

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ FRÈRES MENTOURI CONSTANTINE  
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

[www.umc.edu.dz/index.php/fr/](http://www.umc.edu.dz/index.php/fr/)



NUMÉRO D'ORDRE :.....  
NUMÉRO DE SÉRIE :.....

EN VUE DE L'OBTENTION DU : GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES

Option : **Analyse Numérique**

Présenté et soutenue le 20/02/2020 Par :  
**Allaoua Boudjedour**

---

## **Étude de la convergence de la solution faible de quelques problèmes avec des lois de frottement régularisées**

---

Devant le Jury :

<b>Président :</b>	Dr. Hamaizia TAYEB	Université FM-Constantine 1
<b>Rapporteur :</b>	Prof. Dalah MOHAMED	Université FM-Constantine 1
<b>Examineurs :</b>		
Examineur 1 :	Prof. Ellagoune FATEH	Université 8 Mai 1945 Guelma
Examineur 2 :	Dr. Fernane KHAIREDDINE	Université 8 Mai 1945 Guelma
Examineur 3 :	Dr. Rezzoug IMAD	University of Larbi Ben M'hidi O.E.B
Examineur 4 :	Dr. Berkane ABDELHAK	Université FM-Constantine 1
<b>Invité :</b>		
Invité 1 :	Prof. Aref JERIBI	University of Sfax, <b>Tunisia</b>

Thèse soutenue le 20/02/2020



# Liste des Figures

---

- Figure 1 : Fondation, Chapitre (3) : "Étude et Analyse d'un Problème Antiplan Électro-élastique" : Corps en contact avec la fondation.



## Liste des communications et publications

- **Communication Nationale 1** : Boudjedour Allaoua, Co-authors : Mohamed Dalah, Workshop sur les Systèmes Dynamiques, les équations Différentielles et leurs applications Laboratoire des systèmes dynamiques et controle. SDEDA–2018. 14-15 Novembre, Université Larbi Ben M’Hidi Oum El Bouaghi. Faculté des Sciences Exactes et Science de la Nature et de la Vie, Communication orale :Titile : A quasistatic electro-elastic antiplane contact problem with power friction law.
- **Communication Nationale 2** : Boudjedour Allaoua, Co-authors : Mohamed Dalah, Workshop sur les Systèmes Dynamiques, les équations Différentielles et leurs applications Laboratoire des systèmes dynamiques et controle. SDEDA–2018. 14-15 Novembre, Université Larbi Ben M’Hidi Oum El Bouaghi. Faculté des Sciences Exactes et Science de la Nature et de la Vie,Communication poster, titre : Analysis and study of an antiplan contact problem electro-viscoelastic, <http://www.univ-oeb.dz/fr/news/journee-nationale-mathematiques-appliquees-jnma19/>.
- **Communication Nationale 3** : Boudjedour Allaoua, Co-authors : Mohamed Dalah, Journée National sur les Mathématiques Appliquées JNMA’19 Laboratoire des systèmes dynamiques et controle N0. 27 juin 2019, Communication orale, titre : Analyse d’un problème viscoelastic.
- **Communication Internationale 4** : Boudjedour Allaoua, Co-authors : Mohamed Dalah, International conference on applied analysis and mathematical modeling , held on june 08-12,2015, yildiz Technica University Istanbul-Turkey ,Communication poster, tilte : Fixed point theorem for weak solution of the contact problem with power law friction.
- **Communication Internationale 5** : Boudjedour Allaoua, Co-authors : Mohamed Dalah, International Conference On Analysis and Its Applications , held on july

12-15,2016 Kirsehir University Turkey, Communication orale, Titre : Analyse and study of antiplane electro-viscoelastic contact problem.

- **Communication Internationale 6** : Boudjedour Allaoua, Co-auteurs : Mohamed Dalah, First international conference on the "Evolution of Contemporary Mathematics and their Impact in Sciences and Technology" (ECMI-SciTech2017) held on October 09-12,2017 Frères Mentouri University, Constantine, Algeria. Communication poster, titre : Analysis and study of antiplane viscoelastic contact problem.
- **Publication Internationale** : [39]–A. Boudjedour and M. Dalah, Mathematical Modelling of Piezoelectric Elastic Materials : International Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimisation, <https://www.inderscience.com/info/ingeneral/forthcoming.php?jcode=ijmmno>, Accepted 2019.

*Liste des communications et publications  
UFMC-Constantine- @ 2019–2020*







---

# Résumé

Ce travail de thèse propose d'étudier la convergence de la solution régularisée notée  $(u_\rho, \varphi_\rho)$  vers la solution  $(u, \varphi)$  quand le paramètre  $\rho$  tend vers 0. Au début de ce travail, nous posons le cadre physique et le modèle mathématique d'un problème antiplan de contact avec frottement, ainsi toutes les conditions et les lois de frottement sur les trois frontières  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$ . Puis, nous construisons la formulation variationnelle associée au problème continu. Par la suite, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution faible en se basant sur quelques outils de l'analyse fonctionnelle. Ensuite, nous construisons aussi une **formulation variationnelle du modèle régularisée** qui est donnée par un système couplé d'une inéquation variationnelle dont le champ de déplacements  $u$  est considéré comme inconnu avec une équation qui dépend uniquement d'un potentiel électrique. Finalement, et de vue numériques, nous décrivons une régularisation de la fonctionnelle non différentiable due au terme de frottement apparaissant dans la formulation variationnelle de ce problème électro-mécanique. Cette régularisation est obtenue en remplaçant la fonctionnelle notée  $j(\cdot)$  par une version régularisée notée  $j_\rho(\cdot)$  avec  $\rho$  est un paramètre strictement positif. Nous avons obtenu un résultat d'existence, d'unicité et de convergence. Nous clôturons cette thèse par une simulation numérique et quelques tests en faisant des variations du pas de discrétisation  $h$ .

---

## Mots-Clefs :

Matériau électro-élastique; Loi de contact; Loi de frottement; Formulation variationnelle; Inéquation variationnelle; Solution faible; Régularisation.

---





---

# Abstract

This thesis proposes to study the convergence of the regularized solution denoted  $(u_\rho, \varphi_\rho)$  to the solution  $(u, \varphi)$  when the parameter  $\rho$  tends to 0. At the beginning of this work, we set the physical framework and the mathematical model of an anti-contact problem with rubbing, thus all the conditions and friction laws on the three boundaries  $\Gamma_1, \Gamma_2$  and  $\Gamma_3$ . Then, we construct the variational formulation associated with the continuous problem. Subsequently, we study the existence and uniqueness of the weak solution based on some tools of the functional analysis. Next, we also construct a **variational formulation of the regularized model** that is given by a coupled system of a variational equation whose displacement field  $u$  is considered as unknown with an equation that depends only on an electrical potential. Finally, and from a numerical point of view, we describe a regularization of the non-differentiable functional due to the friction term appearing in the variational formulation of this electromechanical problem. This regularization is obtained by substituting the functional  $j(\cdot)$  with a regularized version denoted  $j_\rho(\cdot)$  with  $\rho$  is a strictly positive parameter. We have obtained a result of existence, uniqueness and convergence. We close this thesis with a numerical simulation and some tests by making variations of the  $h$  discretization step.

---

## Key-Words :

Electo-elastic material; Contact law; Friction law; Variational formulation; Variational Inequalities; Weak solution; Fixed-Point, Regularization.

---





---

# Dédicaces

L'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, que dieu te garde dans son vaste paradis, **à toi mon père.**

A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon coeur, ma vie et mon bonheur ; maman que j'adore.

Aux personnes dont j'ai bien aimé la présence dans ce jour, à tous mes frères et mes soeurs, mes nièces, et mes neveux. Je dédie ce travail dont le grand plaisir leurs revient en premier lieu pour leurs conseils, aides, et encouragements.

Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes côtés, et qui m'ont accompagnaient durant mon chemin d'études supérieures, mes aimables amis, collègues d'étude, et frères de coeur.

**A. Boudjedour**





---

# Remerciements

En préambule à ce mémoire nous remerciant ALLAH qui nous aide et nous donne la patience et le courage durant ces longues années d'étude. Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.

La première personne que nous tenons à remercier est mon encadrant **Mr. Le Professeur M. Dalah**, pour ses bonnes explications qui nous ont éclairé le chemin de la recherche et sa collaboration avec nous dans l'accomplissement de ce modeste travail. Aussi, pour l'orientation, la confiance, la patience qui ont constitués un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être menée au bon port. Qu'il trouve dans ce travail un hommage vivant à sa haute personnalité, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'ils ont bien voulu nous consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Je tiens tout d'abord à remercier très chaleureusement **Mr. Le Docteur T. Hamaizia** de l'université de Constantine 1 pour son accueil, son aide, son attention et sa gentillesse. Je vous adresse mes remerciements pour avoir accepté de juger ce travail et d'en être **le président de jury**. Je vous remercie pour votre présence lors de la soutenance de cette thèse. Je tiens à vous exprimer toute ma gratitude pour les heures investies dans la correction du présent manuscrit.

Je remercie également **Mr. Le Professeur F. Ellagoune** pour son engagement et son soutien ainsi que pour la pertinence de ses remarques et de ses feed-back. Et je vous remercie d'avoir examiné ce manuscrit. Je vous suis très reconnaissante pour la confiance que vous m'avez accordée, votre gentillesse, votre disponibilité, et vos encouragements.

Un grand merci à **Mr. Le Docteur K. Fernane**, à l'université de Guelma, département

de mathématiques, toujours à disposition pour répondre aux questions de manière très cordiale. je vous remercie d'avoir accepté de faire partie des membres du jury de ma thèse.

Je remercie également très vivement **Mr. Le Docteur I. Rezzoug** pour sa gentillesse, sa bonne humeur, sa drôlerie, les moments théâtraux partagés, les succulents repas sur le tapis tunisien, les discussions plus ou moins scientifiques. je vous suis reconnaissante d'avoir accepté de faire partie des membres du jury de ma thèse. Ensuite et spécialement je tiens à exprimer ma reconnaissance au **Professeur des Universités Mr. M. Sofonea**, pour son soutien permanent aussi bien pour ses travaux de recherches.

Je remercie également **Mr. Le Docteur A. Berkane**, à l'université de Constantine 1, département de mathématiques, d'avoir accepté de faire partie des membres du jury de ma thèse.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.

À titre personnel, je tiens à remercier chaleureusement ma mère, mon père, mon marie, mes enfants, mes frères, mes soeurs et tous mes amis. Enfin, nous tenons à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.

Finalement, et très spécialement, mes vifs remerciements vont également à l'esprit de mon père.

**A. Boudjedour**







---

# Table des matières

Dédicaces	xi
Remerciements	xiii
Notations	xix
Introduction générale	xxii
<b>I Outils d'analyse fonctionnelle</b>	<b>1</b>
<b>1 Analyse fonctionnelle : Outils de description des espaces et des fonctions</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction	3
1.2 Espace vectoriel	3
1.3 Espaces métriques	4
1.4 Espaces complets	5
1.5 Espaces normés	5
1.6 Espace de Banach	6
1.7 Quelques Inégalités	6
1.8 Les opérateurs	6
1.8.1 Notions sur les opérateurs	6
1.8.2 Opérateur intégral linéaire	7
1.8.3 Opérateurs compacts	8
1.9 Mesure de Non Compacité	10
1.9.1 Mesure de Non Compacité de Kuratowskii	10
1.10 Théorèmes du Point Fixe	11
1.11 Opérateur adjoint	13
1.12 Éléments d'analyse non linéaire	13
1.12.1 Opérateurs linéaires	13

---

1.12.2	Opérateurs non linéaires . . . . .	15
1.12.3	Fonctions convexes et semi-continues inférieurement . . . . .	15
1.12.4	Différentiabilité et sous différentiabilité . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Espaces fonctionnels</b>	<b>21</b>
2.1	Espaces des fonctions continues et continûments différentiables . . .	21
2.2	Espaces $L^p(\Omega)$ . . . . .	22
2.3	Distributions . . . . .	23
2.3.1	Espace $\mathcal{D}(\Omega)$ . . . . .	23
2.3.2	Espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ . . . . .	24
2.4	Espaces de Sobolev . . . . .	24
2.4.1	Espaces $W^{1,p}(\Omega)$ . . . . .	25
2.4.2	Espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$ . . . . .	25
2.4.3	Espaces $W^{-1,p}(\Omega)$ . . . . .	27
2.5	Théorème de représentation de Riesz . . . . .	28
2.6	Quelques inégalités élémentaires . . . . .	29
<b>II</b>	<b>Modélisation et analyse des problèmes de contact</b>	<b>31</b>
<b>3</b>	<b>Étude et Analyse d'un Problème Antiplan Électro-élastique</b>	<b>34</b>
3.1	Introduction . . . . .	35
3.2	Cadre physique et modèle mathématique . . . . .	35
3.2.1	Quelques hypothèses . . . . .	42
3.3	Formulation variationnelle . . . . .	45
3.4	Un résultat d'existence et d'unicité . . . . .	46
3.5	Un résultat d'existence, d'unicité et de convergence . . . . .	47
3.6	Conclusion et perspectives . . . . .	53
<b>III</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>54</b>
	Bibliographie	55

# Notations

$C(0, T; X)$  l'espace des fonctions continues de  $[0, T]$  dans  $X$ .  
 $C^1(0, T; X)$  l'espace des fonctions continûment dérivables de  $[0, T]$  dans  $X$ .  
 $L^p(0, T; X)$  l'espace des fonctions mesurables de  $(0, T)$  dans  $X$ .  
 $W^{k,p}(0, T; X)$  l'espace de Sobolev de paramètres  $k$  et  $p$  de  $(0, T)$  dans  $X$ .  
Pour une fonction  $f$ , on note par

$\dot{f}, \ddot{f}$  les dérivées première et seconde de  $f$  par rapport au temps.  
 $\partial_i f$  la dérivée partielle de  $f$  par rapport au temps.  
 $\nabla f$  le gradient de  $f$ .  
 $Div f$  la divergence de  $f$ .

$c$  une constante générique strictement positive.  
 $p.p.$  presque partout.  
 $s.c.i$  semi-continu inférieurement.  
 $X^d = \{x = (x_i) \ x_i \in H, i = 1, \bar{d}\}$ .  
 $X_s^{d \times d} = \{\tau = (\tau_{ij}) \ \tau_{ij} = \tau_{ji} \in H, i, j = 1, \bar{d}\}$ .  
 $(\cdot, \cdot)_X$  le produit scalaire de  $X$ .  
 $|\cdot|_X$  la norme de  $X$ .  
 $X'$  l'espace dual de  $X$ .  
 $(\cdot, \cdot)_{X' \times X}$  le produit de dualité entre  $X'$  et  $X$ .  
 $\mathbb{R}^d$  l'espace euclidien d'ordre  $d$ .  
 $S^d$  l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur  $\mathbb{R}^d$ .

On considère  $\Omega$  est un domaine de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ) et on note par

---

$\bar{\Omega}$	l'adhérence de $\Omega$ .
$\Gamma$	la frontière de $\Omega$ supposée régulière .
$\Gamma_i (i = 1, 2, 3)$	une partition de la frontière $\Gamma$ .
$mes\Gamma_1$	la mesure de Lebesgue $(d - 1)$ dimensionnelle de $\Gamma_1$ .
$\nu$	la normale extérieure unitaire à $\Gamma$ .
$v_\nu, v_\tau$	la composante normale et tangentielle du champ vectoriel $v$ .
$\sigma_\nu, \sigma_\tau$	la composante normale et tangentielle du champ tensoriel $\sigma$ .
$C^1(\bar{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\bar{\Omega}$ .
$\mathcal{D}(\Omega)$	l'espace des distributions sur $\Omega$ .
$H$	l'espace $L^2(\Omega)^d$ .
$H_1$	l'espace $H^1(\Omega)^d$ .
$\mathcal{Q}$	l'espace $L^2(\Omega)_s^{d \times d}$ .
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur $\Gamma$ .
$H_\Gamma$	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ .
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.





# Introduction

Un phénomène physique est, pour une observation donnée, un aspect majeur résultant de transferts d'énergie à l'échelle macroscopique (phénomène optique par exemple), d'autres phénomènes intervenant, à d'autres échelles, comme facteurs des aspects complémentaires de ce qui est observé. Les corps concernés uniquement par un phénomène physique ne subissent pas, en principe, de transformation de leur nature, leur changement étant lié avant tout à leur façon de réagir - sans altération - à l'effet de telle ou telle forme d'énergie ; ces modifications sont, pour cette raison, souvent réversibles.

Trop souvent considéré comme un élément perturbateur pour les calculs, on s'aperçoit très vite que le frottement est tout simplement indispensable : si les vis de fixation restent serrées, le clou en place, les échelles debout et les voitures sur la route, c'est grâce au frottement. C'est aussi sur ce phénomène que repose le fonctionnement des freins et embrayages. Pour résoudre un problème de statique, sa considération systématique n'est pas obligatoire. Il existe des modèles mathématiques simples, et cependant précis qui décrivent ce phénomène. Les lois de Coulomb font partie de ces modèles. La tribologie est la science du contact qui propose d'autres modèles plus pointus à utiliser suivant les exigences de l'étude.

Si on considère deux corps en contact ponctuel avec frottement, il y a deux situations à observer selon que le glissement entre les deux corps est adhérent ou pas. Si les corps ne glissent pas, la droite d'action transmissible peut s'écarter de la normale de contact jusqu'à une limite fixe (en rouge sur la figure). Le domaine ainsi délimité prend la forme d'un cône dit « cône de frottement d'adhérence ». Le demi angle au sommet est appelé angle d'adhérence. L'étude du cas à la frontière du cône est appelé équilibre strict. Si la vitesse relative entre les corps devient non nulle, alors la droite d'action prend une inclinaison fixe (violet). On définit de même le « cône de frottement de glissement ».

