

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MENTOURI-CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

N° d'ordre :

Série :

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de Magister en génie mécanique

Option

Construction mécanique

Par

Samir GHORAB

COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE DES MATERIAUX ORTHOTROPES

Devant le jury :

Président :	I. AMARA	MC	Univ-Constantine
Rapporteur :	B. NECIB	Prof	Univ-Constantine
Examineur :	F. MILI	MC	Univ-Constantine
	A. BELLAOUAR	MC	Univ-Constantine

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier vivement Monsieur Brahim NECIB, professeur et Directeur du Laboratoire de Mécanique au Département de Génie Mécanique, Université Mentouri Constantine ; mon encadreur de thèse de Magister, pour la confiance qu'il a placé en moi, pour sa patience, pour ses conseils, pour son aide et son soutien permanent.

Je tiens à exprimer mes profonds remerciements à Monsieur I. AMARA, Maître de Conférence et Directeur du Département de Génie Mécanique, Université Mentouri Constantine, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance de ce mémoire.

Je voudrais adresser mes remerciements les plus respectueux à Messieurs F. MILI, et A.BELLAOUAR, Maîtres de Conférence au Département de Génie Mécanique, Université Mentouri Constantine pour l'honneur qu'ils m'ont accordés en acceptant d'être membre de ce jury.

Et que tous les enseignants qui ont contribué à ma formation trouvent ici mes profondes reconnaissances.

Monsieur Samir GHORAB

SOMMAIRE

Dédicaces
Remerciements
Abstract
Résumé
Nomenclature
Sommaire

INTRDUCTION	1
--------------------------	----------

CHAPITRE I: INTRODUCTION AU MATERIAUX COMPOSITES

1.1 Définitions	4
1.2 Avantages des matériaux composites	4
1.3 Renforts	5
1.4 Classification des matériaux composites.....	5
1.4.1 Les matériaux composites unidirectionnels	5
1-4 Les matériaux composites multidirectionnels.....	5
1.5 La fibre	6
1.6 Matériaux employés dans les renforts	6
1.6.1 fibres de verre	7
1.6.2 fibres de carbone	8
1.6.3 Polyamides	9
1.6.4 Polyester	10
1.6.5 Aramides	10
1.6.6 Les fibres à base de bore, carbure de bore et carbure de silicium...	11
1.6.7 Les fibres à base de silice	11
1.7 Les matrices	13
1.7.1 Les matrices organiques	13
1.7.1.1 Résines thermodurcissables	13
1.7.1.2 Résines thermoplastiques	13
1.7.1.3 Résines thermostables	13
1.8 Procédés de fabrication	16
1.8.1 Moulage au contact	16
1.8.2 Moulage par projection simultanée	16
1.8.3 Injection thermodurcissable BMC	17
1.8.4 Compression thermodurcissable	17
1.8.5 pultrusion	17
1.8.6 Enroulement filamentaire	17
1.9 Application des matériaux composites	19

CHAPITRE II: LE COMPORTEMENT ELASTIQUE DES MATERIAUX COMPOSITES

2.1 Introduction	25
2.2 Les modules longitudinal et transversal d'Young d'un composite ...	26
2.3.1 Matériaux anisotropes	27
2.3.2 Matériaux monocliniques	28

2.3.3 Matériaux orthotropes	28
2.3.4 Matériaux transversalement isotropes	30
2.3.5 Matériaux quasi isotropes transverses	31
2.3.6 Matériaux quasi isotropes	31
2.3.7 Matériaux isotropes	31
2.4 Comportement d'un pli de composite unidirectionnel	32
2.5 Comportement d'un pli par rapport à un axe quelconque	34
2.6 La loi de comportement d'un composite stratifié	37
2.7 Comportement en flexion	41

**CHAPITRE III: LE COMPORTEMENT THERMOELASTIQUE
ET HYGROELASTIQUE DES MATERIAUX ORTHOTROPES**

3-1 Comportement thermoélastique	46
3-1-2 Inégalité de Clausius-Duhem	46
3-1-3 Dissipation	48
3-1-4 Loi de Fourier	49
3-1-5 Effet de la température sur un stratifié	53
3-1-6 Comportement global du stratifié	55
3-2 Comportement hygroélastique	55
3-2-1 Comportement hygrothermoélastique d'un composite stratifié.....	56

**CHAPITRE IV: LE COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE DES
MATERIAUX ORTHOTROPES**

4-1 Généralité	58
4-1-1 Quelques phénomènes en matériaux viscoélastiques	58
4-1-2 Simplification	60
4-2 La fonction d'Heaviside	60
4-3 Fonction de relaxation et de retard à la déformation	61
4-3-1 Fonction de retard (le fluage)	61
4-3-2 Principe de superposition de Boltzmann	63
4-3-3 Fonction de relaxation	64
4-3-4 Autres expériences	68
4-4 Les modèles rhéologiques	69
4-4-1 Modèle de Maxwell	69
4-4-2 Modèle de Kelvin-Voigt	71
4-4-3 Modèle de Zener	72
4-4-4 Modèle de Maxwell généralisé	73
4-4-5 Modèle de Burger	73
4-5 Méthodes de résolution	75
4-5-1 La méthode de transformation de Carson-Laplace	75
4-5-2 Modules complexes (méthode de Fourier)	81
4-6 Comportement d'un pli unidirectionnel dans le domaine de Carson-Laplace	83
4-7 Comportement d'un pli orienté dans le domaine de Carson-Laplace ...	84
4-8 Comportement d'un stratifié dans le domaine de Carson-Laplace	85
4-9 Comportement global du stratifié dans le domaine de C-L.....	88
4-10 Effet de la température sur le comportement viscoélastique.....	89
4-10-1 L'effet sur le module de relaxation	89
4-10-2 Loi de comportement	89
4-10-3 Effet thermique sur le comportement viscoélastique du stratifié..	91

CHAPITRE V : APPLICATION AU COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE DES MATERIAUX ORTHOTROPES	
5.1 Introduction	93
5.2 Définition des matériaux	93
5.3 Etapes de calcul	95
5.4 Discussions des résultats	95
CONCLUSION	114
Références bibliographiques	115

INTRODUCTION

Durant ces dernières années, l'utilisation des matériaux composites a connue dans l'industrie une évaluation considérable, surtout dans le domaine de la mécanique, l'aéronautique, le génie civil, l'aérospatiale, etc...

Les matériaux composites sont des matériaux qui associent deux matériaux différents aussi bien par leur forme que par leurs propriétés mécaniques afin d'accroître leur performances et ce en tirant avantage de chacun des ces matériaux. En générale, ils possèdent des qualités remarquables qui reposent sur les propriétés mécaniques d'une fibre (carbone, bore, ou organique aramide) qui présente une résistance en traction et une rigidité exceptionnelle (supérieure à celle des meilleur aciers). Ces fibres sont noyées dans une matrice (métallique ou organique) dont le rôle complexe est de lier les fibres, les maintenir alignées, et de leur transmettre les charges appliquées à la pièce [7].

En réalité les deux constituants du matériaux composites qui sont la matrice et le renfort se combinent pour donner un matériau hétérogène souvent anisotropie, d'où les propriétés seront différentes d'une direction à une autre.

Les matériaux composites à matrice organique et à fibre de verre ou de carbone trouvent de plus en plus d'applications dans la réalisation des pièces structurales de dimensions diverses dans de nombreux secteurs industriels tels que : l'aéronautique, la construction d'automobiles, la construction navale, le bâtiment et la biomécanique. Ces secteurs se sont tournés vers cette alternative vue l'allongement de leur structure avec des propriétés mécaniques égales ou supérieures à celles des pièces en métalliques [11].

Le comportement à long terme de ces types de matériaux est un domaine très important dans leur durée de vie et leur fonctionnement.

La viscoélasticité est donc un concept important pour déterminer et analyser le comportement à long terme des structures. Elle nous permet de décrire le comportement des matériaux montrant des effets de taux de contrainte sous les charges appliquées. Ces effets sont illustrés par des phénomènes de fluage sous certaines charges ou par

relaxation d'effort sous une déformation constante. Pour la plupart des matériaux composites, le comportement viscoélastique est principalement dû à la matrice [3] et [4].

Les matériaux composites sont renforcés avec des fibres en partie pour résister à la déformation de fluage. L'importance de la déformation de fluage induite dans une structure composite sous un certain chargement est influencée par une variété de facteurs, tels que l'architecture, la température, l'humidité, la fréquence de chargement... En raison de la variété des matériaux composites, il peut être coûteux et difficile de caractériser le comportement de fluage ou de relaxation des composites par les essais expérimentaux [4].

En outre, les essais expérimentaux en temps réel sous la température différente et les états d'humidité sont très longs et difficiles à effectuer. Par conséquent, un besoin existe pour développer un modèle analytique qui peut exactement prévoir le comportement de fluage des structures composites et vérifier ce modèle avec des données expérimentales.

A cet effet plusieurs modèles mathématiques ont été développés pour prévoir le comportement viscoélastique des matériaux. Ces modèles mécaniques se composent essentiellement de ressorts et d'amortisseurs [9] pour simuler les réponses élastiques et visqueuses des matériaux (par exemple, modèle de Maxwell et de Kelvin-Voigt), où le ressort et l'amortisseur représente la réponse élastique initiale et la propriété de la dépendance de temps du matériau, respectivement.

Le comportement viscoélastique de la matrice et de la fibre peut être représenté par ces modèles. Les modèles micromécaniques sont disponibles pour évaluer les propriétés viscoélastiques des composites et peuvent être employés alternativement pour prévoir les propriétés de macromécanique des composants.

Notre travail consiste en l'analyse et le comportement viscoélastique des matériaux orthotropes. Ce travail est composé de quatre chapitres en plus d'une introduction et une conclusion :

Dans le premier chapitre une introduction générale aux matériaux composites, leur définition, leurs avantages, leur état de fabrication avec leurs principaux constituants (fibres et matrices) ainsi que leur domaines d'applications sont présentés.

Dans le deuxième chapitre, la théorie du comportement élastique des matériaux composites est présentée. En fait, la loi de Hook pour les matériaux anisotropes, monocliniques, orthotropes, transversalement isotropes et quasi isotropes ainsi que la loi de comportement d'un composite stratifié ont été considérés.

Dans le troisième chapitre, le comportement thermoélastique et hydroélastique des matériaux composites a été étudié. L'effet de la température et de l'humidité sur le comportement élastique des composites d'un pli et d'un stratifié ont été considérés.

Dans le chapitre quatre le comportement viscoélastique des matériaux composites a été présenté. Dans ce chapitre a été analysé l'effet de la viscosité (généralement de la matrice) sur la loi du comportement des composites basant sur la superposition de Boltzmann, et aussi, a été résolu l'équation des caractéristiques par deux méthodes : l'une basée sur la transformation de Carson-Laplace, et l'autre basée sur la transformation de Fourier. Les fonctions de Heaviside, de relaxation, de retard ainsi que les modèles de solutions de Maxwell, de Kelvin-Voigt, de Zener et de Burger ont été présentés. Par ailleurs des exemples sur des résines de vinylester où le modèle de Maxwell pour deux conditions environnementales différentes ont été considérés.

Dans le cinquième chapitre est réservé à une applications au comportement viscoélastique des matériaux orthotrope du type verre/vinylester, et des stratifiés $[(+/- 45^\circ / CSM)_2]_S$ et $[(90^\circ / + / - 45^\circ / CSM)_3]_S$ tout en utilisant la théorie développée auparavant. Les coefficients de la complaisance et de la relaxation de ces types de matériaux ont aussi été déterminés et que le modèle de Maxwell a été validé.

CHAPITRE I:

LES STRUCTURES DES MATERIAUX COMPOSITES

1.1 Définitions:

Les matériaux utilisés dans les structures peuvent être classifiés en quatre catégories:

- Métaux,
- Polymères,
- Céramiques
- Composites.

Un matériau composite est, par définition, tout alliage ou matière première comportant un renfort sous forme filamentaire et une matrice. Il nécessite l'association intime d'au moins deux composants: le renfort et la matrice, qui doivent être compatibles entre eux et se solidariser, ce qui introduit la notion d'un agent de liaison, l'interface. Contrairement aux matériaux classiques dont on connaît à l'avance les caractéristiques mécaniques, celles des composites ne sont réellement connues qu'après fabrication, car on réalise, en même temps, le matériau et le produit.

Les principaux constituants sont le renfort et la matrice.

Le renfort a pour mission de supporter l'essentiel de l'effort mécanique appliqué au matériau. Le rôle de la matrice est plus complexe; elle doit lier les renforts entre eux, les protéger du milieu extérieur (corrosion par exemple) et répartir la charge mécanique appliquée.

1.2 Avantages des matériaux composites:

- Gain de masse, ce qui entraîne une économie de carburant ou un accroissement de charge utile ou encore un rayon d'action accru; c'est à dire de meilleures performance.

- Grande résistance à la fatigue.
- Faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur et de la corrosion (sauf alu-carbone).
- Insensibles aux produits chimiques "mécaniques" comme les graisses, huiles, liquides hydrauliques, peintures, solvants, pétrole.

On distingue, généralement, deux grandes familles :

- Les composites de grande diffusion (GD), peu coûteux, occupent une large part de marché.
- Les composites hautes performances (HP), assez onéreux, dont le marché est encore réduit.

1.3 Renforts:

Les renforts se présentent généralement sous diverses formes: linéique, surfacique et structures multidirectionnelles. Les renforts contribuent à améliorer la résistance mécanique et la rigidité des matériaux composites et se présentent sous forme filamentaire, allant de la particule de forme allongée à fibre continue qui donne au matériau un effet directif. Ils sont caractérisés par:

- La nature de fibre, minérale ou organique.
- L'architecture du renfort.

1.4 Classification des matériaux composites:

Selon l'orientation es fibres, on définit deux types e matériaux composites:

1.4.1 Les matériaux composites unidirectionnels:

Les fibres sont orientées dans une même direction, la direction principale de contrainte (fils parallèles sans torsion dit "roving" et nappe de fils). Les matériaux sont alors anisotropes, ils ont des propriétés différentes suivant les directions de l'espace.

