s), \\ s^{\alpha_3} F_3(s) = s^{\alpha_3-1} e_3(0) - c_1 F_3(s). \end{cases} \quad (3.69)$$

Il découle des équations du système (3.69) que :

$$\begin{cases} F_1(s) = \frac{s^{\alpha_1-1} e_1(0)}{s^{\alpha_1} + a_1}, \\ F_2(s) = \frac{s^{\alpha_2-1} e_2(0)}{s^{\alpha_2} + b_1 \beta}, \\ F_3(s) = \frac{s^{\alpha_3-1} e_3(0)}{s^{\alpha_3} + c_1}. \end{cases} \quad (3.70)$$

Puisque  $a_1, b_1, c_1$  sont des paramètres positifs, nous pouvons en conclure que tous les pôles de  $sF_i$   $i = 1, 2, 3$  sont situés dans la moitié gauche ouvert du plan complexe. Ainsi, en utilisant le Théorème 2.1.2 (théorème de la valeur finale), on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e_i(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} sF_i(s) = 0, \text{ pour tout } i = 1, 2, 3, \quad (3.71)$$

ce qui montre clairement que le système émetteur (3.42) et le système récepteur (3.47) réalisent la synchronisation proposée.

La simulation numérique confirme ce résultat, comme la montre dans la Figure 3.4.

D'après la Figure 3.4, on remarque qu'après un temps très court, les erreurs du système (3.68) convergent rapidement vers zéro, ce qui montre que la synchronisation proposée entre les deux systèmes (3.42) et (3.47) est achevée.

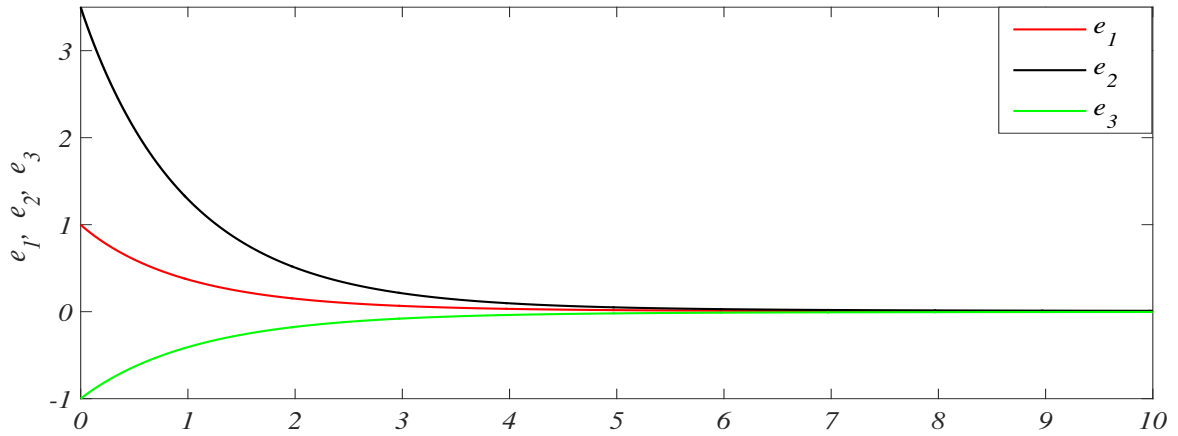


FIGURE 3.4 – L'évolution des fonctions d'erreur du système (3.68).

### 3.4 Problème de synchronisation projective modifiée entre un système hyperchaotique d'ordre entier et un système hyperchaotique d'ordre fractionnaire

Comme nous avons mentionnés dans l'introduction, le chaos (ou hyper-chaos) est un phénomène non linéaire déterministe plutôt que probabiliste, qui a été observé dans plusieurs systèmes, tels que les systèmes physiques [1], les systèmes chimiques [2], les systèmes biologiques [3] et les systèmes économiques [4], etc.

Les systèmes chaotiques sont non linéaires. La caractéristique principale utilisée pour connaître le comportement chaotique est le critère des exposants de Lyapounov. En effet, un système qui possède un exposant positif de Lyapounov est un système chaotique. Cependant, un système hyper-chaotique, qui est habituellement un système chaotique à quatre dimensions possède au plus d'un exposant positif de Lyapounov. Il a été récemment démontré que plusieurs de systèmes d'ordre fractionnaire peuvent exhiber des comportements chaotiques (ou hyper-chaotiques), à travers le système de Lorenz [36], le système de Chen [37], le système de Liu [38], le système de Qai [39] et le système de Lü [40].

La synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre entier ou d'ordre fractionnaire a attiré une attention croissante des physiciens aussi bien que des ingénieurs durant ces dernières années. En effet, différents types de ce genre de synchronisation ont été étudiés, tels que les travaux présentés dans [68, 69, 70].

D'autre part, la synchronisation projectives modifiée (SPM) des systèmes chaotiques (ou hyper-chaotique) d'ordre entier ou d'ordre fractionnaire est encore considérée

comme un nouveau sujet de recherche stimulant, où le système couplé maître-esclave peut être synchronisé jusqu'à une matrice de mise à l'échelle. Par conséquent, il est très intéressant d'étudier ce type de synchronisation. Il a été récemment démontré que beaucoup de systèmes chaotiques peuvent se synchroniser au sens de SPM. Par exemple, dans [71], une technique de commande active par mode de glissement a été dérivée pour effectuer la SPM des systèmes chaotiques fractionnaire en se basant sur une approche de Lyapunov. Une commande adaptative pour réaliser une SPM pratique des systèmes chaotiques incertains a été rapporté par Park, J.H. dans [72]. Cependant, toutes ces méthodes de SPM ont été seulement employés pour les systèmes chaotiques d'ordre entier ou d'ordre fractionnaire.

Motivé par les considérations ci-dessus, dans ce chapitre, nous abordons le problème de SPM entre un système hyperchaotique d'ordre entier et un système hyperchaotique d'ordre fractionnaire.

Les principales contributions de cette étude sont :

1. Un nouveau système hyperchaotique est proposé. Quelques analyses et simulations intéressantes du système sont présentées. Il est particulièrement intéressant de noter que le nouveau système hyperchaotique généré à partir de système de Rössler modifié.
2. Un nouveau schéma de la SPM entre un système hyperchaotique d'ordre entier et un système hyperchaotique d'ordre fractionnaire est également proposé.
3. Avec une nouvelle extension du théorème de stabilité de Lyapounov pour les systèmes fractionnaires présenté dans le deuxième chapitre, on peut assurer la SPM entre un système hyperchaotique d'ordre entier et un système hyperchaotique d'ordre fractionnaire. Spécifiquement, un contrôle continu simple et efficace est proposé pour réaliser la synchronisation souhaité.
4. Des simulations numériques sont également données pour illustrer et appuyer les résultats analytiques.

### 3.4.1 Nouveau système hyperchaotique et leur comportements dynamiques

On sait que le premier modèle où il a été démontré l'existence d'un comportement hyperchaotique est le système de Rössler suivant [73] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + ax_2 + x_4, \\ \dot{x}_3 = x_1x_3 + b, \\ \dot{x}_4 = -cx_3 + dx_4, \end{cases} \quad (3.72)$$

où  $x_1, x_2, x_3, x_4$  sont des variables d'état et  $a, b, c$  et  $d$  sont des paramètres positifs. Il est bien connu que ce système présente un comportement hyperchaotique lorsque :

$$a = 0.25, b = 3, c = 0.5, d = 0.05. \quad (3.73)$$

Dans cette partie, nous proposons un nouveau système hyperchaotique généré à partir d'une petite modification du système (3.72). Notre nouveau système hyperchaotique est décrit par un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3 + x_4, \\ \dot{x}_2 = x_1 + a_1 x_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 x_3 - a_3 x_3 + a_2, \\ \dot{x}_4 = a_4 x_1, \end{cases} \quad (3.74)$$

où  $x_1, x_2, x_3, x_4$  sont les variables d'état, et  $a_1, a_2, a_3, a_4$  sont des constantes réelles positives. En comparant le côté droit du système (3.74) à zéro, nous pouvons constater que ce système ayant un seul point d'équilibre  $P(0, 0, \frac{a_2}{a_3}, \frac{a_2}{a_3})$ .

La matrice jacobienne du système (3.74) au point  $P$  est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 \\ \frac{a_2}{a_3} & 0 & -a_3 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.75)$$

et l'équation caractéristique est donnée par :

$$\begin{aligned} \lambda^4 + (a_3 - a_1) \lambda^3 + \left( \frac{a_2}{a_3} - a_4 - a_1 a_3 + 1 \right) \lambda^2 + \left( a_3 + a_4 (a_1 - a_3) - a_1 \frac{a_2}{a_3} \right) \lambda \\ + \left( a_4 \left( \frac{a_2}{a_3} + 1 \right) - a_4 \left( \frac{a_2}{a_3} - a_1 a_3 + 1 \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Lorsque les paramètres du système sont donnés par

$$a_1 = 0.283, a_2 = 0.01, a_3 = 5 \text{ et } a_4 = 0.1, \quad (3.77)$$

on va voir que le système est hyperchaotique, et dans ce cas, les valeurs propres appartenant au système hyperchaotique (3.74) sont calculés par :

$$-3.193 \times 10^{-2}, -4.99, 0.157 \pm 0.94043i. \quad (3.78)$$

Il est évident que le système a un point d'équilibre instable.

### Attracteur hyperchaotique

Pour la simulation numérique, l'algorithme d'intégration de Runge-Kutta de quatrième ordre a été réalisé pour résoudre ce système.

Le nouveau système(3.74) peut afficher un attracteur hyperchaotique si les paramètres  $a_1, a_2, a_3$  et  $a_4$  prennent des valeurs comme dans le cas (3.77) et les valeurs initiales du système (3.74) comme :

$$x_1(0) = 2, x_2(0) = -5, x_3(0) = 0.03 \text{ et } x_4(0) = 0.2. \quad (3.79)$$

Les projections de portrait de phase sur les plans :  $x_2 - x_3, x_1 - x_3, x_1 - x_2 - x_3$  et  $x_1 - x_3 - x_4$  sont représentés dans la Figure 3.5.

