

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ FRÈRES MENTOURI CONSTANTINE
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

<http://www.umc.edu.dz/index.php/fr/>



NUMÉRO D'ORDRE:.....
NUMÉRO DE SÉRIE:.....

EN VUE DE L'OBTENTION DU: GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES

Présenté et soutenue le 05/05/ 2019 par:
Hacene-Chaouche Soumeya

ÉTUDE ET ANALYSE DES PROBLÈMES ÉLECTRO-ÉLASTIQUES AVEC FROTTEMENT

Devant le jury composé de :

Dr. Ali HAMEIDA	Président.....	Université FM-Constantine 1
Prof. Mohamed DALAH	Directeur de Thèse	Université FM-Constantine 1
Dr. Abdelhak BERKANE	Examinateur.....	Université FM-Constantine 1
Prof. Abdelhamid AYADI	Examinateur.....	Université Oum-Bouaghi
Dr. Khairedine FERNANE	Examinateur.....	Université de Guelma

Soutenu en 2019

Intitulé de la Thèse:

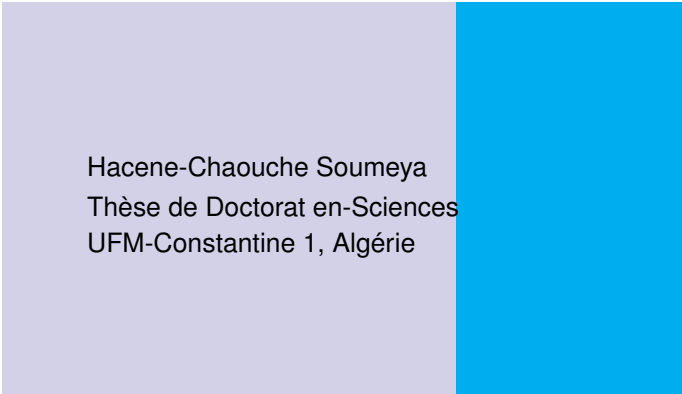
**ÉTUDE ET ANALYSE DES PROBLÈMES
ÉLECTRO-ÉLASTIQUES AVEC FROTTEMENT**

- Réalisé par Madame: Hacene-Chaouche Soumeyaⁱ

Thèse de Doctorat **Option: Analyse Numérique**

- Année: **2018–2019.**
-

*Thèse de Doctorat en-Sciences: DM-FSE
UFMC-Constantine, @–2018–2019*



Hacene-Chaouche Soumeya
Thèse de Doctorat en-Sciences
UFM-Constantine 1, Algérie

ⁱHacene-Chaouche Soumeya: DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, **2018–2019.**

CITATIONS

-
- Les mathématiques ne sont écrites que pour les mathématiciens.
Nicolas Copernic, Astronome, Scientifique (1473 - 1543).
<http://citation-celebre.leparisien.fr/citations/28689>
 - Les mathématiques sont une science dans laquelle on ne sait jamais de quoi on parle, et où l'on ne sait jamais si ce que l'on dit est vrai.
Bertrand Russell, Artiste, écrivain, Homme politique, Mathématicien, Moraliste, Philosophe, Scientifique (1872 - 1970).
 - La pêche à la ligne c'est comme les mathématiques en cela qu'on ne peut jamais complètement l'apprendre.
Isaak Walton Isaak Walton.
<http://citation-celebre.leparisien.fr/citations/28689>

Thèse de Doctorat **Option: Analyse Numérique**

UFM-Constantine 1ⁱⁱ

————— *Thèse de Doctorat en-Sciences: DM-FSE, Citations*
UFMC-Constantine, @-2018-2019

ⁱⁱHacene-Chaouche Soumeiya: DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, 2018-2019.

PROVERBES

Ne t'inquiète pas si tu as des difficultés en maths,
je peux t'assurer que les miennes sont bien plus importantes !

Albert Einstein

J'ai toujours aimé les chiffres. Enfant, quand je faisais des maths, je comprenais tout. J'ai appris sans mal les nombres décimaux. Même chose pour les fractions. Je savais tout de la numération romaine. On me posait un problème, je le résolvais. On me montrait des statistiques et, au lieu de prendre un regard vitreux comme beaucoup, pour moi les faits et tendances indiqués par les chiffres se lisaient comme une histoire.

S. Arnold

Intitulé de la Thèse: ÉTUDE ET ANALYSE DES PROBLÈMES ÉLECTRO-ÉLASTIQUES AVEC FROTTEMENT

Résumé

DANS cette thèse, nous étudions deux problèmes: l'un électro-élastique et l'autre électro-viscoélastique de contact avec frottement entre un corps cylindrique déformable et une fondation est connectée à un champ électrique. Le processus est en premier statique puis quasistatique et le frottement est modélisé par la loi de Tresca. Le problème ici nous amène à une forme faible qui est couplée d'une inéquation variationnelle pour le champ de déplacements $u(\cdot)$ et d'une équation pour le champ de potentiel électrique $\varphi(\cdot)$. Pour cela, nous construisons tout d'abord l'espace produit $X = V \times W$ tel que $u \in V$ et $\psi \in W$. Ensuite nous présentons les formulations variationnelles notées $P2^{\text{électro-élastique}}$ et $P2^{\text{électro-viscoélastique}}$ pour les deux problèmes considérés $P1^{\text{électro-élastique}}$ et $P1^{\text{électro-viscoélastique}}$ respectivement. Notre principal résultat porte sur l'existence et l'unicité de la solution faible ainsi que son comportement. La démonstration est basée sur la théorie des inéquations variationnelles.ⁱⁱⁱ

Mots-Clés

Antiplans, inégalité variationnelle, matériel électro-élastique, loi de frottement de Tresca, solution faible, espace de Sobolev, formulation variationnelle, champ de potentiel électrique, champ de déplacements.

ⁱⁱⁱHacene-Chaouche Soumeiya: DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, 2018–2019.

ABSTRACT

Title of thesis: STUDY AND ANALYSIS OF ELECTRO-ELASTIC PROBLEMS WITH FRICTION

Abstract

IN this thesis, we study two problems, the first is electro-elastic and the second is electro-viscoelastic problem which modeling the antiplane shear deformation of a cylinder in frictional contact with a foundation. The process are static and quasi-static respectively, and the friction is modeled with Tresca's law. The problem leads to a new system coupling an evolutionary variational inequality for the displacement field $u(\cdot)$, a time-dependent variational equation for the electric potential field $\varphi(\cdot)$. First, we present in chapters 2 and 3 two variational formulations, noted $P2^{electro-elastic}$ and $P2^{electro-viscoelastic}$ of the considered problems $P1^{electro-elastic}$ and $P1^{electro-viscoelastic}$. In the second setp, we construct the product space $X = V \times W$. Finally, we study the existence and uniqueness of the weak solution based on the theory of evolutionary variational inequalities.^{iv}

Key-Words

Antiplane problem, variational inequality, electro-elastic material, Tresca's friction law, weak solution, Sobolev space, variational formulation, electric potential field, displacement field.

^{iv}Hacene-Chaouche Soumeiya: DEPARTMENT OF MATHEMATICS, 2018–2019.

REMERCIEMENTS

Remerciements:

EN préambule à cette thèse, je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail. En second lieu, Je tiens à remercier vivement mon directeur de thèse **Dalah Mohamed**—<http://dalah-mohamed.wixsite.com/dalah-mohamed>, pour la confiance, le sacrifice, la générosité, ainsi que ses précieux conseils durant toute la période du travail. Je lui suis reconnaissante de m'avoir fait bénéficier tout au long de ce travail de sa rigueur intellectuelle, de son dynamisme, et de son efficacité certaine que je n'oublierai jamais. Soyez Monsieur assuré de mon attachement et de ma profonde gratitude. Je veux vraiment vous remercier car j'ai eu beaucoup de chance de vous avoir comme directeur de thèse.

Je remercie très chaleureusement Monsieur **A. Hameida**, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'être président de mon jury de thèse. Je tiens à l'assurer de ma profonde reconnaissance pour l'intérêt qu'il porte à ce travail, et qui mérite que je lui accorde un paragraphe particulier: **"One of the deep secrets of life is that all that is really worth the doing is what we do for others"**—Lewis Carroll.

Mes remerciements s'étendent également à Monsieur **A. Berkane**, pour sa participation à mon jury de thèse en qualité d'examineur de mon travail et pour toutes ses remarques intéressantes. Je le remercie encore une deuxième fois, qui m'a permis de finir cette thèse dans de bonnes conditions: **"The roots of all goodness lie in the soil of appreciation for goodness"**—Dalai Lama.

Aussi, je tiens à remercier également Monsieur **A. Ayadi** qui, bien au-delà de son rôle en qualité d'examineur, et pour toutes les corrections et les remarques pertinentes qu'il a apporté aux premières versions de ma thèse. Un grand merci tout particulier à Monsieur le Professeur **A. Ayadi**, pour sa participation à mon jury de thèse, pour le temps consacré à la lecture de cette thèse, et pour ses suggestions et ses remarques judicieuses: **"As we express our gratitude, we must never forget that the highest appreciation is not to utter words, but to live by them"**—John F. Kennedy.

Merci également à Monsieur **K. Fernane**, qui a bien voulu examiner ce travail et je le remercie pour le temps consacré à la lecture de cette thèse ainsi que pour ses commentaires: **"Give thanks for a little and you will find a lot"**–**Hansa Proverb**.

Finalement et spécialement je tiens à exprimer ma reconnaissance au **Professeur Mircea Sofonea**, pour son soutien permanent aussi bien pour ses travaux de recherches: **"Saying thank you is more than good manners. It is good spirituality"**–**Alfred Painter**.

À titre personnel, je tiens à remercier chaleureusement mon père, mon mari: **"Saying thank you creates love"**–**Daphne Rose Kingma**, mes enfants, mes frères, mes soeurs et tous mes amis. À ma familles et mes amis qui par leurs prières et leurs encouragements, j'ai pu surmonter tous les obstacles.

Enfin, je joins également mes remerciements à toutes les personnes qui ont participé et qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Hacene-Chaouche Soumeya
Département de Mathématiques, 2018–2019.

CONTENTS

Résumé	vii
Abstract	ix
Remerciements	xi
Liste des communications et publications:	xv
Liste des Symboles Mathématiques et Notations	xxv
Introduction Générale	xxix
I Outils d'Analyse Fonctionnelle	1
1 Rappels et Préliminaires Mathématiques	3
1.1 Norme et distance	4
1.2 Les normes fondamentales sur l'espace \mathbb{K}^n	7
1.2.1 La norme $\ \cdot\ _1$	7
1.2.2 La norme Euclidienne ou norme $\ \cdot\ _2$	7
1.2.3 La norme $\ \cdot\ _\infty$	7
1.3 Les normes fondamentales sur $\mathcal{C}([a, b])$	8
1.3.1 La norme de la convergence en moyenne	8
1.4 Espaces fonctionnels	8
1.4.1 Espaces des fonctions continues et continûments dif- férentiables	9
1.4.2 Espaces de Lebesgue L^p	10
1.4.3 Espaces de Sobolev	10
1.4.4 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles	11
1.5 Éléments d'analyse non linéaire	13
1.5.1 Opérateurs linéaires	13
1.5.2 Opérateurs non linéaires	14
1.5.3 Fonctions convexes et semi-continues inférieurement	15
1.5.4 Différentiabilité et sous différentiabilité	16
1.6 Inéquations variationnelles elliptiques	18
1.6.1 Inéquations variationnelles de première espèce	19
1.6.2 Inéquations variationnelles de deuxième espèce	19

II	Problèmes électro-élastique et électro-viscoélastique	21
2	Étude et analyse d'un problème antiplans électro-élastique	23
2.1	Problème électro-élastique	24
2.1.1	Introduction	24
2.2	Cadre physique	25
2.3	Modèle mathématique	33
2.4	Hypothèses et formulation variationnelle	34
2.4.1	Quelques hypothèses	34
2.4.2	Formulation variationnelle	37
2.5	Un résultat d'existence et d'unicité	38
2.6	Formulation variationnelle et quelques résultats	40
2.6.1	Formulation variationnelle	40
2.6.2	Quelques résultats	44
2.7	Simulation numérique	45
2.8	Conclusion et perspectives	47
3	Étude et analyse d'un problème antiplans électro-viscoélastique	49
3.1	Problème électro-viscoélastique	50
3.2	Cadre physique du modèle	51
3.3	Modélisation mathématique	53
3.4	Quelques hypothèses	55
3.5	Formulation variationnelle du problème P1	58
3.6	Quelques résultats d'existence et d'unicité	59
3.6.1	Problème $p_3^{\text{électro-viscoélastique}}$	61
3.7	Simulation numérique	61
3.8	Conclusion et perspectives	112
4	Conclusion générale et perspectives	115
4.1	Conclusion générale et Perspectives	115
5	Annexe A: Quelques inégalités	117
5.1	Quelques inégalités	117
6	Bibliographies	119

LISTE DES COMMUNICATIONS ET PUBLICATIONS:

- Communication Nationale N°1: **Hacene Chaouche Soumeya, Co-authors: Mohamed Dalah**, National Days on Informatics and Applied Mathematics IAM'18, 3–4 October 2018, Guelma University, Department of Mathematics, Titre: Existence and uniqueness of weak solution for a class of an antiplane contact problem with friction.

Communication Nationale N°2: **Hacene Chaouche Soumeya, Co-authors: Mohamed Dalah**, National Days on Informatics and Applied Mathematics IAM'18, 3–4 October 2018, Guelma University, Department of Mathematics, Titre: Electro-viscoelastic antiplane contact problem with power friction law.

Communication Nationale N°3: **Hacene Chaouche Soumeya, Co-authors: Mohamed Dalah**, Workshop sur les Systèmes Dynamiques, les équations Différentielles et leurs applications Laboratoire des systèmes dynamiques et contrôle. SDEDA'2018. 14-15 Novembre, Université Larbi Ben M'Hidi Oum El Bouaghi. Faculté des Sciences Exactes et Science de la Nature et de la Vie, Titre: An antiplane contact problem with power friction law.

Communication Nationale N°4: **Hacene Chaouche Soumeya, Co-authors: Mohamed Dalah**, Workshop sur les Systèmes Dynamiques, les équations Différentielles et leurs applications Laboratoire des systèmes dynamiques et contrôle. SDEDA'2018. 14-15 Novembre, Université Larbi Ben M'Hidi Oum El Bouaghi. Faculté des Sciences Exactes et Science de la Nature et de la Vie, Titre: Electro-viscoelastic antiplane contact problem with power friction law.

- Communication Internationale N°1: **Hacene Chaouche Soumeya, Co-authors: Mohamed Dalah**, Third international conference on modeling and scientific computing in mathematical engineering MOCASIM'2018“, 26th–27th 2018, Faculty of sciences and technology in Marrekechb FSTM“, Titre: Étude des problèmes élastiques et électro-élastiques avec

frottement.

- Communication Internationale N°2: **Hacene Chaouche Soumeya, Co-authors: Mohamed Dalah**, Third international conference on modeling and scientific computing in mathematical engineering MOCASIM'2018", 26th–27th 2018, Faculty of sciences and technology in Marrekechb FSTM", Tilte: A convegence result between the solution of the regularized problem and the original problem.
- Communication Internationale N°3: **Hacene Chaouche Soumeya, Co-authors: Mohamed Dalah**, Third international conference on modeling and scientific computing in mathematical engineering MOCASIM'2018", 26th–27th 2018, Faculty of sciences and technology in Marrekechb FSTM", Tilte: Électro-viscoelastic antiplan contact problem with power friction law.
- **Publication N° 1:** Informations*[31-a]–**M. Dalah et al.**, An An-tiplane Electro-Elastic Contact Problem: Case Regularized Friction Law, : Int. J. of Dynamical Systems and Differential (IJDS), (2018), <http://www.inderscience.com/>

LISTE DES FIGURES

- Figures 1 & 2, Chapitre 2: "Analyse d'un problème antiplans électro-élastique de contact avec frottement".^v
- Figures 3 & 4, Chapitre 3: "Analyse d'un problème antiplans électro-viscoélastique de contact avec frottement."

^vAuthors: Mircea Sofonea and Andaluza Matei, Title of Book: Variational inequalities with applications. A study of antiplane frictional contact problems, Advances in mechanics and mathematics, Springer, 2009 p.p. 1-230, Year of Publication: 2009

LISTE DES TABLEAUX

- Tableau 1, Chapitre 3: Les déplacements U_x et U_y selon Ox et Oy .

LISTE DES ABRÉVIATIONS

- $p^{électro-élastique}$: Problème électro-élastique: Chapitre 2, Partie 2.
- $p\gamma^{électro-élastique}$: Formulation variationnelle du problème électro-élastique: Chapitre 2, Partie 2.
- $p^{électro-viscoélastique}$: Problème électro-viscoélastique: Chapitre 3, Partie 2.
- $p\gamma^{électro-viscoélastique}$: Formulation variationnelle du problème électro-viscoélastique: Chapitre 3, Partie 2.

LISTE DES CONSTANTES PHYSIQUES

- Les forces de densité volumiques \mathbf{f}_0 .
- Les forces de densité surfaciques \mathbf{f}_2 .
- Les charges électriques de densité surfaciques \mathbf{q}_2 .
- Les charges électrique de densité volumique \mathbf{q}_0 .
- $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$: Le tenseur des déformations linéarisées.
- θ : la viscosité.
- \mathcal{L} : Opérateur d'élasticité linéaire.
- \mathcal{A} : Opérateur des coefficients viscoélastiques.
- v_τ et v_ν : Les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel ν .
- $u(\cdot)$: Le champ de déplacements.
- $\varphi(\cdot)$: Le champ électrique.
- σ et \mathbf{D} : Le champ des contraintes et le champ des vecteurs des déplacements électriques.

LISTE DES SYMBOLES MATHÉMATIQUES ET NOTATIONS

- \mathbb{R}^d Espace euclidien d'ordre d .
 \mathbb{S}^d Espace des tenseurs symétriques du second ordre sur \mathbb{R}^d .

On considère Ω est un domaine de \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$) et on note par

- $\bar{\Omega}$ L'adhérence de Ω .
 Γ La frontière de Ω supposée régulière .
 $\Gamma_i (i = 1, 2, 3)$ Une partition de la frontière Γ .
 $mes\Gamma_1$ La mesure de Lebesgue ($d - 1$) dimensionnelle de Γ_1 .
 ν La normale extérieure unitaire à Γ .
 ν_ν, ν_τ La composante normale et tangentielle du champ vectoriel ν .
 σ_ν, σ_τ La composante normale et tangentielle du champ tensoriel σ .
 $C^1(\bar{\Omega})$ Espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\bar{\Omega}$.

Si X est un espace de Hilbert réel et $d \in \mathbb{N}^*$, on utilise les notation suivantes:

- $L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty, p \in [1, +\infty]\}$.
 $H^1(\Omega)$ Espace de Sobolev .
 $(\cdot, \cdot)_X$ Le produit scalaire de X .
 $|\cdot|_X$ La norme de X .
 X' L'espace dual de X .
 $(\cdot, \cdot)_{X' \times X}$ Le produit de dualité entre X' et X .

Si de plus $[0, T]$ est un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p < +\infty$, on note par

- $C(0, T; X)$ L'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans X .
 $C^1(0, T; X)$ L'espace des fonctions continûment dérivables de $[0, T]$ dans X .
 $L^p(0, T; X)$ L'espace des fonctions mesurables de $(0, T)$ dans X .
 $W^{k,p}(0, T; X)$ L'espace de Sobolev de paramètres k et p de $(0, T)$ dans X .

Pour une fonction f , on note par

$\partial_i f$ La dérivée partielle de f par rapport au temps.

∇f Le gradient de f .

$Div f$ La divergence de f .

c Une constante générique strictement positive.

$p.p.$ Presque partout.

$s.c.i$ Semi-continu inférieurement.

*Cette thèse est dédiée à ma défunte Maman, Papa,
Mes soeurs, Mon frère, Mon Mari et Mes Enfants^{vi}*

INTRODUCTION GÉNÉRALE

LA mécanique, en tant qu'industrie, regroupe l'étude, la conception et la fabrication de tout dispositif (moteurs, véhicules...) produisant ou transmettant un mouvement, une force, ou une déformation. On parle ainsi de génie mécanique, de mécanique automobile, de mécanique navale, etc. **La mécanique des contacts** traite des calculs impliquant des corps élastiques, visco-élastiques ou plastiques lors de contacts statiques ou dynamiques, ainsi des **corps électro-élastiques**, électro-visco-élastiques et, pour plus de détails, les lecteurs sont invités à consulter une bibliographie abondante sur le sujet dans [1]-[9]. La mécanique des contacts est l'un des fondements de l'ingénierie mécanique et est indispensable pour la conception de projets sûrs et énergiquement efficaces.

Elle peut être appliquée dans différents domaines tel que le contact roue-rail, les embrayages, les freins, les pneumatiques, les paliers et roulements, les moteurs à combustion, les liaisons mécaniques, les joints, les machines de production, le soudage par ultrasons, les contacts électriques et bien d'autres. Les applications vont de l'analyse des efforts au sein d'éléments de contact et de liaison jusqu'à l'influence de la lubrification et de la géométrie sur l'usure et les frottements d'un système en passant par l'étude de systèmes microscopiques. En physique, **l'élasticité** est la propriété d'un matériau solide à retrouver sa forme d'origine après avoir été déformé. La déformation élastique est une déformation réversible. Un matériau solide se déforme lorsque des forces lui sont appliquées. Un matériau élastique retrouve sa forme et sa taille initiales quand ces forces ne s'exercent plus, jusqu'à une certaine limite de la valeur de ces forces. Les tissus biologiques sont également plus ou moins élastiques.

L'élasticité non-linéaire concerne les **petites déformations** proportionnelles à la sollicitation. Dans cette gamme, l'allongement est proportionnel à la force dans le cas d'un étirement, selon le module de Young, et l'angle est proportionnel au couple dans le cas d'une torsion, selon le module de Coulomb. Aux plus grandes déformations, l'élasticité devient non linéaire voir par exemple [2]-[3] et [14]-[36]. pour certains matériaux. Pour d'autres, la fracture ou le fluage interviennent.

La déformation élastique est un domaine important de la mécanique des milieux continus (MMC) (voir aussi [13], [14] et [37]) et de la thermodynamique (compression des gaz). Cette thèse représente une contribution à l'étude de **l'existence, l'unicité de la solution faible** pour les deux **problèmes antiplans de contact avec frottement** pour les deux matériaux élastique et électro-élastique (voir [24]–[41]) qui sont étudiés dans la deuxième partie de cette thèse. Sous l'hypothèse des petites déformations, nous étudions des processus statiques et dynamiques pour des matériaux élastiques et électro-élastiques respectivement.

La thèse de doctorat intitulée “Étude et Analyse des Problèmes Électro-Élastiques avec Frottement” est structurée en deux grandes parties et contient le résumé de la thèse (la version en français et les deux traductions en anglais et en arabe), une introduction, **trois chapitres**, conclusion générale et la bibliographie.

Les deux grandes parties sont :

- Partie 1: **Outils d'Analyse Fonctionnelle** (voir aussi [1], [6], [7], [8], [22], [48], [49] et [53])
- Partie 2: **Problèmes électro-élastique et électro-viscoélastique**

La première partie est consacrée à une présentation détaillée sur quelques outils d'analyse fonctionnelle, ensuite un bref rappel sur les inéquations variationnelles (pour plus de détails sur ce sujet voir [18], [20], [27], [28], [44], [45], [54], [57]–[59] et [61]–[64]), notamment les théorèmes de trace. Cette partie contient un seul chapitre :

- Chapitre I: **Rappels et Préliminaires Mathématiques**

Dans le premier chapitre intitulé “**Rappels et Préliminaires Mathématiques**”, nous allons donner quelques définitions et résultats concernant la distance, les normes fondamentales sur l'espace K^n , les normes fondamentales sur $C([a, b])$, les espaces fonctionnels, et quelques éléments d'analyse non linéaire.

Par la suite, nous allons faire une présentation détaillée sur les inéquations variationnelles et nous allons aussi établir des résultats sur l'existence et l'unicité des solutions faibles. Ce chapitre est court et très concis.

