



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MENTOURI – CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

N° d'ordre : 170 / Mag / 2007

Série : 003 / GM / 2007

MEMOIRE

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE

MAGISTER

EN GENIE MECANIQUE

OPTION : CONSTRUCTION MECANIQUE

THEME

b d c a

ANALYSE DYNAMIQUE DES
CORPS CONTINUS EN ROTATION :
APPLICATION AUX ARBRES MOTEURS

b d c a

Présenté par :

Madame : BELAHRACHE Saliha, Née DJERRI

Soutenu-le : 24 / 06 / 2007 devant le jury :

Président : Dr. A. BOUCHOUCHA	Prof. Université Mentouri Constantine
Rapporteur : Dr. B. NECIB	Prof. Université Mentouri Constantine
Examineur : Dr. H. BOUGOUAS	M.C Université Mentouri Constantine
Examineur : Dr. S. BOUKEBBAB	M.C Université Mentouri Constantine

b d c a

Θε

ζχ

@ DEDICACES @

Je dédie ce modeste travail

*A ceux qui m'ont éclairé le chemin de la sagesse et m'ont offert
tout ce qui est cher et comble le cœur dans la vie avec une
immense générosité et une tendre affection. A toi ma très chère
mère et à toi mon défunt père.*

A ma belle mère et à mon beau père.

A mes frères, à mes sœurs et à leurs enfants.

A mes beaux frères, à mes belles sœurs et à leurs enfants.

A mon mari et mes enfants.

A toutes mes amies.





@ REMERCIEMENTS @

Mes vifs remerciements et ma profonde gratitude vont à monsieur Brahim NECIB, professeur à l'université Mentouri de Constantine, pour m'avoir proposé le sujet et encadré tout en m'accordant sa confiance et apporté ses précieux conseils.

Je suis très sensible à l'honneur que me fait monsieur Ali BOUCHOUCHA, Professeur à l'université Mentouri de Constantine, en acceptant d'être président du jury de soutenance de ce mémoire.

Je suis très heureuse que monsieur Hamlaoui BOUGHOUAS, Maître de conférence à l'Université Mentouri de Constantine, me fasse l'honneur d'examiner ce travail et je le remercie pour son soutien et sa gentillesse.

Je remercie également monsieur Salim BOUKEBBAB, Maître de conférence à l'Université Mentouri de Constantine, à l'importance qu'il accorde à mon travail en acceptant de faire partie du jury de soutenance.

Ma reconnaissance à tous les enseignants du département de génie mécanique qui ont contribué à ma formation en m'inculquant leur savoir.

Enfin, je tiens à remercier tout mes collègues, amies et proches à l'université Mentouri de Constantine qui m'ont soutenu et aidé de manière directe ou indirecte.



SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE

I.1	Revue historique.....	1
I.2	Contexte du sujet.....	2
I.3	Plan de la thèse	4

CHAPITRE1 FONDEMENTS DE LA MECANIQUE VIBRATOIRE ET DE L'ANALYSE MODALE

1.1	L'oscillation élémentaire : le mouvement Harmonique.....	5
1.2	Analyse linéaire des systèmes discrets.....	10
1.3	Analyse des systèmes Continus.....	17

CHAPITRE2 CONCEPTS DE LA DYNAMIQUE DES ARBRES ET ROTORS EN FLEXION

2.1	Le phénomène du tournoiement (whirling).....	24
2.2	Le modèle de Laval / Jeffcott.....	27
2.3	Modèle avec paliers flexibles : cas isotropique.....	31
2.4	Modèle avec paliers flexibles : cas anisotropique.....	34

CHAPITRE3 ANALYSE D'UN MODELE DE ROTORS EN FLEXION

3.1	Caractéristiques énergétiques des éléments du rotor.....	36
3.2	Mise en équation du modèle.....	45
3.3	Etude du modèle symétrique.....	49
3.4	Etude du modèle asymétrique.....	61
3.5	Etude du modèle amorti.....	72

CHAPITRE4 MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS

4.1	Expressions des énergies des éléments du rotor.....	91
4.2	Formulation matricielle.....	94
4.3	Exemple de montage de matrices globales.....	102

	CONCLUSION GENERALE.....	106
--	--------------------------	-----

	REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	108
--	----------------------------------	-----

<i>ANNEXE1</i>	PROCEDURE DE CALCUL DES EQUATIONS DU MOUVEMENT DU MODELE	109
----------------	---	-----

<i>ANNEXE2</i>	DONNEES DU MODELE LALANNE/FERRARIS.....	113
----------------	---	-----

<i>ANNEXE3</i>	RACINES DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE DU MODELE AMORTI.....	116
----------------	--	-----

INTRODUCTION GENERALE

Les arbres ou les rotors sont définis comme étant tout élément tournant autour d'un axe fixe. Ils constituent les pièces maîtresses des machines tournantes dont le domaine d'applications industrielles est très vaste (machines outils, turbines, véhicules, turbocompresseurs, nucléaire, l'industrie pétrolière, etc.). Parmi leurs fonctions on peut citer la transmission de puissance ou la transformation de l'énergie mécanique en énergie électrique.

L'arbre d'un rotor peut être considéré en tant qu'un corps élastique continu avec des propriétés d'inertie et de masse réparties tout le long de sa longueur surtout dans le domaine de grandes vitesses. Pour cela des types variés de vibrations apparaissent dans ce système mécanique et souvent limitent les performances et mettent en danger la sécurité d'opération. L'analyse dynamique des corps continus en rotation s'impose donc car la connaissance précise du comportement vibratoire est indispensable pour assurer un bon fonctionnement.

I.1 REVUE HISTORIQUE

La dynamique des arbres et rotors est une discipline qui a une remarquable histoire due à l'effet réciproque entre la théorie et la pratique [1,2,3]. Elle concerne essentiellement l'étude du comportement vibratoire de machines tournantes telles que par exemple les pompes, les turbines et les compresseurs. Malgré que la dynamique des arbres et rotors soit connue depuis l'invention de la roue, sa recherche proprement dite a commencé avec Rankine qui a publié un article en 1869 sur les mouvements de tournoiement d'un arbre tournant. Mais celui-ci a utilisé incorrectement la deuxième loi de Newton en choisissant un modèle malheureux (voir Fig. I.1) et conclue que pour une certaine vitesse de rotation critique l'arbre tournant fléchit considérablement et qu'au delà de cette vitesse son opération serait impossible [4].

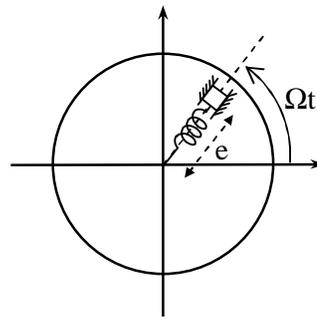


Fig. I.1 Modèle de Rankine

En 1895, Dunkerley publia une étude sur les vibrations des arbres chargés par plusieurs poulies [5]. Cette même année Foepl utilisa un meilleur modèle et expliqua analytiquement que l'opération au-delà de la vitesse critique étant possible [6]. Ceci a été confirmé expérimentalement en 1989 par De Laval qui travaillait sur les turbines à vapeur. Il a réussi à opérer à sept fois la vitesse critique. Kerr publia en 1916 une autre évidence expérimentale qui montre qu'une deuxième vitesse critique pouvait être atteinte si l'on dépassait en toute sécurité la première [7]. Cet sorte de conflit qui existait a été enfin résolu par Jeffcott en 1919 qui confirme la prédiction de Foepl en écrivant le premier rapport sur la théorie fondamentale de la dynamique des rotors [8]. Les contributions de Jeffcott et De Laval sont encore très appréciés et c'est pour cela que leurs noms sont associés au modèle de base d'un rotor (un disque au milieu d'un arbre).

En 1924, Stodola écrivit un chef d'œuvre où il détailla les développements fait sur la dynamiques des rotors [7]. Dans son travail il a introduit les effets gyroscopiques et montra que les solutions super critiques étaient stabilisées par les accélérations de Coriolis. En 1933, Smith était le premier à étudier les systèmes symétriques et asymétriques [8].

Les vibrations des rotors avec des masses continûment réparties ont été étudiés dans les années 50 et 60 par Bishop, Gladwell et Parkson qui ont reporté une série de publications sur les réponses déséquilibrées et l'équilibrage des rotors continus.

La méthode des éléments finis et la méthode de transfert de matrice sont les deux méthodes utilisées pour déterminer les fréquences naturelles, les modes et les réponses forcées au déséquilibre dans les systèmes à rotor complexes. La méthode de transfert des matrices qui est utilisée pour les systèmes multi rotors avec paliers a été développée durant les années 60 par plusieurs chercheurs. Par contre la méthode des éléments finis a été développée en premier dans le domaine de la dynamique des structures. C'est Ruhl et Booker qui, en 1972, étaient les premiers à faire l'application sur les rotors.

I.2 CONTEXT DU SUJET

Le progrès technologique exige sans cesse des systèmes plus performants. Pour les machines tournantes, de grandes puissances et des vitesses très élevées sont parmi les objectifs voulus. Cependant, les problèmes vibratoires lies leurs éléments principaux tels que les arbres et les rotors sont des phénomènes qui demeurent encore préoccupants malgré les progrès réalisés dans la conception. Ces derniers qui sont dus, par exemple, aux inévitables défauts d'usinage et de montage limitent les performances des machines en affectant leur

fonctionnalité et leur rentabilité. Ils peuvent causer des dégâts sérieux ou mener à leurs ruines. Une compréhension complète du comportement vibratoire et une connaissance suffisante sur la dynamique des rotors sont donc nécessaires pour trouver les moyens d'éviter ou de réduire ou de supprimer les vibrations. Initialement, les premiers soucis et efforts étaient de prédire les vitesses de rotation critiques de résonance et après modifier la conception pour les changer afin de les éviter. Mais, il a longtemps été observé que quand les vitesses d'opération dépassèrent les vitesses critiques des problèmes indésirables variés d'instabilité apparaissaient. La dynamique des rotors a été développée pour surmonter ces difficultés techniques. L'arbre ou le rotor est la partie tournante d'une machine. Si sa déformation est négligeable pour des vitesses dans la gamme d'opération on dit qu'il est rigide. Par contre, s'il se déforme appréciablement à certaines vitesses de la gamme d'opération on dit qu'il est flexible.

Le comportement dynamique des arbres et des rotors est principalement dû aux vibrations de flexion qui peuvent être excités par plusieurs différentes causes. L'une des causes les plus connues est l'excentricité du centre de gravité quand on appelle le balourd. Avec ce dernier, on a une distribution de déséquilibre tout le long de l'arbre ou le rotor.

Généralement, il y a aussi des vibrations de torsions qui peuvent concerner le comportement dynamique de tels systèmes, mais pour ce travail on s'intéresse principalement aux problèmes directs des vibrations de flexion.

Le problème principal dans l'étude dynamique des arbres et rotors est la détermination des vitesses critiques. Le concept de ces dernières est montré à l'aide du modèle simple De Laval Jeffcott où une excentricité du centre de gravité cause la déflexion élastique qui dépend de la vitesse de rotation et peut avoir des valeurs extrêmement grandes voir infinies en théorie (phénomène de résonance).

Les arbres ou rotors des machines tournantes sont, dans une première étape dimensionnés à partir de la résistance des matériaux où il s'agit d'avoir des dimensions minimales pouvant supporter des charges nominales. L'étude dynamique vibratoire est ensuite effectuée. Parmi les objectifs principaux de cette dernière on peut citer :

- La prédiction des vitesses critiques ; vitesses pour lesquelles les vibrations dues aux déséquilibres sont maximales.
- La modification de la conception pour altérer les vitesses critiques. Si l'on ne peut pas changer la gamme des vitesses d'opération alors des modifications de la conception seront requises.
- La prédiction des réponses dues au déséquilibre dont la précision dépend de la modélisation.

- La détermination des conditions qui limitent le seuil de la vitesse et de la puissance au delà de laquelle le rotor serait instable. Par exemple les forces déstabilisatrices venant des paliers ne sont pas bien connues pour une modélisation précise.
- Le calcul des masses de correction d'équilibre à partir des données des vibrations mesurées. Ceci permet de réduire sur place l'amplitude des vibrations synchrones.

I.3 ORGANISATION DE LA THESE

Le travail présenté dans cette thèse concerne l'analyse du comportement dynamique vibratoire des arbres et rotors en flexion. Il comprend une introduction générale, quatre chapitres et une conclusion générale.

Dans l'introduction générale on trouve un historique sur l'évolution de la dynamique des rotors et un contexte du sujet qui explique le domaine d'une manière générale et les phénomènes qui y sont liés.

On présente dans le premier chapitre les principaux points des fondements de la mécanique vibratoire et de l'analyse modale que l'on a utilisé pour l'étude des vibrations de flexion des arbres et rotors, et cela en commençant par le modèle élémentaire masse-ressort jusqu'aux vibrations latérales de la poutre.

Les concepts de base de la dynamique des rotors sont exposés dans le deuxième chapitre. Dans celui-ci le phénomène du tournoisement est expliqué et la notion de vitesse critique est introduite. Les vibrations latérales du modèle élémentaire de Laval / Jeffcott sont étudiés sans paliers ensuite avec des paliers isotropiques puis anisotropiques.

Dans le troisième chapitre, le modèle de rotor de Lalanne et ferraris est étudié avec les conditions aux limites appuyé / libre et cela pour les cas symétriques non amortis et amortis, et dissymétriques amortis. Les fréquences naturelles et les modes propres sont déterminés et les réponses aux balourds et aux forces d'excitation asynchrones sont traitées.

Le développement de la modélisation par éléments finis est exposé dans le quatrième chapitre. Dans celui-ci on présente la procédure et les moyens pour faire une étude précise de l'analyse du comportement vibratoire des arbres ou des rotors avec un exemple de modèle de rotor pour montrer le montage de la matrice globale.

Enfin, on termine par une conclusion générale avec des suggestions pour des travaux futurs.

FONDEMENTS DE LA MECANIQUE VIBRATOIRE ET DE L'ANALYSE MODALE

Les vibrations ou les oscillations des systèmes mécaniques constituent l'un des plus importants champs d'études dans toute la physique [11,12]. Virtuellement, tous les corps peuvent vibrer librement en des manières variées. On peut aller de l'aile d'une mouche jusqu'aux grandes vibrations de la terre lors d'un tremblement tout en passant par l'être humain qui est en soit un réservoir de vibrations. Pour les vibrations des systèmes mécaniques et structures elles sont d'une part une nuisance pour les utilisateurs et d'autre part une source d'informations sur les comportements. Par exemple pour les machines tournantes, elles sont redoutées car elles provoquent des dégradations et des cassures.

Pour cette raison leur étude est nécessaire. Le concepteur doit avant tout déterminer la réponse des machines ou structures aux sollicitations de nature dynamique qu'elles vont rencontrer au cours de leurs existences. On l'appelle l'analyse vibratoire. Celle-ci permet l'étude du comportement lors de la réalisation ou de la mise en service et ainsi s'assurer d'une sécurité suffisante pour remplir une fonction définie. Elle consiste à déterminer les déformations de la structure en fonction de la fréquence que l'on définit par l'analyse modale.

1.1 L'OSCILLATION ELEMENTAIRE : LE MOUVEMENT HARMONIQUE

1.1.1 Le mouvement harmonique simple

L'oscillation ou la vibration la plus simple est le mouvement harmonique simple qui est un mouvement périodique alternatif décrit par une fonction sinusoïdale du temps ayant une amplitude constante.

C'est le mouvement élémentaire ou de base car tous les autres mouvements qui sont soit périodiques ou quelconques peuvent être, d'après Fourier (avec les conditions de convergence vérifiées) décomposés en une sommation (série ou intégrale) de mouvements sinusoïdaux qu'on appelle les harmoniques; c'est à dire de la forme:

$$y = a \sin (\omega t + \varphi) \quad (1.1.1)$$

où φ désigne la phase à l'origine, a l'amplitude constante et ω la fréquence angulaire ou pulsation.

On peut le considérer comme le mouvement de la projection P sur un diamètre d'un point M ayant un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω sur un cercle de rayon a . Le point P a donc un mouvement oscillatoire autour de l'origine 'o' comme c'est le cas par exemple du modèle classique d'une masse accrochée à un ressort (voir Fig.1.1).

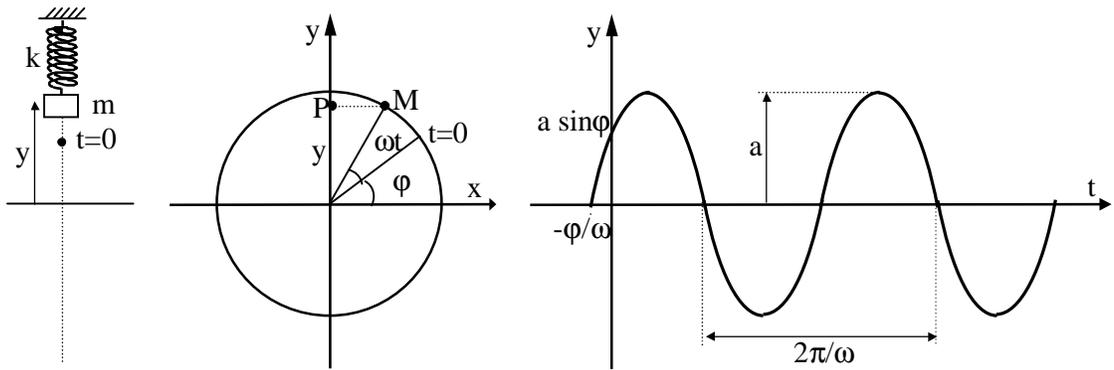


Fig.1.1 Mouvement harmonique simple.

La phase à l'origine peut être une avance ($\varphi > 0$) ou un retard ($\varphi < 0$) et la projection du point M peut être sur l'axe des x si l'on considère l'oscillation horizontale. Les formes $y = a \sin (\omega t - \varphi)$, $x = a \cos (\omega t + \varphi)$ et $x = a \cos (\omega t - \varphi)$ peuvent être aussi utilisées pour décrire le mouvement harmonique simple. Dans le cas où l'amplitude n'est pas constante $a = a(t)$ le mouvement est dit pseudo-harmonique.

1.1.2 Composition de mouvements harmoniques

a) Mouvements de même période et de même direction

Deux mouvements harmoniques simples ayant la même direction et la même période, par exemple:

$$x_1 = a_1 \cos (\omega t + \varphi_1) \quad (1.1.2)$$

et

$$x_2 = a_2 \cos (\omega t + \varphi_2) \quad (1.1.3)$$

ont pour mouvement résultant $x = x_1 + x_2$ qui est un mouvement harmonique de même direction et de même période, c'est à dire de la forme:

$$x = a \cos (\omega t + \varphi) \quad (1.1.4)$$

où l'amplitude a et la phase initiale φ peuvent être déterminés par la méthode analytique trigonométrique ou par la méthode géométrique de Fresnel. Elles sont données par:

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (1.1.5)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2} \quad (1.1.6)$$

b) Mouvements de fréquences voisines et de même direction (Phénomène de battements)

Deux mouvements harmoniques simples ayant la même direction et des fréquences voisines (différentes) ont pour mouvement résultant $x = x_1 + x_2$. Pour une même amplitude (simplification des calculs), c'est à dire:

$$x_1 = a \cos (\omega_1 t + \varphi_1) \quad (1.1.7)$$

et
$$x_2 = a \cos (\omega_2 t + \varphi_2) \quad (1.1.8)$$

le mouvement résultant est donnée par:

$$x = 2 a \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) \quad (1.1.9)$$

Si ω_1 et ω_2 ne diffèrent pas trop l'une de l'autre (en supposant $\omega_1 > \omega_2$), la valeur de $(\omega_1 + \omega_2)/2$ sera du même ordre que ω_1 ou ω_2 alors que $(\omega_1 - \omega_2)/2$ sera très petite devant ω_1 ou ω_2 . Dans ce cas le mouvement peut être assimilé à un mouvement quasi harmonique de pulsation $(\omega_1 + \omega_2)/2$ et une amplitude, variant lentement dans le temps, égale à $2a \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right)$.

Ce phénomène est appelé battements (voir Fig. 1.2).

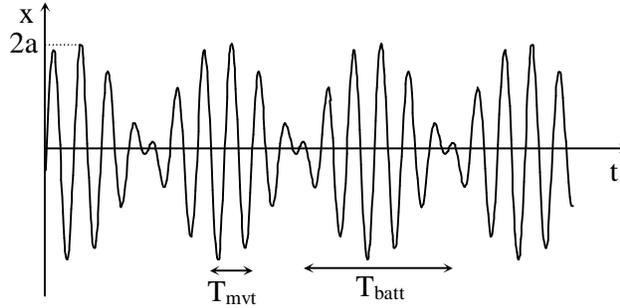


Fig.1.2 Battements (mêmes amplitudes)

Le temps s'écoulant entre deux maximums consécutifs de l'amplitude est la période du battement, donnée par $T_{batt} = 2\pi / (\omega_1 + \omega_2)$ et ainsi la fréquence par $f_{batt} = f_1 - f_2$.

Si les amplitudes sont différentes (calcul qui se fait en considérant des approximations se basant sur les fréquences voisines), on a aussi un phénomène de battement avec la même fréquence c'est à dire égale à la différence des fréquences et dont l'amplitude maximale est égale à la somme des amplitudes (voir Fig. 1.3).

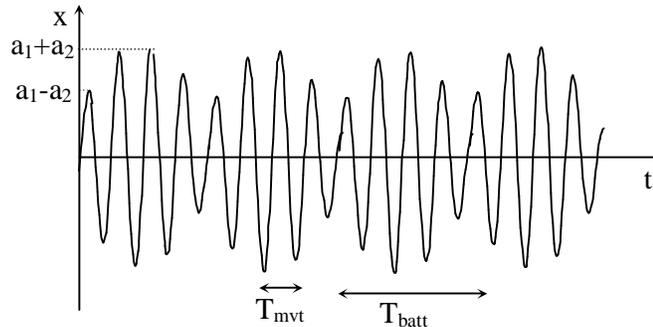


Fig.1.3 Battements (amplitudes différentes)

c) Mouvements de même fréquence et de direction perpendiculaires (Courbes de Lissajous)

Considérons le cas où l'on est en présence de deux mouvements harmoniques de même fréquence qui s'effectuent dans des directions perpendiculaires et définis par les équations :

$$x = a \cos \omega t \tag{1.1.10}$$

et $y = b \cos (\omega t + \varphi) \tag{1.1.11}$

(la phase initiale du mouvement selon x est prise nulle pour simplifier l'interprétation du résultat).

Il est évident que le mouvement résultant serait un mouvement plan dont la trajectoire aurait pour équations paramétriques les équations (1.1.10) et (1.1.11). Pour obtenir l'équation de cette trajectoire, on élimine le temps et on obtient:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \varphi = \sin^2 \varphi \tag{1.1.12}$$

C'est l'équation d'une ellipse centrée à l'origine et dont l'inclinaison par rapport à l'axe des x dépend de la valeur de φ sauf pour $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$ où elle se réduit à un segment de droite.

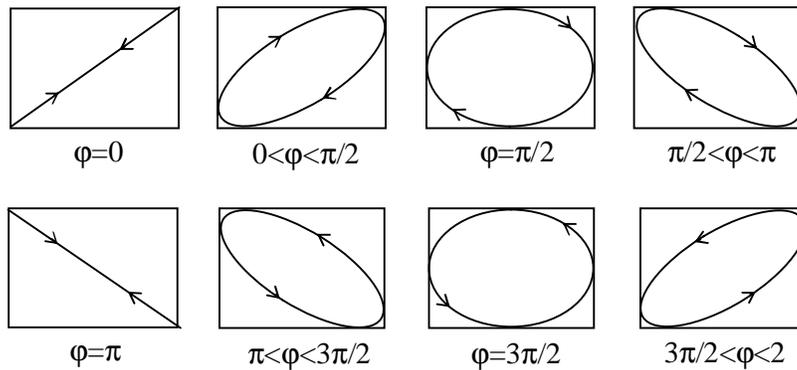


Fig.1.4 Courbes de Lissajous (mêmes fréquences)

Dans le cas où les fréquences sont multiples, on obtient des courbes comme celles représentées sur la figure 1.5. Cependant si les fréquences sont quelconques, généralement on a une courbe non fermée comme celle donnée par la figure 1.6.

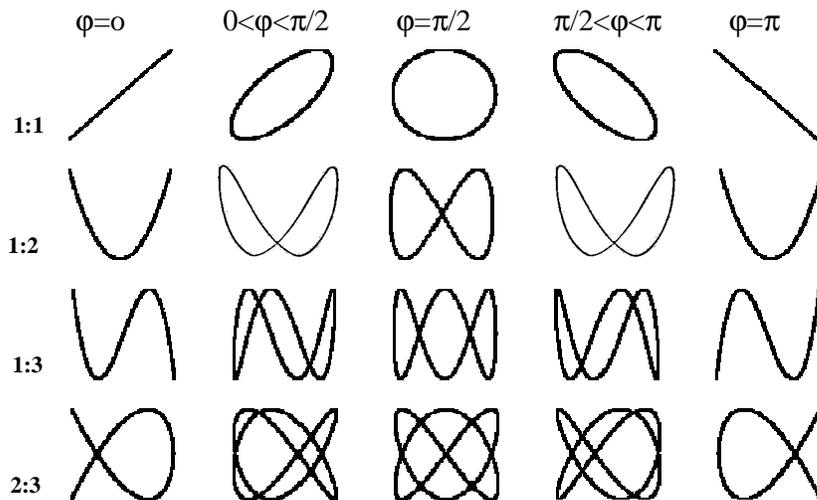


Fig.1.5 Courbes de Lissajous (fréquences multiples).

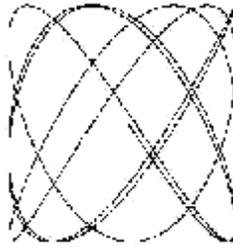


Fig.1.6 Courbes de Lissajous (fréquences quelconques).

1.2 ANALYSE LINEAIRE DE SYSTEMES DISCRETS

1.2.1 Modèle dynamique élémentaire

Comme tous les corps possédant une masse et une élasticité sont capables de vibrer, dans toute documentation sur les phénomènes oscillatoires ou vibratoires, on commence toujours la théorie par le modèle le plus simple à un degré de liberté qui consiste en une masse accrochée à un ressort et pouvant être soumise à une force de frottement et à une force d'excitation ou chargement. La figure (1.7) schématise un tel système.

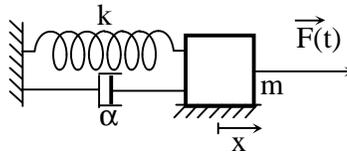


Fig. 1.7 Modèle élémentaire d'oscillateur.

Plusieurs méthodes sont possibles pour trouver l'équation du mouvement. Pour ce cas élémentaire la méthode la plus simple consiste à exprimer directement l'équilibre dynamique de toutes les forces agissant sur la masse m qui sont le chargement appliqué $F(t)$ et les forces engendrées par le mouvement c'est à dire la force de rappel F_k , la force d'amortissement F_f et la force d'inertie F_x (voir Fig.1.8).

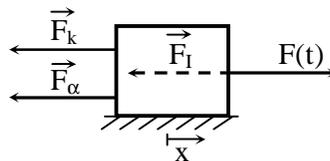


Fig.1.8 Forces appliquées au modèle élémentaire.

On a donc :

$$\vec{F}(t) + \vec{F}_k + \vec{F}_f + \vec{F}_l = \vec{0} \quad (1.2.1)$$

Toutes les forces sont de même direction avec les trois dernières qui sont en fonction du déplacement x ou de ses dérivées par rapport au temps. Ce qui donne :

$$F(t) - kx - \alpha \dot{x} - m\ddot{x} = 0 \quad (1.2.2)$$

d'où l'équation différentielle :

$$m\ddot{x} + \alpha \dot{x} + kx = F(t) \quad (1.2.3)$$

Si le système n'est pas amorti ou excité, elle s'écrit :

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1.2.4)$$

La solution de cette dernière équation qui est homogène est un mouvement harmonique simple de la forme :

$$x = x_h = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (1.2.5)$$

ou bien

$$x = x_h = C \cos (\omega_0 t + \varphi) \quad (1.2.6)$$

où ω_0 est la fréquence angulaire (pulsation) propre ou naturelle des oscillations. A et B (ou C et φ) sont des constantes qu'on détermine par les conditions initiales.

Lorsque le système est amorti, elle devient :

$$m\ddot{x} + \alpha \dot{x} + kx = 0 \quad (1.2.7)$$

En posant $\lambda = \alpha/2m$, qui représente la constante d'amortissement, la solution a l'une des trois formes (voir Fig. 1.9) :

Si $\lambda > \omega_0$ (frottement fort) \rightarrow régime apériodique

$$x = x_h = A \exp(p_1 t) + B \exp(p_2 t) \quad (1.2.8)$$

$$\text{avec } p_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

Si $\lambda = \omega_0$ (frottement critique) \rightarrow régime critique

$$x = x_h = (A + Bt) \exp(-\lambda t) \quad (1.2.9)$$

Si $\lambda < \omega_0$ (frottement faible) \rightarrow régime pseudo-périodique

$$x = x_h = C \exp(-\lambda t) \cos(\omega t + \varphi) \tag{1.2.8}$$

avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ la pseudo-pulsation

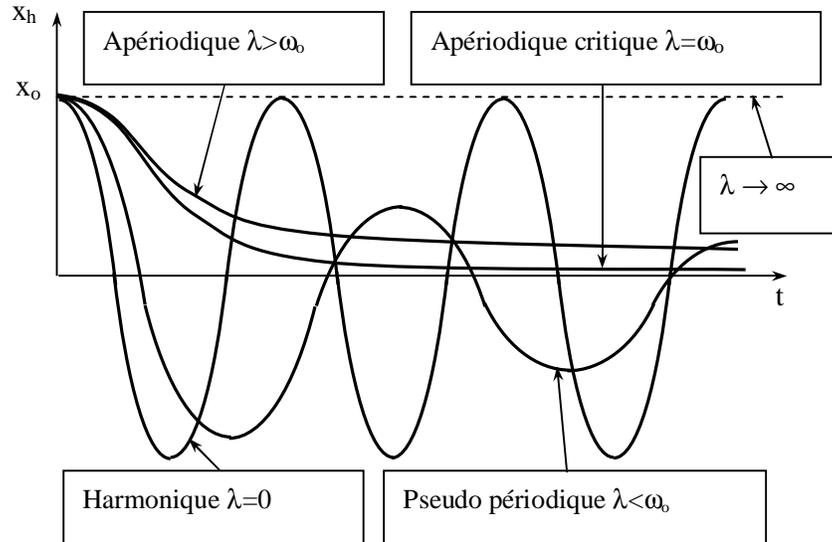


Fig.1.9 Représentation de la solution homogène.

Pour le cas général, l'équation (1.2.3) qui a un second membre admet une solution qui est la superposition d'une solution homogène x_h de l'équation sans second membre (amortie ou non amortie) et d'une solution particulière x_p de l'équation complète. Cette dernière dépend bien évidemment de la forme de l'excitation $F(t)$.

Dans le cas d'une excitation harmonique de pulsation ω_e , x_p est aussi harmonique de pulsation ω_e de la forme $A_e \cos(\omega_e t + \varphi_e)$ où A_e dépend de ω_e et dans la représentation graphique en fonction de celle-ci représente ce que l'on appelle la courbe de résonance. L'allure de cette dernière dépend aussi de l'amplitude de l'excitation qui peut être constante (excitation de déplacement voir Fig.1.10a), en fonction de ω_e (excitation de vitesse voir Fig.1.10b), ou en fonction de ω_e^2 (excitation d'accélération voir Fig.1.10c). Elle peut être aussi une combinaison de ces dernières.

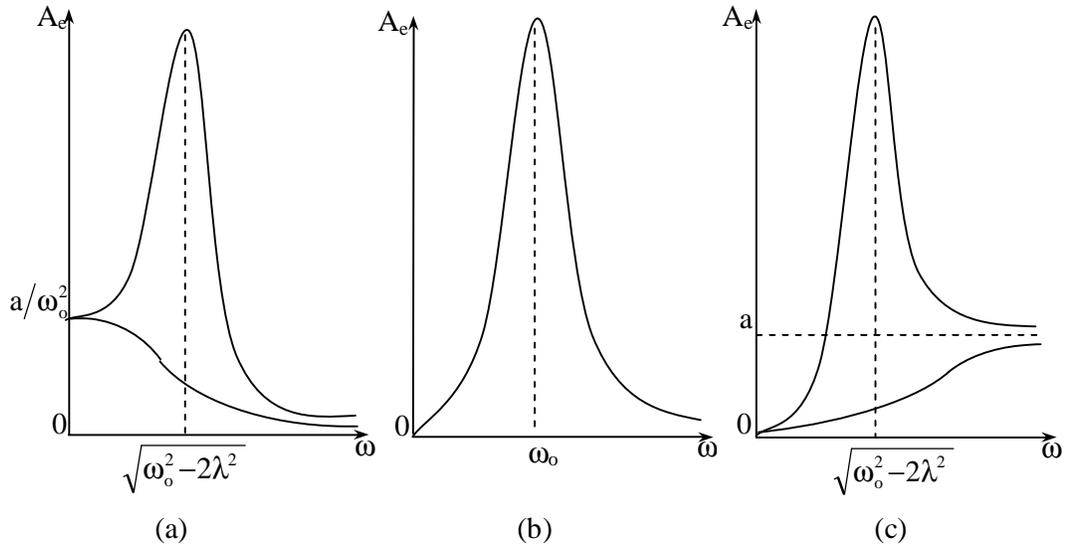


Fig.1.10 Courbe de résonance.

1.2.2 Modèle à plusieurs degrés de liberté

Dans l'étude des systèmes à plusieurs degrés de liberté considérons d'abord un exemple de système à deux degrés de liberté comme celui représenté par la figure 1.11.

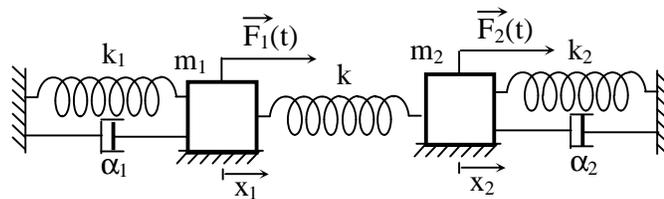


Fig.1.11 Modèle à deux degrés de liberté.

Pour trouver les équations différentielles du mouvement, on procède de la même manière que précédemment. On exprime directement l'équilibre dynamique de toutes les forces associées à chaque sous-système, c'est à dire appliquées sur les masses m_1 et m_2 (voir Fig. 1.12).

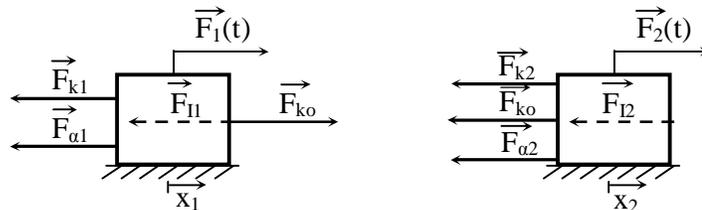


Fig.1.12 Forces appliquées au modèle à deux degrés de liberté.

qui peut s'écrire :

$$[m]\{\ddot{x}\} + [\alpha]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{F(t)\} \quad (1.2.14)$$

où

$$[m] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{est la matrice masse.}$$

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{est la matrice d'amortissement.}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{est la matrice de rigidité.}$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad \text{est le vecteur déplacement.}$$

$$\text{et } \{F(t)\} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \dots \\ F_n(t) \end{Bmatrix} \quad \text{est le vecteur excitation avec } F_i(t) \text{ le chargement appliqué sur le } i^{\text{ème}} \text{ sous-système.}$$

Comme on le voit, la dimension des matrices correspond au nombre de degrés de liberté. Les k_{ij} , α_{ij} et m_{ij} avec $i \neq j$ sont respectivement les coefficients d'influence (couplage) de rigidité, d'amortissement et de masse. On remarque dans l'exemple précédent du système à deux degrés de liberté que seuls les coefficients d'influence de rigidité sont présents car il n'y a que le couplage par élasticité. La solution de l'équation (1.2.14) est de la forme :

$$\{x\} = \{x_h\} + \{x_p\} \quad (1.2.15)$$

où $\{x_h\}$ est la solution homogène de l'équation sans second membre dont la détermination mène à la superposition de n modes de vibration et $\{x_p\}$ est une solution particulière qui

dépend de l'excitation. Si cette dernière est par exemple harmonique, la solution particulière sera harmonique de même fréquence.

1.2.3 Fréquences et modes propres de vibration.

Rechercher les fréquences et modes propres d'un système à plusieurs degrés de liberté revient à étudier les vibrations libres non-amorties. Dans ce cas l'équation (1.2.14) devient :

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\} \quad (1.2.16)$$

Pour trouver la solution de cette équation, on fait l'analogie avec le système à un degré de liberté. On cherche pour chaque sous-système, une solution harmonique de la forme donnée par l'équation (1.2.6) :

$$x_i = A_i \cos \omega t + B_i \sin \omega t \quad (1.2.17)$$

Qui peut s'écrire pour tous les sous-systèmes en même temps, sous la forme matricielle :

$$\{x\} = \{A\} \cos \omega t + \{B\} \sin \omega t \quad (1.2.18)$$

La dérivée seconde par rapport au temps s'écrit :

$$\{\ddot{x}\} = -\{A\}\omega^2 \cos \omega t - \{B\}\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 \{x\} \quad (1.2.19)$$

On reporte ce résultat dans l'équation (1.2.16) pour obtenir :

$$(-\omega^2 [m] + [k])\{x\} = \{0\} \quad (1.2.20)$$

Cette dernière équation représente un système de n équations linéaires à n inconnues. Si le déterminant de la matrice $(-\omega^2 [m] + [k])$ est différent de zéro, on aura la solution triviale $\{x\} = \{0\}$. Dans ce cas le système est au repos et cela ne nous intéresse pas.

Une solution non triviale n'est donc possible que si :

$$\det(-\omega^2 [m] + [k]) = 0 \quad (1.2.21)$$

Cette équation est appelée équation aux pulsations (fréquences) propres du système. Le développement du déterminant nous donne une équation polynomiale de degré n en ω^2 . Les n

solutions $(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2)$ sont les carrés des pulsations des n modes de vibrations possibles. Le mode qui correspond à la pulsation la plus basse est appelé le premier mode, le second correspond à la pulsation suivante, etc.

