REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

Université **Frères Mentouri –Constantine-**
Faculté des **Sciences Exactes**
Département de **Mathématiques**

N° d'ordre :
N° de série :

THESE

Pour l'obtention du diplôme de

Doctorat en Sciences

En **Mathématiques**

Option :

Mathématiques Appliquée

Présentée par : **SENDEL Saida**

Intitulée :

« LA THEORIE DE LA SENTINELLE ET PROBLEME D'IDENTIFICATION) »

Soutenu publiquement en **Mars-2018** à l'Université Frères Mentouri devant le **jury** composé de :

Mr M.DENCHE	**PROF**	**Université Frères Mentouri**	**Président**
Mr A.AYADI	**PROF**	**Université d'Oum El Bouaghi**	**Rapporteur**
Mr N.BOUSTILA	**PROF**	**Université de Guelma**	**Examinateur**
Mr F.ELAGGOUNE	**PROF**	**Université de Guelma**	**Examinateur**
Mr K.BESSILA	**M.C**	**Université de Frères Mentouri**	**Examinateur**

Table des matières

Resumé

Les problèmes d'identification consistent à retrouver les causes d'un phénomène à partir d'une observation de celui-ci, la résolution de ce type de problèmes se fait à l'aide d'une mesure expérimentale. Dans ce travail, nous visons à estimer la forme d'une partie inconnue de la frontière d'un domaine géométrique. La technique utilisée pour ce but est la méthode de sentinelles introduites par J. L. Lions. Elle sera basée sur l'observation de la solution d'un problème de diffusion sur la partie connue de la frontière et de construire une famille de fonctions qui permet de donner une information sur la partie inconnue.

Abstarct

The problems of identification consist to find the causes of a phenomenon on starting from an observation ; the resolution of this problem is doing by an experimental measurements. In this work, we aim to estimate the shape of an unknown part of the boundary of a geometric domain. The technique used for this purpose is the sentinel method introduced by J. L. Lions. It will be based on the observation of the solution of a diffusion problem on the known part of the boundary and to build a family of functions which allows giving information on the unknown part.

0.1 Introduction

La plupart des phénomènes physiques sont modélisés par des systèmes d'équations aux dérivées partielles, dont leur étude passe par une meilleure compréhension des propriétés des solutions (états) de ces systèmes. Un système est dit distribué (ou à paramètres répartis) ; s'il fait intervenir des variables d'espace et de temps, ainsi que des variables d'entrées (commande) et de sortie (mesure). Ce système est lié à son environnement par l'intermédiaire d'entrée (actions ou contrôle exercé par des actionneurs) et de sorties (mesures ou observations effectuées par des capteurs). Les systèmes distribués que nous allons considérer sont décrits dans un domaine $\Omega \times]0, T[$ par des équations aux dérivées partielles linéaires de type

$$\frac{\partial y}{\partial t} + Ay = \text{Source dans } \Omega \times]0, T[\,.$$

Pour que l'état du système puisse être défini il faut connaître :

1- Les coefficients de l'opérateur A.

2- Les termes sources.

3- Les conditions initiales.

4- Les conditions aux limites.

5- L'ouvert Ω.

Si l'une au moins des informations précédentes n'est que partiellement connue ; le système est dit à données incomplètes. Par exemple dans les problèmes de météorologie et d'océanographie, les conditions initiales ne sont pas complètement connues. (Noter d'ailleurs que l'on a une grande variété de possibilités quant au choix de l'instant initial). Même chose pour des problèmes de pollution dans un lac, une rivière, un estuaire,..., etc. Les conditions aux limites peuvent aussi être inconnues, ou seulement partiellement connues sur une partie de la frontière, qui peut, par exemple être inaccessible aux mesures, qu'il s'agisse de situations biomédicales ou de situations correspondantes à des accidents. Il en va de même pour les termes sources qui peuvent être d'accès difficile. Lorsque la structure du domaine Ω n'est pas entièrement connue, ou d'accès difficile (ou impossible), les coefficients de l'opérateur A peuvent aussi être imparfaitement connus, comme par exemple, dans la gestion des puits de pétrole.

Naturellement les problèmes évoqués brièvement sont classiques et ont donné lieu à beaucoup de développement.

L'idée la plus habituelle pour trouver des informations sur ces termes est de disposer des mesures expérimentales (observation de l'état du système) sur une ou plusieurs parties du domaine Ω et de minimiser l'écart entre l'état mesuré et l'état calculé par la résolution du système considéré. Une technique très utilisé est la méthode des « moindres carrés » mais dans cette technique tous les termes jouent le même rôle, il y a donc possibilité de ne pas pouvoir séparer les rôles des uns et des autres.

Pour cela et sans négliger cette méthode fondamentale Jaque- louis Lions [31] a développé une nouvelle méthode dite "*méthode des sentinelles*", elle permet de donner des informations sur un terme cherché indépendamment des variations d'autres termes en passant par un problème de type contrôlabilité. De nombreux chercheurs ont utilisé la méthode des sentinelles dans l'aspect théorique. Voir par exemple ; G. Massengo et O. Nacoulima [34] et [5] , [35] . [36] , [40] , [43] , [44] . Ainsi que pour des applications numériques. voir ; [1], [5] , [22] .

En 1997, Olivier Bodart [5] a appliqué la méthode des sentinelles pour estimer la forme d'une partie inconnue de la frontière Γ d'un domaine Ω suffisamment régulier dans $\mathbb{R}^2$. La forme d'un côté de la frontière est connue et réglée à une température donnée, et la forme de l'autre côté a été estimée par l'observation de la température au milieu du domaine.

Mais pour certains problèmes physiques (par exemple dans la gestion des puits de pétrole) l'observation à l'intérieur est difficile ou impossible à explorer, ce qui conduit à mettre l'observatoire sur la frontière du domaine. Un tel problème sera l'objectif de notre travail, où nous commençons dans le premier chapitre par un rappel sur les principes généraux de l'analyse des systèmes distribués telles que les notions de contrôlabilité, des actionneurs des capteurs et d'observabilité. On passe dans le deuxième chapitre à la présentation de la méthode des sentinelles pour la détection de pollution au milieu d'un fluide (Lac,
rivière...etc.). Pour l'estimation des " *termes de pollution*" ; on suppose que les observations de l'état sont effectuées dans une petite région interne dans le domaine Ω. Dans le troisième chapitre, on présente la méthode des sentinelles frontières pour l'identification des "*termes de pollution*" indépendamment des termes appelés "*manquants*", en distinguant le cas où ces derniers sont seulement dans la condition initiale, et le cas où ils se trouvent dans la

condition initiale et aussi dans une partie des conditions aux limites. Finalement on termine dans le troisième chapitre par l'application de la méthode des sentinelles pour l'estimation d'une partie inconnue de la frontière d'un domaine Ω dans $\mathbb{R}^2$, tel qu'on suppose que la partie connue de ce domaine est partagée en deux parties disjointes. Sur la première partie on met une source de température et sur l'autre partie on observe la distribution de la température dans le domaine. Le problème est modélisé par une équation différentielle aux dérivées partielles et sera résolu par la technique qui sera présentée à la fin de la thèse.

Chapitre 1

Analyse des Systèmes distribués

1.1 Semi-groupes

Soit X un espace de Banach complexe (de norme $|.|$) et $\mathcal{L}(X)$ l'algèbre de Banach de tous les opérateurs linéaires bornés de X dans X muni de la norme

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup\{|Tx|, x \in X, \quad |x| \leq 1\}.$$

Définition 1.1.1 *Un semi-groupe fortement continu sur X est une application :*

$$\begin{array}{rcl} T : (0, \infty) & \rightarrow & \mathcal{L}(X) \\ t & \longmapsto & T(t) \end{array}$$

telle que :

i) $T(0) = I_d$

ii) $T(t+s) = T(t)T(s), \forall t, s \geq 0$

iii) $T(.)x$ *est continu pour tout* $x \in X$:

$$\left[\forall x \in X, \forall t_0 \geq 0, \lim_{t \to t_0} T(t)x = T(t_0)x\right].$$

Définition 1.1.2 *Soit $T(.)$ un semi-groupe sur X, le générateur infinitésimal de $T(.)$ est un opérateur linéaire non borné A défini par :*

$$A : D(A) \subset X \to X$$

$$D(A) = \left\{ x \in X \text{ telle que } \lim_{t \to 0} \frac{T(t) - I}{t} x \text{ existe} \right\}$$

Où :

$$Ax = \lim_{t \to 0} \tfrac{T(t)x - x}{t} \quad \text{pour } x \in D(A).$$

$D(A)$ est le domaine de A.

Proposition 1.1.1 [47] *$D(A)$ est un sous espace vectoriel dense dans X.*

1.1.1 Différentiabilité d'un semi-groupe

Proposition 1.1.2 [47] *Pour tout $x \in D(A)$, $T(.)x$ est différentiable et on a*

$$\forall t \geq 0 \qquad \tfrac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

Remarque 1.1.1 *On a :*

$$A \int_0^t T(\sigma)\, x d\sigma = \int_0^t T(\sigma)\, Ax d\sigma, \forall t \geq 0, \forall x \in D(A),$$

1.1.2 Propriété de la croissance exponentielle d'un semi-groupe

Théorème 1.1.1 [47] *Soit $T(t)$ un semi-group fortement continu alors $\exists M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$, tels que :*

$$\| T(t) \| \leq M \exp(\omega t), \forall t \geq 0 \tag{1.1}$$

Proposition 1.1.3 *Si $T(t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continue à l'origine verifiant la majoration (1.1), alors il est fortement continu.*

Définition 1.1.3 *Si $\|T(t)\| \leq M, \forall t \geq 0$, le semi-groupe $T(t)$ est dit uniformément borné et de contraction si $M \leq 1$.*

1.1.3 Théorème de Hille Yosida

Théorème 1.1.2 ***"de Hille Yosida"*** [47]

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur A fermé de domaine $D(A)$ dense dans X soit générateur infiniésimal d'un semi-groupe de classe C_0, est qu'il existe deux nombres réels M et ω tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \textit{tel que } \operatorname{Re}(\lambda) > \omega, \ \lambda \textit{ n'est pas dans le spectre de } A,$$

et

$$\|(\lambda I - A)^n\| < \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

On pose $A_\lambda x = \lambda A R(\lambda, A)(x)$.

1.2 Contrôlabilité des systèmes distribués

1.2.1 Position du problème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ assez régulière et $T > 0$.

On considère le système décrit par l'équation différentielle opérationelle.

Trouver $y(t)$ telle que :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t) & 0 < t < T, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Où

- $A \in \mathcal{L}(X)$, A génère un semi-groupe fortement continue.
- $B \in \mathcal{L}(U, X)$.
- $u(.) \in L^2(0, T; U)$. La fonction u est dite contrôle.
- y : l'état du système telle que $y(., t) \in X = L^2(\Omega)$.
- y_0 : l'état initial.

Hypothèses :

Dans l'étude du système (1.2), on fait les hypothèses suivantes :

H_1) X, U sont des espaces de Hilbert désignants respectivemment l'espace d'état et l'espace du contrôle.

H_2) $u \in L^2(0,T;U)$, $B \in \mathcal{L}(U,X)$.

H_3) A est auto-adjoint à résolvante compacte et engendre un semi-groupe fortement continu $(S\,(t))_{t\geq 0}$ sur $X = L^2\,(\Omega)$.

On notera $y_u(.)$ la solution du système (1.2). Sous ces hypothèses le système (1.2) admet une solution faible unique donnée par

$$y_u(t) = S(t)y_0\,(x) + \int_0^t S(T-s)Bu(x,s)ds. \tag{1.3}$$

– Sans perte de généralités nous prendrons $y_0 = 0$.

Soit maintenant l'opérateur linéaire et borné H défini par :

$$\begin{array}{rcl} H_T & : & L^2\,(0,T;U) \to X\ . \\ u & \longmapsto & H_T u = \displaystyle\int_0^T S(T-s)Bu(s)ds. \end{array} \tag{1.4}$$

H_T sera utilisé, par la suite, pour diverses définitions et propriétés.

1.2.2 Contrôlabilité exacte et faible

Le problème de la contrôlabilité consiste en la possibilité de transférer l'état d'un système en un temps fini, d'un état initial vers un état désiré choisi à priori. Contrairement aux systèmes de dimention fini , pour les système distribués; on est amené à considérer, divers types de contrôlabilité. On va introdiure les notions de contrôlabilité, exacte et faible.

Contrôlabilité exacte

Le système considéré est (1.2) et X désigne l'espace d'état; $T > 0$.

Définition 1.2.1 *Le système (1.2) est dit exactement contrôlable sur* $[0, T]$ *si :*

$$\forall y_d \in X, \exists u \in L^2(0, T; U) \ \textit{telle que} \ : y(T) = y_d$$

Remarque 1.2.1 *La définition précédente equivalante à :* $\operatorname{Im} H_T = X$, *l'opérateur* H_T *étant défini en (1.4)*

Définition 1.2.2 *Soit* $X_1 \subset X$ *un sous espace de* X, *le système (1.2) est dit exactement contrôlable dans* X_1 *si :* $\forall y_d \in X_1$, $\exists u \in L^2(0, T; U)$ *telle que:* $y(T) = y_d$.

Remarque 1.2.2 *La définition précédente est équivalente à :* $X_1 \subset \operatorname{Im} H_T$.

Caractérisation de la contrôlabilité exacte

Proposition 1.2.1 *Le système* (1.2) *est exactement contrôlable sur* $[0, T]$ *si et seulement si :*

$$\exists \gamma > 0 \ \textit{tel que} : \|y^*\|_{X'} \leq \gamma \|B^* S^*(.) y^*\|_{L^2(0,T;U')}$$

pour tout y^* *dans* X'.

On utilise le lemme suivant pour montrer la proposition (1.2.1).

Lemme 1.2.1 [16] *Si* X_1, U_1 *sont deux espaces de Banach reflexifs et* $H_1 \in \mathcal{L}(U_1, X_1)$ *alors :*
il ya équivalence entre :
i) $X_1 \subset \operatorname{Im}(H_1)$
ii) $\exists \gamma > 0$ *tel que :* $\|y^*\|_{X_1'} \leq \gamma \|H_1^* y^*\|_{U_1'}$, *pour tout* y^* *dans* X_1'.

Démonstration. (de La proposition 1.2.1)

On pose $U_1 = L^2(0,T;U)$, $X_1 = X$ et $H_1 = H_T$, $U_1' = L^2(0,T;U)$, $(S^*(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur X_1', on a :

$$\begin{aligned}\langle y^*, Hu\rangle &= \left\langle y^*, \int_0^T S(T-s)\,Bu(s)ds\right\rangle \\ &= \int_0^T \langle y^*, S(T-s)\,Bu(s)\rangle\, ds \\ &= \int_0^T \langle B^*S^*(T-s)\,y^*, u(s)\rangle\, ds\end{aligned}$$

alors

$$\left\langle \int_0^T B^*S^*(T-s)\,y^*ds, u\right\rangle = \langle H_T^*y^*, u\rangle$$

et donc

$$H_T^*y^* = B^*S^*(.)\,y^*$$

Ce qui achève la démonstration. ■

La proposition de caractérisation donnée ci-dessus est intéressante dans la mesure où on a ramené l'exacte contrôlabilité à une inégalité assez facile à expliciter pour un système donné.

Proposition 1.2.2 *Si H_T est compact alors le système* (1.2) *n'est pas exactement contrôlable.*

Démonstration. Le système (1.2) est exactement contrôlable sur $[0,T]$

$$\begin{aligned}&\Longleftrightarrow \quad \operatorname{Im} H_T = X \\ &\Longleftrightarrow \quad \bigcup_{n\in N} H_T(B_n) = X\end{aligned}$$

où B_n est la boule centrée à l'origine est de rayon n dans $L^2(0,T;U)$ (ie $B_n = B(0,n)$).

1) $\bigcup_{n\in N} H_T(B_n) \subset \operatorname{Im} H_T$ (évidente).

2) $\operatorname{Im} H_T \subset \bigcup\limits_{n \in N} H_T(B_n)$

$$y_0 \in \operatorname{Im} H_T \Rightarrow \exists u_0 L^2(0,T;U), y_0 = H_T(u_0)$$

$u_0 \in L^2(0,T;U) \Rightarrow \exists n_0, (n_0 = E(\|u_0\|)+1), u_0 \in B(0,n_0), y_0 = H_T(u_0) \in H_T(B_{n_0}) \subset \bigcup\limits_{n \in N} H_T(B_n).$

Alors

$$\operatorname{Im} H_T = \bigcup_{n \in N} H_T(B_n).$$

Ceci implique :

$$\overline{\bigcup_{n \in N} H_T(B_n)} = X$$

H_T est compact alors H_T transforme tout borné à une partie relativement compact. Alors $\overline{H_T(B_n)}$ étant compact, alors

$$\overset{\circ}{\overline{H_T(B_n)}} = \varnothing, \forall n \in N,$$

et d'après le théorème de Baire on déduit que

$$\overline{\bigcup_{n \in N} \overset{\circ}{\widehat{H_T(B_n)}}} = \varnothing$$

alors

$$\overset{\circ}{\widehat{X}} = \varnothing,$$

donc

$$X = \varnothing,$$

c'est une contradiction. ■

Corollaire 1.2.1 *Si $S(t)$ est compact, pour tout $t > 0$, alors le système (1.2) n'est pas éxactement contrôlable.*

Démonstration. On pose $T_\varepsilon = T - \varepsilon$, il est facile de voir que :

$$S(\varepsilon) H_{T_\varepsilon} u + \int_{T-\varepsilon}^{T} S(T-s) Bu(s) ds = Hu.$$

$S(t)$ est compact pour tout $t > 0$ et H_T est borné alors, $S(s)H_T$ est compact. Quand $\varepsilon \to 0, S(\varepsilon)H_{T_\varepsilon}$ converge uniformément ver H_T alors, H_T est compact. D'ou' le résultat du corollaire. ■

Corollaire 1.2.2 [16] *Si B est compact alors le système* (1.2) *n'est pas exactement contrôlable.*

Exemple 1.2.1

$$\begin{cases} y'(t) = \Delta y(t) + u(t) & sur\ [0,T], \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Ce système dynamique n'est pas exactement contrôlable dans $L^2(\Omega)$ sur $[0,T]$. Cet exemple explique pourquoi ,dans la pratique la plus part des systèmes dynamiques définis dans des espaces de dimension infinie ne sont pas exactement contrôlable, c'est pourquoi nous sommes conduit à donner d'autres définitions de la contrôlabilité.

Contrôlabilité faible

Définition 1.2.3 *Le systéme* (1.2) *est dit faiblement contrôlable sur $[0,T]$ si pour tout y_d dans X*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists u \in L^2(0,T;U) \text{ telle que } : \|y(T) - y_d\| \le \varepsilon$$

Caractérisation de la contrôlabilité faible

Pour les systèmes distribués, la notion de faible contrôlabilité est beaucoup plus adaptée, nous pouvons la caractériser par la proposition suivante :

Proposition 1.2.3 [16] *: Il ya équivalence entre :*

a) (1.2) *est faiblement contrôlable sur $[0,T]$.*

b) $\overline{\operatorname{Im} H_T} = X$.

c) $\ker(H_T^*) = \ker(H_T H_T^*) = \{0\}$.

d) $\langle y, S(s)Bv\rangle_X = 0, \forall s \in [0,T]$ *et* $\forall v \in U \Rightarrow y = 0$.

e) Si le semi-groupe $(S(t))_{t\ge 0}$ est analytique, $\overline{\bigcup_{n\in N} \operatorname{Im}(A^n S(s)B)} = X$ *pour tout s dans $]0,T]$.*

1.2.3 Contrôlabilité régionale

Les concepts d'état d'un système sont attachés aux certains cas, qui jouent un rôle fondamentale dans la théorie de la commande. Il s'agit en général, d'amener l'état du système à des valeurs désirées sur une partie de Ω.