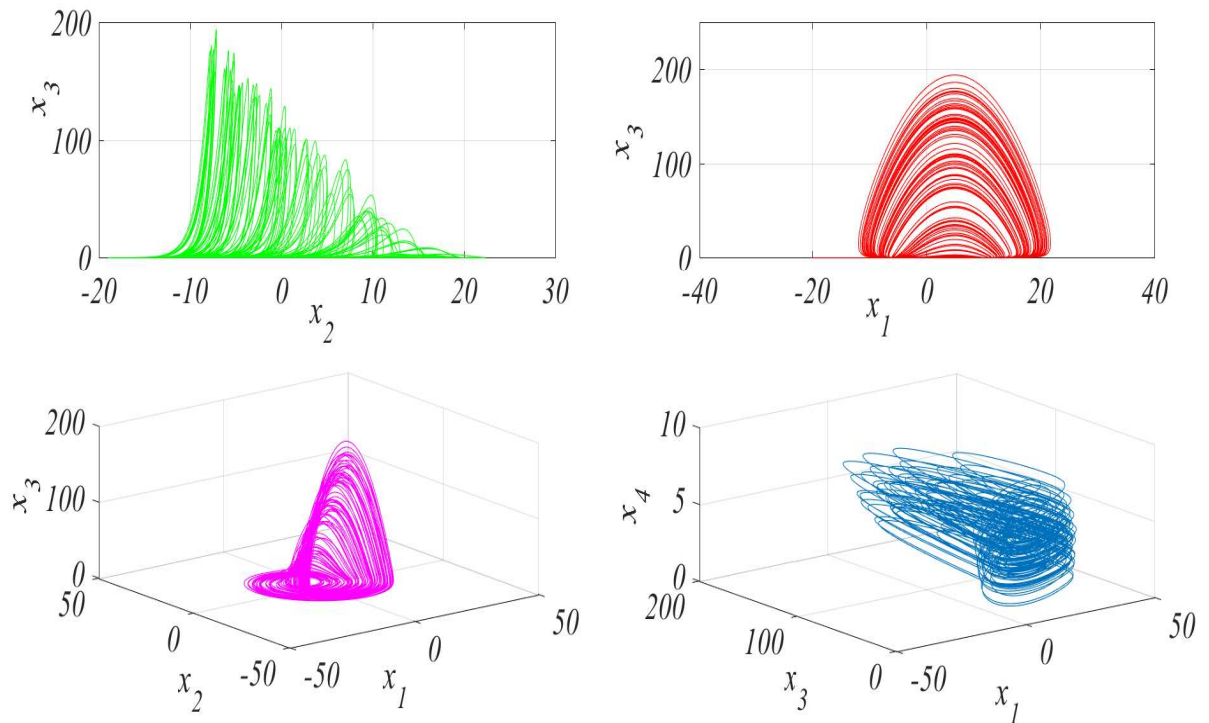


FIGURE 3.5 – Projections de portrait de phase du système (3.74)

### Spectre des exposants de Lyapounov

Pour étudier l'impact des paramètres sur le système dynamique proposé, supposons que les trois paramètres  $a_2, a_3, a_4$  sont maintenus constants et nous prenons  $a_1$  varier dans l'intervalle  $[0, 0.3]$ . La variation des trois plus grand exposants de Lyapounov pour différentes valeurs de  $a_1$  est donné dans la Figure 3.6, en utilisant l'algorithme de Wolf [74].

En particulier, lorsque les paramètres  $a_1, a_2, a_3, a_4$  prennent des valeurs comme dans la cas (3.77) et les conditions initiales de nouveau système hyperchaotique (3.74) prennent des valeurs :

$$x_1(0) = 0.1, x_2(0) = -0.1, x_3(0) = 0 \text{ et } x_4(0) = 10, \quad (3.80)$$

les exposants de Lyapounov du système (3.74) sont donnés par :

$$\lambda_1 = 0.14, \lambda_2 = 0.034, \lambda_3 = 0 \text{ et } \lambda_4 = -5.27. \quad (3.81)$$

Ce qui assure que le système est bien hyperchaotique.

De plus,  $\sum_{i=1}^4 \lambda_i = -5.96 < 0$ , ce qui montre que le système est bien dissipatif, et par conséquent, le volume du système va diminuer de la valeur  $V_0$  à 0. Cela signifie que toutes les trajectoires du nouveau système arrivent finalement à un attracteur quand  $t \rightarrow +\infty$ .

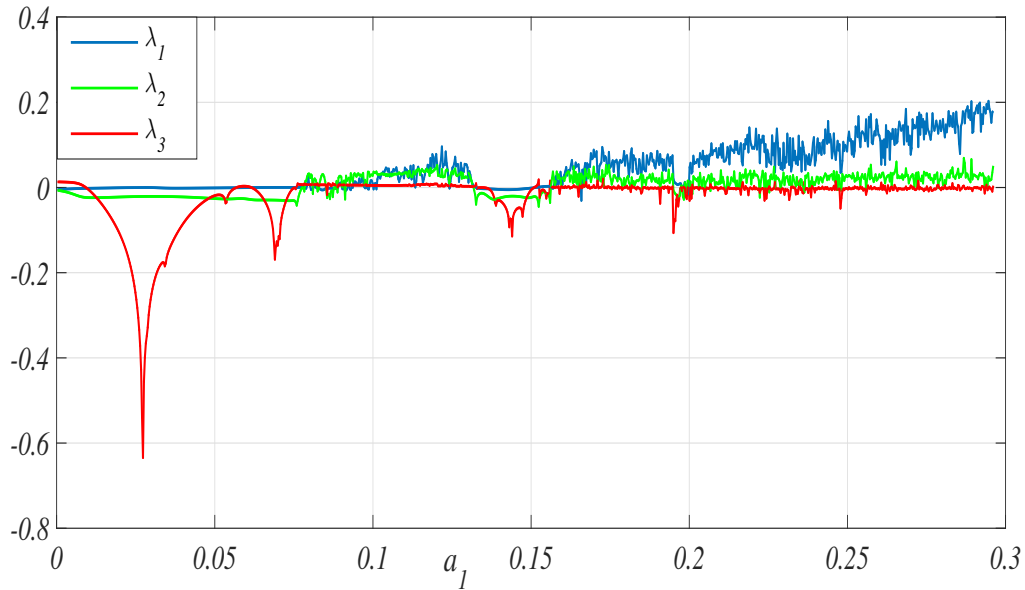


FIGURE 3.6 – Les trois plus grand exposants de Lyapounov du système (3.74).

### 3.4.2 SPM entre un système hyperchaotique d'ordre entier et un système hyperchaotique d'ordre fractionnaire

La principale motivation de cette partie est de construire un contrôle actif pour que la SPM entre un système hyperchaotique d'ordre entier et un système hyperchaotique d'ordre fractionnaire soit achevée.

#### Résultats théoriques

Pour définir la SPM entre un système hyperchaotique d'ordre entier et un système hyperchaotique d'ordre fractionnaire, considérons les deux systèmes suivants :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad (3.82)$$

$$D^\alpha y(t) = g(y(t)) + u(t), \quad (3.83)$$



où  $0 < \alpha < 1$ ,  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ,  $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$  sont des vecteurs d'état des systèmes maître-esclave respectivement,  $u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T \in \mathbb{R}^n$  est un paramètre de contrôle et  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont des fonctions non linéaires et continues.

La synchronisation par la méthode du contrôle continu consiste à choisir le contrôle  $u$  de tel sorte que les deux systèmes (3.82) et (3.83) peuvent être synchronisés au sens de SPM, c'est-à-dire :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0 \quad (3.84)$$

Pour quantifier cet objectif, l'erreur de synchronisation est défini comme suit :

$$e = My - x, \quad (3.85)$$

où  $M = \text{diag}\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  dénote la matrice de mise à l'échelle, définissant une relation proportionnelle entre les systèmes synchronisés.

La dynamique de l'erreur de synchronisation peut alors être exprimée comme suit :

$$D^\alpha e = MD^\alpha y - D^\alpha x. \quad (3.86)$$

Supposons que la matrice de mise à l'échelle  $M$  est inversible. Nous avons donc le résultat suivant.

**Théorème 3.4.1.** *Considérons les deux systèmes maître-esclave (3.82) et (3.83), avec le contrôleur approprié :*

$$u = M^{-1}((A + C)e - MAy - Mg(y) + D^\alpha x), \quad (3.87)$$

où  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est la partie linéaire des systèmes et  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est la matrice de gain.

Si la matrice  $C$  est sélectionnée de tel sorte que la matrice  $A + C$  est définie négative, l'erreur de synchronisation converge asymptotiquement vers zéro.

**Preuve 3.4.1.** *La dynamique de l'erreur de synchronisation peut être exprimée comme suit :*

$$\begin{aligned} D^\alpha e &= M \times D^\alpha y - D^\alpha x \\ &= MAy + Mg(y) + Mu - D^\alpha x. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Avec le choix de contrôle continu (3.87), le système d'erreur (3.88) devient :

$$D^\alpha e = (A + C)e. \quad (3.89)$$

Considérons la fonction de Lyapounov candidate suivante :

$$V(e) = \frac{1}{2} e^T e. \quad (3.90)$$

L'utilisation du lemme 2.3.2 (voir chapitre 2), nous donne :

$$\begin{aligned} D^\alpha V(e) &= D^\alpha \left( \frac{1}{2} e^T e \right) \\ &\leq e^T D^\alpha e \\ &= e^T (A + C) e. \end{aligned}$$

Donc, si la matrice  $C$  est sélectionnée de tel sorte que la matrice  $A + C$  est définie strictement négatives, la condition du théorème est satisfaite et le système d'erreur devient asymptotiquement stable. Par conséquent, les systèmes (3.82) et (3.83) réalisent la SPM. Ceci termine la preuve du théorème.

