الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة الإخوة منتوري قسنطينة 1 – قسنطينة

أطروحة

رقم التسلسل: 204/DS/2018
رقم الترتيب: 10/Math/2018

مقدمة بكلية العلوم الدقيقة

قسم الرياضيات

للحصول على شهادة :

دكتوراه علوم في الرياضيات

تخصص: **جبر**

من إعداد:

مراد هلغام

الموضوع تحت عنوان:

حول الـ FC–زمر و الـ FN_k–زمر في بعض فئات الزمر ذات النوع المنتهي

نوقشت يوم: 04 \ 11 \ 2018 أمام اللجنة المكونة من:

صالح جزار	جامعة قسنطينة 1	أ.د	رئيسا
محمد كرادة	جامعة جيجل	أ.د	مشرفا
عبد الحق بركان	جامعة قسنطينة 1	أ.م.أ	ممتحنا
الطاهر حداد	جامعة جيجل	أ.د	ممتحنا
فاتح العشون	جامعة قالمة	أ.د	ممتحنا
لمنور النوي	جامعة باتنة	أ.د	مدعوا

2018

إهداء

إلى روحي والدي

إلى زوجتي و أبنائي

إلى أخواتي و إخوتي

و أخص إهدائي لابنتي

الغالية

نور الايمان.

شكر و تقدير

أبدأ شكري **لله عزّ و جلّ** الذي أعانني و وفّقني لأن أُتِمّ إنجاز هذا العمل

و أصلي و أسلم على نبيه صلى الله عليه و سلم.

و لأن شكر الناس من شكر الله عزّ و جلّ . أتقدم بأسمى عبارات الشكر و التقدير للأستاذ المشرف الأستاذ: **محمد كرادة من جامعة جيجل** على توجيهاته و نصائحه القيمة.

كما أعبر عن فائق شكري للأستاذ **صالح جزار من جامعة قسنطينة 1** لقبوله ترأس هذه اللجنة .

لا يفوتني أن أشكر الأساتذة الممتحنين : **عبد الحق بركان من جامعة قسنطينة 1**، **الطاهر حداد من جامعة جيجل** و **فاتح العقون من جامعة قالمة** لقبولهم أن يكونوا أعضاء في هذه اللجنة و يفيدونا بنصائحهم و اقتراحاتهم.

أوجه شكري و عرفاني للأستاذ **لمنور نوي من جامعة باتنة** للمساعدة و التوجيهات التي قدمها لي.

أتقدم بالشكر كذلك لكل من ساعدني بطريقة مباشرة أو غير مباشرة و لو بالكلمة و أخص بالذكر الأستاذ: **علي بوسعيود**

الذي كان دوما يحفزني للإسراع في انجاز هذه الأطروحة.

ملخص.

يمكن تلخيص ما جاء في هذه الأطروحة الى ثلاثة محاور أساسية.

يتضمن **المحور الأول** جزئين. الأول يضم المفاهيم و الخصائص الأساسية المتعلقة بال FC-زمر . أما الجزء الثاني فنستعرض فيه علاقة هذه الفئة بفئة ال PE-زمر و بمسألة P. Erdös. كما نقوم بتقديم حل لهذه المسألة الذي وضعه B.H Neumann في [25] و الذي سمح بتوسيعها و استحداث الفئتين (χ,∞) و $(\chi,\infty)^*$ من أجل χ خاصية زمر معينة.

يضم **المحور الثاني** جزئين. الأول يتمثل في العناصر الأساسية في نظرية الزمر و بعض فئات الزمر المعروفة و خصائصها. أما الجزء الثاني فيهتم بعرض النتائج التي توصل إليها الباحثون في دراستهم للفئتين (χ,∞) و $(\chi,\infty)^*$ من أجل بعض خاصيات الزمر المعروفة لـ χ.

نتطرق في **المحور الأخير** للنتائج التي توصلنا إليها و التي تتمثل في:

- دراسة استقرار الخاصية FC بالتوسيعين المنتهي والملتوي في بعض فئات الزمر ذات النوع المنتهي.
- دراسة بعض فئات الزمر ذات النوع المنتهي و المنتهية للفئتين (χ,∞) و $(\chi,\infty)^*$ في الحالات التالية:

$$(\tau N_k,\infty)\ ,(FN_k,\infty),\ ((\tau N_k)\tau,\infty),\ ((FN_k)F,\infty),\ ((\tau N_k)\tau,\infty)^*,\ ((FN_k)F,\infty)^*$$

مع اعتبار الحالات الخاصة من أجل k=1 و k=2.

Abstract

The contents of this thesis can be summarized into three main axes.

The first axis consists of two parts, the first containing the definitions and characteristics of FC-groups. The second part showing the relationship between this class, the class of PE-groups and the problem of P. Erdös. We also giving a solution to this problem developed by B. Neumann in [25], which allowed the extension of this problem and the introductions of the two classes (χ,∞) and $(\chi,\infty)^*$ for certain classes of χ-groups.

The second axis includes two parts. The first is the basic elements in the theory of groups and some known classes of groups and their properties. The second part presents the findings of the researchers in their study of the two categories (χ,∞) and $(\chi,\infty)^*$, for certain classes of χ-groups.

In **the last axis** we review the results that we have reached, which are :

- The study of the stability of the property FC by finite and torsion extensions.
- The study of some finitely generated groups belonging to the two classes (χ,∞) and $(\chi,\infty)^*$ in those cases:

$(\tau N_k,\infty)$,(FN_k,∞), $((\tau N_k)\tau,\infty)$, $((FN_k)F,\infty)$, $((\tau N_k)\tau,\infty)^*$, $((FN_k)F,\infty)^*$

with special cases considered for k = 1 and k = 2.

Résumé

Le contenu de cette thèse peut être résumé en trois axes principaux.

Le premier axe est constitué de deux parties. La première contenant les notions de bases et les propriétés des FC-groupes. La seconde partie montre la relation entre cette classe et celle des PE-groupes et le problème de P. Erdös. Nous donnons également une solution à ce problème développé par B. Neumann dans [25], ce qui a permis à l'extension de ce problème et à l'introduction des deux classes de groupes (χ,∞) et $(\chi,\infty)^*$ pour certaines propriétés de groupes connues χ.

Le deuxième axe comporte deux parties. La première partie comprend quelques notions fondamentales de la théorie des groupes et certaines classes de groupes connus et leurs propriétés.
La deuxième partie présente les résultats des chercheurs dans leur travaux dans les classes (χ,∞) et $(\chi,\infty)^*$ pour certaines propriétés de groupes connues χ.

Dans **le dernier axe**, nous présentons les résultats que nous avons obtenus comme suit:

- L'étude de la stabilité de la propriété FC par une extension finie et celle de torsion.
- L'étude de certaines classes de groupes de type fini appartenant aux deux classes (χ,∞) et $(\chi,\infty)^*$ dans les cas suivants:

$(\tau N_k,\infty)$,(FN_k,∞), $((\tau N_k)\tau,\infty)$, $((FN_k)F,\infty)$, $((\tau N_k)\tau,\infty)^*$, $((FN_k)F,\infty)^*$

Avec des cas particuliers considérés pour k = 1 et k = 2.

الفهـــرس

مقدمة......... i

1 الفصل الأول. حول الـ FC-زمر و مسألة بول إيردوس. 7

1.1 مقدمة 7

2.1 تعاريف و خصائص الـ FC-زمر 7

1.2.1 الترافق و العناصر المترافقة 7

2.2.1 الـ FC-عنصر و الـ FC-زمرة 9

3.2.1 الـ FC-زمر ذات النوع المنتهي 16

4.2.1 الـ FC -زمر و الزمر المنتهية محليا. 17

5.2.1 تمييز FC-زمرة 19

3.1 FC-زمر، PE-زمر و مسألة بول إيردوس. 20

1.3.1 مقدمة 20

2.3.1 مسألة بول إيردوس Paul Erdös. 21

3.3.1 حل مسألة بول إردوس Paul Erdös. 23

2 الفصل الثاني عناصر نظرية الزمر و الفئتان (χ,∞) و $(\chi,\infty)^*$. 27

1.2 مقدمة 27

2.2 عناصر نظرية الزمر 28

1.2.2 فئات الزمر و عمليات الإغلاق 28

2.2.2 بعض عمليات الإغلاق المعروفة 31

3.2.2 الشرط الأعظمي و الشرط الأصغري على الزمر الجزئية 34

4.2.2 بعض فئات الزمر المعروفة 37

3.2 فئات الزمر من النوع (χ, ∞) 53

1.3.2 مقدمة 53

2.3.2 النتائج الأولى للفئات من النوع (χ , ∞) 54

3.3.2 فئات زمر أخرى من النوع (χ,∞) 56

4.2 فئات الزمر من النوع $(\chi, \infty)^*$ 59

1.4.2 مقدمة 59

2.4.2 بعض النتائج من النوع $(\chi, \infty)^*$ 59

3 الفصل الثالث. حول الـ FC-زمر و الـ FN_k-زمر في بعض فئات الزمر ذات النوع المنتهي 62

1.3 مقدمة 62

2.3 استقرار الخاصية FC ببعض العمليات الجبرية 63

3.3 التوسيع الملتوي و المنتهي للخاصية FC 66

4.3 FN_k و τN_k-زمر مع الشرط على المجموعات غير المنتهية 72

1.4.3 الفئاتان (FN_k,∞) و $(\tau N_k,\infty)$ 72

2.4.3 الفئتان $((FN_k)F, \infty)$ و $((\tau N_k)\ \tau, \infty)$ 74

5.3 الفئتان $((FN_k)F, \infty)^*$ و $((\tau N_k)\ \tau, \infty)^*$ 78

الخاتمة 82

مراجع 82

مقدمة

مقدمة

من بين فئات الزمر غير المنتهية التي جذبت انتباه العديد من علماء الرياضيات، نجد فئة الزمر التي يكون فيها لكل عنصر من هذه الزمرة صنف ترافق منته (finite conjugacy class). هذه الفئة لها عدة خصائص مشتركة مع فئتي الزمر الآبلية و المنتهية.

تم تسمية هذا النوع من الزمر لأول مرة و بشكل مختصر بـ FC-زمرة (FC-group) من قبل عالم الرياضيات الأمريكي R.Baer في عام 1948. بعدها قام هذا العالم بمعية علماء آخرين أمثال B.H. Neumann, J. Erdös و F. Haimo و غيرهم بدراسة وتطوير هذا النوع من الزمر و التوسع فيها. انظر المراجع [5 ,14 ,24 ,26]. كما تناولها بإسهاب كذلك عالم الرياضيات J. Tomkinson في كتابه الذي صدر عام 1984 بعنوان "FC-groups " [34].

إن فئة الـ FC-زمر مستقرة (أي مغلقة) بواسطة بعض العمليات الجبرية، على سبيل المثال، الإنتقال إلى الزمر الجزئية (passage to subgroups)، بواسطة الصورة التماثلية (hpmomorphic image) , بشكل خاص عن طريق حاصل القسمة (quotient) وعن طريق الجداء المباشر المقيد (restricted direct product). من جهة أخرى فان هذه الفئة غير مستقرة ببعض العمليات الجبرية مثل التوسيع (extension) حتى و لو كان هذا التوسيع منته (finite extension).

يمكن ملاحظة أن فئة الـ FC-زمر ذات عائلة مولدة منتهية يمكن مطابقتها مع فئة الـ FA-زمر و التي هي بدورها حالة خاصة من فئة الـ FN_k-زمر حيث k=1.

بين فئات الزمر التي شغلت بعض علماء الرياضيات، نجد فئة الزمر (χ, ∞) حيث χ هي خاصية زمر معينة، و هي فئة

الزمر غير المنتهية G حيث أي جزء غير منته X منها يشمل عنصرين مختلفين يولدان زمرة جزئية تحقق الخاصية χ. السؤال الذي يهم علماء الرياضيات هو التالي : إذا كانت G زمرة في هذه الفئة، فهل G تملك خاصية متعلقة بالخاصية χ؟ على سبيل المثال، هل G لديها الخاصية $\gamma\chi$ أو $\chi\gamma$، وما إلى ذلك، حيث γ هي خاصية زمر أخرى و بالأخص هل G في نفس الفئة χ.

يرجع أصل هذا النوع من المسائل إلى عالم الرياضيات P. Erdös عام 1976 ، الذي طرح سؤالًا من حيث نظرية البيانات (Graph Theory) والتي يمكن إعادة صياغته في لغة نظرية الزمر بالطريقة التالية: إذا كانت G زمرة حيث أي جزء غير منته X منها يشمل عنصرين مختلفين متبادلان, فهل يوجد هناك حد منته لأصلي (cardinal) هذه الأجزاء المنتهية.

في عام 1981 ، عمد J.C. Lennox و J. Wiegold في [20] إلى تعميم مشكلة P. Erdös وأسفر عن ذلك إنشاء الفئة (χ,∞) المعرفة على النحو المحدد أعلاه حيث χ خاصية زمر معينة ، مع وضع شروط أخرى على الزمرة المعنية الأمر الذي أمكنهم تمييز هذه الفئة. على وجه التحديد أثبتوا أن الزمرة القابلة للحل من النوع المنتهي تكون في الفئة (N,∞) (على الترتيب (P,∞) , (C_O,∞)) إذا وفقط إذا كانت في الفئة FN (على الترتيب (C_O, P)) حيث تشير P، N، Co و F على التوالي إلى فئة الزمر متعددة الدورية (polycyclic)، عديمة القوة (Nilpotent)، المتماسكة (coherant) والمنتهية (finite).

يمكن إيجاد نتائج أخرى عن هذا النوع من الفئات في المراجع التلية: [1,2, 3, 4,9-13, 19-23,36,37].

من جهة أخرى تمكن باحثون من توسيع الفئة $(\infty، \chi)$ و توصلوا إلى فئة أوسع رمزوا لها $(\infty، \chi)^{*}$ حيث χ هي خاصية زمر معينة و التي تمثل فئة الزمر التي من أجلها كل جزء غير منته X منها يشمل عنصرين مختلفين x, y بحيث الزمرة الجزئية $<x, x^{y}>$ تنتمي للفئة χ.

في عام 2005 تمكن N. Trabelsi في[38] من تمييز فئة الـ S-زمر ذات النوع المنتهي المنتمية للفئة $(CN, \infty)^{*}$ حيث C هي فئة زمر شتارنيكوف(Cernikov). نتائج أخرى لهذا النوع من الفئات يمكن إيجادها في المراجع [16, 31].

أهدافنا في هذه الأطروحة هو أولا دراسة التوسيع الملتوي (على التوالي التوسيع المنتهي) لـ FC-زمرة في فئة الـ τN-زمر (على التوالي FN-زمر) ذات النوع المنتهي. ثانياً دراسة الفئة $((FN_k)F,\infty)$ (على الترتيب $((\tau N_k)\tau,\infty)$) في فئة FN-زمر (على الترتيب τN-زمر) ذات النوع المنتهي. ثالثًا، دراسة الفئة $((FN_k)F,\infty)^{*}$ (على الترتيب $((\tau N_k)\tau,\infty)^{*}$) في فئة FN-زمر (على الترتيب τN-زمر) ذات النوع المنتهي. أخيرا، دراسة النتائج التي تم الحصول عليها سابقا عن طريق استبدال الشرط "FN من نوع منته" بالشرط "NF من نوع منته" و حالتي k=1 و k=2.

تتكون أطروحتنا من ثلاثة فصول والتي يتم عرضها على النحو التالي:

في **الفصل الأول** ، نقدم في جزئه الأول بعض المفاهيم والخصائص الأساسية المتعلقة بالـ FC-زمر. في الجزء الثاني نذكر بمسألة بول إيردوس P. Erdös التي هي

أصل مسألة تمييز فئتي الزمر(χ,∞) و $(\chi,\infty)^*$ حيث χ خاصية زمر معينة و نبين العلاقة الموجودة بين فئة الـ FC-زمر والـ PE-زمر و هذه المسألة. وننهي هذا الفصل بإعطاء حل لمسألة بول إيردوس الذي يعود لعالم الرياضيات B.H Neumann.

الفصل الثاني نكرس جزءه الأول لبعض المفاهيم الأساسية في نظرية الزمر و الذي نبدؤه بمفاهيم فئات الزمر والخاصيات النظرية للزمر وخصائصهما ، بالإضافة إلى بعض عمليات الإغلاق المعروفة. كما يتم التذكير بمفهومي الشرط الأعظمي و الشرط الأصغري على الزمر الجزئية لزمرة. ثم نهتم بعدها ببعض الفئات من الزمر المعروفة ومميزاتها، مثل فئة الـ N-زمر، الـ FN-زمر، الـ NF-زمر، الـ S-زمر، زمر أنجال، زمر n-انجال و غيرها. في الجزء الثاني نعرض جُل النتائج المتعلقة بالفئات من النوع (χ,∞) المماثلة لنتائج J. Wiegold وJ.C. Lennox في [20] لا سيما في [1,2, 3, 9,4-13, 19-23,36,37]. وننهي هذا الفصل بإعطاء النتائج من النوع $(\chi,\infty)^*$ الذي تم الحصول عليها في [16، 31، 38].

فيما يتعلق **بالفصل الثالث**، يتكون عملنا من ثلاثة أجزاء. في الجزء الأول ندرس استقرار الخاصية FC بالتوسيعين المنتهي و الملتوي. إذ نثبت من خلال النظرية1.3.3 أنه في فئة الـ FN-زمر ذات النوع المنتهي فإن الخاصية FC مستقرة بواسطة توسيع منته. ثم نثبت أن التوسيع الملتوي لـ FC-زمرة في فئة الـ τN-زمر ذات النوع المنتهي هي τA-زمرة.

كما نبين من خلال مثال مضاد أن الشرطان "عديمة القوة" و "من نوع منته" ضروريان لصحة النتائج السابقة.

نثبت في الجزء الثاني أن كل $((FN_k)F,\infty)$-زمرة (على الترتيب $((\tau N_k)\tau,\infty)$-زمرة) في فئة FN-زمر (على الترتيب τN-زمر) ذات النوع المنتهي هي $FN_k^{(2)}$- زمرة (على الترتيب $\tau N_k^{(2)}$-زمرة). ثم و اعتمادا على النتائج السابقة و باستبدال الفئة FN بالفئة NF نستنتج أن كل $((FN_k)F,\infty)$-زمرة في فئة NF-زمر ذات النوع المنتهي هي $N_k^{(2)}F$- زمرة. أما الجزء الأخير فنبيّن فيه أنه من أجل كل FN-زمر(على الترتيب τN-الزمر) ذات النوع المنتهي في الفئة $((FN_k)F,\infty)^*$ (على الترتيب $(((\tau N_k)\tau,\infty)^*$) فإنه يوجد عدد طبيعي $c=c(k)$ متعلق فقط بـ k بحيث $G\in FN_c$ (على التوالي $G\in\tau N_c$). وأخيرًا، على وجه الخصوص نستنتج تحت نفس الشروط أنه إذا كانت $G\in((FC)F,\infty)^*$ فان $G\in FN_2$ و إذا كانت $G\in((FN_2)F,\infty)^*$ فان $G\in FN_3^{(2)}$.

الفصل

الأول

الفصل الأول. حول ال FC-زمر و مسألة بول إيردوس.

1.1 مقدمة

يجمع هذا الفصل المفاهيم الأساسية والنتائج الرئيسية المتعلقة بفئة الزمر ذات أصناف الترافق المنتهية (FC-زمر). هذه النتائج و نتائج اخرى يمكن إيجادها في المراجع [34,26,24,14,5].
كما نتطرق في هذا الفصل للعلاقة التي تربط هذه الفئة بفئة PE-زمر و بمسألة بول إيردوس P. Erdös و ننهيه باستعراض حلا لهذه المسألة الذي وضعه B.H Neumann في [25].

2.1 تعاريف و خصائص ال FC-زمر.

1.2.1 الترافق و العناصر المترافقة.

يمكن إيجاد المفاهيم و النتائج المتعلقة بهذه الفقرة في المراجع التالية [33,29,21]

تعريف 1.2.1. لتكن G زمرة ضربية. الزمرة G تعمل (أو تأثر) على نفسها بواسطة التطبيق (.) المعرف من $G\times G$ في G بـ: $(.) : (g,x)\mapsto g.x = g^{-1}xg$ يدعى هذا التطبيق بالتأثير بالترافق (action by conjugation).

