

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI - CONSTANTINE

FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

N° d'ordre :

N° de série :

MEMOIRE

**Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister
EN GENIE MECANIQUE**

OPTION

MECANIQUE APPLIQUEE EN ENGINEERING

**ETUDE DU COMPORTEMENT MECANIQUE
DE STRUCTURES SANDWICHES A DIFFERENTS
MATERIAUX DE REVETEMENTS**

PAR : BOUROUIS FAIROUZ

Devant le jury :

Président	:	B. NECIB	Prof.	Université Constantine
Rapporteur	:	F. MILI	M.C	Université Constantine
Examineurs	:	H. BOUGHOUAS	M.C	Université Constantine
		A. BELLAOUAR	M.C	Université Constantine

REMERCIEMENTS

J'exprime mes profonds remerciements à Monsieur **F. MILI**, Maître de conférence à l'Université de Constantine, encadreur de ce mémoire, pour son aide précieuse, sa confiance, ses encouragements, sa patience et son soutien favorable pour l'aboutissement de ce travail.

Je tiens aussi à adresser, mes vifs remerciements à Monsieur **B.NECIB**, Professeur à l'Université de Constantine et Directeur du laboratoire de mécanique, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance de ce mémoire.

Je désire aussi adresser mes remerciements les plus respectueux à Monsieur **H.BOUGHOUAS**, Maître de conférence à l'université de Constantine, qui m'a fait l'honneur de bien vouloir juger ce travail.

Mes remerciements vont également à Monsieur **A. BELLAOUAR**, Maître de conférence à l'Université de Constantine ,d'avoir accepter d'examiner ce mémoire et d'être membre de jury .

Je remercie vivement tous ce qui ont participé de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

DEDICACES

A la mémoire de ma mère

A la mémoire de mon père

A mon frère Foued

A ma sœur Saliha

A ma soeur Soraya et sa petite famille

A mes amies et collègues

A toute ma famille

Je dédie ce travail

SOMMAIRE

Introduction générale	1
Chapitre I : Définition des matériaux sandwichs et leurs applications	4
I .1 : Introduction	4
I.2 : Généralités sur les matériaux composites	4
I.2.1 : Les matériaux composites structuraux	6
I.2.2 : Mise en œuvre des matériaux composites	7
I.2.3 Caractéristiques des pièces composites et leurs applications	9
I.3 : Définition d'un matériau sandwich	10
I.4 : Matériau sandwich à cœur nid d'abeille	14
I.5 : Techniques d'assemblages des matériaux sandwichs	16
I.5.1 : Le collage de peau sur l'âme	16
I.5.2 : Technique de pliage	17
I.6 : Domaines d'applications des matériaux sandwichs	18
I.6.1 : Construction aérospatiale	18
I.6.2 : Construction automobile et ferroviaire	19
Chapitre II : Comportement mécanique du composite stratifié , du bois et des matériaux de nature métallique	20
II .1 Généralités	20
II.2 : Comportement mécanique des composites stratifiés	21
II 2.1 : Equations de comportement d'un pli composite	24
II.2.2 : Théorie classique simplifiée des stratifiés	30
II .2.2.a : Déformation du stratifié hors de son plan	30
II .2.2.b : Loi de comportement mécanique global d'un stratifié	33
II .3 : Comportement mécanique du bois	36
II.3 .1 : Généralités sur le matériau bois	36
II.3.2 : Comportement élastique du matériau bois idéal	37
II.3.3 : Elasticité des composites à base du bois contre plaqué	42
II.4 : Loi de comportement des matériaux métalliques	45

Chapitre III : Loi de comportement en flexion et en compression de plaques

sandwiches minces	51
III.1 : Introduction	51
III.2 : Formulation des équations d'équilibre.	51
III.2.1 : Relations fondamentales de la dynamique	51
III.2.2 : Relations fondamentale de la dynamique appliquée à un élément de plaque	52
III.3 : Comportement mécanique des éléments constitutifs d'une plaque sandwich.....	55
III.3.1 Introduction à la théorie des plaques sandwiches minces	55
III.3.2 : Champs des déplacements et des contraintes dans l'âme	56
III.3.3 : Champs des déplacements et des contraintes dans les peaux	59
III.4 : Comportement mécanique d'une plaque sandwich	62
III.4.1 : Comportement en membrane	62
III.4.2 : Comportement en flexion – torsion	63
III.4.3 Comportement en cisaillement	64
III.4.4 : Loi du comportement globale d'une plaque sandwich	65
III.4.5 : Relations fondamentales d'une plaque sandwich	66
III.5 : Flexion cylindrique des plaques sandwiches	68
III.5.1: Détermination de la flèche ω_x et de sa pente ϕ_x	69
III.5.2 : Détermination des contraintes dans les peaux	71
III.6 : comportement mécanique d'une plaque sandwich chargée en compression	73

Chapitre IV : Etude comparative du comportement mécanique de plaques

sandwiches à différents matériaux constitutifs	77
IV.1 : Introduction	77
IV.2 : Présentation des matériaux constitutifs utilisés	77
IV.2.1 : Mousse herex.....	78
IV.2.2 : Nida plast (Nid d'abeilles de polypropylène)	78
IV.2.3 : Achroma balsa	78
IV.2.4 : Nida aluminium	78
IV.2.5 : Composites stratifiés	78
IV.3 : Caractérisation élastique des matériaux sandwichs utilisés	79
IV.4 : Etapes de calcul du matériau sandwich	80

IV.5 : Discussion des résultats obtenus	86
IV.5.1 : Comportement mécanique de plaques sandwiches dont la séquence d'empilement des revêtements est [90°/0°] _{5s}	86
IV.5.1.1 : Influence de la nature de matériau de revêtement sur le Comportement mécanique des plaques sandwiches	86
IV.5.1.2 : Influence de la nature du matériau de l'âme sur le comportement mécanique d'une plaque sandwich.....	91
IV.5.1.3 : Variation des contraintes dans les peaux verre/epoxyde /nida aluminium	93
IV.5.2 : Comportement mécanique des plaques sandwiches dont les revêtements sont des stratifiés équilibrés [-θ/+θ]	94
IV.5.2.1 : Influence de la nature du matériau des revêtements	94
IV.5.2.2 : Influence de la nature du matériau de l'âme sur le comportement mécanique d'une plaque sandwich à revêtement verre/epoxyde	99
Conclusion	101
Références bibliographiques	103

INTRODUCTION GENERALE

Les matériaux sandwichs, sont de plus en plus utilisés dans la conception des structures minces .Ils s'avèrent être extrêmement polyvalents par la grande diversité de leurs constituants (revêtement et âme) et la liberté de formes et de tailles en entraînant des solutions de choix dans des secteurs aussi variés tels que le transports (aéronautique.....).Les matériaux sandwichs se caractérisent des matériaux classiques par une intégration étroite des connaissances, reliées aux procédés de fabrication et aux performances mécaniques des pièces obtenues. Les sandwichs sont réalisés à partir de collage des deux peaux minces sur une âme plus légère qui maintient leur écartement .Il sont connus par leur grande rigidité flexionnelle et ont d'excellentes caractéristiques d'isolation thermique.

Des nombreux travaux de recherche ont traité le comportement mécanique des structures sandwiches. Saidi et al [1] ont utilisé la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques par la reconstitution 3D pour décrire le comportement d'une structure en nid d'abeille. Des essais de compression quasistatique uniforme réalisés par Aminanda et al [2] , sur des structures de nids d'abeilles en différents matériaux d'âme (nomex, aluminium) lui ont permis de changer la disposition des plis et leurs paramètres influents sur leurs comportements. L'étude réalisée par Payan [3] sur l'endommagement des sandwichs soumis à la traction à montré que la loi d'évolution de l'endommagement dépend du niveau de chargement et de son amplitude. Deocon [4] utilise les techniques d'optimisation basées sur les algorithmes génétiques, pour décrire le comportement des sandwiches .Afin d'enrichi ce logiciel de calcul d'un sandwich destiné à une application précise Lemoine [5] , a introduit des données sur les plaques et ses caractéristiques thermiques .En revanche , la référence [6] s'intéresse à l'étude d'une structure sandwich lors de la ruine de leurs panneaux à âme type nida et à peau composite tissu .

Geoffrey et Tessier [7] présentent une solution au problème de la flexion cylindrique d'une structure sandwich antisymétrique basée sur le cisaillement transverse

et la comparent avec une solution d'élasticité. D'après la référence [8] ,la concentration déduite des contraintes et les zones critiques correspondantes sont déterminées par l'application de la méthode des éléments finis pour des plaques sandwichs soumises à la flexion cylindrique en prenant en considération le cisaillement transverse. Noriot et Ferrero [9] , utilisent la méthode des éléments finis pour caractériser la rupture des inserts ,c'est une étude expérimentale qui à été réalisée pour définir la rupture des cinq types d'inserts de panneaux sandwich. Corigliano et al [10] , décrivent le comportement mécanique des matériaux sandwichs à peaux en verre/polymère et le cœur en mousse syntactique des microsphères de verre. Cho et Averill [11] utilisent la méthode des éléments finis basée sur la théorie de Zig Zag pour décrire le comportement mécanique de matériaux composites et de panneaux sandwichs.

Des études expérimentales ont été effectuées par Demelio et al [12] pour traiter le phénomène de la fatigue des panneaux sandwichs .Les matériaux constitutifs utilisés sont le nid d'abeille Nomex comme cœur et de différents revêtements verre/epoxyde , graphite/epoxyde , kevlar/epoxyde. La référence [13] s'intéresse aux plaques sandwichs trouées soumises au flambement. L'étude expérimentale a aboutit à des bons résultats à condition que le diamètre des trous soit inférieure à 30% de la longueur de la plaque. A contre partie, Polyakov [14] utilise la théorie de Laplace et les fonctions Dirac généralisées pour résoudre le problème de concentration des contraintes dans le cas des panneaux sandwichs sous flexion cylindrique.

Notre travail consiste à effectuer une analyse comparative du comportement mécanique d'une structure sandwich à différents matériaux de revêtements chargée à la flexion cylindrique et à la compression .Cette étude est réalisée sur des plaques sandwichs symétriques constituées de deux peaux de dix plis réguliers .Les revêtements considérés sont des composites stratifiés ou contre plaqués et l'âme est en nida aluminium ou en nida plast ou en mousse herex ou encore en balsa.

L'étude que nous présentons comprend essentiellement quatre chapitres. Le premier chapitre est consacré à des généralités sur les matériaux composites et sandwichs, la mise en œuvre et techniques d'assemblage, et la définition de caractéristiques les plus remarquables des plaques composites et sandwichs. Afin de

procéder à l'analyse mécanique des matériaux sandwichs, on a développé au second chapitre les éléments théoriques du comportement mécanique des matériaux de nature métallique composites stratifiés et le bois. Le troisième chapitre aborde les principes fondamentaux relatifs à la théorie des plaques minces nécessaires à la formulation des équations d'équilibre et à la description de la loi de comportement en flexion et en compression des plaques sandwichs minces. Dans le dernier chapitre on a informatisé les différentes étapes de calculs des plaques sandwichs pour effectuer une étude comparative de leurs comportement mécaniques en flexion cylindrique et au flambement. Ces structures considérées sont de revêtement (composites stratifiés et contre plaqué) et d'âmes en (nida plast, nida aluminium, mousse herex et balsa). En fin l'analyse des différents résultats obtenus nous permet d'établir une conclusion qui met au point l'influence de la nature du matériau des constituants et de l'orientation des plis composant les revêtements sur le comportement mécanique des plaques sandwichs symétriques.

CHAPITRE I

DEFINITION DES MATERIAUX SANDWICHS ET DE LEURS APPLICATIONS

I. 1 INTRODUCTION :

La technologie moderne essaie à plusieurs fois de concevoir aux matériaux de construction une bonne rigidité, une haute résistance mécanique, une ténacité élevée et une grande légèreté. Dans ce même contexte l'ingénieur désire, dans un grand nombre de situation, concevoir des structures présentant un rapport performance /masse, le plus élevé possible. Pour atteindre ces performances, il recherche toujours des matériaux ayant des caractéristiques spécifiques élevées. Les matériaux répondant à ce critère tels que le verre, le carbone, le bore sont très fragiles, un petit défaut suffit pour amorcer la rupture totale de la structure. Pour pouvoir réaliser des structures suffisamment tolérantes aux dommages, il est nécessaire d'utiliser des matériaux renforcés par des fibres qui sont liées entre elles par une résine. Aucun matériau classique ne permet de combiner ces caractéristiques d'où la nécessité de l'utilisation des matériaux composites, les matériaux sandwichs et les matériaux Intelligents.

I.2 GENERALITES SUR LES MATERIAUX COMPOSITES:

Les matériaux composites connaissent actuellement un développement intense dans toutes les branches de l'industrie. Ils sont des matériaux artificiels constitués de plusieurs composants élémentaires dont leur association confère un ensemble des propriétés qu'aucun des composants pris séparément ne possède. Ils sont donc des arrangements des fibres, continues ou non, d'un matériau résistant le renfort qui sont noyées dans une matrice dont la résistance mécanique est beaucoup plus faible.

- ✓ **La matrice** : Elle a pour rôle de lier les fibres et de répartir les efforts, en outre elle assure la protection chimique et donne la forme au produit réalisé, le choix de la nature de la matrice dépend de l'utilisation à laquelle est destinée le matériau composite. On utilise généralement des matrices qui se classent en trois

grandes catégories, les résines thermodurcissables, les résines thermoplastiques, et les matrices métalliques.

✓ **Le renfort** : Il sert à renforcer la matrice et à répartir les efforts aux quels le matériau est soumis, on le commercialise essentiellement sous forme de :

- **Fibres courtes** : Elles sont à quelques centimètres, ou fractions des millimètres on distingue les feutres et les mats.
- **Fibres longues** : Elles sont coupées au moment de la fabrication du matériau composite .Elles peuvent être utilisées telles quelles ou bien tissés .

Parmi les fibres les plus utilisées dans l'industrie on à :

- **Fibres de verre** : Elles sont fabriquées par étirage rapide de baguettes de verre de quelques dixièmes de millimètres de diamètre, sortant d'une filière chauffée.

Il y'a plusieurs types de verre dont les propriétés caractéristiques sont les suivantes :

Verre E : usage général, bonnes propriétés électriques

Verre D : haute propriétés diélectriques

Verre C : bonne résistance chimique

Verre R : haute résistance mécanique

- **Fibres de carbone** : Les fibres de carbone sont très anisotropes, les propriétés mécaniques transversales sont beaucoup plus faibles que les propriétés longitudinales. Les fibres de carbone sont des fibres conductrices, de masse volumique faible, ayant de très bonnes propriétés mécaniques.
- **Fibres aramide ' kevlar'** : Ces fibres sont des polyamides aromatiques .Elles présentent une masse volumique très faible et ont de très bonnes caractéristiques spécifiques en traction.

Les composites renforcés de fibres d'aramide offrent une bonne stabilité en température (jusqu'à 200 C° en fonction de la matrice), elles ont l'inconvénient d'avoir une faible résistance en compression, et d'être sensibles aux rayons ultraviolets.

I.2.1 Les matériaux composites structuraux :

a. Les monocouches :

Les monocouches comme il est indiqué sur la (Figure 1.1) représentent l'élément de base de la structure composite, les différents types de monocouches sont caractérisés par la disposition du renfort dans la matrice, fibres unidirectionnelles, fibres tissées et fibres courtes.

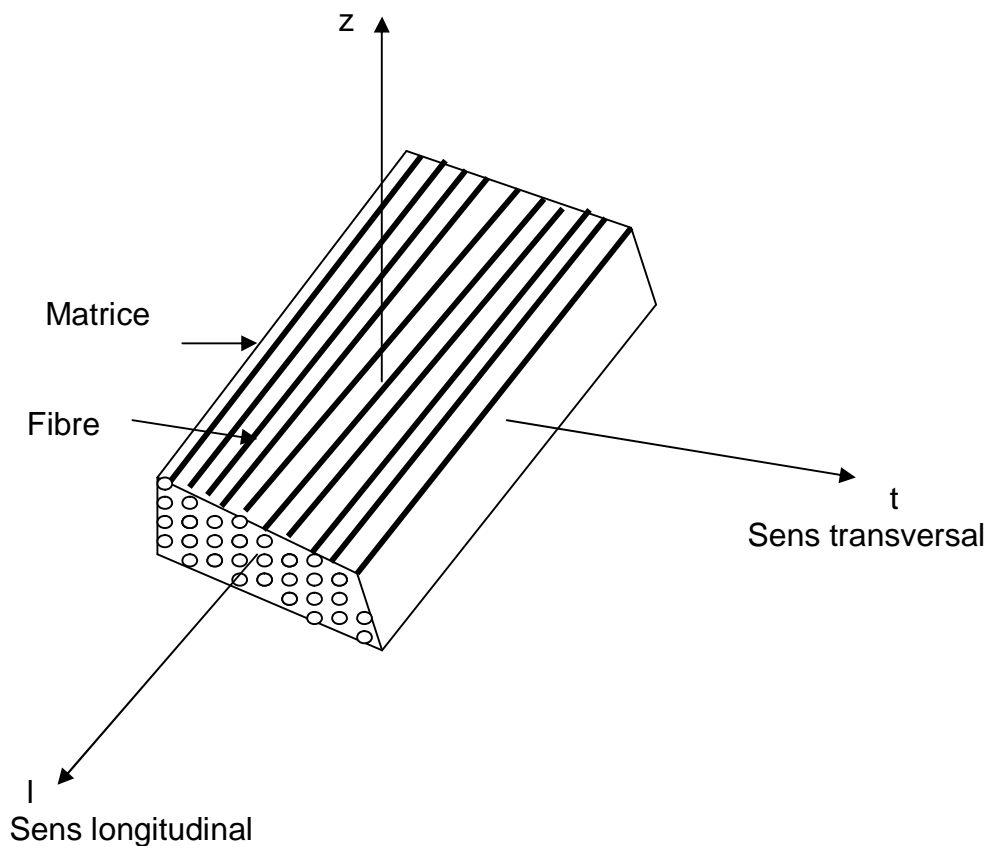


Figure 1.1 : Pli à renforcement unidirectionnel

b. Stratifiés :

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacune une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches (Figure 1.2) , et désigné comme le repère des axes de symétrie du matériau .Selon la disposition des couches par rapport au plan moyen, on distingue les stratifiés symétriques et antisymétriques.

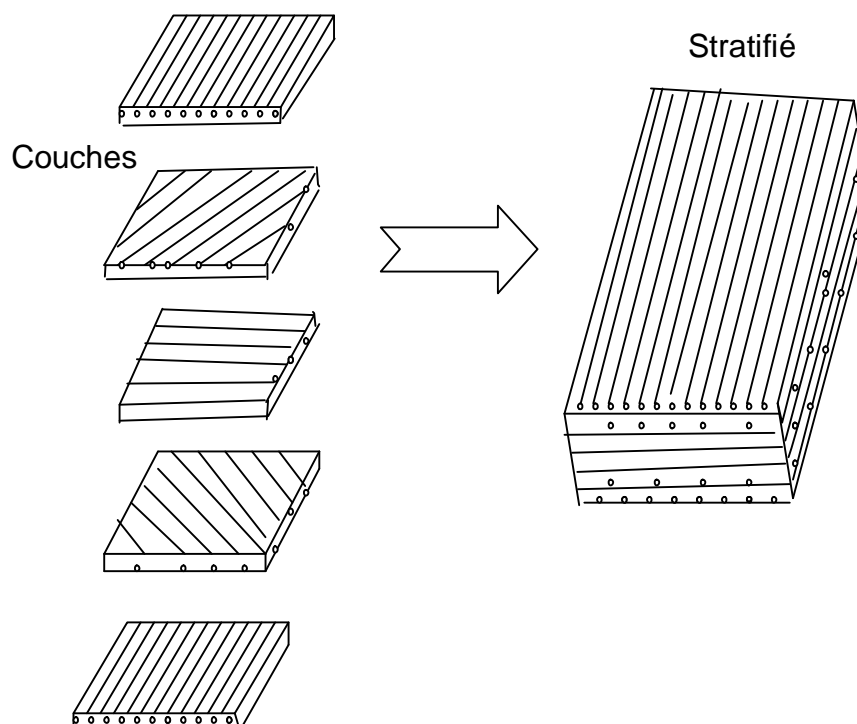


Figure 1. 2 : Constitution d'un stratifié

1.2.2 Mise en œuvre des matériaux composites :

Le mélange (renfort / résine) ne devient un véritable matériau composite résistant qu'au terme de dernière phase de fabrication.

Il existe différentes techniques de mise en œuvre mais la plus utilisée est par moulage, les procédés de formage par moulage varient en fonction de la nature des pièces, de l'importance des séries et du prix de revient. Nous retiendrons le formage par

moulage des composites à renfort fibreux et à matrice résineuse. Les principales étapes de fabrication sont illustrées dans la (Figure 1.3)

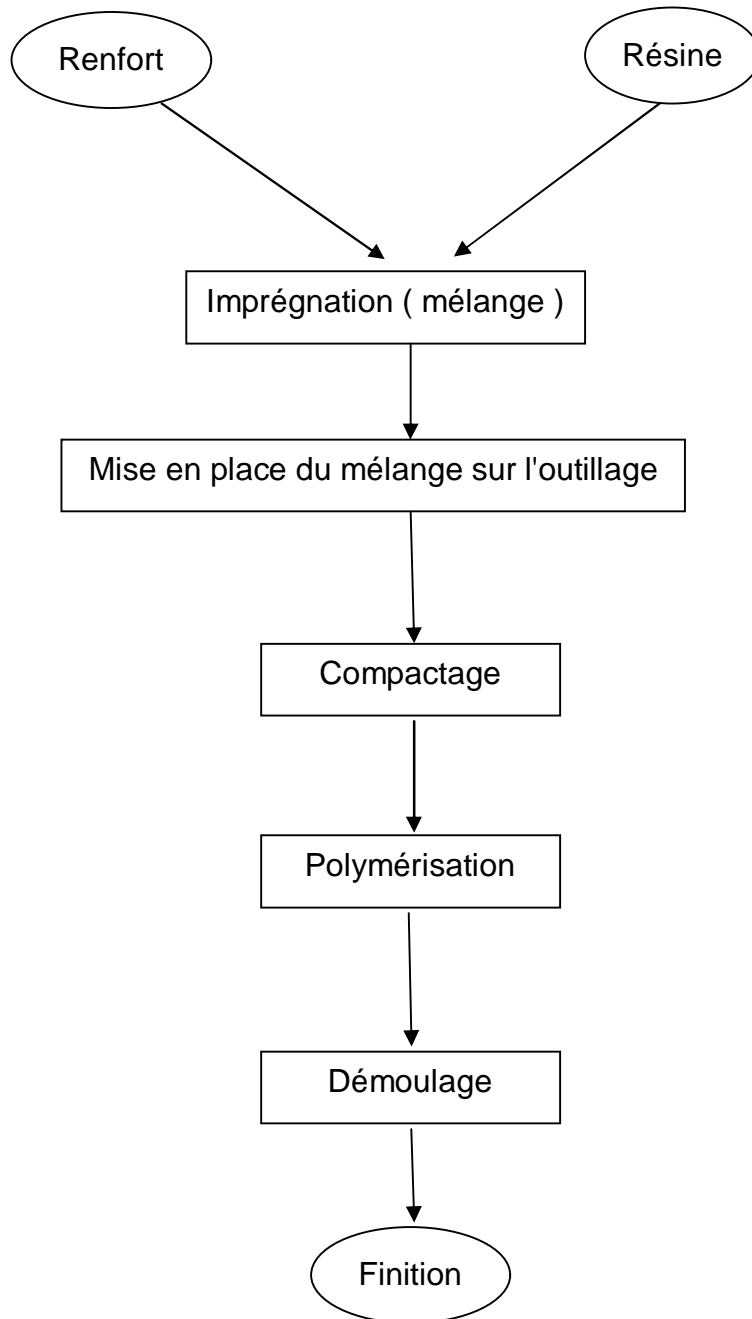


Figure 1. 3 : Etapes de mise en forme des composites par moulage

I.2.3 Caractéristiques des pièces composites et leurs applications :

L'amélioration des propriétés mécaniques du matériau de la matrice, par la présence des fibres, à confère aux matériaux composites une bonne tenue en fatigue, absence de corrosion, une meilleure tenue au feu, et un gain de masse ce qui entraîne une économie du carburant ou un accroissement de charge utile .De plus les matériaux composites ne se plastifient et ne se corrodent pas et ont une tenue aux impacts et aux chocs très moyenne .Par contre les matériaux composites vieillissent sous l'action de l'humidité et de la chaleur, ils sont insensibles aux produits chimiques, graisses, huiles, liquides hydrauliques, peinture, solvants, pétrole

Dans le (Tableau 1.1), on illustre quelques cas significatifs de l'amélioration en prix et en performance que l'on peut atteindre après substitution d'une solution composite à une solution classique [21]

Nature	Construction précédente	Construction composite
Tête de robot de soudage	Aluminium masse : 6 Kg	Carbone/ Epoxyde masse 3 kg
Tambour de table à dessiner	Vitesse de tracé de dessin 15 à 30 cm/ seconde	Kevlar /Epoxyde 40 à 80 cm / seconde
Réservoir de 65 m ³ pour l'industrie chimique	Acier inox + installation Prix 1	Prix 0.53
Moyeu rotor pour hélicoptère	Masse 1 Prix = 1	Carbone/Kevlar/Epoxyde Masse = 0.8 , prix = 0.4
Table x -y pour la fabrication intégrée	Fonte, Aluminium cadence de fabrication 30 plaquettes/heure	Sandwich carbone/époxyde / nid d'abeille 55 plaquettes/ heure

Tableau 1.1 : Quelques exemples de substitution des solutions classiques par des solutions composites

Les matériaux composites connaissent actuellement un développement intense dans tous les domaines de l'industrie. Ils sont donc des matériaux idéaux dans spécialement l'aéronautique et l'aérospatiale. L'expérience prouve que l'emploi des composites permet à performances égales, des gains de masse variant de 10 % à 50% sur le même composant en alliage métallique conventionnel [21].

Les matériaux composites ont été introduits progressivement dans l'industrie de l'automobile et des transports terrestres, l'intégration de tels matériaux à pu réduire la consommation de carburant causé par l'économie du poids obtenu. De par leur bonne tenue à la fatigue statique et dynamique et leur légèreté, les composites sont des matériaux idéaux pour la fabrication de très nombreux articles de sport et de loisirs. De plus, les matériaux composites sont notamment utilisés dans les domaines de l'électricité, l'électronique (chemins de câbles), le bâtiment et travaux publics, transport maritime et dans la mécanique générale.

I.3 DEFINITION D'UN MATERIAU SANDWICH :

Une structure sandwich est obtenue à partir de deux peaux ou revêtements , réalisées dans un matériau ayant de très bonnes caractéristiques , collées sur une âme réalisée avec un matériau très léger et ayant des faibles caractéristiques mécaniques. L'objet d'un tel procédé et de constituer une structure permettant de concilier légèreté et rigidité (Figure 1.4) pour de telles structures le rapport des épaisseurs du cœur e_c et des peaux e_p doit être limité entre 10 et 100 ($10 \leq e_c / e_p \leq 100$) [23].

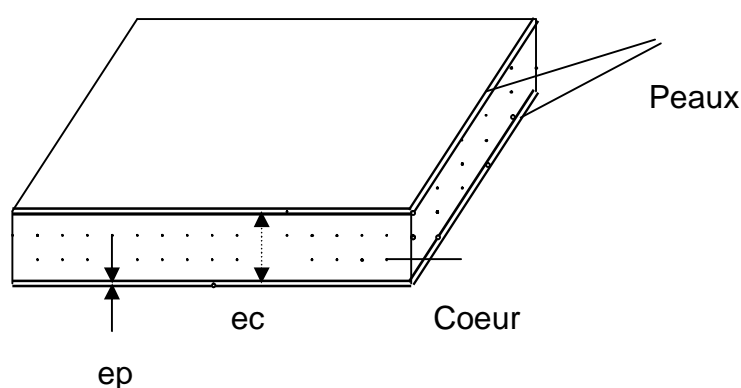


Fig 1.4 : Schématisation d'une plaque sandwich

Le matériau sandwich est constitué de :

- ✓ **Ame** : Elle peut être réalisée avec les matériaux suivants :
- **Mousses** : Ces matériaux légers peu onéreux, facilement usinables et ont cependant de très faibles caractéristiques mécanique.
 - **Balsa** : Est un bois bien connu pour ces différents utilisations et de leurs principales qualités que la légèreté, le haut pouvoir d'isolation thermique et acoustique et la non déformation aux variations thermiques.
 - **Nid d'abeille** : Cette structure est réalisée généralement à partir de matériau en plaques minces (alliage d'aluminium, papier polyamide). Des raies de colle sont disposées en bande régulières sur les plaques qui sont collées entre elles pour former un bloc, ce dernier est coupé en tranches qui seront, transformées à leur tour en planche de nida ' **nid d'abeille** ' par expansion.