### Résultats de simulation

Pour vérifier et démontrer l'efficacité et la faisabilité de la méthode de synchronisation présentée, nous prenons le nouveau système hyperchaotique comme un système maître et sa version d'ordre fractionnaire en tant qu'un système esclave. Le système maître est défini comme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3 + x_4, \\ \dot{x}_2 = x_1 + a_1 x_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 x_3 - a_3 x_3 + a_2, \\ \dot{x}_4 = a_4 x_1. \end{cases} \quad (3.91)$$

Le système esclave est décrit par :

$$\begin{cases} D^\alpha y_1 = -y_2 - y_3 + y_4 + u_1, \\ D^\alpha y_2 = y_1 + a_1 y_2 + u_2, \\ D^\alpha y_3 = y_1 y_3 - a_3 y_3 + a_2 + u_3, \\ D^\alpha y_4 = a_4 y_1 + u_4, \end{cases} \quad (3.92)$$

où  $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$  est la fonction vectorielle de contrôle continu, et  $\alpha$  est un nombre rationnel compris entre 0 et 1. La partie linéaire des systèmes (3.91) et (3.92) est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Selon la technique de contrôle de SPM proposée dans la section précédente, la matrice  $M$  est sélectionnée comme :

$$M = \text{diag}(20, 40, \frac{5}{4}, -7) \quad (3.93)$$

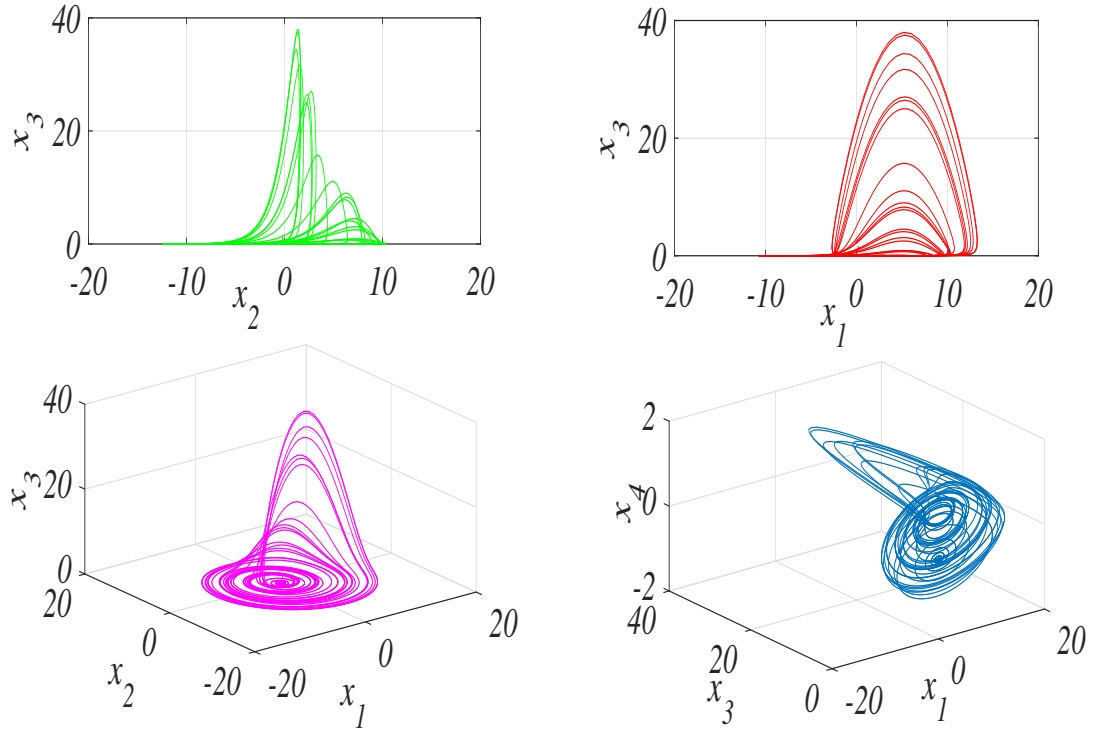


FIGURE 3.7 – Projections de portrait de phase du système (3.92).

La matrice de gain  $C$  est sélectionnée comme :

$$C = \begin{pmatrix} -0.2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -a_1 - 0.2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a_3 - 0.3 & 1 \\ -a_4 & 0 & 0 & -0.3 \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

D'après la définition de la dérivation au sens de Caputo, on a :

$$D^\alpha x(t) = J^{1-\alpha}(\dot{x}(t)) = J^{1-\alpha}f(x(t)), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (3.95)$$

Par conséquent, le contrôle  $u$  peut être choisit comme suit :

$$\begin{cases} u_1 = -0.01e_1 + 0.05e_4 + y_2 + y_3 - y_4 + \frac{1}{20}J^{1-\alpha}(-x_2 - x_3 + x_4), \\ u_2 = -0.005e_2 - 0.025e_4 - y_1 - a_1y_2 + \frac{1}{40}J^{1-\alpha}(x_1 + a_1x_2), \\ u_3 = -0.24e_3 - 0.8e_4 - y_1y_3 + a_3y_3 - a_2 + \frac{4}{5}J^{1-\alpha}(-a_3x_3 + x_1x_3 + a_2), \\ u_4 = -0.042e_4 - a_4y_1 - \frac{1}{7}J^{1-\alpha}(a_4x_1), \end{cases} \quad (3.96)$$

et le système d'erreur devient :

$$\begin{pmatrix} D^\alpha e_1 \\ D^\alpha e_2 \\ D^\alpha e_3 \\ D^\alpha e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -0.3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} \quad (3.97)$$

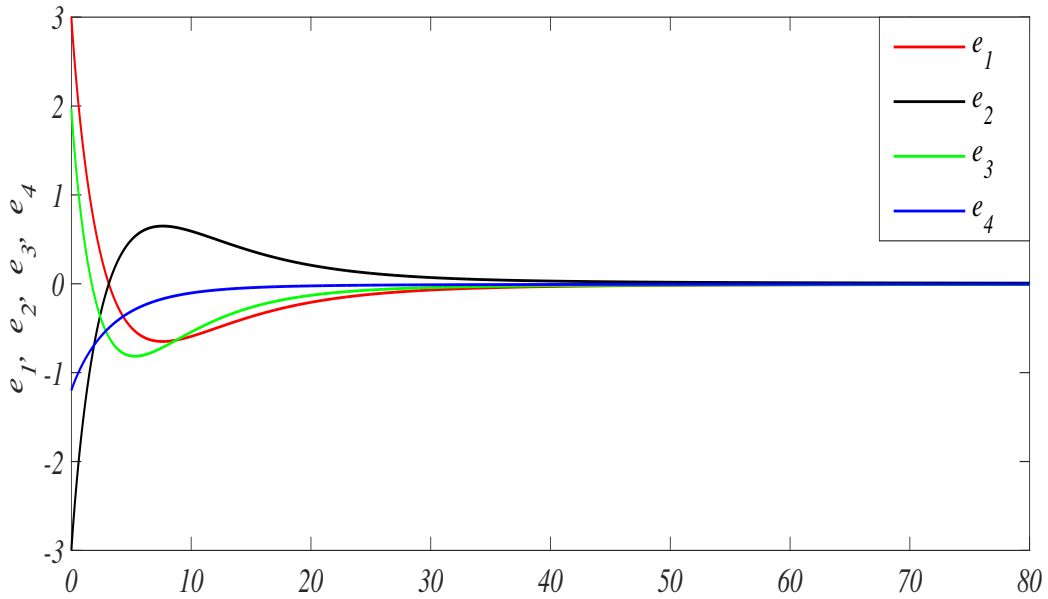


FIGURE 3.8 – les courbes de l’erreur de synchronisation (3.97.)

Il est facile de voir que la matrice  $A + C$  est définie négative. Alors la condition du théorème est satisfaite, ce qui assure la réalisation de la SPM entre les systèmes proposés. Dans les simulations numériques, la méthode Adams-Bashforth-Moulton est utilisée pour résoudre les systèmes. Pour ces simulations numériques :

Les valeurs des paramètres des systèmes proposés sont identiques à celles du cas (3.77).

Les expériences sont effectuées pour une valeur fixe d’ordre fractionnaire  $\alpha = 0.95$ .

Les conditions initiales du système émetteur sont choisies comme dans le cas (3.79).

Les conditions initiales du système esclave sont choisies comme :

$$y_1(0) = 0.25, y_2(0) = -0.2, y_3(0) = 1.6 \text{ et } y_4(0) = -0.2 \quad (3.98)$$

Le système d’erreur a donc les valeurs initiales comme :

$$e_1(0) = 3, e_2(0) = -3, e_3(0) = 1.97 \text{ et } e_4(0) = -1.2 \quad (3.99)$$

Les projections du portrait de phase du système(3.92) dans les plans  $x_2 - x_3$ ,  $x_1 - x_3$ ,  $x_1 - x_2 - x_3$  et  $x_1 - x_3 - x_4$  sont représentés dans la Figure 3.7 et les courbes d’erreur de synchronisation (3.97) sont représentés dans la Figure 3.8.

De la Figure 3.8, on peut facilement voir que toutes les variables du système d’erreur (3.97) convergent rapidement vers zéro, ce qui indique que la SPM entre les systèmes hyperchaotiques (3.91) et (3.92) est achevée.

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre de cette thèse, nous avons étudié deux sujets majeurs :

Dans le premier sujet, un problème de synchronisation généralisée de type  $Q - S$  entre deux systèmes chaotique de dimensions différentes et d'ordre fractionnaires non commensurables a été effectuée . Cette synchronisation a été réalisée via un contrôle continu. La technique de transformation de Laplace et le théorème de la valeur finale ont été effectuée pour conclure sur la stabilité ainsi que la convergence de l'erreur de synchronisation.

Dans le deuxième sujet de ce chapitre, un nouveau système hyperchaotique a été proposé. Le problème de la SPM entre un système hyperchaotique d'ordre entier et un système hyperchaotique d'ordre fractionnaire a été également étudié. Cette synchronisation a été réalisée via un contrôleur continu. Une analyse de Lyapounov ainsi qu'une propriété importante de la dérivée fractionnaire de Caputo pour les systèmes fractionnaires ont été effectuée pour conclure sur la stabilité ainsi que la convergence de l'erreur de synchronisation. Des simulations numériques ont été illustré pour tester l'efficacité du système de synchronisation proposée.

## Chapitre 4

# Communication sécurisée par synchronisation projective des systèmes chaotiques

La transmission chaotique est un mode de communication sécurisée qui est née par l'inclusion du chaos dans les systèmes de transmissions. L'idée principale consiste à injecter le message dans un signal chaotique pour masquer cette information et de l'envoyer vers le récepteur à travers un canal public. Ainsi, après la synchronisation des deux systèmes chaotiques (émetteur et récepteur), l'information chiffrée est donc récupérée au niveau du récepteur.

Plusieurs travaux ont été présentés ces dernières années exploitant les signaux chaotiques dans le contexte des communications sécurisées. En effet, leurs caractéristiques, sensibilités aux conditions initiales et aux variations paramétriques et aspects aléatoires sont bien adaptées aux communications sécurisées [75, 76, 77]. Cependant, tous ces travaux souffrent de certaines limitations. En effet, dans ces schémas de communication sécurisée, la taille du message doit être suffisamment petite pour ne pas induire la stabilité asymptotique d'un système chaotique (préservation de comportement chaotique), ce qui peut entraîner l'échec de la récupération du signal émis. Cependant, dans des situations réelles, certains messages à transmettre peuvent être très volumineux ou non bornés.

Récemment, X Wu et al. [78] ont proposé un nouveau schéma de communication sécurisée basé sur la synchronisation projective généralisée d'un nouveau système hyperchaotique, dans lequel le signal du message est borné ou non borné. Cependant, on devrait mentionner que les résultats fondamentaux de ce schéma s'appliquent seulement aux systèmes chaotiques d'ordre entier. L'extension de ces résultats fonda-

mentaux aux systèmes chaotiques fractionnaires n'est pas une tâche triviale. Donc, il est très intéressant de les étudier.

Motivé par les considérations ci-dessus, nous proposons dans cette partie une nouvelle approche simple pour résoudre à la fois le problème de synchronisation projective du système de Rössler modifié fractionnaire et celui de la sécurisation des transmissions, où le message transmis peut être borné ou non borné. Des simulations numériques seront également effectués pour tester les résultats théoriques.