Définition 1.2.4 *Soit ω une partie non vide de Ω. Soit $y_d \in L^2(\omega)$, un état désiré donné, le problème de la contrôlabilité régionale consiste à savoir si l'on peut trouver un contrôle $u \in U$, permettant d'amener l'état du système* (1.2), *de y_0 à y_d sur la région ω.*

Contrôlabilité régionale exacte

Définition 1.2.5 *Le système* (1.2) , *est dit exactement régoinalement contrôlable sur ω si : pour tout $y_d \in L^2(\omega)$, il exsite un contrôle $u \in U$ telle que :*

$$y_u(T)_{\backslash\omega} = y_d.$$

Contrôlabilité régionale faible

Définition 1.2.6 *Le système* (1.2) *est dit faiblement régionalement contrôlable sur ω si : $\forall y_d \in L^2(\omega), \forall \varepsilon \geq 0$, il existe un contrôle $u \in U$ telle que :*

$$\left\| y_u(T)_{\backslash\omega} - y_d \right\| \leq \varepsilon.$$

Notation :
Le système (1.2) sera aussi dit ω-exactement (resp ω-faiblement) contrôlable, où $y_u(.)$ est donné par (1.3) et $y_{\backslash\omega}$ désigne la restriction de y à ω.

Remarque 1.2.3 *:*

1) Les définitions ci-dessus signéfient que l'on s'intrèresse qu'à l'état atteint sur la région ω.

2) Le contrôle u dépend de la variable de temps mais implicitement, il dépend aussi du sous-domaine ω.

3) Dans ce qui suit on s'intérèsse juste au cas où B est borné cependant l'étude peut être faite de la même manière.

On pose :

$$
\begin{aligned}
P_\omega \quad &: \quad L^2(\Omega) \to L^2(\omega) \\
y \quad &\longmapsto \quad P_\omega(y) = y_{\backslash \omega}.
\end{aligned}
$$

L'adjoint P_ω^* de P_ω est défini par :

$$
\begin{aligned}
P_\omega^* \quad &: \quad L^2(\omega) \to L^2(\Omega) \\
y \quad &\longmapsto \quad (P_\omega^* y)(x) = \begin{cases} y(x), x \in \omega \\ 0, x \in \Omega \backslash \omega \end{cases}
\end{aligned}
$$

Proposition 1.2.4 *:Le système* (1.2) *est exactement régionalement contrôlable sur* ω *si et seulement si :*

$$
\operatorname{Im} P_\omega H_T = L^2(\omega).
$$

Démonstration. *On a :*

$$
H_T : L^2(0, T; U) \to L^2(\Omega)
$$

$$
P_\omega : L^2(\Omega) \to L^2(\omega)
$$

$$
\begin{aligned}
P_\omega H_T \quad &: \quad L^2(0, T; U) \to L^2(\omega) \\
u \quad &\longmapsto \quad P_\omega H_T u = H_T u \backslash \omega
\end{aligned}
$$

Le système (1.2) *est exactement régionalement controlable sur* ω *alors,*

$$
\begin{aligned}
\forall y_d \quad &\in \quad L^2(\omega), \exists u \in L^2(0, T; U), P_\omega H_T u = y_d \\
&\Longleftrightarrow \quad P_\omega H_T \textit{ est surjectif} \\
&\Longleftrightarrow \quad \operatorname{Im} P_\omega H_T = L^2(\omega).
\end{aligned}
$$

■

Proposition 1.2.5 *:Le système* (1.2) *est faiblement régionalement contrôlable sur* ω *si et seulement si :*

$$\overline{\operatorname{Im} P_\omega H_T} = L^2(\omega).$$

Démonstration. 1) $\operatorname{Im} \overline{P_\omega H_T} \subset L^2(\omega)$ (évidente)

2) $L^2(\omega) \subset \overline{\operatorname{Im} P_\omega H_T}$: Soit $y \in L^2(\omega)$, (1.2) est faiblement régionalement contrôlable sur ω si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall\varepsilon &> 0, \exists u \in L^2(0,T;U) : \left\| y_u(T)_{\diagdown\omega} - y \right\|_{L^2(\omega)} \leq \varepsilon \\
&\Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists u \in L^2(0,T;U) : \| P_\omega y_u(T) - y \|_{L^2(\omega)} \leq \varepsilon \\
&\Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists u \in L^2(0,T;U) : \| P_\omega H_T u - y \|_{L^2(\omega)} \leq \varepsilon \\
&\Longleftrightarrow P_\omega H_T u \in B(y,\varepsilon) \cap \operatorname{Im} P_\omega H_T, \forall\varepsilon \\
&\Longleftrightarrow y \in \overline{\operatorname{Im} P_\omega H}.
\end{aligned}$$

■

1.2.4 Caractérisation de la contrôlabilité régionale

Proposition 1.2.6 *Le système* (1.2) *est exactement regionalment contrôlable si et seulement si :*

$$\textit{pour tout } y^* \in L^2(\omega), \exists\gamma > 0 \textit{ telle que :} \|y^*\|_{L^2(\omega)} \leq \gamma \|B^* S^*(.) P_\omega^* y^*\|_{L^2(0,T;U)}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme (1.2.1) en prenant :

$$X_1 = L^2(\omega)$$
$$U_1 = L^2(0,T;U)$$

Pour, $y^* \in X_1' = L^2(\omega)$ on a

$$\begin{aligned}
\langle y^*, P_\omega H_T u\rangle &= \langle P_\omega^* y^*, H_T u\rangle \\
&= \langle H_{T\omega}^* P_\omega^* y^*, u\rangle \\
&= \langle (B^* S_\omega^* P_\omega^*) y^*, u\rangle\,, \\
(P_\omega H_T)^* &= B^* S_\omega^* P_\omega^* y^*
\end{aligned}$$

Alors d'aprés le lemme (1.2.1)

$$\operatorname{Im} P_\omega H_T = L^2(\omega) \Longleftrightarrow \|y^*\|_{L^2(\omega)} \leq \gamma \|B^* S^*(.)\, P^* y^*\|_{L^2(0,T;U)}\,.$$

■

Proposition 1.2.7 [16]
a) Le système (1.2) est exactement régionalement contrôlable si et seulement si :

$$\ker P_\omega + \operatorname{Im} H_T = L^2(\Omega)$$

b) Le système est faiblement régionalement contrôlable si et seulement si :

$$\ker P_\omega + \overline{\operatorname{Im} H_T} = L^2(\Omega)\,.$$

Corollaire 1.2.3 [16] *Le système (1.2) est faiblement régionalment contrôlable dans* $L^2(\omega)$ *sur* $[0.T]$ *si et seulement si l'une des propriétés suivant est satisfaite*

- *1)* $(P_\omega H_T)^* (P_\omega H_T)$ *est inversible.*
  2) $\overline{\operatorname{Im}(P_\omega H_T)} = L^2(\omega)\,.$
  3) $\ker (P_\omega H_T)^* = \ker (P_\omega H_T)^* (P_\omega H_T) = \{0\}\,.$
  4) $\langle B^* S^*(s)\, P_\omega^*, y\rangle = 0, \forall s \in [0.T] \Rightarrow y = 0.$
  5) le semi-groupe est analytique telle que :

$$\overline{\bigcup_{n\geq 0} [\operatorname{Im}(P_\omega A^n S(s)\, B)]} = L^2(\omega)\,, \forall s \in [0.T]$$

Remarque 1.2.4 *:Il est claire que :*

1) Un système qui est exactement (resp,faiblement) contrôlable est exactement (resp,faiblement) régionalement contrôlable.

2) Un système qui est exactement (resp,faiblement) régionalement contrôlable,sur ω_1 est exactement (resp,faiblement) régionalement contrôlable sur ω_2 pour tout $\omega_2 \subset \omega_1$.

On peut trouver des systèmes qui sont régionalement contrôlables mais qui ne sont pas contrôlables sur tout le domaine .

Ceci est illustré par l'exemple suivant :

Exemple 1.2.2 *Considérons le système décrit par l'equation parabolique*

$$(p)\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = P_{[a,b]}u(t) & dans \quad Q =]0,1[\times]0,T[\,, \\ y(x,0) = 0 & dans \quad]0,1[\,, \\ y(0,t) = y(1,t) = 0 & dans \quad]0,T[\,, \end{cases}$$

avec a et b tel que $(b-a) \in Q$ et $[a,b] \subset]0,1[$. Le système (P) n'est pas contrôlable sur $]0,1[$.Mais il peut être contrôlable sur une région $[\alpha,\beta]$,pour α et β convenablement choisis".

1.2.5 Contrôlabilité Frontière

Dans cette partie on considère le problème de la contrôlabilité régionale, mais avec une région cible, noté Γ_1, qui est une partie de la frontière $\partial\Omega$ du domaine Ω. Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} y'(x,t) = Ay(x,t) + Bu(t) & \text{dans} \quad \Omega\times]0,T[\,, \\ y(0) = y_0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma\times]0,T[\,. \end{cases} \tag{1.5}$$

On suppose que la solution $y_u(.)$ de (1.5) appartient à $H^1(\Omega)$; quand le système est excité par un contrôle u. Pour tout $y_d \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, on note par $\bar{y}_d$ l'extension de y_d à $\partial\Omega$.

Soit γ_0 l'opérateur trace d'ordre 0 de Ω dans $\partial\Omega$, qui est linéaire, continu et surjectif, soit l'application

$$\begin{array}{rcl} P_{\Gamma_1} & : & H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \\ y & \longmapsto & P_{\Gamma_1}y = y\mid_{\Gamma_1}, \end{array}$$

Définition 1.2.7 *On dit que le système* (**1.5**) *est exactement contrôlable sur* Γ_1 *si pour tout* $y_d \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, *il existe* $u \in L^2(0,T;U)$ *tel que* $P_{\Gamma_1}(\gamma_0 y_u(T)) = y_d$.

Définition 1.2.8 *On dit que le système* (1.5) *est faiblement contrôlable sur* Γ_1 *si pour tout* $y_d \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ *et tout* $\varepsilon > 0$

$$\exists u \in L^2(0,T;U) \text{ tel que } \left\| P_{\Gamma_1}(\gamma_0 y_u(T)) - y_d \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \leq \varepsilon.$$

1.2.6 Contrôle optimale et pénalisation

Dans le cas où le système (1.2) est contrôlable, il y aura généralement une infinité de contrôles qui resolvent le problème. Les questions qui se posent sont les suivantes :

1- Parmi ces contrôles, existe-il un qui soit de norme minimale ?

2- Peut-on déterminer explicitement ce contrôle en fonction des divers paramètres du problème ?

Le problème du contrôle optimale sert alors à minimiser la fonctionnelle

$$J(u) = \int_0^T \|u\|^2 \, dt.$$

sur l'espace des contrôles U. D'une autre façon si $y_d \in L^2(\Omega)$ est un état désiré, le problème du contrôle optimale consiste à transférer à moindre coût, le système (1.2) de y_0 vers y_d à l'instant T.

La question devient alors, "existe-il un contrôle $u \in U$ d'energie minimale tel que $y(T) = y_d$? cela peut être aussi formulé comme suit

$$(P) \begin{cases} \min\limits_{u \in U_{ad}} J(u) \\ U_{ad} = \{u \in U, y(T) = y_d\} \end{cases}$$

Proposition 1.2.8 *Si U_{ad} est non vide fermé et convexe alors, le problème (P) admet une solution unique.*

Démonstration. l'application $u \longrightarrow J(u)$ est continue coercive et strictement convexe sur U. Alors, si U_{ad} est non vide, fermé et convexe ; le problème (P) admet une solution unique [28] . ■

Les objectifs de cette théorie sont les suivants :

1- Etudier l'existence du contrôle $u \in U_{ad}$ solution du problème (p), on l'appel alors contrôle optimale

2- Donner les conditions d'optimalité de u.

3- Obtenir les propriétés du contrôle (s) optimale (aux) à partir des conditions d'optimalité.

Une méthode qui peut répondre à ces intérets est celle de pénalisation :

Pénalisation

On introduit pour tout $\varepsilon > 0$ la fonction

$$J_\varepsilon(u, y) = \int_0^T \|u\|^2 \, dt + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^T \left\| y'(t) - Ay(t) + Bu(t) \right\|^2 dt$$

et on cherche à résoudre le problème de minimisation

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} \min\limits_{(u,y) \in C} J_\varepsilon(u) \\ C = \left\{ \begin{array}{l} y'(t) - Ay(t) + Bu(t) \in L^2(0, T, X) \\ y(0) = y_0 \\ u \in U, \\ y(T) = y_d. \end{array} \right\} \end{cases} .$$

Proposition 1.2.9 [54] *Pour tout $\varepsilon > 0$, le problème (P_ε) admet une solution unique qu'on note $(u_\varepsilon, y_\varepsilon)$ et qui converge quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ vers $(\hat{u}, \hat{y})$, où $\hat{u}$ est la solution du problème (P) et est donnée par $\hat{u} = B^* p(t)$ avec $\hat{y}$, p sont solutions du système d'optimalité suivant*

$$\begin{cases} y^{'}(t) = Ay(t) + Bu(t) \in L^2\left(0, T, X\right) \\ y(0) = y_0 \\ -p^{'}(t) + A^* p(t) = 0, \\ p\left(T\right) \in X^*. \end{cases}$$

1.2.7 Notion d'actionneurs

Les échanges entre un système réel et son environnement se font par l'intermédiare des actionneures, ils permettent d'éxciter le système et ils peuvent être de nature, de forme de conception diverses. Les actionneurs que l'on rencontre dans les systèmes physiques, peuvent être de type

Actionneur ponctuel fixe :

Tel un brûleur dans un système de diffusion.

Actionneur ponctuel mobile :

C'est un actionneur de type ponctuel, dont la position varie avec le temps, c'est le cas, par example, d'un système excité par un rayon laser de direction variable.

Actionneur Zone :

Le cas, par exemple d'un système de diffusion avec une zone de chauffe importante.

Actionneur Filament :

Tel un four chauffé par une résistance éléctrique.

Remarque 1.2.5 *i) Ces divers types d'actionneurs peuvent être localisés à l'interieur du domaine Ω représentant la configuration géométréque du système ou bien sur sa frontière.*

ii) Dans ce qui suit on s'intérèsse juste aux actionneurs de types zones, $\omega_i\,(\omega_i \subset \Omega)$ *ou* $\Gamma_i\,(\Gamma_i \subset \partial\Omega)$ *.*

Définition 1.2.9 *Soit* ω_i *fermé contenu dans* Ω *et* $g_i \in L^2(\omega_i)$ *,on appelle actionneur zone le couple* (ω_i, g_i) *où*

i) ω_i *représente le support de l'actionneur.*

ii) g_i *définit la répartition spatial de l'actionneur.*

Définition 1.2.10 *Soit* $x_i \in \Omega$*, on appelle actionneur ponctuel le couple* (x_i, δ_{x_i}) *,où* δ_i *est la masse de dirac au point* x_i*.*

Remarque 1.2.6 *Dans le cas d'action frontière, les définitions restent les mêmes ; nous parlerons :*

i) D'actionneur zone frontière $(\Gamma_i, g_i)\,, \Gamma_i \subset \partial\Omega$ *et* $g_i \in L^2(\Gamma_i)$ *.*

ii) D'actionneur ponctuel frontière $(x_i, \delta_{b_i})\,, x_i \in \partial\Omega$ *avec* δ_{x_i} *est la masse de Dirac au point* x_i*.*

Exemples

I) Actionneurs zone dans les systèmes de diffusion : Nous étudierons tout particulièrement le cas des systèmes, notés (S_z) l'indice z pour le cas, décrits par l'équation parapolique :

$$(S_z)\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = \sum\limits_{i=1}^{p} g_i(x)\, u_i(x) & \text{dans} \quad \Omega \times]0, T[\,, \\ y(x, 0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ y(\varepsilon, t) = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega \times]0, T[\,, \end{cases}$$

(S_z) modélise un système excité par p actionneurs zones $(\Omega_i, g_i)_{1 \leq i \leq p}$ avec $g_i \in L^2(\Omega_i)$. Ces actionneurs peuvent avoir des supports non nécessairement disjoints, mais cela correspond à rien réaliste. Nous supposerons alors que :

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing \text{ pour } i \neq j.$$

Le système(S_z) est un cas particulier du système représenté par (1.2). En effet il suffit de poser :

$$Ay\left(t\right)=\Delta y(t) \text{ pour } y(t)\in D\left(A\right)=H_0^1\left(\Omega\right)\cap H^2\left(\Omega\right).$$

et

$$Bu(t)=\sum_{i=1}^{p}g_i\left(x\right)u_i\left(x\right) \text{ où } u=\left(u_1,u_2,...,u_p\right)$$

B est linéaire, borné et A engendre un semi-groupe fortement continu $\left(S\left(t\right)\right)_{t\geq 0}$. Le système (S_z) pourrait aussi être considéré avec des conditions aux limites de Neumann ou mixtes.

II) Actionneurs ponctuels dans les système de diffusion : Considérons les systèmes (S_p), décrits par :

$$(S_p)\begin{cases}\dfrac{\partial y}{\partial t}-\Delta y=\sum\limits_{i=1}^{p}\delta\left(x-x_i\right)u_i\left(t\right) & \text{dans} \quad \Omega\times\left]0,T\right[,\\ y\left(x,0\right)=0 & \text{dans} \quad \Omega,\\ y\left(x,t\right)=0 & \text{dans} \quad \partial\Omega\times\left]0,T\right[.\end{cases}$$

(S_p) est un système excité par p actionneurs ponctuels $\left(b_i,\delta_{x_i}\right)_{1\leq i\leq p}$ localisés aux points b_i de Ω. (S_p) est également un cas particulier du système (1.2) avec :

$$Ay\left(t\right)=\Delta y(t) \quad \text{pour} \quad y(t)\in D\left(A\right)=H_0^1\left(\Omega\right)\cap H^2\left(\Omega\right).$$

et

$$B:R^p\rightarrow D(A) \text{ avec } Bu=\sum_{i=1}^{p}\delta\left(x-x_i\right)u_i\left(t\right) \text{ où } u=\left(u_1,u_2,...,u_p\right).$$

III)Actionneurs frontières dans les système de diffusion : Deux cas à distinguer :

A) Actionneurs zones frontières : Soit le système :

$$(S_f)\begin{cases}\dfrac{\partial y}{\partial t}-\Delta y=0 & \text{dans} \quad \Omega\times\left]0,T\right[,\\ y\left(x,0\right)=0 & \text{dans} \quad \Omega,\\ y(\varepsilon,t)=\sum\limits_{i=1}^{p}g_i\left(x\right)u_i\left(x\right) & \text{dans} \quad \partial\Omega\times\left]0,T\right[.\end{cases}$$

(S_f) modélise un système excité sur sa frontière, par p actionneurs zones $(\Gamma_i, g_i)_{1\leq i\leq p}$ avec $g_i \in L^2(\Gamma_i)$ et $\Gamma_i \subset \partial\Omega$, pour tout $i, 1 \leq i \leq p$. (S_f) est un cas particulier du système (1.2) pour cela, on pose $Ay(t) = \Delta y(t)$ et on introduit l'opérateur de Green G, avec :

$$\begin{aligned} G \quad &: \quad L^2(\partial\Omega) \rightarrow L^2(\Omega), \\ h \quad &\rightarrow \quad Gh = y \end{aligned}$$

avec $\Delta y(t) = 0$ dans Ω et $y = h$ sur $\partial\Omega$

(S_f) admet une solution faible unique donné par :

$$y(t) = -\sum_{i=0.}^{p} \int_0^t AS(t-s)Gg_iu_i(s)$$

La défficulté, dans ce cas, vient du fait qu'en général, pour $u \in L^2(0, T; R^p)$, $y(T) \notin L^2(\Omega)$.
Il est possible de choisir des contrôles u plus réguliérs

B) Actionneurs ponctuels frontières : le système est décrit par :

$$\left(S_f'\right)\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times]0, T[, \\ y(x, 0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ y(\varepsilon, t) = \sum\limits_{i=1}^{p} \delta(\xi - x_i) u_i(t) & \text{dans} \quad \partial\Omega \times]0, T[. \end{cases}$$

$\left(S_f'\right)$ admet une solution faible unique $y(., T)$.
La difficulté, dans l'analyse de la contrôlabilité des systèmes que nous venons de voir, vient donc essentiellement du fait que l'état atteint, pour une certaine régularité sur u peut être dans un espace plus grand que l'espace d'état X. En changeant l'espace d'état, nous pouvons avoir seulement des états de type L^2, donc il faudra nécessairement, pour les systèmes $(S_f), \left(S_f'\right)$ jouer sur la régularité des contrôles.
Maintenant, on s'intéresse à l'étude des actionneurs et la relation liant les actionneurs à la notion de contrôlabilité

Notion d'actionneur stratégique

La contrôlabilité d'un système peut être affectée par le choix des actionneurs, que ce soit par la localisation des supports des actionneurs ou par la répartition de l'action sur ces supports.