هذا التعريف مكافئ لإعطاء تماثل زمري (morphism of groups) φ من G في $Aut(G)$ معرف بـ: $x\mapsto \varphi(x)$ بحيث، لكل $g\in G$: $\varphi(x)(g) = g.x = g^{-1}xg$. يدعى هذا التأثير أيضا بالتأثير بالتماثل الذاتي الداخلي (action by interior automorphism)

تعريف 2.2.1. العنصر $g^{-1}xg$ يسمى مرافق (conjugate) x في G الذي يرمز له بـ x^g. مدار x (orbit) تحت هذا التأثير يسمى صنف الترافق (conjugation classe) لـ x و يرمز له بـ x^G و لدينا : $x^G=\{g^{-1}xg:\ g\in G\}$

خاصية 1.2.1. مثبت العنصر x من G تحت التأثير بالترافق هو ممركز العنصر x في G (centraliser) و هو زمرة جزئية من G يرمز لها بـ $C_G(x)$ المعرفة بـ: $C_G(x)=\{g\in G:\ xg\ =gx\}$ والتطبيق $\varphi(x)$ المعرف سابقا يتحلل بشكل قانونيش حسب المخطط التبديلي التالي:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varphi(x)"] \arrow[d, "s"'] & G \\
(G/C_G(x))_l \arrow[r, "\emptyset"'] & \mathrm{Im}(\emptyset) \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

حيث i هو التباين القانوني المعرف بـ:

$i[\varphi(x)(g)]=\varphi(x)(g)=g^{-1}xg$ و s الغمر القانوني المعرف بـ:

$s(g)=gC_G(x)$ و التطبيق ϕ من $(G/C_G(x))_l$ مجموعة الأصناف من اليسار بترديد $C_G(x)$ نحو x^G مجموعة العناصر المرافقة لـ x في G معرف بـ: $\phi(g.C_G(x))=\varphi(x)(g)=g^{-1}xg.$

خاصية 2.2.1. التطبيق $\phi:(G/C_G(x))_l\to \mathrm{Im}(\phi)=\mathrm{Im}(\varphi(x))=x^G,$

حيث: $gC_G(x)\mapsto g^{-1}xg$

هو تطبيق تقابلي.

البرهان. بالفعل ϕ متباين, من اجل $hC_G(x)$, $gC_G(x)$ من $(G/C_G(x))_1$ بحيث $gxg^{-1} = hxh^{-1}$ لدينا:

$$\begin{aligned} g^{-1}hx &= g^{-1}(hxh^{-1})h \\ &= g^{-1}(gxg^{-1})h \\ &= xg^{-1}h. \end{aligned}$$

و منه $g^{-1}h \in C_G(x)$ ما يدل أن ϕ متباين . بالنسبة لغمرية (surjectivity) ϕ بديهية (من تعريف ϕ). □

خاصية 3.2.1. المركز $Z(G) = \{g \in G : \forall x \in G : xg = gx\}$ للزمرة G ما هو إلا تقاطع لكل المراكز $C_G(x)$ عندما x يتغير في G أي أن $Z(G) = \cap_{x\in G} C_G(x)$. بالإضافة إلى ذلك فان $G/Z(G)$ متشاكل مع $Int(G)$ زمرة التشاكلات الداخلية لـ G.
(Interior Automorphisms group)

2.2.1 الـ FC-عنصر و الـ FC-زمرة.

تعريف 3.2.1. نقول عن عنصر x من G انه FC-عنصر (FC-element) من G إذا كان صنف ترافقه في G منتهيا.

ملاحظة 1.2.1. يمكننا اعتبار FC-عنصر من G على انه تعميم لعنصر من المركز $Z(G)$ إذ أنه في هذا الأخير صنف ترافق كل عنصر هو نفسه. أي $\forall x\in Z(G) : x^G=\{x\}$.

نظرية 1.2.1 (Baer) [5]. مجموعة الـ FC-عناصر من زمرة G تشكل زمرة جزئية مميزة من G تسمى FC-زمرة جزئية (FC-subgroup) لـ G نرمز لها بـ FC(G).

تعريف 4.2.1.[5] نقول عن زمرة G إنها ذات أصناف ترافق منتهية أو اختصارا FC-زمرة (FC-group) إذا و فقط إذا كان FC(G)=G.

ملاحظة 2.2.1. نعلم أن Z(G) هي وسيلة لقياس تبديلية زمرة G. أي G زمرة آبلية إذا كانت Z(G)=G. بينما FC(G) هي وسيلة لقياس الخاصية FC. أي كلما كانت الزمرة الجزئية FC(G) كبيرة كلما كانت G FC-زمرة.
حسب المخطط التبديلي السابق لدينا الخاصية التالية:

خاصية 4.2.1. تكون الزمرة G FC-زمرة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عنصر x من G, $C_G(x)$ مركز العنصر x ذو دليل منته في G.

تعريف 5.2.1. لتكن G زمرة و S مجموعة جزئية من G.
يتم تعريف مركز الجزء S في G الذي نرمز له بـ $C_G(S)$ بـ: $C_G(S)=\{g\in G\ :\ sg=gs,\forall\ s\in S\}$

خـــــــواص 1.2.1.

1. إذا كانت S جزءًا غير خال من G فان :
$C_G(G)=Z(G)$ و $C_G(S)=\cap_{s\in S} C_G(s)$
2. إذا كانت جميع عناصر S تتبادل فيما بينها فان $S\subset C_G(S)$. بشكل خاص إذا كانت H زمرة جزئية آبلية فان: H زمرة جزئية من $C_G(H)$.
3. إذا كان S و T جزءان من G بحيث $S\subset T$ ، فان: $C_G(T)\subset C_G(S)$.
4. لكل جزء S من G لدينا: $C_G(<S>)=C_G(S)$
5. إذا كانت $(S_i)_{i\in 1,..,n}$ عائلة من مجموعات جزئية من G فان: $C_G(\bigcup_{i=1}^{n}S_i)=\bigcap_{i=1}^{n}C_G(S_i)$.

خاصية 5.2.1. إذا كانت H زمرة جزئية منتهية من G فان $C_G(H)$ زمرة جزئية ناظمية من G و زمرة حاصل القسمة $G/C_G(H)$ منتهية.

تعريف 6.2.1.

1. الإغلاق الناظمي (normal closure) لمجموعة جزئية S من زمرة G التي نرمز لها S^G هي الزمرة الجزئية من G المولدة بمجموعة العناصر المترافقة لعناصر S. أي $S^G =< g^{-1}sg : g \in G , s \in S >$.
2. نواة (the Core) المجموعة الجزئية S من زمرة G التي نرمز لها S_G هي الزمرة الجزئية من G المولدة باتحاد جميع الزمر الجزئية الناظمية من G المحتواة في S. أي $S_G =< \bigcup_{i\in I} H_i : H_i \lhd G / H_i \subset S >$, إذا لم توجد هكذا زمر جزئية فانه اصطلاحا $S_G = \{1\}$.

ملاحظة 3.2.1.

1. S^G هي أصغر زمرة جزئية ناظمية من G تحتوي على S.
2. S_G هي أكبر زمرة جزئية ناظمية من G محتواة في S.
3. إذا كانت H زمرة جزئية من G ، ففي هذه الحالة:
   - الإغلاق النظامي لـ H هو: $H^G =< g^{-1}Hg : g \in G >$
   - نواة H هي: $H_G = \bigcap_{g\in G} H^g$ حيث $H^g = g^{-1}Hg$ يمثل الزمرة الجزئية المترافقة لـ H.

خاصية 6.2.1. تكون زمرة G FC-زمرة إذا و فقط إذا من أجل كل جزء منته S من G فان $C_G(S^G)$ مركز S^G ذو دليل منته في G.

البرهان. لتكن G FC-زمرة. لدينا

$$[G : C_G(S^G)] = [G : \bigcap_{s\in S^G} C_G(s)]$$
$$= [G : \bigcap_{\substack{t\in S\\ g\in G}} C_G(g^{-1}tg)]$$
$$= [G : \bigcap_{\substack{t\in S\\ g\in G}} g^{-1}C_G(t)g]$$
$$\leq \Pi_{\substack{t\in S\\ g\in G}} [G : g^{-1}C_G(t)g]$$
$$= \Pi_{t\in S}[G : C_G(t)] \quad .$$

بما أن G هي FC-زمرة فان $[G : C_G(t)]$ منتهية و بالتالي $[G : C_G(S^G)]$ منتهية أيضا.

عكسيا إذا اعتبرنا S={x} فيكون لدينا

$$[G : C_G(x^G)] = [G : \bigcap_{g\in G} g^{-1}C_G(x)g] \leq \Pi_{g\in G}[G : g^{-1}C_G(x)g] < \infty$$

و هو ما يدل أن G FC-زمرة. □

مثال 1.2.1. كل زمرة آبلية أو منتهية هي FC-زمرة.

خاصية 7.2.1. كل جداء مباشر منته (finite direct product) لزمر آبلية و/أو زمر منتهية هي FC-زمرة.

البرهان. لتكن H, K زمرتين آبليتين أو منتهيتين. فان صنف الترافق للثنائية (h, k) من الجداء المباشر H×K هو : $(h,k)^{H\times K} = h^H \times k^K$ و كون h^H و k^K منتهيين فان $(h, k)^{H\times K}$ منته ما يدل أن $H\times K$ FC-زمرة. □

فيما يلي بعض النتائج الرئيسية وخصائص FC-زمر.

تعريف 7.2.1. نقول عن زمرة G أنها مركزية-بواسطة-منتهية (center-by-finite) و نقول اختصارا FIZ-زمرة. إذا كان مركزها $Z(G)$ ذو دليل منته في G أي G/Z(G) منتهية.

تعريف 8.2.1. نقول عن زمرة G أنها FD-زمرة (FD-group) و نقول كذلك منتهية-بواسطة-آبلية (FA-group) إذا كانت زمرتها المشتقة G′ (derived group) منتهية.

توطئة 1.2.1. (Shur) إذا كانت N زمرة جزئية من FIZ-زمرة G محتواة بمركزها $Z(G)$ بحيث $[G : Z(G)] = n$ فان التطبيق $f : x \mapsto x^n,$ المعرف من G نحو N هو تماثل زمر.

نظرية 2.2.1. (Shur) إذا كانت G FIZ-زمرة بحيث $[G : Z(G)] = n$ فان G FA-زمرة و $G'^n = \{g^n, g \in [G G]\} = 1$. أي أن FIZ⊂FD.

البرهان. بالفعل بتطبيق النظرية الأولى للتشاكلات على التطبيق f في التوطئة 1.2.1 أعلاه فإن $G/kerf \cong Imf \leq Z(G)$ و بالتالي $G/kerf$ زمرة آبلية وهذا بدوره يؤدي إلى أن $kerf \leq G'$ و بالتالي نستنتج أن $f(G') = G'^n = 1$. □

نظرية 3.2.1. .
إذا كانت G زمرة FIZ-زمرة فان G FC-زمرة. أي FIZ⊂FC. العكس غير صحيح.

البرهان. بالفعل، من أجل كل x من G لدينا :
$Z(G) \leq C_G(x)$ و بالتالي $[G : C_G(x)] \leq [G : Z(G)]$ بما أن $G/Z(G)$ زمرة منتهية نستنتج أن $C_G(x)$ ذات دليل منته في G ما يدل أن G FC-زمرة. □

نظرية 4.2.1.
إذا كانت G FA-زمرة فان G FC-زمرة. أي FA ⊂ FC. القضية العكسية غير صحيحة.

البرهان. بالفعل، من أجل كل x من G لدينا من أجل كل y من G:

$x^y=x[x\ y]$ أي أن $x^G \subset xG'$ فكون G' منتهية يؤدي إلى x^G منتهية و بالتالي G FC-زمرة. □

ملاحظة 4.2.1. من النظريات 2.2.1.، 3.2.1.، 4.2.1.
يكون لدينا: $FIZ \subset FA \subset FC$.

نظرية 5.2.1. [14]
إذا كانت S عائلة مولدة لزمرة G فان G FC-زمرة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عنصر s من S فان s^G ذو أصلي منته.

نظرية 6.2.1.[14]
إذا كانت G FC-زمرة ، فإن المجموعة T = Tor(G) للعناصر من G ذات الرتب المنتهية (أو عناصر الالتواء) هي زمرة جزئية مميزة تشمل الزمرة المشتقة G' تسمى الزمرة الجزئية للالتواء أو الدورية (torsion or periodic subgroup) و تكون زمرة القسمة G/T زمرة آبلية بدون التواء (Abelian torsion-free).

نظرية 7.2.1. لتكن G FC-زمرة. إذا كانت G AF-زمرة فان G هي FIZ-زمرة. أي أن لدينا: FC ∩ AF ⊂ FIZ.
البرهان. بما أن G AF-زمرة فانه توجد زمرة ناظمية و آبلية A من الزمرة G و ذات دليل منته فيها. ليكن $|G/A|=n$ و بالتالي $G/A=\{g_1A,g_2A,\ldots,g_nA\}$. من أجل كل x من G يوجد على الأقل $g_i \in G$ و $a_i \in A$ بحيث $x=g_ia_i$. و يكون لدينا: $G=<S>=<g_1,g_2,\ldots,g_n,a_1,a_2,\ldots>$ وبحيث:

$$\begin{aligned} Z(G) &= C_G(G) \\ &= C_G(<S>) \\ &= C_G(S) \\ &= C_G(\{g_i\}_{1\le i\le n})\bigcap C_G(\{a_i\}_{i\ge 1}) \\ &= C_G(\{g_i\}_{1\le i\le n})\bigcap C_G(A) \end{aligned}$$

بما أن المجموعة $\{g_i\}_{1\le i\le n}$ مجموعة منتهية و G زمرة-FC فان $C_G(\{g_i\}_{1\le i\le n})$ ذات دليل منته في G و بما أن A ذات دليل منته فان $C_G(A)$ ذات دليل منته في G و بالتالي $Z(G)$ المساوية لــ $C_G(A)\cap C_G(\{g_i\}_{1\le i\le n})$ هي كذلك ذات دليل منته في G. □

النتائج التالية هي مخرجات للنظريات السابقة.

نتيجة 1.2.1. إذا كانت G زمرة-FC بدون التواء فان G زمرة آبلية.

البرهان. بما أن G زمرة بدون التواء فانه حسب النظرية 6.2.1 فان الزمرة الجزئية للالتواء T من G تكون تافهة أي T=1 و بالتالي $G \cong G/T$ و كون G/T آبلية فان G آبلية. □

نتيجة 2.2.1. إذا كانت G زمرة-FC مولدة بعناصر ذات رتب منتهية (أو عناصر دورية periodic elements) فان G زمرة دورية.

البرهان. لتكن $G=<S>$ حيث S هي عناصر ذات رتب منتهية, إذن $S\subset T$ حيث T هوالزمرة الجزئية الدورية للزمرة G و بالتالي $G=<S>\subset T$ و من جهة $T\subset G$ ما يؤدي أن G=T زمرة دورية.□

من النظرية 7.2.1 و باستعمال عكس النقيض نتحصل على النتيجة التالية:

نتيجة 3.2.1. إذا كانت G FC-زمرة بحيث G ليست FIZ-زمرة فان كل زمرة جزئية H من G ذات دليل منته في G ليست آبلية.

نظرية 8.2.1. [5] إذا كانت G FC-زمرة, فإن زمرة القسمة G/Z(G) تكون FC-زمرة دورية.

الفقرة التالية تتعلق بالـ FC-زمر ذات النوع المنتهي و خصائصها.

3.2.1 الـ FC-زمر ذات النوع المنتهي.

نرمز بـ FG لفئة الزمر ذات النوع المنتهي أو ذات عائلة مولدة منتهية (finitely generated) و هي صفة أساسية في كل أنواع الزمر التي يتم التطرق لها في الفصلين القادمين.
إن القضايا العكسية للنظريتين 3.2.1 و 4.2.1 ليستا صحيحتين إلا إذا كانت الزمرة المعنية ذات نوع منته و لدينا النتائج التالية:

نظرية 9.2.1. [24].
1. G FC-زمرة ذات نوع منته إذا و فقط إذا كانت G FIZ-زمرة. أي $FC \cap FG = FIZ \cap FG$.
2. G FC-زمرة ذات نوع منته إذا و فقط إذا كانت G FA-زمرة. أي $FC \cap FG = FA \cap FG$.
3. G FIZ-زمرة ذات نوع منته إذا و فقط إذا كانت G FA-زمرة. أي $FIZ \cap FG = FA \cap FG$.

الخاصية في النظرية التالية هي خاصية مشتركة مع الزمر الآبلية.

نظرية 10.2.1. [24]
كل زمرة جزئية من FC-زمرة ذات نوع منته هي زمرة جزئية ذات نوع منته.

ملاحظة 5.2.1. من النظرية المذكورة أعلاه نستنتج أن FC-زمرة G تحقق الشرط الأعظمي على الزمر الجزئية إذا وفقط إذا كانت ذات نوع منته.

نظرية 11.2.1. [24]. إذا كانت G FC-زمرة ذات نوع منته فان زمرتها الجزئية للالتواء T منتهية.

من النظرية8.2.1 و النظرية11.2.1 فإنه إذا كانت G FC-زمرة ذات نوع منته و كون $T \subset G'$ فإن G FA-زمرة.

نتيجة 4.2.1. كل FC-زمرة دورية ذات نوع منته هي زمرة منتهية.

نظرية 13.2.1.[24]. إذا كانت G FC-زمرة ذات نوع منته فان G تملك زمرة جزئية عديمة الالتواء و ذات دليل منته في G و محتواة في المركز$Z(G)$.

4.2.1 الـ FC -زمر و الزمر المنتهية محليا.

تعريف 8.2.1. نقول عن زمرة G أنها منتهية محليا ناظميا (locally normal finite) (أو اختصارا منتهية محليا)(locally finite)إذا من أجل كل جزء منته F من G توجد زمرة جزئية ناظمية منتهية N من G تشمل F.

ملاحظة 6.2.1. التعريف السابق يكافئ القول أن كل زمرة جزئية H ذات نوع منته من G منتهية.

تبين النظرية التالية التي تعود للعالم الرياضي B .H Neumann في [24] أنه في زمرة G كل FC-عنصر دوري (periodic FC-element) ينتمي لزمرة جزئية ناظمية منتهية من G. يكفي أخذ F={x} في التعريف 8.2.1. و لدينا النظرية أدناه.

نظرية 13.2.1. إذا كان x عنصر من زمرة G فان:
يكون x FC-عنصر دوري إذا وفقط إذا وجدت زمرة جزئية ناظمية منتهية من G تشمل x.

نتيجة 4.2.1. ليكن F جزء منته من زمرة G. كل عنصر من F هو FC-عنصر دوري إذا وفقط إذا وجدت زمرة جزئية ناظمية منتهية من G تشمل F.

نتيجة 5.2.1.

1. الزمرة الجزئية للالتواء لـــ FC-زمرة تكون زمرة منتهية محليا.
2. لتكن G زمرة. تكون G FC-زمرة دورية إذا وفقط إذا كانت G زمرة منتهية محليا.

ملاحظة 7.2.1. حسب (2) من نتيجة 5.2.1. فإننا نطلق أحيانا على الـــ FC-زمر الدورية بالزمر المنتهية محليا و العكس.

5.2.1 تمييز FC-زمرة.

نظرية 14.2.1. [35,Cernikov].

لتكن G زمرة.

1. G FC-زمرة إذا و فقط إذا كانت G متشاكلة مع زمرة جزئية من الجداء المباشر لزمرة منتهية محليا و زمرة آبلية عديمة الإلتواء.
2. G FC-زمرة ذات نوع منته إذا و فقط إذا كانت G متشاكلة مع زمرة جزئية من الجداء المباشر لزمرة منتهية و زمرة آبلية عديمة الإلتواء ذات نوع منته.

إن هذه النظرية الأخيرة تسمح لنا القول أنه إذا عرفنا كل الزمر المنتهية محليا و كل الزمر الآبلية عديمة الالتواء (علي التوالي كل الزمر المنتهية و كل الزمر الآبلية عديمة الالتواء ذات نوع منته) ، فانه يمكننا إنشاء كافة الـ FC-زمر (علي التوالي FC-زمر ذات نوع المنتهي).

ملاحظة 8.2.1. ننوه هنا انه من الصعب للغاية تحديد كل الزمر الجزئية من الجداء المباشر لزمرتين ، مما يدل علي أن هذه النظرية الأخيرة لا تسمح لنا بإعطاء تصنيف كامل (complete classification) للـ FC-زمر (على التوالي للـ FC-زمر ذات نوع المنته).