## 4.1 Techniques de communications sécurisées à base du chaos

Il existe plusieurs techniques de communications sécurisée à base du chaos, nous décrivons ici quelques uns.

### 4.1.1 Masquage chaotique

Le masquage chaotique( ou bien chiffrement par addition) est la technique la plus simple pour la transmission d'information. En masquage chaotique, le signal d'information  $m(t)$  est ajouté à un signal chaotique  $x(t)$  généré par un système émetteur. Le signal du texte chiffré  $T(t) = m(t) + x(t)$  ainsi obtenu est transmis à travers le canal de transmission vers un système récepteur qui se synchronise identiquement avec le système émetteur. Le signal d'information reconstruit  $\hat{m}(t)$  est alors obtenu après la soustraction entre le signal chiffré (transmis)  $T(t)$  et le signal porteur estimé  $\hat{x}(t)$ .

### 4.1.2 Modulation paramétrique

Le principe de cette méthode consiste à utiliser le signal d'information pour moduler l'un des paramètres du système émetteur. Cependant, la façon d'injecter le message et la fonction de modulation des paramètres ne doivent pas supprimer le caractère chaotique ou hyperchaotique du signal envoyé au système récepteur. Le système récepteur synchronise d'une manière adaptative avec le système émetteur et finalement le signal d'information est récupéré par l'intermédiaire d'une loi d'adaptation.

## 4.2 Position du problème

Comme déjà mentionnée dans l'introduction, la principale motivation de cette partie consiste à construire un nouveau schéma de communication sécurisée. L'avantage prin-

Le principal de cette méthode est basé sur la SP du système de Rössler modifié fractionnaire, en utilisant la technique de modulation paramétrique. Cette opération sera effectuée par l'intermédiaire de quatre fonctions principales, à savoir : la modulation, l'émetteur hyperchaotique, le récepteur hyperchaotique et la démodulation. Le diagramme principal de ce schéma est illustré à la Figure 4.1.

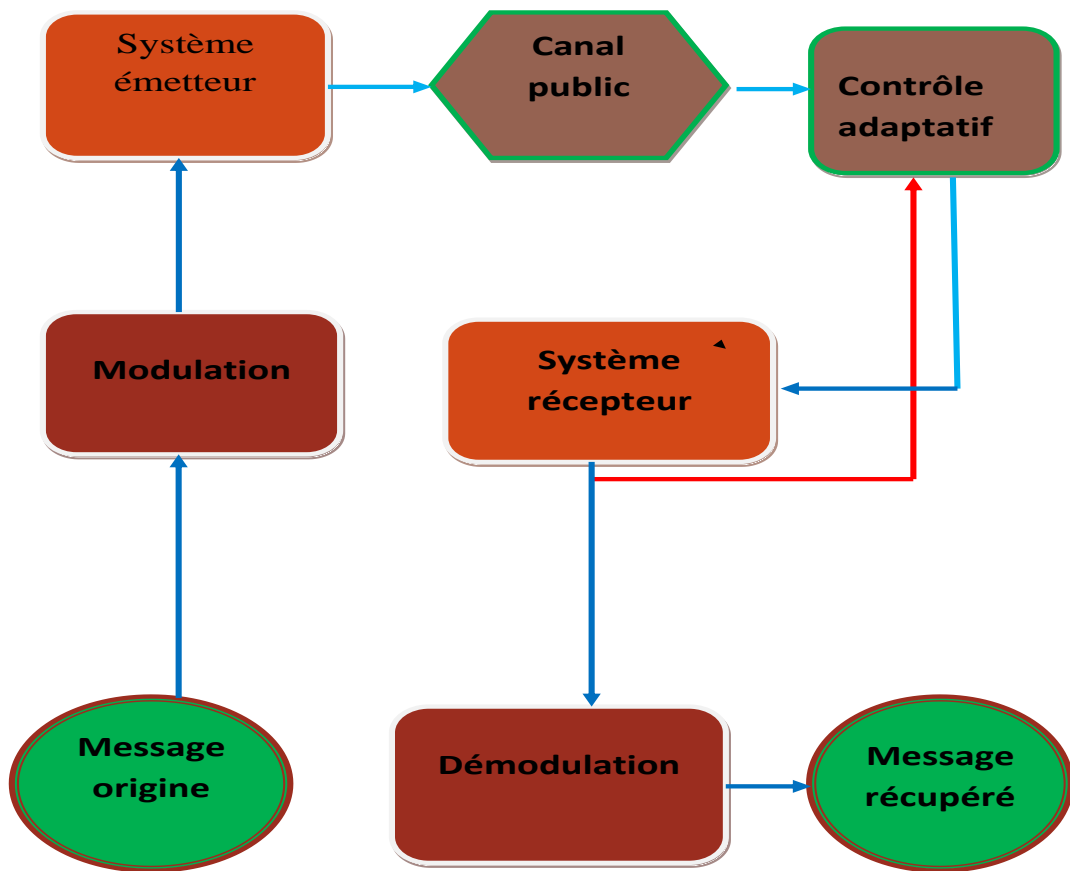


FIGURE 4.1 – Diagramme principal de communication sécurisée proposé.



### 4.2.1 Modulation

Considérons le nouveau système hyperchaotique (3.74) (voir chapitre 3) décrit par l'équation dynamique :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3 + x_4, \\ \dot{x}_2 = x_1 + a_1 x_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 x_3 - a_3 x_3 + a_2, \\ \dot{x}_4 = a_4 x_1, \end{cases} \quad (4.1)$$

où,  $a_2 = 0.01$ ,  $a_3 = 5$ ,  $a_4 = 0.1$  et  $0.16 \leq a_1 \leq 0.19$ .

Pour transmettre un signal de message quelle que soit sa taille, nous envisageons de le moduler dans le paramètre inconnue  $a_1$  du système (4.1).

Soit  $m(t)$  le message transmis. Définissons maintenant un nouveau paramètre inconnu  $A_1 = A_1(t)$ . Afin de préserver le comportement hyperchaotique du système étudié, nous présentons la technique de la modulation paramétrique suivante :

$$A_1(t) = 0.03 \exp(-m(t)) + 0.16, \quad m(t) \geq 0. \quad (4.2)$$

Il est clair que  $0.16 \leq A_1 \leq 0.19$ .

### 4.2.2 Émetteur

Considérons maintenant la version fractionnaire du système (4.1) et nous remplaçons le paramètre  $a_1$  par  $A_1$ , on obtient :

$$\begin{cases} D^{\alpha_1} x_1 = -x_2 - x_3 + x_4, \\ D^{\alpha_2} x_2 = x_1 + A_1 x_2, \\ D^{\alpha_3} x_3 = x_1 x_3 - a_3 x_3 + a_2, \\ D^{\alpha_4} x_4 = a_4 x_1, \end{cases} \quad (4.3)$$

où  $x_1, x_2, x_3, x_4$  sont des signaux chaotiques qui doivent être transmis au récepteur via un canal public et  $D^{\alpha_i}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  sont des dérivées fractionnaires au sens de Caputo, où  $0 < \alpha_i \leq 1$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Puisque  $A_1(t) \in [0.16, 0.19]$ , le système résultant (4.3) est encore hyperchaotique (voir chapitre 3, Figure 3.6). Nous prenons le système (4.3) comme système émetteur.

### 4.2.3 Récepteur

Considérons également le système récepteur hyperchaotique, qui est supposé décrit par :

$$\begin{cases} D^{\alpha_1} y_1 = -y_2 - y_3 + y_4 + u_1, \\ D^{\alpha_2} y_2 = y_1 + \hat{A}_1 y_2 + u_2, \\ D^{\alpha_3} y_3 = y_1 y_3 - a_3 y_3 + a_2 + u_3, \\ D^{\alpha_4} y_4 = a_4 y_1 + u_4, \end{cases} \quad (4.4)$$

où  $\hat{A}_1$  est le paramètre inconnu à estimer et  $u_i, i = 1, 2, 3, 4$  sont les contrôles à concevoir. Notre objectif consiste à concevoir des contrôles adaptatifs  $u_i$  (pour tout  $i = 1, 2, 3, 4$ ) et un paramètre  $\hat{A}_1$  réalisant une SP pratique entre le système émetteur (4.3) et le système récepteur (4.4) et  $\hat{A}_1$  converge finalement vers la valeur  $A_1$ .

Pour quantifier cet objectif, l'erreur de synchronisation est défini comme suit :

$$e_i = y_i - \theta x_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (4.5)$$

où  $\theta$  est une constante non nulle, un facteur d'échelle définissant une relation proportionnelle entre les deux systèmes synchronisés.

Définissons également l'erreur d'estimation comme :

$$e_{A_1} = A_1 - \hat{A}_1. \quad (4.6)$$

La dynamique de l'erreur de synchronisation est facilement obtenue sous la forme :

$$D^{\alpha_i} e_i = D^{\alpha_i} y_i - \theta D^{\alpha_i} x_i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (4.7)$$

En substituant les équations (4.3) et (4.4) dans l'équation (4.7), on trouve :

$$\begin{cases} D^{\alpha_1} e_1 = -e_2 - e_3 + e_4 + u_1, \\ D^{\alpha_2} e_2 = e_1 + \hat{A}_1 e_2 - \theta e_{A_1} x_2 + u_2, \\ D^{\alpha_3} e_3 = -a_3 e_3 + y_1 y_3 - \theta x_1 x_3 + a_2(1 - \theta) + u_3, \\ D^{\alpha_4} e_4 = a_4 e_1 + u_4. \end{cases} \quad (4.8)$$

En différenciant (4.6) par rapport à  $t$ , nous obtenons :

$$\dot{e}_{A_1} = -0.03\dot{m} \exp(-m) - \dot{\hat{A}}_1. \quad (4.9)$$

Par conséquent, le problème de synchronisation devient le problème de stabilité de la dynamique des erreurs (4.8). Nous obtenons alors le théorème principal suivant :

**Théorème 4.2.1.** Si les contrôles adaptatifs et la loi de commande sont sélectionnés respectivement comme :

$$\begin{cases} u_1 = e_2 + e_3 - e_4 - k_1 D^{\alpha_1 - 1} e_1, \\ u_2 = -e_1 - \hat{A}_1 e_2 + \theta e_{A_1} x_2 - D^{\alpha_2 - 1} (\theta e_{A_1} x_2 + k_2 e_2), \\ u_3 = a_3 e_3 - y_1 y_3 + \theta x_1 x_3 - a_2 (1 - \theta) - k_3 D^{\alpha_3 - 1} e_3, \\ u_4 = -a_4 e_1 - k_4 D^{\alpha_4 - 1} e_4, \end{cases} \quad (4.10)$$

où  $k_i, i = 1, 2, 3, 4$  sont des gains de contrôle positifs,

et

$$\dot{\hat{A}}_1 = -\theta e_2 x_2 - 0.03 \dot{m} \exp(-m), \quad (4.11)$$

alors la SP entre les deux systèmes (4.3) et (4.4) est achevée.