Il existe deux types d'âmes :

a) **Les âmes pleines** :

Les âmes le plus couramment utilisées sont :

- Le balsa ou bois cellulaire (Fig 1.5 a)
- Diverses mousses cellulaires (Fig 1.5 b)
- Des résines chargées de microspheres creuses de verre appelés mousses syntactiques.

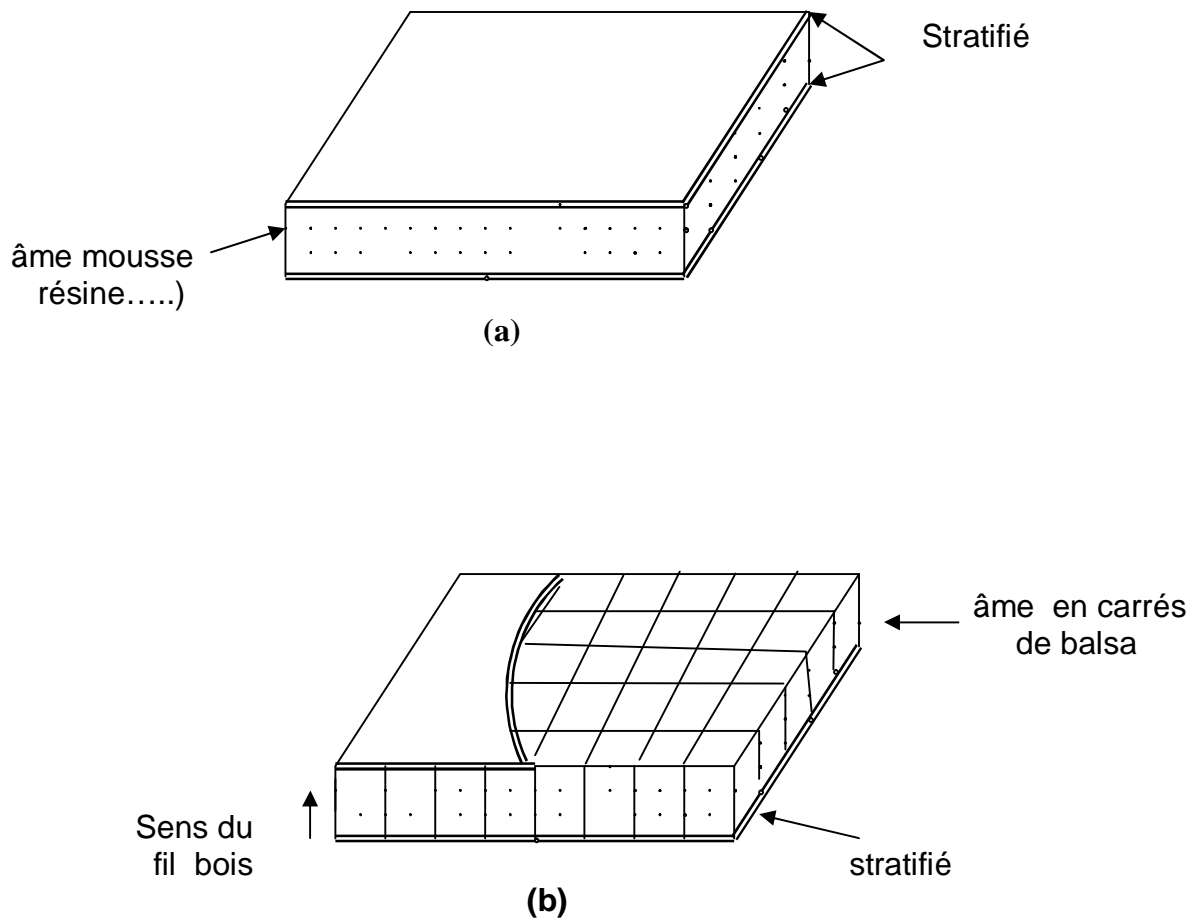


Figure. 1.5 : Matériaux sandwichs à âmes pleines

b) Les âmes creuses :

Elles se présentent essentiellement en nid d'abeille (Figure 1.6)

elles sont :

- Des alliages métalliques légers
- Des papiers kraft
- Du papier polyamide, type papier Nomex

nid d'abeilles

âme ondulée

Figure 1.6 : Matériaux sandwichs à âmes creuses

▼ **Les peaux :**

les peaux sont le plus souvent des stratifiés à renfort fibreux (verre , carbone , kevlar) dans le cas de panneaux sandwichs , les peaux peuvent être du carbone/ epoxyde , kevlar / epoxyde ou encore bore /epoxyde , ou métallique ' Al, Acier , Inox , ou des feuilles d'alliages légers, par leur rapport rigidité / poids meilleur, un certain nombre de structures sandwiches métalliques sont remplacées par des sandwichs composites.

Les matériaux sandwichs sont caractérisés par :

- Une grande légèreté à titre de comparaison la masse surfacique de la coupole de la basilique Saint – Pierre (45 mètres de portée) et de 2600 Kg / m² (construction en pierre). La masse surfacique d'une même coupole en sandwich acier/ mousse de polyuréthane est de 33 Kg / m² [16] .
- Une grande rigidité flexionnelle due à l'écartement des peaux .

- Excellentes caractéristiques d'isolation thermiques .En revanche, les matériaux sandwichs n'amortissent pas et leur tenue au feu n'est pas bonne pour certaines catégories d'âmes et le risque de flambement est plus élevé que pour les structures classiques.

I.4 MATERIAU SANDWICH A CŒUR NID D'ABEILLE

Ces matériaux de remplissage, très répandus, sont constitués de cellules hexagonales régulièrement espacées faisant penser à un rayant de ruche.

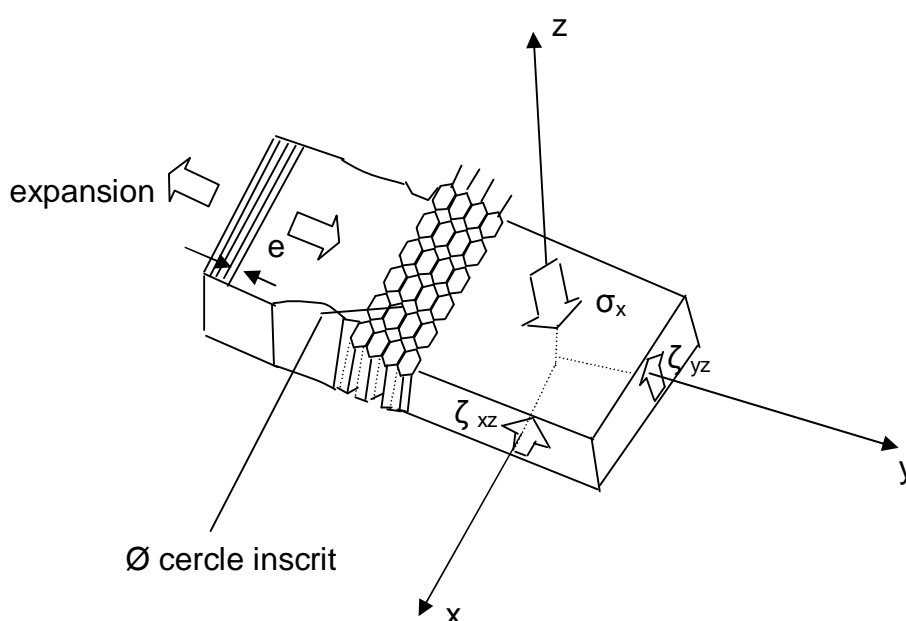


Figure 1.7 : Le matériau sandwich à cœur nid d'abeille

Les nids d'abeilles métalliques : (alliage léger, acier) sont moins onéreux et plus résistants.

Les nids d'abeilles non métalliques : (carton imprégné de résine phénolique, feuille de polyamide, tissus de verre imprégnés sont insensibles à la corrosion et sont de bons isolants thermiques.

Le (Tableau 1.2) résume les caractéristiques mécaniques et géométriques de quelques nids d'abeilles les plus utilisés [21].

	Feuilles de Polyamide encollées Nomex	Alliage léger AG3	Alliage léger AU4 GI
Ø cercle inscrit (mm)	6 : 8 : 12	4	6
Masse volumique (kg/m ³)	64	80	46
Résistance à la rupture en Cisaillement ζ_{rupxz} (Mpa)	1.7	3.2	1.5
Module de glissement G_{xz} (Mpa)	58	520	280
Résistance à la rupture en cisaillement ζ_{rupyz} (Mpa)	0.85	2	0.9
Module de glissement G_{yz} (Mpa)	24	250	140
Résistance à la rupture en Compression σ_{rup} (Mpa)	2.8	4.4	2

Tableau 1.2 : Caractéristique mécaniques et géométriques de quelques Nids d'abeilles

L'obtention d'un matériau sandwich à cœur nids d'abeilles découle d'une technique relativement simple. Les feuilles minces sont déduites d'un rouleau clinquant partiellement encollé .l'ensemble sera ensuite obtenu par empilement après que les feuilles subissent une expansion (Figure 1.8) .

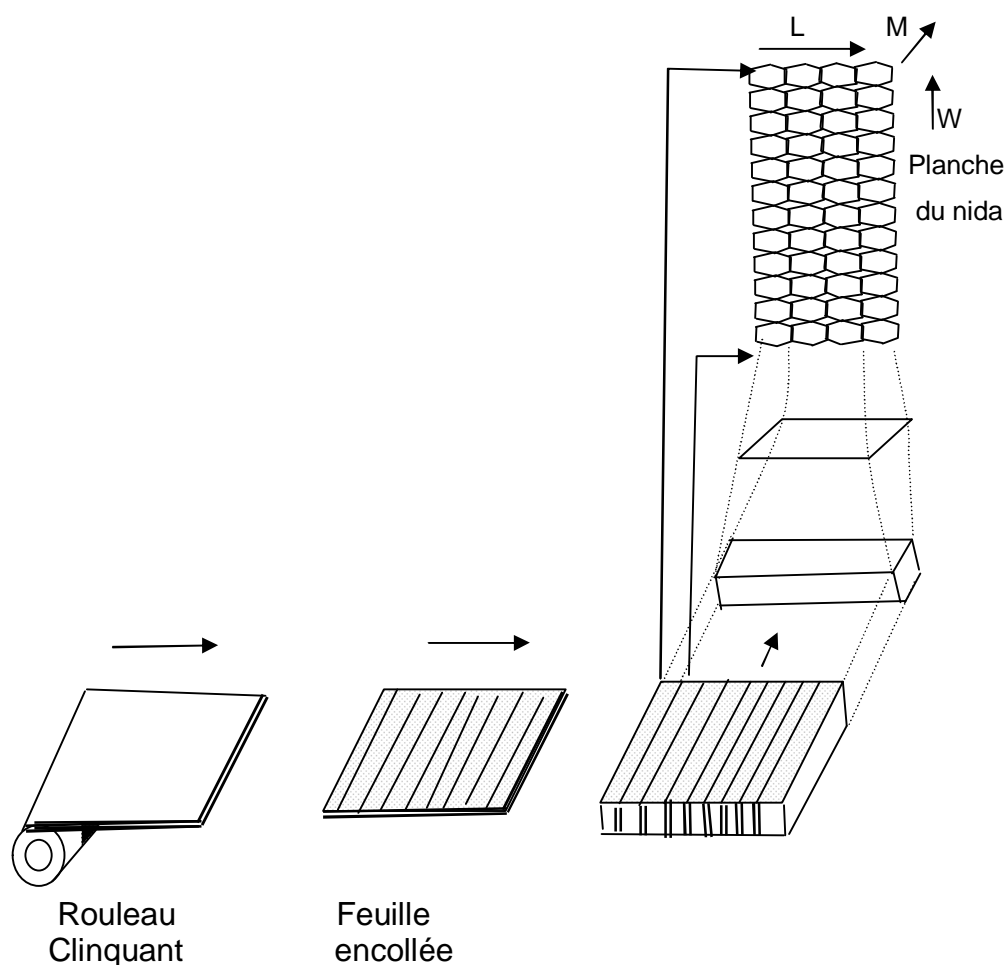


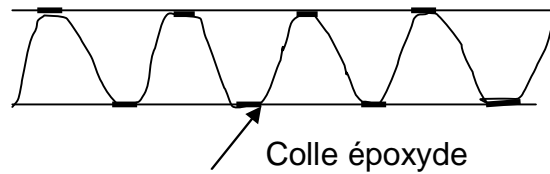
Figure 1.8 : Fabrication du nid d'abeille

I.5 TECHNIQUES D'ASSEMBLAGES DES MATERIAUX SANDWICHS

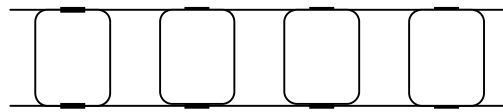
I.5.1 Le collage de peau sur l'âme :

Pour que les structures sandwichs jouent pleinement leur rôle, il est nécessaire de veiller à avoir une solidarisation parfaite de l'ensemble âme – peaux de manière à répartir les efforts entre âme et peaux.

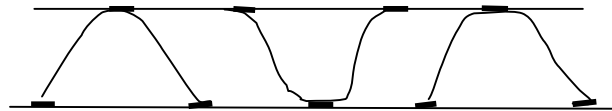
L'assemblage est réalisé selon la (Figure 1.9) par un collage à l'aide de résines compatibles avec les matériaux en présence.



(a) : collage de tôle ondulée ou raidisseurs ω sur tôle



(b) : panneaux avec tubes carrés



(c) : panneaux avec ω inversés

Figure 1.9 : panneaux réalisés par collage à partir de profils divers

I.5.2 Technique de pliage :

Après mise en œuvre les panneaux sandwichs peuvent être formés par pliage comme il est indiqué sur la (Figure 1.10).

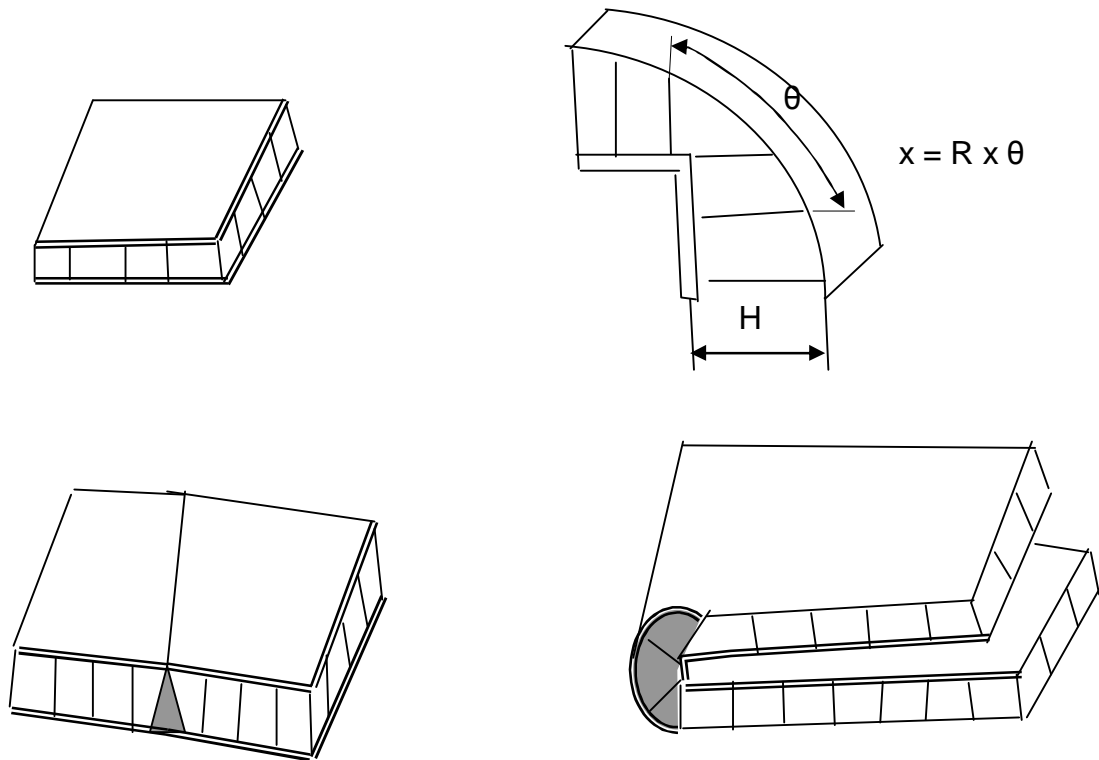


Figure 1.10 : Pliage de panneaux sandwichs

On commence par dégarnir une bande de l'un des revêtements en suivant l'axe de la pliure et sur une largeur qui est fonction de l'épaisseur de la plaque et l'angle de pliage souhaité, ensuite on plie et on maintient l'angle dans la position choisie.

I.6 DOMAINES D'APPLICATIONS DES MATERIAUX SANDWICHS :

Les panneaux sandwichs sont de plus en plus utilisés dans la conception des structures minces. Ils trouvent leurs applications dans l'aéronautique, l'automobile, la construction navale et ferroviaire.

I.6.1 Construction aérospatiale :

Les portes trappes de train d'atterrissages, carénages divers (entre aile de fuselage, mâts de réacteurs, glissiers de volets) sont des pièces secondaires réalisés en panneaux sandwichs et par cuisson de stratifiés composites (carbone/ epoxyde, kevlar /epoxyde) sur nida nomex ou aluminium collés avec des adhésifs epoxyde en films.

Les capots des moteurs sont les plus souvent réalisés avec des sandwichs constitués de peaux en carbone / epoxyde collés sur des âmes en nida aluminium [25] Afin d'obtenir la résistance à la chaleur nécessaire, on utilise des adhésifs epoxydes phénoliques ou polyamides.

Les panneaux acoustiques sont des structures sandwichs dont la peau intérieure, coté moteur est constituée d'une peau perforée sur laquelle est collé un tissu microporeux.

Des nombreuses pièces d'hélicoptères sont constituées de pièces monolithiques ou de sandwichs avec peaux en composites collées sur nida [30]

Dans les domaines astronautique et d'armement, on à besoin de tenue à la chaleur et aux variations thermiques encore plus élevées. Les réflecteurs solaires sont en peaux de carbone/epoxyde et l'âme en nida nomex.

I.6.2 Construction automobile et ferroviaire :

Les matériaux sandwichs sont également utilisés et assemblés par collage dans la construction de camions, d'autobus, dans ce domaine on peut utiliser des peaux en stratifié verre/polyester et d'âme en mousse polystyrène expansé.

Le métro et tramways, demandant des démarrages fréquents, constituent un bon marché pour les matériaux sandwichs. Les portes d'accès sont en panneaux sandwichs avec des peaux en composites verre/ polyester ou en aluminium collées par des adhésifs intérieurs sont aussi en panneaux sandwichs avec âme en nida aluminium ou nomex.

CHAPITRE II

COMPORTEMENT MECANIQUE DU COMPOSITE STRATIFIE, DU BOIS ET DES MATERIAUX DE NATURE METALLIQUE

II .1 GENERALITES :

Un matériau est une matière d'origine naturelle ou artificielle que l'homme façonne pour en faire des objets, l'expérience à montré que les matériaux ont en général un comportement élastique linéaire [22] .

Les déformations sont des fonctions linéaires et homogènes des contraintes.
la relation d'élasticité peut s'écrire à partir de loi de Hooke généralisée comme :

$$\sigma = C \varepsilon \quad (2.1)$$

Avec C : est la matrice de rigidité du matériau

Ou sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

La matrice inverse de la matrice $[C]$ nous permet d'obtenir la matrice de souplesse $[S]$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

En tenant compte de la symétrie des termes S_{ij} et C_{ij} ($i \neq j$) les matrices de rigidité et de souplesse sont caractérisées chacune par 21 constantes élastiques indépendantes, ce cas correspond à un matériau anisotrope ne possédant aucune propriété de symétrie.

II .2 COMPORTEMENT MECANIQUE DES COMPOSITES STRATIFIES:

Pour étudier le comportement d'un stratifié constitué de plusieurs plis d'orientation différentes, il est nécessaire de connaître le comportement de chacun des plis qui le composent.

En général, un pli composite est considéré comme orthotrope, sa loi de comportement mécanique aura donc la forme de :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

et aussi :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Afin de l'exprimer dans les axes du matériau x et y , on fait appel aux matrices de transformation de base T_σ et T_ε

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & -2\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & \sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -2\sin\theta\cos\theta & 2\sin\theta\cos\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Avec $C' = T'_\sigma \cdot C \cdot T_\varepsilon$

D'ou les équations de comportement transformées :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Avec C'_{ij} sont les constantes de rigidité d'un matériau orthotrope dont la direction principale fait un angle θ avec la direction x .

$$\begin{aligned} C'_{11} &= C_{11} \cos^4 \theta + C_{22} \sin^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ C'_{12} &= (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ C'_{13} &= C_{13} \cos^2 \theta + C_{23} \sin^2 \theta \\ C'_{14} &= 0 \\ C'_{15} &= 0 \\ C'_{16} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ C'_{22} &= C_{11} \sin^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{22} \cos^4 \theta \\ C'_{23} &= C_{13} \sin^2 \theta + C_{23} \cos^2 \theta \\ C'_{24} &= 0 \\ C'_{25} &= 0 \\ C'_{26} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ C'_{33} &= C_{33} \\ C'_{34} &= 0 \\ C'_{35} &= 0 \\ C'_{36} &= (C_{13} - C_{23}) \sin \theta \cos \theta \\ C'_{44} &= C_{44} \cos^2 \theta + C_{55} \sin^2 \theta \\ C'_{45} &= (C_{55} - C_{44}) \sin \theta \cos \theta \\ C'_{55} &= C_{44} \sin^2 \theta + C_{55} \cos^2 \theta \\ C'_{46} &= 0 \\ C'_{56} &= 0 \\ C'_{66} &= [C_{11} + C_{22} - 2(C_{12} + C_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \quad (2.9)$$

II.2.1 Equations de comportement mécanique d'un pli composite :

La cellule élémentaire d'un pli composite unidirectionnel peut être considérée comme constituée d'une fibre entourée d'un cylindre de matrice (Figure 2.1).

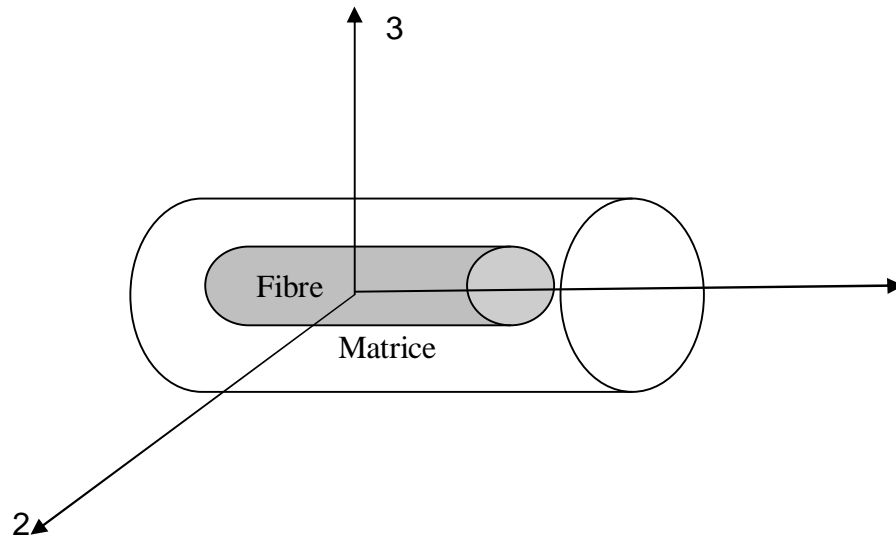


Figure 2.1 : Cellule élémentaire représentative d'un pli composite unidirectionnel

Ce type de matériau est isotrope dans le plan normal à la direction des fibres .Il se comporte comme un matériau isotrope transverse pour lequel tout plan passant par un axe privilégié est un plan de symétrie mécanique. La loi de comportement ne fait intervenir que cinq coefficients élastiques indépendants qui s'écrit sous forme technique en notation d'ingénieur comme :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_{11} & -\nu_{21}/E_{22} & -\nu_{21}/E_{22} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_{11} & 1/E_{22} & -\nu_{23}/E_{22} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_{11} & -\nu_{23}/E_{22} & 1/E_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu_{23})/E_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \zeta_{23} \\ \zeta_{31} \\ \zeta_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

Soient 1.2.3 les axes d'orthotropie du pli (Figure 2.2)

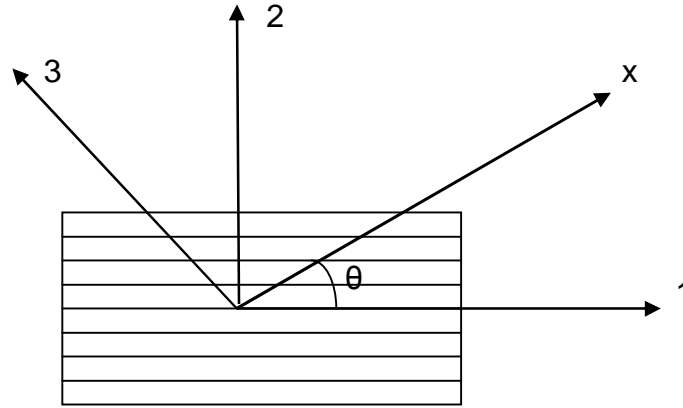


Figure 2.2 : Plaque composite faisant un angle θ avec les axes d'orthotropie

Pour un stratifié mince, nous supposons que les contraintes σ_{33} sont nulles.

Dans le plan 1-2 , le tenseur des déformations se réduit à :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \zeta_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

Avec :

$$S_{11} = \frac{1}{E_{11}} \quad , \quad S_{12} = \frac{-\nu_{12}}{E_{11}} = \frac{-\nu_{21}}{E_{22}}$$

$$S_{22} = \frac{1}{E_{22}} \quad , \quad S_{16} = S_{26} = 0 \quad , \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \quad (2.12)$$

Son inverse nous permet d'écrire la matrice de rigidités réduites [Q]

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \zeta_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

Avec :

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12} E_{22}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} = \frac{\nu_{21} E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \quad (2.14)$$

$$Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}$$

La relation contraintes déformations dans le repère d'orthotropie diffère d'une couche à l'autre .Pour calculer les efforts et les moments dans une plaque composite, il faut que les relations dans les différentes couches soient exprimées dans le même repère soit (x , y)
En effectuant une rotation d'angle θ autour de l'axe z ou 3. Les tenseurs des contraintes et des déformations dans le plan (x , y) sont :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \zeta_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \zeta_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \zeta_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \zeta_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

De la même manière

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [T']^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

Si on inverse les relations (2.16) et (2.18) on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \zeta_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \zeta_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [T'] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

Avec :

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$[T'] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ -2\sin\theta\cos\theta & 2\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

En sachant que la loi de comportement dans les axes d'orthotropie est de la forme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \zeta_{12} \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

La substitution des relations (2.23) et (2.20) dans la relation (2.16) permet d'exprimer les équations contraintes déformations dans le système d'axes x, y de symétrie matérielle du matériau comme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \zeta_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} [Q] [T'] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

D'où :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \zeta_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

$[\bar{Q}]$: est la matrice des rigidités réduites transformées .