ملاحظة 9.2.1. إذا كانت F زمرة منتهية و A زمرة آبلية فان الجداء المباشر لهما FC-زمرة ، ولكن العكس غير صحيح دائما ، أي أن FC-زمرة ليست عموما جداء مباشر لزمرة منتهية و زمرة آبلية. كما بينه P. Erdös في [14] في المثال التالي:

مثال 2.2.1. نعتبر زمرة التمثيل المنتهي G المعرفة بـــ: (Finitely presented group)

$G=\langle a,b/aba^{-1}b^{-1}=c/c^2=1,ac=ca,bc=cb\rangle$ و هي زمرة غير آبلية. ولكن زمرتها المشتقة منتهية لان:

$G`= \langle[a,b]\ a,\ b\in G\rangle =\langle c/c^2=1\rangle$ هي زمرة دوارة (cyclic group) ذات الرتبة 2, إذن حسب النظرية 4.2.1 أعلاه فان G هي FC-زمرة. لدينا $a^2b=ba^2$, $b^2a=ab^2$, $ac=ca$ و $bc=cb$. هذا يؤذي إلى أن a^2, b^2 و c تنتمي إلى المركز Z(G) لـــ G و بالتالي $Z(G)=\langle c,a^2,b^2\rangle$. لكن $\langle a^2, b^2\rangle$ متشاكلة مع $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}=\mathbb{Z}^2$ و $\langle c\rangle$ متشاكلة مع $\mathbb{Z}_2$ و بالتالي $Z(G)\cong \mathbb{Z}^2\times\mathbb{Z}_2$ الآبلية و لدينا بالتالي $G/Z(G)\cong \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ وهي زمرة آبلية منتهية. إذا فرضنا انه يمكننا تفكيك G إلى جداء مباشر لزمرة منتهية و زمرة آبلية تكون G بالتالي متشاكلة مع جداء لزمرتين آبليتين و هذا ما يعني أن G آبلية, وهذا تناقض. □

3.1 FC-زمر، PE-زمر و مسألة بول إيردوس.

1.3.1 مقدمة.

نستعرض في هذا الفصل علاقة فئة الـــ FC-زمر بفئة الـــ PE-زمر و علاقة هذه الأخيرة بفئة الـــ FIZ-زمر و بمسألة بول إيردوس (Paul Erdös) التي طرحها هذا اللأخير عام 1976 التي تنص على ما يلي: إذا كانت G زمرة بيانها (graph) لا يحتوي على أي بيانات جزئية تامة (complete subgraphs) غير منتهية، فهل توجد قيمة حدية منتهية لأصلي هذه البيانات؟ في العام نفسه قام

B.H Neumann في المرجع [25] بالإجابة على هذا السؤال و حل هذه المسألة الأمر الذي سمح لـ Lennox و Wiegold في المرجع [20] و علماء رياضيات آخرين بتعميم هذه المسألة و الوصول إلى بعض التمديدات لها.
(extensions of problem of P. Erdös)

2.3.1 مسألة بول إيردوس Paul Erdös.

كما أشرنا في المقدمة فقد قام بول إيردوس في عام 1976 بطرح المسألة التي سميت باسمه و التي نصها ما يلي :

نص مسألة بول إيردوس. إذا كانت G زمرة غير منتهية كل بياناتها الجزئية التامة منتهية ، فهل توجد قيمة حدية منتهية لأصلي هذه البيانات.

تُترجم هذه المسألة في لغة نظرية الزمر على النحو التالي: إذا كانت G زمرة غير منتهية حيث كل جزء غير منته منها يحتوي على عنصرين مختلفين متبادلان، أي كل جزء من العناصر غير المتبادلة بينها مثنى مثنى منتهيا، فهل توجد قيمة حدية منتهية لأصلي هذه الأجزاء؟

1.2.3.1 البيان الجزئي التام و PE-زمرة.

تعريف 1.3.1. لتكن G زمرة.

1. البيان $\Gamma = \Gamma(G)$ المرفق للزمرة G هو البيان الذي رؤوسه هي عناصر هذه الزمرة, بحيث يكون عنصران g, h من G متجاوران (adjacent) إذا كانا غير متبادلين.
2. إذا كانت H مجموعة جزئية من G, نقول عن $\Gamma(H)$ انه بيان جزئي (subgraph) مرفق لـ H إذا حقق شروط (1).
3. نقول عن $\Gamma(H)$ انه بيان جزئي تام (Complete subgraph) إذا كان كل رأس من رؤوسه متصلا بجميع الرؤوس الأخرى بأضلاع. أي كل عناصر H غير متبادلة.

هذا أدى ببول إيردوس إلى إعطاء تعريف زمرة سميت باسمه (بالضبط الحرفين الأولين لاسمه).

تعريف 2.3.1. لتكن زمرة G ذات بيان $\Gamma = \Gamma(G)$.
نقول عن G أنها PE-زمرة (PE-group) إذا وفقط إذا لم يكن بيانها Γ يحتوي على أي بيان جزئي تام غير منته، أي جميع البيانات الجزئية التامة في Γ منتهية.
نذكر بنظرية رامزي (Ramsey) التي ستستعمل في التوطئة التالية:

نظرية 1.3.1. (Ramsey) لتكن X مجموعة غير منتهية.
نضع $X^{(2)} = \{\{x,y\}/x,y \in X\}$ من أجل $\{X_1^{(2)},\ X_2^{(2)}\}$ تجزئة منتهية لـ $X^{(2)}$ فإنه توجد مجموعة غير منتهية $Y \subset X$ بحيث يكون $Y^{(2)} \subset X_1^{(2)}$ أو $Y^{(2)} \subset X_2^{(2)}$.

توطئة 1.3.1. إذا كانت G PE-زمرة فان G FC-زمرة.
القضية العكسية غير صحيحة.

2.2.3.1 *FIZ*-زمرة و *PE*-زمرة.

توطئة 2.3.1. [25] لتكن G FC-زمرة و ليست FIZ-زمرة و تشمل سلسلتين ذات n عنصرا $(x_i)_{1\le i\le n}$ و $(y_i)_{1\le i\le n}$ و التي تحقق الخواص التالية:

1. من أجل كل $1 \le i, j \le n$ حيث $i \ne j$ فان $x_i y_j = y_j x_i$.
2. من أجل كل $1 \le i, j \le n$ حيث $i \ne j$ فان $x_i x_j \ne x_j x_i$.
3. من أجل كل $1 \le i \le n$ فان $x_i y_i \ne y_i x_i$.
4. من أجل كل $1 \le i, j \le n$ فان $y_i y_j = y_j y_i$.

فانه يوجد عنصرين x_{n+1}، و y_{n+1} من G بحيث السلسلتين $(x_i)_{1\le i\le n+1}$ و $(y_i)_{1\le i\le n+1}$ تحقق الخواص من 1. الى 4. أعلاه.

نتيجة 1.3.1. إذا كانت G FC-زمرة ليست FIZ-زمرة فان G ليست PE-زمرة.

البرهان. بما G FC-زمرة و ليست FIZ-زمرة فانه حسب نتيجة 3.2.1 أعلاه G ليست آبلية هذا يعني أن G تملك عنصرين x_1, y_1 غير متبادلان. حسب التوطئة 3.2.1 يوجد عنصران x_2, y_2 من G بحيث $\{x_1, x_2\}$ و $\{y_1, y_2\}$ تحقق خواص هذه التوطئة و بالتالي x_1, x_2 لا يتبادلان و حسب نفس التوطئة فانه يوجد x_3, y_3 عنصران من G بحيث $\{x_1, x_2, x_3\}$ و $\{y_1, y_2, y_3\}$ تحقق الخواص من (1) إلى (4) أي $[x_1, x_3] \neq 1$ و $[x_2, x_3] \neq 1$ و هكذا دواليك نتحصل على متتالية $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ غير منتهية لعناصر غير متبادلة, مما يدل على أن G ليست PE-زمرة. □

3.3.1 حل مسألة بول إردوس Paul Erdös.

بالاعتماد على التوطئة 2.3.1 و النتيجة 1.3.1 تمكن B.H Neumann في المرجع [25] من حل مسألة بول إيردوس من خلال اثبات النظرية التالية:

نظرية 2.3.1. تكون زمرة G PE-زمرة إذا و فقط إذا كانت FIZ-زمرة.

البرهان. نفترض أن G FIZ-زمرة و أن $|G/Z(G)|= n$ إذن $G/Z(G) = \{x_1Z(G), x_2Z(G), \dots, x_nZ(G) \; / \; x_i \in G\}$ تشكل تجزئة لــ G. ليكن X أي جزء من G ذو أصلي n+1 . يوجد إذن عنصران $g,h \in X$ و يوجد $1 \leq i \leq n$ بحيث $g,h \in x_iZ(G)$ ومنه $g = ah$ مع $a \in Z(G)$ و بالتالي $gh = ahh = hah = hg$. إذن كل مجموعة جزية من G ذات n+1 عنصر تشمل عنصرين مختلفين متبادلين و هذا يعني أن G هي PE-زمرة.

عكسيا إذا كانت G PE-زمرة فحسب التوطئة 1.3.1 السابقة فان G هي FC-زمرة و حسب النتيجة السابقة و باستعمال عكس النقيض فان G FIZ-زمرة. □

سنرى في الفصل التالي أن النتيجة التي توصل إليها B.H Neumann سمحت لبعض الباحثين الرياضياتيين من تعميم مسألة Paul Erdös و الوصول إلى استحداث توسيعا لهذه المسألة و هو الفئة من الشكل (χ,∞) (حيث χ خاصية زمر معطاة) للزمر التي كل مجموعة غير منتهية منها تشمل عنصرين مختلفين يولدان χ-زمر و بعدها تمّ التوصل للفئة $(\chi,\infty)^*$ و هي أوسع من الفئة (χ,∞) و التي تمثل فئة الزمر التي كل مجموعة غير منتهية منها تشمل عنصرين مختلفين x, y بحيث الزمرة الجزئية $\langle x, x^y\rangle$ تنتمي للفئة χ.

هاتين الفئتين (التوسيعين) يمثلان صلب موضوع الفصل التالي.

الفصل

الثاني

الفصل الثاني عناصر نظرية الزمر و الفئتان (χ,∞) و $(\chi,\infty)^*$.

1.2 مقدمة.

يتألف هذا الفصل من ثلاثة أجزاء، يشمل الجزء الأول بعض المفاهيم الأساسية لنظرية الزمر التي ستستخدم في الفصل التالي. نقوم أولا بالتذكير بالمفاهيم المتعلقة بفئات الزمر (classes of groups)، الخاصيات النظرية للزمر (theoretical properties of groups) وعمليات الإغلاق (closing operations) المطبقة علي فئة معينه من فئات الزمر وخصائصها. سيتم بعد ذلك الأخذ بمفهومي الشرط الأعظمي والشرط الأصغري على الزمر الجزئية لزمرة اللذان يلعبان دورا هاما في دراسة بعض فئات من الزمر. نهتم بعدها ببعض الفئات من الزمر المعروفة وخصائصها، مثل فئة الـ S-زمر، الـ P-زمر، الـ N-زمر، الـ FN-زمر، الـ NF-زمر، ننهي هذا الجزء بفئتي زمر إنجيل و زمر n-إنجيل. نذكر في الجزء الثاني بمسألة Paul Erdös التي هي أصل مسألة تصنيف فئة الزمر (χ,∞) حيث χ خاصية زمر معينة. كما أننا نعطي جل الدراسات التي أجريت والنتائج التي تم الحصول عليها لهذا النوع من الفئات. يتم إنهاء هذا الفصل بالجزء الثالث المخصص للفئة $(\chi,\infty)^*$ (و التي هي توسيع آخر لمسألة بول إيردوس) و بعض النتائج التي تم الحصول عليها بالنسبة لهذه الفئة. ويمكن الاطلاع علي التعاريف والنظريات للجزء الاول من هذا الفصل في المراجع مثلا [29، 30، 33] و بالنسبة للجزء الثاني في [2,1, 3, 4,9-13, 19-37,36,23] و للجزء الثالث في [16، 31، 38].

2.2 عناصر نظرية الزمر .

اعتمدنا في هذه الفقرة على المراجع التالية [29، 31، 34].

1.2.2 فئات الزمر و عمليات الإغلاق.

تنص متناقضة راسل (Contradictory of Russell) على ما يلي: نفرض أن المجموعة E لكل المجموعات موجودة. لتكن A مجموعة العناصر المعرفة بـــ $A=\{u\in E/u\notin u\}$. لنطرح السؤال هل A تنتمي إلى نفسها أم لا ؟إذا فرضنا $A\in A$ فانه من تعريف A نجد أن $A\notin A$ و إذا فرضنا أن $A\notin A$ فمن تعريف A كذلك نجد أن $A\in A$. تسمى هذه المتناقضة بمتناقضة راسل (Russell) (فيلسوف و عالم رياضي انجليزي ولد 1872 و توفي 1970) و بالتالي E ليست مجموعة, تسمى بفئة مجموعات(Class of sets) بدل مجموعة مجموعات و نسمي عناصرها أشياء أو كائنات (objects).

تعريف 1.2.2. فئة زمر $\mathcal{X}$ هي فئة عناصرها زمر تحقق الشروط التالية:

1. $\mathcal{X}$ تشمل زمرة تافهة(trivial group)
2. إذا كانت G زمرة من الفئة $\mathcal{X}$ و H تشاكل G (isomorphe to)فان H زمرة من الفئة $\mathcal{X}$.

ملاحظة 1.2.2. إذا كانت G زمرة من الفئة $\mathcal{X}$ نكتب $G\in\mathcal{X}$ أو G هي $\mathcal{X}$-زمرة ($\mathcal{X}$-group).

من الأفضل أحيانا معالجة فئات الزمر من خلال الخصائص النظرية لها و التي نعرفها كما يلي:

تعريف 2.2.2. الخاصية النظرية للزمر $\mathcal{X}$

(theorytical property of groups) هي خاصية تميز زمر معينة بحيث:

1. يوجد على الأقل زمرة تافهة تقبل الخاصية $\mathcal{X}$.

2. إذا كانت G زمرة تملك الخاصية $\mathcal{X}$ فان كل زمرة مشاكلة لــ G تملك هذه الخاصية.

ملاحظة 2.2.2.

1. الزمر التي تملك خاصية زمر معينة $\mathcal{X}$ تشكل فئة زمر.

2. الانتماء لفئة زمر معينة هو في حد ذاته خاصية زمر.

3. يوجد تطبيق تقابلي بين فئات الزمر و الخاصيات النظرية لهذه الزمر. لهذا السبب، لن نميز بين خاصية زمر وفئة الزمر التي تملك هذه الخاصية.

مثال 1.2.2. هذه أمثلة على بعض فئات الزمر و رمزها.

1. كل الزمر المنتهية تشكل فئة زمر يرمز لها F.
2. كل الزمر الآبلية تشكل فئة زمر يرمز لها A.
3. كل الزمر ذات النوع المنتهي تشكل فئة يرمز لها FG.
4. كل الزمر الدوارة تشكل فئة زمر يرمز لها C.
5. كل الزمر متعددة الدورية تشكل فئة زمر يرمز لها P.
6. كل الزمر الدورية تشكل فئة زمر يرمز لها T .
7. كل الزمر ذات أصناف الترافق المنتهية تشكل فئة زمر يرمز لها FC.

تعريف 3.2.2. لتكن $\mathcal{X}_1$ و $\mathcal{X}_2$ فئتي زمر.

1. جداء الفئتين $\mathcal{X}_1$ و $\mathcal{X}_2$ هو الفئة $\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2$ للزمر التي تملك زمرة جزئية ناظمية N بحيث $N\in\mathcal{X}_1$ و زمرة حاصل القسمة $G/N\in\mathcal{X}_2$ تسمى كذلك بفئة الزمر $\mathcal{X}_1$-بواسطة-$\mathcal{X}_2$ أو $\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2$-زمر ($\mathcal{X}_1$-by-$\mathcal{X}_2$ group or $\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2$-group).

2. نقول عن الفئة $\mathcal{X}_1$ أنها فئة جزئية من الفئة $\mathcal{X}_2$ و نكتب $\mathcal{X}_1\leq\mathcal{X}_2$ إذا و فقط إذا $\forall G\in\mathcal{X}_1\Rightarrow G\in\mathcal{X}_2$.

مثال 2.2.2.
1. فئة الزمر الدوارة فئة جزئية من فئة الزمر الآبلية.
2. الزمرة المتناوبة A_4 هي AF-زمرة لأنها تقبل زمرة جزئية آبلية تشاكل الزمرة $B=Z/2Z\oplus Z/2Z$ و ذات دليل منته و $|A/B|=3$.

خاصية 1.2.2.
1. عملية جداء الفئات ليست لا آبلية و لا تجميعية.
2. من أجل كل فئات الزمر $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ لدينا:

$\mathcal{X}_1(\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3)\leq(\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2)\mathcal{X}_3$.

البرهان.
1. نعتبر الزمرة المتنأوبة A_4 و لنضع $H=\{1,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$ لدينا $H\lhd A_4$ و $H\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
إذن H تمثل CC-زمرة و لدينا $|A_4/H|=3$ و بالتالي A_4 زمرة من الفئة $(CC)C$. لكنها ليست C(CC).

2. لتكن $G\in\mathcal{X}_1(\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3)$ إذن $\exists N\in G/\ N\in\mathcal{X}_1,\ G/N\in\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3$

و بالتالي يوجد زمرة جزئية ناظمية H من G تشمل N و بحيث $N\lhd H$ و حيث $H/N\in\mathcal{X}_2$ و $G/N\,/\,H/N\in\mathcal{X}_3$ ولكن لدينا:

$N\in\mathcal{X}_1$ بالتالي $H\in\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2$ و لدينا $G/N\,/\,H/N\cong G/H\in\mathcal{X}_3$ ومنه

$G\in(\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2)\mathcal{X}_3$.

تعريف 3.2.2.

1. نسمي عملية (operation) على فئة كل فئات الزمر كل تطبيق A يرفق بكل فئة $\mathcal{X}$ الفئة $A\mathcal{X}$ بحيث :

a. $AT=T$ حيث T *فئة الزمر التافهة.*

b. $\mathcal{X}\le A\mathcal{X}$ *من أجل كل فئة* $\mathcal{X}$.

c. *إذا كان:* $\mathcal{X}_1\le\mathcal{X}_2$ *فان* $A\mathcal{X}_1\le A\mathcal{X}_2$.

2. نقول عن عملية A أنها عملية إغلاق (closing operation) إذا كان $A^2=A$ بمعنى آخر $A\mathcal{X}=A(A\mathcal{X})$ من أجل كل فئة $\mathcal{X}$.

2.2.2 بعض عمليات الإغلاق المعروفة.

نعتبر فيما يلي $\mathcal{X}$ فئة زمر معطاة.

1) العملية S.

$S\mathcal{X}$ هي فئة الزمر الجزئية من الـــ $\mathcal{X}$-زمر. و لدينا:

$S\mathcal{X}=\mathcal{X}$ إذا و فقط إذا كان كل زمرة جزئية من $\mathcal{X}$-زمرة هي

$\mathcal{X}$-زمرة. نقول أيضا أن $\mathcal{X}$ مستقرة (أو مغلقة) بالانتقال إلى الزمر الجزئية.

مثال.

1. SF=F أي كل زمرة جزئية من زمرة منتهية هي زمرة منتهية.
2. SA=A أي كل زمرة جزئية من زمرة آبلية هي زمرة آبلية.
3. SC=C أي كل زمرة جزئية من زمرة دوارة هي زمرة دوارة.

2) العملية S_n.

$S_n\mathcal{X}$ هي فئة الزمر الجزئية الناظمية من الـ $\mathcal{X}$-زمر.

$S_n\mathcal{X}=\mathcal{X}$ إذا و فقط إذا كان كل زمرة جزئية ناظمية من $\mathcal{X}$-زمرة هي $\mathcal{X}$-زمرة. نقول أيضا أن $\mathcal{X}$ مستقرة (أو مغلقة) بالانتقال الى الزمر الجزئية الناظمية.

ملاحظة. إذا كان $S\mathcal{X}=\mathcal{X}$ فان $S_n\mathcal{X}=\mathcal{X}$ بمعنى آخر $S\mathcal{X} \leq S_n\mathcal{X}$.

3) العمليتان H و Q.

$H\mathcal{X}$ (على التوالي $Q\mathcal{X}$) هي فئة الصور التماثلية (morphism images) (على التوالي القسمات quotients) للـ $\mathcal{X}$-زمر.