---

En général, le cône de glissement est inclus à l'intérieur du cône d'adhérence. Chacun a fait l'expérience de pousser une armoire et de s'apercevoir qu'il est moins dur d'entretenir son glissement, une fois qu'elle a décollé. C'est aussi cette différence qui explique le broutement des chaises qu'on traîne, le sifflement des freins, ou la génération du son des violons et autres instruments à archet. À une bien plus grande échelle, les séismes en sont les conséquences. .

Le phénomène piézoélectrique se caractérise par l'apparition de charges électriques sur les surfaces de certains cristaux après leur déformation. L'effet inverse consiste en la génération de stress et de contrainte dans les cristaux sous l'action du champ électrique sur la frontière, les matériaux qui présentent un tel comportement sont appelés matériaux piézoélectriques. Les matériaux piézoélectriques sont largement utilisés comme commutateurs et actuateurs dans de nombreux systèmes d'ingénierie, dans les domaines de la radioélectronique, de l'électroacoustique et de l'équipement de mesure.

Actuellement, il y a un intérêt considérable dans les problèmes de contact impliquant des matériaux piézoélectriques. Les matériaux piézoélectriques sont très nombreux. Le plus connu est le quartz, toujours utilisé dans les montres pour générer des impulsions d'horloge. Mais ce sont des céramiques synthétiques, les PZT qui sont le plus largement utilisées aujourd'hui dans l'industrie. Des problèmes de contact pour des matériaux élastiques avec un effet électrique, appelés matériaux électro-élastiques, se trouvent dans [2], [3], [4], [5], [6], [11], [12], [17], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [28], [32], [33], [35] et [38]. Des problèmes avec ou sans frottement impliquant des matériaux électro-viscoélastiques ont été étudiés dans [18], [34], [36] et [38].

Cette thèse représente une contribution à l'étude mathématique de quelques problèmes de contact entre un corps déformable et une fondation. Sous l'hypothèse des petites déformations, nous étudions des processus quasi-statiques pour des matériaux électro-viscoplastique. Notre travail est une généralisation de l'article de Mr. M. Dalah et al. [38]. Le but de notre travail est d'apporter une contribution à l'étude mathématique d'un problème antiplan de contact avec frottement. Nous considérons une loi de comportement non linéaire pour un matériau électro-élastique. Les conditions aux limites considérées sont les conditions de contact de Tresca et avec adhéion. La thèse est divisée en deux parties et chaque partie comporte deux chapitres. Nous clôturons cette thèse par une liste des références. Elle est structurée de la manière suivante :

La première partie intitulée "**Outils d'analyse fonctionnelle**" (I) comporte les chapitres (1)–(2) représente une brève introduction à l'étude des inéquations variationnelles. Le matériel présenté ici a été sélectionné en mettant l'accent sur les outils mathématiques utiles nécessaires à l'étude des problèmes de contact. Plus spécifiquement, le Chapitre 1 est dédié à quelques éléments d'analyse fonctionnelle et d'analyse non linéaire [1], [7], [8] et [9]. Dans le chapitre 2, nous évoquons quelques résultats issus de la théorie des inéquations variationnelles paraboliques, équations

---

d'évolution, les inéquations quasi-variationnelles et **le lemme de Gronwall**.

La deuxième partie intitulée "**Modélisation et analyse des problèmes de contact**" (II) contient un seul chapitre (3) qui représente la partie principale de cette thèse. Cette partie est consacrée à la modélisation et à l'analyse des problèmes antiplans de contact avec ou sans frottement.

Le chapitre (3) est basé essentiellement sur la modélisation de deux problèmes antiplans de contact avec frottement. Nous présentons le cadre physique, les lois de comportement de nature électro-élastique et une version régularisée. Nous décrivons aussi les conditions de contact et les lois de frottement que nous utilisons dans les problèmes de contact envisagés. Nous établissons un résultat d'existence et d'unicité de la solution. Ici, la démonstration repose sur des arguments d'inéquations variationnelles. Ce Chapitre s'achève par un résultat de convergence, <https://www.inderscience.com/info/ingeneral/forthcoming.php?jcode=ijmmno>, 2019.

**Première partie**

**Outils d'analyse fonctionnelle**



## Analyse fonctionnelle : Outils de description des espaces et des fonctions

"Placez votre main sur un poêle une minute et ça vous semble durer une heure. Asseyez vous auprès d'une jolie fille une heure et ça vous semble durer une minute. C'est ça la relativité."

"La vie, c'est comme une bicyclette, il faut avancer pour ne pas perdre l'équilibre."

Albert Einstein

### 1.1 Introduction

Dans ce premier chapitre intitulé "**Analyse fonctionnelle : Outils de description des fonctions**" (1), nous présentons quelques préliminaires de l'analyse fonctionnelle qui seront utilisés presque partout dans cette thèse. En premier lieu, nous faisons quelques rappels sur les espaces normés, les espaces fonctionnels, le théorème de point fixe de Banach et un résultat de point fixe qui s'adapte aux inéquations variationnelles avec des opérateurs à mémoire. En suite, nous citons quelques propriétés des espaces de Sobolev. Finalement, nous décrivons les propriétés des inéquations variationnelles.

### 1.2 Espace vectoriel

On considère un ensemble non vide  $E$  sur lequel on suppose définies une loi de composition interne notée additivement  $(+)$  et une loi de composition externe, notée multiple  $(\cdot)$  de  $K \times E$  dans  $E$ . On dit que  $E$  est un espace vectoriel sur  $K$  si :

**Part A :**  $(E, +)$  est un **Groupe Abélien**, c'est-à-dire :

- 1)  $\forall (x, y) \in E^2 : x + y = y + x$  (commutativité)
- 2)  $\forall (x, y, z) \in E^3 : (x + y) + z = y + (x + z)$  (associativité)
- 3)  $\exists e \in E, \forall x \in E, x + e = x$  (élément neutre)

---

4)  $\forall x \in E, \exists x' \in E : x + x' = e$  (élément symétrique)

**Part B :**  $\forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}$ , on a :

- 1)  $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
- 2)  $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
- 3)  $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$
- 4)  $1 \cdot x = x$ .

### 1.3 Espaces métriques

**Définition** Une distance sur un ensemble  $E$  est une application  $d : E \times E \rightarrow [0; +\infty[$  vérifiant les propriétés suivantes :

- 1)  $d(x, y) = d(y, x)$  pour tous  $x, y \in E$
- 2)  $d(x, y) = 0$  si et seulement si  $x = y$
- 3)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  pour tous  $x, y, z \in E$

**Remarque** Un espace métrique  $(E, d)$  est un ensemble  $E$  muni d'une distance  $d$ .

**Quelques exemples** On a les exemples suivants :

1) Prenons  $E = \mathbb{R}$  et  $d(x, y) = |x - y|$ . Cela définit un espace métrique.

2) Prenons  $E = \mathbb{R}^N$  et choisissons les différentes distances suivantes :

$$2.1) d_e(x, y) = \left( \sum_{k=1}^N (x_k - y_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$2.2) d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq k \leq N} |x_k - y_k|$$

$$2.3) d_1(x, y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|$$

**Théorème : (Caractérisation des applications continues)** Soit  $f$  une application entre deux espaces métriques  $(X, d)$  et  $(Y, d)$ . Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) L'application  $f$  est continue en tout point de  $X$ ,
- 2) L'image réciproque d'un ouvert est un ouvert,
- 3) L'image réciproque d'un fermé est un fermé.

**Définition** Soit  $X$  un ensemble, on considère deux distances  $d$  et  $\delta$  sur  $X$ . On dit que les deux distances sont topologiquement équivalentes si et seulement si l'application  $Id$  est continue de  $(X, d)$  dans  $(X, \delta)$  et de  $(X, \delta)$  dans  $(X, d)$ .

---

**Remarque** Les ouverts associés à deux distances topologiquement équivalentes sont les mêmes ; ainsi donc les fonctions continues et les suites convergentes sont les mêmes.

**Définition** Soient  $A$  une partie d'un espace métrique  $(X, d)$  et  $x$  un point de  $X$ . On appelle distance du point  $x$  à l'ensemble  $A$  la quantité  $d(x, A) = \inf_{a \in A} \{d(x, a)\}$ .

**Définition** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. On dit qu'une partie  $A$  de  $X$  est de diamètre finie si et seulement si il existe un réel strictement positif  $C$  tel que  $\forall (a, a') \in A^2, d(a, a') \leq C$ .

## 1.4 Espaces complets

**Définition** Soit  $(X, d)$  un espace métrique, on appelle suite de Cauchy de  $X$  toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $X$  telle que  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0, d(x_n, x_m) < \varepsilon$ .

**Définition** Soit  $(X, d)$  un espace métrique, on dit que cet espace est complet si et seulement si toute suite de Cauchy est convergente.

**Proposition** Soit  $(X, d)$  un espace complet. On considère  $A$  une partie de  $X$ . L'espace métrique  $(A, d|_{A \times A})$  est complet si et seulement si  $A$  est fermé.

**Théorème : (de point fixe de Picard)** Soit  $f$  une application d'un espace métrique complet  $(X, d)$  dans lui-même telle qu'il existe un réel  $k$  de l'intervalle  $]0; 1[$  vérifiant  $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ . Il existe alors un unique point fixe  $z$  tel que  $f(z) = z$ .

**Théorème (de Baire)** Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet, on considère une suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'ouverts denses dans  $X$ . Alors  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$  est dense.

## 1.5 Espaces normés

**Définition** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $K = \mathbb{R}$  ou  $K = \mathbb{C}$ . Une norme sur  $E$  est une application le plus souvent notée  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$  vérifiant les propriétés suivante :

1) a)  $\|x\| \geq 0$  pour tout  $x \in E$  et b)  $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$  : **(Positivité et séparation)**.

2)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}$  : **(Homogénéité)**.

3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$  : **(Inégalité triangulaire)**.

---

**Remarque** Un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel  $E$  muni d'une norme  $\|\cdot\|$ . Si on supprime le 1)b), on dit que  $\|\cdot\|$  est une semi-norme .

**Remarque** On appelle *espace vectoriel normé* un espace  $E$  muni d'une norme  $\|\cdot\|$ .

**Proposition** Si  $\|\cdot\|$  est une norme sur un espace vectoriel  $E$  , alors on définit une distance sur  $E$  en posant  $d(x, y) = \|x - y\|$ . On dit que  $d$  est la distance associée à la norme  $\|\cdot\|$ .

## 1.6 Espace de Banach

**Definition** L'espace normé  $(E, \|\cdot\|)$  est appelé un espace de Banach si toute suite de Cauchy dans  $E$  converge vers un élément de  $E$  (pour la norme  $\|\cdot\|$ ). En d'autres mots, un espace de Banach est un espace normé complet.

**Proposition** Les espaces vectoriels normés de dimension finie sur  $K = \mathbb{R}$  ou  $K = \mathbb{C}$  sont des Banach.

**Proposition** Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $B$  un Banach alors  $\mathcal{L}(E, B)$  est aussi un espace de Banach pour la norme des applications linéaires.

## 1.7 Quelques Inégalités

**Inégalité de Minkowski** : pour tous  $p \in [1; +\infty[$  et  $x, y \in \ell^p$ , on a

$$\left( \sum_{m=1}^{\infty} |x_m + y_m|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{m=1}^{\infty} |y_m|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

**Inégalité de Holder** : pour tous  $p \in ]1; +\infty[$   $x \in \ell^p$  et  $y \in \ell^q$  avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

$$\sum_{m=1}^{\infty} |x_m \cdot y_m| \leq \left( \sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{m=1}^{\infty} |y_m|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

**Inégalité de Jensen** : pour tous  $p, q \in [1; +\infty[$  tels que  $p \leq q$  et tous  $x \in \ell^p$ , on a  $x \in \ell^q$  et

$$\left( \sum_{m=1}^{\infty} |y_m|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left( \sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

## 1.8 Les opérateurs

### 1.8.1 Notions sur les opérateurs

**Les opérateurs linéaires bornés**

**Definition** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces normés, un opérateur  $A$  défini sur  $X$  dans  $Y$

et dite linéaire s'il vérifie les conditions suivantes :  
 Pour tout  $u, v$  dans  $X$  et  $\alpha, \beta$  dans  $\mathbb{R}$  on a :

1.  $Au \in Y$ .
2.  $A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$ .

**Definition** Un opérateur linéaire  $A$  défini sur  $X$  dans  $Y$  et dite borné s'il existe une constante positive  $C$ , telle que :

$$\|Au\|_Y \leq C\|u\|_X, \quad \forall u \in X.$$

**Remarque** Le plus petit de nombres  $C$  vérifiant cette inégalité s'appelle norme de l'opérateur  $A$  et se note  $\|A\|$ , on a :

$$\|A\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|Au\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|}.$$

**Definition** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces normés et  $T : X \rightarrow Y$  un opérateur linéaire, les propriétés suivantes sont équivalentes

1. L'opérateur  $T$  est **continu** sur  $X$ .
2. L'opérateur  $T$  est **continu au point**  $0_X$ .
3. L'opérateur  $T$  est **borné**.

## 1.8.2 Opérateur intégral linéaire

**Definition** Soit  $a \leq x \leq b, a \leq t \leq b$  les équations

$$g(x) = \int_a^b k(x, t)g(t)dt, \quad (1.1)$$

$$g(x) = f(x) + \int_a^b k(x, t)g(t)dt, \quad (1.2)$$

$$g(x) = \int_a^b k(x, t)[g(t)]^2dt, \quad (1.3)$$

sont des équations intégrales.

**Remarque** Les équations (1.1) et (1.2) sont linéaires par contre l'équation (1.3) ne l'est pas.

**Definition : La forme générale des équations intégrales)** La forme générale des équations intégrales linéaires est :

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^{b(x)} k(x, t)\varphi(t)dt, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{C}. \quad (1.4)$$

1. si  $f(x) = 0$ , l'équation (1.4) est dite **homogène**.
2. si  $f(x) \neq 0$ , l'équation (1.4) est dite **non homogène**.

3. si  $b(x) = x$ , (1.4) est l'équation intégrale de Volterra.
4. si  $b(x) = b$ , (1.4) est l'équation intégrale de Fredholm.
5. si  $h(x) = 0$ , (1.4) est l'équation intégrale de première espèce.
6. Si  $h(x) \neq 0$ , (1.4) est l'équation intégrale de seconde espèce.

**Définition** Un opérateur intégral linéaire  $A$  est un opérateur qui admet une formulation de la forme suivante :

$$(A\varphi)x = \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt. \quad (1.5)$$

**Remarque** La fonction  $K$  étant appelée noyau de l'opérateur  $A$ . Si  $K$  est une fonction continue de  $[a,b] \times [a,b]$ , l'opérateur  $A$  est appelé opérateur intégral à noyau continu  $K$ . L'opérateur intégral  $A$  de  $C([a,b])$  dans  $C([a,b])$  à noyau continu est un opérateur compact. Soit  $E$  un ensemble borné de  $C([a,b])$  alors, on a  $\|\varphi\| \leq M$ , pour tout  $\varphi \in E$ , de plus

$$|A\varphi(x)| \leq M|b-a| \max_{x,t \in [a,b]} |K(x,t)|, \forall x \in [a,b] \text{ et } \forall \varphi \in E. \quad (1.6)$$

D'où l'ensemble  $A(E)$  uniformément borné. D'autre part, le noyau  $K$  est uniformément continu sur le compact  $[a,b] \times [a,b]$ , d'où pour tout  $x, t, z$  de  $[a,b]$ , on a

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que } |x-t| < \delta \implies |K(x,z) - K(t,z)| < \frac{\epsilon}{M|b-a|}. \quad (1.7)$$

D'où  $|A\varphi(x) - A\varphi(t)| < \epsilon$ , pour tout  $\varphi \in E$  et  $x, t \in [a,b]$  avec  $|x-t| < \delta$ . Ceci exprime que l'ensemble  $A(E)$  est équicontinu, d'où  $A(E)$  est relativement compact par le théorème d'Arzela-Ascoli, alors  $A$  est compact.

### 1.8.3 Opérateurs compacts

#### Part 1 : Compacité

Soit  $U$  un ensemble d'un espace normé  $X$ ,  $U$  est dit compact si de tout recouvrement de  $U$  par des ouverts de  $U$  on peut extraire un sous-recouvrement fini i.e.

$$\forall V_{i,j} \text{ (ouverts)}; U \subset \cup_{j \in J} V_j, \exists V_{j(k)}, j(k) = 1, 2, \dots, n \text{ tel que } U \subset_{k=1}^n V_j(k).$$

**Définition** Un sous ensemble d'un espace normé est dit relativement compact si son adhérence est compacte (Opérateur compact).

**Définition** Soit  $T$  un opérateur d'un espace normé  $X$  dans un espace normé  $Y$ , on dit que  $T$  est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné dans  $X$  à un ensemble relativement compact dans  $Y$  (Opérateur Complètement Continu).

---

**Définition** L'opérateur  $T$  est dite complètement continu, si elle est continu et compact. L'opérateur  $T$  est compact, si et seulement si pour toute suite bornée  $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$ , la suite  $\{Tx_n\}_{n \geq 1}$  admet que sous suite convergente dans  $Y$ .

**Définition** Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse. En effet, si on désigne par :

$$B(0,1) = \{x \in X, \|x\| \leq 1\},$$

alors,  $T(B(0;1))$  est relativement compact d'ou

$$\|Tx\| \leq C, \forall x \in B(0,1).$$

Alors Test borné.

**Remarque** Réciproquement, l'opérateur identité  $I$  de  $X$  dans  $X$  est borné, mais il n'est pas compact car  $I(B(0,1)) = B(0,1)$ , n'est pas relativement compacte sauf si  $X$  est de dimension finie.