Définition 1.2.11 *Soit X_i un sous-espace vectoriel de l'espace d'état X, nous dirons que l'actionneur $(\Omega_i, g_i)_{1\leq i\leq p}$ $\left(ou\ \ (x_i, \delta_{b_i})_{1\leq i\leq p}\right)$ est stratégique si le système qui'il excite est exactement contrôlable dans X_i.*

Définition 1.2.12 *Nous dirons que l'actionneur $(\Omega_i, g_i)_{1\leq i\leq p}$ $\left(ou\ \ (x_i, \delta_{x_i})_{1\leq i\leq p}\right)$ est stratégique si le système qui'il excite est faiblement contrôlable dans X_i.*

Remarque 1.2.7 *Ces définitions restent valables pour des actionneurs de type frontière.*

1.3 Observabilité des systèmes distribués

L'état d'un système distribué ne peut pas être directement mesuré d'un point de vue physique, le problème qui se pose alors et celui de la reconstruction d'un tel état à partir des mesures effectués sur le système pendant un intervale de temps donné : c'est le problème d'observabilité. On considère le système (1.2) précédent

$$\begin{cases} y^{'}(t) = Ay(t) + Bu(t) & 0 < t < T, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

où A engendre un semi groupe fortement continu $(S(t))_{t\geq 0}$ et B est un opérateur linéiaire et borné de l'espace du controle U dans l'espace d'état X.

1.3.1 Notion de capteur

Pour tout système on se donne, généralement, les moyens de superviser son évolution. L'intermidiare physique qui permet de récullir des informations sur le système et son évolution est le "capteur" . Comme pour les actionneurs on peut envisager plusieurs types de capteurs. Ainsi si Ω représente la configuration géométrique du système modélisé par (S), des informations peuvent être recullies :

1- Dans des zones $D_i \subset \Omega$ ou $D_i \subset \partial\Omega$.

2- En des points $x_i^m \in \Omega$ ou $x_i^m \in \partial\Omega$.

3- Suivant des lignes $L_i \subset \Omega$ ou $L_i \subset \partial\Omega$.

- Le premier cas correspond à une lecture directe sur une partie O_i du domaine Ω.

- Le deuxième cas peut représenter, par exemple, le cas d'une information fournie par un thermo-couple.

- Le dernier cas est celui, par exemple, d'une lecture par miroire pivotant. Le plus souvent des capteurs sont de type ponctuel.

Définition 1.3.1 *Soit D_i férmé $\subset \Omega$, et $f_i \in L^2(D_i)$. On appel capteur zone, le couple (D_i, f_i), où :*

i) D_i représente le support du capteur.

ii) f_i définit la répartiton spaciale de l'information sur D_i.

Définition 1.3.2 *Soit $x_i^m \in \Omega$, on appel capteur ponctuel le couple $\left(x_i^m, \delta_{x_i^m}\right)$ où $\delta_{x_i^m}$ est la masse de Dirac au point x_i^m.*

Remarque 1.3.1 *Dans le cas d'informations recueillies sur la frontière $\partial\Omega$ de Ω, les définitions sont identiques avec $f_i \in L^2(F_i)$ où $F_i \subset \partial\Omega$ pour le cas zone, et $b_i^m \in \partial\Omega$, pour le cas ponctuel. On parlera alors des capteurs zone frontière ou ponctuels frontière.*

1.3.2 Fonction de la sortie

Supposons que sur le système (S) nous récuillons des mesures pendant l'intervalle de temps $[0, T_m]$, par l'intermidiaire de q capteurs $(D_i, f_i)_{0\leq i\leq q}$. Ces mesures s'expriment par une fonction dite fonction de la sortie donnée par :

$$z(t) = Cy(t), 0 \leq t \leq T_m, \tag{E}$$

ou

$$z(t) = CS(t)y_0 + CH_t u.$$

Cette sortie est la somme d'un régime libre avec y_0 à déterminer et du régime contrôle avec état initial nul, avec les hypothèses :

- $C \in \mathcal{L}(X, IR^q)$.

- $z \in L^2(0,T,IR^q) = Y$.

z est la fonction vectorielle définie sur $[0,T_m]$ par $z(t) = (z_i(t))_{i=1,q} = \left((f_i, y(t))_{L^2(\Omega)}\right)_{i=1,q}$.

1.3.3 Notion d'observabilité

Connaissant la dynamique du système et la fonction de commande, la reconstruction de l'état du système peut se réduire à la reconstruction de l'état initiale $y(0)$. Par ailleur, les systèmes considérés étant linéaires, la solution du système s'obtient en ajoutant le régime libre avec $y(0) \neq 0$ est le régime contrôlé. Le problème d'observabilité revient donc à celui de l'existence d'un opérateur $G : Y \longrightarrow X$ tel que $y(0) = G_z$. Il s'agit de déterminer y_0 solution de l'équation :

$$z(t) = CS(t)y_0 = Ky_0, \ t \in [0,T_m] \tag{E$'$}$$

L'équation E$'$ fait apparaître l'opérateur K tel que :

$$\begin{array}{rcl} K & : & X \longrightarrow L^2(0,T_m,O) \\ y & \longmapsto & Ky = \displaystyle\int_0^{T_m} CS(t)y(t)dt \end{array} \tag{1.6}$$

O est l'espace d'observation (ouvert non vide de IR^q), K est linéaire borné.

Il est facile de voir que :

$$\begin{array}{rcl} K^* & : & L^2(0,T_m,O) \longrightarrow X' \\ y & \longmapsto & K^*y = \displaystyle\int_0^{T_m} S^*(t)C^*y(t)dt \end{array}$$

Comme pour la contrôlabilité, on peut voir que sous certaines conditions nous ne pourons pas observer n'importe quel état initiale y_0, mais on peut observer des états aussi proches de y_0 qu'on le souhaite.

Définition 1.3.3 *Le système (S) augmenté de l'équation de sortie (E) est dit exactement observable sur $[0,T_m]$ si* $\mathrm{Im}(K^*) = X'$.

Définition 1.3.4 *Le système* (S) *augmenté de l'équation de sortie* (E) *est dit faiblement observable sur* $[0, T_m]$ *si* $KerK = \{0\}$.

Remarque 1.3.2 *On peut également parler de l'exacte observabilité dans* $X_1 \subset X$, *quand* $X_1' \subset \mathrm{Im}\,(K^*)$.

1.3.4 Caractérisation de l'exacte observabilité

Proposition 1.3.1 [16] *Le système* (S) *augmenté de l'équation de sortie* (E) *est exactement observable sur* $[0, T_m]$ *si :* $\exists \gamma > 0$ *tel que* $\|y_0\|_X < \gamma \|Ky_0\|_{L^2(0,T_m,IR^q)}$ *pour tout* y_0 *dans* X.

1.3.5 Caractérisation de la faible observabilité

Proposition 1.3.2 [16] *Le système* (S) *augmenté de l'équation de sortie* (E) *est faiblement observable sur* $[0, T_m]$ *ssi* $\overline{\mathrm{Im}\,(K^*)} = \overline{\mathrm{Im}\,(K^*K)} = X'$.

1.4 Dualité

Il existe une dualité mathématique entre contrôle et observabilité. Cette dualité permet le transfert des résultats établis pour la contrôlabilité à l'observabilité (ou vice versa).
On considère l'opérateur H défini en (1.4) par

$$\begin{aligned} H_T \quad &: \quad L^2(0, T; U) \to X \; . \\ u \quad &\to \quad H_T u = \int_0^T S(T-s)Bu(s)ds. \end{aligned}$$

H c'est l'opérateur de contrôle, il associe, à tout controle u un état $y \in X$. Lorsque $y_0 = 0$, la contrôlabilité consiste à trouver un contrôle u tel que

$$H_T u = y_d \; , \tag{1.7}$$

où y_d est donnée dans X. Comme on a vu précédemment l'adjoint H^* de H est donné par

$$H^*y = B^*S^*(T-.)y \tag{1.8}$$

La formule (1.8) montre que l'adjoint H^* de H peut être vu comme un opérateur de sortie (il a la même forme que l'opérateur d'observation K défini dans (1.6) qui associe à tout y dans X, l'observation

$$H^*y = B^*S^*(T-.)y \in L^2(0,T,U). \tag{1.9}$$

Finalement, on peut commencer indifféremment par l'observation (ou le contrôle) et déduire les résultats sur le contrôle (ou l'observation) en utilisant cette dualité. C'est pourquoi on introduit la définition suivante.

Définition 1.4.1 *le système contrôlé*

$$\begin{cases} y^{'}(t) &= & Ay(t)+Bu(t); \quad 0<t<T \\ y(o) &= & y_0 \end{cases} \tag{1.10}$$

et le système observé

$$\begin{cases} y^{'}(t) &= & \tilde{A}y(t); \quad 0<t<T \\ y(o) &= & y_0 \\ z(t) &= & Cy(t) \end{cases} \tag{1.11}$$

sont duaux si

$$\tilde{A} = A^* \quad et \quad B^* = C \tag{1.12}$$

Même si cette définition n'a pas d'explication physique, elle est très utile pour obtenir les résultats sur l'observabilité d'un système à partir de ceux établis sur la contrôlabilité de son dual (ou vice versa). A partir de cette définition et de (1.9), on a

$$H^*y = B^*S^*y = CSy = Ky$$

et on obtient immédiatement le résultat suivant.

Proposition 1.4.1 [18] *Si les systèmes (1.10) et (1.11) sont duaux, alors le système (1.11) est faiblement observable si et seulement si le système (1.10) est faiblement contrôlable.*

Démonstration. Voir [18]. ■

1.5 Théorèmes de prolongement unique

La méthode de H.U.M ou Hilbert Uniqueness Method, a été introduite par J. L. lions dans [24], pour l'étude de la contrôlabilité de l'équation des ondes. Elle a ensuite été appliquée à une catégorie large de problèmes où on construit l'espace des états atteignable, cette construction est basée sur un théorème de prolongement (ou continuation) unique :Holmgren pour les ondes, Mizohata ou Saut-Scheurer pour la chaleur. Ces théorèmes sont à la base de la plupart des méthodes de résolution de problèmes de contrôle et d'identification.
Nous allons d'abord présenter le théorème d'unicité de Cauchy pour l'équation de la chaleur linéaire.

Théorème 1.5.1 [51] *(Unicité de Cauchy)*
Soit $\Gamma_0 \subset \Gamma$ une partie non vide du bord, on note $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, T[$, soit $y(x,t)$ vérifiant

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + Ay = 0 & dans \quad Q \\ y = 0 & sur \quad \Sigma_0 \\ \frac{\partial y}{\partial v} = 0 & sur \quad \Sigma_0, \end{cases}$$

alors y est identiquement nulle dans Q.

Considérons la solution de l'équation parabolique

$$\frac{\partial y}{\partial t} + Ay = 0 \quad \text{dans} \quad Q, \tag{1.13}$$

où A est un opérateur elliptique d'ordre 2 sur lesquels les conditions seront précisées pour chaque théorème. Dans tous les cas, l'ouvert Ω doit être connexe et $Q = \Omega \times]0, T[$. Les deux théorèmes qui suivent intervient la notion de la composante horizontale dans un ouvert d'espace-temps.

Définition 1.5.1 *(Composante horizontale)*

Soit O un ouvert inclus dans Q. On dit qu'un point $p \in Q$ appartient à la composante horizontale de O, s'il existe une courbe horizontale joignant p à O c'est-à-dire à une ligne dont les points ont tous la même coordonnée en temps.

Nous pouvons à présent énoncer le théorème de S. Mizohata suivant :

Théorème 1.5.2 [51] *(S. Mizohata)*

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et A un opérateur elliptique du second ordre dont les coefficients appartiennent à $C^\infty(Q)$. Soit y la solution de (1.13) pour cet opérateur et O un ouvert inclus dans Q. Toute solution de (1.13) qui s'annule dans O s'annule dans la composante horizontale de O.

Théorème 1.5.3 [51] *(J. C. Saut et B. Scheurer)*

Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$, A un opérateur elliptique du second ordre défini par

$$Au = \sum_{i,j=1}^{p} a_{ij}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}.\frac{\partial}{\partial x_j}u + \sum_{i,=1}^{p} b_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}u + c(x,t)u,$$

où les coefficients de A vérifient

$$\begin{array}{ccccc} a_{ij} & \in & C^1(Q) & & 1 \leq i,j \leq p \\ b_i & \in & L^\infty_{loc}(Q) & & 1 \leq i \leq p \\ c & \in & L^\infty\left(0,T,L^1_{loc}(\Omega)\right). & & \end{array}$$

Supposons que la solution de (1.13) vérifie $y \in L^2\left(O,T,H^2_{loc}(\Omega)\right)$ et qu'elle s'annule dans un ouvert $O \in Q$. Alors y s'annule dans la composante horizontale de O.

Chapitre 2

Sentinelles pour l'analyse des systèmes distribués aux termes manquants

Dans ce chapitre on s'interesse à la détection de pollution en milieu fluide (Lac, Rivière, estuaire, ...etc). Nous supposerons que la pollution est due à la présence de composés chimiques (Nitrate, Plomb,...) provenant des décharges externes ou sédimentaires. Les sources de Pollution diffusent au cours du temps des déjections toxiques dans l'eau. L'identification de ces polluants peut se traiter en effectuant des observations du phénomène au milieu du domaine. Et par l'application de la méthode des sentinelles

2.1 Position du problème

Dans ce chapitre on considère des systèmes évolutifs dans un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n(n = 1, 2, 3$ dans les applications) de frontière supposée assez régulière $\partial\Omega = \Gamma$. L'état du système est disigné par y, qui est une fonction de $x \in \Omega$ et de $t \in (0, T)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'état y dépend également d'un certain nombre de paramètres ou fonctions connues ou inconnues, plus précésement l'état satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial y}{\partial t} + Ay + f(y) = \xi + \lambda\hat{\xi} \text{ dans } Q = \Omega \times (0, T). \tag{2.1}$$

Dans (2.1) l'opérateur A est un opérateur différentiel elliptique du 2 ème ordre :

$$Ay = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right). \tag{2.2}$$

$$\exists \alpha > 0, a_{ij}(x,t)\zeta_i\zeta_j \geq \alpha\zeta_i\zeta_i, \forall \zeta_i, \zeta_j \in \mathbb{R} \text{ pp dans } Q. \tag{2.3}$$

On suppose que

$$a_{ij} \in L^{\infty}(Q). \tag{2.4}$$

Les hypothèses sur la fonction f doivent être telles que l'équation (2.1) à laquelle on va ajouter des conditions intiales et aux limites admet au moins une solution globale dans Q.

2.1.1 Terme de pollution

Dans le deuxième membre de (2.1) ξ est connu dans un espace de Hilbert ou Banach, mais $\lambda\hat{\xi}$ (appelé terme de pollution) n'est pas connu On sait seulement que $\left\|\hat{\xi}\right\| \leq 1$. On suppose aussi que λ est assez petit.

2.1.2 Terme manquant

On désignera par $y(0)$ la fonction $y(x,0)$ Si les conditions initiales sont incomplètes, le système est appelé système à données manquantes. Soit

$$y(0) = y_0 + \tau\hat{y}_0 \tag{2.5}$$

y_0 est donnée dans un espace de Hilbert ou de Banach convenable, disons $\|\hat{y}_0\| \leq 1$ avec τ suffisamment petit.

2.1.3 Les conditions aux limites

Pour fixer les idées, on suppose que

$$y = 0 \text{ sur } \Sigma = \Gamma \times (0,T). \tag{2.6}$$

Remarque 2.1.1 *Dans certains problèmes, on peut avoir aussi des termes de polution et des termes manquants dans les conditions aux limites.*

$$\begin{cases} y = g_0 + \lambda_0 \hat{g}_0 & sur \quad \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0,T)\,, \\ y = g_1 + \tau_1 \hat{g}_1 & sur \quad \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0,T)\,, \\ y = 0 & sur \quad \Sigma \backslash \Sigma_0 \cup \Sigma_1, \end{cases} \tag{2.7}$$

où $\hat{g}_0$ et $\hat{g}_1$ sont dans la boule unité d'un espace de Hilbert ou de Banach convenable et $\lambda_0 \hat{g}_0$ et $\tau_1 \hat{g}_1$ sont des termes de pollution (resp manquant).

Soit maintenant le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay + f\left(y\right) = \xi + \lambda \hat{\xi} & \text{dans} \quad Q = \Omega \times (0,T)\,, \\ y\left(0\right) = y_0 + \tau \hat{y}_0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ y = 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \end{cases} \tag{2.8}$$

pour λ et τ donnés ainsi que $\hat{\xi}$ et $\hat{y}_0$ le problème (2.8) admet une solution unique que l'on note $y\left(x,t,\lambda,\tau\right)$.
notre question est la suivante

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{A partir des mesures disposées sur l'état du système ;} \\ \text{peut on estimer le terme de pollution } \lambda\hat{\xi} \text{ indépendamment du terme manquant } \tau\hat{y}_0 ? \end{array} \right\}$$

Notre objectif est de donner une méthode permettant d'obtenir des informations sur $\lambda\hat{\xi}$ qui ne soient pas affectées par les variations de la donnée initiale autour de y_0. On établit ainsi une distinction entre le terme de pollution $\lambda\hat{\xi}$ et le terme manquant $\tau\hat{y}_0$ que l'on ne cherche pas à identifier. Pour espérer pouvoir obtenir quelques informations il faut observer l'état y.

2.2 Observation de l'état

Le problème d'estimation de données manquantes consiste à observer l'état y du système sur une partie accessible du domaine et de disposer des mesures expérimentales. On suppose que toutes les observations sont effectuées dans un intervalle de temps $(0,T)$ et dans un domaine (supposé arbitrairement petit) appelé observatoire $\omega \subset \Omega$. On pose $O = \omega \times (0, T)$ et $y(x, t, \lambda, \tau) = y_{obs}$ sur O. On peut distinguer plusieurs type d'observations suivant les types d'observatoires :

Observations régionales internes

L'observatoire ω est une petite région de Ω ; c'est le cas par exemple d'un fluide soumis à deux sources de pollution S1 et S2 et dont l'observation est faite dans une petite région ω de ce fluide.

Observations ponctuelles

L'ouvert ω peut consister en plusieurs composantes de mesures nulles.

Observations frontières

L'observatoir ω est une partie de la frontière Γ.

Observations mobiles

C'est le cas d'un observatoire qui dépend du temps $O = O(t)$, par exemple un bateau observatoire, Ω étant alors un océan, un lac, etc...

Observations instantanées

C'est le cas dont on effectue des observations discontinues par rapport au temps.

Remarque 2.2.1 *Dans toute la suite on suppose que les observations sont données sans bruits, i.e.* $y_{obs} = constante$*.*

Pour résoudre un problème d'identification, une technique trés répondue est la méthode des "*moindres carrés*" par ailleurs, à la fin des années quatre-vingt, une nouvelle méthode a vu le jour :"la méthode des sentinelles" [31].

2.3 Méthode des moindres carrés

La méthodes des moindres carrés est restée la plus populaire des techniques d'identification de paramètres aussi bien pour les equations différentilles ordinaires (EDO) que pour les équations aux dérivées partielles (EDP).