La deuxième partie de cette thèse contient :

- Chapitre II: Étude et analyse d'un problème antiplans électro-élastique de contact avec frottement ^{vii}
- Chapitre III: Étude et analyse d'un problème antiplans électro-viscoélastique de contact avec frottement

Dans le deuxième chapitre intitulé "**Étude et analyse d'un problème antiplans électro-élastique de contact avec frottement**" de la deuxième partie de la thèse, on considère un modèle mathématique qui décrit un phénomène électro-élastique et qui se conclue dans une déformation d'un cylindre en contact avec frottement. Dans ce chapitre, le matériel est supposé décrire un phénomène électro-élastique (pour plus de détails sur ce sujet voir [2]–[5], [9]–[12], [21]–[24], [32], [33], [35], [38], [39], [45], [47], [50], [51], [52] et [56]), le processus est statique, le frottement est modélisé par la loi de Tresca et la fondation est connectée à un champ électrique. Ensuite, nous dérivons la formulation variationnelle qui sera notée par la suite $\mathbb{P}\mathbb{V}^{\text{électro-élastique}}$ de ce modèle et qui est sous la forme d'un système couplé en premier temps; d'une inéquation variationnelle d'évolution pour le champ des déplacements $u(\cdot)$ avec une équation variationnelle pour le champ électrique $\varphi(\cdot)$. Finalement, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution faible pour ce modèle. La démonstration est basée sur les arguments des inéquations variationnelles d'évolution et quelques propriétés des opérateurs linéaires et non-linéaires. La rédaction de cette section s'inspire de l'article **M. Dalah et al., An Antiplane Electro-Elastic Contact Problem: Case Regularized Friction Law, : Int. J. of Dynamical Systems and Differential (IJSD), (2018), <http://www.inderscience.com/>**. Enfin, nous traitons un exemple numérique (pour plus de détails sur ce sujet voir [9], [12], [39], [43], [51] et [69]) où nous allons étudier les effets et l'influence de la conductivité électrique de la fondation sur le processus de contact. Au début, nous avons pris en considération que la fondation est isolée et électrifiée. Nous remarquons qu'il n'y a pas de charges électriques sur Γ_3 .

Le dernier chapitre intitulé "**Étude et analyse d'un problème antiplans électro-viscoélastique de contact avec frottement**", qui représente l'essence

de la thèse de doctorat, enfin une technique propose différente de celle utilisée dans le chapitre précédent. Nous considérons un modèle pertinent qui consiste à intervenir le champ électrique dans cette étude. Le modèle présenté ici est un modèle purement **électro-viscoélastique** (pour plus de détails sur ce sujet voir [16], [17], [19], [25], [26], [34], [36], [40]–[42] et [65]–[71]) et le matériau traité est un matériau électro-mécanique, le modèle est mis sous une forme faible couplé d'une inéquation variationnelle pour le champ de déplacements u et d'une équation pour le champ de potentiel électrique $\varphi(\cdot)$. Dans un premier temps, nous présentons une formulation variationnelle pour le problème considéré. Puis, nous dérivons une formulation variationnelle de ce modèle. Ensuite, nous construisons l'espace produit $X = V \times W$. Finalement, notre principal résultat porte sur l'existence et l'unicité de solution faible ainsi que son comportement de la solution faible du problème. Le problème analysé en détail dans ce chapitre nous amène à prouver le cadre du dernier chapitre a eu le but de prouver l'existence et l'unicité de solution faible par des différentes techniques par rapport à celles utilisées dans le chapitre précédent.

La thèse de doctorat présente au dernier la conclusion générale et une liste de bibliographie, qui contient 72 titres, dont 66 appartiennent à la littérature étrangère de spécialité. La dernière partie de conclusion de la thèse met l'accent sur les contributions scientifiques de ce travail, référentiel du domaine et cadre méthodologique et souligne les nouveaux résultats obtenus concernant l'existence et l'unicité de la solution faible.

Nous clôturons cette thèse par une conclusion générale, une perspective, une annexe et une bibliographie détaillée.

Part I

OUTILS D'ANALYSE
FONCTIONNELLE

1

RAPPELS ET PRÉLIMINAIRES MATHÉMATIQUES

LE premier chapitre de cette thèse intitulé "Rappels et Préliminaires Mathématiques" est dédié à quelques éléments d'analyse fonctionnelle et d'analyse non linéaire. De plus, il nous est paru utile de donner explicitement quelques définitions sur les espaces fonctionnels, et les espaces normés, qui seront utilisés partout dans cette thèse. Ensuite, nous faisons un bref rappel sur les espaces vectoriels normés, les espaces de Hilbert, les espaces de Sobolev et les inéquations variationnelles. Finalement, nous clôturons ce chapitre par une présentations détaillée de quelques résultats fondamentaux de l'analyse fonctionnelle non linéaire dans les espaces de Hilbert.

Table des matières

Chapitre 1: Rappels et Préliminaires Mathématiques

I.1. Rappels Mathématiques

1.1 Norme et distance

1.1.1 Inégalité de Schwarz

1.2 Les normes fondamentales sur l'espace K^n

1.2.1 La norme $\|\cdot\|_1$

1.2.2 La norme Euclidienne ou norme $\|\cdot\|_2$

1.2.3 La norme $\|\cdot\|_\infty$

1.3 Les normes fondamentales sur $C([a, b])$

1.3.1 La norme de la convergence en moyenne

1.4 Espaces fonctionnels

1.4.1 Espaces des fonctions continues et continûments différentiables

1.4.2 Espaces de Lebesgue L^p

1.4.3 Espaces de Sobolev

1.4.4 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

1.5 Éléments d'analyse non linéaire

1.5.1 Opérateurs linéaires

1.5.2 Opérateurs non linéaires

1.5.3 Fonctions convexes et semi-continues inférieurement

1.5.4 Différentiabilité et sous différentiabilité

1.2. Rappels sur les inéquations variationnelles

1.1 Norme et distance

On désigne par E un espace vectoriel sur le corps $K = \mathbb{R}$.

Définition 1 (Norme) On appelle norme sur le K -espace vectoriel E , toute application: $\|\cdot\|_E : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

1. $\|x\|_E \geq 0 \forall x \in E$, $\|x\|_E = 0 \iff x = 0$ axiome de positivité et de séparation;
2. $\forall (\lambda, x) \in K \times E$, $\|\lambda x\|_E = |\lambda| \|x\|_E$ axiome d'homogénéité;
3. $\forall (x, y) \in E^2$, $\|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$ inégalité triangulaire.

Proposition 1 (Inégalité de Minkowski) Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :

$$|\|x\|_E - \|y\|_E| \leq \|x - y\|_E$$

Définition 2 (Distance associée à une norme) Soit une norme sur E ; on appelle distance associée à $d(\cdot, \cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$d(x, y) = \|y - x\|_E.$$

Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de la définition précédente:

Propriétés 1

$\forall (x, y) \in E^2$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$ axiome de séparation;

$\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$	axiome de symétrie;
$\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$	inégalité triangulaire;
$\forall (a, x, y) \in K \times E^2, d(x+a, y+a) = d(x, y)$	invariance par translation;
$\forall (\lambda, x, y) \in K \times E^2, d(\lambda x, \lambda y) = \lambda d(x, y)$	homogénéité.

Définition 3 On appelle espace vectoriel normé un espace E muni d'une norme $\|\cdot\|_E$.

Exemples 1 Soit $\{e_1; e_2; \dots; e_d\}$ la base canonique de \mathbb{R}^d , sur \mathbb{R}^d on définit pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ avec $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_d e_d$ les normes suivantes :

- $N_2(x) = \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2}$ (norme euclidienne)

Cette norme dérive du produit scalaire défini par $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_d y_d$

- $N_1(x) = \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_d|$

- $N_\infty(x) = \|x\|_\infty = \max\{|x_i| / 1 \leq i \leq d\}$ (norme uniforme ou norme du joueur d'échec car elle correspond à la distance séparant deux cases pour un roi du jeu d'échec)

- pour $p \in [1; +\infty[$, $\|x\|_p^p = |x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_d|^p$ qui généralise les deux premières normes citées.

L'utilisation de l'indice infini pour la norme uniforme vient du fait que celle-ci s'obtient en prenant la limite de norme p en $+\infty$.

Définition 4 (Espace vectoriel normé complet) Un espace normé E est dit complet si toutes les suites de Cauchy de E convergent dans E .

Théorème 1 Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Preuve 1 Soit E un espace vectoriel de dimension finie d et $\|\cdot\|$ une norme sur E . Il suffit de démontrer qu'elle est équivalente à la norme $\|\cdot\|_1$.

Soit $\{e_1; e_2; \dots; e_n\}$ une base de E .

$$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^d x_i e_i \text{ on a: } \|x\| = \left\| \sum_{i=1}^d x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^d |x_i| \|e_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^d |x_i| \right) \max\{\|e_i\| / i \in \{1; \dots; d\}\}.$$

On pose $M = \max\{\|e_i\| / i \in \{1; \dots; d\}\}$. D'où $\|x\| \leq M \|x\|_1$.

D'autre part $\|\cdot\|_1$ est continue sur la sphère unité S_1 pour la norme $\|\cdot\|_1$ donc $\exists m \in \mathbb{R}_+^* / m = \inf\{\|x\|_1 / x \in S_1\}$.

Pour $x \in E$ on a alors $\frac{x}{\|x\|_1} \in S_1$ donc $\|\frac{x}{\|x\|_1}\| \geq m$ c'est à dire $\frac{\|x\|}{\|x\|_1} \geq m$ et $\|x\| \geq m\|x\|_1$.

Définition 5 (Espace de Banach) *Un espace de Banach E est un espace normé complet.*

Définition 6 (Produit scalaire) *Soit $K = \mathbb{R}$ et soit E un K -espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur E toute forme bilinéaire symétrique définie positive autrement dit, toute application $(\cdot, \cdot)_E$ de $E \times E$ dans \mathbb{R} vérifiant :*

1. $\forall x \in E, (x, x)_E \geq 0$ et si $(x, x)_E = 0$ alors $x = 0_E$.
2. $\forall x, y \in E, (x, y)_E = (y, x)_E$.
3. $\forall x, y, z \in E, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, (\alpha_1 x + \alpha_2 y, z)_E = \alpha_1 (x, z)_E + \alpha_2 (y, z)_E$.

Définition 7 (Espace préhilbertien) *Un espace préhilbertien réel est un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)_E$ défini dans la définition précédente.*

Remarque 1 *A partir toujours d'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)_E$ défini sur l'espace E on définit une norme par :*

$$|x|_E = \sqrt{(x, x)_E} \quad \forall x \in E.$$

Définition 8 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Rappelons qu'un produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$|(x, y)_E| \leq |x|_E |y|_E \quad \forall x, y \in E.$$

Définition 9 (Espace de Hilbert) *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la norme associée à son produit scalaire.*

On a un résultat important dit théorème de représentation de Riesz“.

On munit E du produit scalaire usuel que l'on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Théorème 2 (de représentation de Riesz: Le cas euclidien) *Soit $\varphi \in E^*$, alors il existe un unique $x \in E$ tel que :*

$$\forall y \in E, \varphi(y) = \langle x, y \rangle$$

1.2 Les normes fondamentales sur l'espace \mathbb{K}^n

1.2.1 La norme $\|\cdot\|_1$

Pour $x = (x_j)_{j=1,n} \in \mathbb{K}^n$, on pose :

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$$

1.2.2 La norme Euclidienne ou norme $\|\cdot\|_2$

Définition 10 (Norme euclidienne) Pour $x = (x_j)_{j=1,n} \in \mathbb{K}^n$, on pose :

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}$$

1.2.3 La norme $\|\cdot\|_\infty$

Définition 11 Pour $x = (x_j)_{j=1,n} \in \mathbb{K}^n$, on pose :

$$\|x\|_\infty = \sup_{j=1,n} |x_j|$$

Proposition 2 L'application $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur l'espace \mathbb{K}^n .

1.3 Les normes fondamentales sur $\mathcal{C}([a, b])$

1.3.1 La norme de la convergence en moyenne

Définition 12 Sur l'espace $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} , on définit aussi :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$$

Définition 13 On parle de norme infini ou norme sup ou norme de la convergence uniforme définie par :

$$\|f\|_\infty: f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

:

1.4 Espaces fonctionnels

Dans cette section nous donnons quelques rappels sur les espaces fonctionnels à valeurs réelles qui nous aident à comprendre les propriétés des espaces appropriés à la mécanique. Nous allons aborder les espaces des fonctions continues, continûment différentiables, les espaces de Lebesgue et les espaces de Sobolev. Pour plus de détail, voir par exemple [1] et [4].

Définition 14 Étant donné un ouvert Ω de \mathbb{R}^d . Soit $x = (x_1, \dots, x_d)$ un élément de \mathbb{R}^d et soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ un multi-indice tel que $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$, nous posons

$$D^\alpha v(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} v(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

1.4.1	<i>Espaces des fonctions continues et continûments différentiables</i>
--------------	--

On note par $C(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$. $C(\bar{\Omega})$ est un espace de Banach dont la norme est la suivante :

$$\|v\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup\{|v(x)| : x \in \bar{\Omega}\} = \max\{|v(x)| : x \in \bar{\Omega}\}.$$

Pour $m \geq 0$, l'espace $C^m(\bar{\Omega})$ défini par

$$C^m(\bar{\Omega}) = \{v \in C(\bar{\Omega}) : D^\alpha v \in C(\bar{\Omega}) \text{ pour tout } \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leq m\}$$

est l'espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$ dont les dérivées d'ordre au plus m sont également continues sur $\bar{\Omega}$.

Définition 15 L'espace $C^m(\bar{\Omega})$ est un espace de Banach dont la norme est donnée par

$$\|v\|_{C^m(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{C(\bar{\Omega})}.$$

Par ailleurs, $C^\infty(\bar{\Omega})$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\bar{\Omega}) = \{v \in C(\bar{\Omega}) : v \in C^m(\bar{\Omega}) \quad \forall m = 0, 1, \dots\}.$$

Soit v une fonction dans Ω , le support de v est défini par

$$\text{supp } v = \overline{\{x \in \Omega : v(x) \neq 0\}}.$$

Si $\text{supp } v$ est un sous-ensemble propre de Ω , on dit que v est une fonction à support compact dans Ω .

L'espace des fonctions indéfiniment différentiable à support compact est donné par

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\bar{\Omega}) : \text{supp } v \subset \Omega\}.$$

1.4.2 Espaces de Lebesgue L^p

Pour $p \in [1, \infty[$, $L^p(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions mesurables au sens de Lebesgue définies sur Ω à valeurs dans \mathbb{R} .

$L^p(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : v \text{ Lebesgue mesurable et } |v|^p \text{ Lebesgue intégrable sur } \Omega\}$.

C'est un espace de Banach, dont la norme est donné par

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$ et $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable, alors

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |v(x)| = \inf\{c : |v(x)| \leq c\}.$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ est aussi un espace de Banach.

1.4.3 Espaces de Sobolev

Une bonne partie de l'analyse des équations aux dérivées partielles se déroule dans les espaces de Sobolev. On renvoie le lecteur aux ouvragesⁱ [1]–**R. A. Adams.**, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, (1975). pour plus de détails.

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, \infty]$. Nous définissons les espaces de Sobolev par

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \text{ tel que } D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ avec } |\alpha| \leq k\}.$$

La norme sur l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est définie par

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < +\infty; \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

ⁱ[1]–**R. A. Adams.**, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, (1975).

L'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.

Pour $p = 2$, $W^{k,2}(\Omega)$ sera noté par $H^k(\Omega)$, qui est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est donné par

$$(u, v)_k = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} D^{\alpha} u(x) D^{\alpha} v(x) dx \quad \forall u, v \in H^k(\Omega).$$

1.4.4 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

On aura besoin des espaces de fonctions à valeurs vectorielles dans l'étude des problèmes variationnels dépendant du temps. Soit $(X, |\cdot|_X)$ un espace de Banach. Dans les problèmes de contact étudiés dans cette thèse $[0, T]$ désigne l'intervalle de temps où $T > 0$.

Espaces $C^m(0, T; X)$. Nous définissons $C(0, T; X)$ l'espace des fonctions $v : [0, T] \rightarrow X$ qui sont continues sur l'intervalle $[0, T]$. Avec la norme

$$|v|_{C(0, T; X)} = \max_{t \in [0, T]} |v(t)|_X.$$

L'espace $C(0, T; X)$ est un espace de Banach.

Pour $m \geq 0$, nous définissons l'espace

$$C^m(0, T; X) = \{v \in C(0, T; X) : v^{(j)} \in C(0, T; X), j = 1, 2, \dots, m\}.$$

Il est un espace de Banach avec la norme

$$|v|_{C^m(0, T; X)} = \sum_{j=0}^m \max_{t \in [0, T]} |v^{(j)}|_X.$$

En particulier, $C^1([0, T]; X)$ désigne l'espace des fonctions continûment différentiables sur $[0, T]$ à valeurs dans X . C'est un espace de Banach avec la norme

$$|v|_{C^1(0, T; X)} = \max_{t \in [0, T]} |v(t)|_X + \max_{t \in [0, T]} |\dot{v}(t)|_X.$$

Soit aussi

$$\begin{aligned} C^\infty(0, T; X) &= \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(0, T; X) \\ &\equiv \{v \in C(0, T; X) : v \in C^m(0, T; X), \forall m \in \mathbb{Z}_+\}, \end{aligned}$$

l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $[0, T]$ à valeurs dans X .

Espaces $L^p(0, T; X)$. Pour $p \in [1, \infty)$, l'espace $L^p(0, T; X)$ est l'ensemble de toutes les fonctions mesurables $v : [0, T] \rightarrow X$ telle que $\int_0^T |v(t)|_X^p dt < \infty$. L'espace $L^p(0, T; X)$ est un espace de Banach avec la norme

$$|v|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T |v(t)|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace $L^\infty(0, T; X)$ est l'ensemble de toutes les fonctions mesurables $v : [0, T] \rightarrow X$ telle que $|v(t)|_X < \infty$. Avec la norme

$$|v|_{L^\infty(0, T; X)} = \text{ess sup}_{t \in [0, T]} |v(t)|_X,$$

l'espace $L^\infty(0, T; X)$ est un espace de Banach.

Lorsque $(X, (\cdot, \cdot))$ est un espace de Hilbert, $L^2(0, T; X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

Espaces $W^{k,p}(0, T; X)$. Pour $k \in \mathbb{Z}_+$ et $1 \leq p \leq \infty$, nous présentons l'espace

$$W^{k,p}(0, T; X) = \{v \in L^p(0, T; X) : |v^{(m)}|_{L^p(0, T; X)} < \infty, \forall m \leq k\},$$

Lorsque $p < \infty$, nous définissons la norme dans l'espace $W^{k,p}(0, T; X)$ par

$$|v|_{W^{k,p}(0, T; X)} = \left(\int_0^T \sum_{0 \leq m \leq k} |v^{(m)}(t)|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Lorsque $p = \infty$, la norme est définie par

$$|v|_{W^{k,\infty}(0, T; X)} = \max_{0 \leq m \leq k} \text{ess sup}_{t \in [0, T]} |v^{(m)}(t)|_X.$$

Si X est un espace de Hilbert et $p = 2$, alors l'espace

$$H^k(0, T; X) \equiv W^{k,2}(0, T; X),$$

est un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{H^k(0, T; X)} = \sum_{0 \leq m \leq k} \int_0^T (u^{(m)}(t), v^{(m)}(t))_X dt.$$

1.5 Éléments d'analyse non linéaire

Dans cette section nous allons rappeler quelques notions d'analyse non linéaire qui seront d'une grande utilité pour la réalisation de ce travail. En particulier des résultats sur les opérateurs monotones, les fonctions convexes et semi-continues inférieurement, la différentiabilité et la sous différentiabilité.

1.5.1 Opérateurs linéaires

Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces normés et soit $L : X \rightarrow Y$ un opérateur.

L'opérateur $L : X \rightarrow Y$ est *linéaire* si

$$L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in X, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Un opérateur linéaire est *continu* si et seulement s'il est borné, c'est-à-dire il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\|L(v)\|_Y \leq M \|v\|_X \quad \forall v \in X.$$

Nous utiliserons la notation $\mathcal{L}(X, Y)$ pour l'ensemble de tous les opérateurs linéaires continus de X dans Y . Pour $L \in \mathcal{L}(X, Y)$, la quantité

$$\|L\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{0 \neq v \in X} \frac{\|Lv\|_Y}{\|v\|_X} \quad (1.1)$$

est appelée l'*opérateur norme* de L et $L \rightarrow \|L\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$ définit une norme sur l'espace $\mathcal{L}(X, Y)$. De plus, Si Y est un espace de Banach alors $\mathcal{L}(X, Y)$ est

aussi un espace de Banach. Pour un opérateur linéaire L , nous écrivons habituellement $L(v)$ comme Lv , mais parfois, nous écrivons aussi Lv même lorsque L n'est pas linéaire.

Pour un espace normé X , l'espace $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ est appelé l'*espace dual* de X et il est désigné par X' . Les éléments de X' sont des fonctionnelles continues et linéaires sur X . Le produit de dualité entre X' et X est généralement désigné par $l(v)$ ou $\langle v', v \rangle$ ou $\langle v', v \rangle_{X' \times X}$ pour $v' \in X'$ et $v \in X$. Il résulte de (1.1) qu'une norme sur X' est donnée par

$$\|l\|_{X'} = \sup_{0 \neq v \in X} \frac{|l(v)|}{\|v\|_X}, \quad (1.2)$$

et $(X', \|\cdot\|_{X'})$ est toujours un espace de Banach.

Soit maintenant $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire.

Définition 16 La forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est dite

- continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$a(u, v) \leq M \|u\|_X \|v\|_X \quad \forall u, v \in X.$$

- X -elliptique s'il existe une constante $m > 0$ telle que

$$a(v, v) \geq m \|v\|_X^2 \quad \forall v \in X.$$

- symétrique si

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in X.$$

1.5.2 Opérateurs non linéaires

Définition 17 Soit X un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme $\|\cdot\|_X$ et soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur.

- L'opérateur A est dit monotone si

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X.$$

- L'opérateur A est strictement monotone si

$$(Au - Av, u - v)_X > 0 \quad \forall u, v \in X, \quad u \neq v.$$

- L'opérateur A est dit fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m|u - v|^2 \quad \forall u, v \in X.$$

- L'opérateur A est de Lipschitz s'il existe $M > 0$ tel que

$$|Au - Av|_X \leq M|u - v|_X \quad \forall u, v \in X.$$

Dans l'étude des équations d'évolution non linéaires, nous considérons les opérateurs définis sur un espace normé avec des valeurs dans son dual. En notant par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pour le produit de dualité entre X' et X , une extension de la Définition 17 pour ce cas est la suivante.

Définition 18 Soit X un espace de Banach et soit X' son dual. Un opérateur $A : X \rightarrow X'$ est dit monotone si

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in X. \quad (1.3)$$

L'opérateur $A : X \rightarrow X'$ est dit sémi-continu si l'application $t \mapsto \langle A(u + tv), w \rangle$ est continue sur $[0, 1]$ pour tout $u, v, w \in X$.

1.5.3 Fonctions convexes et semi-continues inférieurement

Définition 19 Soit X un espace vectoriel réel et soit la fonction $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$. On dit que la fonction φ est propre si $\varphi(v) > -\infty$ pour tout $v \in X$ et $\varphi(u) < \infty$ pour certains $u \in X$. La fonction φ est convexe si

$$\varphi((1 - t)u + tv) \leq (1 - t)\varphi(u) + t\varphi(v), \quad (1.4)$$

pour tout $u, v \in X$ et $t \in [0, 1]$. La fonction φ est strictement convexe si l'inégalité (1.4) est stricte pour $u \neq v$ et $t \in (0, 1)$.

Notons que si $\varphi, \psi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ sont des fonctions convexes et $\lambda \geq 0$, alors les fonctions $\varphi + \psi$ et $\lambda\varphi$ sont aussi convexes.

Définition 20 Une fonction $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ est dite *semi-continue inférieurement (s.c.i.)* en $u \in X$ si

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(u_n) \geq \varphi(u), \quad (1.5)$$

pour chaque suite $\{u_n\} \subset X$ convergente vers u dans X . La fonction φ est s.c.i. si elle est s.c.i. en chaque point $u \in X$. Lorsque l'inégalité (1.5) est vérifiée pour toute suite $\{u_n\} \subset X$ qui converge faiblement vers u , on dit que la fonction φ est *faiblement semi-continue inférieurement* à u . La fonction φ est *faiblement s.c.i.* si elle est faiblement s.c.i. en chaque point $u \in X$.