1.4.2 Les matériaux composites multidirectionnels:

- Ils sont préparés à partir des types de fibres suivants : fils coupés et feutre de fils coupés dit "mat" pour une résistance multidirectionnelle aléatoire.

- mat à fibres continues, tissu bi ou tri-directionnel et tresse pour une résistance multidirectionnelle dans une direction privilégiée.



Figure I-1 Classification des matériaux composites

1.5 La fibre:

C'est le renfort qui constitue l'armature ou le squelette qui assure la tenue mécanique (résistance à la traction et rigidité...). Il est, par définition, de nature filamentaire (fibre minérale ou organique) allant de la particule allongée à la fibre continue. La fibre de renfort apporte donc toujours la tenue mécanique de la structure composite (tandis que la matrice apporte la forme et la tenue chimique) et peut représenter un taux massique de 20% à 80%.

En général, dans une structure composite (anisotrope), les fibres travaillent bien en traction, mais en comparaison avec les structures métalliques (isotropes), les performances en compression sont moins bonnes et la résistance au cisaillement demeure faible. D'où l'intérêt de l'association en forme pour obtenir une charpente résistante à toutes ces contraintes.

1.6 Matériaux employés dans les renforts fibreux:

Les matériaux employés pour produire les composites sont polymères et inorganiques. Parmi les matériaux traditionnelles généralement employées, il y a des polyamides, des polyester, des fibres aramides de métal et des fibres de verre, tandis que les matériaux ont de rendements élevés récemment développés, il y a les fibres

aramides, fibres de carbone, de fibres de polyéthylène et poly-ester - cétone. Ces matériaux sont différents pour leurs caractéristiques de résistance élastique et d'environnement.

1.6-1 Fibres de verre:

Grâce à leur haut module de traction, à leur bonne résistance de déchirure, et à leur stabilité dimensionnelle, les fibres de verre ont été employées pendant plusieurs années pour produire les tissus et les matériaux de renfort pour les composites. Elle est obtenue par la méthode de rotation chaude de verres faites d'une manière appropriée (habituellement, borate d'aluminosilicate) selon l'utilisation et l'environnement où elle sera employée. Les genres de verre généralement utilisés pour les fibres sont:

- Verre E pour les composites à grande diffusion (GD).
- Verre D pour les applications dans la construction électrique (circuits imprimés)
- Verre R pour les composites à haute performance (HP).

Avec une densité d'environ 2.6 g/cm^3 et les modules élastiques environ de 70 et de 90 Gpa.

Pour obtenir les composites avec des bonnes caractéristiques sous la charge d'étirage de coupure de la fibre (3% et 6% dans beaucoup de composites) doit être moins et la rigidité doit être plus que ceux de la matrice

Les avantages des fibres de verre:

- Rapport performances mécaniques/prix.
- Bonne résistance spécifique (pour verre R).
- Bonne adhérence avec toutes les résines (existence d'ensimages).
- Tenue à température élevée (50% de la résistance conservée à 350°C), incombustibilité.
- Dilatation et conductivité thermiques faibles.
- Bonnes propriétés diélectriques.

Les inconvénients:

- faible module (par rapport à la fibre de carbone ou à l'aramide).
- vieillissement au contact de l'eau.

1.6.2 Fibres de carbone:

Les fibres de carbone sont les filaments minces faites de carbone élémentaire avec les structures qui changent de ceux du carbone amorphe à ceux du graphite cristallin. Ces fibres possèdent les propriétés chimiques et physiques très variables, qui concernent les modules d'élasticité ou de rigidité, par exemple, changent environ de 35 Gpa, qui est la moitié de celle des fibres de verre ou de l'aluminium (environ de 70 Gpa), plus de trois fois que ceux de l'acier.

Les fibres de carbone conservent électrique, thermique et ces caractéristiques chimiques, et elles sont souvent employées comme renfort dans les composites polymères rigides.

Avec les technologies courantes de production, la résistance est plus grande, et elle est obtenue pour les fibres qui ont une rigidité entre 200 et 300 Gpa.

Les avantages de ces fibres sont:

- Excellentes propriétés mécaniques (R_t , R_c , E)
- Très bonne tenue en température (en atmosphère non oxydante)
- Dilatation thermique nulle
- Bonne conductibilité thermique et électrique
- Amagnétisme et perméabilité aux rayons X
- Bonne tenue à l'humidité
- Usinabilité aisée
- Faible densité < 2

Les inconvénients de ces fibres:

- Prix très élevé
- Précautions à prendre dans la mise en oeuvre (fibres cassantes)
- Tenue limitée aux chocs et à l'abrasion
- Mauvais comportement chimique avec l'oxygène (à partir de 400°C), avec les Acides oxydants à chaud et avec les métaux (corrosion galvanique)
- Adhésion difficile avec les résines

1.6.3 Polyamides:

Un des premiers matériaux polymères produits a été le filament en nylon, un polyamide obtenu par la polycondensation des diamines et des acides de dicarboxil qui peuvent être linéaires ou contenir les groupes aromatiques jusqu'à 85% de poids (si le contenu des composés aromatiques dans la structure réitérée est plus élevé que 85%, nous parlons des aramides).

Le nylon 6/6, par exemple, est obtenu d'une diamine linéaire et d'un acide linéaire de dicarboxil avec 6 atomes de carbone. La réaction entre l'amine et l'acide produit l'amide (NH-Co) qui caractérise ce groupe des matériaux.

Cette macromolécule est très flexible, peut tourner sur chaque lien et produit des fibrilles de polymère garnies des secteurs amorphes et des cristallites orient à la direction de repasser.

Le nylon a une grande affinité pour l'eau et sa résistance aux rayonnements ultraviolets n'est pas haute, mais, si protégé avec une bâche appropriée, peut atteindre une résistance acceptable d'environnement.

Cependant, en raison de son bas module d'élasticité (environ 5 Gpa), de sa tendance au plastique s'effondrant sous chargé et des variations dimensionnelles provoquées par l'eau absorbant (des fibres s'étendant dans les endroits et le rapetissement humides de fibre dans les endroits secs), ce matériau donne des problèmes dans les applications où la tension préliminaire de tissu et la stabilité dimensionnelle sont critiques.

La résistance de cette fibre change entre 500 et 700 Mpa, mais, comme le module élastique, elle est sensiblement réduite s'il y a humidité absorbée.

Les avantages de ces fibres:

- Bonne résistance spécifique à la traction.
- Très faible densité (1,45).
- Dilatation thermique nulle.
- Absorption des vibrations, amortissement.
- Excellente résistance aux chocs et à la fatigue.
- Bon comportement chimique vis à vis des carburants.

Les inconvénients:

- Prix élevé
- Faible tenue à la compression
- Reprise importante d'humidité (4%) nécessitant un étuvage avant imprégnation
- Faible adhérence avec les résines
- Sensibilité aux UV.
- Usinabilité difficile
- Tenue au feu, décomposition à 400°C

1.6.4 Polyester:

Les fibres de polyester sont obtenues par la rotation d'un polymère aromatique obtenu par la polycondensation de l'acide téréphtalique et d'un dialcool (glycols). Le polyester le plus utilisé est polyéthylène téréphtalique.

La structure orientée de fibres est semblable à celle des polyamides.

Le polyester contient un anneau aromatique, et il est moins flexible que des macromolécules de polyamide. En fait, les fibres sont caractérisées par un plus haut module élastique, environ 18 Gpa, et par résistance de coupure comme celle du nylon.

La résistance au rayonnements ultraviolets de ces fibres est très haute, et aussi leur sensibilité vers l'humidité.

1.6.5 Aramides:

Les polyamides aromatiques qui contiennent les groupes aromatiques plus fortement que 85% s'appellent l'aramides. Les premières fibres aramides ont été produites dans les années '60, et elles ont une poly-phenyldiamine-isoftalamide base, et elles sont commercialistes comme Nomex.

Cette fibre est bonne pour les applications où la résistance thermique élevée et exigée. Elle a un module élastique qui peut être comparé à celle du polyester mais il est moins variable en ce qui concerne la température. Ces fibres sont directement obtenues par un procédé de polymérisation, puisqu'elles ne soient fondues, non même aux températures plus haute que le polymère 400°C dégrade en fait avant qu'il fonde.

Les fibres aromatiques de polyamide ont été également synthétisées. Elles ont des caractéristiques mécaniques très élevées obtenues par la rotation humide d'une solution

liquide-cristalline du phényldiamine et du chlorite téréphtalique polymérisés en acide sulfurique: Kelvar.

En raison, les caractéristiques du monomère (par exemple la longueur de la diamine aromatique), des polymères aramides avec différentes caractéristiques mécaniques peuvent être obtenus. Parmi les plus communs est le Kevlar 29 et 49.

Le module élastique de Kevlar 49 est 135 Gpa et sa résistance de coupure est de 3.6 Gpa: ce matériau résulte cinq fois plus la résistance d'un filé en acier du même poids.

La structure fortement anisotrope de ces fibres aramides les rend cependant très faibles dans d'autres caractéristiques et elles sont seulement bonnes pour applications où il y a de traction chargée seulement.

Leur résistance à la compression est très basse. D'autre part, les mêmes causes qui donnent la basse résistance à la compression sont ceux qui donnent à cette dureté très élevée du matériau (fibres aramides sont employées pour produire les structures qui ont une résistance élevée aux impacts, comme, par exemple, à la balle la résistante).

La dureté élevée est une caractéristique de ces fibres aramides, suggère son utilisation dans les applications où les résistances de l'impact élevées sont nécessaires.

Les nouvelles formulations appelées Kevlar 149 sont étudiées et nous comptons qu'elles peuvent atteindre les modules élastiques environ de 190 Gpa et les résistances à la traction des matériaux composites de 3-4 Gpa.

1.6.6 Les fibres à base de bore, carbure de bore et carbure de silicium:

Elles sont obtenues par dépôt en phase gazeuse sur une âme en tungstène portée à 1200°C qui sert de substrat. On obtient des fibres de 100 à 150 microns de diamètre (ce qui est supérieur au diamètre des autres fibres) mais leur prix est élevé et elles sont difficiles à mettre en oeuvre (fragilité, usinage difficile, manipulations dangereuses). Elles ont des propriétés et domaines d'application voisins des fibres précédentes mais leur utilisation reste marginale.

1.6.7 Les fibres à base de silice:

Elles sont obtenues par fusion et utilisées surtout dans des composés à haute tenue thermique (bonnes propriétés d'ablation avec les résines phénoliques

Figure (I-4) caractéristiques moyennes des principales fibres de renforts

Fibre	densité	Charge de rupture en traction en (GPa)	Charge de rupture en compression (GPa)	Allongement à la rupture (%)	Module d'élasticité longitudinal (Gpa)	Diamètre du filament élémentaire μm	Coefficient de Poisson
Verre E	2.54	3.4	1.2	4.8	73	3 - 30	0.25
Verre R	2.48	4.4	1.3	5.4	86	3 - 30	0.2
Aramide bas module	1.45	3.1	0.5	2	70	12	
Aramide Haut module	1.45	3.1	0.5	1	130	12	
Carbone Haute ténacité	1.78	2.8	1.8	0.5	200	8	0.3
Carbone Haut module	1.8	2.2	1.3		400	8	0.35
Bore	2.63	3.5	3.5	0.8	400	100-200	
Acier XC10	7.85	1			210		
Aluminium	2.63	0.358			69.8		

1.7 Les matrices:

La matrice a pour rôle de lier les fibres renforts, de répartir les efforts (résistance à la flexion ou à la compression). Elle assure en outre la protection chimique et donne la forme au produit réalisé; pour les composites plastiques, c'est par définition un polymère ou une résine organique. Le choix de la matrice dépend de l'utilisation à laquelle est destinée le matériau composite. On distingue onc plusieurs familles de matrices.

1.7.1 Les matrices organiques: Ce sont:

1.7.1.1 Résines thermodurcissables:

Résines thermodurcissables (TD) qui sont, en général, associées avec des fibres longues. Les polymères thermodurcissables ont la forme d'un réseau tridimensionnel; au cours de la polymérisation, ce réseau se ponte (double liaison de polymérisation) et durcit de façon définitive lors du chauffage selon la forme souhaitée. La transformation est irréversible.

En particulier, les résines époxy sont employées à grande échelle en aéronautique. Elles permettent de concevoir des matériaux composites avec de bonnes propriétés mécaniques et utilisables jusqu'à 150-200°C

Polymère transformé en un produit essentiellement infusible et insoluble après traitement thermique (chaleur, radiation) ou physico-chimique (catalyse, durcisseur).

1.7.1.2 Résines thermoplastiques:

Polymère renforcés avec des fibres courtes (et, prochainement, avec des fibres longues) se développe fortement.

Les polymères thermoplastiques ont une structure linéaire ; ils sont mis en forme par chauffage (les chaînes se plient), et durcissent au cours du refroidissement (les chaînes se bloquent). La transformation est réversible.

1.7.1.3 Résines thermostables:

Polymère présentant des caractéristiques mécaniques stables sous des pressions et des températures élevées (>200°C) appliquées de façon continue.