Ainsi pour chaque sous-système on a la superposition de n modes de vibrations correspondant aux n pulsations. Par exemple pour le i ème sous-système la solution s'écrit :

$$x_{hi} = C_{i1} \cos(\omega_1 t + \varphi_{i1}) + C_{i2} \cos(\omega_2 t + \varphi_{i2}) + \dots + C_{in} \cos(\omega_n t + \varphi_{in}) \quad (1.2.22)$$

1.3 ANALYSE DES SYSTEMES CONTINUS

On a considéré dans les sections précédentes des systèmes discrets, c'est à dire des systèmes dont les éléments de masse, de rigidité et d'amortissement sont distincts. Ce sont des systèmes à paramètres groupés ayant des modes de vibrations allant de un jusqu'à un nombre fini correspondant au nombre de degrés de liberté. L'extension logique est lorsque ce dernier tend vers l'infini. Ce cas correspondant exactement aux systèmes continus qui possèdent, par définition, une infinité de degrés de liberté, donc une infinité de fréquences propres. Ceci est dû au fait que dans ces systèmes, tels que les cordes, les poutres, les membranes et les plaques ; les éléments de masse, de rigidité et d'amortissement sont confondus. Elles font partie du matériau et sont indissociables l'une de l'autre.

Les équations régissant les mouvements des systèmes continus sont des équations aux dérivées partielles qu'on détermine par application des principes de la mécanique des corps déformables. Leurs résolutions permettent, en utilisant les conditions aux limites et initiales, de connaître le comportement naturel du système.

1.3.1 Vibrations de flexion des arbres (poutres)

Comme ce travail porte sur la flexion des arbres, on traite le cas de vibration latérales d'une poutre homogène [13,14,15]. Pour cela on considère une poutre de section constante s dont la ligne moyenne est supposée rectiligne au repos et située dans un certain plan de symétrie xoy de la poutre.

La vibration transversale de celle-ci est donnée par sa flèche $y(x,t)$ par rapport à la position d'équilibre (voir figure 1.13) ; elle est déterminée par l'étude de la déformée dynamique dans le plan xoy .

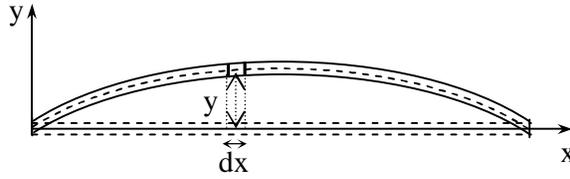


Fig.1.13 Arbre (poutre) en flexion.

Supposons que L est la longueur de la poutre, ρ sa masse volumique, s la section constante, E le module d'élasticité et I son moment d'inertie de section. Désignons respectivement par V et M l'effort tranchant et le moment fléchissant à une distance x de l'origine pour de petites déformations (voir Fig.1.14).

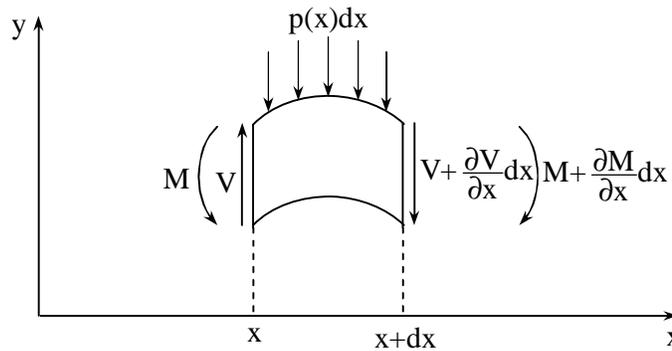


Fig.1.14 Forces et moments à un élément de l'arbre (poutre).

Les lois classiques de la résistance des matériaux donnent les relations :

$$M = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{1.3.1}$$

et

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} = EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \tag{1.3.2}$$

Si $p(x)$ est un chargement distribué, à l'équilibre dynamique le principe fondamentale de Newton donne :

$$-\left(\cancel{V} + \frac{\partial V}{\partial x} dx\right) + \cancel{V} + p(x) dx = \rho s dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{1.3.3}$$

$$\Rightarrow \rho s \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial V}{\partial x} = p(x) \tag{1.3.4}$$

$$\Rightarrow \rho s \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = p(x) \quad (1.3.5)$$

Qui s'écrit en vibrations libres ($p(x)=0$) :

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho s \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1.3.6)$$

Simultanément aux systèmes discrets, on retrouve dans cette équation un terme de rigidité (EI) lié au déplacement et un terme de masse $\rho.s$ lié à l'accélération du corps continu.

1.3.2 Séparation des variables

La solution de l'équation (1.3.6) peut être obtenue en utilisant la technique de séparation des variables. Dans ce cas, on suppose une solution de la forme :

$$y(x, t) = \phi(x)\psi(t) \quad (1.3.7)$$

où $\phi(x)$ est une fonction d'espace désignant l'amplitude des vibrations selon l'axe des x et $\psi(t)$ est une fonction de temps désignant le terme vibratoire.

L'introduction de (1.3.7) dans (1.3.6) donne :

$$EI \frac{d^4 \phi}{dx^4} \psi(t) = -\rho \phi(x) \frac{d^2 \psi(t)}{dt^2} \quad (1.3.8)$$

Ou bien

$$\frac{\psi(t)}{\psi(t)} = -v^2 \frac{\phi^{VI}(x)}{\phi(x)} \quad (1.3.9)$$

avec $v^2 = \frac{EI}{\rho s}$ qui est une constante positive. On remarque que les deux membres de cette

équation ne dépendent pas de la même variable et ainsi ils sont constants. Ceci permet de les écrire sous la forme :

$$v^2 \frac{\phi^{VI}(x)}{\phi(x)} = -\frac{\psi(t)}{\psi(t)} = \omega^2 \quad (1.3.10)$$

ou ω est une constante.

Le choix de la forme $(+\omega^2)$ est fait logiquement pour avoir une forme qui amène à un terme vibratoire analogue au système oscillatoire masse-ressort. C'est à dire :

$$\ddot{\psi}(t) + \omega^2 \psi(t) = 0 \quad (1.3.11)$$

La solution de cette équation est :

$$\psi(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t \quad (1.3.12)$$

Pour l'autre équation :

$$\phi^{VI}(x) - \frac{\omega^2}{v^2} \phi(x) = 0 \quad (1.3.13)$$

On cherche des solutions de la forme $\phi = Ae^{pt}$ que l'on remplace dans l'équation (1.3.13) pour avoir :

$$\left[p^4 - \frac{\omega^2}{v^2} \right] Ae^{pt} = 0 \quad (1.3.14)$$

ou bien $p^4 - \beta^4 = 0 \quad (1.3.15)$

avec $\beta = \sqrt{\frac{\omega}{v}}$

Les racines de cette dernière équation sont :

$$p_1 = \sqrt{\beta} \quad , \quad p_2 = -\sqrt{\beta} \quad , \quad p_3 = j\sqrt{\beta} \quad \text{et} \quad p_4 = -j\sqrt{\beta} \quad \text{où } j^2 = -1$$

La solution de l'équation (1.3.13) s'écrit alors :

$$\phi(x) = A_3 e^{\beta x} + A_4 e^{-\beta x} + A_5 e^{j\beta x} + A_6 e^{-j\beta x} \quad (1.3.16)$$

En posant

$$B_1 = A_3 + A_4, \quad B_2 = A_3 - A_4, \quad B_3 = A_5 + A_6 \quad \text{et} \quad B_4 = j(A_5 - A_6)$$

C'est à dire

$$A_3 = \frac{B_1 + B_2}{2}, \quad A_4 = \frac{B_1 - B_2}{2}, \quad A_5 = \frac{B_3 - jB_4}{2} \quad \text{et} \quad A_6 = \frac{B_3 + jB_4}{2}$$

on obtient :

$$\phi(x) = \frac{B_1}{2} e^{\beta x} + \frac{B_2}{2} e^{-\beta x} + \frac{B_3}{2} e^{j\beta x} - j \frac{B_4}{2} e^{j\beta x} + \frac{B_3}{2} e^{-j\beta x} + j \frac{B_4}{2} e^{-j\beta x} \quad (1.3.17)$$

Qu'on peut écrire :

$$\phi(x) = B_1 \left(\frac{e^{\beta x} + e^{-\beta x}}{2} \right) + B_2 \left(\frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{2} \right) + B_3 \left(\frac{e^{j\beta x} - e^{-j\beta x}}{2} \right) - jB_4 \left(\frac{e^{j\beta x} - e^{-j\beta x}}{2} \right)$$

ou bien

$$\phi(x) = B_1 \operatorname{ch}\beta x + B_2 \operatorname{sh}\beta x + B_3 \cos\beta x + B_4 \sin\beta x \tag{1.3.18}$$

Finalement la solution s'écrit :

$$y(x,t) = (B_1 \operatorname{ch}\beta x + B_2 \operatorname{sh}\beta x + B_3 \cos\beta x + B_4 \sin\beta x) (A_1 \cos\omega t + A_2 \sin\omega t) \tag{1.3.19}$$

Les constantes A_1 et A_2 correspondent au terme temporel (terme vibratoire) et se déterminent en considérant les conditions initiales tandis que les constantes B_1, B_2, B_3 et B_4 correspondent au terme spatial (l'amplitude) et se déterminent en considérant des conditions aux limites qui sont généralement prises aux extrémités de la poutre (arbre).

1.3.3 Conditions aux limites et modes de vibration

Il s'agit d'imposer à l'équation d'amplitude du modèle des conditions qui correspondent à l'effet physique de ses appuis. Les conditions aux limites les plus courantes se situent aux extrémités ($x_0 = 0$ et $x_0 = L$). Elles sont données par (voir Tab.1.1) :

appui simple charnière	extrémité libre	encastrement	appui élastique (ressort)
$y = 0, M = 0$	$M = 0, V = 0$	$Y = 0, \theta = 0$	$M = 0, V = k y$
$\phi(x_0) = 0, \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$ ($x=x_0$)	$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0, \frac{d^3\phi}{dx^3} = 0$ ($x=x_0$)	$\phi(x_0) = 0, \frac{d\phi}{dx} = 0$ ($x=x_0$)	$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0, \frac{d^3\phi}{dx^3} = \frac{\pm k}{EI} \phi(x)$ ($x=x_0$)

Tab.1.1 Conditions aux limites courantes.

L'application de ces conditions permet en effet de déterminer les constantes B_1, B_2, B_3 et B_4 , et les fréquences naturelles auxquelles vont correspondre les différents modes de vibration.

Si l'on considère, par exemple, le cas de la poutre (arbre) sur deux appuis simples où la flèche et le moment fléchissant sont nuls les conditions de continuité nous donnent :

$$B_1 = B_2 = B_3 = 0$$

et
$$B_4 \sin \beta L = 0 \tag{1.3.20}$$

Comme $B_4 = 0$ est la solution triviale (système au repos), on a la condition $\sin \beta L = 0$. Cette dernière, qu'on appelle l'équation des fréquences propres, résulte en des solutions de la forme :

$$\beta_n L = n \pi \tag{1.3.20}$$

D'où les fréquences naturelles :

$$\omega_n = \beta_n^2 v = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho s}} \tag{1.3.21}$$

A celles-ci correspondent, évidemment des modes normaux dont les amplitudes sont définies par les fonctions normales :

$$\phi_n(x) = B_{4n} \sin \beta_n x \tag{1.3.22}$$

La solution générale sera donc la superposition de tous les modes, soit :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) (A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t) \tag{1.3.23}$$

Pour ce cas d'appuis simples, la représentation des premiers modes de vibration est donnée sur la figure 1.15.

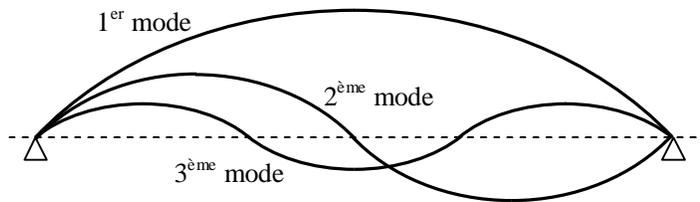


Fig.1.15 Premiers modes de vibration.

La même procédure se fait pour trouver les fréquences naturelles et l'équation d'amplitude pour les différents genres de conditions aux limites. Pour les cas classiques, les différentes valeurs et expressions sont données ci-dessous (voir Tab. 1.2).

Conditions aux limites	Equation des fréquences	$\phi_n(x)$	α_n	$\beta_n L$
Simple simple	$\sin\beta_n L=0$	$B_{4n} [\sin\beta_n x]$	-----	$\beta_1 L=\pi$ $\beta_2 L=2\pi$ $\beta_3 L=3\pi$ $\beta_4 L=4\pi$
Encastré libre	$\cos\beta_n L.ch\beta_n L=-1$	$B_{4n} [\sin\beta_n x - sh\beta_n x - \alpha_n (\cos\beta_n x - ch\beta_n x)]$	$\frac{\sin\beta_n L + sh\beta_n L}{\cos\beta_n L + ch\beta_n L}$	$\beta_1 L= 1.875104$ $\beta_2 L= 4.694091$ $\beta_3 L= 7.854757$ $\beta_4 L=10.995541$
Encastré encastré	$\cos\beta_n L.ch\beta_n L = 1$	$B_{4n} [sh\beta_n x - \sin\beta_n x - \alpha_n (ch\beta_n x - \cos\beta_n x)]$	$\frac{sh\beta_n L - \sin\beta_n L}{\cos\beta_n L - ch\beta_n L}$	$\beta_1 L= 4.730041$ $\beta_2 L= 7.853205$ $\beta_3 L=10.995608$ $\beta_4 L=14.137165$
Encastré simple	$tg\beta_n L - th\beta_n L = 0$	$B_{4n} [\sin\beta_n x - sh\beta_n x - \alpha_n (\cos\beta_n x - ch\beta_n x)]$	$\frac{\sin\beta_n L - sh\beta_n L}{\cos\beta_n L - ch\beta_n L}$	$\beta_1 L= 3.926602$ $\beta_2 L= 7.068583$ $\beta_3 L=10.210176$ $\beta_4 L=13.351768$
Libre libre	$\cos\beta_n L.ch\beta_n L = 1$	$B_{4n} [\sin\beta_n x + sh\beta_n x + \alpha_n (\cos\beta_n x + ch\beta_n x)]$	$\frac{\sin\beta_n L - sh\beta_n L}{ch\beta_n L - \cos\beta_n L}$	$\beta_1 L= 4.730041$ $\beta_2 L= 7.853205$ $\beta_3 L=10.995608$ $\beta_4 L=14.137165$
Simple libre	$tg\beta_n L - th\beta_n L = 0$	$B_{4n} [\sin\beta_n x + \alpha_n sh\beta_n x]$	$\frac{\sin\beta_n L}{sh\beta_n L}$	$\beta_1 L= 3.926602$ $\beta_2 L= 7.068583$ $\beta_3 L=10.210176$ $\beta_4 L=13.351768$

Tab.1.2 Fonctions de forme.

CONCEPTS DE LA DYNAMIQUE DES ARBRES ET ROTORS EN FLEXION

Les problèmes vibratoires associés aux systèmes tournants tels que les arbres et les rotors constituent des enjeux majeurs dans le domaine technologique. Leur fine compréhension aide au mieux de dimensionner et d'optimiser de tels systèmes. La dynamique des rotors vient de ce se fait pour comprendre et prédire précisément leur comportement vibratoire. Par exemple l'un des points essentiels réside dans la prédiction et le placement juste des premières vitesses critiques. En effet, celles-ci sont en fonction des caractéristiques des systèmes tournants et leur détermination est parmi les éléments primordiaux lors du dimensionnement [16,17].

2.1 LE PHENOMENE DU TOURNOIEMENT (WHIRLING)

2.1.1 Origine du tournoiement

Quand un arbre tourne, il tend à certaines vitesses, à fléchir et vibrer avec des oscillations transversales qui le font tourbillonner autour de son axe d'équilibre statique. Ce phénomène est appelé "whirling", un mot anglais introduit par Rankine en 1869 dans la dynamique des rotors et qui veut dire tournoiement [4]. L'arbre aura donc un mouvement de rotation autour de lui même qui est le mouvement de spin et un autre mouvement de rotation du au whirling autour de sa position d'équilibre qui sera le mouvement orbital.

Le whirling résulte de plusieurs causes telles que les balourds, les forces gyroscopiques, l'amortissement d'hystérésis, les paliers, les frottements d'huiles dans les paliers, les raideurs non-symétriques, etc. Il devient très dangereux quand l'amplitude des oscillations sera grande. Un fait qui se produit quand la fréquence de rotation de l'arbre coïncide ou voisine sa fréquence naturelle d'oscillations.

Pour voir cela, considérons un arbre sans masse avec une masse m collée en son milieu et qui soit distante de e de son axe géométrique. Quand l'arbre tourne, une force centrifuge radiale due à la masse m le fait fléchir. Si la flèche au milieu de l'arbre est r , la distance du centre de gravité où se trouve la masse m de l'axe géométrique d'équilibre est alors $r + e$ en supposons que cette dernière soit dans le plan de déflexion ou le plan tournant (voir fig. 2.1).

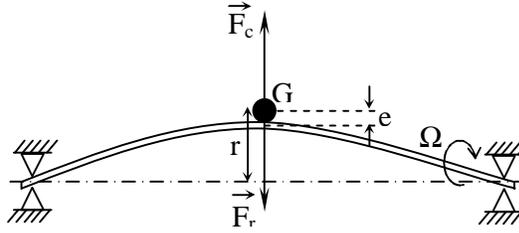


Fig. 2.1 Arbre tournant avec une masse collée en son milieu.

Supposons aussi que la vitesse de rotation de l'arbre soit Ω et que sa raideur transversale soit k . La force de rappel due à la déflexion est donc:

$$F_r = k r \quad (2.1.1)$$

et la force centrifuge est:

$$F_c = m \Omega^2 (r + e) \quad (2.1.2)$$

En égalisons les deux forces on obtient:

$$r = \frac{m \Omega^2 e}{k - m \Omega^2} \quad (2.1.3)$$

2.1.2 La vitesse critique et l'auto-centrage

Sachant que la fréquence naturelle d'oscillations est donnée par $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$ (équivalence avec le système masse-ressort) la relation (2.1.3) devient :

$$r = \frac{\Omega^2 e}{\omega_n^2 - \Omega^2} \quad (2.1.4)$$

A partir de cette relation qui montre que la valeur de la flèche r dépend de la vitesse de rotation Ω (voir Fig. 2.2).

On a les constatations suivantes:

* Si $\Omega = \omega_n$, la valeur de r devient infini. On a un phénomène de résonance et ω_n représente donc une valeur critique. C'est le régime critique.

* Si $W < w_n$, r et e ont le même signe. Le centre de gravité se trouve à l'extérieur du plan formé par l'axe de l'arbre en flexion et son axe à l'équilibre comme il est montré sur la figure 2.2. C'est le régime sous-critique.

* Si $W > w_n$, r et e ont des signes opposés. Le centre de gravité G se trouve entre les axes de l'arbre en flexion et à l'équilibre. Il a ainsi tourné de 180° de sa position d'équilibre. C'est le régime super critique.

* Si $W \gg w_n$, r tend vers $-e$ et l'arbre va tourner autour du centre de gravité avec une parfaite stabilité. On a ce qu'on appelle l'auto-centrage, c'est le régime hyperstatique.

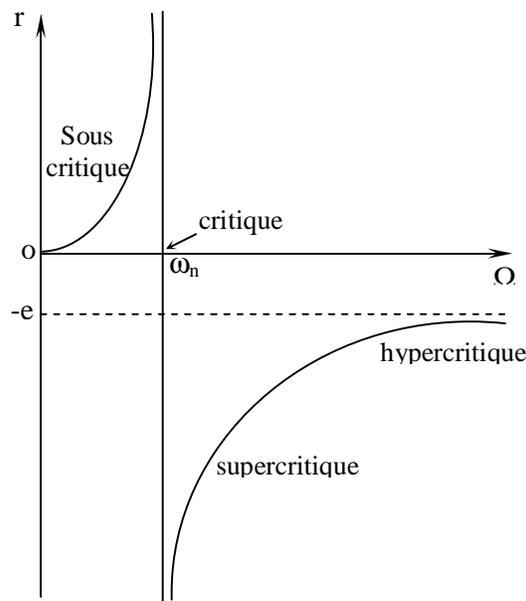


Fig. 2.2 Représentation de la flèche en fonction de la vitesse de rotation.

Si l'arbre contient n masses disposées en des endroits différents nous avons pour chaque

masse $\omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}}$ et la fréquence critique est donnée par l'équation de Dunkerley:

$$\frac{1}{\omega_{cr}^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i^2} \tag{2.1.5}$$

Mais cette dernière sous estime la vitesse critique car elle ne tient pas compte de l'effet d'une masse sur la flèche de l'autre.

2.2 LE MODELE DE LAVAL/ JEFFCOTT.

2.2.1 Présentation du modèle

Le modèle de base ou élémentaire utilisé dans l'introduction à la compréhension du comportement dynamique vibratoire des arbres et rotors est le modèle connu sous le nom de "rotor de Jeffcott" à propos duquel ce dernier avait publié une étude en 1919 [8]. Certains pays européens préfèrent utiliser le nom de "rotor de Laval" en hommage et par souci d'antériorité à l'utilisation du modèle dont Jeffcott n'était peut-être pas au courant. Pour la même raison, la nomination de "rotor de Foppl" est aussi utilisée mais cette dernière n'est pas très connue.

Le modèle (voir Fig. 2.3) est essentiellement constitué de:

- Un disque indéformable de masse m et ayant une excentricité e . C'est à dire que son centre de masse et son centre géométrique ne sont pas confondus.
- Un arbre de masse faible et de raideur en flexion k_a .

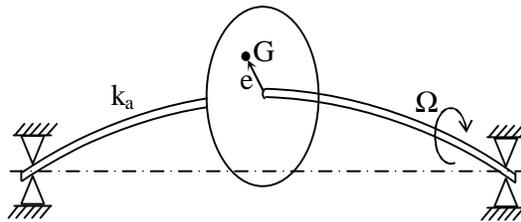


Fig. 2.3 Modèle de Laval / Jeffcott.

2.2.2 Analyse sans amortissements

Considérons le cas le plus simple dans lequel on étudie les vibrations de flexion latérales du modèle symétrique de Laval/Jeffcott non amorti ou la vitesse de rotation est constante, et la pesanteur et l'effet gyroscopique sont négligés.

Quand le système est en rotation on a un phénomène de tournoiement (whirling) qui fait que les centres géométrique et de gravité du disque vont osciller dans un plan perpendiculaire à l'équilibre du système. Ils auront donc deux degrés de liberté qu'on suppose selon les axes ox et oz d'un repère $oxyz$ (voir fig. 2.4).

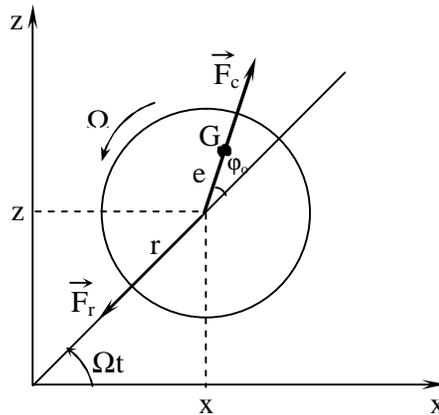


Fig. 2.4 Mouvement du centre de gravité du rotor.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au centre du disque est donnée par:

$$\vec{F}_r + \vec{F}_c = m\vec{\gamma} \tag{2.2.1}$$

Avec la force centrifuge, en module $F_r = m\Omega^2 e$, les projections sur les axes ox et oz donnent :

$$\begin{cases} -k_a x + m\Omega^2 e \cos(\Omega t + \varphi_0) = m\ddot{x} \\ -k_a z + m\Omega^2 e \sin(\Omega t + \varphi_0) = m\ddot{z} \end{cases} \tag{2.2.2}$$

ou

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{k_a}{m} x = e\Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi_0) \\ \ddot{z} + \frac{k_a}{m} z = e\Omega^2 \sin(\Omega t + \varphi_0) \end{cases} \tag{2.2.3}$$

On a deux équations découplées non homogènes dont les solutions doivent être la superposition de solutions homogènes et particulières soient : $x = x_h + x_p$ et $z = z_h + z_p$.

Avec

$$\begin{cases} x_h = A \cos(\omega_n t + \varphi) \\ z_h = B \cos(\omega_n t + \psi) \end{cases} \tag{2.2.4}$$

où $\omega_n = \sqrt{\frac{k_a}{m}}$ la fréquence naturelle ou propre

et

$$\begin{cases} x_p = A_e \cos(\Omega t + \varphi_e) \\ z_p = B_e \sin(\Omega t + \psi_e) \end{cases} \quad (2.2.5)$$

Les solutions homogènes x_h et z_h des équations sans seconds membres représentent deux mouvements harmoniques simples qui s'effectuent selon deux directions orthogonales ox et oz . Leur composition donne un mouvement plan dont la forme de la trajectoire dépend des constantes A , B , φ et ψ qui se déterminent en considérant les conditions initiales. Selon Lissajous on a les cas suivants (voir chapitre1) :

- * Si $\varphi - \psi = 0$, la courbe est un segment de droite de pente positive.
- * Si $\varphi - \psi = \pi$, la courbe est un segment de droite de pente négative.
- * Si $\varphi - \psi = \pi/2$ et $A = B$, la courbe est un cercle tournant de z vers x .
- * Si $\varphi - \psi = -\pi/2$ et $A = B$, la courbe est un cercle tournant de x vers z .
- * $\varphi - \psi < 0$ la courbe est une ellipse tournante de z vers x .
- * $\varphi - \psi > 0$ la courbe est une ellipse tournante de x vers z .

D'autre part les constantes A_e , φ_e , B_e et ψ_e des solutions particulières se déterminent en sachant que ces dernières vérifient leurs équations correspondantes avec seconds membres. Leurs expressions sont donc :

$$A_e = B_e = \frac{e\Omega^2}{-\Omega^2 + \omega_n^2} \quad \text{et} \quad \varphi_e = \psi_e = \varphi_0 \quad \text{si} \quad \omega < \omega_n \quad (2.2.6)$$

ou bien

$$A_e = B_e = \frac{-e\Omega^2}{-\Omega^2 + \omega_n^2} \quad \text{et} \quad \varphi_e = \psi_e = \varphi_0 + \pi \quad \text{si} \quad \omega > \omega_n \quad (2.2.7)$$

Et les solution particulières sont dans les deux cas égales à :

$$x_p = \frac{e\Omega^2}{-\Omega^2 + \omega_n^2} \cos(\Omega t + \varphi_0) \quad (2.2.8)$$

et

$$z_p = \frac{e\Omega^2}{-\Omega^2 + \omega_n^2} \sin(\Omega t + \varphi_0) \quad (2.2.9)$$

Celles-ci représentent deux mouvements harmoniques simples ayant la même amplitude et déphasés d'un angle de $\frac{\pi}{2}$. Leur composition donne d'après Lissajous une trajectoire circulaire de rayon $e\Omega^2/(-\Omega^2 + \omega_n^2)$.

Cependant on remarque que cette dernière relation est la même que la relation (2.1.4). Une chose évidente puisque c'est le même phénomène physique du whirling sauf qu'ici il s'effectue en deux directions perpendiculaires. Le mouvement résultant est ainsi la superposition de deux trajectoires dont la première est la composition des solutions homogènes (ellipse, cercle ou segment de droite) et la deuxième est la composition des solutions particulières (cercle).

Les mêmes constatations peuvent être faites sur l'amplitude de cette solution particulière qui est le rayon de la trajectoire circulaire. Pour mieux les expliquer on considère la projection de l'excentricité e sur le prolongement de r qui est égal à $e \cos \varphi_0$. On a alors (voir Fig. 2.5) :

* Si $\Omega < \omega_n$ (régime sous critique), $\frac{r}{e} < 0$ et ainsi $\varphi_0 < \frac{\pi}{2}$.

Le centre de gravité se trouve extérieur au centre géométrique.

* Si $\Omega > \omega_n$ (régime super critique), $\frac{r}{e} < 0$ et ainsi $\varphi_0 > \frac{\pi}{2}$.

Le centre de gravité intérieur au centre géométrique.

* Si $\Omega = \omega_n$ (régime critique), on a la valeur intermédiaire au cas précédents d'où $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Mais théoriquement si $r \rightarrow \infty$, e sera négligeable.

* Si $\Omega \rightarrow \infty$, (régime hypercritique), $\frac{r}{e} \rightarrow -1$ d'où $\varphi_0 \rightarrow -\pi$.

On a dans ce cas l'auto centrage.

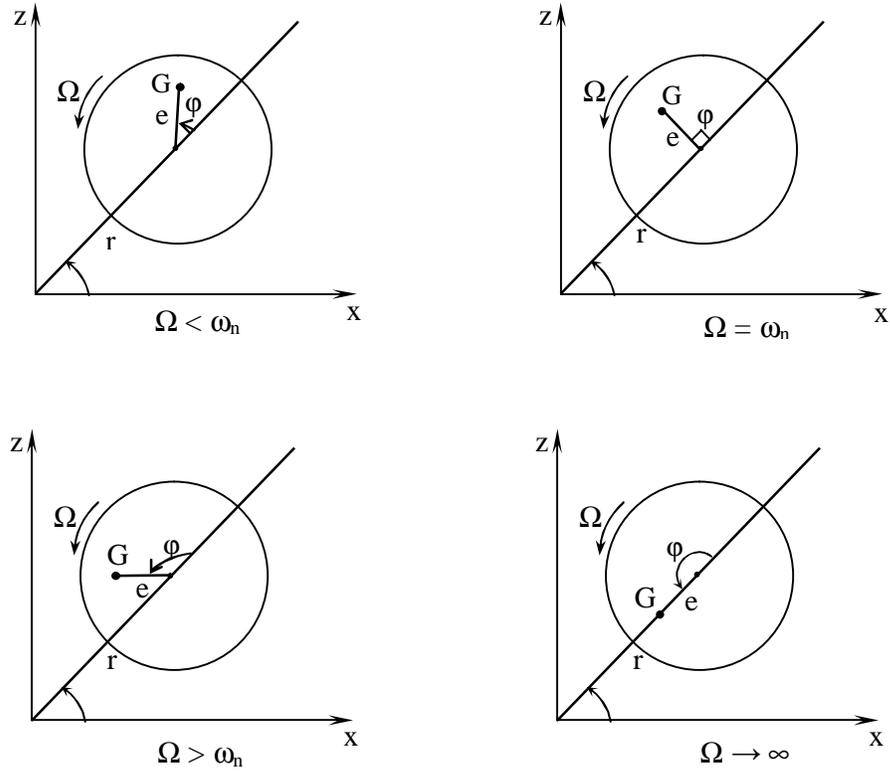


Fig. 2.5 Position du centre de gravité selon la valeur de la vitesse de rotation.

2.3 MODELE AVEC PALIERS FLEXIBLES : CAS ISOTROPIQUE

Prenons maintenant le modèle simple de Laval Jeffcott sur deux supports flexibles identiques et considérons le cas où ces deux dernières soient isotropiques, c'est à dire que leurs caractéristiques (raideurs et viscosités) sont les mêmes dans les deux directions ox et oz (voir Fig. 2.6).

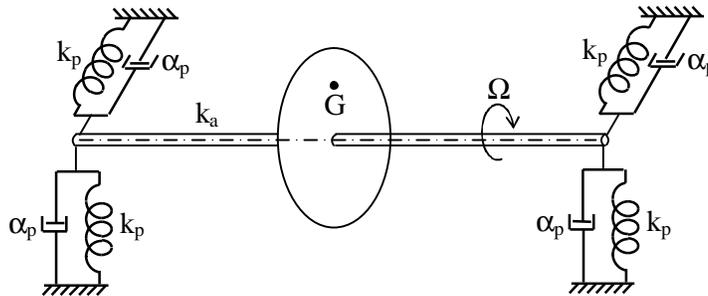


Fig. 2.6 Modèle de Laval / Jeffcott sur paliers flexibles.

Pour l'étude du mouvement dans chacune des deux directions nous pouvons représenter le modèle par le système masse- ressort- amortisseur (voir Fig. 2.7)

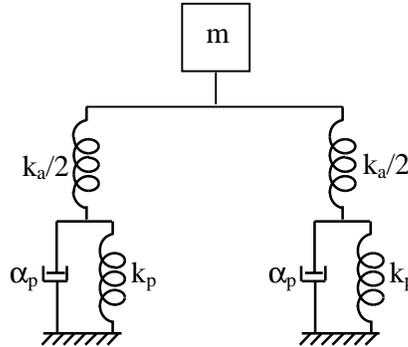


Fig. 2.7 Schéma équivalent du modèle de Laval / Jeffcott sur paliers flexibles.

Les raideurs et les coefficients d'amortissements seront donc pour les deux directions:

$$k = k_x = k_z = \frac{2k_a k_p}{2k_a + k_p} \tag{2.3.1}$$

et $\alpha = \alpha_x = \alpha_z = 2 \alpha_p \tag{2.3.2}$

Les équations différentielles régissant le mouvement du système, s'écrivent alors :

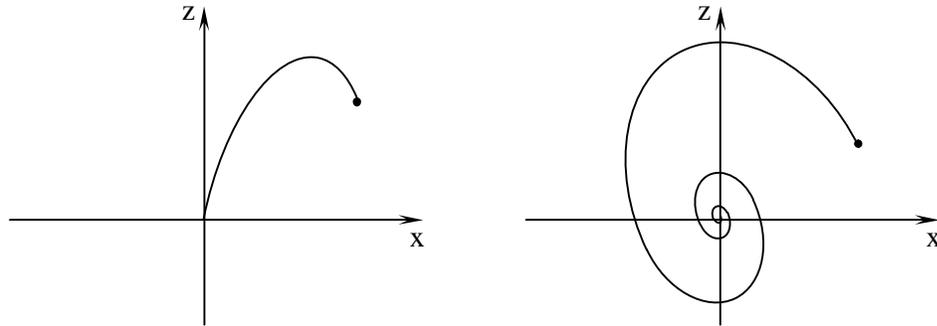
$$\begin{cases} -kx - \alpha \dot{x} + m e \Omega^2 \cos \Omega t = m \ddot{x} \\ -kz - \alpha \dot{z} + m e \Omega^2 \sin \Omega t = m \ddot{z} \end{cases} \tag{2.3.3}$$

ou
$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = e \Omega^2 \cos \omega_e t \\ \ddot{z} + \frac{\alpha}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = e \Omega^2 \sin \omega_e t \end{cases} \tag{2.3.4}$$

Ceux sont donc deux équations découplées non homogènes dont les solutions vont être la superposition de solutions homogènes $x = x_h + x_p$ et particulières $z = z_h + z_p$. Pour les solutions homogènes on considère les solutions des équations sans seconds membres. Si les frottements sont négligés les résultats sont exactement les mêmes que ceux du paragraphe précédant (équation 2.2.4) en remplaçant seulement k_a par k . Par contre si l'amortissement est considéré, les solutions homogènes vont dépendre de la valeur de celui-ci. Nous avons trois cas possibles

pour les deux directions ox et oz , et qui sont les régimes apériodiques, apériodiques critiques ou pseudo périodiques (voir chapitre 1).

Ces derniers sont exponentiellement amortis (solutions transitoires) et leur composition donne un mouvement plan amorti, c'est-à-dire allant vers l'origine. L'allure est donnée pour les cas apériodique / apériodique ou apériodique critique / apériodique critique sur la figure 2.8a et pseudo périodique / pseudo périodique sur la figure 2.8b.



(a) Apériodique / apériodique.

(b) Pseudo périodique / pseudo périodique.

Fig. 2.8 Représentation du régime transitoire.

En ce qui concerne les solutions particulières, elles ont la même forme que l'excitation. C'est à dire elles sont harmoniques de la forme donnée par (2.2.5) mais avec les constantes A_e , φ_e , B_e et ψ_e données par :

$$A_e = B_e = \frac{e\Omega^2}{\sqrt{(-\Omega^2 + \omega_n^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}} \quad (2.3.4)$$

et
$$\varphi_e = \psi_e = -\arctg\left(\frac{2\lambda\Omega}{-\Omega^2 + \omega_n^2}\right) \quad (2.3.4)$$

où
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{\alpha}{2m}$$

Leur composition est, d'après Lissajous, une trajectoire circulaire dont le rayon est égal à A_e (ou B_e) et qui dépend de la fréquence d'excitation Ω avec l'allure donnée par la figure 2.9 où les mêmes constatations du cas sans paliers sont faites.

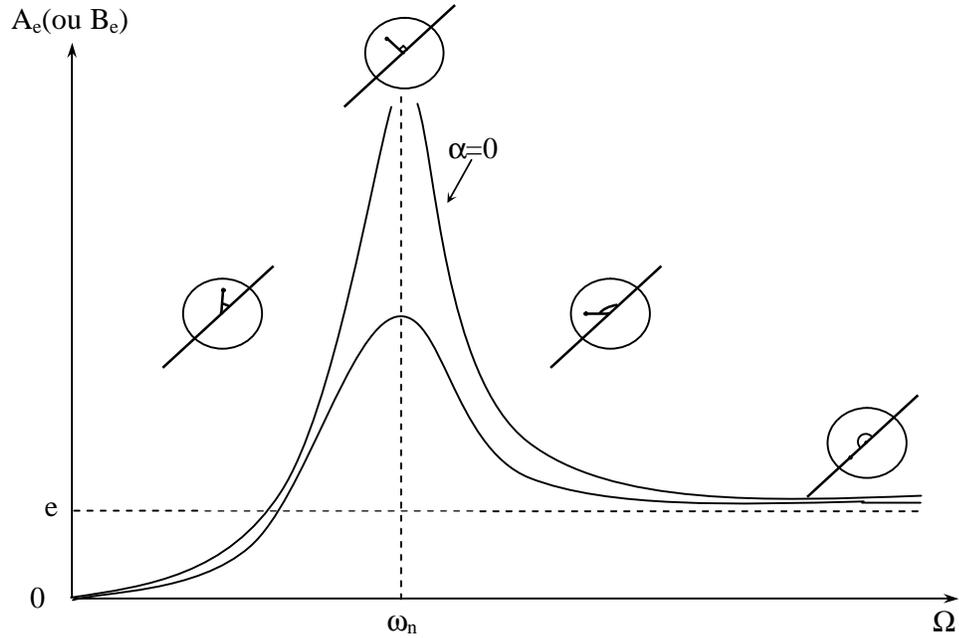


Fig. 2.9 Amplitude du régime permanent (courbe de résonance).

2.4 MODELE AVEC PALIERS FLEXIBLES : CAS ANISOTROPIQUE

Si les caractéristiques (raideurs et viscosités) des paliers ne sont pas les mêmes suivant les deux directions ox et oz , on dit qu'ils sont anisotropiques.

Supposons qu'elles soient égales à k_x et α_x suivant ox et à k_z et α_z suivant oz . Dans ce cas les équations différentielles régissant le mouvement du système se réécrivent :

$$\begin{cases} -k_x x - \alpha_x \dot{x} + m e \Omega^2 \cos \Omega t = m \ddot{x} \\ -k_z z - \alpha_z \dot{z} + m e \Omega^2 \sin \Omega t = m \ddot{z} \end{cases} \quad (2.4.1)$$

ou

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{\alpha_x}{m} \dot{x} + \frac{k_x}{m} x = e \Omega^2 \cos \omega_e t \\ \ddot{z} + \frac{\alpha_z}{m} \dot{z} + \frac{k_z}{m} z = e \Omega^2 \sin \omega_e t \end{cases} \quad (2.4.2)$$

On a deux équations découplées non homogènes dont les paramètres ne sont pas les mêmes. Leurs solutions vont bien évidemment être la superposition de solutions homogènes $x = x_h + x_p$ et particulières $z = z_h + z_p$.