Notons que si $\varphi, \psi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ sont des fonctions s.c.i. et $\lambda \geq 0$, alors les fonctions $\varphi + \psi$ et $\lambda\varphi$ sont aussi s.c.i. De plus, si φ est une fonction continue, alors elle est aussi s.c.i. Cependant, l'inverse n'est pas vrai puisque la semi-continuité inférieure n'implique pas la continuité.

Comme la convergence forte dans X implique la convergence faible, il en résulte qu'une fonction faiblement semi-continue inférieurement est semi-continue inférieurement. De plus, on peut montrer qu'une fonction $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ propre et convexe est semi-continue inférieurement si et seulement si elle est faiblement semi-continue inférieurement.

Exemple 1.1. (Fonction indicatrice) Soient X un espace réel normé et $K \subset X$. On appelle fonction indicatrice de K la fonction $\psi_K : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ définie par :

$$\psi_K(v) = \begin{cases} 0 & \text{if } v \in K, \\ +\infty & \text{if } v \notin K. \end{cases} \quad (1.6)$$

On peut démontrer que K est un ensemble non vide, fermé et convexe de X si et seulement si la fonction indicatrice ψ_K est propre, convexe et s.c.i.

1.5.4 Différentiabilité et sous différentiabilité

Nous rappelons maintenant la définition des fonctions Gâteaux-différentiables.

Définition 21 Soient $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ un espace préhilbertien, $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $u \in X$. Alors φ est *Gâteaux-différentiable* au point u s'il existe un élément $\nabla\varphi(u) \in X$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} = (\nabla\varphi(u), v)_X \quad \forall v \in X. \quad (1.7)$$

L'élément $\nabla\varphi(u)$ qui satisfait (1.7) est unique et s'appelle le gradient de φ en u . La fonction $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite Gâteaux-différentiable si elle est Gâteaux-différentiable en tout point de X . Dans ce cas, l'opérateur $\nabla\varphi : X \rightarrow X$ qui associe chaque élément $u \in X$ par l'élément $\nabla\varphi(u)$ est appelé l'opérateur gradient de φ .

La convexité des fonctions Gâteaux-différentiables peut être caractérisée comme suit.

Proposition 3 Soit $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ un espace préhilbertien et soit $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Gâteaux-différentiable. Les énoncés suivants sont équivalents:

(i) φ est une fonction convexe;

(ii) φ satisfait l'inégalité

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq (\nabla\varphi(u), v - u)_X \quad \forall u, v \in X; \quad (1.8)$$

(iii) le gradient de φ est un opérateur monotone

$$(\nabla\varphi(u) - \nabla\varphi(v), u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X. \quad (1.9)$$

Soit $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ un espace préhilbertien et soit $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et Gâteaux-différentiable. Alors φ est semi-continue inférieurement.

Définition 22 Soit $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ et soit $u \in X$. Le sous-différentiel de φ en u est l'ensemble

$$\partial\varphi(u) = \{f \in X : \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X\}. \quad (1.10)$$

On note

$$D(\partial\varphi) = \{u \in X : \partial\varphi(u) \neq \emptyset\}. \quad (1.11)$$

La Fonction φ est dite sous-différentiable en $u \in X$ si $u \in D(\partial\varphi)$, et chaque élément $f \in \partial\varphi(u)$ s'appelle sous-gradient de φ en u . La fonction φ est dite sous-différentiable si elle est sous-différentiable en tout point de X , c'est-à-dire si $D(\partial\varphi) = X$.

On peut montrer qu'une fonction $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ sous-différentiable est convexe et semi-continue inférieurement. En outre, pour les fonctions convexes, le lien entre l'opérateur gradient et sous-différentiel est donné par le résultat suivant.

Proposition 4 Soit $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et Gâteaux différentiable. Alors φ est sous-différentiable et $\partial\varphi(u) = \{\nabla\varphi(u)\}$ pour tout $u \in X$.

Exemple 1.2. (Sous-différentiel de la fonction indicatrice) Soit X un espace normé réel et soit $K \subset X$ un ensemble convexe. Considérons le sous-différentiel de la fonction d'indicateur ψ_K définie dans l'exemple 1.1, et on suppose que $u \in K$. Alors $u' \in \partial\psi_K$ si et seulement si

$$\psi_K(u) \geq \langle u', v - u \rangle \quad \forall v \in K,$$

c'est-à-dire

$$\langle u', v - u \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K.$$

Ainsi, pour $u \in K$ nous avons

$$\partial\psi_K(u) = \{u' \in X' : \langle u', v - u \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K\},$$

et pour $u \notin K$, nous avons $\partial\psi_K(u) = \emptyset$.

Nous avons toujours $0 \in \partial\psi_K(u)$ pour $u \in K$. On voit facilement que si $u \in \text{int}(K)$ (l'intérieur de K) alors $\partial\psi_K(u) = \{0\}$.

Rappels sur les Inéquations Variationnellesⁱⁱ

Dans ce chapitre, nous passons en revue quelques résultats standards d'existence et d'unicité pour des inéquations variationnelles elliptiques et paraboliques et des équations différentielles ordinaires dans des espaces abstraits. Ces résultats seront nécessaires dans ce qui suit et pour plus de détail [18], [20], [27]–[28] et [44]. Dans ce chapitre, X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et la norme associée $|\cdot|_X$.

1.6 Inéquations variationnelles elliptiques

Dans cette section nous présentons des résultats d'existence et d'unicité des solutions concernant les inéquations variationnelles elliptiques avec des opéra-

ⁱⁱ Encadreur: Pr. Selmani Lynda, Soutenue par Latreche Soumia., UNIVERSITE FERHAT ABBAS-SÉTIF, THÈSE, Présentée à la Faculté des Sciences Département de Mathématiques Pour l'obtention du diplôme de DOCTORAT LMD Option : Mathématiques appliquées, Thème: Analyse variationnelle de différents problèmes aux limites en mécanique du contact, year (2018).

teurs monotones. Nous commençons par un résultat d'existence et d'unicité pour les inéquations variationnelles elliptiques de première espèce, puis nous passons aux équations variationnelles elliptiques de deuxième espèce.

1.6.1 Inéquations variationnelles de première espèce

Étant donné un opérateur $A : X \rightarrow X$, un sous-ensemble $K \subset X$ et un élément $f \in X'$, nous considérons le problème de trouver un élément u tel que

$$u \in K, \quad A(u, v - u) \geq f(v - u) \quad \forall v \in K. \quad (1.12)$$

Une inéquation de la forme (1.12) s'appelle *inéquation variationnelle elliptique de première espèce*.

Nous avons le résultat standard suivant d'existence et d'unicité de la solution.

Théorème 3 *Soit X un espace de Hilbert et soit $K \subset X$ un sous-ensemble fermé non vide et convexe. Supposons que $A : K \rightarrow X$ est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors, pour tout $f \in X$ l'inéquation variationnelle (1.12) admet une solution unique.*

Supposons maintenant que $K = X$. Puis, en prenant $v = u \pm w$, il est facile de voir que l'inéquation variationnelle (1.12) est équivalente à l'équation variationnelle

$$(Au, w)_X = (f, w)_X \quad \forall w \in X.$$

Nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant dans l'étude des équations non linéaires impliquant des opérateurs monotones.

Théorème 4 *Soit X un espace de Hilbert et soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors pour tout $f \in X$ il existe un élément unique $u \in X$ tel que $Au = f$.*

1.6.2 Inéquations variationnelles de deuxième espèce

Étant donné un ensemble $K \subset X$, un opérateur $A : K \rightarrow X$, une fonction $j : K \rightarrow \mathbb{R}$ et un élément $f \in X$, nous considérons le problème de trouver un élément u tel

que

$$u \in K, \quad A(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq f(v - u) \quad \forall v \in K. \quad (1.13)$$

Une inéquation variationnelle de la forme (1.13) est appelée *inéquation variationnelle elliptique de deuxième espèce*. Dans le cas particulier lorsque $j \equiv 0$, l'inéquation variationnelle (1.13) représente une inéquation variationnelle de la forme (1.12), c'est-à-dire une inéquation variationnelle elliptique de première espèce.

Dans l'étude de (1.13) nous supposons les hypothèses suivantes:

$$K \text{ est un sous-ensemble convexe non vide de } X, \quad (1.14)$$

$A : K \rightarrow X$ est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz, c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) Il existe une constante } m > 0 \text{ telle que} \\ \quad A(u, v - u) - A(v, u - v) \geq m|u - v|^2 \quad \forall u, v \in X. \\ \text{b) Il existe une constante } M > 0 \text{ telle que} \\ \quad |Au - Av|_X \leq M|u - v|_X \quad \forall u, v \in X. \end{array} \right. \quad (1.15)$$

$$j : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ est une fonction convexe et semi-continue inférieurement.} \quad (1.16)$$

Le résultat principal de cette sous-section est le suivant.

Théorème 5 *Soit X un espace de Hilbert et supposons que les hypothèses (1.14)-(1.16) sont vérifiées. Alors pour tout $f \in X$ l'inéquation variationnelle elliptique (1.13) admet une solution unique.*

Part II

PROBLÈMES ÉLECTRO-
ÉLASTIQUE ET ÉLECTRO-
VISCOÉLASTIQUE

2

ÉTUDE ET ANALYSE D'UN PROBLÈME ANTIPLANS ÉLECTRO-ÉLASTIQUE

DANS le chapitre intitulé “**Étude et analyse d’un problème antiplans électro-élastique**”, on considère un modèle mathématique qui décrit un phénomène électro-mécanique qui se conclut par une déformation d’un cylindre en contact avec frottement. Dans ce chapitre, on considère que le matériel est électro-élastique, le processus est statique, le frottement est modélisé par la loi de Tresca et, la fondation est connectée à un champ électrique. Ensuite, nous dérivons la formulation variationnelle qui sera notée par la suite $P_3^{\text{électro-élastique}}$ ou bien $P_6^{\text{électro-élastique}}$ pour le problème régularisé de ce modèle qui est sous la forme d’un système couplé en premier temps; d’une inéquation variationnelle d’évolution pour le champ des déplacements $u(\cdot)$ avec une équation variationnelle pour le champ électrique $\varphi(\cdot)$. Finalement, nous prouvons l’existence et l’unicité de la solution faible pour ce modèle. La démonstration est basée sur les arguments des inéquations variationnelles d’évolution et quelques propriétés des opérateurs linéaires et non-linéaires.

Table des matières

Chapitre 2: Étude et analyse d’un problème antiplans électro-élastique

2.1 Problème électro-élastique

2.1.1 Introduction

2.2 Cadre physique

2.3 Modèle mathématique

2.4 Hypothèses et formulation variationnelle

2.4.1 Quelques hypothèses

2.4.2 Formulation variationnelle

2.5 Un résultat d'existence et d'unicité

2.6 Formulation variationnelle et quelques résultats

2.6.1 Formulation variationnelle

2.6.2 Quelques résultats

2.7 Simulation numérique

2.8 Conclusion et perspectives

2.1 Problème électro-élastique

2.1.1 Introduction

Dans cette section du deuxième chapitre de la deuxième partie de cette thèse, nous considérons un problème purement électro-mécanique pour un matériel électro-élastique. Nous écrivons en premier lieu, le cadre physique associé à ce genre des problèmes. Ensuite, nous faisons une description détaillée des hypothèses de base et des équations dans le contexte antiplans piézoélectrique associées aux points suivants :

- Le champ des contraintes σ ,
- L'opérateur d'élasticité linéaire $\mathcal{F}(\varepsilon(u))$,
- L'équation d'équilibre,
- Le champ des déplacements électriques \mathbf{D} ,
- L'équation électrique,
- La description des diverses conditions sur la surface de contact.

Au début de cette section, on considère que le matériel est électro-élastique avec des conditions aux limites avec frottement de Tresca. Puis, on commence cette étude par donner la formulation du problème. Ensuite, on indique la formulation variationnelle (ou faible) associée au problème posé à l'étude. Finalement, nous établissons les résultats d'existence et d'unicité en se basant sur la théorie des inéquations variationnelles et quelques propriétés des opérateurs linéaires et non-linéaires. La rédaction de cette section s'inspire de

l'article M. Dalah et al., *An Antiplane Electro-Elastic Contact Problem: Case Regularized Friction Law*, : *Int. J. of Dynamical Systems and Differential (IJDS)*, (2018), <http://www.inderscience.com/>.¹

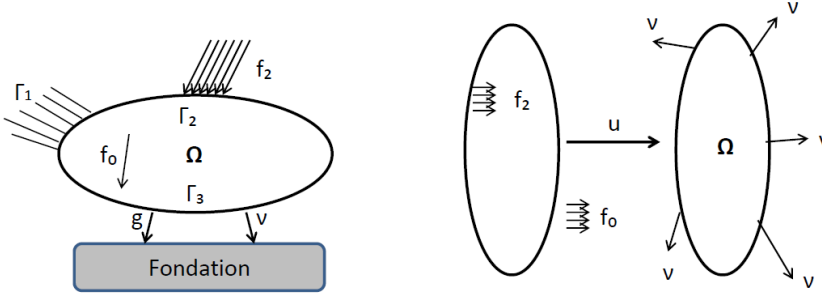
Dans ce chapitre nous décrivons dans la deuxième section le cadre physique et nous présentons le problème électro-élastique considéré. À la troisième section, nous modélisons le problème continu de notre phénomène électro-mécanique. À la quatrième section, nous listons les hypothèses et nous dérivons la formulation variationnelle de ce modèle qui est sous la forme d'un système couplé en premier temps; d'une inéquation variationnelle d'évolution pour le champ des déplacements avec une équation variationnelle pour le champ électrique. À la dernière section, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution faible pour ce modèle. La démonstration est basée sur les arguments des inéquations variationnelles d'évolution et quelques propriétés des opérateurs linéaires et non-linéaires.

2.2 Cadre physique

Dans la deuxième section intitulé "Cadre physique et requis" du chapitre 2, nous considérons un corps cylindrique \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 , rapporté dans le repère orthogonal cartésien $Ox_1x_2x_3$, situé dans une configuration d'origine fixe et non déformée. Nous admettons que les génératrices de ce cylindre \mathcal{B} sont parallèles à l'axe Ox_3 . Sa coupe transversale est un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$; repéré dans le plan (Ox_1x_2) . Le corps cylindrique est supposé suffisamment long afin de négliger les effets dans la direction axiale. Nous pouvons alors écrire que $\mathcal{B} = \Omega \times (-\infty, +\infty)$.

Notons $\partial\Omega = \Gamma$ la frontière du domaine Ω , divisée en trois parties disjointes et mesurables Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 avec $mes \Gamma_1 > 0$. Le cylindre est bloqué sur la partie $\Gamma_1 \times (-\infty, +\infty)$, subit à la fois des forces volumiques f_0 dans \mathcal{B} et des forces surfaciques f_2 sur $\Gamma_2 \times (-\infty, +\infty)$ et est en contact avec une fondation tout au long de la partie $\Gamma_3 \times (-\infty, +\infty)$. Nous supposons une deuxième partition de la frontière Γ sous la forme $\Gamma = \Gamma_a \cup \Gamma_b$ telle que $\Gamma_3 \subset \Gamma_b$ et $mes \Gamma_a > 0$.

¹**Publication1***[31-a]–M. Dalah et al., *An Antiplane Electro-Elastic Contact Problem: Case Regularized Friction Law*, : *Int. J. of Dynamical Systems and Differential (IJDS)*, (2018), <http://www.inderscience.com/>



Le contact est en frottement et de plus, il est modélisé par la loi de Tresca. Nous supposons que les forces volumiques f_0 dans \mathcal{B} et les forces surfaciques f_2 sur $\Gamma_2 \times (-\infty, +\infty)$ sont de la manière suivante :

$$\mathbf{f}_0 = (0, 0, f_0) \text{ avec } f_0 = f_0(x_1, x_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{f}_2 = (0, 0, f_2) \text{ avec } f_2 = f_2(x_1, x_2) : \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Nous supposons que le corps \mathcal{B} est soumis à des charges volumiques de densité q_0 appliquées sur la frontière Γ_a et des charges surfaciques de densité q_2 appliquées sur la frontière Γ_b sont de la manière suivante :

$$\mathbf{q}_0 = q_0(x_1, x_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{q}_2 = q_2(x_1, x_2) : \Gamma_b \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Ensuite, nous supposons que les deux forces f_0 et f_2 définies par les relations (2.1) et (2.2) et les charges q_0 et q_2 définies par les formules (2.3) et (2.4) engendrent une déformation sur le cylindre avec un déplacement \mathbf{u} , et donc le champ de déplacements \mathbf{u} , appelé déformation antiplane, s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{u} = (0, 0, u) \text{ avec } u = u(x_1, x_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Le potentiel électrique $\varphi(\cdot)$ est défini par :

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Par conséquent, en utilisant (2.5) il résulte que dans le cas antiplans, le tenseur de contraintes $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ peut se mettre sous la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{13} \\ 0 & 0 & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

tel que

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Par ailleurs rappelons la définition du champ électrique

$$\mathbf{E}(\varphi) = -\nabla(\varphi), \quad (2.8)$$

dont $\nabla(\varphi)$ est un vecteur de trois composantes tel que

$$\nabla(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi_{,1} \\ \varphi_{,2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Dans toute la suite, les deux indices $i, j = 1, 2, 3$ désignent les composantes des vecteurs des tenseurs.

On utilise l'espace S^3 qui représente l'espace linéaire des tenseurs symétriques du second ordre dans l'espace \mathbb{R}^3 , et (\cdot, \cdot) , $\|\cdot\|$ représentent le produit scalaire et la norme Euclidienne dans les deux espaces \mathbb{R}^3 et S^3 respectivement; on a donc :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v_i, \quad \|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{1/2} \text{ pour tout } \mathbf{u} = (u_i), \mathbf{v} = (v_i) \in \mathbb{R}^3,$$

et

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} = \sigma_{ij} \tau_{ij}, \quad \|\boldsymbol{\tau}\| = (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau})^{1/2} \text{ pour tout } \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}), \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) \in S^3.$$

Dans le cas électro-élastiqueⁱⁱ, on sait que le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ est donné par:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{L}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) - \mathcal{E}^* \mathbf{E}(\varphi), \quad (2.10)$$

tel que $\mathcal{L}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) = \lambda(\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \mathbf{Id} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ est le tenseur des coefficients élastiques et par $\mathbf{D} = (D_i)$ le champ électrique des déplacements défini par :

$$\mathbf{D} = \mathcal{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \beta \mathbf{E}(\varphi), \quad (2.11)$$

ⁱⁱM. Sofonea, M. Dalah, Antiplane Frictional Contact of Electro-Viscoelastic Cylinders, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2007(2007), No. 161, pp. 114.

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}))$ est le tenseur des déformations, $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ les constantes de Lamé, β le coefficient de permittivité électrique et \mathbf{Id} le tenseur unité de \mathbb{R}^3 .

Ensuite, nous supposons que le tenseur électrique noté \mathcal{E} d'ordre trois défini de l'espace S^3 et prend des valeurs dans \mathcal{R}^3 tel que

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{pmatrix} e(\varepsilon_{13} + \varepsilon_{31}) \\ e(\varepsilon_{23} + \varepsilon_{32}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{ij}) \in \mathcal{S}^3, \quad (2.12)$$

où e est le coefficient piezoelectrique. Souvent, nous supposons que les coefficients μ , β et e dépendent des variables spatiales x_1 , x_2 , et ne dépendent pas de la variable spatial x_3 .

De plus $\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathcal{E}^* \mathbf{v}$ pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in S^3$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Soit l'opérateur adjoint que l'on note \mathcal{E}^* qui est aussi d'ordre trois défini de l'espace S^3 , et en tenant compte de (2.12), on obtient donc

$$\mathcal{E}^*(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ev_1 \\ 0 & 0 & ev_2 \\ ev_1 & ev_2 & ev_3 \end{pmatrix} \quad \forall \mathbf{v} = (v_i) \in \mathbb{R}^3. \quad (2.13)$$

En effet, il est facile de vérifier que l'égalité $\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathcal{E}^* \mathbf{v}$ est toujours satisfaite.

En remplaçant (2.13) dans (2.10) on obtient :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu u_{,1} \\ 0 & 0 & \mu u_{,2} \\ \mu u_{,1} & \mu u_{,2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & e\varphi_{,1} \\ 0 & 0 & e\varphi_{,2} \\ e\varphi_{,1} & e\varphi_{,2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

et donc

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu u_{,1} + e\varphi_{,1} \\ 0 & 0 & \mu u_{,2} + e\varphi_{,2} \\ \mu u_{,1} + e\varphi_{,1} & \mu u_{,2} + e\varphi_{,2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Nous rappelons que l'équation d'équilibre est donnée par l'expression mathématique suivante :

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0},$$

où $\text{Div } \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij,j})$ représente la divergence concernant le champ du tenseur $\boldsymbol{\sigma}$.

Par la suite, et en tenant compte des relations précédentes, il vient que :

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (2.16)$$

$$\sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (2.17)$$

et

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} + f_0 = 0 \text{ dans } \Omega. \quad (2.18)$$

En utilisant (2.15) nous remarquons que les équations (2.16) et (2.17) sont identiquement, par ailleurs la relation (2.18) donne l'équation d'équilibre qui sera réduite sous la forme d'une équation scalaire:

$$\operatorname{div}(\mu \nabla u + e \nabla \varphi) + f_0 = 0, \text{ dans } \Omega, \quad (2.19)$$

On sait que le champ des déplacements électriques \mathbf{D} est donné par

$$\mathbf{D} = \mathcal{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \beta \mathbf{E}(\varphi), \quad (2.20)$$

Nous remplaçons maintenant $\mathcal{E} \boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ dans (2.20) pour obtenir

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} e u_{,1} - \beta \varphi_{,1} \\ e u_{,2} - \beta \varphi_{,2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Maintenant, nous tournons vers l'équation électrique définie par :

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = q_0. \quad (2.22)$$

Ensuite, et après un simple calcul, nous obtenons donc

$$D_{1,1} + D_{2,2} + D_{3,3} - q_0 = 0, \quad (2.23)$$

et donc l'équation électrique s'écrit sous la forme scalaire comme suit :

$$\operatorname{div}(e \nabla u - \beta \nabla \varphi) = q_0. \quad (2.24)$$

Soit \mathbf{v} désigne la normale unitaire sur $\Gamma \times (-\infty, +\infty)$. Nous avons

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, 0) \text{ avec } v_i = v_i(x_1, x_2) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2. \quad (2.25)$$

Notation 1.

Pour le vecteur \mathbf{v} on désigne par v_ν et \mathbf{v}_τ les composantes normale et tangentielle sur la frontière, définit par :

$$v_\nu = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{v}_\tau = \mathbf{v} - v_\nu \mathbf{n}, \quad (2.26)$$

respectivement.

Dans (2.26) et dans le reste de ce chapitre on note par (\cdot, \cdot) le produit scalaire sur l'espace \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$). De plus, pour le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ on désigne par σ_ν et $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ la composante normale et la composante sur la frontière, avec

$$\sigma_\nu = (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \sigma_\nu \mathbf{n}. \quad (2.27)$$

Notation 2.