Cette propriété est mesurée en déterminant la température que peut supporter la résine durant 2000h sans perdre la moitié de ses caractéristiques mécaniques

Tableau (I-2) Principales différences entre matrices TP et TD

Matrices	TD	TP
Etat de base	Liquide visqueux à polymériser	Solide prêt à l'emploi
Stockage	Réduit	Illimité
Mouillabilité des renforts	Aisée	Difficile
Moulage	Chauffage continu	Chauffage + refroidissement
Cycle	Long (polymérisation)	Court
Tenue au choc	Limitée	Assez bonne
Tenue thermique	Meilleure	Réduite (sauf nouveau TP)
Chutes et déchets	Perdus ou utilisés en charges	Recyclables
Conditions de travail	Emanations de solvants	Propreté

Matrices résineuses	r kg/m^2	E Mpa	G Mpa	n	$S_{rupture}$ Mpa	A %	$a.10^{-5}$ $^{\circ}C^{-1}$	l $W/m \times ^{\circ}C$	c $J/kg \times ^{\circ}C$	T_{max} $^{\circ}C$
Époxyde	1200	4500	1600	0.4	130		11	0.2	1000	90- 200
Phénolique	1300	3000	1100	0.4	70		1	0.3	1000	120- 200
Polyester	1200	4000	1400	0.4	80	2.5	8	0.2	1400	60- 200
Polycarbonate	1200	2400		0.35	60		6		1200	120
Vinylester	1150	3300			75	4	5			<100
Silicone	1100	2200		0.5	35					100- 350
Urethane	1100	700- 7000			30	100				100
polyimide	1400	4000- 19000	1100	0.35	70	1	8	0.2	1000	250- 300

1.8 Procédés de fabrication:

Les procédés les plus importants sont:

1.8.1 Moulage au contact:

Procédé manuel tant la réalisation de pièces à partir de résines thermodurcissables, à température ambiante et sans pression. Les renforts sont déposés sur le moule et imprégnés de résine liquide, accélérée et catalysée, pour être mis en forme progressivement au moyen d'ébulleurs et de pinceaux. Après durcissement de la résine, la pièce est démoulée et détournée.

Avantages : Très larges possibilités de forme, Pas de limite dimensionnelle, Une surface lisse gelcoatée (aspect, tenue à la corrosion), propriétés mécaniques moyennes à bonnes, investissements spécifiques très faibles, moules simples, peu onéreux, rapides à réaliser en interne

Limites : Une seule face lisse, nécessité de finition (détourage, perçage...), Qualité tributaire de la main d'œuvre, faible cadence de production par moule, espace de travail important, conditions de travail médiocres

1.8.2 Moulage par projection simultanée:

Procédé manuel ou robotisé permettant la réalisation de pièces à partir de résines thermodurcissables à température ambiante et sans pression. Les matières premières sont mises en œuvre à l'aide d'une machine dite "de projection" comprenant :

- un dispositif de coupe - projection du renfort (roving)
- un ou deux pistolets projetant simultanément la résine

Avantages : Très larges possibilités de forme et dimensions, Coût du roving < mat, travail simplifié, suppression de la mise en forme obtenue directement par la projection, productivité plus élevée qu'au contact, investissements très modérés, moules simples, peu onéreux, rapides à réaliser en interne.

Limites : Une seule face lisse, qualité tributaire de la main d'œuvre, Conditions de travail très médiocres si absence d'agencements nécessaires.

1.8.3 Injection thermodurcissable BMC :

Procédé discontinu haute pression (100 bars). Alimentation et dosage du Compound, Injection-pression, maintien et polymérisation, puis éjection.

Avantages: réalisation de grande série, faible coût matière, Possibilité de formes très complexes, finitions intégrées, grande précision de moulage, bon état de surface, coût de matière réduit, Bonnes conditions de travail et d'hygiène.

Limites: Propriétés mécaniques modestes, nécessité de doser la matière

1.8.4 Compression thermodurcissable SMC :

Le principe consiste à déposer des feuilles de préimprégnés dans un contre moule chauffé, de comprimer le matériau avec un moule chauffé, polymérisation puis éjection de la pièce.

Avantages : coût matière, propriétés mécaniques et thermiques.

Limites: l'aspect, le dimensionnement des presses et la finition.

1.8.5 Pultrusion :

Utilisation pour les composites hautes performances industrielles. Le principe est : tirage, mise en forme et polymérisation de fibres continues imprégnées.

Les avantages sont la production en continue, possibilité de réaliser des sections très complexes, et d'avoir un taux de renfort élevé. Les limites sont la lenteur du procédé, uniquement des profilés droits à section constante.

1.8.6 Enroulement filamentaire (ou bobinage):

Technologie pour les HP. Le principe consiste en un enroulement sous tension sur un mandrin tournant autour de son axe de fibres continues préalablement imprégnées d'un liant.

Les avantages sont : la disposition optimale des renforts, les très bonnes propriétés mécaniques, possibilité de réaliser des pièces de grandes dimensions avec des surfaces internes lisses. Les limites sont que formes uniquement convexes et investissements importants.

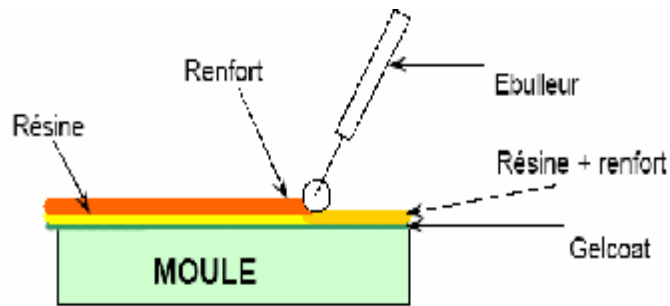


Figure (I-2): Moulage au contact

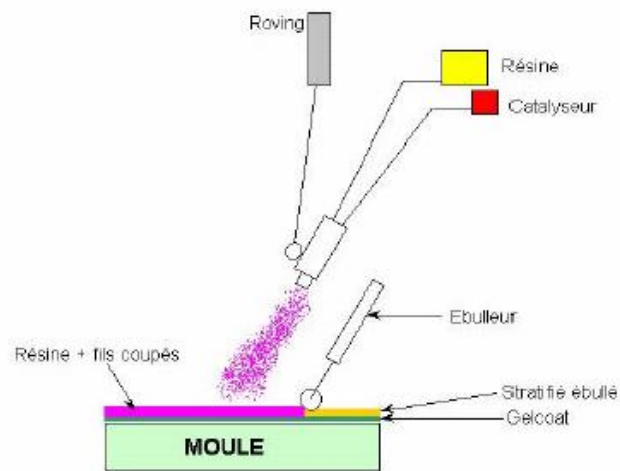


Figure (I-3): Moulage par projection simultanée

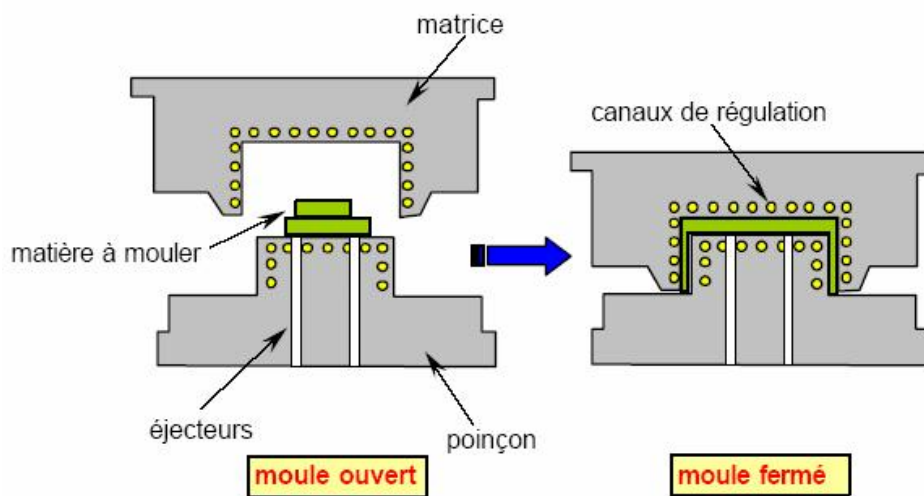


Figure (I-4): Moulage par compression SMC

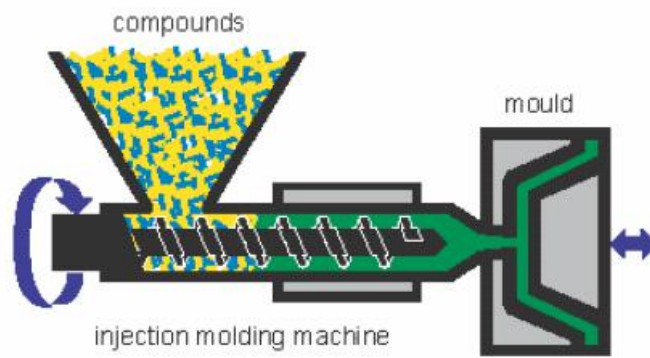


Figure (I-5): Moulage par injection - BMC

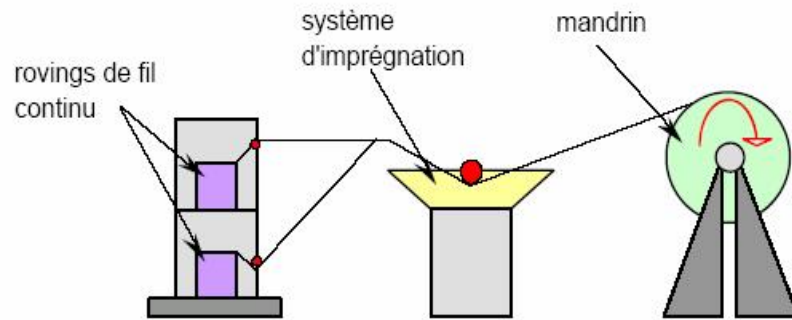


Figure (I-6): Moulage par enroulement filamentaire

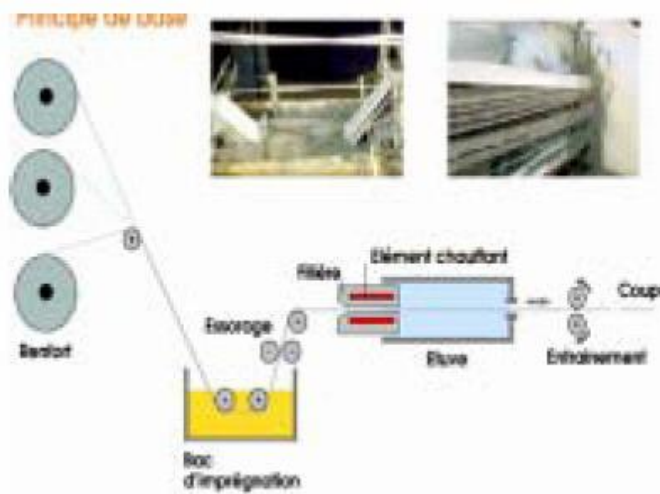


Figure (I-7): Pultrusion

1.9 APPLICATION DES MATERIAUX COMPOSITES:

Les matériaux composites sont aujourd'hui présents dans tous les secteurs industriels.

1.9.1 Aéronautique:

Les composites de haute performance ont été longtemps confinés dans l'aéronautique civile à des pièces de structure secondaire (habillage intérieur, volets), plus rarement primaire et jamais à la voilure, car il se posait deux difficultés:

- Des coûts élevés par rapport à l'aluminium.
- Des risques de délaminage les interdisant de vol sur les structures aérodynamiques chargées.

L'aéronautique utilise principalement des composites « hautes performances » constitués d'une matrice époxy associée à un taux élevé de renforts en fibres de carbone.

L'aéronautique utilise les composites « hautes performances » pour la fabrication de pièces de structure primaire des appareils en raison de leur légèreté, de leur souplesse de forme et des économies de frais de maintenance qu'ils engendrent.

Les applications rencontrées concernent : radome de radar, bords d'attaque, volets, dérives, pales d'hélicoptères, disques de freins d'avion,...etc (voir la figure I-10).

1.9.2 Automobile:

L'utilisation des composites dans le secteur automobile remonte à des origines relativement anciennes (fin des années 1980), mais ne s'est généralisé que très récemment, comme le montrent les décisions récentes de grands constructeurs étrangers (Volvo, Mercedes) de développer des coffres et hayons. Les composites à matrice thermoplastique sont, par contre, de plus en plus fréquents.

Le secteur de l'automobile utilise pour 95% des composites à matrice polyesters et fibres de verre, mais devrait intégrer massivement les composites thermoplastiques d'ici 2003-2006.

Les composites apportent au secteur de l'automobile une facilité d'entretien et une grande liberté de conception ; l'allègement de 1 kg, obtenu par l'utilisation des

composites, autorise un surcoût de 3 €/kg gagné ou permet d'économiser 1,5 € de carburant par 100 km.

Les applications est pour les pièces de carrosseries, roues, calandres, ressorts de suspension, sièges...etc



Figure (1-8) Pièces d'automobile en composites

1.9.3 Secteur ferroviaire :

Le secteur ferroviaire utilise principalement des composites à matrice therm durcissable et fibres longues, mais il apparaît peu dynamique. Dans le secteur ferroviaire, la facilité de conception et le bon comportement au feu sont les principaux atouts des matériaux composites.

Les applications concernent les voitures, wagons, portes, sièges avant de motrices, gaines de ventilation...



Figure (1-9) Pièces ferroviaire en composites

1.9.4 Secteur médical :

Les applications des composites aux secteurs médical et de la sécurité sont très récentes et concernent plutôt les composites hautes performances, à matrice époxy et

fibres de carbone, ou à matrice thermoplastique et fibres longues de verre ou de carbone d'autre part.

1.9.5 Sports et loisirs :

Les sports et loisirs utilisent des composites HP avec un taux de renforts de plus de 70%. Les composites permettent d'augmenter sur mesure les performances, la fiabilité des articles de sports.