**Définition** Soit  $T$  un opérateur borné de  $X$  dans  $Y$ , à image  $T(X)$  de dimension finie. Alors  $T$  est compact. (Théorème de Convergence Dominée de Lebesgue)  
Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $L^1$ . On suppose

1.  $f_n(t) \rightarrow f(x)$  p.p sur  $\Omega$ .
2. il existe une fonction  $g \in L^1$  telle que pour chaque  $n$ ,  
 $|f_n(x)| \leq g(x)$  p.p. sur  $\Omega$  Alors on a les deux points :

$$f \in L^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0.$$

**Définition** Soit  $(X, d)$  un espace métrique,  $K \subset X$  est dit compact si pour tout recouvrement ouvert  $(B_i)_{i \in I}$  de  $X$ , (i.e.  $B_i$  ouvert et  $X = \cup_{i \in I} B_i$ ), on peut extraire un sous recouvrement fini. c'est-à-dire,

$$X = \cup_{i \in I} B_i \implies \exists J \subset I, X = \cup_{i \in J} B_i$$

**Remarque** Pour une partie  $K$  d'un espace métrique  $(X, d)$ , les deux assertions sont équivalentes :

1.  $K$  est compacte.
2. de toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $K$ , on peut extraire une sous suite convergente dans  $K$ .

**Théorème (Ascoli-Arzelà)** Considérons  $X = C([a, b])$ , muni de la norme

$$\|f\|_c = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|, \text{ avec } -\infty < a < b < +\infty.$$

si  $A$  est un sous ensemble de  $X$  tel que :

1.  $A$  est uniformément borné, c'est à dire,  
 $\exists r \geq 0, ; \forall f \in X, \| f \|_c \leq r.$
2.  $A$  est équicontinue, c'est à dire ,  
 $\forall \varepsilon, \exists \mu > 0 ; \forall x, y \in X f \in A : |x - y| \leq \mu \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$
3. pour tout  $x \in I$  l'ensemble  $\{f(x), f \in A\} \subset \mathbb{R}$  est relativement compact.

Alors l'ensemble  $A$  est relativement compact.

**Remarque** Dans le cas particulier où  $X = C([a, b])$ , le théorème suivant d'Arzela-Ascoli est généralement utilisé pour prouver la compacité de  $T$ .

## 1.9 Mesure de Non Compacité

### 1.9.1 Mesure de Non Compacité de Kuratowskii

La mesure de non compacité de Kuratowskii est l'application  $\alpha$  définie sur  $\Omega_E$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\alpha(B) = \inf\{\varepsilon > 0, B \subseteq \cup_{i=1}^n (B_i), \text{diam}(B_i) < \varepsilon\}$$

avec  $\Omega_E$  est la famille des sous espaces bornés de  $E$  et  $B \in \Omega_E$ . La mesure de non compacité de Kuratowskii satisfait les propriétés suivantes :

1.  $\alpha(B) = 0 \iff \bar{B}$  est compact ;
2.  $\alpha(B) = \alpha(\bar{B})$  ;
3.  $A \subset B \implies \alpha(A) < \alpha(B)$  ;
4.  $\alpha(A + B) \leq \alpha(A) + \alpha(B)$  ;
5.  $\alpha(cB) = |c|\alpha(B)$  ;  $c \in \mathbb{R}$  ;
6.  $\alpha(\text{conv}B) = \alpha(B)$  ;
7.  $\alpha(A \cup B) = \max\{\alpha(A), \alpha(B)\}$  ;
8.  $\alpha(A \cap B) \leq \min\{\alpha(A), \alpha(B)\}$ .

Soit  $D$  un sous espace fermé, borné et convexe d'un espace de Banach  $C(I, E)$ , soient  $G$  une fonction continue sur  $I \times I$ , et  $f : I \times E \rightarrow E$  une fonction qui satisfait les conditions de Carathéodory, et il existe  $p \in L^1(I, \mathbb{R}^+)$  telle que pour tout  $t \in I$ , et tout sous ensemble borné  $B \subset E$  on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \alpha(f(I_{t,h} \times B)) \leq p(t)\alpha(B) \quad , I_{t,h} = [t - h, t] \cap I;$$

Si  $V$  est un sous ensemble équicontinu de  $D$ , alors :

$$\alpha(\{ \int_I G(s, t) f(s, y(s)) ds, y \in V \}) \leq \int_I \|G(t, s)\| p(s) \alpha(V(s)) ds.$$

---

## 1.10 Théorèmes du Point Fixe

Soient  $H$  est un espace de Hilbert et  $U$  un opérateur borné, l'opérateur  $U$  est dit opérateur contractant s'il existe une constante positive  $k$  telle que :  $0 < k < 1$  et  $\| U\varphi_1 - U\varphi_2 \| \leq k \| \varphi_1 - \varphi_2 \|$ . Soit  $U$  un opérateur contractant dans un espace de Hilbert  $H$ , alors l'équation

$$U\varphi = \varphi$$

admet une solution unique  $\varphi$  dans  $H$ , cette solution est le point fixe de cet opérateur.

Supposons que l'opérateur  $U$  admet un point fixe dans l'espace de Hilbert  $H$  alors l'opérateur  $U^n$  admet le même point fixe  $\varphi$ .

**Remarque** Soit  $U$  un opérateur dans l'espace  $H$  tel que l'opérateur est un opérateur contractant, alors  $U^n$  admet un point fixe unique  $\varphi$  dans l'espace  $H$ . Soit  $H$  est un espace de Hilbert et  $A$  un opérateur borné dans  $H$  avec la propriété suivante

$$\| A\varphi_1 - A\varphi_2 \| \leq k \| \varphi_1 - \varphi_2 \| .$$

Alors l'équation suivante

$$\varphi - \lambda A\varphi = f$$

admet une solution unique pour toute  $f \in H$  condition que  $|\lambda|$  est petit.

**Définition** Soit  $X$  un espace de Banach. Supposons que  $A : X \rightarrow X$  est une application non linéaire et strictement contractante, i.e.

$$\| A(v) - A(w) \| \leq \delta \| v - w \| \quad \forall v, w \in X$$

pour une constante  $0 < \delta < 1$ . Alors,  $A$  admet un point fixe unique.

**Théorème du Point Fixe de Schauder** Soit  $\Omega$  un ensemble fermé convexe d'un espace de Banach  $X$  et on suppose que  $A : \Omega \rightarrow \Omega$  est une application continue, telle que  $A(\Omega)$  est un sous-ensemble relativement compact de  $\Omega$ . Alors  $A$  a un point fixe.

Soit  $X$  un espace de Banach et  $A, B : X \rightarrow X$  deux opérateurs telle que :

- i)  $A$  contraction,
- ii)  $B$  complètement continue.

Alore

---

a)  $y = A(y) + B(y)$  a une solution.

ou

b) L'ensemble  $\Sigma = \{u \in X ; \lambda A(\frac{u}{\lambda}) + \lambda B(u) = u; 0 < \lambda < 1\}$  est non borné.

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés  $(E, \|\cdot\|_E)$ ,  $(F, \|\cdot\|_F)$  et soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur le corps

**Définition** Une application  $A$  définie par :

$$A : E \rightarrow F$$

$$x \mapsto A(x) = Ax$$

est dite opérateur si

ii)  $D(A) = \{x \in E ; Ax \in F\} \subseteq E$  est dit domaine de définition de l'opérateur  $A$ .

iii) L'opérateur  $A$  est linéaire ssi

$$\forall \alpha ; \beta \in K, \forall x, x \in D(A) : A(\alpha x + \beta x) = \alpha Ax + \beta Ax$$

**Définition** i) L'opérateur  $A$  est dit continu au point  $x_0 \in E$  ssi

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists \eta > 0, \|x - x_0\|_E < \eta \Rightarrow \|Ax - Ax_0\|_F < \varepsilon$$

ii)  $A$  est dit continu dans  $E$  s'il est continu en tout point de  $E$ .

**Proposition 1** Un opérateur linéaire est continu dans  $E$  s'il est continue à l'origine (c'est-à-dire continue en 0).

**Définition** On dit que l'opérateur  $A$  est borné s'il existe une constante  $c \geq 0$  telle que

$$\|Ax\|_F \leq c \|x\|_E \quad \forall x \in D(A)$$

**Définition** (Graphe, Image, Noyau de  $A$ )

i) Graphe de  $A = G(A) = \cup [x, Ax] = \{(x, Ax) / x \in D(A)\} \subset E \times F$

ii) Image de  $A = R(A) = \cup \{Ax\} \subset F$

iii) Noyau de  $A = \ker A = N(A) = \{x \in D(A); Ax = 0\} \subset E$

**Définition** On dit que l'opérateur  $A$  est fermé ssi

$$G(A) = \{(x, Ax) \in E \times F : x \in D(A)\}$$

est fermé dans  $E \times F$ . Ceci équivaut à dire si une suite  $(x_n)$  dans  $D(A)$  telle que

$$x_n \rightarrow x \text{ dans } D(A) \text{ et } Ax_n \rightarrow f \text{ dans } F.$$

Alors

$$f = Ax, x \in D(A).$$

---

**Remarque** Si  $A$  est fermé, alors  $N(A)$  est fermé.

**Théorème** L'opérateur  $A^{-1}$  existe et en même temps est borné sur  $R(A)$  si et seulement si  $\|Ax\| \geq m\|x\|$ , pour un  $m$  constant,  $m \geq 0$ , et pour tout  $x \in D(A)$ .

**Théorème** Soient deux espaces de Banach  $X$  et  $Y$  et un opérateur

$A \in \mathcal{L}(X, Y)$  tel que  $R(A) = Y$ . Si  $A$  est inversible, il est aussi continûment inversible.

## 1.11 Opérateur adjoint

**Proposition** Soient  $E$  et  $F$  des espaces de Hilbert et  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors il existe un unique  $T^* \in \mathcal{L}(F, E)$  tel que, pour tout  $x \in E$  et tout  $y \in F$ , on ait  $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$ . Et de plus, on a  $\|T^*\| = \|T\|$ .

**Définition** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Hilbert et  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ . L'unique application linéaire  $T^* \in \mathcal{L}(F, E)$  telle que pour tout  $x \in E$  et tout  $y \in F$ , on ait  $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$  est appelée l'adjoint de  $T$ .

**Proposition** Soient  $E$  et  $F$  des espaces de Hilbert. L'application  $T \mapsto T^*$  est isométrique de  $\mathcal{L}(E, F)$  dans  $\mathcal{L}(F, E)$ ; elle est linéaire si les espaces sont réels et antilinéaire si les espaces sont complexes. De plus,  $\forall T \in \mathcal{L}(E, F), (T^*)^* = T$  et  $\|T^*T\| = \|T\|^2$ . Enfin  $(TS)^* = S^*T^*$

**Proposition** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Hilbert et soit  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors  $E = \ker(T) \oplus^\perp (\text{Im}(T^*))^-$  ou  $(\text{Im}(T))^-$  et  $(\text{Im}(T^*))^-$  désignent la fermeture (pour la norme) de  $\text{Im}(T)$  et  $\text{Im}(T^*)$  respectivement.

## 1.12 Éléments d'analyse non linéaire

Dans cette section nous allons rappeler quelques notions d'analyse non linéaire qui seront d'une grande utilité pour la réalisation de ce travail. En particulier des résultats sur les opérateurs monotones, les fonctions convexes et semi-continues inérieurement, la différentiabilité et la sous différentiabilité.

### 1.12.1 Opérateurs linéaires

Soient  $(X, \|\cdot\|_X)$  et  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  deux espaces normés et soit  $L : X \rightarrow Y$  un opérateur.

L'opérateur  $L : X \rightarrow Y$  est linéaire si

---


$$L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in X, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Un opérateur linéaire est *continu* si et seulement s'il est borné, c'est-à-dire il existe une constante  $M > 0$  telle que

$$|L(v)|_Y \leq M|v|_X \quad \forall v \in X.$$

Nous utiliserons la notation  $\mathcal{L}(X, Y)$  pour l'ensemble de tous les opérateurs linéaires continus de  $X$  dans  $Y$ . Pour  $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ , la quantité

$$|L|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{0 \neq v \in X} \frac{|Lv|_Y}{|v|_X} \quad (1.8)$$

est appelée l'*opérateur norme* de  $L$  et  $L \rightarrow |L|_{\mathcal{L}(X, Y)}$  définit une norme sur l'espace  $\mathcal{L}(X, Y)$ . De plus, Si  $Y$  est un espace de Banach alors  $\mathcal{L}(X, Y)$  est aussi un espace de Banach. Pour un opérateur linéaire  $L$ , nous écrivons habituellement  $L(v)$  comme  $Lv$ , mais parfois, nous écrivons aussi  $Lv$  même lorsque  $L$  n'est pas linéaire.

Pour un espace normé  $X$ , l'espace  $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$  est appelé l'*espace dual* de  $X$  et il est désigné par  $X'$ . Les éléments de  $X'$  sont des fonctionnelles continues et linéaires sur  $X$ . Le produit de dualité entre  $X'$  et  $X$  est généralement désigné par  $l(v)$  ou  $\langle v', v \rangle$  ou  $\langle v', v \rangle_{X' \times X}$  pour  $v' \in X'$  et  $v \in X$ . Il résulte de (1.8) qu'une norme sur  $X'$  est donnée par

$$|l|_{X'} = \sup_{0 \neq v \in X} \frac{|l(v)|}{|v|_X}, \quad (1.9)$$

et  $(X', |\cdot|_X)$  est toujours un espace de Banach.

Soit maintenant  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire. La forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est dite – *continue* s'il existe un réel  $M > 0$  tel que

$$a(u, v) \leq M|u|_X|v|_X \quad \forall u, v \in X.$$

– *X-elliptique* s'il existe une constante  $m > 0$  telle que

$$a(v, v) \geq m|v|_X^2 \quad \forall v \in X.$$

– *symétrique* si

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in X.$$

---

### 1.12.2 Opérateurs non linéaires

Soit  $X$  un espace de Hilbert muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$  et de la norme  $|\cdot|_X$  et soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur.

– L'opérateur  $A$  est dit *monotone* si

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X.$$

– L'opérateur  $A$  est *strictement monotone* si

$$(Au - Av, u - v)_X > 0 \quad \forall u, v \in X, \quad u \neq v.$$

– L'opérateur  $A$  est dit *fortement monotone* s'il existe  $m > 0$  tel que

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m|u - v|^2 \quad \forall u, v \in X.$$

– L'opérateur  $A$  est de *Lipschitz* s'il existe  $M > 0$  tel que

$$|Au - Av|_X \leq M|u - v|_X \quad \forall u, v \in X.$$

Dans l'étude des équations d'évolution non linéaires, nous considérons les opérateurs définis sur un espace normé avec des valeurs dans son dual. En notant par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  pour le produit de dualité entre  $X'$  et  $X$ , une extension de la Définition précédente pour ce cas est la suivante. Soit  $X$  un espace de Banach et soit  $X'$  son dual. Un opérateur  $A : X \rightarrow X'$  est dit *monotone* si

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in X. \quad (1.10)$$

L'opérateur  $A : X \rightarrow X'$  est dit *semi-continu* si l'application  $t \mapsto \langle A(u + tv), w \rangle$  est continue sur  $[0, 1]$  pour tout  $u, v, w \in X$

### 1.12.3 Fonctions convexes et semi-continues inférieurement

**Définition** Soit  $X$  un espace vectoriel réel et soit la fonction  $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ . On dit que la fonction  $\varphi$  est *propre* si  $\varphi(v) > -\infty$  pour tout  $v \in X$  et  $\varphi(u) < \infty$  pour certains  $u \in X$ . La fonction  $\varphi$  est *convexe* si

$$\varphi((1-t)u + tv) \leq (1-t)\varphi(u) + t\varphi(v), \quad (1.11)$$

pour tout  $u, v \in X$  et  $t \in [0, 1]$ . La fonction  $\varphi$  est *strictement convexe* si l'inégalité (1.11) est stricte pour  $u \neq v$  et  $t \in (0, 1)$ .

**Notation** Notons que si  $\varphi, \psi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$  sont des fonctions convexes et  $\lambda \geq 0$ , alors les fonctions  $\varphi + \psi$  et  $\lambda\varphi$  sont aussi convexes. Une fonction  $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$  est dite *semi-continue inférieurement* (s.c.i.) en  $u \in X$  si

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(u_n) \geq \varphi(u), \quad (1.12)$$

pour chaque suite  $\{u_n\} \subset X$  convergente vers  $u$  dans  $X$ . La fonction  $\varphi$  est *s.c.i* si elle est s.c.i. en chaque point  $u \in X$ . Lorsque l'inégalité (1.11) est vérifiée pour toute suite  $\{u_n\} \subset X$  qui converge faiblement vers  $u$ , on dit que la fonction  $\varphi$  est faiblement semi-continue inférieurement à  $u$ . La fonction  $\varphi$  est faiblement s.c.i. si elle est faiblement s.c.i. en chaque point  $u \in X$ .

**Notation** Notons que si  $\varphi, \psi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$  sont des fonctions s.c.i. et  $\lambda \geq 0$ , alors les fonctions  $\varphi + \psi$  et  $\lambda\varphi$  sont aussi s.c.i. De plus, si  $\varphi$  est une fonction continue, alors elle est aussi s.c.i. Cependant, l'inverse n'est pas vrai puisque la semi-continuité inférieure n'implique pas la continuité.

**Remarque** Comme la convergence forte dans  $X$  implique la convergence faible, il en résulte qu'une fonction faiblement semi-continue inférieurement est semi-continue inférieurement. De plus, on peut montrer qu'une fonction  $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$  propre et convexe est semi-continue inférieurement si et seulement si elle est faiblement semi-continue inférieurement.

**Exemple** (Fonction indicatrice) Soient  $X$  un espace réel normé et  $K \subset X$ . On appelle fonction indicatrice de  $K$  la fonction  $\psi_K : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$  définie par :

$$\psi_K(v) = \begin{cases} 0 & \text{if } v \in K, \\ +\infty & \text{if } v \notin K. \end{cases} \quad (1.13)$$

On peut démontrer que  $K$  est un ensemble non vide, fermé et convexe de  $X$  si et seulement si la fonction indicatrice  $\psi_K$  est propre, convexe et s.c.i.