Dans ce qui suit, nous utilisons les notations :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = \tau_{1,1} + \tau_{2,2} \text{ dans } \boldsymbol{\tau} = (\tau_1(x_1, x_2), \tau_2(x_1, x_2))$$

et

$$\nabla u = (u_{,1}, u_{,2}), \quad \partial_\nu u = u_{,1} \nu_1 + u_{,2} \nu_2 \text{ pour } u_i = u_i(x_1, x_2).$$

Alors le vecteur des contraintes de Cauchy adopte une forme particulière dans le cas des problèmes antiplans :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi \end{pmatrix} \text{ sur } \Gamma_2, \quad (2.28)$$

où la notation $\partial_\nu u$ et $\partial_\nu \varphi$ désigne respectivement la dérivée normale par rapport à u et se définit par $\partial_\nu u = u_{,1} \nu_1 + u_{,2} \nu_2$ et $\partial_\nu \varphi = \varphi_{,1} \nu_1 + \varphi_{,2} \nu_2$. Nous pouvons réécrire la condition aux limites :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}_2 \text{ sur } \Gamma_2, \quad (2.29)$$

de la manière suivante :

$$\mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi = f_2 \text{ sur } \Gamma_2. \quad (2.30)$$

Nous tournons maintenant vers l'équation :

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = q_2 \text{ sur } \Gamma_b, \quad (2.31)$$

ceci est équivalent à l'écriture matricielle suivante :

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} eu_{,1} - \beta\varphi_{,1} \\ eu_{,2} - \beta\varphi_{,2} \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b, \quad (2.32)$$

ce qui donne à la fin

$$e\partial_v u - \beta\partial_v \varphi = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b. \quad (2.33)$$

Maintenant, nous voulons d'écrire les conditions aux bords (sur la frontière). Les déplacements étant bloqués sur la frontière $\Gamma_1 \times (-\infty, +\infty)$ et le potentiel électrique devient nul sur $\Gamma_a \times (-\infty, +\infty)$; alors, (2.5) et (2.6) impliquent que:

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad (2.34)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a. \quad (2.35)$$

Conditions aux limites avec frottement

Nous tournons maintenant vers la description des diverses conditions sur la surface de contact. Pour les décrire nous dénotons par u_v et \mathbf{u}_τ la composante normale et la composante tangentielle du champ des déplacements \mathbf{u} respectivement sur le bord données par $\mathbf{u}_\tau = \mathbf{u} - u_v \mathbf{v}$ et $u_v = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

Maintenant, nous décrivons la condition de contact frottant et la condition électrique sur la partie $\Gamma_3 \times (-\infty, +\infty)$. En utilisant les formules (2.5) et (2.26) on obtient :

$$\mathbf{u}_\tau = (0, 0, u), \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = (0, 0, \sigma_\tau). \quad (2.36)$$

Sachant que \mathbf{v} représente le vecteur unitaire normale sur Γ et dans le contexte antiplans on peut écrire

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, 0). \quad (2.37)$$

Ensuite, de l'équation (2.5) et de la relation (2.26) on déduit que :

$$u_v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (2.38)$$

Il convient de dire que l'égalité $u_v = 0$ signifie que le contact est bilatéral, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de séparation entre le corp et la fondation, ceci nous conduit à affirmer que le contact est maintenu durant tout le processus. Par la suite, nous rappelons que la composante normale σ_v et la composante tangentielle $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ sont données par $\sigma_v = (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$, $\boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{v} - \sigma_v \mathbf{v}$.

Par la suite, nous obtenons :

$$\sigma_\nu = 0, \quad (2.39)$$

et donc

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}. \quad (2.40)$$

Remarque.

Il est aisé de dire que l'égalité (2.39) nous montre que la contrainte normale est nulle sur la région de contact durant le processus; alors, le vecteur de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}$ sera réduit à la composante tangentielle $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ et ceci d'après la deuxième égalité (2.40). Finalement on déduit que :

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = (0, 0, \sigma_\tau), \quad (2.41)$$

où

$$\sigma_\tau = \mu\partial_\nu u + e\partial_\nu \varphi. \quad (2.42)$$

Remarque.

Si la loi constitutive est électro-viscoélastique, le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ est donné par

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \theta\dot{u}_{,1} + \mu u_{,1} + e\varphi_{,1} \\ 0 & 0 & \theta\dot{u}_{,2} + \mu u_{,2} + e\varphi_{,2} \\ \theta\dot{u}_{,1} + \mu u_{,1} + e\varphi_{,1} & \theta\dot{u}_{,2} + \mu u_{,2} + e\varphi_{,2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

On suppose que le frottement est invariant le long de l'axe Ox_3 et de plus, il est modélisé par la loi statique de frottement de Tresca:

$$\begin{cases} |\boldsymbol{\sigma}_\tau| \leq g, \\ \boldsymbol{\sigma}_\tau = -g \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \text{ si } \mathbf{u} \neq 0 \text{ sur } \Gamma_3. \end{cases} \quad (2.44)$$

Ici $g: \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction donnée. Il suit que la loi de frottement (2.44) en sa forme scalaire peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} |\mu\partial_\nu u + e\partial_\nu \varphi| \leq g, \\ \mu\partial_\nu u + e\partial_\nu \varphi = -g \frac{u}{|u|} \text{ si } u \neq 0 \text{ sur } \Gamma_3. \end{cases} \quad (2.45)$$

Remarque.

Nous rappelons que la fonction g dans (2.45) est appelée seuil de frottement, et elle peut dépendre des variables du processus:

$$g = g(x) = g(x_1, x_2). \quad (2.46)$$

En conclusion, en réunissant les équations et les conditions aux limites ci-dessus, nous obtenons que dans un processus antiplansⁱⁱⁱ d'un corps électro-élastique, le champ des déplacements u et le potentiel électrique φ satisfont le problème $P1^{électro-élastique}$. Par conséquent, notre problème antiplans peut se formuler comme suit :

2.3 Modèle mathématique

Dans cette dernière partie, on considère un problème statique avec frottement de Tresca. Nous présentons une formulation variationnelle du problème pour laquelle, nous démontrons un résultat d'existence et d'unicité de la solution. Par conséquent, notre problème antiplans peut se formuler comme suit :

Problème $P1^{électro-élastique}$. Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et le potentiel électrique $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\operatorname{div}(\mu \nabla u + e \nabla \varphi) + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.47)$$

$$\operatorname{div}(e \nabla u - \beta \nabla \varphi) = q_0, \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.48)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad (2.49)$$

$$\mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2, \quad (2.50)$$

$$\begin{cases} |\sigma_\tau| \leq g, \\ \sigma_\tau = -g \frac{u}{|u|} \quad \text{si } u \neq 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \end{cases} \quad (2.51)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a, \quad (2.52)$$

$$e \partial_\nu u - \beta \partial_\nu \varphi = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b. \quad (2.53)$$

Remarque.

Nous notons que (2.47) et (2.48) représentent les équations d'équilibre, (2.49) représente la condition aux limites pour le champ des déplacements, (2.50) représente la condition aux limites de traction, (2.51) représente la version statique de la loi de frottement de Tresca, (2.52) la condition aux limites pour le potentiel électrique et (2.53) représente la condition aux limites pour les charges

ⁱⁱⁱM. Sofonea, M. Dalah, Antiplane Frictional Contact of Electro-Viscoelastic Cylinders^{iv}, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2007(2007), No. 161, pp. 114.

électriques. On note que le champ des déplacements u et le champ électrique φ qui résout le Problème $P1^{électro-élastique}$ sont connues, alors le tenseur des contraintes σ et le champ des déplacements électriques D peuvent s'obtenir par l'utilisation des lois (2.10) et (2.11), respectivement.

Formule de Green.

Théorème 6 Soit τ un élément dans $H^1(\Omega)^2$. Alors

$$\int_{\Omega} \tau \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\tau) \cdot v dx = \int_{\Gamma} \tau \cdot \nu da, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (2.54)$$

2.4 Hypothèses et formulation variationnelle

Dans cette section, nous citons quelques hypothèses ainsi que les notations utilisées par la suite. Ensuite, nous donnons la formulation variationnelle. Puis, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution faible du problème physique envisagé $P1^{électro-élastique}$. Pour cela, nous allons supposer les hypothèses ci-après.

2.4.1 Quelques hypothèses

Dans cette section, nous allons essayer de dériver la formulation variationnelle du problème précédent $P1^{électro-élastique}$. A cet effet, nous allons introduire les espaces suivants:

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) / \partial_i u \in L^2(\Omega), i = 1, 2\},$$

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\},$$

et

$$W = \{\psi \in H^1(\Omega) : \psi = 0 \text{ dans } \Gamma_b\}.$$

Remarque.

L'égalité $v = 0$ sur Γ_1 respectivement $\psi = 0$ sur Γ_b , est prise au sens des traces. Puisque l'opérateur trace est linéaire et continu, il est aisé de voir que l'espace V est un sous espace fermé de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$; et alors, V est

un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega)}$ et la norme associée $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, il en est de même pour l'espace W .

Il est bien connu que V et W sont des espaces réels de Hilbert muni du produit scalaire :

$$(u, v)_V = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall u, v \in V, \quad (\varphi, \psi)_W = \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, dx \quad \forall \varphi, \psi \in W.$$

De plus, la norme associée est de la forme :

$$\|v\|_V = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^2} \quad \forall v \in V, \quad \|\psi\|_W = \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)^2} \quad \forall \psi \in W, \quad (2.55)$$

qui sont toujours équivalentes sur V et W , respectivement, avec la norme usuelle $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. Par le théorème de trace de Sobolev on peut déduire qu'il existe deux constantes positives $c_V > 0$ et $c_W > 0$ telles que :

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c_V \|v\|_V \quad \forall v \in V, \quad \|\psi\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c_W \|\psi\|_W \quad \forall \psi \in W. \quad (2.56)$$

Hypothèses.

Pour étudier le problème $P1^{electro-élastique}$, on suppose que le coefficient de permittivité électrique vérifie :

$$\beta \in L^\infty(\Omega) \text{ et il existe } \beta^* > 0 \text{ tel que } \beta(\mathbf{x}) \geq \beta^* \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.57)$$

Souvent, on suppose que le coefficient de Lamé μ et le coefficient piézoélectrique e satisfont :

$$\mu \in L^\infty(\Omega) \text{ et il existe } \mu^* > 0 \text{ tel que } \mu(\mathbf{x}) > \mu^* \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.58)$$

$$e \in L^\infty(\Omega). \quad (2.59)$$

Les forces de tractions surfaciques et volumiques sont supposées avoir la régularité :

$$f_0 \in L^2(\Omega), \quad (2.60)$$

et

$$f_2 \in L^2(\Gamma_2). \quad (2.61)$$

Les densités des charges électriques satisfont aussi :

$$q_0 \in L^2(\Omega), \quad (2.62)$$

et

$$q_2 \in L^2(\Gamma_b). \quad (2.63)$$

De plus, la fonction seuil du frottement g vérifie la propriété :

$$g \in L^\infty(\Gamma_3) \quad \text{et} \quad g(x) \geq 0 \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3. \quad (2.64)$$

Finalement, on suppose que le potentiel électrique et le déplacement u sont de la forme :

$$\varphi \in L^2(\Gamma_3) \quad \text{et} \quad u \in L^2(\Gamma_3). \quad (2.65)$$

Maintenant, on définit la fonctionnelle j qui prend des valeurs dans \mathbb{R}_+ par la formule :

$$j(v) = \int_{\Gamma_3} g|v| da \quad \forall v \in V. \quad (2.66)$$

Souvent nous définissons les applications f et q , respectivement, par

$$(f, v)_V = \int_{\Omega} f_0 v dx + \int_{\Gamma_2} f_2 v da \quad \forall v \in V, \quad (2.67)$$

$$(q, \psi)_W = \int_{\Omega} q_0 \psi dx - \int_{\Gamma_b} q_2 \psi da \quad \forall \psi \in W, \quad (2.68)$$

La définition des opérateurs f et q sont basées sur le théorème de représentation de Riesz; de plus, il suit des hypothèses (2.60)-(2.61) et (2.62)-(2.63), que les intégrales précédentes sont bien définies et

$$f \in W^{1,2}(V), \quad (2.69)$$

$$q \in W^{1,2}(W). \quad (2.70)$$

Par la suite, on définit les formes bilinéaires $a_\mu : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $a_e : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$, et $a_\beta : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$, par les égalités :

$$a_\mu(u, v) = \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad (2.71)$$

$$a_e(u, \varphi) = \int_{\Omega} e \nabla u \cdot \nabla \varphi dx, \quad (2.72)$$

et

$$a_\beta(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \beta \nabla \varphi \cdot \nabla \psi dx \quad \text{pour tout } \varphi, \psi \in W. \quad (2.73)$$

Les hypothèses (2.71), (2.72) et (2.73) impliquent que les intégrales précédentes sont bien définies et, en utilisant la relation (2.55) et (2.56), il suit que les formes bilinéaires a_μ et a_e sont continues; de plus, les formes a_μ , a_e et a_β

sont symétriques et, la forme a_β est W -elliptique, alors on obtient :

$$a_\beta(\psi, \psi) \geq \beta^* \|\psi\|_W^2 \quad \forall \psi \in W. \quad (2.74)$$

2.4.2 Formulation variationnelle

Nous tournons maintenant vers la formulation variationnelle du problème $P1^{\text{électro-élastique}}$ et pour cela nous introduisons l'espace $X = V \times W$ défini par $X = \{(u, \varphi) \text{ tel que } u \in V \text{ et } \varphi \in W\}$.

La formulation variationnelle du **Problème** $P1^{\text{électro-élastique}}$ est basée sur le résultat suivant :

Lemme 1 *Si le couple (u, φ) désigne une solution lisse du problème $P1^{\text{électro-élastique}}$, alors on a $(u, \varphi) \in X$ et de plus on obtient :*

$$a_\mu(u, v - u) + a_e(\varphi, v - u) + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_V \quad \forall v \in V, \quad (2.75)$$

$$a_\beta(\varphi, \psi) - a_e(u, \psi) = (q, \psi)_W \quad \forall \psi \in W. \quad (2.76)$$

Preuve.

Nous supposons que le problème antiplans de contact piézoélectrique $P1^{\text{électro-élastique}}$ admet une solution (u, φ) régulière, et soit $(v, \psi) \in X$. Nous multiplions l'équation (2.47) par l'élément $(v - u) \in V$, de même pour l'équation (2.48) par l'élément $\psi \in W$ puis nous intégrons sur Ω et nous tenons compte de la formule de Green; nous obtenons directement le système couplé en premier temps; d'une inéquation variationnelle pour le champ des déplacements avec une équation variationnelle pour le champ électrique cité dans le lemme précédent.

Finalement, notre problème variationnel $P2^{\text{électro-élastique}}$ est donné explicitement par les relations suivantes :

Problème $P2^{\text{électro-élastique}}$. Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et le potentiel électrique $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$a_\mu(u, v - u) + a_e(\varphi, v - u) + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_V \quad \forall v \in V, \quad (2.77)$$

$$a_\beta(\varphi, \psi) - a_e(u, \psi) = (q, \psi)_W \quad \forall \psi \in W. \quad (2.78)$$

Dans cette section, nous donnons notre principal résultat portant sur l'existence et l'unicité de la solution faible des problème $P_2^{\text{électro-élastique}}$, ainsi que quelques éléments de démonstration de ce résultat. Alors, notre résultat d'existence et d'unicité sera donné explicitement dans la section suivante.

2.5 Un résultat d'existence et d'unicité

Quelques notations.

Maintenant, nous allons définir la nouvelle forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, la fonctionnelle $J(\cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}$ et le nouveau élément F comme suit :

$$a(x, y) = a_\mu(u, v) + a_\beta(\varphi, \psi) + a_e(\varphi, v) - a_e(u, \psi), \quad (2.79)$$

$$\forall x = (u, \varphi) \in X, \forall y = (v, \psi) \in X,$$

$$J(x) = j(u), \quad \forall x = (u, \varphi) \in X, \quad (2.80)$$

et

$$F = (f, q) \in X. \quad (2.81)$$

Si nous utilisons (2.79), (2.80) et (2.81) dans les relations (2.77) et (2.78) et cela en remplaçant l'élément ψ par l'élément $(\psi - \varphi)$ dans (2.78) et en faisant la somme avec (2.77) alors le problème précédent prend la nouvelle forme :

2.5.0 Problème $P_3^{\text{électro-élastique}}$

Problème $P_3^{\text{électro-élastique}}$. Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et le potentiel électrique $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$a(x, y - x) + J(y) - J(x) \geq (F, y - x)_X, \quad \forall y \in X. \quad (2.82)$$

Notre principal résultat concernant l'existence et l'unicité de la solution faible du problème $P_3^{\text{électro-élastique}}$ défini par (2.82) est le suivant.

Théorème 7 *Sous les hypothèses (2.57)-(2.74), alors le problème variationnel P_3 -électro-élastique admet une et une seule solution notée $(u, \varphi) \in V \times W$*

satisfait :

$$a(x, y - x) + J(y) - J(x) \geq (F, y - x)_X, \quad \forall y \in X. \quad (2.83)$$

Remarque .

On note que l'élément (u, φ) qui résout le problème $P3^{\text{électro-élastique}}$ est appelé solution faible du problème antiplans de contact avec frottement $\forall P1^{\text{électro-élastique}}$. On conclut par utilisation du théorème (7) que le problème antiplans de contact $P3^{\text{électro-élastique}}$ admet une et une seule solution à condition que les hypothèses (2.57)-(2.74) sont satisfaites.

La démonstration du théorème (7) est basée essentiellement sur la théorie des **inéquations variationnelles** et quelques **propriétés des opérateurs linéaires et non-linéaires**. La démonstration sera résumée dans quelques **étapes**. A cet effet, nous présentons une **version régularisée** de la loi de frottement.

Un problème statique avec une version régularisée.

Dans cette section, nous allons essayer de remplacer la loi de frottement suivante

$$\begin{cases} |\mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi| \leq g, \\ \mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi = -g \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \text{ if } \mathbf{u} \neq 0 \text{ on } \Gamma_3, \end{cases} \quad (2.84)$$

par une nouvelle **version régularisée** de la loi de frottement définie par :

$$\mu \partial_\nu u_\rho + e \partial_\nu \varphi_\rho = -g \frac{u_\rho}{\sqrt{u_\rho^2 + \rho^2}} \text{ on } \Gamma_3, \quad (2.85)$$

où ρ est le paramètre de régularisation.

En conclusion, en réunissant les équations et les conditions aux limites ci-dessus, nous obtenons que dans un processus antiplans d'un corps électro-élastique, le champ des déplacements $u_\rho(\cdot)$ et le potentiel électrique $\varphi_\rho(\cdot)$ satisfont le problème $P1^{\text{électro-élastique}}$. Par conséquent, notre problème antiplans peut se formuler avec la nouvelle **version régularisée** de la loi de frottement comme suit :

^vA. Megrous, A. Derbazi, M. Dalah., An Antiplane Electro-Elastic Contact Problem with Tresca's Friction Law, Journal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems (JARDCS), Volume 7, Issue 4, pp. 104–116, year (2015)

2.5.0 Problème $P_4^{\text{électro-élastique-régularisé}}$

Problème $P_4^{\text{électro-élastique}}$. Trouver le champ des déplacements $u_\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et le potentiel électrique $\varphi_\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\operatorname{div}(\mu \nabla u_\rho + e \nabla \varphi_\rho) + f_0 = 0, \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.86)$$

$$\operatorname{div}(e \nabla u_\rho - \beta \nabla \varphi_\rho) = q_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.87)$$

$$u_\rho = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad (2.88)$$

$$\mu \partial_\nu u_\rho + e \partial_\nu \varphi_\rho = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2, \quad (2.89)$$

$$\mu \partial_\nu u_\rho + e \partial_\nu \varphi_\rho = -g \frac{u_\rho}{\sqrt{u_\rho^2 + \rho^2}} \quad \text{sur } \Gamma_3, \quad (2.90)$$

$$\varphi_\rho = 0 \quad \text{dans } \Gamma_a, \quad (2.91)$$

$$e \partial_\nu u_\rho - \beta \partial_\nu \varphi_\rho = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b. \quad (2.92)$$

Dans la section qui suit, nous allons essayer de décrire la **nouvelle formulation variationnelle** du Problème $P_4^{\text{électro-élastique-régularisé}}$ qui sera notée par $P_5^{\text{électro-élastique-régularisé}}$ de la manière suivante :

2.6 Formulation variationnelle et quelques résultats

2.6.1 Formulation variationnelle

Sous les hypothèses (2.57)-(2.74) citées avant, la formulation variationnelle notée $P_5^{\text{électro-élastique-régularisé}}$ du problème $P_4^{\text{électro-élastique-régularisé}}$ est basée sur le lemme suivant :

Lemme 2 *Si (u_ρ, φ_ρ) dans l'espace produit $X = V \times W$ est une solution lisse du problème $P_4^{\text{électro-élastique-régularisé}}$, alors le présent couple (u_ρ, φ_ρ) satisfait :*

$$a_\mu(u_\rho, v - u_\rho) + a_e(\varphi_\rho, v - u_\rho) + j_\rho(v) - j_\rho(u_\rho) \geq (f, v - u_\rho)_V, \quad \forall v \in V, \quad (2.93)$$

$$a_\beta(\varphi_\rho, \Psi) - a_e(u_\rho, \Psi) = (q, \Psi)_X, \quad \forall \Psi \in W. \quad (2.94)$$

Preuve.

Soit le couple $(u_\rho, \varphi_\rho) \in X = V \times W$ qui désigne une solution lisse du problème $P_4^{\text{électro-élastique-régularisé}}$. En utilisant les mêmes arguments et hypothèses utilisées pour dériver la formulation variationnelle du problème $P_1^{\text{électro-élastique}}$ on dérive la formulation variationnelle du problème regularisé $P_4^{\text{électro-élastique-régularisé}}$ nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \mu \nabla u_\rho \cdot \nabla (v - u_\rho) dx + \int_{\Omega} e \nabla \varphi_\rho \cdot \nabla (v - u_\rho) dx = \quad (2.95)$$

$$\int_{\Omega} f_0 (v - u_\rho) dx + \int_{\Gamma} (\mu \partial_\nu u_\rho + e \partial_\nu \varphi_\rho) (v - u_\rho) da \quad \forall v \in V,$$

et d'après la relation (2.87) nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \beta \nabla \varphi_\rho \cdot \nabla \Psi dx - \int_{\Omega} e \nabla u_\rho \cdot \nabla \Psi dx = \\ \int_{\Gamma} (\mu \partial_\nu u_\rho - e \partial_\nu \varphi_\rho) \Psi da - \int_{\Omega} q_0 \Psi dx \quad \forall \Psi \in W. \end{aligned} \quad (2.96)$$

L'intégrale $\int_{\Gamma} (\mu \partial_\nu u_\rho + e \partial_\nu \varphi_\rho) (v - u_\rho) da$ définie dans (2.95), peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (\mu \partial_\nu u_\rho + e \partial_\nu \varphi_\rho) (v - u_\rho) da = \int_{\Gamma_1} (\mu \partial_\nu u_\rho + e \partial_\nu \varphi_\rho) (v - u_\rho) da + \\ \int_{\Gamma_2} (\mu \partial_\nu u_\rho + e \partial_\nu \varphi_\rho) (v - u_\rho) da + \int_{\Gamma_3} (\mu \partial_\nu u_\rho + e \partial_\nu \varphi_\rho) (v - u_\rho) da. \end{aligned} \quad (2.97)$$

En utilisant la condition (2.88) il est facile de remarquer que l'intégrale sur Γ_1 vaut zéro, c'est-à-dire :

$$\int_{\Gamma_1} (\mu \partial_\nu u_\rho + e \partial_\nu \varphi_\rho) (v - u_\rho) da = 0. \quad (2.98)$$

Et d'après (2.89) l'intégrale sur la frontière Γ_2 est donnée par :

$$\int_{\Gamma_2} (\mu \partial_\nu u_\rho + e \partial_\nu \varphi_\rho) (v - u_\rho) da = \int_{\Gamma_2} f_2 (v - u_\rho) da. \quad (2.99)$$

Finalement l'intégrale $\int_{\Gamma_3} (\mu \partial_\nu u_\rho + e \partial_\nu \varphi_\rho) (v - u_\rho) da$ sur la frontière Γ_3 peut être calculer comme suit :

Sachant que $(v^2 + u_\rho^2) \geq 2v.u_\rho$, alors on peut obtenir $(\rho^2 + u_\rho^2)(\rho^2 + v^2) \geq (\rho^2 + u_\rho v)^2$ et cela en rajoutant le terme $\rho^4 + u_\rho^2 v^2$ au deux côté de l'inégalité précédente. Nous avons donc :

$$u_\rho v \leq \sqrt{\rho^2 + v^2} \cdot \sqrt{\rho^2 + u_\rho^2} - \rho^2. \quad (2.100)$$

Maintenant en divisant l'inégalité sur $\sqrt{\rho^2 + u_\rho^2}$ et en rajoutant le terme u_ρ^2 ainsi qu'en multipliant par $-g$ les deux côté de l'inégalité nous obtenons :

$$\int_{\Gamma_3} -g \frac{u_\rho}{\sqrt{u_\rho^2 + \rho^2}} \cdot (v - u_\rho) da \geq \int_{\Gamma_3} g \cdot (\sqrt{\rho^2 + u_\rho^2} - \sqrt{\rho^2 + v^2}) da. \quad (2.101)$$

L'inégalité sur la frontière Γ_3 devient alors :

$$\int_{\Gamma_3} (\mu \partial_\nu u_\rho + e \partial_\nu \varphi_\rho) (v - u_\rho) da \geq \int_{\Gamma_3} g \cdot \sqrt{\rho^2 + u_\rho^2} da - \int_{\Gamma_3} g \cdot \sqrt{\rho^2 + v^2} da. \quad (2.102)$$

Posons

$$j_\rho(v) = \int_{\Gamma_3} g \cdot (\sqrt{\rho^2 + v^2} - \rho) da, \quad \forall v \in V, \quad (2.103)$$

alors l'équation (2.95) devient :

$$\int_{\Omega} \mu \nabla u_\rho \cdot \nabla (v - u_\rho) dx + \int_{\Omega} e \nabla \varphi_\rho \cdot \nabla (v - u_\rho) dx \geq \quad (2.104)$$

$$j_\rho(u_\rho) - j_\rho(v) + \int_{\Omega} f_0 (v - u_\rho) dx + \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot (v - u_\rho) da \quad \forall v \in V,$$

ce qui donne (2.93).