Dans le système d'axes de symétrie matérielle de la plaque composite, la loi de comportement du pli généralement orthotrope est :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \zeta_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

Dont :

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4\theta + 2 (Q_{12}+2 Q_{66}) \sin^2\theta \cos^2\theta + Q_{22} \sin^4\theta \\
 \bar{Q}_{12} &= (Q_{11}+Q_{22} - 4 Q_{66}) \sin^2\theta \cos^2\theta + Q_{12} (\sin^4\theta + \cos^4\theta) \\
 \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2 Q_{66}) \sin\theta \cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2 Q_{66}) \sin^3\theta \cos\theta \\
 \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4\theta + 2 (Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2\theta \cos^2\theta + Q_{22} \cos^4\theta \\
 \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2 Q_{66}) \sin^3\theta \cos\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2 Q_{66}) \sin\theta \cos^3\theta \\
 \bar{Q}_{66} &= [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2\theta \cos^2\theta + Q_{66} (\sin^4\theta + \cos^4\theta)
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

De plus

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [T']^{-1} [S] [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \zeta_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.28}$$

Donc :

$$\{ \varepsilon \}_{x,y} = [\bar{S}] \{ \sigma \}_{x,y} \tag{2.29}$$

$[\bar{S}]$: est la matrice de souplesse transformée.

D'ou :

$$\begin{aligned}
 \bar{S}_{11} &= S_{11} \cos^4\theta + (2 S_{12} + S_{66}) \sin^2\theta \cos^2\theta + S_{22} \sin^4\theta \\
 \bar{S}_{12} &= (S_{11} + S_{22} - S_{66}) \sin^2\theta \cos^2\theta + S_{12} (\sin^4\theta + \cos^4\theta) \\
 \bar{S}_{16} &= (2 S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \sin\theta \cos^3\theta + (2S_{12} - 2S_{22} + S_{66}) \sin^3\theta \cos\theta \\
 \bar{S}_{22} &= S_{11} \sin^4\theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2\theta \cos^2\theta + S_{22} \cos^4\theta \\
 \bar{S}_{26} &= (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^3\theta \cos\theta + (2 S_{12} - 2S_{22} + S_{66}) \sin\theta \cos^3\theta \\
 \bar{S}_{66} &= 2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66}) \sin^2\theta \cos^2\theta + S_{66} (\sin^4\theta + \cos^4\theta)
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

II .2.2 Théorie classique simplifiée des stratifiés :

II.2.2.a Déformation du stratifié hors de son plan :

Pour décrire le comportement mécanique du composite stratifié, on doit prendre en compte les hypothèses de Kirchoff.

Le stratifié est considéré comme un superposition de couches parfaitement liées, (la liaison est supposée infinitésimale) afin d'éviter le délaminage. la déformation est supposée continue à travers l'épaisseur du stratifié afin d'empêcher le glissement d'un pli par rapport à un autre. Le stratifié se comporte comme une seule couche mais avec des caractéristiques élastiques très spéciales.

Alors toute droite normale à la surface moyenne avant déformation restera droite et normale et gardera une longueur constante après déformation, on ignore donc les distorsions angulaires (Figure 2.3).

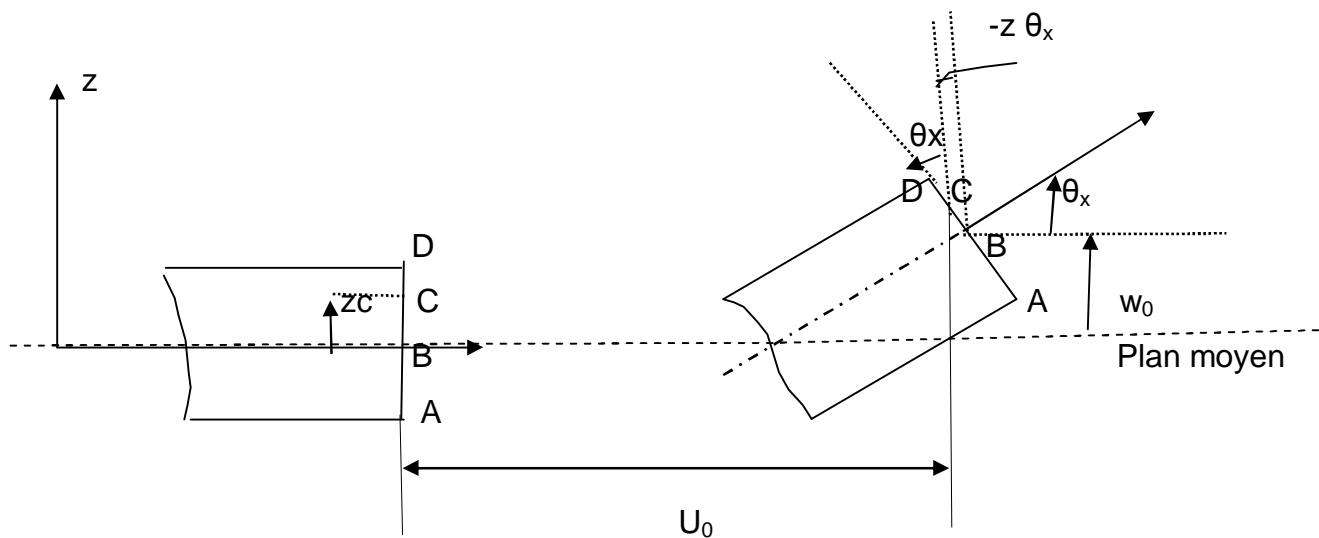


Figure 2.3 : Géométrie de la déformation de la section transversale de la plaque stratifiée

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (2.31)$$

$$\epsilon_{zz} = 0 \quad (2.32)$$

Ou z : indique la direction de la normale à la surface moyenne

Avec :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z \varphi_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z \varphi_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{2.33}$$

Le champ des déformations s'écrit comme :

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\
 \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\
 \epsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\
 \gamma_{xy} = 2 \epsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \\
 \gamma_{xz} = 2 \epsilon_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x(x, y) \\
 \gamma_{yz} = 2 \epsilon_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{2.34}$$

D'après la relation (2.31) on a :

$$\begin{aligned}
 \varphi_x(x, y) &= - \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 \varphi_y(x, y) &= - \frac{\partial w_0}{\partial y}
 \end{aligned}
 \tag{2.35}$$

En substituant l'équation (2.35) dans l'équation (2.33) ,le champ des déplacements devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x,y,z) = u_0(x,y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} (x,y) \\ v(x, y,z) = v_0(x,y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} (x,y) \\ w(x, y,z) = w_0(x,y) \end{array} \right. \quad (2.36)$$

Le champ de déformation s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \epsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad \text{et} \quad \epsilon_{zz} = 0 \end{array} \right. \quad (2.37)$$

qui peuvent être réécrite sous la forme matricielle

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{array} \right\} + z \left\{ \begin{array}{l} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ - \frac{2 \partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} \quad (2.38)$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z\{k\} \quad (2.39)$$

$\{\varepsilon^0\}$: La déformation plane

$\{k\}$: La courbure du plan moyen sollicité en flexion

Compte tenu de la variation linéaire de la déformation, d'après la relation (2.39), la représentation matricielle de l'équation (2.26) permet d'écrire :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \zeta_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{Bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.40)$$

II.2.2.b Loi de comportement mécanique global d'un stratifié:

Pour étudier le comportement mécanique du stratifié, lorsqu'il est soumis à un ensemble de sollicitations, nous devons prendre en considération :

- § un stratifié plan pourvu de la symétrie miroire
- § le stratifié est constitué de n plis dont e_k est l'épaisseur du pli d'ordre d'empilement k.
- § le stratifié à une épaisseur totale notée h.

Dans le cas d'une plaque travaillant en membrane, la répartition des contraintes est continue dans chaque pli ,mais discontinue d'une couche à une autre .

les efforts de membrane seront exprimés par la relation :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \zeta_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (2.41)$$

N_x : Effort dans la direction x par unité de longueur suivant la direction y .

N_y : Effort résultant dans la direction y par unité de largeur suivant la direction x

N_{xy} : cisaillement de membrane par unité de largeur suivant la direction y .

z_k et z_{k-1} , sont respectivement les coordonnées de la couche d'ordre k et $k-1$ dans la direction perpendiculaire au stratifié. (Figure 2.4)

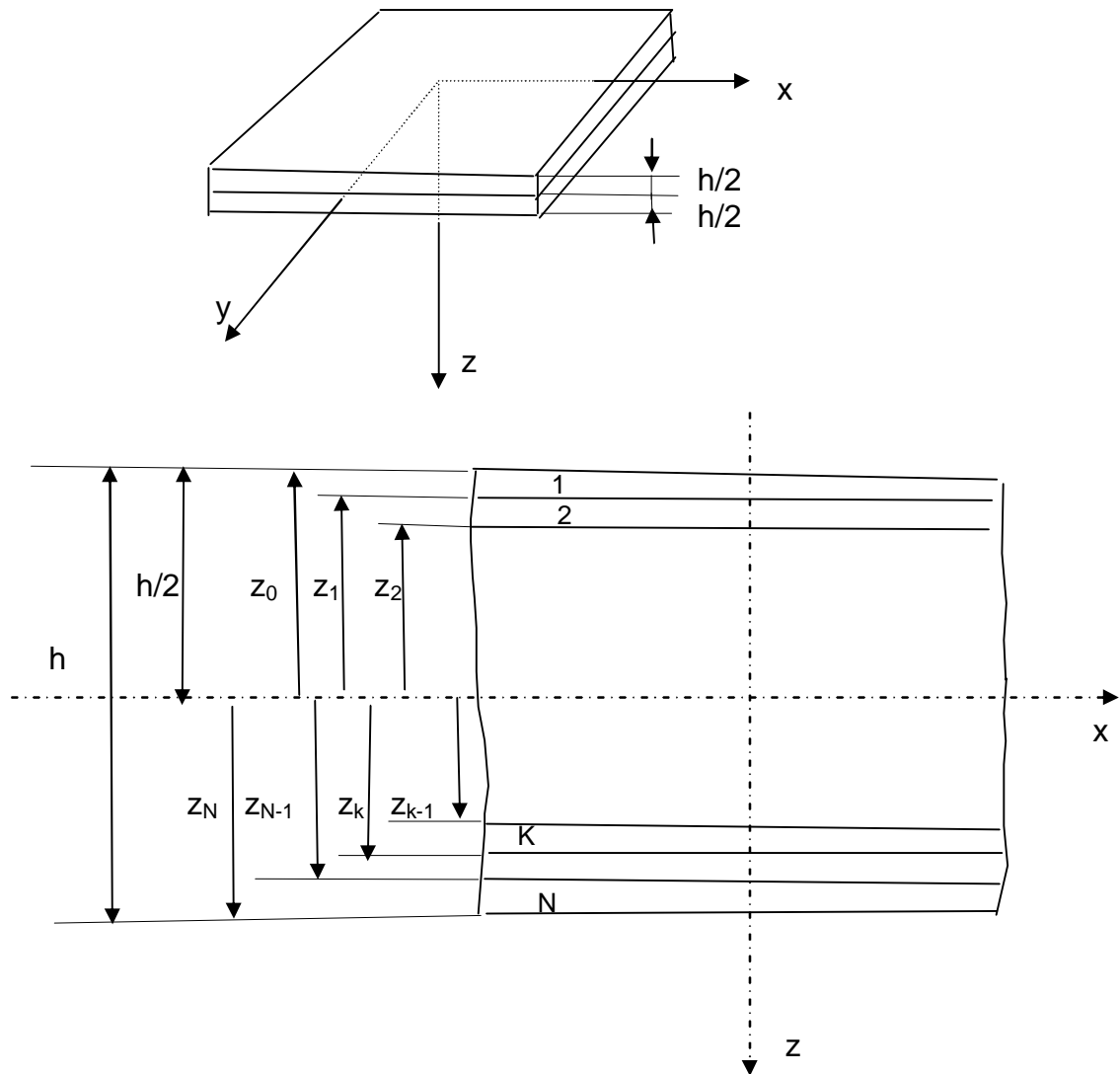


Figure 2.4 : Géométrie des N couches d'une plaque stratifiée

La substitution de l'équation (2.40) dans l' équation (2.41) nous donne :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} z_k \\ \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ z_{k-1} \end{matrix} \right\} dz + \left\{ \begin{matrix} z_k \\ K_x \\ K_y \\ K_{xy} \\ z_{k-1} \end{matrix} \right\} z dz \quad (2.42)$$

Le champ des moments de flexion et de torsion s'explique en intégrant les moments dus aux contraintes par unité de largeur de chaque couche du stratifié

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \zeta_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (2.43)$$

M_x : moment fléchissant d'axe y dû aux contraintes σ_x par unité de largeur suivant la direction y .

M_y : Moment fléchissant d'axe x , dû aux contraintes σ_y par unité de largeur suivant la direction x .

M_{xy} : Moment de torsion d'axe x , dû aux contraintes ζ_{xy} par unité de largeur suivant la direction y.

Substituant l'équation (2.40) dans l'équation (2.43) on trouve :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} z_k \\ \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ z_{k-1} \end{matrix} \right\} z dz + \left\{ \begin{matrix} z_k \\ K_x \\ K_y \\ K_{xy} \\ z_{k-1} \end{matrix} \right\} z^2 dz \quad (2.44)$$

En regroupant les équations (2.42) et (2.44) sous une seule écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Avec:

$$A_{ij} = \sum_{K=1}^N (Q_{ij})_k (Z_k - Z_{k-1}) \quad (2.46)a$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{K=1}^N (Q_{ij})_k (Z_k^2 - Z_{k-1}^2) \quad (2.46)b$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{K=1}^N (Q_{ij})_k (Z_k^3 - Z_{k-1}^3) \quad (2.46)c$$

II.3 COMPORTEMENT MECANIQUE DU BOIS :

II.3.1 Généralités sur le matériau bois :

Afin de décrire le comportement mécanique du matériau bois il est indispensable de définir la matière et de dégager certaines données de bases. L'arbre comprend des racines (patte) , une tige (tronc) , des branches et leur feuillage (houppier). La grume est le cylindre de matière obtenu après abattage et élimination par tronçonnage des racines et du houppier.

Le bois est le matériau d'ur et solide qui constitue l'essentiel du tronc des branches et des racines .du point de vue mécanique ,le matériau bois est un matériau composite naturel multicouches constitué d'enveloppes cylindriques coaxiales.

La grume ou le tronc est assimilé à un volume de matière admettant des symétries matérielles cylindriques .Il est supposé continu au sens du mécanicien afin de formuler l'hypothèse de continuité du milieu.Les propriétés mécaniques et physiques d'un tel matériau changent d'un point à un autre le comportement élastique du bois est alors fortement anisotrope, il est caractérisé aussi par une hétérogénéité macroscopique car on distinguera des modifications de propriétés entre la patte et le voisinage du houppier.

En s'appuyant sur la géométrie du tronc et des particularités de structures, telles que les enveloppes cylindriques, on définit le tronc idéal comme un volume de matière admettant une symétrie de révolution autour de l'axe de tronc, dans ce cas on considère tout plan radial (passant par l'axe) comme plan de symétrie matérielle. En négligeant la conicité induite par les enveloppes décroissance, on est amené à considérer que tout normal à l'axe du tronc est aussi plan de symétrie matérielle .Pour cette raison le tronc idéal est considéré d'une symétrie orthotrope cylindrique.

II.3.2 Comportement élastique du matériau bois idéal:

Le tronc idéal est assimilé à un volume de matière supposé continu au sens du mécanicien admettant des symétries matérielles cylindriques .On utilise les plan de symétrie matérielles définis comme l'indique la (Figure 2.5) par les trois directions :

Direction longitudinale des fibres L . \rightarrow
Direction radiale de croissance R . \rightarrow
Direction tangentielle aux accroissements annuels T . \rightarrow

Le tronc idéal sera considéré sous l'angle d'un milieu continue homogène et orthotrope cylindrique.

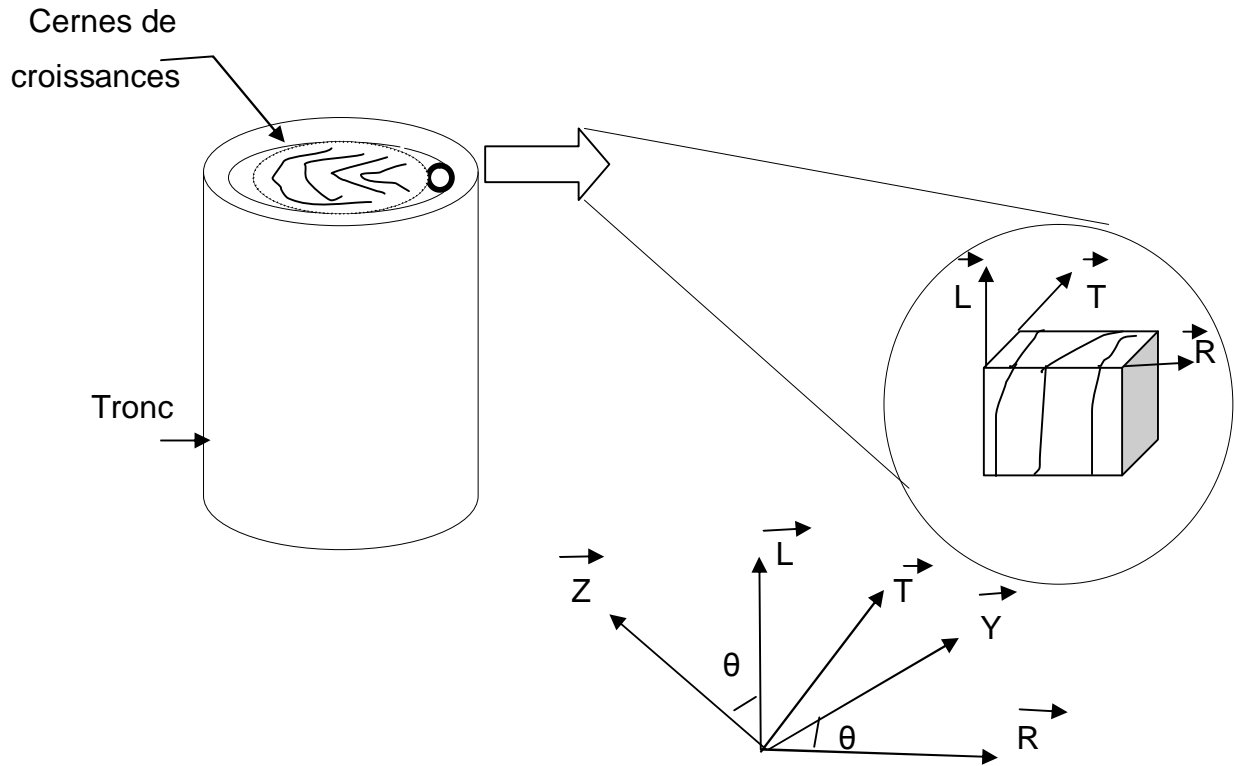


Figure 2.5 Modélisation de la grume "tronc" idéale

Le cas de l'orthotropie cylindrique permet de réduire à neuf le nombre des complaisances linéairement indépendantes.

La loi de comportement s'écrit alors sous forme matricielle comme :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \zeta_{23} \\ \zeta_{31} \\ \zeta_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

Avec la symétrie

$$S_{12} = S_{21} \quad S_{23} = S_{32} \quad S_{31} = S_{13} \quad (2.48)$$

Il est souvent utile d'exprimer les contraintes en fonction des déformations

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \zeta_{23} \\ \zeta_{31} \\ \zeta_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Avec la symétrie :

$$C_{12} = C_{21} \quad C_{23} = C_{32} \quad C_{31} = C_{13} \quad (2.50)$$

La loi de comportement exprimée en terme des complaisances élastiques est transposée directement en terme de grandeurs techniques dans le repère (\vec{R} , \vec{T} , \vec{L})

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{RR} \\ \epsilon_{TT} \\ \epsilon_{LL} \\ \gamma_{TL} \\ \gamma_{LR} \\ \gamma_{RT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_R & -\nu_{TR}/E_T & -\nu_{LR}/E_L & 0 & 0 & 0 \\ \nu_{RT}/E_R & 1/E_T & -\nu_{LT}/E_L & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{RL}/E_R & -\nu_{TL}/E_T & 1/E_L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{TL} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{LR} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{RT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{RR} \\ \sigma_{TT} \\ \sigma_{LL} \\ \zeta_{TL} \\ \zeta_{LR} \\ \zeta_{RT} \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

Les modules d'élasticités ou modules d' Young peuvent déduits par :

$$E_R = \frac{1}{S_{11}} \quad , \quad E_T = \frac{1}{S_{22}} \quad , \quad E_L = \frac{1}{S_{33}} \quad (2.52) \text{ a}$$

De même les coefficients de poisson :

$$\begin{aligned} \nu_{RT} &= -\frac{S_{21}}{S_{11}} & \nu_{TL} &= -\frac{S_{32}}{S_{22}} & \nu_{LR} &= -\frac{S_{13}}{S_{33}} \end{aligned} \quad (2.52) \text{ b}$$

$$\begin{aligned} \nu_{TR} &= -\frac{S_{12}}{S_{22}} & \nu_{LT} &= -\frac{S_{23}}{S_{33}} & \nu_{RL} &= -\frac{S_{31}}{S_{11}} \end{aligned}$$

Et les modules de cisaillement ou de rigidité

$$G_{RT} = -\frac{1}{S_{66}}, \quad G_{LR} = -\frac{1}{S_{55}}, \quad G_{TL} = -\frac{1}{S_{44}} \quad (2.52) \text{ c}$$

Lorsque la base choisie diffère de la base de la symétrie de la base de la symétrie matérielle ($\vec{R}, \vec{T}, \vec{L}$) et si on considère la base orthonormée ($\vec{R}, \vec{y}, \vec{z}$) déduite de ($\vec{R}, \vec{T}, \vec{L}$) par une rotation d'angle θ autour de l'axe \vec{R} .

Dans la base ($\vec{R}, \vec{T}, \vec{L}$)

$$\epsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (2.53) \text{ a}$$

Dans la nouvelle base (x, y, z) la loi de comportement s'écrit :

$$\epsilon_{ij}^* = \bar{S}_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (2.53) \text{ b}$$

\bar{S}_{ijkl} : le tenseur des complaisances élastiques dans la nouvelle base [24]

$$\bar{S}_{ijkl} = S_{pqrs} \cdot \alpha_{pi} \cdot \alpha_{qj} \cdot \alpha_{rk} \cdot \alpha_{sp} \quad (2.53) \text{ c}$$

α_{ij} : La matrice de changement de base qui est égale à :

$$\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (2.53) \text{ d}$$

La loi de comportement du bois dans la base (x, y, z) faisant un angle θ avec la base (R, T, L)

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{13} & \bar{S}_{14} & 0 & 0 \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{23} & \bar{S}_{24} & 0 & 0 \\ \bar{S}_{31} & \bar{S}_{32} & \bar{S}_{33} & \bar{S}_{34} & 0 & 0 \\ \bar{S}_{41} & \bar{S}_{42} & \bar{S}_{43} & \bar{S}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{S}_{55} & \bar{S}_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{S}_{65} & \bar{S}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \zeta_{yz} \\ \zeta_{zx} \\ \zeta_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

Dont :

$$\begin{aligned} \bar{S}_{11} &= S_{11} \\ \bar{S}_{22} &= S_{22} \cos^4 \theta + (S_{23} + S_{32} + S_{44}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + S_{33} \sin^4 \theta \\ \bar{S}_{33} &= S_{33} \cos^4 \theta + (S_{23} + S_{32} + S_{44}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + S_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{S}_{44} &= S_{44} (\cos^4 \theta - \sin^4 \theta)^2 + 4 (S_{22} + S_{33} - (S_{23} + S_{32})) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ \bar{S}_{55} &= S_{55} \cos^2 \theta + S_{66} \sin^2 \theta \\ \bar{S}_{66} &= S_{66} \cos^2 \theta + S_{55} \sin^2 \theta \\ \bar{S}_{12} &= \bar{S}_{21} = S_{21} \cos^2 \theta + S_{31} \sin^2 \theta \\ \bar{S}_{23} &= \bar{S}_{32} = S_{23} \cos^4 \theta + (S_{22} + S_{33} - S_{44}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + S_{32} \sin^4 \theta \\ \bar{S}_{31} &= \bar{S}_{13} = S_{13} \cos^4 \theta + S_{12} \sin^2 \theta \\ \bar{S}_{14} &= \bar{S}_{41} = -2 (S_{12} - S_{13}) \cos \theta \sin \theta \\ \bar{S}_{24} &= \bar{S}_{42} = - (2S_{22} - 2S_{23} - S_{44}) \cos^3 \theta \sin \theta - (2S_{32} - 2S_{33} + S_{44}) \cos \theta \sin^3 \theta \\ \bar{S}_{34} &= \bar{S}_{43} = - (2S_{32} - 2S_{33} + S_{44}) \cos^3 \theta \sin \theta - (2S_{22} - 2S_{23} - S_{44}) \cos \theta \sin^3 \theta \\ \bar{S}_{56} &= \bar{S}_{65} = (S_{55} - S_{66}) \cos \theta \sin \theta \end{aligned} \quad (2.55)$$

II.3.3 Elasticité des composites à base du bois contre plaqué

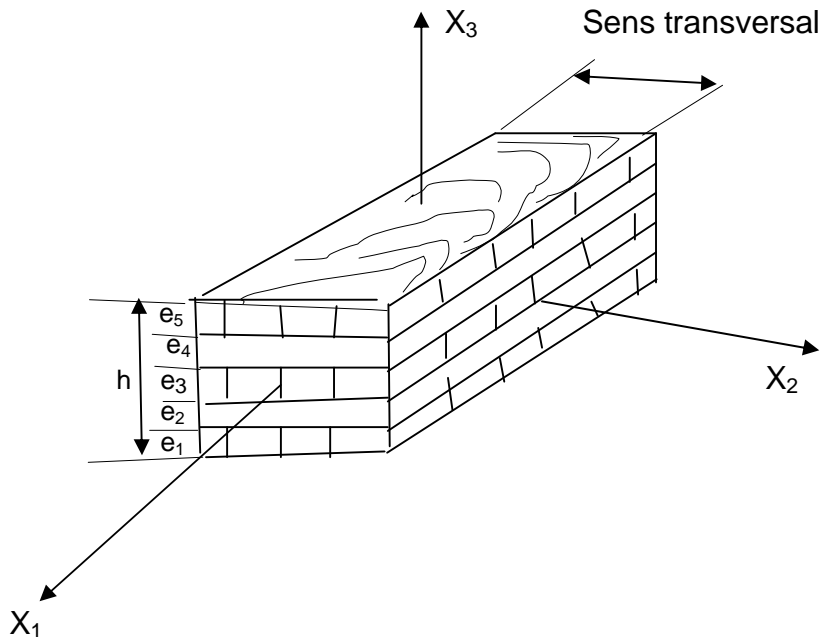


Figure 2.6 Schéma d'un contre – plaqué de cinq couches

Un contre plaqué est une plaque stratifiée composée comme l'illustre la (Figure 2.6), de plusieurs couches (ou plis) obtenues le plus souvent par déroulage de la grume .Les différent plis sont assemblés par collage sous pression mais en assurant une orientation relativement bien choisie de chacun des plis.

Le contre plaqué est donc un multicouches caractérisé par le nombre n de plis, chaque pli de rang k est supposé orthotrope élastique. Généralement on admettant les $1^{(k)}, 2^{(k)}, 3^{(k)}$ comme des axes principaux de symétrie matérielle.

Le contre plaqué composé d'un bois résineux de masse $\rho^{(k)}$ est connu d'un taux d'humidité voisin de 12% [31] .