$H\mathcal{X} = \mathcal{X}$ (على التوالي $Q\mathcal{X} = \mathcal{X}$) إذا و فقط إذا كان كل صورة تماثلية (على التوالي كل زمرة قسمة) لـ $\mathcal{X}$-زمرة هي

$\mathcal{X}$-زمرة. نقول أيضا أن $\mathcal{X}$ مستقرة (أو مغلقة) بالصور التماثلية (على التوالي بالقسمة).

مثال. HA = A و HF = F كذلك QA = A و QF = F.

4) العملية P. لتكن $\mathcal{X}$ فئة زمر معطاة.

P$\mathcal{X}$ هي فئة الزمر التي تملك سلسلة ناظمية منتهية ذات معاملات من الفئة $\mathcal{X}$. تسمى هذه الفئة بفئة متعددة-$\mathcal{X}$-زمر. (poly-$\mathcal{X}$-group). و لدينا:

P$\mathcal{X}$=$\mathcal{X}$ إذا و فقط إذا كان كل توسيع لـ $\mathcal{X}$-زمرة هي $\mathcal{X}$-زمرة. نكتب كذلك $\mathcal{X}^2=\mathcal{X}$.

مثال.

1. PA-زمر هي فئة الزمر القابلة للحل (soluble groups).
2. PC-زمر هي فئة الزمر متعددة-الدورية (polycyclic groups or P-groups).

مثال. PF=F و لكن PA ≠ A و PC ≠ C.

5) العملية L.

L$\mathcal{X}$ هي فئة الزمر التي من اجلها كل جزء منته محتوى في $\mathcal{X}$-زمرة. تسمى كذلك بفئة الزمر الـ $\mathcal{X}$-محليا (loally-$\mathcal{X}$).

G∈L$\mathcal{X}$ إذا و فقط إذا من اجل كل جزء منته F من G توجد H ≤ G حيث H∈ $\mathcal{X}$ و F ⊂ H.

مثال. LF هي فئة الزمر المنتهية-محليا.

و لدينا SLF =LF.

6) العملية D.

D هي فئة الجداءات المباشرة المحددة للـ $\mathcal{X}$-زمر.

مثال. DA= A و DF = F.

3.2.2 الشرط الأعظمي و الشرط الأصغري على الزمر الجزئية.

تعريف 4.2.2. لتكن G زمرة و $\mathcal{X}$ خاصية زمر.

1. نقول عن زمرة جزئية H أنها أعظمية (Maximal) بالخاصية $\mathcal{X}$ إذا و فقط إذا كانت $H\in \mathcal{X}$ و لا توجد $\mathcal{X}$-زمرة جزئية K من G تشمل H إلا H نفسها و G .
2. نقول عن زمرة جزئية H أنها أصغرية (Minimal) بالخاصية $\mathcal{X}$ إذا و فقط إذا كانت $H\in \mathcal{X}$ و لا توجد $\mathcal{X}$-زمرة جزئية K من G محتواة في H إلا H نفسها و الزمرة التافهة.

تعريف 5.2.2. لتكن G زمرة.

1. نقول عن G أنها تحقق الشرط الأعظمي على الزمر الجزئية (Maximal condition on subgroups) (على التوالي على الزمر الجزئية الناظمية) (on normal subgroups) إذا و فقط إذا لم توجد سلسلة متصاعدة غير منتهية $H_1 < H_2 < H_3 < \cdots$ من الزمر الجزئية (على التوالي من الزمر الجزئية الناظمية) من G. بمعنى آخر كل سلسلة متصاعدة $H_1 < H_2 < H_3 < \cdots$ من الزمر الجزئية (على التوالي من الزمر الجزئية الناظمية) تكون منتهية و بالتالي يوجد عدد طبيعي غير معدوم n بحيث $H_n = G$.
2. نقول عن G أنها تحقق الشرط الأصغري

(Minimal condition) على الزمر الجزئية (على التوالي على الزمر الجزئية الناظمية) إذا و فقط إذا لم توجد سلسلة متنازلة غير منتهية $K_1 > K_2 > K_3 > \cdots$ من الزمر الجزئية (على التوالي من الزمر الجزئية الناظمية) من G. بمعنى آخر كل سلسلة متنازلة $K_1 > K_2 > K_3 > \cdots$ من الزمر الجزئية (على التوالي من الزمر الجزئية الناظمية) تكون منتهية و بالتالي يوجد عدد طبيعي غير معدوم n بحيث $K_n = 1$.

1.2.2. ترميز

1. نقول اختصارا G تحقق max (على التوالي max-n)بدلا من G تحقق الشرط الأعظمي على الزمر الجزئية (على التوالي على الزمر الجزئية الناظمية).
2. نقول اختصارا G تحقق min (على التوالي min-n)بدلا من G تحقق الشرط الأصغري على الزمر الجزئية (على التوالي على الزمر الجزئية الناظمية).

2.2.2. خاصية [32].

1. الزمرة G تحقق max (على التوالي max-n) إذا و فقط إذا كانت كل مجموعة غير خالية من الزمر الجزئية (على التوالي على الزمر الجزئية الناظمية)من G تملك عنصرا أعظميا (maximal element).
2. الزمرة G تحقق min (على التوالي min-n) إذا و فقط إذا كان كل مجموعة غير خالية من الزمر الجزئية (على التوالي على الزمر الجزئية الناظمية)من G تملك عنصرا أصغريا (minimal element).

3.2.2. ملاحظة

1. كل زمرة G تحقق max فهي تحقق max-n.
2. كل زمرة G تحقق min فهي تحقق min-n.

3. إذا كانت G زمرة آبلية فان الخاصية max (على التوالي min) تنطبق مع max-n(على التوالي min-n).

نظرية 1.2.2. لتكن G زمرة.
G تحقق max إذا و فقط إذا كانت كل زمرة جزئية من G ذات نوع منتهي.

مثال 1.2.2. لتكن G زمرة.

1. كل زمرة منتهية G تحقق max.
2. كل زمرة دوارة و غير منتهية G $(G\cong \mathbb{Z})$ تحقق max، بالفعل لان $n\mathbb{Z} \leq m\mathbb{Z}$ إذا و فقط إذا كان m يقسم n. لكنها لا تحقق min لان السلسلة $2\mathbb{Z} > 4\mathbb{Z} > \dots > 2^i\mathbb{Z} > 2^{i+1}\mathbb{Z} > \dots$ هي سلسلة متنازلة غير منتهية.

خاصية 3.2.2.

1. الخاصيتين max و min مستقرتان بالانتقال إلى الزمر الجزئية. بمعنى آخر إذا كانت G زمرة تحقق max (على التوالي min) فان كل زمرة جزئية من G تحقق max (على التوالي min).
2. الخواص min-n ,min ,max-n ,max مستقرة بالانتقال الى القسمة. بمعنى آخر إذا كانت G زمرة تحقق max (على التوالي max-n ,min ,min-n) و N ناظملة في G فان G/N تحقق max (على التوالي max-n ,min ,min-n).
3. الخواص min-n ,min ,max-n ,max مستقرة بالتوسيع.

بمعنى آخر إذا كانت $N \lhd G$ بحيث G/N و N يحققان max (على التوالي max-n ,min ,min-n) فان G تحقق max (على التوالي max-n ,min ,min-n).

4. لتكن G زمرة و $H_1, H_2, \dots H_n$ زمر جزئية ناظمية في G تحقق max (على التوالي max-n, min, min-n) فان جداؤها المباشر يحقق max (على التوالي max-n, min, min-n).

4.2.2 بعض فئات الزمر المعروفة.

سوف نقدم في هذه الفقرة بعض الفئات الهامة من الزمر، وخصائصها التي نستخدمها خلال الفصل التالي. نبدأ بالتذكير بمختلف أنواع السلاسل كالسلاسل الناظمية المتزايدة و المتناقصة و السلاسل المركزية التي تدخل ضمن تعريف هذه الفئات من الزمر.
استندنا فيما يلي على المراجع [29، 30، 33]

1.4.2.2 السلاسل، السلاسل الناظمية و السلاسل المركزية.

تعريف 6.2.2. لتكن G زمرة. نسمي سلسلة (serie or chain) كل متتالية منتهية أو غير منتهية من الزمر الجزئية $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$من G التي تشمل G و/أو {1} و التي تكتب:

(1.1) $1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_{n-1} \leq G_n \leq \cdots$. إذا كانت متزايدة.

(1.2) $G = G_1 \geq G_2 \geq \dots \geq G_{n-1} \geq G_n \geq \cdots$. إذا كانت متناقصة.

تسمى الزمر الجزئية $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ بحدود هذه السلسلة و زمر القسمة G_{i+1}/G_i في (1.1) أو G_i/G_{i+1} في (1.2) بمعاملاتها. و نقول عن هذه السلسلة أنها ناظمية إذا كان $G_i \lhd G$ من اجل كل i و نقول عن السلسلة (1.1) (على التوالي (1.2)) أنها جزئية ناظمية (subnormal) إذا كان $G_i \lhd G_{i+1}$ (على التوالي $G_{i+1} \lhd G_i$) *من اجل كل* $i\in\mathbb{N}$ (على التوالي $i\in\mathbb{N}^*$).

تعريف 7.2.2. لتكن G زمرة. نقول عن السلسلة (1.1) (على التوالي (1.2)) أنها منتهية إذا وجد عدد طبيعي n بحث $G_n = G$ (على التوالي $G_{n+1} = 1$).

و لدينا:

(1.3) $1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_{n-1} \leq G_n = G$.

(1.4) $G = G_1 \geq G_2 \geq \cdots \geq G_n \geq G_{n+1} = 1$.

يسمى العدد الطبيعي n الموافق لأقصر سلسلة بطول هذه السلسلة (length) و هو يمثل عدد الإحتوءات التامة فيها (strict inclusions).

تعريف 8.2.2. لتكن G زمرة. نقول عن سلسلة ناظمية من النوع (1.1) (على التوالي (1.2)) انها مركزية (central series) إذا تحقق أحد الشرطين المتكافئين التاليين:

1. $G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i)$ من أجل كل i≥0
(على التوالي $G_i/G_{i+1} \leq Z(G/G_{i+1})$ من اجل كل i≥1).
2. $[G_{i+1}\ G] \leq G_i$ من أجل كل i≥0 (على التوالي $[G_i\ \ G] \leq G_{i+1}$ من أجل كل i≥1).

تعريف 9.2.2. لتكن G زمرة.

1. نضع $Z_1(G)=1$, $Z_0(G)=1$ و من أجل كل i≥0:
$Z(G/Z_i(G)) = Z_{i+1}(G)/Z_i(G)$. من أجل كل i≥0: $Z_i(G)$ زمرة

جزئية مميزة (caracteristic) في G تشكل سلسلة مركزية متزايدة:

(1.5) $1=Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq Z_2(G) \leq \ldots$ تسمى السلسلة المركزية المتصاعدة لـ G (Ascending central series).

و لدينا : $x \in Z_i(G) \Leftrightarrow \forall y \in G: [x,y] \in Z_{i-1}(G)$

2. نضع $\gamma_1(G)=G$, $\gamma_2(G)=[G\ G]$ و من أجل كل i≥1:
$\gamma_{i+1}(G)=[\gamma_i(G)\ G]$. من أجل كل i≥1: $\gamma_i(G)$ زمرة جزئية مميزة كليا (fully invariant) في G تشكل سلسلة مركزية متناقصة لـ G.

(1.6) $G=\gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \gamma_3(G) \geq \ldots$ تسمى السلسلة المركزية المتناقصة لـ G (Descending central series).

2.4.2.2 الزمر الآبلية.

تعريف 10.2.2.

1. نقول عن زمرة G أنها آبلية أو تبديلية (ablian group) إذا من اجل كل x, y من G فان: xy=yx.
2. نقول عن زمرة G آبلية أنها حرة (free abelian group) من الرتبة (rank) عدد طبيعي غير معدوم n إذا كانت متشاكلة مع الزمرة $\mathbb{Z}^n$.

خواص 1.2.2. [33,p193]

1. كل زمرة G آبلية و ذات نوع منته متشاكلة مع جداء زمرة آبلية حرة ذات بعد منته بزمرة آبلية منتهية.
2. كل زمرة آبلية منتهية G متشاكلة مع جداء زمر دوارة.
3. كل زمرة G آبلية ذات نوع منته متشاكلة مع الجداء من الشكل: $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}/_{d_1\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{d_2\mathbb{Z}} \times \ldots \times \mathbb{Z}/_{d_s\mathbb{Z}}$ حيث من اجل كل i من 1 الى s فان: d_i يقسم d_{i+1}.

الخاصية التالية تبين استقرار فئة الزمر الآبلية ببعض العمليات الجبرية.

خاصية 4.2.2. *[31, 4.2.8]*

1. كل زمرة جزئية من زمرة آبلية ذات نوع منته G هي ذات نوع منته. أي أن:

G زمرة آبلية تحقق max إذا و فقط إذا كانت G ذات نوع منته.

2. فئة الزمر الآبلية مستقرة بالانتقال إلى الزمر الجزئية والإنتقال إلى القسمة و بالجداء المباشر المحدد لكنها ليست مستقرة بالتوسيع.

مثال. الزمرة التناظرية S_3 تملك الزمرة المتناوبة A_3 و زمرة القسمة S_3/A_3 كزمرتين آبليتين لكنها غير آبلية.

خاصية 5.2.2. *[34, 4.2.9]*

1. مجموعة العناصر ذات رتبة منتهية من زمرة آبلية هي زمرة جزئية ناظمية من G يرمز لها Tor(G) و بحيث G/Tor(G) زمرة آبلية بدون التواء.

2. لتكن G زمرة آبلية. G دورية ذات نوع منته إذا و فقط إذا كانت منتهية.

3.4.2.2 الزمر القابلة للحل.

تعريف 11.2.2.

نقول عن زمرة G أنها قابلة للحل

(soluble or poly-abelian group) و نكتب كذلك G $\mathcal{S}$-زمرة. إذا كان لديها سلسلة ناظمية آبلية منتهية

$(G_i)_{0\leq i\leq n}$ حيث:

$G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_{n-1} \geq G_n = 1$ حيث من اجل كل $0 \leq i \leq n$:
$G_{i+1} \lhd G_i$ و المعاملات G_i/G_{i+1} زمر آبلية.

ملاحظة 4.2.2. يمكن أن تكون السلسلة متصاعدة من الشكل:

$1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_{n-1} \leq G_n = G$ حيث $G_i \lhd G_{i+1}$ و G_{i+1}/G_i آبلية

نسمي طول أقصر سلسلة ناظمية آبلية لزمرة قابلة للحل G الطول المشتق (Derived length) لهذه الزمرة.

مثال 2.2.2.

1. G زمرة قابلة للحل ذات طول مشتق معدوم إذا و فقط إذا كانت تافهة.
2. G زمرة قابلة للحل ذات طول مشتق n=1 إذا و فقط إذا كانت G آبلية.
3. نسمى زمرة G قابلة للحل ذات طول n≤2 بزمرة خارقة الآبلية (Metabelian group). كمثال نعتبر الزمرة الضربية:

$G = \left\{\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}$ نجد أن مركزها معرف بـــ:

$Z(G) = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R}\right\}$ و زمرة القسمة G/Z(G) زمرة آبلية. ما يؤكد أن G زمرة فوق آبلية.

تعريف 12.2.2. لتكن G زمرة.

نضع $G^{(1)}=G'$, $G^{(0)}=G$ و من اجل كل i≥0: $G^{(i+1)} = (G^{(i)})'$. من أجل كل i≥0: $G^{(i)}$ زمرة جزئية صامدة كليا (fully invariant) في G و السلسلة $(G^{(i)})_i$ سلسلة ناظمية آبلية متناقصة في G.

$G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq \cdots \geq G^{(n-1)} \geq \cdots$ تسمى السلسلة المشتقة لـ G.
إذا وجد عدد طبيعي n بحث $G^{(n)} = 1$ فان G زمرة قابلة للحل.

نظرية 2.2.2. [30, 5.1.8]
إذا كانت G زمرة قابلة للحل تقبل سلسلة ناظمية آبلية $1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_{n-1} \leq G_n = G$ فان: $G^{(n-i)} \leq G_i$ من أجل كل $0 \leq i \leq n$. بالاخص $G^{(n)} = 1$.

النظرية التالية تظهر استقرار فئة الزمر القابلة للحل بواسطة بعض العمليات الجبرية.

نظرية 3.2.2. [21,1.1.1,1.1.2]
1. إذا كانت G $\mathcal{S}$-زمرة فان كل زمر جزئية من G $\mathcal{S}$-زمرة.

2. إذا كانت G $\mathcal{S}$-زمرة و $N \triangleleft G$ فان G/N $\mathcal{S}$-زمرة.

3. إذا كانت $N \triangleleft G$ بحيث N و G/N $\mathcal{S}$-زمرتين فان G $\mathcal{S}$-زمرة.

4. إذا كانت $H_1, H_2, \ldots, H_n$ $\mathcal{S}$-زمر جزئية ناظمية في G فان الجداء المباشر $\prod_{i=1}^{n} H_i$ يشكل $\mathcal{S}$-زمرة.

نظرية 4.2.2. [31,5.4.11]
كل $\mathcal{S}$-زمرة G دورية و ذات نوع منته هي زمرة منتهية.

النظرية 4.2.2 أعلاه تعميم لنظيرتها النتيجة 5.2.2 جزء (2) في الزمر الآبلية.

4.4.2.2 الزمر متعددة-الدورية.

تعريف 13.2.2. لتكن G زمرة.
نقول عن G أنها زمرة متعددة-الدورية (Polycyclic Group) باختصار P-زمرة. إذا قبلت سلسلة ناظمية دوارة منتهية $(G_i)_{0\le i\le n}$ حيث: $1 = G_0 \le G_1 \le \cdots \le G_{n-1} \le G_n = G$. و من أجل كل $0 \le i \le n$: $G_i \triangleleft G_{i+1}$ و G_{i+1}/G_i زمر دوارة.

الخاصية التالية تظهر استقرار فئة الزمر متعددة-الدورية بواسطة بعض العمليات الجبرية.

خاصية 6.2.2. لتكن G زمرة.
1. إذا كانت G P-زمرة فان كل زمر جزئية من G P-زمرة.
2. إذا كانت G P-زمرة و $N \triangleleft G$ فان G/N P-زمرة.
3. إذا كانت $N \triangleleft G$ بحيث N و G/N P-زمرتين فان G P-زمرة.
4. إذا كانت $H_1, H_2, \ldots, H_n$ P-زمر جزئية ناظمية في G فان جداؤها المباشر $\prod_{i=1}^{n} H_i$ P-زمرة من G.

مثال 3.2.2. كل زمرة آبلية ذات نوع منته هي P-زمرة.

الخاصية أدناه موجودة بالمرجع [34, 5.4.12] ببرهان مختصر و قد قمنا بتفصيله.

خاصية 7.2.2. لتكن G زمرة. الخاصيتين التاليتين متكافئتين:
1. G P-زمرة.
2. G S-زمرة و تحقق max.

البرهان.
1. إذا كانت G P-زمرة فإنها تملك سلسلة ناظمية معاملاتها دوارة و بالتالي آبلية ما يعني أنها S-زمرة.

بما أن المعاملات زمر دوارة فهي تحقق max و حسب الخاصية 3.2.2 جزء (3) الخاصية max مستقرة بالتوسيع.
إذن G تحقق max.
2. G S-زمرة تقبل سلسلة ناظمية آبلية منتهية
$1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_{n-1} \leq G_n = G$. بما أن المعاملات G_{i+1}/G_i زمر آبلية ذات نوع منته فهي حسب المثال 3.2.2 P-زمرة
و بما أن الخاصية P مستقرة بالتوسيع فإن G P-زمرة.

تعريف 14.2.2. لتكن G زمرة.
نقول عن G أنها زمرة متعددة-(الدورية غير منتهية)
(Poly-(cyclic infinite) Group) باختصار PI-زمرة إذا قبلت سلسلة ناظمية دوارة منتهية حيث أي معامل فيها إما زمرة دوارة غير منتهية أو زمرة تافهة.

خاصية 8.2.2.[31, 5.4.14] لتكن G زمرة.
1. كل زمر جزئية من PI-زمرة هي PI-زمرة.
2. كل PI-زمرة هي زمرة بدون التواء.
3. كل PI-زمرة دورية و ذات نوع منته هي زمرة منتهية.

5.4.2.2 الزمر عديمة القوة.

تعريف 15.2.2. لتكن G زمرة.
نقول عن G أنها زمرة عديمة القوى.(Nilpotent Group) باختصار N-زمرة. إذا قبلت سلسلة ناظمية مركزية منتهية $(G_i)_{0\leq i\leq n}$ حيث: $1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_{n-1} \leq G_n = G$. و من اجل كل $0 \leq i \leq n$: $G_i \lhd G_{i+1}$ و $G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i)$.