Remarque.

La même technique sera utilisée ici pour montrer (2.94).

Le lemme précédent 2 nous donne la nouvelle **formulation variationnelle** du problème régularisé :

2.6.1 Problème P5^{électro-élastique-régularisé}

Problème P5^{électro-élastique-régularisé}. Trouver le champ des déplacements u_ρ : $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et le potentiel électrique φ_ρ : $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$a_\mu(u_\rho, v - u_\rho) + a_e(\varphi_\rho, v - u_\rho) + j_\rho(v) - j_\rho(u_\rho) \geq (f, v - u_\rho)_V, \quad \forall v \in V, \quad (2.105)$$

$$a_\beta(\varphi_\rho, \psi) - a_e(u_\rho, \psi) = (q, \psi)_W, \quad \forall \psi \in W. \quad (2.106)$$

Notations:

- Soit l'espace produit $X=V \times W$.
- Soit x_ρ tels que $x_\rho = (u_\rho, \varphi_\rho) \in X$ et $y = (v, \psi) \in X$.
- Soit la fonctionnelle $J_\rho(\cdot)$ définie de l'espace X vers \mathbb{R} par :

$$J_\rho(u_\rho, \varphi_\rho) = j_\rho(u_\rho), \quad \forall u \in V \text{ et } \forall \varphi \in W. \quad (2.107)$$

- Soit la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ définie par :

$$a(x_\rho, y) = a_\mu(u_\rho, v) + a_\beta(\varphi_\rho, \psi) - a_e(u_\rho, \psi) + a_e(\varphi_\rho, v), \quad (2.108)$$

$$\forall x_\rho = (u_\rho, \varphi_\rho) \in X, \forall y = (v, \psi) \in X,$$

- Soit la fonction F définie par :

$$F = (f, q) \in V \times W. \quad (2.109)$$

Finallement, et en utilisant (2.107)-(2.109) dans les relations (2.105)-(2.106), alors nous obtenons une nouvelle version du problème $P5^{\text{électro-élastique-régularisé}}$ qui sera notée $P6^{\text{électro-élastique-régularisé}}$ et qui est définie par :

2.6.1	Problème $P6^{\text{électro-élastique-régularisé}}$
--------------	---

Problème $P6^{\text{électro-élastique-régularisé}}$. Trouver $x_\rho \in X$ tel que

$$a(x_\rho, y - x_\rho) + J_\rho(y) - J_\rho(x_\rho) \geq (F, y - x_\rho)_X, \quad \forall y \in X. \quad (2.110)$$

Nous déduisons du théorème 8 que l'inéquation variationnelle elliptique définie dans le problème $P3^{\text{électro-élastique}}$ admet une solution unique $x \in X$ et pour tout $\rho > 0$ l'inéquation variationnelle définie dans le problème $P6^{\text{électro-élastique-régularisé}}$ a aussi une solution unique $x_\rho \in X$.

Généralement la fonctionnelle $J_\rho(\cdot)$ est plus régulière que la fonctionnelle $J(\cdot)$ d'où l'inéquation variationnelle (2.110) est appelée l'inéquation variationnelle régularisée de l'inéquation variationnelle (2.82).

Considérons maintenant les hypothèses suivantes :

Il existe une fonction F telle que $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tel que

- (a) $|J_\rho(y) - J(y)| \leq F(\rho)$, $\forall y \in X$, pour tout $\rho > 0$.
- (b) $\lim F(\rho) = 0$ quand $\rho \rightarrow 0$.
- (c) $J_\rho(y) \geq 0$, $\forall y \in X$, et $J_\rho(0_X) = 0$, pour tout $\rho > 0$.
- (d) $J_\rho(y) \rightarrow J(y)$ quand $\rho \rightarrow 0$, $\forall y \in X$.
- (e) Pour toute suite $(y_\rho) \subset X$ tel que $y_\rho \rightarrow y \in X$, on a $\lim_{\rho \rightarrow 0} J_\rho(y_\rho) \geq J(y)$.

Nous avons le résultat de convergence suivant :

2.6.2 Quelques résultats

Théorème 8 *Sous les hypothèses (a), (b), (c), (d) et (e), la solution faible du problème $P_6^{\text{électro-élastique-régularisé}}$ notée $x_\rho = (u_\rho, \varphi_\rho) \in V \times W$ converge vers la solution faible $x = (u, \varphi)$ du problème $P_3^{\text{électro-élastique}}$ lorsque ρ tend vers 0, c'est-à-dire $x_\rho \rightarrow x$ dans X quand $\rho \rightarrow 0$.*

Pour démontrer le théorème précédent nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 3 *Soit la fonctionnelle $J_\rho(\cdot)$ définie par (2.107) pour tout $\rho > 0$ $J_\rho(\cdot)$ est convexe et Gateaux Différentiable. De plus, en supposant que $g(\cdot)$ définie par (2.64). Alors, pour tout $\rho > 0$ l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$|J_\rho(y) - J(y)| \leq \rho \int_{\Gamma_3} g da, \quad \forall y \in X. \quad (2.111)$$

Preuve.

Soit $\rho > 0$. Nous notons que pour tout $v \in V$ l'inégalité suivante est vérifiée :

$$|\sqrt{v^2 + \rho^2} - \rho - |v|| = \rho + |v| - \sqrt{v^2 + \rho^2} \leq \rho \text{ p.p. } \Gamma_3,$$

ce qui implique :

$$\int_{\Gamma_3} g |\sqrt{v^2 + \rho^2} - \rho - |v|| da \leq \rho \int_{\Gamma_3} g da.$$

En utilisant la définition de $J_\rho(\cdot)$ et $J(\cdot)$ on obtient :

$$|J_\rho(v) - J(v)| \leq \int_{\Gamma_3} g |\sqrt{v^2 + \rho^2} - \rho - |v|| da \leq \rho \int_{\Gamma_3} g da.$$

Nous concluons alors que l'inégalité (2.111) est satisfaite.

Preuve du théorème 9.

D'après la relation (2.107) et d'après la définition de la fonctionnelle $j(\cdot)$ et tenons compte de la définition de la fonction $F = (f, q) \in V \times W$ et l'inégalité (2.111), nous déduisons que $F(\rho) = \rho \cdot \int_{\Gamma_3} g \, da, \forall \rho > 0$.

Il est aisé de voir que $(u_\rho, \varphi_\rho)_{\rho>0}$ converge vers l'unique élément (u, φ) . Finalement, nous utilisons les lemmes 2 et 3, alors, nous confirmons que l'unique élément qui est la solution faible du problème régularisé converge vers la solution faible du problème $P_3^{\text{électro-élastique}}$, ce qui conclut la preuve du théorème (8).

2.7 Simulation numérique

Dans cette section, nous présentons les résultats de simulation pour un problème antiplans de contact avec frottement pour un matériel électro-élastique et qui est en contact avec une fondation rigide électrifiée. Le but étant dans un premier temps de vérifier à chaque fois les résultats numériques et graphiques pour le champ des déplacements $u(\cdot)$ et le champ électrique $\varphi(\cdot)$ selon la modification des valeurs numériques concernant les forces surfaciques et volumiques \mathbf{f}_0 et \mathbf{f}_2 respectivement, les charges électriques de densité volumiques et surfaciques \mathbf{q}_0 et \mathbf{q}_2 respectivement, le coefficient de Lamé, le coefficient de permittivité électrique β , le seuil de frottement g et le pas h . Nous

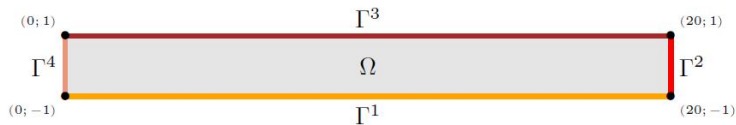


Figure de démarrage pour les valeurs $x_1=0$ $x_1=20$ et $x_2=-1$ au $x_2=1$

signalons ici que la matrice de rigidité du matériau isotrope élastique linéaire

contient deux paramètres E le module de Young ou le module d'élasticité et ν le coefficient de Poisson. Nous définissons aussi

σ : le tenseur de contraintes,

ε : le tenseur de déformations,

$u(\cdot)$: le champ de déplacements,

$\varphi(\cdot)$: le champ électrique.

Dans le cas électro-élastique^{vi}, on sait que le champ des contraintes σ est donné par:

$$\sigma = \lambda(\text{tr} \varepsilon(\mathbf{u}))\mathbf{I} + 2\mu\varepsilon(\mathbf{u}) - \mathcal{E}^* \mathbf{E}(\varphi), \quad (2.112)$$

et par $\mathbf{D} = (D_i)$ le champ électrique des déplacements défini par :

$$\mathbf{D} = \mathcal{E} \varepsilon(\mathbf{u}) + \beta \mathbf{E}(\varphi), \quad (2.113)$$

La contrainte plane est une condition qui prédomine dans une plaque plane dans le plan $Ox_1 - x_2$, chargée seulement dans son propre plan et sans restriction Ox_3 -direction. De plus, on suppose que les conditions isotropes, la loi de Hooke pour la contrainte plane donnent la relation contrainte suivante:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+2\nu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}. \quad (2.114)$$

Comme la matrice définie précédemment a un déterminant non-nul, alors on inverse le système linéaire précédent de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \quad (2.115)$$

On définit les valeurs numériques comme suit :

Le domaine Ω est subdivisé en trois parties disjointes Γ_1 , Γ_2 et, Γ_3 tel que $\Omega = [0, 24m] \times [0, 8m]$ et $\Gamma_1 = (\{0\} \times [0, 8]) \cup (\{24\} \times [0, 8])$, $\Gamma_2 = [0, 24] \times \{4\}$ et la dernière frontière $\Gamma_3 = [0, 24] \times \{0\}$. Pour la partie électrique, nous avons divisé la frontière Γ en deux sous parties $\Gamma_a = [0, 24] \times \{4\}$ et la deuxième frontière $\Gamma_b = (\{0\} \times [0, 8]) \cup (\{24\} \times [0, 8])$. Le module de Young $E = 21.10^3 Pa$ et $\nu = 0.25$. Nous avons pris les valeurs numériques pour les forces surfaciques et volumiques comme suit :

^{vi}M. Sofonea, M. Dalah, Antiplane Frictional Contact of Electro-Viscoelastic Cylinders, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2007(2007), No. 161, pp. 114.



Figure 1. Une discrétisation totale pour un pas $h=1/128$ et au moment $T=1s$

$\mathbf{f}_0=0 \text{ N/m}^3$ et $\mathbf{f}_2=(0, -4) \text{ N/m}^2$. Maintenant, les charges électriques de densité \mathbf{q}_0 et \mathbf{q}_2 sont donnés par $\mathbf{q}_0 = 0 \text{ C/m}^3$ et $\mathbf{q}_2 = 0 \text{ C/m}^2$. On a pris aussi $T = 1s$ et le seuil de frottement $g = 0.4m$. Finalement, et afin d'analyser les résultats numériques et graphiques en 2-D et en 3-D, nous supposons que la maille est fixée à $h = 1/128$.

Commentaire.

Dans cet exemple numérique, nous avons étudié les effets et l'influence de la conductivité électrique de la fondation sur le processus de contact. Au début, nous avons pris comme considération que la fondation est isolée et de plus, elle est en contact et aussi elle est électrisée. Nous remarquons qu'il n'y a pas de charges électriques sur Γ_3 . Les figures 1 et 2, nous montrent les configurations déformées et les forces de contact par frottement au temps différentes valeurs du temps $T = 0.5s$ et $T = 1s$.

2.8 Conclusion et perspectives

Conclusion.

En conclusion, dans cette dernière partie de la thèse, nous avons considéré

que le matériel est électro-élastique^{vii} avec des conditions aux limites et d'une loi de frottement de type de Tresca. Au premier point, dans l'étude de ce problème nous négligeons les termes d'inertie dans l'équation du mouvement ce qui nous conduit à un problème statique. Nous dérivons une formulation variationnelle qui est déjà notée par la suite $P_3^{\text{électro-élastique}}$ de ce modèle qui est sous la forme d'un système couplé en premier temps; d'une inéquation variationnelle elliptique pour le champ des déplacements $u(\cdot)$ avec une équation variationnelle pour le champ électrique $\varphi(\cdot)$. Pour ce problème variationnelle nous écrivons une forme régularisée, en remplaçant la fonctionnelle non différentiable par une fonctionnelle différentiable. Notre principal résultat porte sur l'existence et l'unicité de solutions faibles ainsi que le comportement de la solution faible du problème régularisée par rapport au paramètre ρ . La démonstration de ce résultat se déroule en diverses étapes que nous avons précisé par la suite, et qui est basée notamment sur des arguments relatifs aux inégalités variationnelles.

Perspectives.

Des résultats similaires de convergence seront étudiés dans les prochains travaux :

- Pour le cas électro-élastique avec mémoire courte
- Pour le cas électro-élastique avec mémoire longue

- Pour les lois de frottement de type :

$$\begin{cases} |\mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi| \leq g, \\ \mu \partial_\nu u + \partial_\nu \varphi = -g \frac{\dot{u}}{|\dot{u}|} \text{ si } \dot{u} \neq 0 \text{ sur } \Gamma_3. \end{cases} \quad (2.116)$$

- Pour les lois de frottement régularisées de type :

$$\mu \partial_\nu u_\rho + e \partial_\nu \varphi_\rho = -g \frac{u_\rho}{\sqrt{u_\rho^2 + \rho^2}} \text{ on } \Gamma_3. \quad (2.117)$$

^{vii}M. Sofonea, M. Dalah, Antiplane Frictional Contact of Electro-Viscoelastic Cylinders, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2007(2007), No. 161, pp. 114.

3

ÉTUDE ET ANALYSE D'UN PROBLÈME ANTIPLANS ÉLECTRO-VISCOÉLASTIQUE

DANS le chapitre intitulé “**Étude et analyse d’un problème antiplans électro-viscoélastique**” de la deuxième partie de la thèse, on considère un modèle mathématique qui décrit un phénomène purement électro-mécanique qui se conclut dans une déformation d’un cylindre en contact avec frottement. Le but de ce chapitre est l’étude et l’analyse d’un problème antiplans électro-viscoélastique de contact avec frottement, entre un corps déformable et une fondation électrifiée. Nous nous plaçons dans le cadre des déformations antiplanes et, nous étudions des processus quasistatiques pour des matériaux électro-viscoélastiques. Les résultats que nous obtenons concernent l’existence et l’unicité des solutions faibles.

Dans ce chapitre, nous considérons que le matériel est électro-viscoélastique, le processus est quasi-statique, le frottement est modélisé par la loi de Tresca et, la fondation est connectée par un champ électrique. Ensuite, nous dérivons la formulation variationnelle qui sera notée le long de cette thèse $p_2^{\text{électro-viscoélastique}}$ et, qui est sous la forme d’un système couplé en premier temps; d’une inéquation variationnelle d’évolution pour le champ des déplacements $u(\cdot)$ avec une équation variationnelle pour le champ électrique $\varphi(\cdot)$.

La structure de ce chapitre est la suivante. À la deuxième section, nous décrivons le cadre physique et nous présentons le problème électro-viscoélastique considéré. À la troisième section, nous modélisons le problème continu de notre phénomène électro-mécanique. À la quatrième section, nous listons les hypothèses et nous dérivons la formulation variationnelle de ce modèle qui est sous la forme d’un système couplé en premier temps; d’une inéquation variationnelle d’évolution pour le champ des déplacements avec une équation variationnelle pour le champ électrique. À la dernière section, et

finalement, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution faible pour ce modèle. La démonstration est basée sur les arguments des inéquations variationnelles d'évolution et quelques propriétés des opérateurs et la fonctions semi-convexes continues inférieurement.

Table des matières

Chapitre 3: Étude et analyse d'un problème antiplans électro-viscoélastique

3.1 Problème électro-viscoélastique

3.1.1 Introduction

3.2 Cadre physique et requis

3.3 Modèle mathématique

3.4 Hypothèses et formulation variationnelle

3.4.1 Quelques hypothèses

3.4.2 Formulation variationnelle

3.5 Un résultat d'existence et d'unicité

3.6 Formulation variationnelle et quelques résultats

3.6.1 Formulation variationnelle

3.6.2 Quelques résultats

3.7 Simulation numérique

3.8 Conclusion et perspectives

3.1 Problème électro-viscoélastique

Dans cette section de la deuxième partie de cette thèse, nous considérons un problème purement électro-mécanique pour un matériel électro-viscoélastique. Nous écrivons en premier lieu, le cadre physique associé à ce genre de problèmes. Ensuite, nous faisons une description détaillée des hypothèses de base et des équations dans le contexte antiplans piézoélectrique associées aux points suivants :

- La viscosité θ ,
- Le champ des contraintes σ ,
- L'opérateur d'élasticité linéaire $\mathcal{F}(\varepsilon(u))$,
- \mathcal{A} : Tenseur des coefficients viscoélastiques,

- L'équation d'équilibre,
- Le champ des déplacements électriques \mathbf{D} ,
- L'équation électrique,
- La description des diverses conditions sur la surface de contact.

Au début de cette section, on considère que le matériel est électro-viscoélastique avec des conditions aux limites avec frottement de Tresca. Puis, on commence cette étude par donner la formulation du problème. Ensuite, on indique la formulation variationnelle (ou faible) associée au problème posé à l'étude. Finalement, nous établissons les résultats d'existence et d'unicité en se basant sur la théorie des inéquations variationnelles et quelques propriétés des opérateurs linéaires et non-linéaires.

3.2 Cadre physique du modèle

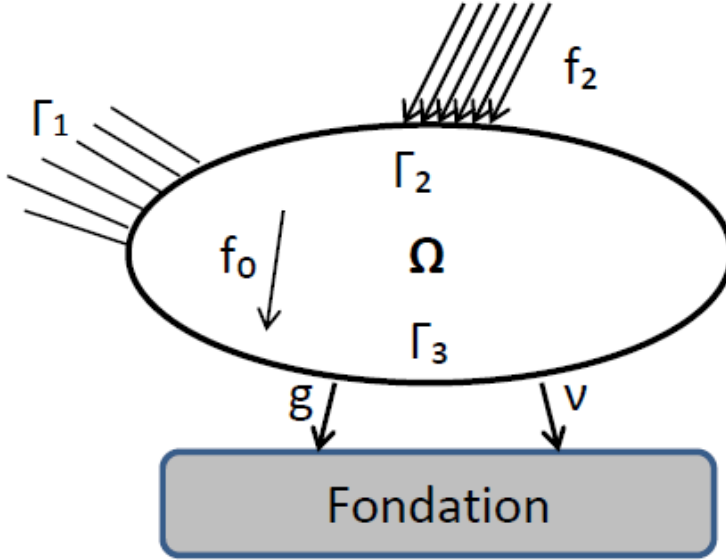
Dans la deuxième section intitulé "Cadre physique du modèle" du chapitre 3, nous considérons un corps cylindrique \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 , rapporté dans le repère orthogonal cartésien $Ox_1x_2x_3$, situé dans une configuration d'origine fixe et non déformée. Nous admettons que les génératrices de ce cylindre \mathcal{B} sont parallèles à l'axe Ox_3 . Sa coupe transversale est un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$; repéré dans le plan (Ox_1x_2) . Le corps cylindrique est supposé suffisamment long afin de négliger les effets dans la direction axiale. Nous pouvons alors écrire que $\mathcal{B} = \Omega \times (-\infty, +\infty)$. Notons $\partial\Omega = \Gamma$ la frontière du domaine Ω , divisée en trois parties disjointes et mesurables Γ_1, Γ_2 et Γ_3 avec $mes \Gamma_1 > 0$. Le cylindre est bloqué sur cette partie $\Gamma_1 \times (-\infty, +\infty)$, subit à la fois des forces volumiques \mathbf{f}_0 dans \mathcal{B} et des forces surfaciques \mathbf{f}_2 sur $\Gamma_2 \times (-\infty, +\infty)$ et est en contact avec une fondation tout au long de la partie $\Gamma_3 \times (-\infty, +\infty)$. Le contact est en frottement et de plus, il est modélisé par la loi de Tresca cité dans le chapitre 3. Nous supposons que les forces volumiques \mathbf{f}_0 dans \mathcal{B} et les forces surfaciques \mathbf{f}_2 sur $\Gamma_2 \times (-\infty, +\infty)$ sujettes au temps sont de la manière suivante :

$$\mathbf{f}_0 = (0, 0, f_0) \text{ avec } f_0 = f_0(x_1, x_2, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{f}_2 = (0, 0, f_2) \text{ avec } f_2 = f_2(x_1, x_2, t) : \Gamma_2 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Nous supposons une deuxième partition de la frontière Γ sous la forme $\Gamma = \Gamma_a \cup \Gamma_b$ telle que $\Gamma_3 \subset \Gamma_b$ et $mes \Gamma_a > 0$.

$$\mathbf{q}_0 = q_0(x_1, x_2, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.3)$$



$$\mathbf{q}_2 = q_2(x_1, x_2, t) : \Gamma_b \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

Ensuite, nous supposons que les deux forces \mathbf{f}_0 et \mathbf{f}_2 définies par les relations (3.1) et (3.2) et les charges \mathbf{q}_0 et \mathbf{q}_2 définies par les formules (3.3) et (3.4) engendrent une déformation sur le cylindre avec un déplacement \mathbf{u} , et donc le champ de déplacements \mathbf{u} , appelé déformation antiplane, s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{u} = (0, 0, u) \text{ avec } u = u(x_1, x_2, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

Le potentiel électrique $\varphi(\cdot)$ est défini par :

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

Par conséquent, en utilisant (3.5) il résulte que dans le cas antiplans, le tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ peut se mettre sous la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{13} \\ 0 & 0 & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Par ailleurs rappelons la définition du champ électrique

$$\mathbf{E}(\varphi) = -\nabla(\varphi), \quad (3.8)$$

dont $\nabla(\varphi)$ est un vecteur de trois composantes tel que

$$\nabla(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi_{,1} \\ \varphi_{,2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Dans le cas électro-viscoélastique, on sait que le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ est donné par:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi), \quad (3.10)$$

et par $\mathbf{D} = (D_i)$ le champ électrique défini par :

$$\mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \beta\mathbf{E}(\varphi), \quad (3.11)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}))$ est le tenseur des déformations, $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ sont les coefficients de Lamé, \mathbf{I} le tenseur unité de \mathbb{R}^3 et \mathcal{A} le tenseur des coefficients viscoélastiques.