Supposons que v représente le vecteur des paramètres recherchés, la technique des moindres carrés consiste à minimiser la distance au carré entre les valeurs observées y_{obs} et les valeurs calculées $y(v)$ pour les v parcourant l'espace des paramètres U. Ainsi, le problème d'identification revient à la résolution du problème d'optimisation

$$\min_{v \in U} \|y(v) - y_{obs}\|^2$$

où $y(v)$ est la solution du système (2.8).

Dans la méthode de moindres carrés tous les paramètres incounnus jouent le même rôle. On ne fait pas de différence entre les paramètres (aux termes de polution et aux termes manquants). Il ya donc risques de ne pas pouvoir séparer nettement les rôles des uns et des autres. De plus, les données disponibles y_{obs} peuvent être insuffisantes par rapport au nombre de paramètres recherchés, ce qui conduit à une infinité de solutions possibles .On a dans ce cas un problème d'unicité de la solution, aussi pour un jeu de données prélevées dans le même domaine, la résolution peut conduire à une fort pertubation de la solution, il s'agit d'un problème de stabilité.

2.4 Méthode des sentinelles

2.4.1 Définition de la sentinelle

Elle répondait d'une part aux préoccupations citées dans le paraghraphe (2.1) et d'autre part à l'élaboration d'un algorithme rapide dans le calcul des paramètres inconnus. Cette théorie à été par ailleurs développée dans des applications en evironnement par son auteur "*J.L lions*" durant quatre années à travers des articles et des conférences pour enfin résumer le tout dans son livre publié en 1992 "sentinelles pour les systèmes distribuées à données incomplètes".

On se place dans le cadre du problème (2.8). Soit $h_0 \in L^2(O)$ une fonction donnée, soit $w \in L^2(O)$ une fonction à determiner. On considère la fonctionnelle :

$$S(\lambda, \tau) = \iint_O (h_0 + w)\, y(x, t, \lambda, \tau)\, dxdt \tag{2.9}$$

Définition 2.4.1 *On dira que la fonctionnelle $S(\lambda,\tau)$ est une sentinelle définie par h_0 si les conditions suivantes ont lieu*

$$\frac{\partial S}{\partial \tau}(\lambda,\tau)\mid_{\lambda=\tau=0}=0, \forall \hat{y}_0 \tag{2.10}$$

$$\|w\|_{L^2(O)}=\min. \tag{2.11}$$

Remarque 2.4.1 *1- La condition (2.10) exprime l'insensibilité de la fonction sentinelle par rapport au terme manquant $\tau\hat{y}_0$. Ce qui permettre de déterminer le terme de pollution indépendament du terme manquant.*
2- Si la fonction h_0 vérifie $h_0 \geq 0$ et $\iint\limits_O h_0 dxdt = 1$, alors $M(\lambda,\tau) = \iint\limits_O h_0 y(x,t,\lambda,\tau)\, dxdt$ est une moyenne et la condition (2.11) exprime que la sentinelle est aussi proche que possible d'une moyenne. Mais, dans la définition de la fonction $M(\lambda,\tau)$ il n'y a aucune raison pour que $\frac{\partial M}{\partial \tau}(\lambda,\tau)\mid_{\lambda=\tau=0}=0$ et pour cela on introduit les fonctions w pour bien définir la fonction sentinelle.
3- Les deux conditions (2.10) et (2.11) définissent w de manière unique.

2.4.2 Informations données par la fonction sentinelle

Soit y^0 la solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y^0}{\partial t} + Ay^0 + f(y^0) = \xi & \text{dans} \quad Q = \Omega \times (0,T), \\ y^0(0) = y_0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ y^0 = 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \end{cases} \tag{2.12}$$

on suppose que l'on peut calculer y^0. Alors, si w est bien déterminée on peut écrire

$$S(0,0) = \iint\limits_O (h_0 + w)\, y^0 dxdt. \tag{2.13}$$

Un dévellopement limité de Taylor à l'ordre 1 de la fonction $S(\lambda,\tau)$ donne

$$S(\lambda,\tau) = S(0,0) + \lambda\frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0) + \tau\frac{\partial S}{\partial \tau}(0,0) + o(\|(\lambda,\tau)\|),$$

et comme par définition $\frac{\partial s}{\partial \tau}(\lambda,\tau)\mid_{\lambda=\tau=0}=0$, alors,

$$S(\lambda,\tau)=S(0,0)+\lambda\frac{\partial S(0,0)}{\partial\lambda}+o(\|(\lambda,\tau)\|).$$

de sorte que si y_{obs} est connue on remplaçe $S(\lambda,\tau)$ par S_{obs} avec,

$$S_{obs}=\iint\limits_{O}(h+w)\,y_{obs}dxdt \tag{2.14}$$

on obtient l'éstimation

$$\lambda\times\frac{\partial S}{\partial\lambda}(0,0)=(S_{obs}-S(0,0)). \tag{2.15}$$

Cela donnera une information sur le terme $\lambda\hat{\xi}$ et ça justifie la technique de la sentinelle.

2.4.3 Condition d'insensibilité

On suppose que $\frac{\partial y}{\partial\tau}(0,0)=\lim\limits_{\tau\longrightarrow 0}\frac{y(0,\tau)-y(0,0)}{\tau}$ est calculable, on note $y_\tau=\frac{\partial y}{\partial\tau}(0,0)$.
$y(0,\tau)$ est la solution du problème

$$\left\{\begin{array}{lll}\dfrac{\partial y(0,\tau)}{\partial t}+Ay(0,\tau)+f(y(0,\tau))=\xi & \text{dans} & Q=\Omega\times(0,T),\\ y(0,\tau)(0)=y_0+\tau\hat{y}_0 & \text{dans} & \Omega,\\ y(0,\tau)=0 & \text{sur} & \Sigma,\end{array}\right. \tag{2.16}$$

et $y(0,0)=y^0$ est la solution du problème (2.12). En soustrayant (2.12) de (2.16) et en multipliant par $\frac{1}{\tau}$, on obtient

$$\left\{\begin{array}{lll}\frac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{y(0,\tau)-y^0}{\tau}\right)+A\left(\dfrac{y(0,\tau)-y^0}{\tau}\right)+\left(\dfrac{f(y(0,\tau))-f(y^0)}{\tau}\right)=0 & \text{dans} & Q,\\ \dfrac{y(0,\tau)(0)-y^0(0)}{\tau}=\hat{y}_0 & \text{dans} & \Omega,\\ \dfrac{y(0,\tau)-y^0}{\tau}=0 & \text{sur} & \Sigma,\end{array}\right. \tag{2.17}$$

un passage à la limite dans (2.17) quand $\tau \longrightarrow 0$ vérifie que y_τ est solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_\tau}{\partial t} + Ay_\tau + f'\left(y^0\right) y_\tau = 0 & \text{dans} \quad Q = \Omega \times (0,T)\,, \\ y_\tau\left(0\right) = \hat{y}_0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ y_\tau = 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \end{cases} \tag{2.18}$$

où $f'\left(y^0\right) y_\tau$ est la dérivée de $f\left(y(0,\tau)\right)$ par rapport à τ au point $y^0 = y\left(0,0\right).$ Alors la condition d'insensibilité de la sentinelle par rapport à τ (2.10) équivaut à

$$\frac{\partial S}{\partial \tau}\left(\lambda,\tau\right)|_{\lambda=\tau=0} = \int\int_O \left(h_0 + w\right) y_\tau dxdt = 0. \tag{2.19}$$

Dans tous ce qui suit on suppose que

$$y_0, \hat{y}_0 \in L^2\left(\Omega\right) \tag{2.20}$$

2.4.4 Passage au problème adjoint

Soit A^* l'opérateur adjoint de l'opérateur A (obtenu en remplaçant les a_{ij} par a_{ji}). On considère le problème adjoint suivant :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial q}{\partial t} + A^* q + f'\left(y^0\right) q = \left(h_0 + w\right) \chi_O & \text{dans} \quad Q, \\ q\left(T\right) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ q = 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \end{cases} \tag{2.21}$$

où χ_O est la fonction caractéristique de O. Le problème (2.21) admet une solution unique q qui dépend de w, sous des hypothèses très générales sur $f'\left(y^0\right)$ [31]. Maintenant on multiplie l'équation de (2.21) par y_τ et on intègre sur Q on obtient

$$\iint_Q \left(-\frac{\partial q}{\partial t} + A^* q + f'\left(y^0\right) q\right) y_\tau dxdt = \iint_Q \left(\left(h_0 + w\right)\chi_O\right) y_\tau dxdt.$$

Une intégration par parties donne

$$\left(-\int_{\Omega} q(T)y_{\tau}\left(T\right)dx + \int_{\Omega} q(0)y_{\tau}\left(0\right)dx + \iint_{Q} \frac{\partial y_{\tau}}{\partial t} q dxdt\right) +$$
$$\left(\iint_{Q} \left(Ay\right) q dxdt - \iint_{\Sigma} \frac{\partial y_{\tau}}{\partial \eta} q d\Gamma dt + \iint_{\Sigma} \frac{\partial q}{\partial \eta} y_{\tau} d\Gamma dt\right) + \iint_{Q} f'\left(y^{0}\right) q y_{\tau} dxdt$$
$$= \iint_{Q} \left(\left(h_0 + w\right)\chi_O\right) y_{\tau} dxdt.$$

Et avec les conditons des deux problèmes (2.18) et (2.21) on obtient

$$\iint_{O} \left(h_0 + w\right) y_{\tau} dxdt = \int_{\Omega} q(0)\hat{y}_0 dx \tag{2.22}$$

Alors la condition (2.10) devient

$$q(0) = 0. \tag{2.23}$$

Notre problème est donc de trouver $w \in L^2(O)$ telle que l'on ait (2.23) et (2.11). C'est un problème de contrôlabilité à zéro.

Remarque 2.4.2 *Le choix $w = -h_0$ donne une solution pour le problème (2.10), (2.11) mais cela va annuler la fonction sentinelle et donc ne saurait aucune information.*

2.4.5 Existence du contrôle optimale

Il est assez naturel de séparer les deux composantes

$$q = q_0 + z \tag{2.24}$$

telles que q_0 est solution du problème

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial q_0}{\partial t} + A^* q_0 + f'\left(y^0\right) q_0 = h_0 \chi_O & \text{dans} \quad Q, \\ q_0\left(T\right) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ q = 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \end{cases} \tag{2.25}$$

et z est solution de

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial z}{\partial t} + A^* z + f'\left(y^0\right) z = w \chi_O & \text{dans} \quad Q, \\ z\left(T\right) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ z = 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \end{cases} \tag{2.26}$$

la fonction q_0 est calculable, alors, on cherche à trouver w tel que $z(w)$ vérifie

$$z(0, w) = -q_0(0), \tag{2.27}$$

avec (2.11). En résumé le problème d'existence d'une unique sentinelle revient à résoudre le problème d'optimisation suivant

$$(P) \left\{ \min_{w \in U} \|w\|_{L^2(O)} \right\}, \tag{2.28}$$

avec

$$U = \left\{ w, \begin{cases} -\dfrac{\partial z}{\partial t} + A^* z + f'\left(y^0\right) z = w \chi_O & \text{dans} \quad Q, \\ z\left(T\right) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ z = 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \\ z(0) = -q_0(0). & \end{cases} \right\} \tag{2.29}$$

Proposition 2.4.1 *Le problème (P) admet une solution unique.*

Démonstration. Le domaine U est non vide (remarque 2.4.2), convexe et fermé. D'autre part, l'application $w \longrightarrow \|w\|_{L^2(O)}$ est continue coercive et strictement convexe sur U. Alors, d'après la proposition (1.2.8) le problème (P) admet une solution unique qu'on note $\hat{w}$. ■

Pour obtenir le système d'optimalité du problème (P) on utilise la méthode de pénalisation.

Pénalisation

Pour $\varepsilon > 0$, on introduit la fonctionnelle

$$J_\varepsilon(w,z) = \frac{1}{2}\|w\|^2_{L^2(O)} + \frac{1}{2\epsilon}\left\|-\frac{\partial z}{\partial t} + A^* z + f'\left(y^0\right) z - w\chi_O\right\|^2_{L^2(Q)} \tag{2.30}$$

Soit le problème

$$(P_\varepsilon)\left\{\min_{(w,z)\in U_\varepsilon} J_\varepsilon(w,z)\right\}, \tag{2.31}$$

avec

$$U_\varepsilon = \left\{(w,z),\left\{\begin{array}{lll} -\frac{\partial z}{\partial t} + A^* z + f'\left(y^0\right) z - w\chi_O \in L^2(Q), & & \\ z(T) = 0 & \text{dans} & \Omega, \\ z = 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ z(0) = -q_0(0). & & \end{array}\right.\right\} \tag{2.32}$$

Proposition 2.4.2 *Pour tout ε, Le problème (2.31) admet une soution $(w_\epsilon, z_\varepsilon)$ qui converge faiblement vers $(\hat{w}, \hat{z})$ quand $\epsilon \longrightarrow 0$, où $\hat{w}$ est la solution du problème (P) et $\hat{z}$ la solution du problème (2.26) associée à $\hat{w}$.*

Démonstration. Remarquons que pour tout $w \in U$ et z tel que

$$\left\{\begin{array}{lll} -\frac{\partial z}{\partial t} + A^* z + f'\left(y^0\right) z = w\chi_O & \text{dans} & Q, \\ z(T) = 0 & \text{dans} & \Omega, \\ z = 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ z(0) = -q_0(0). & & \end{array}\right.$$

le couple $(w,z) \in U_\varepsilon$, et comme U est non vide alors, U_ε n'est pas vide de plus il est fermé et convexe. D'autre part l'application J_ε est continue coercive et strictement convexe, alors le problème (P_ε) admet une solution unique $(w_\epsilon, z_\varepsilon)$. Cette solution vérifie alors,

$$J_\varepsilon(w_\epsilon, z_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(w,z), \forall (w,z) \in U_\varepsilon. \tag{2.33}$$

En particulier pour $(\hat{w}, \hat{z})$, on a

$$\frac{1}{2}\left\|w_\epsilon\right\|^2_{L^2(O)} + \frac{1}{2\epsilon}\left\|-\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial t} + A^* z_\varepsilon + f'\left(y^0\right) z_\varepsilon - w_\epsilon \chi_O\right\|^2_{L^2(Q)} \leq \frac{1}{2}\left\|\hat{w}\right\|^2_{L^2(O)} = C. \tag{2.34}$$

ce qui implique que

$$\left\|w_\epsilon\right\|_{L^2(O)} \leq C \text{ et } \left\|-\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial t} + A^* z_\varepsilon + f'\left(y^0\right) z_\varepsilon - w_\epsilon \chi_O\right\|_{L^2(Q)} \leq C\sqrt[2]{\varepsilon}. \tag{2.35}$$

La deuxième inégalité de (2.35) nous permet de montrer que dans un espace fonctionnel convenable noté W on peut montrer que (z_ε) est bornée [37]. Par conséquence il existe une sous suite notée encore $(w_\epsilon, z_\varepsilon)$ et deux fonctions $\bar{w} \in L^2(O)$ et $\bar{z} \in L^2(Q)$ vérifiant

$$\begin{cases} w_\epsilon \longrightarrow \bar{w} & \text{faiblement dans} \quad L^2(O) \\ z_\epsilon \longrightarrow \bar{z} & \text{faiblement dans} \quad W \end{cases} \tag{2.36}$$

avec $\bar{z}$ est solution du problème

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial t} + A^* \bar{z} + f'(y^0)\,\bar{z} = -\bar{w}\chi_O & \text{dans} \quad Q, \\ \bar{z}(T) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ \bar{z} = 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \\ \bar{z}(0) = -q_0(0). & \end{cases} \tag{2.37}$$

et comme J_ε est convexe et continue alors on a [28]

$$J_\varepsilon(\bar{w}, \bar{z}) \leq \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \inf J_\varepsilon(w_\epsilon, z_\varepsilon).$$

Ce qui implique d'aprés (2.37) que

$$\frac{1}{2}\left\|\bar{w}\right\|^2_{L^2(O)} \leq \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \inf J_\varepsilon(w_\epsilon, z_\varepsilon). \tag{2.38}$$

D'autre part et de (2.34) on a

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \inf J_\varepsilon(w_\epsilon, z_\varepsilon) \leq \frac{1}{2} \|\hat{w}\|^2_{L^2(O)}\,, \tag{2.39}$$

alors (2.38) et (2.39) donnent

$$\frac{1}{2} \|\bar{w}\|^2_{L^2(O)} \leq \frac{1}{2} \|\hat{w}\|^2_{L^2(O)} \tag{2.40}$$

et d'aprés l'unicité de la solution pour le problème (P) on déduit que $\bar{w} = \hat{w}$. Ainsi d'après l'unicité de la solution pour les deux problèmes (2.26) et (2.37) on déduit que les solutions $\bar{z}$ et $\hat{z}$ assocées respectivement à $\bar{w}$ et $\hat{w}$ sont identiques. ■

Système d'optimalité pour le problème (P_ε)

Proposition 2.4.3 $(w_\epsilon, z_\varepsilon)$ *est solution unique du problème* (P_ε), *si est seulement s'il existe une fonction* $\rho_\varepsilon \in L^2(Q)$ *telle que* $(w_\epsilon, z_\varepsilon, \rho_\varepsilon)$ *est solution du système d'optimalité suivant*

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial t} + A^* z_\varepsilon + f'(y^0)\, z_\varepsilon = w\chi_O - \varepsilon\rho_\varepsilon & dans \quad Q, \\ z_\varepsilon(T) = 0 & dans \quad \Omega, \\ z_\varepsilon = 0 & sur \quad \Sigma, \\ z_\varepsilon(0) = -q_0(0). & \end{cases} \tag{2.41}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial t} + A\rho_\varepsilon + f'(y^0)\, \rho_\varepsilon = 0, & \\ \rho_\varepsilon = 0 & sur \quad \Sigma, \end{cases} \tag{2.42}$$

sans aucune information sur ρ_ε *à* $t = 0$ *ou à* $t = T$, *et tel que*

$$w_\epsilon = \rho_\varepsilon \chi_O. \tag{2.43}$$

Démonstration. La solution $(w_\epsilon, z_\varepsilon)$ est caractérisé par

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \delta} J_\varepsilon(w_\epsilon, z_\varepsilon + \delta z_\varepsilon) = 0, \forall \delta z_\varepsilon, \\ \frac{\partial}{\partial \delta} J_\varepsilon(w_\epsilon + \delta w_\epsilon, z_\varepsilon) = 0, \forall \delta w_\epsilon, \end{cases} \tag{2.44}$$

ce qui implique

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}\iint\limits_{Q}\left(-\frac{\partial z_\epsilon}{\partial t}+A^*z_\epsilon+f'\left(y^0\right)z_\epsilon-w_\epsilon\chi_O\right)\left(-\frac{\partial \delta z_\epsilon}{\partial t}+A^*\delta z_\epsilon+f'\left(y^0\right)\delta z_\epsilon\right)dxdt=0,\forall\delta z_\varepsilon. \\ \iint\limits_{O} w_\epsilon\delta w_\epsilon dxdt-\frac{1}{\varepsilon}\iint\limits_{O}\left(-\frac{\partial z_\epsilon}{\partial t}+A^*z_\epsilon+f'\left(y^0\right)z_\epsilon-w_\epsilon\chi_O\right)\delta w_\epsilon dxdt=0,\forall\delta w_\epsilon. \end{cases}$$