نسمي الطول n لأقصر سلسلة ناظمية لـ N-زمرة G صنف الانعدام (nilpotency class) لهذه الزمرة.

من التعريف 9.2.2 و التعريف 15.2.2 تنتج لدينا الخاصية

خاصية 10.2.2. لتكن G زمرة.

1. G N-زمرة إذا و فقط إذا وجد n∈ℕ بحيث $Z_n(G) = G$.
2. G N-زمرة إذا و فقط إذا وجد n∈ℕ بحيث $\gamma_{n+1}(G)=1$.

مثال 4.2.2.

1. G N-زمرة ذات صنف الانعدام معدوم إذا و فقط إذا كانت تافهة.
2. G N-زمرة ذات صنف الانعدام n=1 إذا و فقط إذا كانت G آبلية.
3. كل p-زمرة منتهية حيث p عدد أولي هي N-زمرة.

خاصية 11.2.2.[33, 5.1.9] لتكن G N-زمرة و لتكن السلسلة:

$1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_{n-1} \leq G_n = G$ سلسلة مركزية لها. فمن اجل كل 0≤i≤n لدينا: $G_i \leq Z_i(G)$ و $\gamma_{i+1}(G) \leq G_{n-i}$. بالاخص، $Z_n(G)=G$ و $\gamma_{n+1}(G)=1$.

نتيجة 1.2.2.

1. G N-زمرة ذات صنف الانعدام c $\Leftrightarrow Z_c(G) = G \Leftrightarrow \gamma_{c+1}(G)=1$.
2. إذا كانت G N-زمرة و غير تافهة فان $Z(G)\neq 1$.

توطئة 1.2.2.[31, 5.1.11] لتكن G زمرة. $N \lhd G$ و $H \leq G$ فان:

1. $\gamma_i(H)\leq\gamma_i(G)$ من اجل كل i≥0.
2. $\gamma_i(G/N)\leq\gamma_i(G)N/N$ من اجل كل i≥0.
3. $Z_i(G/Z_j(G)) = Z_{i+j}(G)/Z_j(G)$ من اجل كل i,j ≥0.

خاصية 12.2.2.[21,1.2.1] لتكن G زمرة. $K \lhd G$ و H ≤ G فان:

1. G N-زمرة ذات صنف الانعدام ذات صنف الانعدام ≥ c فان H N-زمرة ذات صنف الانعدام ≥ c.
2. G N-زمرة ذات صنف الانعدام ≥ c فان G/K N-زمرة ذات صنف الانعدام ≥ c.
3. $G/\gamma_i(G)$ تمثل N-زمرة ذات صنف الانعدام ≥ i-1 من اجل كل i ≥1.
4. إذا كانت G N-زمرة ذات صنف الانعدام ≥ c فان $G/Z_i(G)$ ذات صنف الانعدام ≥ c-i من اجل كل i ≥0.
5. إذا كانت H، K N-زمرتين جزئيتين ناظميتين ذواتا صنفين c، d على الترتيب من زمرة G فان الجداء HK N-زمرة ذات الصنف ≥ c+d.

نظرية 5.2.2.[21, 1.2.13]

إذا كانت G N-زمرة فان مجموعة العناصر ذات رتبة منتهية من الزمرة G تشكل زمرة جزئية صامدة كليا (Fully Invariant) في G يرمز لها Tor(G) و بحيث G/Tor(G) هي N-زمرة بدون التواء.

نتيجة 3.2.2. كل N-زمرة دورية G ذات نوع منته هي زمرة منتهية.

ملاحظة 5.2.2. *خاصية عديمية القوى(nilpotency) غير مستقرة بالتوسيع.*

بالفعل: *الزمرة التناظرية S_3 ذات الدليل n=3 ليست عديمة القوة لان مركزها $Z(S_3)=1$ بالرغم أنها تملك زمرة جزئية ناظمية هي الزمرة المتناوبة A_3 ذات الأصلي 3 و بحيث S_3/A_3 زمرة ذات أصلي 2 فهما عديمتي القوة.*

نظرية 6.2.2.Baer[31, 5.2.17]

كل N-زمرة ذات نوع منته هي زمرة تحقق max.

نستنتج من هذه النظرية أن كل زمرة جزئية من N-زمرة ذات نوع منته هي زمرة ذات نوع منته.

تعريف 16.2.2.

نسمي مبدل (commutator) عنصرين x، y من زمرة G العنصر الذي يرمز له $[x\ y]$ المعرف بـــ $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$ و لدينا : $[x, y] = x^{-1}x^{y}$ حيث $x^{y} = y^{-1}x^{y}$ يمثل مرافق x بـــ y.

خاصية 13.2.2. [31 , 5.1.5] *لتكن G زمرة و* $x,y,z \in G$ *لدينا الخواص التالية:*

1. $[y\ x]= [x\ y]^{-1}$
2. $[xy,z] = [x,z]^{y}[y,z]$.
3. $[x,yz] = [x,z][x,y]^{z}$.
4. $[x^{\lambda},y^{\mu}] = x^{\frac{1-\lambda}{2}} y^{\frac{1-\mu}{2}} [x,y]^{\lambda\mu} y^{\frac{\mu-1}{2}} x^{\frac{\lambda-1}{2}}$ مع $\lambda,\mu \in \{1,-1\}$.

نظرية 7.2.2.[34,5.2.19]

إذا كانت G زمرة ذات مركز Z(G) بدون الالتواء فان كل العوامل $Z_{i+1}(G)/Z_i(G)$ *لسلسلتها المركزية المتصاعدة بدون التواء كذلك.*

نتيجة 4.2.2. *لتكن G زمرة ذات مركز Z(G) بدون الالتواء لدينا :*

1. $Z_i(G)$ *بدون الالتواء من اجل كل* $i \in \mathbb{N}$.
2. *إذا كانت G N-زمرة فهي زمرة بدون التواء.*

3. إذا كانت G N-زمرة *ذات صف الانعدام* ≥ c، فان $G/Z_i(G)$ *زمرة بدون التواء من اجل كل* $i=0,...,c-1$.

6.4.2.2 ال FN-زمر و ال NF- زمر.

تعريف 18.2.2. لتكن G زمرة.

1. نقول عن G أنها FN-زمرة. (FN-group) إذا و فقط إذا وجدت زمرة جزئية ناظمية منتهية F من G بحيث G/F زمرة عديمة القوة.

2. نقول عن G أنها NF-زمرة. (NF-group) إذا و فقط إذا وجدت زمرة جزئية ناظمية و عديمة القوة F من G ذات دليل منته في G.

نعرض فيما يلي استقرار الخاصيتبن FN و NF ببعض العمليات الجبرية.

خواص 1.2.2. لتكن G زمرة. $N \lhd G$ و H ≤ G فان:

1. إذا كانت G FN-زمرة (على الترتيب NF-زمرة) فان كل زمر جزئية من G هي FN-زمرة(على الترتيب NF-زمرة).

2. إذا كانت G FN-زمرة(على الترتيب NF-زمرة) *فان* *G/N* FN-زمرة(على الترتيب FN-زمرة).

3. إذا كانت H، K FN-زمرتين(على الترتيب NF-زمرتين) جزئيتين ناظميتين من G فان الجداء HK هي FN-زمرة(على الترتيب FN-زمرة).

حسب 1) من المثال 1.2.2 و النظرية 6.2.2 لدينا الخاصية

***خاصية* 14.2.2.** كل FN-زمرة(على الترتيب NF-زمرة) *ذات نوع* منته تحقق max.

***نظرية* 9.2.2.** إذا كانت G FN-زمرة فان المجموعة T للعناصر ذات الرتب المنتهية هي زمرة جزئية مميزة و بحيث زمرة

القسمة G/T بدون التواء. إذا كانت G ذات نوع منته فان T تكون منتهية.

البرهان.

ليكن x, y من T، إذن يوجد $r,s \in \mathbb{N}$ بحيث $x^r = 1$ و $y^s = 1$. بما أن G FN-زمرة *فإنه توجد* زمرة جزئية منتهية $H \lhd G$ بحيث G/H عديمة القوة xH و yH من رتب منتهية في G/H فحسب نظرية سابقة $(xH)(yH)^{-1} = (xy^{-1})H$ من رتبة منتهية وبما أن H منتهية فان xy^{-1} من رتبة منتهية و بالتالي T زمرة جزئية من G. إذا كانت G ذات نوع منته فإن G/H عديمة القوة و ذات نوع منته فهي تحقق max و TH/H كزمرة جزئية من G/H متشاكلة مع $T/T\cap H$ فهي عديمة القوة دورية و ذات نوع منته فهي حسب النتيجة 3.2.2 أعلاه منتهية و بما أن $T\cap H$ منتهية فان T منتهية.

نظرية 10.2.2 .(Baer) لتكن G زمرة.

إذا كانت $G/Z_i(G)$ منتهية من اجل عدد طبيعي معين i، فان $\gamma_{i+1}(G)$ *منتهية كذلك.*

لقد اهتم P. Hall بالقضية العكسية لنظرية Baer و برهن النظرية التالية:

نظرية 11.2.2 .(Hall) [17] لتكن G زمرة.

1. إذا كانت $\gamma_{i+1}(G)$ *منتهية من اجل* عدد طبيعي معين i، فان $G/Z_{2i}(G)$ *منتهية.*

2. إذا كانت G ذات نوع منته و $\gamma_{i+1}(G)$ *منتهية من اجل* عدد طبيعي معين i، فان $G/Z_i(G)$ *منتهية.*

***نتيجة* 5.2.2.** لتكن G زمرة. القضايا التالية متكافئة:

1. يوجد عدد طبيعي معين i بحيث: $\gamma_{i+1}(G)$ منتهية.
2. يوجد عدد طبيعي معين i بحيث: $G/Z_i(G)$ منتهية.
3. G هي FN-زمرة.

البرهان.

1. إذا وجد عدد طبيعي n بحيث $\gamma_{i+1}(G)$ منتهية فانه حسب نظرية Hall فانه يوجد $j=2i$ حيث $G/Z_j(G)$ منتهية.

2. إذا كان $G/Z_j(G)$ منتهية من اجل $j \in \mathbb{N}$ فانه حسب النظرية فان $\gamma_{i+1}(G)$ منتهية، و حسب الخاصية فان $G/\gamma_{j+1}(G)$ عديمة القوة و بالتالي G $\mathcal{FN}$-زمرة.

3. ليكن G FN-زمرة إذن توجد زمرة جزئية ناظمية منتهية F من G بحيث G/F زمرة عديمة القوة و بالتالي يوجد $j \in \mathbb{N}$ بحيث $\gamma_{i+1}(G/N) = N/N$ لكن $\gamma_{i+1}(G/N) = \gamma_{i+1}(G)N/N = N/N$ و منه $\gamma_{i+1}(G)N = N$ إذن $\gamma_{i+1}(G) \leq N$ و بما أن N منتهية فان $\gamma_{i+1}(G)$ منتهية.

نتيجة 6.2.2.

1. كل FN-زمرة هي NF-زمرة.
2. كل FN_k-زمرة هي $N_{k+1}F$-زمرة.
3. كل FN_k-زمرة هي $N_{2k}F$-زمرة.
4. كل FN_k-زمرة ذات نوع منته هي N_kF-زمرة.

البرهان.

1. نفرض G FN-زمرة، إذن توجد زمرة جزئية ناظمية F بحيث G/F N-زمرة فحسب نتيجة 5.2.2 (2) فإنه يوجد عدد طبيعي j بحيث $G/Z_j(G)$ زمرة منتهية و كون $Z_j(G)$ N-زمرة فإن G NF-زمرة.

2. إذا كانت G زمرة-FN_k فإن فإنه توجد زمرة جزئية منتهية H بحيث G/H زمرة-N_k و بالتالي $\gamma_{k+1}(G/H)=H/H$ لكن $\gamma_{k+1}(G/H)=\gamma_{k+1}(G)H/H=H/H$ و منه $\gamma_{k+1}(G)H=H$ إذن $\gamma_{k+1}(G)\leq H$ و بما أن H منتهية فان $\gamma_{k+1}(G)$ منتهية حسب النظرية11.2.2 .
(1)فإن $G/Z_{2k}(G)$ منتهية و كون $Z_{2k}(G)$ زمرة-N_{2k} فإن G زمرة-$N_{2k}F$.

3. إذا كانت G زمرة-FN_k و ذات نوع منته فإن $\gamma_{k+1}(G)$ منتهية و بالتالي حسب نظرية11.2.2 (2)فإن G زمرة-N_kF .

7.4.2.2 زمر انجال و زمر زمر n-انجال.

تعريف 21.2.2. لتكن G زمرة.

1. نعرف n-مبدل (n-commutator) العنصرين x، y من الزمرة G العنصر الذي يرمز له $[x,{}_ny]$ بالعلاقة التراجعية التالية: $[x,{}_0y]=x$ و $[x,{}_{(n+1)}y]=[[x,{}_ny],y]$ حيث $[x,y]=x^{-1}y^{-1}xy$.

2. نقول عن عنصر g من G أنه عنصر انجال من اليمين (على الترتيب من اليسار) لـــ G إذا تحقق:
$\forall x\in G,\ \exists n=n(g,x)/[g,{}_nx]=1.$ (على الترتيب $[x,{}_ng]=1$) .

3. إذا كان n هو نفسه من اجل كل x فان g يسمى n-انجال من اليمين (على الترتيب n-انجال من اليسار).

نرمز بـــ R(G) (على الترتيب $\overline{R(G)}$) بمجموعة العناصر انجال (على الترتيب n-انجال) من اليمين.

نرمز بـــ L(G) (على الترتيب $\overline{L(G)}$) بمجموعة العناصر انجال (على الترتيب n-انجال) من اليسار.

تعريف 22.2.2. نقول عن G أنها زمرة انجال (على الترتيب n-انجال) إذا *تحقق:* $\forall x,y\in G,\ \exists\ n=n(x,y)\in\mathbb{N}\ :\ [x\ ,_n y]=1$

(على الترتيب $\exists\ n\in\mathbb{N},\forall x,y\in G,\ :\ [x\ ,_n y]=1$)

أي أن $G=R(G)=L(G)$ (على الترتيب $G=\overline{R(G)}=\overline{L(G)}$).

***مثال* 6.2.2.**

1. G زمرة 0-انجال إذا و فقط إذا كانت تافهة.

2. G زمرة 1-انجال إذا و فقط إذا كانت G آبلية.

ملاحظة 6.2.2.

1. كل LN-زمرة هي زمرة انجال.

بالفعل. إذا كانت G LN-زمرة و $x,\ y\in G$ فان $<x,\ y>$ N-زمرة، إذن يوجد $c=c(x,y)$ بحيث $\gamma_{c+1}=1$ و منه $[x,{}_c y]=1$

2. كل N-زمرة ذات صف الانعدام $\leq n$ هي زمرة n-انجال.

بالفعل. إذا كانت G N-زمرة ذات صف الانعدام $\leq n$ و $x,y\in G$ فان $<x,y>$ هي N-زمرة ذات صف الانعدام $\leq n$ و بالتالي $\gamma_{n+1}([x,y])=1$ ما يعني أن $[x,{}_n y]=1$.

***خـــــواص* 3.2.2.** لتكن G زمرة.

1. إذا كانت G زمرة انجال(على الترتيب زمرة n-انجال) فان كل زمر جزئية من G هي زمرة انجال(على الترتيب زمرة n-انجال).

2. إذا كانت G زمرة انجال(على الترتيب زمرة n-انجال) و

$G \lhd N$ فإن G/N زمرة انجال(على الترتيب زمرة n-انجال).

نظرية 13.2.2. (Kappe)

لتكن G زمرة. مجموعة العناصر 2-انجال من اليمين من G $R_2(G) = \{x \in G | \forall y \in G : [x, {}_2y] = 1\}$ تشكل زمرة جزئية مميزة من G.

نظرية 14.2.2. (Gruenberg) *[30, Théoreme 7.36]*

1. كل زمرة k-انجال قابلة للحل ذات طول مشتق d و بدون التواء هي N-زمرة ذات صف الانعدام $\leq k^{d-1}$.

2. كل زمر فوق آبلية k-انجال و بدون التواء هي N-زمرة ذات صف الانعدام $\leq k$.

3.2 فئات الزمر من النوع (χ, ∞) .

1.3.2 مقدمة.

في عام 1976 طرح P. Erdös المسألة التالية: إذا كانت G زمرة حيث بيانها $\Gamma(G)$ لا يشمل أي بيان جزئي تام غير منته (أي كل بياناته الجزئية التامة منتهية), فهل يوجد حدا منتهيا لأصلي هذه البيانات الجزئية؟. يتم التعبير عن هذه المسألة في لغة نظرية الزمر على النحو التالي: إذا كانت G زمرة حيث كل جزء غير منته منها يحتوي على عنصرين مختلفين متبادلان (بتعبير آخر كل جزء من العناصر غير المتبادلة فيها منتهيا). فهل تمتلك حدا منتهيا لأصلي هذه الأجزاء المنتهية؟

لقد رأينا في الفصل الأول أن B.H Neumann أجاب على هذا السؤال وأظهر في النظرية 1.3.1 أن زمرة G يكون كل جزء غير منته منها يحتوي على عنصرين مختلفين متبادلان إذا و فقط إذا كان مركزها Z(G) ذو دليل منته، والحد المطلوب في هذه الحالة هو [G:Z(G)].

كما سنرى في هذا الفصل، أن نتيجة B.H Neumann سمحت للعديد من علماء الرياضيات بتعميم مسألة P. Erdös والوصول إلى فئة الزمر (χ,∞). بعدها تمكن علماء رياضيات آخرين تعريف فئة أوسع من الفئة (χ,∞) و هي الفئة $^*(\chi,\infty)$ حيث χ خاصية زمر معطاة و اللتان يتم تعريفهما لاحقا.
مع هذا الترميز تصبح نتيجة B.H Neumann كما يلي:
نظرية 1.3.2.
تكون G زمرة من الفئة $(\mathcal{A},\infty)$ إذا و فقط إذا كانت G FIZ-زمرة. حيث $\mathcal{A}$ هي فئة الزمر الآبلية.

2.3.2 النتائج الأولى للفئات من النوع (χ , ∞).

تعريف 1.3.2.
لتكن G زمرة و χ خاصية زمر معطاة.
تكون G زمرة من الفئة (χ , ∞) إذا و فقط إذا كان كل جزء غير منته X من G يشمل عنصرين مختلفين x, y بحيث تكون <x, y> χ-زمرة.

خاصية 1.3.2. إذا كانت الخاصية χ مستقرة بالانتقال إلى الزمر الجزئية فان $\chi\subset(\chi,\infty)$.

أول علماء الرياضيات الذين درسوا هذا النوع من الفئات هما J.C. Lennox و J. Wiegold في عام 1981 في مقالهما[20]. و قد توصلوا إلى النتائج الأولى التالية:

نظرية 2.3.2. لتكن G زمرة قابلة للحل ذات نوع منته.
فان: $G\in(N,\infty)$ إذا و فقط إذا كانت G FN-زمرة.

نظرية 3.3.2. لتكن G زمرة قابلة للحل ذات نوع منته.
فان: $G\in(P,\infty)$ إذا و فقط إذا G P-زمرة حيث P هي فئة الزمر متعددة الدورية.

إن النظرية الأخيرة هي تعميم لنظرية *J.C.Lennox* في 1973 في [20] التي تنص على أن كل S-زمرة ذات نوع منته حيث كل زمرة جزئية ثنائية التوليد متعددة الدورية هي P-زمرة.

نظرية 4.3.2. لتكن G $\mathcal{S}$-زمرة ذات نوع منته. فان:

$G\in(C_0,\infty)$ إذا و فقط إذا كانت G زمرة من الفئة C_0 حيث C_0 هي فئة الزمر المتماسكة (coherant).
نذكر أن G زمرة من الفئة C_0 إذا كانت كل زمرة جزئية فيها ذات نوع منته هي زمرة ذات التمثيل المنته (finite presentation group).

في عام 1983 برهن J.R.J.Groves في [15] فرضية J.C.Lennox و J.Wiegold التالية:

نظرية 5.3.2. لتكن G $\mathcal{S}$-زمرة ذات نوع منته. فان:

$G\in(U,\infty)$ إذا و فقط إذا G زمرة من الفئة FU.
حيث U فئة الزمر قابلة للحل بامتياز (supersoluble) هي الزمر التي تقبل سلسلة ناظمية دوارة.

3.3.2 فئات زمر أخرى من النوع (χ,∞).