#### 1.12.4 Différentiabilité et sous différentiabilité

Nous rappelons maintenant la définition des fonctions Gateaux-différentiables. Soient  $(X, (\cdot, \cdot)_X)$  un espace préhilbertien,  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $u \in X$ .

**Définition**  $\varphi$  est Gateaux-différentiable au point  $u$  s'il existe un élément  $\nabla\varphi(u) \in X$  tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} = (\nabla\varphi(u), v)_X \quad \forall v \in X. \quad (1.14)$$

**Remarque** L'élément  $\nabla\varphi(u)$  qui satisfait (1.14) est unique et s'appelle le *gradient* de  $\varphi$  en  $u$ . La fonction  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *Gateaux-différentiable* si elle est Gateaux-différentiable en tout point de  $X$ . Dans ce cas, l'opérateur  $\nabla\varphi : X \rightarrow X$  qui associe chaque élément  $u \in X$  par l'élément  $\nabla\varphi(u)$  est appelé l'*opérateur gradient* de  $\varphi$ .

**Remarque** La convexité des fonctions Gateaux-différentiables peut être caractérisée comme suit. Soit  $(X, (\cdot, \cdot)_X)$  un espace préhilbertien et soit  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction Gateaux-différentiable.

---

Les énoncés suivants sont équivalents :

- $\varphi$  est une fonction convexe ;
- $\varphi$  satisfait l'inégalité

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq (\nabla\varphi(u), v - u)_X \quad \forall u, v \in X; \quad (1.15)$$

- le gradient de  $\varphi$  est un opérateur monotone

$$(\nabla\varphi(u) - \nabla\varphi(v), u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X. \quad (1.16)$$

**Définition** Soit  $(X, (\cdot, \cdot)_X)$  un espace préhilbertien et soit  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe et Gateaux-différentiable. Alors  $\varphi$  est semi-continue inférieurement.

**Définition** Soit  $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$  et soit  $u \in X$ . Le sous-différentiel de  $\varphi$  en  $u$  est l'ensemble

$$\partial\varphi(u) = \{f \in X : \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X\}. \quad (1.17)$$

**Notation** On note

$$D(\partial\varphi) = \{u \in X : \partial\varphi(u) \neq \emptyset\}. \quad (1.18)$$

La Fonction  $\varphi$  est dite sous-différentiable en  $u \in X$  si  $u \in D(\partial\varphi)$ , et chaque élément  $f \in \partial\varphi(u)$  s'appelle sous-gradient de  $\varphi$  en  $u$ . La fonction  $\varphi$  est dite sous-différentiable si elle est sous-différentiable en tout point de  $X$ , c'est-à-dire si  $D(\partial\varphi) = X$ . On peut montrer qu'une fonction  $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$  sous-différentiable est convexe et semi-continue inférieurement. En outre, pour les fonctions convexes, le lien entre l'opérateur gradient et sous-différentiel est donné par le résultat suivant. Soit  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe et Gateau différentiable. Alors  $\varphi$  est sous-différentiable et  $\partial\varphi(u) = \{\nabla\varphi(u)\}$  pour tout  $u \in X$ .

**Exemple** (Sous-différentiel de la fonction indicatrice) Soit  $X$  un espace normé réel et soit  $K \subset X$  un ensemble convexe.

Considérons le sous-différentiel de la fonction d'indicateur  $\psi_K$  définie dans l'exemple précédent, et on suppose que  $u \in K$ . Alors  $u' \in \partial\psi_K$  si et seulement si

$$\psi_K(u) \geq \langle u', v - u \rangle \quad \forall v \in K,$$

c'est-à-dire

$$\langle u', v - u \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K.$$

Ainsi, pour  $u \in K$  nous avons

$$\partial\psi_K(u) = \{u' \in X' : \langle u', v - u \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K\},$$

---

et pour  $u \notin K$ , nous avons  $\partial\psi_K(u) = \emptyset$ .

Nous avons toujours  $0 \in \partial\psi_K(u)$  pour  $u \in K$ . On voit facilement que si  $u \in \text{int}(K)$  (l'intérieur de  $K$ ) alors  $\partial\psi_K(u) = \{0\}$ .

''Je persiste ! La science perd son âme en s'éloignant de la philosophie. Nos illustres découvreurs étaient des humanistes. Ils ne pratiquaient pas cette dichotomie actuelle. Ils étaient physiciens, mathématiciens ET philosophes.''

**La deesse des petites victoires - Yannick Granec**





Dans ce chapitre intitulé "Espaces fonctionnels" (2), nous donnons quelques rappels sur les espaces fonctionnels à valeurs réelles qui nous aident à comprendre les propriétés des espaces appropriés à la mécanique. Nous allons aborder les espaces des fonctions continues, continûment différentiables, les espaces de Lebesgue et les espaces de Sobolev.

**Définition** Étant donné un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $x = (x_1, \dots, x_d)$  un élément de  $\mathbb{R}^d$  et soit  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$  un multi-indice tel que  $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ , nous posons

$$D^\alpha v(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} v(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

## 2.1 Espaces des fonctions continues et continûment différentiables

**Notations** On note par  $C(\overline{\Omega})$  l'espace des fonctions continues sur  $\overline{\Omega}$ .  $C(\overline{\Omega})$  est un espace de Banach dont la norme est la suivante :

$$|v|_{C(\overline{\Omega})} = \sup\{|v(x)| : x \in \Omega\} = \max\{|v(x)| : x \in \overline{\Omega}\}.$$

Pour  $m \geq 0$ , l'espace  $C^m(\overline{\Omega})$  défini par

$$C^m(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) : D^\alpha v \in C(\overline{\Omega}) \text{ pour tout } \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leq m\}$$

c'est l'espace des fonctions continues sur  $\overline{\Omega}$  dont les dérivées d'ordre au plus  $m$  sont également continues sur  $\overline{\Omega}$ .

**Définition** L'espace  $C^m(\overline{\Omega})$  est un espace de Banach dont la norme est donnée par

$$|v|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha v|_{C(\overline{\Omega})}.$$

Par ailleurs,  $C^\infty(\overline{\Omega})$  désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v \in C^m(\overline{\Omega}) \quad \forall m = 0, 1, \dots\}.$$

---

**Définition** Soit  $v$  une fonction dans  $\Omega$ , le support de  $v$  est défini par :

$$\text{supp } v = \overline{\{v \in \Omega : v(x) \neq 0\}}.$$

Si  $\text{supp } v$  est un sous-ensemble propre de  $\Omega$ , on dit que  $v$  est une fonction à support compact dans  $\Omega$ .

## 2.2 Espaces $L^p(\Omega)$

Dans toute la suite  $\Omega$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  muni de la mesure de Lebesgue  $dx$ .

**Définition** Soit  $p \in [1, +\infty[$ . On note  $L^p(\Omega)$  l'espace des (classes de) fonctions mesurables et dont la  $p^{\text{ème}}$  puissance du module est intégrable, muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Remarque** L'espace  $L^\infty(\Omega)$  est formé des (classes de) fonctions mesurables essentiellement bornées, muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{c \geq 0 : |f| \leq c \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

**Remarque** L'espace  $L^p(\Omega)$  est un espace de Banach. Il est séparable pour  $1 \leq p < \infty$  et réflexif pour  $1 < p < \infty$ . Dans le cas particulier,  $p = 2$ , on dispose d'un cadre hilbertien très commode d'utilisation.

Ainsi, pour  $f$  et  $g$  données dans  $L^2(\Omega)$ , l'application :

$$(f, g) \longmapsto (f|g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

définit un produit scalaire sur  $L^2(\Omega)$ , ce qui lui confère une structure d'un espace de Hilbert.

**Proposition : [Inégalité de Hölder généralisée]** Soient  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^q(\Omega)$ , et soit  $1 \leq p, q \leq +\infty$ . Si  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ , alors  $fg \in L^r(\Omega)$  et  $\|fg\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$ .

**Démonstration** Soient  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^q(\Omega)$ . A cet effet, on pose  $p' = \frac{p}{r}$  et  $q' = \frac{q}{r}$ . Puisque  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ , il vient que

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1.$$

On applique l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x)|^r |g(x)|^r dx &\leq \left( \int_{\Omega} |f(x)|^{rp'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int_{\Omega} |g(x)|^{rq'} dx \right)^{\frac{1}{q'}} \\ &= \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{r}{p}} \left( \int_{\Omega} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{r}{q}}, \end{aligned}$$

donc

$$\left( \int_{\Omega} |f(x)g(x)|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\Omega} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Par conséquent

$$fg \in L^r(\Omega)$$

et

$$\|fg\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

**Remarque** On désigne par  $p'$  le conjugué harmonique de  $p$  :  $p' = \frac{p}{p-1}$ .

Si  $f \in L^p(\Omega)$  alors  $|f|^{p-1} \in L^{p'}(\Omega)$  et  $\left\| |f|^{p-1} \right\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|f\|_{L^p(\Omega)}^{p-1}$ .

**Proposition** [Normes sur  $(L^p(\Omega))^m$ ] Soient  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $f = (f_1, \dots, f_m)$  mesurable, et  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$ . On pose :  $|\xi|_p = \left( \sum_{i=1}^m |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$  et  $|\xi| = |\xi|_2$ . Alors :

1.  $f \in (L^p(\Omega))^m \Leftrightarrow |f| \in L^p(\Omega)$
2.  $\| |f| \|_{L^p(\Omega)}$  et  $\left( \sum_{i=1}^m \|f_i\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$  sont deux normes équivalentes sur  $(L^p(\Omega))^m$ .

**Remarque** On utilise  $\| \cdot \|_{(L^p(\Omega))^m}$  indifféremment pour désigner une norme convexe sur  $(L^p(\Omega))^m$ .

## 2.3 Distributions

Soit  $\Omega$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### 2.3.1 Espace $\mathcal{D}(\Omega)$

**Définition** On désigne par  $\mathcal{D}(\Omega)$  l'espace des fonctions réelles  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\Omega$  à support compact inclus dans  $\Omega$ . On rappelle que  $\mathcal{D}(\Omega)$  muni de sa topologie naturelle est un espace LF (limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet) et que, pour toute application linéaire  $L$  de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans un espace vectoriel normé  $(X, \| \cdot \|_X)$ , on a

l'équivalence suivante :

$L$  est continue  $\Leftrightarrow \forall K$  compact  $\subset \Omega$ , il existe  $(m, C) \in \mathbb{N} \times ]0, \infty[$  tel que

$$\|L(\varphi)\|_X \leq C \max_{m_1+\dots+m_n \leq m} \sup_{x \in K} |.. \partial^{m_1+\dots+m_n} \varphi \partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}(x)| \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ de support}$$

inclus dans  $K$ .

### 2.3.2 Espace $\mathcal{D}'(\Omega)$

**Définition** On désigne par  $\mathcal{D}'(\Omega)$  le dual topologique de  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Autrement dit,  $\mathcal{D}'(\Omega) = (\mathcal{D}(\Omega))' = \{T; T \text{ est une forme linéaire continue sur } \mathcal{D}(\Omega)\}$ . On appelle distribution sur  $\Omega$  tout élément de  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Ainsi, pour toute forme linéaire  $T$  sur  $\mathcal{D}(\Omega)$ , on a l'équivalence suivante :

$T$  est une distribution sur  $\Omega \Leftrightarrow \forall K$  compact  $\subset \Omega$ , il existe  $(m, C) \in \mathbb{N} \times ]0, \infty[$  tel que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \max_{m_1+\dots+m_n \leq m} \sup_{x \in K} |.. \partial^{m_1+\dots+m_n} \varphi \partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}| \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ de support inclus}$$

dans  $K$ .

**Remarque** Si  $f$  est localement intégrable sur  $\Omega$ , en particulier si  $f \in L^p(\Omega)$  avec  $1 \leq p \leq \infty$ , alors  $f$  est identifiable à  $T_f$ , la distribution sur  $\Omega$  définie par

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f \varphi dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

**Définition** Soit  $T$  une distribution sur  $\Omega$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , la dérivée partielle de  $T$  dans la direction  $i$  est la distribution  $.. \partial T \partial x_i$  sur  $\Omega$  définie par

$$\langle .. \partial T \partial x_i, \varphi \rangle = - \langle T, .. \partial \varphi \partial x_i \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

**Remarque** Soit  $f$  une fonction localement intégrable sur  $\Omega$  et soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . La distribution  $\partial T_f \partial x_i$  s'appelle dérivée partielle au sens des distributions de  $f$  dans la direction  $i$ . On peut vérifier que l'égalité  $\partial T_f \partial x_i = T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}$ , qui signifie que la fonction

$\{\partial f \partial x_i$  est identifiable à  $\partial T_f \partial x_i$ , à lieu si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$  et qu'elle peut être fautive sinon. Néanmoins, par souci de simplicité, on utilisera, tout en restant très vigilant, la notation  $\partial f \partial x_i = \partial T_f \partial x_i$  dans le reste du présent document.

## 2.4 Espaces de Sobolev

Soit  $\Omega$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .

## 2.4.1 Espaces $W^{1,p}(\Omega)$

**Définition** Soit  $1 \leq p \leq \infty$ . On pose

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \forall i \in \{1, \dots, n\} \right\} \quad (2.1)$$

$= \{ u \in L^p(\Omega); \nabla u \in (L^p(\Omega))^n \}$  que l'on munit de la norme définie par l'expression suivante :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left( \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } p < \infty, \\ \max \left\{ \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\nabla u\|_{(L^\infty(\Omega))^n} \right\} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

**Remarque**

a) On utilisera, comme il est de coutume, la notation  $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ . L'espace  $H^1(\Omega)$  est préhilbertien car la norme  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)} = \|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}$  est induite par le produit scalaire défini par l'expression :

$$\begin{aligned} \langle u|v \rangle_{H^1(\Omega)} &= \langle u|v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i} \middle| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \langle u|v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \nabla u | \nabla v \rangle_{(L^2(\Omega))^n}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

b) On peut vérifier que, pour toute suite  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset W^{1,p}(\Omega)$  et pour tout  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , on a l'équivalence suivante :

$$u_m \rightarrow u \text{ dans } W^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow (u_m, \nabla u_m) \rightarrow (u, \nabla u) \text{ dans } L^p(\Omega) \times (L^p(\Omega))^n. \quad (2.3)$$

**Théorème** Soit  $1 \leq p \leq \infty$ . Alors  $W^{1,p}(\Omega)$  est un espace de Banach qui est séparable si  $p < \infty$  et qui est réflexif si  $1 < p < \infty$ . En particulier,  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert séparable.

**Remarque** Les expressions  $\left\| \left( u^2 + \sum_{i=1}^n (\cdot \partial u \partial x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\Omega)}$  et

$\left( \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^n \|\cdot \partial u \partial x_i\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$  sont deux normes équivalentes sur  $W^{1,p}(\Omega)$ .

## 2.4.2 Espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$

Dans cette sous-section on suppose que  $1 \leq p < \infty$ .

**Définition** On pose :

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)} = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega); \exists (\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega) \text{ avec } \varphi_j \rightarrow u \text{ dans } W^{1,p}(\Omega) \right\}$$

---

que l'on munit de la norme  $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ .

### Remarque

- a) On utilisera la notation  $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ .
- b)  $W_0^{1,p}(\Omega)$  est un espace de Banach séparable, il est réflexif si  $p \neq 1$ .
- c)  $H_0^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert séparable.
- d)  $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$  à image dense.

**Proposition [Inégalité de Poincaré]** On suppose que  $\Omega$  est borné. Alors il existe une constante  $C = C_{(\Omega,p)} \in ]0, \infty[$  telle que  $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n} \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ . En particulier, l'expression  $\|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n}$  est une norme sur  $W_0^{1,p}(\Omega)$  qui est équivalente à la norme  $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ .

### Remarque

- a) On suppose que  $\Omega$  est borné.
- a) On utilisera les notations  $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n}$  et  $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^n}$ .
- b) On peut vérifier que, pour toute suite  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$  et pour tout  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , on a l'équivalence suivante :

$$u_m \rightarrow u \text{ dans } W_0^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow \nabla u_m \rightarrow \nabla u \text{ dans } (L^p(\Omega))^n. \quad (2.4)$$

- c) Puisque toutes les normes de  $\mathbb{R}^n$  sont équivalentes, on déduit que  $\left( \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$  est une norme équivalente à  $\|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n}$ .

### Théorème [injection de Sobolev]

1. Si  $n > 2$ , alors  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$ ,
2. si  $n = 2$ , alors,  $\forall p \in [2, \infty[$ ,  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ ,
3. si  $n = 1$ , alors,  $\forall p \in [2, \infty]$ ,  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ .

**Théorème [de Rellich-Kondrachov (injection compacte)]** Soit  $p > 1$ . Si  $\Omega$  est borné, alors l'injection  $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$  est compacte. En particulier, si  $\Omega$  est borné, alors toute suite faiblement convergente dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$  est fortement convergente dans  $L^p(\Omega)$ .

### 2.4.3 Espaces $W^{-1,p}(\Omega)$

Dans cette sous-section on suppose que  $1 < p \leq \infty$ .

**Définition** On pose :

$$W^{-1,p}(\Omega) = \left( W_0^{1,p'}(\Omega) \right)' = \{T; T \text{ est une forme linéaire continue sur } W_0^{1,p'}(\Omega)\}, \quad (2.5)$$

que l'on munit de la norme duale, c'est-à-dire de la norme définie par l'expression suivante :

$$\|T\|_{W^{-1,p}(\Omega)} = \sup \left\{ |\langle T, u \rangle|; u \in W_0^{1,p'}(\Omega) \text{ et } \|u\|_{W^{1,p'}(\Omega)} \leq 1 \right\}. \quad (2.6)$$

*Remarque 1.* a) On utilisera la notation  $H^{-1}(\Omega) = W^{-1,2}(\Omega)$ .

b) On rappelle que  $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p'}(\Omega)$  à image dense.