Pour les solutions homogènes des équations sans seconds membres, on a la superposition de deux mouvements qui s'effectuent dans des directions perpendiculaires mais avec des

fréquences différentes d'où il y a plusieurs possibilités. Lorsque les frottements sont négligés et les fréquences sont multiples (rapport de deux entiers naturels) on a l'une des représentations de Lissajous (voir chapitre1). Si elles sont quelconques on a des courbes planes qui ne se renferment pas (voir aussi chapitre1). Par contre en présence d'amortissement, on a la superposition de deux mouvements amortis (transitoires) qui tendent vers 0. Un cas similaire au cas du paragraphe précédant. D'autres parts les solutions particulières suivent l'excitation qui est harmonique. Elles ont la forme donnée par (2.2.4) mais avec les constantes A_e , φ_e , B_e et ψ_e égales à :

$$A_e = \frac{e\Omega^2}{\sqrt{(-\Omega^2 + \omega_{nx}^2)^2 + 4\lambda_x^2\Omega^2}} \quad (2.4.3)$$

$$B_e = \frac{e\Omega^2}{\sqrt{(-\Omega^2 + \omega_{nz}^2)^2 + 4\lambda_z^2\Omega^2}} \quad (2.4.4)$$

$$\varphi_e = -\arctg\left(\frac{2\lambda_x\Omega}{-\Omega^2 + \omega_{nx}^2}\right) \quad (2.4.5)$$

et
$$\psi_e = -\arctg\left(\frac{2\lambda_z\Omega}{-\Omega^2 + \omega_{nz}^2}\right) \quad (2.4.6)$$

où $\omega_{nx} = \sqrt{\frac{k_x}{m}}$, $\lambda_x = \frac{\alpha_x}{2m}$, $\omega_{nz} = \sqrt{\frac{k_z}{m}}$, et $\lambda_z = \frac{\alpha_z}{2m}$.

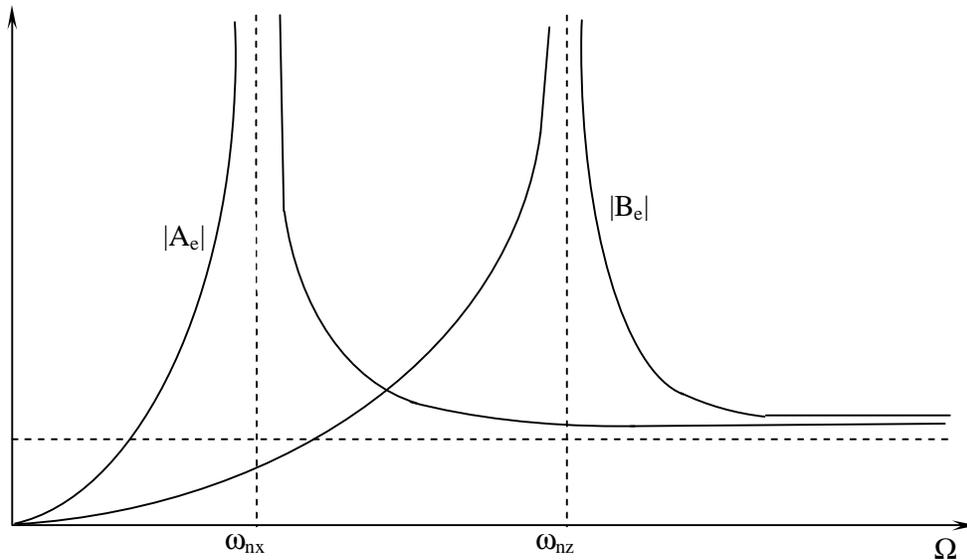


Fig. 2.10 Amplitudes du régime permanent (courbes de résonance).

ANALYSE D'UN MODELE DE ROTOR EN FLEXION

En général, dans toute étude de systèmes physiques il est nécessaire de faire une représentation en terme d'expressions mathématiques qui fournissent une compréhension des phénomènes. Pour les systèmes dynamiques, le développement des équations du mouvement permet de prévoir leurs comportements. L'analyse peut être faite par des méthodes newtoniennes ou énergétiques. En ce qui concerne la dynamique des rotors la méthode énergétique de Lagrange et la méthode de Rayleigh Ritz sont des approches très populaires pour l'étude des vibrations [2, 3,].

3.1 CARACTERISTIQUES ENERGETIQUES DES ELEMENTS DU ROTOR

Un rotor est, d'une manière générale, constitué d'un arbre reposant sur des paliers et comportant un ou plusieurs disques. Il peut aussi avoir des sollicitations comme le balourd ou autres forces extérieures. Les équations du mouvement sont obtenues à partir des énergies cinétiques et de déformation des composants du rotor et de l'application de l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial u}{\partial q_i} = F_i \quad (3.1.1)$$

3.1.1 Le disque rigide

Le disque est habituellement considéré rigide et donc caractérisé par son énergie cinétique seulement. Pour déterminer cette dernière ses vecteurs vitesse et rotation doivent être calculés. On prend pour le vecteur rotation un repère galiléen $R(x,y,z)$ lié au rotor indéformé et un autre repère mobile $R'(x',y',z')$ lié au disque.

Le système de coordonnées $x'y'z'$ peut être relié au système de coordonnées xyz par l'intermédiaire des angles d'Euler (voir Fig. 3.1).

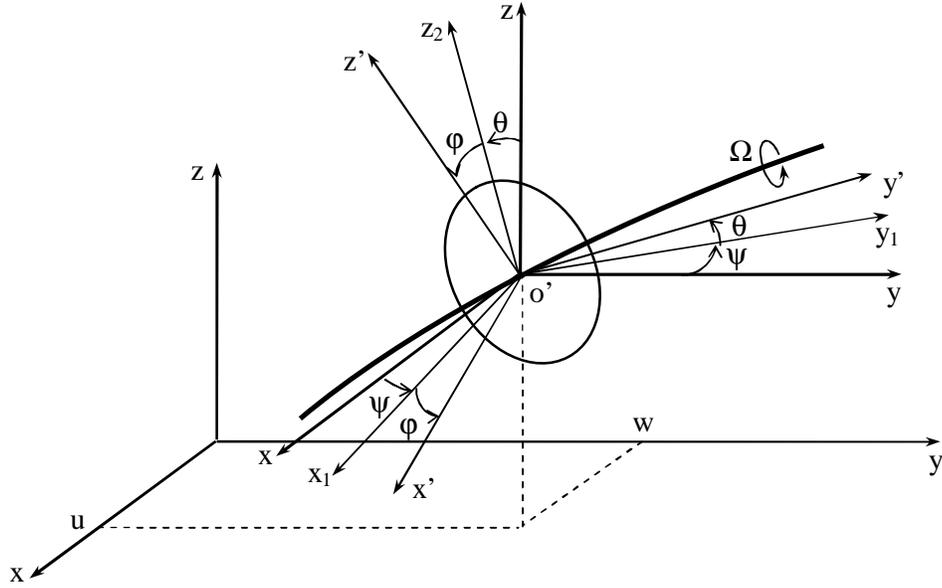


Fig. 3.1 Repère de référence du disque sur l'arbre flexible.

Ainsi pour déterminer l'orientation du disque on effectue les rotations successives suivantes:

* La précession ψ

Rotation autour de l'axe $o'z$ qui fait passer de $o'xyz$ à $o'x_1y_1z$ (voir fig3.2a).

* La nutation θ

Rotation autour l'axe $o'x_1$ qui fait passer de $o'x_1y_1z$ à $o'x_1y'z_2$ (voir fig3.2b).

* La rotation propre j

Rotation autour de l'axe $o'y'$ qui fait passer de $o'x_1y'z_2$ à $o'x'y'z'$ (voir Fig. 3.2c).

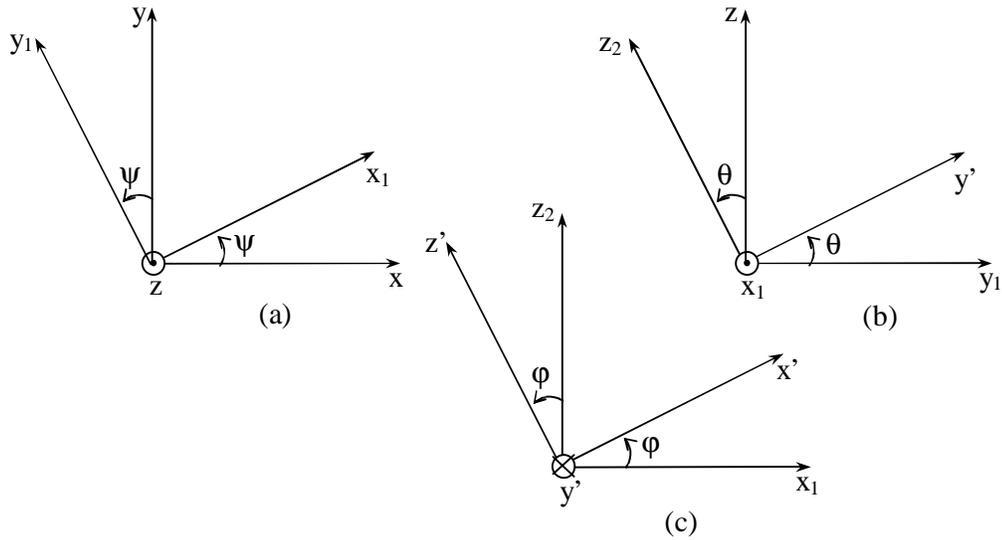


Fig. 3.2 Angles d'Euler.

Compte tenu des angles d'Euler, le vecteur de rotation du disque s'écrit :

$$\mathbf{\dot{\omega}} = \psi \mathbf{\dot{z}} + \theta \mathbf{\dot{x}}_1 + \phi \mathbf{\dot{y}}' \quad (3.1.2)$$

où $\mathbf{\dot{z}}$, $\mathbf{\dot{x}}_1$ et $\mathbf{\dot{y}}'$ sont les vecteurs unitaire des axes (o'z), (o'x₁) et (o'y').

Ce dernier doit être exprimé dans le repère d'inertie fixé au disque. Pour cela on détermine les expressions des vecteurs unitaires z et x₁ en fonction des vecteurs unitaires du repère o'x'y'z' à l'aide des représentations donnés sur la figure 3.2. Par projection on a :

$$\mathbf{\dot{x}}_1 = \cos\phi \mathbf{\dot{x}}' - \sin\phi \mathbf{\dot{z}}' \quad (3.1.3)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{\dot{z}} &= \sin\theta \mathbf{\dot{y}}' + \cos\theta \mathbf{\dot{z}}_2 = \sin\theta \mathbf{\dot{y}}' + \cos\theta (\sin\phi \mathbf{\dot{x}}' + \cos\phi \mathbf{\dot{z}}') \\ &= \cos\theta \sin\phi \mathbf{\dot{x}}' + \sin\theta \mathbf{\dot{y}}' + \cos\theta \cos\phi \mathbf{\dot{z}}' \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

qui donnent :

$$\mathbf{\dot{\omega}} = \begin{pmatrix} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \cos\theta \sin\phi + \theta \cos\phi \\ \theta - \psi \sin\theta \\ \psi \cos\theta \cos\phi - \theta \sin\phi \end{pmatrix} \quad (3.1.5)$$

D'une part on a le disque qui tourne avec le rotor autour de son axe principal à la vitesse constante Ω d'où $\psi = \Omega$, et d'autre part les angles ψ et θ sont petits d'où l'on peut faire les approximations $\cos\theta \approx 1$ et $\sin\theta \approx \theta$. Dans ce cas la vitesse de rotation devient :

$$\mathbf{\dot{\omega}} = \begin{pmatrix} \psi \sin\phi + \theta \cos\phi \\ \Omega - \psi \theta \\ \psi \cos\phi - \theta \sin\phi \end{pmatrix} \quad (3.1.6)$$

L'énergie cinétique de rotation du disque autour du centre de masse est donnée par :

$$\begin{aligned} T_d^{\text{rot}} &= \frac{1}{2} I_{dx'} \omega_{x'}^2 + \frac{1}{2} I_{dy'} \omega_{y'}^2 + \frac{1}{2} I_{dz'} \omega_{z'}^2 \\ &= \frac{1}{2} I_{dx'} (\psi \sin\phi + \theta \cos\phi)^2 + \frac{1}{2} I_{dy'} (\Omega - \psi \theta)^2 + \frac{1}{2} I_{dz'} (\psi \cos\phi - \theta \sin\phi)^2 \\ &= \frac{1}{2} I_{dx'} (\psi^2 \sin^2\phi + \theta^2 \cos^2\phi + 2\psi\theta \cos\phi \sin\phi) + \frac{1}{2} I_{dy'} (\Omega^2 + \psi^2 \theta^2 - 2\psi\theta) \\ &\quad + \frac{1}{2} I_{dz'} (\psi^2 \cos^2\phi + \theta^2 \sin^2\phi - 2\psi\theta \cos\phi \sin\phi) \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

où $I_{dx'}$, $I_{dy'}$, $I_{dz'}$ représentent les moments d'inertie du disque par rapport à ses axes principaux d'inertie. Comme le disque est symétrique on a $I_{dx'} = I_{dz'}$, et le terme $\psi^2 \theta^2$ qui est d'un ordre élevé peut être négligé. L'expression de l'énergie cinétique de rotation du disque sera donc :

$$T_d^{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_{dx'} (\psi^2 + \theta^2) + \frac{1}{2} I_{dy'} (\Omega^2 - 2\psi\theta) \quad (3.1.8)$$

Pour le vecteur vitesse, on considère les coordonnées u et w du centre du disque o' suivant les axes ox et oz du repère fixe R avec la coordonnée suivant oy qui est bien évidemment constante. Avec sa masse égale à m_d , le disque a son énergie cinétique de translation donnée par :

$$T_d^{\text{trans}} = \frac{1}{2} m_d (u^2 + w^2) \quad (3.1.9)$$

L'énergie cinétique totale du disque est finalement égale à :

$$T_d = T_d^{\text{trans}} + T_d^{\text{rot}} = \frac{1}{2} m_d (u^2 + w^2) + \frac{1}{2} I_{dx'} (\psi^2 + \theta^2) + \frac{1}{2} I_{dy'} (\Omega^2 - 2\psi\theta) \quad (3.1.10)$$

Pour identifier le disque, on peut adopter la géométrie illustrée par la figure 3.3.

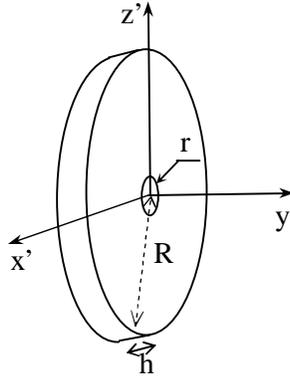


Fig. 3.3 Modèle du disque.

Si sa densité volumique est ρ_d , son rayon extérieur R son rayon intérieur r et son épaisseur h sa masse m_d sera donnée par :

$$m_d = \pi(R^2 - r^2) h \rho_d \quad (3.1.11)$$

et son tenseur d'inertie sera donné par :

$$I_d = \begin{pmatrix} I_{dx'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{dy'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{dz'} \end{pmatrix} \quad (3.1.12)$$

$$\text{où} \quad I_{dx'} = I_{dz'} = \frac{m_d}{12} (3r^2 + 3R^2 + h^2)$$

$$I_{dy'} = \frac{m_d}{2} (r^2 + R^2)$$

3.2 L'arbre flexible

L'arbre qui est flexible est considéré en tant qu'une poutre de section circulaire caractérisée par l'énergie cinétique et l'énergie de déformation.

Pour l'énergie cinétique, la formulation peut être déduite par extension de l'énergie cinétique du disque en considérant une masse d'arbre infiniment mince d'épaisseur dy , de section droite s , de masse volumique ρ et de moment d'inertie diamétral I .

Pour cela il suffit de prendre comme masse élémentaire : $dm_a = \rho s dy$ et comme inertie principales dans le repère lié à l'élément :

$$dI_{dx'} = \iiint_{(v)} (y'^2 + z'^2) dm = \left(\iint_{(s)} z'^2 ds \right) \rho dy = \rho I dy \quad (3.1.13)$$

$$dI_{dy'} = \iiint_{(v)} (x'^2 + z'^2) dm = \left(\iint_{(s)} x'^2 ds + \iint_{(s)} z'^2 ds \right) \rho dy = 2\rho I dy \quad (3.1.14)$$

Pour un élément de longueur L , l'expression sera donc donné par

$$T_a = \frac{1}{2} \rho s \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) dy + \rho \frac{I}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho I L \Omega^2 + 2\rho I \int_0^L \dot{\psi} \dot{\theta} dy \quad (3.1.15)$$

où

* $\frac{1}{2} \rho s \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) dy$: l'expression de l'énergie cinétique d'une poutre en flexion.

* $\rho \frac{I}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy$: représente l'effet secondaire de l'inertie de rotation (poutre de

Timoshenko)

* $\rho I L \Omega^2$: un terme constant, représente l'énergie de rotation de l'arbre, il a une contribution nulle dans les équations du mouvement.

* $2\rho I \int_0^L \dot{\psi} \dot{\theta} dy$: un terme représentant l'effet gyroscopique

Le calcul de l'énergie de déformation de l'arbre s'effectue en considérant le cas d'une poutre flexible en rotation sans déformation à l'effort tranchant.

Considérant le point C comme centre géométrique et A (x' , z') un point générique de la section transversale de l'arbre et supposant que ϵ et σ représentent successivement la déformation et la contrainte suivant l'axe de l'arbre.

Soit u' et w' les déplacements du centre géométrique de l'arbre par rapport au repère $x'y'z'$ (voir Fig. 3.4) et le déplacement suivant y' supposé négligeable avec les termes du second ordre qui ne sont pas pris en compte.

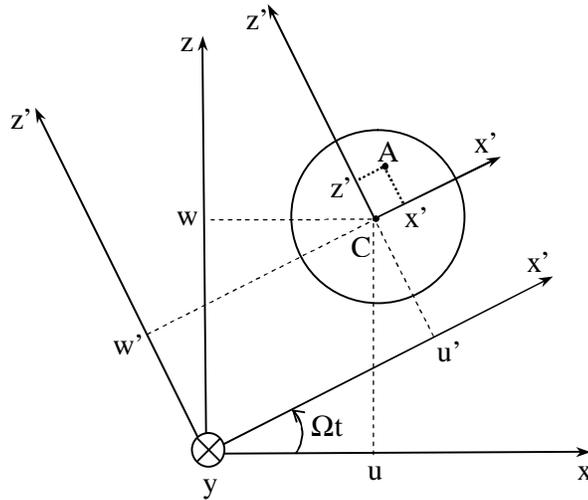


Fig. 3.4 Section droite de l'arbre.

La déformation longitudinale au point A, a pour expression :

$$\epsilon = -x' \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} - z' \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} \tag{3.1.16}$$

L'énergie de déformation est donnée par :

$$u_a = \frac{1}{2} \int_{(\tau)} \epsilon \sigma \, d\tau \tag{3.1.17}$$

où τ est le volume de l'arbre.

Compte tenu de la loi de Hooke $\sigma = \epsilon E$ qui donne la relation entre les contraintes et les déformations, on a :

$$u_a = \frac{E}{2} \int_{(\tau)} \epsilon^2 \, d\tau \tag{3.1.18}$$

En utilisant (3.1.16) l'énergie de déformation s'écrit :

$$\begin{aligned} u_a &= \frac{E}{2} \int_{(\tau)} \left[-x' \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} - z' \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} \right]^2 dt \\ &= \frac{E}{2} \int_0^L \int_{(s)} \left[\left(x'^2 \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right)^2 + z'^2 \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} \right)^2 \right) + 2x'z' \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} \right] ds dy \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

Le troisième terme de l'intégrale est nul par suite de la symétrie de la section, d'où :

$$u_a = \frac{E}{2} \int_0^L \int_{(s)} \left[\left(x'^2 \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right)^2 + z'^2 \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} \right)^2 \right) \right] ds dy \quad (3.1.20)$$

En introduisant les inerties diamétrales de la section,

$$I_{x'} = \iint_{(s)} z'^2 ds \quad (3.1.21)$$

Et

$$I_{z'} = \iint_{(s)} x'^2 ds \quad (3.1.22)$$

L'énergie de déformation a donc pour expression :

$$u_a = \frac{E}{2} \int_0^L \left(I_{z'} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right)^2 + I_{x'} \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \quad (3.1.23)$$

Pour exprimer l'énergie de déformation dans le repère fixe xyz ; on utilise les relations de passage u' et w' en fonction de u et w (voir Fig. 3.4), soient :

$$u' = u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \quad (3.1.24)$$

$$w' = u \sin \Omega t + w \cos \Omega t \quad (3.1.25)$$

Comme on a pour le cas de l'arbre symétrique $I_{x'} = I_{z'} = I$, l'énergie de déformation s'écrit :

$$u_a = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\left(\cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\sin \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\cos^2 \Omega t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \sin^2 \Omega t \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2 \cos \Omega t \sin \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right. \\
 &\quad \left. + \sin^2 \Omega t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \cos^2 \Omega t \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \sin \Omega t \cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dy \quad (3.1.26)
 \end{aligned}$$

Et finalement, on a :

$$u_a = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (3.1.27)$$

3.1.3 Les paliers

D'une manière générale, les paliers qui induisent des forces extérieures agissantes sur l'arbre comportent des caractéristiques de raideurs et d'amortissement. Ces caractéristiques sont sur le plan de la section droite selon les directions montrées sur la figure 3.5.

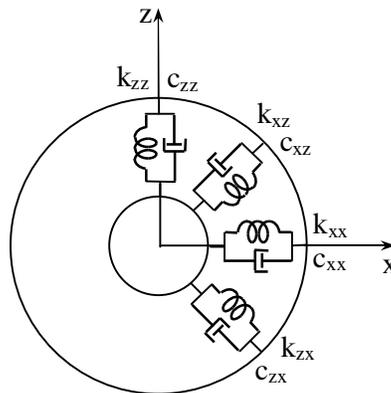


Fig. 3.5 Amortissement et raideurs de palier.

Dans celles-ci on a :

- * $k_{xx}, k_{zz}, c_{xx}, c_{zz}$ les rigidités et les amortisseurs selon les directions x et z de l'arbre.
- * $k_{xz}, k_{zx}, c_{xz}, c_{zx}$ les rigidités et les amortissements dans une direction (x ou z) mais affectés par l'autre direction. Ils représentent des constantes d'accouplement.

Le travail virtuel des forces dues aux paliers agissant sur l'arbre est :

$$\delta w = -k_{xx} u \delta u - k_{xz} w \delta u - k_{zz} w \delta w - k_{zx} u \delta w - c_{xx} \dot{u} \delta \dot{u} - c_{xz} \dot{w} \delta \dot{u} - c_{zz} \dot{w} \delta \dot{w} - c_{zx} \dot{u} \delta \dot{w} \quad (3.1.28)$$

Qu'on peut la mettre sous la forme :

$$\delta w = F_u \delta u + F_w \delta w \quad (3.1.29)$$

avec

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (3.1.30)$$

Où F_u et F_w sont les composantes de la force généralisée.

3.1.4 Le balourd

Le balourd qui est caractérisé par son énergie cinétique est du lorsqu'une masse m_b se trouve en un point B dans le plan du disque à une certaine distance d de son centre géométrique C (voir Fig. 3.6).

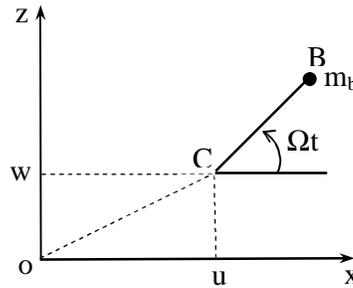


Fig. 3.6 Masse de balourd.

Les coordonnées du balourd dans le repère fixe $oxyz$ sont données par :

$$\overline{OB} = \begin{Bmatrix} u + d \cos \Omega t \\ \text{cte} \\ w + d \sin \Omega t \end{Bmatrix} \quad (3.1.31)$$

D'où la vitesse :

$$\dot{\overline{v}} = \frac{d\overline{OB}}{dt} = \begin{Bmatrix} -d \Omega \sin \Omega t \\ 0 \\ d \Omega \cos \Omega t \end{Bmatrix} \quad (3.1.32)$$

Et l'énergie cinétique est :

$$T_b = \frac{1}{2} m_b (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2 \Omega d \dot{u} \sin \Omega t - 2 \Omega d \dot{w} \cos \Omega t) \quad (3.1.33)$$

$$T_b \approx m_b d \Omega (\dot{u} \sin \Omega t - \dot{w} \cos \Omega t) \quad (3.1.34)$$

3.2 MISE EN EQUATION

La modélisation s'effectue par la méthode de Rayleigh Ritz qui est caractérisée par la substitution des déplacements u et w par des fonctions d'approximation respectivement :

$$u(y,t)=f(y)q_1(t)=f(y)q_1 \tag{3.2.1}$$

$$w(y,t)=f(y)q_2(t)=f(y)q_2 \tag{3.2.2}$$

où $f(y)$ est la déformée modale choisie, et q_1 et q_2 sont des coordonnées généralisées indépendantes. Et comme nous avons ψ et θ sont très petits (voir Fig.3.7), ils sont approximés par :

$$\psi=-\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{df(y)}{dy}q_1=-g(y)q_1 \tag{3.2.3}$$

$$\theta=\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{df(y)}{dy}q_2(t)=g(y)q_2 \tag{3.2.4}$$

Les dérivées du second ordre de u et w sont aussi nécessaires pour exprimer l'énergie de déformation, elles s'écrivent :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{d^2 f(y)}{dy^2}q_1=h(y)q_1 \tag{3.2.5}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{d^2 f(y)}{dy^2}q_2=h(y)q_2 \tag{3.2.6}$$

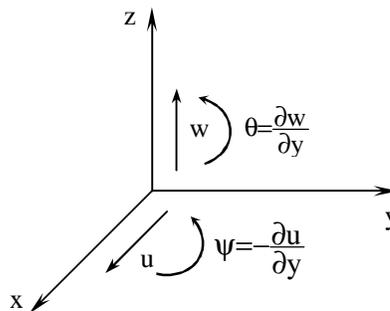
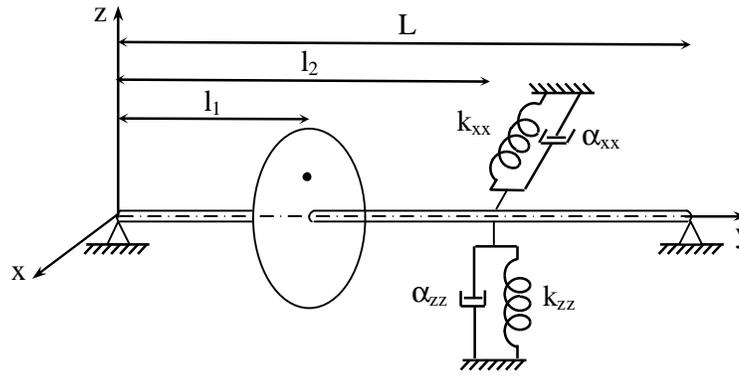


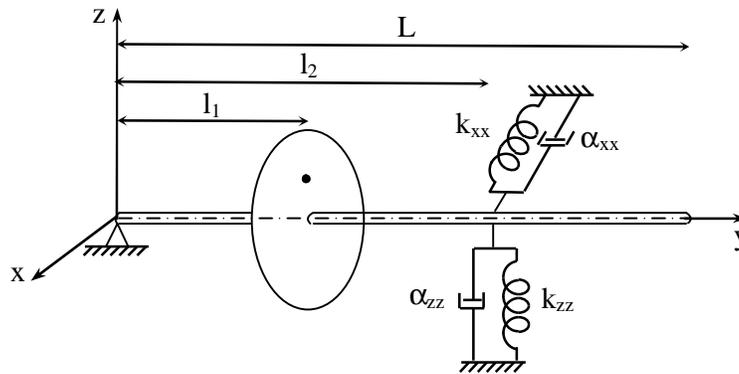
Fig. 3.7 Degrés de liberté.

Le modèle que l'on s'est proposé d'étudier et la démarche sont les mêmes que ceux traités par Lalanne et Ferraris [3] et que l'on trouve dans pas mal de travaux de recherche. Cependant la différence réside dans le fait que l'on ne considère pas les mêmes conditions aux limites et cela pour voir leur effet et une éventuelle comparaison.

Lalanne et Ferraris ont pris le rotor sur deux appuis fixe alors qu'on la pris sur un appui fixe d'un coté et libre de l'autre (voir Fig.3.8a et Fig.3.8b).



(a) Modèle Lalanne / Ferraris



(b) Modèle étudié

Fig. 3.8 Rotor considéré.

Les caractéristiques du rotor sont donnés par :

Le disque

Rayon interne	Rayon externe	épaisseur	densité	position
$R_1 = 0.01 \text{ m}$	$R_2 = 0.15 \text{ m}$	$h = 0.03 \text{ m}$	$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$	$l_1 = y_1 = L/3$
$M_d = \pi (R_2^2 - R_1^2) h \rho = 16,47 \text{ kg}$				
$I_{dx'} = I_{dz'} = \frac{M_d}{12} (3R_1^2 + 3R_2^2 + h^2) = 9,247 \cdot 10^{-2} \text{ kg.m}^2$				
$I_{dy'} = \frac{M_d}{2} (R_1^2 + R_2^2) = 0,1861 \text{ kg.m}^2$				

L'arbre

longueur	Rayon de la section droite	Module de Young	densité
$L = 0,4 \text{ m}$	$R_1 = 0,01 \text{ m}$	$E = 200 \text{ GPA}$	$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$
$S = \pi R_1^2 = 3,142 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$		$I = \pi R_1^4 / 4 = 7,854 \cdot 10^{-9} \text{ kg m}^2$	

Le balourd

masse	distance
$m_b = 10^{-4} \text{ kg}$	$d = R_2 = 0,15 \text{ m}$

Le palier

k_{xx}	k_{zz}
0	$5 \cdot 10^5 \text{ N/m}$

Pour le modèle étudié, les fonctions de déplacement sont celle du premier mode d'une poutre, de section constante appuyée en une extrémité et libre de l'autre, soit comme on la vu au premier chapitre :

$$f(y) = B_{4n} [\sin \beta_n y + \alpha_n \operatorname{sh} \beta_n y] \quad (3.2.7)$$

avec $\alpha_n = \frac{\sin \beta_n L}{\operatorname{sh} \beta_n L}$ et B_{4n} est une constante qu'on prend égale à un 1.

Les expressions totales des énergies cinétiques T , de déformation U et du travail virtuel δw peuvent être ainsi obtenues. L'énergie cinétique totale du système est donnée par :

$$T = T_a + T_b + T_d \quad (3.2.8)$$

où T_a est l'énergie cinétique de l'arbre donnée par la formule (3.1.15), T_b l'énergie cinétique du balourd donnée par la formule (3.1.33) et T_d l'énergie du disque donnée par la formule (3.1.10).

L'expression de l'énergie cinétique total, après calcul (voir annexe1), est donc :

$$T = A(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + B\Omega \dot{q}_1 q_2 + C(\dot{q}_1 \cos \Omega t - \dot{q}_2 \sin \Omega t) \quad (3.2.9)$$

ou A , B et C sont égale à :

$$A = \frac{1}{2} \left[M_d \dot{f}^2(l_1) + I_{dx} \dot{g}^2(l_1) + \rho s \int_0^L \dot{f}^2(y) dy + \rho I \int_0^L \dot{g}^2(y) dy \right]$$

$$B = \Omega \left[\rho I \int_0^L g^2(y) dy - I_{dy} g^2(l_1) \right]$$

et $C = \Omega [m_b \dot{f}(l_1)]$

L'énergie de déformation totale est celle de l'arbre qui à pour expression :

$$U_a = \frac{EI}{2} (q_1^2 + q_2^2) \int_0^L h^2(y) dy \quad (3.2.10)$$

Le travail virtuel total du à la raideur du palier k_{zz} est :

$$\delta w = Fq_1 + Fq_2 = -k_{zz} f^2(l_2) \quad (3.2.11)$$

Et enfin les équations de Lagrange permettent de déduire les équations du mouvement.

3.3 ETUDE DU MODELE SYMETRIQUE

Pour étudier le système symétrique on a pris la raideur $k_{zz} = 0$ et l'application des équations de Lagrange a conduit aux équations du mouvement (voir annexe 1) :

$$\begin{cases} 14,75 \ddot{\phi}_1 - 0,7474 \Omega \dot{\phi}_2 + 2,914 \cdot 10^6 q_1 = 1,377 \cdot 10^{-5} \Omega^2 \sin \Omega t \\ 14,75 \ddot{\phi}_2 + 0,7474 \Omega \dot{\phi}_1 + 2,914 \cdot 10^6 q_2 = 1,377 \cdot 10^{-5} \Omega^2 \cos \Omega t \end{cases} \quad (3.3.1)$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$\begin{cases} m \ddot{\phi}_1 - a \Omega \dot{\phi}_2 + k q_1 = C \Omega^2 \sin \Omega t \\ m \ddot{\phi}_2 + a \Omega \dot{\phi}_1 + k q_2 = C \Omega^2 \cos \Omega t \end{cases} \quad (3.3.2)$$

ou bien sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = C \Omega^2 \begin{bmatrix} \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \end{bmatrix} \quad (3.3.3)$$

3.3.1 Détermination des fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation

L'étude des solutions homogènes permet d'avoir les fréquences naturelles qui permettent de localiser les vitesses critiques à l'aide du diagramme de Campbell. Pour cela on cherche les solutions qui vérifient le système donné par (3.3.1) et (3.3.2) lorsqu'il est homogène (sans second membre), c'est-à-dire des solutions de la forme :

$$\begin{cases} q_{1h} = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) \\ q_{2h} = A_2 \cos(\omega t + \phi_2) \end{cases} \quad (3.3.4)$$

qu'on peut mettre sous la forme complexe :

$$\begin{cases} \underline{q}_{1h} = \underline{A}_1 \exp j\omega t \\ \underline{q}_{2h} = \underline{A}_2 \exp j\omega t \end{cases} \quad (3.3.5)$$

avec $\underline{A}_1 = A_1 \exp j\phi_1$ et $\underline{A}_2 = A_2 \exp j\phi_2$.

et que l'on reporte dans le système homogène complexe :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_{1h} - a\Omega\dot{q}_{2h} + kq_{1h} = 0 \\ m\ddot{q}_{2h} + a\Omega\dot{q}_{1h} + kq_{2h} = 0 \end{cases} \quad (3.3.6)$$

Pour avoir

$$\begin{bmatrix} k - m\omega^2 & -ja\Omega\omega \\ ja\Omega\omega & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_1 \\ \underline{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.7)$$

Cette dernière équation représente un système linéaire de deux équations à deux inconnues qui sont \underline{A}_1 et \underline{A}_2 avec un paramètre qui est Ω . Les solutions de celui-ci se discutent donc selon Ω où l'on peut utiliser la méthode du déterminant. Alors :

Si $\det \neq 0$, on a $\underline{A}_1 = \underline{A}_2 = 0$ d'où $q_{1h} = q_{2h} = 0$.

C'est la solution triviale qui est sans intérêt.

Si $\det = 0$, on a $\underline{A}_1 = \frac{0}{0}$ et $\underline{A}_2 = \frac{0}{0}$.

Ceux sont des formes indéterminées, d'où la possibilité d'avoir des solutions non nulles.

Dans ce cas on a :

$$\det = \begin{bmatrix} k - m\omega^2 & -ja\Omega\omega \\ ja\Omega\omega & k - m\omega^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.3.8)$$

qui donne : $m^2 \omega^4 - (2 k m + a^2 \Omega^2) \omega^2 + k^2 = 0 \quad (3.3.9)$

On remarque que si $\Omega = 0$ (à l'arrêt), la valeur de ω est égale à $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ (3.3.10)

Tandis que pour $\Omega \neq 0$ (rotor tournant), l'équation bicarrée (3.3.6) a un discriminant positif d'où l'on tire deux valeurs réelles positives pour ω égales à :

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2 \omega_0^2}{a^2 \Omega^2}} \right)} \quad (3.3.11)$$

et
$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2 \omega_0^2}{a^2 \Omega^2}} \right)} \quad (3.3.13)$$

On remarque facilement que l'encadrement de ces valeurs est :

$$\omega_1 < \omega_0 < \omega_2. \quad (3.3.14)$$

Et à partir de (3.3.8) on a :

$$|k - m\omega^2| = a\Omega \omega \quad (3.3.15)$$

Aux deux valeurs ω_1 et ω_2 correspondent donc deux modes pour les coordonnées généralisées q_{1h} et q_{2h} .

* Pour le premier mode où $w = w_1$, on a :

$$\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}} = \frac{ja\Omega\omega_1}{k - m\omega_1^2} = \frac{ja\Omega\omega_1}{m(\omega_0^2 - \omega_1^2)} = j \quad (3.3.16)$$

qui donne $A_{11} = A_{21}$ et $\phi_{21} = \phi_{11} - \pi/2$ (3.3.17)

d'où $q_{1h1} = A_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_{11})$ (3.3.18)

$$q_{2h1} = A_{21} \cos(\omega_1 t + \phi_{21}) = A_{11} \sin(\omega_1 t + \phi_{11}) \quad (3.3.19)$$

$$u(y, t) = q_{1h1} f(y) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_{11}) [\sin \beta_n y + \alpha_n \text{sh} \beta_n y] \quad (3.3.20)$$

et $w(y, t) = q_{2h1} f(y) = A_{11} \sin(\omega_1 t + \phi_{11}) [\sin \beta_n y + \alpha_n \text{sh} \beta_n y]$ (3.3.21)

Le mouvement suivant ox a la même amplitude que celui suivant oz mais il est en avance de $\pi/2$. Les points situés sur l'axe du rotor décrivent donc, d'après Lissajous, des orbites circulaires qui vont de ox vers oz . Elles sont dans le sens opposé au sens de rotation du rotor qui est autour de oy allant positivement de oz vers ox . On dit dans ce cas qu'on a une précession inverse ou rétrograde (voir fig. 3.9a).

* Pour le deuxième mode où $w = w_2$, on a :

$$\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}} = \frac{ja\Omega\omega_2}{k - m\omega_2^2} = \frac{ja\Omega\omega_2}{m(\omega_0^2 - \omega_2^2)} = -j \quad (3.3.22)$$

qui donne $A_{12} = A_{22}$ et $\varphi_{22} = \varphi_{12} + \pi/2$ (3.3.23)

d'où $q_{1h2} = A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_{12})$ (3.3.24)

$$q_{2h2} = A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_{22}) = -A_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_{12})$$
 (3.3.25)

$$u(y, t) = q_{1h2} f(y) = A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_{12}) [\sin \beta_n y + \alpha_n \operatorname{sh} \beta_n y]$$
 (3.3.26)

et $w(y, t) = q_{2h2} f(y) = A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_{22}) [\sin \beta_n y + \alpha_n \operatorname{sh} \beta_n y]$ (3.3.27)

Le mouvement suivant ox a la même amplitude que celui suivant oz mais il est en retard de $\pi/2$. Les points situés sur l'axe du rotor décrivent donc, d'après Lissajous, des orbites circulaires qui vont de oz vers ox. Elles sont dans le même sens que le sens de rotation du rotor qui est autour de oy allant positivement de oz vers ox. On dit dans cas qu'on a une précession directe (voir fig. 3.9b).