Soient :

$e^{(k)}$ l'épaisseur du pli

$1^{(k)}, 2^{(k)}, 3^{(k)}$ forme de la base d'orthotropie de la monocouche comme il est illustré dans la (Figure 2.7)

(x,y,z) base liée au stratifié

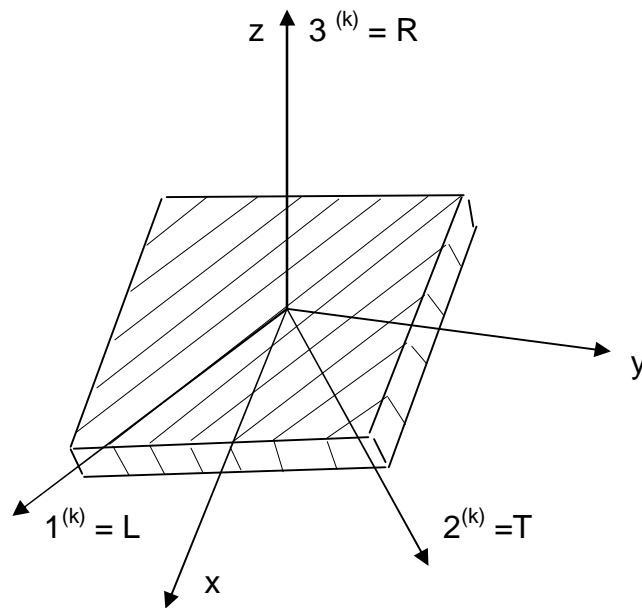


Figure 2.7 : pli d'un stratifié à base du bois

Le comportement élastique du pli de rang (k) dans son référentiel $1^{(k)}, 2^{(k)}, 3^{(k)}$ est identique à celui du bois massif dans la base $(\vec{R}, \vec{T}, \vec{L})$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & \nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \zeta_{23} \\ \zeta_{31} \\ \zeta_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.56)$$

Dans le repère 1-2 le tenseur des déformations se réduit à :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} \quad (2.57)$$

Enfin les caractéristiques élastiques du pli de rang (k) exprimées dans le référentiel de plaque dans les hypothèses de contraintes planes seront notées comme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \zeta_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.58)$$

Dont les valeurs de la matrice [\overline{Q}_{ij}] sont identiques aux valeurs de celle définie par l'équation (2.26) dans le cas d'un matériau composite .Pour cette raison la loi de comportement mécanique global d'une contre plaquée sera enfin donnée par :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.59)$$

Dont les rigidités de membranes A_{ij} et les termes de couplages B_{ij} et les rigidités de flexion – torsion sont exprimés respectivement par les équations (2.46)a, (2.46)b(2.46) c.

II.4 LOI DE COMPORTEMENT DES MATERIAUX METALLIQUES :

Les matériaux métalliques sont des métaux ou des alliages de métaux qui sont à la fois homogènes et isotropes.

Un matériau est isotrope si ses propriétés sont indépendantes du choix des axes de références. Il n'existe alors pas de direction privilégiée. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes, est donc réduit à deux

$$\left(\begin{array}{cccccc} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2(C_{11}-C_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2(C_{11}-C_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2(C_{11}-C_{12}) \end{array} \right) \quad (2.60)$$

Avec :

$$C_{12} = \lambda \quad \frac{C_{11} - C_{12}}{2} = \mu \quad (2.61)$$

D'ou

$$C_{11} = \lambda + 2\mu$$

λ , μ : sont les coefficients de lamé

La matrice d'élasticité pour un milieu isotrope prend la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{array} \right\} = \left(\begin{array}{cccccc} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{array} \right\} \quad (2.62)$$

a) Déformation :

La relation (2.1) peut donc s'écrire en respectant l'expression suivante

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.63)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si } i = j \\ 0 & \text{Si } i \neq j \end{cases} \quad (2.64)$$

Posant $\text{tr } \varepsilon = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ (2.65)

Donc :

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \text{tr } \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.66)$$

Dont les contraintes normales sont :

$$\sigma_{ii} = \lambda \text{tr } \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{ii} \quad (2.67)$$

D'après la relation (2.66) on a :

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \lambda (\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33}) \text{tr } \varepsilon + 2\mu (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \quad (2.68)$$

$$\text{tr } \sigma = 3 \lambda \text{tr } \varepsilon + 2\mu \text{tr } \varepsilon$$

$$\text{tr } \sigma = (3\lambda + 2\mu) \text{tr } \varepsilon \quad (2.69)$$

A partir des relations (2.67) et (2.69) , les déformations normales s'écrivent :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \text{tr } \sigma + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} \quad (2.70)$$

et les déformations tangentielles

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} \quad (2.71)$$

Les relations (2.70) et (2.71) peuvent être résumées suivant l'expression :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \delta_{ij} \text{tr } \sigma + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} \quad (2.72)$$

b) Modules d'élasticités :

Lorsqu'un solide est soumis à un chargement donné, il existe en son sein un champ des contraintes, et un champ des déformations, ces deux champs sont reliés par une relation mathématique linéaire. La loi de comportement du matériau dépend de ces caractéristiques physiques.

En un point M un milieu continu (Figure 2.8) l'état des contraintes est déterminé par le tenseur de contraintes $\sigma(M)$

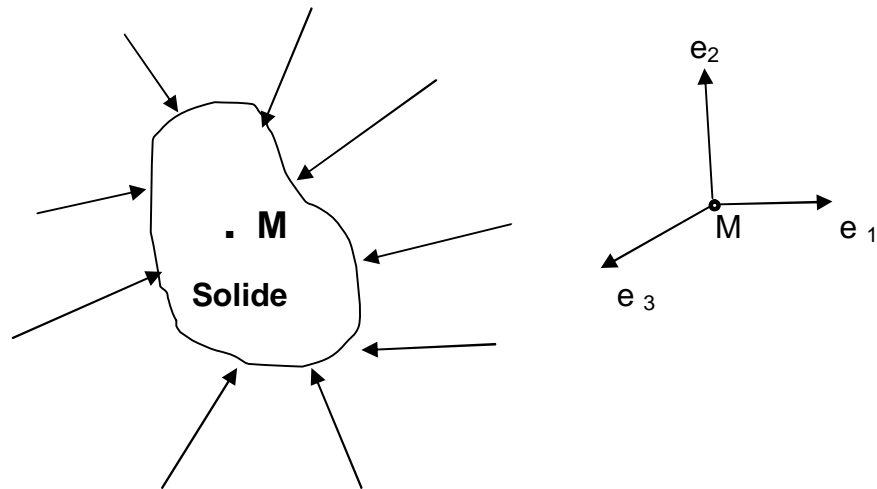


Figure 2.8 : Solide soumis à un chargement mécanique

$$\sigma(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

$$\text{Avec } \sigma_{21} = \sigma_{12} \qquad \sigma_{31} = \sigma_{13} \qquad \sigma_{32} = \sigma_{23} \quad (2.74)$$

Les relations d'élasticités sont généralement exprimées sont généralement en fonction des modules d'élasticités déterminés par les essais mécaniques.

Dans ce cas le matériau est soumis à un état particulier de contraintes et de déformations lors d'un essai de traction ou de compression simple dans une direction

$$\sigma^{(2)} = \sigma^{(3)} = 0 \quad (2.75)$$

La déformation normale suivant la direction 1 devient :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \sigma_1 + \frac{1}{2\mu} \sigma_1$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_1$$

Soit $\sigma_1 = E \varepsilon_1$ (2.76)

D'ou : $E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$ (2.77)

E : est le module de Young

Les déformations normales transversales sont données d'après (2.72) ,(2.77) par :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \sigma_1 = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} E \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{-\lambda}{2(\lambda + \mu)} \varepsilon_1 = -\nu \varepsilon_1$$
 (2.78)

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$
 (2.79)

ν : est le coefficient de poisson

D'après l'équation (2.62), on peut récrire la matrice de rigidité en fonction des déformations normales et des distorsions angulaires.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \zeta_{23} \\ \zeta_{31} \\ \zeta_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.80)$$

Sa matrice inverse nous donne :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \zeta_{23} \\ \zeta_{31} \\ \zeta_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.81)$$

$$\text{Avec } \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.82)$$

G : est le module de cisaillement

CHAPITRE III :

LOI DE COMPORTEMENT EN FLEXION ET EN COMPRESSION DE PLAQUES SANDWICHES MINCES

III.1 INTRODUCTION :

L'étude de structures sandwiches (poutre ,plaque), sollicitées par des forces concentrées ou réparties , est essentiellement basée sur la prise en considération du mode de déformation , des relations d'équilibre et celles entre les contraintes et les déformations .

Dans des nombreux problèmes pratiques, les modes d'analyse généralement utilisés ne conviennent pas car la situation physique étudiée ne correspond pas aux hypothèses introduites. Afin de résoudre le genre de ces problèmes, il est nécessaire de faire recours à un mode d'analyse plus poussé et plus sophistiqué. Elle consiste alors à déterminer les composantes des contraintes et de déplacements satisfaisant respectivement les équations différentielles de l'équilibre, et les conditions aux limites.

III.2 FORMULATION DES EQUATIONS D'EQUILIBRE:

III.2.1 Relations fondamentales de la dynamique :

Si l'on pose que les efforts de volume exercés sur un solide (champ de gravité, champ magnétique) sont (f_1, f_2, f_3) , et si le repère choisi est galilien, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit localement de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x &= \rho a_x \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + f_y &= \rho a_y \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + f_z &= \rho a_z \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dont :

ρ : est la masse volumique

a_x, a_y, a_z : sont les composantes du vecteur accélération au point M

Dans la théorie des plaques le champ des déplacements est exprimé en fonction du temps par :

$$\begin{aligned}u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z \phi_x(x, y, t) \\v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z \phi_y(x, y, t) \\w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)\end{aligned}\tag{3.2}$$

On peut aussi montrer que le vecteur d'accélération peut être égale à :

$$\begin{aligned}a_x &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \\a_y &= \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \\a_z &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}\end{aligned}\tag{3.3}$$

III.2.2 :Relation fondamentale de la dynamique appliquée à un élément de plaque :

Considérons une plaque soumise aux moments de flexion M_x et M_y et au moment de torsion M_{xy} (Figure 3.1 a) ,et aux efforts de cisaillement Q_x, Q_y (Figure 3.1.b)

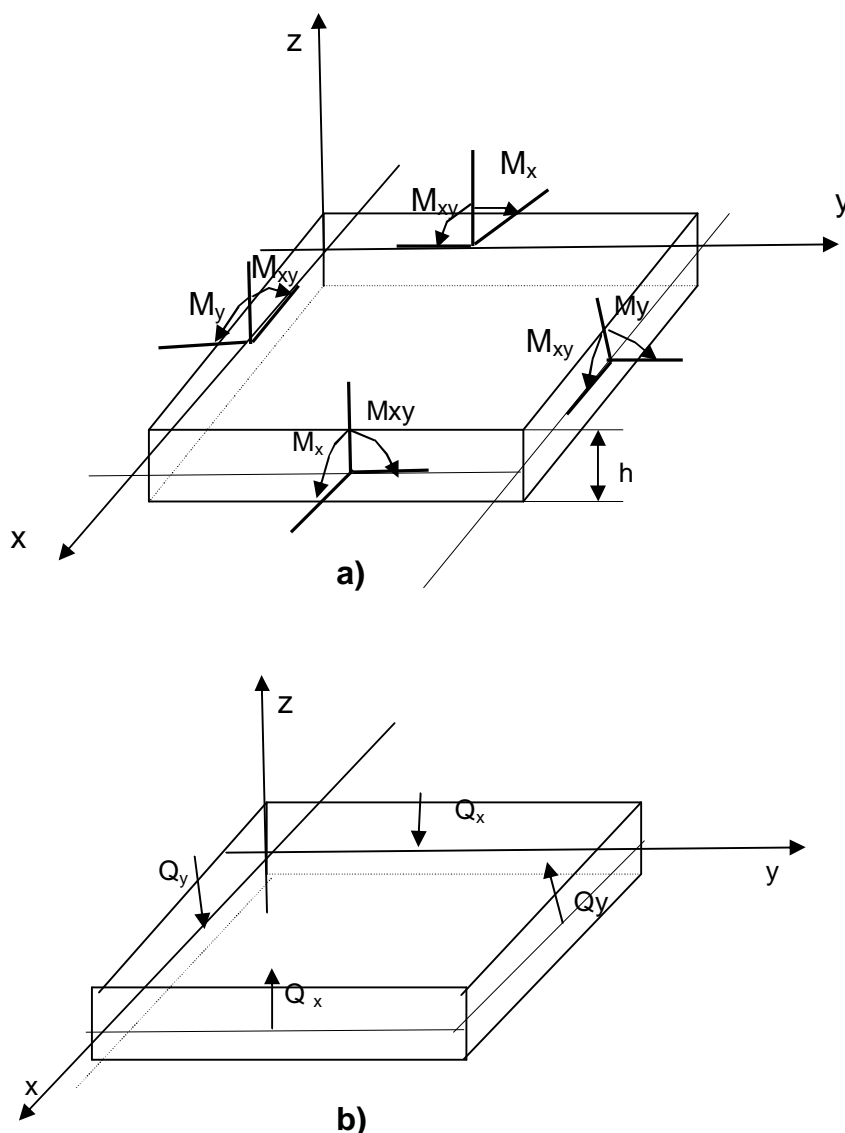


Figure 3.1 : Plaque soumise : **(a)** aux moments de flexion et de torsion
(b) à la résultante des efforts

Les équations de la relation fondamentale de la dynamique sont obtenues à partir des équations (3.1) par intégration selon z des expressions qui sont des résultantes. ou en multipliant par z puis en intégrant les expressions qui sont en fonction des moments ,d'ou les résultats réduits suivants :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \zeta_{1x} - \zeta_{2x} &= \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \zeta_{1y} - \zeta_{2y} &= \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + F_z + q &= \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2} (\zeta_{1x} + \zeta_{2x}) + P_x - Q_x = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2} (\zeta_{1y} + \zeta_{2y}) + P_y - Q_y = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}$$

Dont les termes :

$$\zeta_{1x} = \sigma_{xz} (h/2)$$

$$\zeta_{2x} = \sigma_{xz} (-h/2)$$

$$\zeta_{1y} = \sigma_{yz} (h/2)$$

$$\zeta_{2y} = \sigma_{yz} (-h/2)$$

$$F_x = \int_{-h/2}^{h/2} f_x dz$$

$$F_y = \int_{-h/2}^{h/2} f_y dz$$

$$F_z = \int_{-h/2}^{h/2} f_z dz$$

$$P_x = \int_{-h/2}^{h/2} z f_x dz$$

$$P_y = \int_{-h/2}^{h/2} z f_y dz$$

$$q(x,y) = q = \sigma_{zz}(h/2) - \sigma_{zz}(-h/2)$$

$$\rho_s, R, I_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho dz \quad (3.5)$$

La relation (3.4) est générale, elle peut être le plus souvent simplifiée [28] .en considérant les efforts d'inerties négligeables ,en annulant les forces volumiques ,en supposons qu'il n' ya pas de cisaillement sur les faces et que le problème est statique .Il vient alors les expressions:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0$$

III 3 COMPORTEMENT MECANIQUE DES ELEMENTS CONSTITUTIFS D'UNE PLAQUE SANDWICHE

III.3.1 Introduction à la théorie des plaques sandwiches minces :

Le matériau sandwich est constitué de deux peaux dont h_1 l'épaisseur de la peau inférieure et h_2 l'épaisseur de la peau supérieure et d'une âme d'épaisseur h . le plan (x,y) est comme il est montré par la (Figure 3-2) , le plan moyen de la plaque .

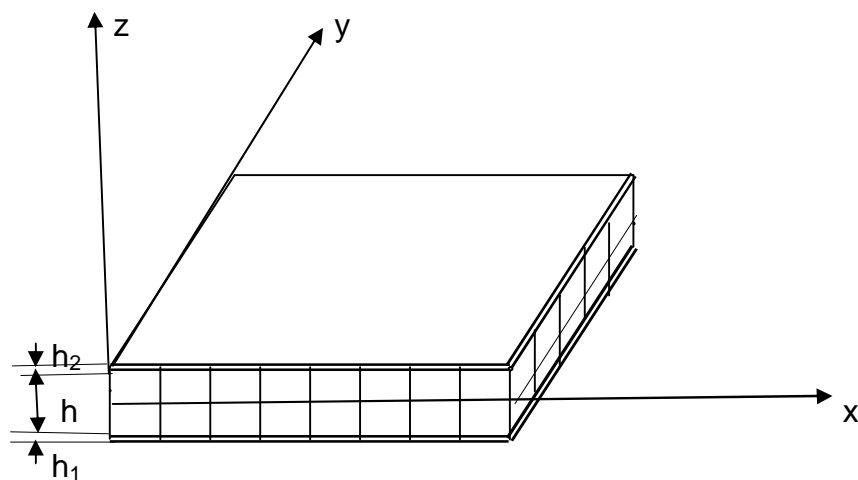


Figure 3.2 Schématisation d'une plaque sandwich

Les hypothèses fondamentales utilisées dans le cadre d'élasticité en faibles déformations pour l'étude du comportement mécanique des éléments constitutifs d'un matériau sandwich sont [29] :

- l'épaisseur de l'âme h est plus élevée que celle des deux peaux inférieure et supérieure ($h > h_1, h_2$) .
- les déplacements de l'âme suivant x et y ne dépendent que de z .
- les déplacements dans les peaux suivant x et y sont uniformes.
- les contraintes σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} et σ_{zz} agissant dans l'âme sont négligées, de ce fait, l'âme ne transmet que les contraintes de cisaillement transverse σ_{xz} et σ_{yz} .
- les contraintes de cisaillement transverse σ_{xz} et σ_{yz} sont négligées dans les peaux.

III.3.2 : Champs des déplacements et des contraintes dans l'âme :

Lors de l'établissement de la loi de comportement mécanique d'une plaque mince, on a montré qu'elle peut être régie par les relations (2.33) .En procédant au même raisonnement ,on peut exprimer le champ des déplacements dans l'âme par

$$\begin{aligned}
 u_a(x, y, z) &= u_0(x, y) + z \varphi_x(x, y) \\
 v_a(x, y, z) &= v_0(x, y) + z \varphi_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{3.7} a$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y) &= u_a(x, y, 0) \\
 v_0(x, y) &= v_a(x, y, 0)
 \end{aligned}
 \tag{3.7} b$$

En tenant compte de l'équation (3.7)a, le champ des déformations dans l'âme est de la forme :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx}^a &= \frac{\partial u_a}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\
 \varepsilon_{yy}^a &= \frac{\partial v_a}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\
 \varepsilon_{zz}^a &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
 \gamma_{xy}^a &= \frac{\partial u_a}{\partial y} + \frac{\partial v_a}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \\
 \gamma_{yz}^a &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_y \\
 \gamma_{xz}^a &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u_a}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_x
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

Dans ce cas le champ des déformations en membrane – flexion peut être exprimé par la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^a \\ \varepsilon_{yy}^a \\ \gamma_{xy}^a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix}
 \tag{3.9}$$

Aussi le champ des déformations en cisaillement transverse peut être exprimé par :

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^a \\ \gamma_{xz}^a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

La fonction essentielle de l'âme d'un sandwich est de transmettre , par cisaillements les actions d'une peau à l' autre .L'âme ne transmet donc que les contraintes en cisaillement qui sont déduite de l'expression matricielle (2.8) d'ou

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz}^a \\ \sigma_{xz}^a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{44}{}^a & C'_{45}{}^a \\ C'_{45}{}^a & C'_{55}{}^a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^a \\ \gamma_{xz}^a \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

les coefficients $C'_{ij}{}^a$ s'expriment dans ce cas en fonction des coefficients $C_{ij}{}^a$ rapportés aux axes principaux qui font un angle θ avec les axes de référence de la plaque sandwich ; c'est à dire

$$\begin{aligned} C'_{44}{}^a &= C_{44}{}^a \cos^2\theta + C_{55}{}^a \sin^2\theta \\ C'_{45}{}^a &= (C_{55}{}^a - C_{44}{}^a) \sin\theta \cos\theta \\ C'_{55}{}^a &= C_{44}{}^a \sin^2\theta + C_{55}{}^a \cos^2\theta \end{aligned} \quad (3.12)$$

Avec :

$$\begin{aligned} C_{44}{}^a &= G_{23}{}^a \\ C_{55}{}^a &= G_{13}{}^a \end{aligned} \quad (3.12) \text{ b}$$

Dans cette contribution, on ne considère que les peaux à matériaux orthotropes (Composite, bois) le matériau de l'âme choisi peut être en nida aluminium, nida plast, en mousse herex ou en bois .

III.3.3 Champs des déplacements et des contraintes dans les peaux :

a) Peau inférieure : La continuité des déplacements aux interfaces âme – peaux permet d'écrire le champ des déplacements dans la peau inférieure par la relation suivante :

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u_0(x, y) - \frac{h}{2} \varphi_x(x, y) \\ v_1(x, y, z) &= v_0(x, y) - \frac{h}{2} \varphi_y(x, y) \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

Le champ des déformations est de la forme :

$$\varepsilon_{xx}^1 = \frac{\partial u_1}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy}^1 = \frac{\partial v_1}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{zz}^1 = 0$$

$$\gamma_{xy}^1 = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \quad (3.14) a$$

$$\gamma_{yz}^1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial z}$$

$$\gamma_{xz}^1 = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z}$$

C'est à dire :

$$\varepsilon_{xx}^1 = \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{h}{2} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy}^1 = \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{h}{2} \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{zz}^1 = 0$$

$$\gamma_{xy}^1 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) \quad (3.14) \text{ b)}$$

$$\gamma_{yz}^1 = \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

$$\gamma_{xz}^1 = \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

En négligeant les déformations en cisaillement transverse γ_{xz}^1 et γ_{yz}^1 , on peut récrire le champ des déformations sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} - \frac{h}{2} \begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

On considérant le cas général d'une peau orthotrope, les contraintes agissant dans la $k^{\text{ème}}$ couche de la peau inférieure sont donc reliées aux déformations par :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx}^1 \\ \sigma_{yy}^1 \\ \sigma_{xy}^1 \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

En substituant l'équation (3.15) dans (3.16), on trouve les contraintes dans la couche k de la peau inférieure en fonction des déformations planes et des courbures :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx}^1 \\ \sigma_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix}_k - \frac{h}{2} \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{pmatrix}_k \quad (3.17)$$

Les rigidités réduites transformées \bar{Q}_{ij} sont définies dans l'équation (2.27)

b Peau supérieure :

Dans ce cas et en utilisant la même procédure suivie précédemment pour la peau inférieure les déplacements dans la peau supérieure s'expriment par :

$$\begin{aligned} u_2(x, y, z) &= u_0(x, y) + \frac{h}{2} \varphi_x(x, y) \\ v_2(x, y, z) &= v_0(x, y) + \frac{h}{2} \varphi_y(x, y) \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

Les champs des déformations s'écrivent comme:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^2 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy}^2 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{h}{2} \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz}^2 &= 0 \\ \gamma_{xy}^2 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \\ \gamma_{yz}^2 &= \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \gamma_{xz}^2 &= \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ainsi que les contraintes agissant dans la couche d'ordre d'empilement k dans la peau supérieure :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx}^2 \\ \sigma_{yy}^2 \\ \gamma_{xy}^2 \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

III.4 COMPORTEMENT MECANIQUE D'UNE PLAQUE SANDWICHE :

Afin d'établir les équations du comportement mécanique d'une plaque sandwich, on doit prendre en compte les hypothèses fondamentales décrites précédemment et utilisées dans le cadre d'élasticité en faibles déformations.

III.4.1 Comportement en membrane :

Un sandwich travaillant en membrane, est soumis à des sollicitations dans son plan notées N_x, N_y et N_{xy} par unité de largeur suivant la direction x et y (Figure 3.3).

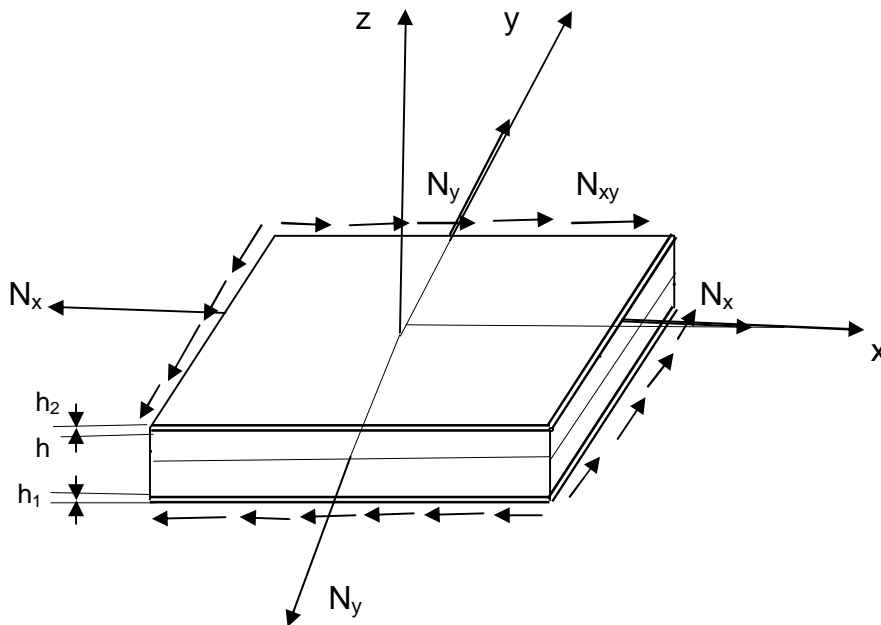


Figure 3.3 plaque sandwich soumise à des efforts en membrane

Les résultantes en membrane sont obtenues par intégration des contraintes selon les épaisseurs de deux peaux h_1 et h_2 et de l'âme h

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-(h/2+h_1)}^{-h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} dz + \int_{h/2}^{h/2+h_2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} dz \quad (3.21)$$

Du à la continuité des contraintes dans les peaux d'une couche à l'autre, on peut écrire

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n_1} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} dz + \sum_{k=1}^{n_2} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} dz \quad (3.22)$$

Avec :

n_1 : le nombre des couches dans la peau inférieure

n_2 : le nombre des couches dans la peau supérieure

III.4.2 Comportement en flexion torsion :

Une plaque sandwich travaillant en flexion est soumise comme il est indiqué sur la (Figure 3.4) à des moments par unité de largeur suivant la direction y ou x .