Les applications rencontrées concernent les raquettes de tennis et de squash, cannes à pêche, skis, planches à voiles, arcs, flèches, javelots, cadres de bicyclette, casques de protection, clubs de golf, avirons, surf,...etc



Figure (1-10) Pièces de Sports et loisirs en composites

1.9.6 Travaux publics et bâtiments : Piscines, profilés, cloisons, portes, mobilier, sanitaires...etc

1.9.7 Spatial : Corps de propulseurs, Réservoirs, Tuyères, corps de rentrée d'atmosphère,...etc

1.9.8 Electricité et électronique : supports de circuits imprimés, disjoncteurs, Isolant, Coffrets,...etc

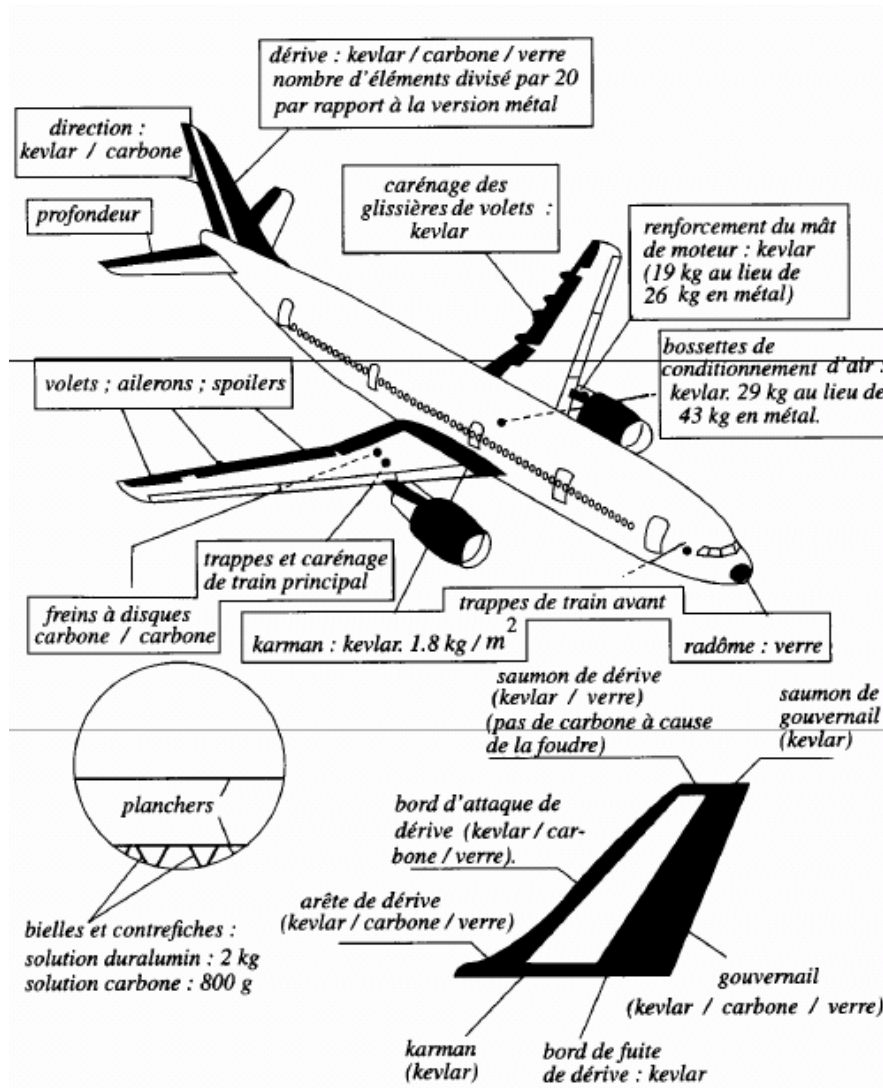


Figure I.11 Pièces aéronautiques en composites

CHAPITRE II:

COMPORTEMENT ELASTIQUE DES MATERIAUX COMPOSITES

2.1 Introduction:

Selon la loi de Hook généralisée, la loi de comportement est donnée par:

$$s_{ij} = f_{ijkl}(e_{kl})$$

Si f est linéaire on a donc élasticité linéaire.

On peut écrire alors la loi de comportement comme suit:

$$s_{ij} = c_{ijkl} e_{kl} \quad (II-1)$$

Avec:

- s_{ij} La contrainte.
- e_{kl} La déformation.
- C_{ij} Sont des constants appelés les coefficients de rigidité.

Ou encore sous un forme matricielle:

$$\{s\} = [C]\{e\}$$

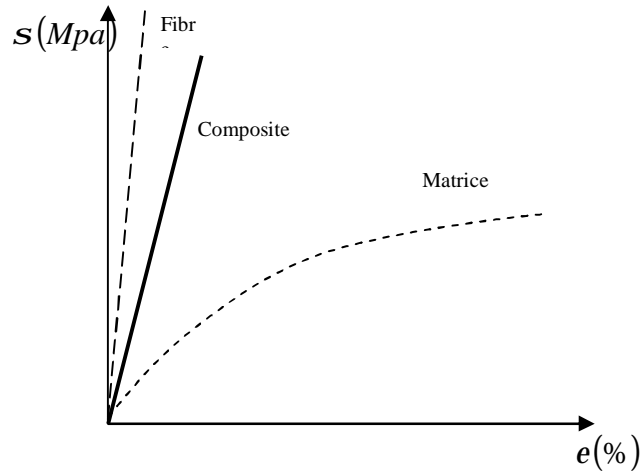


Figure (I-1) Variation de la contrainte en fonction de la déformation

2.3.1 Matériaux anisotropes:

Le matériau anisotrope ou triclinique n'a aucun plan de symétrie, les propriétés mécaniques dans toutes directions sont différentes, et il y a 21 coefficients indépendants nécessaire pour décrire la loi de comportement:

$$\begin{Bmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{33} \\ t_{23} \\ t_{31} \\ t_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ g_{23} \\ g_{31} \\ g_{12} \end{Bmatrix} \quad (II-5)$$

Ou encore:

$$\begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ g_{23} \\ g_{31} \\ g_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{33} \\ t_{23} \\ t_{31} \\ t_{12} \end{Bmatrix} \quad (II-6)$$

Avec:

- $[C]$: La matrice de rigidité.
- $[S]$: La matrice de souplesse.
- $[S] = [C]^{-1}$

2.3.2 Matériaux monocliniques:

Si le matériau a un plan de symétrie, monoclinique, quelques constantes sont zéro et le comportement peut être décrit avec 13 constants:

$$\begin{Bmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{33} \\ t_{23} \\ t_{31} \\ t_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ g_{23} \\ g_{31} \\ g_{12} \end{Bmatrix} \quad (II-7)$$

2.3.3 Matériaux orthotropes:

Il présente en tous points du matériau trois symétries de comportement mécanique dont chacune par rapport à un plan, les trois plans sont orthogonaux.

Le nombre de coefficients indépendants se réduit à 9 coefficients.

La loi de comportement s'écrit:

$$\begin{Bmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{33} \\ t_{23} \\ t_{31} \\ t_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & sym & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ g_{23} \\ g_{31} \\ g_{12} \end{Bmatrix} \quad (II-8)$$

Ou encore:

$$\begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ g_{23} \\ g_{31} \\ g_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & sym & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{33} \\ t_{23} \\ t_{31} \\ t_{12} \end{Bmatrix} \quad (II-9)$$

Par les modules 'Young:

$$\begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ g_{23} \\ g_{31} \\ g_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & \frac{-n_{21}}{E_{21}} & \frac{-n_{31}}{E_{31}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-n_{12}}{E_{12}} & \frac{1}{E_{22}} & \frac{-n_{32}}{E_{23}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-n_{13}}{E_{13}} & \frac{-n_{23}}{E_{23}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{33} \\ t_{23} \\ t_{31} \\ t_{12} \end{Bmatrix} \quad (II-10)$$

Avec :

- E_{ij} et G_{ij} sont le module d'Young et Coulomb respectivement.
- n_{ij} est le coefficient de Poisson

A cause de la symétrie:

- $\frac{n_{21}}{E_{22}} = \frac{n_{12}}{E_{11}}$
- $\frac{n_{31}}{E_{33}} = \frac{n_{13}}{E_{11}}$
- $\frac{n_{23}}{E_{22}} = \frac{n_{32}}{E_{33}}$

2.3.4 Matériaux transversalement isotropes:

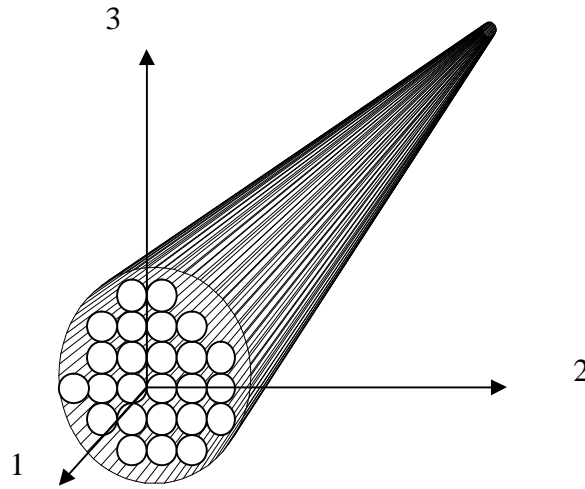


Figure II-2 Matériau transversalement isotrope.

Un matériau isotrope transverse est un matériau orthotrope qui comporte un axe ou un plan d'isotropie.

Les propriétés suivant l'axes 2 et 3 sont identiques, donc:

- $C_{22} = C_{33}$
- $C_{12} = C_{13}$
- $C_{55} = C_{66}$

Le nombre de coefficients indépendants se réduit à 5 coefficients.

La loi de comportement s'écrit:

$$\begin{Bmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{33} \\ t_{23} \\ t_{31} \\ t_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ & sym & & & C_{66} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ g_{23} \\ g_{31} \\ g_{12} \end{Bmatrix} \quad (II-11)$$

2.3.5 Matériaux quasi isotropes transverses:

Le nombre de coefficients indépendants se réduit à 6 coefficients.

Et la loi de comportement s'écrit:

$$\begin{Bmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{33} \\ t_{23} \\ t_{31} \\ t_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ sym & & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ g_{23} \\ g_{31} \\ g_{12} \end{Bmatrix} \quad (II - 12)$$

Exemple:

Le tissu carbone/époxy est un matériau quasi isotrope transverse si la chaîne du tissu est équivalente à la trame.

2.3.6 Matériaux quasi isotropes:

Le nombre de coefficients indépendants se réduit à 3 coefficients.

La loi de comportement s'écrit:

$$\begin{Bmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{33} \\ t_{23} \\ t_{31} \\ t_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ sym & & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ g_{23} \\ g_{31} \\ g_{12} \end{Bmatrix} \quad (II - 13)$$

Exemple:

Le composite 3D (trois directions orthogonales de renforts) à fibre fibres de carbone et matrice de carbone est un matériau quasi isotrope.

2.3.7 Matériaux isotropes:

Dans toutes les directions et en tout point du matériau on a les même propriétés mécaniques.

Le nombre de coefficients indépendants se réduit à 2 coefficients.

La loi de comportement s'écrit:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_{11} \\ \mathbf{s}_{22} \\ \mathbf{s}_{33} \\ \mathbf{t}_{23} \\ \mathbf{t}_{31} \\ \mathbf{t}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_{11} \\ \mathbf{e}_{22} \\ \mathbf{e}_{33} \\ \mathbf{g}_{23} \\ \mathbf{g}_{31} \\ \mathbf{g}_{12} \end{Bmatrix} \quad (II-14)$$

En terme de constantes techniques:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{g}_{23} \\ \mathbf{g}_{31} \\ \mathbf{g}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-n}{E} & \frac{-n}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-n}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-n}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-n}{E} & \frac{-n}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{s}_3 \\ \mathbf{t}_{23} \\ \mathbf{t}_{31} \\ \mathbf{t}_{12} \end{Bmatrix} \quad (II-15)$$

$$\text{Avec: } G = \frac{E}{2(1+n)}$$

2.4 Comportement d'un pli de composite unidirectionnel:

En considérant un pli soumis à l'état de contraintes dans le plan (1-2) (voir figure II.3)

La loi de comportement (relation contrainte-déformation) devient:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{g}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{t}_{12} \end{Bmatrix} \quad (II-16)$$

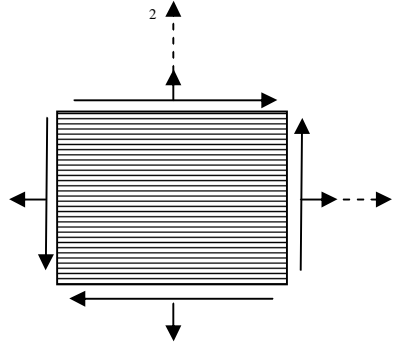


Figure II-3 Matériau composite à système d'axes naturels

Pour un matériau orthotrope:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{g}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{n_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{n_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{t}_{12} \end{Bmatrix} \quad (II-17)$$

Inversement:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{t}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{g}_{12} \end{Bmatrix} \quad (II-18)$$

Avec:

- $Q_{11} = \frac{E_1}{1 - n_{21}n_{12}}$
- $Q_{11} = \frac{n_{12}E_2}{1 - n_{12}n_{21}}$
- $Q_{11} = \frac{E_2}{1 - n_{12}n_{21}}$

2.5 Comportement d'un pli par rapport à un axe quelconque:

En considérant un pli à un état de contrainte plane, dont les directions des axes x et y font un angle q avec les directions naturelles du composite (figures II-4, II-5 et II-6).

