

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ MENTOURI - CONSTANTINE
FACULTÉ DES SCIENCES DE L'INGÉNIEUR
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

N° d'ordre : / ... / 2010
Série : / GM / 2010



Mémoire :
Présenté pour l'obtention du
Diplôme de Magister en Génie Mécanique

Option :
Energétique appliquée en engineering

THÈME :
**ETUDE DE L'ÉCOULEMENT
CONVECTIF D'UN FLUIDE DANS
UNE CAVITE**

Par :
BENHACINE Hamza

Soutenu le :

Devant les membres de jury :

- | | | | |
|----------------|-----------------------|-------|---------------------------------|
| • Président : | Mr. BESSAIH Rachid | Prof. | Université Mentouri Constantine |
| • Rapporteur : | Mr. BOUDEBOUS Sâadoun | Prof. | Université Mentouri Constantine |
| • Examineurs : | Mr. BENISSAD Smaile | M.C. | Université Mentouri Constantine |
| | Mr. KHOLAI Omar | M.C. | Université Mentouri Constantine |
-

2009/2010

Dédicace

*A mon père et ma très chère maman, qui m'ont éclairés
le chemin en me donnant la main tout au long de mes années d'étude
« Que dieu me les gardes ».*

A mes frères.

A mes sœurs.

A tous mes amis sans exception.

Remerciements

Je remercie tout d'abord Dieu le tout puissant qui nous éclaire le bon chemin.

Je remercie vivement et chaleureusement mon encadreur Monsieur BOUDEBOUS Sâadoun Professeur à l'université Mentouri – Constantine. Je le remercie pour son aide et ses conseils qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier Monsieur BESSAÏH Rachid, Professeur à l'université Mentouri – Constantine, qui ma fait l'honneur d'accepter la présidence du jury.

J'exprime mes vifs remerciements à Monsieur KHOLAI Omar Maître de conférence à l'université Mentouri – Constantine et Monsieur BENISSAD Smaïle Maître de conférence à l'université Mentouri – Constantine d'avoir accepté de participer au jury.

A tous, je tiens à exprimer mes sincères remerciements.

RESUME

Dans ce travail, nous étudions numériquement la convection mixte dans une cavité carrée à parois latérales froides et mobiles (se déplacent vers le bas et vers le haut), une source de chaleur est placée au milieu de la paroi supérieure. Les autres parois sont supposées adiabatiques. Un modèle mathématique reposant sur l'approche fonction du courant-vorticité ($\psi-\omega$) est utilisé.

Les équations régissant le phénomène ont été discrétiser par la méthode des différences finies. L'approche numérique est basée sur la méthode implicite des directions alternées (ADI). Les termes convectifs sont discrétisés à l'aide d'un schéma Upwind du 3^{ème} ordre de Kawamura, alors que les termes diffusifs et les termes sources sont traités par un schéma de différences centrales du 4^{ème} ordre. Les champs dynamiques et thermiques ainsi que le coefficient de transfert thermique (nombre de Nusselt) ont été déterminés pour différents nombres de Richardson.

Les résultats obtenus montrent l'existence d'écoulements complètement différents en fonction de la valeur du nombre de Richardson et du sens de déplacement des parois latérales. De plus, l'augmentation du nombre de Richardson signifie une augmentation d'apport de chaleur dans la cavité. Ce dernier a pour effet d'intensifier le mouvement du fluide et donc l'augmentation du nombre de Nusselt moyen.

Mots clés: Convection mixte, cavité carrée, Méthode des différences finis.

ABSTRACT

In this work, we study numerically the mixed convection in a square cavity with cold and moving side walls (it is moved downward and upward), a heat source is placed in the middle the top wall. The other walls are assumed adiabatic. A mathematical model based on the Stream Function-Vorticity (ψ - ω) is used.

The equations governing the phenomenon were discretised by the finite difference method and Gauss-Seidel to solve them. The numerical approach is based on the Alternating Direction Implicit method (ADI). The convective terms are discretised using a 3rd order Upwind scheme of Kawamura, while the diffusive terms and source terms are calculated by a central difference scheme of the 4th order. The dynamic and thermal fields and the heat transfer coefficient (Nusselt number) were determined for different numbers of Richardson.

The obtained results show the existence of different flows depending on the value of Richardson number and of the sidewalls direction. The increase in Richardson number represents an increase of heat transfer into the cavity which intensified the movement of fluid and therefore the increase of average Nusselt number.

Keywords: *Convection mixed, square cavity, finite difference method.*

ملخص

في عملنا الحالي قمنا بدراسة حسابية لظاهرة الحمل الحراري الرقائقي المزدوج داخل فجوة بها مصدر حراري في جزئها العلوي و لها جداران جانبيين يتحركان بسرعة ثابتة مرة نحو الأسفل و مرة نحو الأعلى في حين أن بقية الأجزاء عازلة.

لحل المعادلات الخاصة بالظاهرة تم استعمال طريقة الفروق المنتهية كما قمنا بإعداد برنامج حاسوب مكننا من الحصول على توزيع الحرارة داخل الفجوة. الدراسة تمت بتثبيت عدد رينولدز (100) و عدة قيم مختلفة لعدد ريشاردسون.

تحليل النتائج المتحصل عليها يوضح أن الخصائص الحرارية و الديناميكية للهواء الموجود داخل الفجوة تتأثر و بشكل كبير بقيمة عدد ريشاردسون.

الكلمات المفتاحية- الحمل الحراري- طريقة الفروق المنتهية

TABLE DES MATIÈRES

Résumé	iii
Nomenclature.....	viii

CHAPITRE I

INTRODUCTION ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1. Introduction générale	1
I.2. Revue bibliographique	2
I.3. Contenu du mémoire.....	5

CHAPITRE II

GEOMETRIE ET FORMULATION MATHÉMATIQUE

II.1. Configuration géométrique	7
II.2. Equations générales	8
II.3. Hypothèses simplificatrices	8
II.4. Formulation adimensionnelle du problème	9
II.5. Formulation fonction de courant- vorticité	12
II.6. Conditions aux limites	14
II.7. Calcul du nombre de Nusselt moyen	15

CHAPITRE III

METHODES NUMÉRIQUES

III.1. Choix de la méthode de discrétisation	16
III.2. Maillage	16
III.3. Discrétisation des différentes dérivées.....	17
III.3.1. Discrétisation temporelle.....	17
III.3.2. Discrétisation des termes diffusifs.....	18
III.3.3. Discrétisation des termes convectifs.....	19
III.3.4. Discrétisation du terme source	22
III.3.5. Discrétisation des conditions aux limites	22
III.4. Discrétisation de l'équation de la fonction de courant.....	24

III.5. Résolution des systèmes d'équations.....	25
III.6. Champ de vitesses.....	27
III.7. Algorithme et organigramme	28
III.8. Critère de convergence	29

CHAPITRE IV

RESULTATS ET DISCUSSIONS

IV.1. Introduction.....	31
IV.2. Choix du maillage	32
IV.3. Validation du code numerique	33
IV.4. Resultats.....	34
IV.4.1. 1 ^{er} cas : Les parois latérales se déplacent vers le bas	34
IV.4.1.1. Convection forcée Ri (0.1- 10)	34
IV.4.1.2. Convection mixte Ri (11- 60)	40
IV.4.1.3. Convection naturelle Ri (61-500)	45
IV.4.2. 2 ^{ème} cas : les parois latérales se déplacent vers le haut.....	50
CONCLUSION GENERALE.....	56
Références bibliographiques.....	57

NOMENCLATURE

C_p	Chaleur spécifique à pression constante	[J/kg.K]
g	Accélération de pesanteur	[m/s ²]
Gr	Nombre de Grashof, $Gr = g \beta \Delta T L^3 / \nu^2$	
i, j	Coordonnées logiques des points.	
K	Conductivité thermique	[W/m.K]
L	Longueur dimensionnelle de la cavité	[m]
Nu	Nombre de Nusselt local, $Nu(X) = \left[-\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right]_{Y=L}$	
\overline{Nu}	Nombre de Nusselt moyen, $\overline{Nu} = \frac{1}{L} \int_0^L Nu(X) dX$	
P	Pression adimensionnelle.	
p	Pression	[Pa]
Pr	Nombre de Prandtl, $Pr = \nu / \alpha$	
Re	Nombre de Reynolds, $Re = V_0 L / \nu$	
Ri	Nombre de Richardson, $Ri = Gr / Re^2$	
T	Température	[K]
t	Temps	[s]
u, v	Composantes de la vitesse	[m/s]
U, V	Composantes de la vitesse adimensionnelle.	
\vec{V}	Vecteur vitesse du fluide	[m/s]
x, y	Coordonnées cartésiennes dimensionnelles	[m]
X, Y	Coordonnées cartésiennes adimensionnelles	

Symboles Grecs

ε	Longueur adimensionnelle de la partie chauffée.	
α	Diffusivité thermique	[m ² /s]
β	Coefficient d'expansion thermique à pression C^{te} $\beta = \frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial T}$	[K ⁻¹]

θ	Température adimensionnelle, $\theta = \frac{(T - T_f)}{(T_c - T_f)}$	
ϕ	Variable dépendante générale.	
ν	Viscosité cinématique	[m ² /s]
μ	Viscosité dynamique	[Kg/m.s]
ρ	Masse volumique	[kg/m ³]
ρ_0	Masse volumique à T ₀	[kg/m ³]
τ	Temps adimensionnel, $\tau = t \frac{V_0}{L}$	
ω	Vorticité adimensionnelle.	
ψ	Fonction de courant adimensionnelle.	
$\Delta\tau$	Incrément du temps adimensionnel.	
ΔT	Différence de température	[°C]

Indices et exposants

n	Compteur d'itération.
c	Chaude.
f	Froide.

CHAPITRE I

INTRODUCTION ET REVUE

BIBLIOGRAPHIQUE

I.1. INTRODUCTION GENERALE

Le transfert de chaleur est un processus d'une grande importance dans le domaine de l'industrie et des technologies. Bien qu'il se manifeste sous diverses formes (rayonnement, conduction et convection), cette dernière est la plus visée dans certains domaines bien spécifiés tels que le refroidissement des processeurs et des composantes électroniques, les radiateurs et les échangeurs de chaleurs, etc.

La convection est une mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz. Le transfert d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes.

D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux particules fluides adjacentes, L'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces particules. Ensuite ces dernières vont se mélanger avec d'autres particules situées dans une région à basse température et transférer une partie de leur énergie, celle-ci est à présent emmagasinée dans les particules fluides et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement.

La transmission de chaleur par convection est désignée, selon le mode d'écoulement du fluide, par convection libre et convection forcée. Lorsqu'il se produit au sein du fluide des courants dus simplement aux différences de densité résultant des gradients de température, on dit que la convection est naturelle ou libre. Par contre si le mouvement du fluide est provoqué par une action externe, telle une pompe ou un ventilateur, le processus est appelé convection

forcée. Si les deux causes existent simultanément, sans que l'une soit négligeable par rapport à l'autre, la convection est dite mixte.

Le présent travail consiste à analyser la convection mixte dans une cavité carrée à parois latérales mobiles, une source de chaleur est placée au milieu de la paroi supérieure. Plus particulièrement, elle a pour objet de déterminer l'influence relative des deux modes de force (force de flottabilité et de cisaillement) sur le transfert de chaleur induit lorsque le fluide est en mouvement.

I.2. REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

L'amélioration du transfert de chaleur par convection est l'objet principal de plusieurs travaux, un grand nombre de chercheurs ont mené une multitude d'essais numériques et expérimentaux portant sur la description des phénomènes géométriques gérant la convection et l'effet de la nature des systèmes dans lesquels elle a lieu (géométrie spécialement). Beaucoup des travaux publiés ont été élaborés concernant la convection dans des cavités à paroi mobiles qui sont en relation directe avec notre étude. Parmi ces travaux nous citons :

M.K. Moallemi, K.S. Jang [1] Ont considéré l'écoulement et le transfert de chaleur dans une cavité carrée pour laquelle le mouvement du fluide est induit par le frottement résultant du mouvement de translation du couvercle et par la force de flottabilité due au chauffage du plancher. Les simulations numériques sont faites pour un écoulement laminaire bidimensionnel ($100 \leq Re \leq 2200$) et pour différentes valeurs du nombre de Richardson. Ils ont étudié les effets du nombre de Prandtl pour les valeurs faibles ($0,01 < Pr < 50$) sur l'écoulement et le transfert de chaleur dans la cavité. La température et le champ d'écoulement sont calculés et présentés pour illustrer l'influence du nombre de Prandtl. Les nombres de Nusselt locaux et globaux sont rapportés pour différentes valeurs de Re , Ri et Pr .

T.H. Hsu et S.G. Wang [2] ont présenté une étude numérique de la convection mixte des fluides micro-polaires dans une cavité carrée avec une source de chaleur discrète. Les études ont été effectuées pour une large gamme des nombres de Reynolds et Grashof, ainsi que les paramètres liés au fluide. Les résultats montrent que les champs thermiques dépendent de la viscosité.

O. Aydin et W.J. Yang [3] et G. Guo et M.A.R. Sharif [4] ont rapporté une étude numérique de la convection mixte laminaire bidimensionnelle dans une cavité carrée avec une paroi supérieure adiabatique et des parois verticales froides se déplaçant vers le bas à une vitesse constante. Une source chaude est placée au centre de la paroi inférieure (température fixe). Aydin et Yang ont considéré une température fixe alors que Guo et Sharif ont imposé un flux de chaleur constant. La partie restante de cette paroi est supposée adiabatique. Les effets de la longueur de la source de chaleur ainsi que du nombre de Richardson ont été étudiés. Dans ces deux cas, les effets de la convection forcée et de la convection naturelle sont coopérants, aucune bifurcation vers une solution non symétrique n'a été observée.

M.A.R. Sharif [5] a étudié numériquement la convection mixte dans une cavité rectangulaire bidimensionnelle en utilisant l'algorithme SIMPLER. La surface supérieure de la cavité rectangulaire est maintenue à haute température et la surface inférieure à basse température, tandis que les deux surfaces gauche et droite sont maintenues adiabatiques. L'étude numérique est faite pour un nombre de Rayleigh varié de 10^5 à 10^7 , le nombre de Reynolds $Re = 408.21$. Les résultats montrent que le nombre de Nusselt local augmente avec l'augmentation de l'angle d'inclinaison pour la convection forcée dominante.

K. M. Khanafer et al [6] Ont étudié numériquement le transfert de chaleur par convection mixte laminaire instable dans une cavité carrée. La paroi supérieure est maintenue à une température froide T_c soumise à une vitesse horizontale sinusoïdale, tandis que la paroi inférieure est maintenue à une température chaude T_h ; les autres parois sont adiabatiques. La discrétisation des équations gouvernant le problème sont obtenus à l'aide des éléments finis basée sur la méthode de Galerkin. Les caractéristiques de l'écoulement du fluide et le transfert de chaleur sont examinés pour une gamme du nombre de Reynolds $10^2 \leq Re \leq 10^3$, de Grashof $10^2 \leq Re \leq 10^5$, d'une fréquence sans dimensions d'oscillation du couvercle $0.1 \leq \omega \leq 5$ et un nombre de Prandtl de 0.71. Ils ont montré que le nombre de Nusselt moyen augmente avec l'augmentation du nombre de Grashof, tandis qu'il diminue avec l'augmentation du nombre de Reynolds et de la fréquence de vitesse du couvercle.

S.K. Mahapatra et al [7] Ont étudié la convection mixte dans une cavité où les parois supérieure et inférieure sont maintenues adiabatiquement et dotées de clôtures sur leurs faces intérieures, tandis que la paroi gauche chaude et la paroi droite froide sont soumises à des vitesses opposées. Ils ont examiné l'effet du nombre de Richardson ($Ri = 1$) pour la convection mixte et la taille des clôtures sur le transfert de chaleur pour la convection forcée

($Ri = 0.1$). Les résultats montrent qu'au-delà d'une certaine taille des clôtures de $0.3 H$ (H est l'hauteur de la clôture), le transfert de chaleur par la convection mixte est plus grand que celui dans le cas de la convection naturelle.

H.F. Oztop et al [8] ont présenté une étude numérique de la convection mixte laminaire et la conduction dans une enceinte à fond épais chauffée. La paroi supérieure est en mouvement et maintenue à une température froide tandis que les parois verticales de l'enceinte sont adiabatiques. Les paramètres de contrôle sont les nombres de Richardson $0.1 \leq Ri \leq 10$, le rapport de l'épaisseur du fond et la hauteur de l'enceinte ($0,1 \leq h / H \leq 0,5$) et le taux de conductivité thermique ($0,01 \leq \lambda_f / \lambda_s \leq 10$). Ils ont montré que le transfert de chaleur diminue avec l'augmentation de (λ_f / λ_s) , le nombre de Richardson et l'épaisseur de la paroi.

A. Baïri [9] a présenté deux études numérique et expérimentale de la convection naturelle transitoire dans une cavité cubique fermée remplie d'air. La paroi gauche contient trois sources de chaleur parallèles discrètes soumises à un flux de chaleur constant et séparées entre elles par des bandes adiabatiques ; en face de la paroi gauche une plaque froide est maintenue à une température constante T_c . Les quatre autres murs de la cavité sont considérés comme adiabatiques. Les échanges de chaleur sont étudiés pour plusieurs configurations bidimensionnelles avec différents angles d'inclinaison de la paroi active en respectant la gravité. Les résultats numériques sont en bon accord avec les mesures thermiques réalisées sur un banc d'essai expérimental.

T. Basak et al [10] ont étudié numériquement la convection mixte dans une cavité carrée avec un échauffement uniforme et non uniforme de la paroi inférieure, les deux parois verticales sont maintenues à une température froide constante tandis que la paroi supérieure est considérée adiabatique et se déplaçant avec une vitesse uniforme. Ils ont observé que l'intensité de la circulation de l'écoulement augmente avec l'augmentation de la valeur du nombre de Grashof (Gr), qui est due à l'effet de la force d'Archimède (force de buoyancy). Les résultats montrent que la convection naturelle ou forcée est basée sur les deux paramètres de contrôle, le nombre de Prandtl (Pr) et le nombre de Richardson Ri dont l'expression est Gr/Re^2 , Re représente le nombre de Reynolds.

N. Ouertatani et al [11] ont étudié numériquement la convection mixte tridimensionnelle de l'air dans une cavité cubique. Les parois supérieure et inférieure sont en

mouvement et maintenues à des températures différentes (chauffé par le haut et refroidis par le bas), tandis que les autres parois sont adiabatiques. Les paramètres de contrôle sont les nombres de Richardson $0.001 \leq Ri \leq 10$, de Reynolds $100 \leq Re \leq 1000$ et de Prandtl $Pr = 0,71$. les résultats indiquent qu'une amélioration remarquable du transfert de chaleur jusqu'à 76% peut être atteinte pour la combinaison particulière de $Re = 400$ et $Ri = 1$.