1.3.3.2 الفئة (N_k,∞)

في عام 1994 (على الترتيب 1996)برهن C. Delizia في [10،9] النظرية التالية:

نظرية 6.3.2. إذا كانت G S-زمرة(على الترتيب RF-زمرة) ذات نوع منته. فان:
$G\in(N_2,\infty)$ إذا و فقط إذا كانت $G/Z_2(G)$ منتهية.

في عام 1998(على الترتيب 2000) قام نفس الباحث السابق في [11](على الترتيب [12]) بتعميم النتيجة أعلاه و برهن النظرية التالية:
نظرية 7.3.2. إذا كانت G S-زمرة ذات نوع منته و ذات طول مشتق d فان $G\in(N_k,\infty)$ إذا و فقط إذا وجد $c=c(k,d)$ (على الترتيب $c=c(k)$)بحيث $G/Z_c(G)$ منتهية.

في عام 1999 قام كل من A. Abdellahi و B. Taheri في [4] بتحسين هذه النتيجة الأخيرة و برهنا النتيجة التالية:
نظرية 8.3.2. لتكن G S-زمرة ذات نوع منته فان:
$G\in(N_k,\infty)$ إذا و فقط إذا كانت G زمرة من الفئة $FN_k^{(2)}$.

في عام 2000 برهن C. Delizia في [12] أن:

نظرية 9.3.2.لتكن G زمرة مدرجة محليا(locally graded) ذات نوع منته.

$G\in(N_k,\infty)$ إذا و فقط إذا وجد $c=c(k)$ بحيث $G/Z_c(G)$ منتهية.

ملاحظة 1.3.2. *إذا حققت زمرة G شروط النظرية 8.3.2 السابقة فهي $FN_k^{(2)}$-زمرة و بالتالي إذا كانت T الزمرة الدورية لـ G فان G/T $FN_k^{(2)}$-زمرة بدون التواء فحسب نظرية في [29, Theorem 7.36] فان G $FN_{k^{d-1}}$-زمرة.*

2.3.3.2 فئات الزمر $\varepsilon(\infty)$, $\varepsilon_k(\infty)$ و (ε_k,∞) .

نرمز بـ $\varepsilon(\infty)$ فئة الزمر G حيث كل جزء غير منته منها يشمل عنصرين مختلفين x, y و بحيث يوجد عدد طبيعي $n=n(x,y)$ حيث $[x\ ,\ _ny]=1$. نرمز بـ $\varepsilon_k(\infty)$ من اجل $k>0$ مثبت، لفئة الزمر G حيث كل جزء غير منته منها يشمل عنصرين مختلفين x, y بحيث $[x\ ,\ _ky]=1$ و ε_k فئة الزمر

k-أنجال.

في عام 1993 برهن كل من P. Longobardi و M. Maj في [22] النظرية التالية:

نظرية 10.3.2. لتكن G زمرة قابلة للحل ذات نوع منته. فان: $G\in\varepsilon(\infty)$ إذا و فقط إذا G زمرة من الفئة FN.

في عام 2000 قام A. Abdollahi , [2] في النظريتين التاليتين بتمييز الفئة $\varepsilon_k(\infty)$ من اجل $k=2$ و $k=3$:

نظرية 11.3.2. لتكن G زمرة قابلة للحل ذات نوع منته. فان $G\in\varepsilon_2(\infty)$ إذا و فقط إذا كانت $G/Z_2(G)$ منتهية.

نظرية 12.3.2. لتكن G زمرة قابلة للحل ذات نوع منته. فان $G \in \varepsilon_3(\infty)$ إذا و فقط إذا كانت G $FN_k^{(2)}$-زمرة.

في عام 2001 حسن P. Longobardi في [23] النظرية السابقة بالنظرية التالية:

نظرية 13.3.2. لتكن G زمرة قابلة للحل ذات نوع منته. فان $G\in (\varepsilon_k,\infty)$ إذا و فقط إذا كانت G $F\varepsilon_k$-زمرة.

3.3.3.2 فئات الزمر $(FN,\ \infty)$, $(FN_k,\ \infty)$, $(NF,\ \infty)$ و $(N_kF,\ \infty)$.

في عام 2002 برهن N. Trabelsi في [38] النتائج التالية:

نظرية 14.3.2. لتكن G زمرة قابلة للحل ذات نوع منته. فان:

1. $G\in(FN,\ \infty)$ إذا و فقط إذا كانت G FN-زمرة.
2. $G\in(FN_k,\infty)$ إذا و فقط إذا وجد c=c(k) حيث G FN_c-زمرة.
3. $G\in(NF,\ \infty)$ إذا و فقط إذا كانت G NF-زمرة.
4. $G\in(N_kF,\infty)$ إذا و فقط إذا وجد c=c(k) حيث G N_cF-زمرة.

في نفس السنة كذلك حسّن A. Abdellahi بمعية N. Trabelsi في [1] النظرية 14.3.2 (2) أعلاه و برهن:

نظرية 15.3.2. لتكن G زمرة قابلة للحل ذات نوع منته. فان: $G\in(FN_k,\infty)$ إذا و فقط إذا كانت G $FN_k^{(2)}$-زمرة.

في عام 2005 درس N. Trabelsi في [38] الفئة $(\tau N,\infty)$ و برهن النتيجة التالية:

نظرية 16.3.2. لتكن G زمرة قابلة للحل ذات نوع منته.
فان: $(\tau N,\infty)$ ∋ G إذا و فقط إذا كانت G τN-زمرة.

في عام 2006 درس L. Noui في [28] الفئة (CN,∞) و برهن النتيجة التالية:

نظرية 16.3.2. لتكن G زمرة قابلة للحل ذات نوع منته.
فان: (CN,∞) ∋ G إذا و فقط إذا كانت G FN-زمرة.

4.2 فئات الزمر من النوع $(\chi,\infty)^*$.

1.4.2 مقدمة.

نذكر أن G من الفئة (χ,∞) حيث χ خاصية زمر ما إذا من اجل كل جزء غير منته X من G يشمل عنصرين x, y حيث <x, y> هي χ-زمرة. باستبدال <x, y> بـ <x, x^y> في هذا التعريف حيث x^y يمثل مرافق x بـ y, تمكن باحثون امثال N.Trabelsi في سنة 2005 من استنتاج فئة جديدة يرمز لها $(\chi,\infty)^*$. سنعطي في هذه الفقرة مختلف النتائج التي تم الحصول عليها لهذا النوع من الفئات.

تعريف 1.4.2. لتكن G زمرة و χ خاصية زمر ما.
نقول عن G أنها من الفئة $(\chi,\infty)^*$ إذا كان كل جزء غير منته X منها يشمل عنصرين x, y حيث <x, x^y> هي χ-زمرة.

خاصية 1.4.2. *إذا كانت الخاصية χ مستقرة بالانتقال إلى الزمر الجزئية فان* $\chi \subset (\chi,\infty) \subset (\chi,\infty)^*$.

2.4.2 بعض النتائج من النوع $(\chi,\infty)^*$.

في عام 2005 درس N. Trabelsi في [38] الفئة $(CN,\infty)^*$ و برهن النتيجة التالية:

نظرية 1.4.2. لتكن G زمرة قابلة للحل ذات نوع منته.
فان: $(CN,\infty)^*$ ∋G إذا و فقط إذا كانت G FN-زمرة.

في عام 2007 توصل الرياضي السابق بمعية T. Rouabhi في [31] إلى إثبات النتيجة التالية:

نظرية 2.4.2. لتكن G SF-زمرة ذات نوع منته. فان:
$(\tau N,\infty)^*$ ∋G إذا و فقط إذا كانت G τN-زمرة.

تعريف 2.4.2.
1. نقول عن زمرة G أنها ذات عمق منته (finite depth) إذا كانت سلسلتها المركزية المتنازلة مستقرة بعد عدد منته من الخطوات. بمعنى آخر إذا وجد عدد طبيعي n بحيث $\gamma_n(G)=\gamma_{n+1}(G)$. أصغر عدد طبيعي n يحقق هذه الخاصية يسمى عمق (depth) الزمرة G.
2. من أجل 0<k عدد طبيعي مثبت, نرمز بـ Ω (على التوالي Ω_k) عائلة الزمر ذات العمق المنتهي (على التوالي ذات العمق على الأكثر k).
3. نقول عن زمرة G أنها فوق (AF) (Hyper(AF)) إذا ملكت سلسلة ناظمية متصاعدة:
$1=G_0\leq G_1\leq\cdots\leq G_\beta\leq G_{\beta+1}\leq\cdots\leq G_\nu=G$ بحيث من اجل أي ترتيبي (ordinal) β: $G_\beta/G_{\beta+1}\in$AF و إذا كان λ حد ترتيبي (ordinal limit), $G_\lambda=\bigcup_{\beta<\lambda}G_\beta$.

في عام 2007 اثبت كل من F. Guerbi و T. Rouabhi في [16] النتيجة التالية:

نظرية 3.4.2. لتكن G زمرة فوق (AF) ذات نوع منته. فان:

$G \in (\Omega, \infty)^*$ إذا و فقط إذا كانت G FN-زمرة.

من اجل k>0 لدينا النتائج التالية:

نتيجة 1.4.2. لتكن G زمرة فوق(AF) ذات نوع منته.

1. إذا كانت $G\in(\Omega_k, \infty)^*$ فانه يوجد عدد طبيعي c=c(k) بحيث $G/Z_c(G)$ منتهية.
2. إذا كانت $G\in(\Omega_2, \infty)^*$ فان $G/Z_2(G)$ منتهية.
3. إذا كانت $G\in(\Omega_3, \infty)^*$ فان G $FN_3^{(2)}$-زمرة.

الفصل

الثالث

الفصل الثالث. حول الـ FC-زمر و الـ FN_k-زمر في بعض فئات الزمر ذات النوع المنتهي.

1.3 مقدمة.

يحتوي هذا الفصل على النتائج التي توصلنا إليها و تتمثل في ثلاثة أجزاء. في الجزء الأول ندرس استقرار الخاصية FC بالتوسيعين المنتهي و الملتوي. إذ نثبت أنه في فئة الـــ FN-زمر (على الترتيب τN-زمر) ذات النوع المنتهي فإن التوسيع المنتهي (على الترتيب التوسيع الملتوي) لـ FC-زمرة هو FA-زمرة (على الترتيب τA-زمر). كما نبين من خلال أمثلة مضادة أن الشرطان "عديمة القوة" و "من نوع منته" ضروريان لصحة هاتين النتيجتين.

نثبت في الجزء الثاني أن كل $((FN_k)F,\infty)$-زمرة (على الترتيب $((\tau N_k)\tau,\infty)$-زمرة) في فئة FN-زمر (على الترتيب τN-زمر) ذات النوع المنتهي هي $FN_k^{(2)}$- زمرة (على الترتيب $\tau N_k^{(2)}$-زمرة). ثم و اعتمادا على النتائج السابقة و باستبدال الفئة FN بالفئة NF نستنتج أن كل $((FN_k)F,\infty)$-زمرة في فئة NF-زمر ذات النوع المنتهي هي $N_k^{(2)}F$- زمرة.

أما الجزء الأخير فنبيّن فيه أنه من أجل كل FN-زمرة (على الترتيب τN-زمرة) ذات النوع المنتهي في الفئة $((FN_k)F,\infty)^*$ (على الترتيب $((\tau N_k)\tau,\infty)^*$) فإنه يوجد عدد طبيعي $c=c(k)$ متعلق فقط بـــ k حيث $G\in \mathrm{FN_c}$

(على الترتيب $G\in\tau N_c$). بالخصوص إذا كانت $G\in((FC)F,\infty)^*$ فان $G\in FN_2$ و إذا كانت $G\in((FN_2)F,\infty)^*$ فان $G\in FN_3^{(2)}$.

2.3 استقرار الخاصية FC ببعض العمليات الجبرية.

نقدم في هذه الفقرة النتائج التي تبين استقرار الخاصية FC بواسطة بعض العمليات الجبرية المعروفة كالانتقال إلى الزمر الجزئية, الصورة التماثلية, بالقسمة و بالجداء المباشر.

خاصية 1.2.3.

1. إذا كانت G FC-زمرة و H زمرة جزئية من G فان H FC-زمرة.
2. إذا كان f تماثل زمر من FC-زمرة G نحو زمرة K فان f(G) FC-زمرة من K.
3. إذا كانت $H_1, H_2, \dots, H_n$ FC-زمر جزئية ناظمية من زمرة G (على الترتيب FC-زمر) فان الجداء المباشر $\prod_{i=1}^{n} H_i$ (على الترتيب $H_1\times H_2\times\dots\times H_n$) هو FC-زمرة جزئية من G (على الترتيب FC-زمرة).

البرهان.

1. بديهي.
2. نفرض انه من اجل كل $x\in G$ صنف ترافق x في G منته. أي $card(x^G)<\infty$. صنف ترافق صورته f(x) في f(G) كزمرة جزئية من K هي:

$$f(x)^{f(G)}=\{k.f(x).k^{-1}\ /\ k\in f(G)\}$$

$$=\{f(g).f(x).f(g)^{-1}\ /\ g\in G\}$$

$=\{f(g.x.g^{-1})/\ g\in G\}$

$=\ \{f(x^g)\ /\ g\in G\}=f(x^G)$

هذا ما يثبت أن $f(x)^{f(G)}$ صنف ترافق منته.

3. ليكن $(h_1,\ h_2,\dots,h_n)\in\prod_{i=1}^{n}H_i$ إذن صنف ترافق $(h_1,h_2,\dots,h_n)$ في $\prod_{i=1}^{n}H_i$ هي:

$(h_1,h_2,\dots,h_n)^{\prod_{i=1}^{n}H_i}$

$=\{(k_1,k_2,\dots,k_n)(h_1,h_2,\dots,h_n)(k_1,k_2,\dots,k_n)^{-1}/\ k_i\in H_i\}$

$=\{\left(k_1h_1{k_1}^{-1},\ k_2h_2{k_2}^{-1},\dots,k_nh_n{k_n}^{-1}\right)/\ k_i\in H_i\}$

$=\{\left({h_1}^{k_1},\ {h_2}^{k_2},\dots,{h_n}^{k_n}\right)/\ k_i\in H_i\}$

$=\prod_{i=1}^{n}{h_i}^{H_i}.$

بما أن من اجل كل i الأصناف المترافقة ${h_i}^{H_i}$ منتهية فان $(h_1,\ h_1,\dots,h_1)^{\prod_{i=1}^{n}H_i}$ منته.

□

نتيجة 1.2.3. ليكن f تماثل غامر من زمرة G في زمرة K. إذا كانت G FC-زمرة فان K FC-زمرة كذلك.

البرهان. هذا ينتج من الخاصية أعلاه الجزء الثالث.

بما أن G FC-زمرة و f غامر فان f(G)=K FC-زمرة.

ملاحظة 1.2.3. من خلال هذه النتيجة و إذا كانت N زمرة جزئية ناظمية من FC-زمرة G و S التطبيق الغامر القانوني المعرف من G نحو G/N, فان S(G)=G/N FC-زمرة. ما يثبت استقرار الخاصية FC بالقسمة.

ملاحظة 2.2.3. إن عكس نقيض الاستلزام (1) في الخاصية السابقة يمكن أن يستعمل في إثبات أن زمرة ما لا تحقق الخاصية FC. في هذا السياق فان النظرية أدناه هي موضوع لمطبوعة نشرتها في [8].

قبل إعطاء اثبات هذه النظرية لدينا التعريف التالي:

ليكن E فضاء شعاعيا على حقل تبديلي K ذو بعد منته n.

نرمز بــ $\wedge^3 E$ للفضاء الشعاعي لثلاثيات الأشعة (trivectors) على E و المتشاكل مع الفضاء الشعاعي للأشكال الثلاثية الخطية المتناوبة على E.

تعريف 1.2.3. إذا كان E فضاء شعاعيا على حقل تبديلي K, فان:

1. الزمرة الخطية GL(E) تأثر على $\wedge^3 E$ بــ: من اجل $f\in GL(E)$ و $\omega\in\wedge^3 E$: $f.\omega = \wedge^3 f(\omega)$ حيث: من اجل كل $x,y,z\in E$: $\Lambda^3 f(\omega)(x,y,z)) = \omega(f(x),f(y),f(z))$.

2. زمرة التشاكلات الذاتية لــ ω (group of Automorphisms) التي يرمز لها Aut(ω) هي مثبت (stabilizer) ω في الزمرة الخطية GL(E). أي

$\text{Aut}(\omega)=\{f\in GL(E) /\ f.\omega = \omega\}$

نظرية 1.2.3. إذا كان K حقل تبديلي غير منته, فانه يوجد K-فضاء شعاعيا ذو بعد منته E و ثلاثي-شعاع ω على E ‏($\omega\in\wedge^3 E$ trivector) بحيث زمرة التشاكلات الذاتية Aut(ω) المرافقة لــ ω ليست FC-زمرة.

البرهان.

ليكن E فضاء شعاعيا على الحقل التبديلي غير المنتهي K ذو البعد n=6 و ذو الأساس $B_E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ و نعتبر ثلاثي-الشعاع $\omega=\omega_{6.1}=e_1e_2e_3+e_4e_5e_6$ من $\wedge^3 E$ ذو الرتبة الأعظمية n=6 في تصنيف ثلاثيات-الأشعة ذات الرتبة الأعظمية n=6 لــ P. Revoy في [32].

لنعتبر $A_6 = Aut(\omega)$ زمرة التشاكلات الذاتية المرافقة لـ ω. حسب L. Noui و Ph. Revoy في [27] فان A_6 هو الجداء نصف المباشر للزمرة $SL_3(K)\times SL_3(K)$ بالزمرة $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ حيث

$SL_3(K)$ هي الزمرة الخطية الخاصة ذات الدليل 3 (special linear group).

نفرض جدلا أن A_6 هي FC-زمرة, فحسب (1) من الخاصية 1.2.3 فان $L_3(K)\times SL_3(K)$ كزمرة جزئية من A_6 هي FC-زمرة

و بالمثل فان $SL_3(K)$ كزمرة جزئية من $SL_3(K)\times SL_3(K)$ تمثل FC-زمرة. لكن حسب [34, Theorem 4, §23] كل FC-زمرة خطية هي FIZ-زمرة أي زمرة القسمة $SL_3(K)/Z(SL_3(K))$ منتهية. و بما أن مركزها $Z(SL_3(K))=\{aI_3 \ / \ a^3 = 1\}$ (حيث I_3 هي المصفوفة الحيادية ذات البعد 3) هي زمرة دوارة منتهية فان هذا يؤدي إلى أن $SL_3(K)$ منتهية و هذا يتناقض مع كون الحقل K غير منته. □

3.3 التوسيع الملتوي و المنتهي للخاصية FC.

نعلم أن الخاصية FC غير مستقرة بالتوسيع.
المثال 1.3.3 التالي يبين أن توسيع منته (على التوالي ملتوي) لـ FC-زمرة ليس FC-زمرة (على التوالي τA-زمرة).
نتائج هذه الفقرة موجودة بالمقال الذي نشرته في [7].

ملاحظة 1.3.3. لتكن G زمرة غير منتهية ذات نوع منته.

إذا كان مركز G منتهيا (أو بالخصوص تافها) فان هذه الزمرة G ليست FC-زمرة.

بالفعل: نعلم أن G ‏FC-زمرة ذات نوع منته إذا و فقط إذا كانت Z(G) ذات دليل منته. و هذا يكافئ القول أن:

G ليست FC-زمرة ذات نوع منته إذا و فقط إذا كانت Z(G) ذات دليل غير منته ما يكافئ Z(G) منتهية.

مثال1.3.3. لتكن $D_\infty=\langle a, b \mid a^2=1, aba=b^{-1}\rangle$ زمرة ديهيدرال غير المنتهية (infinite Diedral group) و هي زمرة قابلة للحل ذات نوع منته مولدة بـ a, b و تقبل $k=\langle b\rangle$ كزمرة جزئية دوارة غير منتهية مشاكلة لـ $\mathbb{Z}$ فهي FC-زمرة و بحيث زمرة حاصل القسمة G/K هي الزمرة الدوارة المنتهية $H=\langle a\rangle$ ذات الرتبة 2 المشاكلة لـ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ و التي بدورها FC-زمرة. إذن الزمرة G هي توسيع منته لـ FC-زمرة, و لكن بما أن مركز الزمرة ديهيدرال D_∞ هي الزمرة التافهة فإنها ليست FC-زمرة.