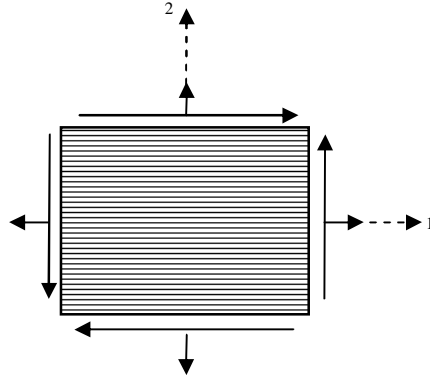


Figure II-4 Matériau composite à système d'axes naturels

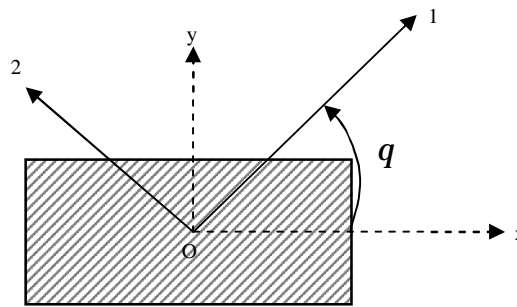


Figure II-5 Matériau composite orienté

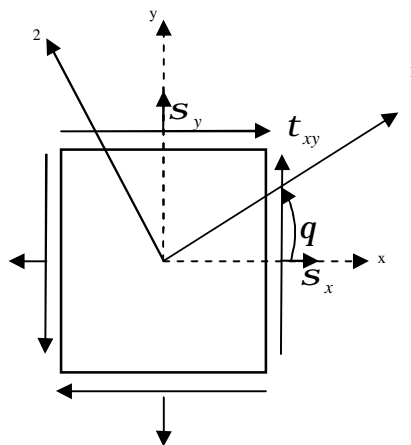


Figure II-6 L'état de contrainte dans le système (x,y)

L'état de contrainte dans le système (x,y) est connue. Les contraintes dans le système d'axes naturels (1,2) est données par:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_x \\ \mathbf{s}_y \\ \mathbf{t}_{xy} \end{Bmatrix} = [T(\mathbf{q})]^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{t}_{12} \end{Bmatrix} \quad (II-19)$$

Avec $T(\mathbf{q})$ est la matrice de transformation.

$$[T(\mathbf{q})]^{-1} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (II-20)$$

En remplaçant dans l'équation (II-19), on obtient:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_x \\ \mathbf{s}_y \\ \mathbf{t}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{t}_{12} \end{Bmatrix} \quad (II-21)$$

Les déformations dans le système d'axes naturels (1,2) est données par:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{g}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -sc \\ s^2 & c^2 & sc \\ 2sc & -2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{g}_{12} \end{Bmatrix} \quad (II-22)$$

Le comportement mécanique d'un pli suivant les axes (1,2) s'écrit:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{t}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{g}_{12} \end{Bmatrix} \quad (II-23)$$

D'après les équations (II-21), (II-22) et (II-23):

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_x \\ \mathbf{s}_y \\ \mathbf{t}_{xy} \end{Bmatrix} = [T(q)]^{-1} [Q] [T'] \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{g}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (II-24)$$

Si on pose $[\bar{Q}] = [T(q)]^{-1} [Q] [T']$ et en remplaçant dans (II-24) on trouve les relations contrainte-déformation dans le système d'axes quelconques:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_x \\ \mathbf{s}_y \\ \mathbf{t}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{g}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (II-25)$$

Inversement:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{g}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_x \\ \mathbf{s}_y \\ \mathbf{t}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (II-26)$$

Avec:

- $\bar{Q}_{11} = Q_{11}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{22}s^4$
- $\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(s^4 + c^4)$
- $\bar{Q}_{22} = Q_{11}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{22}c^4$
- $\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})s^3c$
- $\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})sc^3$
- $\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{66}(s^4 + c^4)$
- $\bar{S}_{11} = S_{11}c^4 + (2S_{12} + S_{66})s^2c^2 + S_{22}s^4$
- $\bar{S}_{12} = (S_{11} + S_{22} - 4S_{66})s^2c^2 + S_{12}(s^4 + c^4)$
- $\bar{S}_{22} = S_{11}s^4 + (2S_{12} + S_{66})s^2c^2 + S_{22}c^4$
- $\bar{S}_{16} = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})sc^3 + (2S_{12} - 2S_{22} + S_{66})s^3c$

- $\bar{S}_{26} = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})s^3c + (2S_{12} - 2S_{22} + S_{66})sc^3$
- $\bar{S}_{66} = 2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66})s^2c^2 + S_{66}(s^4 + c^4)$

2.6 La loi de comportement d'un composite stratifié:

$u^0 = u^0(x, y)$: Le déplacement du plan moyen suivant la direction x.

$v^0 = v^0(x, y)$: Le déplacement du plan moyen suivant la direction y.

$w = w(x, y)$: Le déplacement du plan moyen suivant la direction z.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x^0 \\ \mathbf{e}_y^0 \\ \mathbf{g}_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (II - 27)$$

Avec:

- $u = u_0 - zb$
- $b = \frac{\partial w}{\partial x}$
- $u = u_0 - z \frac{\partial w}{\partial x}$
- $v = v_0 - z \frac{\partial w}{\partial y}$

On peut écrire:

$$\begin{cases} u(x, y) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \\ w(x, y) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (II - 28)$$

Et les déformation sont données par:

$$\begin{cases} e_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u_0 - z \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ e_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(v_0 - z \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ g_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (II - 29)$$

Donc:

$$\begin{cases} e_x = e_x^0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ e_y = e_y^0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ g_{xy} = g_{xy}^0 - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (II - 30)$$

L'équation (II-30) peut s'écrire comme suit:

$$\begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ g_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_x^0 \\ e_y^0 \\ g_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (II - 31)$$

Où: $\{e\} = \{e^0\} + z\{k\}$

Avec $\{k\}$ est la courbure du plan moyen.

$$\{k\} = \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (II - 32)$$

Alors:

$$\begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} e_x^0 \\ e_y^0 \\ g_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \right) \quad (II-33)$$

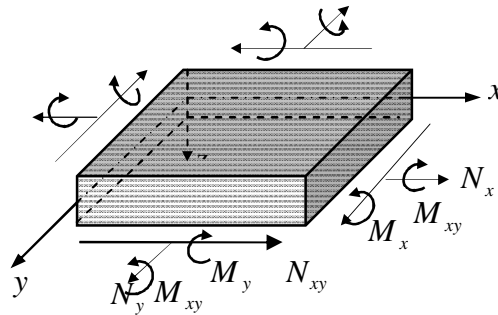


Figure II-7 Système de coordonnées et les éléments de réduction.

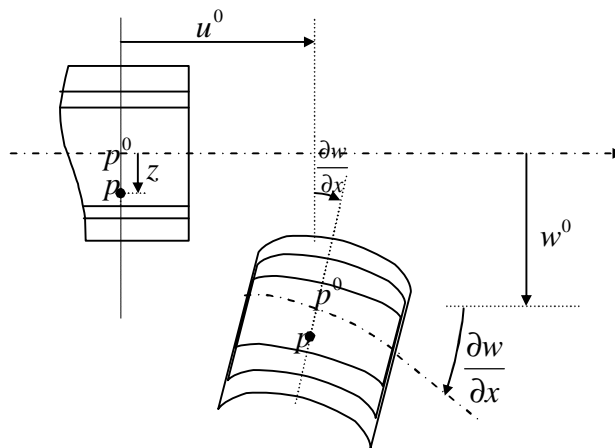


Figure II-8 Section droite d'un stratifié déformé

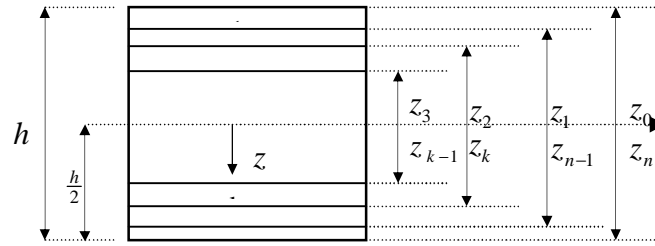


Figure II-9 présentation de n couches du stratifié

Les efforts de membrane sont donnés par expressions suivantes:

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{s}_x dz \quad (II-34.a)$$

$$N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{s}_y dz \quad (II-34.b)$$

$$T_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{t}_{xy} dz \quad (II-34.c)$$

Ou encore:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_x \\ \mathbf{s}_y \\ \mathbf{t}_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (II-35)$$

Avec:

$$\{\mathbf{s}\}_k = [\bar{Q}]_k \{\mathbf{e}^0\}_k + z [\bar{Q}]_k \{\mathbf{K}\}_k$$

Dans (II-5) on trouve:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \int [\bar{Q}]_k \{\mathbf{e}^0\}_k dz + \int [\bar{Q}]_k \{\mathbf{K}\}_k z dz \quad (II-36)$$

Pour n couches:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left(\int_{z^{k-1}}^{z^k} \begin{Bmatrix} e_x^0 \\ e_y^0 \\ g_{xy}^0 \end{Bmatrix} dz + \int_{z^{k-1}}^{z^k} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} z dz \right) \quad (II-37)$$

On résulte:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x^0 \\ e_y^0 \\ g_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (II-38)$$

Avec:

- $[A]$ est la matrice de rigidité en membrane.
- $[B]$ est la matrice de couplage.

2.7 Comportement en flexion:

Les moments résultants sont donnés par:

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} s_x z dz \quad (II-39.a)$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} s_y z dz \quad (II-39.b)$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} t_{xy} z dz \quad (II-39.c)$$

Ou:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int \begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (II-40)$$

En remplaçant (II-33) dans (II-40) on obtient:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int [\bar{Q}]_k \{e^0\} z dz + \int [\bar{Q}]_k \{K\} z^2 dz \quad (II-41)$$

Pour n couches:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left(\int_{z^{k-1}}^{z^k} \begin{Bmatrix} e_x^0 \\ e_y^0 \\ g_{xy}^0 \end{Bmatrix} z dz + \int_{z^{k-1}}^{z^k} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} z^2 dz \right) \quad (II-42)$$

On résulte:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x^0 \\ e_y^0 \\ g_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (II-43)$$

Avec:

- $[D]$ est la matrice de rigidité en flexion et torsion.

On peut écrire le comportement global du stratifié sous forme:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x^0 \\ e_y^0 \\ g_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (II-44)$$

- **Stratifié symétrique:**

On a pour un stratifié symétrique $B_{ij} = 0$ alors:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x^0 \\ e_y^0 \\ g_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (II - 45)$$

- **Stratifié équilibré:**

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & B_{26} \\ 0 & 0 & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ 0 & 0 & B_{16} & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & B_{26} & D_{12} & D_{22} & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x^0 \\ e_y^0 \\ g_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (II - 46)$$

- **Stratifié quasi-isotrope:**

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & B_{26} \\ 0 & 0 & \frac{A_{11} - A_{12}}{2} & B_{16} & B_{26} & 0 \\ 0 & 0 & B_{16} & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & B_{26} & D_{12} & D_{22} & 0 \\ B_{16} & B_{26} & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x^0 \\ e_y^0 \\ g_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (II - 47)$$

Tableau (II-1) Les caractéristiques mécaniques des quelques matériaux composites.

Matériau	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}	ν_f
T300/934 graphite/époxy	131	10.3	6.9	0.22	0.65
AS/3501 Graphite/époxy	138	9.0	6.9	0.3	0.65
p-100/ERL 1962 pich graphite/époxy	468.9	6.2	5.58	0.31	0.62
Kevlar 49/934 aramide/epoxy	75.8	5.5	2.3	0.34	0.65
Scochply 1002 E- verre/époxy	38.6	8.27	4.14	0.26	0.45
Boron/5505 Boron/époxy	204	18.5	5.59	0.23	0.5
Spectra 900/826 polyethylene/époxy	30.7	3.52	1.45	0.32	0.65
E-verre/470-36 E-verre/Vinylester	24.4	6.87	2.89	0.32	0.30

CHAPITRE III:

COMPORTEMENT THERMOELASTIQUE ET HYGROELASTIQUE DES MATERIAUX ORTHOTROPES

3.1 COMPORTEMENT THERMOELASTIQUE:

La déformation des matériaux composites n'est pas purement un phénomène mécanique, elle s'accompagne d'effets thermiques [3].

Les liaisons intramoléculaires, qui assurent la cohésion de l'ensemble, sont peu affectées par la température, de sorte que toutes les caractéristiques mécaniques varient peu, en fonction de la température, jusqu'à une température de décomposition. Le module d'élasticité diminue de façon linéaire en fonction de la température [13], ainsi que la contrainte.

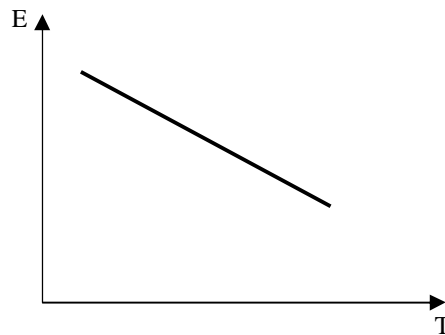


Figure III-1 variation du module 'élasticité en fonction de la température T.

3.1.2 Inégalité de Clausius-Duhem:

On définit l'inégalité de Clausius-Duhem comme suit:

$$r \frac{d\Psi}{dt} \leq s_{ij} \frac{de_{ij}}{dt} - rs \frac{dT}{dt} - \frac{q \cdot \text{grad}T}{T} \quad (III - 1)$$

Avec:

- r : La masse volumique.

- T: La température.
- Ψ : L'énergie libre massique.

$$\Psi = u - Ts \quad (III - 2)$$

- u: énergie interne massique.
- S: entropie massique.

D'après la relation (III-2), on peut tirer:

$$d\Psi = -sdT \quad (III - 3)$$

Alors, l'entropie massique s'écrit:

$$s = -\frac{d\Psi}{dT} \quad (III - 4)$$

La capacité thermique massique à déformation constante s'exprime:

$$\Psi = u - Ts \quad \Leftrightarrow \quad u = \Psi + Ts$$

$$\frac{\partial u}{\partial T} = \frac{\partial \Psi}{\partial T} + s + T \frac{\partial s}{\partial T}$$

$$\frac{\partial u}{\partial T} = -T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} \quad (III - 5)$$

Et la capacité thermique est donnée par:

$$c_e = -T \frac{\partial u}{\partial T}(T, e)$$

Donc:

$$c_e = -T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 T}(T, e) \quad (III-6)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = -s \frac{dT}{dt} - dT \frac{ds}{dt}$$

3.1.3 Dissipation:

D'après la relation (III-4), on résulte:

$$\frac{d\Psi}{dt} = -s \frac{dT}{dt} + P_r$$

Avec:

$$P_r = -\frac{d\Psi}{dt} - \frac{dT}{dt}$$

L'équation (III-1) devient:

$$s_{ij} \frac{de_{ij}}{dt} - rP_r - \frac{q \cdot \text{grad}T}{T} \geq 0 \quad (III-7)$$

La dissipation intrinsèque volumique:

- $\Phi_1 = s_{ij} \frac{de_{ij}}{dt} - rP_r$

La dissipation thermique:

- $\Phi_2 = \frac{q \cdot \text{grad}T}{T}$

La dissipation volumique:

- $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$

D'après la relation (III-7), on a:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \geq 0 \quad (III - 8)$$

3.1.4 Loi de Fourier:

On postule l'existence 'un potentiel de dissipation dual sous la forme quadratique définie positive:

$$g = gradT$$

$$g = -\frac{\partial j}{\partial \left(\frac{q}{T}\right)}$$

$$\frac{q}{T} = -\frac{1}{T}[I]\{g\}$$

$$q = -[I]gradT \quad (III - 9)$$

Avec:

$$\{I\} = \begin{Bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \\ I_{23} \\ I_{13} \\ I_{12} \end{Bmatrix}$$

I est la conductivité thermique.