**Preuve 4.2.1.** Avec le choix de contrôle adaptatif (4.10), le système d'erreur (4.8) devient :

$$\begin{cases} D^{\alpha_1} e_1 = -k_1 D^{\alpha_1 - 1} e_1, \\ D^{\alpha_2} e_2 = -D^{\alpha_2 - 1} (\theta e_{A_1} x_2 + k_2 e_2), \\ D^{\alpha_3} e_3 = -k_3 D^{\alpha_3 - 1} e_3, \\ D^{\alpha_4} e_4 = -k_4 D^{\alpha_4 - 1} e_4. \end{cases} \quad (4.12)$$

Considérons la fonction de Lyapounov suivante :

$$V = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^4 e_i^2 + e_{A_1}^2 \right). \quad (4.13)$$

En calculant la dérivée de  $V$  le long des trajectoires du système erreur (4.12), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^4 e_i \dot{e}_i + e_{A_1} \dot{e}_{A_1} \\ &= \sum_{i=1}^4 e_i D^{1-\alpha_i} (D^{\alpha_i} e_i) + e_{A_1} \dot{e}_{A_1} \\ &= e_1 (-k_1 e_1) - e_2 (\theta e_{A_1} x_2 + k_2 e_2) \\ &\quad + e_3 (-k_3 e_3) + e_4 (-k_4 e_4) + e_{A_1} (-0.03 \dot{m} \exp(-m) - \dot{\hat{A}}_1) \\ &= -(k_1 e_1^2 + k_2 e_2^2 + k_3 e_3^2 + k_4 e_4^2) + e_{A_1} (-\theta e_2 x_2 - 0.03 \dot{m} \exp(-m) - \dot{\hat{A}}_1). \end{aligned} \quad (4.14)$$

En substituant la loi d'adaptation (4.11) dans (4.14), on obtient :

$$\dot{V} = -(k_1 e_1^2 + k_2 e_2^2 + k_3 e_3^2 + k_4 e_4^2). \quad (4.15)$$

Évidemment,  $V$  est définie positive et  $\dot{V}$  est définie négative sur  $\mathbb{R}^5$ . D'après le théorème de la stabilité de Lyapounov, les erreurs de synchronisation  $e_i, i = 1, 2, 3, 4$  convergent asymptotiquement vers zéro, c'est-à-dire la SP entre le système émetteur (4.3) et le système récepteur (4.4) est achevée et le zéro du paramètre erreur  $A_1$  est également asymptotiquement stable. Cela implique que le paramètre incertain  $A_1$  est également estimé simultanément dans le récepteur. Ceci complète la preuve.

#### 4.2.4 Démodulation

Selon la fonction de la transformation inversible (4.2), le signal du message d'origine peut être récupéré sous la forme :

$$\hat{m}(t) = \ln\left(\frac{0.03}{\hat{A}_1(t) - 0.16}\right). \quad (4.16)$$

Ici  $\hat{m}(t)$  représente le signal récupéré. Lorsque la synchronisation souhaitée a lieu, nous avons  $\hat{A}_1(t) \rightarrow A_1(t)$  quand  $t \rightarrow \infty$ . On obtient alors :

$$\hat{m}(t) = \ln\left(\frac{0.03}{\hat{A}_1(t) - 0.16}\right) \rightarrow m(t) = \ln\left(\frac{0.03}{A_1(t) - 0.16}\right), \quad \text{quand } t \rightarrow \infty. \quad (4.17)$$

En utilisant la méthode de démodulation ci-dessus, le récepteur peut donc extraire le signal du message  $\hat{m}$  avec succès.

#### 4.2.5 Résultats de simulation

Dans cette partie, des simulations numériques sont effectuées pour montrer l'efficacité du système de communication proposé. La méthode Adams-Bashforth-Moulton est utilisée pour résoudre les systèmes fractionnaires.

##### Cas d'un signal d'information borné

Ici, le signal de message caché dans le système émetteur est donné par :

$$m(t) = 3 - \cos(2t) - 2 \cos(3t). \quad (4.18)$$

Évidemment,  $0 \leq m(t) \leq 6$ . Selon l'équation (4.2), on peut sélectionner  $A_1(t)$  comme suit :

$$A_1(t) = 0.03 \exp(-3 + \cos(2t) + 2 \cos(3t)) + 0.16. \quad (4.19)$$

Il en résulte que  $A_1(0) = 0.19$ .

La condition initiale pour la loi d'adaptation est donnée par :  $\hat{A}_1(0) = 0.19$ .

Donc la condition initiale de l'erreur d'estimation est donnée par  $e_{A_1}(0) = 0$ .

Les conditions initiales des deux systèmes (4.3) et (4.4) sont sélectionnés respectivement comme :

$$x_1(0) = -0.02, \quad x_2(0) = -0.01, \quad x_3(0) = -0.046, \quad x_4(0) = 0.02. \quad (4.20)$$

$$y_1(0) = -0.08, \quad y_2(0) = -0.08, \quad y_3(0) = 0.158, \quad y_4(0) = 0.07 \quad (4.21)$$

Le paramètre d'échelle  $\theta$  est sélectionné aléatoirement comme :

$$\theta = 3. \quad (4.22)$$

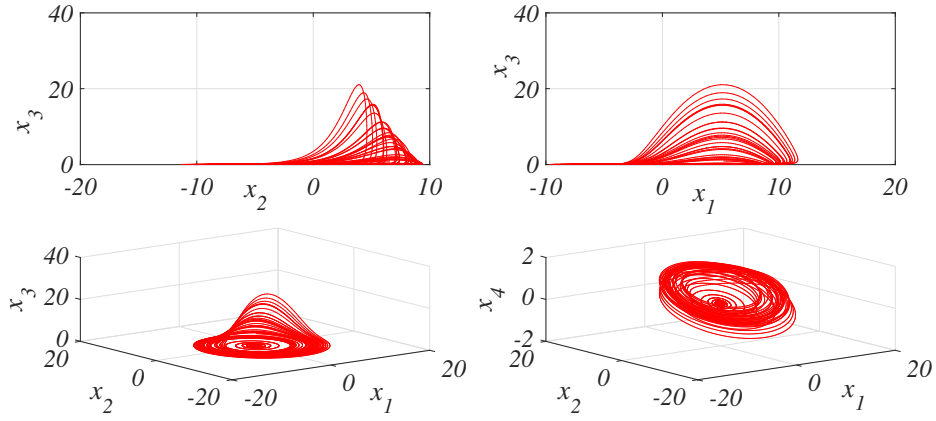


FIGURE 4.2 – Attracteurs hyperchaotique du système résultant (4.3)

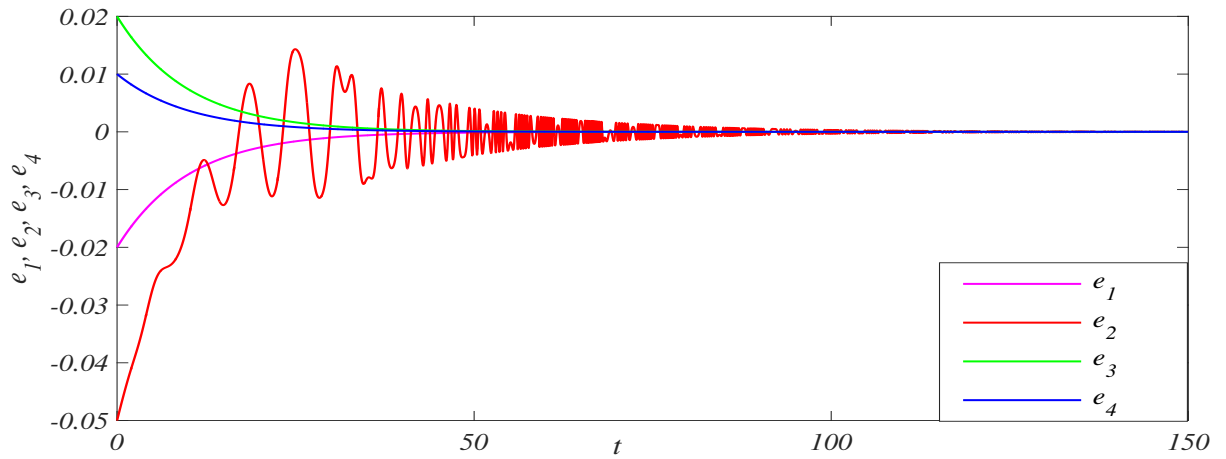


FIGURE 4.3 – L'évolution temporelle de l'erreur de synchronisation. Cas du signal d'information borné :  $m(t) = 3 - \cos(2t) - 2 \cos(3t)$

Par suite les conditions initiales de système erreur sont données par :

$$e_1(0) = -0.02, e_2(0) = -0.05, e_3(0) = 0.02, e_4(0) = 0.01. \quad (4.23)$$

Les paramètres de gain (conception) sont choisis comme suit :

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0.1. \quad (4.24)$$

Les ordres des dérivées fractionnaires proposés sont choisis comme :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0.98, 0.98, 0.97, 0.97). \quad (4.25)$$

La Figure 4.2 illustre le comportement hyperchaotique du système résultant (4.3). Les résultats de la simulation du système de communication sécurisé proposé sont présentés aux Figures 4.3, 4.4 et 4.5.