إن هذا المثال أعلاه يبين كذلك أن الخاصية FC غير مستقرة بالتوسيع المنتهي في فئة الزمر القابلة للحل و ذات النوع المنتهي. لذلك نعتبر فئة الـ FN-زمر ذات النوع المنتهي و نثبت انه إذا وجدت FC-زمرة جزئية H ذات دليل منته من زمرة G من هذه الفئة فان هذه الزمرة هي FC-زمرة. لإثبات هذه النتيجة نحتاج للتوطئات التالية:

توطئة 1.3.3. [33, EX5.1.6]
إذا كانت G زمرة عديمة القوة ذات صنف الانعدام d و g عنصرا من G فان الزمرة الجزئية $\langle G', g\rangle$ هي زمرة عديمة القوة ذات صنف الانعدام $\leq d$.

توطئة 2.3.3.

إذا كانت G زمرة عديمة القوة و بدون التواء و m, n عددين طبيعيين غير معدومين و$x,y \in G$ فان:

1. إذا كان x^n=y^n فان $x = y$.
2. إذا كان $[x^m\ y^n]$=1 في G فان $[x\ y] = 1$ في G.
3. إذا كان $[x^m y\ x^n y]$=1 في G فان $[x\ y] = 1$ في G.

البرهان.

1. نفرض G ذات صنف الانعدام d. نبرهن بالتراجع على d.

إذا كان d=1 فان G تبديلية و بالتالي x^n=y^n يكافئ $(xy^{-1})^n = 1$ و بما ان G بدون التواء ينتج أن xy^{-1}=1 و منه x=y . نفرض الآن أن G عديمة القوة و غير آبلية و ذات صنف الإنعدام d. نعتبر الزمرة الجزئية H=<G′,x> المولدة بالزمرة المشتقة G′ و العنصر x من G, من التوطئة 1.3.3 أعلاه فان صنف الانعدام لـــ H يكون ≤ d. إذن من فرضية التراجع فان التوطئة محققة على H.

لدينا فرضا x∈H و $y^{-1}xy$ = $x[x\ y]$∈H و $x^n = y^n$. و منه $(y^{-1}xy)^n = y^{-1}x^n y$=$y^{-1}y^n y$=$y^n = x^n$ في H فحسب الخاصية

(1) من هذه التوطئة مطبقة على H يكون لدينا $y^{-1}xy = x$ ما يؤدي الى ان x و y يتبادلان و بالتالي:

$$x^n = y^n \Leftrightarrow x^n y^{-n} = 1 \Leftrightarrow (xy^{-1})^n = 1 \Leftrightarrow x=y.$$

2. لدينا:

$$x^m y^n = y^n x^m \Leftrightarrow y^{-n} x^m y^n = x^m \Leftrightarrow (y^{-n} x y^n)^m = x^m.$$

فحسب (1)

$$(y^{-n} x y^n)^m = x^m \Leftrightarrow y^{-n} x y^n = x$$
$$\Leftrightarrow x y^n = y^n x$$

$\Leftrightarrow xy^nx^{-1} = y^n$

$\Leftrightarrow (xyx^{-1})^n = y^n$

فحسب (1) كذلك ينتج لدينا : $xyx^{-1} = y$ و منه $xy=yx$.

3. لدينا كذلك:

$$[x^m y\ x^n y] = 1 \Leftrightarrow x^m y\ x^n y = x^n y\ x^m y$$

$$\Leftrightarrow x^{m-n} y\ x^n = y x^m$$

$$\Leftrightarrow x^{m-n} y = y x^{m-n}$$

$$\Leftrightarrow [x^{m-n}\ y] = 1$$

فحسب (2) ينتج أن $xy = yx$

□

نثبت في النظرية الأساسية أسفله أن الخاصية FC مستقرة بالتوسيع المنتهي في فئة الـ FN-زمرة ذات النوع المنتهي.

نظرية 1.3.3.

لتكن G FN-زمرة ذات نوع منته.

G F(FC)-زمرة إذا و فقط إذا كانت G FC-زمرة.

البرهان.

- إذا كانت G (FC)-زمرة فإن G $F(FC)$-زمرة.
- نفرض الآن أن G $F(FC)$-زمرة في فئة الـ FN-زمر ذات نوع منته، إذن توجد زمرة جزئية ناظمية منتهية H من G بحيث زمرة القسمة G/H عديمة القوة. بما أنه حسب نتيجة لـ Nishigori في [26] أن كل $F(FC)$-زمرة هي FC-زمرة، فيكفي إثبات أن G/H هي FC-زمرة في فئة الـ N-زمر ذات النوع المنتهي. بما أن الخاصية $(FC)F$

مستقرة بالانتقال إلى القسمة فيكفي إثبات أن أي $(FC)F$-زمرة في فئة الـ N-زمر ذات نوع منته هي FC-زمرة. بما أن G $(FC)F$ زمرة فانه توجد FC-زمرة جزئية ناظمية N ذات دليل منته في G (G/N منتهية). و كون G عديمة القوة وذات نوع منته فحسب نظرية 6.2.2 لـ Baer فهي تحقق الشرط الأعظمي على الزمر الجزئية (max) ما يؤدي إلى أن N FC-زمرة جزئية ذات نوع منته و استنادا لـ [5, Theorem 2.6] فان N هي FIZ-زمرة أي أن مركزها $Z(N)$ ذات دليل منته في N ما يعني أن Z/Z(N) منتهية. لكن G/N زمرة منتهية و بالتالي G/Z(N) منتهية. إذن من اجل كل x, y من G فانه يوجد عددين طبيعيين n, m غير معدومين بحيث x^n, y^m ينتميان إلى $Z(N)$ وهذا يؤدي إلى $\left[x^n, y^m\right]=1$ في G. ليكن $T=Tor(G)$ الزمرة الجزئية الملتوية لـ G. بما أن G عديمة القوة فان حسب نظرية 6.2.1 فان G/T زمرة عديمة القوة بدون الالتواء فبتطبيق التوطئة 2.3.3 (2) أعلاه فان $[xT, yT]=T$ في الزمرة G/T و بالتالي G/T زمرة آبلية. كذلك كون G يحقق max و T زمرة دوارة و عديمة القوة و ذات نوع منته فانه حسب نظرية 12.2.1 فإن T منتهية ومنه G FA-زمرة و حسب النظرية 4.2.1 فهي FC-زمرة. □

ملاحظة 2.3.3.

المثال أسفله يبين أن النظرية 1.3.3 السابقة ليست صحيحة في حالة إزالة الشرط "ذات النوع المنتهي"

مثال 2.3.3.

نعتبر $A=F_2[X]$ جبر كثيرات الحدود على الحقل الأولي F_2

و التشاكل
$$\varphi : A\times A \to A\times A$$
$$(P,Q)\mapsto \varphi(P,Q)=(P+Q,Q)$$

نضع $H=A\times A$ و $K=\langle\varphi\rangle$ حيث $\varphi^2=Id_{A\times A}$ التطبيق المطابق على $A\times A$.

لدينا: H زمرة آبلية فهي FC-زمرة و K زمرة دوارة ذات الرتبة 2 فهي FC-زمرة. لنعتبر $G=H\rtimes K$ الجداء نصف المباشر (semi direct product) لـ H بـ K. بالرغم أن G توسيع منته للـ FC-زمرة H بالزمرة المنتهية K إلا أنها ليست FC-زمرة. □

إذا استبدلنا الخاصية F بالخاصية τ تكون لدينا النتيجة التالية:

نتيجة 1.3.3.

لتكن G τN-زمرة ذات نوع منته

إذا كانت G $(FC)\tau$-زمرة فإن G τA-زمرة.

البرهان.

نفرض أن $G\in(FC)\tau$ في الفئة τN. إذن يوجد زمرة جزئية ناظمية دورية F من G بحيث G/F عديمة القوة. بما أن الخاصية $(FC)\tau$ مستقرة بالقسمة فيكفي إثبات أن كل زمرة عديمة القوة ذات نوع منته في الفئة $(FC)\tau$ هي τA-زمرة.

لدينا $G\in(FC)\tau$ إذن توجد FC-زمرة جزئية H حيث G/H دورية. بما أن G N-زمرة ذات نوع منته فان G/H N-زمرة دورية و ذات نوع منته فحسب النتيجة 3.2.2

فان G/H منتهية و تصبح G $F(FC)$-زمرة في فئة الـ N-زمر ذات النوع المنتهي فحسب النظرية 1.3.3 فإن G FA-زمرة إذن G/F τA-زمرة و F دورية فان $G\in\tau A$. □

4.3 FN_k و τN_k-زمر مع الشرط على المجموعات غير المنتهية

1.4.3 الفئاتان (FN_{k},∞) و $(\tau N_{k},\infty)$

نبتدئ هذه الفقرة بإثبات من خلال الخاصيتين التاليتين انه في فئة الـ FS-زمر(على التوالي فئة الـ τS-زمر) ذات النوع المنتهي كل (FN_k,∞)-زمرة (على التوالي $(\tau N_k,\infty)$-زمرة) هي $FN_k^{(2)}$ (على التوالي $\tau N_k^{(2)}$-زمرة)

نتائج هذه الفقرة موجودة بالمقال الذي نشرته في [7]

خاصية 1.4.3.

إذا كانت G FS-زمرة ذات نوع منته من الفئة (FN_k,∞) فإنها زمرة من الفئة $FN_k^{(2)}$.

البرهان

نفرض G FS-زمرة، إذن توجد زمرة جزئية ناظمية منتهية F بحيث G/F قابلة للحل. بما أن الفئة (FN_k,∞) مستقرة بالقسمة فان الزمرة G/F زمرة قابلة للحل و ذات نوع منته في الفئة (FN_k,∞) فحسب (Corollary1.8،[1]) فان G/F هي $FN_k^{(2)}$-زمرة و بالتالي G $F(FN_k^{(2)})$-زمرة فهي $FN_k^{(2)}$-زمرة. □

ملاحظة 1.4.3

من أجل $k=1$ في النظرية أعلاه نستنتج أن كل FS-زمرة ذات نوع منته في الفئة (FC, ∞) هي FC-زمرة.

خاصية 2.4.3.

إذا كانت G τS-زمرة ذات نوع منته في الفئة $(\tau N_k,\infty)$ فان G $\tau N_k^{(2)}$-زمرة

البرهان

نفرض G τS-زمرة، إذن توجد زمرة جزئية ناظمية دورية N بحيث G/N قابلة للحل. بما أن الخاصية $(\tau N_k,\infty)$ مستقرة بالقسمة فان الزمرة G/N قابلة للحل و ذات نوع منته في الفئة $(\tau N_k,\infty)$ المحتواة في الفئة $(\tau N,\infty)$ فحسب [38]فان G/N في الفئة τN و حسب **[6]** فان الزمرة الدورية لـ G/N هي T/N بحيث زمرة القسمة G/T زمرة بدون التواء في الفئة $(\tau N_k,\infty)$. إذن G/T زمرة قابلة للحل ذات نوع منته في الفئة (N_k,∞) فينتج حسب فحسب $([4], Theorem)$ أن G/T هي $FN_k^{(2)}$-زمرة و بالتالي G $\tau(FN_k^{(2)})$-زمرة ما يؤدي أن $G\in\tau N_k^{(2)}$. □

2.4.3 الفئتان $((FN_k)F, \infty)$ و $((\tau N_k)\tau, \infty)$.

بالرجوع للخاصية 1.4.3 (على التوالي 2.4.3) أعلاه رأينا أن FS-زمرة (على التوالي τS-زمرة) ذات نوع منته في الفئة (FN_k,∞) (على التوالي $(\tau N_k,\infty)$) هي $FN_k^{(2)}$-زمرة (على التوالي $\tau N_k^{(2)}$-زمرة)، فإذا استبدلنا S بـ N. وأخذنا بدل τN_k (على التوالي FN_k) توسيعا ملتويا لـ τN_k (على التوالي توسيعا منتهيا لـ FN_k) تكون لدينا النظريتن التاليتين المنشورتين بالمقال [7]:

نظرية 1.4.3

لتكن G τN-زمرة ذات نوع منته.

إذا كانت $G\in((\tau N_k)\tau,\infty)$ فان $G\in\tau N_k^{(2)}$.

البرهان

نفرض G τN-زمرة ذات نوع منته. إذن توجد زمرة جزئية ناظمية و دورية H بحيث الزمرة G/H عديمة القوة ذات نوع منته. بما أنها ذات نوع منته فهي تقبل زمرة جزئية دورية T/H ذات رتبة منتهية و بما أن H زمرة دورية فإن T تكون دورية كذلك بحيث الزمرة G/T عديمة القوة بدون التواء في الفئة $((\tau N_k)\tau,\infty)$ ما يؤدي إلى أن G/T في الفئة $(N_k\tau,\infty)$ و استنادا للنتيجة ([29], Lemma 6.33) نستنتج أن G/T هي زمرة من الفئة (N_k,∞) و كون G/T قابلة للحل و ذات نوع منته، فحسب ([4], *Theorem*) فهي تنتمي للفئة $FN_k^{(2)}$ و بما أن T دورية فان هذا يؤدي إلى أن G تنتمي للفئة $\tau N_k^{(2)}$. □

نظرية 2.4.3.

لتكن G FN-زمرة ذات نوع منته.

1. إذا كانت $G\in \left(\left(FN_k\right)F,\infty\right)$ فان $G\in FN_k^{(2)}$

2. $G\in\left((FC)F,\ \infty\right)$ إذا و فقط إذا كان $G\in FC$.

البرهان.

1. نفرض أن G FN-زمرة ذات نوع منته من الفئة $\left(\left(FN_k\right)F,\infty\right)$. فانه توجد زمرة ناظمية منتهية H بحيث زمرة القسمة G/H عديمة القوة ذات نوع منته و بالتالي فهي تقبل زمرة دورية T/H منتهية. و بما أن H منتهية فان T منتهية. كون أن الخاصية $\left(\left(\tau N_k\right)\tau,\infty\right)$ مستقرة بالانتقال للقسمة و أن $\left(\left(FN_k\right)F,\infty\right)\subset\left(\left(\tau N_k\right)\tau,\infty\right)$ فان $G/T\in\left(\left(\tau N_k\right)\tau,\infty\right)$ و بالتالي حسب النظرية أعلاه فان G/T زمرة بدون التواء من الفئة $\tau N_k^{(2)}$ فهي تنتمي للفئة $N_k^{(2)}$ و بالتالي $G\in FN_k^{(2)}$.

2. نفترض $G\in FC$ بما أن الخاصية (FC) مستقرة بالانتقال إلى الزمر الجزئية فان $FC\subset(FC)F\subset\left((FC)F,\infty\right)$ و بالتالي $G\in\left((FC)F,\infty\right)$.

عكسيا، نفرض أن G FN-زمرة ذات النوع المنتهي من الفئة $\left((FC)F,\infty\right)$ فهي تحقق الشرط ألأعظمي على الزمر الجزئية (Max) و لدينا

$$G\in\left((FC)F,\infty\right)\Leftrightarrow G\in\left((FA)F,\infty\right)\Leftrightarrow G\in\left(\left(FN_1\right)F,\infty\right)$$

فاستنادا للجزء (1) من هذه النظرية فان $G\in FN_1^{(2)}=FA$ أي $G\in FC$. □

ملاحظة 2.4.3.

1. إن المثال 2.3.3 السابق يبين أن شرط "عديمة القوة" (Nilpotent) شرط ضروري حتى تكون النظريتين السابقتين صحيحتين.

2. بما أن الخاصية $(FN_k)F$ مستقرة بالانتقال إلى الزمر الجزئية فان $(FN_k)F \subset ((FN_k)F,\infty)$ و منه نستنتج أن كل FN-زمرة ذات نوع منته من الفئة $(FN_k)F$ فهي $FN_k^{(2)}$-زمرة.

3. إن النظرية 1.3.3 أعلاه يمكن إثباتها كذلك باستعمال الجزء (2) من النظرية السابقة و استعمال كون

$$(FC)F \subset ((FC)F,\infty)$$

من النظرية السابقة لدينا النتيجة التالية الموجودة بالمقال [7]

نتيجة 1.4.3.

لتكن G FN-زمرة ذات نوع منته.

إذا كانت $G \in ((FN_k)F,\infty)$ فان:

1. يوجد عدد طبيعي d=d(k) متعلق بـ **k** بحيث $G \in FN_{k^{d-1}}$

2. يوجد عدد طبيعي c=c(d,k) متعلق بـ d و k بحيث $G/Z_c(G)$ زمرة منتهية.

البرهان.

1. كون $G \in ((FN_k)F,\infty)$ حسب الجزء (1) من النظرية 2.4.3 السابقة فإن $G \in FN_k^{(2)}$. إذن توجد زمرة جزئية ناظمية منتهية N بحيث $G/N \in N_k^{(2)}$ بما أن حسب الملاحظة 6.2.2 جزء (2) كل زمرة عديمة القوة ذات صنف الانعدام على الأكثر k هي زمرة k-أنجال فان G/N هي زمرة k-أنجال بدون التواء و كونها عديمة القوة فهي قابلة للحل ذات طول مشتق عدد طبيعي d.

فحسب ([29], Theorem 7.36 (i)) فإن الزمرة G/N تنتمي إلى الفئة $FN_{k^{d-1}}$ و منه $G\in F(FN_{k^{d-1}})=FN_{k^{d-1}}$.

2. من الجزء (1) في هذه النتيجة لدينا $G\in FN_{k^{d-1}}$ حسب ([17], P.Hall) فإنه يوجد $c=c(k,d)$ لا يتعلق إلا بـ k و d حيث $G/Z_c(G)$ زمرة منتهية. □

إذا استبدلنا الشرط FN بالشرط NF في النظرية 2.4.3 السابقة نحصل على النتيجة التالية المنشورة بـ [7]:

نتيجة 2.4.3

لتكن G NF-زمرة ذات نوع منته.

1. إذا كانت $G\in((FN_k)F,\infty)$ فإن $G\in N_k^{(2)}F$.
2. بشكل خاص: $G\in AF$ إذا وفقط إذا كانت $G\in((FC)F,\infty)$.

البرهان.

1. نفرض أن NF-زمرة ذات نوع منته في الفئة $((FN_k)F,\infty)$ إذن G تملك زمرة جزئية ناظمية وعديمة القوة H وذات دليل منته في G (أي G/H منتهية). وبما أن NF-زمرة ذات نوع منته تحقق الشرط الأعظمي على الزمر الجزئية فإن H عديمة القوة ذات نوع منته ودليل منته فهي زمرة متعددة الدورية وحسب ([30], *Theorem 5.4.15*) فإنه توجد PI-زمرة جزئية M من H عديمة الالتواء وذات دليل منته في H. نعتبر $K=M_G$ نواة M في G. إذن كذلك K زمرة ناظمية عديمة القوة ،عديمة الالتواء وذات دليل منته في G ،بما أن الخاصية $((FN_k)F,\infty)$ مستقرة بالانتقال إلى الزمر الجزئية فإن $K\in((FN_k)F,\infty)$ فحسب النتيجة (1) من النظرية 2.4.3 السابقة نستنتج أن K $FN_k^{(2)}$-زمرة بدون التواء ما يؤدي إلى أن K $N_k^{(2)}$-زمرة وكون G/K منتهية فإن G تمثل $N_k^{(2)}F$-زمرة.
2. إذا كانت $G\in AF$ فإن $G\in(FC)F$ و بما أن الفئة (FC)F مستقرة بالإنتقال للزمر الجزئية فإن $G\in((FC)F,\infty)$.

عكسيا نفرض أن $G\in((FC)F,\infty)$ فإن $G\in((FA)F,\infty)=((FN_1)F,\infty)$
فحسب جزء (1) من هذه النظرية فإن $G\in N_1^{(2)}F$ أي $G\in AF$. □

5.3 الفئتان $((FN_k)F,\infty)^*$ و $((\tau N_k)\tau,\infty)^*$

نذكّر النتيجة التي توصل إليها T.Rouabhi بمعية N.Trabelsi ([30]،Corollary،(i)) التي تنص على أنه
إذا كانت G SF-زمرة ذات نوع منته في الفئة $(\tau N_k,\infty)^*$
فإنه يوجد عدد طبيعي $c=c(k)$ متعلق بـــ k فقط بحيث
$G\in\tau N_C$. فاعتمادا على هذه النتيجة وكون الفئة $(\tau N_k,\infty)^*$
مستقرة بالقسمة فإننا نستنتج أنه في الفئة FS ذات
النوع المنتهي كل زمرة من الفئة $(\tau N_k,\infty)^*$ هي τN_C-زمرة
من أجل $c=c(k)$ عدد طبيعي متعلق فقط بـــ k.
إذا استبدلنا الخاصية $((\tau N_k)\tau,\infty)$ بالخاصية $((\tau N_k)\tau,\infty)^*$
في النظرية1.4.3 أعلاه نتحصل على النتيجة التالية
التي نشرنها المقال[7]:

نظرية 1.5.3.
إذا كانت G τN-زمرة ذات نوع منته في الفئة
$((\tau N_k)\tau,\ \infty)^*$ فإنه يوجد عدد طبيعي $c=c(k)$ متعلق فقط بـــ k
حيث $G\in\tau N_c$

البرهان.