On pose

$$\rho_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}\left(-\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial t}+A^*z_\varepsilon+f'\left(y^0\right)z_\varepsilon-w_\varepsilon\chi_O\right), \tag{2.45}$$

alors on peut ecrire

$$\iint\limits_{Q}\rho_\varepsilon\left(-\frac{\partial z}{\partial t}+A^*z+f'\left(y^0\right)z\right)dxdt=0,\forall z\in U_1, \tag{2.46}$$

et

$$\iint\limits_{O} w_\epsilon w dxdt-\iint\limits_{Q}\rho_\varepsilon w\chi_O dxdt=0,\forall w\in L^2(O), \tag{2.47}$$

avec

$$U_1=\left\{z,\begin{cases} -\frac{\partial z}{\partial t}+A^*z+f'\left(y^0\right)z\in L^2\left(Q\right), & \\ z\left(T\right)=0 & \text{dans}\quad \Omega, \\ z=0 & \text{sur}\quad \Sigma, \\ z(0)=0, & \end{cases}\right\} \tag{2.48}$$

L'équation (2.46) est vérifie pour tout $z\in U_1$, et comme il est clair que $\mathfrak{D}\left(Q\right)\subset U_1$, alors, on a

$$\iint\limits_{Q}\rho_\varepsilon\left(-\frac{\partial z}{\partial t}+A^*z+f'\left(y^0\right)z\right)dxdt=0,\forall z\in\mathfrak{D}\left(Q\right), \tag{2.49}$$

ce qui donne apès un simple calcul

$$\iint\limits_{Q}\left(\frac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial t}+A\rho_\varepsilon+f'\left(y^0\right)\right)zdxdt=0,\forall z\in\mathfrak{D}\left(Q\right),$$

cela implique que

$$\left\langle\frac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial t}+A\rho_\varepsilon+f'\left(y^0\right)\rho_\varepsilon,z\right\rangle=0,\forall z\in\mathfrak{D}\left(Q\right),$$

on déduit alors que

$$\frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial t} + A\rho_\varepsilon + f'\left(y^0\right)\rho_\varepsilon = 0, \text{ dans } Q. \tag{2.50}$$

Et comme

$$\rho_\varepsilon \in L^2(Q),$$

et

$$\frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial t} + A\rho_\varepsilon + f'\left(y^0\right)\rho_\varepsilon \in L^2(Q),$$

alors en appliquant le théorème de trace [29] , on déduit que les fonctions traces $\rho_\varepsilon(0)$, $\rho_\varepsilon(T)$ et ρ_ε sur Σ, existent. En multipliant (2.50) par $z \in U_1$ et en intégrant par parties sur Q on aura

$$\iint\limits_Q \left(-\frac{\partial z}{\partial t} + A^* z + f'\left(y^0\right)z\right)\rho_\varepsilon dxdt + \int\limits_\Omega \rho_\varepsilon(T)z\left(T\right)dx - \int\limits_\Omega \rho_\varepsilon(0)z\left(0\right)dx + \iint\limits_\Sigma \frac{\partial z}{\partial \eta}\rho_\varepsilon d\Gamma dt$$
$$-\iint\limits_\Sigma \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial \eta} z d\Gamma dt = 0, \forall z \in U_1,$$

et du fait que $z \in U_1$, on obtient

$$\iint\limits_\Sigma \frac{\partial z}{\partial \eta}\rho_\varepsilon d\Gamma dt = 0, \forall z \in U_1,$$

ce qui implique que

$$\rho_\varepsilon = 0 \text{ sur } \Sigma, \tag{2.51}$$

les deux équations (2.50) et (2.51) forment le système d'optimalité (2.42).

Maintenant de (2.47) on a

$$\iint\limits_Q \left(w_\epsilon \chi_O - \rho_\varepsilon\right) w\chi_O dxdt = 0, \forall w \in L^2(O),$$

ce qui implique que

$$w_\epsilon \chi_O - \rho_\varepsilon = 0 \text{ dans } Q,$$

ainsi

$$w_\epsilon = \rho_\varepsilon \chi_O. \tag{2.52}$$

■

Système d'optimalité pour le problème (p) Dans une topologie convenable on peut montrer que $\rho_\varepsilon \longrightarrow \rho$ quand $\epsilon \longrightarrow 0$ telle que ρ est solution du système d'optimalité du problème (P) ;

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + A\rho + f'\left(y^0\right)\rho = 0 & \text{dans} \quad Q, \\ \rho = 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \\ \rho\left(0\right) = \rho^0 & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.53}$$

où ρ^0 est à determiner dans la suite. D'après (2.43) et la proposition (2.4.2) on déduit que

$$\hat{w} = \rho \chi_O. \tag{2.54}$$

Alors le problème (2.26) devient

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial z}{\partial t} + A^* z + f'\left(y^0\right) z = \rho \chi_O \text{ dans } Q, \\ z\left(T\right) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ z = 0 \text{ sur } \Sigma. \end{cases} \tag{2.55}$$

Finalement le problème d'existance du contrôle optimale $\hat{w}$ devient le suivant

$$\begin{cases} \text{trouver } \rho^0 \text{ dans un espace convenable,verifiant} \\ z(0, \rho) = -q_0(0), \\ \hat{w} = \rho \chi_O. \end{cases} \tag{2.56}$$

Calcul de ρ^0 On définit l'opérateur Λ par

$$\Lambda \rho^0 = z(0, \rho). \tag{2.57}$$

Cet opérateur est défini pour ρ^0 assez régulier par exemple pour $\rho^0 \in L^2(\Omega)$. On doit donc résoudre dans un espace fonctionnel convenable

$$\Lambda\rho^0 = -q_0(0). \tag{2.58}$$

On multiplie (2.55) par $\tilde{\rho}$, où $\tilde{\rho}$ est la solution de (2.53) correspondante à $\tilde{\rho}^0$ et en intégrant par partie on obtient

$$\int_\Omega \tilde{\rho}^0 z(0)\, dx = \iint_O \rho\tilde{\rho}dxdt,$$

ce qui donne

$$-\int_\Omega \tilde{\rho}^0 q_0(0)dx = \iint_O \rho\tilde{\rho}dxdt,$$

et d'après (2.58) on obtient

$$\left\langle \Lambda\rho^0, \tilde{\rho}^0 \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \iint_O \rho\tilde{\rho}dxdt, \tag{2.59}$$

en particulier pour $\tilde{\rho}^0 = \rho^0$

$$\left\langle \Lambda\rho^0, \rho^0 \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \iint_O \rho^2 dxdt. \tag{2.60}$$

On introduit la quantité

$$\left\|\rho^0\right\| = \left(\iint_O \rho^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.61}$$

La quantité (2.61) définit une norme pré-hilbertienne sur $L^2(\Omega)$. En effet, si

$$\left\|\rho^0\right\| = 0,$$

alors d'après (2.61)

$$\|\rho\|_{L^2(O)} = 0,$$

ce qui entraîne que

$$\rho \equiv 0 \text{ dans } O,$$

et si les coefficients de A et $f'(y^0)$ sont assez réguliers, on déduit d'après le théorème d'unicité de Mizohata (1.5.2) que

$$\rho \equiv 0 \text{ dans } Q,$$

ce qui implique que $\rho^0 = 0$. Soit maintenant, F l'espace de Hilbert complété de $L^2(\Omega)$ pour la norme (2.61).

Remarque 2.4.3 [31] *l'espace F existe c'est l'espace le plus grand des données intiales ρ^0 pour lesquelles la solution correspondante ρ du problème (2.53) vérifie $\rho\,|_O \in L^2(O)$.*

Remarque 2.4.4 *1- Si F' désigne le duale de F, alors, $q_0(0) \in F'$.*

Théorème 2.4.1 [31] *L'opérateur Λ est un isomorphisme de F sur F', de plus il est symétrique ; $\Lambda^* = \Lambda$, alors l'équation (2.58) admet une solution unique*

$$\rho^0 = -\Lambda^{-1} q_0(0), \tag{2.62}$$

ce qui montre l'existence et l'unicité d'une sentinelle définie par h_0 et donnée par

$$S(\lambda, \tau) = \iint\limits_O (h_0 + \rho)\, y(x, t, \lambda, \tau)\, dxdt. \tag{2.63}$$

Remarque 2.4.5 *Pour que la sentinelle ne soit pas nulle, il suffit de choisir $h_0 \neq \rho$.*

2.4.6 Estimation du terme de pollution

Théorème 2.4.2 *Comme y^0, ρ et ρ^0 sont calculés sur O, alors, le terme de pollution $\lambda\hat{\xi}$ est estimé par la relation*

$$\iint\limits_O (q_0 + z)\, \lambda\hat{\xi} dxdt = \iint\limits_O (h_0 + \rho)\left(y_{obs} - y^0\right) dxdt. \tag{2.64}$$

où y^0,q_0 et z sont respectivement les solutions de (2.12), (2.25) et (2.26) et y_{obs} est l'état observé sur O pendant l'intrevalle du temps $[0, T]$.

Démonstration. Soit $S(\lambda,\tau)$ la sentinelle définie par h_0, de l'équation (2.15) on a

$$\begin{aligned}
\lambda\frac{\partial S}{\partial\lambda}(0,0) &= \left(S_{obs}-S(0,0)\right)\\
&= \iint\limits_{O}(h+\rho)\,y_{obs}(x,t)\,dxdt-\iint\limits_{O}(h+\rho)\,y^0dxdt
\end{aligned}$$

avec

$$\frac{\partial S}{\partial\lambda}(0,0)=\iint\limits_{O}(h_0+\rho)\,y_\lambda(x,t)\,dxdt$$

où y_λ est solution du problème suivant

$$\begin{cases}\dfrac{\partial y_\lambda}{\partial t}+Ay_\lambda+f(y_\lambda)=\hat{\xi} & \text{dans} \quad Q=\Omega\times(0,T)\,,\\ y_\lambda(0)=0 & \text{dans} \quad \Omega,\\ y_\lambda=0 & \text{sur} \quad \Sigma.\end{cases} \tag{2.65}$$

On a alors

$$\lambda\iint\limits_{O}(h_0+\rho)\,y_\lambda(x,t)\,dxdt=\iint\limits_{O}(h_0+\rho)\left(y_{obs}-y^0\right)dxdt, \tag{2.66}$$

en multipliant (2.21) (avec $w\chi_O=\rho$) par y_λ et en intégrant par partie, on obtient

$$\lambda\iint\limits_{O}(h_0+\rho)\,y_\lambda(x,t)\,dxdt=\lambda\iint\limits_{O}q\hat{\xi}dxdt, \tag{2.67}$$

de (2.66) et (2.67) on obtient

$$\lambda\iint\limits_{O}q\hat{\xi}dxdt=\iint\limits_{O}(h_0+\rho)\left(y_{obs}-y^0\right)dxdt.$$

D'où le résultat du théorème. ■

Chapitre 3

Sentinelles frontières pour l'identification du temre de pollution

3.1 Terme manquant dans les conditions initiales

3.1.1 Position du problème

Les notations sont les mêmes qu'au chapitre 2. Nous consédérons encore un système dont l'état est donné par l'équation

$$\frac{\partial y}{\partial t}+Ay+f\left(y\right)=0 \text{ dans } Q=\Omega\times\left(0,T\right). \tag{3.1}$$

On suppose que les conditions initiales sont incomplètes

$$y\left(0\right)=y_0+\tau\hat{y}_0, \tag{3.2}$$

y_0 est donnée dans $L^2\left(\Omega\right)$ et $\|\hat{y}_0\|\leq 1$ avec τ suffisamment petit. On suppose de plus qu'on a pollution par la frontière

$$\begin{cases} y=\xi+\lambda\hat{\xi} & \text{sur} \quad \Sigma_0=\Gamma_0\times\left(0,T\right), \\ y=0 & \text{sur} \quad \Sigma\backslash\Sigma_0. \end{cases} \tag{3.3}$$

On suppose maintenant que l'observatoire ω est porté par une partie de la frontière $\partial\Omega$

$$\omega \subset \partial\Omega = \Gamma \tag{3.4}$$

Remarque 3.1.1 *On supposera que*

$$\omega \cap \Gamma_0 = \Phi. \tag{3.5}$$

La solution y est alors à observer dans $O = \omega \times (0,T)$. Les observations sont données sans bruits, i.e. $y_{obs} = cons\tan te$.

Notre Problème est alors le suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay + f(y) = 0 & \text{dans} \quad Q = \Omega \times (0,T), \\ y(0) = y_0 + \tau\hat{y}_0 & \\ y = \xi + \lambda\hat{\xi} & \text{sur} \quad \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0,T), \\ y = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \backslash \Sigma_0. \end{cases} \tag{3.6}$$

On cherche à déterminer le terme de polluiton $\lambda\hat{\xi}$ indépendamment du terme manquant $\tau\hat{y}_0$ pour cela on introduit des sentinelles portées par O On dira des sentinelles frontières.

3.1.2 Sentinelles frontières

On se donne $h_0 \in L^2(O)$. On introduit la fonctionnelle

$$S(\lambda,\tau) = \iint\limits_{O} (h_0 + w) \frac{\partial}{\partial \eta} y(x,t,\lambda,\tau)\, d\Gamma dt \tag{3.7}$$

w est à déterminer dans $L^2(O)$ et la dérivée $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ a un sens et appartient à $L^2(O)$

Définition 3.1.1 *On dira que la fonctionnelle $S(\lambda,\tau)$ est une sentinelle frontière définie par h_0 si les conditions suivantes ont lieu*

$$\frac{\partial S}{\partial \tau}(\lambda,\tau)\,|_{\lambda=\tau=0} = 0, \forall \hat{y}_0 \tag{3.8}$$

$$\|w\|_{L^2(O)} = \min . \tag{3.9}$$

Remarque 3.1.2 *Le choix $w = -h_0$ donne toujours une solution pour le problème (3.8),(3.9) mais ça entraîne un perte d'information sur le terme cherché.*

3.1.3 Un Problème de contrôlabilité frontière

La condition (3.8) peut s'écrire

$$\frac{\partial S}{\partial \tau}(\lambda, \tau)\,|_{\lambda=\tau=0} = \iint\limits_{O} (h_0 + w)\,\frac{\partial y_\tau}{\partial \eta} d\Gamma dt = 0, \tag{3.10}$$

avec y_τ est solution du poblème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_\tau}{\partial t} + Ay_\tau + f'(y^0)\, y_\tau = 0 & \text{dans} \quad Q = \Omega \times (0,T)\,, \\ y_\tau(0) = \hat{y}_0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ y_\tau = 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \end{cases} \tag{3.11}$$

et y^0 est la solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y^0}{\partial t} + Ay^0 + f(y^0) = 0 & \text{dans} \quad Q = \Omega \times (0,T)\,, \\ y^0(0) = y_0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ y^0 = \xi & \text{sur} \quad \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0,T)\,, \\ y^0 = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \backslash \Sigma_0. \end{cases} \tag{3.12}$$

Soit maintenant le problème adjoint suivant

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial q}{\partial t} + A^* q + f'(y^0)\, q = 0 & \text{dans} \quad Q, \\ q(T) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ q = (h_0 + w) & \text{sur} \quad O, \\ q = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \backslash O. \end{cases} \tag{3.13}$$

En multipliant (3.13) par y_τ et en intégrant par partie on obtient

$$\iint\limits_{O} (h_0 + w) \frac{\partial}{\partial \eta} y_\tau d\Gamma dt = -\int\limits_{\Omega} q(0)\, \hat{y}_0 dx, \tag{3.14}$$

par conséquent la condition d'insensibilité (3.8) devient

$$q(0) = 0. \tag{3.15}$$

Notre problème est donc de trouver $w \in L^2(O)$ telle que l'on ait (3.15) et (3.13) et (3.9). C'est aussi un problème de contrôlabilité, mais le contrôle cherché w est exercé sur une partie du bord. Il s'agit donc d'un problème de contrôlabilté frontière.

3.1.4 Existence du contrôle optimale

Comme dans le chapitre précédent on décompose q en deux

$$q = q_0 + z \tag{3.16}$$

telles que q_0 est solution du problème

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial q_0}{\partial t} + A^* q_0 + f'(y^0)\, q_0 = 0 & \text{dans} \quad Q, \\ q_0(T) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ q_0 = h_0 & \text{sur} \quad O, \\ q_0 = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \backslash O, \end{cases} \tag{3.17}$$

et z est solution de

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial z}{\partial t} + A^* z + f'(y^0)\, z = 0 & \text{dans} \quad Q, \\ z(T) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ z = w & \text{sur} \quad O, \\ z = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \backslash O. \end{cases} \tag{3.18}$$

On cherche $w \in L^2(O)$ vérifiant ainsi (3.9) et de façon que

$$z(0,w) = -q_0(0), \tag{3.19}$$

Remarque 3.1.3 *Pour w dans $L^2(O)$ la solution de (??) doit être entendue dans un sens faible défini par la transposition* [29] , [30] , [39] .

Finalement notre intéret et de résoudre le problème d'optimisation suivant

$$(P)\left\{\min_{w\in U} \|w\|_{L^2(O)}\right\}, \tag{3.20}$$

avec

$$U = \left\{ w, \left\{ \begin{array}{lll} -\dfrac{\partial z}{\partial t} + A^* z + f'\left(y^0\right) z = 0 & \text{dans} & Q, \\ z\left(T\right) = 0 & \text{dans} & \Omega, \\ z = w & \text{sur} & O, \\ z = 0 & \text{sur} & \Sigma \backslash O, \\ z(0) = -q_0(0). & & \end{array} \right. \right\} \tag{3.21}$$

Le problème (P) d'existence du contrôle optimale admet une solution unique notée encore $\hat{w}$ qui sera caractérisée par la méthode de pénalisation.