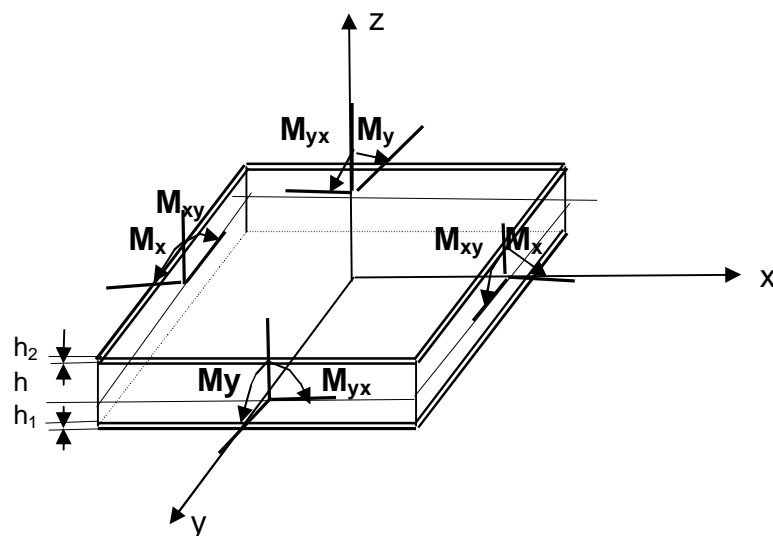


Figure 3.4 : plaque sandwich soumise à des moments en flexion – torsion

Les équations constitutives des plaques sandwiches faisant intervenir les moments en flexion – torsion sont :

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{-h/2+h_1} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} z \, dz + \int_{h/2}^{h/2+h_2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} z \, dz \quad (3.23)$$

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n_1} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} z \, dz + \sum_{k=1}^{n_2} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} z \, dz \quad (3.24)$$

III.4.3 Comportement en cisaillement :

Une plaque sandwich travaillant en cisaillement est soumise à des efforts de cisaillement suivant la direction x et y (Figure 3.5)

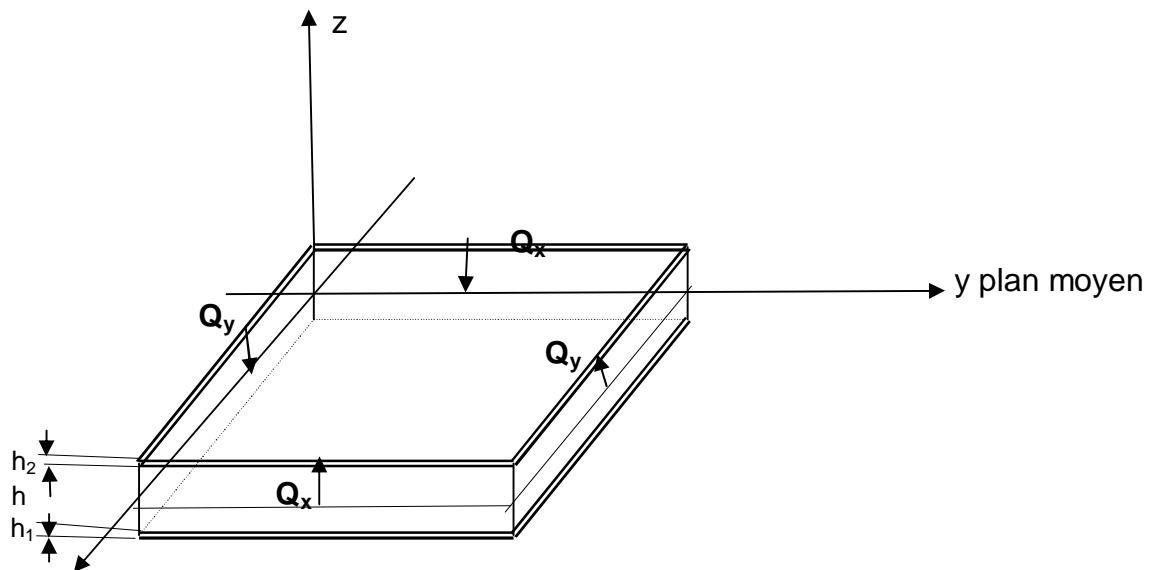


Figure 3.5 plaque sandwich soumise à des efforts de cisaillement

Les résultantes en cisaillement sont obtenu par intégration des contraintes de cisaillement dans l'âme c'est à dire :

$$\begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} dz \quad (3.25)$$

III.4.4 Loi du comportement global d'une plaque sandwich :

Pour décrire la loi du comportement global d'une plaque sandwich, on substitue les équations (3.11) et (3.16), (3.22) dans les relations (3.21) (3.23) et (3.25) nous obtenons l'équation constitutive

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{12} & C_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ K_x \\ K_y \\ K_{xy} \\ \gamma_{yz}^a \\ \gamma_{xz}^a \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Les coefficients de rigidité A_{ij} , B_{ij} et D_{ij} seront déduits par

$$\begin{aligned} A_{ij} &= A_{ij}^{(1)} + A_{ij}^{(2)} \\ B_{ij} &= h/2 (A_{ij}^{(2)} - A_{ij}^{(1)}) \\ C_{ij} &= C_{ij}^{(1)} + C_{ij}^{(2)} \\ D_{ij} &= h/2 (C_{ij}^{(2)} - C_{ij}^{(1)}) \\ F_{ij} &= h C_{ij}^{(a)} \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned}
 A_{ij}^1 &= \sum_{k=1}^{n_1} (\bar{Q}_{ij})_k e_k = \int_{-(h/2+h_1)}^{-h/2} (\bar{Q}_{ij})_k dz \\
 C_{ij}^1 &= \sum_{k=1}^{n_1} (\bar{Q}_{ij})_k e_k Z_k = \int_{-(h/2+h_1)}^{-h/2} z (\bar{Q}_{ij})_k dz \\
 A_{ij}^2 &= \sum_{k=1}^{n_2} (\bar{Q}_{ij})_k e_k = \int_{h/2}^{h/2+h_2} (\bar{Q}_{ij})_k dz \\
 C_{ij}^2 &= \sum_{k=1}^{n_2} (\bar{Q}_{ij})_k e_k Z_k = \int_{h/2}^{h/2+h_2} z (\bar{Q}_{ij})_k dz
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Dans le cas d'une plaque sandwich symétrique, les peaux supérieure et inférieure sont dits identiques si sont de même nature et de même empilement de couches .

$$\begin{aligned}
 A_{ij}^{(1)} &= A_{ij}^{(2)} \\
 C_{ij}^{(1)} &= - C_{ij}^{(2)}
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Les équations (3.27) et (3.28) se réduisent dans ce cas à :

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= 2 A_{ij}^{(2)} \\
 B_{ij} &= 0 \\
 C_{ij} &= 0 \\
 D_{ij} &= h C_{ij}^{(2)}
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

III.4.5 Relations fondamentales d'une plaque sandwich :

Les relations fondamentales d'une plaque sandwich sont obtenues en introduisant la loi de comportement global du matériau (3.26) dans les équations générales de la relation (3.4) soit :

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12}+A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
 & + B_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + (B_{12}+B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} \\
 & = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{16} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
 & + B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + (B_{12}+B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} \\
 & = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
 & F_{55} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + F_{45} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + F_{44} \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + q \\
 & = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
 & C_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + C_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (C_{12}+C_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
 & + D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + (D_{12}+D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} \\
 & - F_{55} \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - F_{45} \left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
 & C_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + C_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2 C_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
 & + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + 2 D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} \\
 & - F_{45} \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - F_{44} \left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

III.5 FLEXION CYLINDRIQUE DES PLAQUES SANDWICHES:

Pour étudier le comportement mécanique à la flexion cylindrique des plaques sandwiches, nous considérons le cas de la plaque de la (Figure 3.6) constituée de :

- deux peaux identiques et régulier dont les axes d'orthotropie sont parallèles aux axes x et y de la plaque ou sont symétrique équilibrées d'ou les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 B_{ij} &= C_{ij} = 0 \\
 A_{16} &= A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

D'une âme dont les axes x et y sont parallèles aux axes principaux 1-2

D'ou :

$$\begin{aligned}
 F_{45} &= 0 & F_{44} &= hG_{23}^a & F_{55} &= hG_{13}^a
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

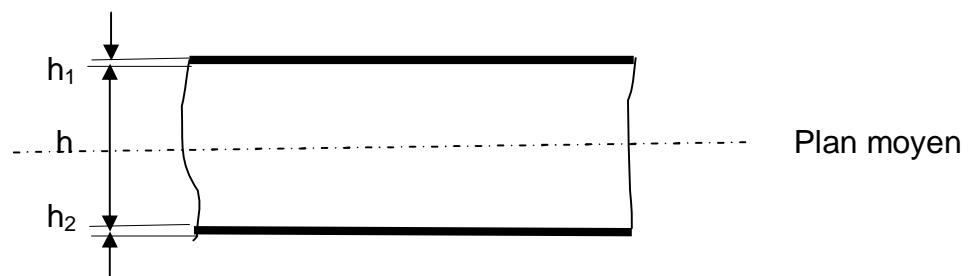


Figure. 3.6 : Schématisation d'une plaque sandwich symétrique

De plus nous considérons le cas d'une plaque sandwich en appuis simples le long des deux cotés pour $x = 0$ et $x = a$ et que la charge est uniforme répartie

$$q(x) = q_0 \quad (3.38)$$

III.5.1 Détermination de la flèche w_x et de sa pente φ_x :

Le champ de déformation d'une plaque sandwich dans le cas d'une flexion cylindrique est de la forme :

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ v_0 &= 0 \\ w_0 &= w(x, t) \\ \varphi_x &= \varphi_x(x, t) \\ \varphi_y &= 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

En tenant compte des équations (3.36) et (3.37) et (3.39), les relations fondamentales des plaques sandwiches (3.33) et (3.34) travaillant à la flexion cylindrique deviennent :

$$D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} - h G_{13}^a \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (3.40)$$

$$h G_{13}^a \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (3.41)$$

Dans le cas d'une flexion cylindrique statique les équations (3.40) et (3.41), peuvent s'écrire sous la forme suivante

$$D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} - h G_{13}^a \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.42)$$

$$h G_{13}^a \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + q = 0 \quad (3.43)$$

D'après les conditions décrites dans l'équation (3.38)

$$w_0 = 0$$

$$M_x = 0$$

$$\frac{d\varphi_x}{dx} = 0 \quad (3.44)$$

En intégrant l'équation (3.43) , on trouve :

$$h G_{13}^a \left(\varphi_x + \frac{dw_0}{\partial x} \right) = -q_0 x + c \quad (3.45)$$

La substitution de l'équation (3.45) dans (3.42) nous permet d'avoir:

$$D_{11} \frac{d^2\varphi_x}{dx^2} + q_0 x - c = 0 \quad (3.46)$$

En intégrant l'équation (3.46) et en tenant compte des conditions aux limites nous aurons:

$$\frac{d\varphi_x}{dx} = \frac{q_0}{2 D_{11}} x (x - a) \quad (3.47)$$

La substitution de l'équation (3.47) dans l'équation (3.43) nous permet d'écrire :

$$\frac{d^2w_0}{dx^2} = q_0 \left[\frac{1}{2D_{11}} x(x-a) - \frac{1}{h G_{13}^a} \right] \quad (3.48)$$

Sachant que w_0 est nul pour $x = 0$ et $x = a$ et en intégrant deux fois l'équation différentielle (3.48) on trouve :

$$w_x = \frac{q_0}{24 D_{11}} x \left[x^3 - 2 a x^2 + a^3 + \frac{12 D_{11}}{h G_{13}^a} (a - x) \right] \quad (3.49)$$

De même l'intégration de l'équation (3.47) nous conduit à φ_x , qui est égale à :

$$\varphi_x = \frac{q_0}{24 D_{11}} (4 x^3 - 6ax^2 + a^3) \quad (3.50)$$

III.5.2 Détermination des contraintes dans les peaux :

D'après les conditions prises dans l'équation (3.36) et en tenant compte des équations (3.16) et (3.20) a , on peut définir les contraintes dans la couche k de la peau supérieure ou inférieure par la relation :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx}^i \\ \sigma_{yy}^i \\ \sigma_{xy}^i \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & 0 \\ Q_{12}^k & Q_{22}^k & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^k \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^i \\ \varepsilon_{yy}^i \\ \gamma_{xy}^i \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

i = 1 pour la peau inférieure

i = 2 pour la peau supérieure

Ou bien

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx}^k \\ \sigma_{yy}^k \\ \sigma_{xy}^k \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & 0 \\ Q_{12}^k & Q_{22}^k & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^k \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} \pm \frac{h}{2} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

D'une façon plus explicite, les contraintes dans la couche k de la peau supérieure prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^k &= Q_{11}^k \frac{h}{2} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \sigma_{yy}^k &= Q_{12}^k \frac{h}{2} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \sigma_{xy}^k &= 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

De même les contraintes dans la couche k de la peau inférieure sont égales à:

$$\sigma_{xx}^k = -Q_{11}^k \frac{h}{2} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}$$

$$\sigma_{yy}^k = -Q_{12}^k \frac{h}{2} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \quad (3.54)$$

$$\sigma_{xy}^k = 0$$

D'après les relations fondamentales des plaques (3.1) , on peut écrire :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}^k}{\partial z} = 0 \quad (3.55)$$

D'ou:

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^k}{\partial z} = - \frac{\partial \sigma_{xx}^k}{\partial x} \quad (3.56)$$

En tenant compte de la valeur des contraintes σ_{xx}^k dans les équations (3.53) et (3.54) on peut écrire :

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^k}{\partial z} = \pm Q_{11}^k \frac{h}{2} \frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} \quad (3.57)$$

Dérivant deux fois l'équation (3.50) , on trouve :

$$\frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} = \frac{q_0}{2D_{11}} (2x-a) \quad (3.58)$$

En substituant l'équation (3.58) dans l'équation (3.57) on peut écrire :

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^k}{\partial z} = \pm Q_{11}^k \frac{h}{2} \frac{q_0}{2D_{11}} (2x-a) \quad (3.59)$$

Après intégration de l'équation (3.59) , la contrainte de cisaillement transverse sera définie par :

$$\sigma_{xz}^k = \pm Q_{11}^k \frac{h q_0}{4 D_{11}} (2x-a)(z+b_k) \quad (3.60)$$

b_k : est une constante obtenue pour chaque couche k

En assurant la continuité de la contrainte σ_{xz}^k dans chaque couche et en annulant la contrainte transverse σ_{xz} sur les deux faces supérieure et inférieure, on atteint la valeur des constantes b_k dans chaque couche.

III 6 COMPORTEMENT MECANIQUE D'UNE PLAQUE SANDWICHE CHARGÉE EN COMPRESSION

Considérons une plaque en matériau sandwich placée en appuis simples est soumise à des efforts de compression latérale N_0 (Figure 3.7)

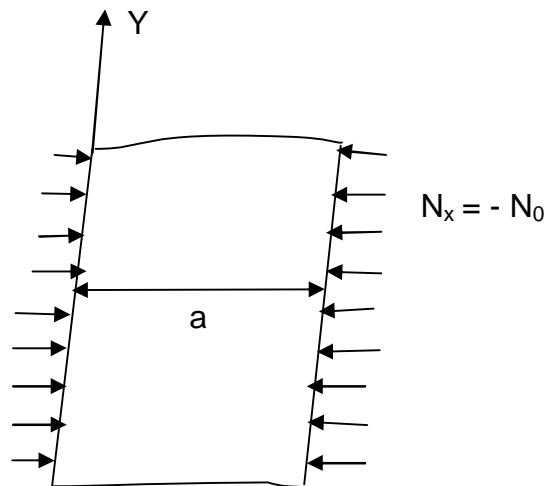


Figure 3.7: Plaque sandwich soumise à des efforts de compression

Les chargements en compression mettent en évidence le flambement de la plaque sandwich son équation de flambement est de la forme :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2 N_{xy}^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (3.61)$$

Avec:

$$\begin{aligned} Q_y &= F_{44} \gamma_{yz}^a + F_{45} \gamma_{xz}^a \\ Q_x &= F_{45} \gamma_{yz}^a + F_{55} \gamma_{xz}^a \end{aligned} \quad (3.62)$$

D'ou:

$$F_{ij} = h C'_{ij} \quad (3.63)$$

Les coefficients de C'_{ij} sont définis dans l'équation (3.12 a, b) et les valeurs de γ_{yz}^a et γ_{xz}^a caractérisent l'équation (3.10)

A cet effet l'équation de flambement est de la forme :

$$\begin{aligned} & h C'_{55}{}^a \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + h C'_{45}{}^a \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + h C'_{44}{}^a \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + q + N_x^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ & + 2 N_{xy}^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_{xy}^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.64)$$

Pour étudier le comportement mécanique des plaques sandwiches soumises à des efforts de compression, on à considérer le cas d'une plaque à âme dont les axes x et y sont parallèles aux axes d'orthotropie principaux 1 et 2, d'ou :

$$C'_{45}{}^a = 0 \quad C'_{55}{}^a = G_{13}{}^a \quad C'_{44}{}^a = G_{23}{}^a \quad (3.65)$$

Dans ce cas la relation (3.64) se réduit à :

$$\begin{aligned} & h G_{13}{}^a \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + h G_{23}{}^a \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + q + N_x^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2 N_{xy}^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ & + N_y^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.66)$$

De plus le matériau sandwich est considéré chargé seulement à une compression latérale N_0 et dans le cas statique l'équation (3.66) sera modifiée comme :

$$h G_{13}{}^a \left(\frac{d\varphi_x}{dx} + \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) - N_0 \frac{d^2 w_0}{dx^2} = 0 \quad (3.67)$$

Dans le cas d'appuis simple, les conditions aux limites sont :

$$w_0 = 0$$

$$N_x = 0$$

$$M_x = D_{11} \frac{d\varphi_x}{dx} = 0 \quad (3.68)$$

La solution des équations différentielles (3.42) et (3.67) est donnée sous la forme [29]

$$\begin{cases} \varphi_x = A_m \cos \frac{m\pi x}{a} \\ w_0 = B_m \sin \frac{m\pi x}{a} \end{cases} \quad (3.69)$$

En reportant la relation (3.69) dans les équations (3.42) et (3.67), on aura

$$\left(D_{11} + \frac{h G_{13}^a a^2}{m^2 \pi^2} \right) A_m + \frac{h G_{13}^a}{m\pi} a B_m = 0 \quad (3.70)$$

$$\frac{h G_{13}^a}{m\pi} a A_m + (h G_{13}^a - N_0) B_m = 0 \quad (3.71)$$

Ou sous la forme la plus explicite

$$\begin{pmatrix} A_m \\ B_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{11} + \frac{h G_{13}^a a^2}{m^2 \pi^2} & \frac{h G_{13}^a a}{m\pi} \\ \frac{h G_{13}^a a}{m\pi} & h G_{13}^a - N_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

Dans le cas où le déterminant est nul, la solution sera :

$$N_0 = \frac{h G_{13}^a D_{11} m^2 \pi^2}{m^2 \pi^2 D_{11} + h G_{13}^a a^2} \quad (3.73)$$

Pour le mode fondamental $m = 1$, la charge critique de flambement correspondant à la plus faible valeur de N_0 est :

$$N_{cr} = \frac{h G_{13}^a D_{11} \pi^2}{\pi^2 D_{11} + h G_{13}^a a^2} \quad (3.74)$$

Dont la charge critique dans le cas du flambement en compression s'écrit sous la forme

$$N_{cr} = N'_{cr} \frac{1}{1 + S \pi^2} \quad (3.75)$$

Avec :

$$N'_{cr} = D_{11} \frac{\pi^2}{a^2} \quad (3.76)$$

et

$$S = \frac{D_{11}}{G_{13}^a h a^2} \quad (3.77)$$

CHAPITRE IV

ETUDE COMPARATIVE DU COMPORTEMENT MECANIQUE DE PLAQUES SANDWICHES A DIFFERENTS MATERIAUX CONSTITUTIFS

IV-1 INTRODUCTION :

Le matériau sandwich résulte de l'assemblage de deux revêtements ou peaux minces avec une âme plus légère .Dans un sens plus général , on peut le considérer comme une association de deux ou plusieurs phases solides conduisant à un matériau plus performant .

Un grand nombre des structures sandwiches pour des raisons de fabrication ou d'utilisation, se présentent sous forme de plaques ou de coques minces .Le choix d'une constitution adéquate capable de résoudre le problème de résistance de telles structures souvent rencontré lors de la conception mécanique, d'ou la prévision du comportement mécanique d'une plaque sandwich mince à différents matériaux constitutifs, présente un point très important et nécessaire à étudier.

En effet, le but de notre travail consiste à étudier le comportement mécanique d'une plaque sandwich soumise à la flexion cylindrique et à la compression nous considérons le cas des matériaux à revêtements de natures très diverses, composites stratifiés et contreplaqué avec des âmes en nid d'abeilles aluminium, nida plast, mousse herex, ou balsa.

Cette étude est effectuée sur des plaques sandwiches symétriques, les deux peaux, supérieure et inférieure sont identiques, chaque peau est constituée de dix plis réguliers (d'épaisseur identique et de même nature).

IV-2 PRESENTATION DES MATERIAUX CONSTITUTIFS UTILISES:

Les matériaux sandwichs utilisés dans cette étude représentent actuellement un développement intense dans la réalisation des pièces de structure en aéronautique tels

que verre/epoxyde/nida aluminium, kevlar/epoxyde/nida aluminium, carbone/epoxyde /nida aluminium, contre plaqué/balsa, verre/epoxyde/mousse herex verre/epoxyde /nida plast. Grâce à leurs propriétés les plus remarquables de résistance mécanique et de légèreté les matériaux sandwichs deviennent de plus en plus incontournables dans des secteurs industriels ,aussi variés que les transports ,les bâtimentsil est donc nécessaire de définir les différents constituants considérés dans cette étude et leurs applications .

IV.2.1 mousse herex : Mousse rigide de polychlorure de vinyle (PVC), est une matière thermoplastique de synthèse composée de carbone, d'hydrogène, et de chlore. Le PVC est aujourd'hui un de polymères les plus utilisés et le plus versatile que l'on retrouve dans tous les aspects de la vie, emballage, électricité, électronique, santé et transports.

IV.2.2 Nida plast (Nid d'abeilles ou polypropylène) : Le polypropylène (pp) est comme le polychlorure de vinyle (PVC), un thermoplastique de grande diffusion son développement exceptionnel au cours des dernières décennies est dû à ses propriétés intéressante dont sa température de fusion de 130° à 170°C.

Le polypropylène est utilisé dans presque tous les secteurs et en particulier dans l'emballage, l'industrie automobile l'électroménager et le textile.

IV.2.3 Achroma balsa : Un bois très tendre, plus léger et le plus mou des bois commerciaux. A une très faible résistance mécanique sa densité est de 0.09 à 0.14 , leur application comme matériau d'âme pour le sandwich à cause de leur résistance en compression.

IV.2.4 Nida aluminium : Le collage de feuilles d'aluminium suivant des lignes régulièrement conduites à des blocs qui peuvent être tranchés perpendiculairement aux lignes de colle expansés de façon à réaliser des éléments comportant des alvéoles comme les rayons d'une ruche.

IV.2.5 Composites stratifiés : c'est l'empilement de tôles et de feuilles de natures diverses (carbone/epoxyde, kevlar /epoxyde, verre/epoxyde) est le principe de

composites qui permettent d'allier, d'additionner les caractéristiques ou performances des matériaux constitutifs.

IV.2.6 Contre plaqué : Les contre plaqués sont obtenues par collage de feuilles de placages superposées les uns par rapport aux autres ces feuilles forment les plis des panneaux orientés à 90° .

La détermination des caractéristiques mécaniques du contre plaqué présente une double difficulté : la dispersion des résultats liées aux variations dans une même essence dans le même bois et l'hétérogénéité qui est due aux cellules qui est les composent, qui sont de nature et de forme différentes.

IV .3 CARACTERISATION ELASTIQUE DES MATERIAUX SANDWICHS UTILISES:

Afin d'étudier le comportement mécanique d'une plaque sandwich soumise à la flexion cylindrique et au flambement, nous avons considéré des plaques de dimensions $1500 \times 800 \times 15.6 \text{ mm}^3$ constituées de deux revêtements identiques ,assemblés entre eux par une âme qui sont considérées de stratifiés composites constituées de 20 plis à fibres unidirectionnelles renforcés à 60% ou contre plaqués .les deux revêtements sont des croisés alternés à $[90^\circ/0^\circ]_{5s}$,ou ils sont des stratifiés équilibrés orientés $[-\theta / +\theta]_{5s}$ Les caractéristiques élastiques des matériaux constitutifs sont les suivantes :

Verre/Epoxyde:

$$\begin{aligned} E_{11} \text{ (Mpa)} &= 45\ 000 \\ E_{22} \text{ (Mpa)} &= 12\ 000 \\ \nu_{12} &= 0.3 \\ G_{12} \text{ (Mpa)} &= 4\ 500 \end{aligned}$$

Kevlar / Epoxyde:

$$\begin{aligned} E_{11} \text{ (Mpa)} &= 85\ 000 \\ E_{22} \text{ (Mpa)} &= 5\ 600 \\ \nu_{12} &= 0.34 \\ G_{12} \text{ (Mpa)} &= 2\ 100 \end{aligned}$$

Carbone/Epoxyde

$$\begin{aligned} E_{11} \text{ (Mpa)} &= 134\ 000 \\ E_{22} \text{ (Mpa)} &= 7\ 000 \\ \nu_{12} &= 0.25 \\ G_{12} \text{ (Mpa)} &= 4\ 200 \end{aligned}$$

Nida aluminium

$$\begin{aligned} E_{11} \text{ (Mpa)} &= 8.27 \\ E_{22} \text{ (Mpa)} &= 1.31 \\ G_{13} \text{ (Mpa)} &= 580 \end{aligned}$$

Mousse herex

$$\begin{aligned} E_{11} \text{ (Mpa)} &= 70 \\ \nu_{12} &= 0.4 \\ G_{13} \text{ (Mpa)} &= 25 \end{aligned}$$

Nida plast

$$\begin{aligned} E_{11} \text{ (Mpa)} &= 15 \\ G_{13} \text{ (Mpa)} &= 8 \end{aligned}$$

Achroma balsa

$$\begin{aligned} E_{11} \text{ (Mpa)} &= 310 \\ E_{22} \text{ (Mpa)} &= 110 \\ G_{13} \text{ (Mpa)} &= 320 \end{aligned}$$

IV.4 ETAPES DE CALCUL DU MATERIAU SANDWICH:

Afin de décrire le comportement mécaniques des plaques sandwiches minces travaillant à la flexion cylindrique et à la compression on à illustré sous forme deux programmes informatiques les différentes étapes de raisonnement et de calcul explicitées en chapitre précédent. Dans ce cas, on à considéré pour chaque revêtement des stratifiés symétriques à 10 plis croisés à 90° ($\theta_1 = 0$ et $\theta_2=90^\circ$) ou alternés à $+\theta, -\theta$ ($\theta_1= \theta$ et $\theta_2= -\theta$).La géométrie d'empilement est schématisée sur la (Figure 4.1)

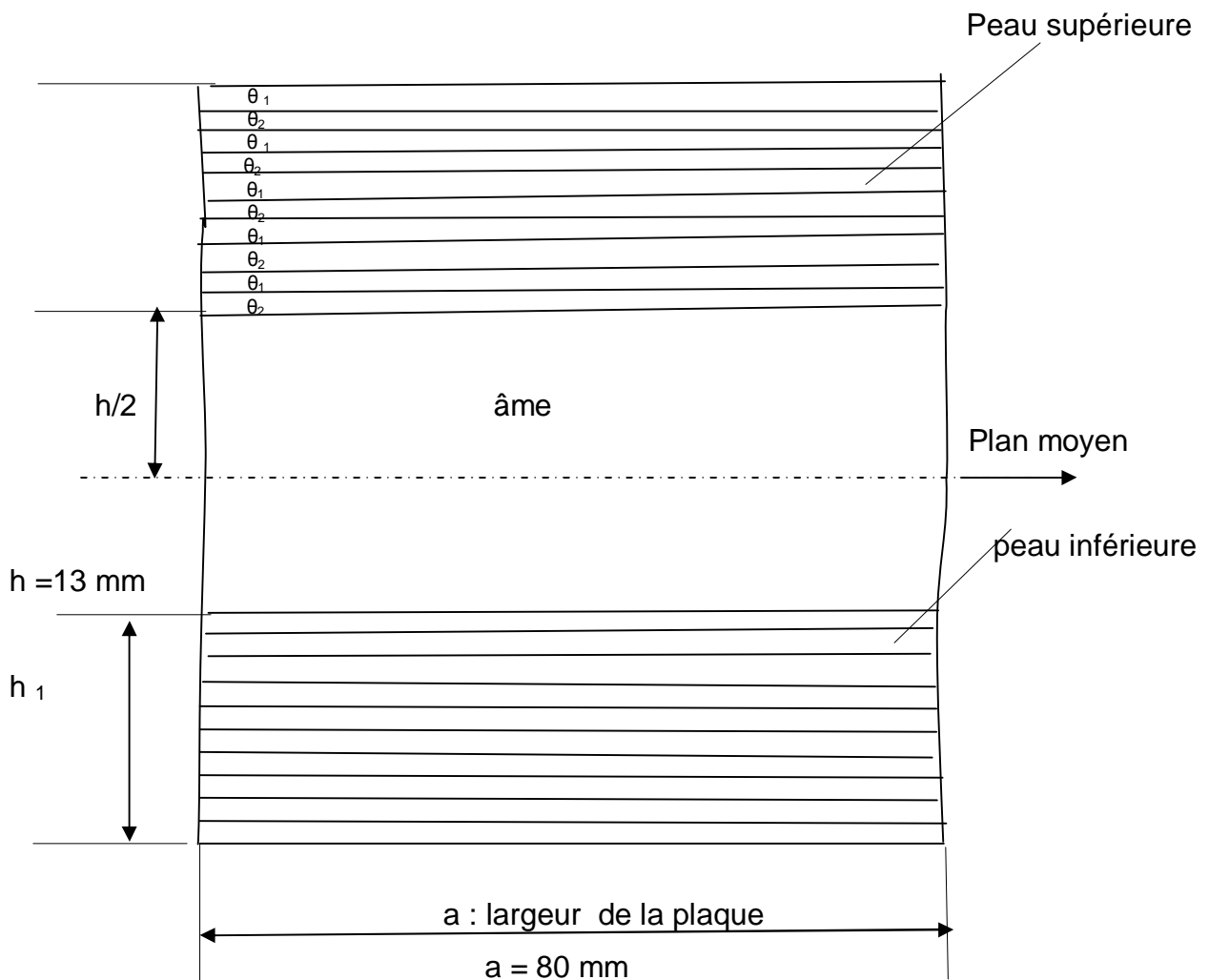


Figure4.1 Schématisation d'une plaque sandwich symétrique dont l'orientation des plis de deux peaux et $[\theta_1/\theta_2]_{5s}$

Le programme utilisé dans le cas de stratifié croisé $[90^\circ/0^\circ]_5$ est FFVARX,et dans le cas de stratifié symétrique équilibré $[-\theta/+ \theta]$,est FFVART,leurs organigrammes respectifs sont représentés par (Figure 4.2) et (Figure 4.3)