نفرض G τN-زمرة ذات نوع منته في الفئة $((\tau N_k)\tau,\ \infty)^*$
و لتكن $T=Tor(G)$ الزمرة الجزئية الدورية لـــ G فحسب
التوطئة 1.3.3 جزء (1) فإن G/T عديمة القوة بدون
التواء و كون الفئة $((\tau N_k)\tau,\ \infty)^*$ مستقرة بالقسمة فإن
$G/T\in((\tau N_k)\tau,\ \infty)^*$ و بالتالي $G/T\in(N_k\tau,\ \infty)^*$. بتطبيق
النتيجة ([29], Lemma 6.33) نستنتج أن $G/T\in(N_k,\ \infty)^*$. لكن

الفئة $(N_k, \infty)^*$ هي فئة جزئية من الفئة $\varepsilon_{k+1}(\infty)$ التي هي فئة الزمر التي يكون فيها كل جزء غير منته X يشمل عنصرين مختلفين x, y بحيث يكون $[x, {}_{k+1}y]=1$. إذن G/T تنتمي للفئة $\varepsilon_{k+1}(\infty)$ و كونها عديمة القوة فهي قابلة للحل. فحسب ([2], *Theorem 3*) فإنه يوجد $c=c(k)$ متعلق فقط بـ k حيث $G/T \big/ Z_c(G/T)$ منتهية واستنادا للنتيجة ([17], *Theorem 1*) فإن $Y_{c+1}(G/T)=Y_{c+1}(G)T/T$ منتهية و بالتالي فهي دورية. كون أن T منتهية (فهي دورية) فإن $Y_{c+1}(G)$ دورية. وحسب نظرية 12.2.2 جزء (3) لدينا $G/Y_{c+1}(G)$ هي N_c-زمرة و بالتالي $G\in \tau N_c$. □

نظرية 2.5.3.

لتكن G FN-زمرة ذات نوع منته

1. إذا كانت $G\in((FN_k)F, \infty)^*$ فإنه يوجد عدد طبيعي $c=c(k)$ متعلق فقط بـ k حيث $G\in FN_c$.
2. إذا كانت $G\in((FC)F, \infty)^*$ فإن $G/Z_2(G)$ منتهية و $G\in FN_2$
3. إذا كانت $G\in((FN_2)F, \infty)^*$ فإن: $G\in FN_3^{(2)}$.

البرهان.

1. نفرض G FN-زمرة ذات نوع منته. و لتكن T الزمرة الجزئية الدورية لـ G. فحسب النظرية 9.2.2 فإن T زمرة منتهية، و كما جاء في النظرية السابقة واستنادا للنتيجة في ([29], Lemma 6.33) نستنتج أن G/T تنتمي إلى الفئة $(N_k, \infty)^*$ و التي هي فئة جزئية من الفئة $\varepsilon_{K+1}(\infty)$ ومنه $G/T\in\varepsilon_{k+1}(\infty)$. فحسب ([2], *Theorem 3*) فإنه يوجد على الأقل يوجد $c=c(k)$ متعلق فقط بـ k حيث $G/T \big/ Z_c(G/T)$ منتهية واستنادا للنتيجة ([17], *Theorem 1*) فإن $Y_{c+1}(G/T)$ منتهية و ب التالي $Y_{c+1}(G)T/T$ منتهية. و بما أن T زمرة منتهية فإن $Y_{c+1}(G)$ منتهية و بالتالي $G\in FN_c$.

2. بفرض $G\in((FC)F,\infty)^*$ و بما أن G ذات نوع منته فإن الخاصية $(FC)F$ تتطابق مع الخاصية $(FA)F=(FN_1)F$ نتبع نفس الخطوات في (1) إلى أن نصل إلى أن $G/T\in\varepsilon_2(\infty)$ ثم نستند على النتيجة في ([9] , Theorem) التي تؤدي إلى أن $G/T\big/Z_2(G/T)$ منتهية وكون T زمرة منتهية فإن $G/Z_2(G)$ منتهية وهذا بدوره يكافئ أن $Y_3(G)$ منتهية ما يستلزم حسب النظرية 11.2.2 جزء (3) فإن $G/Y_3(G)$ N_2-زمرة و بالتالي $G\in FN_2$.

3. من أجل $k=2$ نتبع الخطوات في (1) نصل إلى أن $G/T\in(N_2,\infty)^*$ و حيث $(N_2,\infty)^*\subset\varepsilon_3(\infty)$ نجد أن $G/T\in\varepsilon_3(\infty)$ فحسب ([2] , Theorem 1) فإن G/T $FN_3^{(2)}$-زمرة وبما أن الزمرة الدورية T منتهية فإن $G\in F\left(FN_3^{(2)}\right)$ ما يؤدي إلى أن $G\in FN_3^{(2)}$. □

نتيجة 1.5.3.

لتكن G NF-زمرة ذات نوع منته.

1. إذا كانت $G\in\left((FN_k)F,\infty\right)^*$ فإنه يوجد عدد طبيعي $c=c(k)$ حيث $G\in N_cF$.
2. إذا كانت $G\in\left((FC)F,\infty\right)^*$ فإن $G\in N_2F$.
3. إذا كانت $G\in\left((FN_2)F,\infty\right)^*$ فإن: $G\in N_3^{(2)}F$.

البرهان.

1. نفرض G NF-زمرة ذات نوع منته. إذن G تمللك زمرة جزئية ناظمية عديمة القوة H بحيث زمرة حاصل القسمة G/H منتهية. بما أن الزمرة الجزئية H عديمة القوة ذات دليل منته و ذات نوع منته كون G NF-زمرة فهي تحقق الشرط الأعظمي على الزمر الجزئية فهي متعددة الدورية و بالتالي استنادا لـ ([21] , Theorem 5.4.15) فإنه توجد PI-زمرة جزئية ناظمية M من H بدون التواء و بدليل منته في H. لتكن $K=M_G$ نواة الزمرة الجزئية M، فإن K ناظمية عديمة القوة بدون التواء ذات دليل

منته في G. بما أن الفئة $((FN_k)F,\infty)^*$ مستقرة بالانتقال إلى الزمر الجزئية فإن K تنتمي كذلك لهذه الفئة.
فحسب (1) من النظرية 2.5.3 السابقة نستنتج أنه يوجد $c=c(k)$ متعلق فقط بـ k بحيث تكون K FN_c-زمرة، بما أن K بدون التواء فإن K N_c-زمرة و بالتالي $G\in N_cF$.
2. بفرض $G\in((FC)F,\infty)^*$ و بما أن G ذات نوع منته فإن الخاصية FC تنطبق على FA و بالتالي
$G\in((FA)F,\infty)^*=((FN_1)F,\infty)^*$ في هذه الحالة نتبع نفس الخطوات في (1) لنصل إلى أن الزمرة الجزئية K زمرة جزئية عديمة القوة ذات نوع منته من الفئة $((FN_1)F,\infty)^*$
فحسب (2) من النظرية السابقة فإن $K\in FN_2$ و بما أن K بدون التواء فإن $K\in N_2$ و ذات دليل منته فإن $G\in N_2F$.
3. على وجه الخصوص من أجل $k=2$ فإن الزمرة الجزئية K في الحالة (1)عديمة القوة ذات نوع منته و عديمة القوة من الفئة $((FN_2)F,\infty)^*$ واستنادا لـ (3) من النظرية السابقة فإن $K\in FN_3^{(2)}$ وكونها بدون إلتواء فهي تنتمي للفئة $N_3^{(2)}$ وبالتالي $G\in N_3^{(2)}F$. □

الخاتمة

نستخلص من هذه الأطروحة ثلاثة نقاط أساسية.

1. في الأولى أثبتنا انه في الفئة $FN \cap FG$ فإن الفئة FC مستقرة بالتوسيع المنتهي، لكنها في الفئة $\tau N \cap FG$ فهي غير مستقرة بالتوسيع الملتوي.
2. في النقطة الثانية أثبتنا أنه :
   - في الفئة $FN \cap FG$ فإن : $((FN_k)F,\infty) \subset FN_k^{(2)}$
   - في الفئة $\tau N \cap FG$ فإن : $((\tau N_k)F,\infty) \subset \tau N_k^{(2)}$
3. أما النقطة الأخيرة فقد بيّنّا فيها أنه:
   - في الفئة $FN \cap FG$ فإن : $((FN_k)F,\infty)^* \subset FN_c$ حيث c متعلق فقط بـ k.
   - في الفئة $\tau N \cap FG$ فإن : $((\tau N_k)\tau,\infty)^* \subset \tau N_c$ حيث cمتعلق فقط بـ k.
   - في الفئة $FN \cap FG$ فإن: $((FC)F,\infty)^*$ تتطابق مع $G\in FN_2$ و $((FN_2)F,\infty)^*\subset FN_3^{(2)}$.
4. يمكننا اقتراح دراسة:

- توسيع FC-زمرة بـ FC-زمرة في فئة الـ $FN \cap FG$.
- التوسيع الآبلي لـ FC-زمرة في فئة الـ $FN \cap FG$.
- دراسة الفئتين $((FN_k)F,\infty)$ و $((FN_k)F,\infty)^*$ وفي بعض الفئات كـ $S \cap FG$ أو $SF \cap FG$.

مراجع

References. مراجع

[1] A. Abdollahi et N. Trabelsi, *Quelques extensions d'un problème de Paul Erdös sur les groups,* Bull. Belg. Math. Soc. 9, (2002), 1-11.

[2] A. Abdollahi, *Some Engel conditions on infinite subsets of certain groups*, ull.Austral. Math. Soc. 62, (2000), 141-148.

[3] A. Abdollahi, *Finitely generated soluble groups with an Engel conditions on infinite subsets*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 103, (2000), 47-49.

[4] A. Abdollahi, B.Taeri, *A condition on finitely generated soluble groups*, Communication in Algebra, 27(11), (1999), 5633-7658.

[5] R. Baer, *Finiteness properties of groups*. Duke Math. J. 15, (1948), 1021-1032.

[6] C.Casolo, *Groups with all subgroups subnormal*, Note Mat. 28, (2008),suppl. n. 2, 1-149.

[7] M. Chelgham, M. Kerada, L. Noui, *On Finite Extension and condition on infinite subsets of finitely generated FC and FN_k-groups*, Journal of New Theory, 23, (2018), 22-30.

[8] M. Chelgham, M. Kerada, L. Noui, *On certain invariant of trivectors*, C*ommunications in Applied Analysis,* 21, No. 4 (2017), 595-606.

[9] C. Delizia, *Finitely generated soluble groups with a condition on infinite subsets,* Rend. Sci. Mat. Appl. Ser. A 128 (1994), 201-208.

[10] C. Delizia, *On certain residually finite groups*, Comm. Algebra 24 (1996), 3531-3535.

[11] C. Delizia, *A nilpotency condition for finitely generated soluble groups*, Rend. Math. Acc. Lincei. S. 9, V. 9 (1998), 237-239.

[12] C. Delizia and C. *Nicotera*, *On residually finite groups with an Engel condition on infinite subset*, J. Austral. Math. Soc. (series A) 69, (2000), 415-420.

[13] C. Delizia, A. H. Rhemtulla et H. Smith, *Locally graded groups with a nilpotence condition on infinite subsets*, J. Austral. Math. Soc. (series A) 69 (2000), 415-420.

[14] J. Erdös, *The theory of groups with finite classes of conjugate elements*, Acta. Math. Acad. Sci.Hungar. 5, (1954), 45-58.

[15] J. R. J. Groves, *A conjecture of Lennox and Wiegold concerning supersoluble groups*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A 35 (1983), 218-220.

[16] F. Guerbi and T. Rouabeh, *Hyper(Abelian-by-finite)-groups with many sebgroups of finite depth*, 14(1), (2007), 17-28.

[17] P. Hall, *Finite-by-nilpotent-group*, Prog. Cambridge Philos. Soc. 52, (1956), 611-616.

[18] P.Hall, *The Edmonton notes on nilpotent groups*, Queen Mary CollegeMath. Notes (1969).

[19] J. C. Lennox, *Bigenetic properties of finitely generated hyper-(abelian-by-finite) groups*, J. Austral. Math. Soc. 16 (1973), 309-315.

[20] J.C. Lennox and J. Wiegold, *Extensions of a problem of Paul Erdös on groups*, J.Austral.Math. Soc. Ser. A, 31, (1981), 459-463.

[21] J.C. Lennox and Derek J. S. Robinson, *The Theory of Infinite Soluble groups, Clarendon Press , Oxford*, (2004).

[22] P. Longobardi and M. Maj, *Finitely generated soluble groups with an Engel condition on infinite subsets*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 89 (1993), 97-102.

[23] P. Longobardi, *On locally graded groups with an Engel condition on infinite subsets*, Arch. Math. 76 (2001), 88-90.

[24] B.H Neumann, *Groups with finite classes of conjugate elements*, Proc. London. Math.Soc, (3.Ser.), 1, (1951), 178-187.

[25] B. H. Neumann, *A problem of Paul Erdös on groups*, J. Austral. Math. Soc. ser. A 21, (1976), 467-472.

[26] N. Nishigori, *On some properties of FC-groups*, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A 21, (1957/1958), 99-105.

[27] L. Noui, Ph. Revoy, *Formes multilineaires alternees, Ann. Math. Blaise Pascal.*, 1(1994), 43-69.

[28] Derek J. S. Robinson, *Finiteness conditions and generalized soluble groups*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1972).

[29] Derek J. S. Robinson, *A course in the theory of groups*, (Springer-verlag, Berlin, Heidelberg,New York, (1982).

[30] T. Rouabehi and N. Trabelsi, *A note on Torsion-by-Nilpotent group*, Rend. Sem. Mat. Univ. Panova, 117(2007), 175-179 .

[31] Ph. Revoy, *Trivecteurs de rang 6*, *Bull. Soc. Math. Fr.*, 59 (1979), 141-155.

[32] J. J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, New York, 1999.

[33] D.A. Suprunenko, Matrices of groups [in Russian], Nauka, Moscow (1972).

[34] M.J. Tomkinson, *FC-groups*, Pitman Advanced Pub. Program, Californy university, USA, (1984).

[35] N. Trabelsi, *Characterization of nilpotent-by-finite groups*, Bull. Austral. Math. Soc, 61, (2000), 33-38.

[36] N. Trabelsi, *Finitely generated soluble groups with a condition on infinite subsets*, Algebra Colloq, 9, (2002), 427-432.

[37] N. Trabelsi, *Soluble groups with many 2-generated torsion-by-nilpotent subgroups*, Publ. Math. Debrecen, 67/1-2, 6, (2005), 93-102.

جامعة الإخوة منتوري قسنطينة 1 - قسنطينة
كلية العلوم الدقيقة
قسم الرياضيات

عنوان و ملخص أطروحة الدكتوراه

الطالب الأستاذ: مراد شلغام.

الأستاذ المشرف أ.د: محمد كرادة.

التخصص: جبر.

عنوان الأطروحة:

- حول الـ FC-زمر و FN_k-زمر في بعض فئات الزمر ذات النوع المنته.
- On FC-groups and FN_k-groups in some finitely generated classes of groups
- Sur FC-groupes et FN_k-groupes dans certaines classes de groupes de type fini

الكلمات الرئيسية: FC-زمر، FN_k-زمر، τN_k-زمر، $(FN_k)F$-زمر، $(\tau N_k)\tau$-زمر.

Mots clés: FC-groupes, FN_k-groupes, τN_k-groupes, $(FN_k)F$-groupes, $(\tau N_k)\tau$ -groupes.

Keywords: FC-groups, FN_k-groups, τN_k-groups, $(FN_k)F$-groups, $(\tau N_k)\tau$ -groups.

ملخص الأطروحة:

ملخص.

يمكن تلخيص ما جاء في هذه الأطروحة الى ثلاثة محاور أساسية.

يتضمن **المحور الأول** جزئين. الأول يضم المفاهيم و الخصائص الأساسية المتعلقة بالـ FC-زمر . أما الجزء الثاني فنستعرض فيه علاقة هذه الفئة بفئة الـ PE-زمر و بمسألة P. Erdös. كما نقوم بتقديم حل لهذه المسألة الذي وضعه B.H Neumann في [25] و الذي سمح بتوسيعها و استحداث الفئتين (χ,∞) و $(\chi,\infty)^*$ من أجل χ خاصية زمر معينة.

يضم **المحور الثاني** جزئين. الأول يتمثل في العناصر الأساسية في نظرية الزمر و بعض فئات الزمر المعروفة و خصائصها. أما الجزء الثاني فيهتم بعرض النتائج التي توصل إليها الباحثون في دراستهم للفئتين (χ,∞) و $(\chi,\infty)^*$ من أجل بعض خاصيات الزمر المعروفة لـ χ.

نتطرق في **المحور الأخير** للنتائج التي توصلنا إليها و التي تتمثل في:

- دراسة استقرار الخاصية FC بالتوسيعين المنتهي والملتوي في بعض فئات الزمر ذات النوع المنتهي.
- دراسة بعض فئات الزمر ذات النوع المنتهي و المنتمية للفئتين (χ,∞) و $(\chi,\infty)^*$ في الحالات التالية:

$$(\tau N_k,\infty)\ ,(FN_k,\infty),\ ((\tau N_k)\tau,\infty),\ ((FN_k)F,\infty),\ ((\tau N_k)\tau,\infty)^*,\ ((FN_k)F,\infty)^*$$

مع اعتبار الحالات الخاصة من أجل k=1 و k=2.

Abstract

The contents of this thesis can be summarized into three main axes.

The first axis consists of two parts, the first containing the definitions and characteristics of FC-groups. The second part showing the relationship between this class, the class of PE-groups and the problem of P. Erdös. We also giving a solution to this problem developed by B. Neumann in [25], which allowed the extension of this problem and the introductions of the two classes (χ,∞) and $(\chi,\infty)^*$ for certain classes of χ-groups.

The second axis includes two parts. The first is the basic elements in the theory of groups and some known classes of groups and their properties. The second part presents the findings of the researchers in their study
of the two categories (χ,∞) and $(\chi,\infty)^*$, for certain classes of χ-groups.

In **the last axis** we review the results that we have reached, which are :

- The study of the stability of the property FC by finite and torsion extensions.
- The study of some finitely generated groups belonging to the two classes (χ,∞) and $(\chi,\infty)^*$ in those cases:

$(\tau N_k,\infty)$,(FN_k,∞), $((\tau N_k)\tau,\infty)$, $((FN_k)F,\infty)$, $((\tau N_k)\tau,\infty)^*$, $((FN_k)F,\infty)^*$

with special cases considered for k = 1 and k = 2.

Résumé

Le contenu de cette thèse peut être résumé en trois axes principaux.

Le premier axe est constitué de deux parties. La première contenant les notions de bases et les propriétés des FC-groupes. La seconde partie montre la relation entre cette classe et celle des PE-groupes et le problème de P. Erdös. Nous donnons également une solution à ce problème développé par B. Neumann dans [25], ce qui a permis à l'extension de ce problème et à l'introduction des deux classes de groupes (χ,∞) et $(\chi,\infty)^*$ pour certaines propriétés de groupes connues χ.

Le deuxième axe comporte deux parties. La première partie comprend quelques notions fondamentales de la théorie des groupes et certaines classes de groupes connus et leurs propriétés.

La deuxième partie présente les résultats des chercheurs dans leur travaux dans les classes (χ,∞) et $(\chi,\infty)^*$ pour certaines propriétés de groupes connues χ.

Dans **le dernier axe**, nous présentons les résultats que nous avons obtenus comme suit:

- L'étude de la stabilité de la propriété FC par une extension finie et celle de torsion.
- L'étude de certaines classes de groupes de type fini appartenant aux deux classes (χ,∞) et $(\chi,\infty)^*$ dans les cas suivants:

$(\tau N_k,\infty)$,(FN_k,∞), $((\tau N_k)\tau,\infty)$, $((FN_k)F,\infty)$, $((\tau N_k)\tau,\infty)^*$, $((FN_k)F,\infty)^*$

Avec des cas particuliers considérés pour k = 1 et k = 2.