T.S. Cheng et W.H. Liu [12] Ont étudié numériquement la convection mixte dans une cavité carrée, dont la paroi supérieure est mobile. Quatre cas sont distingués selon la direction du gradient de la température imposée. L'échauffement différentiel des parois supérieures et des parois inférieures se traduit par l'attraction gravitationnelle stable et les gradients de température instable, alors que l'échauffement différentiel des parois latérales gauche et droite favorise et contrecarre les effets de flottabilité. En utilisant les paramètres de contrôle $Pr = 0.7$ et $Ri = 0.1, 1$ et 10 , ils ont constaté que le nombre de Richardson et la direction du gradient de température affectent les types d'écoulement et l'évolution du transport de chaleur dans la cavité. De plus, ils ont montré que le taux de transfert de chaleur augmente avec la diminution du nombre de Richardson indépendamment de l'orientation du gradient de température imposée.

B. Dahdi et S.Boudebous [13] ont repris la même configuration que celle d'Aydin et Yang en inversant le sens de la vitesse des parois latérales de la cavité. Les résultats obtenus montrent l'apparition d'une dissymétrie dans le champ de l'écoulement.

L'étude bibliographique présentée ci-dessus donne un aperçu général sur l'ensemble des travaux entrepris sur la convection mixte. Notre étude considère le même problème que celui de B. Dahdi et al. Cependant, on a placé une source de chaleur au milieu de la paroi supérieure et la direction du déplacement des parois latérales sera examinée pour créer une compétition entre la convection forcée et la convection naturelle du type Rayleigh-Bénard dans le but de vérifier si la dissymétrie dans l'écoulement est toujours présente.

I.3. CONTENU DU MEMOIRE

Le travail présenté dans ce mémoire est organisé en quatre chapitres :

Le premier chapitre, présente une introduction générale sur la convection mixte, ainsi que les objectifs ambitionnés. On a cité quelques travaux numériques concernant la convection dans une cavité.

Le modèle physique choisi, à savoir les équations gouvernantes ainsi que les conditions aux limites associées constituent le contenu du deuxième chapitre.

Le troisième chapitre est consacré à la présentation de la méthode des différences finies et sa mise en œuvre pour la discrétisation des équations du problème.

On a rassemblé dans le quatrième chapitre le choix du maillage, la validation de notre programme de calcul et les principaux résultats numériques de cette étude. Les commentaires, l'interprétation et l'analyse des divers résultats de cette étude paramétrique sont également présentés.

Enfin nous avons terminé ce travail par une conclusion générale qui résume les principaux résultats obtenus.

CHAPITRE II

GEOMETRIE ET FORMULATION MATHEMATIQUE

II.1. CONFIGURATION GEOMETRIQUE

La géométrie du problème considéré est illustrée dans la figure II_1 (a, b). Il s'agit d'une cavité carrée remplie d'air dont les parois latérales sont maintenues à une température constante froide T_f et qui se déplacent vers le bas (1^{ère} cas) ou vers le haut (2^{ème} cas) avec une vitesse fixée V_0 . Une source de chaleur est située au milieu de la paroi supérieure de la cavité ayant une longueur égale au cinquième de celle de la cavité L et de température constante chaude T_c . Les autres parois sont supposées adiabatiques.

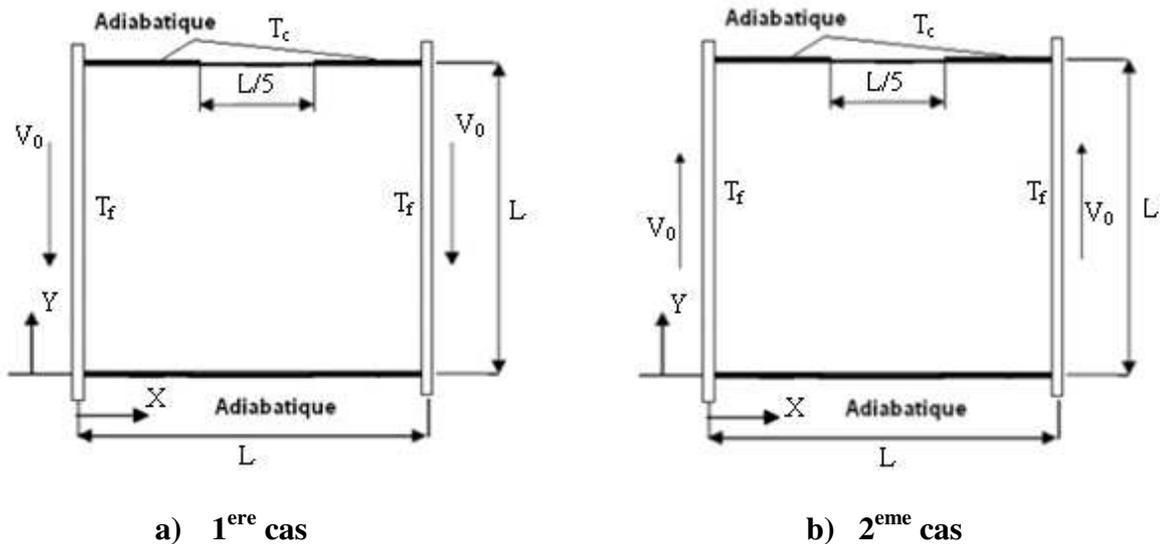


Figure II_1 (a, b) : Configuration géométrique.

II.2. EQUATIONS GENERALES

L'analyse de la convection thermique se fonde sur l'application des trois lois fondamentales de la physique générale (conservation de la masse, de la quantité de mouvement, et de l'énergie) [14].

La formulation différentielle de ces équations est la suivante :

v Equation de la conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{V}) = 0 \quad \text{II}_1$$

Souvent, cette équation est appelée **équation de continuité**.

v Equation de la conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad} \vec{V} = \frac{-1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \vec{V} - g \beta (T - T_\infty) \quad \text{II}_2$$

v Equation de la conservation de l'énergie

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad} T \right) = \beta T \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad} p \right) + \varphi + \text{div} (k \text{grad} T) \quad \text{II}_3$$

φ est la fonction de la dissipation visqueuse définie comme suit :

$$\varphi = \mu \left[2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \quad \text{II}_4$$

II.3. HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES

Pour simplifier la résolution du problème physique, des hypothèses simplificatrices sont introduites au niveau de la modélisation. Nous nous limitons donc aux hypothèses couramment retenues dans les études de la convection naturelle, mixte et forcée qui sont les suivantes:

L'écoulement est supposé bidimensionnel.

Le fluide est newtonien et incompressible.

Le régime d'écoulement est considéré comme étant laminaire.

le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable.

La dissipation visqueuse et le terme de pression dans l'équation de la chaleur sont négligeables.

L'approximation de Boussinesq est valide : elle consiste à considérer que les variations de la masse volumique sont négligeables aux niveaux de tous les termes des équations de quantité de mouvement ($\rho = \rho_0$), sauf au niveau du terme de gravité. La variation de ρ en fonction de la température est donnée comme suit :

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta (T - T_0)] \quad \text{II}_5$$

Avec : T_0 température de référence, β est le coefficient d'expansion thermique à pression constante, ρ_0 est la masse volumique du fluide à T_0 .

Les propriétés physiques de l'air à l'intérieur de la cavité sont supposées constantes.

Compte tenu des hypothèses émises précédemment, les équations du modèle mathématique sous forme dimensionnelle sont les suivantes :

∇ **Equation de continuité**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{II}_6$$

∇ **Equation de quantité de mouvement**

Suivant x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (p - p_0)}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad \text{II}_7$$

Suivant y :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (p - p_0)}{\partial y} + \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + g\beta(T - T_0) \quad \text{II}_8$$

∇ **Equation de l'énergie**

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \quad \text{II}_9$$

II.4. FORMULATION ADIMENSIONNELLE DU PROBLEME

Pour adimensionnaliser les variables dépendantes et indépendantes, nous employons des quantités caractéristiques qui sont constantes dans tout le champ d'écoulement et de température. Ces quantités sont : L , V_0 , T_c , T_f , et P_0 .

Nous considérons des coordonnées cartésiennes et définissons les variables adimensionnelles suivantes :

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad U = \frac{u}{V_0}, \quad V = \frac{v}{V_0}, \quad \tau = T \frac{V_0}{L}, \quad P = \frac{p - p_0}{\rho V_0^2}, \quad \theta = \frac{(T - T_f)}{(T_c - T_f)}$$

$$x = X \times L, \quad y = Y \times L, \quad u = V_0 \times U, \quad v = V_0 \times V, \quad T - T_f = \Delta T \times \theta, \quad t = \frac{L \times \tau}{V_0}, \quad p - p_0 = \rho V_0^2 P$$

II.4.1. Forme adimensionnelle de l'équation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial X} \frac{V_0}{L} \quad \text{II}_{10}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial Y} \frac{V_0}{L} \quad \text{II}_{11}$$

Substituant (II_10) et (II_11) dans (II_6) :

$$\left(\frac{V_0}{L}\right) \frac{\partial U}{\partial X} + \left(\frac{V_0}{L}\right) \frac{\partial V}{\partial Y} = 0$$

Donc :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad \text{II}_{12}$$

II.4.2. Forme adimensionnelle des équations de quantité de mouvement

a) L'équation de quantité de mouvement suivant x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t}\right) = \left(V_0 \frac{\partial U}{\partial \tau} \frac{V_0}{L}\right) = \left(\frac{V_0^2}{L}\right) \frac{\partial U}{\partial \tau} \quad \text{II}_{13}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = V_0 \times U \left(\frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} \right) = V_0 \times U \left(V_0 \frac{\partial U}{\partial X} \frac{1}{L} \right) = \left(\frac{V_0^2}{L} \right) U \frac{\partial U}{\partial X} \quad \text{II}_{14}$$

$$v \frac{\partial u}{\partial y} = V_0 \times V \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial y} \right) = V_0 \times V \left(V_0 \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{1}{L} \right) = \left(\frac{V_0^2}{L} \right) V \frac{\partial U}{\partial Y} \quad \text{II}_{15}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(V_0 \frac{\partial U}{\partial X} \frac{1}{L} \right) = \frac{V_0}{L} \times \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right) \frac{\partial X}{\partial x} = \left(\frac{V_0}{L^2} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \quad \text{II}_{16}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(V_0 \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{1}{L} \right) = \frac{V_0}{L} \times \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) \frac{\partial Y}{\partial y} = \left(\frac{V_0}{L^2} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \quad \text{II}_{17}$$

La substitution de (II_13), (II_14), (II_15), (II_16) et (II_17) dans (II_7) donne :

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\nu}{V_0 L} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right)$$

Introduisant le nombre de Reynolds $Re = \frac{V_0 L}{\nu}$ nous obtenons :

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad \text{II}_{18}$$

b) L'équation de quantité de mouvement suivant y :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) = \left(V_0 \frac{\partial V}{\partial \tau} \frac{V_0}{L} \right) = \left(\frac{V_0^2}{L} \right) \frac{\partial V}{\partial \tau} \quad \text{II}_{19}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} = V_0 \times U \left(\frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} \right) = V_0 \times U \left(V_0 \frac{\partial V}{\partial X} \frac{1}{L} \right) = \left(\frac{V_0^2}{L} \right) U \frac{\partial V}{\partial X} \quad \text{II}_{20}$$

$$v \frac{\partial v}{\partial y} = V_0 \times V \left(\frac{\partial v}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial y} \right) = V_0 \times V \left(V_0 \frac{\partial V}{\partial Y} \frac{1}{L} \right) = \left(\frac{V_0^2}{L} \right) V \frac{\partial V}{\partial Y} \quad \text{II}_{21}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(V_0 \frac{\partial V}{\partial X} \frac{1}{L} \right) = \frac{V_0}{L} \times \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right) \frac{\partial X}{\partial x} = \left(\frac{V_0}{L^2} \right) \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \quad \text{II}_{22}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(V_0 \frac{\partial V}{\partial Y} \frac{1}{L} \right) = \frac{V_0}{L} \times \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right) \frac{\partial Y}{\partial y} = \left(\frac{V_0}{L^2} \right) \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \quad \text{II}_{23}$$

La substitution de (II_19), (II_20), (II_21), (II_22) et (II_23) dans (II_8) donne :

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\nu}{V_0 L} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \frac{g\beta\Delta T}{V_0^2} L \theta \quad \text{II}_{24}$$

Introduisant les nombres de *Grashof* $Gr = (g\beta\Delta T L^2)/\nu^2$ mesure le rapport des forces de gravité aux forces de viscosité agissant sur le fluide (il représente l'effet de buoyancy) et de Richardson $Ri = Gr/Re^2$ l'équation précédente s'écrit :

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + Ri \theta \quad \text{II}_{25}$$

II.4.3. Forme adimensionnelle de l'équation d'énergie

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{\partial T}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) = \left(\Delta T \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \frac{V_0}{L} \right) = \left(\frac{V_0 \times \Delta T}{L} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad \text{II}_{26}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = V_0 \times U \left(\frac{\partial T}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} \right) = V_0 \times U \left(\Delta T \frac{\partial \theta}{\partial X} \frac{1}{L} \right) = \left(\frac{V_0 \times \Delta T}{L} \right) U \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad \text{II}_{27}$$

$$v \frac{\partial T}{\partial y} = V_0 \times V \left(\frac{\partial T}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial y} \right) = V_0 \times V \left(\Delta T \frac{\partial \theta}{\partial Y} \frac{1}{L} \right) = \left(\frac{V_0 \times \Delta T}{L} \right) V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \quad \text{II}_{28}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta T \frac{\partial \theta}{\partial X} \frac{1}{L} \right) = \frac{\Delta T}{L} \times \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right) \frac{\partial X}{\partial x} = \left(\frac{\Delta T}{L^2} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \quad \text{II}_{29}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\Delta T \frac{\partial \theta}{\partial Y} \frac{1}{L} \right) = \frac{\Delta T}{L} \times \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \frac{\partial Y}{\partial y} = \left(\frac{\Delta T}{L^2} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \quad \text{II}_{30}$$

Remplaçant par (II_26), (II_27), (II_28), (II_29) et (II_30) dans (II_9) :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\alpha}{V_0 L} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad \text{II}_{31}$$

Prenant $Pr = \nu/\alpha$ on aura :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Re Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad \text{II}_{32}$$

II.5. FORMULATION FONCTION DE COURANT- VORTICITE

L'introduction des variables ω et ψ a pour objectif de simplifier l'équation du mouvement en éliminant le gradient de pression. Il s'agit de dériver les équations (II_18) et (II_25) respectivement par rapport à Y et à X; et de procéder à la soustraction entre les deux équations obtenues. On obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + U \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + V \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right] + Ri \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad \text{II}_{33}$$

La vorticité est donnée par la relation suivante :

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \quad \text{II}_{34}$$

En substituant ω par sa formule dans l'équation (II_33), on obtient donc l'équation de la vorticité :

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \omega}{\partial X} + V \frac{\partial \omega}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right] + Ri \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad \text{II}_{35}$$

Les vitesses de l'écoulement sont définies par :

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \quad \text{II}_{36}$$

En combinant les équations (II_34) et (II_36), la fonction de courant est obtenue par :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -\omega \quad \text{II}_{37}$$

Finalement, les équations adimensionnelles en termes de température θ , de vorticité ω et de fonction de courant ψ régissant notre problème :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{RePr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \omega}{\partial X} + V \frac{\partial \omega}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right] + Ri \frac{\partial \theta}{\partial X}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -\omega, \quad U = \frac{\partial \psi}{\partial Y}, \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial X}$$

Les nombres de Reynolds (Re), de Prandtl (Pr) et de Grashof (Gr) sont définis comme suit :

$$\text{Re} = \frac{V_0 L}{\nu}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}, \quad \text{Gr} = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu^2}$$

II.6. CONDITIONS AUX LIMITES

La résolution du système d'équations obtenu précédemment nécessite l'incorporation des conditions initiales et aux limites pour chaque variable dépendante. Dans un premier temps, le fluide est au repos et sa température adimensionnelle est nulle dans toute la cavité.

Les conditions de température sont connues sur les parois.

La température adimensionnelle de la paroi gauche et droite est constante et égale à 0. La partie chaude de la paroi supérieure soumise à une température adimensionnelle égale à 1. La condition d'adiabatique est adoptée pour les autres parois (inférieure et supérieure).

Les vitesses des parois gauche et droite sont constantes et égale à -1 pour le premier cas et à $+1$ pour le deuxième cas.

Ces différentes conditions peuvent être résumées par les expressions suivantes.

$$\begin{aligned} \theta=0 \quad U=0 \quad V=\pm 1 & \quad \text{pour} \quad \begin{cases} X=0 \\ X=1 \end{cases} \quad \text{et} \quad 0 < Y < 1 \\ \theta=1 \quad U=V=0 & \quad \text{pour} \quad Y=1 \quad \text{et} \quad \frac{1-\varepsilon}{2} < X < \frac{1+\varepsilon}{2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial Y}=0 \quad U=V=0 & \quad \text{pour} \quad Y=1 \quad \text{et} \quad 0 < X < \frac{1-\varepsilon}{2}, \quad \frac{1+\varepsilon}{2} < X < 1 \\ \frac{\partial \theta}{\partial Y}=0 \quad U=V=0 & \quad \text{pour} \quad Y=0 \quad \text{et} \quad 0 < X < 1 \end{aligned}$$

La valeur de la fonction de courant ψ est égale à 0 sur toutes les parois. La vorticité ω au niveau des parois solides ou mobiles est évaluée par un développement de Taylor de premier ordre de la fonction de courant ψ . L'expression mathématique de cette condition sera développée dans le chapitre suivant.

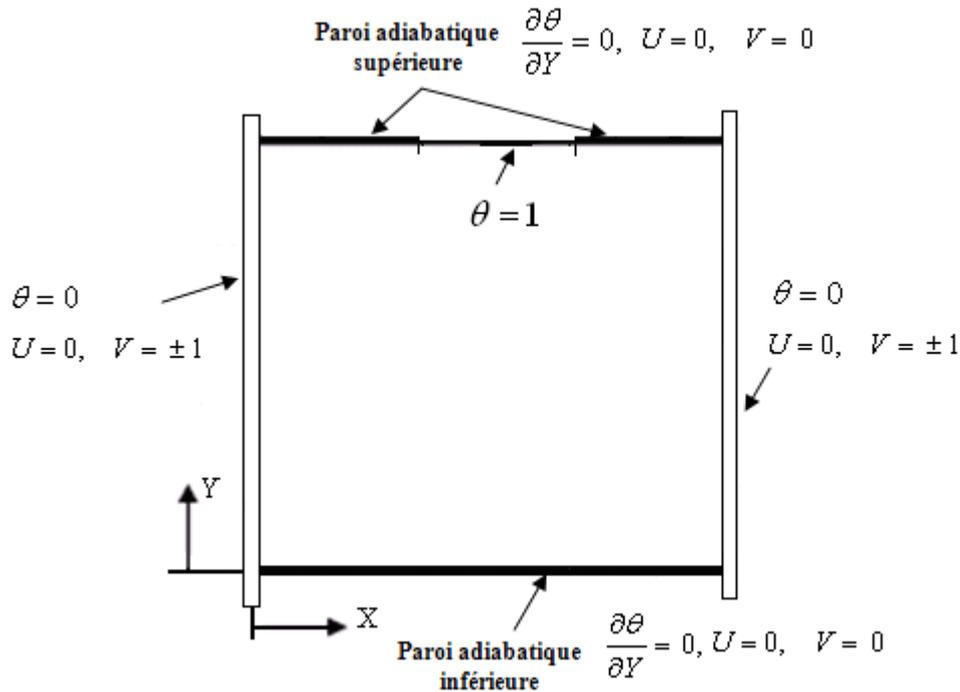


Figure II_3 : Conditions aux limites hydrodynamiques et thermiques sous forme adimensionnelles

II.7. CALCUL DU NOMBRE DE NUSSELT MOYEN

On s'intéresse au transfert de chaleur au niveau de la partie chauffée de la paroi supérieure. Le nombre de Nusselt moyen est défini par :

$$\overline{Nu} = \frac{1}{L} \int_0^1 Nu(X) dX \quad \text{II}_{38}$$

Où $Nu(X)$ est le nombre de Nusselt local défini par :

$$Nu(X) = \left[-\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right]_{Y=1} \quad \text{II}_{39}$$

La substitution de (II_39) dans (II_38) donne :

$$\overline{Nu} = \frac{1}{L} \int_0^1 \left[-\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right]_{Y=1} dX \quad \text{II}_{40}$$

CHAPITRE III

METHODES

NUMERIQUES

III.1. CHOIX DE LA METHODE DE DISCRETISATION

Certains problèmes continus peuvent parfois être remplacés par un problème discret dont la solution est connue pour approcher celle du problème continu ; ce procédé est appelé discrétisation.