Si  $T \in W^{-1,p}(\Omega)$ , alors  $T$  (plus précisément, sa restriction à  $\mathcal{D}(\Omega)$ ) est une distribution sur  $\Omega$  qui est, évidemment, continue sur  $\mathcal{D}(\Omega)$  muni de  $\|\cdot\|_{W^{1,p'}(\Omega)}$ . De plus, on a :

$$\|T\|_{W^{-1,p}(\Omega)} = \sup \left\{ |\langle T, \varphi \rangle|; \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ et } \|\varphi\|_{W^{1,p'}(\Omega)} \leq 1 \right\}. \quad (2.7)$$

**Réciproquement**, si  $T$  est une distribution sur  $\Omega$  qui est continue sur  $\mathcal{D}(\Omega)$  muni de  $\|\cdot\|_{W^{1,p'}(\Omega)}$ , alors  $T$  est (prolongeable d'une façon unique en) un élément de  $W^{-1,p}(\Omega)$ .

On vient de donner un sens à l'identification :

$$W^{-1,p}(\Omega) = \{T \in \mathcal{D}'(\Omega); T \text{ est continue sur } \mathcal{D}(\Omega) \text{ muni de } \|\cdot\|_{W^{1,p'}(\Omega)}\}. \quad (2.8)$$

**Proposition** Soit  $f \in L^p(\Omega)$ . On a :

- 1)  $f \in W^{-1,p}(\Omega)$ ,  $\|f\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}$  et  $\langle f, u \rangle = \int_{\Omega} f u dx \forall u \in W_0^{1,p'}(\Omega)$ .
- 2) Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\partial f \partial x_i \in W^{-1,p}(\Omega)$ ,  $\|\partial f \partial x_i\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}$  et
- 3)  $\langle \partial f \partial x_i, u \rangle = - \int_{\Omega} f \partial u \partial x_i dx \forall u \in W_0^{1,p'}(\Omega)$ .

**Démonstration**

$$1) \text{ Pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \text{ on a } |\langle f, \varphi \rangle| = \left| \int_{\Omega} f \varphi dx \right|.$$

D'après l'inégalité de Hölder, on obtient

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{W^{1,p'}(\Omega)}.$$

2) De cette inégalité on déduit que la distribution  $f$  est continue sur  $\mathcal{D}(\Omega)$  muni de  $\|\cdot\|_{W^{1,p'}(\Omega)}$ , ce qui implique que  $f \in W^{-1,p}(\Omega)$ , et que  $\|f\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}$ .

D'autre part, il est aisé de vérifier que l'application  $u \mapsto \int_{\Omega} f u dx$  est une forme linéaire

continue sur  $W_0^{1,p'}(\Omega)$  coïncidant sur  $\mathcal{D}(\Omega)$  avec la distribution  $f$ . La densité de  $\mathcal{D}(\Omega)$

dans  $W_0^{1,p'}(\Omega)$  donne alors l'égalité énoncée.

3) Pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , on a :

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle \right| &= \left| - \left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \right| = \left| - \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx \right| \\ &\leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{W^{1,p'}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ils s'en suivent que la distribution  $.. \partial f \partial x_i$  est continue sur  $\mathcal{D}(\Omega)$  muni de  $\|\cdot\|_{W^{1,p'}(\Omega)}$ , ce qui implique que  $.. \partial f \partial x_i \in W^{-1,p}(\Omega)$ , et que  $\|.. \partial f \partial x_i\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}$ .

Le reste s'obtient en vérifiant que l'application  $u \mapsto - \int_{\Omega} f \frac{\partial u}{\partial x_i} dx$  est une forme linéaire continue sur  $W_0^{1,p'}(\Omega)$  coïncidant sur  $\mathcal{D}(\Omega)$  avec la distribution  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  et en utilisant le fait que  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $W_0^{1,p'}(\Omega)$ .

**Remarque** Comme corollaire de la proposition précédente, on a :

- 1)  $L^p(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p}(\Omega)$ ,
- 2) Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , l'application  $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}$  est continue de  $L^p(\Omega)$  dans  $W^{-1,p}(\Omega)$ ,
- 3)  $f \mapsto \operatorname{div} f$  est continue de  $(L^p(\Omega))^n$  dans  $W^{-1,p}(\Omega)$  et

$$\langle \operatorname{div} f, u \rangle = - \int_{\Omega} f \cdot \nabla u dx \quad \forall u \in W_0^{1,p'}(\Omega). \quad (2.9)$$

## 2.5 Théorème de représentation de Riesz

**Introduction** Soit  $H$  un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle_H$  et de la norme associée définie par l'expression  $\|u\|_H = \sqrt{\langle u | u \rangle_H}$ . On rappelle au passage qu'un espace de Hilbert est un espace de Banach réflexif.

**Théorème** Étant donné  $f \in H'$ , il existe  $u \in H$  unique tel que  $\langle u | v \rangle_H = \langle f, v \rangle$   $\forall v \in H$ . De plus on a  $\|u\|_H = \|f\|_{H'}$ .

**Remarque** Pour tout  $f \in H'$ , on note  $J(f)$  l'unique élément de  $H$  tel que  $\langle J(f) | v \rangle_H = \langle f, v \rangle$   $\forall v \in H$ . Ce faisant, on se trouve à avoir défini ce qu'on appelle l'isomorphisme canonique de  $H'$  sur  $H$ . Les propriétés caractéristiques de  $J$  sont :

- 1)  $\forall (f, v) \in H' \times H, \langle J(f) | v \rangle_H = \langle f, v \rangle,$
- 2)  $\forall (u, v) \in H \times H, \langle J^{-1}(u), v \rangle = \langle u | v \rangle_{H'}$ ,
- 3)  $\forall (f, v) \in H' \times H, \|J(f)\|_H = \|f\|_{H'}$  et  $\|J^{-1}(u)\|_{H'} = \|u\|_H.$

---

## 2.6 Quelques inégalités élémentaires

**Introduction** L'inégalité Gronwall suivante sera utilisée fréquemment dans l'analyse des problèmes antiplans de contact avec ou sans frottement.

**Lemme** Soient  $m, n \in C(0, T; \mathbb{R})$  telles que  $m(t) \geq 0$  et  $n(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, T]$  et soit  $a \geq 0$ . Si  $\varphi \in C(0, T; \mathbb{R})$  est une fonction telle que

$$\varphi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\varphi(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Alors

$$\varphi(t) \leq \left( a + \int_0^t m(s)ds \right) \exp \left( \int_0^t n(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

Pour le cas particulier  $m = 0$ , ce lemme devient :

**Proposition** Soit  $n \in C(0, T; \mathbb{R})$  telle que  $n(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, T]$  et soit  $a \geq 0$ . Si  $\varphi \in C(0, T; \mathbb{R})$  est une fonction telle que

$$\varphi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\varphi(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Alors

$$\varphi(t) \leq a \exp \left( \int_0^t n(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

**Lemme [Inégalité de Gronwall]** Soient  $f, g \in C([0, T])$  et supposons qu'il existe  $c > 0$  tel que

$$f(t) \leq g(t) + c \int_0^t f(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

Alors

$$f(t) \leq g(t) + c \int_0^t g(s)e^{c(t-s)}ds \quad \forall t \in [0, T],$$

Si  $g$  est non décroissante, nous avons que

$$f(t) \leq g(t)e^{ct} \quad \forall t \in [0, T].$$

---

Nous avons également besoin du résultat suivant.

**Lemme [Inégalité de Young]** Soient  $a, b \geq 0$  et  $1 < p, q < \infty$  deux exposants conjugués. Alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{q^b}{q}.$$

Un cas simple (relativement fréquent) de l'inégalité de Young est l'inégalité avec des exposants 2 :

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2},$$

qui donne également l'inégalité de Young avec  $\varepsilon$  (valide pour tout  $\varepsilon > 0$ ) :

$$ab \leq \frac{a^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon b^2}{2}.$$

'Nous allons vers une situation où les mathématiciens n'auront plus le monopole des mathématiques, mais où économistes, managers et marchands feront tous des mathématiques comme Monsieur Jourdain faisait de la prose.'

**Hasard, chaos et mathématiques - Ivar Ekeland**

## **Deuxième partie**

# **Modélisation et analyse des problèmes de contact**





---

Étude et Analyse d'un Problème Antiplan Électro-  
élastique

---

1. Introduction
  2. Cadre physique et modèle mathématique
  3. Position du problème continu
  4. Quelques hypothèses
  5. Formulation variationnelle
  6. Résultat d'existence et d'unicité de la solution faible
  7. Conclusion
-

---

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre intitulé "Étude et Analyse d'un Problème Antiplan Électro-élastique de Contact avec Frottement " (3), on considère un problème statique avec frottement de Tresca. Nous présentons une formulation variationnelle du problème pour laquelle, nous démontrons un résultat d'existence et d'unicité de la solution. La seconde section est destinée à l'étude d'un problème statique avec frottement régularisé dans lequel on remplace **la loi de frottement de Tresca par ses versions régularisées**. La formulation variationnelle de ce problème peut être dérivée en utilisant les mêmes arguments et hypothèses utilisées dans la première section. Nous démontrons un résultat d'existence et d'unicité de la solution et nous montrons que la suite des solutions faibles converge vers la solution du problème posé dans la première section, quand **le paramètre de régularisation**  $\rho$  tend vers zéro. La démonstration est basée sur les arguments des inéquations variationnelles d'évolution et de point fixe. La rédaction de cette section s'inspire de l'article dans les références : Journal : International Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimisation (IJMMNO), <https://www.inderscience.com/jhome.php?jcode=ijmmno> Titre : Mathematical Modelling of Piezoelectric Elastic Materials, Auteurs : Boudjour Allaoua and Mohamed Dalah.

### 3.2 Cadre physique et modèle mathématique

Dans cette section intitulée "Cadre physique et modèle mathématique", nous considérons un corps cylindrique  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$ , rapporté dans le repère orthogonal cartésien  $Ox_1x_2x_3$ , situé dans une configuration d'origine fixe et non déformée. Nous admettons que les génératrices de ce cylindre  $\mathcal{B}$  sont parallèles à l'axe  $Ox_3$ . Sa coupe transversale est un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ; repéré dans le plan  $(Ox_1x_2)$ . Le corps cylindrique est supposé suffisamment long afin de négliger les effets dans la direction axiale. Par la suite, nous pouvons alors écrire que  $\mathcal{B} = \Omega \times (-\infty, +\infty)$ . Notons  $\partial\Omega = \Gamma$  la frontière du domaine  $\Omega$ , divisée en trois parties disjointes et mesurables  $\Gamma_1, \Gamma_2$  and  $\Gamma_3$  avec  $mes \Gamma_1 > 0$ . Le cylindre est bloqué sur cette partie  $\Gamma_1 \times (-\infty, +\infty)$ , subit à la fois des forces volumiques  $f_0$  dans  $\mathcal{B}$  et des forces surfaciques  $f_2$  sur  $\Gamma_2 \times (-\infty, +\infty)$  et est en contact avec une fondation tout au long de la partie  $\Gamma_3 \times (-\infty, +\infty)$ .

On considère dans cette partie que le contact est en forttement. Ce dernier sera modélisé par la loi de Tresca cité dans [34], [35] et dans [36]. A cet effet nous supposons dans ce qui suit que les forces volumiques  $f_0$  dans  $\mathcal{B}$  et les forces surfaciques  $f_2$  sur  $\Gamma_2 \times (-\infty, +\infty)$  sont telles que

$$\mathbf{f}_0 = (0, 0, f_0) \text{ avec } f_0 = f_0(x_1, x_2, t) : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{f}_2 = (0, 0, f_2) \text{ avec } f_2 = f_2(x_1, x_2, t) : \Gamma_2 \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

De plus, les charges électriques de densité volumique  $q_0$  et les charges surfaciques de densité  $q_2$  sont de la manière :

$$\mathbf{q}_0 = q_0(x_1; x_2; t) : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{q}_2 = q_2(x_1; x_2; t) : \Gamma_b \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

### Remarque

Il est facile de remarquer que les deux forces  $f_0$  et  $f_2$  définies par les relations (3.1)–(3.2) et (3.3)–(3.4) engendrent une déformation sur le cylindre avec un déplacement  $u$  et un champ électrique  $\varphi$  de la manière :

$$\mathbf{u} = (0, 0, u) \text{ avec } u = u(x_1, x_2, t) : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (3.5)$$

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, t) : \Omega \times [0; T] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (3.6)$$

### Remarque

Les deux indices  $i = 1, 2, 3$  and  $j = 1, 2, 3$  désignent les composantes des vecteurs des tenseurs. On utilise l'espace  $\mathcal{S}^3$  qui représente l'espace linéaire des tenseurs symétriques du second ordre dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , et “ $\cdot$ ”,  $\|\cdot\|$  représentent le produit scalaire et la norme Euclidienne dans les deux espaces  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{S}^3$  respectivement ; on a donc :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v_i, \quad \|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{1/2} \text{ pour tout } \mathbf{u} = (u_i), \mathbf{v} = (v_i) \in \mathbb{R}^3$$

et

$$\sigma \cdot \tau = \sigma_{ij} \tau_{ij}, \quad \|\tau\| = (\tau \cdot \tau)^{1/2} \text{ pour tout } \sigma = (\sigma_{ij}), \tau = (\tau_{ij}) \in \mathcal{S}^3.$$

Le potentiel électrique  $\varphi(\cdot)$  est défini par :

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

Par conséquent, en utilisant (3.7) il résulte que dans le cas antiplan, le tenseur de contraintes  $\mathcal{E}$  peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{13} \\ 0 & 0 & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

tel que

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

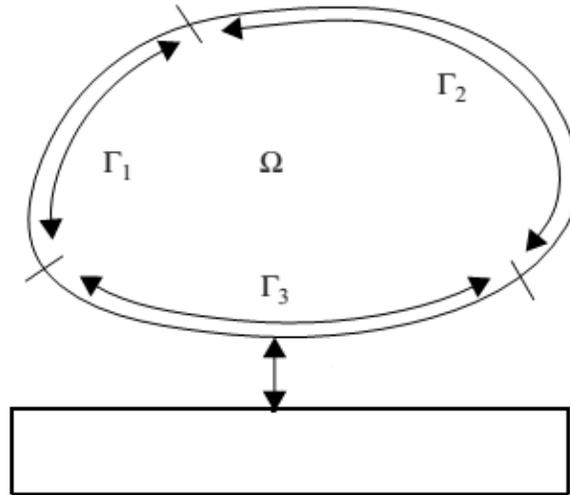


FIGURE 3.1 – Corps en contact avec la fondation

Par ailleurs rappelons la définition du champ électrique

$$E(\varphi) = -\nabla(\varphi), \quad (3.9)$$

dont  $\nabla(\varphi)$  est un vecteur de trois composantes tel que

$$\nabla(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi_{,1} \\ \varphi_{,2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Dans toute la suite, les deux indices  $i, j = 1, 2, 3$  désignent les composantes des vecteurs des tenseurs. Dans le cas électro-élastique<sup>1</sup>, on sait que le champ des contraintes  $\sigma$  est donné par :

$$\sigma = \lambda(\text{tr } \varepsilon(\mathbf{u})) \mathbf{I} + (\mathbf{u}) - \mathcal{E}^* \mathbf{E}(\varphi), \quad (3.11)$$

et par  $\mathbf{D} = (D_i)$  le champ électrique des déplacements défini par :

$$\mathbf{D} = \mathcal{E} \varepsilon(\mathbf{u}) + \beta \mathbf{E}(\varphi), \quad (3.12)$$

où  $\sigma$  est le tenseur des contraintes,  $\varepsilon(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}))$  est le tenseur des déformations,  $\lambda > 0$  la constante de Lamé et  $\mathbf{I}$  le tenseur unité de  $\mathbb{R}^3$ .

Ensuite, nous supposons que le tenseur électrique noté  $\mathcal{E}$  d'ordre trois défini de l'espace  $\mathcal{S}^3$  et prend des valeurs dans  $\mathcal{R}^3$  tel que

$$\mathcal{E} \varepsilon = \begin{pmatrix} e(\varepsilon_{13} + \varepsilon_{31}) \\ e(\varepsilon_{23} + \varepsilon_{32}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall \varepsilon = (\varepsilon_{ij}) \in \mathcal{S}^3, \quad (3.13)$$

1. M. Sofonea, M. Dalah, Antiplane Frictional Contact of Electro-Viscoelastic Cylinders, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2007(2007), No. 161, pp. 114.

où  $e$  est le coefficient piezoelectrique. Souvent, nous supposons que les coefficients  $\mu$ ,  $\beta$  et  $e$  dépendent des variables spatiales  $x_1$ ,  $x_2$ , et ne dépendent pas de la variable spatial  $x_3$ .

De plus  $\mathcal{E}\varepsilon \cdot \mathbf{v} = \varepsilon \cdot \mathcal{E}^T \mathbf{v}$  pour tout  $\varepsilon \in \mathcal{S}^3$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ . Soit l'opérateur adjoint que l'on note  $\mathcal{E}^T$  qui est aussi d'ordre trois défini de l'espace  $\mathcal{S}^3$  et prends des valeurs dans  $\mathcal{R}^3$ , et en tenant compte de (3.13), on obtient donc

$$\mathcal{E}^* \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ev_1 \\ 0 & 0 & ev_2 \\ ev_1 & ev_2 & ev_3 \end{pmatrix} \quad \forall \mathbf{v} = (v_i) \in \mathbb{R}^3. \quad (3.14)$$

En effet, il est facile de vérifier que l'égalité  $\mathcal{E}\varepsilon \cdot \mathbf{v} = \varepsilon \cdot \mathcal{E}^T \mathbf{v}$  est toujours satisfaite. Par la suite, nous obtenons :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu u_{,1} \\ 0 & 0 & \mu u_{,2} \\ \mu u_{,1} & \mu u_{,2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & e\varphi_{,1} \\ 0 & 0 & e\varphi_{,2} \\ e\varphi_{,1} & e\varphi_{,2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

et donc

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu u_{,1} + e\varphi_{,1} \\ 0 & 0 & \mu u_{,2} + e\varphi_{,2} \\ \mu u_{,1} + e\varphi_{,1} & \mu u_{,2} + e\varphi_{,2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Nous rappelons que l'équation d'équilibre est donnée par l'expression mathématique suivante :

$$\text{Div } \sigma + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0},$$

où  $\text{Div } \sigma = (\sigma_{ij,j})$  représente la divergence concernant le champ du tenseur  $\sigma$ .