La conductivité thermique est représentée sur le tableau (III-1) à divers matériaux.

Hypothèses:

- Transformation élastique.
- Température constante avec le temps $\left(\frac{dT}{dt} = 0\right)$.
- Température uniforme ($gradT = 0$).

L'équation de Clausius-Duhem est nulle.

On peut écrire:

$$s_{ij} - r \frac{\partial \Psi}{\partial e_{ij}} = 0$$

$$s_{ij} = r \frac{\partial \Psi}{\partial e_{ij}} \quad (III - 10)$$

En appliquant le développement de Taylor sur $\Psi(T, e)$ au voisinage de $(T_0, 0)$ on trouve la relation suivante:

$$r\Psi = \frac{1}{2} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl} - a_{ij} \Delta T e_{ij} + \frac{1}{2} g (\Delta T)^2 \quad (III - 11)$$

Avec :

- $C_{ijkl}(T_0) = r \frac{\partial^2 \Psi(T_0, 0)}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} \quad (III - 11.a)$
- $a_{ij}(T_0) = -r \frac{\partial^2 \Psi(T_0, 0)}{\partial T \partial e_{ij}} \quad (III - 11.b)$
- $g(T_0) = -r \frac{c_e(T_0, 0)}{\partial T^2} \quad (III - 11.c)$

En utilisant les équations (III-10) et (III-11), on trouve :

$$s_{ij} = C_{ijkl}(T_0)e_{kl} - a_{ij}(T_0)\Delta T \quad (III - 12)$$

Inversement :

$$e_{ij} = S_{ijkl}(T_0)s_{kl} + a_{ij}(T_0)\Delta T \quad (III - 13)$$

Avec :

- $[S] = [C]^{-1}$
- c_{ijkl} : Le tenseur de rigidité en évolution isotherme.
- s_{ijkl} : Son inverse (le tenseur de souplesse).
- a_{ij} : Le tenseur de compressibilité thermique.
- $\{a\} = \{a_{11} \ a_{22} \ a_{33} \ a_{23} \ a_{13} \ a_{12}\}$
- \mathbf{a}_{ij} : Le tenseur de la dilatation thermique.
- $\{\mathbf{a}\} = \{a_{11} \ a_{22} \ a_{33} \ 2a_{23} \ 2a_{13} \ 2a_{12}\}$
- $\mathbf{a}_{ij}(T_0) = s_{ijkl}(T_0)\mathbf{a}_{kl}(T_0)$

Sous forme matricielle :

$$\{\mathbf{a}\} = [S]_{T_0} \{a\}$$

Tableau (III-1): Divers formes du tenseur de conductivité thermique suivant les degrés de système du matériau composite.

Système du matériau	Nombre de modules d'élasticité indépendants.	Conductivité thermique
Anisotrope	21	$\{I_1 \ I_2 \ I_3 \ I_{23} \ I_{13} \ I_{12}\}$
Orthotrope	9	$\{I_1 \ I_2 \ I_3 \ 0 \ 0 \ 0\}$
Quasi isotrope transverse dans le plan (1,2)	6	$\{I_1 \ I_1 \ I_3 \ 0 \ 0 \ 0\}$
Isotrope transverse dans le plan (1,2)	5	$\{I_1 \ I_1 \ I_3 \ 0 \ 0 \ 0\}$
Quasi isotrope	3	$\{I \ I \ I \ 0 \ 0 \ 0\}$
isotrope	2	$\{I \ I \ I \ 0 \ 0 \ 0\}$

Tableau (III-2): Coefficients de dilatation de quelques matériaux composites.

Matériau	I_1	I_2	I_3	Capacité thermique massique (J/kg.k)
Fibre de carbone. 1: axe des fibres	10	-	-	750
Verre/époxy à structure stratifié 0/90° (1,2) : plan de stratifié	0.5	0.5	-62	-
Acier	62	62	210	490
Aluminium	210	210		920

3.2.5 Effet de la température sur un stratifié:

La relation entre la contrainte et de la déformation dans le système d'axes naturels est donnée par:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{t}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & 0 \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{g}_{12} \end{Bmatrix} - \Delta T \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \quad (III-14)$$

A système d'axes quelconques:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_x \\ \mathbf{s}_y \\ \mathbf{t}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{g}_{xy} \end{Bmatrix} - \Delta T \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{a}_y \\ \mathbf{a}_{xy} \end{Bmatrix} \right) \quad (III-15)$$

Avec:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{a}_y \\ \mathbf{a}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 c^2 + \mathbf{a}_2 s^2 \\ \mathbf{a}_1 s^2 + \mathbf{a}_2 c^2 \\ 2(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)cs \end{Bmatrix} \quad (III-16)$$

Les efforts sont donnés par:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x^0 \\ \mathbf{e}_y^0 \\ \mathbf{g}_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{Bmatrix} \quad (III-17)$$

Les efforts thermiques sont déterminés comme suit:

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ T_{xy}^T \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{a}_y \\ \mathbf{a}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (III-18)$$

Les moments dans chaque couches sont donnés par:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_x \\ \mathbf{s}_y \\ \mathbf{t}_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (III-19)$$

Pour un stratifié de n couches l'équation (III-19) devient:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_x \\ \mathbf{s}_y \\ \mathbf{t}_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (III-20)$$

En remplaçant l'équation (III-15) dans (III-20) on trouve:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left(\int_{z^{k-1}}^{z^k} z \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x^0 \\ \mathbf{e}_y^0 \\ \mathbf{g}_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \right) dz$$

Donc:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x^0 \\ \mathbf{e}_y^0 \\ \mathbf{g}_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} M_x^{Th} \\ M_y^{Th} \\ M_{xy}^{Th} \end{Bmatrix} \quad (III-21)$$

D'où les moments thermiques sont donnés par:

$$\begin{Bmatrix} M_x^{Th} \\ M_y^{Th} \\ M_{xy}^{Th} \end{Bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{a}_y \\ \mathbf{a}_{xy} \end{Bmatrix} \Delta T z dz \quad (III-22)$$

3.2.6 Comportement global du stratifié:

On peut résumer ces deux équations (III-17) et (III-21) à:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x^0 \\ e_y^0 \\ g_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_x^{Th} \\ N_y^{Th} \\ N_{xy}^{Th} \\ M_x^{Th} \\ M_y^{Th} \\ M_{xy}^{Th} \end{Bmatrix} \quad (III - 23)$$

3.2 COMPORTEMENT HYGROELASTIQUE:

L'humidité affecte surtout la matrice en résine polymère. Les fibres sont moins sensibles à ce facteur d'environnement.

Nous désignons par c la concentration de l'eau dans le composite :

$$c = rm \quad (III - 24)$$

Avec :

- r La masse volumique du milieu.
- m Fraction massique.

La loi de comportement hygrothermoélastique d'un matériaux est donnée par :

$$\mathbf{s}_{ij} = c_{ijkl}(T_0, m_0) \mathbf{e}_{kl} - a_{ij}(T_0, m_0) \Delta T - b_{ij}(T_0, m_0) \Delta m \quad (III - 25)$$

Inversement :

$$\mathbf{e}_{ij} = s_{ijkl}(T_0, m_0) \mathbf{s}_{kl} - a_{ij}(T_0, m_0) \Delta T - b_{ij}(T_0, m_0) \Delta m \quad (III - 26)$$

Avec:

$\{b\}$ Tenseur de dilatation hygrométrique.

Tableau (III-3) : propriété hygrothermoélastique des quelques matériaux composite

Matériau	b_1	b_2
AS graphite/époxy	0.09	0.30
E-verre/époxy	0.014	0.29
AF-126-2 adhésive	0.20	0.20

D'après l'équation (III-25), on résulte:

$$\begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ g_{xy} \end{Bmatrix} - \Delta T \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_{xy} \end{Bmatrix} - \Delta C \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_{xy} \end{Bmatrix} \right) \quad (III - 27)$$

3.2.1 Comportement hygrothermoélastique d'un composite stratifié:

La méthode est similaire à celle de la hygrothermoélasticité, la loi de comportement hygrothermoélastique d'un composite stratifié est donnée par:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x^0 \\ e_y^0 \\ g_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11}^* & B_{12} & B_{16} \\ B_{12}^* & B_{22} & B_{26} \\ B_{16}^* & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_x^{Th,H} \\ N_y^{Th,H} \\ T_{xy}^{Th,H} \end{Bmatrix} \quad (III - 28)$$

Avec :

$$\begin{Bmatrix} N_x^{Th,H} \\ N_y^{Th,H} \\ T_{xy}^{Th,H} \end{Bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_{xy} \end{Bmatrix} \Delta T^* - \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_{xy} \end{Bmatrix} \Delta C \right) dz \quad (III - 29)$$

CHAPITRE IV:

COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE DES MATERIAUX ORTHOTROPES

4.1 Généralité:

La plupart des matériaux de technologie sont décrits, pour des petites déformations, par la loi de Hook de l'élasticité linéaire.

En réalité, tous les matériaux dévient de la loi de Hook dans diverses manières, par exemple en exhibant visqueux comme aussi bien que les caractéristiques élastiques, Les matériaux viscoélastiques sont ceux pour lesquels le rapport entre l'effort et la déformation dépend le temps.

Les solides anélastiques représentent un sous-ensemble des matériaux viscoélastiques; ils ont une configuration unique d'équilibre et récupère finalement entièrement après déplacement d'une charge passagère.

4.1.1 Quelques phénomènes en matériaux viscoélastiques:

- Si l'effort est constante tenue, la déformation augmente (fluage)
- Si la déformation est constante tenue, l'effort diminue avec le temps (relaxation).
- La rigidité efficace dépend du taux d'application de la charge.
- Si le chargement cyclique est appliqué, l'hystérésis se produit, menant à une dissipation d'énergie mécanique.
- Pendant le roulement, résistance de friction se produit.

Tous les matériaux montrent une certaine réponse viscoélastique. En métaux communs tels que l'acier ou l'aluminium, à hautes températures et à la petite déformation, le comportement ne devrais pas beaucoup de l'élasticité linéaire.

Polymères synthétiques, bois, et tissu humain aussi bien que les métaux aux effets viscoélastiques significatifs d'affichage à la température ambiante.

Dans quelques applications, même petite réponse viscoélastique peut être significative.

Alors le comportement viscoélastique se traduit par les contraintes (déformations) qui sont dépend des déformations (contraintes), des vitesses de déformation (charge), et on a:

$$s = f(e, \dot{e}) \quad (IV - 1.a)$$

Ou:

$$e = f^{-1}(s, \dot{s}) \quad (IV - 1.b)$$

On dit que la viscoélasticité est linéaire si f est linéaire.

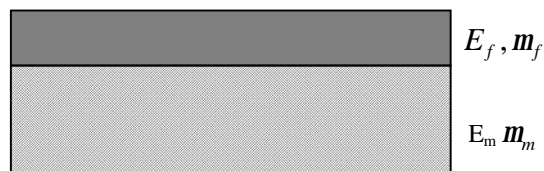


Figure (IV-1) Composition d'un matériau composite

Avec:

E_f et E_m sont respectivement les modules d'Young de la fibre et de la matrice.

m_f et m_m sont respectivement les amortissements internes des fibres et de la matrice.

4.1.2 Simplification:

Pour simplifier la notion de viscoélasticité on a la recouvrance suivante:

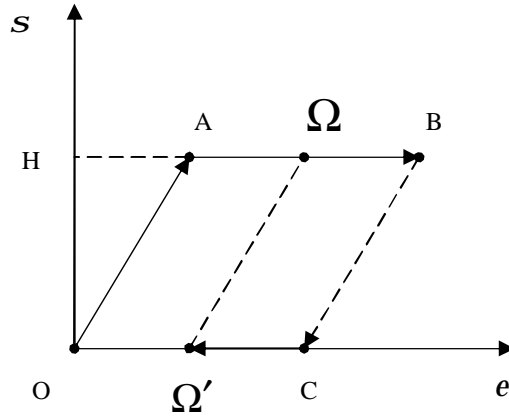


Figure (IV-2) Recouvrance d'un matériau.

La déformation totale en B est la somme de trois termes suivants (voir la figure 3):

$$e_{Tot} = HB$$

$$HB = HA + A\Omega + \Omega B$$

1. HA déformation élastique (l'élasticité est linéaire).
2. AΩ : déformation plastique différée, ou viscoplastique.
3. ΩB = ΩC : déformation élastique différée, ou viscoélastique.

Si la recouvrance est totale (pas des déformations permanentes) on dit que la déformation est viscoélastique.

4.2 La fonction d'Heaviside:

La fonction d'étape de l'Heaviside $H(t)$ est définie comme suit:

$$H(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \geq 0 \\ 0 & \text{si } u < 0 \end{cases} \dots\dots\dots(IV - 2)$$

4.3 Fonctions de relaxation et de retard à la déformation:

L'étude de la loi de comportement d'un matériau demande de définir et de réaliser des essais mécaniques caractéristiques de son comportement.

Les matériaux viscoélastiques s'étudient expérimentalement par des essais de relaxation des contraintes ou des essais de fluage ou par d'autres expériences.

4.3.1- Fonction de retard (le fluage):

Le fluage est un phénomène qui se manifeste par une variation de la déformation en fonction du temps, après la déformation instantanée, lorsqu'on applique instantanément au matériau un état de contraintes constantes

L'essai de fluage consiste à imposer à un instant t un échelon de contrainte d'amplitude s_0 .