3.1.5 Pénalisation et systèmes d'optimalités

On introduit le système pénalisé suivant

$$(P_\varepsilon)\left\{\min_{(w,z)\in U_\varepsilon} J_\varepsilon\left(w,z\right)\right\}, \tag{3.22}$$

où

$$J_\varepsilon\left(w,z\right) = \frac{1}{2}\iint\limits_{O} w^2 d\Gamma dt + \frac{1}{2\epsilon}\left\| -\frac{\partial z}{\partial t} + A^* z + f'\left(y^0\right) z\right\|^2_{L^2(Q)} \tag{3.23}$$

et

$$U_{\varepsilon}=\left\{(w,z)\left\{\begin{array}{lll}-\dfrac{\partial z}{\partial t}+A^{*}z+f'\left(y^{0}\right)z\in L^{2}\left(Q\right), & & \\ z\left(T\right)=0 & \text{dans} & \Omega, \\ z=w & \text{sur} & O, \\ z=0 & \text{sur} & \Sigma\backslash O, \\ z(0)=-q_{0}(0). & & \end{array}\right.\right\} \tag{3.24}$$

Le problème (P_{ε}) admet une solution notée $(w_{\epsilon},z_{\varepsilon})$ et caractérisée par

$$\iint\limits_{O} w_{\epsilon}w dxdt+\iint\limits_{Q}\rho_{\varepsilon}\left(-\frac{\partial z}{\partial t}+A^{*}z+f'\left(y^{0}\right)z\right)dxdt=0,\forall w\in L^{2}(O),\forall z\in U_{z}, \tag{3.25}$$

avec

$$U_{z}=\left\{z,\left\{\begin{array}{lll}-\dfrac{\partial z}{\partial t}+A^{*}z+f'\left(y^{0}\right)z\in L^{2}\left(Q\right), & & \\ z\left(T\right)=0 & \text{dans} & \Omega, \\ z=w & \text{sur} & O, \\ z=0 & \text{sur} & \Sigma\backslash O, \\ z(0)=0. & & \end{array}\right.\right\} \tag{3.26}$$

et

$$\rho_{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}\left(-\frac{\partial z_{\varepsilon}}{\partial t}+A^{*}z_{\varepsilon}+f'\left(y^{0}\right)z_{\varepsilon}\right) \tag{3.27}$$

alors le système d'optimalité pour la solution $(w_{\epsilon},z_{\varepsilon})$ est le suivant

$$\left\{\begin{array}{lll}\dfrac{\partial \rho_{\varepsilon}}{\partial t}+A\rho_{\varepsilon}+f'\left(y^{0}\right)\rho_{\varepsilon}=0 & \text{dans} & Q, \\ \rho_{\varepsilon}=0 & \text{sur} & \Sigma,\end{array}\right. \tag{3.28}$$

et telle que

$$w_{\varepsilon}=-\frac{\partial \rho_{\varepsilon}}{\partial \eta}\text{ sur } O \tag{3.29}$$

Par passage à la limite dans un espace foncionnel convenable quand $\epsilon \longrightarrow 0$ on obtient le système d'optimalité du problème (P)

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}+A\rho+f'\left(y^{0}\right)\rho=0 & \text{dans} \quad Q, \\ \rho=0 & \text{sur} \quad \Sigma, \\ \rho\left(0\right)=\rho^{0} & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{3.30}$$

avec

$$\hat{w}=-\frac{\partial \rho}{\partial \eta} \text{ sur } O \tag{3.31}$$

Le problème (3.18) devient

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial z}{\partial t}+A^{*}z+f'\left(y^{0}\right)z=0 & \text{dans} \quad Q, \\ z\left(T\right)=0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ z=-\frac{\partial \rho}{\partial \eta} & \text{sur} \quad O, \\ z=0 & \text{sur} \quad \Sigma\backslash O. \end{cases} \tag{3.32}$$

En résumé notre problème et de trouver ρ^{0} tel que

$$z(0,\rho)=-q_{0}(0). \tag{3.33}$$

Donc la sentinelle définie par h_{0} sera donnée par

$$S\left(\lambda,\tau\right)=\iint\limits_{O}\left(h_{0}-\frac{\partial \rho}{\partial \eta}\right)\frac{\partial y}{\partial \eta}\left(x,t,\lambda,\tau\right)d\Gamma dt. \tag{3.34}$$

3.1.6 Construction de la sentinelle frontière

On définit l'opérateur

$$\Lambda\rho^{0}=z(0,\rho). \tag{3.35}$$

On multipliant (3.32) par ρ et en intégrant par parties on obtient

$$\left\langle \Lambda\rho^{0},\rho^{0}\right\rangle_{L^{2}(\Omega)}=\iint\limits_{O}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \eta}\right)^{2}d\Gamma dt \tag{3.36}$$

On introduit sur $L^2(\Omega)$ la semi norme

$$\|\rho^0\| = \left(\iint\limits_{O} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right)^2 d\Gamma dt \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.37}$$

cela introduit en fait une norme sur $L^2(\Omega)$. En effet si $\|\rho^0\| = 0$ alors

$$\frac{\partial \rho}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } O,$$

et de (3.30) on a

$$\rho = 0 \text{ sur } O,$$

alors d'après le théorème d'unicité de Cauchy $(1, 5, 1)$ on déduit que $\rho = 0$ dans Q ce qui implique que $\rho^0 = 0$. On introduit en suite l'espace de Hilbert F complété de $L^2(\Omega)$ pour la norme (3.37) et on désigne par F' le duale de F. Si l'on multiplie (3.17) par ρ et par intégration par partie on obtient

$$\langle q_0(0), \rho^0 \rangle_{L^2(\Omega)} = -\iint\limits_{O} h_0 \frac{\partial \rho}{\partial \eta} d\Gamma dt, \tag{3.38}$$

ce qui montre que $q_0(0) \in F'$. Finalement on a le théorème suivant :

Théorème 3.1.1 [31] *L'opérateur Λ est un isomorphisme de F sur F' de plus on a $\Lambda^* = \Lambda$, et l'équation (3.19) s'écrit*

$$\Lambda \rho^0 = -q_0(0) \tag{3.39}$$

d'où

$$\rho^0 = -\Lambda^{-1} q_0(0). \tag{3.40}$$

Alors pour h_0 donnée dans $L^2(O)$ il existe une sentinelle et une seule porté par O, construite par ρ^0 et définie par

$$S(\lambda, \tau) = \iint\limits_{O} \left(h_0 - \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right) \frac{\partial y}{\partial \eta} (x, t, \lambda, \tau) \, d\Gamma dt. \tag{3.41}$$

3.1.7 La non furtivité de la pollution pour la sentinelle frontière

Théorème 3.1.2 *On se place dans les conditions du théoème précédent, avec (3.5). Soit* $h_{01}, h_{02}, h_{03}...$ *une suite complète dans* $L^2(O)$. *Il n'existe aucune pollution qui soit furtive pour la suite de sentinelles définie par* $h_{01}, h_{02}, ...$

Démonstration. Pour h_0 donnée dans $L^2(O)$, on pose

$$Mh_0 = q_0(0) \tag{3.42}$$

On a $q_0(0) \in F'$ mais, pour h_0 assez régulière, on aura $q_0(0) \in L^2(\Omega)$. L'opérateur adjoint M^* est défini par

$$\begin{aligned} M^* \quad &: \quad L^2(\Omega) \longrightarrow D(M) \subset L^2(O) \\ \rho^0 \quad &\longrightarrow \quad M^*\rho^0 = \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \text{ sur } O, \end{aligned} \tag{3.43}$$

en effet, on a de (3.38)

$$\left\langle q_0(0), \rho^0 \right\rangle_{L^2(\Omega)} = -\iint_O h_0 \frac{\partial \rho}{\partial \eta} d\Gamma dt,$$

et de (3.42) on obtient

$$\left\langle Mh_0, \rho^0 \right\rangle_{L^2(\Omega)} = -\iint_O h_0 \frac{\partial \rho}{\partial \eta} d\Gamma dt,$$

ce qui implique

$$\left\langle h_0, M^*\rho^0 \right\rangle_{L^2(\Omega)} = -\iint_O h_0 \frac{\partial \rho}{\partial \eta} d\Gamma dt,$$

alors

$$M^*\rho^0 = -\frac{\partial \rho}{\partial \nu} \text{ sur } O. \tag{3.44}$$

Par conséquence (3.41) s'écrit

$$S(\lambda, \tau) = \iint_O \left(h_0 - M^*\Lambda^{-1}Mh_0 \right) \frac{\partial y}{\partial \eta} (x, t, \lambda, \tau) \, d\Gamma dt. \tag{3.45}$$

D'autre part et comme on a par définition $\frac{\partial s}{\partial \tau}(\lambda,\tau)\mid_{\lambda=\tau=0}=0$, alors

$$S(\lambda,\tau)\simeq S(0,0)+\lambda\frac{\partial S}{\partial\lambda}(0,0). \tag{3.46}$$

Si on pose

$$\frac{\partial y_{obs}}{\partial\eta}=m_0,\ \text{sur } O, \tag{3.47}$$

alors (3.46) équivaut à

$$\iint\limits_{O}\left(h_0-M^*\Lambda^{-1}Mh_0\right)\left(m_0+\frac{\partial y^0}{\partial\nu}\right)d\Gamma dt\simeq\lambda\iint\limits_{O}\left(h_0-M^*\Lambda^{-1}Mh_0\right)\frac{\partial y_\lambda}{\partial\nu}d\Gamma dt. \tag{3.48}$$

où y_λ est solution de

$$\begin{cases}\dfrac{\partial y_\lambda}{\partial t}+Ay_\lambda+f'(y^0)\,y_\lambda=0 & \text{dans}\quad Q=\Omega\times(0,T),\\ y_\lambda(0)=0 & \text{dans}\quad \Omega,\\ y_\lambda=\hat{\xi} & \text{sur}\quad \Gamma_0\times(0,T),\\ y_\lambda=0 & \text{sur}\quad \Sigma\backslash\Gamma_0\times(0,T),\end{cases} \tag{3.49}$$

Si l'on multiplie (3.13) par y_λ et par intégration par partie avec $w=-\frac{\partial\rho}{\partial\eta}$ sur O,on obtient

$$\iint\limits_{O}\left(h_0-M^*\Lambda^{-1}Mh_0\right)\frac{\partial y_\lambda}{\partial\eta}d\Gamma dt=\iint\limits_{\Gamma_0\times(0,T)}\frac{\partial q}{\partial\eta}\hat{\xi}d\Gamma dt \tag{3.50}$$

et de (3.48) et (3.50) on obtient

$$\iint\limits_{O}\left(h_0-M^*\Lambda^{-1}Mh_0\right)\left(m_0+\frac{\partial y^0}{\partial\eta}\right)d\Gamma dt=\lambda\iint\limits_{\Gamma_0\times(0,T)}\frac{\partial q}{\partial\eta}\hat{\xi}d\Gamma dt \tag{3.51}$$

donc $q=q(h_0)$ est définie par h_0. Maintenant la pollution $\hat{\xi}$ sera furtive pour la sentinelle définie par h_0 si

$$\iint\limits_{\Gamma_0\times(0,T)}\frac{\partial q}{\partial\eta}(h_0)\,\hat{\xi}d\Gamma dt=0. \tag{3.52}$$

Consédérons alors une suite h_{01}, h_{02}, h_{03}... complète dans $L^2(O)$ et cherchons s'il y on a des termes de pollution furtives pour toutes les sentinelles définies par h_{01}, h_{02}, h_{03}....Soit alors $\check{q}$ vérifiant (3.52) $\forall h_0$. D'après (3.50) cela équivaut à

$$\iint_O \left(h_0 - M^*\Lambda^{-1}Mh_0\right)\frac{\partial y_\lambda}{\partial\eta}d\Gamma dt = 0, \forall h_0, \tag{3.53}$$

ce qui implique

$$\frac{\partial y_\lambda}{\partial\eta} - M^*\Lambda^{-1}M\frac{\partial y_\lambda}{\partial\eta} = 0 \text{ sur } O. \tag{3.54}$$

Mais d'après (3.44) on peut écrire

$$M^*\Lambda^{-1}M\frac{\partial y_\lambda}{\partial\eta} = -\frac{\partial\theta_\lambda}{\partial\eta}, \tag{3.55}$$

avec θ solution de

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial\theta_\lambda}{\partial t} + A\theta_\lambda + f'(y^0)\,\theta_\lambda = 0, & \\ \theta_\lambda = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \theta_\lambda(0) = \theta_\lambda^0, & \end{cases} \tag{3.56}$$

avec θ_λ^0 est un élément convenable dans F. Maintenant si l'on pose

$$\psi_\lambda = y_\lambda - \theta_\lambda \tag{3.57}$$

on a alors ψ_λ est solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi_\lambda}{\partial t} + A\psi_\lambda + f'(y^0)\,\psi_\lambda = 0 & \text{dans} \quad Q = \Omega\times(0,T) \\ \psi_\lambda(0) = -\theta_\lambda^0 & \\ \psi_\lambda = \hat{\xi} & \text{sur} \quad \Gamma_0\times(0,T) \\ \psi_\lambda = 0 & \text{sur} \quad \Sigma\backslash\Gamma_0\times(0,T) \end{cases} \tag{3.58}$$

mais d'après (3.55) on a

$$\frac{\partial\psi_\lambda}{\partial\eta} = \frac{\partial y_\lambda}{\partial\eta} - \frac{\partial\theta_\lambda}{\partial\eta} = \frac{\partial y_\lambda}{\partial\eta} - M^*\Lambda^{-1}M\frac{\partial y_\lambda}{\partial\eta} = 0 \text{ sur } O, \tag{3.59}$$

alors de (3.58) et (3.59) et grâce au fait que (3.5), $\Gamma_0 \cap O = \Phi$ on a donc ψ_λ et $\frac{\partial \psi_\lambda}{\partial \eta}$ sont nulles sur O, donc d'après le théorème d'unicité de Cauchy (1.5.1) , $\psi_\lambda = 0$ dans Q et par conséquent $\hat{\xi} = 0$. ■

Remarque 3.1.4 *Par la même procédure on peut également traiter le problème d'identification des termes de pollution pour des problèmes de type Neumann en échangeant les conditions aux limites dans le problème (3.6) par*

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial \eta} = \xi + \lambda \hat{\xi} & sur \quad \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T) \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} = 0 & sur \quad \Sigma \backslash \Sigma_0. \end{cases} \tag{3.60}$$

Dans ce cas la sentinelle cherchée sera de la forme

$$S(\lambda, \tau) = \iint_O (h_0 + w)\, y(x, t, \lambda, \tau)\, d\Gamma dt. \tag{3.61}$$

3.2 Termes manquants dans les conditions initiales et aux limites

3.2.1 Position du problème

Avec les mêmes notations du paragraphe précédent, soit $\Gamma_1 \subset \Gamma$. On considère le problème suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay + f(y) = 0 & \text{dans} \quad Q = \Omega \times (0, T), \\ y(0) = y_0 + \tau_0 \hat{y}_0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ y = g + \tau_1 \hat{g} & \text{sur} \quad \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0, T), \\ y = \xi + \lambda \hat{\xi} & \text{sur} \quad \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T), \\ y = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \backslash \Sigma_0 \cup \Sigma_1. \end{cases} \tag{3.62}$$

Soit $O = \omega \times (0, T)$ l'observatoire porté par $\omega \subset \Gamma$ tel que l'on suppose que

$$\omega \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_0 = \Phi. \tag{3.63}$$

Soit $h_0 \in L^2(O)$, on pose $\tau = (\tau_0, \tau_1)$ et on cherche une sentinelle frontière de la forme

$$S(\lambda, \tau) = \iint\limits_{O} (h_0 + w) \frac{\partial y}{\partial \eta}(x, t, \lambda, \tau)\, d\Gamma dt. \tag{3.64}$$

On va montrer que sans informations sur la structure des données manquantes, il n'existe que la sentinelle nulle correspond à $w = -h_0$ et qui ne donne aucune information sur le terme de pollution cherché.

3.2.2 Non existence de la sentinelle frontière en l'absence d'informations sur la structure des données manquantes

Proposition 3.2.1 *Il n'existe qu'une sentinelle identiquement nulle définie avec (3.64) et avec les conditions*

$$\frac{\partial S}{\partial \tau_0}(\lambda, \tau)\mid_{\lambda=\tau=0} = 0, \tag{3.65}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \tau_1}(\lambda, \tau)\mid_{\lambda=\tau=0} = 0, \tag{3.66}$$

$$\|w\|_{L^2(O)} = \min. \tag{3.67}$$

Démonstration. Comme à l'ordinaire on introduit le problème adjoint suivant

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial q}{\partial t} + A^* q + f'(y^0)\, q = 0 & \text{dans} \quad Q \\ q(T) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ q = (h_0 + w) & \text{sur} \quad O \\ q = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \backslash O \end{cases} \tag{3.68}$$

La condition (3.65) est équivalente à

$$q(0) = 0, \tag{3.69}$$

de plus si l'on multiplie (3.68) par y_{τ_1} la solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_{\tau_1}}{\partial t} + Ay_{\tau_1} + f'(y^0)\, y_{\tau_1} = 0 & \text{dans} \quad Q = \Omega \times (0,T), \\ y_{\tau_1}(0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ y_{\tau_1} = \hat{g} & \text{sur} \quad \Sigma_1, \\ y_{\tau_1} = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \backslash \Sigma_1, \end{cases} \tag{3.70}$$

avec y^0 est solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y^0}{\partial t} + Ay^0 + f'(y^0) = 0 & \text{dans} \quad Q = \Omega \times (0,T), \\ y^0(0) = \hat{y}_0 & \text{dans} \quad \Omega,, \\ y^0 = g & \text{sur} \quad \Sigma_1 \\ y^0 = \xi & \text{sur} \quad \Sigma_0, \\ y^0 = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \backslash \Sigma_0 \cup \Sigma_1, \end{cases} \tag{3.71}$$

on obtient

$$\iint\limits_{O} (h_0 + w) \frac{\partial y_{\tau_1}}{\partial \eta} d\Gamma dt = \iint\limits_{\Sigma_1} \frac{\partial q}{\partial \eta_A} \hat{g} d\Gamma dt, \tag{3.72}$$

alors la condition (3.66) est équivalente à

$$\frac{\partial q}{\partial \eta_A} = 0 \text{ sur } \Sigma_1. \tag{3.73}$$

et d'après le théorème d'unicité de Cauchy et de (3.68) et (3.73) on déduit que $q \equiv 0$, ce qui implique que $w = -h_0$. ■

3.2.3 Existence d'informations sur la structure des données manquantes

On suppose que

$$y = g + \sum_{i=1}^{m} \tau_i g_i \text{ sur } \Sigma_1, \tag{3.74}$$

où g_i sont données linéairement indépendantes dans $L^2(\Sigma_1)$ et les τ_i ne sont pas connus mais supposés petits. Le système alors devient le suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay + f(y) = 0 & \text{dans} \quad Q = \Omega \times (0,T), \\ y(0) = y_0 + \tau_0 \hat{y}_0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ y = g + \sum\limits_{i=1}^{m} \tau_i g_i & \text{sur} \quad \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0,T), \\ y = \xi + \lambda \hat{\xi} & \text{sur} \quad \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0,T), \\ y = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \backslash \Sigma_0 \cup \Sigma_1. \end{cases} \tag{3.75}$$

On pose $\tau = (\tau_i)_{i=1,m}$ et on cherche une sentinelle défénie par (3.64) et vérifiant en plus que (3.65) et (3.67), la condition suivante

$$\frac{\partial S}{\partial \tau_i}(\lambda, \tau) \mid_{\lambda=\tau=0} = 0, \forall 1 \leq i \leq m. \tag{3.76}$$

Problème adjoint et contrôlabilité

On introduit l'état adjoint q par

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial q}{\partial t} + A^* q + f'(y^0) q = 0 & \text{dans} \quad Q, \\ q(T) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ q = (h_0 + w) & \text{sur} \quad O, \\ q = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \backslash O. \end{cases} \tag{3.77}$$

La condition (3.65) est équivalente à

$$q(0) = 0, \tag{3.78}$$

et la condition (3.76) devient après calcul

$$\iint_{\Sigma_1} \frac{\partial q}{\partial \eta_{A^*}} \hat{g}_i d\Gamma dt = 0, \forall 1 \leq i \leq m. \tag{3.79}$$

Il s'agit d'un autre type de contrôlabilité. On décompose donc le problème adjoint en deux problèmes

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial q_0}{\partial t} + A^* q_0 + f'\left(y^0\right) q_0 = h_0 \chi_O & \text{dans} \quad Q, \\ q_0\left(T\right) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ q = h_0 & \text{sur} \quad O, \\ q = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \backslash O, \end{cases} \tag{3.80}$$

et

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial z}{\partial t} + A^* z + f'\left(y^0\right) z = 0 & \text{dans} \quad Q, \\ z\left(T\right) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ z = w & \text{sur} \quad O, \\ z = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \backslash O, \end{cases} \tag{3.81}$$

On cherche alors un controle optimale w tel que

$$z(0) = -q_0(0), \tag{3.82}$$

et

$$\iint\limits_{\Sigma_1} \frac{\partial z}{\partial \eta_{A^*}} \hat{g}_i d\Gamma dt = -\iint\limits_{\Sigma_1} \frac{\partial q_0}{\partial \eta_{A^*}} \hat{g}_i d\Gamma dt, \forall 1 \leq i \leq m, \tag{3.83}$$

Existence et caractérisation du contrôle optimale

La fonction $\|w\|_{L^2(O)}$ admet un minimum $\hat{w}$ sur l'ensemble

$$U = \left\{ w, \begin{cases} -\dfrac{\partial z}{\partial t} + A^* z + f'\left(y^0\right) z = 0 & \text{dans} \quad Q, \\ z\left(T\right) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ z = w & \text{sur} \quad O, \\ z = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \backslash O, \\ z(0) = -q_0(0), & \\ -\iint\limits_{\Sigma_1} \frac{\partial z}{\partial \eta_{A^*}} \hat{g}_i d\Gamma dt = \iint\limits_{\Sigma_1} \frac{\partial q_0}{\partial \eta_{A^*}} \hat{g}_i d\Gamma dt, \forall 1 \leq i \leq m, & \end{cases} \right\} \tag{3.84}$$

Par la méthode de pénalisation, le système d'optimalité carctérisant l'optimum $\hat{w}$ est le suivant