Par la suite, et en tenant compte des relations précédentes, il vient que :

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.17)$$

$$\sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.18)$$

et

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} + f_0 = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T). \quad (3.19)$$

En utilisant (3.16) nous remarquons que les équations (3.17) et (3.18) sont identiquement, par ailleurs la relation (3.19) donne l'équation d'équilibre qui sera réduite sous la forme d'une équation scalaire :

$$\text{div}(\mu \nabla u + e \nabla \varphi) + f_0 = 0, \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.20)$$

On sait que le champ des déplacements électriques  $\mathbf{D}$  est donné par

$$\mathbf{D} = \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}) + \beta \mathbf{E}(\varphi), \quad (3.21)$$

Nous remplaçons maintenant  $\mathcal{E}\varepsilon$  et  $\varepsilon(\mathbf{u})$  dans (3.21) pour obtenir

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} eu_{,1} - \beta\varphi_{,1} \\ eu_{,2} - \beta\varphi_{,2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Maintenant, nous tournons vers l'équation électrique définie par :

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = q_0. \quad (3.23)$$

Ensuite, et après un simple calcul, nous obtenons donc

$$D_{1,1} + D_{2,2} + D_{3,3} - q_0 = 0, \quad (3.24)$$

et donc l'équation électrique s'écrit sous la forme scalaire comme suit :

$$\operatorname{div}(e\nabla u - \beta\nabla\varphi) = q_0. \quad (3.25)$$

Soit  $\nu$  désigne la normale unitaire sur  $\Gamma \times (-\infty, +\infty)$ . Nous avons

$$\nu = (\nu_1, \nu_2) \text{ avec } \nu_i = \nu_i(x_1, x_2) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2. \quad (3.26)$$

Pour le vecteur  $\mathbf{v}$  on désigne par  $\mathbf{v}_\nu$  et  $\mathbf{v}_\tau$  les composantes normale et tangentielle sur la frontière, définit par :

$$\mathbf{v}_\nu = \mathbf{v} \cdot \nu, \quad \mathbf{v}_\tau = \mathbf{v} - \nu \cdot \mathbf{v} \quad (3.27)$$

respectivement.

Dans (3.27) et dans le reste de ce chapitre on note par " $\cdot$ " le produit scalaire sur l'espace  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ). De plus, pour le champ des contraintes  $\sigma$  on désigne par  $\sigma_\nu$  et  $\sigma_\tau$  la composante normale et la composante sur la frontière, avec

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu) \cdot \nu, \quad \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu\nu. \quad (3.28)$$

Dans ce qui suit, nous utilisons les notations :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = \tau_{1,1} + \tau_{2,2} \text{ dans } \boldsymbol{\tau} = (\tau_1(x_1, x_2), \tau_2(x_1, x_2))$$

et

$$\nabla v = (v_{,1}, v_{,2}), \quad \partial_\nu v = v_{,1} \nu_1 + v_{,2} \nu_2 \text{ pour } v_i = v_i(x_1, x_2).$$

Alors le vecteur des contraintes de Cauchy adopte une forme particulière dans le cas des problèmes antiplans :

$$\sigma \cdot \nu = f_2 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (3.29)$$

où la notation  $\partial_\nu u$  et  $\partial_\nu \varphi$  désigne respectivement la dérivée normale par rapport à  $u$  et se définit par  $\mu \partial_\nu u = \mu u_{,1} \mu_1 + \mu u_{,2} \mu_2$  et par  $e \partial_\nu \varphi = e \varphi_{,1} \mu_1 + e \varphi_{,2} \mu_2$ . Nous pouvons réécrire la condition aux limites (3.29) de la manière suivante :

$$\sigma \cdot \nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi \end{pmatrix} \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T). \quad (3.30)$$

Finalement, nous obtenons

$$\mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi = f_2 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T). \quad (3.31)$$

Nous tournons maintenant vers l'équation :

$$\mathbf{D} \cdot \nu = q_2 \text{ sur } \Gamma_b \times (0, T), \quad (3.32)$$

ceci est équivalent à l'écriture matricielle suivante :

$$\mathbf{D} \cdot \nu = \begin{pmatrix} eu_{,1} - \beta \varphi_{,1} \\ eu_{,2} - \beta \varphi_{,2} \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ 0 \end{pmatrix} = q_2, \quad (3.33)$$

ce qui donne à la fin

$$e \partial_\nu u - \beta \partial_\nu \varphi = q_2 \text{ sur } \Gamma_b \times (0, T). \quad (3.34)$$

Maintenant, nous voulons d'écrire les conditions aux bords (sur la frontière). Les déplacements étant bloqués sur la frontière  $\Gamma_1 \times (-\infty, +\infty)$  et le potentiel électrique devient nul sur  $\Gamma_a \times (-\infty, +\infty)$ ; alors, (3.5) et (3.6) implique que :

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (3.35)$$

$$\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_a \times (0, T). \quad (3.36)$$

Nous tournons maintenant vers la description des diverses conditions sur la surface de contact. Pour les d'écrire nous dénotons par  $u_\nu$  et  $u_\tau$  la composante normale et la composante tangentielle du champ des déplacements  $\mathbf{u}$  respectivement sur le bord données par  $\mathbf{u}_\tau = \mathbf{u} - u_\nu \cdot \nu$  et  $u_\nu = \mathbf{u} \cdot \nu$ .

Maintenant, nous décrivons la condition de contact frottant et la condition électrique sur la partie  $\Gamma_3 \times (-\infty, +\infty)$ . Premièrement, de la relation (3.26) on déduit que le déplacement normale est nul,  $u_\nu = 0$ , ce qui montre que le contact est bilatéral. Utilisons les formules (3.26)-(3.28) on déduit que :

$$\mathbf{u}_\tau = (0, 0, u), \quad \sigma_\tau = (0, 0, \sigma_\tau). \quad (3.37)$$

Sachant que  $\nu$  représente le vecteur unitaire normale sur  $\Gamma$  et dans le contexte antiplan on peut écrire

$$\nu = (\nu_1, \nu_2, 0). \quad (3.38)$$

Ensuite, nous concluons que

$$u_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (3.39)$$

Il est facile de dire que l'égalité  $u_\nu = 0$  signifie que le contact est bilatéral, c'est-à-dire il n'existe pas une séparation entre le corp et la fondation durant le procesus. Par la suite, nous rappelons que la composante normale  $\sigma_\nu$  et la composante tangentielle  $\sigma_\tau$  du champ des contraintes  $\sigma$  sont données par  $\sigma_\nu = (\sigma\nu) \cdot \nu$ ,  $\sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu\nu$ .

Par la suite, nous obtenons :

$$\sigma_\nu = 0, \quad (3.40)$$

et donc

$$\sigma_\tau = \sigma\nu. \quad (3.41)$$

Il est aisé de dire que la première égalité dans (3.40) nous montre que la contrainte normale est nulle sur la région de contact durant le processus ; alors, le vecteur de Cauchy  $\sigma\nu$  sera réduit à la composante tangentielle  $\sigma_\tau$  et ceci d'après la deuxième égalité dans (3.40). Finalement d'après (3.41) on déduit que

$$\sigma_\tau = (0, 0, \sigma_\tau), \quad (3.42)$$

où

$$\sigma_\tau = \mu\partial_\nu u + e\partial_\nu \varphi. \quad (3.43)$$

On suppose que le frottement est invariant le long de l'axe  $Ox_3$  et de plus, il est modélisé par la loi de frottement de Tresca :

$$|\sigma_\tau| \leq g, \quad \dot{u}_\tau \neq 0 \Rightarrow \sigma_\tau = -g \frac{\dot{u}_\tau}{|\dot{u}_\tau|}, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (3.44)$$

Ici  $g : \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction donnée. Utilisons la relation (3.44), il suit que la loi de frottement (3.44) en sa forme scalaire peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} |\mu\partial_\nu u + e\partial_\nu \varphi| \leq g, \\ \mu\partial_\nu u + e\partial_\nu \varphi = -g \frac{\dot{u}_\tau}{|\dot{u}_\tau|}, \quad \dot{u}_\tau \neq 0 \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T). \end{cases} \quad (3.45)$$

**En** réunissant les équations et les conditions aux limites ci-dessus, nous obtenons que dans un processus antiplan<sup>2</sup> d'un corps électro-élastique, le champ des déplacements  $u$  et le potentiel électrique  $\varphi$  satisfont le problème  $P^{\text{électro-lastique}}$ . Dans cette dernière partie, on considère un problème statique avec frottement de Tresca. Nous présentons une formulation variationnelle du problème pour laquelle, nous démontrons un

2. M. Sofonea, M. Dalah, Antiplane Frictional Contact of Electro-Viscoelastic Cylinders<sup>3</sup>, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2007(2007), No. 161, pp. 114.

résultat d'existence et d'unicité de la solution. Par conséquent, notre problème antiplan peut se formuler comme suit :

**Problème  $P_1$ .** Trouver le champ des déplacements  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  et le potentiel électrique  $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$\operatorname{div}(\mu \nabla u + e \nabla \varphi) + f_0 = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.46)$$

$$\operatorname{div}(e \nabla u - \beta \nabla \varphi) = q_0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.47)$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (3.48)$$

$$\mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi = f_2 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (3.49)$$

$$\begin{cases} |\mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi| \leq g, \\ \mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi = -g \frac{\dot{u}_\tau}{|\dot{u}_\tau|}, \dot{u}_\tau \neq 0 \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \end{cases} \quad (3.50)$$

$$\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_a \times (0, T), \quad (3.51)$$

$$e \partial_\nu u - \beta \partial_\nu \varphi = q_2 \text{ sur } \Gamma_b \times (0, T), \quad (3.52)$$

$$u(0) = u_0 \text{ et } \varphi(0) = \varphi_0 \text{ dans } \Omega. \quad (3.53)$$

On note que le champ des déplacements  $u$  et le champ électrique  $\varphi$  qui résout le Problème **Problème P-1** sont connues, alors le tenseur des contraintes  $\sigma$  et le champ des déplacements électriques  $\mathbf{D}$  peuvent obtenir par utilisation des lois (3.11) et (3.12), respectivement. De plus, nous notons que (3.46) et (3.47) représentent les équations d'équilibre, (3.48) représente la condition aux limites pour le champ des déplacements, (3.49) représente la condition aux limites de traction, (3.50) représente la version statique de la loi de frottement de Tresca, (3.51) la condition aux limites pour le potentiel électrique et (3.53) représente la condition aux limites pour les charges électriques.

### 3.2.1 Quelques hypothèses

Nous passons maintenant à la construction de la formulation variationnelle du problème **Problème P-1**. A cet effet, nous construisons les deux espaces  $V$  et  $W$  associés au champ de déplacements  $u(\cdot)$  et au champ électrique  $\varphi(\cdot)$  respectivement :

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\},$$

et

$$W = \{ \psi \in H^1(\Omega) : \psi = 0 \text{ dans } \Gamma_a \}.$$

### Remarque

Remarquons que l'espace  $V$  est un sous espace fermé de l'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$ ; et alors,  $V$  est un espace de Hilbert avec le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}$  et la norme associée  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ , il en est de même pour l'espace  $W$ .

Il est bien connu que  $V$  et  $W$  sont des espaces réels de Hilbert muni du produit scalaire :

$$(u, v)_V = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall u, v \in V, \quad (\varphi, \psi)_W = \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, dx \quad \forall \varphi, \psi \in W.$$

De plus, la norme associée est de la forme :

$$\|v\|_V = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in V, \quad \|\psi\|_W = \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall \psi \in W, \quad (3.54)$$

qui sont toujours équivalentes sur  $V$  et  $W$ , respectivement, avec la norme usuelle  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ . Par le théorème de trace de Sobolev on peut déduire qu'il existe deux constantes positives  $c_V > 0$  et  $c_W > 0$  telles que :

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c_V \|v\|_V \quad \forall v \in V, \quad \|\psi\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c_W \|\psi\|_W \quad \forall \psi \in W. \quad (3.55)$$

Pour l'espace réel  $(X, \|\cdot\|_X)$  on utilise la notation usuelle pour l'espace  $L^p(0, T; X)$  et  $W^{k,p}(0, T; X)$  où  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ; souvent, on note par  $C([0, T]; X)$  l'espace des fonctions continues et les fonctions différentiables continues et à valeurs dans l'espace produit  $X$ , avec la norme :

$$\|x\|_{C([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|x(t)\|_X,$$

et on utilise les notations standard pour l'espace de Lebesgue  $L^2(0, T; X)$  comme dans l'espace de Sobolev  $W^{1,2}(0, T; X)$ . En particulier, et par la suite, on peut déduire que la norme sur l'espace de  $L^2(0, T; X)$  est donnée par la relation :

$$\|u\|_{L^2(0, T; X)}^2 = \int_0^T \|u(t)\|_X^2 \, dt.$$

Nous supposons que le coefficient de permittivité électrique vérifie :

$$\beta \in L^\infty(\Omega) \text{ et il existe } \beta^* > 0 \text{ tel que } \beta(x) \geq \beta^* \text{ p.p. } x \in \Omega. \quad (3.56)$$

Souvent, on suppose que le coefficient de Lamé  $\mu$  et le coefficient piézoélectrique  $e$  satisfaites :

$$\mu \in L^\infty(\Omega) \text{ et } \mu(x) > 0 \text{ p.p. } x \in \Omega, \quad (3.57)$$

---

et

$$e \in L^\infty(\Omega). \quad (3.58)$$

Les forces de tractions et volumiques sont supposées de la forme :

$$f_0 \in W^{1,2}([0, T], L^2(\Omega)), \quad (3.59)$$

et

$$f_2 \in W^{1,2}([0, T], L^2(\Gamma_2)). \quad (3.60)$$

Les forces surfaciques et volumique satisfont aussi :

$$q_0 \in W^{1,2}([0, T], L^2(\Omega)), \quad (3.61)$$

et

$$q_2 \in W^{1,2}([0, T], L^2(\Gamma_b)). \quad (3.62)$$

Le coefficient de conductivité électrique et la fonction seuil du frottement  $g$  vérifient les propriétés :

$$g \in L^\infty(\Gamma_3) \quad \text{et} \quad g(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \quad (3.63)$$

$$k \in L^\infty(\Gamma_3) \quad \text{et} \quad k(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \quad (3.64)$$

Finalement, on suppose que le potentiel électrique et le déplacement initial sont de la forme :

$$\varphi_F \in W^{1,2}([0, T], L^2(\Gamma_3)). \quad (3.65)$$

Les deux conditions initiales  $u_0$  et  $\varphi_0$  satisfont :

$$u_0 \in V \quad \text{et} \quad \varphi_0 \in W. \quad (3.66)$$

Nous supposons aussi les deux conditions de compatibilités comme suit :

$$a_e^*(\varphi_0, v) + a_\mu(u_0, v) + j(v) \geq (f(0), v)_V \quad \forall v \in V, \quad (3.67)$$

et

$$a_\beta(\varphi_0, \psi) - a_e(u_0, \psi) = (q(0), \psi)_W, \quad \forall \psi \in W. \quad (3.68)$$

Maintenant, on définit la fonctionnelle  $j$  qui prend des valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  par la formule :

$$j(v) = \int_{\Gamma_3} g|v| da \quad \forall v \in V. \quad (3.69)$$

Souvent nous définissons les applications  $f$  et  $q$ , respectivement, par

$$(f, v)_V = \int_{\Omega} f_0 v dx + \int_{\Gamma_2} f_2 v da, \quad (3.70)$$

$$(q, \psi)_W = \int_{\Omega} q_0 \psi \, dx - \int_{\Gamma_b} q_2 \psi \, da + \int_{\Gamma_3} k \varphi_F \psi \, da, \quad (3.71)$$

pour tout  $v \in V$  et  $\psi \in W$ . La définition des opérateurs  $f$  et  $q$  sont basées sur le théorème de représentation de Riesz; de plus, il suit des hypothèses (3.59)-(3.60) et (3.61)-(3.62), que les intégrales précédentes sont bien définies et

$$f \in W^{1,2}([0, T], V), \quad (3.72)$$

$$q \in W^{1,2}([0, T], W). \quad (3.73)$$

Par la suite, on définit les formes bilinéaires  $a_{\mu} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a_e : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a_e^* : W \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $a_{\beta} : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ , par les égalités :

$$a_{\mu}(u, v) = \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad (3.74)$$

$$a_e(u, \varphi) = \int_{\Omega} e \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = a_e^*(\varphi, u), \quad (3.75)$$

et

$$a_{\beta}(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \beta \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, dx \text{ pour tout } \varphi, \psi \in W. \quad (3.76)$$

Les hypothèses (3.56)-(3.76) impliquent que les intégrales précédentes sont bien définies et, en utilisant la relation (3.54) et (3.55), il suit que les formes bilinéaires  $a_{\mu}$ ,  $a_e$  and  $a_e^*$  sont continues; de plus, les formes  $a_{\mu}$  et  $a_{\beta}$  sont symétriques et, la forme  $a_{\beta}$  (resp.  $a_{\mu}$ ) est  $W$ -elliptique (resp.  $V$ -elliptique), alors on obtient :

$$a_{\beta}(\psi, \psi) \geq \beta^* \|\psi\|_W^2, \quad \forall \psi \in W, \quad (3.77)$$

et

$$a_{\mu}(v, v) \geq \mu^* \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V. \quad (3.78)$$

Avec les relations (3.56)–(3.78) il suit que la formulation variationnelle du problème antiplan de contact piézoélectrique **Problème P-1**, que l'on note **Problème  $P_V$** , est la suivante :

### 3.3 Formulation variationnelle

**Problème  $P_V$ .** Trouver le champ des déplacements  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  et le potentiel électrique  $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$a_{\mu}(u(t), v - \dot{u}(t)) + a_e^*(\varphi(t), v - \dot{u}(t)) + j(v) - j(\dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V, \quad \forall v \in V, \text{ a.e. } t \in [0, T], \quad (3.79)$$

---


$$a_\beta(\varphi(t), \psi) - a_e(u(t), \psi) = (q(t), \psi)_W, \quad \forall \psi \in W, \text{ a.e. } t \in [0, T], \quad (3.80)$$

$$(u(0), \varphi(0)) = (u_0, \varphi_0). \quad (3.81)$$

Dans cette section, nous donnons notre principal résultat portant sur l'existence et l'unicité de la solution faible du **Problème**  $P_V$ , ainsi que quelques éléments de démonstration de ce résultat. Alors, notre résultat d'existence et d'unicité sera donné explicitement dans la section suivante.