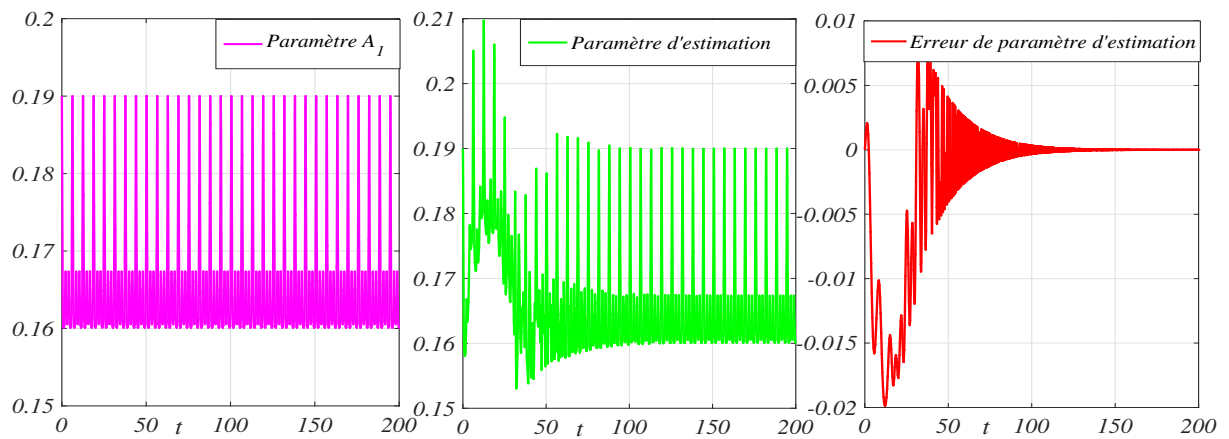


FIGURE 4.4 – L'évolution temporelle de paramètre, paramètre d'estimation et erreur de paramètre d'estimation. Cas du signal d'information borné :  $m(t) = 3 - \cos(2t) - 2 \cos(3t)$

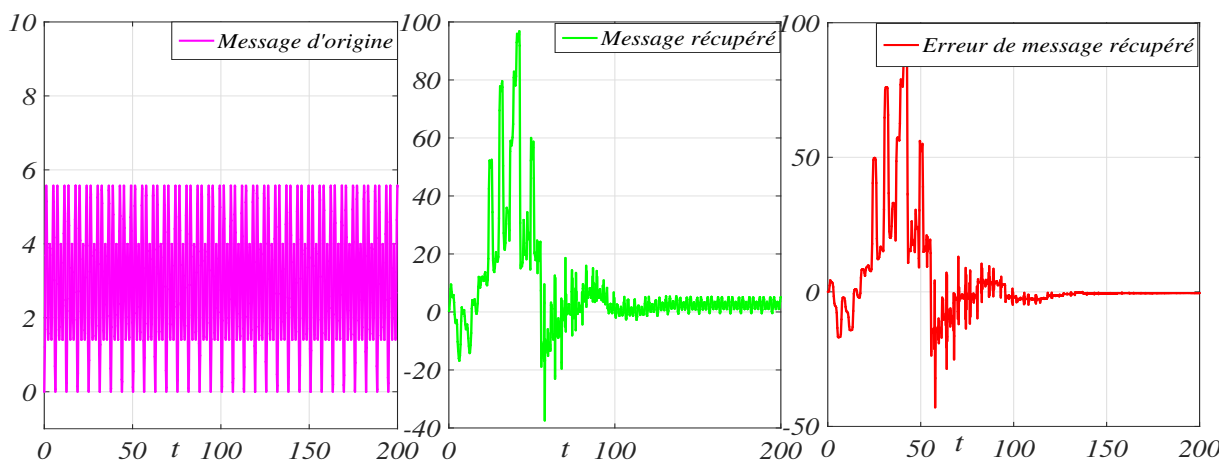


FIGURE 4.5 – L'évolution temporelle de message origine, message récupéré et erreur de message récupéré. Cas du signal d'information borné :  $m(t) = 3 - \cos(2t) - 2 \cos(3t)$

**Remarque 4.1.** \* De la Figure 4.3, nous voyons que les erreurs de synchronisation  $e_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  convergent asymptotiquement vers zéro rapidement. C'est-à-dire que la SP entre le système émetteur et le système récepteur est obtenue sous la présence des contrôleurs (4.10) et de la loi d'adaptation (4.11).

\* La Figure 4.5 décrit le signal de message original  $m(t)$ , le signal de message récupéré  $\hat{m}(t)$  et l'erreur de récupération de signal via le démodulateur (4.16).

Comme prévu, l'erreur de récupération de signal converge rapidement vers zéro et l'objectif de communication est atteint.

## Cas d'un signal d'information non borné

Dans ce cas, le signal du message est pris comme suit :

$$m(t) = 0.05(t + \sin(t)). \quad (4.26)$$

Afin de préserver le comportement hyperchaotique du système émetteur étudié, l'amplitude du signal d'information ne doit pas dépasser certaines valeurs limites. Pour cela, on suppose que  $|m(t)| < \infty$ .

Selon l'équation (4.2),  $A_1(t)$  peut être obtenu comme suit :

$$A_1(t) = 0.03 \exp(-0.05(t + \sin(t))) + 0.16. \quad (4.27)$$

Il en résulte que  $A_1(0) = 0.19$ .

La condition initiale pour la loi d'adaptation est donnée par :  $\hat{A}_1(0) = 0.19$ .

Donc la condition initiale de l'erreur d'estimation est donnée par  $e_{A_1}(0) = 0$ .

Les conditions initiales des deux systèmes (4.3) et (4.4) sont sélectionnés respectivement comme :

$$x_1(0) = 0.1, x_2(0) = -0.1, x_3(0) = -0.2, x_4(0) = 0.2. \quad (4.28)$$

$$y_1(0) = 0.3, y_2(0) = 0, y_3(0) = -0.6, y_4(0) = 0.6. \quad (4.29)$$

Le paramètre d'échelle  $\theta$  est sélectionné aléatoirement comme :

$$\theta = 2. \quad (4.30)$$

Par suite les conditions initiales de système erreur sont données par :

$$e_1(0) = 0.1, e_2(0) = 0.2, e_3(0) = -0.2, e_4(0) = 0.2. \quad (4.31)$$

Les paramètres de conception sont choisis comme suit :

$$k_1 = k_3 = k_4 = 0.25, k_2 = 0.5. \quad (4.32)$$

Les ordres des dérivées fractionnaires proposés sont choisis comme :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0.98, 0.98, 0.98, 0.97). \quad (4.33)$$

Les attracteurs hyperchaotiques du système résultant (4.3) sont représentés à la Figure 4.6. Les résultats de simulation numériques pour la SP entre les systèmes émetteur et récepteur via les contrôleurs (4.10) et la loi d'adaptation (4.11) et son application pour la transmission sécurisée de l'information sont illustrés aux Figures 4.7, 4.8 et 4.9.

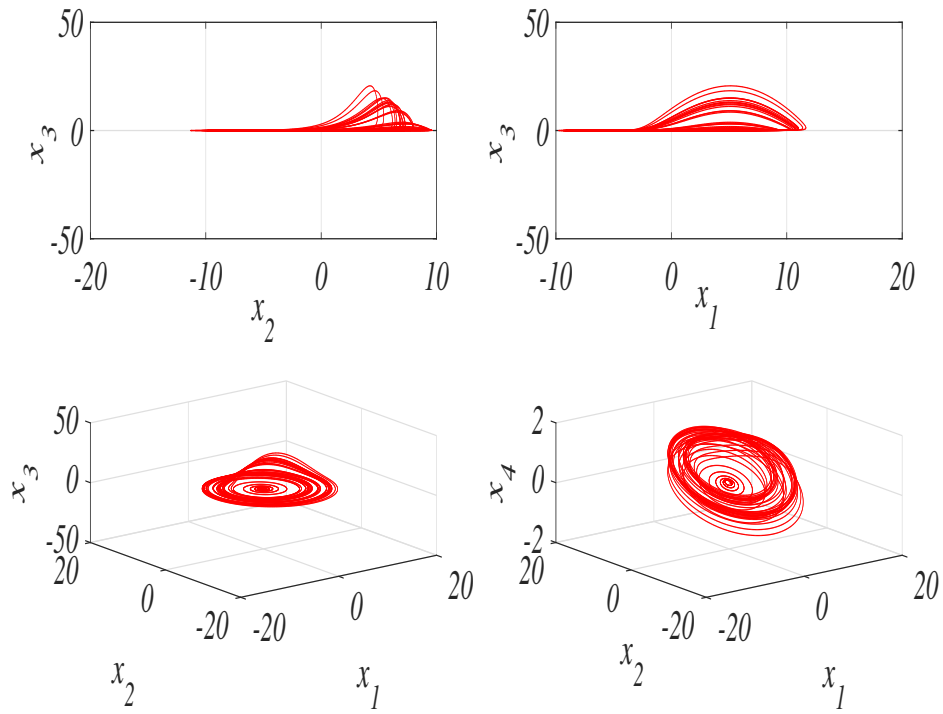


FIGURE 4.6 – Attracteurs hyperchaotique du système résultant (4.3)

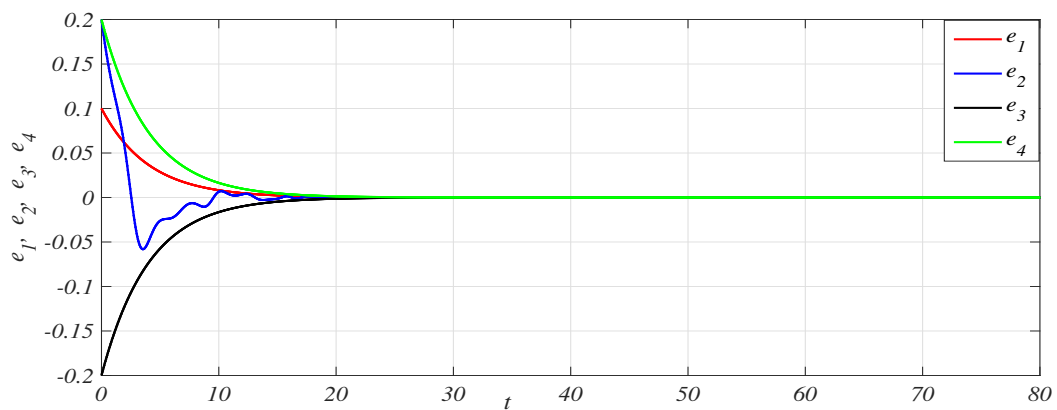


FIGURE 4.7 – L'évolution temporelle des erreurs de synchronisation. Cas du signal d'information non borné :  $m(t) = 0.05(t + \sin(t))$

**Remarque 4.2.** La Figure 4.7 décrit l'évolution temporelle des erreurs de synchronisation  $e_i$   $i = 1, 2, 3, 4$ , ce qui montre que les erreurs de synchronisation approchent très rapidement de l'origine. Donc, la synchronisation souhaitée est obtenue. Le signal de message original  $m(t)$ , le signal de message récupéré  $\hat{m}(t)$  et le signal d'erreur  $\hat{m}(t) - m(t)$  sont tracés dans la Figure 4.8. Comme on le voit, l'erreur de signal tend vers zéro en très peu de temps. Ainsi, le signal du message transmis est récupéré avec bien précision.