Dans le présent chapitre nous allons utiliser la méthode des différences finies comme méthode de discrétisation. Cette dernière consiste à remplacer les dérivées apparaissant dans le système d'équation régissant notre phénomène étudié par des différences divisées ou combinaisons des valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage. La résolution du système d'équations nous permet de déterminer les champs de toutes les variables du problème considéré.

III.2. MAILLAGE

Un maillage est un ensemble des points du domaine de définition sur lequel on va appliquer une méthode numérique. Il consiste à diviser le domaine d'étude en un ensemble de cellules. Dans cette étude nous avons adopté un maillage uniforme dans les deux directions horizontale et verticale ($\Delta X = \Delta Y$), comme le montre la figure (III.1)

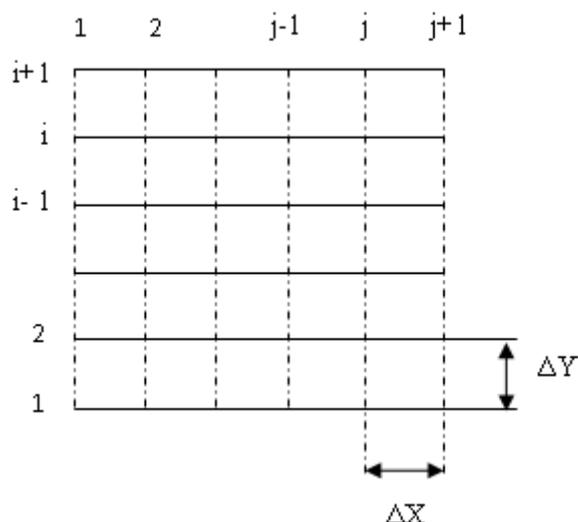


Figure (III.1) Schéma du maillage uniforme

III.3. DISCRETISATION DES DIFFERENTES DERIVEES

Le système d'équations régissant notre problème est discrétisé en approchant les dérivées partielles par des différences finies. La discrétisation du terme temporel utilise la méthode implicite des directions alternées ADI (Alternating Direction Implicite) [15]. Les termes diffusifs ainsi que les dérivées partielles du premier ordre (terme source de l'équation de la conservation de l'énergie, vitesses) sont discrétisés en utilisant le schéma centré du 4^{ème} ordre, alors que les termes convectifs sont discrétisés à l'aide du schéma Upwind du 3^{ème} ordre de Kawamura [16].

III.3.1. Discrétisation temporelle

Nous avons utilisé la méthode ADI. Cette méthode se base sur un schéma à pas fractionnaire, aux directions alternées, implicite et explicite. En effet, il s'agit de considérer un demi pas de temps intermédiaire entre τ et $\tau+\Delta\tau$, à savoir $\tau+\Delta\tau/2$. Au premier demi-pas de temps (entre τ et $\tau+\Delta\tau/2$), les dérivées secondes par rapport à X sont approchées implicitement et celles par rapport à Y explicitement. Au second demi-pas de temps (entre $\tau+\Delta\tau/2$ et $\tau+\Delta\tau$), les dérivées secondes par rapport à X sont approchées explicitement et celles par rapport à Y implicitement.

Nous obtenons ainsi une précision d'ordre deux par rapport au temps. Donc l'équation de l'énergie et l'équation de la vorticité s'écrivent comme suit :

Première étape $\tau \rightarrow \tau + \Delta\tau/2$ implicite suivant la direction X et explicite suivant la direction Y :

$$\left(\frac{\theta^{n+1/2} - \theta^n}{\Delta\tau/2} \right)_{i,j} + \left(U \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \right)_{i,j}^{n+1/2} = \left(\frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} - V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)_{i,j}^n \quad (\text{III}_1)$$

$$\left(\frac{\omega^{n+1/2} - \omega^n}{\Delta\tau/2} \right)_{i,j} + \left(U \frac{\partial \omega}{\partial X} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} \right)_{i,j}^{n+1/2} = \left(\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} - V \frac{\partial \omega}{\partial Y} + Ri \frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{i,j}^n \quad (\text{III}_2)$$

Les valeurs des variables $\omega_{i,j}^{n+1/2}$ et $\theta_{i,j}^{n+1/2}$ sont déterminées au temps $\tau + \Delta\tau/2$ en fonction des valeurs initiales $\omega_{i,j}^n$ et $\theta_{i,j}^n$ respectivement au temps τ .

Deuxième étape $\tau + \Delta\tau/2 \rightarrow \tau + \Delta\tau$ implicite suivant la direction Y et explicite suivant la direction X :

$$\left(\frac{\theta^{n+1} - \theta^{n+1/2}}{\Delta\tau/2} \right)_{i,j} + \left(V \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right)_{i,j}^{n+1} = \left(\frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} - U \frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{i,j}^{n+1/2} \quad (\text{III}_3)$$

$$\left(\frac{\omega^{n+1} - \omega^{n+1/2}}{\Delta\tau/2} \right)_{i,j} + \left(V \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right)_{i,j}^{n+1} = \left(\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} - U \frac{\partial \omega}{\partial X} + Ri \frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{i,j}^{n+1/2} \quad (\text{III}_4)$$

Les valeurs des variables $\omega_{i,j}^{n+1}$ et $\theta_{i,j}^{n+1}$ sont déterminées au temps $\tau + \Delta\tau$ en fonction des valeurs initiales $\omega_{i,j}^{n+1/2}$ et $\theta_{i,j}^{n+1/2}$ respectivement au temps $\tau + \Delta\tau/2$.

III.3.2. Discrétisation des termes diffusifs

Considérons le développement en série de Taylor d'une variable ϕ dépendante de X et négligeons les termes d'ordre supérieur à quatre, nous pouvons écrire :

$$\phi_{i-2,j} = \phi_{i,j} - 2\Delta X \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{i,j} + \frac{(2\Delta X)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right|_{i,j} - \frac{(2\Delta X)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} \right|_{i,j} + \frac{(2\Delta X)^4}{4!} \left. \frac{\partial^4 \phi}{\partial X^4} \right|_{i,j} \quad (\text{a})$$

$$\phi_{i-1,j} = \phi_{i,j} - \Delta X \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{i,j} + \frac{\Delta X^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right|_{i,j} - \frac{\Delta X^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} \right|_{i,j} + \frac{\Delta X^4}{4!} \left. \frac{\partial^4 \phi}{\partial X^4} \right|_{i,j} \quad (b)$$

$$\phi_{i+1,j} = \phi_{i,j} + \Delta X \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{i,j} + \frac{\Delta X^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right|_{i,j} + \frac{\Delta X^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} \right|_{i,j} + \frac{\Delta X^4}{4!} \left. \frac{\partial^4 \phi}{\partial X^4} \right|_{i,j} \quad (c)$$

$$\phi_{i+2,j} = \phi_{i,j} + 2\Delta X \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{i,j} + \frac{(2\Delta X)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right|_{i,j} + \frac{(2\Delta X)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} \right|_{i,j} + \frac{(2\Delta X)^4}{4!} \left. \frac{\partial^4 \phi}{\partial X^4} \right|_{i,j} \quad (d)$$

Pour arriver à l'expression finale qui nous donne la discrétisation du terme diffusif, on multiplie (b) et (c) par (-16) et on fait la sommation des équations (a), (b × (-16)), (c × (-16)) et (d). On obtient, donc :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} = \frac{1}{12\Delta X^2} (-\phi_{i-2,j} + 16\phi_{i-1,j} - 30\phi_{i,j} + 16\phi_{i+1,j} - \phi_{i+2,j}) \quad (III_5)$$

De même :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} = \frac{1}{12\Delta Y^2} (-\phi_{i,j-2} + 16\phi_{i,j-1} - 30\phi_{i,j} + 16\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j+2}) \quad (III_6)$$

III.3.3. Discrétisation des termes convectifs

Le schéma Upwind du 3^{ème} ordre de Kawamura suivant la direction horizontale (X) est représenté comme suit :

$$U \frac{\partial \phi}{\partial X} = U \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{centrale}^{4^{eme} \text{ ordre}} + \frac{1}{2} |U| \left\{ \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{arriere}^{2^{eme} \text{ ordre}} - \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{avant}^{2^{eme} \text{ ordre}} \right\} \quad (III_7)$$

Utilisons le développement en série de Taylor précédent. En multipliant (b) par (-8) et (c) par (8) et en faisant la sommation des quatre équations (a), (b × (-8)), (c × (8)) et (-d), on obtient :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{centrale}^{4^{eme} \text{ ordre}} = \frac{1}{12 \Delta X} (-\phi_{i+2,j} + 8\phi_{i+1,j} - 8\phi_{i-1,j} + \phi_{i-2,j}) \quad (III_8)$$

Considérons le développement en série de Taylor d'une variable ϕ dépendante de X et négligeons les termes d'ordre supérieur à deux, nous pouvons écrire :

$$\phi_{i-2,j} = \phi_{i,j} - 2 \Delta X \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{i,j} + \frac{(2 \Delta X)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right|_{i,j} \quad (e)$$

$$\phi_{i-1,j} = \phi_{i,j} - \Delta X \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{i,j} + \frac{\Delta X^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right|_{i,j} \quad (f)$$

$$\phi_{i+1,j} = \phi_{i,j} + \Delta X \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{i,j} + \frac{\Delta X^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right|_{i,j} \quad (g)$$

$$\phi_{i+2,j} = \phi_{i,j} + 2 \Delta X \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{i,j} + \frac{(2 \Delta X)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right|_{i,j} \quad (h)$$

La sommation de (f) x - 4 et (e) donne la différence arrière suivante :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{\text{arrière}}^{2^{\text{eme}} \text{ ordre}} = \frac{1}{2 \Delta X} (\phi_{i-2,j} - 4\phi_{i-1,j} + 3\phi_{i,j}) \quad (III_9)$$

De façon analogue que la différence arrière, la sommation de (g) x - 4 et (h) donne la différence avant suivante :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{\text{avant}}^{2^{\text{eme}} \text{ ordre}} = \frac{1}{2 \Delta X} (-3\phi_{i,j} + 4\phi_{i+1,j} - \phi_{i+2,j}) \quad (III_{10})$$

La substitution de (III_8), (III_9) et (III_10) dans (III_7) donne :

$$U \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{i,j}^{Upwind} = \frac{U}{12 \Delta X} (\phi_{i-2,j} - 8\phi_{i-1,j} + 8\phi_{i+1,j} - 8\phi_{i+2,j}) + \frac{|U|}{4 \Delta X} (\phi_{i-2,j} - 4\phi_{i-1,j} + 6\phi_{i,j} - 4\phi_{i+1,j} + \phi_{i+2,j}) \quad (III_{11})$$

L'équation (III_7) peut se mettre sous la forme suivante :

$$U \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{i,j}^{Upwind} = ai(i)\phi_{i-2,j} + bi(i)\phi_{i-1,j} + ci(i)\phi_{i,j} + di(i)\phi_{i+1,j} + ei(i)\phi_{i+2,j} \quad (III_{12})$$

Avec :

$$ai(i) = \left(\frac{U + 3|U|}{12 \Delta X} \right)$$

$$bi(i) = \left(\frac{-8U - 12|U|}{12 \Delta X} \right)$$

$$ci(i) = \left(\frac{18|U|}{12 \Delta X} \right)$$

$$di(i) = \left(\frac{8U - 12|U|}{12 \Delta X} \right)$$

$$ei(i) = \left(\frac{-U + 3|U|}{12 \Delta X} \right)$$

De même, pour la discrétisation du terme convectif suivant la direction verticale (Y).

$$V \frac{\partial \phi}{\partial Y} \Big|_{i,j}^{Upwind} = aj(j)\phi_{i,j-2} + bj(j)\phi_{i,j-1} + cj(j)\phi_{i,j} + dj(j)\phi_{i,j+1} + ej(j)\phi_{i,j+2} \quad (\text{III}_{-13})$$

Avec :

$$aj(j) = \left(\frac{V + 3|V|}{12 \Delta Y} \right)$$

$$bj(j) = \left(\frac{-8V - 12|V|}{12 \Delta Y} \right)$$

$$cj(j) = \left(\frac{18|V|}{12 \Delta Y} \right)$$

$$dj(j) = \left(\frac{8V - 12|V|}{12 \Delta Y} \right)$$

$$ej(j) = \left(\frac{-V + 3|V|}{12 \Delta Y} \right)$$

III.3.4. Discrétisation du terme source

Le terme source apparaît dans l'équation de transport de la vorticité ω . Nous procédons de la même manière que précédemment pour discrétiser la dérivée première par différence centrale de quatrième ordre.

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_{centrale}^{4^{eme} \text{ ordre}} = \frac{1}{12 \Delta X} \left(-\theta_{i+2,j} + 8\theta_{i+1,j} - 8\theta_{i-1,j} + \theta_{i-2,j} \right) \quad (III_{14})$$

III.3.5. Discrétisation des conditions aux limites

Les dérivées des conditions aux limites sont discrétisées avec un schéma décentrée avant ou arrière, selon la position de la paroi considérée.

∇ Température

Dans le problème que nous traitons, les températures aux parois latérales sont imposées. Alors que les autres sont adiabatiques. En exprimant la condition d'adiabaticité comme suite :

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right|_{j=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right|_{j=nyt} = 0$$

Il vient alors :

$$\theta_{i,1} = \frac{4\theta_{i,2} - \theta_{i,3}}{3} \quad (III_{15})$$

$$\theta_{i,nyt} = \frac{4\theta_{i,nyt-1} - \theta_{i,nyt-2}}{3} \quad (III_{16})$$

∇ Vorticité

Les conditions aux limites de la vorticité ne sont pas données explicitement sur les parois (solides ou mobiles). Plusieurs conditions ont été proposées dans la littérature ; dans notre cas nous allons détailler la discrétisation de ces conditions au niveau des parois.

Parois fixes (paroi inférieure et supérieure)

La définition de la vorticité est :

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y}$$

Au niveau de la paroi inférieure, elle s'exprime par :

$$\omega_{i,1} = \underbrace{\frac{\partial V}{\partial X}}_{=0} \Big|_{i,1} - \frac{\partial U}{\partial Y} \Big|_{i,1} = \frac{-\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \Big|_{i,1} \quad \text{Dont : } U = \frac{\partial \psi}{\partial Y}$$

Considérons le développement en série de Taylor pour ψ en négligeant les termes d'ordre supérieur à deux

$$\psi_{i,2} = \psi_{i,1} + \Delta Y \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial Y}}_{=0} \Big|_{i,1} + \frac{\Delta Y^2}{2!} \underbrace{\frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2}}_{-\omega_{i,1}} \Big|_{i,1}$$

Donc :

$$\omega_{i,1} = \frac{2}{\Delta Y^2} (\psi_{i,1} - \psi_{i,2}) \quad (\text{III}_{17})$$

D'une manière similaire, nous obtenons pour la paroi supérieure :

$$\omega_{i,nyt} = \frac{2}{\Delta Y^2} (\psi_{i,nyt} - \psi_{i,nyt-1}) \quad (\text{III}_{18})$$

Parois mobiles (paroi gauche et droite)

Pour les conditions aux limites de la vorticité au niveau des parois latérales, nous avons étudié deux cas différents

1^{er} cas : les parois latérales se déplacent vers le bas ($V_{1,j} = V_{nyt,j} = -V_0$)

Dans ce cas $\left(\frac{\partial \psi}{\partial X}\right)$ n'est pas nulle mais égale à $-V_{1,j}$ ou $-V_{nyt,j}$, de telle façon

que pour la paroi gauche ($i = 1$) le développement en série de Taylor pour ψ est :

$$\psi_{2,j} = \psi_{1,j} + \Delta X \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial X}}_{=-V_{1,j}} \Big|_{1,j} + \frac{\Delta X^2}{2!} \underbrace{\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2}}_{-\omega_{1,j}} \Big|_{1,j}$$

$$\omega_{1,j} = \frac{2}{\Delta X^2} (\psi_{1,j} - \psi_{2,j} + \Delta X V_0)$$

(III_19)

D'une manière analogue, nous obtenons pour la paroi droite :

$$\omega_{nxt,j} = \frac{2}{\Delta X^2} (\psi_{nxt,j} - \psi_{nxt-1,j} - \Delta X V_0)$$

(III_20)

2^{ème} cas : les parois latérales se déplacent vers le haut ($V_{1,j} = V_{nxt,j} = + V_0$)

Nous procédons de la même manière que précédemment pour le 1^{er} cas, nous obtenons pour la paroi gauche ($i = 1$) et la paroi droite ($i = nxt$) :

$$\omega_{1,j} = \frac{2}{\Delta X^2} (\psi_{1,j} - \psi_{2,j} - \Delta X V_0)$$

(III_21)

$$\omega_{nxt,j} = \frac{2}{\Delta X^2} (\psi_{nxt,j} - \psi_{nxt-1,j} + \Delta X V_0)$$

(III_22)

III.4. DISCRETISATION DE L'EQUATION DE LA FONCTION DE COURANT

La fonction de courant est obtenue par résolution de l'équation elliptique (II_37). En différences finies, cette équation est discrétisée de la façon suivante :

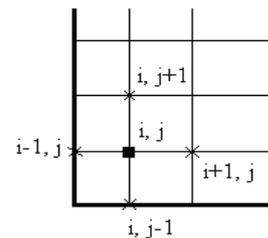
Aux nœuds internes

$$\frac{-\psi_{i-2,j} + 16\psi_{i-1,j} - 30\psi_{i,j} + 16\psi_{i+1,j} - \psi_{i+2,j}}{12\Delta X^2} + \frac{-\psi_{i,j-2} + 16\psi_{i,j-1} - 30\psi_{i,j} + 16\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j+2}}{12\Delta Y^2} = -\omega_{i,j}$$

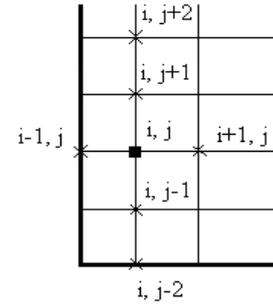
(III_23)

Près de la paroi inférieure et gauche la discrétisation est faite comme suit :

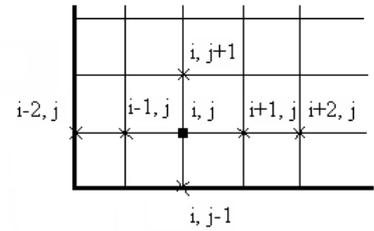
$$\underbrace{\frac{\psi_{i-1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i+1,j}}{\Delta X^2}}_{2^{\text{ème}} \text{ ordre}} + \underbrace{\frac{\psi_{i,j-1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j+1}}{\Delta Y^2}}_{2^{\text{ème}} \text{ ordre}} = -\omega_{i,j}$$



$$\underbrace{\frac{\psi_{i-1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i+1,j}}{\Delta X^2}}_{2^{\text{ème}} \text{ ordre}} + \underbrace{\frac{-\psi_{i,j-2} + 16\psi_{i,j-1} - 30\psi_{i,j} + 16\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j+2}}{12\Delta Y^2}}_{4^{\text{ème}} \text{ ordre}} = -\omega_{i,j}$$



$$\underbrace{\frac{-\psi_{i-2,j} + 16\psi_{i-1,j} - 30\psi_{i,j} + 16\psi_{i+1,j} - \psi_{i+2,j}}{12\Delta X^2}}_{4^{\text{ème}} \text{ ordre}} + \underbrace{\frac{\psi_{i,j-1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j+1}}{\Delta Y^2}}_{2^{\text{ème}} \text{ ordre}} = -\omega_{i,j}$$



III.5. RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS

Les différentes dérivées partielles figurant dans les équations régissant notre modèle mathématique ont été discrétisées. Une fois leurs expressions substituées dans ces équations nous obtenons un système d'équations algébriques qui peut être résolu par des méthodes itératives.