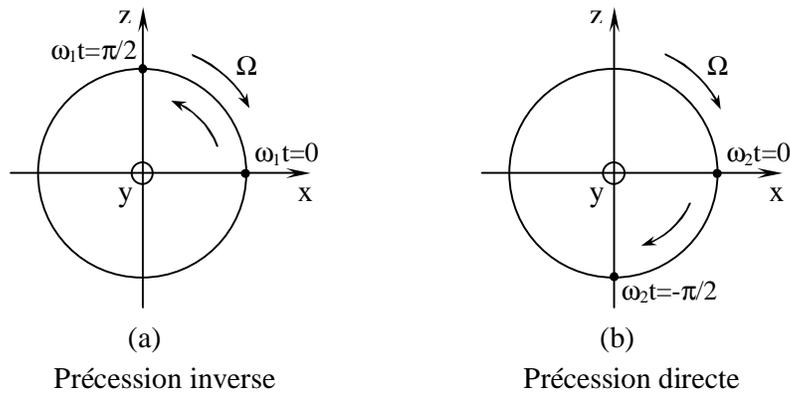


Fig. 3.9 Orbite du rotor

3.3.2 Digramme de Campbell

Pour le rotor défini par les équations du système (3.3.1.), l'équation caractéristique est donnée comme suit :

$$\omega^4 + (3,95118 \cdot 10^5 + 2,5675 \cdot 10^{-2} \Omega^2) \omega^2 + 3,9029 \cdot 10^{10} = 0$$
 (3.3.28)

Les fréquences à l'arrêt sont :

$$\omega_{10} = \omega_{20} = 444,48 \text{ rd/s}$$
 (3.3.29)

Les fréquences en rotation sont :

$$\omega_1 = \sqrt{19,75589.10^4 + 1,2837.10^{-3} \Omega^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{307,78.10^6}{\Omega^2}} \right)} \quad (3.3.30)$$

$$\omega_2 = \sqrt{19,75589.10^4 + 1,2837.10^{-3} \Omega^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{307,78.10^6}{\Omega^2}} \right)} \quad (3.3.31)$$

Par le diagramme de Campbell (voir figure 3.10) les fonctions $\omega_1 = \omega_1(\Omega)$ et $\omega_2 = \omega_2(\Omega)$ sont représentées coupées par les droites $\omega = \Omega$ (cas synchrone) et $\omega = s \Omega$ (cas asynchrone avec $s=0,5$) et donnant les points d'intersections A et B pour le premier C et D pour le deuxième. Les valeurs des fréquences correspondantes à ces points sont obtenues en substituant $\omega = s \Omega$ dans (3.3.9), ce qui donne :

$$s^2(s^2 m^2 - a^2) \Omega^4 - 2kms^2 \Omega^2 + k^2 = 0 \quad (3.3.32)$$

Les solutions de (3.3.32) sont alors :

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{k}{s(sm + a)}} \quad (3.3.33)$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{k}{s(sm - a)}} \quad (3.3.34)$$

ou bien (avec $\omega = s \Omega$) :

$$\omega_1 = s \sqrt{\frac{k}{s(sm + a)}} \quad (3.3.35)$$

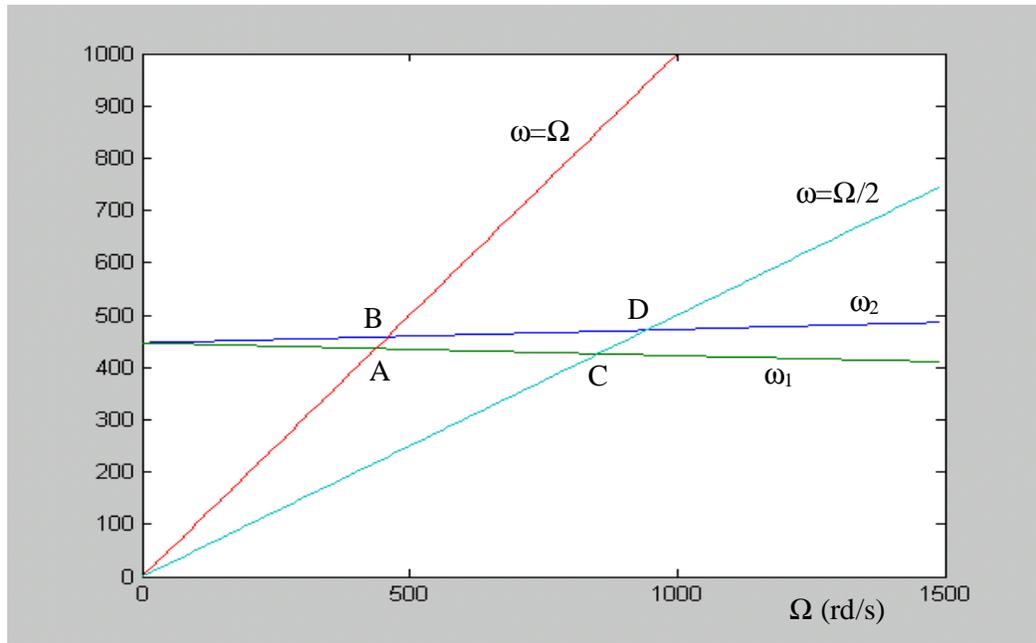
Correspondante aux points A ($s=1$) et C ($s=0,5$) et

$$\omega_2 = s \sqrt{\frac{k}{s(sm - a)}} \quad (3.3.36)$$

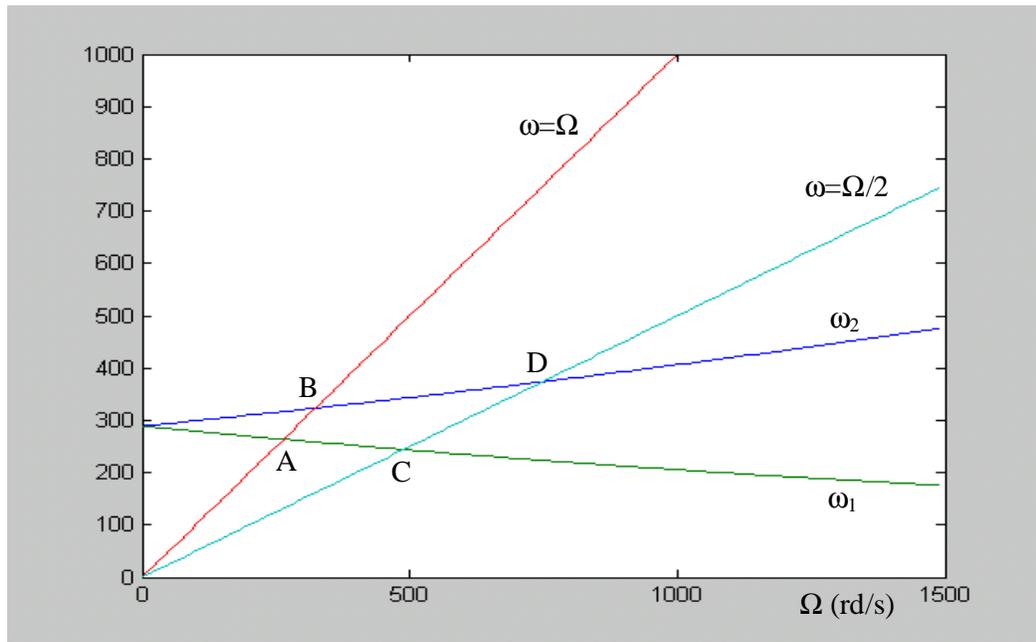
Correspondant aux points B ($s=1$) et D ($s=0,5$)

Pour le cas étudié on a :

$$\begin{aligned} \text{Pour A : } \Omega_{c1} &= 433,63 \text{ rd/s,} & \text{pour B : } \Omega_{c2} &= 456,18 \text{ rd/s,} \\ \text{pour C : } \Omega_{c1} &= 847,07 \text{ rd/s} & \text{et pour D : } \Omega_{c2} &= 937,74 \text{ rd/s.} \end{aligned}$$



Modèle étudié



Modèle Lalanne-Ferraris

Fig. 3.10 Diagramme de Campbell

3.3.3 Réponse aux forces d'excitation

Les forces d'excitations peuvent être dues soit par l'effet du balourd soit par l'effet de forces asynchrones.

a) Réponse au balourd

Dans le cas de la présence d'une force d'excitation telle que le balourd, l'étude de la solution particulière se fait en considérant le système avec second membre.

Comme il n'y a pas d'amortissement pour le système d'équations (3.3.2) on cherche des solutions de la forme :

$$\begin{cases} q_{1p} = A_{e1} \cos(\Omega t + \phi_{e1}) \\ q_{2p} = A_{e2} \cos(\Omega t + \phi_{e2}) \end{cases} \quad (3.3.37)$$

qu'on peut mettre sous la forme complexe :

$$\begin{cases} \underline{q}_{1p} = \underline{A}_{e1} \exp j\Omega t \\ \underline{q}_{2p} = \underline{A}_{e2} \exp j\Omega t \end{cases} \quad (3.3.38)$$

avec $\underline{A}_{e1} = A_{e1} \exp j\phi_{e1}$ et $\underline{A}_{e2} = A_{e2} \exp j\phi_{e2}$.

et que l'on reporte dans le système inhomogène complexe :

$$\begin{cases} m \ddot{\underline{q}}_{1p} - a\Omega \dot{\underline{q}}_{2p} + k \underline{q}_{1p} = C\Omega^2 \exp j(\Omega t - \pi/2) \\ m \ddot{\underline{q}}_{2p} + a\Omega \dot{\underline{q}}_{1p} + k \underline{q}_{2p} = C\Omega^2 \exp j(\Omega t) \end{cases} \quad (3.3.39)$$

Pour avoir

$$\begin{bmatrix} k - m\Omega^2 & -ja\Omega^2 \\ ja\Omega^2 & k - m\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_{e1} \\ \underline{A}_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\Omega^2 \exp(-j\pi/2) \\ C\Omega^2 \end{bmatrix} \quad (3.3.40)$$

Cette dernière équation représente un système linéaire de deux équations à deux inconnues qui sont \underline{A}_{e1} et \underline{A}_{e2} avec un paramètre qui est Ω . Les solutions dépendent de ce dernier et la méthode du déterminant nous donne :

$$\begin{aligned} \underline{A}_{e1} &= \frac{\begin{vmatrix} C\Omega^2 e^{-j\pi/2} & -ja\Omega^2 \\ C\Omega^2 & k - m\Omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k - m\Omega^2 & -ja\Omega^2 \\ ja\Omega^2 & k - m\Omega^2 \end{vmatrix}} = \frac{C\Omega^2(k - m\Omega^2)e^{-j\pi/2} + jaC\Omega^4}{[(k - m\Omega^2)^2 - a^2\Omega^4]} \\ &= \frac{jC\Omega^2(-k + m\Omega^2 + a\Omega^2)}{[(k - m\Omega^2) + a\Omega^2][(k - m\Omega^2) - a\Omega^2]} = \frac{-jC\Omega^2}{[k + (a - m)\Omega^2]} \end{aligned} \quad (3.3.41)$$

$$\begin{aligned} \underline{A}_{e2} &= \frac{\begin{vmatrix} k - m\Omega^2 & C\Omega^2 e^{-j\pi/2} \\ ja\Omega^2 & C\Omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k - m\Omega^2 & -ja\Omega^2 \\ ja\Omega^2 & k - m\Omega^2 \end{vmatrix}} = \frac{C\Omega^2(k - m\Omega^2) + jaC\Omega^4 e^{-j\pi/2}}{[(k - m\Omega^2)^2 - a^2\Omega^4]} \\ &= \frac{C\Omega^2(k - m\Omega^2 - a\Omega^2)}{[(k - m\Omega^2) + a\Omega^2][(k - m\Omega^2) - a\Omega^2]} = \frac{C\Omega^2}{[k + (a - m)\Omega^2]} \end{aligned} \quad (3.3.42)$$

Des relations (3.3.41) et (3.3.42) on obtient $\varphi_{e1} = -\pi/2$, $\varphi_{e2} = 0$

et

$$A_{e1} = A_{e2} = \frac{C\Omega^2}{[k + (a - m)\Omega^2]} \quad (3.3.43)$$

d'où $q_{1p} = A_{e1} \sin\Omega t$ et $q_{2p} = A_{e2} \cos\Omega t$

La vitesse critique Ω_c correspond à la vitesse qui rend les déplacements indéfinis. L'annulation du dénominateur de (3.3.43) donne $\Omega_c = \sqrt{k/(m - a)}$. Celle-ci montre qu'il y a une seule valeur critique qui correspond à Ω_2 pour $s=1$.

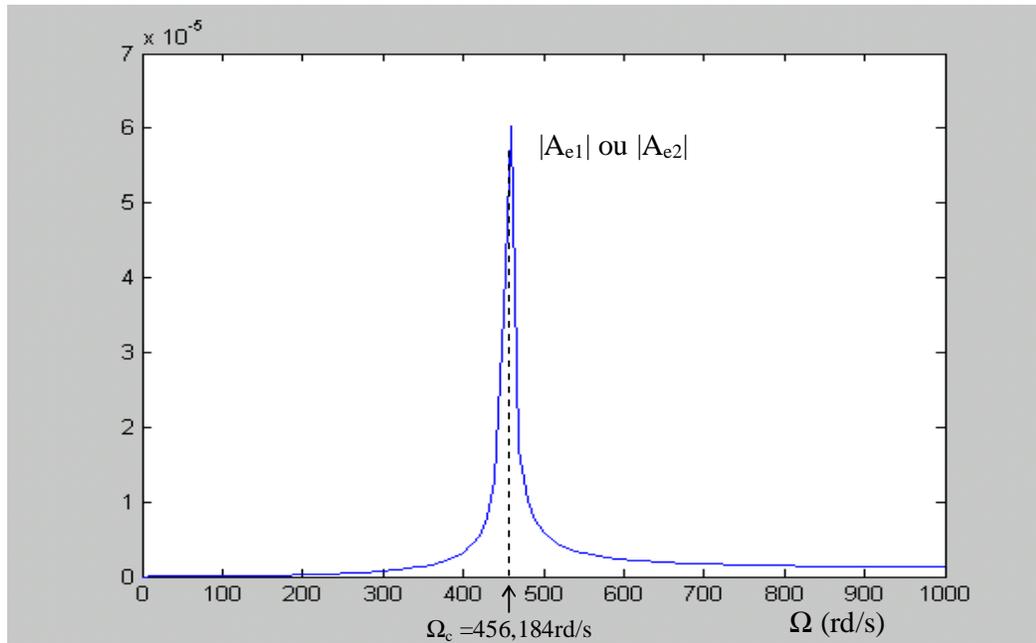
La valeur qui correspondant à ce cas est celle du point B. Et comme $A_{e1}=A_{e2}$ et $A_{e1}A_{e2} > 0$, les orbites décrites par l'axe du rotor sont des cercles et de précession directe.

Pour le cas étudié on a $A_{e1} = A_{e2} = \frac{1,377 \cdot 10^{-5} \Omega^2}{2,914 \cdot 10^6 - 14\Omega^2}$ et dont l'allure est représentée sur la

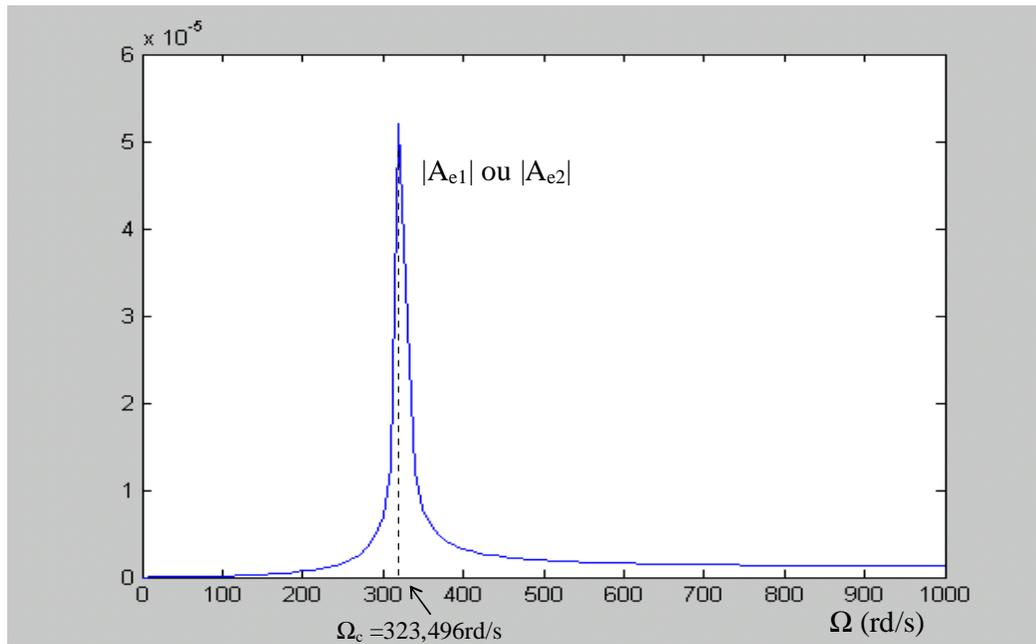
figure 3.11 avec celle obtenue par Lalanne et Ferraris.

On remarque que lorsque Ω croit la valeur limite du déplacement est : $|A_{e1}| = |A_{e2}| = \left| \frac{C}{a - m} \right|$

Ce qui donne pour notre cas : $|A_{e1}| = |A_{e2}| = 9,8357 \cdot 10^{-7} \text{ m}$.



Modèle étudié



Modèle Lalanne-Ferraris

Fig. 3.11 Réponse au balourd

b) Réponse à une force asynchrone

Le rotor peut aussi être excité, pendant son fonctionnement, par une force asynchrone. C'est une force d'amplitude constante F_0 et une vitesse $s\Omega$ différente de celle du rotor. Si la force est appliquée en l_3 nous aurons :

$$F_{q1} = F_0 f(l_3) \sin s\Omega t = F \sin s\Omega t \quad (3.3.44)$$

et
$$F_{q2} = F_0 f(l_3) \cos s\Omega t = F \cos s\Omega t \quad (3.3.45)$$

Les équations à résoudre seront donc :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = F \sin s\Omega t \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = F \cos s\Omega t \end{cases} \quad (3.3.46)$$

Comme pour le cas précédant on cherche des solutions de la forme :

$$\begin{cases} q_{1p} = A_{e1} \cos(s\Omega t + \phi_{e1}) \\ q_{2p} = A_{e2} \cos(s\Omega t + \phi_{e2}) \end{cases} \quad (3.3.47)$$

qu'on peut mettre sous la forme complexe :

$$\begin{cases} \underline{q}_{1p} = \underline{A}_{e1} \exp js\Omega t \\ \underline{q}_{2p} = \underline{A}_{e2} \exp js\Omega t \end{cases} \quad (3.3.48)$$

avec $\underline{A}_{e1} = A_{e1} \exp j\phi_{e1}$ et $\underline{A}_{e2} = A_{e2} \exp j\phi_{e2}$.

et que l'on reporte dans le système inhomogène complexe :

$$\begin{cases} m\ddot{\underline{q}}_{1p} - a\Omega\dot{\underline{q}}_{2p} + k\underline{q}_{1p} = F \exp j(s\Omega t - \pi/2) \\ m\ddot{\underline{q}}_{2p} + a\Omega\dot{\underline{q}}_{1p} + k\underline{q}_{2p} = F \exp j(s\Omega t) \end{cases} \quad (3.3.49)$$

Pour avoir

$$\begin{bmatrix} k - ms^2\Omega^2 & -jas\Omega^2 \\ jas\Omega^2 & k - ms^2\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_{e1} \\ \underline{A}_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \exp(-j\pi/2) \\ F \end{bmatrix} \quad (3.3.50)$$

Cette dernière équation représente un système linéaire de deux équations à deux inconnues qui sont \underline{A}_{e1} et \underline{A}_{e2} avec un paramètre qui est Ω . Les solutions dépendent de ce dernier et la méthode du déterminant nous donne :

$$\begin{aligned} \underline{A}_{e1} &= \frac{\begin{vmatrix} Fe^{-j\pi/2} & -jas\Omega^2 \\ F & k - ms^2\Omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k - ms^2\Omega^2 & -jas\Omega^2 \\ jas\Omega^2 & k - ms^2\Omega^2 \end{vmatrix}} = \frac{F(k - ms^2\Omega^2)e^{-j\pi/2} + jaF\Omega^2}{[(k - ms^2\Omega^2)^2 - a^2s^2\Omega^4]} \\ &= \frac{jF(-k + ms^2\Omega^2 + as\Omega^2)}{[(k - ms^2\Omega^2) + as\Omega^2][(k - ms^2\Omega^2) - as\Omega^2]} = \frac{-jF}{[k + (as - ms^2)\Omega^2]} \quad (3.3.51) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{A}_{e2} &= \frac{\begin{vmatrix} k - ms^2\Omega^2 & Fe^{-j\pi/2} \\ jas\Omega^2 & F \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k - ms^2\Omega^2 & -jas\Omega^2 \\ jas\Omega^2 & k - ms^2\Omega^2 \end{vmatrix}} = \frac{F(k - ms^2\Omega^2) - jasF\Omega^2 e^{-j\pi/2}}{[(k - ms^2\Omega^2)^2 - a^2s^2\Omega^4]} \\ &= \frac{F(k - ms^2\Omega^2 - as\Omega^2)}{[(k - ms^2\Omega^2) + as\Omega^2][(k - ms^2\Omega^2) - as\Omega^2]} = \frac{F}{[k + (as - ms^2)\Omega^2]} \quad (3.3.52) \end{aligned}$$

Des relations (3.3.41) et (3.3.42) on obtient $\varphi_{e1} = -\pi/2$, $\varphi_{e2} = 0$

et

$$A_{e1} = A_{e2} = \frac{F}{[k + (as - ms^2)\Omega^2]} \quad (3.3.53)$$

d'où $q_{1p} = A_{e1} \sin s\Omega t$ et $q_{2p} = A_{e2} \cos s\Omega t$

La valeur critique Ω_c correspond à la vitesse qui rend le déplacement infini, l'annulation donc du dénominateur de (3.3.53) nous ramène à :

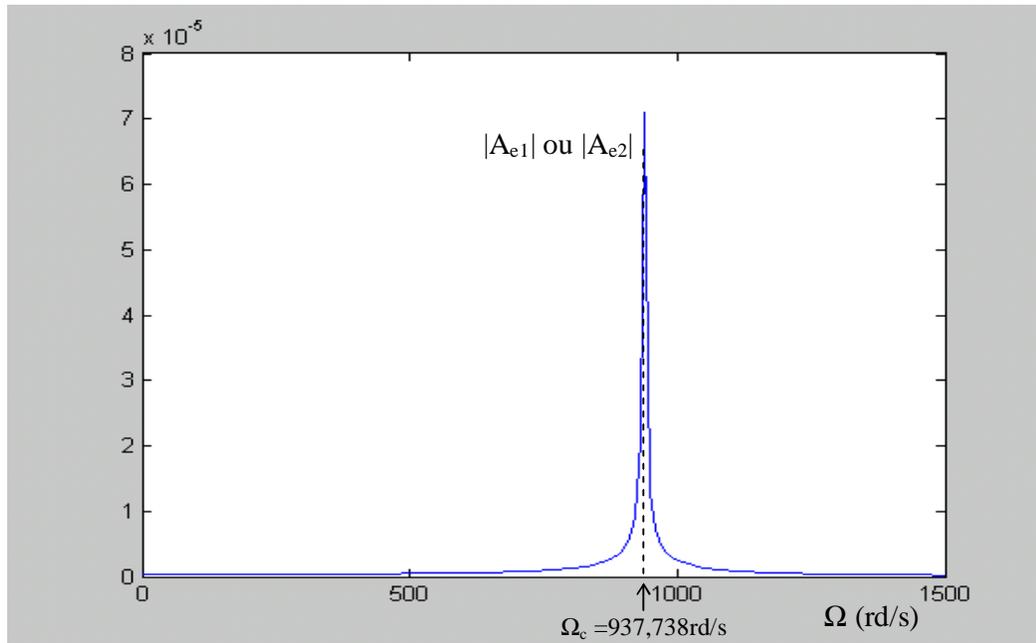
$$\Omega_c = \sqrt{\frac{k}{s(ms - a)}} \quad (3.3.54)$$

on remarque d'après le résultat qu'on a une seule vitesse critique qui correspond à Ω_2 qui est donné par l'équation (3.3.32) et comme $A_{e1} = A_{e2}$, les orbites décrites par l'axe du rotor sont des cercles et de précession directe. Pour le rotor étudié $s = 0,5$ on a :

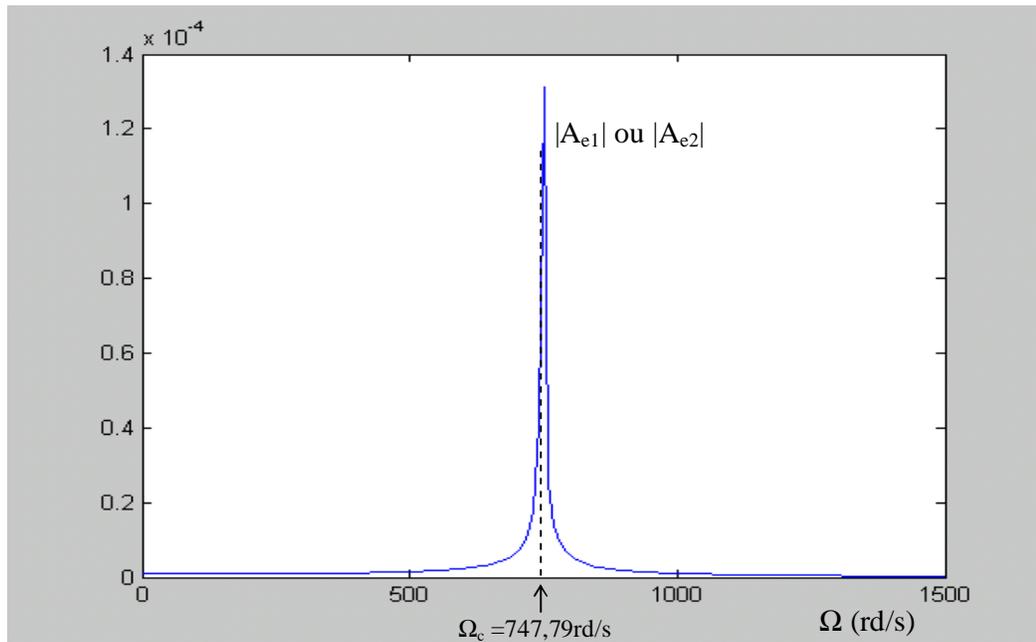
$$A_{e1} = A_{e2} = \frac{F}{2,914 \cdot 10^6 - 3,3138\Omega^2} \quad (3.3.55)$$

la vitesse correspondante à Ω_c est celle du point D.

L'amplitude $A_{e1} = A_{e2}$ est représentée pour $F = 1N$ sur la figure 3.12 pour le modèle étudié et celui de Lalanne-Ferraris.



Modèle étudié



Modèle Lalanne/Ferraris

Fig 3.12 Réponse à la force asynchrone

3.4 ETUDE DU MODELE DISSYMETRIQUE

La dissymétrie est introduite par la présence de la raideur du palier k_{zz} et l'utilisation de l'équation (3.2.11) donne : $k_1 = k$ et $k_2 = k + k_{zz}f^2(I_2)$.

Le système d'équations (3.3.1) devient :

$$\begin{cases} 14,75\ddot{q}_1 - 0,7474\Omega\dot{q}_2 + 2,914.10^6 q_1 = 1,377.10^{-5}\Omega^2 \sin \Omega t \\ 14,75\ddot{q}_2 + 0,7474\Omega\dot{q}_1 + 2,962.10^6 q_2 = 1,377.10^{-5}\Omega^2 \cos \Omega t \end{cases} \quad (3.4.1)$$

qu'on peut les mettre sous la forme générale suivante :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + k_1 q_1 = C\Omega^2 \sin \Omega t \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + k_2 q_2 = C\Omega^2 \cos \Omega t \end{cases} \quad (3.4.2)$$

3.4.1 Détermination des fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation

Pour avoir les fréquences naturelles on cherche les solutions du système (3.4.2) lorsqu'il est homogène (sans second membre), c'est-à-dire des solutions de la forme :

$$\begin{cases} q_{1h} = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) \\ q_{2h} = A_2 \cos(\omega t + \phi_2) \end{cases} \quad (3.4.3)$$

qu'on peut mettre sous la forme complexe :

$$\begin{cases} \underline{q}_{1h} = \underline{A}_1 \exp j\omega t \\ \underline{q}_{2h} = \underline{A}_2 \exp j\omega t \end{cases} \quad (3.4.4)$$

avec $\underline{A}_1 = A_1 \exp j\phi_1$ et $\underline{A}_2 = A_2 \exp j\phi_2$.

et que l'on reporte dans le système homogène complexe :

$$\begin{cases} m\underline{\ddot{q}}_{1h} - a\Omega\underline{\dot{q}}_{2h} + k_1 \underline{q}_{1h} = 0 \\ m\underline{\ddot{q}}_{2h} + a\Omega\underline{\dot{q}}_{1h} + k_2 \underline{q}_{2h} = 0 \end{cases} \quad (3.4.5)$$

Pour avoir

$$\begin{bmatrix} k_1 - m\omega^2 & -ja\Omega\omega \\ ja\Omega\omega & k_2 - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_1 \\ \underline{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4.6)$$

Cette dernière équation représente un système linéaire de deux équations à deux inconnues qui sont \underline{A}_1 et \underline{A}_2 avec un paramètre qui est Ω . Les solutions de celui-ci se discutent donc selon Ω où l'on peut utiliser la méthode du déterminant. Alors :

Si $\det \neq 0$, on a $\underline{A}_1 = \underline{A}_2 = 0$ d'où $q_{1h} = q_{2h} = 0$.

C'est la solution triviale qui est sans intérêt.

Si $\det = 0$, on a $\underline{A}_1 = 0/0$ et $\underline{A}_2 = 0/0$.

Ceux sont des formes indéterminées, d'où la possibilité d'avoir des solutions non nulles.

Dans ce cas on a :

$$\det = \begin{bmatrix} k_1 - m\omega^2 & -ja\Omega\omega \\ ja\Omega\omega & k_2 - m\omega^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.4.7)$$

qui ramène à l'équation caractéristique :

$$m^2 \omega^4 - (k_1 m + k_2 m + a^2 \Omega^2) \omega^2 + k_1 k_2 = 0 \quad (3.4.8)$$

On remarque que si $\Omega = 0$ (à l'arrêt), les racines de (3.4.8) seront égales à :

$$\omega_{10} = \sqrt{k_1 / m} \quad (3.4.9)$$

et
$$\omega_{20} = \sqrt{k_2 / m} \quad (3.4.10)$$

Tandis que pour $\Omega \neq 0$ (rotor tournant), l'équation bicarrée (3.4.8) a un discriminant positif d'où l'on tire deux valeurs réelles positives pour ω égales à :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\omega_{10}^2}{2} + \frac{\omega_{20}^2}{2} + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} - \sqrt{\left(\frac{\omega_{10}^2}{2} + \frac{\omega_{20}^2}{2} + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2}\right)^2 - \omega_{10}^2 \omega_{20}^2}} \quad (3.4.15)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\omega_{10}^2}{2} + \frac{\omega_{20}^2}{2} + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_{10}^2}{2} + \frac{\omega_{20}^2}{2} + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2}\right)^2 - \omega_{10}^2 \omega_{20}^2}} \quad (3.4.16)$$

On obtient facilement l'encadrement de ces valeurs :

$$\omega_1 < \omega_{10} < \omega_{20} < \omega_2 \quad (3.4.16)$$

Aux deux valeurs ω_1 et ω_2 correspondent donc deux modes pour les coordonnées généralisées q_{1h} et q_{2h} .

En utilisant l'une des équations du système (3.4.6) qui sont identiques car le déterminant est nul, on a :

* Pour le premier mode où $w = w_1$, on a :

$$\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}} = \frac{ja\Omega\omega_1}{k_1 - m\omega_1^2} = \frac{ja\Omega\omega_1}{m(\omega_{10}^2 - \omega_1^2)} \quad (3.4.17)$$

qui donne
$$\frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{a\Omega\omega_1}{m(\omega_{10}^2 - \omega_1^2)} \quad \text{et} \quad \varphi_{21} = \varphi_{11} - \pi/2 \quad (3.4.18)$$

d'où
$$q_{1h1} = A_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_{11}) \quad (3.4.19)$$

$$q_{2h1} = A_{21} \cos(\omega_1 t + \phi_{21}) = A_{21} \sin(\omega_1 t + \phi_{11}) \quad (3.4.20)$$

$$u(y, t) = q_{1h1} f(y) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_{11}) [\sin \beta_n y + \alpha_n \text{sh} \beta_n y] \quad (3.4.21)$$

et
$$w(y, t) = q_{2h1} f(y) = A_{21} \sin(\omega_1 t + \phi_{11}) [\sin \beta_n y + \alpha_n \text{sh} \beta_n y] \quad (3.4.22)$$

* Pour le deuxième mode où $w = w_2$, on a :

$$\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}} = \frac{ja\Omega\omega_2}{k_1 - m\omega_2^2} = \frac{ja\Omega\omega_2}{m(\omega_{10}^2 - \omega_2^2)} \quad (3.4.23)$$

qui donne
$$\frac{A_{12}}{A_{22}} = \frac{a\Omega\omega_2}{m(\omega_2^2 - \omega_{10}^2)} \quad \text{et} \quad \varphi_{22} = \varphi_{12} + \pi/2 \quad (3.4.24)$$

d'où
$$q_{1h2} = A_{12} \cos(\omega_2 t + \phi_{12}) \quad (3.4.25)$$

$$q_{2h2} = A_{22} \cos(\omega_2 t + \phi_{22}) = -A_{12} \sin(\omega_2 t + \phi_{12}) \quad (3.4.26)$$

$$u(y, t) = q_{1h2} f(y) = A_{12} \cos(\omega_2 t + \phi_{12}) [\sin \beta_n y + \alpha_n \text{sh} \beta_n y] \quad (3.4.27)$$

et
$$w(y, t) = q_{2h2} f(y) = A_{22} \cos(\omega_2 t + \phi_{22}) [\sin \beta_n y + \alpha_n \text{sh} \beta_n y] \quad (3.4.28)$$

Comme on a $A_1 \neq A_2$, les orbites décrites par le rotor sont des ellipses de précession inverse pour le premier mode et de précession directe pour le deuxième.

3.4.2 Digramme de Campbell

L'équation caractéristique du système d'équations (3.4.1) est :

$$\omega^4 - \left(\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{m^2} \right) \omega^2 + \omega_{20}^2 \cdot \omega_{20}^2 = 0 \quad (3.4.29)$$

$$\text{ou bien} \quad \omega^4 - (3,9837 \cdot 10^5 + 2,5675 \cdot 10^{-3} \Omega^2) \omega^2 + 3,967 \cdot 10^{10} = 0 \quad (3.4.30)$$

Les fréquences à l'arrêt sont :

$$\omega_{10} = \sqrt{k_1 / m} = 444,48 \text{ rd/s} \quad (3.4.13)$$

$$\omega_{20} = \sqrt{k_2 / m} = 448,12 \text{ rd/s} \quad (3.4.14)$$

Quand le rotor est en rotation ($\Omega \neq 0$) les fréquences sont :

$$\omega_1 = \sqrt{199,185 \cdot 10^3 + 1,284 \cdot 10^{-3} - \sqrt{(199,185 \cdot 10^3 + 1,284 \cdot 10^{-3} \Omega^2)^2 - 3,96726 \cdot 10^{10}}} \quad (3.4.18)$$

$$\omega_2 = \sqrt{199,185 \cdot 10^3 + 1,284 \cdot 10^{-3} + \sqrt{(199,185 \cdot 10^3 + 1,284 \cdot 10^{-3} \Omega^2)^2 - 3,96726 \cdot 10^{10}}} \quad (3.4.19)$$

Par le diagramme de Campbell (voir Fig. 3.13) les fonctions $\omega_1 = \omega_1(\Omega)$ et $\omega_2 = \omega_2(\Omega)$ sont représentées coupées par les droites $\omega = \Omega$ (cas synchrone) et $\omega = s \Omega$ (cas asynchrone avec $s = 0,5$) et donnant les points d'intersections A et B pour le 1^{er}, et C et D pour le 2nd.