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}+A\rho+f'\left(y^{0}\right)\rho=0 & \text{dans} \quad Q, \\ \rho=\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_{i}\hat{g}_{i} & \text{sur} \quad \Sigma_{1,} \\ \rho=0 & \text{sur} \quad \Sigma\backslash\Sigma_{1}, \\ \rho\left(0\right)=\rho^{0} & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.85}$$

avec

$$\hat{w}=-\frac{\partial \rho}{\partial \nu} \text{ sur } O, \tag{3.86}$$

où ρ^{0} et $\left(\alpha_{i}\right)_{1\leq i\leq m}\in\Re^{m}$, sont à déterminer de façon que

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial z}{\partial t}+A^{*}z+f'\left(y^{0}\right)z=0 & \text{dans} \quad Q, \\ z\left(T\right)=0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ z=-\frac{\partial \rho}{\partial \eta} & \text{sur} \quad O, \\ z=0 & \text{sur} \quad \Sigma\backslash O, \end{cases} \tag{3.87}$$

et

$$\begin{cases} z(0)=-q_{0}(0), \\ -\iint\limits_{\Sigma_{1}}\frac{\partial z}{\partial \eta_{A^{*}}}\hat{g}_{i}d\Gamma dt=\iint\limits_{\Sigma_{1}}\frac{\partial q_{0}}{\partial \eta_{A^{*}}}\hat{g}_{i}d\Gamma dt, \forall 1\leq i\leq m. \end{cases} \tag{3.88}$$

Pour cela on introduit un opérateur linéaire

$$\Lambda\left(\rho^{0},\alpha\right)=\left(z(0),-\iint\limits_{\Sigma_{1}}\frac{\partial z}{\partial \eta_{A^{*}}}\hat{g}_{i}d\Gamma dt\right) \tag{3.89}$$

et un espace fonctionnel F complet pour la norme

$$\left\|\left(\rho^{0},\alpha\right)\right\|_{F}=\left(\iint\limits_{O}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \eta}\right)^{2}d\Gamma dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.90}$$

On montre que Λ est un isomorphisme de F sur F' et comme les égalités de (3.88) sont équivalentes à

$$\Lambda\left(\rho^0,\alpha\right) = -\left(q_0(0), -\iint\limits_{\Sigma_1} \frac{\partial q_0}{\partial \eta_{A^*}} \hat{g}_i d\Gamma dt\right) \tag{3.91}$$

alors la seule solution (ρ^0,α) est donnée par

$$\left(\rho^0,\alpha\right) = -\Lambda^{-1}\left(q_0(0), -\iint\limits_{\Sigma_1} \frac{\partial q_0}{\partial \eta_{A^*}} \hat{g}_i d\Gamma dt\right), \tag{3.92}$$

et finalement la sentinelle frontière cherchée existe et définie par

$$S\left(\lambda,\tau\right) = \iint\limits_{O} \left(h_0 - \frac{\partial \rho}{\partial \eta}\right) \frac{\partial y}{\partial \eta}\left(x,t,\lambda,\tau\right) d\Gamma dt. \tag{3.93}$$

Chapitre 4

Sentinelles frontières pour La résolution d'un problème d'identification géométrique

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'identification de la forme d'une partie inconnue de la frontière Γ d'un domaine Ω suffisamment régulier dans $\mathbb{R}^2$. La forme d'un côté de la frontière est connue et dont une partie soumise à une température donnée, et la forme de l'autre côté est à estimer par l'observation de la température sur une autre partie du coté connu.

4.1 Position du problème

Soit $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert de frontière suffisament régulière $\partial\Omega_0 = \Gamma^* \cup \Gamma_0$, avec $\Gamma^* \cap \Gamma_0 = \emptyset$.On définit une déformation Ω_α du domaine Ω_0 par

$$\Omega_\alpha = \{x + \alpha(x) U(x),\ x \in \Omega_0\}, \tag{4.1}$$

où U est un vecteur transversale de class C^∞, et $\alpha(x)$ est une fonction de classe C^2 telle que Γ^* reste invariant par la déformation αU. Alors, la frontière du domaine Ω_α, i.e, $\partial\Omega_\alpha = \Gamma^* \cup \Gamma_\alpha$

est de classe C^2 et on a $\Gamma^* \cap \Gamma_\alpha = \emptyset$. D'où, Γ_α est une déformation de Γ_0 :

$$\Gamma_\alpha = \{x + \alpha(x) U(x), \ x \in \Gamma_0\}. \tag{4.2}$$

On suppose que $\Gamma^* = \Gamma_1^* \cup \Gamma_2^*$, $\Gamma_1^* \cap \Gamma_2^* = \Phi$ avec $meas\Gamma_1^* \neq 0$ et $meas\Gamma_2^* \neq 0$.
Soit $y = y(x,t;\alpha)$ la solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \triangle y = 0 & \text{dans} \quad Q_\alpha = \Omega_\alpha \times]0,T[\,, \\ y = f & \text{sur} \quad \Sigma_1^* = \Gamma_1^* \times]0,T[\,, \\ \dfrac{\partial y}{\partial n} = 0 & \text{sur} \quad \Sigma_2^* = \Gamma_2^* \times]0,T[\,, \\ y = 0 & \text{sur} \quad \Sigma_\alpha = \Gamma_\alpha \times]0,T[\,, \\ y(.,0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega_\alpha, \end{cases} \tag{4.3}$$

avec $f = \tilde{f} \mid \Gamma_1^*$ et $\tilde{f} \in L^2\left(]0,T[\,, H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)\right)$. On sait que (voir [29], [30])

$$y \in L^2\left(]0,T[\,, H^2(\Omega_\alpha)\right), \ y\,|_\Gamma \in L^2\left(]0,T[\,, H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)\right)$$

et

$$\frac{\partial y}{\partial n}\,|_\Gamma \in L^2\left(]0,T[\,, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right), \ \text{avec } \Gamma = \partial\Omega_\alpha.$$

Pour tout α, on pose $O = \Gamma_2^* \times]0,T[$. La solution y du problème (4.3) est supposée observée dans O et on note cette observation y_{obs}.
Le vecteur U est censé rester transversal à Γ_α, dans un voisinage de α suffisament grand (cela signifie que le domaine initiale Ω_0 n'est pas trop loin du domaine exact Ω_α (déformation sans cisaillement)). Nous visons à construire une suite de fonctions $\left(\alpha^k\right)_{k=0\ldots\infty}$ localement convergente dans un certain sens, commençons par une donnée initiale α^0, cela va donner une approximation de la forme finale de la partie déformée de la frontière Γ_α. Le calcul de α^{k+1} sera établi à partir de α^k par la méthode des sentinelles.

4.2 Application de la méthode des sentinelles

Considérons la paramatrisation suivante de l'ensemble Γ_α :

$$\Gamma_\alpha = \{x(s) + \alpha(s) U(s), \ s \in [0,1], x(s) \in \Gamma_0\}, \tag{4.4}$$

où α est une fonction C^2 dans $[0,1]$, ($\alpha \in L^2(]0,1[)$). On écrit α suivant une base de fonctions $(b_j)_{j=1...\infty}$dans $C^2(0,1)$, et on garde la notation $\alpha \in l^2(\mathbb{R})$ pour le vecteur infini des coordonnées de la fonction α dans cette base, par conséquence (4.4) peut s'écrire maintenant :

$$\Gamma_\alpha = \left\{ x(s) + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j b_j U(s), \ s \in [0,1], x(s) \in \Gamma_0 \right\}. \tag{4.5}$$

Alors maintenant notre but est de construire une suite $\left(\alpha^k\right)_{k=0...\infty}$ converge dans $l^2(\mathbb{R})$. On définit la fonction sentinelle par

$$\left| \begin{array}{lll} S : l^2(\mathbb{R}) \times l^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{R}) \\ (\tilde{\alpha}, \alpha) & \longmapsto & \left(\iint_O w_i(\tilde{\alpha}) y(\alpha) d\Sigma \right)_{i=1...\infty} \end{array} \right. \tag{4.6}$$

Où $y(\alpha) = y(x,t;\alpha)$ est la solution du problème (4.3), $\Sigma = \Gamma \times]0,T[$ et les fonctions $(w_i(\tilde{\alpha}))_{i=1...\infty}$ sont à déterminer dans un certain sens.

Proposition 4.2.1 *(Existence et unicité des sentinelles) : Il existe une famille unique de fonctions* $(w_i(\tilde{\alpha}))_{i=1...\infty}$, *qui assure l'existence et l'unicité de la fonction sentinelle* $S(\tilde{\alpha}, \alpha)$ *définie dans* (4.6) *telle que*

$$w_i(\tilde{\alpha}) \in L^2(O) \ , i = 1...\infty \ \textit{avec une norme minimale,} \tag{4.7}$$

$$D_\alpha S(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}) = ID + M, \ \forall \tilde{\alpha} \in l^2(\mathbb{R}), \tag{4.8}$$

où ID est l'opérateur identité et $M \in \mathcal{L}\left(l^2(\mathbb{R})\right)$ avec

$$\|(M_i)\|_{l^2(IR)} = \frac{\varepsilon}{i},\ \text{pour } i = 1...\infty. \tag{4.9}$$

(M_i) est la i^{eme} ligne de la matrice infinie M, $D_\alpha S(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha})$ denote la dérivée de S respectivement par rapport à sa deuxième coposante calculée au point $(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha})$.

Remarque 4.2.1 *La condition (4.8) a un sens, du à la différentiabilité de $y(x,t;\alpha)$ respectivement par rapport à α_j (voir [05], [49], [53]).*

Remarque 4.2.2 *Pour $\tilde{\alpha}$ fixée, $S_{\tilde{\alpha}}(\alpha) = S(\tilde{\alpha},\alpha)$ est une sentinelle au sens de J. L. Lions [31].*

Démonstration. (de la Proposition 1) : la preuve sera donnée en trois étapes :

1^{ere} étape :les conditions (4.7) (4.8) **seront reécrits comme un problème de contrôle ;** la fonction $y(x,t;\alpha)$ est différentiable respectivement par rapport à α comme c'est montré dans [49]. On note

$$y_{\alpha_j} = \frac{\partial y(\tilde{\alpha})}{\partial \alpha_j},_{j=1...\infty}$$

la dérivée de $y(x,t;\alpha)$ respectivement par rapport à α_j au ponit $\tilde{\alpha}$, qui est la solution du système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_{\alpha_j}}{\partial t} - \triangle y_{\alpha_j} = 0 & \text{dans} \quad Q_{\tilde{\alpha}} = \Omega_{\tilde{\alpha}} \times]0,T[, \\ y_{\alpha_j} = 0 & \text{sur} \quad \Sigma_1^* = \Gamma_1^* \times]0,T[, \\ \dfrac{\partial y_{\alpha_j}}{\partial n} = 0 & \text{sur} \quad \Sigma_2^* = \Gamma_2^* \times]0,T[, \\ y_{\alpha_j} = -b_j\left(\nabla y(\tilde{\alpha}).U\right) & \text{sur} \quad \Sigma_{\tilde{\alpha}} = \Gamma_{\tilde{\alpha}} \times]0,T[, \\ y_{\alpha_j}(.,0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega_{\tilde{\alpha}}, \end{cases} \tag{4.10}$$

où $y(\tilde{\alpha}) = y(x,t;\tilde{\alpha})$ résoud (4.3) avec la donnée $\tilde{\alpha}$. Alors, l'élément général de la matrice infinie $D_\alpha S(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha})$ est

$$\left(D_\alpha S(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha})\right)_{ij} = \iint\limits_O w_i(\tilde{\alpha})\, y_{\alpha_j} d\Sigma, \tag{4.11}$$

Fixons i la condition (4.8) se lit maintenant

$$\iint\limits_{O} w_i\left(\tilde{\alpha}\right) y_{\alpha_j} d\Sigma = \delta_{ij} + \left(M\right)_{ij}\,,\ {\scriptstyle j=1\ldots\infty}, \tag{4.12}$$

où la matrice M est définie dans la proposition (4.2.1). Maintenant comme les éléments de $L^2\left(O\right)$ et $H^{\frac{1}{2}}\left(O\right)$ sont respectivement les restrictions des éléments de $L^2\left(\Sigma\right)$ et $H^{\frac{1}{2}}\left(\Sigma\right)$ et comme $H^{\frac{1}{2}}\left(\Sigma\right)$ est dense dans $L^2\left(\Sigma\right)$ [42] ; alors, consédérons pour tout élément $w_i\left(\tilde{\alpha}\right)$ dans $L^2\left(O\right)$ une suite $\left(w_{in}\left(\tilde{\alpha}\right)\right)_{n\in IN} \subset H^{\frac{1}{2}}\left(O\right)$ converge vers $w_i\left(\tilde{\alpha}\right)$, et pour tout $n \in IN$, soit $q_{in} \in L^2\left(\left]0,T\right[\,, H^2\left(\Omega_{\tilde{\alpha}}\right)\right)$, la solution du problème adjoint suivant

$$\left\{\begin{array}{lll} -\dfrac{\partial q_{in}}{\partial t} - \triangle q_{in} = 0 & \text{dans} & Q_{\tilde{\alpha}}, \\ q_{in} = 0 & \text{sur} & \Sigma/\Sigma_2^*, \\ \dfrac{\partial q_{in}}{\partial \eta} = w_{in}\left(\tilde{\alpha}\right) & \text{sur} & \Sigma_2^*, \\ q_{in}\left(T\right) = 0 & \text{dans} & \Omega_{\tilde{\alpha}}, \end{array}\right. ,n \in IN \tag{4.13}$$

Due à la régularité des solutions et suite à un nombre d'intégrations par partie on obtient

$$\iint\limits_{O} w_{in}\left(\tilde{\alpha}\right) y_{\alpha_j} d\Sigma = \iint\limits_{\Sigma_{\tilde{\alpha}}} b_j\left(\nabla y\left(\tilde{\alpha}\right).U\right)\left(\alpha\right) \frac{\partial q_{in}}{\partial \eta} d\Sigma.$$

Prenant $n \longrightarrow +\infty$ on obtient

$$\iint\limits_{O} w_i\left(\tilde{\alpha}\right) y_{\alpha_j} d\Sigma = \iint\limits_{\Sigma_{\tilde{\alpha}}} b_j\left(\nabla y\left(\tilde{\alpha}\right).U\right)\left(\alpha\right) \frac{\partial q_i}{\partial \eta} d\Sigma, \tag{4.14}$$

où $q_i = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} q_{in}$ ($q_i \in L^2 \left( ]0, T[\,, H^{\frac{1}{2}}(\Omega_{\tilde{\alpha}}) \right)$ [39]). On définit l'opérateur linéaire et continue $B \in \mathcal{L}(L^2(O); l^2(\mathbb{R}))$ par

$$B : \left| \begin{array}{ccc} L^2(O) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{R}) \\ w_i(\tilde{\alpha}) & \longmapsto & \left(\displaystyle\iint_{\Sigma_{\tilde{\alpha}}} b_j (\nabla y(\tilde{\alpha}) . U)(\alpha) \frac{\partial q_i}{\partial \eta} d\Sigma \right)_{j=1\ldots\infty} \end{array} \right.$$

L'équation (4.14) nous permet d'écrire (4.11) comme suit

$$(D_\alpha S(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}))_{ij} = (Bw_i(\tilde{\alpha}))_j\,, \tag{4.15}$$

c'est donc un problème de contrôle, i.e., trouver $w_i(\tilde{\alpha}) \in L^2(O)$ avec une norme minimale telle que $Bw_i(\tilde{\alpha}) = z$ avec $z \in l^2(\mathbb{R})$. Mais cela est un problème de contrôlabilité exacte, nous allons montrer que nous pouvons achever un résultat de contrôlabilité faible, qui est suffisant pour les applications numériques.

2eme étape :Un résultat de controlabilité faible;

On va montrer que l'image de B dense, pour cela il suffit de montrer que son adjoint est injectif (voir proposition (1.4.1)).

L'opérateur adjoint $B^* \in \mathcal{L}(l^2(\mathbb{R}); L^2(O))$ de B est donné par :

$$B^* : \left| \begin{array}{ccc} l^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & L^2(O) \\ (\sigma_j)_{j=1\ldots\infty} & \longmapsto & \Phi\,|_O \end{array} \right.$$

Où Φ est la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} - \triangle \Phi = 0 & \text{dans} \quad Q_{\tilde{\alpha}}, \\ \Phi = 0 & \text{sur} \quad \Sigma_1^*, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0 & \text{sur} \quad \Sigma_2^*, \\ \Phi = -(\nabla y(\tilde{\alpha}) . U) \sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j \sigma_j & \text{sur} \quad \Sigma_{\tilde{\alpha}}, \\ \Phi(.,0) & \text{dans} \quad \Omega_{\tilde{\alpha}}. \end{cases} \tag{4.16}$$

En effet, de (4.16) on a

$$(w, \Phi)_{L^2(O)} = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \iint\limits_{\Sigma_{\tilde{\alpha}}} b_j \left(\nabla y \left(\tilde{\alpha} \right) .U \right) (\alpha) \frac{\partial q_i}{\partial \eta} d\Sigma = (\sigma, Bw)_{l^2(\mathbb{R})} ,$$

i.e., $\Phi \mid_O = B^* \sigma$. Supposons maintenant que $B^* \sigma = \Phi \mid_O = 0$ i.e., Φ est identiquement nulle dans O. D'après le théorème d'unicité de Cauchy on déduit que $\Phi = 0$ dans $Q_{\tilde{\alpha}}$. Alors, on obtient

$$\left(\nabla y \left(\tilde{\alpha} \right) .U \right) \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sigma_j = 0.$$

comme $\left(b_j\right)_{j=1...\infty}$ est une base de $l^2 \left(\mathbb{R} \right)$, alors soit $\nabla y \left(\tilde{\alpha} \right) .U = 0$ ou bien $\{ \sigma_j = 0, j = 1...\infty \}$. Décomposant le vecteur U suivant le vecteur normale et le vecteur tangent $\nu_{\tilde{\alpha}}$ et $\tau_{\tilde{\alpha}}$ sur $\Gamma_{\tilde{\alpha}}$ on obtient :

$$\nabla y \left(\tilde{\alpha} \right) .U \left(x \right) = \nabla y \left(\tilde{\alpha} \right) . \left(a \nu_{\tilde{\alpha}} \left(x \right) \right) + \nabla y \left(\tilde{\alpha} \right) . \left(b \tau_{\tilde{\alpha}} \left(x \right) \right) , \forall x \in \Gamma_{\tilde{\alpha}},$$

et comme $y \left(\tilde{\alpha} \right)$ s'annule sur $\Gamma_{\tilde{\alpha}}$ on a :

$$\nabla y \left(\tilde{\alpha} \right) .U \left(x \right) = a \frac{\partial y \left(\tilde{\alpha} \right)}{\partial \nu_{\tilde{\alpha}}} \left(x \right) , \forall x \in \Gamma_{\tilde{\alpha}}.$$

D'aprés le théorème d'unicité de Cauchy (1.5.1) on a $\frac{\partial y(\tilde{\alpha})}{\partial \nu_{\tilde{\alpha}}} \mid \Gamma_{\tilde{\alpha}}$ ne peut pas être nulle. si non, $y \left(\tilde{\alpha} \right)$ serait égale à 0 pp. dans $Q_{\tilde{\alpha}}$. Alors, $\nabla y \left(\tilde{\alpha} \right) .U \neq 0$ et donc B^* est injective. Ce qui prouve que l'image de B est dense dans $l^2 \left(\mathbb{R} \right)$ i.e,

$$\forall \rho > 0, \forall z \in l^2 \left(\mathbb{R} \right) , \exists w_i \left(\tilde{\alpha} \right) \in L^2 \left(O \right) ; \left\| B w_i \left(\tilde{\alpha} \right) - z \right\|_{l^2(\mathbb{R})} \leq \rho. \tag{4.17}$$

3^{eme} **étape : Par un processus de dualité convexe on prouve l'existence et l'unicité d'un contrôle vérifiant les conditions** (4.7) et (4.8) ;

Cela nécessite à construire une fonction $w_i(\tilde{\alpha})$ avec une norme minimale satifaisant (4.17), ce qui sera donné par la méthode de dualité de Fenchel-Rockafellar. Consédérons l'ensemble U_{ad} defini par :

$$U_{ad} = \left\{ w \in L^2(O) \text{ tq . } \|Bw_i - z\|_{l^2(\mathbb{R})} \leq \rho, z \in l^2(\mathbb{R}) \right\},$$

qui est non vide (d'après (4.17)), et clairement convexe et fermé dans $L^2(O)$. Donc, il existe $w_i(\tilde{\alpha})$ unique satisfisant (4.7) et solution du problème de minimisation suivant :

$$\min_{w \in U_{ad}} \frac{1}{2} \|w\|^2_{L^2(O)} . \tag{4.18}$$

Soient les deux fonctions F et G définies par :

$$F(w) = \frac{1}{2} \|w\|^2_{L^2(O)}$$

et

$$G(\mu) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \|\mu - z\|_{l^2(\mathbb{R})} \leq \rho \\ +\infty & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Alors le problème (4.18) se lit maintenant

$$\min_{w \in L^2(O)} F(w) + G(Bw) .$$

Appliquant le théorème de dualité de Fenchel et Rockafeller (voir [19] , [5]), on obtient

$$w_i(\tilde{\alpha}) = B^* \sigma^*, \tag{4.19}$$

Où σ^* résoud le problème de minimisation :

$$\min_{\sigma \in l^2(\mathbb{R})} F^*(B^* \sigma) + G^*(-\sigma)$$

avec F^* et G^* sont respectivement les conjugées de F et G.au sens de Fenchel. On a $F^* = F$ et G^* est simple à calculer

$$\begin{aligned} G^*(\sigma) &= \sup_{\mu \in l^2(\mathbb{R})} (\mu, \sigma)_{l^2(\mathbb{R})} - G(\mu) \\ &= \sup_{\mu \in \overline{B(0,\rho)}} (z + \mu, \sigma)_{l^2(\mathbb{R})} \\ &= (z, \sigma)_{l^2(\mathbb{R})} + \rho \|\sigma\|_{l^2(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

où $\overline{B(0,\rho)}$ est la boule fermée dans $l^2(\mathbb{R})$ de centre 0 et de rayon ρ. Alors (4.18) devienne

$$\min_{\sigma \in l^2(\mathbb{R})} J(\sigma) = F(\Phi) + \rho \|\sigma\|_{l^2(\mathbb{R})} - (z, \sigma)_{l^2(\mathbb{R})}, \tag{4.20}$$

où Φ est la solution de (4.16). On sais que $J(\sigma)$ n'est pas differentiable en 0, mais sous des conditions convenables on va montrer que 0 n'est pas l'optimum.