Les équations (III_1), (III_2), (III_3) et (III_4), permettant la détermination de la température et la vorticité, étant paraboliques (après ADI). Nous avons opté pour une méthode itérative de Gauss-Seidel, de telle sorte que les valeurs de $\theta_{i,j}^{n+1}$ et $\omega_{i,j}^{n+1}$ sont données par les relations suivantes :

La température $\theta_{i,j}^{n+1}$

- A l'itération (n+1/2) l'équation (III_1) devient :

$$\frac{2}{\Delta \tau} \theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + U \left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{\text{Re Pr}} \left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \right|_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \underbrace{\frac{2}{\Delta \tau} \theta_{i,j}^n - V \left. \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right|_{i,j}^n + \frac{1}{\text{Re Pr}} \left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right|_{i,j}^n}_{\text{Rhs } \theta_{i,j}^n}$$

Donc :

$$\theta_{i,j}^{n+1/2} = \frac{1}{\frac{2}{\Delta\tau} + \frac{ci(i)}{12\Delta X} + \frac{30}{12\Delta X^2 \text{Re Pr}}} \left\{ \begin{array}{l} \text{Rhs } \theta_{i,j}^n - \\ \left[\frac{1}{12\Delta X} \left(ai(i)\theta_{i-2,j}^{n+1/2} + bi(i)\theta_{i-1,j}^{n+1/2} + di(i)\theta_{i+1,j}^{n+1/2} + ei(i)\theta_{i+2,j}^{n+1/2} \right) \right] \\ + \left[\frac{1}{12\Delta X^2 \text{Re Pr}} \left(-\theta_{i-2,j}^{n+1/2} + 16\theta_{i-1,j}^{n+1/2} + 16\theta_{i+1,j}^{n+1/2} - \theta_{i+2,j}^{n+1/2} \right) \right] \end{array} \right\}$$

- A l'itération (n+1) L'équation (III_3) devient :

$$\frac{2}{\Delta\tau} \theta_{i,j}^{n+1} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \Big|_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \Big|_{i,j}^{n+1} = \underbrace{\frac{2}{\Delta\tau} \theta_{i,j}^{n+1/2} - U \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{i,j}^{n+1/2} + \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \Big|_{i,j}^{n+1/2}}_{\text{Rhs } \theta_{i,j}^{n+1/2}}$$

Donc les valeurs de la température $\theta_{i,j}^{n+1}$ sont données par :

$$\theta_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{\frac{2}{\Delta\tau} + \frac{cj(j)}{12\Delta Y} + \frac{30}{12\Delta Y^2 \text{Re Pr}}} \left\{ \begin{array}{l} \text{Rhs } \theta_{i,j}^{n+1/2} - \\ \left[\frac{1}{12\Delta Y} \left(aj(j)\theta_{i,j-2}^{n+1} + bj(j)\theta_{i,j-1}^{n+1} + dj(j)\theta_{i,j+1}^{n+1} + ej(j)\theta_{i,j+2}^{n+1} \right) \right] \\ + \left[\frac{1}{12\Delta Y^2 \text{Re Pr}} \left(-\theta_{i,j-2}^{n+1} + 16\theta_{i,j-1}^{n+1} + 16\theta_{i,j+1}^{n+1} - \theta_{i,j+2}^{n+1} \right) \right] \end{array} \right\}$$

La vorticité $\omega_{i,j}^{n+1}$

- A l'itération (n+1/2) l'équation (III_2) devient :

$$\frac{2}{\Delta\tau} \omega_{i,j}^{n+1/2} + U \frac{\partial \omega}{\partial X} \Big|_{i,j}^{n+1/2} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} \Big|_{i,j}^{n+1/2} = \underbrace{\frac{2}{\Delta\tau} \omega_{i,j}^n - V \frac{\partial \omega}{\partial Y} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \Big|_{i,j}^n + Ri \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{i,j}^n}_{\text{Rhs } \omega_{i,j}^n}$$

Donc :

$$\omega_{i,j}^{n+1/2} = \frac{1}{\frac{2}{\Delta\tau} + \frac{ci(i)}{12\Delta X} + \frac{30}{12\Delta X^2 \text{Re}}} \left\{ \begin{array}{l} \text{Rhs } \omega_{i,j}^n - \\ \left[\frac{1}{12\Delta X} \left(ai(i)\omega_{i-2,j}^{n+1/2} + bi(i)\omega_{i-1,j}^{n+1/2} + di(i)\omega_{i+1,j}^{n+1/2} + ei(i)\omega_{i+2,j}^{n+1/2} \right) \right] \\ + \left[\frac{1}{12\Delta X^2 \text{Re}} \left(-\omega_{i-2,j}^{n+1/2} + 16\omega_{i-1,j}^{n+1/2} + 16\omega_{i+1,j}^{n+1/2} - \omega_{i+2,j}^{n+1/2} \right) \right] \end{array} \right\}$$

• A l'itération (n+1) L'équation (III_4) devient :

$$\frac{2}{\Delta\tau} \omega_{i,j}^{n+1} + V \frac{\partial \omega}{\partial Y} \Big|_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \Big|_{i,j}^{n+1} = \underbrace{\frac{2}{\Delta\tau} \omega_{i,j}^{n+1/2} - U \frac{\partial \omega}{\partial X} \Big|_{i,j}^{n+1/2} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} \Big|_{i,j}^{n+1/2} + Ri \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{i,j}^{n+1/2}}_{\text{Rhs } \omega_{i,j}^{n+1/2}}$$

Donc les valeurs de la vorticité $\omega_{i,j}^{n+1}$ sont données par :

$$\omega_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{\frac{2}{\Delta\tau} + \frac{cj(j)}{12\Delta Y} + \frac{30}{12\Delta Y^2 \text{Re}}} \left\{ \begin{array}{l} \text{Rhs } \omega_{i,j}^{n+1/2} - \\ \left[\frac{1}{12\Delta Y} \left(aj(j)\omega_{i,j-2}^{n+1} + bj(j)\omega_{i,j-1}^{n+1} + dj(j)\omega_{i,j+1}^{n+1} + ej(j)\omega_{i,j+2}^{n+1} \right) \right] \\ + \left[\frac{1}{12\Delta Y^2 \text{Re}} \left(-\omega_{i,j-2}^{n+1} + 16\omega_{i,j-1}^{n+1} + 16\omega_{i,j+1}^{n+1} - \omega_{i,j+2}^{n+1} \right) \right] \end{array} \right\}$$

Pour la résolution de l'équation de la fonction de courant (III_23), en utilisant la méthode itérative de Gauss-Seidel, on obtient les valeurs de $\psi_{i,j}^{n+1}$ au nœud (i, j) et à l'itération n+1 sont données par la relation suivante :

$$\psi_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{30 \left[\frac{1}{12\Delta X^2} + \frac{1}{12\Delta Y^2} \right]} \left[\begin{array}{l} \frac{1}{12\Delta X^2} \left(-\psi_{i-2,j}^{n+1} + 16\psi_{i-1,j}^{n+1} + 16\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i+2,j}^n \right) \\ + \frac{1}{12\Delta Y^2} \left(-\psi_{i,j-2}^{n+1} + 16\psi_{i,j-1}^{n+1} + 16\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j+2}^n \right) \\ + \omega_{i,j}^n \end{array} \right]$$

III.6. CHAMP DE VITESSES

Les composantes du champ de vitesses sont obtenues explicitement à partir de la définition de la fonction de courant c'est-à-dire $U = \frac{\partial \psi}{\partial Y}$ et $V = -\frac{\partial \psi}{\partial X}$. Une fois les valeurs de la fonction de courant calculées, les vitesses seront déduites par les relations suivantes :

Aux nœuds internes

$$U_{i,j} = \frac{1}{12 \Delta Y} \left(-\psi_{i,j+2} + 8\psi_{i,j+1} - 8\psi_{i,j-1} + \psi_{i,j-2} \right) \quad (\text{III}_{24})$$

$$V_{i,j} = \frac{-1}{12 \Delta X} \left(-\psi_{i+2,j} + 8\psi_{i+1,j} - 8\psi_{i-1,j} + \psi_{i-2,j} \right) \quad (\text{III}_{25})$$

Près de la paroi

$$U_{i,j} = \frac{1}{2 \Delta Y} \left(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1} \right) \quad (\text{III}_{26})$$

$$U_{i,j} = \frac{1}{2 \Delta X} \left(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j} \right) \quad (\text{III}_{27})$$

III.7. ALGORITHME ET ORGANIGRAMME

La formulation $(\psi-\omega)$ exige un traitement simultané des trois équations (fonction du courant, vorticité et l'énergie). Les principales étapes sont résumées par l'algorithme suivant :

1. Définition du domaine et lecture des données.
2. Génération du maillage.
3. Introduction des conditions initiales et aux limites.
4. Début de la boucle sur le temps.

Résolution de l'équation de l'énergie et de la vorticité avec la méthode A.D.I

Calcul du champ de la fonction de courant par la méthode de Gauss-Seidel.

Détermination du champ de vitesses (U, V).

Détermination de la vorticité aux parois.

Incrémentation du temps $(\tau + \Delta\tau)$.

Répétition des calculs Jusqu'à l'obtention du régime établi.

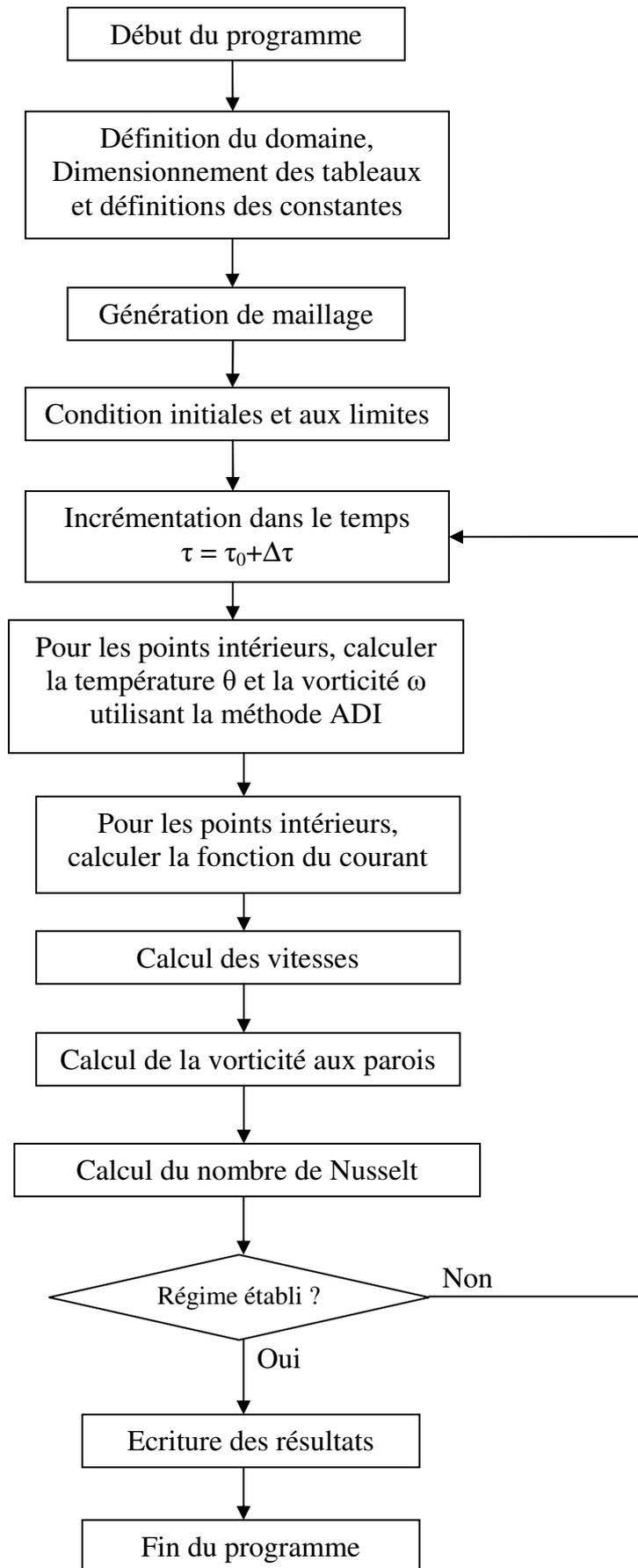
Fin de la boucle sur le temps.

5. Impression des résultats.

III.8. CRITERE DE CONVERGENCE

A chaque pas du temps, la mise à jour des nouvelles variables physiques est faite jusqu'à ce que le critère de convergence $\left| \left(\sum \phi_{i,j}^{n+1} - \sum \phi_{i,j}^n \right) / \sum \phi_{i,j}^n \right| \leq 10^{-5}$ soit satisfait.

Pour la résolution de notre problème, nous avons élaboré un programme de calcul en langage FORTAN dont l'organigramme figure à la page suivante.



CHAPITRE IV

RESULTATS ET

DISCUSSIONS

IV.1. INTRODUCTION

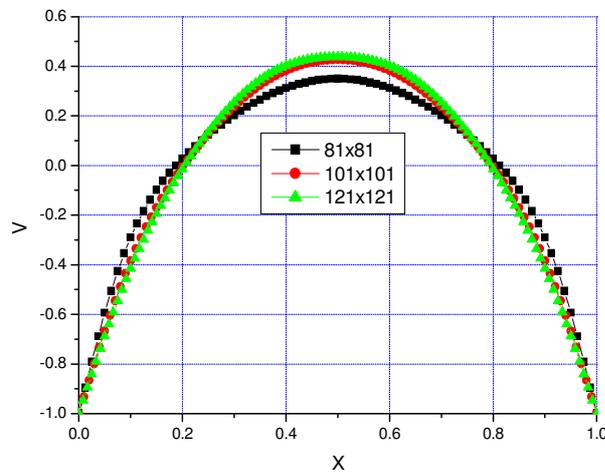
Dans ce chapitre nous intéressons à l'étude numérique de la convection mixte dans la géométrie considérée. Nous verrons en premier lieu, l'influence du maillage sur les résultats, puis nous procédons à la validation de notre code de calcul en comparant les résultats obtenus avec ceux obtenus dans la littérature. Pour plus de clarté, nous avons jugé utile de présenter les résultats du 1^{er} cas (parois latérales se déplacent vers le bas) selon les modes de la convection : convection forcée, convection mixte et convection naturelle.

Nous présentons pour chaque mode de convection les isothermes et les isocourants, ainsi que les profils de la température, de la vitesse verticale à $Y = 0.25 ; 0.5$ et 0.75 et de la vitesse horizontale à $X=0.25$. Nous présentons aussi une étude relative au transfert thermique en considérant le nombre du Nusselt moyen. Concernant le 2^{ème} cas (parois latérales se déplacent vers le haut), nous avons présenté pour différents nombres de Richardson (0.1, 1, 6, 10, 50, 100) les champs thermiques, les champs dynamiques et le transfert de chaleur.

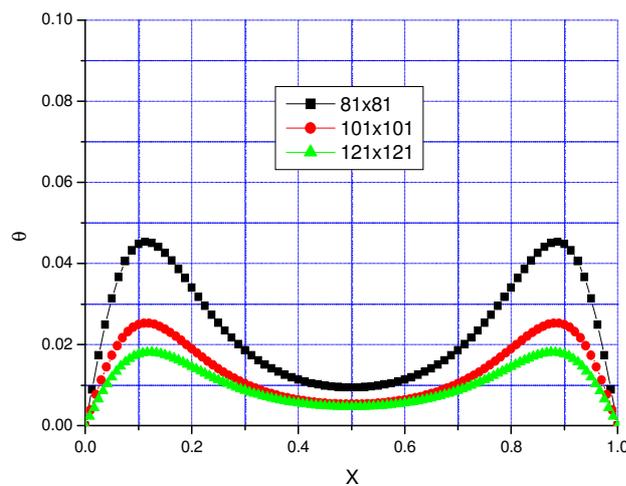
Pour toutes les simulations réalisées dans cette étude, nous avons adopté un nombre de Prandtl égale à 0.71 et un nombre de Reynolds égale à 100. La largeur de la partie chauffée de la paroi supérieure est fixée à 0.2 et le nombre de Richardson, pour le premier cas, prend la gamme de 0.1 à 500.

IV.2. CHOIX DU MAILLAGE

Le maillage utilisé est un maillage uniforme, trois grilles sont créées pour s'assurer une solution indépendante de ce maillage. Les graphes (IV-1) et (IV-2) montrent respectivement les profils de la vitesse et de la température dans la direction horizontale (X) à $Y = 0,5$. Pour le graphe (IV-1), nous avons constaté que ces profils deviennent insensibles au nombre de nœuds à partir de la grille 101x101, alors que sur le graphe (IV-2) l'écart entre les maillages 81x81 et 101x101 est supérieur à celui compris entre 101x101 et 121x121 ($0,02 > 0,007$) ; raison pour laquelle on a choisi la grille 101x101 pour obtenir d'une manière qualitative des résultats précis avec un minimum du temps de calcul.



Graphe IV-1: Profil de la vitesse verticale à $Y = 0,5$.



Graphe IV-2: Profil de la température à $Y = 0,5$.