On a:

$$s(t) = s_0 H(t - t)$$

Avec $H(t - t)$ est la fonction d'Heaviside.

$$s(t) = \begin{cases} s_0 & \text{si } t \geq t \\ 0 & \text{si } t < t \end{cases} \quad (IV - 3.)$$

La déformation est donnée par les conditions suivantes:

- Pour $t < t$ le corps est en équilibre.
- Pour $t > t$ la déformation étant:

$$\begin{cases} e = 0 & \text{si } t < t \\ e = g(t, t) & \text{si } t > t \end{cases} \quad (IV - 4)$$

$g(t, t)$ est appelée la fonction de retard et elle est croissante de t .

On peut tirer :

$$e(t) = J(t) \mathbf{s}_0 \quad (IV - 5.a)$$

Ou:

$$e(t) = J(t) \mathbf{s}(0) \quad (IV - 5.b)$$

Avec:

- $J(t)$: est la complaisance de fluage et elle est croissante de t .

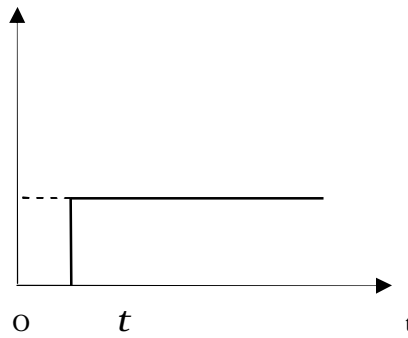


Figure (IV-3) Représentation d'un essai de fluage

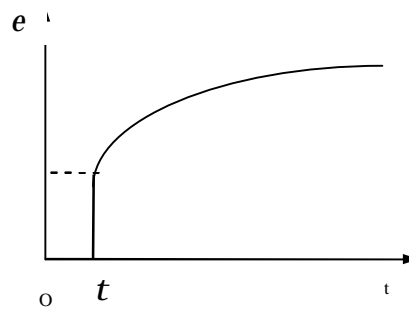


Figure (IV-4) Réponse de l'essai de fluage (déformation/temps)

4.3.2 Principe de superposition de Boltzmann:

Le principe de superposition de Boltzmann est basé sur l'idée qui représentée sur la figure suivante:

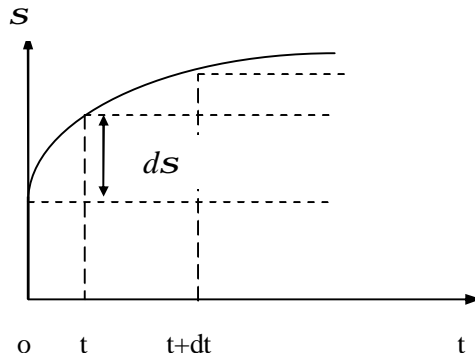


Figure (IV-5) superposition de contrainte

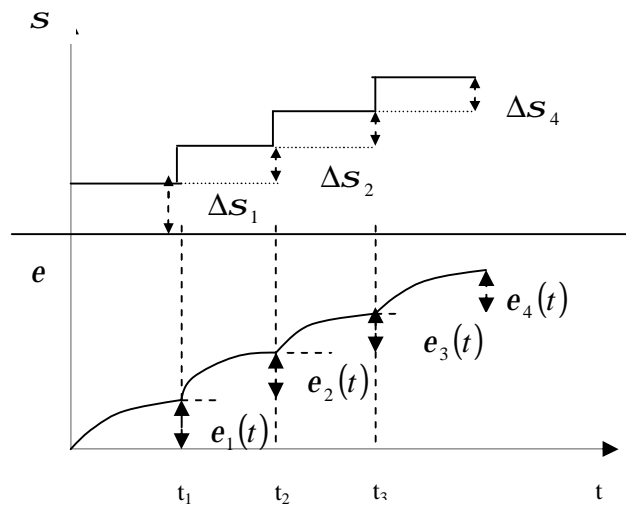


Figure (IV-6) Représentation de la superposition de Boltzmann

Pour une série d'expériences donnant des contraintes $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3 \dots \Delta S_n$ appliquées à des temps $t_1, t_2, t_3, \dots t_n$, on a:

$$e(t) = s_0 J(t) + \sum_1^n \Delta S_i J(t - t_i) \quad (IV - 6)$$

Pour une série des petites contraintes, le signe somme se transforme en intégrale:

$$e(t) = s(0)J(t) + \int_0^t \frac{\partial s(t)}{\partial t} J(t-t) dt \quad (IV-7.a)$$

Ou:

$$e(t) = J(0)s(t) + \int_0^t \frac{\partial J(t)}{\partial t} s(t-t) dt \quad (IV-7.b)$$

Pour un matériau à 3D:

$$e_{ij}(t) = J_{ijkl}(0)s_{kl}(t) + \int_0^t \frac{\partial J_{ijkl}(t)}{\partial t} s_{kl}(t-t) dt \quad (IV-8.a)$$

Ou:

$$e_{ij}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t J_{ijkl}(t-t) s_{kl}(t) dt \quad (IV-8.b)$$

Cette équation est appelée l'équation générale de la viscoélasticité

4.3.3 Fonction de relaxation:

La relaxation est caractérisée par la décroissance de la contrainte en fonction du temps quand une déformation constante est appliquée à un matériau après chargement.

L'essai de relaxation est très différent de l'essai de fluage. Il faut remarquer qu'il n'existe que très peu d'études sur l'essai de relaxation, c'est pourquoi il est important de bien décrire ce type d'essai dans un premier temps.

Et la déformation est donnée par:

$$e(t) = e_0 H(t-t) \quad (IV-9.a)$$

En remplaçant $H(t-t_0)$ par sa forme, on trouve:

$$e(t) = \begin{cases} e_0 & \text{si } t \geq t \\ 0 & \text{si } t < t \end{cases} \quad (IV-9.b)$$

- Pour $t < t$ le corps est en équilibre.
- Pour $t > t$ la déformation est constante et la contrainte étant:

$$\begin{cases} s = 0 & \text{si } t < t \\ s = R(t,t) & \text{si } t > t \end{cases} \quad (IV-10)$$

La fonction $R(t,t)$ est appelée fonction de relaxation et elle décroissante de t .

En utilisant le principe de superposition de Boltzmann (de la même manière pour le fluage) on trouve les relations suivantes:

$$s(t) = e_0 R(t) + \sum_1^n \Delta e_i R(t-t) \quad (IV-11.)$$

Pour une série des petites déformations:

$$s(t) = e_0 R(t) + \int_0^t \frac{\partial e(t)}{\partial t} R(t-t) dt \quad (IV-12.a)$$

Ou:

$$s(t) = e(0)R(t) + \int_0^t \frac{\partial e(t)}{\partial t} R(t-t) dt \quad (IV-12.b)$$

Ou encore:

$$s(t) = e(t)R(0) + \int_0^t \frac{\partial R(t)}{\partial t} e(t-t) dt \quad (IV-12.c)$$

Si on considère le matériau à 3D:

$$s_{ij}(t) = R_{ijkl}(0)e_{kl}(t) + \int_0^t \frac{\partial R_{ijkl}(t)}{\partial t} e_{kl}(t-t) dt \quad (IV-13.a)$$

Ou encore sous forme:

$$s_{ij}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t R_{ijkl}(t-t) e_{kl}(t) dt \quad (IV-13.b)$$

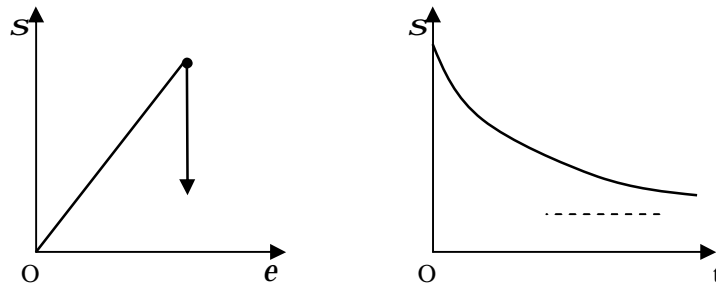


Figure (IV-7) La relaxation

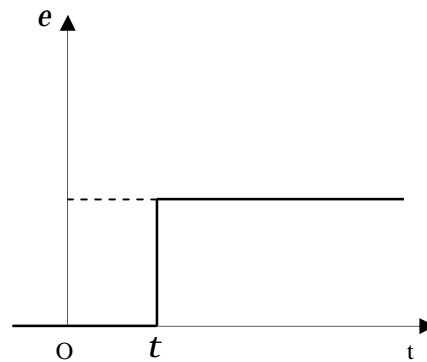


Figure (IV-8) Représentation d'un essai de relaxation

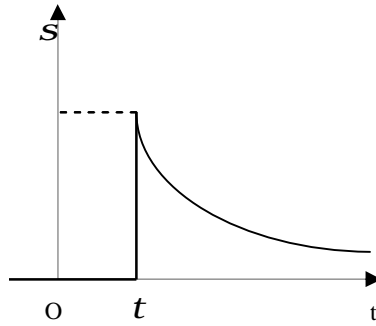


Figure (IV-9) La réponse de l'essai de la relaxation (contrainte/temps)

Dans le cas général, il existe 21 fonctions de relaxation (ou bien de fluage) mais, comme en élasticité, leur nombre se réduit si la matrice de relaxation possède des symétries.

a- cas d'un élément isotrope:

$$s_{ij}^*(p) = l^*(p)e_{ij}^*(p)d_{ij} + 2m^*(p)e_{ij}^*(p)$$

On a deux fonctions de relaxation correspondant aux deux coefficients de Lamé.

b- cas d'un élément orthotrope:

On a 9 coefficients de relaxation.

Tableau IV-1 Représentation les fonction de retard et relaxation

	Matériau viscoélastique linéaire non vieillissant	Matériau viscoélastique linéaire vieillissant
La fonction de retard est la réponse en déformation à un échelon unité de contrainte appliquée en t	$e(t) = J (t - t_0)S_0$	$e(t, t_0) = J (t, t_0)S_0$
La fonction de relaxation est la réponse en contrainte à un échelon unité de déformation appliquée en t	$s(t) = R [t - t_0]e_0$	$s(t, t_0) = R [t, t_0]e_0$

4.3.4 Autres expériences:

- **L'effacement des contraintes:**

On représente l'essai de l'effacement sur la figure suivante:

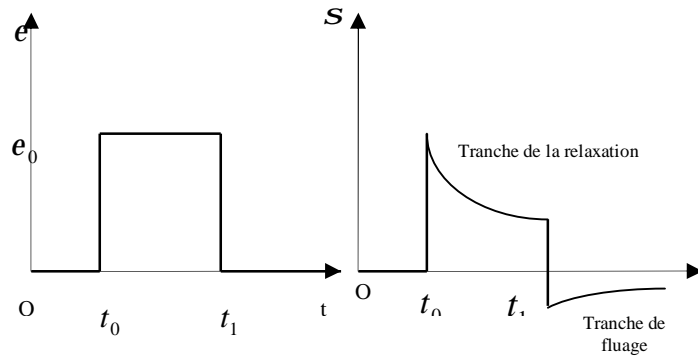


Figure (IV-10) Représentation de l'essai de l'effacement des contraintes

- **La recouvrance de la déformation:**

On représente l'essai de la recouvrance sur la figure suivante:

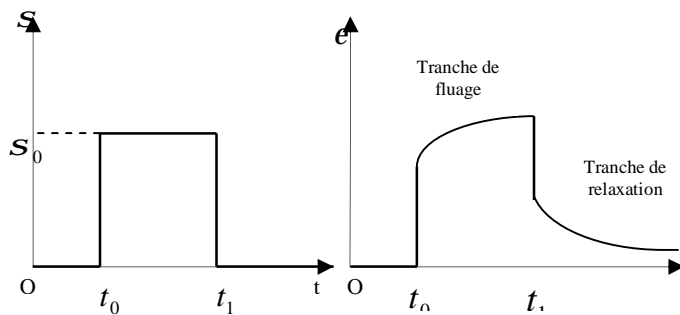


Figure (IV-11) Représentation de l'essai de recouvrance des déformations

4.3 Les modèles rhéologiques:

La rhéologie est la science qui étudie les déformations et l'écoulement de la matière. Elle a pour objet d'analyser les comportements mécaniques des substances et d'établir leurs lois de comportement. Par ailleurs, celles-ci peuvent être reliées à la structure microscopique de la matière (cristaux, macromolécules, grains, ...etc)

On utilise des modèles mécaniques associant des ressorts (modèles élastiques) et des amortisseurs (modèles visqueux).

Et on a plusieurs modèles:

4.5.1 Modèle de Maxwell:

Ce modèle représente un élément élastique (représentant un module d'élasticité E) en série avec un amortisseur (représentant un module de viscosité m).

Ce modèle présente le comportement viscoélastique de type de relaxation.



Figure (IV-12) Modèle de Maxwell

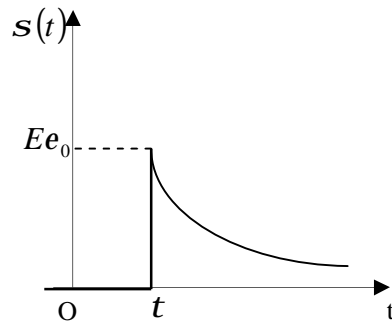


Figure (IV-13) Réponse de la relaxation (contrainte/temps) du modèle de Maxwell

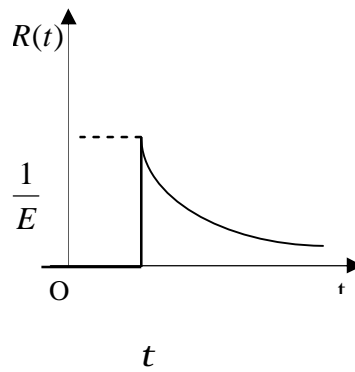


Figure (IV-14) La réponse de relaxation (module de relaxation/temps) du modèle de Maxwell

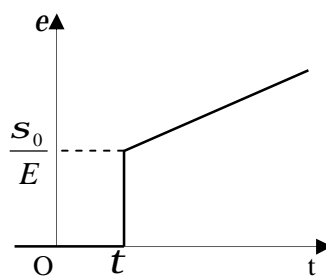


Figure (IV-15) La réponse de fluage (déformation/temps) du modèle de Maxwell

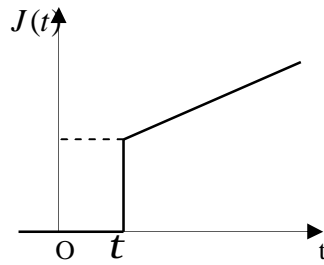


Figure (IV-16) La réponse de fluage (compliance/temps) du modèle de Maxwell

4.3.2 Modèle de Kelvin-Voigt:

Le ressort est en parallèle avec l'amortisseur. Ce modèle présente bien le comportement viscoélastique, avec le phénomène de fluage.