3.3 Modélisation mathématique

Dans cette section intitulé "La modélisation mathématique", on considère un problème quasi-statique avec frottement de Tresca. Nous présentons une formulation variationnelle du problème pour laquelle, nous démontrons un résultat d'existence et d'unicité de la solution. Par conséquent, notre problème antiplans peut se formuler comme suitⁱ :

Problème *pélectro-viscoélastique*. Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et le potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\text{div}(\theta\nabla\dot{u}(t) + \mu\nabla u(t) + e\nabla\varphi) + f_0(t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (3.12)$$

$$\text{div}(e\nabla u(t) - \beta\nabla\varphi(t)) = q_0, \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (3.13)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0, T], \quad (3.14)$$

$$\theta\nabla\dot{u} + \mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times [0, T], \quad (3.15)$$

ⁱpour plus de détails voir chapitre 2

$$\begin{cases} |\boldsymbol{\sigma}_\tau| \leq g, \\ \boldsymbol{\sigma}_\tau = -g \frac{\dot{u}}{|\dot{u}|} \text{ si } \dot{u} \neq 0 \text{ sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_a \times [0, T], \quad (3.17)$$

$$e\partial_\nu u - \alpha\partial_\nu \varphi = q_2 \text{ sur } \Gamma_b \times [0, T]. \quad (3.18)$$

$$u(0) = u_0 \text{ dans } \Omega. \quad (3.19)$$

Remarque.

Le problème précédent peut s'écrire de la manière suivante :

Problème $P_1^{\text{électro-viscoélastique}}$. Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et le potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\text{div}(\theta \nabla \dot{u}(t) + \mu \nabla u(t) + e \nabla \varphi(t)) + f_0(t) = 0 \text{ dans } \Omega \times [0, T], \quad (3.20)$$

$$\text{div}(e \nabla u(t) - \beta \nabla \varphi(t)) = q_0, \text{ dans } \Omega \times [0, T], \quad (3.21)$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times [0, T], \quad (3.22)$$

$$\theta \nabla \dot{u} + \mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi = f_2 \text{ sur } \Gamma_2 \times [0, T], \quad (3.23)$$

$$\begin{cases} |\theta \nabla \dot{u}(t) + \mu \partial_\nu u(t) + e \partial_\nu \varphi(t)| \leq g, \\ \theta \nabla \dot{u}(t) + \mu \partial_\nu u(t) + e \partial_\nu \varphi(t) = -g \frac{\dot{u}(t)}{|\dot{u}(t)|} \text{ if } \dot{u} \neq 0 \text{ on } \Gamma_3 \times [0, T], \end{cases} \quad (3.24)$$

$$\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_a \times [0, T], \quad (3.25)$$

$$e\partial_\nu u - \alpha\partial_\nu \varphi = q_2 \text{ sur } \Gamma_b \times [0, T], \quad (3.26)$$

$$u(0) = u_0 \text{ dans } \Omega. \quad (3.27)$$

Remarque.

Nous notons que (3.20) et (3.21) représentent les équations d'équilibre, (3.22) représente la condition aux limites pour le champ des déplacements sur la frontière Γ_1 , (3.23) représente la condition aux limites de traction sur la frontière Γ_2 , (3.24) représente la version statique de la loi de frottement de Tresca sur la frontière Γ_3 , (3.25) la condition aux limites pour le potentiel électrique sur la frontière Γ_a et (3.26) représente la condition aux limites pour les charges électriques sur la frontière Γ_b . La condition $u(0) = u_0$ dans Ω représente la condition

initiale au moment $t = 0$. Par la suite, on note que le champ des déplacements u et le champ électrique φ qui résout le Problème $P1^{electro-viscoélastique}$ sont connues, alors le tenseur des contraintes σ et le champ des déplacements électriques \mathbf{D} peuvent être obtenus à partir des lois connuesⁱⁱ.

3.4 Quelques hypothèses

Dans cette section, nous citons quelques hypothèses ainsi que les notations utilisées par la suite. Ensuite, nous donnons la formulation variationnelle. Puis, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution faible du problème physique envisagé $P1^{electro-viscoélastique}$. Pour étudier le problème $P1^{electro-viscoélastique}$, nous aurons besoin de certaines hypothèses. A cet effet, nous allons introduire les espace suivants:

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}, \quad (3.28)$$

et

$$W = \{\psi \in H^1(\Omega) : \psi = 0 \text{ dans } \Gamma_b\}. \quad (3.29)$$

Remarque.

L'égalité $v = 0$ sur Γ_1 respectivement $\psi = 0$ sur Γ_b est prise au sens des traces. Puisque l'opérateur trace est linéaire et continu, il est facile de voir que l'espace V est un sous espace fermé de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$; et alors, V est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}$ et la norme associée $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, il en est de même pour l'espace W . De plus, il est bien connu que V et W sont des espaces réels de Hilbert muni du produit scalaire :

$$(u, v)_V = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall u, v \in V, \quad (3.30)$$

et

$$(\varphi, \psi)_W = \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, dx \quad \forall \varphi, \psi \in W. \quad (3.31)$$

De plus, les normes associées sont de la forme :

$$\|v\|_V = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^2} \quad \forall v \in V, \quad (3.32)$$

ⁱⁱAuthors: Mircea Sofonea and Andaluza Matei, Title of Book: Variational inequalities with applications. A study of antiplane frictional contact problems, Advances in machanics and mathematics, Springer, 2009 p.p. 1-230, Year of Publication: 2009.

et

$$\|\psi\|_W = \|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)^2} \quad \forall \psi \in W, \quad (3.33)$$

qui sont toujours équivalentes sur V et W , respectivement, avec la norme usuelle $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. En se basant sur le théorème de trace de Sobolev, on peut déduire qu'il existe deux constantes positives $c_V > 0$ et $c_W > 0$ telles que :

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c_V \|v\|_V \quad \forall v \in V, \quad (3.34)$$

et

$$\|\psi\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c_W \|\psi\|_W \quad \forall \psi \in W. \quad (3.35)$$

Pour l'espace réel $(X, \|\cdot\|_X)$ on utilise la notation usuelle pour l'espace $L^p(0, T; X)$ et $W^{k,p}(0, T; X)$ où $1 \leq p \leq \infty$, $k = 1, 2, \dots$; souvent, on note par $C([0, T]; X)$ l'espace des fonctions continues et les fonctions différentiables continues et à valeurs dans l'espace produit $X = V \times W$ défini précédemment, avec la norme :

$$\|x\|_{C([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|x(t)\|_X, \quad (3.36)$$

et on utilise les notations standard pour l'espace de Lebesgue $L^2(0, T; X)$ comme dans l'espace de Sobolev $W^{1,2}(0, T; X)$. En particulier, et par la suite, on peut déduire que la norme sur l'espace de $L^2(0, T; X)$ est donnée par la relation :

$$\|u\|_{L^2(0, T; X)}^2 = \int_0^T \|u(t)\|_X^2 dt. \quad (3.37)$$

Pour étudier le problème $P1^{électro-viscoélastique}$, on suppose que le coefficient de permittivité électrique vérifie :

$$\beta \in L^\infty(\Omega) \text{ et il existe } \beta^* > 0 \text{ tel que } \beta(\mathbf{x}) \geq \beta^* \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.38)$$

et la viscosité θ vérifie :

$$\theta \in L^\infty(\Omega) \text{ et il existe } \theta^* > 0 \text{ tel que } \theta(\mathbf{x}) \geq \theta^* \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.39)$$

Souvent, on suppose que le coefficient de Lamé μ et le coefficient piézoélectrique e satisfont :

$$\mu \in L^\infty(\Omega) \text{ et } \mu(\mathbf{x}) > 0 \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.40)$$

$$e \in L^\infty(\Omega). \quad (3.41)$$

Les forces de tractions et les forces volumiques sont supposées de la forme :

$$f_0 \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)), \quad (3.42)$$

et

$$f_2 \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Gamma_2)). \quad (3.43)$$

Les charges électriques surfaciques et volumiques satisfont :

$$q_0 \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)), \quad (3.44)$$

et

$$q_2 \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Gamma_b)). \quad (3.45)$$

La fonction seuil du frottement g vérifie la propriété :

$$g \in L^\infty(\Gamma_3) \quad \text{et} \quad g(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \quad (3.46)$$

Finalement, on suppose que le potentiel électrique et le déplacement initial sont de la forme :

$$\varphi \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Gamma_3)), \quad (3.47)$$

et

$$u(0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.48)$$

Maintenant, on définit la fonctionnelle $j : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ par la formule :

$$j(v) = \int_{\Gamma_3} g|v| da \quad \forall v \in V. \quad (3.49)$$

Nous désignons par $f : [0; T] \rightarrow V$ et par $q : [0, T] \rightarrow W$ les fonctions dont définitions sont basées sur la **représentation de Riesz**, données explicitement par

$$(f(t), v)_V = \int_{\Omega} f_0(t)v dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t)v da, \quad (3.50)$$

$$(q(t), \psi)_W = \int_{\Omega} q_0(t)\psi dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t)\psi da, \quad (3.51)$$

pour tout $v \in V, \psi \in W, t \in [0, T]$.

De plus, il suit des hypothèses (3.42)-(3.43) et (3.44)-(3.45) que les intégrales précédentes sont bien définies tel que

$$f \in W^{1,2}(0, T; V), \quad (3.52)$$

et

$$q \in W^{1,2}(0, T; W). \quad (3.53)$$

Ensuite, on définit les formes bilinéaires $a_\mu : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $a_\theta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $a_e : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ et $a_\beta : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$, par les égalités :

$$a_\mu(u, v) = \int_\Omega \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad (3.54)$$

$$a_\theta(u, v) = \int_\Omega \theta \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad (3.55)$$

$$a_e(u, \varphi) = \int_\Omega e \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx, \quad (3.56)$$

et

$$a_\beta(\varphi, \psi) = \int_\Omega \beta \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, dx \text{ pour tout } \varphi, \psi \in W. \quad (3.57)$$

Les hypothèses (3.42)-(3.43) et (3.44)-(3.45) impliquent que les intégrales précédentes sont bien définies et, en utilisant la relation (3.31) et (3.37), il suit que les formes bilinéaires a_μ , a_e et a_θ sont continues; de plus, les formes a_μ , a_β et a_e sont symétriques et, la forme a_β est W -elliptique, alors on obtient :

$$a_\beta(\psi, \psi) \geq \beta^* \|\psi\|_W^2 \quad \forall \psi \in W. \quad (3.58)$$

3.5 Formulation variationnelle du problème P1

La formulation variationnelle du **Problème P1^{électro-viscoélastique}** est basée sur le résultat suivant :

Lemme 4 *Si le couple $(u(t), \varphi(t))$ désigne une solution lisse du problème P1^{électro-viscoélastique}, alors on a $(u(t), \varphi(t)) \in X = V \times W$ et de plus on obtient :*

$$a_\mu(u(t), v - \dot{u}(t)) + a_\theta(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + a_e(\varphi(t), v - \dot{u}(t)) + \quad (3.59)$$

$$j(v) - j(\dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \quad \forall v \in V, t \in (0, T],$$

$$a_\alpha(\varphi(t), \psi) - a_e(u(t), \psi) = (q(t), \psi)_W \quad \forall \psi \in W \quad (3.60)$$

$$u(0) = u_0. \quad (3.61)$$

Preuve.

Nous supposons que le problème antiplans de contact piézoélectrique P1^{électro-élastique} admet une solution $(u(t), \varphi(t))$ régulière, et soit $(v, \psi) \in X$. Nous multiplions l'équation (3.53) par l'élément $(v - \dot{u}(t)) \in V$, et nous tenons compte

des conditions aux bords (3.55), (3.56) et (3.57) et faisons appel à la formule de Green. Nous faisons la même chose pour l'équation (3.54), c'est-à-dire, nous la multiplions par l'élément $\psi \in W$ puis nous intégrons sur Ω et nous tenons compte de la formule de Green et des conditions (3.58)-(3.59); nous obtenons directement le système couplé en premier temps; d'une inéquation variationnelle d'évolution pour le champ des déplacements avec une équation variationnelle pour le champ électrique cité dans le lemme précédent.

Finalement, notre problème variationnel $P_2^{\text{électro-viscoélastique}}$ est donné par les relations suivantes :

Problème $P_2^{\text{électro-viscoélastique}}$. Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et le potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$a_\mu(u(t), v - \dot{u}(t)) + a_\theta(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + a_e(\varphi(t), v - \dot{u}(t)) + \quad (3.62)$$

$$j(v) - j(\dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \quad \forall v \in V, t \in (0, T],$$

$$a_\alpha(\varphi(t), \psi) - a_e(u(t), \psi) = (q(t), \psi)_W \quad \forall \psi \in W \quad (3.63)$$

$$u(0) = u_0. \quad (3.64)$$

Dans cette section, nous donnons notre principal résultat portant sur l'existence et l'unicité de la solution faible du problème $P_2^{\text{électro-viscoélastique}}$, ainsi que quelques éléments de démonstration de ce résultat. Alors, notre résultat d'existence et d'unicité sera donné explicitement dans la section suivante.

3.6 Quelques résultats d'existence et d'unicité

Hypothèse essentielle.

Avant de citer le théorème principal concernant l'existence et l'unicité de la solution faible (u, φ) du problème $P_2^{\text{électro-viscoélastique}}$, nous supposons de plus que le seuil de frottement satisfait aussi l'hypothèse suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) g : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+; \\ (b) \exists L_g \geq 0 \text{ tel que } |g(x, r_1) - g(x, r_2)| \leq L_g |r_1 - r_2|, \\ \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R} \text{ a.e. } x \in \Gamma_3; \\ (c) \forall r \in \mathbb{R}, g(\cdot, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3; \\ (d) g(\cdot, 0) \in L^2(\Gamma_3). \end{array} \right. \quad (3.65)$$

Notre principal résultat concernant l'existence et l'unicité de la solution faible du problème $P_2^{\text{électro-viscoélastique}}$ est le suivant.

Théorème 9 *Sous les hypothèses (3.38)–(3.58) et l'hypothèse principale (3.65), alors le problème $P_2^{\text{électro-viscoélastique}}$ admet une et une seule solution notée $(u, \varphi) \in V \times W$ satisfaite :*

$$u \in W^{2,2}(0, T; V), \quad (3.66)$$

et

$$\varphi \in W^{2,2}(0, T; W) \quad (3.67)$$

La démonstration du théorème (3.6) est basé essentiellement sur la théorie des inéquations variationnelles et quelques propriétés des opérateurs linéaires et non-linéaires. La démonstration sera résumée dans quelques étapes. A cet effet, nous faisons appel à certaines notations qui seront utiles et nécessaires pour étudier l'existence et l'unicité de la solution faible du problème $P_2^{\text{électro-viscoélastique}}$.

Notations.

- Soit x et y tels que $x = (u, \varphi) \in X$ et $y = (v, \psi) \in X$.
- Soit la fonctionnelle J définie de l'espace X vers \mathbb{R} par :

$$J(x) = j(u), \quad \forall u \in V \text{ and } \forall x \in X. \quad (3.68)$$

- Soit les deux formes bilinéaires $a(\cdot, \cdot)$ et $a_0(\cdot, \cdot)$ définies respectivement par :

$$a(x, y - \dot{x}) = a_\mu(u(t), v - \dot{u}(t)) + a_e(\varphi(t), v - \dot{u}(t)) \quad (3.69)$$

et

$$a_0(\dot{x}, y - \dot{x}) = a_0(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)). \quad (3.70)$$

$$\forall x = (u, \varphi) \in X, \forall y = (v, \psi) \in X,$$

- Soit la fonction F définie par :

$$F = (f, q) \in V \times W. \quad (3.71)$$

Nous utilisons (3.68)–(3.71) alors le problème précédent $P_2^{\text{électro-viscoélastique}}$ prend la nouvelle forme :

3.6.1 Problème $P_3^{\text{électro-viscoélastique}}$

Problème $P_3^{\text{électro-viscoélastique}}$. Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et le potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$a(x, y - \dot{x}) + a_\theta(\dot{x}, y - \dot{x}) + J(y) - J(\dot{x}) \geq (F, y - \dot{x})_X, \quad \forall y \in X. \quad (3.72)$$

$$u(0) = u_0. \quad (3.73)$$

Remarque.

Le problème précédent $P_3^{\text{électro-viscoélastique}}$ est équivalent au problème $P_2^{\text{électro-viscoélastique}}$.

Notre principal résultat concernant l'existence et l'unicité de la solution faible du problème $P_3^{\text{électro-viscoélastique}}$ défini par (3.72)–(3.73) est le suivant.

Théorème 10 Sous les hypothèses (3.38)–(3.58), alors le problème $P_4^{\text{électro-élastique}}$ admet une et une seule solution notée $(u, \varphi) \in V \times W$ satisfaite :

$$a(x, y - \dot{x}) + a_\theta(\dot{x}, y - \dot{x}) + J(y) - J(\dot{x}) \geq (F, y - \dot{x})_X, \quad \forall y \in X. \quad (3.74)$$

$$u(0) = u_0. \quad (3.75)$$

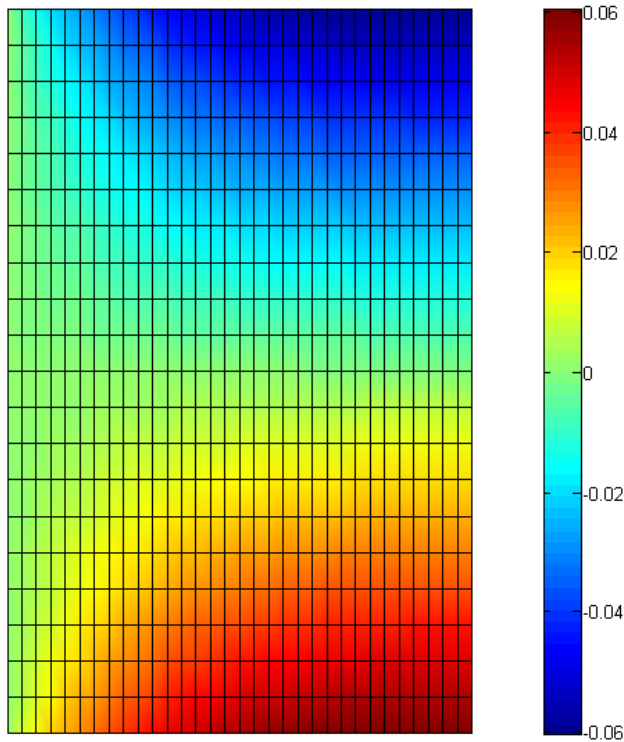
La démonstration du théorème (10) est basé essentiellement sur la théorie des inéquations variationnelles et quelques propriétés des opérateurs linéaires et non-linéaires. Pour plus de détails, consulter le livre : p.p. 61-66: [30]–**M. Sofonea and A. Matei.**, *Variational inequalities with applications. A study of antiplane frictional contact problems*, *Advances in mechanics and mathematics*, Springer, 2009 (230 pages), year (2009).

3.7 Simulation numérique

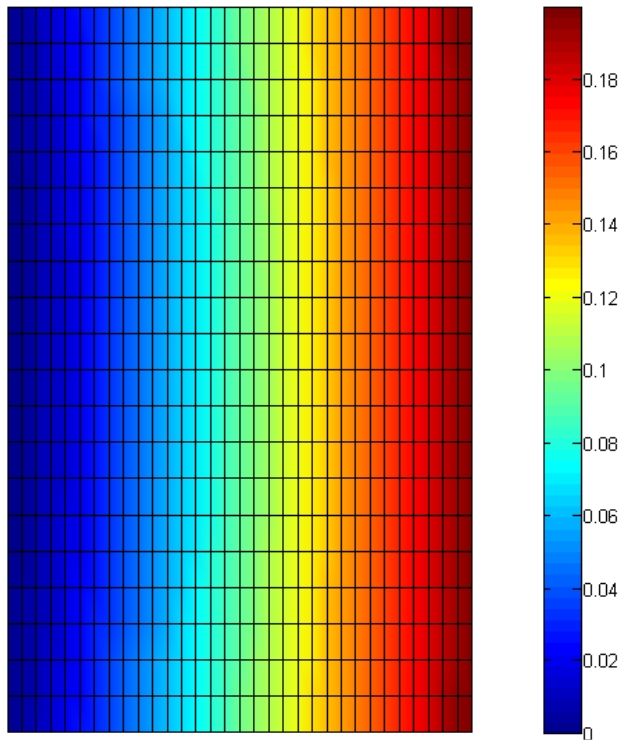
Dans cette section, nous présentons les résultats de simulation pour un problème antiplans de contact avec frottement pour un matériel électro-viscoélastique et qui est en contact avec une fondation rigide électriée. Le but étant dans un premier temps de vérifier à chaque fois les résultats numériques et graphiques pour le champ des déplacements $u(\cdot)$ et le champ électrique $\varphi(\cdot)$.

selon la modification des valeurs numériques concernant les forces surfaciques et volumiques \mathbf{f}_0 et \mathbf{f}_2 respectivement, les chages électriques de densité volumiques et surfaciques \mathbf{q}_0 et \mathbf{q}_2 respectivement, le coefficient de Lamé, le coefficient de permittivité électrique, le seuil de frottement g et le pas h .

On définit les valeurs numériques par :



Le domaine Ω est subdivisé en trois parties disjointes Γ_1 , Γ_2 et, Γ_3 tesl que $\Omega = [0, 24m] \times [0, 8m]$ et $\Gamma_1 = (\{0\} \times [0, 8]) \cup (\{24\} \times [0, 8])$, $\Gamma_2 = [0, 24] \times \{4\}$ et la dernière frontière $\Gamma_3 = [0, 24] \times \{0\}$. Pour la partie électrique, nous avons divisé la frontière Γ en deux sous parties $\Gamma_a = [0, 24] \times \{4\}$ et la deuxième frontière $\Gamma_b = (\{0\} \times [0, 8]) \cup (\{24\} \times [0, 8])$. Le module de Young $E = 21 \cdot 10^3 Pa$ et $\nu = 0.25$. Nous avons pris les valeurs numériques pour les forces surfaciques et volumiques comme suit : $\mathbf{f}_0 = \mathbf{0} N/m^3$ et $\mathbf{f}_2 = (0, -4) N/m^2$. Maintenant, les charges électriques de densité \mathbf{q}_0 et \mathbf{q}_2 sont donnés par $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0} C/m^3$ et $\mathbf{q}_2 = \mathbf{0} C/m^2$. On a pris aussi $T = 1s$



et le seuil de frottement $g = 0.4m$. Finalement, et afin d'analyser les résultats numériques et graphiques en 2-D et en 3-D, nous supposons que la maille est fixée à $h = 1/128$.

Commentaire.

Dans cet exemple numérique, nous avons étudié les effets et l'influence de la conductivité électrique de la fondation sur le processus de contact. Au début, nous avons pris comme considération que la fondation est isolée et de plus, elle est en contact et aussi elle est électrisée. Nous remarquons qu'il n'y a pas de charges électriques sur Γ_3 . Les figures 1 et 2, nous montre les configurations déformées et les forces de contact par frottement au temps différents valeurs du temps $T = 0.5s$ et $T = 1s$.