IV.3. VALIDATION DU CODE NUMERIQUE

Pour valider notre code de calcul, une comparaison des résultats numériques obtenus a été faite concernant les contours de la fonction de courant (Figure IV-1), les isothermes (Figure IV-2), ainsi que les profils de vitesse vertical le long du plan médian (Graphe IV-3) et la variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de Ri (Graphe IV-4).

Cette comparaison montre qu'il y a un accord satisfaisant entre les résultats obtenus dans le présent travail et ceux d'Aydin [3], ce qui nous réconforte dans la fiabilité de notre code de calcul.

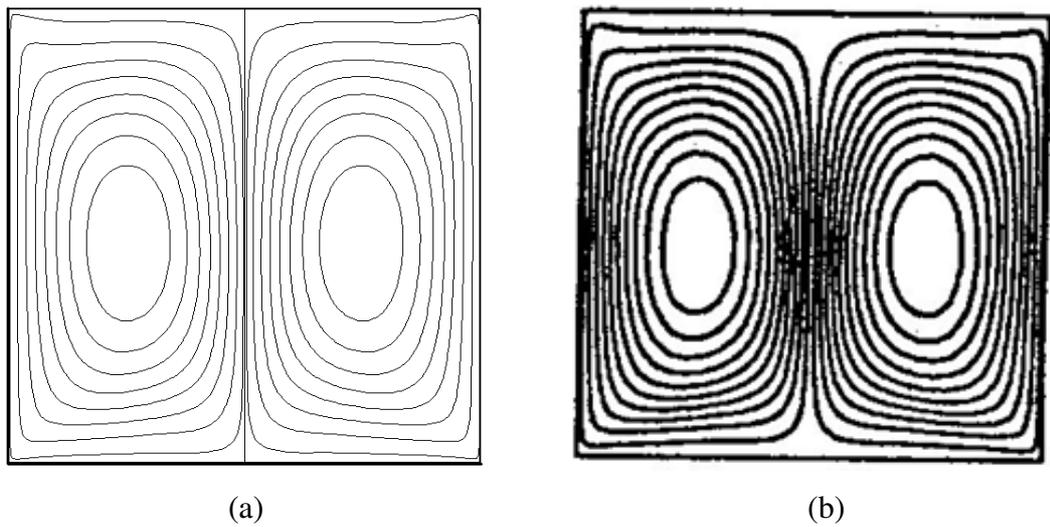


Figure IV-1 : Comparaison des contours de la fonction de courant.

a) Présent travail b) Résultat d'Aydin [3].

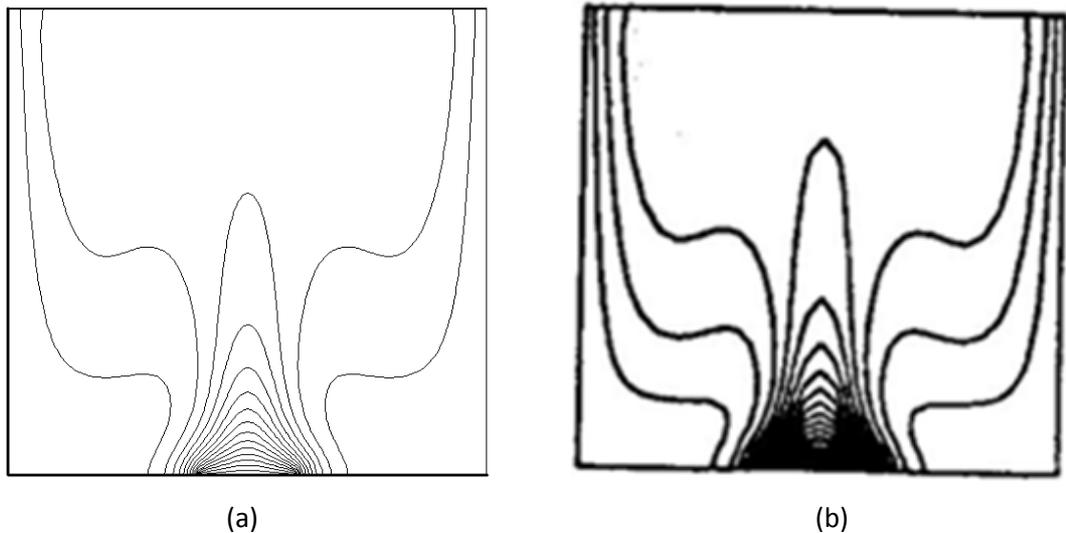
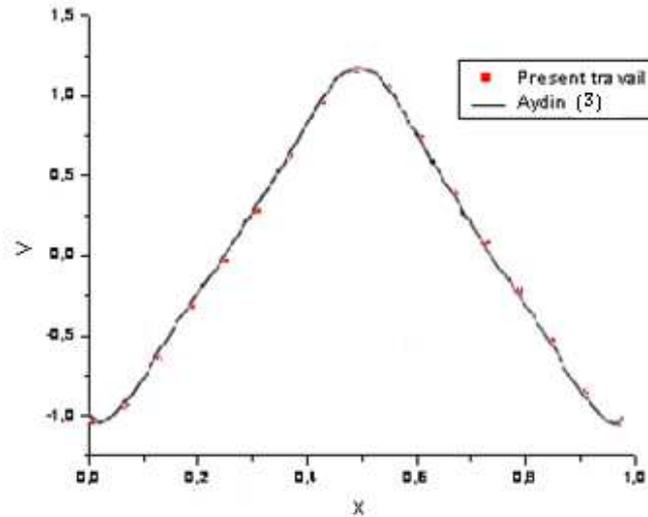
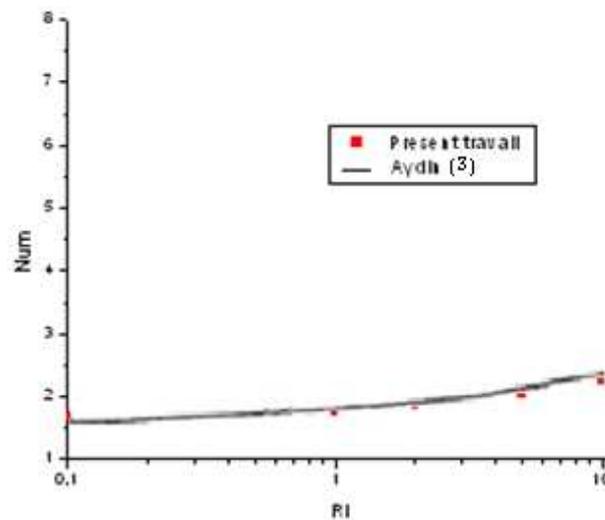


Figure IV-2 : Comparaison des isothermes.

a) Présent travail b) Résultat d'Aydin [3].



Graph IV-3 : Comparaison du profil de vitesse verticale à $Y=0.5$.



Graph IV-4 : Comparaison de la variation du Nusselt moyen en fonction de Ri .

IV.4. RESULTATS

IV.4.1. 1^{er} cas : Les parois latérales se déplacent vers le bas

IV.4.1.1. Convection forcée Ri (0.1- 10)

Champ thermique

Le champ thermique est présenté dans La figure (IV-3) pour un nombre de Reynolds fixé à 100 et un nombre de Richardson compris entre 0.1 et 10. Nous observons des couches de températures différentes près de la paroi chauffée (stratification thermique), où la température varie graduellement de la partie chauffée vers la partie inférieure froide. Le mouvement descendant des parois latérales entraîne vers le bas les couches de fluide

adjacentes à la paroi par les forces visqueuses. Nous constatons que la température froide règne dans toute la partie inférieure de la cavité. En ce qui concerne les faibles flux de chaleur récupérés par le fluide de la source chaude sont directement évacués à travers la partie supérieure des parois verticales. Par conséquent, le champ de température n'est pas affecté par l'augmentation du nombre de Richardson, cela justifie la dominance des forces de cisaillement par rapport aux forces de flottabilité.

Pour plus de justification concernant la distribution de la température dans la cavité, le graphe (IV-5) montre les profils de température, à $Y = 0.5$, où nous constatons des valeurs comprises entre une valeur maximale correspondant à la température des parties adjacentes aux parois verticales et une autre minimale qui est celle au milieu de la cavité.

Champ dynamique

Ce champ est représenté dans la figure (IV-4) pour les mêmes valeurs de Ri . La solution présente un écoulement symétrique caractérisé par deux zones de recirculation contrarotatives identiques car les conditions aux limites sont symétriques. La convection de la chaleur causée par la recirculation du fluide justifie la configuration générale des isothermes.

Pour les profils de vitesse, le long des différentes positions de Y (graphe (IV-8)), on remarque que les valeurs maximales de la vitesse sont atteintes à $Y = 0.5$ au milieu de la cavité à cause d'une accélération du fluide due au rétrécissement causé par les deux cellules contrarotatives qui jouent un rôle d'un obstacle. Le profil de la vitesse horizontale $U(y)$ à $X=0.25$ est présenté dans le graphe (IV-9) ; nous constatons que la vitesse présente un pic minimal près de la source chaude et la partie gauche de la cavité.

Nombre de Nusselt

L'évolution temporelle du nombre de Nusselt moyen est présentée dans le graphe (IV.6) pour différents nombres de Richardson. Nous observons que ce nombre décroît brusquement pendant les tous premiers instants, ensuite il diminue régulièrement pour se stabiliser à une valeur fixe.

La variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Richardson est présentée dans le graphe (IV.7) ; nous remarquons que le nombre de Nusselt moyen augmente avec l'augmentation du nombre de Richardson.

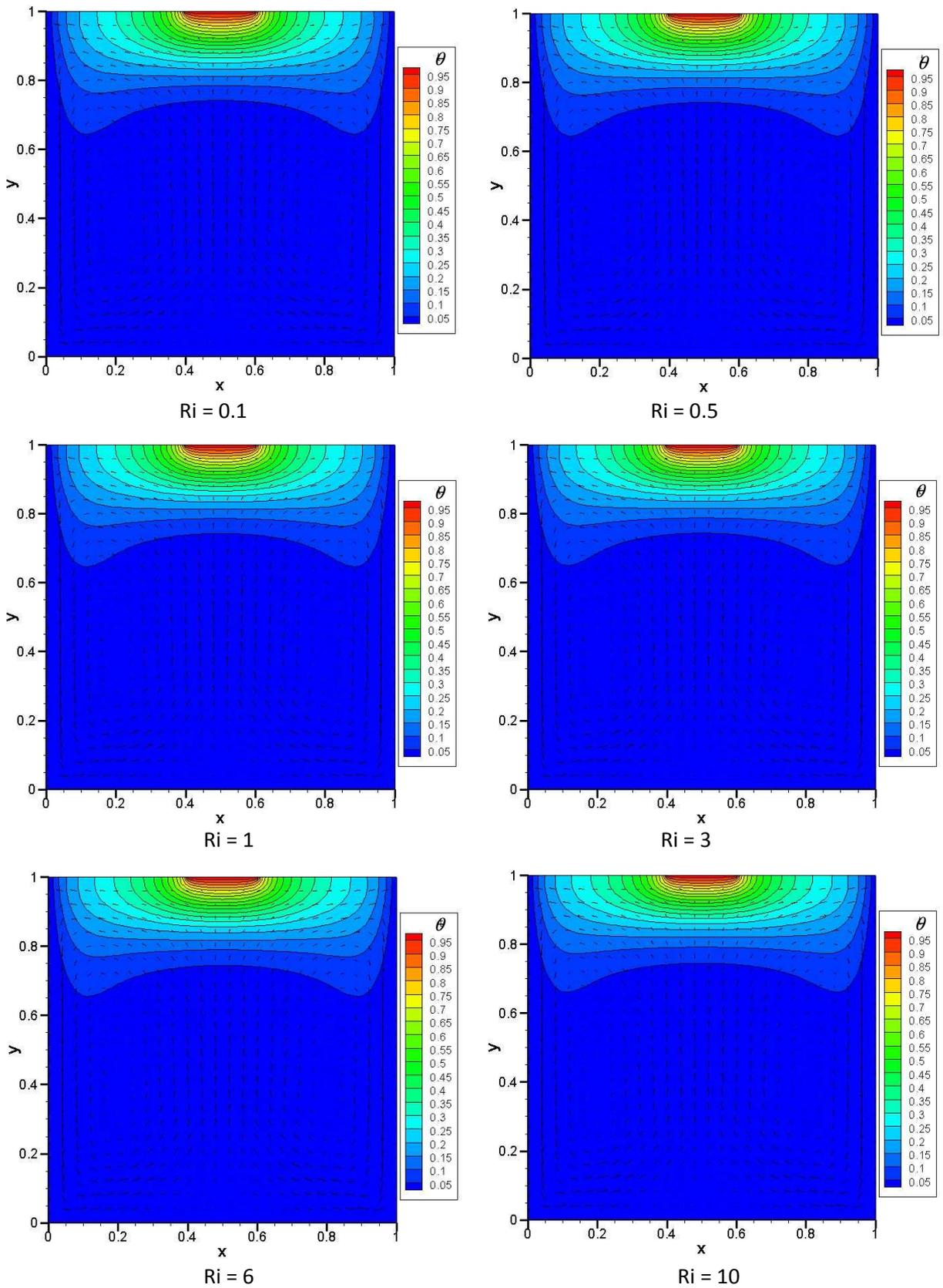


Figure IV-3 : Champ thermique dans les cas de la convection forcée.

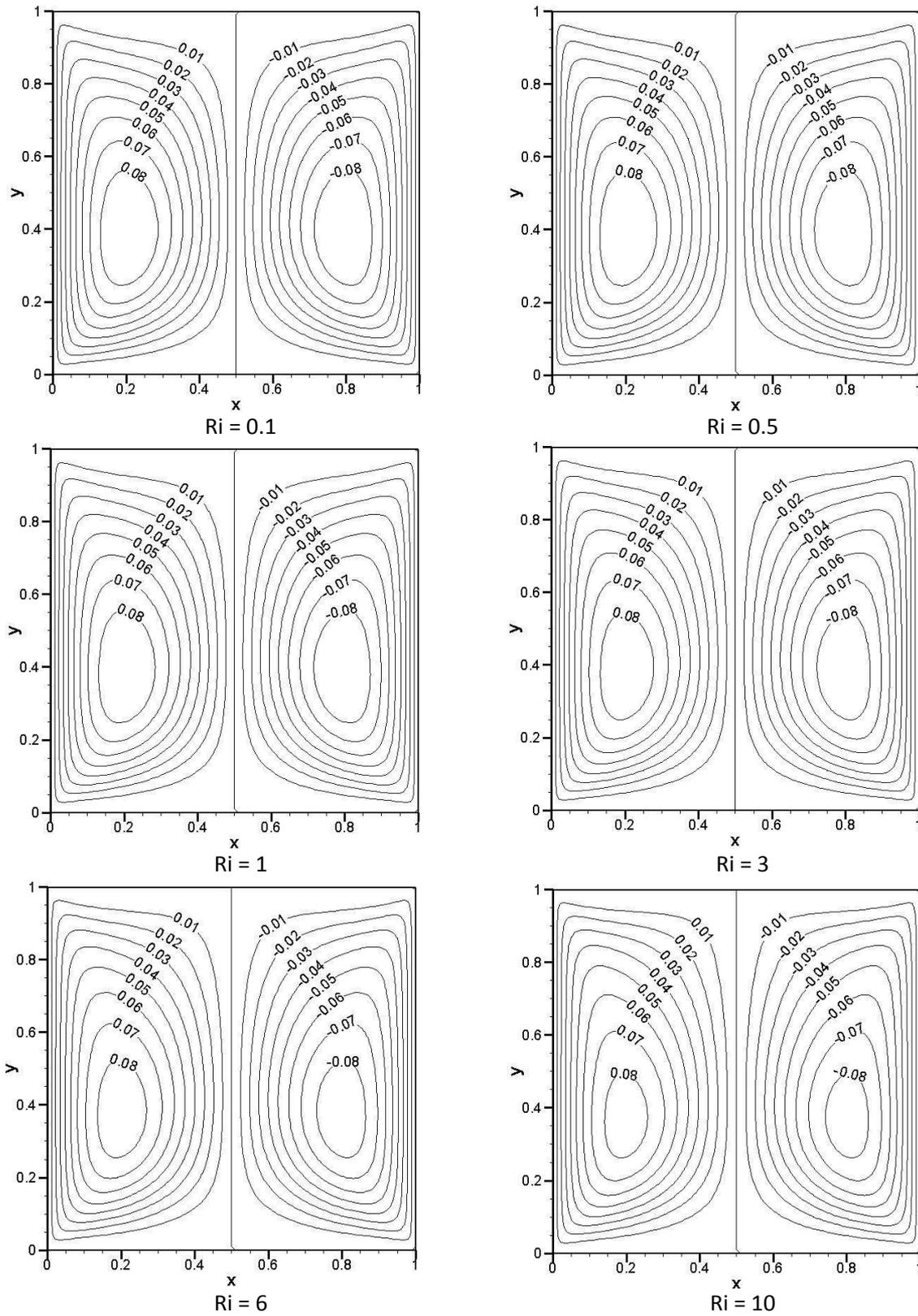
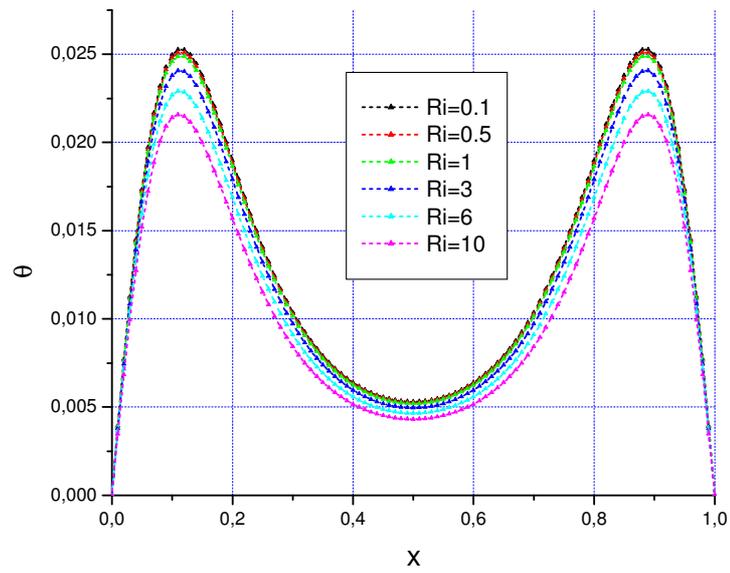
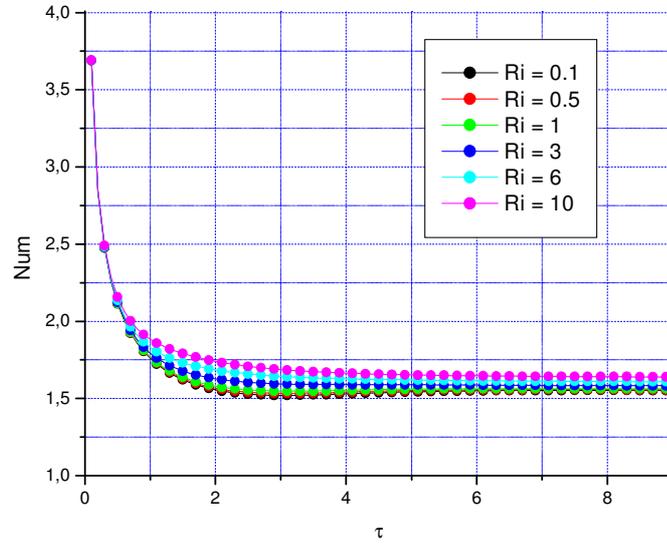


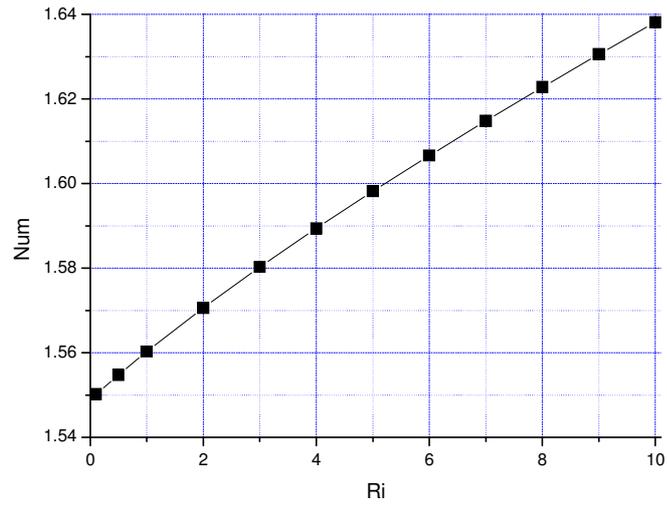
Figure IV-4 : Champ dynamique dans les cas de la convection forcée.