Les valeurs des fréquences correspondantes à ces points sont obtenues en substituant $\omega = s \Omega$ dans (3.4.8), ce qui donne :

$$s^4 m^2 \Omega^4 - (k_1 m + k_2 m + a^2 \Omega^2) s^2 \Omega^2 + k_1 k_2 = 0 \quad (3.4.21)$$

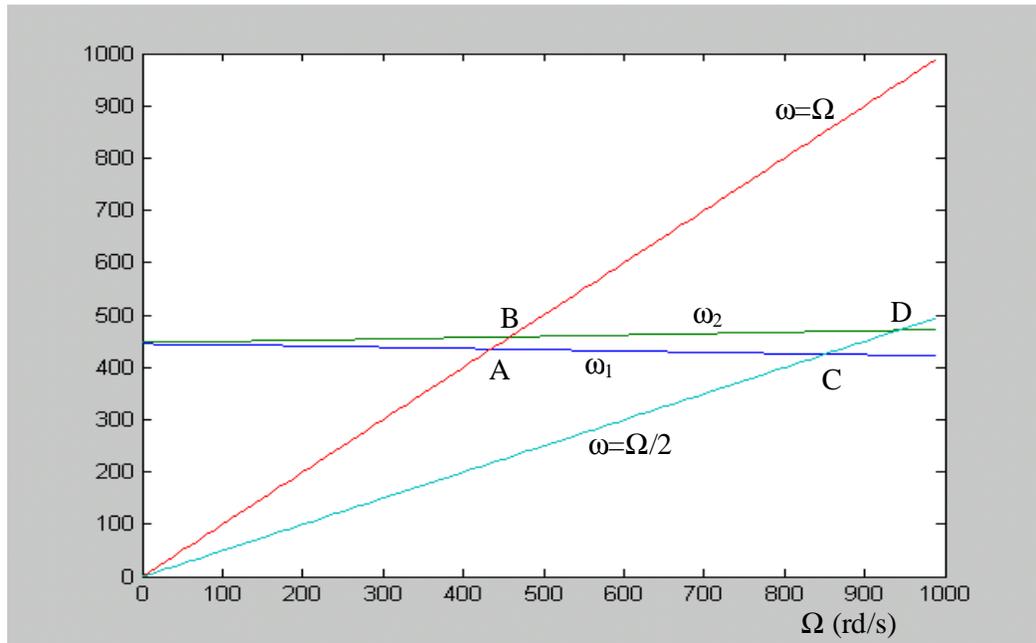
Soit :

$$s^2 (s^2 m^2 - a^2) \Omega^4 - m(k_1 + k_2) s^2 \Omega^2 + k_1 k_2 = 0 \quad (3.4.22)$$

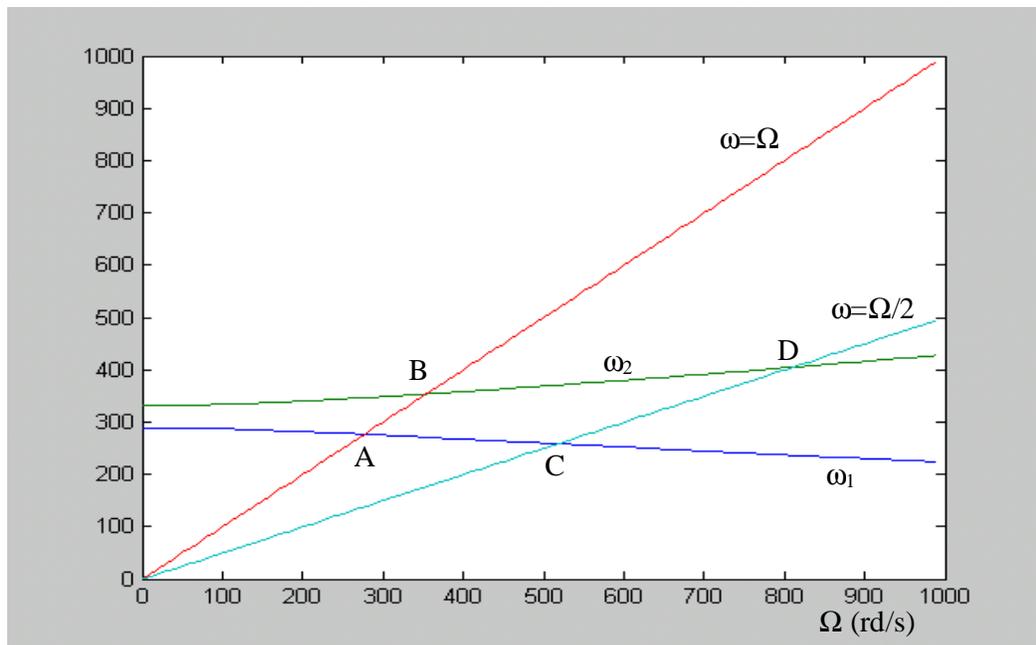
avec laquelle on obtient Ω_c .

$$\text{Pour A : } \Omega_{c1} = 435,38 \text{ rd/s,} \quad \text{pour B : } \Omega_{c2} = 458,09 \text{ rd/s,}$$

$$\text{Pour C : } \Omega_{c1} = 850,45 \text{ rd/s} \quad \text{et} \quad \text{pour D : } \Omega_{c2} = 941,65 \text{ rd/s.}$$



Modèle étudié



Modèle Lalande/Ferraris

Fig. 3.13 Diagramme de Campbell

3.4.3 Reponses aux forces d'excitations

a) Réponse au balourd

Dans le cas où l'on considère la force d'excitation due au balourd, l'étude de la solution particulière se fait en considérant le système avec second membre. Pour cela on cherche des solutions de la forme :

$$\begin{cases} q_{1p} = A_{e1} \cos(\Omega t + \phi_{e1}) \\ q_{2p} = A_{e2} \cos(\Omega t + \phi_{e2}) \end{cases} \quad (3.4.23)$$

qu'on peut mettre sous la forme complexe :

$$\begin{cases} \underline{q}_{1p} = \underline{A}_{e1} \exp j\Omega t \\ \underline{q}_{2p} = \underline{A}_{e2} \exp j\Omega t \end{cases} \quad (3.4.24)$$

avec $\underline{A}_{e1} = A_{e1} \exp j\phi_{e1}$ et $\underline{A}_{e2} = A_{e2} \exp j\phi_{e2}$.

et que l'on reporte dans le système inhomogène complexe :

$$\begin{cases} m\ddot{\underline{q}}_{1p} - a\Omega\dot{\underline{q}}_{2p} + k_1 \underline{q}_{1p} = C\Omega^2 \exp j(\Omega t - \pi/2) \\ m\ddot{\underline{q}}_{2p} + a\Omega\dot{\underline{q}}_{1p} + k_2 \underline{q}_{2p} = C\Omega^2 \exp j(\Omega t) \end{cases} \quad (3.4.25)$$

Pour avoir

$$\begin{bmatrix} k_1 - m\Omega^2 & -ja\Omega^2 \\ ja\Omega^2 & k_2 - m\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_{e1} \\ \underline{A}_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\Omega^2 \exp(-j\pi/2) \\ C\Omega^2 \end{bmatrix} \quad (3.4.26)$$

Cette dernière équation représente un système linéaire de deux équations à deux inconnues qui sont \underline{A}_{e1} et \underline{A}_{e2} avec un paramètre qui est Ω . Les solutions dépendent de ce dernier et la méthode du déterminant nous donne :

$$\begin{aligned} \underline{A}_{e1} &= \frac{\begin{vmatrix} C\Omega^2 e^{-j\pi/2} & -ja\Omega^2 \\ C\Omega^2 & k_2 - m\Omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_1 - m\Omega^2 & -ja\Omega^2 \\ ja\Omega^2 & k_2 - m\Omega^2 \end{vmatrix}} = \frac{C\Omega^2(k_2 - m\Omega^2)e^{-j\pi/2} + jaC\Omega^4}{[(k_1 - m\Omega^2)(k_2 - m\Omega^2) - a^2\Omega^4]} \\ &= \frac{-jC\Omega^2(k_2 - m\Omega^2 - a\Omega^2)}{[(k_1 - m\Omega^2)(k_2 - m\Omega^2) - a^2\Omega^4]} \end{aligned} \quad (3.4.27)$$

$$\begin{aligned} \underline{A}_{e2} &= \frac{\begin{vmatrix} k_1 - m\Omega^2 & C\Omega^2 e^{-j\pi/2} \\ ja\Omega^2 & C\Omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_1 - m\Omega^2 & -ja\Omega^2 \\ ja\Omega^2 & k_2 - m\Omega^2 \end{vmatrix}} = \frac{C\Omega^2(k_1 - m\Omega^2) + jaC\Omega^4 e^{-j\pi/2}}{[(k_1 - m\Omega^2)(k_2 - m\Omega^2) - a^2\Omega^4]} \\ &= \frac{C\Omega^2(k_1 - m\Omega^2 - a\Omega^2)}{[(k_1 - m\Omega^2)(k_2 - m\Omega^2) - a^2\Omega^4]} \end{aligned} \quad (3.4.28)$$

Des relations (3.4.27) et (3.4.28) on obtient $\varphi_{e1} = -\pi/2$, $\varphi_{e2} = 0$

$$A_{e1} = \frac{[k_2 - (m+a)\Omega^2]C\Omega^2}{(k_1 - m\Omega^2)(k_2 - m\Omega^2) - a^2\Omega^4} \quad (3.4.29)$$

et

$$A_{e2} = \frac{[k_1 - (m+a)\Omega^2]C\Omega^2}{(k_1 - m\Omega^2)(k_2 - m\Omega^2) - a^2\Omega^4} \quad (3.4.30)$$

d'où $q_{1p} = A_{e1} \sin\Omega t$ et $q_{2p} = A_{e2} \cos\Omega t$

Comme A_{e1} et A_{e2} sont différentes les orbites décrites par le rotor sont des ellipses. Les expressions des vitesses critiques correspondent à l'annulation du dénominateur de (3.4.29) et de (3.4.30) c'est-à-dire :

$$(k_1 - m\Omega^2)(k_2 - m\Omega^2) - a^2\Omega^4 = 0 \quad (3.4.31)$$

qui se réécrit :

$$(m^2 - a^2)\Omega^4 - m(k_1 + k_2)\Omega^2 + k_1 k_2 = 0 \quad (3.4.32)$$

On remarque que cette équation est conforme avec l'équation (3.4.22) pour le cas où $s = 1$. les deux vitesses de rotations critiques correspondent aux points A et B. Cependant le sens de précession est donné par le produit des amplitudes. En effet si $A_{e1}.A_{e2} > 0$ la précession est directe et si $A_{e1}.A_{e2} < 0$ la précession est inverse.

Pour connaître le signe de $A_{e1}.A_{e2}$, il est suffit de connaître le signe de la fonction suivante :

$$f(\Omega^2) = [k_1 - (m+a)\Omega^2][k_2 - (m+a)\Omega^2] \quad (3.4.33)$$

qui s'annule pour les deux valeurs : $\Omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m+a}}$ $\Omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m+a}}$

Ces dernières permettent d'avoir le sens de la précession pour chaque valeur de la vitesse de rotation (voir Fig. 3.14).

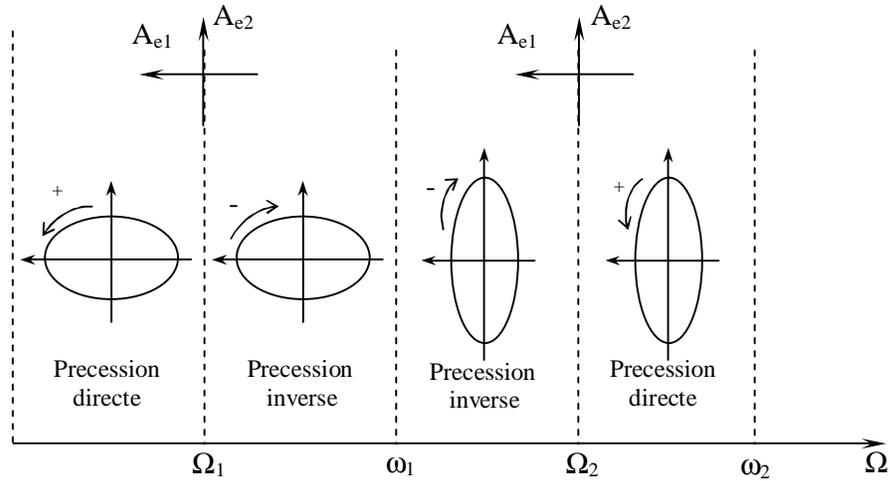


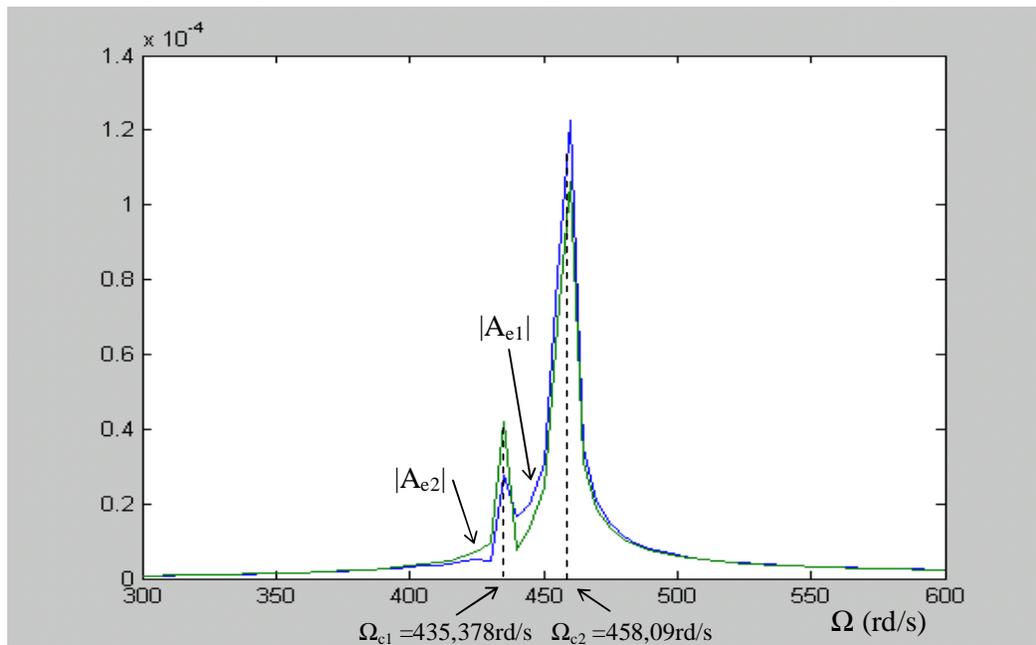
Fig. 3.14 Variation du sens de la précession.

Pour le modèle de rotor défini par les équations (3.4.1) et (3.4.2) on a :

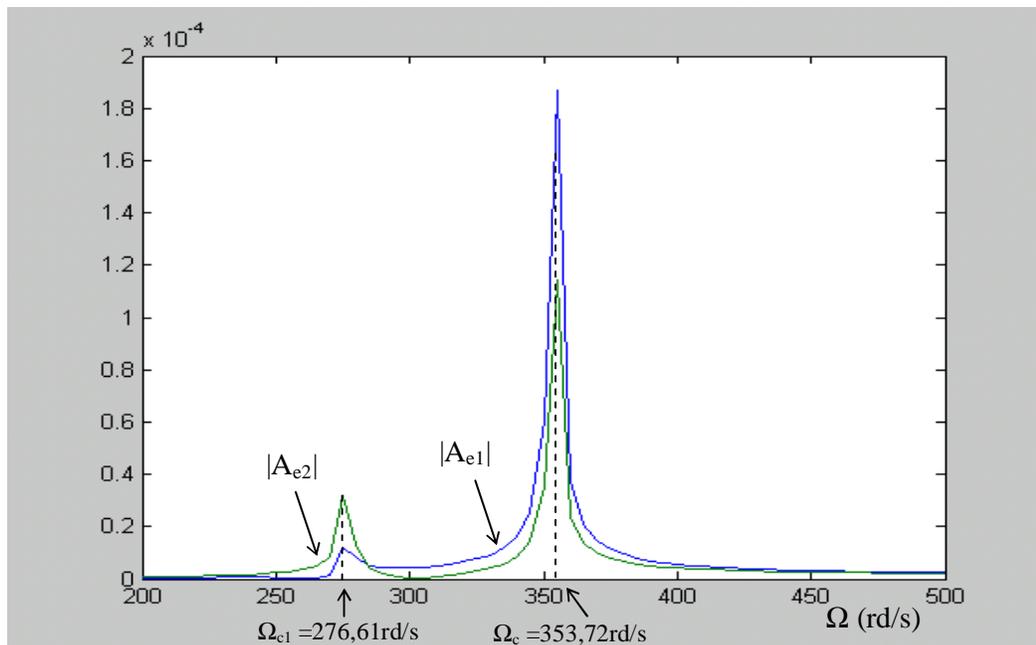
$$A_{e1} = \frac{[2,962 \cdot 10^6 - 15,497 \Omega^2] 1,377 \cdot 10^{-5} \Omega^2}{217 \Omega^4 - 8,667 \cdot 10^7 \Omega^2 + 8,63 \cdot 10^{12}} \quad (3.4.34)$$

$$A_{e2} = \frac{[2,914 \cdot 10^6 - 15,497 \Omega^2] 1,377 \cdot 10^{-5} \Omega^2}{217 \Omega^4 - 8,667 \cdot 10^7 \Omega^2 + 8,63 \cdot 10^{12}} \quad (3.4.35)$$

A_{e1} et A_{e2} sont représentés, en valeur absolue, sur la figure 3.15 où l'on voit que le phénomène de résonance se produit pour deux valeurs critiques contrairement au cas symétrique ou il se produit pour une seule valeur. D'autre part quand $\Omega \gg$ les amplitudes A_{e1} et A_{e2} seront égales et tendent vers la valeur constante $9,8338 \cdot 10^{-7} m$.



Modèle étudié



Modèle Lalanne-Ferraris

Fig. 3.15 Réponse au balourd

b) Réponse à une force asynchrone

En prenant la même forme de force que pour le modèle symétrique, les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + k_1 q_1 = F \sin s\Omega t \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + k_2 q_2 = F \cos s\Omega t \end{cases} \quad (3.4.36)$$

En procédant de la même manière que précédemment, c'est-à-dire en cherchant des solutions de la forme :

$$\begin{cases} q_{1p} = A_{e1} \cos(\Omega t + \phi_{e1}) \\ q_{2p} = A_{e2} \cos(\Omega t + \phi_{e2}) \end{cases} \quad (3.4.37)$$

Les calculs nous amènent à :

$$A_{e1} = \frac{[k_2 - (ms^2 + as)\Omega^2]F}{s^2(s^2m^2 - a^2)\Omega^4 - ms^2(k_1 + k_2)\Omega^2 + k_1 k_2} \quad (3.4.38)$$

$$A_{e2} = \frac{[k_1 - (mh^2 + as)\Omega^2]F}{s^2(s^2m^2 - a^2)\Omega^4 - ms^2(k_1 + k_2)\Omega^2 + k_1 k_2} \quad (3.4.39)$$

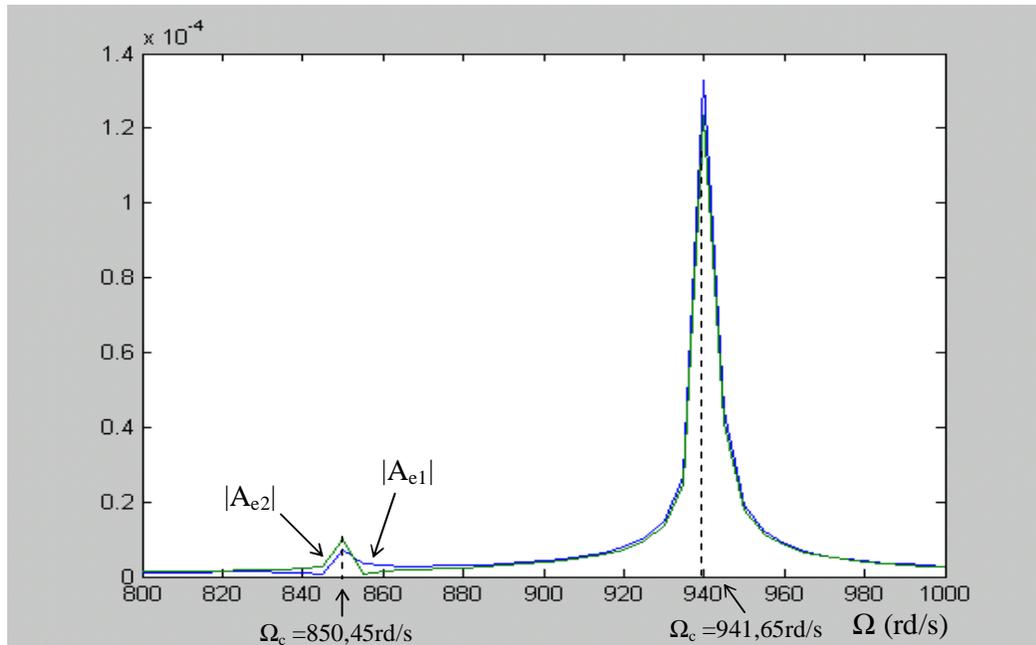
Les vitesses critiques sont données par la même équation (3.4.22) les orbites décrites sont des ellipses vu que $Q_1 \neq Q_2$. Le sens de précession est donné par le signe du produit de $Q_1 \cdot Q_2$ pour notre cas on a :

$$A_{e1} = \frac{(2,962 \cdot 10^6 - 4,0612\Omega^2)F}{13,45795\Omega^4 - 21,667 \cdot 10^6\Omega^2 + 8,631 \cdot 10^{12}}$$

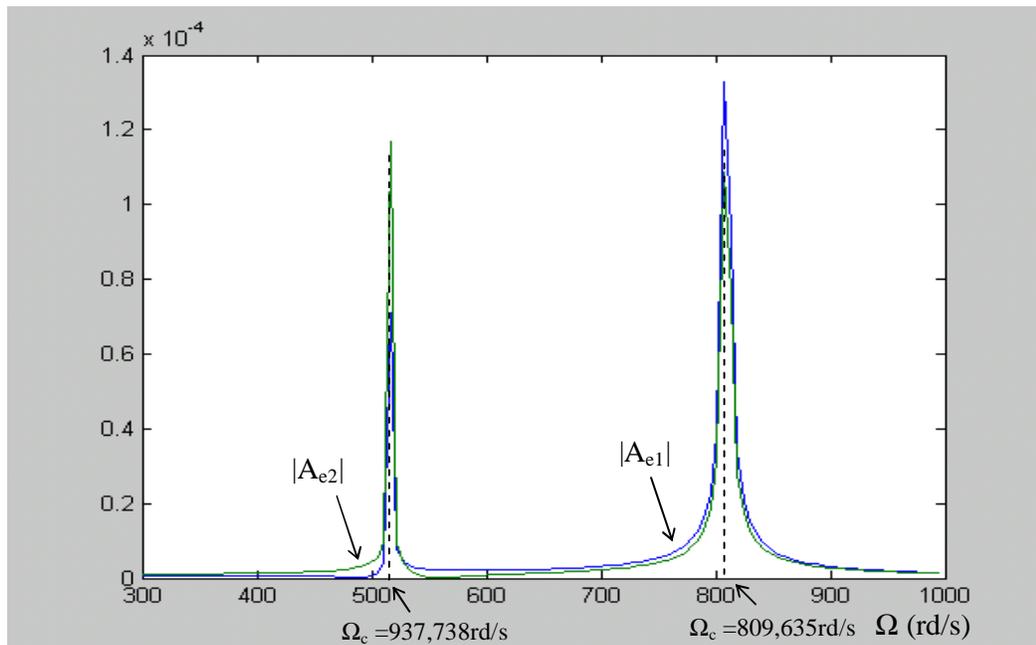
$$A_{e2} = \frac{(2,914 \cdot 10^6 - 4,0612\Omega^2)F}{13,45795\Omega^4 - 21,667 \cdot 10^6\Omega^2 + 8,631 \cdot 10^{12}}$$

L'amplitude maximale pour A_{e1} ou A_{e2} est représentée pour $F=1$ N sur la figure 3.16.

Les vitesses critiques sont les vitesses qui rendent l'amplitude infini et le dénominateur nul.



Modèle étudié



Modèle Lalande-Ferraris

Fig. 3.16 Réponse à une force asynchrone

3.5 ETUDE DU MODELE AMORTI

Les rotors qui sont généralement supportés par des paliers hydrodynamiques sont amortis et l'amortissement le plus important est celui de type visqueux. Le modèle étudié comporte deux raideurs k_{xx} , k_{zz} (avec $k_{xz} = k_{zx} = 0$) et deux amortissements c_{xx} et c_{zz} (avec $c_{xz} = c_{zx} = 0$). Pour cela on détermine l'expression du travail virtuel, soit :

$$\delta W = -k_{xx} u \delta u - k_{zz} w \delta w - c_{xx} \dot{u} \delta u - c_{zz} \dot{w} \delta w \quad (3.5.1)$$

avec $u = f(y).q_1 \Rightarrow \delta u = f(y)\delta q_1$ (3.5.2)

et $w = f(y)q_2 \Rightarrow \delta w = f(y)\delta q_2$ (3.5.3)

Après substitution de (3.5.2) et (3.5.3) dans (3.5.1) est avec le palier placé en $y_2 = 2L/3$ nous aurons :

$$\delta w = -k_{xx} f^2(y_2)q_1 \delta q_1 - k_{zz} f^2(y_2)q_2 \delta q_2 \quad (3.5.4)$$

ce qui donne :

$$F.q_1 + F.\dot{q}_1 = [-k_{xx} f^2(y_2)]q_1 + [-C_{xx} f^2(y_2)]\dot{q}_1 \quad (3.5.5)$$

$$F.q_2 + F.\dot{q}_2 = [-k_{zz} f^2(y_2)]q_2 + [-C_{zz} f^2(y_2)]\dot{q}_2 \quad (3.5.6)$$

L'introduction de ces dernières relations dans l'application des équations de Lagrange conduit aux équations du mouvement :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = -k_{xx} f^2(y_2)q_1 - c_{xx} f^2(y_2)\dot{q}_1 + m^* d \Omega^2 \sin \Omega t \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = -k_{zz} f^2(y_2)q_2 - c_{zz} f^2(y_2)\dot{q}_2 + m^* d \Omega^2 \cos \Omega t \end{cases} \quad (3.5.7)$$

Qu'on peut les mettre sous la forme générale :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + c_1\dot{q}_1 + k_1 q_1 = C \Omega^2 \sin \Omega t \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + c_2\dot{q}_2 + k_2 q_2 = C \Omega^2 \cos \Omega t \end{cases} \quad (3.5.8)$$

avec $k_1 = k_{xx} f^2(y_2) + k$, $k_2 = k_{zz} f^2(y_2) + k$, $c_1 = c_{xx} f^2(y_2)$, $c_2 = c_{zz} f^2(y_2)$ et $C = m^*d$.

3.5.1 Détermination des fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation

L'étude des solutions homogènes permet d'avoir les fréquences qui permettent de localiser les vitesses critiques à l'aide du diagramme de Campbell. Pour cela on cherche les solutions du système homogène (sans second membre), c'est-à-dire :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_{h1} - a\Omega\dot{q}_{h2} + c_1\dot{q}_{h1} + k_1q_{h1} = 0 \\ m\ddot{q}_{h2} + a\Omega\dot{q}_{h1} + c_2\dot{q}_{h2} + k_2q_{h2} = 0 \end{cases} \quad (3.5.9)$$

Puisqu'il est amorti on cherche des solutions de la forme :

$$\begin{cases} q_{1h} = A_1 \exp rt \\ q_{2h} = A_2 \exp rt \end{cases} \quad (3.5.10)$$

Après substitution on aura des équations qu'on peut les mettre sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} mr^2 + c_1r + k_1 & -a\Omega r \\ a\Omega r & mr^2 + c_2r + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.5.11)$$

Les solutions triviales $A_1 = A_2 = 0$ sont sans intérêt; On s'intéresse donc aux solutions non triviales qui rendent le déterminant nul. Pour cela on cherche les valeurs de r qui annulent le déterminant, soit :

$$m^2r^4 + m(c_1 + c_2)r^3 + (k_1m + k_2m + a^2\Omega^2 + c_1c_2)r^2 + (k_1c_2 + k_2c_1)r + k_1k_2 = 0 \quad (3.5.12)$$

Les racines de cette équation des paires de quantités complexes conjuguées de la forme :

$$r_i = -\lambda_i \pm j\omega_i \quad (3.5.13)$$

où ω_i est la $i^{\text{ème}}$ fréquence et λ_i le facteur d'amortissement visqueux correspondant.

Ainsi la solution aura la forme :

$$\begin{cases} q_{1h} = A_1 \exp(-\lambda_1 t) \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ q_{2h} = A_2 \exp(-\lambda_1 t) \cos(\omega_1 t + \phi_2) \end{cases} \quad (3.5.14)$$

avec $i=1,2$ dans ce cas d'étude.

Considérons le modèle étudié avec les caractéristiques du palier suivantes ($\beta = \text{cste}$) :

k_{xx}	k_{zz}	c_{xx}	c_{zz}
10^5 N/m	$5 \cdot 10^5 \text{ N/m}$	$100\beta \text{ Ns/m}$	$500\beta \text{ Ns/m}$

Les équations du système homogène s'écrivent :

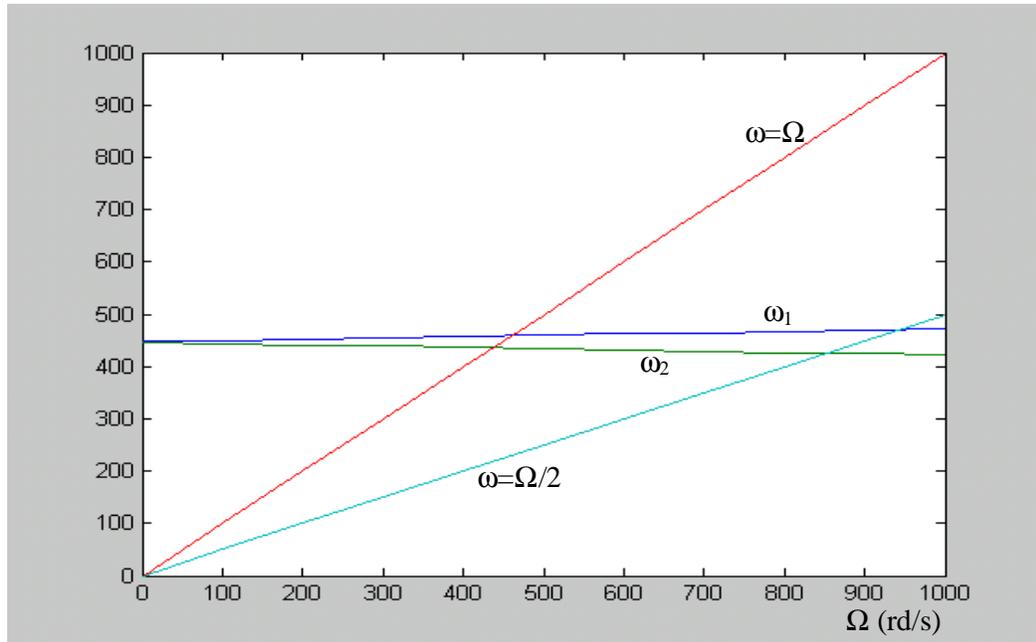
$$\begin{cases} 14,75 \phi_1 - 0,7474 \Omega \phi_2 + 2,9236 \cdot 10^6 q_1 + 9,61 \beta \phi_1 = 0 \\ 14,75 \phi_2 + 0,7474 \Omega \phi_1 + 2,962 \cdot 10^6 q_2 + 48,05 \beta \phi_2 = 0 \end{cases} \quad (3.5.14)$$

Et l'équation aux valeurs propres ($\det = 0$) sera :

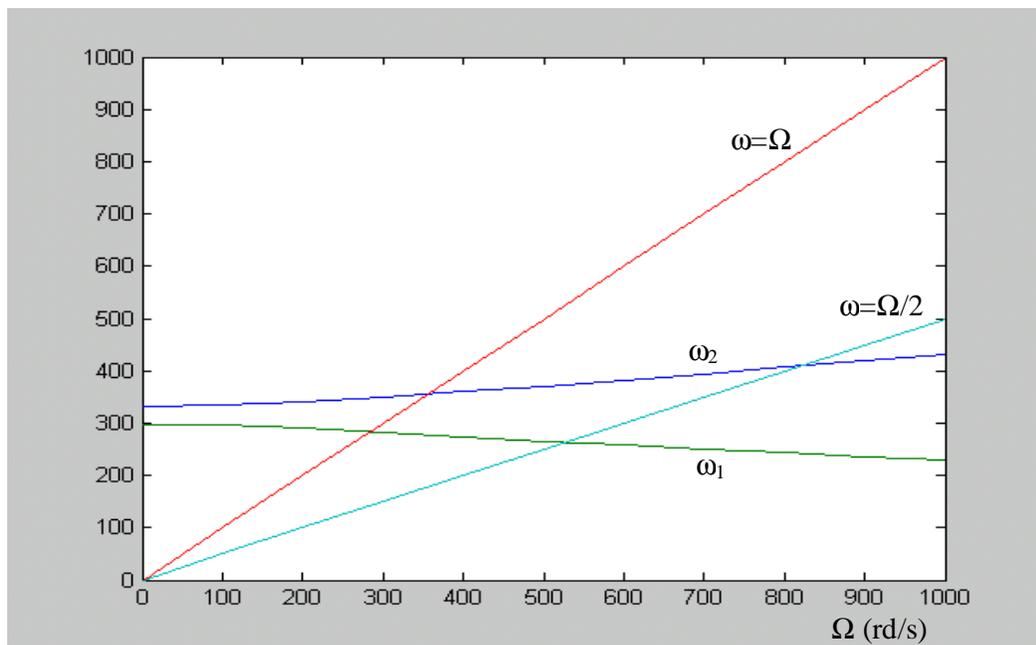
$$217,5624r^4 + 850,485r^3 + (86,8126 \cdot 10^6 + 461,76\beta^2 + 0,5586\Omega^2)r^2 + 168,944 \cdot 10^6 \beta r + 8,6597 \cdot 10^{12} = 0 \quad (3.5.15)$$

Les racines de cette équation ont été déterminées numériquement et sont présentées dans l'annexe 2 avec celles de Lalanne-Ferraris pour des valeurs de β correspondantes à des amortissements très faibles, faibles, critiques et forts. A partir de celles-ci les valeurs des fréquences qui correspondent aux parties imaginaires sont tirées et représentées en fonction de la vitesse de rotation par le diagramme de Campbell. Elles sont données sur les figures 3.17a 3.17b 3.17c 3.18d pour le modèle étudié et le modèle de Lalanne-Ferraris.

Parmi les racines trouvées certaines valeurs ont des parties réelles positives ($-\lambda_i$) ce qui correspond à des formes exponentielles croissantes avec le temps d'où des instabilités du rotor. D'autre part quelques valeurs sont des réels négatifs d'où l'on a le régime apériodique qui est sans oscillations.

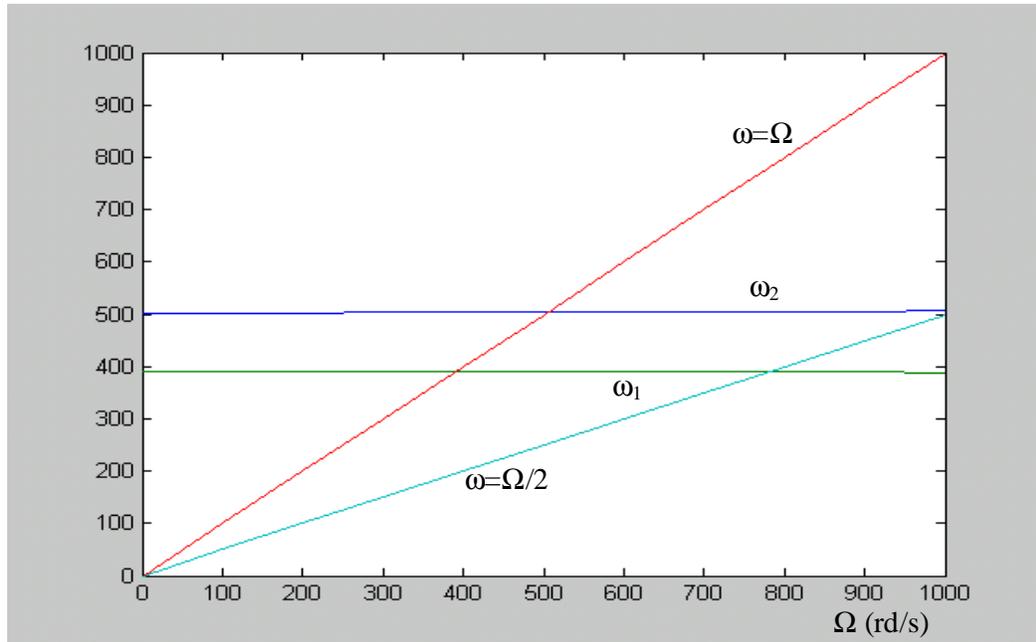


Modèle étudié ($\beta=1$)

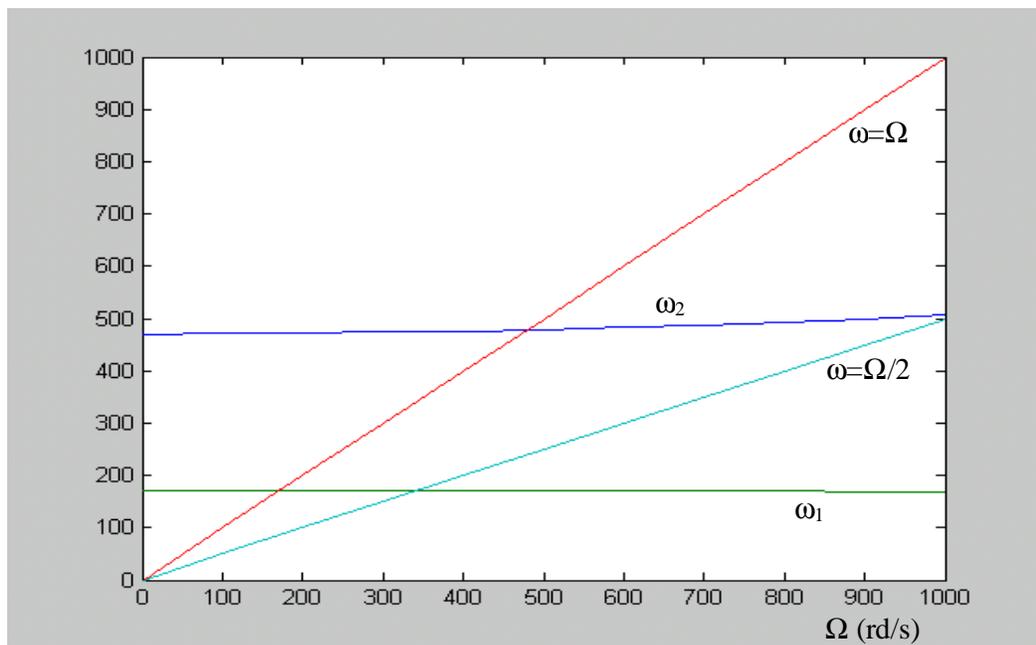


Modèle Lalande-Ferraris ($\beta=1$)

Fig. 3.17a Diagramme de Campbell pour un amortissement très faible.