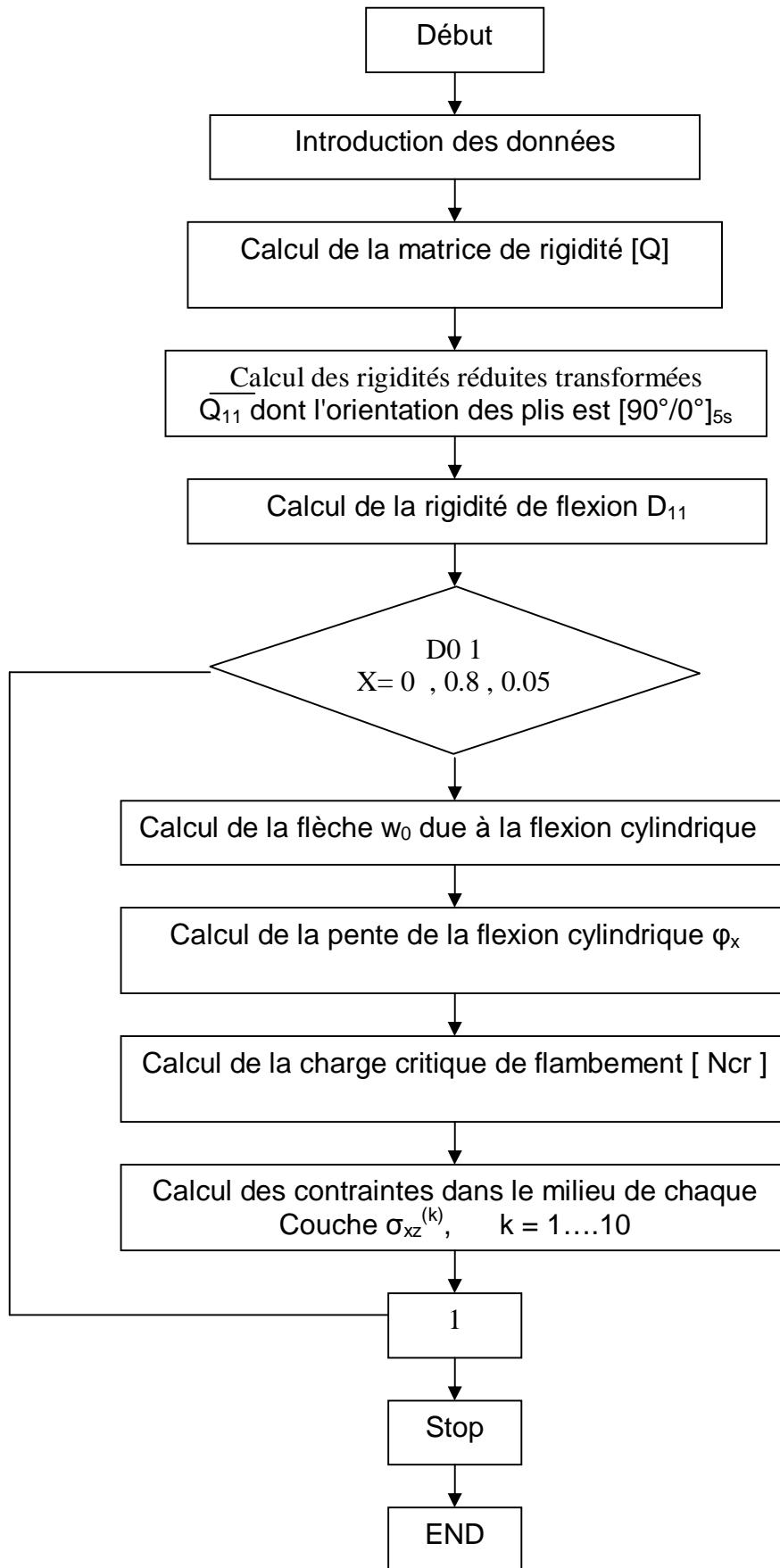


Figure 4.2 : Etapes de calcul principales du comportement mécanique d'une plaque sandwich dont les plis de deux peaux sont orientées à [90°/0°]_{5s}

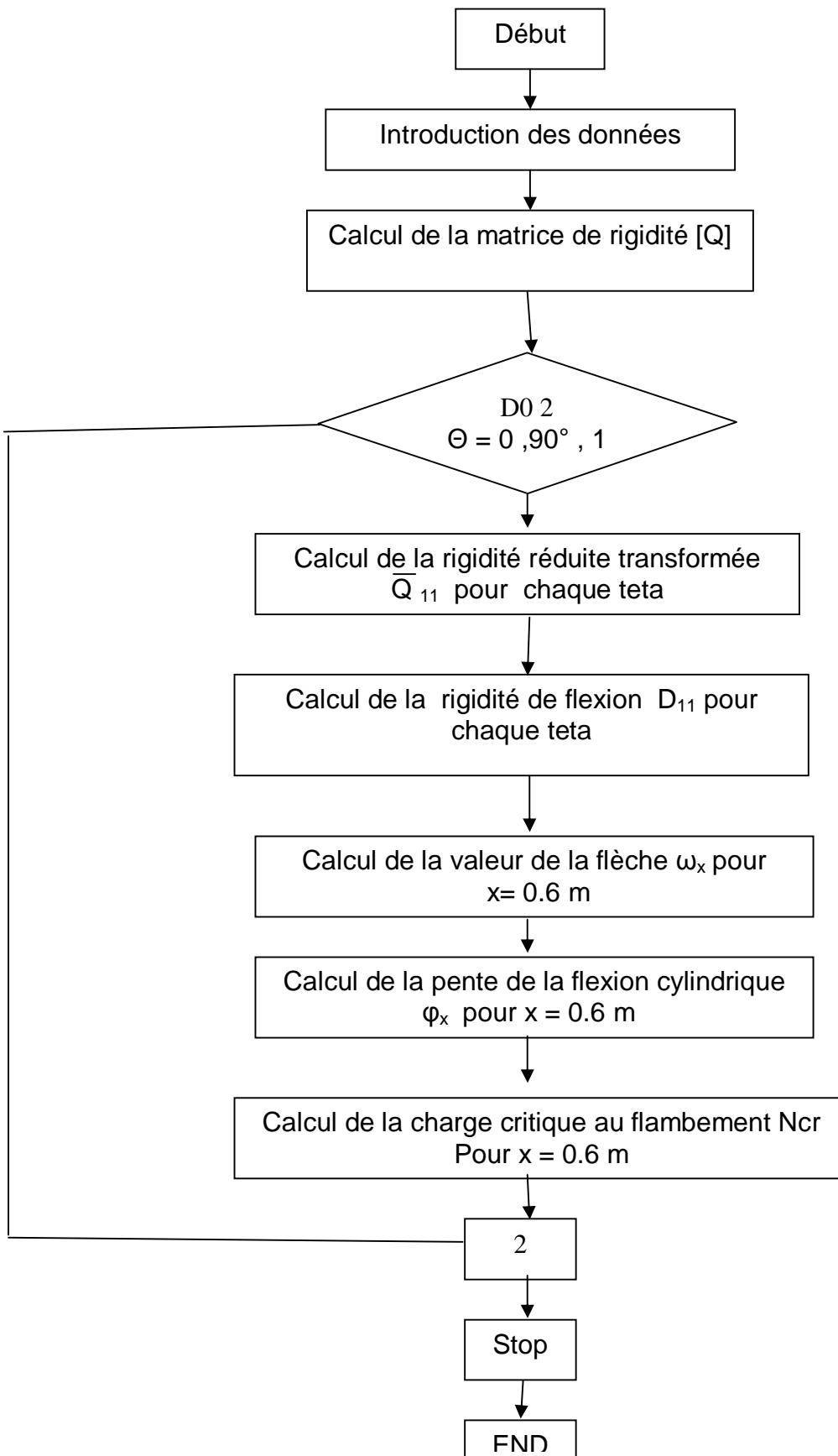


Figure 4.3: Etapes de calcul principales pour décrire le comportement mécanique des plaques sandwiches minces symétriques dont les peaux sont des stratifiés équilibrés

Les modules élastiques caractérisant le matériau des constituants sont introduit au début du programme les valeurs de \overline{Q}_{11} et Q_{ij} , sont obtenues par l'utilisation des relations respectives (2.27) et (2.14).

Pour le calcul de D_{11} , on utilise l'équation (3.30) après avoir déterminé la valeur de $C_{ij}^{(2)}$ à partir de l'équation (3.28).

Afin de décrire le comportement mécaniques des plaques sandwiches minces travaillant à la flexion cylindrique, on à considéré des plaques sandwiches en appuis simples tout le long de ses cotés pour $x = 0$, et $x = a$ chargées transversalement par une charge répartie q_0 (Figure 4.4)

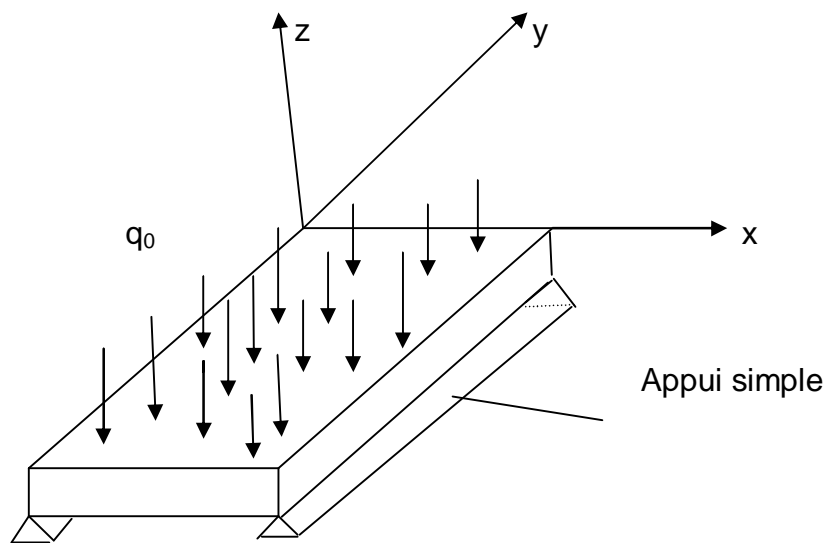


Figure 4.4 : Plaque sandwich mince soumise à la flexion cylindrique

D'après les résultats obtenus au chapitre précédent, la flèche w_0 et la pente φ_x de la flexion cylindrique sont exprimées par :

$$w_0 = \frac{q_0}{24 D_{11}} \left[x^4 - 2ax^3 + a^3x + \frac{12D_{11}}{hG_{13}^a} (ax - x^2) \right] \quad (4.1)$$

et

$$\varphi_x = - \frac{q_0}{24 D_{11}} (4x^3 - 6ax^2 + a^3) \quad (4.2)$$

Dont q_0 est la charge transversale répartie, elle est considérée dans cette étude égale à -50 N/m^2

Pour calculer les contraintes dans la peau supérieure dues à la flexion cylindrique, on utilise la relation donnant σ_{xz}^k

$$\sigma_{xz}^k = \frac{Q_{11}^k q_0 h}{4D_{11}} (2x-a) (z+c_k) \quad (4.3)$$

ou C_k : constante de la $k^{\text{ème}}$ couche $k = 1 \dots \dots \dots 10$

Pour déterminer les valeurs de C_k , on doit assurer la continuité entre chaque couche et annuler $\sigma_{xz}^{(k)}$ sur la face supérieure [29] d'où on trouve les contraintes dans les dix couches qui sont égales à :

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \frac{Q_{22} q_0 h}{4D_{11}} (2x-a) \left(z - \frac{5}{10} \cdot \frac{Q_{11} h_1}{Q_{22}} - \frac{h}{2} - \frac{5h_1}{10} \right) \quad (4.4)$$

$$\sigma_{xz}^{(2)} = \frac{Q_{11} q_0 h}{4D_{11}} (2x-a) \left(z - \frac{4}{10} \cdot \frac{Q_{22} h_1}{Q_{11}} - \frac{h}{2} - \frac{6h_1}{10} \right) \quad (4.5)$$

$$\sigma_{xz}^{(3)} = \frac{Q_{22} q_0 h}{4D_{11}} (2x-a) \left(z - \frac{4}{10} \cdot \frac{Q_{11} h_1}{Q_{22}} - \frac{h}{2} - \frac{6h_1}{10} \right) \quad (4.6)$$

$$\sigma_{xz}^{(4)} = \frac{Q_{11} q_0 h}{4D_{11}} (2x-a) \left(z - \frac{3}{10} \cdot \frac{Q_{22} h_1}{Q_{11}} - \frac{h}{2} - \frac{7h_1}{10} \right) \quad (4.7)$$

$$\sigma_{xz}^{(5)} = \frac{Q_{22} q_0 h}{4D_{11}} (2x-a) \left(z - \frac{3}{10} \cdot \frac{Q_{11} h_1}{Q_{22}} - \frac{h}{2} - \frac{7h_1}{10} \right) \quad (4.8)$$

$$\sigma_{xz}^{(6)} = \frac{Q_{11} q_0 h}{4D_{11}} (2x-a) \left(z - \frac{2}{10} \cdot \frac{Q_{22} h_1}{Q_{11}} - \frac{h}{2} - \frac{8h_1}{10} \right) \quad (4.9)$$

$$\sigma_{xz}^{(7)} = \frac{Q_{22} q_0 h}{4D_{11}} (2x-a) \left(z - \frac{2}{10} \cdot \frac{Q_{11}h_1}{Q_{22}} - \frac{h}{2} - \frac{8h_1}{10} \right) \quad (4.10)$$

$$\sigma_{xz}^{(8)} = \frac{Q_{11}q_0h}{4D_{11}} (2x-a) \left(z - \frac{Q_{22}h_1}{10 Q_{11}} - \frac{h}{2} - \frac{9h_1}{10} \right) \quad (4.11)$$

$$\sigma_{xz}^{(9)} = \frac{Q_{22}q_0h}{4D_{11}} (2x-a) \left(z - \frac{Q_{11}h_1}{10 Q_{22}} - \frac{h}{2} - \frac{9h_1}{10} \right) \quad (4.12)$$

$$\sigma_{xz}^{(10)} = \frac{Q_{11}q_0h}{4D_{11}} (2x-a) \left(z - \frac{h}{2} - h_1 \right) \quad (4.13)$$

Dont la valeur de z est considérée dans cette étude au milieu de chaque couche . A cause de la symétrie de la plaque sandwich mince la répartition des contraintes dans la peau inférieure est déduite à partir de la répartition dans la peau supérieure.

De même , pour décrire le comportement mécanique des matériaux sandwichs chargés en compression , nous considérons le cas des plaques de longueur très grande dans la direction y. soumises à une charge initiale de compression N_x^i qui est égale à $-N_0$, pour étudier le phénomène de flambement , on applique l'équation de la charge critique qui est égale à :

$$N_{cr} = \frac{D_{11} \pi^2}{a^2 (1+S\pi^2)} \quad (4.14a)$$

$$S = \frac{D_{11}}{G_{13} ha^2} \quad (4.14b)$$

La substitution de l'équation (4.14b) dans l'équation (4.14a) permet d'obtenir la charge critique qui aura la forme :

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 D_{11} G_{13} ha^2}{G_{13} ha^4 + \pi^2 D_{11} a^2} \quad (4.15)$$

Dans le cas de revêtement en stratifiés symétriques équilibrés, le calcul de la flèche w_x et de la pente de la flexion cylindrique ϕ_x en fonction de l'angle θ variant de 0° à 90° s'effectue pour la distance $x = 0.6$ m, de même lors d'un chargement en compression, la charge critique au flambement sera déterminée dans le cas où la distance est $x = 0.6$ m.

IV- 5 DISCUSION DES RESULTATS OBTENUS :

Afin de décrire le comportement mécanique des plaques sandwiches minces à différents matériaux de revêtement, chargées à la flexion cylindrique et en compression, il est évident nécessaire d'étudier l'influence du matériau des revêtements. Ils sont de nature composites stratifiés, ou matériaux à base de bois (le contre plaqué). De plus, il est donc nécessaire d'étudier l'effet du changement d'âme sur le comportement mécanique des plaques sandwiches constituées des peaux de même nature.

IV.5.1 Comportement mécanique des plaques sandwiches dont l'orientation des plis de Peaux est $[90^\circ/0^\circ]_{6s}$

IV.5.1.1 Influence de la nature de matériau de revêtement sur le comportement mécaniques des plaques sandwiches:

Pour décrire le comportement mécanique des plaques sandwiches et montrer l'influence du matériau des revêtements on a représenté sur la (Figure 4.5) la variation de la flèche d'une plaque sandwich à différents matériaux de revêtements et dont l'âme est en nida aluminium en fonction de la distance x suivant sa largeur, cette figure compare les valeurs de la flèche w_x pour des sandwiches à différents matériaux de revêtements. Ils sont des composites stratifiés à renforcement unidirectionnel verre/epoxyde, kevlar/epoxyde, carbone/epoxyde.

De plus on a représenté sur la (Figure 4.6) l'évolution de la flèche du matériau sandwich à base de bois contre plaqué/balsa en fonction de la distance x .

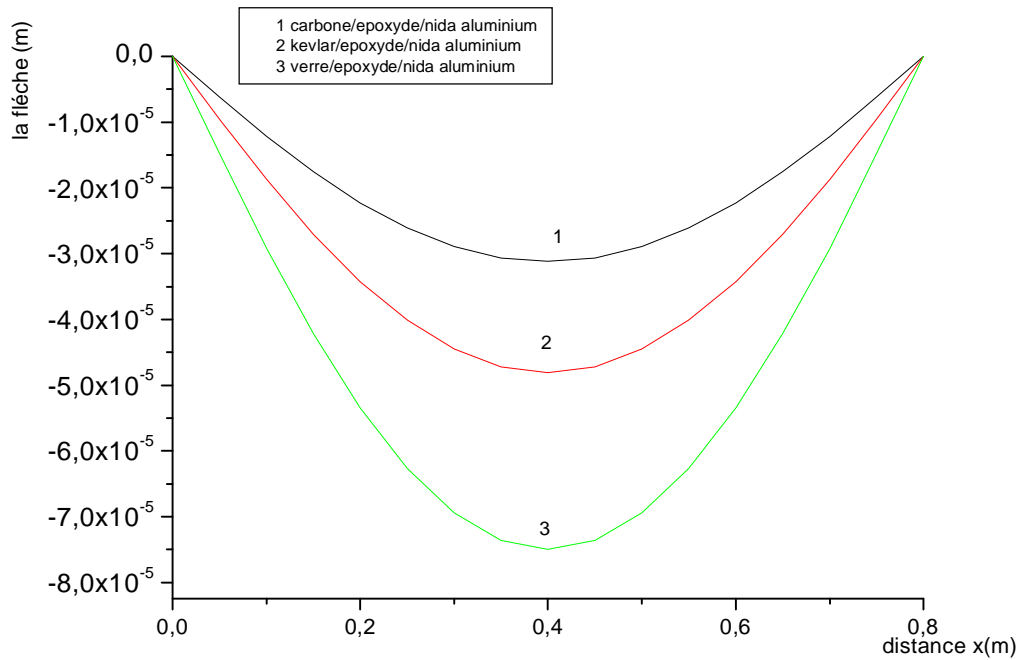


Figure 4.5 : variation de la flèche d'une plaque sandwich à différents matériaux de revêtements en fonction de la distance x suivant sa largeur dont l'orientation des plis est $[90^\circ/0^\circ]_{5s}$

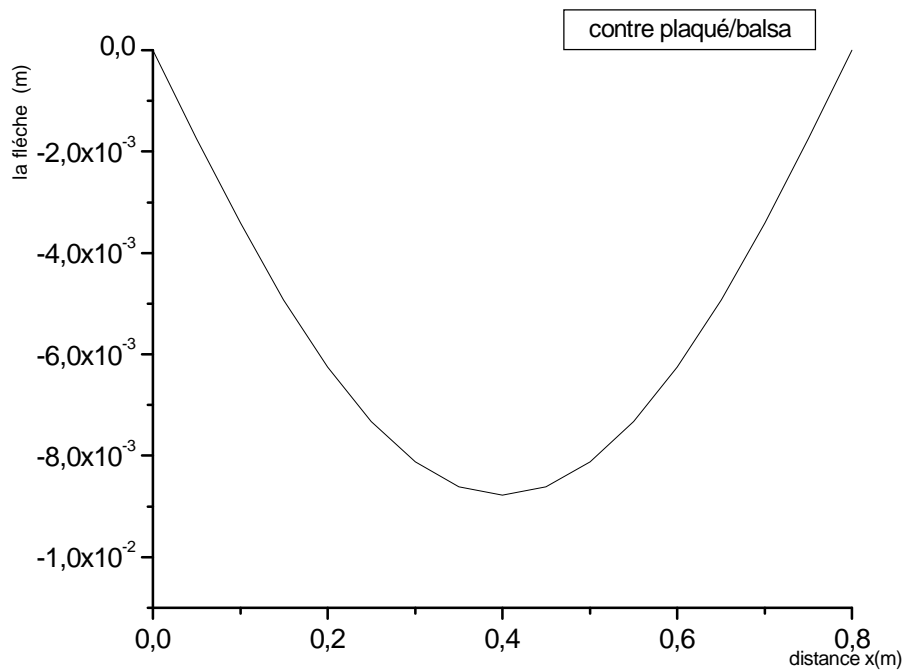


Figure 4.6 : Variation de la flèche de la plaque sandwich contre plaqué/balsa en fonction de la distance suivant sa largeur dont l'orientation des plis est $[90^\circ/0^\circ]_{5s}$

D'après les deux figures, on constate que les courbes ont les mêmes allures, la flèche est nulle sur les deux cotés de la plaque ou elle est appuyée sur deux appuis simples, on remarque aussi que la valeur de la flèche w_x s'accroît de $x = 0$ jusqu'au milieu de la plaque ou elle atteint sa valeur maximale. Après elle décroît jusqu'à elle s'annule pour $x = a$ ces résultats sont validés par ceux de la pente ϕ_x dû à la flexion cylindrique et représentées sur les Figures (4.7) et (4.8)

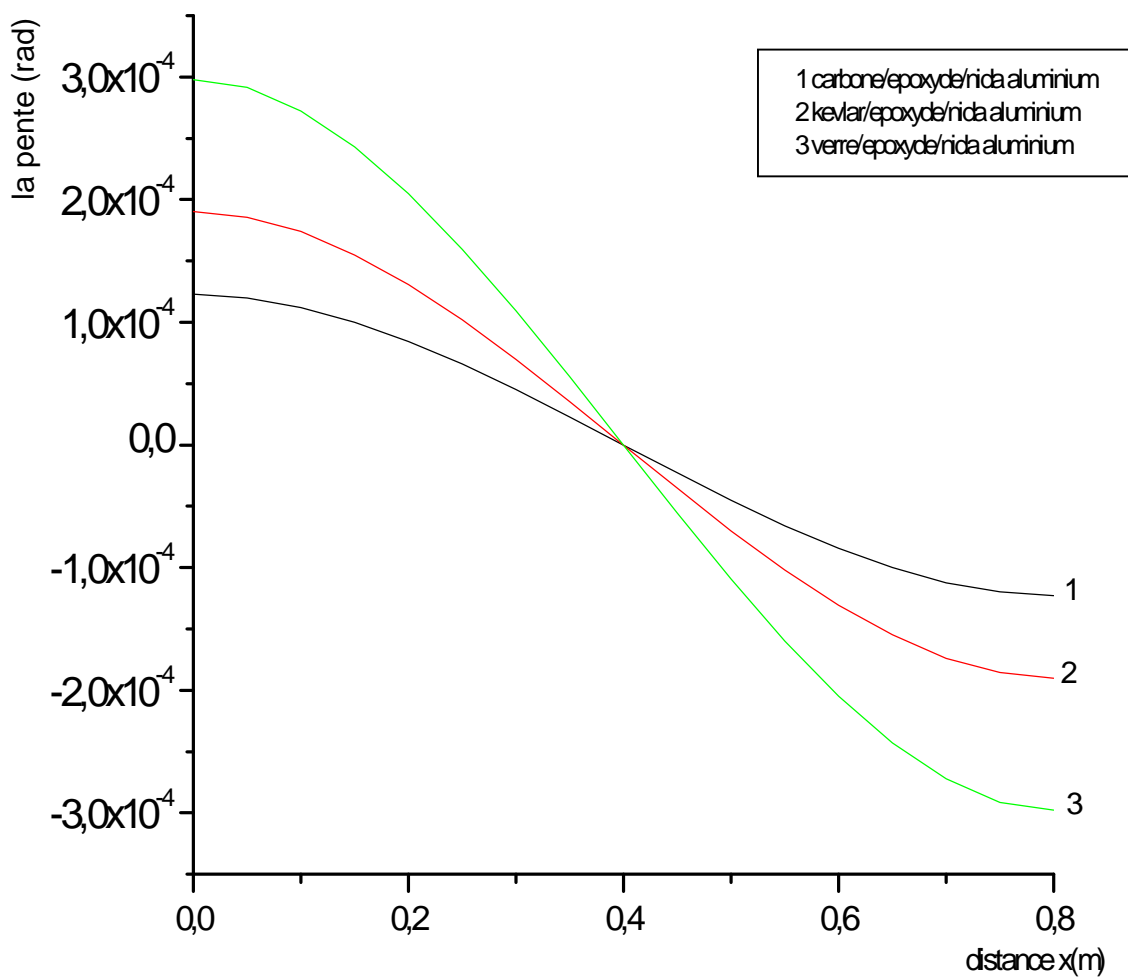


Figure 4.7 : Variation de la pente d'une plaque sandwich à différents matériaux de revêtements en fonction de la distance x suivant sa largeur dont l'orientation des plis est $[90^\circ/0^\circ]_{5s}$

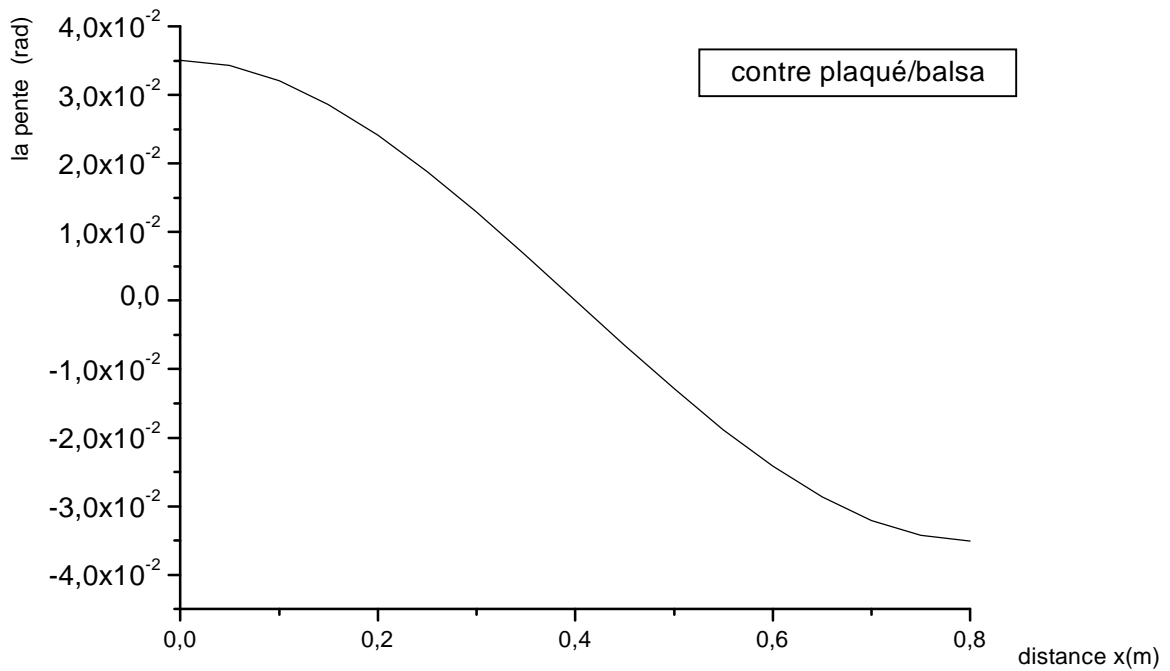


Figure 4.8 : Variation de la pente d'une plaque sandwich contre plaqué/balsa en fonction de la distance x suivant sa largeur dont l'orientation des plis est $[90^{\circ}/0^{\circ}]_{5s}$

Par comparaison des résultats obtenus on constate que la plaque sandwich à revêtement carbone/epoxyde résiste mieux à la flexion cylindrique que le kevlar /epoxyde et le verre/epoxyde ,on remarque aussi que le matériau à revêtement contre plaqué et à âme balsa présente une flèche plus importante et une pente ϕ_x plus prononcée ce qui signifie que ce matériau à une faible résistance à la flexion cylindrique par rapport aux autres matériaux.