Lemme 4.2.1 *: $\sigma^* = 0$ est solution de* (4.20) *si et seulement si* $\|z\|_{l^2(IR)} \leq \rho$.

■

Démonstration. D'abord, si $\sigma^* = 0$, alors (4.19) donne

$$w_i(\tilde{\alpha}) = 0 \quad \text{et} \quad Bw_i(\tilde{\alpha}) - z = -z.$$

Comme σ^* résoud (4.20) alors

$$\|Bw_i(\tilde{\alpha}) - z\|_{l^2(\mathbb{R})} \leq \rho$$

i.e., $\|z\|_{l^2(\mathbb{R})} \leq \rho$. Ensuite, si $\|z\|_{l^2(\mathbb{R})} \leq \rho$, alors $w_i(\tilde{\alpha}) = 0$ est appartient à U_{ad}, et clairement étant l'élement de norme minimale dans cet ensemble. Par concéquent, $w_i(\tilde{\alpha}) = 0$ est la solution de (4.18). Et comme B^* est injectif, l'équation (4.19) donne $\sigma^* = 0$. A Partir de là, on suppose que, $\|z\|_{l^2(\mathbb{R})} > \rho$, ce qui nous amène à donner la condition d'optimalité pour σ^*.

Pour tout $\delta\sigma \in l^2(\mathbb{R})$ et $\sigma \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial J}{\partial\sigma}, \delta\sigma\right)_{l^2(\mathbb{R})} &= (B^*\sigma, B^*\delta\sigma)_{l^2(\mathbb{R})} + \rho\left(\frac{\sigma}{\|\sigma\|_{l^2(\mathbb{R})}}, \delta\sigma\right)_{l^2(\mathbb{R})} - (z, \delta\sigma)_{l^2(\mathbb{R})} \\ &= \left(BB^*\sigma + \rho\frac{\sigma}{\|\sigma\|_{l^2(\mathbb{R})}} - z, \delta\sigma\right)_{l^2(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Alors σ^*est telle que

$$BB^*\sigma^* - z = -\rho\frac{\sigma^*}{\|\sigma^*\|_{l^2(\mathbb{R})}}. \tag{4.21}$$

Comme $w_i(\tilde{\alpha}) = B^*\sigma^*$, on a $\|Bw_i(\tilde{\alpha}) - z\|_{l^2(\mathbb{R})} = \rho$. Choisissons $(z)_j$ comme suit

$$(z)_j = \delta_{ij}, j = 1...\infty,$$

où $(z)_j$ est la coordonnée générique de z dans la base canonique de $l^2(\mathbb{R})$ et

$$\rho = \frac{\varepsilon}{i} \text{ avec } \varepsilon > 0 \text{ suffisament petit.}$$

Pour obtenir $\|z\|_{l^2(\mathbb{R})} > \rho$. Eventuellement (4.21) donne

$$(Bw_i(\tilde{\alpha}))_j = \delta_{ij} - \frac{\varepsilon}{i}\frac{\sigma_j^*}{\|\sigma^*\|_{l^2(\mathbb{R})}}, \tag{4.22}$$

en combinant ça avec (4.15) on obtient (4.8). Alors, on a montré l'existence et l'unicité d'une famille de fonctions $w_i(\tilde{\alpha})$ pour $i = 1...\infty$ vérifiant (4.7) et (4.8). ■

Remarque 4.2.3 *D'après le lemme 1, le calcul de σ^* peut être donné par les méthodes régulières ou non régulières.*

Remarque 4.2.4 *Remarquons que la différentiation de $S(\tilde{\alpha}, \alpha)$ par rapport à sa première variable équivaut à la différentiation des $(w_i(\tilde{\alpha}))_{i=1...\infty}$ i.e., la différentiation du système* (4.3) *deux fois, ce qui peut être donné par le résultat de J. Simon* [52].

4.3 Construction de l'algorithme

Maintenant, on construit notre programme pour la résolution du problème présenté précédemment, On dérive $S(\tilde{\alpha},\alpha)$ par rapport à α au point $(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha})$ on obtient

$$S(\tilde{\alpha},\alpha)=S(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha})+D_{\alpha}S(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}).(\alpha-\tilde{\alpha})+o(|\alpha-\tilde{\alpha}|),$$

En prenant (4.8) en compte on a

$$S(\tilde{\alpha},\alpha)=S(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha})+\alpha-\tilde{\alpha}+M(\alpha-\tilde{\alpha})+o(|\alpha-\tilde{\alpha}|).$$

Pour $\tilde{\alpha}=\alpha^{k}$, $\alpha=\alpha^{k+1}$ et

$$S(\tilde{\alpha},\alpha)=S_{obs}(\tilde{\alpha})=\left(\iint_{O} w_i(\tilde{\alpha})\,y_{obs}d\Sigma\right)_{i=1\dots\infty}, \tag{4.23}$$

Cela suggère les itérations suivantes

$$\alpha^{k+1}=\alpha^{k}+S_{obs}\left(\alpha^{k}\right)-S\left(\alpha^{k},\alpha^{k}\right), \tag{4.24}$$

telle que

$$S\left(\alpha^{k},\alpha^{k}\right)=\left(\iint_{O} w_i\left(\alpha^{k}\right)y\left(\alpha^{k}\right)d\Sigma\right)_{i=1\dots\infty},$$

où $y\left(\alpha^{k}\right)=y\left(x,t;\alpha^{k}\right)$ résoud (4.3) avec la donnée α^{k}. Maintenant on peut étudier la convergence de l'algorithme.

Théorème 4.3.1 *La suite* $\left(\alpha^{k}\right)_{k=0\dots\infty}$ *définie par*

$$\begin{cases}\alpha^{0}\in l^{2}(\mathbb{R}) \;\; \textit{donnée},\\ \alpha^{k+1}=\alpha^{k}+S_{obs}\left(\alpha^{k}\right)-S\left(\alpha^{k},\alpha^{k}\right),\end{cases} \tag{4.25}$$

converge dans $l^{2}(\mathbb{R})$.

Démonstration. Conséderont (4.25) comme un problème du point fixe

$$\alpha^{k+1} = g\left(\alpha^{k}\right),$$

ou g est une application $l^2\left(\mathbb{R}\right)$ dans lui même clairement définie par $(4.25), (4.6)$ et (4.23).
Calculons $g'\left(\mu\right)$ pour $\mu \in l^2\left(\mathbb{R}\right)$:

$$g'\left(\mu\right) = Id + D_{\tilde{\alpha}} S_{obs}\left(\mu\right) - D_{\tilde{\alpha}} S\left(\mu,\mu\right) - D_{\alpha} S\left(\mu,\mu\right),$$

avec tous les dérivés justifiées. En particulièr pour

$$D_{\tilde{\alpha}} S\left(\mu,\mu\right) = D_{\tilde{\alpha}} S_{obs}\left(\mu\right),$$

$$g'\left(\mu\right) = Id - D_{\alpha} S\left(\mu,\mu\right),$$

et de (4.8) (Proposition 1) on obtient

$$g'\left(\mu\right) = -M,$$

ou $M \in \mathcal{L}\left(l^2\left(\mathbb{R}\right)\right)$ tel que $\left\|\left(M_i\right)\right\|_{l^2(\mathbb{R})} = \frac{\varepsilon}{i}$, $i = 1...\infty$.
Maintenant calculons la norme de Hilbert-Schmidt de $g'\left(\mu\right)$:

$$\left\|g'\left(\mu\right)\right\|_{HS}^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left(g'\left(\mu\right)\right)_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(g'\left(\mu\right)\right)_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\left\|\left(M_i\right)\right\|_{l^2(\mathbb{R})}^2 = \varepsilon^2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}. \qquad (4.26)$$

La valeur de la série dans (4.26) peut être définie en choisissant une valeur appropriée pour ε. On peut prendre ε tel que

$$\left\|g'\left(\mu\right)\right\|_{HS}^2 < 1.$$

Alors, le processus d'itération (4.25) locallement converge dans l'espace $l^2\left(\mathbb{R}\right)$.

■

4.4 Conclusion

Dans cette thèse on a étudié l'identification d'une partie inconnue de la frontière d'un domaine borné. Pour la résolution de se problème on a utilisé la méthode des sentinelles introduite par Jaque Luis lions. Cette méthode consiste à transférer un problème d'identification ou d'estimation d'une donnée incomplète en un problème de contrôlabilité, avec des contraintes sur le contrôle. Dans la résolution de ces problèmes, il est nécessaire de disposer des données mesurées de l'état, pour cela on a fixé une partie initiale du domaine réel et on a introduit une déformation sans cisaillement de cette partie. Sur un côté fixé de la frontière on a effectué des observations de l'état d'un système de diffusion. Cela nous a permet de construire une famille de fonctions qui prouve l'existence et l'unicité de la fonction sentinelle. A partir de là, on a construit un programme et on a montré sa convergence en utilisant la méthode du point fixe ce qui nous a permet de donner une information sur la forme de la partie inconnue de la frontière.

Enfin, effectuer des observations sur une partie de la frontière peut résoudre de nombreux problèmes d'environnement et d'industrie, pour lesquels l'accès au milieu est difficile ou impossible. Ainsi il peut minimiser l'utilisation de l'énergie. Ce problème peut se traiter en supposant une déformation de la frontière avec cisaillement, ainsi par l'effectuation des observations ponctuelles, des applications numériques peuvent aussi être élaborées.

Bibliographie

[1] Ainseba BE, Kernevez JP, Luce R. Application des sentinelles a l'identification des pollutions dans une rivière. Esaim-Math Model Num 1994 ; 28 : 297-312.

[2] Bensoussan A, Guiseppe DP, Michel CD,Sanjoy KM. representation and control of infinite dimensional sustems, vol 2. Birkhauser, Boston, 1993.

[3] Berhail A, Ayadi A. Etude des systèmes Hyperboliques à données manquantes, Thèse de doctorat. université de Constantine 1, Constantine, 2013.

[4] Bodart O, Demeestere P. Contrôle frontière de l'explosion en temps fini de la solution d'une équation de combustion. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics 1997 ; 325(8) : 841-845.

[5] Bodart O, Demeestere P. Sentinels for the identication of an unknown boundary. Math Mod Meth Appl S 1997 ; 7 : 871-885.

[6] Bodart O, Fabre C. Contrôle insensibilisant la norme de la solution d'une équation de la chaleur semi-linéaire. Comptes rendus de l'Académie des sciences, Série 1, Mathématique 1993 ; 316(8) : 789-794.

[7] Boutoulout A, El Jai A, Zerrik E. Actuators and Regional Boundary Controlability of Parabolic Systems, 1989.

[8] Brezis H. Analyse Fonctionnelle, Théorie et application. Masson, 1983.

[9] Burger M. Parameter identification, Lecture Note. Winter School Inverse Problèmes, 2005.

[10] Butkovski AG, Egorov AI, Luries KA. Optimal control of distributed systems, Saim J Cont 1968 ; 6(3).

[11] Chavent G. Analyse Fonctionnelle et identification de coefficients repartis dans les équations aux dérivées partielles. Thèse Doctorat, Paris, 1971.

[12] Chavent G. Estimation de paramètres distribués dans les équations aux dérivées partielles. in : computing method in Applied Sciences and Enginneering, part 2, Lecture notes in Computer Sciences 11, Springer- Verlag, New york, 1974, pp. 361-390.

[13] Chavent G. Generalized sentinels defined via least squares. INRIA, 1993.

[14] Cindea N. Problèmes inverses et contrôlabilité avec applications en élasticité et IRM. Thèse doctorat, Université de Nancy, 2010.

[15] Demeestere P. Méthode des sentinelles, Etude comparative et application à l'identification d'une frontière, contrôle du temps d'explosion d'une équation de combution. Thèse de Doctorat, Université de Thechnologie de Compiègne, 1997.

[16] El Jai A, Pritchard AJ. Capteurs et actionneurs dans l'analyse des systèmes distribués (Vol. 3). Masson, 1986.

[17] El Jai, Simon MC, Zerrik E, Pritchard AJ, Regional Controlability of distributed Parameter Systems. International Journal of Control 1995 ; 62(6) : 1351-1365.

[18] El Jai, Zerrik E, Afifi A. Systèmes dynamiques : Analyse régionale des systèmes linéaires distribués. Tome 2, Presses Universitaires de Perpignan, 2008.

[19] Ekeland I, Temam R. Convex Analysis and Variational Problems. Amsterdam, The Netherlands : North-Holland Publ Company, 1976.

[20] Hinze M, Pinnau R, Ulbrich M, Ulbrich S. Optimization with PDE constraints. Springer Science & Business Media, 2008.

[21] Kaarar I, Ayadi A. Sentinelles ponctuelles. mémoire Magistère, Université mentouri de Constantine, Constantine 2005.

[22] Kernevez JP. The Sentinel Method and its Application in the Enviromental Pollution Problem. Boca Raton, Florida, USA : CRC Press, 1997.

[23] Lions JL. Boundary control of hyperbolic systems and homogenization theory, Control Applications of Nonlinear Programming and Optimization : Proceedings of the Fifth IFAC Workshop, Capri, Italy, 11-14 June 1985, 2014, pp. 95.

[24] Lions JL, Contrôlabilité exacte, stabilisation et perturbation des systèmes distribuès, Vol 1. Masson, 1988.

[25] Lions JL, Contrôlabilité exacte, stabilisation et perturbation des systèmes distribuès, Vol 2. Masson, 1988.

[26] Lions JL, Controllability, penalty and stiffness. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze 1997 ; 25(3-4) : 597-610.

[27] Lions JL. Furtivité et sentinelles pour les systèmes distribués à données incomplètes. C R Acad Sci 1990 ; 311 : 691-695.

[28] Lions JL, Lelong P. Controle optimal de systemes gouvernes par des equations aux derivees partielles. 1968.

[29] Lions JL, Magenes E. Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications vol 1. Paris, France : Dunod, 1968.

[30] Lions JL, Magenes E. Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications vol 2. Paris, France : Dunod, 1968.

[31] Lions JL. Sentinelles pour les Systèmes Distribuées a Données Incomplètes. Paris, France : Masson, 1992.

[32] Lions JL. Sur les sentinells des systèmes distribués, Le cas des conditions initiales incompletes. C R Acad Sci 1988 ; 307 : 819-823.

[33] Lui Y, Analyse et contrôle de quelques problèmes d'interaction. Fluide-Structures, Thèse de Doctorat, Université Henri Poincaré, Nancy I, 2011.

[34] Massengo G, Nakoulima O. Sentinels with given sensitivity. Eur J Appl Math 2008 ; 19 : 21-40.

[35] Massengo G, Puel JP. Boundary sentinels with given sensitivity. Rev Mat Complut 2009 ; 22 : 165-185.

[36] Miloudi Y, Nakoulima O, Omrane A. On the instantaneous sentinels in pollution problems of incomplete data. Inverse Probl Eng 2009 ; 17 : 451-459.

[37] Miloudi Y. Sentinelles des systeme dissipatifs. Thèse de doctorat, Université Ahmed Ben Bella d'Oran 1 Es Senia, algeria, 2011.

[38] Mizohata Z. Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques. Memoirs of the College of Science, University of Kyoto. Series A : Mathematics1958 ; 31(3) : 219-239.

[39] Moussaoui M. webtv.univ-bejaia.dz/index.php/tag/moussaoui-mohand/.

[40] Mophou GM, Velin J. Null controllability problem with constraint on the control deriving from boundary discriminating sentinels. Nonlinear Anal 2009 ; 71 : e910-e924.

[41] Mose R, Stoeckel ME, Poulardc C, Ackerer P, Lehmann F. Transport paremeters identification : application of the sentinel method, Computational. Geosciences 2000 ; 4(3) : 251-273.

[42] Naicase S. Analyse Numérique et Equations aux Dérivées Partielles. Paris, France : Dunod, 2000.

[43] Nakoulima O. A revision of J. L. Lions' notion of sentinels. Portugal Math 2008 ; 65 : 1-22.

[44] Nakoulima O. Optimal control for distributed systems subject to null controllability. Application to discriminating sentinels, Esaim Contr Op Ca Va 2007 ; 13 : 623-638.

[45] Paulin JS, Vanninathan J. Boundary pollution and sentinels in thin domain. C R Acad Sci 2000 ; 326 : 1299-1304.

[46] Paulin JS, Vanninathan M. Sentinelles et pollutions frontières dans des domaines minces. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics 1997 ; 325(12) : 1299-1304.

[47] Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Springer Science & Business. Media, 2012.

[48] Pironneau O. Optimal Shape Design for Elliptic Systems. New York, NY, USA : Springer-verlag, 1984.

[49] Puel JP. Contrôlabilité approchée et contrôlabilité exacte. Notes de cours de DEA Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2001.

[50] Sandel S, ayadi,A. Boundary sentinels for the resolution of a geometrical problem." (2017). Turkish J. Math. 2017 ; 10.3906/mat-1607-5

[51] Saut JS, Scheurer B. Unique continuation for some evolution equations. Journal of differential equations 1987 ; 66(1) : 118-139.

[52] Simon J. Domain variation for drag in stokes flow. In : Control theory of distributed parameter systems and applications. Inf. Springer, 1991, pp. 28-42.

[53] Velin J. Discriminating distributed sentinel involving a navier stokes problem and parameter identification. in : Esaim, Proseedings : EDP Sciences, 2007, pp. 143-166.

[54] Zerrik E. Analyse Régionale des systèmes distribués. Thèse doctorat. Université Mohamed V Rabat, Maroc, 1993.