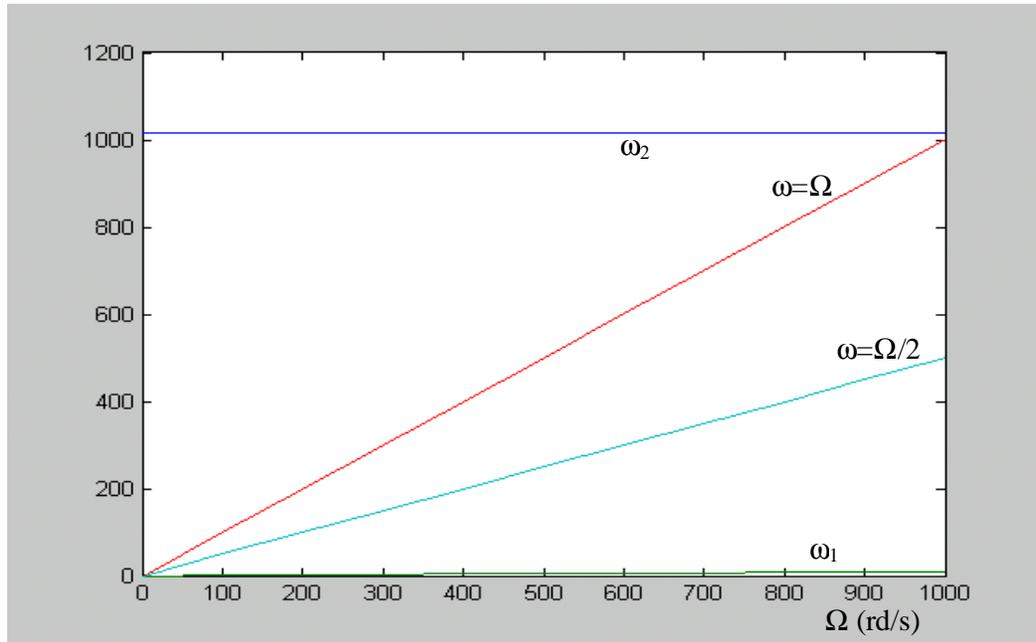


Modèle étudié ($\beta=15$)

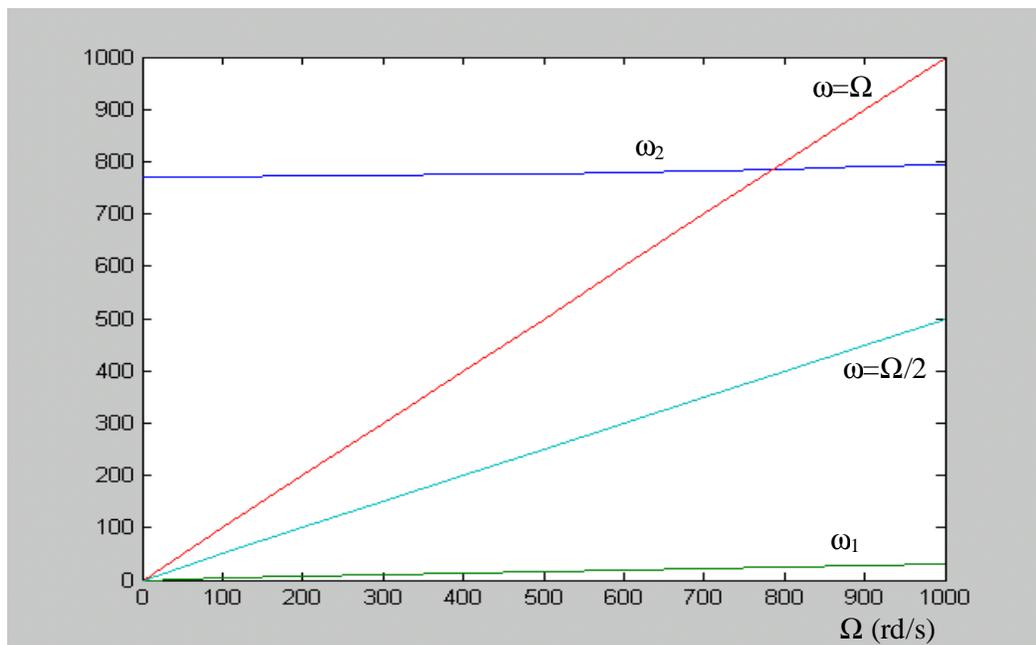


Modèle Lalanne-Ferraris ($\beta=15$)

Fig. 3.17b Diagramme de Campbell pour un amortissement faible.

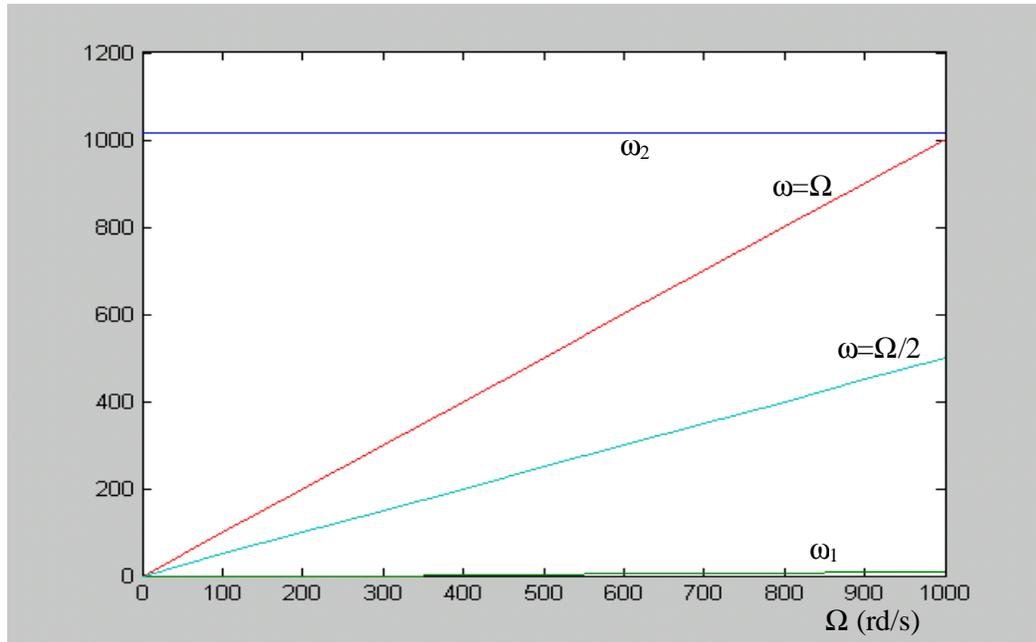


Modèle étudié ($\beta=512,245$)

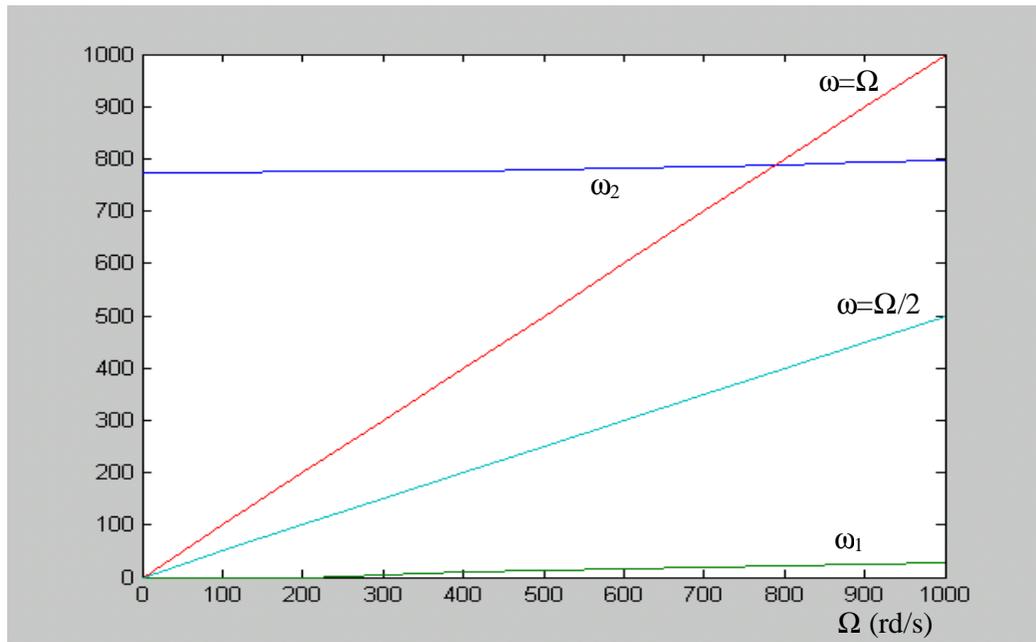


Modèle Lalanne-Ferraris ($\beta=51,7275$)

Fig. 3.17c Diagramme de Campbell pour un amortissement critique.



Modèle étudié ($\beta=512,4$)



Modèle Lalanne-Ferraris ($\beta=52$)

Fig. 3.17d Diagramme de Campbell pour un amortissement fort.

3.5.1 Réponses aux forces d'excitations

a) Réponses au balourd

Dans le cas de la présence d'une force d'excitation due au balourd, l'étude de la solution particulière se fait en considérant le système avec second membre, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 14,75 \ddot{q}_1 - 0,7474 \Omega \dot{q}_2 + 2,9236 \cdot 10^6 q_1 + 9,61 \beta \dot{q}_1 = 1,377 \cdot 10^{-5} \Omega^2 \sin \Omega t \\ 14,75 \ddot{q}_2 + 0,7474 \Omega \dot{q}_1 + 2,962 \cdot 10^6 q_2 + 48,05 \beta \dot{q}_2 = 1,377 \cdot 10^{-5} \Omega^2 \cos \Omega t \end{cases} \quad (3.5.16)$$

Les solutions particulières dépendent de la nature de l'excitation. Puisque cette dernière est sinusoïdale de fréquence Ω elles sont de la forme :

$$\begin{cases} q_{1p} = A_{e1} \cos(\Omega t + \phi_{e1}) \\ q_{2p} = A_{e2} \cos(\Omega t + \phi_{e2}) \end{cases} \quad (3.5.17)$$

Qu'on peut mettre sous la forme complexe :

$$\begin{cases} \underline{q}_{1p} = \underline{A}_{e1} \exp j\Omega t \\ \underline{q}_{2p} = \underline{A}_{e2} \exp j\Omega t \end{cases} \quad (3.5.18)$$

avec $\underline{A}_{e1} = A_{e1} \exp j\phi_{e1}$ et $\underline{A}_{e2} = A_{e2} \exp j\phi_{e2}$.

et que l'on reporte dans le système inhomogène complexe :

$$\begin{cases} m \ddot{\underline{q}}_{1p} - a \Omega \dot{\underline{q}}_{2p} + c_1 \dot{\underline{q}}_{1p} + k_1 \underline{q}_{1p} = C \Omega^2 \exp j(\Omega t - \pi/2) \\ m \ddot{\underline{q}}_{2p} + a \Omega \dot{\underline{q}}_{1p} + c_2 \dot{\underline{q}}_{2p} + k_2 \underline{q}_{2p} = C \Omega^2 \exp j(\Omega t) \end{cases} \quad (3.5.19)$$

Pour avoir

$$\begin{bmatrix} k_1 - m\Omega^2 + jc_1\Omega & -ja\Omega^2 \\ ja\Omega^2 & k_2 - m\Omega^2 + jc_2\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_{e1} \\ \underline{A}_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\Omega^2 \exp(-j\pi/2) \\ C\Omega^2 \end{bmatrix} \quad (3.5.20)$$

Cette dernière équation représente un système linéaire de deux équations à deux inconnues qui sont \underline{A}_{e1} et \underline{A}_{e2} avec un paramètre qui est Ω . Les solutions dépendent de ce dernier et la méthode du déterminant nous donne :

$$\begin{aligned}\underline{A}_{e1} &= \frac{\begin{vmatrix} C\Omega^2 e^{-j\pi/2} & -ja\Omega^2 \\ C\Omega^2 & k_2 - m\Omega^2 + jc_2\Omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_1 - m\Omega^2 + jc_1\Omega & -ja\Omega^2 \\ ja\Omega^2 & k_2 - m\Omega^2 + jc_2\Omega \end{vmatrix}} \\ &= \frac{-jC\Omega^2(k_2 - m\Omega^2 + jc_2\Omega) + jaC\Omega^4}{(k_1 - m\Omega^2 + jc_1\Omega)(k_2 - m\Omega^2 + jc_2\Omega) - a^2\Omega^4}\end{aligned}\quad (3.5.21)$$

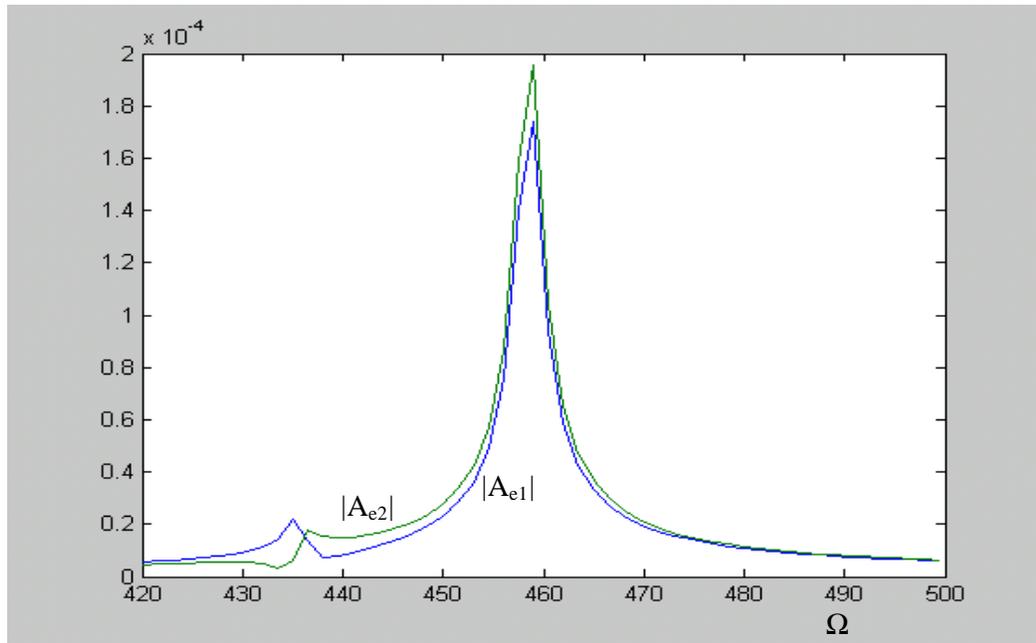
$$\begin{aligned}\underline{A}_{e2} &= \frac{\begin{vmatrix} k_1 - m\Omega^2 + jc_1\Omega & C\Omega^2 e^{-j\pi/2} \\ ja\Omega^2 & C\Omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_1 - m\Omega^2 + jc_1\Omega & -ja\Omega^2 \\ ja\Omega^2 & k_2 - m\Omega^2 + jc_2\Omega \end{vmatrix}} \\ &= \frac{C\Omega^2(k_1 - m\Omega^2 + jc_1\Omega) - aC\Omega^4}{(k_1 - m\Omega^2 + jc_1\Omega)(k_2 - m\Omega^2 + jc_2\Omega) - a^2\Omega^4}\end{aligned}\quad (3.5.22)$$

Pour le modèle de rotor défini par les équations (3.5.16) on a :

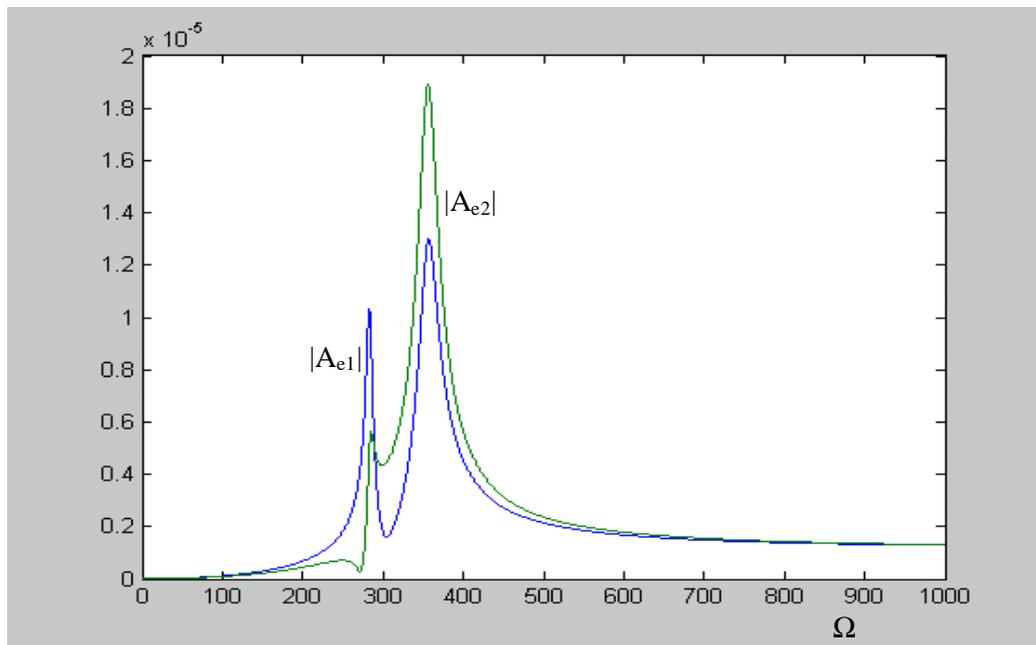
$$\underline{A}_{e1} = \frac{-j1,377 \cdot 10^{-5} \Omega^2 (2,962 \cdot 10^6 - 14,75\Omega^2 + j48,05\beta\Omega) + j1,029 \cdot 10^{-5} \Omega^4}{(2,9236 \cdot 10^6 - 14,75\Omega^2 + j9,61\beta\Omega)(2,962 \cdot 10^6 - 14,75\Omega^2 + j48,05\beta\Omega) - 0,558\Omega^4}\quad (3.5.23)$$

$$\underline{A}_{e2} = \frac{1,377 \cdot 10^{-5} \Omega^2 (2,9236 \cdot 10^6 - 14,75\Omega^2 + j9,61\beta\Omega) - 1,029 \cdot 10^{-5} \Omega^4}{(2,9236 \cdot 10^6 - 14,75\Omega^2 + j9,61\beta\Omega)(2,962 \cdot 10^6 - 14,75\Omega^2 + j48,05\beta\Omega) - 0,558\Omega^4}\quad (3.5.24)$$

Les modules des amplitudes \underline{A}_{e1} et \underline{A}_{e2} sont représentés sur la figure 3.18 (a, b, c et d) pour différentes valeurs de l'amortissement. On remarque clairement la diminution du pic de résonance jusqu'à sa disparition avec l'augmentation de l'amortissement.

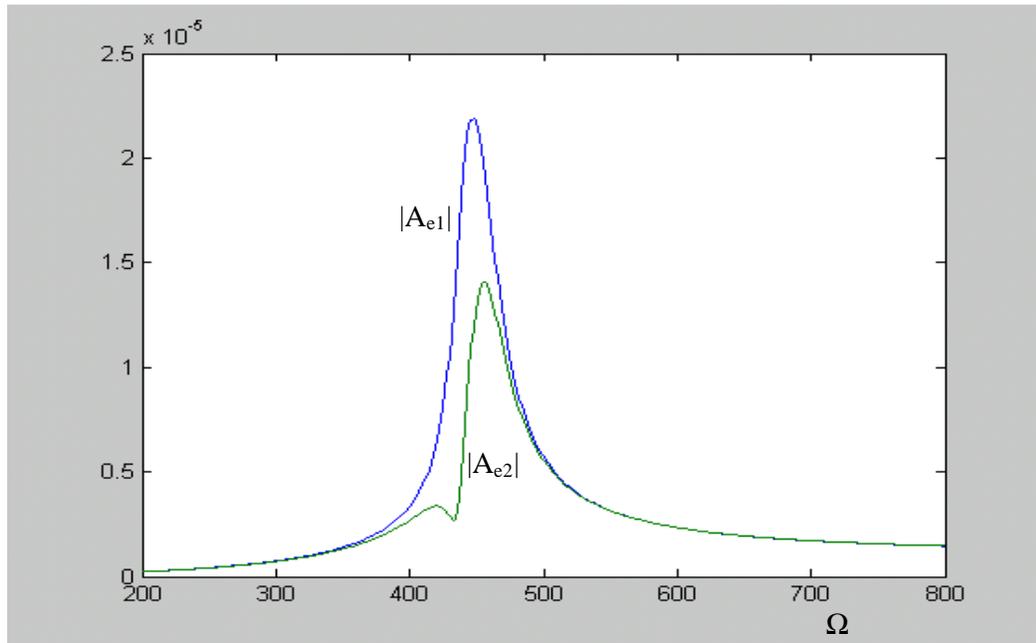


Modèle étudié ($\beta=1$)

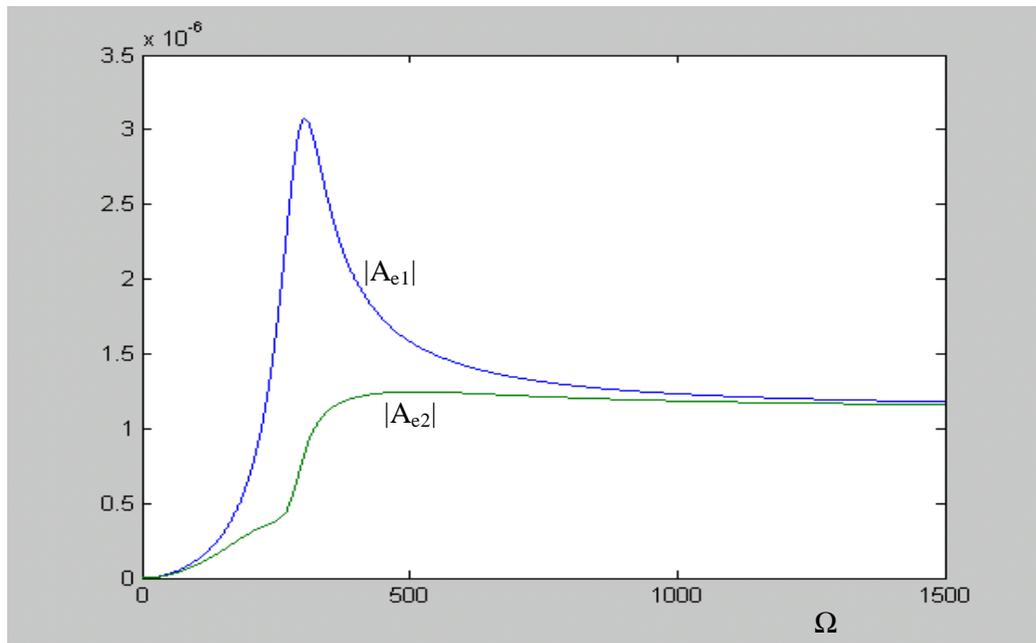


Modèle Lalande-Ferraris ($\beta=1$)

Fig. 3.18a Réponse au balourd pour un amortissement très faible.

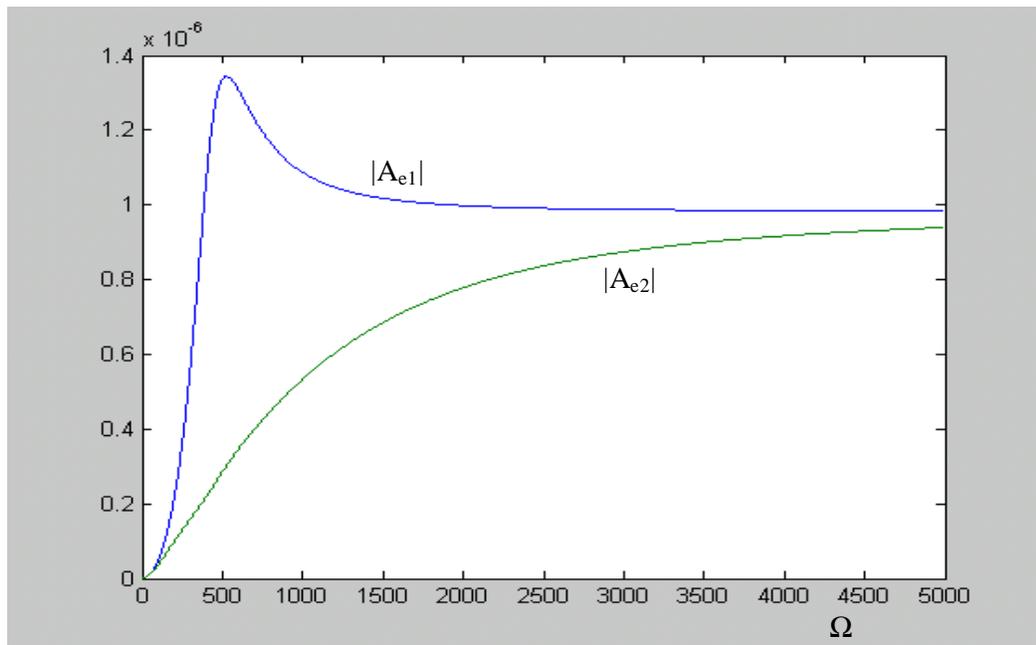


Modèle étudié ($\beta=15$)

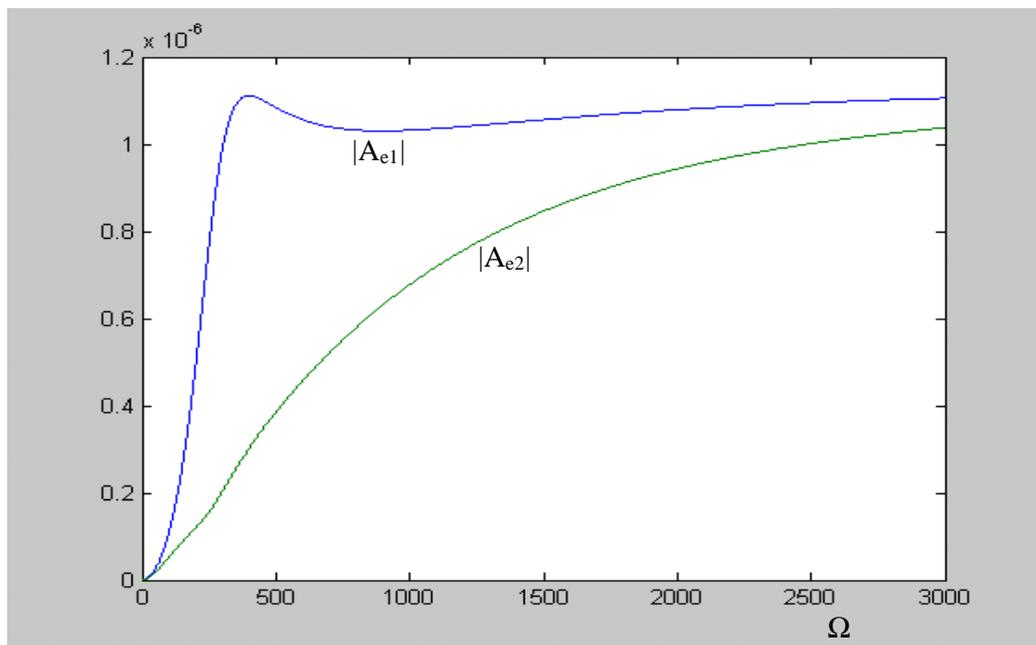


Modèle Lalanne-Ferraris ($\beta=15$)

Fig. 3.18b Réponse au balourd pour un amortissement faible.

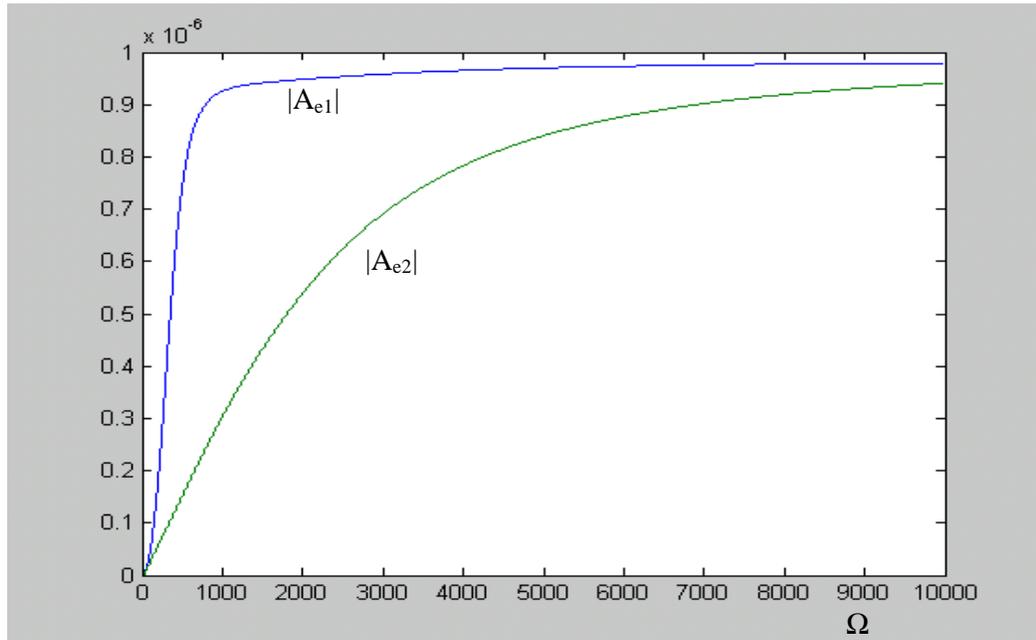


Modèle étudié ($\beta=512$)

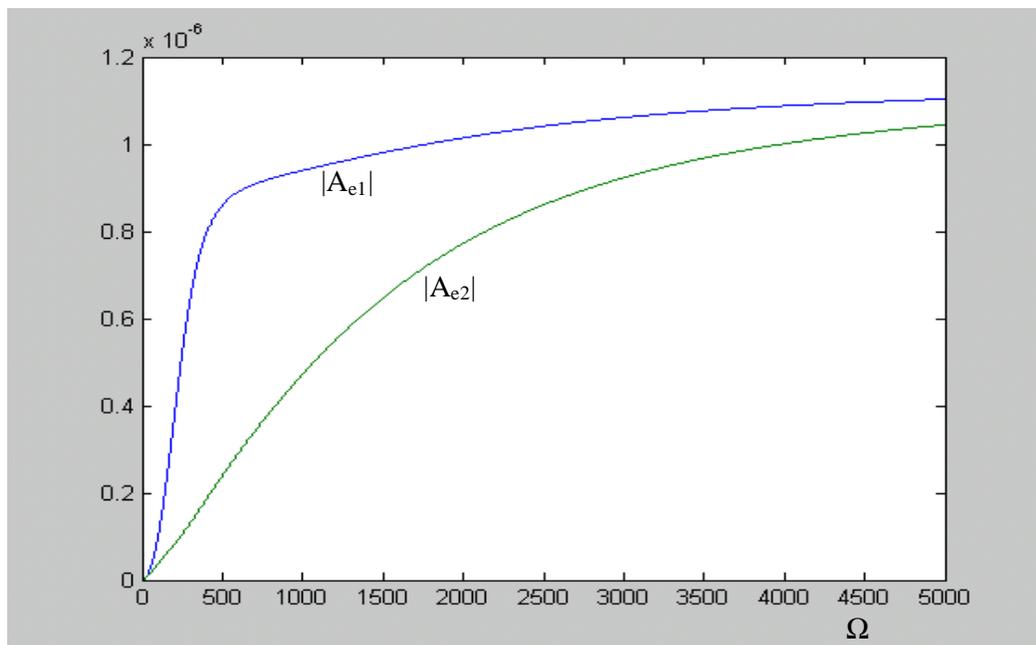


Modèle Lalanne-Ferraris ($\beta=52$)

Fig. 3.18c Réponse au balourd pour un amortissement intermédiaire.



Modèle étudié ($\beta=950$)



Modèle Lallane-Ferraris ($\beta=80$)

Fig. 3.18d Réponse au balourd pour un amortissement très fort.

b) Réponses à la force asynchrone

On prend dans ce cas la même forme de l'excitation prise pour l'étude du système non amorti. C'est à dire on cherche des solutions particulières pour le système :

$$\begin{cases} 14,75 \ddot{\phi}_1 - 0,7474\Omega \dot{\phi}_2 + 2,9236.10^6 q_1 + 9.61\beta \phi_1 = F \sin s\Omega t \\ 14,75 \ddot{\phi}_2 + 0,7474\Omega \dot{\phi}_1 + 2,962.10^6 q_2 + 48.05\beta \phi_2 = F \cos s\Omega t \end{cases} \quad (3.5.23)$$

On procède de la même façon que pour le cas du balourd et cela par la recherche de solutions de la forme :

$$\begin{cases} q_{1p} = A_{e1} \cos(s\Omega t + \phi_{e1}) \\ q_{2p} = A_{e2} \cos(s\Omega t + \phi_{e2}) \end{cases} \quad (3.5.24)$$

qu'on peut mettre sous la forme complexe :

$$\begin{cases} \underline{q}_{1p} = \underline{A}_{e1} \exp js\Omega t \\ \underline{q}_{2p} = \underline{A}_{e2} \exp js\Omega t \end{cases} \quad (3.5.25)$$

avec $\underline{A}_{e1} = A_{e1} \exp j\phi_{e1}$ et $\underline{A}_{e2} = A_{e2} \exp j\phi_{e2}$.

et que l'on reporte dans le système inhomogène complexe :

$$\begin{cases} m \ddot{\underline{q}}_{1p} - a\Omega \dot{\underline{q}}_{2p} + c_1 \dot{\underline{q}}_{1p} + k_1 \underline{q}_{1p} = F \exp j(s\Omega t - \pi/2) \\ m \ddot{\underline{q}}_{2p} + a\Omega \dot{\underline{q}}_{1p} + c_2 \dot{\underline{q}}_{2p} + k_2 \underline{q}_{2p} = F \exp j(s\Omega t) \end{cases} \quad (3.5.26)$$

Pour avoir

$$\begin{bmatrix} k_1 - ms^2\Omega^2 + jc_1 s\Omega & -jas\Omega^2 \\ jas\Omega^2 & k_2 - ms^2\Omega^2 + jc_2 s\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_{e1} \\ \underline{A}_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \exp(-j\pi/2) \\ F \end{bmatrix} \quad (3.5.27)$$

Cette dernière équation représente un système linéaire de deux équations à deux inconnues qui sont \underline{A}_{e1} et \underline{A}_{e2} avec un paramètre qui est Ω . Les solutions dépendent de ce dernier et la méthode du déterminant nous donne :

$$\begin{aligned} \underline{A}_{e1} &= \frac{\begin{vmatrix} Fe^{-j\pi/2} & -jas\Omega^2 \\ F & k_2 - ms^2\Omega^2 + jc_2s\Omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_1 - ms^2\Omega^2 + jc_1s\Omega & -jas\Omega^2 \\ jas\Omega^2 & k_2 - ms^2\Omega^2 + jc_2s\Omega \end{vmatrix}} \\ &= \frac{-jF(k_2 - ms^2\Omega^2 + jc_2s\Omega) + jasF\Omega^2}{(k_1 - ms^2\Omega^2 + jc_1s\Omega)(k_2 - ms^2\Omega^2 + jc_2s\Omega) - a^2s^2\Omega^4} \end{aligned} \quad (3.5.28)$$

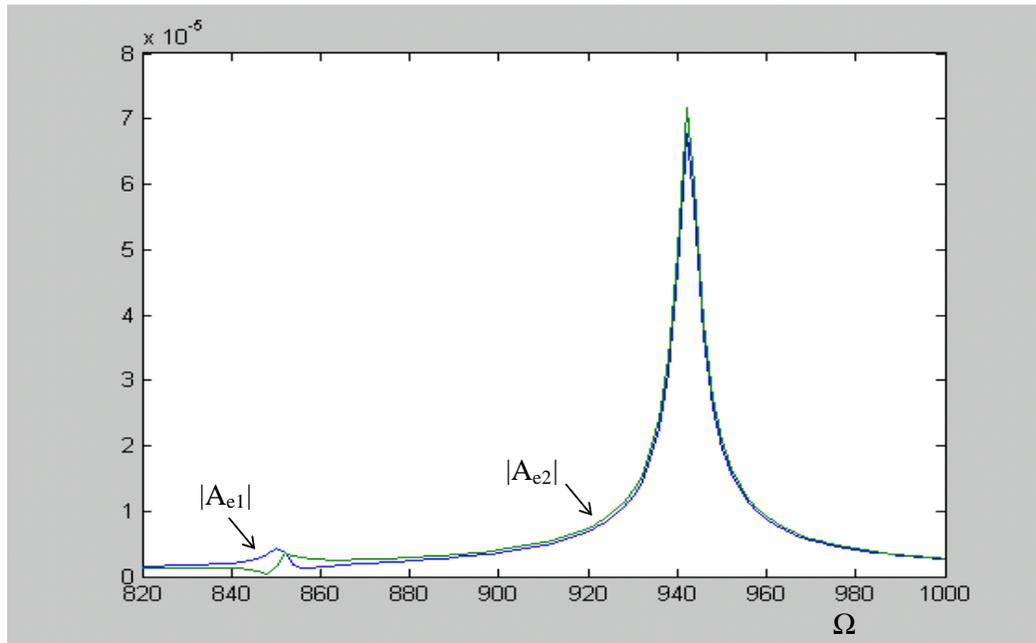
$$\begin{aligned} \underline{A}_{e2} &= \frac{\begin{vmatrix} k_1 - ms^2\Omega^2 + jc_1s\Omega & Fe^{-j\pi/2} \\ jas\Omega^2 & F \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_1 - ms^2\Omega^2 + jc_1s\Omega & -jas\Omega^2 \\ jas\Omega^2 & k_2 - ms^2\Omega^2 + jc_2s\Omega \end{vmatrix}} \\ &= \frac{F(k_1 - ms^2\Omega^2 + jc_1s\Omega) - asF\Omega^2}{(k_1 - ms^2\Omega^2 + jc_1s\Omega)(k_2 - ms^2\Omega^2 + jc_2s\Omega) - a^2s^2\Omega^4} \end{aligned} \quad (3.5.29)$$

Pour le modèle de rotor défini par les équations (3.5.23) on a :

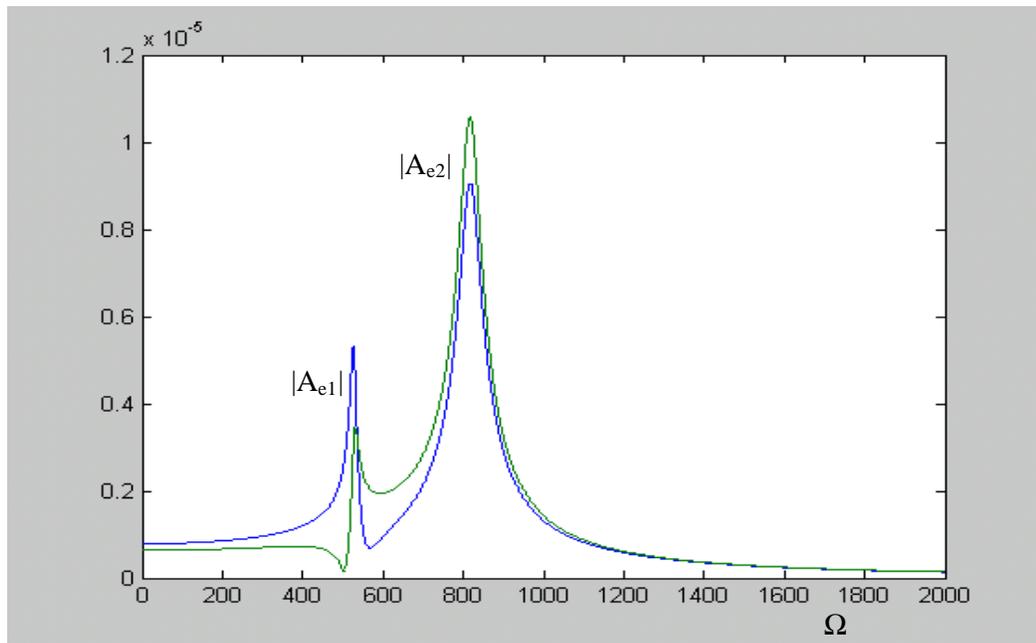
$$\underline{A}_{e1} = \frac{-jF(2,962 \cdot 10^6 - 3,687\Omega^2 + j24,025\Omega) + j0,3737F\Omega^2}{(2,9236 \cdot 10^6 - 3,687\Omega^2 + j4,8\beta\Omega)(2,962 \cdot 10^6 - 3,687\Omega^2 + j24,025\beta\Omega) - 0,139\Omega^4} \quad (3.5.30)$$

$$\underline{A}_{e2} = \frac{F(2,9236 \cdot 10^6 - 3,687\Omega^2 + j4,8\beta\Omega) - 0,558F\Omega^2}{(2,9236 \cdot 10^6 - 3,687\Omega^2 + j4,8\beta\Omega)(2,962 \cdot 10^6 - 3,687\Omega^2 + j24,025\beta\Omega) - 0,139\Omega^4} \quad (3.5.31)$$

Les modules des amplitudes \underline{A}_{e1} et \underline{A}_{e2} sont représentés sur la figure 3.19 (a, b, c et d) pour $F= 1N$ et pour différentes valeurs de l'amortissement. Les mêmes constatations que pour le cas du balourd sont faites c'est-à-dire on diminue le pic de résonance jusqu'à sa disparition avec l'augmentation de l'amortissement.