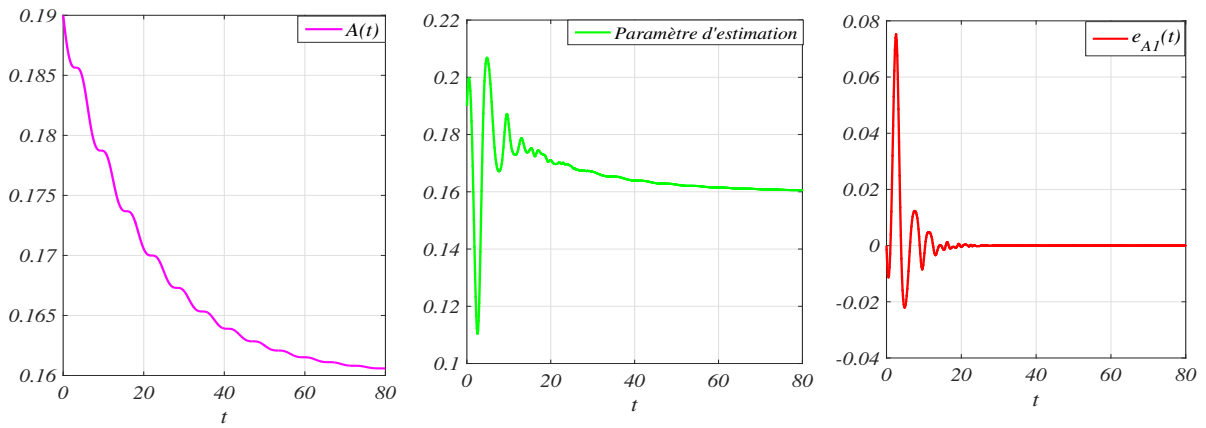


FIGURE 4.8 – L'évolution temporelle de paramètre, paramètre d'estimation et erreur d'estimation. Cas du signal d'information non borné :  $m(t) = 0.05(t + \sin(t))$

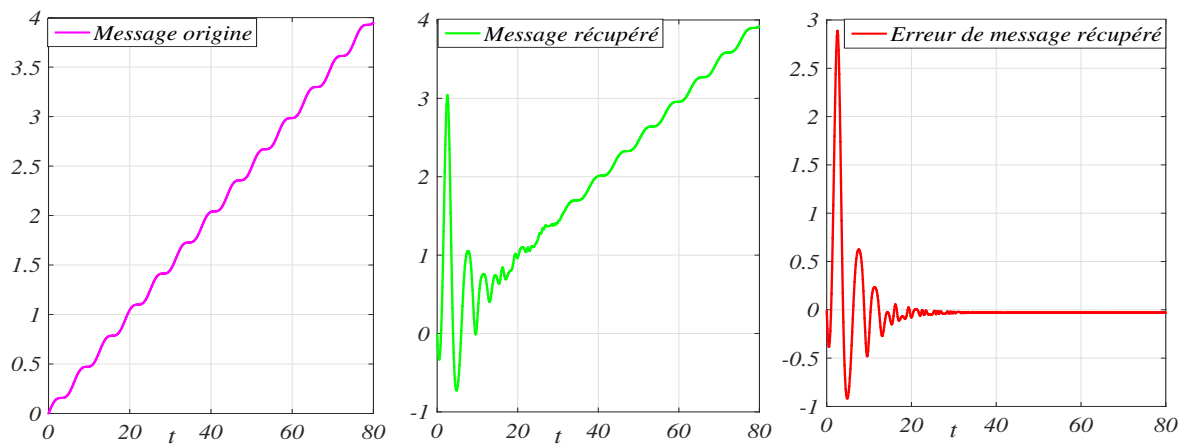


FIGURE 4.9 – L'évolution temporelle de message origine, message récupéré et erreur de message récupéré. Cas du signal d'information non borné :  $m(t) = 0.05(t + \sin(t))$

### 4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit une nouvelle technique de transmission sécurisée d'informations qui repose sur le principe de la SP du système de Rossler modifié, en utilisant la technique de modulation paramétrique. Contrairement aux approches de communication sécurisées chaotiques existantes, la taille du message n'est pas limitée dans notre schéma. Sous cette structure, le signal de message peut être transmis avec succès et en secret par l'intermédiaire de quatre fonctions principales, à savoir modulation, émetteur hyperchaotique, récepteur hyperchaotique et démodulation. Des simulations numériques ont été fournies pour vérifier l'efficacité et la faisabilité du schéma de communication sécurisée proposé. A travers ces résultats numériques obtenus

nus, nous constatons bien qu'une fois la synchronisation proposée des états est assurée, les messages transmis sont parfaitement récupérés au niveau de récepteur. Ceci illustre les performances de la méthode de synchronisation proposée.

# Conclusion générale

Dans ce travail de thèse, nous avons développé différentes stratégies de synchronisation des systèmes chaotiques et leur applications pour la transmission d'informations. Nous nous sommes intéressés particulièrement aux systèmes chaotiques et hyperchaotiques de type maître-esclave d'ordre fractionnaire.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté quelques notions de base des systèmes dynamique chaotiques, qui nous semblent utiles pour la bonne compréhension de notre thème de recherche présenté dans cette thèse.

Dans le deuxième chapitre, nous avons exhibé quelques notions de base de calcul fractionnaire. La théorie de la dérivation fractionnaire a été introduite à partir de quelques rappels sur les fonctions de Gamma d'Euler et de Mittag-Leffler et sur les différentes définitions et les propriétés de la dérivée fractionnaire. Nous avons également justifié notre choix de la dérivation au sens de Caputo dans les travaux présentés dans cette thèse. Nous avons ensuite décrit les équations d'ordre fractionnaire. Enfin, pour clôturer ce chapitre, nous avons présenté la stabilisation des systèmes chaotiques fractionnaires par l'approche d'une nouvelle extension de la méthode directe de Lyapounov d'ordre fractionnaire. L'utilisation de cette nouvelle approche a nous permis de montrer sous certaines hypothèses adéquates la démonstration de la stabilisation asymptotique de tels systèmes.

Le troisième chapitre est consacré principalement à l'étude de deux sujets majeurs. Dans le premier sujet, un problème de synchronisation généralisée entre deux systèmes chaotiques d'ordres fractionnaires non commensurables et de dimensions différentes a été réalisée. Dans l'autre sujet, le problème de synchronisation projective modifiée entre un système hyperchaotique d'ordre entier et un système hyperchaotique d'ordre fractionnaire a été considéré. Dans tous les schémas de synchronisation de ce chapitre, une technique de contrôle continu, a été employé. De plus, dans le premier sujet de ce chapitre, la technique de la transformée de Laplace et le théorème de la valeur finale, sont considérés pour réaliser la synchronisation proposée. Tandis que dans le deuxième su-

jet, une nouvelle approche de Lyapounov pour les systèmes fractionnaires a été adoptée pour effectuer la stabilité ainsi que la convergence de l'erreur de synchronisation.

Dans le dernier chapitre, un contrôle adaptatif modifié a été employé dans un nouveau schéma de communication sécurisée basé sur la synchronisation projective des systèmes chaotiques. Une analyse basée sur la méthode de Lyapounov a été effectuée pour conclure sur la stabilité aussi bien que sur la convergence asymptotique des erreurs de synchronisation. Nous avons souhaité présenter un nouveau schéma de modulation par des signaux chaotiques. Par ailleurs, nous avons montré comment adapter le système de Rossler modifié à notre schéma de transmission afin d'assurer la stabilité du système, préserver le comportement chaotique, améliorer le niveau de sécurité et augmenter l'amplitude des messages transmis. Enfin, des simulations numériques ont été fournies pour vérifier et tester la validité et la capacité des schémas de synchronisations et de communication sécurisée proposés.

Bien que le travail présenté dans cette thèse se limite à l'accès simple, nos résultats fondamentaux pourraient donc donner lieu à des études complémentaires dans les directions suivantes :

- \* L'application de la nouvelle extension de la méthode directe de Lyapounov des systèmes fractionnaire pour le contrôle et à la synchronisation du chaos des systèmes fractionnaires.

- \* Une extension des approches développées dans cette thèse au cas des systèmes perturbés et incertains basé sur le contrôle adaptative.

# Bibliographie

- [1] Roy, R., Murphy Jr, T. W., Maier, T. D., Gills, Z, Hunt, E. R. Dynamical control of a chaotic laser : Experimental stabilization of a globally coupled system. *Physical Review Letters* **68** (9) (1992) 1259–1262.
- [2] Petrov, V., Gaspar, V., Masere, J. and Showalter, K. Controlling chaos in the Belousov—Zhabotinsky reaction. *Nature* **361** (6409) (1993) 240–243.
- [3] Garfinkel, A., Weiss, J. N., Ditto, W. L. and Spano, M. L. Chaos control of cardiac arrhythmias. *Trends in Cardiovascular Medicine* **5** (2) (1995) 76–80.
- [4] Ding, J. and Yao, H.X. Chaos control of a kind of non-linear finance system. *Journal of Jiangsu University (Natural Science Edition)* **25** (6) (2004) 500–504.
- [5] Lorenz, E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences* **20** (2) (1963) 130–141.
- [6] Carroll, T. L and Pecora, L. M. Synchronizing chaotic circuits. *IEEE Trans. Circuits Syst.* **38** (4) (1991) 453–456.
- [7] Jesus, I.S and Machado, J.T. Fractional control of heat diffusion systems. *Nonlinear Dynamics* **54** (3) (2008) 263–282.
- [8] Schmidt, V.H. and Drumheller, J.H. Dielectric properties of lithium hydrazinium sulfate. *Physical Review B* **4** (1971) 4582–4597.
- [9] Bagley, R.L. and Calico, R.A. Fractional order state equations for the control of viscoelastically damped structures. *Journal of Guid Control Dyn.* **14** (2) (1991) 304–311.
- [10] Olga, I.M., Alexey, A.K. and Alexander, E.H. Generalized synchronization of chaos for secure communication : remarkable stability to noise. *Physics Letters A* **374** (29) (2010) 2925–2931.
- [11] Inzunza-Gonzalez, E. and Cruz-Hernandez, C. Double hyperchaotic encryption for security in biometric systems. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* **13** (1) (2013) 55–68.