### 3.4 Un résultat d'existence et d'unicité

**Théorème 3.1.** *Supposons que (3.56)–(3.78) sont satisfaites. Alors, il existe une unique solution notée  $(u, \varphi)$  pour le problème  $P_V$  avec la régularité :*

$$u \in W^{1,2}(0, T, V), \quad \varphi \in W^{1,2}(0, T, W). \quad (3.82)$$

**Démonstration :**

Le résultat concernant l'existence et l'unicité de la solution faible  $(u, \varphi)$  pour le problème  $P_V$  suit du théorème 3.2 cité dans l'article **K. Fernane et al., 2012**, page 10.

La fonctionnelle  $j(\cdot)$  citée dans (3.69) est non-différentiable, de cet inconvénient, et pour des raisons numériques, nous considérons une version régularisée associée au problème  $P_V$ .

**Problème**  $P_{reg}$ . Trouver le champ des déplacements  $u_\rho : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  et le potentiel électrique  $\varphi_\rho : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$a_\mu(u_\rho(t), v - \dot{u}_\rho(t)) + a_e^*(\varphi_\rho(t), v - \dot{u}_\rho(t)) + j_\rho(v) - j_\rho(\dot{u}_\rho(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}_\rho(t))_V, \quad \forall v \in V, \text{ a.e. } t \in [0, T], \quad (3.83)$$

$$a_\beta(\varphi_\rho(t), \psi) - a_e(u_\rho(t), \psi) = (q(t), \psi)_W, \quad \forall \psi \in W, \text{ a.e. } t \in [0, T], \quad (3.84)$$

$$(u_\rho(0), \varphi_\rho(0)) = (u_0, \varphi_0). \quad (3.85)$$

Avec la fonctionnelle  $j_\rho : V \rightarrow \mathbb{R}_+$  est définie par :

$$j_\rho(v) = \int_{\Gamma_3} g \sqrt{v^2 + \rho^2} \, da, \quad \forall v \in V, \rho > 0. \quad (3.86)$$

Le problème  $P_{reg}$  est la formulation variationnelle du problème **P-1** quand la loi de Tresca sera remplacée par une version régularisée

$$\sigma_\tau = -g \frac{\dot{\mathbf{u}}_\tau}{\sqrt{|\dot{\mathbf{u}}_\tau|^2 + \rho^2}}, \quad \rho > 0.$$

Dans la section qui suit, nous allons présenté un résultat d'existence, d'unicité et de convergence de la solution  $(u_\rho, \varphi_\rho)$  vers la solution  $(u, \varphi)$  quand le paramètre  $\rho$  tend vers zéro.

### 3.5 Un résultat d'existence, d'unicité et de convergence

Dans cette section intitulée, nous donnons "Un résultat d'existence, d'unicité et de convergence" de la solution faible des problèmes  $P_V$  et  $P_{reg}$  et la convergence de la solution  $u_\rho$  du problème  $P_{reg}$  vers la solution  $u$  du problème  $P_V$ , et nous donnons certaines étapes essentielles de la démonstration pour ce résultat.

Dans tout ce qui suit dans cette section, nous notons  $c$  est une constante positive qui dépend de  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \mu^*, e$  et  $T$ , mais ne dépend pas du temps  $t$  et du paramètre de régularisation  $\rho$ , et leur valeur change de ligne par ligne.

**Problème  $P_{reg}^A$ .** Trouver le champ des déplacements  $u_\rho : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  et le potentiel électrique  $\varphi_\rho : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$\operatorname{div}(\mu \nabla u_\rho) + \operatorname{div}(e \nabla \varphi_\rho) + f_0 = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.87)$$

$$\operatorname{div}(e \nabla u_\rho - \beta \nabla \varphi_\rho) = q_0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.88)$$

$$u_\rho = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (3.89)$$

$$\mu \partial_\nu u_\rho + e \partial_\nu \varphi_\rho = f_2 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (3.90)$$

$$\mu \partial_\nu u_\rho + e \partial_\nu \varphi_\rho = -g \frac{\dot{u}_\rho}{\sqrt{|\dot{u}_\rho|^2 + \rho^2}} \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.91)$$

$$\varphi_\rho = 0 \text{ sur } \Gamma_a \times (0, T), \quad (3.92)$$

$$e \partial_\nu u_\rho - \beta \partial_\nu \varphi_\rho = q_2 \text{ sur } \Gamma_b \times (0, T), \quad (3.93)$$

$$(u_\rho(0), \varphi_\rho(0)) = (u_0, \varphi_0). \quad (3.94)$$

Nous remarquons que le problème  $P_{reg}^A$  représente une version régularisée de *électro-élastique matériau* et la formulation variationnelle du problème antiplan de contact avec frottement  $P_{reg}^A$  est donnée par le problème  $P_{reg}$ .

Pour étudier ce genre de problème, nous supposons que (3.56)–(3.78) sont satisfaites et, de plus,  $\rho > 0$ . Nous utilisons la notation (3.86) pour la fonctionnelle  $j_\rho : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

---

**Théorème 3.2.**

Supposons que (3.56)–(3.78) sont satisfaites. Alors, il existe une unique solution notée  $(u_\rho, \varphi_\rho)$  du problème  $P_{reg}$  ayant la régularité :

$$u_\rho \in W^{1,2}(0, T, V), \quad \varphi_\rho \in W^{1,2}(0, T, W). \quad (3.95)$$

**Démonstration :**

Supposons que (3.56)–(3.78) sont satisfaites. Nous aurons les hypothèses suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe : } F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ tel que,} \\ (a) |j_\rho(v) - j(v)| \leq F(\rho) \quad \forall v \in V, \text{ pour tout } \rho > 0. \\ (b) \lim_{\rho \rightarrow 0} F(\rho) = 0. \end{array} \right. \quad (3.96)$$

Avec le choix  $F(\rho) = \rho \int_{\Gamma_3} g \, da \geq 0$ .

Maintenant, nous tournons vers la démonstration du théorème 3.2 qui sera prouvée selon les étapes suivantes :

– **Étape 1** : Supposons que  $(u, \varphi)$  est la solution faible du problème  $P_{reg}^A$  tel que  $u \in V$ , et  $\varphi \in W$ . Nous tournons vers la construction de la formulation variationnelle du problème  $P_{reg}^A$ .

A cet effet, nous supposons que  $\mu$  et  $e$  sont des fonctions régulières satisfont (3.57)–(3.58) et nous supposons que (3.87)–(3.94) sont satisfaites.

Soit  $v - \dot{u}(t) \in V, t \in [0, T]$ . Multiplions (3.87) par  $v - \dot{u}_\rho(t)$  et utilisons **la formule de Green**, alors nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \mu \nabla u_\rho(t) + e \nabla \varphi_\rho(t) \right) \nabla (v - \dot{u}_\rho(t)) \, dx &= \int_{\Omega} f_0(t) (v - \dot{u}_\rho(t)) \, dx \\ &+ \int_{\Gamma} \left( \mu \nabla u_\rho(t) + e \nabla \varphi_\rho(t) \right) \cdot \nu (v - \dot{u}_\rho(t)) \, da, \end{aligned}$$

Les deux notations (3.75) et (3.76) donne ce qui suit :

$$\begin{aligned} a_\mu(u_\rho(t), v - \dot{u}_\rho(t)) + a_e^*(\varphi_\rho(t), v - \dot{u}_\rho(t)) &= \\ \int_{\Omega} f_0(t) (v - \dot{u}_\rho(t)) \, dx + \int_{\Gamma} \left( \mu \partial_\nu u_\rho(t) + e \partial_\nu \varphi_\rho(t) \right) (v - \dot{u}_\rho(t)) \, da, \end{aligned} \quad (3.97)$$

Utilisons que  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$  pour calculer l'intégrale sur la frontière globale  $\Gamma$ .

Sur  $\Gamma_1$ , nous utilisons (3.89) et  $v \in V$  pour voir que

$$\int_{\Gamma_1} \left( \mu \partial_\nu u_\rho(t) + e \partial_\nu \varphi_\rho(t) \right) (v - \dot{u}_\rho(t)) \, da = 0.$$

Sur  $\Gamma_2$ , l'équation (3.90) donne :

$$\int_{\Gamma_2} \left( \mu \partial_\nu u_\rho(t) + e \partial_\nu \varphi_\rho(t) \right) (v - \dot{u}_\rho(t)) \, da = \int_{\Gamma_2} f_2(t) (v - \dot{u}_\rho(t)) \, da.$$

Utilisons la relation (3.91) dans l'équation précédente pour trouver la valeur de l'intégrale sur  $\Gamma_3$ , alors, on a :

$$\left( \mu \partial_\nu u_\rho + e \partial_\nu \varphi_\rho \right) (v - \dot{u}_\rho) \geq g \sqrt{|\dot{u}_\rho|^2 + \rho^2} - g \sqrt{v^2 + \rho^2} \text{ a.e. sur } \Gamma_3. \quad (3.98)$$

En effet, au point de  $\Gamma_3$  nous avons :

$$\begin{aligned} \left( \mu \partial_\nu u_\rho + e \partial_\nu \varphi_\rho \right) (v - \dot{u}_\rho) &= -g \frac{\dot{u}_\rho v}{\sqrt{|\dot{u}_\rho|^2 + \rho^2}} + g \frac{\dot{u}_\rho^2}{\sqrt{|\dot{u}_\rho|^2 + \rho^2}} \\ &= g \sqrt{|\dot{u}_\rho|^2 + \rho^2} - g \frac{\dot{u}_\rho v + \rho^2}{\sqrt{|\dot{u}_\rho|^2 + \rho^2}} \end{aligned}$$

comme  $\frac{\dot{u}_\rho v + \rho^2}{\sqrt{|\dot{u}_\rho|^2 + \rho^2}} \leq \sqrt{v^2 + \rho^2}$ . La dernière équation prends la forme (3.98).

Maintenant, nous intégrons (3.98) sur  $\Gamma_3$  pour obtenir :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} \left( \mu \partial_\nu u_\rho(t) + e \partial_\nu \varphi_\rho(t) \right) (v - \dot{u}_\rho(t)) \, da &\geq \int_{\Gamma_3} g \sqrt{|\dot{u}_\rho(t)|^2 + \rho^2} \, da \\ &\quad - \int_{\Gamma_3} g \sqrt{v^2 + \rho^2} \, da \end{aligned}$$

et nous combinons cette dernière inégalité avec (3.97) pour trouver que :

$$\begin{aligned} a_\mu(u_\rho(t), v - \dot{u}_\rho(t)) + a_e^*(\varphi_\rho(t), v - \dot{u}_\rho(t)) &\geq \int_{\Omega} f_0(t) (v - \dot{u}_\rho(t)) \, dx \\ &\quad + \int_{\Gamma_2} f_2(t) (v - \dot{u}_\rho(t)) \, da + \int_{\Gamma_3} g \sqrt{|\dot{u}_\rho(t)|^2 + \rho^2} \, da - \int_{\Gamma_3} g \sqrt{v^2 + \rho^2} \, da \end{aligned}$$

Nous tenons compte des notations précédentes pour dériver la fomulation varia-  
tionnel suivante :

$$a_\mu(u_\rho(t), v - \dot{u}_\rho(t)) + a_e^*(\varphi_\rho(t), v - \dot{u}_\rho(t)) + j_\rho(v) - j_\rho(\dot{u}_\rho(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}_\rho(t))_V.$$

Nous obtenons l'inégalité (3.83) signalée dans le problème  $P_{reg}$ .

Maintenant, nous supposons que  $\beta$  et  $e$  sont des fonctions régulières satisfont (3.56)–(3.58) et, soit  $\psi \in W, t \in [0, T]$ . Multiplions la relation (3.88) par  $\psi$  et en tenant compte de la formule de Green pour trouver :

$$\int_{\Omega} (e \nabla u_\rho - \beta \nabla \varphi_\rho) \nabla \psi \, dx = \int_{\Gamma} (e \nabla u_\rho - \beta \nabla \varphi_\rho) \cdot \nu \, \psi \, da - \int_{\Omega} q_0(t) \psi \, dx,$$

or  $\int_{\Gamma} (e \nabla u_\rho - \beta \nabla \varphi_\rho) \cdot \nu \, \psi \, da = \int_{\Gamma} (e \partial_\nu u_\rho - \beta \partial_\nu \varphi_\rho) \psi \, da$ , nous divisons l'intégrale de limite sur  $\Gamma_a, \Gamma_b$  et  $\Gamma_3$ , nous obtenons l'égalité

$$\int_{\Gamma} (e \partial_\nu u_\rho - \beta \partial_\nu \varphi_\rho) \psi \, da = \int_{\Gamma_b} q_2 \psi \, da + \int_{\Gamma_3} k \varphi \psi \, da - \int_{\Gamma_3} k \varphi_F \psi \, da.$$

Utilisons les notations précédentes pour obtenir :

$$a_\beta(\varphi_\rho(t), \psi) - a_e(u_\rho(t), \psi) = (q(t), \psi)_W, \quad \forall \psi \in W, \text{ a.e. } t \in [0, T].$$

Cette égalité représente la formule (3.84) du problème  $P_{reg}$ . D'autre part, la fonctionnelle  $j_\rho$  est Gâteaux-différentiable, et donc, il est convexe et semi-continûment différentiable. De (3.86) et (3.96), nous obtenons  $j_\rho(v) \geq j(v)$  pour tout  $v \in V$ . Et nous avons aussi :

$$a_e^*(\varphi_0, v) + a_\mu(u_0, v) + j_\rho(v) \geq a_e^*(\varphi_0, v) + a_\mu(u_0, v) + j(v) \geq (f(0), v)_V \quad \forall v \in V \quad (3.99)$$

and

$$a_\beta(\varphi_\rho(0), \psi) - a_e(u_\rho(0), \psi) = (q(t), \psi)_W \quad \forall \psi \in W. \quad (3.100)$$

## – Étape 2 : Existence et Unicité

Nous voyons que l'inégalité (3.67) est valable si on remplace la fonctionnelle  $j$  par la fonctionnelle  $j_\rho$ , alors, nous appliquons les même arguments précédent utilisés dans la démonstration pour le problème  $P_V$  pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution  $(u_\rho, \varphi_\rho)$  du problème  $P_{reg}$  avec la régularité (3.95).