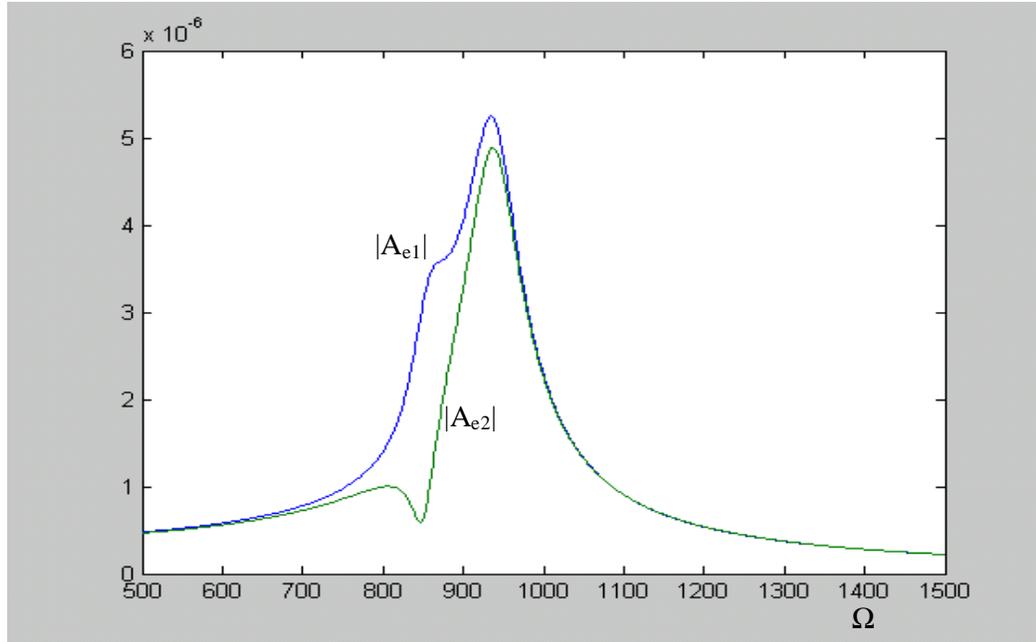


Modèle étudié ($\beta=1$)

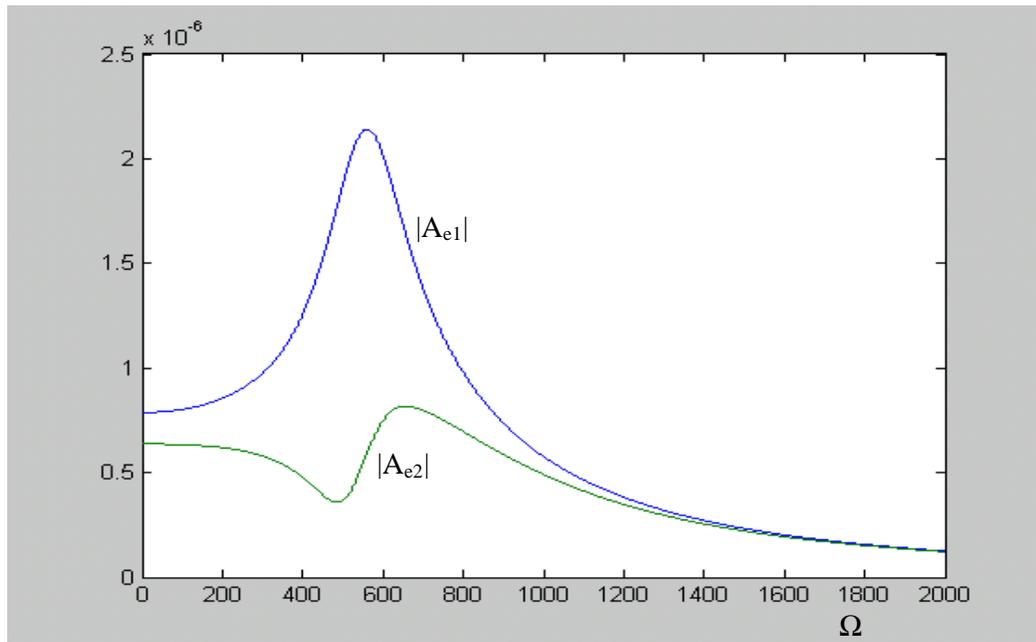


Modèle Lalanne-Ferraris ($\beta=1$)

Fig. 3.19a Réponse à une force asynchrone pour un amortissement très faible.

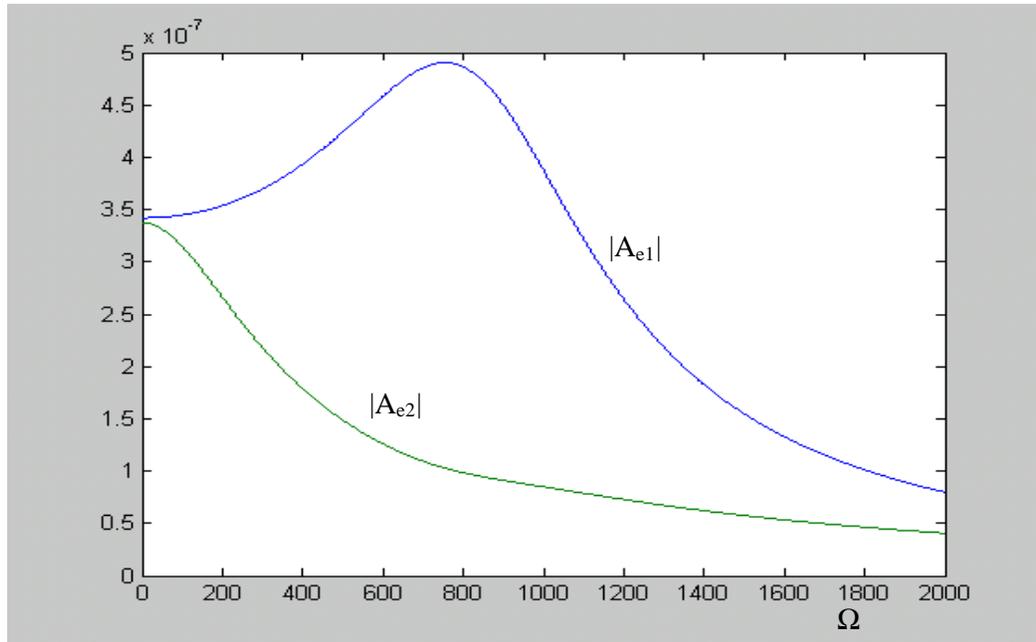


Modèle étudié ($\beta=15$)

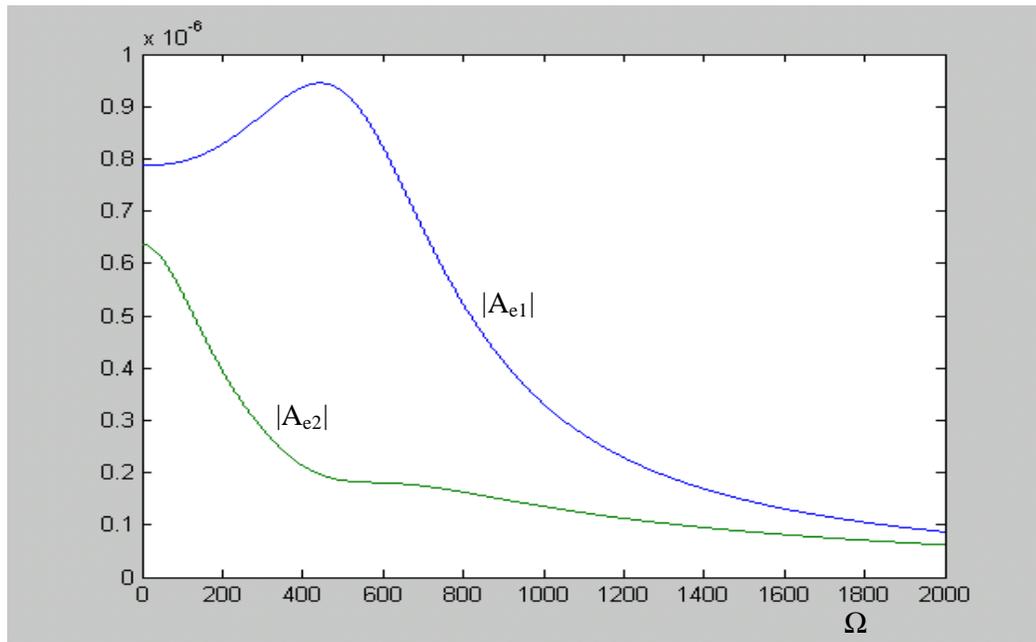


Modèle Lalanne-Ferraris ($\beta=15$)

Fig. 3.19b Réponse à une force asynchrone pour un amortissement faible.

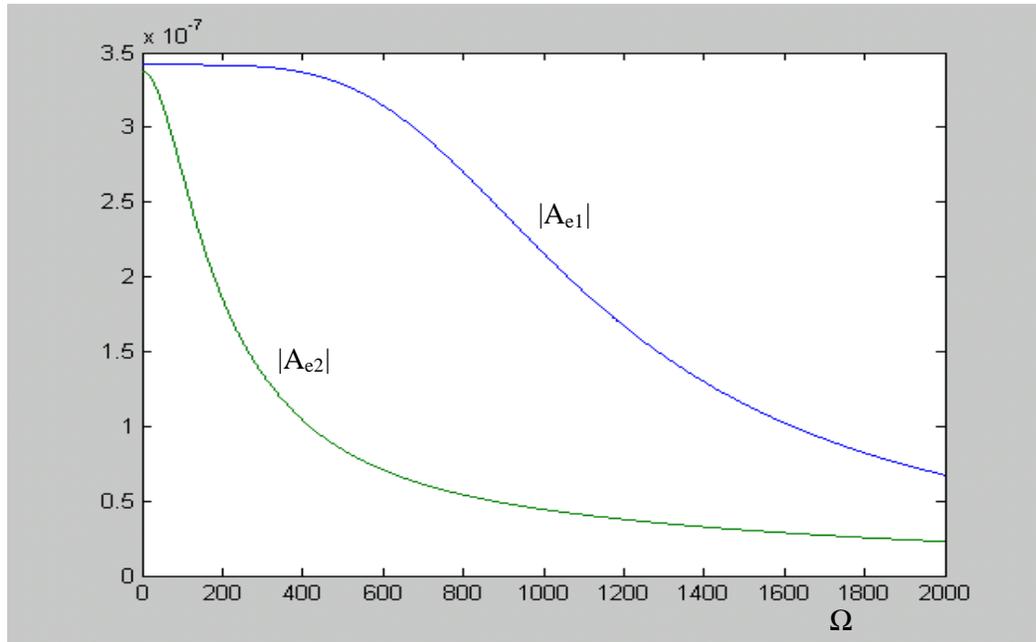


Modèle étudié ($\beta=512$)

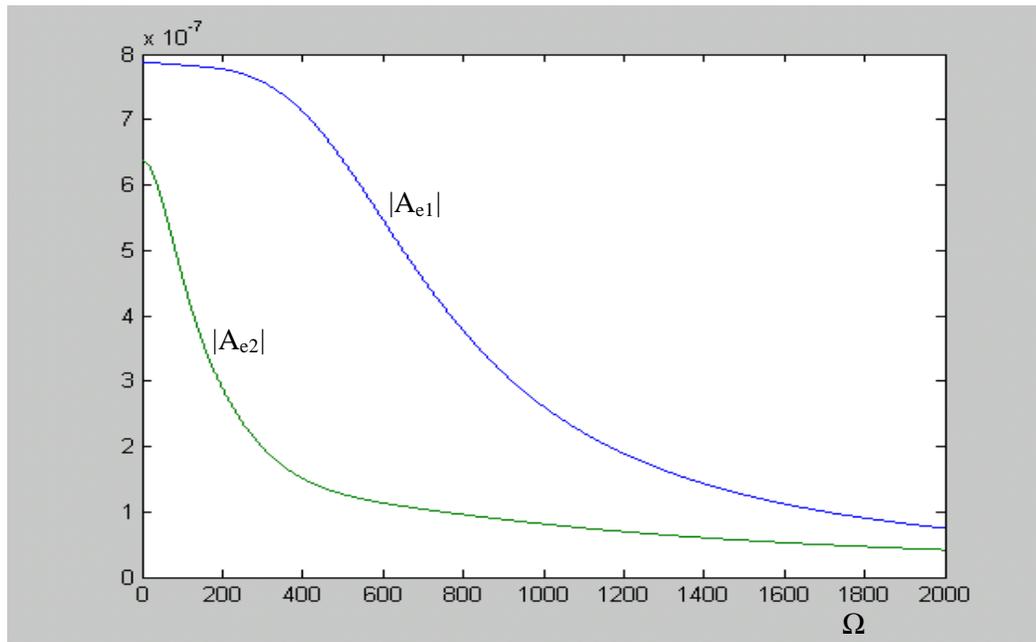


Modèle Lalanne-Ferraris ($\beta=52$)

Fig. 3.19c Réponse à une force asynchrone pour un amortissement intermédiaire.



Modèle étudié ($\beta=950$)



Modèle Lallane-Ferraris ($\beta=80$)

Fig. 3.19d Réponse à une force asynchrone pour un amortissement très fort.

MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS

Connue depuis les années 1950, la méthode des éléments finis a vit son apparition pour le calcul de contraintes et n'a cessé de se développer. Aujourd'hui, son champ d'application dépasse le cadre du génie mécanique. Désormais, elle est utilisée pour résoudre des problèmes d'écoulement de fluides ou de transferts de chaleur, d'électromagnétisme ou d'hydrologie.

Elle est considérée comme une généralisation et amélioration de la méthode de Rayleigh Ritz qui Permet de traiter facilement des systèmes d'équations complexes ou de haut degrés causés par une complexité des formes géométriques et des conditions aux limites. Son principe est le même dans tous les cas de figures : dans un premier temps la structure étudiée est maillée c'est à dire divisée en petits éléments de géométries simples, puis dans un second temps un ou plusieurs champs (déplacement, contrainte, température, pression, ou autre) sont approchés localement, sur chaque élément du maillage, par des fonctions de forme (ou fonctions d'interpolation) [18].

En dynamique des structures, l'utilisation des éléments finis permet de transformer les équations aux dérivées partielles qui modélisent le mouvement en des équations différentielles temporelles (on passe du cas continu au cas discret pour les variables spatiales).

4.1 EXPRESSIONS DES ENERGIES DES ELEMENTS DU ROTOR

La méthode des éléments finis consiste à discrétiser la structure en éléments de dimensions finis qui sont réunis en des points appelés points nodaux ou nœuds situés sur leur contour. A partir d'hypothèses raisonnables sur le déplacement d'un point de l'élément, on calcule les énergies cinétiques, de déformation et de dissipation de l'élément en fonction des déplacements des noeuds.

Si la structure est composée de N éléments alors :

$$U = \sum_{i=1}^N U_i \quad (4.1.1)$$

$$T = \sum_{i=1}^N T_i \quad (4.1.2)$$

$$R = \sum_{i=1}^N R_i \quad (4.1.3)$$

Où U_i est l'énergie de déformation ; T_i est l'énergie cinétique et R_i est la fonction de dissipation de l'élément i . Les forces généralisées sont déterminées en exprimant le travail virtuel des forces extérieures. Dans la dynamique des rotors R_i sont négligés quand les systèmes tournent à grandes vitesses.

4.1.1 Energie de déformation d'un élément de rotor

L'expression générale de l'énergie de déformation d'un élément est donnée par :

$$U_i = \frac{1}{2} \int_{(\tau)} \varepsilon^t \sigma d\tau \quad (4.1.4)$$

Le vecteur de déplacement d d'un point de l'élément est relié au vecteur δ regroupant tous les déplacements nodaux de l'élément par l'intermédiaire d'une matrice N , résultat de l'hypothèse sur les déplacements à l'intérieur de l'élément. Ceci donne une relation de la forme :

$$d = N(y) \delta \quad (4.1.5)$$

qui donne après dérivation :

$$\varepsilon = \frac{\partial d}{\partial y} = B(y) \delta \quad (4.1.6)$$

C'est la relation qui relie les déformations aux déplacements nodaux.

La relation qui relie les contraintes et les déformations est :

$$\sigma = D\varepsilon \quad (4.1.7)$$

où D est une matrice carré symétrique dont les termes dépendent des caractéristiques mécaniques des matériaux, généralement le module de Young E et le coefficient de poisson ν .

En substituant les équations (4.1.6) et (4.1.7) dans (4.1.4) on obtient l'équation :

$$U_i = \frac{1}{2} \int_{(\tau)} (B(y)\delta)^t D B(y) \delta d\tau \quad (4.1.8)$$

$$= \frac{1}{2} \delta^t \left[\int_{(\tau)} B^t D B d\tau \right] \delta \quad (4.1.9)$$

Qui peut se mettre sous la forme :

$$U_i = \frac{1}{2} \delta^t k \delta \quad (4.1.10)$$

où $k = \int_{(\tau)} B^t D B d\tau$

C'est la matrice raideur de l'élément qui est symétrique car la matrice D est symétrique ainsi que la matrice produit $B^t D B$.

4.1.2 Energie cinétique d'un élément de rotor

L'expression générale de l'énergie cinétique d'un élément est :

$$T = \frac{1}{2} \int_{(\tau)} \rho v^2 d\tau \quad (4.1.11)$$

où ρ est la masse volumique d'un élément d'arbre et v est la vitesse d'un point de l'arbre obtenu par dérivation par rapport au temps du déplacement d donné par (4.1.5), soit :

$$v = N(y) \frac{d\delta}{dt} = N(y) \dot{\delta} \quad (4.1.12)$$

En substituant (4.1.12) dans (4.1.11) et en considérant que $v^2 = (N\dot{\delta})^t N\dot{\delta}$, On aura :

$$T = \frac{1}{2} \int_{(\tau)} \rho (N\dot{\delta})^t N\dot{\delta} d\tau \quad (4.1.13)$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\delta}^t \left[\int_{(\tau)} \rho N^t N d\tau \right] \dot{\delta} \quad (4.1.14)$$

qui s'écrit sous la forme :

$$T = \frac{1}{2} \dot{\delta}^t m \dot{\delta} \quad (4.1.15)$$

où $m = \int_{(\tau)} \rho N^t N d\tau$

C'est la matrice masse d'un élément d'arbre qui est aussi symétrique comme la matrice k.

4.2 FORMULATION MATRICIELLE

4.2.1 Formulation matricielle des équations du disque

Le disque est modélisé par un nœud possédant quatre degrés de liberté ; deux translations u et w et deux rotations θ et ψ respectivement autour des axes x et z (voir figure 4.1).

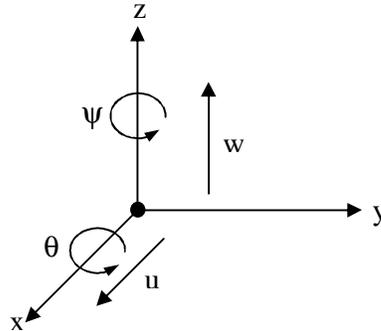


Fig. 4.1 Degrés de liberté du disque

Le vecteur des déplacements nodaux δ s'écrit sous la forme : $\delta = [u, w, \theta, \psi]^t$

La matrice masse et la matrice gyroscopique sont obtenues en appliquant les équations de Lagrange à l'expression (4.1.10), soit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_d}{\partial \dot{\delta}_i} \right) - \frac{\partial T_d}{\partial \delta_i} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{\delta}_i} \left[\frac{1}{2} M_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx'} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{dy'} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) \right] \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial \delta_i} \left\{ \frac{1}{2} M_d (u^2 + w^2) + \frac{1}{2} I_{dx'} (\theta^2 + \psi^2) + \frac{1}{2} I_{dy'} (\Omega^2 + 2\Omega\psi\theta) \right\} \right\} \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

on aura donc :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_d}{\partial \dot{\delta}_i} \right) - \frac{\partial T_d}{\partial \delta_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} M_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{dx'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{dx'} \end{bmatrix}}_{M_d} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \Omega \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{dy'} \\ 0 & 0 & I_{dy'} & 0 \end{bmatrix}}_{G_d} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \quad (4.2.2)$$

M_d étant la matrice masse et G_d la matrice gyroscopique.

4.2.2 Formulation matricielle des équations de l'arbre

Les résultats présentés concernent le cas d'un élément arbre symétrique qui est modélisé par un élément poutre de section constante . L'élément fini utilisé a deux nœuds et quatre degrés de liberté (voir figure 4.2).

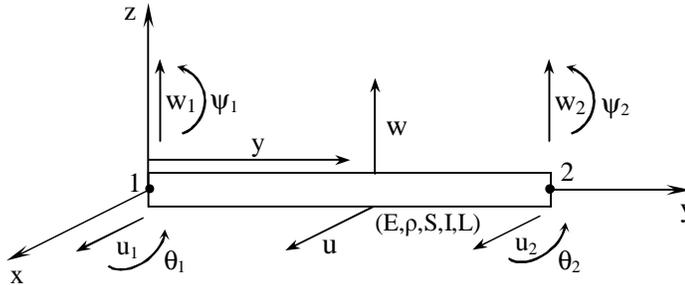


Fig. 4.2 Degrés de liberté d'un élément arbre

La fonction de déplacement w qui est normale à la poutre (arbre) est donnée par le polynôme d'interpolation du 3^{ième} degré.

$$w = a_1 + a_2y + a_3y^2 + a_4y^3 \tag{4.2.3}$$

L'inclinaison ou la rotation autour de z est donnée par la dérivée de la fonction de déplacement w .

$$\theta = \frac{\partial w(y)}{\partial y} = a_2 + 2a_3y + 3a_4y^2 \tag{4.2.4}$$

Les constantes a_1, a_2, a_3, a_4 sont déterminées on appliquant les conditions aux limites sur les polynômes (4.2.3) et (4.2.4).

Pour $y = 0$ (nœud 1) on a $\begin{cases} w_1 = a_1 \\ \theta_1 = a_2 \end{cases}$ système (a)

Pour $y = L$ (noeud2) on a $\begin{cases} w_2 = a_1 + a_2 L + a_3 L^2 + a_4 L^3 \\ \theta_2 = a_2 + 2a_3 L + 3a_4 L^2 \end{cases}$ système (b)

Après avoir résolu le système (b) et en remplaçant les constantes a_1 et a_2 par leurs valeurs on trouve :

$$\begin{aligned} a_1 &= w_1 \\ a_2 &= \theta_1 \\ a_3 &= 3 \frac{w_2 - w_1}{L^2} - \frac{\theta_2 + 2\theta_1}{L} \\ a_4 &= -2 \frac{w_2 - w_1}{L^3} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{L^2} \end{aligned}$$

On remplace les valeurs des constantes a_1, a_2, a_3, a_4 dans w pour avoir :

$$w(y) = \left(1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}\right) w_1 + \left(y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}\right) \theta_1 + \left(\frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}\right) w_2 + \left(-\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}\right) \theta_2 \quad (4.2.5)$$

ou bien

$$w(y) = \sum_{i=1}^4 \phi_i(y) \delta_i \quad (4.2.6)$$

Le vecteur des déplacements nodaux est :

$$\delta = [u_1, w_1, \theta_1, \psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \psi_2]^t \quad (4.2.7)$$

qui est à son tour séparé en deux vecteurs de déplacements dont chacun correspond à une direction :

$$\delta u = [u_1, \psi_1, u_2, \psi_2]^t \quad (4.2.8)$$

$$\delta w = [w_1, \theta_1, w_2, \theta_2]^t \quad (4.2.9)$$

Les déplacements sont exprimés à partir des expressions suivantes :

$$u = N_1(y) \delta u \quad (4.2.10)$$

et

$$w = N_2(y) \delta w \quad (4.2.11)$$

où N_1 et N_2 sont les vecteurs des fonctions de forme classiques d'un élément de poutre en flexion [13] :

$$N_1(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (4.2.12)$$

$$N_2(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (4.2.13)$$

où $N_1(y)$ et $N_2(y)$ sont obtenues en posant $u(y) = a_1 + a_2y + a_3y^2 + a_4y^3$ avec la rotation autour de x donnée par $\psi = -\frac{\partial u(y)}{\partial y}$.

Les relations exprimant donc les déplacements et les pentes sont :

$$\theta = \partial w / \partial y \quad (4.2.14)$$

$$\psi = -\partial u / \partial y \quad (4.2.15)$$

Le nombre total de degrés de liberté pour chaque nœud est de quatre ; les matrices élémentaires de l'arbre sont donc de taille 8×8 qui sont obtenues en remplaçons u, w, θ, ψ par leurs expressions dans les énergies cinétique et de déformation de l'arbre.

a) l'énergie cinétique

L'utilisation de l'expression de l'énergie cinétique de l'arbre (3.1.15) pour un élément conduit à :

$$\begin{aligned} T_a = & \frac{\rho S}{2} \int_0^L [\delta \mathbf{u}^t N_1^t N_1 \delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{w}^t N_2^t N_2 \delta \mathbf{w}] dy \\ & + \frac{\rho I}{2} \int_0^L \left[\delta \mathbf{u}^t \frac{dN_1^t}{dy} \frac{dN_1}{dy} \delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{w}^t \frac{dN_2^t}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta \mathbf{w} \right] dy \\ & + \rho I L \Omega^2 - 2\rho I \Omega \int_0^L \delta \mathbf{u}^t \frac{dN_1^t}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta \mathbf{w} dy \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

En substituant (4.2.10) et (4.2.11) ainsi que leurs dérivées dans (4.2.16) on aura la forme compacte suivante :

$$T_a = \frac{1}{2} \delta \mathbf{u}^t M_1 \delta \mathbf{u} + \frac{1}{2} \delta \mathbf{w}^t M_2 \delta \mathbf{w} + \frac{1}{2} \delta \mathbf{u}^t M_3 \delta \mathbf{u} + \frac{1}{2} \delta \mathbf{w}^t M_4 \delta \mathbf{w} + \delta \mathbf{u}^t M_5 \delta \mathbf{w} + \rho I L \Omega^2 \quad (4.2.17)$$

Les matrices obtenues sont de l'ordre 4×4 . M_1 et M_2 sont les matrices classiques de masse, M_3 et M_4 représentant l'effet secondaire d'inertie de rotation de la section par rapport à un diamètre et la matrice M_5 représente l'effet gyroscopique. Le terme qui est une constante à

une contribution nulle lors de l'application des équations de Lagrange. L'expression (4.2.17) se réduit à :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_a}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T_a}{\partial \delta} = (M_c + M_g) \ddot{\delta} + G \delta \quad (4.2.18)$$

où M_c et M_g sont déduites respectivement de M_1 , M_2 , M_3 et M_4 et G est déduite de M_5 . Les matrices sont donc les suivantes :

$$M_1 = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L & 54 & 13L \\ -22L & 4L^2 & -13L & -3L^2 \\ 54 & -13L & 156 & -22L \\ 13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.19)$$

$$M_2 = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.20)$$

$$M_3 = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & -3L & -36 & -3L \\ -3L & 4L^2 & 3L & -L^2 \\ -36 & 3L & 36 & 3L \\ -3L & -L^2 & 3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.21)$$

$$M_4 = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.22)$$

$$M_5 = \frac{\rho I \Omega}{15L} \begin{bmatrix} -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.23)$$

Rassemblons les matrices qui ont les mêmes propriétés $M_c = M_1+M_2$ et $M_g = M_3+M_4$ d'où :

$$M_c = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.24)$$

$$M_g = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.25)$$

et

$$G = \frac{\rho I \Omega}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.26)$$

b) L'énergie de déformation

L'application des expressions (4.2.12) et (4.2.13) sur l'équation de l'énergie de déformation donnée par la formule (4.1.10) donne :

$$U_a = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\delta u^t \frac{d^2 N_1^t}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} \delta u + \delta w^t \frac{d^2 N_2^t}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \delta w \right] dy \quad (4.2.27)$$

ou

$$U_a = \frac{EI}{2} \left[\delta u^t \left(\int_0^L \frac{d^2 N_1^t}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} dy \right) \delta u + \delta w^t \left(\int_0^L \frac{d^2 N_2^t}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} dy \right) \delta w \right] \quad (4.2.28)$$

Qui peut s'écrire sous la forme réduite :

$$U_a = \frac{1}{2} \delta u^t k_1 \delta u + \frac{1}{2} \delta w^t k_2 \delta w \quad (4.2.29)$$

où

$$k_1 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.30)$$

et

$$k_2 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.31)$$

k_1 et k_2 sont les matrices classiques de raideur.

La matrice global K est :

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 2L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 0 & -6L & 4L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ \psi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \quad (4.2.32)$$

Dans le cas où nous tiendrons compte de l'effet de cisaillement notre matrice prend la forme suivante :

$$K = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.33)$$

La quantité caractérisant le cisaillement est $a = \frac{12EI}{GS_r L^2}$, où $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ est le module de cisaillement et ν est le coefficient de poisson et $S_r \approx S$ (section réduite).

4.2.3 Formulation matricielle des équations du palier

En général, l'influence des pentes et des moments est négligée pour les paliers et on ne tient compte que des forces généralisées F_u et F_w qui sont liées aux déplacements u et w . En tenant compte de (3.1.30) on a :

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_\psi \\ F_w \\ F_\theta \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & K_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{zx} & 0 & K_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \psi \\ w \\ \theta \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{xx} & 0 & C_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{zx} & 0 & C_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\psi} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (4.2.34)$$

La première matrice est une matrice de raideur et la seconde est une matrice d'amortissement. Ces matrices sont en général asymétriques et peuvent varier de manière significative en fonction de la vitesse de rotation.

4.2.4 Formulation matricielle des équations du balourd

L'application des équations de Lagrange sur l'équation de l'énergie cinétique d'un balourd (3.1.33) donne :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{T_b}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{T_b}{\partial \delta} = - m_b d \Omega^2 \begin{bmatrix} \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \end{bmatrix} \quad (4.2.35)$$

Avec $\delta = [u \quad w]^t$.

4.3 EXEMPLE DE MONTAGE DE MATRICES GLOBALES

Considérons le modèle de rotor étudié qui est schématisé sur la figure 4.3 ayant quatre noeuds et cinq éléments : un élément disque, un élément palier et trois éléments arbre de même longueur $l = l_1 = l_2 = l_3 = L/3$.

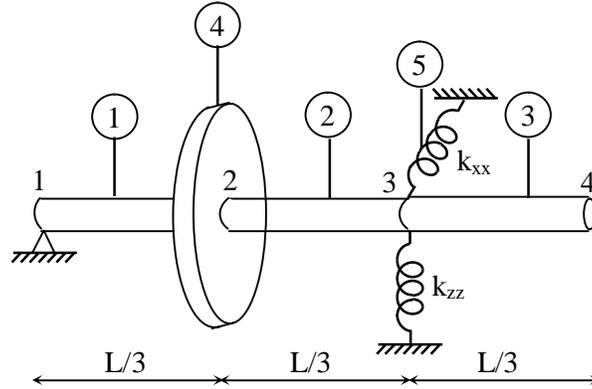


Fig.4.3 Modèle de rotor avec éléments et noeuds.

Dans le modèle au-dessus, les noeuds de chaque élément de l'arbre, du palier ou du disque sont en rapport avec les noeuds du rotor d'après la table ci-dessous :

Nombre d'éléments	Type d'élément	Nœuds du rotor	Vecteurs de déplacements δ
1	arbre	1-2	$u_1, w_1, \theta_1, \psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \psi_2$
2	arbre	2-3	$u_2, w_2, \theta_2, \psi_2, u_3, w_3, \theta_3, \psi_3$
3	arbre	3-4	$u_3, w_3, \theta_3, \psi_3, u_4, w_4, \theta_4, \psi_4$
4	disque	2	$u_2, w_2, \theta_2, \psi_2$
5	palier	3	u_3, w_3

Les matrices globales de masse, de rigidité et de Coriolis sont obtenues en superposant les matrices élémentaires selon le tableau. Chaque type de matrice globale est obtenu en sommant les trois matrices des trois éléments.

a) Matrice globale classique de masse

$$M_{ct} = \frac{\rho s l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -221 & 54 & 0 & 0 & 131 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 221 & 0 & 0 & 54 & -131 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 221 & 4l^2 & 0 & 0 & 131 & -3l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -221 & 0 & 0 & 4l^2 & -131 & 0 & 0 & -3l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 54 & 0 & 0 & -131 & 3l^2 & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 0 & 131 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 131 & 0 & 0 & 3l^2 & 0 & 0 & 0 & 54 & -131 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -131 & -3l^2 & 0 & 0 & 0 & 8l^2 & 0 & 0 & 131 & -3l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 131 & 0 & 0 & -3l^2 & 0 & 0 & 0 & 8l^2 & -131 & 0 & 0 & -3l^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 0 & -131 & 3l^2 & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 131 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 131 & 0 & 0 & 3l^2 & 0 & 0 & 0 & 54 & -131 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -131 & -3l^2 & 0 & 0 & 0 & 8l^2 & 0 & 0 & 131 & -3l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 131 & 0 & 0 & -3l^2 & 0 & 0 & 0 & 8l^2 & -131 & 0 & -3l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 0 & -131 & 156 & 0 & 221 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 131 & 0 & 0 & 156 & -221 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -131 & -3l^2 & 0 & 0 & -221 & 4l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 131 & 0 & 0 & -3l^2 & 221 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_1 \\ \theta_1 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_2 \\ \theta_2 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_3 \\ \theta_3 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_4 \\ \theta_4 \\ \delta_4 \end{bmatrix}$$

(4.3.1)

où $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $s = 3,142 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ et $l = 0,1333 \text{ m}$

b) Matrice globale représentant l'effet secondaire d'inertie de rotation

$$M_{gt} = \frac{\rho I}{30I} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3l & -36 & 0 & 0 & -3l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3l & 0 & 0 & -36 & 3l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & 0 & -3l & -l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3l & 0 & 0 & 4l^2 & 36l & 0 & 0 & -l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3l & 72 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & -3l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3l & 0 & 0 & 72 & 0 & 0 & 0 & -36 & 3l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3l & -l^2 & 0 & 0 & 0 & 8l^2 & 0 & 0 & -3l & -l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3l & 0 & 0 & -l^2 & 0 & 0 & 0 & 8l^2 & 3l & 0 & 0 & -l^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & 3l & 72 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & -3l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & -3l & 0 & 0 & 72 & 0 & 0 & 0 & -36 & 3l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3l & -l^2 & 0 & 0 & 0 & 8l^2 & 0 & 0 & -3l & -l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3l & 0 & 0 & -l^2 & 0 & 0 & 0 & 8l^2 & 3l & 0 & -l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & 3l & 36 & 0 & 3l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & -3l & 0 & 0 & 36 & -3l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3l & -l^2 & 0 & 0 & -3l & 4l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3l & 0 & 0 & -l^2 & 3l & 0 & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_1 \\ \theta_1 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_2 \\ \theta_2 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_3 \\ \theta_3 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_4 \\ \theta_4 \\ \delta_4 \end{bmatrix}$$

(4.3.2)

$l_1 = l_2 = l_3 = l = L/3 = 0,13333 \text{ m}$

c) Matrice globale représentant l'effet gyroscopique

$$C_t = \frac{\rho I \Omega}{15I} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -31 & 0 & 0 & 36 & -31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -31 & -36 & 0 & 0 & -31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 31 & 0 & 0 & -41^2 & -31 & 0 & 0 & 1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 31 & 41^2 & 0 & 0 & -31 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 31 & 0 & 0 & -72 & 0 & 0 & 0 & 36 & -31 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 31 & 72 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & -31 & 0 & 0 & 0 \\ 31 & 0 & 0 & 1^2 & 0 & 0 & 0 & -81^2 & -31 & 0 & 0 & -41^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 31 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 0 & 0 & -31 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 31 & 0 & 0 & -72 & 0 & 0 & 0 & 36 & -31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & 31 & 72 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & -31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 31 & 0 & 0 & 1^2 & 0 & 0 & 0 & -81^2 & -31 & 0 & 0 & 1^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 31 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 0 & 0 & -31 & -1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 31^2 & 0 & 0 & -36 & 31 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & 31 & 36 & 0 & 0 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 31 & 0 & 0 & 1^2 & -31 & 0 & 0 & -41^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 31 & -1^2 & 0 & 0 & -31 & 41^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ \psi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ \psi_2 \\ u_3 \\ w_3 \\ \theta_3 \\ \psi_3 \\ u_4 \\ w_4 \\ \theta_4 \\ \psi_4 \end{bmatrix} \quad (4.3.3)$$

d) Matrice de rigidité totale de l'énergie de déformation

$$K_t = \frac{EI}{I^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6I & -12 & 0 & 0 & -6I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6I & 0 & 0 & -12 & 6I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6I & 4I^2 & 0 & 0 & -6I & 2I^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6I & 0 & 0 & 4I^2 & 6I & 0 & 0 & 2I^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 0 & 6I & 24 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & -6I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6I & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & -12 & 6I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6I & 2I^2 & 0 & 0 & 0 & 8I^2 & 0 & 0 & -6I & 2I^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6I & 0 & 0 & 2I^2 & 0 & 0 & 0 & 8I^2 & 6I & 0 & 0 & 2I^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 6I & 24 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & -6I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6I & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & -12 & 6I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6I & 2I^2 & 0 & 0 & 0 & 8I^2 & 0 & 0 & -6I & 2I^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6I & 0 & 0 & 2I^2 & 0 & 0 & 0 & 8I^2 & 6I & 0 & 0 & 2I^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 6I & 12 & 0 & 0 & 6I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 6I & 0 & 0 & 12 & -6I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6I & 2I^2 & 0 & 0 & -6I & 4I^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6I & 0 & 0 & 2I^2 & 6I & 0 & 0 & 4I^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ \psi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ \psi_2 \\ u_3 \\ w_3 \\ \theta_3 \\ \psi_3 \\ u_4 \\ w_4 \\ \theta_4 \\ \psi_4 \end{bmatrix} \quad (4.3.4)$$

Avec $I = 7,854 \cdot 10^{-9} m^4$ et $E = 2 \cdot 10^{11} N/m$

e) Matrice du palier

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \\ F_\theta \\ F_\psi \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 10^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ w_3 \\ \theta_3 \\ \psi_3 \end{Bmatrix} \quad (4.3.5)$$

$$k_{xx} = 10^5 \text{ N/m}$$

$$k_{zz} = 5.10^5 \text{ N/m}$$

f) Matrice du balourd

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \end{Bmatrix} = 1,5.10^{-5} \Omega^2 \begin{Bmatrix} \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \end{Bmatrix} \quad (4.3.6)$$

$$\text{où } m_{b,d} = 1,5.10^{-5} \text{ kg.m}$$

g) Matrice globale du disque (masse et gyroscopique)

$$M_d = \begin{bmatrix} 16,47 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16,47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9,247.10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9,247.10^{-2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_2 \\ \psi_2 \\ \psi_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,1861 \\ 0 & 0 & 0,1861 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_2 \\ \psi_2 \\ \psi_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} \quad (4.3.7)$$

$$\text{avec } M_d = 16,47 \text{ kg}$$

$$I_{dx} = 9,247.10^{-2} \text{ kg.m}^2$$

$$\text{et } I_{dy} = 0,1861 \text{ kg.m}^2$$

CONCLUSION GENERALE

Dans le travail présenté ici on s'est intéressé à l'étude et l'analyse des arbres et rotors flexibles par leur modélisation analytique et numérique. Aussi l'effet des conditions aux limites sur les fréquences naturelles et les réponses aux sollicitations extérieures est étudié.