Dans le cas du flambement ,on à représenté respectivement sur les Figures (4.9) et (4.10) ,la variation de la charge critique en fonction des largeurs a des plaques sandwiches à revêtements composites stratifiés et contre plaqué/balsa .Malgré qu'elles ne présentent pas le même matériau de revêtement,on remarque que les courbes se caractérisent par une même allure ,les charges critiques au flambement atteignent leurs valeurs maximales pour les dimensions les plus petites de la plaque .Au fûr à mesure que la largeur de la plaque est augmentée la résistance au flambement décroît rapidement .

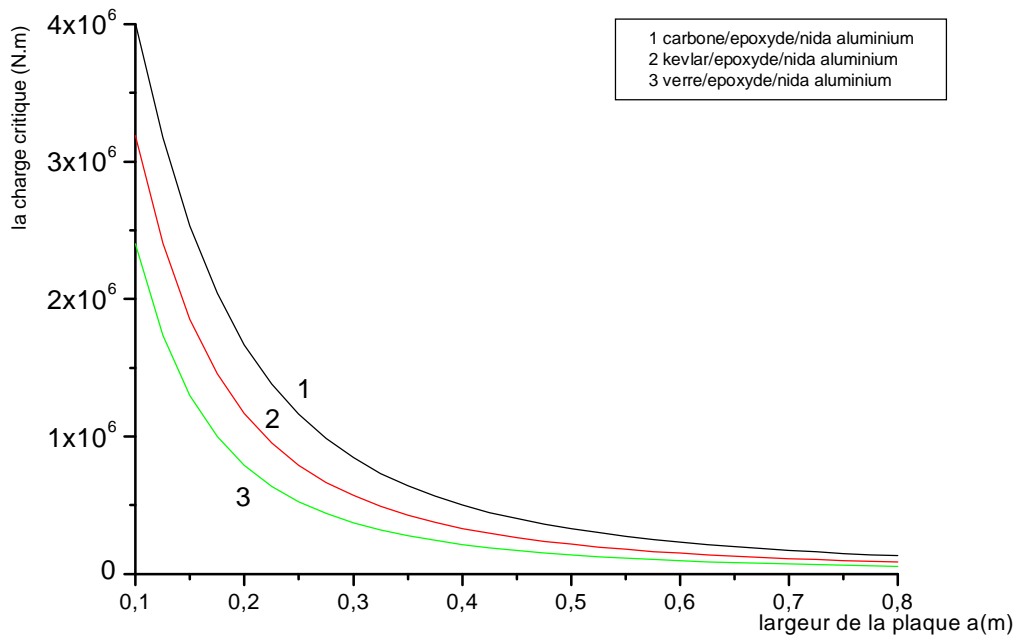


Figure 4.9 : Variation de la charge critique des plaques sandwiches à différents matériaux de revêtements en fonction de leurs largeurs dont l'orientation des plis est [90°/0°]_{5s}

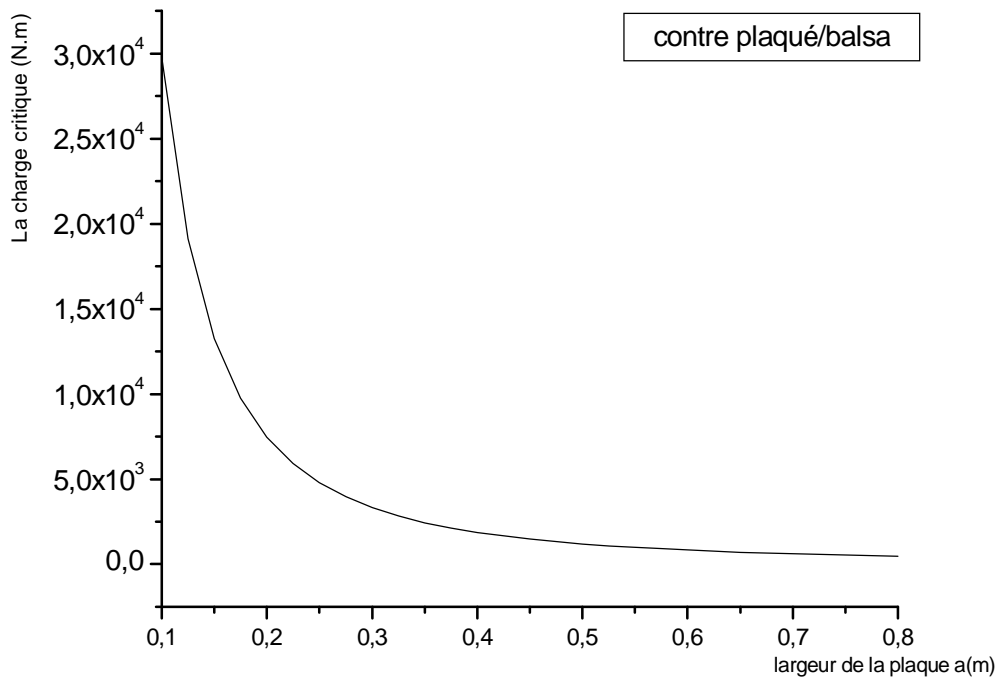


Figure 4.10 : Variation de la charge critique des plaques sandwiches contre plaqué/balsa en fonction de leur largeur a dont l'orientation des plis est [90°/0°]_{5s}

De plus la (Figure 4.10) confirme la haute résistance au flambement des sandwichs à revêtement carbone/epoxyde , c'est la forte résistance du renfort à la compression qui différencie du kevlar/epoxyde ou encore de verre/epoxyde chaque fois que la largeur de la plaque augmente, l'effet de la nature du matériau de revêtement devient sensiblement négligeable

IV.5.1.2 Influence de la nature du matériau de l'âme sur le comportement mécanique d'une plaque sandwich :

Pour une meilleure compréhension du comportement mécanique des plaques sandwiches, on à représenté sur les Figures (4.11) et (4.12) et (4.13) l'influence de la nature du matériau de l'âme tel que le nida aluminium, mousse herex et nida plast sur l'évolution de la flèche et de la charge critique en fonction de la largeur de la plaque.

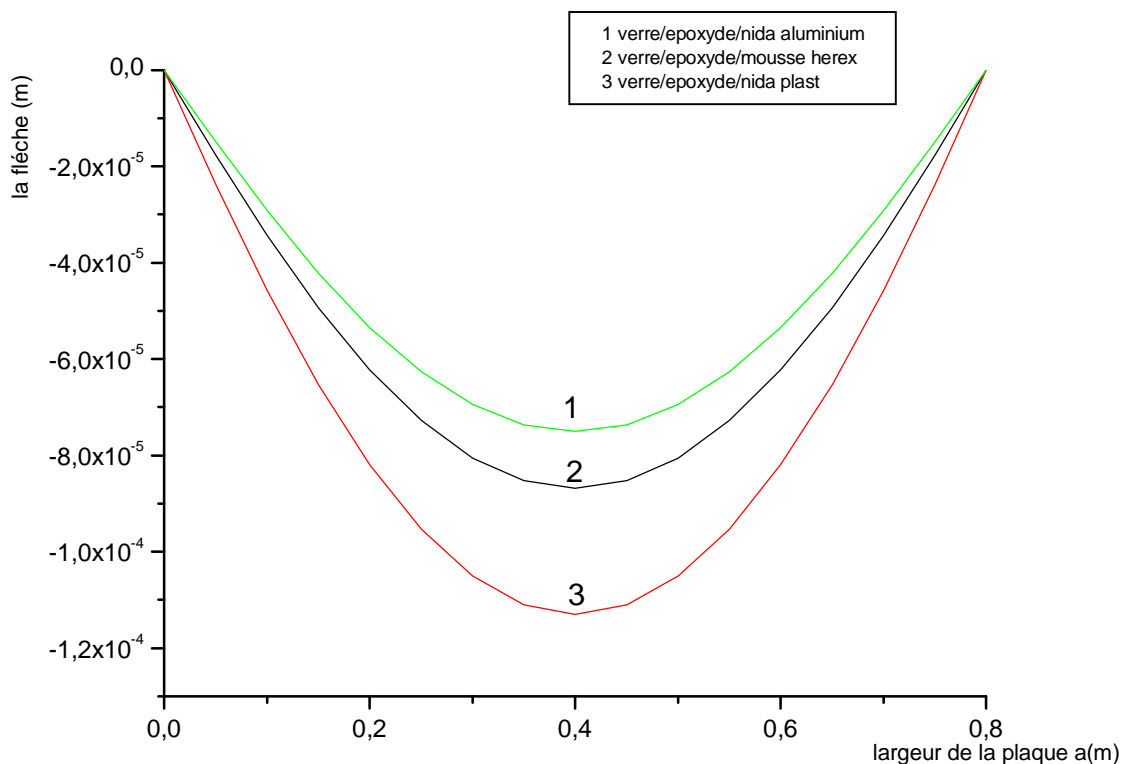


Figure 4.11 : Variation de la flèche d'une plaque sandwich à différents matériaux d'âmes et à revêtements verre/epoxyde en fonction de la distance x suivant sa largeur dont l'orientation des plis est $[90^{\circ}/0^{\circ}]_{5s}$

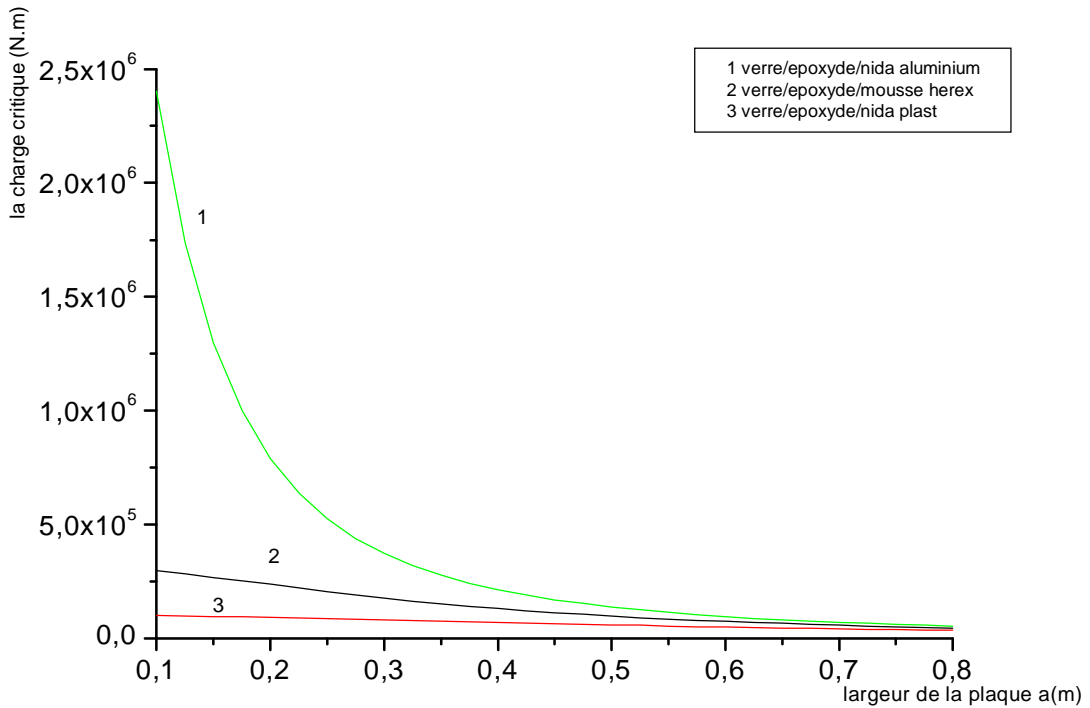


Figure 4.12: Variation de la charge critique des plaques sandwiches à différents matériaux d'âmes et à revêtements verre/epoxyde soumise au flambement en fonction de la largeur de la plaque dont l'orientation des plis est $[90^\circ/0^\circ]_{5s}$

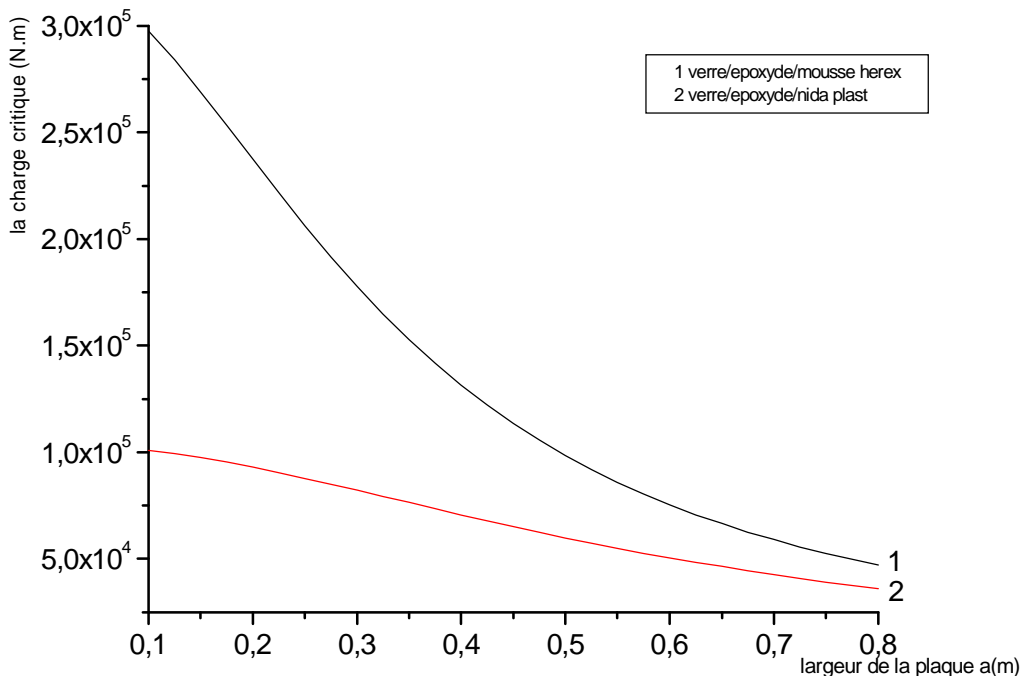


Figure 4.13: variation de la charge critique des plaques sandwiches verre/epoxyde/nida plast et verre/epoxyde/mousse herex en fonction de la largeur de la plaque dont l'orientation des plis est $[90^\circ/0^\circ]_{5s}$

A partir de la (Figure 4.11), on constate que la flèche atteinte sa valeur maximale au milieu de la plaque et elle est nulle aux deux appuis .De plus, on remarque que le verre/epoxyde /nida aluminium présente une résistance supérieure à celle du verre/epoxyde/mousse herex et le verre /epoxyde /nida plast dans ce cas, c'est le matériau de l'âme nida aluminium qui est responsable de cette croissance .En revanche le nida plast est le moins résistant à la flexion.

D'après les Figures (4.12) et (4.13) , on observe que pour des valeurs petites de a , la charge critique au flambement est très importante chaque fois que les dimensions de la plaque augmente ,a résistance critique diminue jusqu'au atteindre la valeur de 54 740,66 N.m pour le verre/epoxyde/nida aluminium, 47 142,57 N.m pour le verre/epoxyde/mousse herex et 36 035,11N.m pour le verre/epoxyde/nida plast.Si on fait une comparaison de résistances, on peut dire qu'on préfère l'utilisation du nida aluminium comme âme dans une plaque sandwich à revêtement verre / epoxyde chargée en compression au lieu de l'âme mousse herex et l'âme nida plast.

IV.5.1.3 Variation des contraintes dans les peaux verre/epoxyde /nida aluminium

La (Figure 4.14) présente l'évaluation des contraintes au milieu de chaque couche de la peau supérieure de la plaque sandwich verre/epoxyde/nida aluminium chargée à la flexion cylindrique en fonction de la distance x suivant la largeur.

On remarque que les courbes représentant les dix couches, ont une forme linéaire et que les contraintes au milieu de la plaque sont nulles. De plus on observe que la valeur des contraintes s'accroît successivement de la 10^{ème} couche à la 1^{ère} ou elle est maximale.

A cause de la symétrie du matériau sandwich considéré dans cette étude la répartition des contraintes dans la peau inférieure peut être obtenue à partir de celle dans la peau supérieure.

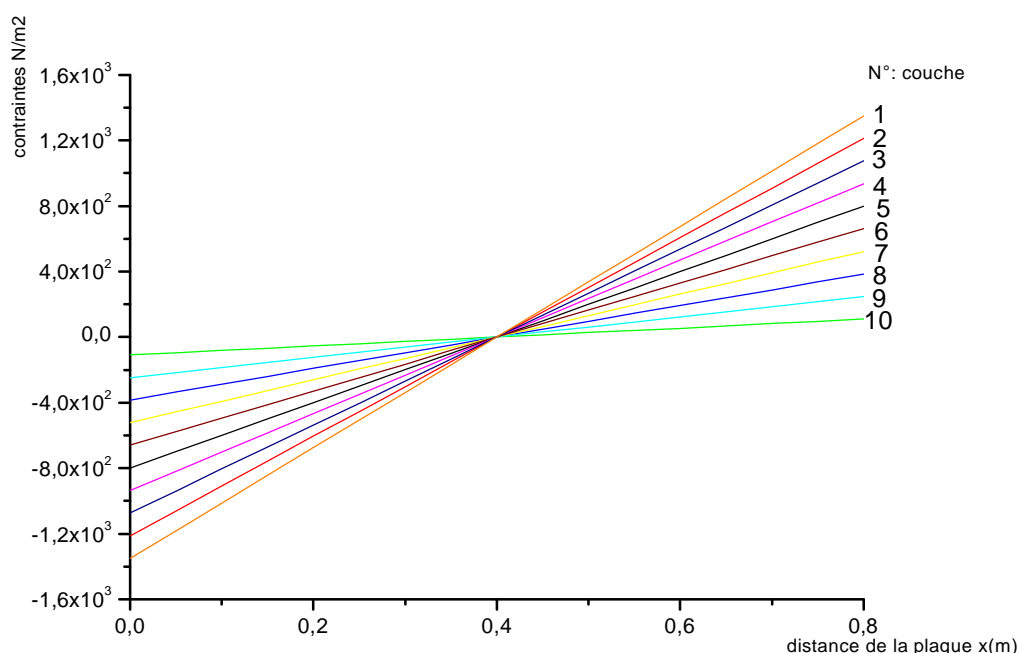


Figure 4.14 : Variation des contraintes dans la peau supérieure de la plaque sandwich verre/epoxyde /nida aluminium soumise à la flexion cylindrique en fonction de la distance x dont l'orientation des plis est $[90^{\circ}/0^{\circ}]_{5s}$

IV.5.2 Comportement mécanique des plaques sandwichs dont les peaux sont des stratifiés équilibrés $[-\theta/+0]_{5s}$

D'une manière générale, l'orientation des plis constituant les revêtements peut avoir des valeurs différentes de 0° et 90° , il est donc nécessaire d'étudier l'influence de l'orientation des fibres sur la variation du comportement mécanique d'une plaque sandwich chargée à la flexion cylindrique et en compression.

iv.5.2.1 Influence de la nature du matériau des revêtements:

La variation de la flèche et celle de la pente d'une plaque sandwich à différents matériaux de revêtements, stratifiés composites et de contre plaqué/balsa soumises à la flexion cylindrique en fonction de l'angle d'orientation des fibres représentées respectivement sur les figures (4.15), (4.16) et (4.18), les quatre courbes ont une forme décroissante pour des petites orientations des fibres.

La plaque est moins fléchie, au fur et à mesure que l'angle croît la flèche diminue progressivement.

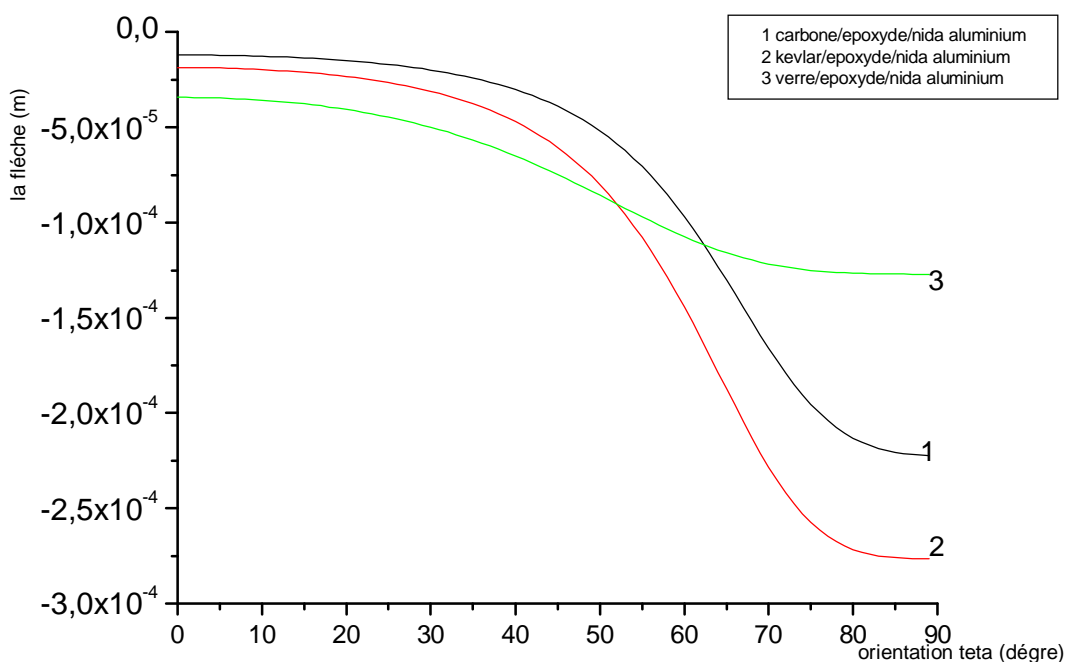


Figure 4.15 : Variation de la flèche d'une plaque sandwich à différents matériaux des revêtements soumise à la flexion cylindrique en fonction de l'angle d'orientation des fibres à la distance $x= 0.6$ m

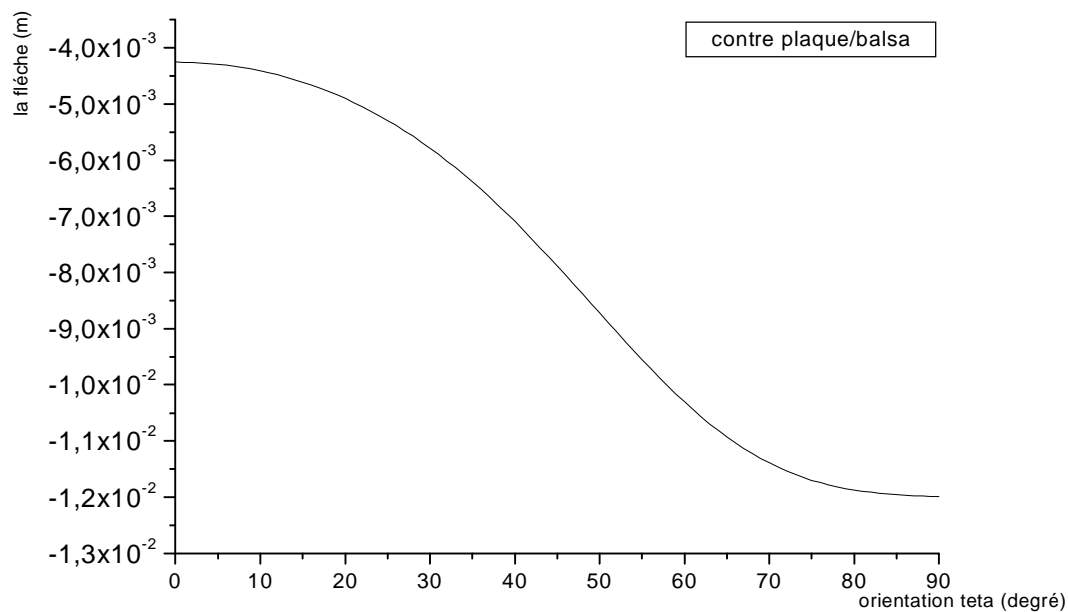


Figure 4.16 : Variation de la flèche d'une plaque sandwich contre plaqué /balsa soumise à la flexion cylindrique en fonction de l'orientation des fibres à la distance $x= 0.6$ m

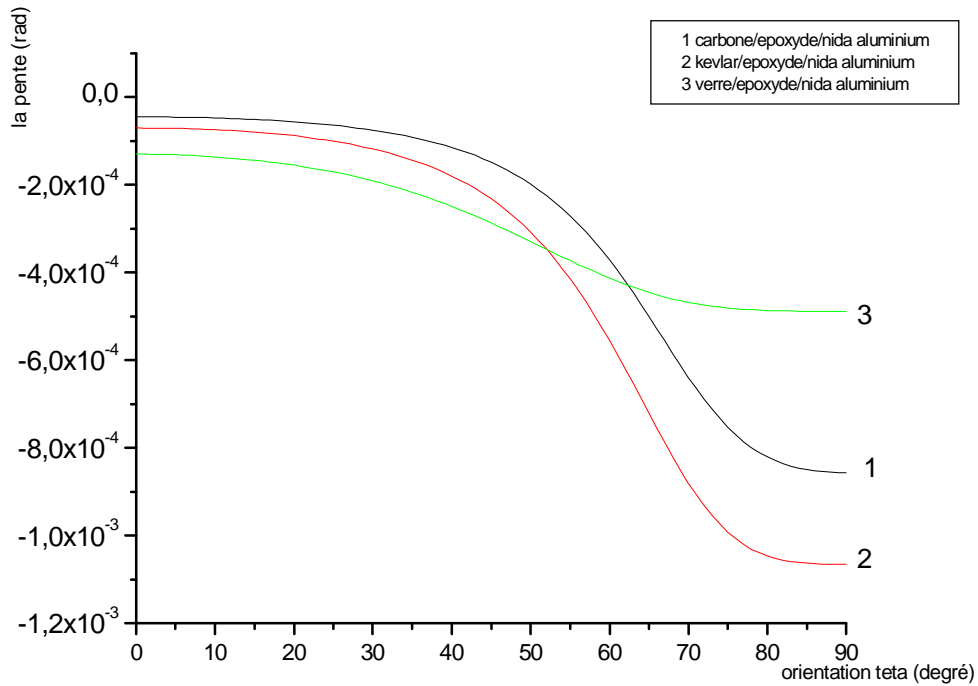


Figure 4.17 : Variation de la pente d'une plaque sandwich à différents matériaux de revêtements soumise à la flexion cylindrique en fonction de l'angle d'orientation des fibres à la distance $x = 0.6$ m

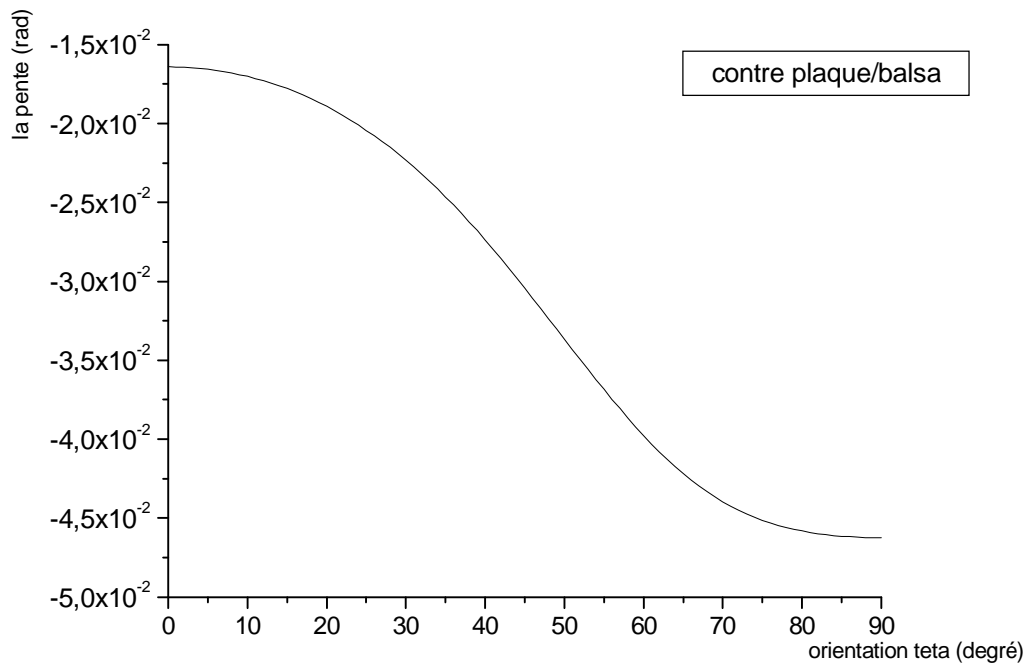


Figure 4.18 : Variation de la pente d'une plaque sandwich contre plaqué/balsa soumise à la flexion cylindrique en fonction de l'orientation des fibres à la distance $x = 0.6$ m

A partir de l'évolution des Figures (4.15) et (4.17) on peut distinguer trois zones. la première concerne les angles comprises entre 0° et 53° ou la plaque sandwich verre/epoxyde/nida aluminium fléchit plus que le kevlar/epoxyde/nida aluminium et le carbone epoxyde/nida aluminium. La deuxième zone teta de 54° à 63° la résistance à la flexion cylindrique du matériau sandwich à revêtement verre/epoxyde s'améliore et devient supérieure à celle du kevlar/epoxyde. Lorsque l'orientation des fibres du verre/epoxyde /nida aluminium dépasse les 63° , on distingue la 3^{ème} cette orientation favorise de plus en plus l'augmentation de la résistance du matériau des revêtements et devient constante chaque fois qu'on s'approche de 90° , En revanche le Kevlar/epoxyde/nida aluminium résiste moins et sera le plus faible avec l'orientation des fibres.