Après exécution des données précédentes sur le logiciel Matlab, une

simulation numérique et graphique donne :

» FEM(32,20,0,0,11)

UY =

0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0

-0.0059
-0.0042
-0.0036
-0.0033
-0.0032
-0.0031
-0.0031
-0.0031
-0.0031
-0.0031
-0.0030
-0.0030
-0.0030
-0.0031
-0.0031

-0.0031
-0.0031
-0.0032
-0.0033
-0.0036
-0.0042
-0.0059
-0.0106
-0.0092
-0.0081
-0.0075
-0.0071
-0.0069
-0.0068
-0.0067
-0.0067
-0.0066
-0.0066
-0.0066
-0.0067
-0.0067
-0.0068
-0.0069
-0.0071
-0.0075
-0.0081
-0.0092
-0.0106
-0.0155
-0.0141
-0.0130
-0.0122
-0.0116
-0.0113
-0.0110
-0.0109
-0.0108
-0.0108
-0.0107
-0.0108
-0.0108
-0.0109

-0.0110
-0.0113
-0.0116
-0.0122
-0.0130
-0.0141
-0.0155
-0.0205
-0.0192
-0.0181
-0.0172
-0.0166
-0.0161
-0.0158
-0.0156
-0.0154
-0.0153
-0.0153
-0.0153
-0.0154
-0.0156
-0.0158
-0.0161
-0.0166
-0.0172
-0.0181
-0.0192
-0.0205
-0.0256
-0.0245
-0.0235
-0.0226
-0.0219
-0.0213
-0.0209
-0.0207
-0.0205
-0.0204
-0.0203
-0.0204
-0.0205
-0.0207

-0.0209
-0.0213
-0.0219
-0.0226
-0.0235
-0.0245
-0.0256
-0.0310
-0.0300
-0.0290
-0.0281
-0.0274
-0.0269
-0.0264
-0.0261
-0.0259
-0.0258
-0.0257
-0.0258
-0.0259
-0.0261
-0.0264
-0.0269
-0.0274
-0.0281
-0.0290
-0.0300
-0.0310
-0.0366
-0.0356
-0.0347
-0.0339
-0.0332
-0.0326
-0.0322
-0.0319
-0.0316
-0.0315
-0.0314
-0.0315
-0.0316
-0.0319

-0.0322
-0.0326
-0.0332
-0.0339
-0.0347
-0.0356
-0.0366
-0.0424
-0.0415
-0.0407
-0.0399
-0.0392
-0.0387
-0.0382
-0.0379
-0.0376
-0.0375
-0.0374
-0.0375
-0.0376
-0.0379
-0.0382
-0.0387
-0.0392
-0.0399
-0.0407
-0.0415
-0.0424
-0.0484
-0.0475
-0.0468
-0.0461
-0.0454
-0.0449
-0.0444
-0.0441
-0.0439
-0.0437
-0.0437
-0.0437
-0.0439
-0.0441

-0.0444
-0.0449
-0.0454
-0.0461
-0.0468
-0.0475
-0.0484
-0.0545
-0.0538
-0.0530
-0.0524
-0.0518
-0.0513
-0.0509
-0.0505
-0.0503
-0.0501
-0.0501
-0.0501
-0.0503
-0.0505
-0.0509
-0.0513
-0.0518
-0.0524
-0.0530
-0.0538
-0.0545
-0.0608
-0.0601
-0.0595
-0.0589
-0.0583
-0.0578
-0.0574
-0.0571
-0.0569
-0.0567
-0.0567
-0.0567
-0.0569
-0.0571

-0.0574
-0.0578
-0.0583
-0.0589
-0.0595
-0.0601
-0.0608
-0.0672
-0.0666
-0.0660
-0.0655
-0.0650
-0.0645
-0.0641
-0.0638
-0.0636
-0.0635
-0.0634
-0.0635
-0.0636
-0.0638
-0.0641
-0.0645
-0.0650
-0.0655
-0.0660
-0.0666
-0.0672
-0.0738
-0.0732
-0.0727
-0.0722
-0.0717
-0.0713
-0.0709
-0.0707
-0.0705
-0.0703
-0.0703
-0.0703
-0.0705
-0.0707

-0.0709
-0.0713
-0.0717
-0.0722
-0.0727
-0.0732
-0.0738
-0.0804
-0.0799
-0.0794
-0.0790
-0.0785
-0.0782
-0.0778
-0.0776
-0.0774
-0.0773
-0.0772
-0.0773
-0.0774
-0.0776
-0.0778
-0.0782
-0.0785
-0.0790
-0.0794
-0.0799
-0.0804
-0.0871
-0.0867
-0.0863
-0.0858
-0.0855
-0.0851
-0.0848
-0.0846
-0.0844
-0.0843
-0.0842
-0.0843
-0.0844
-0.0846

-0.0848
-0.0851
-0.0855
-0.0858
-0.0863
-0.0867
-0.0871
-0.0939
-0.0935
-0.0931
-0.0928
-0.0924
-0.0921
-0.0918
-0.0916
-0.0914
-0.0913
-0.0913
-0.0913
-0.0914
-0.0916
-0.0918
-0.0921
-0.0924
-0.0928
-0.0931
-0.0935
-0.0939
-0.1007
-0.1004
-0.1000
-0.0997
-0.0994
-0.0991
-0.0988
-0.0986
-0.0985
-0.0984
-0.0984
-0.0984
-0.0985
-0.0986

-0.0988
-0.0991
-0.0994
-0.0997
-0.1000
-0.1004
-0.1007
-0.1076
-0.1073
-0.1070
-0.1067
-0.1064
-0.1061
-0.1059
-0.1057
-0.1056
-0.1055
-0.1055
-0.1055
-0.1056
-0.1057
-0.1059
-0.1061
-0.1064
-0.1067
-0.1070
-0.1073
-0.1076
-0.1144
-0.1142
-0.1139
-0.1136
-0.1134
-0.1131
-0.1129
-0.1128
-0.1126
-0.1126
-0.1125
-0.1126
-0.1126
-0.1128

-0.1129
-0.1131
-0.1134
-0.1136
-0.1139
-0.1142
-0.1144
-0.1213
-0.1211
-0.1208
-0.1206
-0.1204
-0.1201
-0.1199
-0.1198
-0.1197
-0.1196
-0.1196
-0.1196
-0.1197
-0.1198
-0.1199
-0.1201
-0.1204
-0.1206
-0.1208
-0.1211
-0.1213
-0.1281
-0.1279
-0.1277
-0.1275
-0.1273
-0.1271
-0.1269
-0.1268
-0.1267
-0.1266
-0.1266
-0.1266
-0.1267
-0.1268

-0.1269
-0.1271
-0.1273
-0.1275
-0.1277
-0.1279
-0.1281
-0.1349
-0.1347
-0.1346
-0.1344
-0.1342
-0.1340
-0.1339
-0.1338
-0.1337
-0.1336
-0.1336
-0.1336
-0.1337
-0.1338
-0.1339
-0.1340
-0.1342
-0.1344
-0.1346
-0.1347
-0.1349
-0.1416
-0.1415
-0.1414
-0.1412
-0.1411
-0.1409
-0.1408
-0.1407
-0.1406
-0.1405
-0.1405
-0.1405
-0.1406
-0.1407

-0.1408
-0.1409
-0.1411
-0.1412
-0.1414
-0.1415
-0.1416
-0.1483
-0.1482
-0.1481
-0.1480
-0.1478
-0.1477
-0.1476
-0.1475
-0.1474
-0.1474
-0.1474
-0.1474
-0.1474
-0.1475
-0.1476
-0.1477
-0.1478
-0.1480
-0.1481
-0.1482
-0.1483
-0.1550
-0.1549
-0.1548
-0.1547
-0.1546
-0.1544
-0.1543
-0.1542
-0.1542
-0.1541
-0.1541
-0.1541
-0.1542
-0.1542

-0.1543
-0.1544
-0.1546
-0.1547
-0.1548
-0.1549
-0.1550
-0.1615
-0.1615
-0.1614
-0.1613
-0.1612
-0.1611
-0.1610
-0.1609
-0.1609
-0.1608
-0.1608
-0.1608
-0.1609
-0.1609
-0.1610
-0.1611
-0.1612
-0.1613
-0.1614
-0.1615
-0.1615
-0.1680
-0.1680
-0.1679
-0.1678
-0.1677
-0.1676
-0.1676
-0.1675
-0.1674
-0.1674
-0.1674
-0.1674
-0.1674
-0.1675

-0.1676
-0.1676
-0.1677
-0.1678
-0.1679
-0.1680
-0.1680
-0.1744
-0.1744
-0.1744
-0.1743
-0.1742
-0.1741
-0.1740
-0.1740
-0.1739
-0.1739
-0.1739
-0.1739
-0.1739
-0.1740
-0.1740
-0.1741
-0.1742
-0.1743
-0.1744
-0.1744
-0.1744
-0.1808
-0.1808
-0.1807
-0.1806
-0.1806
-0.1805
-0.1804
-0.1803
-0.1803
-0.1803
-0.1803
-0.1803
-0.1803
-0.1803

-0.1804
-0.1805
-0.1806
-0.1806
-0.1807
-0.1808
-0.1808
-0.1870
-0.1870
-0.1870
-0.1869
-0.1868
-0.1868
-0.1867
-0.1866
-0.1866
-0.1865
-0.1865
-0.1865
-0.1866
-0.1866
-0.1867
-0.1868
-0.1868
-0.1869
-0.1870
-0.1870
-0.1870
-0.1933
-0.1933
-0.1932
-0.1931
-0.1930
-0.1929
-0.1928
-0.1927
-0.1927
-0.1926
-0.1926
-0.1926
-0.1927
-0.1927

-0.1928
-0.1929
-0.1930
-0.1931
-0.1932
-0.1933
-0.1933
-0.1995
-0.1995
-0.1994
-0.1993
-0.1992
-0.1990
-0.1989
-0.1987
-0.1986
-0.1986
-0.1986
-0.1986
-0.1986
-0.1987
-0.1989
-0.1990
-0.1992
-0.1993
-0.1994
-0.1995
-0.1995

The maximum displacement UX

ans =

0.0603

The maximum displacement UY

ans =

0.1995

» FEM(60,20,0,0,12)

UY =

-3.4273

-3.4329

-3.4379

-3.4423

-3.4461

-3.4493

-3.4519

-3.4539

-3.4553

-3.4561

-3.4564

-3.4561

-3.4553

-3.4539

-3.4519

-3.4493

-3.4461

-3.4423

-3.4379

-3.4329

-3.4273

-3.4262

-3.4319

-3.4369

-3.4413

-3.4451

-3.4482

-3.4508

-3.4528

-3.4542

-3.4551

-3.4554

-3.4551

-3.4542

-3.4528
-3.4508
-3.4482
-3.4451
-3.4413
-3.4369
-3.4319
-3.4262
-3.4231
-3.4288
-3.4338
-3.4381
-3.4419
-3.4451
-3.4477
-3.4497
-3.4511
-3.4520
-3.4522
-3.4520
-3.4511
-3.4497
-3.4477
-3.4451
-3.4419
-3.4381
-3.4338
-3.4288
-3.4231
-3.4179
-3.4236
-3.4286
-3.4329
-3.4367
-3.4399
-3.4425
-3.4445
-3.4459
-3.4467
-3.4470
-3.4467
-3.4459

-3.4444
-3.4425
-3.4399
-3.4367
-3.4329
-3.4286
-3.4236
-3.4179
-3.4107
-3.4163
-3.4213
-3.4257
-3.4294
-3.4326
-3.4351
-3.4371
-3.4386
-3.4394
-3.4397
-3.4394
-3.4386
-3.4371
-3.4351
-3.4326
-3.4294
-3.4257
-3.4213
-3.4163
-3.4107
-3.4013
-3.4070
-3.4119
-3.4163
-3.4200
-3.4232
-3.4258
-3.4277
-3.4292
-3.4300
-3.4303
-3.4300
-3.4292

-3.4277
-3.4258
-3.4232
-3.4200
-3.4163
-3.4119
-3.4070
-3.4013
-3.3899
-3.3955
-3.4005
-3.4049
-3.4086
-3.4117
-3.4143
-3.4163
-3.4177
-3.4185
-3.4188
-3.4185
-3.4177
-3.4163
-3.4143
-3.4117
-3.4086
-3.4048
-3.4005
-3.3955
-3.3899
-3.3765
-3.3821
-3.3870
-3.3913
-3.3951
-3.3982
-3.4008
-3.4027
-3.4041
-3.4050
-3.4053
-3.4050
-3.4041

-3.4027
-3.4008
-3.3982
-3.3951
-3.3913
-3.3870
-3.3821
-3.3765
-3.3610
-3.3666
-3.3715
-3.3758
-3.3795
-3.3826
-3.3852
-3.3871
-3.3885
-3.3894
-3.3896
-3.3894
-3.3885
-3.3871
-3.3852
-3.3826
-3.3795
-3.3758
-3.3715
-3.3666
-3.3610
-3.3435
-3.3490
-3.3539
-3.3582
-3.3619
-3.3650
-3.3675
-3.3695
-3.3708
-3.3717
-3.3720
-3.3717
-3.3708

-3.3695
-3.3675
-3.3650
-3.3619
-3.3582
-3.3539
-3.3490
-3.3435
-3.3239
-3.3294
-3.3343
-3.3385
-3.3422
-3.3453
-3.3478
-3.3497
-3.3511
-3.3520
-3.3522
-3.3520
-3.3511
-3.3497
-3.3478
-3.3453
-3.3422
-3.3385
-3.3343
-3.3294
-3.3239
-3.3023
-3.3078
-3.3126
-3.3169
-3.3205
-3.3236
-3.3261
-3.3280
-3.3294
-3.3302
-3.3305
-3.3302
-3.3294

-3.3280
-3.3261
-3.3236
-3.3205
-3.3169
-3.3126
-3.3078
-3.3023
-3.2787
-3.2841
-3.2890
-3.2932
-3.2968
-3.2998
-3.3023
-3.3042
-3.3056
-3.3064
-3.3067
-3.3064
-3.3056
-3.3042
-3.3023
-3.2998
-3.2968
-3.2932
-3.2889
-3.2841
-3.2787
-3.2531
-3.2585
-3.2633
-3.2675
-3.2711
-3.2741
-3.2765
-3.2784
-3.2798
-3.2806
-3.2809
-3.2806
-3.2798

-3.2784
-3.2765
-3.2741
-3.2710
-3.2675
-3.2633
-3.2585
-3.2531
-3.2255
-3.2309
-3.2356
-3.2398
-3.2433
-3.2463
-3.2488
-3.2507
-3.2520
-3.2528
-3.2531
-3.2528
-3.2520
-3.2507
-3.2488
-3.2463
-3.2433
-3.2398
-3.2356
-3.2309
-3.2255
-3.1960
-3.2013
-3.2060
-3.2101
-3.2136
-3.2166
-3.2190
-3.2209
-3.2222
-3.2230
-3.2233
-3.2230
-3.2222

-3.2209
-3.2190
-3.2166
-3.2136
-3.2101
-3.2060
-3.2013
-3.1960
-3.1645
-3.1697
-3.1744
-3.1785
-3.1820
-3.1849
-3.1873
-3.1892
-3.1905
-3.1913
-3.1915
-3.1913
-3.1905
-3.1891
-3.1873
-3.1849
-3.1820
-3.1784
-3.1744
-3.1697
-3.1645
-3.1310
-3.1362
-3.1409
-3.1449
-3.1484
-3.1513
-3.1536
-3.1555
-3.1568
-3.1576
-3.1578
-3.1576
-3.1568

-3.1555
-3.1536
-3.1513
-3.1483
-3.1449
-3.1408
-3.1362
-3.1310
-3.0957
-3.1008
-3.1054
-3.1094
-3.1128
-3.1157
-3.1180
-3.1199
-3.1211
-3.1219
-3.1222
-3.1219
-3.1211
-3.1198
-3.1180
-3.1157
-3.1128
-3.1094
-3.1054
-3.1008
-3.0957
-3.0584
-3.0635
-3.0680
-3.0720
-3.0754
-3.0782
-3.0805
-3.0823
-3.0836
-3.0844
-3.0846
-3.0844
-3.0836

-3.0823
-3.0805
-3.0782
-3.0753
-3.0720
-3.0680
-3.0635
-3.0584
-3.0193
-3.0243
-3.0288
-3.0327
-3.0360
-3.0388
-3.0411
-3.0429
-3.0442
-3.0449
-3.0452
-3.0449
-3.0441
-3.0429
-3.0411
-3.0388
-3.0360
-3.0327
-3.0288
-3.0243
-3.0193
-2.9783
-2.9833
-2.9877
-2.9915
-2.9948
-2.9976
-2.9999
-3.0016
-3.0028
-3.0036
-3.0038
-3.0036
-3.0028

-3.0016
-2.9998
-2.9976
-2.9948
-2.9915
-2.9877
-2.9833
-2.9783
-2.9355
-2.9404
-2.9447
-2.9485
-2.9518
-2.9545
-2.9567
-2.9585
-2.9597
-2.9604
-2.9607
-2.9604
-2.9597
-2.9584
-2.9567
-2.9545
-2.9518
-2.9485
-2.9447
-2.9404
-2.9355
-2.8909
-2.8957
-2.9000
-2.9037
-2.9069
-2.9096
-2.9118
-2.9135
-2.9147
-2.9154
-2.9156
-2.9154
-2.9147

-2.9135
-2.9118
-2.9096
-2.9069
-2.9037
-2.8999
-2.8957
-2.8908
-2.8444
-2.8492
-2.8534
-2.8571
-2.8602
-2.8629
-2.8650
-2.8667
-2.8679
-2.8686
-2.8688
-2.8686
-2.8679
-2.8667
-2.8650
-2.8629
-2.8602
-2.8571
-2.8534
-2.8492
-2.8444
-2.7962
-2.8009
-2.8051
-2.8087
-2.8118
-2.8144
-2.8165
-2.8182
-2.8193
-2.8200
-2.8203
-2.8200
-2.8193

-2.8182
-2.8165
-2.8144
-2.8118
-2.8087
-2.8051
-2.8009
-2.7963
-2.7463
-2.7509
-2.7550
-2.7585
-2.7616
-2.7642
-2.7662
-2.7679
-2.7690
-2.7697
-2.7699
-2.7697
-2.7690
-2.7679
-2.7663
-2.7642
-2.7616
-2.7586
-2.7550
-2.7509
-2.7464
-2.6947
-2.6992
-2.7032
-2.7067
-2.7097
-2.7122
-2.7143
-2.7158
-2.7170
-2.7176
-2.7179
-2.7177
-2.7170

-2.7159
-2.7143
-2.7122
-2.7097
-2.7067
-2.7032
-2.6993
-2.6947
-2.6414
-2.6458
-2.6497
-2.6532
-2.6561
-2.6586
-2.6606
-2.6621
-2.6632
-2.6639
-2.6641
-2.6639
-2.6633
-2.6622
-2.6606
-2.6586
-2.6562
-2.6532
-2.6498
-2.6459
-2.6415
-2.5864
-2.5908
-2.5946
-2.5980
-2.6008
-2.6033
-2.6052
-2.6067
-2.6078
-2.6085
-2.6087
-2.6085
-2.6079

-2.6068
-2.6053
-2.6033
-2.6009
-2.5981
-2.5947
-2.5909
-2.5866
-2.5299
-2.5341
-2.5379
-2.5411
-2.5440
-2.5463
-2.5482
-2.5497
-2.5508
-2.5515
-2.5517
-2.5515
-2.5509
-2.5498
-2.5484
-2.5464
-2.5441
-2.5413
-2.5380
-2.5343
-2.5300
-2.4717
-2.4758
-2.4795
-2.4827
-2.4855
-2.4878
-2.4897
-2.4911
-2.4922
-2.4928
-2.4930
-2.4929
-2.4923

-2.4913
-2.4898
-2.4880
-2.4857
-2.4829
-2.4797
-2.4761
-2.4719
-2.4120
-2.4160
-2.4196
-2.4227
-2.4254
-2.4277
-2.4295
-2.4309
-2.4320
-2.4326
-2.4328
-2.4327
-2.4321
-2.4311
-2.4297
-2.4279
-2.4257
-2.4230
-2.4199
-2.4163
-2.4123
-2.3507
-2.3547
-2.3581
-2.3612
-2.3638
-2.3660
-2.3678
-2.3692
-2.3702
-2.3709
-2.3711
-2.3710
-2.3704

-2.3695
-2.3681
-2.3664
-2.3642
-2.3616
-2.3586
-2.3551
-2.3511
-2.2880
-2.2918
-2.2952
-2.2982
-2.3007
-2.3029
-2.3046
-2.3060
-2.3070
-2.3076
-2.3079
-2.3078
-2.3072
-2.3063
-2.3050
-2.3034
-2.3012
-2.2987
-2.2958
-2.2924
-2.2885
-2.2238
-2.2275
-2.2308
-2.2337
-2.2362
-2.2383
-2.2400
-2.2413
-2.2423
-2.2429
-2.2432
-2.2431
-2.2426

-2.2418
-2.2405
-2.2389
-2.2368
-2.2344
-2.2315
-2.2282
-2.2245
-2.1582
-2.1618
-2.1650
-2.1678
-2.1702
-2.1722
-2.1739
-2.1752
-2.1762
-2.1768
-2.1771
-2.1770
-2.1766
-2.1758
-2.1746
-2.1730
-2.1711
-2.1687
-2.1659
-2.1627
-2.1591
-2.0912
-2.0947
-2.0977
-2.1004
-2.1028
-2.1048
-2.1064
-2.1077
-2.1087
-2.1093
-2.1096
-2.1096
-2.1092

-2.1084
-2.1073
-2.1058
-2.1039
-2.1016
-2.0989
-2.0958
-2.0923
-2.0228
-2.0262
-2.0292
-2.0318
-2.0340
-2.0360
-2.0376
-2.0388
-2.0398
-2.0404
-2.0408
-2.0408
-2.0404
-2.0397
-2.0387
-2.0373
-2.0355
-2.0333
-2.0307
-2.0277
-2.0243
-1.9532
-1.9564
-1.9593
-1.9618
-1.9640
-1.9658
-1.9674
-1.9687
-1.9696
-1.9703
-1.9706
-1.9707
-1.9704

-1.9698
-1.9688
-1.9675
-1.9657
-1.9636
-1.9611
-1.9582
-1.9549
-1.8823
-1.8854
-1.8881
-1.8905
-1.8926
-1.8944
-1.8960
-1.8972
-1.8982
-1.8988
-1.8992
-1.8993
-1.8991
-1.8986
-1.8977
-1.8964
-1.8948
-1.8928
-1.8904
-1.8876
-1.8844
-1.8101
-1.8131
-1.8157
-1.8180
-1.8201
-1.8218
-1.8233
-1.8245
-1.8255
-1.8262
-1.8266
-1.8268
-1.8266

-1.8262
-1.8254
-1.8242
-1.8227
-1.8207
-1.8184
-1.8158
-1.8127
-1.7368
-1.7397
-1.7422
-1.7444
-1.7463
-1.7480
-1.7494
-1.7506
-1.7516
-1.7524
-1.7528
-1.7531
-1.7530
-1.7526
-1.7519
-1.7508
-1.7494
-1.7476
-1.7454
-1.7428
-1.7398
-1.6624
-1.6651
-1.6675
-1.6696
-1.6714
-1.6730
-1.6744
-1.6756
-1.6766
-1.6774
-1.6779
-1.6782
-1.6782

-1.6779
-1.6773
-1.6764
-1.6751
-1.6734
-1.6713
-1.6688
-1.6659
-1.5870
-1.5895
-1.5917
-1.5937
-1.5954
-1.5970
-1.5983
-1.5995
-1.6005
-1.6013
-1.6019
-1.6022
-1.6024
-1.6022
-1.6017
-1.6009
-1.5997
-1.5981
-1.5961
-1.5937
-1.5909
-1.5106
-1.5129
-1.5150
-1.5168
-1.5184
-1.5199
-1.5212
-1.5224
-1.5234
-1.5242
-1.5248
-1.5252
-1.5254

-1.5254
-1.5250
-1.5243
-1.5232
-1.5218
-1.5199
-1.5176
-1.5149
-1.4332
-1.4354
-1.4373
-1.4390
-1.4405
-1.4419
-1.4431
-1.4442
-1.4452
-1.4460
-1.4467
-1.4472
-1.4475
-1.4476
-1.4473
-1.4468
-1.4458
-1.4445
-1.4427
-1.4405
-1.4380
-1.3551
-1.3570
-1.3587
-1.3603
-1.3617
-1.3630
-1.3642
-1.3652
-1.3661
-1.3670
-1.3677
-1.3682
-1.3686

-1.3688
-1.3687
-1.3683
-1.3675
-1.3663
-1.3646
-1.3625
-1.3600
-1.2762
-1.2779
-1.2795
-1.2809
-1.2822
-1.2833
-1.2844
-1.2853
-1.2862
-1.2870
-1.2877
-1.2882
-1.2887
-1.2890
-1.2890
-1.2888
-1.2881
-1.2871
-1.2855
-1.2835
-1.2811
-1.1966
-1.1982
-1.1996
-1.2008
-1.2019
-1.2029
-1.2038
-1.2047
-1.2054
-1.2061
-1.2068
-1.2073
-1.2078

-1.2082
-1.2084
-1.2083
-1.2078
-1.2069
-1.2055
-1.2036
-1.2012
-1.1166
-1.1180
-1.1191
-1.1202
-1.1211
-1.1220
-1.1227
-1.1234
-1.1240
-1.1245
-1.1250
-1.1255
-1.1260
-1.1264
-1.1267
-1.1268
-1.1265
-1.1258
-1.1245
-1.1227
-1.1203
-1.0363
-1.0374
-1.0383
-1.0392
-1.0400
-1.0406
-1.0411
-1.0415
-1.0419
-1.0422
-1.0425
-1.0429
-1.0432