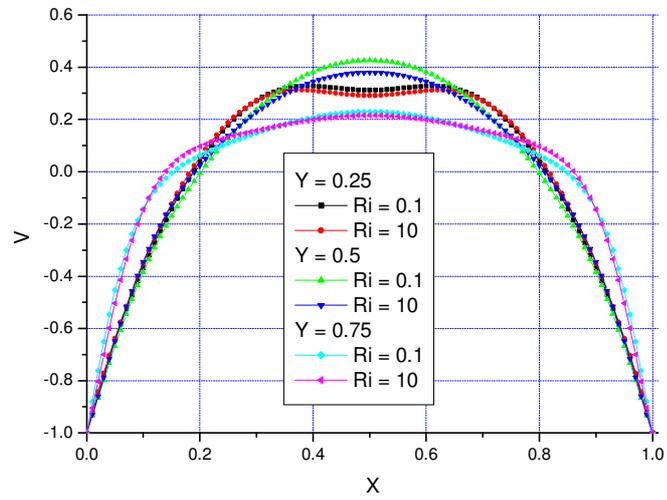
Graphe IV- 5 : Profils de température à $Y = 0,5$.



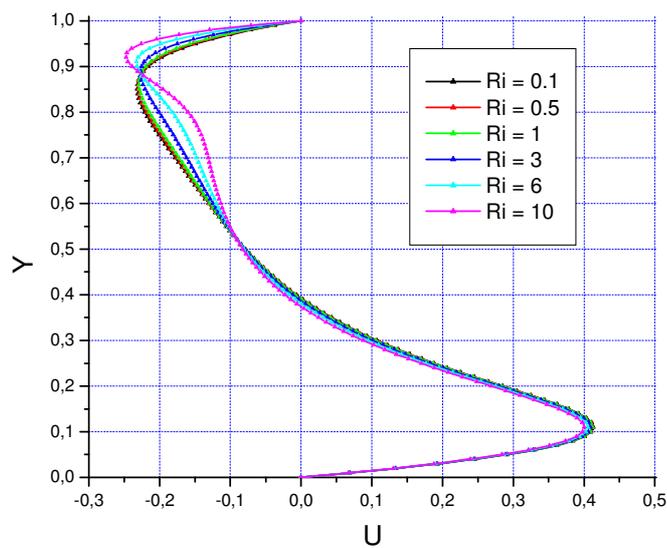
Graphe IV- 6 : Evolution du nombre de Nusselt moyen.



Graphe IV-7 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Richardson.



Graphe IV- 8 : Profils de vitesse verticale à $Y = 0.25 - 0.5 - 0.75$ respectivement.



Graphe IV- 9 : Profils de vitesse horizontale à $X = 0.25$.

IV.4.1.2. Convection mixte Ri (11- 60)

Champ thermique

Ce champ est présenté dans la figure (IV-5) pour un nombre de Richardson compris entre 11 et 60. Il montre une légère variation que celle dans le champ thermique précédent à des nombres de Richardson inférieurs ; cependant, on constate qu'il y a une diminution considérable des grandeurs de température indiquée sur le graphe (IV-10) qui représente les profils de température le long de $Y = 0,5$. Ces profils confirment la transition vers un équilibre entre les forces de cisaillement et les forces de flottabilité.

Champ dynamique

Ce champ est présenté dans la figure (IV-6), l'augmentation du nombre de Richardson résulte à une augmentation des forces de flottabilité, ce qui influe sur l'écoulement, et un début d'apparition d'une goutte dans la partie supérieure de la cavité. Pour plus de justification concernant l'écoulement du fluide dans la cavité, le graphe (IV-13) montre l'augmentation des grandeurs de la vitesse horizontale dans les deux sens par rapport au point de déviation supérieur le long de $X = 0.25$ et Y varie de (0.55 à 1) en vue de l'augmentation du nombre de Richardson, signifiant l'augmentation de l'intensité des deux cellules contrarotatives.

Nombre de Nusselt

L'évolution temporelle du nombre de Nusselt est représentée sur le graphe (IV-11). L'augmentation du nombre de Richardson a pour conséquence d'augmenter le nombre du Nusselt, cela est justifié dans le graphe (IV-12) qui représente la variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Richardson.

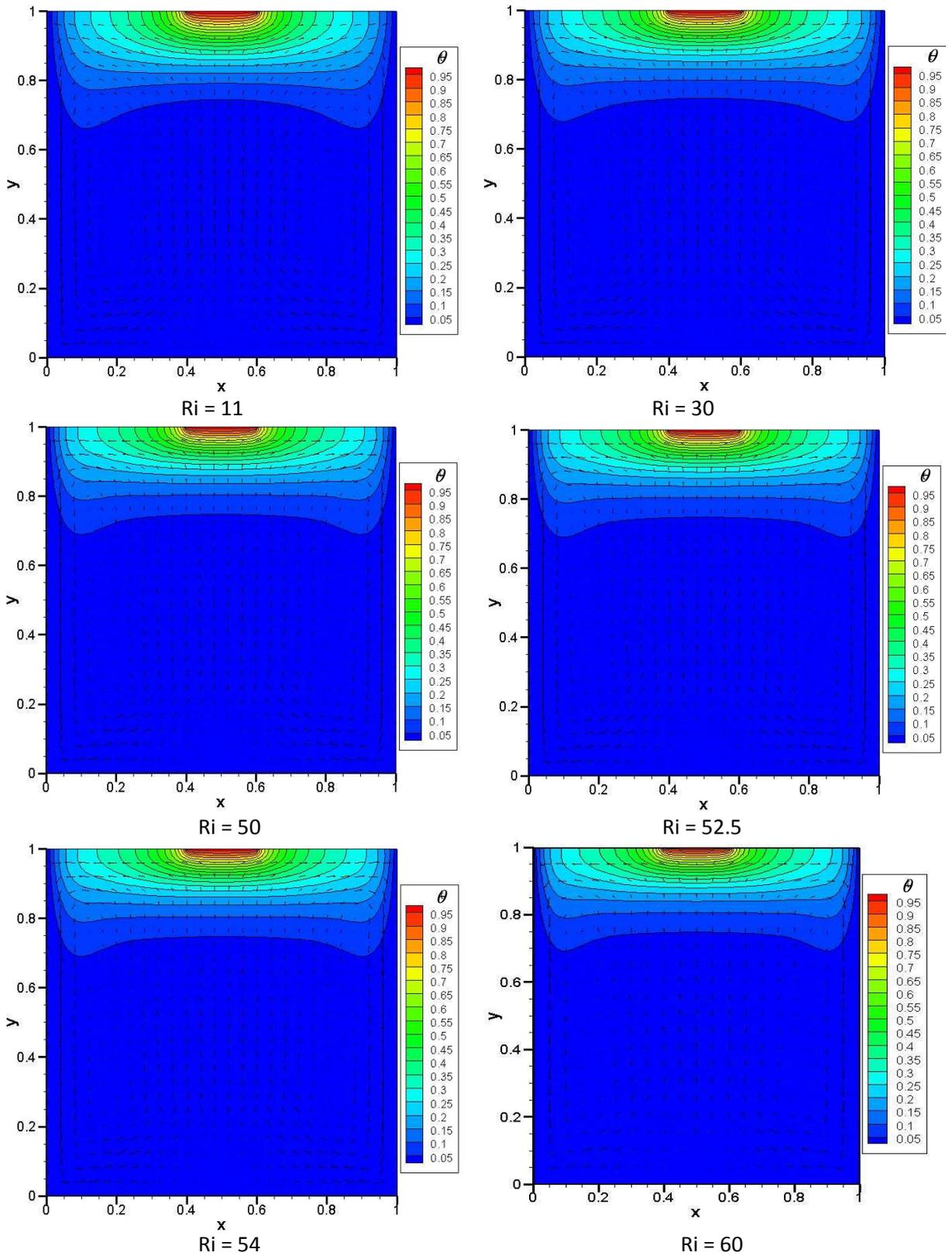


Figure IV-5 : Champ thermique dans les cas de la convection mixte.

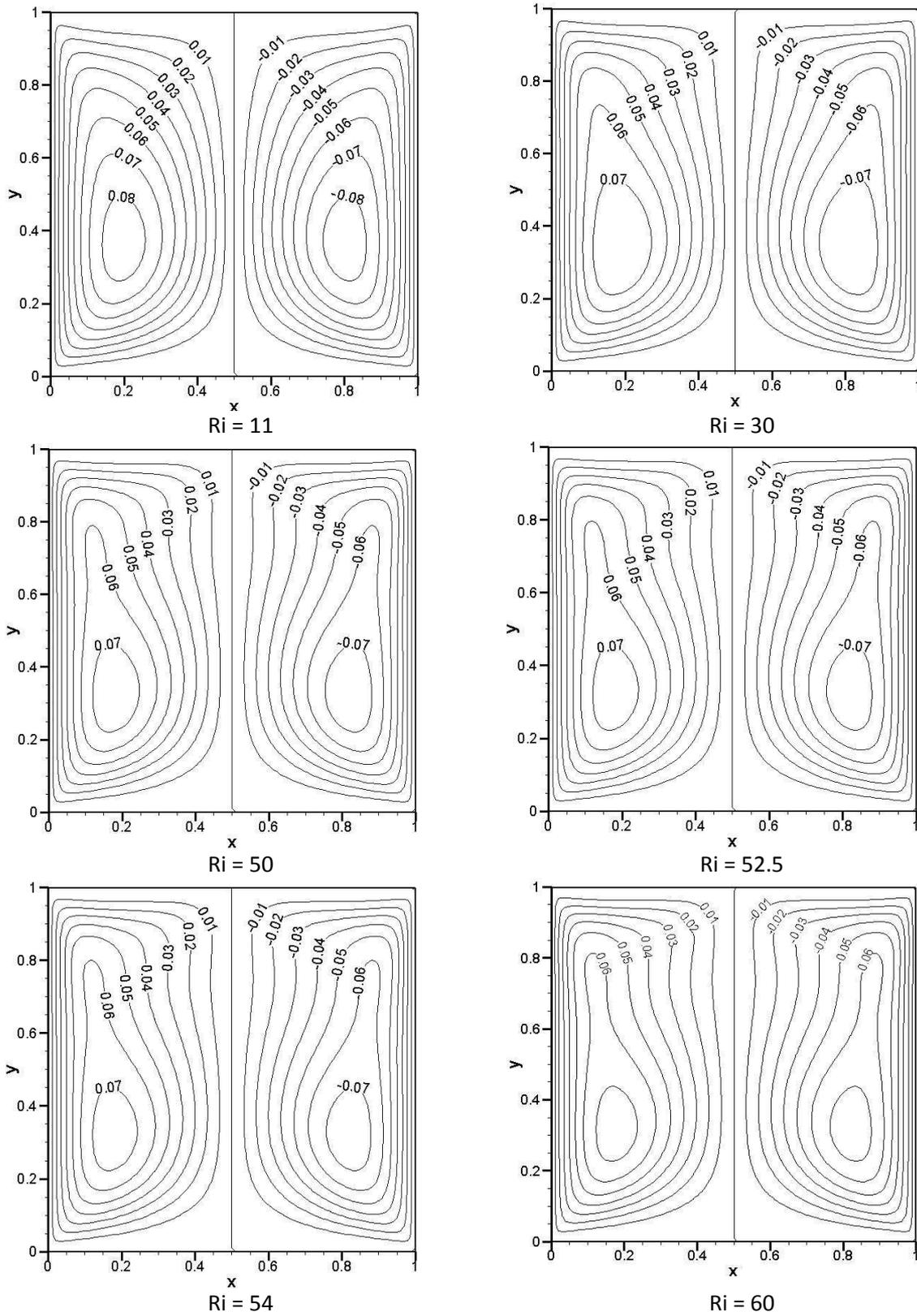
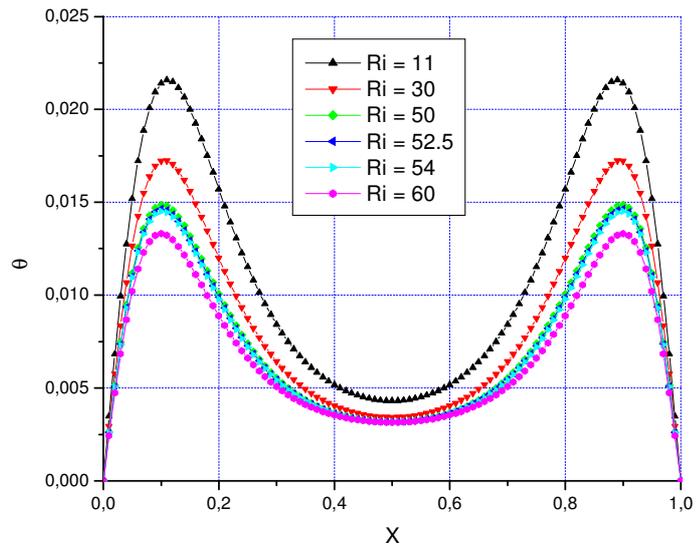
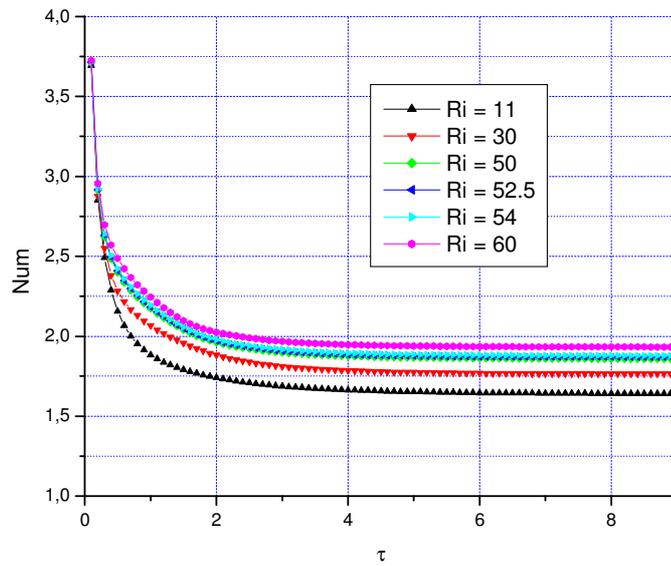


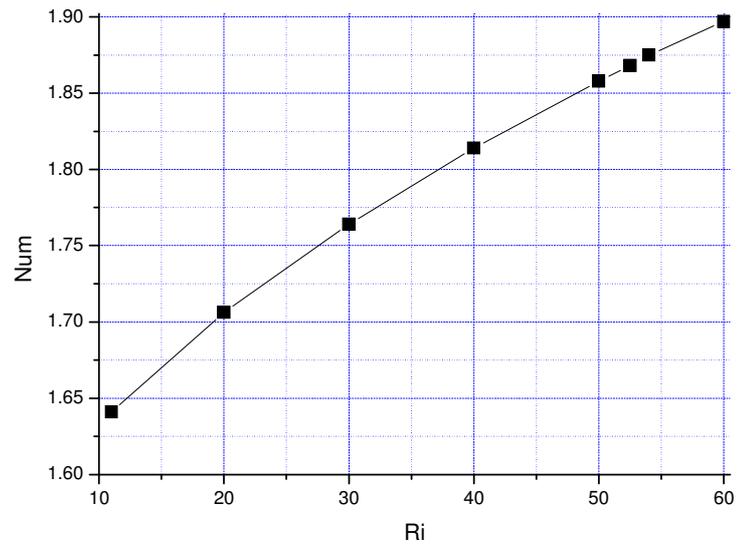
Figure IV-6 : Champ dynamique dans les cas de la convection mixte.



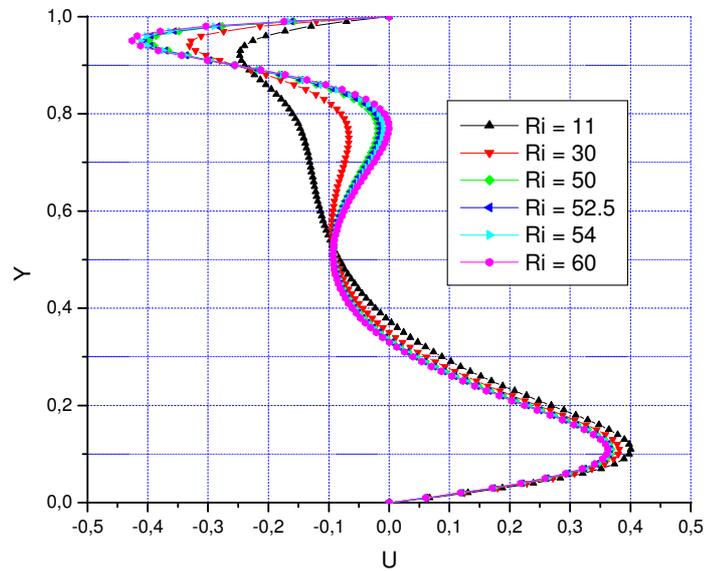
Graph IV-10 : Profils de température à $Y = 0,5$.



Graph IV-11 : Evolution du nombre de Nusselt moyen.



Grphe IV-12 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Richardson.



Grphe IV-13 : Profils de vitesse horizontale à X= 0.25

IV.4.1.3. Convection naturelle Ri (61-500)

Champ thermique

Ce champ est représenté dans la figure (IV-7). On constate que les isothermes sont devenues moins concave au niveau du centre de la cavité, due à l'augmentation des forces de flottabilité. Les profils de température représentés dans le graphe (IV-14) justifient l'équilibre entre les forces de flottabilité et les forces de cisaillement.

Champ dynamique

Ce champ est représenté dans la figure ((IV-8). Nous constatons une apparition de deux autres cellules contrarotatives dans la partie supérieure de la cavité ce qui implique une augmentation de l'intensité de ces dernières.