Une compréhension fine des problèmes vibratoires associés aux systèmes tournants constitue à l'heure actuelle un enjeu majeur dans le domaine industriel. Il est nécessaire de comprendre et prédire précisément le comportement vibratoire afin d'optimiser le comportement dynamique et de dimensionner au mieux les systèmes. Ainsi, pour éviter les réponses de fortes amplitudes qui peuvent mener à leur destruction, les fréquences naturelles du système doivent être distinctes des fréquences d'excitations dans tout le domaine de fonctionnement.

Pour cela l'étude s'est articulée sur plusieurs étapes.

En premier, un historique sur l'évolution des études sur les corps continus en rotation est donné pour montrer la grande importance du domaine qui est appelé la dynamique des rotors. Ensuite les fondements de la mécanique vibratoire et de l'analyse modale sont exposés car ils aident à comprendre tous les phénomènes physiques que l'on rencontre dans l'analyse dynamique des arbres et rotors. Dans ceux-ci on a revu les phénomènes de composition de mouvements harmoniques (courbes de Lissajous) que l'on rencontre dans les vibrations de rotation. Les fonctions de formes pour les différentes conditions aux limites ont été retrouvées.

Les caractéristiques dynamiques vibratoires fondamentales des corps en rotation sont étudiées et analysées en utilisant des modèles de rotors simples tels que le modèle de Laval-Jeffcott. Celui-ci a permis de comprendre le phénomène du tournoiement (whirling) et les vitesses critiques et cela en considérant des paliers rigides ou flexibles.

Pour l'étude des vibrations continues proprement dite, le modèle de Lalanne-Ferraris a été choisi. C'est un modèle qu'un grand nombre de personnes ont utilisé dans leurs travaux de recherche. Mais il se trouve qu'ils prennent tous la fonction de déplacement la plus simple prise par Lalanne et Ferraris qui correspond aux conditions aux limites appuyé-appuyé qui représentent des paliers rigides. Ici des conditions différentes sont prises dans l'analyse. Il s'agit des conditions appuyé-libre pour lesquelles les fréquences et les modes propres ainsi que les réponses aux sollicitations extérieures telles que le balourd et les forces asynchrones

sont analysées et cela pour un modèle symétrique, un modèle dissymétrique et un modèle amorti dissymétrique.

Les résultats obtenus par la méthode de Rayleigh Ritz sont comparés au cas de Lalanne et Ferraris et l'effet du changement des conditions aux limites est très clair. Un point qui est à prendre sérieusement en considération surtout lors de l'élaboration de code de calculs.

Enfin la modélisation par éléments finis est exposée avec le développement des équations générales ainsi que les matrices élémentaires des différents éléments du rotor et un exemple de montage des matrices globales. Celle-ci est utilisée pour des systèmes très complexes car elle traite tous les modes ensemble de vibrations alors que la méthode de Rayleigh Ritz ne peut traiter qu'un seul mode à chaque la fois.

Pour des travaux futurs, il est possible de faire la même analyse pour les autres conditions aux limites dont les fonctions de déplacement sont plus complexes. Il est possible de faire une étude comparative sur l'effet des caractéristiques des paliers et leur nature sur le comportement dynamique vibratoire.

REFERENCES

- [1] Genta, G. " Vibration of Structures and Machines ", Springer, New York, (1993).
- [2] Vance, J.M., " Rotordynamics of Turbomachinery ", John Wiley & Sons, New York, 1988
- [3] Lalanne, M. & Ferraris, G., " Rotordynamics Prediction in Engineering ", John Wiley & Sons Inc: Chichester, 1998.
- [4] Rankine, W. J.McQ., " On the centrifugal Force of Rotating Shafts ", Engineer, vol.27,p. 249, 1869.
- [5] Dunkerley, S., " On the Whirling and vibration of Shafts ", Phil. Trans. R. Soc., London, Ser. A, vol.185, pp. 279-360,1894.
- [6] Foppl, A., " Das Problem der Lavalschen Turbinewelle ", Der Civilingenieur, vol. 41, pp. 335-342,1895.
- [7] Kerr, W., " On the Whirling Speed of Loaded Shafts ", Engineering, p. 150, 1916.
- [8] Jeffcott, H. H., " The Lateral Vibration of Loaded Shafts in the Neighbourhood of a Whirling Speed ", Phil. Mag., Vol. 6, no. 37, pp. 304-314, 1919.
- [9] Stodola, A., " Steam and Gas Turbines ", Verlag von Julius Springer, Berlin, 1924.
- [10] Smith, D. M., " The Motion of a Rotor Carried by a Flexible Shaft in Flexible Bearings ", Proc. R. Soc. London, Ser. A, vol. 142, pp. 92-118, 1933.
- [11] Thompson, W.T. and Dillon, M., " Theory of Vibrations with Applications ", Prentice Hall, New Jersey, 1998.
- [12] Timoshenko, S. " Vibration Problems in Engineering ", 4th Edition, John Wiley & Sons, 1974.
- [13] Timoshenko, S., J. Goodler, " Theory of elasticity ", McGraw-Hill, (1970).
- [14] Gorman, D. J., " Free Vibration Analysis of Beams and Shafts ", John Wiley & Sons, NewYork, 1975.
- [15] Ewins, D.J., 1998, " Modal Analysis for Rotating Machinery ", presented at the International Conference on Rotor Dynamics, Darmstadt, September, 1998.
- [16] Lee, C., " Vibration analysis of rotors ", Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [17] Tondl, A., " Some Problems of Rotor Dynamics ", Publishing House of the Czechoslovak, Academy of Sciences: Prague, 1965.
- [18] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor., "The finite element method", Volume1. Basic formulation and linear problems. McGraw-Hill, fourth edition, 1994.

PROCEDURE DE CALCUL DES EQUATIONS DU MODELE

La Procédure de calcul menant aux équations différentielles du mouvement du modèle étudié est la suivante :

* La fonction de déplacement :

$$f(y) = \sin \beta_n y + \alpha_n \operatorname{sh} \beta_n y$$

$$\text{avec } \beta_n = \frac{3,926602}{L} = 9,8165 \text{ qui est la valeur correspondante au premier mode.}$$

$$\text{et } \alpha_n = \frac{\sin \beta_n L}{\operatorname{sh} \beta_n L} = \frac{\sin 3,926602}{\operatorname{sh} 3,926602} = \frac{-0,706831792}{25,35728939} = -2,7875 \cdot 10^{-2}$$

$f(y)$ peut se mettre sous la forme : $f(y) = \sin ay + b \operatorname{sh} ay$.

* L'énergie cinétique du disque :

$$\begin{aligned} T_d &= \frac{1}{2} M_d (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\theta}) \\ &= (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) \left[\frac{1}{2} M_d f^2(y) + \frac{1}{2} I_{dx} g^2(y) \right] + \frac{1}{2} I_{dy} \Omega^2 - I_{dy} \Omega g^2(y) \dot{x}_1 \dot{q}_2 \end{aligned}$$

avec $f^2(y) = \sin^2 ay + b^2 \operatorname{sh}^2 ay + 2 b \sin ay \operatorname{sh} ay$

et $g^2(y) = a^2 \cos^2 ay + a^2 b^2 \operatorname{ch}^2 ay + 2a^2 b \cos ay \operatorname{ch} ay$

où $y = L_1 = \frac{1}{3}L$

Ce qui donne $f^2(L_1) = 0,842836$ et $g^2(L_1) = 3,994$

d'où :

$$\begin{aligned} T_d &= (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) \left[\frac{1}{2} 16,47 \cdot (0,842836) + \frac{1}{2} 9,247 \cdot 10^{-2} \cdot 3,9939 \right] + \frac{1}{2} 0,1861 - 0,1861 \cdot \Omega \cdot 3,9939 \dot{x}_1 \dot{q}_2 \\ &= 7,1254 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + D_1 - 0,74326 \Omega \dot{x}_1 \dot{q}_2 \end{aligned}$$

avec $D_1 = 0,09305$, un terme constant qui disparaît lors de l'application des équations de Lagrange.

* L'énergie cinétique de l'arbre :

$$\begin{aligned} T_a &= \frac{\rho s}{2} \int_0^L (\dot{w}^2 + \dot{v}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho I L \Omega^2 + 2\rho I \Omega \int_0^L \dot{\psi} \dot{\theta} dy \\ &= \frac{\rho s}{2} \int_0^L f^2(y) (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L g^2(y) (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) dy + \rho I L \Omega^2 - 2\rho I A \Omega \int_0^L g^2(y) \dot{q}_1 \dot{q}_2 dy \end{aligned}$$

où le calcul de $\int_0^L f^2(y) dy$ et $\int_0^L g^2(y) dy$ s'effectue comme suit :

$$\mathbf{a)} \quad \int_0^L f^2(y) dy = \int_0^L [\sin^2 ay + b^2 \text{sh}^2 ay + 2b \sin ay \text{sh} ay] dy$$

On pose $a_1 = \int_0^L \sin^2 ay dy$, $a_2 = \int_0^L b^2 \text{sh}^2 ay dy$ et $a_3 = 2b \int_0^L \sin ay \text{sh} ay dy$

$$a_1 = \int_0^L \sin^2 ay dy = \int_0^L \left(\frac{1 - \cos 2ay}{2} \right) dy$$

$$= \frac{1}{2} \left[y - \frac{1}{2a} \sin 2ay \right]_0^L = \frac{1}{2} \left[L - \frac{1}{2a} \sin 2aL \right] = \frac{1}{2} \left[0,4 - \frac{0,4}{7,8532} \sin 7,8532 \right] = 0,1745$$

$$a_2 = \int_0^L b^2 \text{sh}^2 ay dy = \int_0^L \left(\frac{1 - \cos 2ay}{2} \right) dy$$

$$= \frac{b^2}{2} \left[\frac{1}{2a} \text{sh} 2ay - y \right]_0^L = \frac{b^2}{2} \left[\frac{\text{sh} 2aL}{2a} - L \right] = \frac{(-2,7875 \cdot 10^{-2})^2}{2} [65,1518] = 0,02531$$

$$\begin{aligned} a_3 &= 2b \int_0^L \sin ay \text{sh} ay dy = 2b \left[\left[\frac{-1}{a} \cos ay \text{sh} ay \right]_0^L + \int_0^L \cos ay \text{ch} ay dy \right] \\ &= 2b \left[\left[-\frac{1}{a} \cos ay \text{sh} ay \right]_0^L + \left[\frac{1}{a} \sin ay \text{ch} ay \right]_0^L - \int_0^L \sin ay \text{sh} ay dy \right] \\ &= \frac{b}{a} [\sin aL \text{cha}L - \cos aL \text{sha}L] \\ &= \frac{-2,7875 \cdot 10^{-2}}{9,8165} [-0,7068.25,377 - (-0,7074).25,357] = -2,943 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \int_0^L f^2(y) dy = 0,1745 + 0,02529 - 2,943 \cdot 10^{-6} = 0,1998$$

$$\text{b) } \int_0^L g^2(y) dy = \int_0^L (a^2 \cos^2 ay + a^2 b^2 \text{ch}^2 ay + 2a^2 b \cos ay \text{ch} ay) dy$$

$$\text{On pose } b_1 = a^2 \int_0^L \cos^2 ay dy, \quad b_2 = a^2 b^2 \int_0^L \text{ch}^2 ay dy \quad \text{et} \quad b_3 = 2a^2 b \int_0^L \cos ay \text{ch} ay dy$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a^2}{2} \int_0^L (1 + \cos 2ay) dy = \frac{a^2}{2} \left[y + \frac{1}{2a} \sin 2ay \right]_0^L + \frac{a^2}{2} \left[L + \frac{1}{2a} \sin 2aL \right] \\ &= \frac{(9,8165)^2}{2} \left[0,4 + \frac{0,4}{7,8532} \sin 7,8532 \right] = 21,725 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{a^2 b^2}{2} \int_0^L (1 + \text{ch} 2ay) dy = \frac{a^2 b^2}{2} \left[y + \frac{1}{2a} \text{sh} 2ay \right]_0^L = \frac{a^2 b^2}{2} \left[L + \frac{1}{2a} \text{sh} 2aL \right] \\ &= \frac{(9,8165)^2 (-2,7875 \cdot 10^{-2})^2}{2} \left[0,4 + \frac{0,4}{7,8532} \text{sh} 7,8532 \right] = 2,4691 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3 &= 2a^2 b \int_0^L \cos ay \text{ch} ay dy = 2a^2 b \left[\left[\frac{1}{a} \sin ay \text{ch} ay \right]_0^L - \int_0^L \sin ay \text{sh} ay dy \right] \\ &= 2a^2 b \left[\left[\frac{1}{a} \sin ay \text{ch} ay \right]_0^L - \left(\left[-\frac{1}{a} \cos ay \text{sh} ay \right]_0^L - \int_0^L -\frac{1}{a} \cos ay a \text{ch} ay dy \right) \right] \end{aligned}$$

$$= ab [\cos aL \text{sh} aL + \sin aL \text{ch} aL] = -9,8165 \cdot 2,7875 \cdot 10^{-2} [-17,9375 - 17,9415] = 9,81775$$

$$\text{D'où : } \int_0^L g^2(y) dy = b_1 + b_2 + b_3 = 21,726 + 2,4691 + 9,81775 = 34,01345$$

Et enfin :

$$\begin{aligned} T_a &= \frac{7800 \cdot 3,142 \cdot 10^{-4}}{2} \cdot 0,1998 (\mathcal{Q}_1^2 + \mathcal{Q}_2^2) + \frac{7800 \cdot 7,855 \cdot 10^{-9}}{2} \cdot 34,01345 (\mathcal{Q}_1^2 + \mathcal{Q}_2^2) \\ &\quad - 2 \cdot 7,855 \cdot 10^{-9} \cdot 7800 \cdot 2 \cdot 34,01345 \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_2 + 7800 \cdot 7,855 \cdot 10^{-9} \cdot 0,4 \Omega^2 \\ &= 0,2458 (\mathcal{Q}_1^2 + \mathcal{Q}_2^2) - 0,004168 \Omega \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_2 + D_2 \end{aligned}$$

avec $D_2 = 2,45076 \cdot 10^{-5} \Omega^2$, un terme constant qui disparaît lors de l'application des équations de Lagrange.

* L'énergie cinétique du balourd :

$$\begin{aligned} T_b &= m_b \Omega df(y) [\mathcal{Q}_1 \cos \Omega t - \mathcal{Q}_2 \sin \Omega t] = 10^{-4} \cdot 0,15 \cdot 0,918 \cdot \Omega [\mathcal{Q}_1 \cos \Omega t - \mathcal{Q}_2 \sin \Omega t] \\ &= 1,377 \cdot 10^{-5} \Omega (\mathcal{Q}_1 \cos \Omega t - \mathcal{Q}_2 \sin \Omega t) \end{aligned}$$

* L'énergie de déformation de l'arbre :

$$U_a = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(q_1 \left(\frac{d^2 f(y)}{dy^2} \right) \right)^2 + \left(q_2 \left(\frac{d^2 f(y)}{dy^2} \right) \right)^2 \right] dy$$

Or on a $f(y) = \sin ay + b \operatorname{sh} ay$ qui donne $\frac{d^2 f(y)}{dy^2} = -a^2 \sin ay + a^2 b \operatorname{sh} ay = h(y)$,

$$\begin{aligned} \text{d'où : } U_a &= \frac{EI}{2} (q_1^2 + q_2^2) \int_0^L (-a^2 \sin ay + a^2 b \operatorname{sh} ay)^2 dy \\ &= \frac{EI}{2} (q_1^2 + q_2^2) a^4 \int_0^L (\sin^2 ay + b^2 \operatorname{sh}^2 ay - 2b \sin ay \operatorname{sh} ay) dy \\ &= \frac{2.10^{11} \cdot 7,855 \cdot 10^{-9}}{2} (9,8165)^4 (q_1^2 + q_2^2) [0,1745 + 0,02529 + 2,943 \cdot 10^{-6}] \\ &= 1,457 \cdot 10^6 (q_1^2 + q_2^2) \end{aligned}$$

Les énergies du système sont donc finalement :

$$\begin{aligned} T &= T_a + T_b + T_d \\ &= 7,375(\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2) - 0,7475\Omega \dot{\phi}_1 q_2 + 1,377 \cdot 10^{-5} \Omega (\dot{\phi}_1 \cos \Omega t - \dot{\phi}_2 \sin \Omega t) + (D_1 + D_2) \\ U &= U_a = 1,457 \cdot 10^6 (q_1^2 + q_2^2) \end{aligned}$$

L'appliquons des équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi_1} + \frac{\partial U_a}{\partial \phi_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi_2} + \frac{\partial U_a}{\partial \phi_2} = 0$$

donne :

$$\begin{cases} 14,75\dot{\phi}_1 - 0,7474\Omega \dot{\phi}_2 + 2,914 \cdot 10^6 q_1 = 1,377 \cdot 10^{-5} \Omega^2 \sin \Omega t \\ 14,75\dot{\phi}_2 + 0,7474\Omega \dot{\phi}_1 + 2,914 \cdot 10^6 q_2 = 1,377 \cdot 10^{-5} \Omega^2 \sin \Omega t \end{cases}$$

qui se mettent sous la forme étudiée :

$$m\ddot{\phi}_1 - a\Omega \dot{\phi}_2 + Kq_1 = C\Omega^2 \sin \Omega t$$

$$m\ddot{\phi}_2 + a\Omega \dot{\phi}_1 + Kq_2 = C\Omega^2 \cos \Omega t$$

DONNEES DU MODELE LALANNE/FERRARIS

Les données numériques concernant le modèle de Lalanne et Ferraris qui ont été recalculés sont les suivantes :

* Modèle symétrique

Fonction de déplacement : $f(y) = \sin \pi y/L$.

Système d'équations du mouvement :

$$\begin{cases} 14,29\ddot{q}_1 - 2,871\Omega\ddot{q}_2 + 1,195 \cdot 10^6 q_1 = 1,299 \cdot 10^{-5} \Omega^2 \sin \Omega t \\ 14,29\ddot{q}_2 + 2,871\Omega\ddot{q}_1 + 1,195 \cdot 10^6 q_2 = 1,299 \cdot 10^{-5} \Omega^2 \sin \Omega t \end{cases}$$

Fréquences naturelles à l'arrêt : $\omega_{10} = \omega_{20} = \sqrt{\frac{k}{m}} = 289,18 \text{ rd/s}$

Fréquences naturelles en rotation :

$$\omega_1 = \sqrt{8,362 \cdot 10^4 + 2,017 \cdot 10^{-2} \Omega^2 (1 - \sqrt{1 + \frac{8,292 \cdot 10^6}{\Omega^2}})} \text{ (rd/s)}$$

$$\omega_2 = \sqrt{8,362 \cdot 10^4 + 2,017 \cdot 10^{-2} \Omega^2 (1 + \sqrt{1 + \frac{8,292 \cdot 10^6}{\Omega^2}})} \text{ (rd/s)}$$

Fréquences critiques :

Pour A : $\Omega_{c1} = 263,76 \text{ rd/s}$, pour B : $\Omega_{c2} = 323,29 \text{ rd/s}$,

pour C : $\Omega_{c1} = 244,10 \text{ rd/s}$ et pour D : $\Omega_{c2} = 373,66 \text{ rd/s}$

Réponse au balourd :

$$A_{e1} = A_{e2} = \frac{1,299 \cdot 10^{-5} \Omega^2}{1,195 \cdot 10^6 - 11,42 \Omega^2} \text{ (m)}$$

$$\text{avec la vitesse critique } \Omega_c = \sqrt{\frac{1,195 \cdot 10^6}{14,29 - 2,871}} = 323,496 \text{ rd/s}$$

Réponse à la force asynchrone :

$$A_{e1} = A_{e2} = \frac{F}{1,195 \cdot 10^6 - 2,138 \Omega^2} \text{ (m)}$$

$$\text{avec la vitesse critique } \Omega_c = \sqrt{\frac{1,195 \cdot 10^6}{0,5(14,29 \cdot 0,5 - 2,871)}} = 373,66 \text{ rd/s quand } F=1 \text{ N.}$$

* Modèle dissymétrique

Système d'équations du mouvement :

$$\begin{cases} 14,29 \ddot{q}_1 - 2,871 \Omega^2 \ddot{q}_2 + 1,195 \cdot 10^6 q_1 = 1,299 \cdot 10^{-5} \Omega^2 \sin \Omega t \\ 14,29 \ddot{q}_2 + 2,871 \Omega^2 \ddot{q}_1 + 1,570 \cdot 10^6 q_2 = 1,299 \cdot 10^{-5} \Omega^2 \sin \Omega t \end{cases}$$

Fréquences naturelles à l'arrêt :

$$\omega_{10} = \sqrt{\frac{1,195 \cdot 10^6}{14,29}} = 289,18 \text{ rd/s}$$

$$\omega_{20} = \sqrt{\frac{1,570 \cdot 10^6}{14,29}} = 331,46 \text{ rd/s}$$

Fréquences naturelles ou pulsations en rotation :

$$\omega_1 = \sqrt{96,745 \cdot 10^3 + 20,18 \cdot 10^{-3} \Omega^2 - \sqrt{(96,745 \cdot 10^3 + 20,18 \cdot 10^{-3} \Omega^2)^2 - 19,349 \cdot 10^4}} \text{ (rd/s)}$$

$$\omega_2 = \sqrt{96,745 \cdot 10^3 + 20,18 \cdot 10^{-3} \Omega^2 + \sqrt{(96,745 \cdot 10^3 + 20,18 \cdot 10^{-3} \Omega^2)^2 - 19,349 \cdot 10^4}} \text{ (rd/s)}$$

Fréquences critiques :

$$\text{Pour A : } \Omega_{c1} = 276.51 \text{ rd/s,} \quad \text{pour B : } \Omega_{c2} = 353.50 \text{ rd/s,}$$

$$\text{pour C : } \Omega_{c1} = 258.42 \text{ rd/s et pour D : } \Omega_{c2} = 404.56 \text{ rd/s}$$

Réponse au balourd :

$$A_{e1} = \frac{(1,570 \cdot 10^6 - 17,17 \Omega^2) 1,299 \cdot 10^{-5} \Omega^2}{196,1 \Omega^4 - 3,954 \cdot 10^7 \Omega^2 + 1,877 \cdot 10^{12}} \text{ (m)}$$

$$A_{e2} = \frac{(1,195 \cdot 10^6 - 17,17 \Omega^2) 1,299 \cdot 10^{-5} \Omega^2}{196,1 \Omega^4 - 3,954 \cdot 10^7 \Omega^2 + 1,877 \cdot 10^{12}} \text{ (m)}$$

Réponse à la force asynchrone :

$$A_{e1} = \frac{(1,570.10^6 - 5,009\Omega^2)F}{10,71\Omega^4 - 9,884.10^6\Omega^2 + 1,877.10^{12}} \text{ (m)}$$

$$A_{e2} = \frac{(1,195.10^6 - 5,009\Omega^2)F}{10,71\Omega^4 - 9,884.10^6\Omega^2 + 1,877.10^{12}} \text{ (m)}$$

* Modèle amorti

Système d'équations du mouvement :

$$\begin{cases} 14,29\Omega^2 q_1 - 2,871\Omega^2 q_2 + 75\beta q_1 + 1,270.10^6 q_1 = 1,299.10^{-5} \Omega^2 \sin \Omega t \\ 14,29\Omega^2 q_2 + 2,871\Omega^2 q_1 + 375\beta q_2 + 1,570.10^6 q_2 = 1,299.10^{-5} \Omega^2 \sin \Omega t \end{cases}$$

Les fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation sont obtenues en cherchant les racines du polynôme :

$$204,204r^4 + 6430,5\beta r^3 + (40,5836.10^6 + 28125\beta^2 + 8,2426\Omega^2)r^2 + (594.10^6\beta)r + 1,9939.10^{12} = 0$$

Elles sont données dans l'annexe 3 pour différentes valeurs de β .

Réponse au balourd :

$$A_{e1} = \frac{1,299.10^{-5} \Omega^2 (1,570.10^6 - 14,29\Omega^2 + j375\beta\Omega) - 3,73.10^{-5} \Omega^4}{195,964\Omega^4 - j6430,5\beta\Omega^3 - (28125\beta^2 + 40,58.10^6)\Omega^2 + 594.10^6\beta\Omega + 1,9939.10^{12}}$$

$$A_{e2} = \frac{1,299.10^{-5} \Omega^2 (1,270.10^6 - 14,29\Omega^2 + j75\beta\Omega) - 3,73.10^{-5} \Omega^4}{195,964\Omega^4 - j6430,5\beta\Omega^3 - (28125\beta^2 + 40,58.10^6)\Omega^2 + 594.10^6\beta\Omega + 1,9939.10^{12}}$$

Réponse à la force asynchrone :

$$A_{e1} = \frac{-j(1,570.10^6 - 3,5725\Omega^2 + j187,5\beta\Omega)F + j1,4355\Omega^2 F}{10,70\Omega^4 - j803,808\beta\Omega^3 - (10,145.10^6 + 7031,25\beta^2)\Omega^2 + j296,995.10^6\beta\Omega + 1,9939.10^{12}}$$

$$A_{e2} = \frac{(1,270.10^6 - 3,5725\Omega^2 + j37,5\beta\Omega)F - 1,4355\Omega^2 F}{10,70\Omega^4 - j803,808\beta\Omega^3 - (10,145.10^6 + 7031,25\beta^2)\Omega^2 + j296,995.10^6\beta\Omega + 1,9939.10^{12}}$$

RACINES DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE DU MODELE AMORTI

Pour le modèle étudié on a :

$\beta = 1$	$\beta = 15$	$\beta_{\text{crit}} = 512.245$	$\beta = 512.4$
-001.63 +448.12i -001.63 - 448.12i -000.33 + 445.20i -000.33 - 445.20i	053.35 + 502.70i 053.35 - 502.70i -055.31 + 390.76i -055.31 - 390.76i	0191.2 + 1014.8i 0191.2 - 1014.8i -0193.4 -0192.9	0191.2 + 1015.0i 0191.2 - 1015.0i -0196.2 -0190.2
-001.31 + 449.54i -001.31 - 449.54i -000.64 + 443.80i -000.64 - 443.80i	053.33 + 502.73i 053.33 - 502.73i -055.28 + 390.74i -055.28 - 390.74i	0191.2 + 1014.8i 0191.2 - 1014.8i -0193.2 + 0000.9i -0193.2 - 0000.9i	0191.2 + 1015.0i 0191.2 - 1015.0i -0196.1 -0190.3
-001.17 +451.93i -001.17 - 451.93i -000.79 + 441.46i -000.79 - 441.46i	053.24 + 502.84i 053.24 - 502.84i -055.19 + 390.68i -055.19 - 390.68i	0191.2 + 1014.8i 0191.2 - 1014.8i -0193.2 + 0001.8i -0193.2 - 0001.8i	0191.2 + 1015.0i 0191.2 - 1015.0i -0195.6 -0190.8
-001.12 + 454.44i -001.12 - 454.44i -000.84 + 439.01i -000.84 - 439.01i	053.09 + 503.02i 053.09 - 503.02i -055.05 + 390.57i -055.05 - 390.57i	0191.2 + 1014.9i 0191.2 - 1014.9i -0193.2 + 0002.7i -0193.2 - 0002.7i	0191.2 + 1015.1i 0191.2 - 1015.1i -0194.5 -0191.8
-001.09 + 457.00i -001.09 - 457.00i -000.86 + 436.56i -000.86 - 436.56i	052.89 + 503.28i 052.89 - 503.28i -054.84 + 390.41i -054.84 - 390.41i	0191.2 + 1015.0i 0191.2 - 1015.0i -0193.1 + 0003.6i -0193.1 - 0003.6i	0191.2 + 1015.1i 0191.2 - 1015.1i -0193.1 + 0002.0i -0193.1 - 0002.0i
-001.08 + 459.58i -001.08 - 459.58i -000.88 + 434.11i -000.88 - 434.11i	052.63 + 503.60i 052.63 - 503.60i -054.58 + 390.21i -054.58 - 390.21i	0191.1 + 1015.1i 0191.1 - 1015.1i -0193.1 + 0004.5i -0193.1 - 0004.5i	0191.1 + 1015.2i 0191.1 - 1015.2i -0193.1 + 0003.3i -0193.1 - 0003.3i
-001.07 +462.18i -001.07 - 462.18i -000.88 + 431.66i -000.88 - 431.66i	052.31 + 504.01i 052.31 - 504.01i -054.27 + 389.97i -054.27 - 389.97i	0191.1 + 1015.2i 0191.1 - 1015.2i -0193.1 + 0005.4i -0193.1 - 0005.4i	0191.1 + 1015.4i 0191.1 - 1015.4i -0193.0 + 0004.5i -0193.0 - 0004.5i
-001.07 + 464.80i -001.07 - 429.23i -000.89 + 429.23i -000.89 - 429.23i	051.94 + 504.48i 051.94 - 504.48i -053.90 + 389.68i -053.90 - 389.68i	0191.0 + 1015.3i 0191.0 - 1015.3i -0193.0 + 0006.3i -0193.0 - 0006.3i	0191.0 + 1015.5i 0191.0 - 1015.5i -0193.0 + 0005.5i -0193.0 - 0005.5i
-001.07 + 467.43i -001.07 - 467.43i -000.89 + 426.81i -000.89 - 426.81i	051.52 + 505.04i 051.52 - 505.04i -053.47 + 389.34i -053.47 - 389.34i	0191.0 + 1015.5i 0191.0 - 1015.5i -0192.9 + 0007.2i -0192.9 - 0007.2i	0191.0 + 1015.7i 0191.0 - 1015.7i -0192.9 + 0006.5i -0192.9 - 0006.5i
-001.07 + 470.08i -001.07 - 470.08i -000.89 + 424.41i -000.89 - 424.41i	051.04 + 505.67i 051.04 - 505.67i -052.99 + 388.95i -052.99 - 388.95i	0190.9 + 1015.7i 0190.9 - 1015.7i -0192.9 + 0008.1i -0192.9 - 0008.1i	0190.9 + 1015.8i 0190.9 - 1015.8i -0192.9 + 0007.5i -0192.9 - 0007.5i
-001.07 + 472.75i -001.07 - 472.75i -000.88 + 422.01i -000.88 - 422.01i	050.51 + 506.38i 050.51 - 506.38i -052.47 + 388.51i -052.47 - 388.51i	0190.8 + 1015.9i 0190.8 - 1015.9i -0192.8 + 0009.0i -0192.8 - 0009.0i	0190.8 + 1016.0i 0190.8 - 1016.0i -0192.8 + 0008.5i -0192.8 - 0008.5i

Pour le modèle Lalanne/Ferraris on a :

$\beta = 1$	$\beta = 15$	$\beta_{\text{crit}} = 51.7275$	$\beta = 52$
-13.12 + 331.20i -13.12 - 331.20i -02.62 + 298.10i -02.62 - 298.10i	096.50 + 470.56i 096.50 - 470.56i -112.25 + 172.39i -112.25 - 172.39i	111.03 + 771.48i 111.03 - 771.48i -126.45 -127.10	110.86 + 773.98i 110.86 - 773.98i -134.22 -118.99
-12.52 + 334.02i -12.52 - 334.02i -03.22 + 295.61i -03.22 - 295.61i	096.30 + 470.91i 096.30 - 470.91i -112.05 + 172.36i -112.05 - 172.36i	110.96 + 771.71i 110.96 - 771.71i -126.70 + 003.14i -126.70 - 003.14i	110.79 + 774.21i 110.79 - 774.21i -133.47 -119.60
-11.63 + 341.06i -11.63 - 341.06i -04.12 + 289.53i -04.12 - 289.53i	095.71 + 471.96i 095.71 - 471.96i -111.45 + 172.29i -111.45 - 172.29i	110.73 + 772.40i 110.73 - 772.40i -126.48 + 006.29i -126.48 - 006.29i	110.57 + 774.91i 110.57 - 774.91i -122.01 -130.62
-11.07 + 350.21i -11.07 - 350.21i -04.68 + 281.97i -04.68 - 281.97i	094.72 + 473.71i 094.72 - 473.71i -110.46 + 17.215i -110.46 - 172.15i	110.36 + 773.56i 110.36 - 773.56i -126.11 + 009.41i -126.11 - 009.41i	110.20 + 776.06i 110.20 - 776.06i -125.94 + 005.50i -125.94 - 005.50i
-10.79 + 360.44i -10.79 - 360.44i -04.95 + 273.98i -04.95 - 273.98i	093.35 + 476.17i 093.35 - 476.17i -109.10 + 171.95i -109.10 - 171.95i	109.84 + 775.19i 109.84 - 775.19i -125.59 + 012.51i -125.59 - 012.51i	109.68 + 777.68i 109.68 - 777.68i -125.43 + 009.89i -125.43 - 009.89i
-10.68 + 371.32i -10.68 - 371.32i -05.06 + 265.96i -05.06 - 265.96i	091.62 + 479.35i 091.62 - 479.35i -107.37 + 171.66i -107.37 - 171.66i	109.18 + 777.27i 109.18 - 777.27i -124.93 + 015.57i -124.93 - 015.57i	109.03 + 779.76i 109.03 - 779.76i -124.77 + 013.53i -124.77 - 013.53i
-10.67 + 382.71i -10.67 - 382.71i -05.07 + 258.05i -05.07 - 258.05i	089.56 + 483.26i 089.56 - 483.26i -105.30 + 171.27i -105.30 - 171.27i	108.38 + 779.82i 108.38 - 779.82i -124.13 + 018.57i -124.13 - 018.57i	108.23 + 782.30i 108.23 - 782.30i -123.98 + 016.89i -123.98 - 016.89i
-10.72 - 394.50i -10.72 - 394.50i -05.02 + 250.33i -05.02 + 250.33i	087.17 + 487.90i 087.17 - 487.90i -102.92 + 170.75i -102.92 - 170.75i	107.44 + 782.82i 107.44 - 782.82i -123.19 + 021.52i -123.19 - 021.52i	107.30 + 785.30i 107.30 - 785.30i -123.05 + 020.07i -123.05 - 020.07i
-10.81 - 406.67i -10.81 - 406.67i -04.93 + 242.85i -04.93 + 242.85i	084.51 + 493.28i 084.51 - 493.28i -100.26 + 170.10i -100.26 - 170.10i	1.06.38 + 786.28i 1.06.38 - 786.28i -1.22.12 + 024.40i -1.22.12 - 024.40i	106.24 + 788.75i 106.24 - 788.75i -121.99 + 023.12i -121.99 - 023.12i
-10.92 + 419.18i -10.92 - 419.18i -04.82 + 235.60i -04.82 - 235.60i	081.60 + 499.41i 081.60 - 499.41i -097.35 + 169.28i -097.35 - 169.28i	105.19 + 790.20i 105.19 - 790.20i -120.93 + 027.21i -120.93 - 027.21i	105.06 + 792.66i 105.06 - 792.66i -120.80 + 026.06i -120.80 - 026.06i
-11.05 + 432.00i -11.05 - 432.00i -04.69 + 228.61i -04.69 - 228.61i	078.49 + 506.28i 078.49 - 506.28i -094.24 + 168.28i -094.24 - 168.28i	103.88 + 794.57i 103.88 - 794.57i -119.62 + 029.94i -119.62 - 029.94i	103.76 + 797.02i 103.76 - 797.02i -119.50 + 028.88i -119.50 - 028.88i

Les parties imaginaires en valeurs absolues représentent les fréquences naturelles qui ont permis de tracer les diagrammes de campbell.

Résumé

L'innovation technologique se fait par la compréhension des phénomènes physiques complexes que l'on rencontre lors de l'exploration des différents domaines scientifiques. Parmi eux, la dynamique des arbres et rotors constitue un domaine particulier de la mécanique qui a depuis longtemps intéressé autant la communauté scientifique que le monde industriel.

L'objectif de ce travail porte, d'une part sur l'étude de l'influence des phénomènes vibratoires sur le comportement dynamique des arbres et rotors considérés en tant que corps continus en rotation. L'attention est portée sur les phénomènes de résonance observés lorsque la fréquence d'excitation du balourd ou des sollicitations extérieures franchit les fréquences propres du système. D'autre part il comprend l'étude de l'effet du changement des conditions aux limites sur le comportement vibratoire. La procédure de modélisation par la méthode éléments finis dans le cas des arbres et rotors est aussi exposée.

ﺓ

الإبداع التكنولوجي يؤدي لفهم الظواهر الفيزيائية المعقدة التي نقابلها أثناء البحث في مختلف المجالات العلمية، من بينها ديناميكا الأعمدة و التوارات تكوّن مجالاً مميزاً من الهندسة الميكانيكية الذي شغل لزمن طويل الأسرة العلمية والعالم الصناعي.

الهدف من هذا العمل يخص من جهة دراسة تأثير الظواهر الاهتزازية على السلوك الديناميكي للأعمدة و التوارات المعتبرة كأجسام صلبة في دوران. الاهتمام يخص ظواهر الرنين الملاحظة عندما يساوي تواتر التحريض للنقطة الثقيلة أو التأثيرات الخارجية التوترات الذاتية للنظام. من جهة أخرى الدراسة تحتوي على أثر تغيير الشروط الحدودية على السلوك الاهتزازي. أسلوب النمذجة بطريقة العناصر المنتهية معروض كذلك.

Abstract

The technological innovation is made by the understanding of the complex physical phenomena that one meets during the exploration of the different scientific domains. Among them, the dynamics of shafts and rotors constitute a particular domain of mechanics that interested for a long time the scientific community as much as the industrial world.

The objective of this work deals, on the one hand, with the influence of the vibratory phenomena on the dynamic behaviour of the shafts and rotors that are considered as continuous rotating bodies. The attention is on the phenomena of resonance observed when the frequency of excitation of heavy point or the external solicitations equals the natural frequencies of the system. On the other hand the study deals with of the effect of the change of the boundary conditions on the vibratory behaviour. The procedure of modelling by the finite elements method in the case of shafts and rotors is also exposed.