-1.0436
-1.0439
-1.0441
-1.0441
-1.0436
-1.0424
-1.0407
-1.0383
-0.9557
-0.9565
-0.9573
-0.9580
-0.9585
-0.9589
-0.9592
-0.9593
-0.9593
-0.9593
-0.9593
-0.9594
-0.9595
-0.9597
-0.9600
-0.9603
-0.9604
-0.9601
-0.9592
-0.9575
-0.9551
-0.8750
-0.8757
-0.8763
-0.8767
-0.8770
-0.8771
-0.8770
-0.8768
-0.8765
-0.8760
-0.8756
-0.8752
-0.8748

-0.8747
-0.8748
-0.8750
-0.8752
-0.8752
-0.8745
-0.8729
-0.8704
-0.7945
-0.7949
-0.7953
-0.7955
-0.7956
-0.7954
-0.7949
-0.7943
-0.7935
-0.7925
-0.7914
-0.7903
-0.7894
-0.7886
-0.7882
-0.7881
-0.7883
-0.7884
-0.7880
-0.7865
-0.7839
-0.7142
-0.7144
-0.7146
-0.7147
-0.7144
-0.7139
-0.7131
-0.7120
-0.7106
-0.7090
-0.7071
-0.7052
-0.7033

-0.7015
-0.7001
-0.6992
-0.6989
-0.6991
-0.6990
-0.6978
-0.6949
-0.6342
-0.6344
-0.6344
-0.6342
-0.6337
-0.6329
-0.6317
-0.6302
-0.6282
-0.6258
-0.6231
-0.6201
-0.6169
-0.6137
-0.6106
-0.6082
-0.6067
-0.6063
-0.6064
-0.6055
-0.6023
-0.5548
-0.5548
-0.5547
-0.5544
-0.5537
-0.5526
-0.5511
-0.5491
-0.5466
-0.5435
-0.5398
-0.5356
-0.5309

-0.5258
-0.5204
-0.5153
-0.5110
-0.5084
-0.5080
-0.5074
-0.5040
-0.4759
-0.4758
-0.4756
-0.4752
-0.4744
-0.4732
-0.4715
-0.4692
-0.4662
-0.4624
-0.4579
-0.4524
-0.4461
-0.4388
-0.4307
-0.4218
-0.4126
-0.4042
-0.3991
-0.3992
-0.3941
-0.3973
-0.3973
-0.3971
-0.3968
-0.3961
-0.3949
-0.3931
-0.3907
-0.3874
-0.3832
-0.3779
-0.3714
-0.3636

-0.3543
-0.3433
-0.3303
-0.3149
-0.2970
-0.2775
-0.2626
-0.2641
-0.3190
-0.3190
-0.3191
-0.3190
-0.3186
-0.3178
-0.3163
-0.3140
-0.3107
-0.3063
-0.3006
-0.2934
-0.2846
-0.2738
-0.2606
-0.2444
-0.2242
-0.1978
-0.1608
-0.1020

The maximum displacement UX

ans =

0.9479

The maximum displacement UY

ans =

3.4564

3.8 Conclusion et perspectives

En conclusion, dans cette dernière partie de la thèse, nous avons considéré que le matériel est électro-viscoélastiqueⁱⁱⁱ avec des conditions aux limites et d'une loi de frottement de type de Tresca. Au premier point, dans l'étude de ce problème nous négligeons les termes d'inertie dans l'équation du mouvement ce qui nous conduit à un problème statique. Nous dérivons une formulation variationnelle qui sera notée par la suite $2V^{\text{électro-viscoélastique}}$ de ce modèle qui est sous la forme d'un système couplé en premier temps; d'une inéquation variationnelle d'évolution pour le champ des déplacements $u(\cdot)$ avec une équation variationnelle pour le champ électrique $\varphi(\cdot)$.

Des perspectives similaires de convergence seront étudiés dans les prochains travaux :

- Pour les lois de frottement de type

$$\begin{cases} |\theta \dot{u} \partial_\nu + \mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi| \leq g, \\ \theta \dot{u} \partial_\nu + \mu \partial_\nu u + \partial_\nu \varphi = -g \frac{\dot{u}}{|\dot{u}|} \text{ si } \dot{u} \neq 0 \text{ sur } \Gamma_3. \end{cases} \quad (3.76)$$

- Pour les lois de frottement régularisées de type :

$$\theta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu u_\rho + e \partial_\nu \varphi_\rho = -g \frac{\dot{u}_\rho}{\sqrt{\dot{u}_\rho^2 + \rho^2}} \text{ on } \Gamma_3. \quad (3.77)$$

Le calcul scientifique d'une manière générale, et la méthode des éléments finis en particulier, sont utilisés de manière intensive dans tous les secteurs. Toute amélioration de la performance des méthodes numériques est donc un enjeu majeur : rapidité, précision, fiabilité...

A long terme, il pourrait être intéressant d'utiliser une autre méthode de raffinement de maillage : la méthode des éléments finis. Il s'agit d'une autre

ⁱⁱⁱM. Sofonea, M. Dalah, Antiplane Frictional Contact of Electro-Viscoelastic Cylinders, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2007(2007), No. 161, pp. 114.

manière d'augmenter la précision de la solution. L'avantage de cette méthode réside dans l'augmentation des degrés d'interpolation des éléments tout en conservant la topologie du maillage. Cependant, la difficulté de cette méthode reste dans sa mise en œuvre et dans son implémentation.

Enfin, Les perspectives de développement du code de calcul concernent d'une part les modèles électro-viscoélastiques en 2-D et en 3-D utilisés et, d'autre part, les méthodes numériques employées. Un vaste travail de validation des modèles reste à faire et un niveau approprié de description de ce type des problèmes en mécanique de contact reste à définir.

4

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Pour finir, nous listons quelques perspectives concernant l'extension de nos axes de recherches vers les problèmes électro-viscoélastiques régularisés.

Table des matières:

Chapitre 4: Conclusion générale et perspectives

4.1 Conclusion générale et Perspectives

4.1 Conclusion générale et Perspectives

DANS ce travail on a étudié deux problèmes antiplans de contact avec frottement pour des matériaux viscoélastiques et électro-viscoélastiques avec ou sans frottement. Le but principal concernant la solution faible a été prouvé et justifié sous des hypothèses posées dans chaque problème étudié.

Dans l'étude de chaque problème, nous avons dérivé une forme faible de chaque problème sous forme d'une inéquation variationnelle d'évolution intégro-différentielle. Notre principal résultat porte sur l'existence et l'unicité de solutions faibles ainsi, que le comportement de cette solution pour les problèmes antiplans de contact avec frottement pour des matériaux viscoélastiques et électro-viscoélastiques .

Les perspectives restent nombreuses, on compte faire un travail sur les problèmes antiplans de contact avec loi de frottement régularisés à partir de ces résultats, pour les problèmes étudiés¹.

¹Hacene-Chaouche Soumeiya: DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES, UNIVERSITÉ DES FRÈRE MENTOURI CONSTANTINE, B.P. 325 ROUTE AIN EL BEY, CONSTANTINE 25017, ALGÉRIE. Decembre 2018.

5

ANNEXE A: QUELQUES INÉGALITÉS

5.1 Quelques inégalités

Dans cet annexe, nous allons présenter quelques inégalités élémentaires et utiles pour l'étude des problèmes posés dans le chapitre 3. A cet effet, nous introduisons l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$ défini par $\mathcal{C}([a,b])$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.

Inégalité 1 (Lemme de Gronwall) On suppose que $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$ satisfont la relation:

$$f(t) \leq g(t) + c \int_a^b f(s) ds, \forall t \in [a,b]. \quad (5.1)$$

avec la constante $c > 0$. Alors, on a:

$$f(t) \leq g(t) + c \int_a^b g(s) e^{c(t-s)} ds, \forall t \in [a,b]. \quad (5.2)$$

De plus, si f et g sont non-monotones, alors, l'inégalité 5.2 prend la forme suivante:

Inégalité 2

$$f(t) \leq g(t) e^{c(t-s)}, \forall t \in [a,b]. \quad (5.3)$$

Inégalité 3 (Inégalité de Young) Soient $p, q \in \mathbb{R}$ deux exposants conjugués avec $1 < p < \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, on a la majoration suivante :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \forall a, b \geq 0. \quad (5.4)$$

Inégalité 4 Soient $p > 0$ avec $p \in \mathbb{R}$. Alors, on a la majoration suivante :

$$|u|^{p-1}u(v-u) \leq \frac{1}{p+1} \cdot |v|^{p+1} + \frac{1}{p+1} \cdot |u|^{p+1}, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}, u \neq 0. \quad (5.5)$$

Inégalité 5 (Inégalité de Holder) Soient $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$. Alors, on :

$$\int_{\Omega} |u(\mathbf{x}) \cdot v(\mathbf{x})| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}. \quad (5.6)$$

Inégalité 6 L'espace $L^2(\Omega)$ est séparable et vérifié l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left| \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) dx \right| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega). \quad (5.7)$$

Inégalité 7 On a les résultats suivants:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1}, \quad (5.8)$$

$$\|\partial u_i\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1}, \quad (5.9)$$

Inégalité 8 (Inégalité de Poincaré) Soit Ω un ouvert borné de l'espace \mathbb{R}^d pour $d = 1, 2$, il existe une constante notée c_{Ω} telle que

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c_{\Omega} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (5.10)$$

6

BIBLIOGRAPHIES

- [1]–**R. A. Adams.**, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, [\(1975\)](#).
- [2]–**L.-E. Andersson.**, *A Quasistatic Frictional Problem with Normal Compliance*, *Nonlinear Analysis TMA* 16, p.p. 407-428, [\(1991\)](#).
- [3]–**L.-E. Andersson.**, *A Global Existence Result for a Quasistatic Contact Problem with Friction*, *Advances in Mathematical Sciences and Applications* 5, p.p. 249-286, [\(1995\)](#).
- [4]–**A. Amassad, M. Sofonea.**, *Analysis of a Quasistatic Viscoplastic Problem Involving Tresca Friction law*, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 4, p.p. 55-72, [\(1998\)](#).
- [5]–**A. Amassad, M. Shillor, M. Sofonea.**, *A Quasistatic Contact Problem with Slip Dependent Coefficient of Friction*, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 22, p.p. 267-284, [\(1999\)](#).
- [6]–**V. Barbu, T. Precupanu.**, *Convexity and Optimisation in Banach Spaces*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, [\(1986\)](#).
- [7]–**H. Brézis.**, *Équations et Inéquations non Linéaires dans les Espaces Vectoriels en Dualité*, *Ann. Inst. Fourier*, 18, p.p. 115-175, [\(1968\)](#).
- [8]–**H. Brézis.**, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Application*, Masson, [\(1987\)](#).
- [9]–**O. Chau, W. Han, M. Sofonea.**, *Analysis and Approximation of a Viscoelastic Contact Problem with Slip Dependent Friction*, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 8, p.p. 153-174, [\(2001\)](#).

- [10]–**M. Cocu.**, *Existence of Solutions of Signorini Problems with Friction*, *Int. J. Engng. Sci.*, 22, p.p. 567-581, [\(1984\)](#).
- [11]–**M. Cocu, E. Pratt, M. Raous.**, *Analysis of an Incremental Formulation for Frictional Contact Problems*, *Contact Mechanics*, Eds. M. Raous, M. Jean, J. J. Moreau, Plenum Press, New York, [\(1995\)](#).
- [12]–**M. Cocu, E. Pratt, M. Raous.**, *Formulation and Approximation of Quasistatic Frictional Contact*, *Int. Jour. Engng. Sci.*, 34, p.p. 783-798, [\(1996\)](#).
- [13]–**G. Duvaut.**, *Mécanique des Milieux Continus*, Dunod, Paris, [\(1998\)](#).
- [14]–**G. Duvaut, J.L. Lions.**, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, [\(1972\)](#).
- [15]–**P. Germain, P. Muller.**, *Introduction à la Mécanique des Milieux Continus*, Masson, Paris, [\(1980\)](#).
- [16]–**T.-V. Hoarau-Mantel, A. Matei.**, *Problèmes antiplans de contact avec frottement pour des matériaux viscoélastiques à mémoire longue* *Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser. Volume 32, P.P. 200–206*, [\(2005\)](#).
- [17]–**T.-V. Hoarau-Mantel, A. Matei.**, *Analysis of a Viscoelastic Antiplane Contact Problem with Slip Dependent Friction*, *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 12, p.p. 101-108, [\(2002\)](#).
- [18]–**I. Hlavacek, J. Haslinger, J. Necas, J. Lovisek.**, *Solutions of Variational Inequalities in Mechanics*, Springer-Verlag, New York, [\(1988\)](#).
- [19]–**L. Jianu, A. Matei, M. Sofonea.**, *Quasistatic Elastic-Visco-Plastic Problems with Friction* *Ann. Univ. Buc., Math.*, 51, p.p. 23-38, [\(2002\)](#).
- [20]–**N. Kikuchi, J.T. Oden.**, *Contact problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM, Philadelphia, [\(1988\)](#).
- [21]–**A. Klarbring, A. Mikelic, M. Shillor.**, *Frictional Contact Problems with Normal Compliance*, *Int. J. Engng. Sci.*, 26, p.p. 811-832, [\(1988\)](#).
- [22]–**J. L. Lions.**, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non-Linéaires*, Dunod et Gauthier-Villars, Paris [\(1969\)](#).

-
- [23]–**J. A. C. Martins.**, J. T. Oden, *Existence and Uniqueness Results for Dynamic Contact Problems with Nonlinear Normal and Friction Interface Laws*, *Nonlinear Analysis TMA*, 11, p.p. 407-428, (1987).
- [24]–**A. Matei, V. V. Motreanu, M. Sofonea.**, *A Quasistatic Antiplane Contact Problem with Slip Dependent Friction*, *Advances in Nonlinear Variational Inequalities*, 4, p.p. 1-21, (2001).
- [25]–**A. Matei, V. V. Motreanu, M. Sofonea.**, *On the Signorini Frictionless Contact Problem for Linear Viscoelastic Materials*, *Applicable Analysis*, p.p. 45-55, (2004).
- [26]–**A. Matei et T.-V. Hoarau-Mantel.**, *Problèmes antiplans de contact avec frottement pour des matériaux viscoélastiques à mémoire longue*, *Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser. Volume 32*, Pages 200–206, Year (2005).
- [27]–**D. Motreanu, M. Sofonea.**, *Evolutionary Variational Inequalities Arising in Quasistatic Frictional Contact Problems for Elastic Materials*, *Abstract and Applied Analysis*, 4, p.p. 255-279, (1999).
- [28]–**J. Necas, I. Hlavacek.**, *Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies: An Introduction*, Elsevier, Amsterdam, (1981).
- [29]–**M. Sofonea.**, *Problèmes Non-linéaires dans la Théorie de l'Elasticité*, *Cours de Magister de Mathématiques Appliquées*, Université de Sétif, Algérie, (1993).
- [30]–**M. Sofonea and A. Matei.**, *Variational inequalities with applications. A study of antiplane frictional contact problems*, *Advances in mechanics and mathematics*, Springer, 2009 (230 pages), year (2009).
- Publication1*** [31-a]–**M. Dalah et al.**, *An Antiplane Electro-Elastic Contact Problem: Case Regularized Friction Law*, : *Int. J. of Dynamical Systems and Differential (JDSD)*, (2018), <http://www.inderscience.com/>
- [32]–**A. Megrou, A. Derbazi and M. Dalah.**, *Existence and Uniqueness of the Weak Solution for a Contact Problem*, *Journal of Nonlinear Science and Applications (JNSA)*, p.p., 1.14, year (2016).
- [33]–**A. Megrou, A. Derbazi, M. Dalah.**, *An Antiplane Electro-Elastic Contact Problem with Tresca's Friction Law*, *JRADSC*, pp. 104–116, year (2015).

- [34]–**Dalah, M. Sofonea.**, *Antiplane Frictional Contact of Electro-Viscoelastic Cylinders*, *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2007, No. 161, pp. 1–14. ISSN: 1072-6691, year [\(2007\)](#).
- [35]–**M. Sofonea, M. Dalah and A. Ayadi.**, *Analysis of an Antiplane Electro-elastic Contact Problem*, *Adv. Math. Sci. Appl.* 17, pp. 385-400, year [\(2007\)](#).
- [36]–**M. Dalah.**, *Analysis of Electro-viscoelastic Contact Problem with Total Slip-Rate Dependent Friction*, *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2009, No. 118, pp. 1–15. ISSN: 1072-6691, year [\(2009\)](#).
- [37]–**M. Dalah.**, *Thèse de Doctorat*, p.p. 1-133, *Sous la direction de : Pr. M. Sofonea & A. Ayadi, Université de Perpignan, France & Université de Constantine*, Year [\(2008\)](#).
- [38]–**K.T. Andrews, A. Klarbring, M. Shillor and S. Wright.**, *A dynamic contact problem with friction and wear*, *Int. J. Egn. Sci.* **35**, 1291-1309, year [\(1997\)](#).
- [39]–**M. Barboteu, J. R. Fernández and Y. Ouafik.**, *Numerical analysis of two frictionless elastic-piezoelectric contact problems*. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **339**(2), pp. 905-917, year [\(2008\)](#).
- [40]–**M. Barboteu, A. Matei, M. Sofonea.**, *Analysis of quasistatic viscoplastic contact problems with normal compliance*. *Q. J. Mech. Appl. Math.* **65**(4), pp. 555-579, year [\(2012\)](#).
- [41]–**M. Barboteu and M. Sofonea.**, *Solvability of a dynamic contact problem between a piezoelectric body and a conductive foundation*. *Appl. Math. Comput.* **215**, pp. 2978-2991, year [\(2009\)](#).
- [42]–**M. Barboteu and M. Sofonea.**, *Modelling and analysis of the unilateral contact of a piezoelectric body with a conductive support*. *J. Math. Anal. Appl.* **358**, pp. 110-124, year [\(2009\)](#).
- [43]–**M. Barboteu and M. Sofonea.**, *Analysis and numerical approach of a piezoelectric contact problem*. *Ann. AOSR, Ser. Math. Appl.* **1**, pp. 7-30, year [\(2009\)](#).

-
- [44]–**V. Barbu.**, *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces*, Editura Academiei, Bucharest-Noordhoff, Leyden, year [\(1976\)](#).
- [45]–**V. Barbu.**, *Optimal control of variational inequalities*, Pitman, Boston, year [\(1984\)](#).
- [46]–**R. C. Batra and J. S. Yang.**, *Saint-Venant's principle in linear piezoelectricity*, *J. Elast.* **38**(2), pp. 209-218, year [\(1995\)](#).
- [47]–**P. Bisegna, F. Lebon and F. Maceri.**, *The unilateral frictional contact of a piezoelectric body with a rigid support*, J.A.C. Martins and M.D.P. Monteiro Marques (eds.), *Contact Mechanics*, pp. 347-354, year [\(2002\)](#).
- [48]–**H. Brézis.**, *Équations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité*, *Ann. Inst. Fourier*, pp. 115-175, year [\(1968\)](#).
- [49]–**H. Brézis, Analyse fonctionnelle.** *Théorie et applications*, Masson, Paris, year [\(1983\)](#).
- [50]–**O. Chau, J. R. Fernández, W. Han and M. Sofonea.**, *A frictionless contact problem for elastic–viscoplastic materials with normal compliance and damage. Computer methods in applied mechanics and engineering*, **191** (44), pp. 5007-5026, year [\(2002\)](#).
- [51]–**O. Chau, J. R. Fernández, M. Shillor and M. Sofonea.**, *Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic contact problem with adhesion. Journal of Computational and Applied Mathematics*, **159** (2), pp. 431-465, year [\(2003\)](#).
- [52]–**O. Chau, M. Shillor and M. Sofonea.**, *Dynamic frictionless contact with adhesion. Z. Angew. Math. Phys.* **55**(1), pp. 32-47, year [\(2004\)](#).
- [53]–**J. Chazarain et A. Piriou.**, *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires*, Gauthier-Villars, Paris, year [\(1981\)](#).
- [54]–**G. Duvaut and J. L. Lions.**, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Springer, Berlin, year [\(1976\)](#).
- [55]–**H. Fan, K. Y. Sze and W. Yang.**, *Two-dimensional contact on a piezoelectric half-space*, *Int. J. Solids Struct.* **33**(9), pp. 1305-1315, year [\(1996\)](#).

- [56]–**G. Fichera.**, *Problemi elastostatici convincoli unilaterali. II. Problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno*, mem. Accas. Naz. Lincei, **7**, pp. 91–140, year [\(1964\)](#).
- [57]–**G. Fichera.**, *Boundary value problems in elasticity with unilateral constraints*, in *Handbuch der Pphysik VI a/2*, Springer, Berlin, pp. 391–424, year [\(1972\)](#).
- [58]–**M. Frémond.**, *Équilibre des structures qui adhèrent à leur support*, C. R. Acad. Sci. Paris, 295, Série II, pp. 913-916, year [\(1982\)](#).
- [59]–**M. Frémond.**, *Adhérence des solides*, J. Mécanique Théorique et Appliquée, **6**(3), pp. 383-407, year [\(1987\)](#).
- [60]–**M. Frémond.**, *Non-Smooth Thermomechanics*, Springer, Berlin, year [\(2002\)](#).
- [61]–**M. Frémond and B. Nedjar.**, *Damage in concrete: the unilateral phenomenon*. Nuclear Engng. Design **156**, pp. 323-335, year [\(1995\)](#).
- [62]–**M. Frémond and B. Nedjar.**, *Damage, gradient of damage and principle of virtual work*. Int. J. Solids Structures **33**(8), pp. 1083-1103, year [\(1996\)](#).
- [63]–**M. Frémond, K.L. Kuttler, B. Nedjar and M. Shillor.**, *One-dimensional models of damage*. Adv. Math. Sci. Appl. **8** (2), pp. 541-570, year [\(1998\)](#).
- [64]–**L. Gasiński and A. Ochal.**, *Dynamic thermoviscoelastic problem with friction and damage*. Nonlinear Analysis: Real World Applications, **21**, pp. 63-75, year [\(2015\)](#).
- [65]–**L. Gasiński, A. Ochal and M. Shillor.**, *Quasistatic thermoviscoelastic problem with normal compliance, multivalued friction and wear diffusion*. Nonlinear Analysis: Real world Applications **27**, pp. 183-202, year [\(2016\)](#).
- [66]–**R. J. Gu, K.L. Kuttler and M. Shillor.**, *Frictional wear of a thermoelastic beam*. J. Math. Anal. Appl. **242**(2), pp. 212-236, year [\(2000\)](#)..
- [67]–**R. J. Gu and M. Shillor.**, *Thermal and wear analysis of an elastic beam in sliding contact*. Int. J. Solids and Struct. **38** (14), pp. 2323-2333, year [\(2001\)](#).

[68]–**W. Han and M. Sofonea.**, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, *Studies in Advanced Mathematics*, American Mathematical Society, Providence, RI-International Press, year **(2002)**.

[69]–**W. Han, M. Sofonea and K. Kazmi.**, *Analysis and numerical solution of a frictionless contact problem for electro-elastic-viscoplastic materials*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **196**(37), pp. 3915-3926, year **(2007)**.

[70]–**K. L. Kuttler and M. Shillor.**, *Dynamic contact with normal compliance wear and discontinuous friction coefficient*. *SIAM J. Math. Anal.* **34**, pp. 1-27, year **(2002)**.

[71]–**S. Migórski.**, *Dynamic hemivariational inequality modeling viscoelastic contact problem with normal damped response and friction*. *Appl. Anal. Applicable Analysis*, **84**, pp. 669-699, year **(2005)**.

[72]–**Encadreur: Pr. Selmani Lynda, Soutenu par Latreche Soumia.**, UNIVERSITE FERHAT ABBAS-SÉTIF, THÈSE, Présentée à la Faculté des Sciences Département de Mathématiques Pour l'obtention du diplôme de DOCTORAT LMD Option : Mathématiques appliquées, Thème: Analyse variationnelle de différents problèmes aux limites en mécanique du contact, year **(2018)**.