Le graphe (IV-17), qui représente le profil de la vitesse U le long de $X = 0.25$, montre l'augmentation des grandeurs de la vitesse horizontale dans les deux sens par rapport au point de déviation supérieur pour des nombres de Richardson supérieure à 61.

Nombre de Nusselt

L'évolution temporelle du nombre de Nusselt est représentée sur le graphe (IV-15) pour différents nombre de Richardson. D'une manière générale, ce nombre décroît brusquement pendant les tous premiers instants ; ensuite, il diminue régulièrement pour se stabiliser à une valeur fixe.

La variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Richardson est représentée dans le graphe (IV-16). Nous constatons que l'intensité du transfert de chaleur augmente avec l'accroissement du nombre de Richardson Ri près de la partie chauffée. Cela est du à la domination des forces de flottabilité.

Pour plus de détaille le graphe (IV-18) présente la variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Richardson pour les trois modes de la convection (forcée, mixte et naturelle).

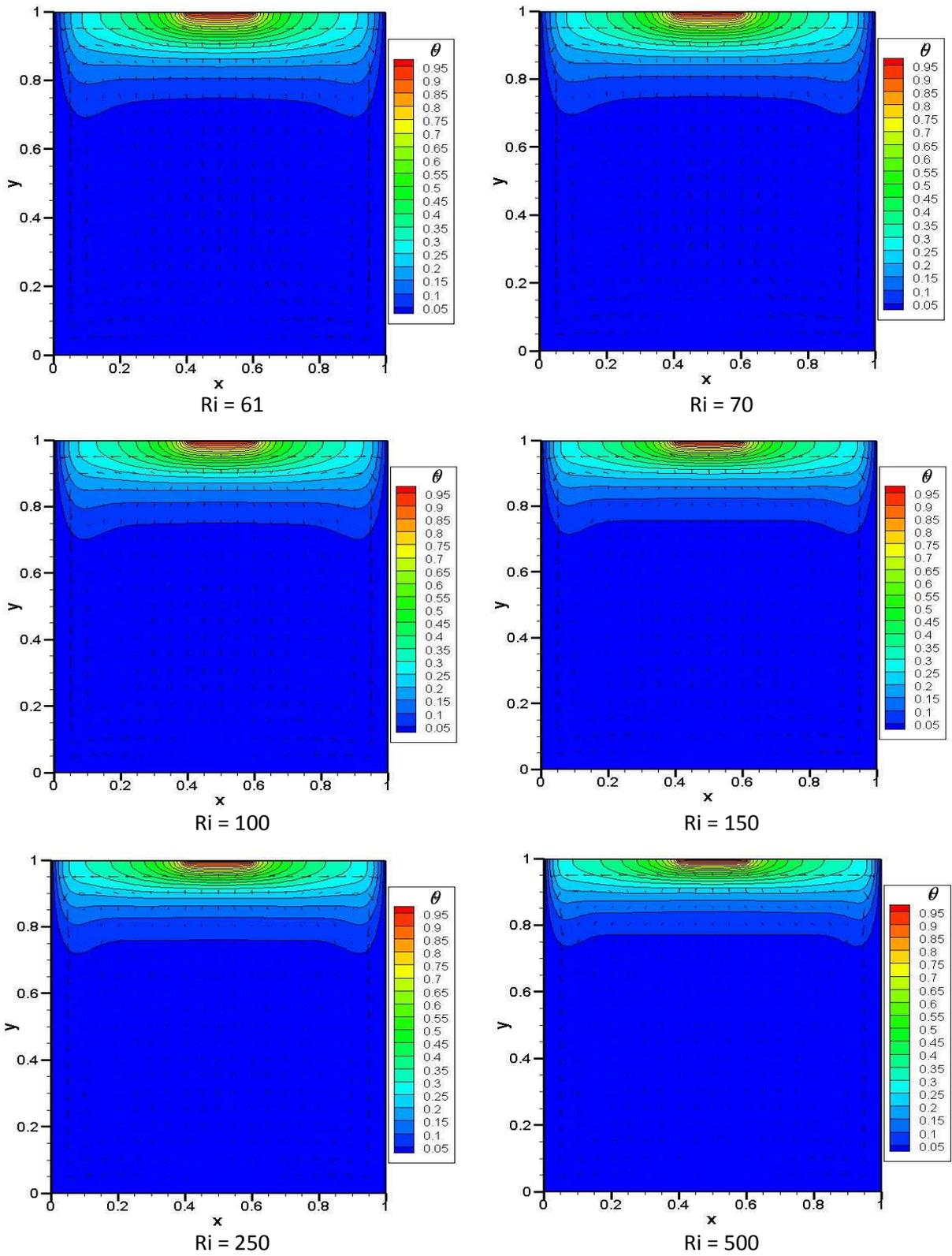


Figure IV-7 : Champ thermique dans les cas de la convection naturelle.

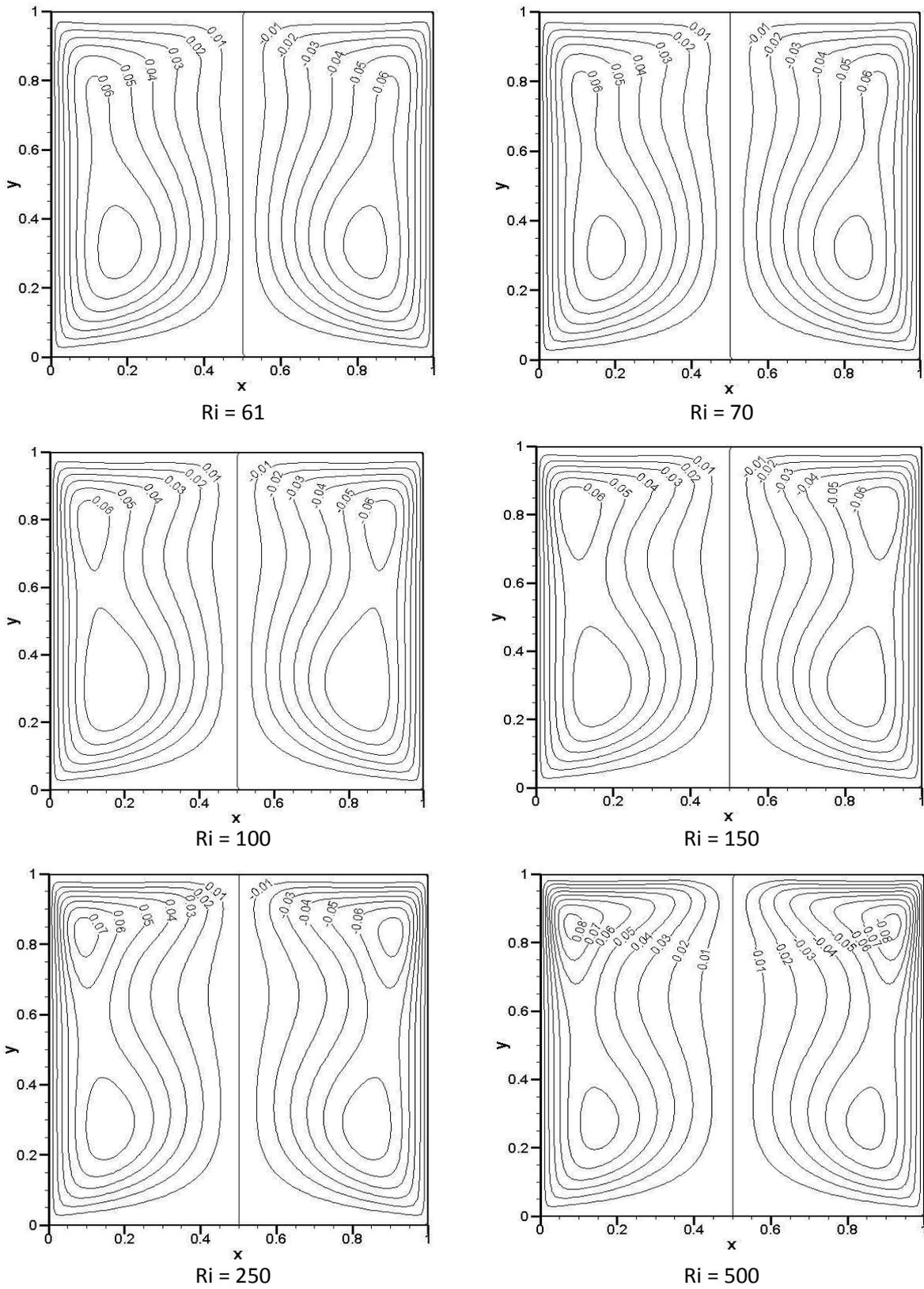
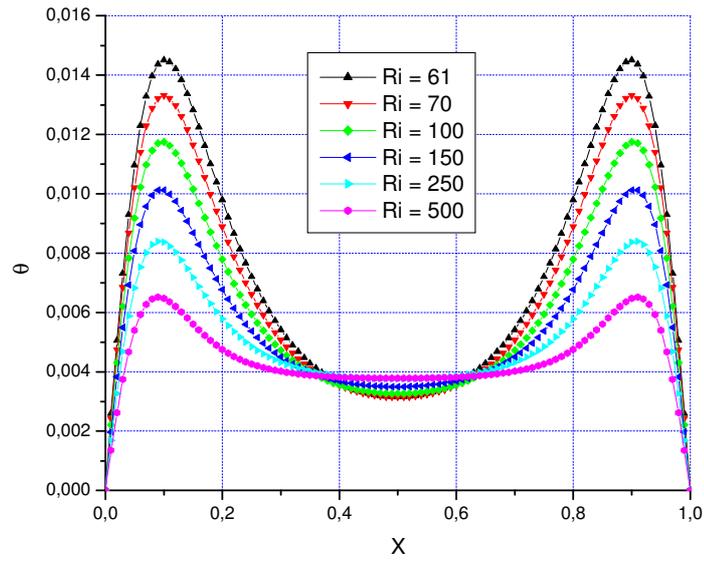
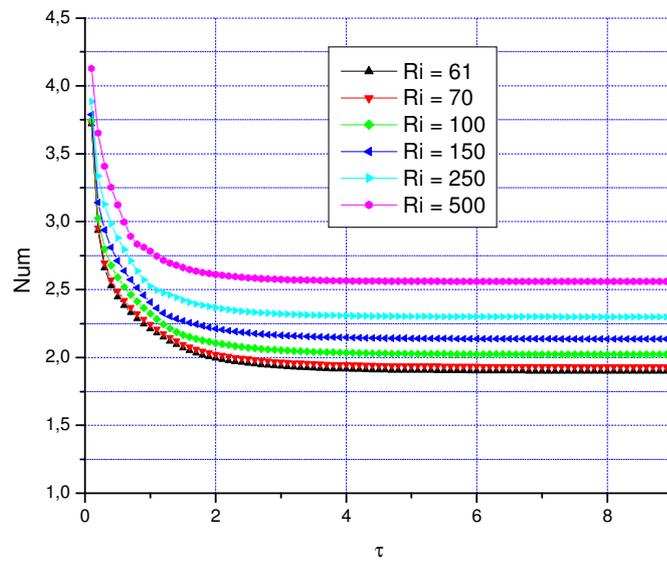


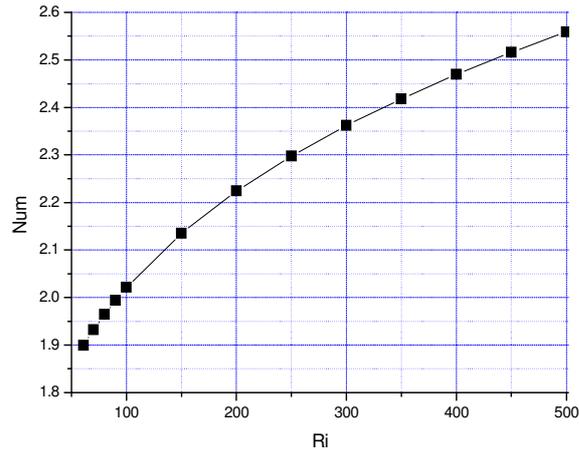
Figure IV-8 : Champ dynamique dans les cas de la convection naturelle.



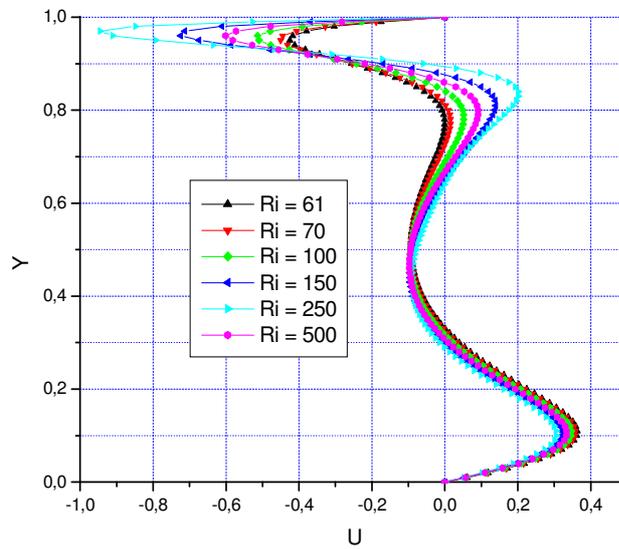
Graphe IV-14 : Profils de température à $Y=0,5$.



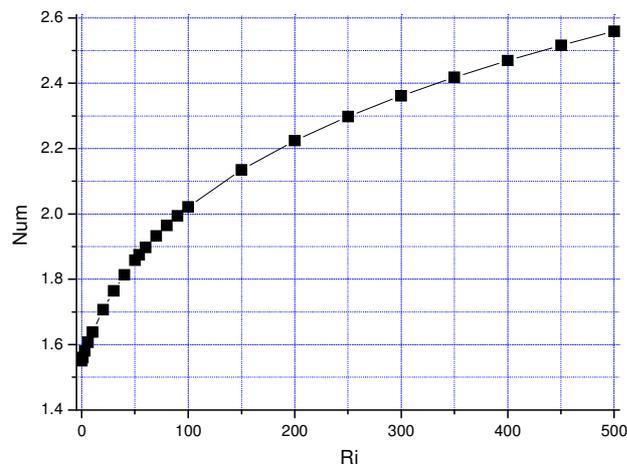
Graphe IV-15 : Evolution du nombre de Nusselt moyen.



Graphe IV-16 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Richardson.



Graphe IV-17 : Profils de vitesse horizontale à X= 0.25.



Graphe IV-18 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Richardson pour le 1^{er} cas.

IV.4.2. 2^{ème} cas : les parois latérales se déplacent vers le haut

Champ thermique

Les champs thermiques sont représentés dans la Figure (IV-9) pour différents nombres de Ri et un nombre de Reynolds Re toujours fixé à 100. La chaleur récupérée de la source chaude est transportée par convection vers le bas au milieu de l'enceinte. En augmentant le nombre de Richardson les isothermes au centre de l'enceinte deviennent plus larges et moins stratifiées, cela est dû à la dominance des forces de flottabilité par rapport aux forces de cisaillement.

Pour plus de justification concernant la distribution de la température dans la cavité, le graphe (IV-19) montre les profils de température, à $Y = 0.5$, où nous constatons des valeurs maximales au milieu de la cavité diminues avec l'augmentation nombre de Richardson.

Champ dynamique

Les fonctions de courant pour les mêmes nombres de Richardson sont représentées dans la Figure (IV-10) Pour des nombres de Richardson compris de 0.1 et 1, nous observons l'apparition de deux grandes cellules contrarotatives symétriques. Pour $Ri > 1$, Deux cellules prennent naissance dans la partie centrale de la cavité du à la partie chauffée et se développent graduellement lorsque le nombre de Richardson Ri augmente.

Pour plus de justification concernant l'écoulement du fluide dans la cavité, le graphe (IV-22) montre les profils de vitesse, à $Y = 0.25, 0.5$ et 0.75 , où nous constatons l'augmentation des grandeurs de la vitesse verticale avec l'augmentation du nombre de Richardson près de la partie chauffée (à $Y = 0.75$). Le profil de la vitesse horizontale $U(y)$ à $X = 0.25$ est présenté dans le graphe (IV-23) ; nous constatons que la vitesse présente des pics maximaux près de la source chaude ; pour des nombres de Richardson $Ri < 6$ la vitesse est orientée vers la droite (forces de cisaillement dominantes), le temps que pour des nombres de Richardson $Ri > 6$ la vitesse est orientée vers la gauche (forces de flottabilité dominantes).

Nombre de Nusselt

L'évolution temporelle du nombre de Nusselt est représentée sur le graphe (IV-20) et sa variation, pour des régimes établis, en fonction du nombre de Richardson est représentée dans le graphe (IV-21). Nous observons que pour un nombre de Richardson compris entre 0.1 et 6 l'intensité de transfert de chaleur diminue. Cela justifie la dominance des forces de cisaillement par rapport aux forces de flottabilité. Pour un nombre de Richardson $Ri > 6$ nous constatons une augmentation du nombre de Nusselt moyen.

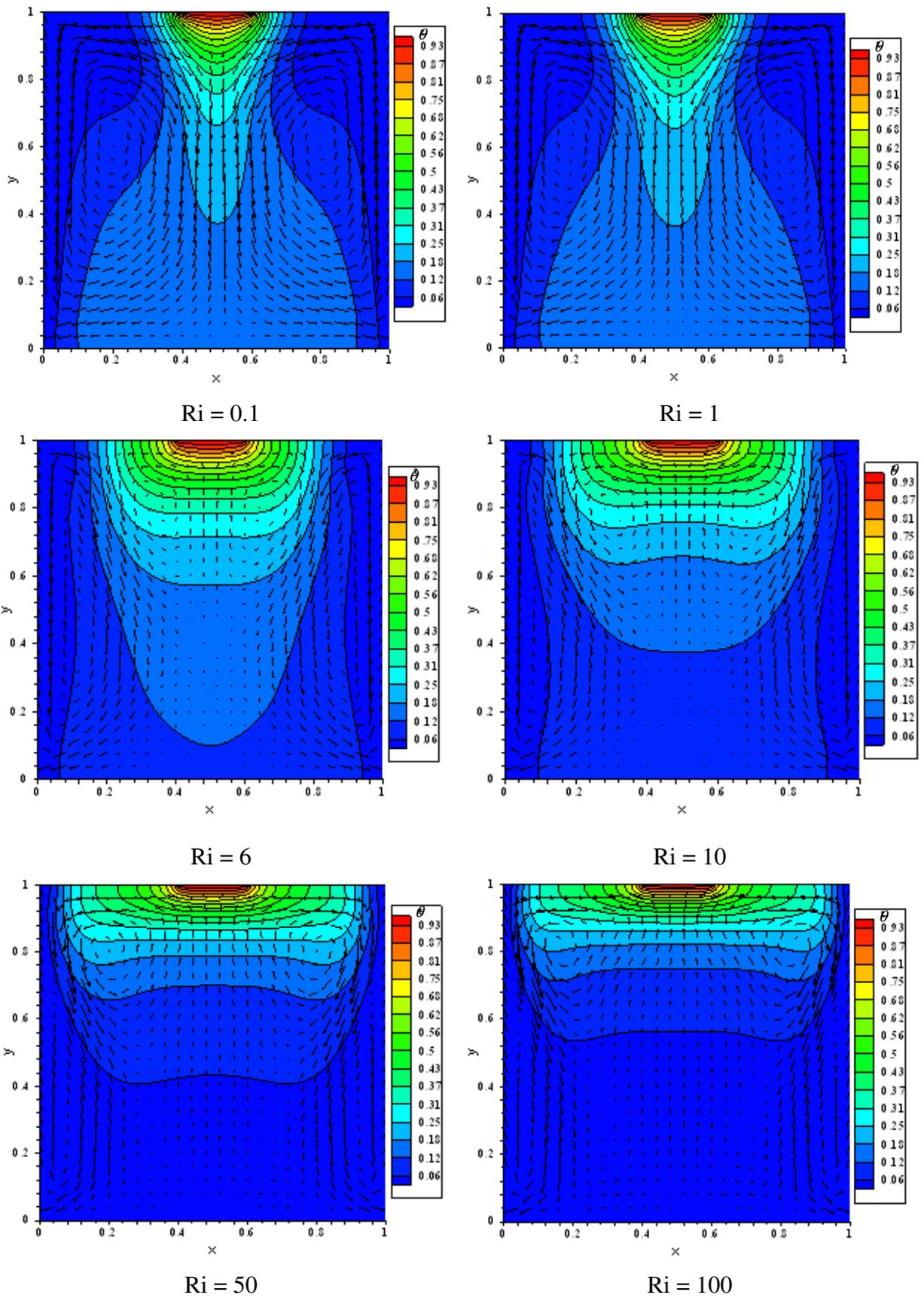


Figure IV-9 : Champ thermique pour différents nombres de Richardson.