- [12] Guitian, H.E. and Maokang, L.U.O. Dynamic behavior of fractional order Dufing chaotic system and its synchronization via singly active control. *Appl. Math. Mech.-Engl. Ed.* **33** (5) (2012) 567-582.
- [13] Gan, Q., Yang, Y., Fan, S. and Wang, Y. Synchronization of stochastic Fuzzy cellular neural networks with leakage delay based on adaptive control. *Differ. Equ. Dyn. Syst.* **22** (2014) 319-332.
- [14] Zhen, W., Xia, H. and Hao, S. Control of an uncertain fractional order economic system via adaptive sliding mode. *Neuro computing* **83** (2012) 83–88.
- [15] Bouzeriba, A., Boulkroune, A. and Bouden, T. Projective synchronization of two different fractional-order chaotic systems via adaptive fuzzy control. *Neural Comput. Applic.* (2015).
- [16] Carroll, TL, Pecora, LM. Synchronizing chaotic circuits. *IEEE Trans. Circuits Syst.* **38** (4) (1991) 453–456.
- [17] Rehan, M. Synchronization and anti-synchronization of chaotic oscillators under input saturation. *Appl. Math. Model.* **37** (2013) 6829–6837.
- [18] Zhang, G., Liu, Z., Ma, Z. Generalized synchronization of different dimensional chaotic dynamical systems. *Chaos Solitons Fract.* **32** (2) (2007) 773–779.
- [19] Manieri, R. Rehacek, J. Projective synchronization in three-dimensional chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.* **82** (15) (1999) 3042-3045.
- [20] Li, G.H. Modified projective synchronization of chaotic system. *Chaos Solitons Fractals* **32** (5) (2007) 1786-1790.
- [21] Yan, Z. Chaos Q-S synchronization between Rössler system and the new unified chaotic system. *Phys. Lett. A* **334** (5) (2005) 406–412.
- [22] Chen, L. P., Qu, J. F., Chai, Y., Wu, R. C. and Qi, G. Y. Synchronization of a class of fractional order chaotic neural networks. *Entropy* **15** (8) (2013) 3265-3276.
- [23] Chai, Y., Chen, L., Wu, R. and Dai, J. Q – S synchronization of the fractional-order unified system, *Pramana J. Physics*, **80**, (2013) 449–461.
- [24] Wang, X. Zhang and C. Ma, Modified projective synchronization of fractional-order chaotic systems via active sliding mode control. *Nonlinear Dyn.* **69**, (2012) 511–517.
- [25] Kaouache, S. and Abdelouahab, M.S. Generalized synchronization between two chaotic fractional non-commensurate order systems with different dimensions. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* **18** (3) (2018) 273–284.

- [26] Kaouache, S. and Abdelouahab, M.S. Modified projective synchronization between integer order and fractional order hyperchaotic systems *Jour. of Adv. Research in Dynamical and Control Systems* **10** (5) (2018) 96–104.
- [27] Kaouache, S. Communication sécurisée par synchronisation projective des systèmes chaotiques. *Conférence nationale. JMA'2019, Mila-Algeria*, 28 Avril, 2019.
- [28] Poincaré, H. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Paris : Gauthier, Villars, 1892.
- [29] Li T. Y. and Jorke J. A. Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly* **82**, (10) (1975) 985–992.
- [30] Ruelle, D. and Takens, F. On the nature of turbulence. *Commun. Math. Phys.* **20** (1971) 167–192.
- [31] Slotine, J. J. E. and Li, W. *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, Englewoods Cliffs, New-Jersey, 1991.
- [32] Lu, K., Hartman-Grobman, A. Theorem for scalar reaction-diffusion equations. *Journal of differential equations.* **93** (2) (1991) 364–394.
- [33] Vialar, T. and Goergen, A. *Complex and Chaotic Nonlinear Dynamics*. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 2009.
- [34] Devaney, R.L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Menlo Park, Benjamin/Cummings 1986.
- [35] A. Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L. and Vastano, J. A. Determining Lyapunov Exponents from a time Series. *Physica D : Nonlinear Phenomena* **16** (1985) 285–317.
- [36] Wang, X.Y., Song, J.M. : Synchronization of the fractional order hyperchaos Lorenz systems with activation feedback control. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **14** (8) (2009) 3351–3357.
- [37] Li, T.Z., Wang, Y., Luo, M.K. Control of fractional chaotic and hyperchaotic systems based on a fractional order controller. *Chin. Phys.B* **23** (8) (2010) 080501.
- [38] Liu, L., Liu, C. and Zhang, Y. Analysis of a novel four-dimensional hyperchaotic system. *Chin. J. Phys.* **46** (2008) 386–393.
- [39] Wang, H. and Cai, G. Controlling hyperchaos in a novel hyperchaotic system. *Journal of Information and Computing Science* **4** (4) (2009) 251–258.
- [40] Chen, A., Lu, J., Lü, J. and Yu, S. Generating hyperchaotic Lü attractor via state feedback control. *Physica A* **364** (2006) 103–110.
- [41] Mittag-Leffler, G.M. Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction homogène. *Acta Mathematica* **29** (1905) 101–182.

- [42] Agarwal, R.P. A propos d'une note de M. Pierre Humbert. *C.R. Académie des Sciences*, (1953).
- [43] Muth, E.J. Transform Methods with Applications to Engineering and Operations Research. *Prentice-Hall, Englewood Cliffs*, (1977).
- [44] Podlubny, I Fractional Differential Equations. *Academic Press. San Diego*, (1999).
- [45] Diethelm, K., Ford, N.J and Freed, A.D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations. *Nonlinear Dynamics* **29** (2002) 3–22.
- [46] Weilbeer, M. Efficient Numerical Methods for Fractional Differential Equations and their Analytical Background. Thèse de Doctorat, *Carl-Friderich-Gauss Facultat fur Mathematik und Informatik, der Technischen Universitat Braunschweig*, (2005).
- [47] Diethelm, K. The Analysis of Fractional Differential Equations. *Springer, Verlag Berlin Heideberg*, (2010).
- [48] Sabattier, J., Moze, M., and Farges, C. LMI stability conditions for fractional order system. *Computers and Mathematics with Applications* **59** (5) (2010) 1594–1609.
- [49] Thavazoei, M.S. and Haeri, M.A note on the stability of fractional order system. *Mathematics and Computers in Simulation* **79** (5) (2009) 1566–1576.
- [50] Hassan K. Khalil, *Nonlinear Systems, third ed., Prentice Hall*, (2002).
- [51] Li, Y., Chen, Q and Podlubny, I. Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems : Lyapunov direct method and generalized Mittag Leffler stability. *Computers and Mathematics with Applications* **59** (2010) 1810–1821.
- [52] Jarad, F., Abdeljawad, Th and Baleanu, D. Stability of  $q$ -fractional non-autonomous systems. *Nonlinear Analysis : Real World Applications* **14** (2013) 780–784.
- [53] Chen, D., Zhang, R., Liu, X., Ma, X., Fractional order Lyapunov stability theorem and its applications in synchronization of complex dynamical networks. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, (2014), doi :<http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.05.005>
- [54] Aguila-Camacho, N., Duarte-Mermoud, M.A. and Gallegos, J.A. Lyapunov functions for fractional order systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **19** (9) (2014) 2951–2957.
- [55] Stefanovska, A., Haken, H., Clintock, P.V.E., Hozic, M., Bajrovic, F. and Ribaric, S. Reversible transitions between synchronization states of the cardiorespiratory system. *Phys. Rev. Lett.* **85**, (2000) 4831–4834.



- [56] Khan, K., Bhat, A. Hybrid Projective Synchronization of Fractional Order Chaotic Systems with Fractional Order in the Interval  $(1, 2)$ . *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* **16** (4) (2016) 350–365.
- [57] Zhu, H., Zhou, S. and Zhang, J. Chaos and synchronization of the fractional-order Chua's system. *Chaos Solitons Fractals* **39** (4) (2009) 1595–1603.
- [58] Yu, Y., Li, H. The synchronization of fractional-order Rossler hyperchaotic systems. *Physica A* **387** (5-6) (2008) 1393–1403.
- [59] Erjaee, G.H. and Taghvafard, H. Stability analysis of phase synchronization in coupled chaotic systems presented by fractional differential equations. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* **11** (2) (2011) 147–154.
- [60] Yan, Z.Y. Chaos Q-S synchronization between Rosler system and a new unified chaotic system. *Phys. Lett. A* **334**, (2005) 406–412.
- [61] Manfeng, H., Zhenyuan, X. A general scheme for Q – S synchronization of chaotic systems. *Nonlin. Anal. Theor. Meth. Appl* **69** (4) (2008) 1091–1099.
- [62] Ouannas, A. and Al-sawalha, M. Synchronization between different dimensional chaotic systems using two scaling matrices. *Optik* **127** (2) (2016) 959–963
- [63] Wang, Z. L., Shi, X.R. Adaptive Q – S synchronization of non identical chaotic systems with unknowns parameters. *Nonlin. Dyn.* **59** (4) (2010) 559–567.
- [64] Zhao, J. and Zhang, K. A general scheme for Q – S synchronization of chaotic systems with unknown parameters and scaling functions. *Appl. Math. Comput* **216** (7) (2010) 2050–2057.
- [65] Ouannas, A. and Al-sawalha, M. Synchronization between different dimensional chaotic systems using two scaling matrices. *Optik* **127** (2) (2016) 959–963.
- [66] Abdelouahab, M.S., Lozi, R. Hopf Bifurcation and Chaos in Simplest Fractional-Order Memristor-based Electrical Circuit. *IJJAM* **6** (2) (2015) 105–119.
- [67] Ojo, K.S., Ogunjo, S.T., Njah, A.N. and Fuwape, I.A. Increased-order generalized synchronization of chaotic and hyperchaotic systems. *Pramana - J. Phys* **84** (1) (2015) 33–45.
- [68] Chen, D., Wu, C., Iu, H.H. and Ma, X. Circuit simulation for synchronization of a fractional-order and integer-order chaotic system. *Nonlinear Dynamics* **73**, (3) (2013) 1671–1686.
- [69] Yan P.W., Guo. D.W., Synchronization between Fractional-Order and Integer-Order Hyperchaotic Systems via Sliding Mode Controller. *Journal of Applied Mathematics* **5**, (2013) 151025–5.

- [70] Khan, A. and Tripathi, P. Synchronization Between a Fractional Order Chaotic System and an Integer Order Chaotic System. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* **13** (4) (2013) 425–436.
- [71] Wang, X., Zhang, X. and Ma, C. Modified projective synchronization of fractional-order chaotic systems via active sliding mode control. *Nonlinear Dynamics* **69** (2012) 511–517.
- [72] Park, J.H. Adaptive control for modified projective synchronization of a four dimensional chaotic system with uncertain parameters. *J. Comput. Appl. Math.* **213** (1) (2008) 288–293.
- [73] Rössler, O.E. An equation for hyperchaos. *Physics Letters A* **71**, (1979) 155–157.
- [74] Wolf, A., Swift, J.B., Swinney, H.L. and John, A.W. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D* **16**, (1985) 285–317.
- [75] Liu, S. and Zhang, F. Complex function projective synchronization of complex chaotic system and its applications in secure communication. *Nonlinear Dyn.* **76** (2014) 1087–1097.
- [76] Wu, X., Wang, H. and Lu, H. Modified generalized projective synchronization of a new fractional-order hyperchaotic system and its application in secure communication. *Nonlinear Anal. RWA* **13** (2012) 1441–50.
- [77] Cheng, C. J. 2012 Robust synchronization of uncertain unified chaotic systems subject to noise and its application to secure communication. *Appl. Math. Comput.* **219** (2012) 2698–712.
- [78] Xiangjun, W., Zhengye, F. and Jürgen, K. A secure communication scheme based generalized function projective synchronization of a new 5D hyperchaotic system. *Phys. Scr.* **90** (2015) 045210.