De plus et d'après les résultats obtenus, le matériau sandwich contre plaqué /balsa présente une faible résistance à la flexion cylindrique que le matériau sandwich à revêtement de nature composite stratifié et d'âme nida aluminium.

L'influence de la variation de l'orientation du renfort des revêtements sur les comportement mécanique des plaques sandwiches chargées à la compression et d'après les Figures (4.19) et (4.20), on constate que la charge critique est très grande pour des angles petites, ensuite elle décroît jusqu'à atteindre la valeur de 23 380,86 N.m pour le carbone/epoxyde/nida aluminium et 18795,80 N.m pour le kevlar/epoxyde/nida aluminium, et la valeur de 40 838,54 N.m dans le cas du verre/epoxyde/nida aluminium enfin à 434,23 N.m concernant le contre plaqué/balsa

D'après les résultats obtenues, on peut constater que le matériau sandwich contre plaqué/balsa résiste moins au flambement en le comparant aux matériaux sandwichs à revêtements composites stratifiés et ont une âme nida aluminium.

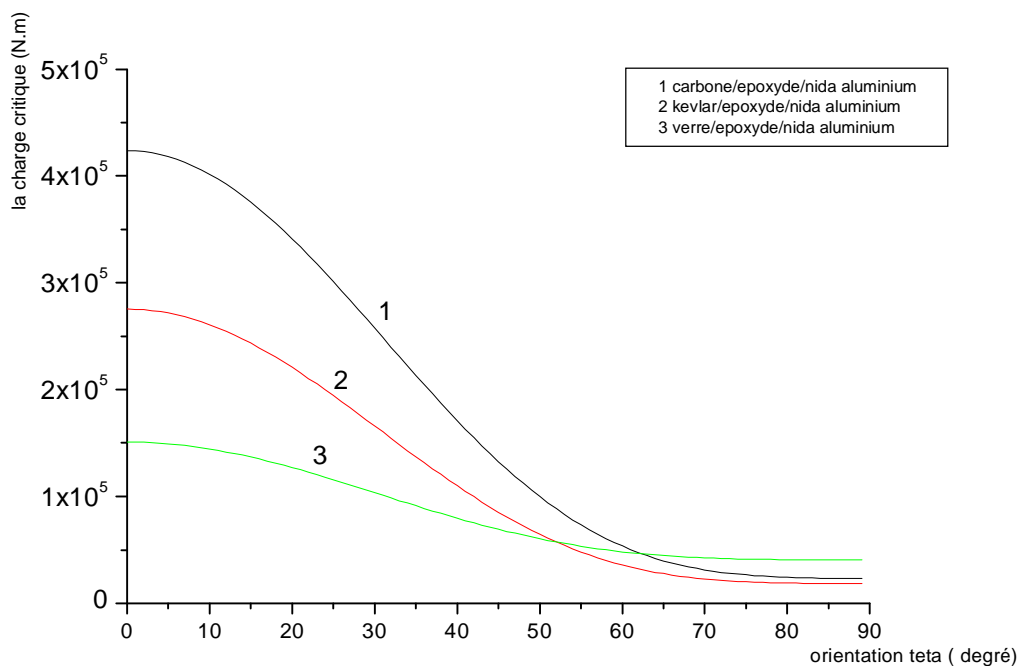


Figure 4.19 : Variation de la charge critique des plaques sandwiches à différents matériaux de revêtements soumises au flambement en fonction de l'orientation des fibres à la distance $x= 0.6$ m

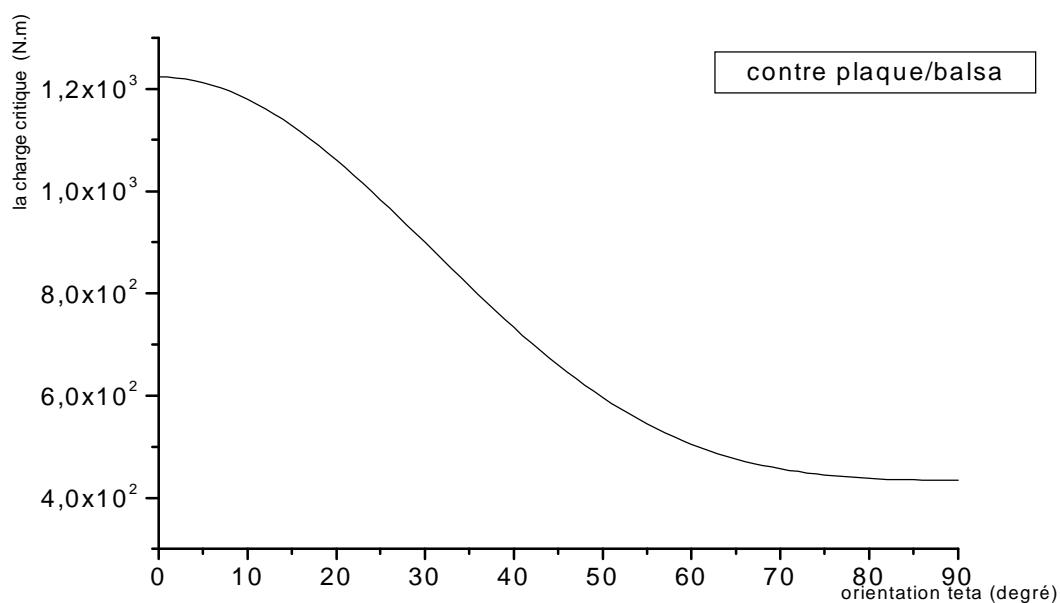


Figure 4.20 : Variation de la charge critique des plaques sandwiches contre plaqué/balsa soumises au flambement en fonction de l'orientation des fibres à la distance $x= 0.6$ m

D'après la (Figure 4.19), on constate que l'évolutions de la charge critique des trois matériaux sandwiches présente au cours de la première zone que les revêtements en Carbone/Epoxyde à orientation de 0° à 53° résiste mieux au flambement que les deux autres sandwichs .La deuxième et la troisième zone correspondant aux intervalles angulaires respectifs de 54° à 63° ,et à partir de 63° le matériau sandwich à revêtement verre/epoxyde travail mieux au flambement et devient le plus résistant .Par contre chaque fois qu'on s'approche de 90° ,la charge critique des deux autres revêtements deviennent de plus en plus égales.

IV.5.2.2 Influence de la nature du matériau de l'âme sur le comportement mécanique d'une plaque sandwich à revêtement verre/epoxyde:

Pour étudier l'influence de la nature du matériau de l'âme sur le comportement mécanique d'une plaque sandwich mince soumise à la flexion cylindrique(Fig 4.21) et au flambement (Fig 4.22),on à considérée des revêtements en verre/epoxyde et des âmes très diverses nida aluminium ,mousse herex et nida plast .

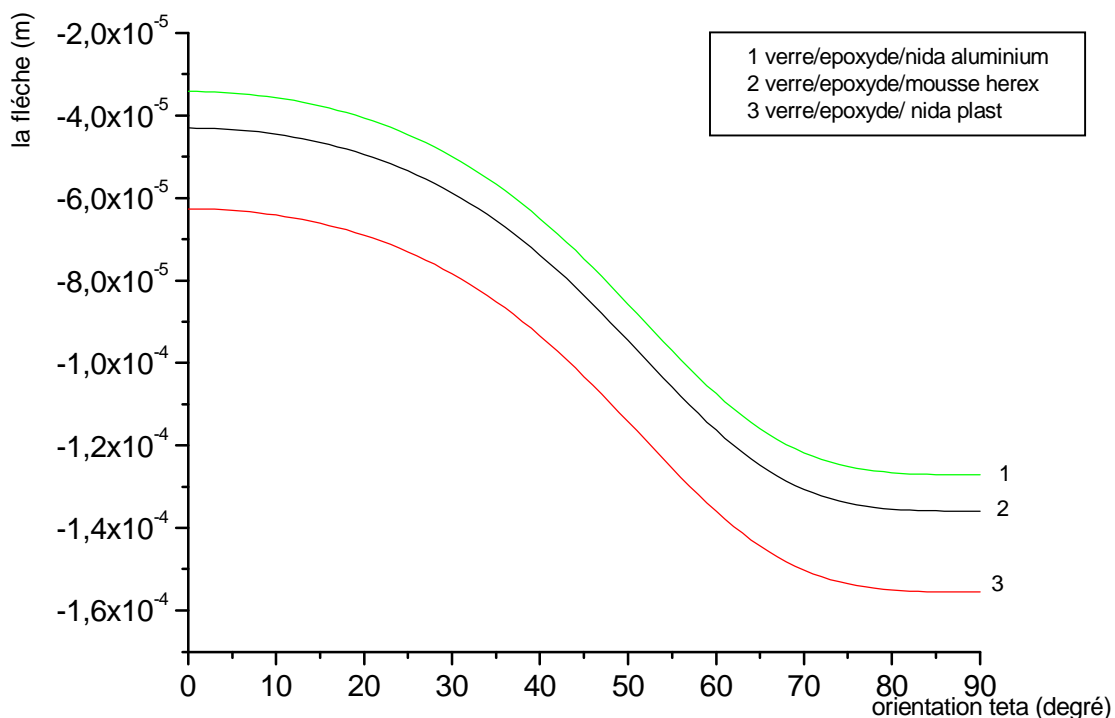


Figure 4.21 : Variation de la flèche d'une plaque sandwich à différents matériaux d'âmes en fonction de l'orientation des fibres à la distance $x = 0.6$ m

Sur la (Figure 4.21) ,il est illustré la variation de la flèche des plaques sandwiches à différents matériaux d'âmes en fonction de l'angle de l'orientation des fibres .la flèche atteinte sa valeur maximale pour $\theta = 0$.ensuite elle diminue avec l'augmentation de l'angle θ .

On remarque aussi, d'après les trois courbes de la (Figure 4.21) que quelque soit la valeur de l'angle θ , le matériau sandwich verre/epoxyde/nida aluminium travail mieux à la flexion cylindrique que lorsque l'âme est le mousse herex, ou le nida plast .au fur et à mesure qu'on s'approche de 90° , les résistances des trois plaques s'approchent.

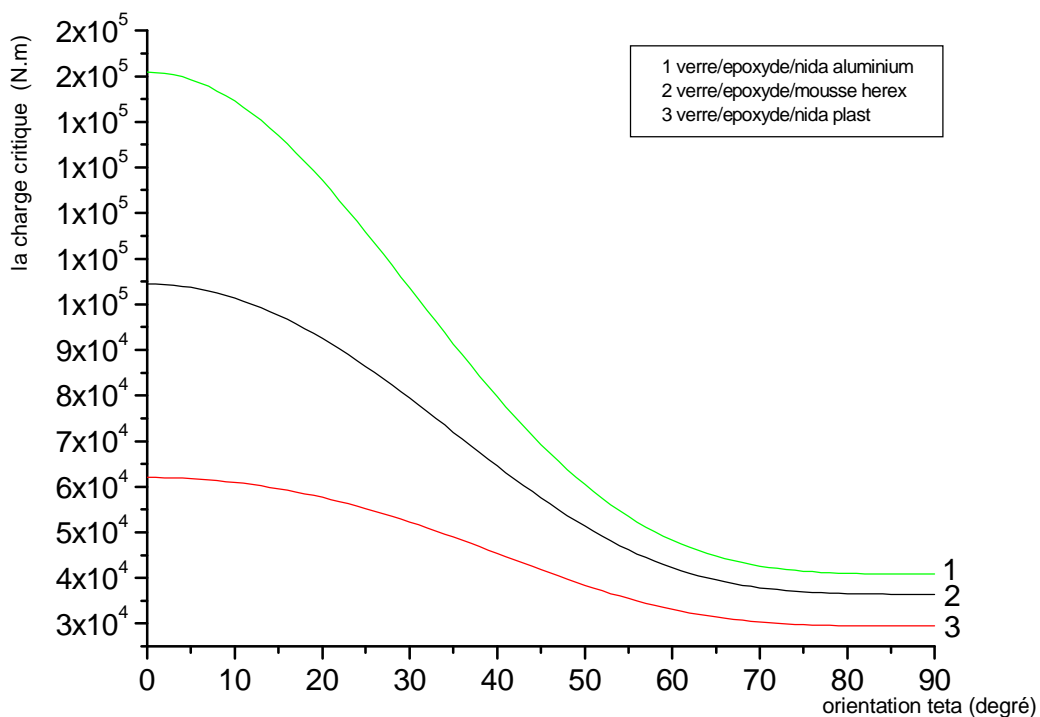


Figure 4.22 : Variation de la charge critique des plaques sandwiches à différents matériaux d'âmes soumises au flambement en fonction de l'orientation des fibres à distance $x= 0.6$ m

D'après la (Figure 4.22), qui représente la variation de la charge critique au flambement des plaques sandwiches en fonction de l'orientation des fibres on constate que l'évolution de la charge critique au flambement décroît moins rapidement avec l'augmentation de l'orientation θ que dans le cas de la flexion cylindrique, c'est toujours le verre/epoxyde/nida aluminium qui résiste mieux et le verre/epoxyde/nida plast qui est le moins résistant.

Conclusion

Cette étude consiste à décrire le comportement mécanique des plaques sandwiches à différents matériaux de revêtements qui sont de plus en plus utilisées dans la conception des structures minces .L'intérêt principal de telles structures est de réduire le poids et d'augmenter la résistance.

Le comportement mécanique des plaques sandwiches minces et symétriques chargées à la flexion cylindrique et en compression est très différent de celui d'un matériau classique ,ou même d'un multicouche à cause de la nature de leurs composants et les propriétés de leurs constituants âme – revêtements.

Dans cette étude, on a considéré des revêtements à matrice époxyde et à fibres unidirectionnelles de verre, carbone, kevlar ou à matériau à base de bois (contre plaqué) dont l'empilement des couches forme des stratifiés symétriques $[90^{\circ}/0^{\circ}]_{5s}$ ou équilibrés $[-\theta/+\theta]_{5s}$.

Afin de décrire le comportement des revêtements constituant le matériau sandwich il est nécessaire de formuler les équations d'équilibres et de considérer la théorie classique simplifiée des stratifiés et d'établir la loi de comportement mécanique du matériau bois .Pour étudier le comportement mécanique d'une plaque sandwich, soumise à la flexion cylindrique et au flambement ,nous considérons le cas des plaques sandwiches constituées de deux peaux identiques dont les axes d'orthotropie sont parallèles aux axes x-y de la plaque .Les revêtements sont constitués de couches unidirectionnels renforcés à 60% de leurs volumes .

L'analyse des valeurs des flèches et des charges critiques obtenues respectivement pour des plaques sandwiches chargées à la flexion cylindrique et au flambement a montré que le carbone/époxyde résiste mieux que le kevlar/époxyde et le verre/époxyde à même âme nida aluminium.C'est la nature de la fibre de renforcement des revêtements qui influe sur les comportement des plaques sandwiches par contre le contre plaqué /balsa présente des flèches plus importantes et des petites valeurs de la charge critique au flambement

indiquant sa faible résistance lorsqu'il est chargé à la flexion cylindrique ou au flambement. D'autre part, l'étude de l'influence du matériau de l'âme sur le comportement mécanique d'une plaque sandwich mince à revêtement verre/epoxyde a montré que l'utilisation du nida aluminium comme âme est mieux que la mousse herex et le nida plast.

L'évolution des contraintes dans la peau supérieure est caractérisée par une forme linéaire et elles sont nulles au milieu de la plaque. La valeur des contraintes s'accroît successivement de la 10^{ème} couche jusqu'à atteindre sa valeur maximale dans la 1^{ère} couche de la peau supérieure.

Afin d'étudier l'influence de l'orientation des plis constituant les revêtements sur le comportement mécanique du matériau sandwich, on a considéré des stratifiés équilibrés $[+\theta / -\theta]_{5s}$. Pour des plaques à différentes largeurs à âme nida aluminium et à la distance $x = 0.6$ m, on a trouvé respectivement que les revêtements en carbone /epoxyde résistent mieux au flambement et à la flexion cylindrique lorsque l'orientation θ est inférieure à 63° . Dès qu'on s'approche de 90° , le verre/epoxyde devient le plus résistant. En revanche, la variation de cet angle pour le matériau sandwich à base de bois, le contre plaqué /balsa ne présente aucune influence sur sa résistance à la flexion cylindrique et au flambement et reste toujours faible.

De plus, l'étude du comportement mécanique des plaques sandwiches à différents matériaux d'âme en fonction de l'angle d'orientation des fibres de verre, renforçant la résine epoxyde constituant les revêtements, a montré que l'utilisation du nida aluminium comme âme au lieu de la mousse herex et du nida plast améliore la résistance de la plaque sandwich.

Références bibliographiques

- [1] **A .SAIDI, P. COOREVITS, H.JAFFAL**, " Solution 3D par homogénéisation d'une structure sandwich et retour à l'échelle macroscopique", LMCA, Université de Picardie jules verne, 2001
- [2] **Y.AMINANDA, B.CASTANIE, JJ.BARREAU, P.THERVENE** "Etude expérimentale et modélisation du comportement en compression des structures nid d'abeilles " , Journal de physique III proceedings 12 Issue 11 ,2002 PP 219-226
- [3] **J.PAYAN**,"Etude du comportement de composites stratifiés sous chargement statique et de fatigue " , Thèse de PhD,Université de la méditerranée – Aix – Marseille
- [4] **J.DEOCON**, " Sélection des matériaux et des procédés de mise en œuvre " , Brême juin 1999
- [5] **P.LEMOINE, L .SALVO, D.LANDRI**, "Optimum design of metal foam in sandwich structures using genetic " , Metal structures, Breme, juin 1999
- [6] **M.TAURATIER, M.THOUROT**,"Modes de ruine de panneau composite sandwich " , janvier 2002
- [7] **M.GEOFFREY, A.TESSIER** "A {1.2} –order bending theory for laminated composite and sandwich beams", structure division USA 1998 PP 565-576
- [8] **G-Q-LI** , "Stress concentration and local behaviour of prestressed composite laminates, sandwich plates with overhangs in cylindrical bending", Composite structures 42 1998 ,PP 203-215
- [9] **F.NORIOT, J.F FERRERO, J.J BARREAU, B.CASTANIE**,"Analyse d'inserts pour les structures sandwichs composites " , Mec.Ind 2000 ,PP 241-249

- [10] **A.CORIGLIANO, E. RIZZI , E.PAPA** " Experimental characterization and numerical simulation of syntactic –foam/glass –fiber composite sandwich" , composite and technology, 60 2000, PP 2169-2180
- [11] **Y.B.CHO, R - C. AVERILL,**" First order zig zag subliminated plate theory and finite element model for laminated composite and sandwich panels " , Composite structures, 50 2000, PP 1-15
- [12] **G.DEMELIO, K .GENOVES, C.PAPPA** "An experimental investigation of static and fatig behaviour of sandwich composite panels joined by fasteners " ,composite B 3,2001 ,PP 299 – 308
- [13] **B.K.HADI, F.L .MATTHEWS,**"Buckling of anisotropic sandwich panels containing holes" PART I overall buckling ", Composite structures, 52 2001, PP205-216
- [14] **V . POLYCOV** ,"Stress concentration in bending of sandwich orthotropic panels inder point forces", Composite structures, 48 2000,PP 177-181
- [15] **A .DESSARTHE,**" Introduction aux plastiques et composites en mécanique" , Centre technique des industries mécaniques Cetim
- [16] **M .CHATIN,**"Matériaux composites – présentation générale", Technique de l'ingénieur BT4 , 2000
- [17] **C. DECOLON,**" Structures composites –calcul des plaques et des poutres multicouches", Hermes science publication, Paris ,2000
- [18] **F. PLASSAT,**"Mise en œuvre et usinage du bois ", Technique de l'ingénieur BT1, 2000
- [19] **F.MILI,** "Etude du comportement mécanique d'un matériau composite à renforcement unidirectionnel " Thèse de magister, Université de Constantine ,1995

- [20] **D .MASSON, M .CHRISTINE**, "Matériaux dérivées du bois ", Technique de l'ingénieur CB1, 2000
- [21] **D.GAY**, " Matériaux composites", Hermes, Paris ,1991
- [22] **S.P.TIMOSHENKO, J.N.COODIER**, "Theory of elasticity ", International student edition, 1982
- [23] **N.J.PAGANO**, " Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending" , Journal of composite materials, 1969, PP 398-411
- [24] **D.GUITARD**, " Mécanique du matériau bois et composite ", Avril 1987
- [25] **P.GOGNARD**, " collage des métaux généralités et caractéristiques ", Techniques de l'ingénieur BT4 , 2000
- [26] **J.CAMPREDON**, " Le bois matériau de la construction moderne", Dunod Paris 1953
- [27] **F.MILI**, " Caractérisation du comportement des plaques composites Verre E /Epoxyde soumises à des impacts localisés ", Doctorat d'état, Université de Constantine ,2001
- [28] : **J.EYROLLES**, " Résistance des matériaux par la pratique ", tome II et III, Janvier 1995
- [29] **J.M .BERTHELOT**, " Matériaux composites ", Masson, Paris 1996
- [30] **A.DESSARTHE**, " Assemblage des matériaux composites structures sandwiches et matière plastiques ", Cetim, 1992
- [31] **M.P .ANSEL, K.TSAI**, " Elastic and fatigue characteristics of wood and wood laminates ", Paris, 1986

- [32] **VA . POLYAKOV**, "Deformation of sandwich panels in cylindrical bending by point forces ", Mechanics of composite materials, 32 1996, PP 588-611
- [33] **M.P.A NEMETH**, "Buckling analysis for rectangular orthotropic plates with centrally located cut –outs ", NASA, 1984
- [34] **G.PICKETT**, " Bending, buckling and vibration of plates", New York press, 1964
- [35] **E.REISSNER**, " Reflections on the theory of elastic plates ", applied Mechanis review 1985
- [36] **J.N.REDDY**, " Refined computational models of composite laminates", International journal for numerical methods in Engineering, 1989, PP 361-382
- [37] **Y.FROSTIG**, "Stress concentration in the bending of sandwich beams with transversely flexible cores ", Composite structures 1993 PP 24-161
- [38] **E.REISSER**, " The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates" , Journal of applied mechanics, 1945, PP 66-77
- [39] **P.MINGNET, PA .LAGACE**, "Buckling loads of sandwich panels with carbon fiber face plates ", Journal Aero 1973, PP 295-312
- [40] **J.DAVALOO**, "Transverse shear stiffness of composite honeycomb core with general configuration "Journal Eng Mech, 2001, PP 11-51
- [41] **P.QIIAO** , "Homogenized elastic properties of honeycomb sandwich with skin effect ", Int journal solids structur, 2002, 39 -88

ABSTRACT

The sandwich material, present a certain interest in term of rigidity and specific resistance for the aeronautic structure design. The study of this material meets always the choice problem of their constituents (coating and heart) in order to load the optimal mechanical characteristics.

The aim of our work is to do a comparative study of the mechanical behaviour of the sandwich plates with various materials of coatings charged in cylindrical bending and compression by taking into account of transverse shearing. For this reason, the coatings are considered at the base of wood (plywood) or composite laminates (glass/epoxy, graphite/epoxy or kevlar /epoxy) of stacking sequence $[-\theta/+ \theta]_{5s}$ and $[90^{\circ}/0^{\circ}]_{5s}$ and the heart is in balsa, aluminium honeycomb, moss herex, or plast honeycomb .The mechanical behaviour of the sandwich plates was determinated by the use of the mathematical approaches based on the formulation of the equilibrium equations, and the development of the classical theory of thin laminated plates .The change of the nature constituent material as well as the research of the effect of the plate dimensions and the orientation of fibers reinforcing the composite coatings permit to determine the evolution of the plates resistance and their deformations, and to calculate the stress in each layer composing the coatings superior and inferior.

The obtained different results were shaw that the sandwich material with coating in graphite /epoxy and with heart in aluminium honeycomb resist in buckling and cylindrical bending better .In return the material at the base of wood (plywood/balsa),is characterized by a low mechanical resistance. The adequate choice of the coating material thus ensures a better behaviour of all the sandwich plate.

Key words: Sandwich material, Coating, Heart, Cylindrical bending, buckling, Resistance, Deformation.

ملخص

تمثل مادة الساندويش أهمية أكيدة من حيث الصلابة والمقاومة والنوعية في تكوين هياكل تستعمل في الطيران. دراسة هذه المادة تصادف دائما مشكلة اختيار مكوناتها (التغليف و الجوف) بهدف الحصول على مواد تتميز بخصائص ميكانيكية عالية.

هدف عملنا هو إجراء مقارنة للتصرف الميكانيكي لصفائح الساندويش المكونة من مختلف الأغلفة المعرضة للانحناء الأسطواني و إلى الضغط، آخذين بعين الاعتبار القص العرضي. من أجل هذا الغرض، فالتغطية المستعملة هي من الخشب (صفائح الخشب) أو مركبات منضدة (زجاج / ايبوكسي ، كاربون / ايبوكسي أو كيفلار / ايبوكسي) ، حيث يكون تركيب الصفائح هو $[\theta + / \theta -]_{5s}$ أو $[90/0]_{5s}$ و الجوف هو من البالزا ، نيدا ألمنيوم ، رغوارة اركس أو نيدا بلاسط. يتعين التصرف الميكانيكي لصفائح الساندويش باستعمال تقريبات رياضية تعتمد على صياغة معادلات التوازن و تطوير النظرية الكلاسيكية الخاصة بالصفائح المنضدة الرقيقة يساعد تغيير نوع مادة المكونات و كذا البحث عن تأثير أبعاد الصفيحة واتجاه الألياف المقوية للأغلفة المركبة على تعيين مقاومة الصفائح و تشوهها و حساب الاجهادات في كل طبقة مكونة للتغليف العلوي و السفلي.

النتائج المختلفة المحصل عليها تبين أن مادة الساندويش ذات تغليف كاربون ايبوكسي و جوف نيدا ألمنيوم تقاوم أحسن الالتواء و الانحاء الأسطواني. بالمقابل فالمادة التي أساسها الخشب (صفائح الخشب / بالزا) تتميز بضعف المقاومة الميكانيكية.

إن الاختيار الأحسن لمادة التغليف يضمن اذا تصرفا متميزا لكل صفيحة الساندويش.

الكلمات المفتاحية: مادة ساندويش ، تغليف ، جوف ، انحناء أسطواني، التواء ،

مقاومة ، تشويه .