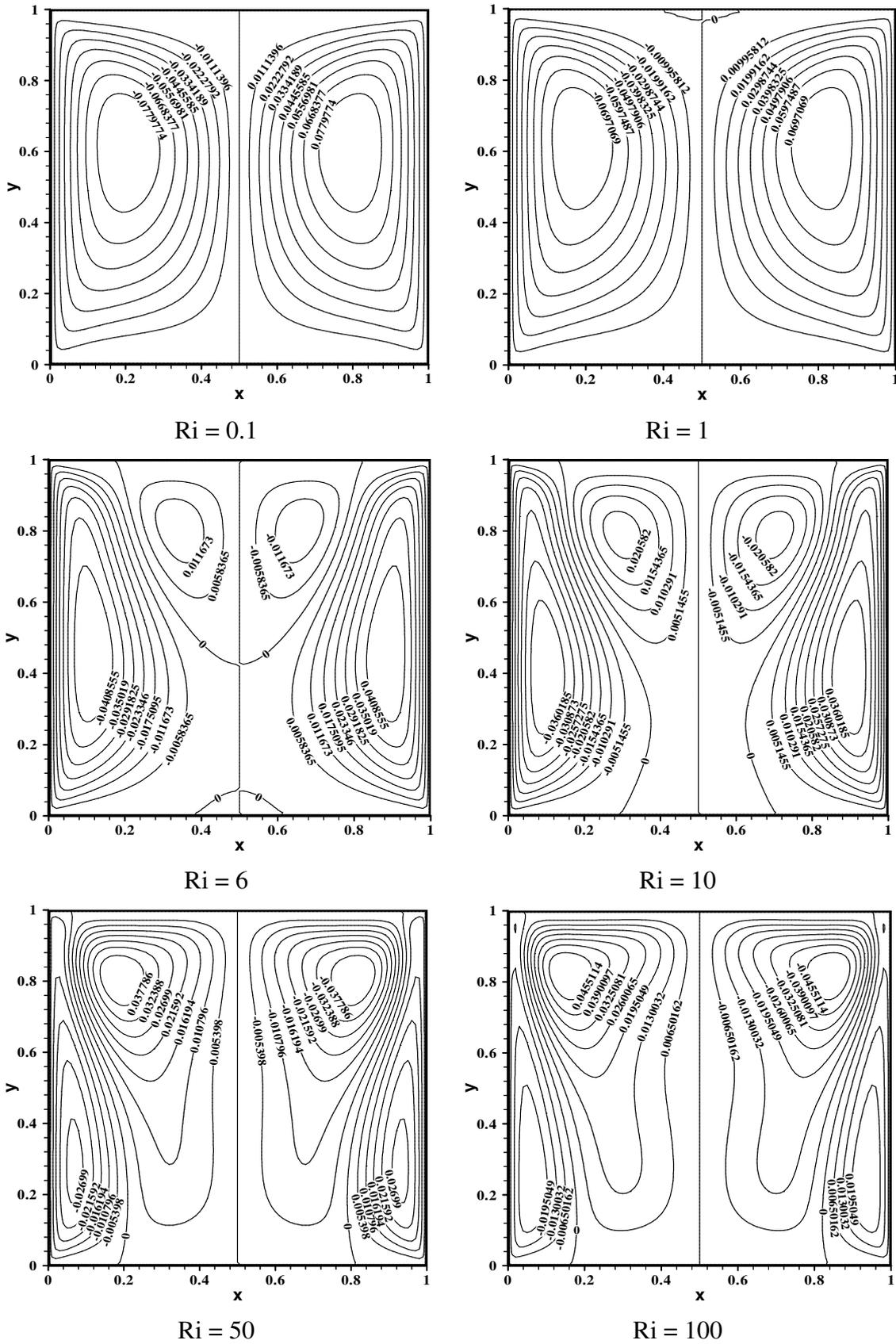
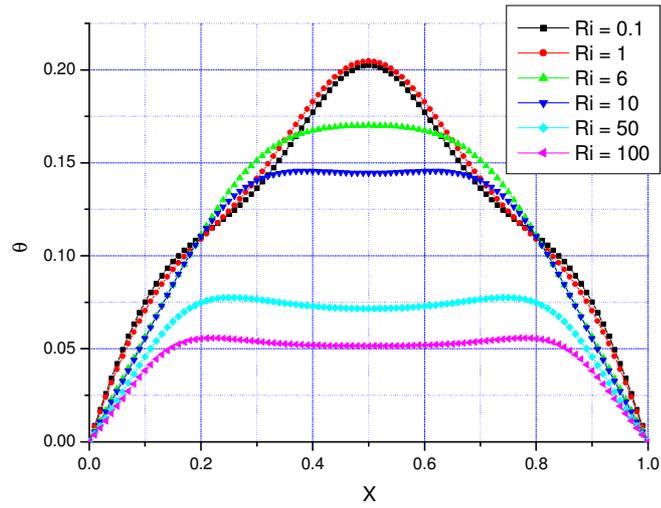
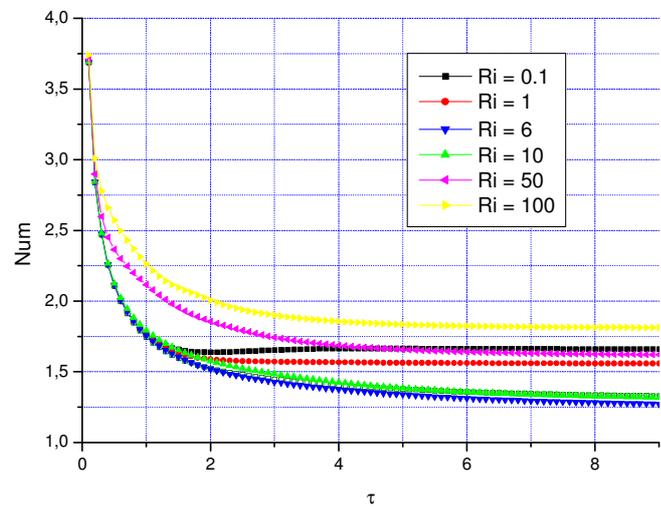


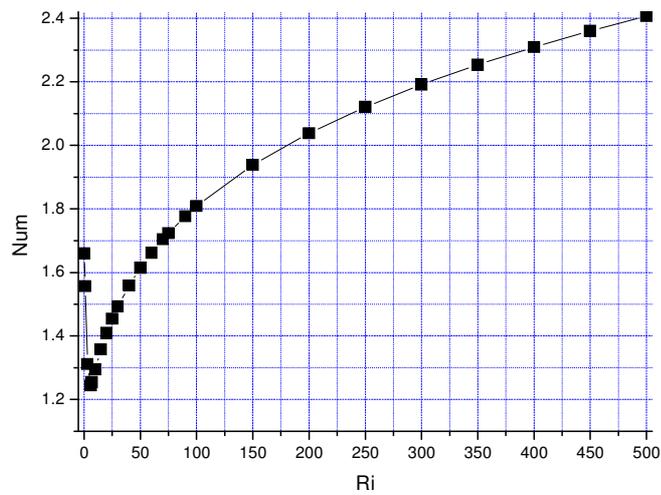
Figure IV-10 : Champ dynamique pour différents nombres de Richardson



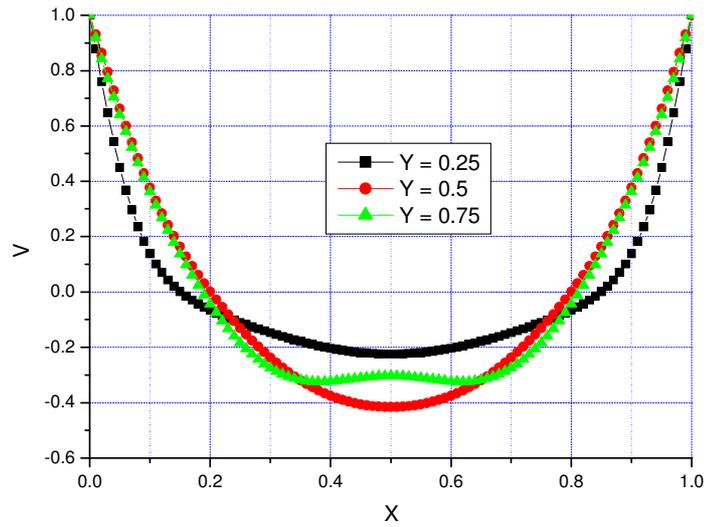
Graphe IV-19 : Profils de température à $Y=0,5$.



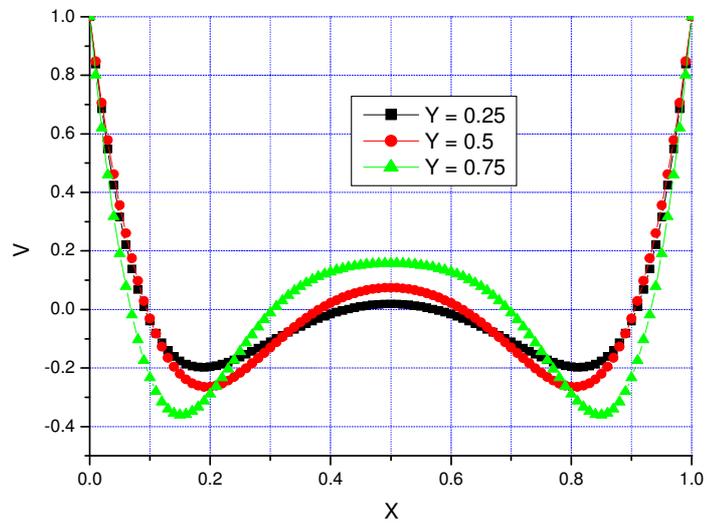
Graphe IV-20 : Evolution du nombre de Nusselt moyen.



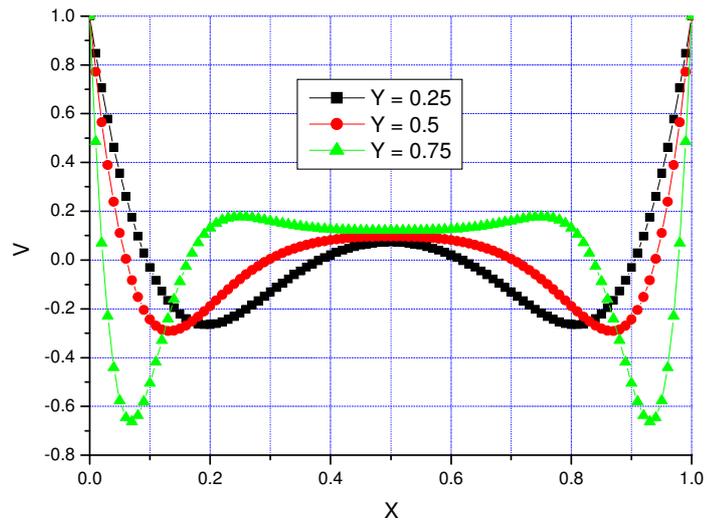
Graphe IV-21 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Richardson.



(a)

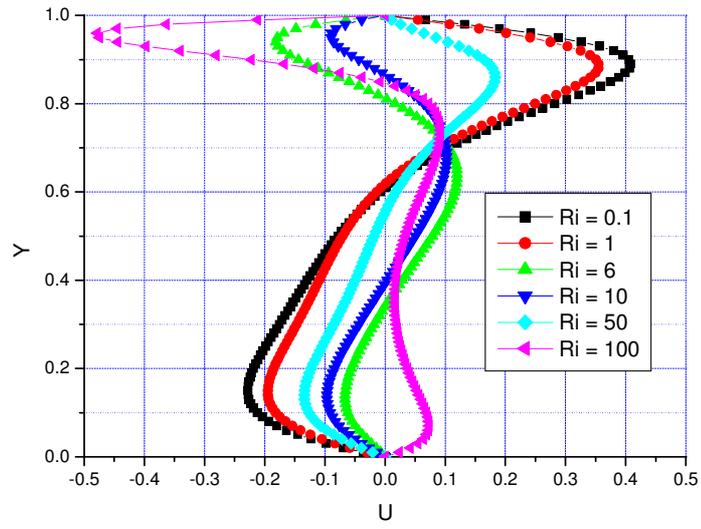


(b)



(c)

Grphe IV- 22 : Profils de vitesse verticale pour : a) $Ri = 0.1$, b) $Ri = 10$ et c) $Ri = 100$.



Graphe IV- 23 : Profils de vitesse horizontale à X= 0.25.

CONCLUSION GENERALE

Nous avons fait l'étude numérique de la convection mixte dans une cavité carrée à parois latérales froides et mobiles. Une source de chaleur est placée au milieu de la paroi supérieure. Les autres parois sont supposés adiabatiques.

En se basant sur la méthode des différences finies pour discrétiser les équations écrites en considérant la formulation fonction de courant-vorticité (ψ, ω). Nous avons déterminé la structure complète de l'écoulement pour différents nombres de Richardson et pour les deux cas considérés.

Les résultats obtenus pour les deux cas n'ont montré aucune dissymétrie. Pour des nombres de Richardson élevés et quelque soit le sens de mouvement des parois latérales, il existe quatre cellules contrarotatives. Dans le cas des parois ascendantes, deux cellules prennent naissance dans la partie centrale de la cavité dus à la partie chauffée, les deux autres cellules qui leurs sont adjacentes sont causées par le mouvement des parois. Lorsque le nombre de Richardson augmente les cellules de la partie centrale tendent à chasser les deux autres cellules vers la paroi.

Dans un proche avenir, nous souhaitons compléter cette étude en considérant l'influence :

- Des nombres de Reynolds et de Prandtl.
- De la largeur de la partie chauffée
- Du nombre de Richardson pour le cas de l'écoulement turbulent.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1]. **M. K. Moallemi, K.S. Jang.** « *Prandtl number effects on laminar mixed convection heat transfer in a lid-driven cavity* ». International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 35, Pages 1881-1892, 1992.
- [2]. **T.H.Hsu et S.G.Wang.** « *Mixed convection of micro polar fluids in a cavity* ». International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 43, Pages 1563-1572, 2000.
- [3]. **O. Aydin; Wen-Jei Yang.** « *Mixed convection in cavities with a locally Heated lower wall and moving sidewalls* ». Numerical Heat Transfer, Part A, Vol 37, Pages 695–710, 2000.
- [4]. **G. Guo, Muhammad A.R. Sharif.** « *Mixed convection in rectangular cavities at various aspect ratios with moving isothermal sidewalls and constant flux heat source on the bottom wall* ». International Journal of Thermal Sciences, vol. 43, Pages 465–475, 2004.
- [5]. **M.A.R. Sharif.** « *Laminar mixed convection in shallow inclined driven cavities with hot moving lid on top and cooled from bottom* ». Applied Thermal Engineering, Vol. 27, Issues 5-6, Pages 1036-1042, 2007.
- [6]. **Khalil M. Khanafer, Abdalla M. Al-Amiri, Ioan Pop.** « *Numerical simulation of unsteady mixed convection in a driven cavity using an externally excited sliding lid* ». European Journal of Mechanics - B/Fluids, Vol. 26, Pages 669-687, 2007.
- [7]. **S.K. Mahapatra, Anjan Sarkar, A. Sarkar.** « *Numerical simulation of opposing mixed convection in differentially heated square enclosure with partition* » International Journal of Thermal Sciences, Vol. 46, Issue 10, Pages 970-979, 2007.
- [8]. **Hakan F. Oztop, Changzheng Sun, Bo Yu.** « *Conjugate-mixed convection heat transfer in a lid-driven enclosure with thick bottom wall* ». International Communications in Heat and Mass Transfer, Vol. 35, Pages 779-785, 2008.
- [9]. **A. Baïri,** « *Transient thermal characteristics of airborne electronic equipment with discrete hot bands in square cavities* ». Applied Energy, Vol. 85, Pages 951-967, 2008.

- [10] **T. Basak, S. Roy, P. K. Sharma, I. Pop.** « *Analysis of mixed convection flows within a square cavity with linearly heated side walls* ». International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 52, Pages 2224-2242, 2009.
- [11]. **N. Ouertatani, N.B. Cheikh, B. B. Beya, T. Lili, A. Campo.** « *Mixed convection in a double lid-driven cubic cavity* ». International Journal of Thermal Sciences, Vol 48, Issue 7, Pages 1265-1272, 2009.
- [12]. **T.S. Cheng et W.-H. Liu.** « *Effect of temperature gradient orientation on the characteristics of mixed convection flow in a lid-driven square cavity* ». Computers & Fluids, Vol 39, Pages 965-978, 2010.
- [13]. **B. Dahdi.** « *Développement d'un programme de calcul de l'écoulement avec transfert de chaleur dans une cavité avec des parois mobiles* ». Mémoire de magister. Département De Génie Mécanique, Université Mentouri Constantine, 2009.
- [14]. **E. Schlichting.** « *Boundary-layer theory* ». 7th Edition, Mac Graw-Hill, New-York, 1998.
- [15]. **E. Saadjan.** « *Phénomènes de transport et leurs résolutions numérique* ». Polytechnica, ISBN 2- 84054 – 057 - 6, (1998).
- [16]. **T. Kawamura, H. Takami et K. Kuwahara.** « *New higher-order upwind scheme for incompressible Navier-Stokes equations* ». Numerical Methods in Fluid Dynamics, Lecture Notes in Physics, Vol. 218, Pages 291-295, 1985
- [17]. **S.V.Patankar.** « *Numerical heat transfer and fluid flow* ». Hemisphere, Washington DC, 1980.