---

**Théorème 3.3.** *Supposons que (3.56)–(3.78). Alors, la solution  $(u_\rho, \varphi_\rho)$  du problème  $P_{reg}$  converge vers la solution  $(u, \varphi)$  du problème  $P_V$  ayant la régularité suivante :*

$$u_\rho \rightarrow u \text{ dans } C([0, T], V) \text{ et } \varphi_\rho \rightarrow \varphi \text{ dans } C([0, T], W), \rho \rightarrow 0. \quad (3.101)$$

**Démonstration :**

La démonstration est basée sur certaines estimations et le **Lemme de Gronwall** de type d'inégalité. Nous donnons dans ce qui suit certaines estimations :

Soient  $\rho > 0$  et  $t \in [0, T]$ . Nous choisissons  $v = \dot{u}_\rho(t)$  dans (3.25) et  $v = \dot{u}(t)$  dans (3.83), alors nous obtenons :

$$a_\mu(u(t), \dot{u}_\rho(t) - \dot{u}(t)) + a_e^*(\varphi(t), \dot{u}_\rho(t) - \dot{u}(t)) \\ + j(\dot{u}_\rho(t)) - j(\dot{u}(t)) \geq (f(t), \dot{u}_\rho(t) - \dot{u}(t))_V,$$

$$a_\mu(u_\rho(t), \dot{u}(t) - \dot{u}_\rho(t)) + a_e^*(\varphi_\rho(t), \dot{u}(t) - \dot{u}_\rho(t)) \\ + j_\rho(\dot{u}(t)) - j_\rho(\dot{u}_\rho(t)) \geq (f(t), \dot{u}(t) - \dot{u}_\rho(t))_V,$$

additionner l'inégalité résultante pour obtenir :

$$a_\mu(u_\rho(t) - u(t), \dot{u}_\rho(t) - \dot{u}(t)) \leq -a_e^*(\varphi_\rho(t) - \varphi(t), \dot{u}_\rho(t) - \dot{u}(t)) + j(\dot{u}_\rho(t)) - \\ j_\rho(\dot{u}_\rho(t)) + j_\rho(\dot{u}(t)) - j(\dot{u}(t)). \quad (3.102)$$

D'autre part, nous supposons que (3.96)(a) sur  $j_\rho$  donne :

$$j(\dot{u}_\rho(t)) - j_\rho(\dot{u}_\rho(t)) + j_\rho(\dot{u}(t)) - j(\dot{u}(t)) \leq 2F(\rho). \quad (3.103)$$

De (3.80),(3.84) nous choisissons  $\psi = \varphi_\rho(t) - \varphi(t)$ , alors nous aurons :

$$a_\beta(\varphi_\rho(t) - \varphi(t), \varphi_\rho(t) - \varphi(t)) = a_e^*(\varphi_\rho(t) - \varphi(t), u_\rho(t) - u(t)) \text{ p.p. } t \in [0, T], \quad (3.104)$$

et

$$a_\beta(\dot{\varphi}_\rho(t) - \dot{\varphi}(t), \varphi_\rho(t) - \varphi(t)) = a_e^*(\varphi_\rho(t) - \varphi(t), \dot{u}_\rho(t) - \dot{u}(t)) \text{ a.e. } t \in [0, T]. \quad (3.105)$$

Nous tenons compte de la  $W$ -ellipticité de la forme bilinéaire  $a_\beta$ , la continuité de la forme bilinéaire  $a_e$  et le **Lemme de Gronwall**, alors nous obtenons :

$$\|\varphi_\rho(t) - \varphi(t)\|_W \leq c \|u_\rho(t) - u(t)\|_V \text{ a.e. } t \in [0, T], \quad (3.106)$$

de la relation (3.105) nous aurons :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} a_\mu(u_\rho(s) - u(s), u_\rho(s) - u(s)) \leq -a_\beta(\dot{\varphi}_\rho(t) - \dot{\varphi}(t), \varphi_\rho(t) - \varphi(t)) + 2F(\rho).$$

Par intégration entre 0 et  $t \in [0, T]$ , nous trouvons l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{2} a_\mu(u_\rho(t) - u(t), u_\rho(t) - u(t)) \leq -\frac{1}{2} a_\beta(\varphi_\rho(t) - \varphi(t), \varphi_\rho(t) - \varphi(t)) + 2TF(\rho). \quad (3.107)$$

Maintenant, nous combinons les inégalités (3.77),(3.78) et (3.106), et nous utilisons la V-ellipticité (resp. la W-ellipticité) de la forme bilinéaire  $a_\mu$ (resp. la forme bilinéaire  $a_\beta$ ) avec certaines estimations algébriques, nous aurons donc :

$$\frac{\mu^*}{2} \|u_\rho(t) - u(t)\|_V^2 \leq cF(\rho), \quad (3.108)$$

il est facile de remarquer que la constante  $c$  dépend de  $\beta^*, \mu^*, T$  et non de  $t$  et  $\rho$ .

$$\|u_\rho(t) - u(t)\|_V^2 \leq cF(\rho). \quad (3.109)$$

Nous tenons compte de l'hypothèse (3.96) (b) nous obtenons donc le résultat de convergence suivant :

$$\|u_\rho - u\|_{C(0,T,V)} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0. \quad (3.110)$$

Par la suite, de (3.106) et (3.109) nous aurons :

$$\|\varphi_\rho(t) - \varphi(t)\|_W^2 \leq cF(\rho).$$

Alors

$$\|\varphi_\rho - \varphi\|_{C(0,T,W)} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0. \quad (3.111)$$

De (3.110) et (3.111), nous obtenons que le couple  $(u_\rho, \varphi_\rho)$  converge vers le couple  $(u, \varphi)$  dans  $C(0, T, V \times W)$ .

Alors, et en conclusion, la solution faible du problème antiplan de contact avec frottement avec la loi de type Tresca peut approcher par la solution du problème quasi-statique antiplan de contact avec frottement avec la version régularisée de la loi de frottement quand le paramètre de régularisation  $\rho$  est trop petit.

---

### 3.6 Conclusion et perspectives

En conclusion, nous pouvons appliquer cette technique de régularisation pour les problèmes suivants :

- Pour le cas électro-élastique avec mémoire courte
- Pour le cas électro-élastique avec mémoire longue
- Pour les lois de frottement de type

$$\begin{cases} |\theta \partial_\nu u' + \mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi| \leq g, \\ \theta \partial_\nu u' + \mu \partial_\nu u + \partial_\nu \varphi = -g \frac{\dot{u}}{|\dot{u}|} \text{ si } \dot{u} \neq 0 \text{ sur } \Gamma_3. \end{cases} \quad (3.112)$$

- Pour les lois de frottement régularisées de type :

$$\theta \partial_\nu u' + \mu \partial_\nu u_\rho + e \partial_\nu \varphi_\rho = -g \frac{u_\rho}{\sqrt{u_\rho^2 + \rho^2}} \text{ on } \Gamma_3. \quad (3.113)$$

”On peut très bien vivre sans savoir pourquoi deux et deux font quatre mais l’existence devient vite difficile si l’on ignore combien font deux et deux. Voilà pourquoi le mathématicien ratisse toujours aux confins de la métaphysique. Il se pose des questions à double sens alors que nous nous contentons souvent du bon sens. Peut-être est-ce pour cette raison que nous le voyons toujours en marge du monde.”

Alan Turing - Laurent Lemire

## **Troisième partie**

### **Bibliographie**

# Bibliographie

- [1] **R. A. Adams.**, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, [\(1975\)](#).
- [2] **L.-E. Andersson.**, A Quasistatic Frictional Problem with Normal Compliance, Nonlinear Analysis TMA 16, p.p. 407-428, [\(1991\)](#).
- [3] **L.-E. Andersson.**, A Global Existence Result for a Quasistatic Contact Problem with Friction, Advances in Mathematical Sciences and Applications 5, p.p. 249-286, [\(1995\)](#).
- [4] **A. Amassad, M. Sofonea.**, Analysis of a Quasistatic Viscoplastic Problem Involving Tresca Friction law, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 4, p.p. 55-72, [\(1998\)](#).
- [5] **A. Amassad, M. Shillor, M. Sofonea.**, A Quasistatic Contact Problem for an Elastic Perfectly Plastic Body with Tresca's Friction, Nonlinear Analysis, 35, p.p. 95-109, [\(1999\)](#).
- [6] **A. Amassad, M. Shillor, M. Sofonea.**, A Quasistatic Contact Problem with Slip Dependent Coefficient of Friction, Math. Meth. Appl. Sci., 22, p.p. 267-284, [\(1999\)](#).
- [7] **V. Barbu, T. Precupanu.**, Convexity and Optimisation in Banach Spaces, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, [\(1986\)](#).
- [8] **H. Brézis.**, Équations et Inéquations non Linéaires dans les Espaces Vectoriels en Dualité, Ann. Inst. Fourier, 18, p.p. 115-175, [\(1968\)](#).
- [9] **H. Brézis.**, Analyse Fonctionnelle, Théorie et Application, Masson, [\(1987\)](#).
- [10] **O. Chau, W. Han, M. Sofonea.**, Analysis and Approximation of a Viscoelastic Contact Problem with Slip Dependent Friction, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, 8, p.p. 153-174, [\(2001\)](#).
- [11] **M. Cocu.**, Existence of Solutions of Signorini Problems with Friction , Int. J. Engng. Sci., 22, p.p. 567-581, [\(1984\)](#).
- [12] **M. Cocu, E. Pratt, M. Raous.**, Analysis of an Incremental Formulation for Frictional Contact Problems, Contact Mechanics, Eds. M. Raous, M. Jean, J. J. Moreau, Plenum Press, New York, [\(1995\)](#).

- 
- [13] **M. Cocu, E. Pratt, M. Raous.**, Formulation and Approximation of Quasistatic Frictional Contact, *Int. Jour. Engng. Sci.*, 34, p.p. 783-798, (1996).
- [14] **G. Duvaut.**, Mécanique des Milieux Continus, Dunod, Paris, (1998).
- [15] **G. Duvaut, J.L. Lions.**, Les Inéquations en Mécanique et en Physique, Dunod, (1972).
- [16] **P. Germain, P. Muller.**, Introduction à la Mécanique des Milieux Continus, Masson, Paris, (1980).
- [17] **T.-V. Hoarau-Mantel, A. Matei.**, Problèmes antiplans de contact avec frottement pour des matériaux viscoélastiques à mémoire longue *Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser. Volume 32, Pages 200–206*, (2005).
- [18] **T.-V. Hoarau-Mantel, A. Matei.**, Analysis of a Viscoelastic Antiplane Contact Problem with Slip Dependent Friction, *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 12, p.p. 101-108, (2002).
- [19] **I. Hlavacek, J. Haslinger, J. Necas, J. Lovisek.**, Solutions of Variational Inequalities in Mechanics, Springer-Verlag, New York, (1988).
- [20] **L. Jianu, A. Matei, M. Sofonea.**, Quasistatic Elastic-Visco-Plastic Problems with Friction *Ann. Univ. Buc., Math.*, 51, p.p. 23-38, (2002).
- [21] **N. Kikuchi, J.T. Oden.**, Contact problems in Elasticity : A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods, SIAM, Philadelphia, (1988).
- [22] **A. Klarbring, A. Mikelic, M. Shillor.**, Frictional Contact Problems with Normal Compliance, *Int. J. Engng. Sci.*, 26, p.p. 811-832, (1988).
- [23] **J. L. Lions.**, Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non-Linéaires, Dunod et Gauthier-Villars, Paris (1969).
- [24] **J. A. C. Martins.**, J. T. Oden, Existence and Uniqueness Results for Dynamic Contact Problems with Nonlinear Normal and Friction Interface Laws, *Nonlinear Analysis TMA*, 11, p.p. 407-428, (1987).
- [25] **A. Matei, V. V. Motreanu, M. Sofonea.**, A Quasistatic Antiplane Contact Problem with Slip Dependent Friction, *Advances in Nonlinear Variational Inequalities*, 4, p.p. 1-21, (2001).
- [26] **A. Matei, V. V. Motreanu, M. Sofonea.**, On the Signorini Frictionless Contact Problem for Linear Viscoelastic Materials, *Applicable Analysis*, p.p. 45-55, (2004).
- [27] **A. Matei et T.-V. Hoarau-Mantel.**, Problèmes antiplans de contact avec frottement pour des matériaux viscoélastiques à mémoire longue, *Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser. Volume 32, Pages 200–206*, Year (2005).
- [28] **D. Motreanu, M. Sofonea.**, Evolutionary Variational Inequalities Arising in Quasistatic Frictional Contact Problems for Elastic Materials, *Abstract and Applied Analysis*, 4, p.p. 255-279, (1999).
- [29] **J. Necas, I. Hlavacek.**, Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies : An Introduction, Elsevier, Amsterdam, (1981).
-

- 
- [30] **M. Sofonea.**, Problèmes Non-linéaires dans la Théorie de l'Elasticité, Cours de Magister de Mathématiques Appliquées, Université de Sétif, Algérie, (1993).
- [31] **M. Sofonea and A. Matei.**, Variational inequalities with applications. A study of antiplane frictional contact problems, Advances in mechanics and mathematics, Springer, 2009 (230 pages), year (2009).
- [32] **A. Megrou, A. Derbazi and M. Dalah.**, Existence and Uniqueness of the Weak Solution for a Contact Problem, Journal of Nonlinear Science and Applications (JNSA), p.p., 1.14, year (2016).
- [33] **A. Megrou, A. Derbazi, M. Dalah.**, An Antiplane Electro-Elastic Contact Problem with Tresca's Friction Law, JRADSC, pp. 104–116, year (2015).
- [34] **Dalah, M. Sofonea.**, Antiplane Frictional Contact of Electro-Viscoelastic Cylinders, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2007, No. 161, pp. 1–14. ISSN : 1072-6691, year (2007).
- [35] **M. Sofonea, M. Dalah and A. Ayadi.**, Analysis of an Antiplane Electro-elastic Contact Problem, Adv. Math. Sci. Appl. 17, year (2007). 385-400.
- [36] **M. Dalah.**, Analysis of Electro-viscoelastic Contact Problem with Total Slip-Rate Dependent Friction, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2009, No. 118, pp. 1–15. ISSN : 1072-6691, year (2009).
- [37] **M. Dalah.**, Thèse de Doctorat, p.p. 1-133, Sous la direction de : Pr. M. Sofonea & A. Ayadi, Université de Perpignan, France & Université de Constantine, Année (2008).
- [38] **M. Dalah et al.**, Existence and uniqueness solution of a quasistatic electro-elastic antiplane contact problem with Tresca friction law, Balkan Journal of Geometry and Its Applications (BJGA), p.p. 45-59, (2012).
- [39] **A. Boudjedour and M. Dalah**, Mathematical Modelling of Piezoelectric Elastic Materials :& International Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimisation, & <https://www.inderscience.com/info/ingeneral/forthcoming.php?jcode=ijmmno>, Accepted Année (2019).
- [40] **P.G. Ciarlet**, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation. Masson, (1982).
- [41] **P. Lascaux et R. Théodor**, Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur. Tome 1. Masson, (1986).
- [42] **P. Lascaux et R. Théodor**, Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur. Tome 2. Masson, (1987).
- [43] **B. Lucquin**, Équations aux dérivées partielles et leurs approximations. Ellipse, (2004).
- [44] **B. Mohammadi and J.H. Saiaç**, Pratique de la simulation numérique. Dunod, (2003).
-



Université Frères Mentouri Constantine, Algérie

Constantine est une commune du nord-est de l'Algérie, chef-lieu de la wilaya de Constantine. Comptant plus de 448 000 habitants, cette métropole est la troisième ville la plus peuplée du pays. Le Grand Constantine s'étale sur un rayon d'une quinzaine de kilomètres sous forme d'une agglomération comprenant une ville mère et une série de satellites. L'agglomération de Constantine comptait 943 112 habitants en 2015, dont seulement 54. Constantine, est une ville importante dans l'histoire méditerranéenne. Anciennement Cirta, capitale de la Numidie de 300 av. J.-C. à 46 av. J.-C. elle passe sous domination romaine par la suite. C'est à l'empereur Constantin Ier qu'elle doit son nom actuel depuis 313.

Durant le Moyen Âge elle est conquise par les Arabes au VIIe siècle et elle fera partie successivement du royaume aghlabide, de l'empire fatimide puis des royaumes ziride, hammadide, almohade et hafside. Elle deviendra au XVIe siècle la capitale du beylik de Constantine, siège du pouvoir beylical et vassale de la régence d'Alger. Lors de la conquête de l'Algérie par les Français elle sera prise en 1837, après un échec en 1836. Intégrée à la wilaya II, le Constantinois, par le FLN durant la guerre d'Algérie elle devient le siège de sa propre wilaya à l'indépendance du pays.

Constantine est également surnommée la « ville des ponts suspendus », « ville du vieux rocher », « ville des oulémas », aussi « ville des aigles » ou bien « ville du malouf », variante constantinoise de la musique arabo-andalouse. Elle est considérée comme la capitale de l'est du pays. En 2015, la ville de Constantine est capitale arabe de la culture, deuxième ville d'Algérie à être choisie pour organiser cet événement après Alger en 2007.

L'université de Constantine anciennement « Université Mentouri de Constantine ») est une université algérienne située dans la ville de Constantine, dans le nord-est du pays, à 400 km de la capitale Alger. L'université est localisée dans la ville de Constantine, capitale culturelle de l'Est algérien, dans la wilaya de Constantine. Elle est située sur la route reliant l'aéroport Med Boudiaf à la ville, sur une superficie de 544 660 m<sup>2</sup>.

# Résumé

Ce travail de thèse propose d'étudier la convergence de la solution régularisée notée  $(u_\rho, \varphi_\rho)$  vers la solution  $(u, \varphi)$  quand le paramètre  $\rho$  tend vers 0. Au début de ce travail, nous posons le cadre physique et le modèle mathématique d'un problème antiplan de contact avec frottement, ainsi toutes les conditions et les lois de frottement sur les trois frontières  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$ . Puis, nous construisons la formulation variationnelle associée au problème continu. Par la suite, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution faible en se basant sur quelques outils de l'analyse fonctionnelle. Ensuite, nous construisons aussi une **formulation variationnelle du modèle régularisée** qui est donnée par un système couplé d'une inéquation variationnelle dont le champ de déplacements  $u$  est considéré comme inconnu avec une équation qui dépend uniquement d'un potentiel électrique. Finalement, et de vue numériques, nous décrivons une régularisation de la fonctionnelle non différentiable due au terme de frottement apparaissant dans la formulation variationnelle de ce problème électro-mécanique. Cette régularisation est obtenue en remplaçant la fonctionnelle notée  $j(\cdot)$  par une version régularisée notée  $j_\rho(\cdot)$  avec  $\rho$  est un paramètre strictement positif. Nous avons obtenu un résultat d'existence, d'unicité et de convergence. Nous clôturons cette thèse par une simulation numérique et quelques tests en faisant des variations du pas de discrétisation  $h$ .

---

## Mots-Clefs :

Matériau électro-viscoélastique; Loi de contact; Loi de frottement; Formulation variationnelle; Inéquation variationnelle; Solution faible; Régularisation.

---



## العنوان : دراسة تقارب الحل الضعيف لبعض المسائل في ميكانيك الاحتكاك

**ملخص الأطروحة.** الغرض من هذه الأطروحة هو دراسة بعض المسائل في ميكانيك التلامس لقوانين كهرومطاطية و كهرو لزجة مطاطية. النتائج المحصل عليها تخص وجود و وحدانية الحل الضعيف للمسائل المطروحة للدراسة. الأطروحة مقسمة إلى جزئين كل منهما يحتوي على فصلين . الجزء الأول مخصص للتذكير بمختلف النماذج الميكانيكية للمسائل المطروحة للدراسة و كذلك بعض الوسائل الرياضية الضرورية في هذه الأطروحة. الجزء الثاني موجه لدراسة تلامس و احتكاك بين جسم مرن غير خطي و قاعدة صلبة . مسائل التماس الكهرو مطاطية تعطى على شكل جملة من معادلة و متراجحة تفاضلية غير خطية من الرتبة الأولى في الاخير تم التطرق إلى نمذجة عددية لقطعة ميكانيكية مرنة طولها  $L= 1mm$  معرّضة لقوى سطحية و حجمية تعطى النتائج على شكل بيانات رقمية.

**الكلمات المفتاحية :** مادة كهرو مطاطية ، قانون التلامس ، قانون الاحتكاك ،الصيغة التغيرية ، متراجحة تغيرية ، الحل الضعيف،التعديل .