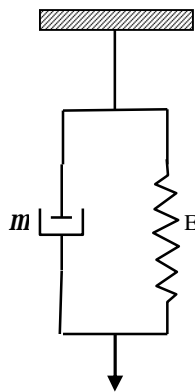


Figure (IV-17) Modèle de Kelvin-Voigt

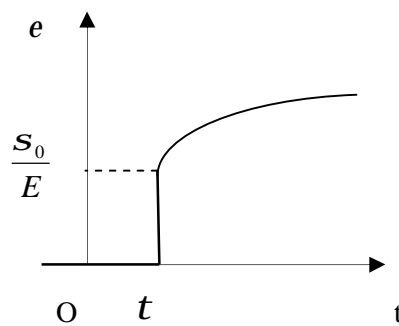


Figure (IV-18-a) la déformation en fonction du temps d'après le modèle de Kelvin-Voigt

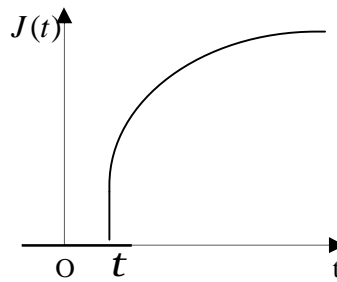


Figure (IV-18-b) La réponse de fluage du modèle de Kelvin-Voigt

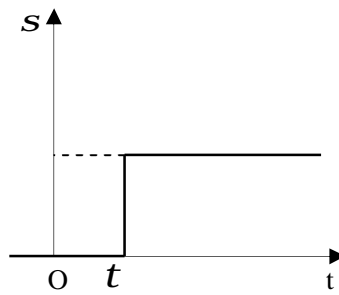


Figure (IV-19) La réponse de relaxation du modèle de Kelvin-Voigt

4.3.3 Modèle de Zener:

Ce modèle est représenté sur la figure suivante.

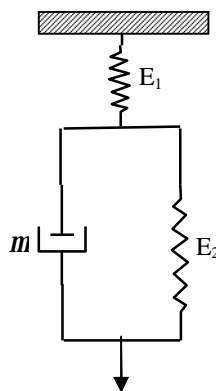


Figure (IV-20) Représentation du modèle de Zener.

4.3.4 Modèle de Maxwell généralisé:

Ce modèle est représenté sur la figure suivante:

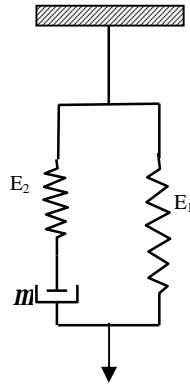


Figure (IV-21) Modèle de Maxwell généralisé

4-3.5 Modèle de Burger:

Ce modèle a évidemment un comportement plus complexe lorsqu'une charge lui appliquée et la déformation résultante combinera une réponse élastique instantanée, suivie d'une réponse retardée, avec un phénomène de fluage.

En outre, lorsque l'on annulera la charge, on observera un recouvrement instantané, suivi d'une relaxation incomplète, laissant une déformation résiduelle.

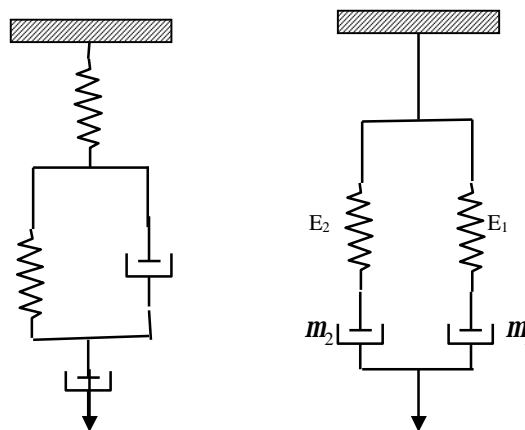


Figure (IV-22) Modèle de Burger

Tableau IV-2 les fonction de retard et relaxation des différents modèles

Modèles mécaniques	Fonction de relaxation $R(t-t_0)$	Fonction de retard $J(t-t_0)$
Maxwell	$R(t-t_0) = \frac{S(t-t_0)}{e_0} = Ee^{-(t-t_0)/t}$	$J(t) = \frac{1}{E} + \frac{t}{h}$
Maxwell généralisé	$R(t-t_0) = E_1 + E_2e^{-(t-t_0)/t}$	-
Zener	-	$J(t-t_0) = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}(1 - e^{-(t-t_0)/t})$
Voigt-Kelven	-	$J(t-t_0) = \frac{1}{E}(1 - e^{-(t-t_0)/t})$

4.3 Méthode de résolution:

Pour résoudre le problème viscoélastique qui est défini par l'équation générale de la viscoélasticité linéaire, on utilise les méthodes suivantes:

- Méthode de la transformation de Carson-Laplace.
- Méthode de la transformation de Fourier (module complexe).

Hypothèses:

- Le matériau est non vieillissant:
- Le comportement est linéaire (la fonctionnelle f est linéaire).

4.3.1- La méthode de la transformation de Carson-Laplace:

Le transformée de Carson-Laplace d'une fonction $f(t)$ est:

$$C(f) = F^*(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

Avec p est un nombre complexe.

Pour résoudre l'équation générale de la viscoélasticité par la méthode de la transformation de Laplace on a le schéma de résolution suivant:

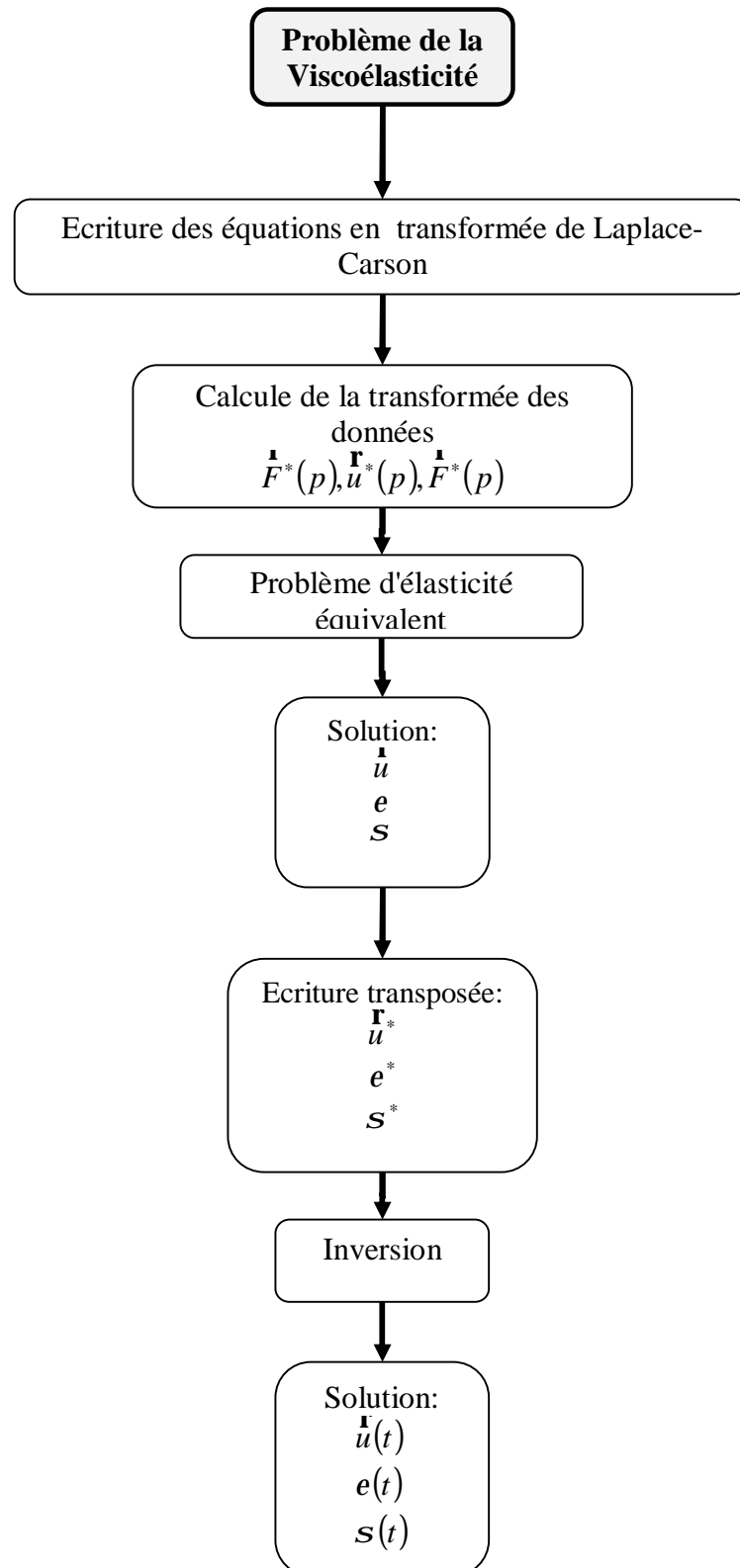


Schéma (IV-1) La méthode de résolution d'un problème viscoélastique (utilisant la méthode de la transformation de Laplace)

En appliquant la transformation de Carson-Laplace sur les formules (IV-8.b) et (IV-13.b) on trouve les relations suivantes:

$$\mathbf{s}_{ij}^*(p) = R_{ijkl}^*(p) \mathbf{e}_{kl}^*(p) \quad (IV-14)$$

$$\mathbf{e}_{ij}^*(p) = J_{ijkl}^*(p) \mathbf{s}_{kl}^*(p) \quad (IV-15)$$

Ces équations ont la même forme que la loi de Hook en élasticité;

- $R_{ijkl}^*(p)$ joue le rôle du module d'Young. $R_{ijkl}^*(p)$ est appelé le module opérationnel.
- $J_{ijkl}^*(p)$ est son inverse. $J_{ijkl}^*(p)$ est appelé complaisance opérationnelle.

On peut écrire (IV-14) du matériau orthotrope de la forme:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_{11}^*(p) \\ \mathbf{s}_{12}^*(p) \\ \mathbf{s}_{33}^*(p) \\ \mathbf{t}_{23}^*(p) \\ \mathbf{t}_{31}^*(p) \\ \mathbf{t}_{12}^*(p) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11}^*(p) & R_{12}^*(p) & R_{13}^*(p) & 0 & 0 & 0 \\ & R_{22}^*(p) & R_{23}^*(p) & 0 & 0 & 0 \\ & & R_{33}^*(p) & 0 & 0 & 0 \\ & & & R_{44}^*(p) & 0 & 0 \\ & sym & & & R_{55}^*(p) & 0 \\ & & & & & R_{66}^*(p) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_{11}^*(p) \\ \mathbf{e}_{22}^*(p) \\ \mathbf{e}_{33}^*(p) \\ \mathbf{e}_{23}^*(p) \\ \mathbf{e}_{31}^*(p) \\ \mathbf{e}_{12}^*(p) \end{Bmatrix} \quad (IV-14.a)$$

L'équation (IV-15) peut s'écrire:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{e}_{11}^*(p) \\ \mathbf{e}_{22}^*(p) \\ \mathbf{e}_{33}^*(p) \\ \mathbf{e}_{23}^*(p) \\ \mathbf{e}_{31}^*(p) \\ \mathbf{e}_{12}^*(p) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^*(p) & J_{12}^*(p) & J_{13}^*(p) & 0 & 0 & 0 \\ & J_{22}^*(p) & J_{23}^*(p) & 0 & 0 & 0 \\ & & J_{33}^*(p) & 0 & 0 & 0 \\ & & & J_{44}^*(p) & 0 & 0 \\ & sym & & & J_{55}^*(p) & 0 \\ & & & & & J_{66}^*(p) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_{11}^*(p) \\ \mathbf{s}_{12}^*(p) \\ \mathbf{s}_{33}^*(p) \\ \mathbf{t}_{23}^*(p) \\ \mathbf{t}_{31}^*(p) \\ \mathbf{t}_{12}^*(p) \end{Bmatrix} \quad (IV-15.a)$$

Avec :

$$\bullet \quad [J^*(p)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1^*} & -\frac{n_{12}^*}{E_2^*} & -\frac{n_{21}^*}{E_2^*} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{n_{12}^*}{E_2^*} & \frac{1}{E_2^*} & -\frac{n_{23}^*}{E_2^*} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{n_{12}^*}{E_1^*} & -\frac{n_{23}^*}{E_2^*} & \frac{1}{E_2^*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+n_{23}^*)}{E_2^*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}^*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}^*} \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad E_1^*(p) = V_f E_f^*(p) + V_m E_m^* \quad (IV - 16)$$

$$\bullet \quad \frac{n_{12}^*}{E_1^*} = \frac{n_{21}^*}{E_2^*} \quad (IV - 17)$$

Remarques:

$$- R^*(p)J^*(p) = I$$

$$- R(t)J(t) \neq I$$

- Modules d'Young de relaxation $E_i(t)$:

$$S_{ii}^*(p) = \frac{1}{E_i^*}(p) \Rightarrow E_i(t) = \frac{1}{S_{ii}^*}$$

- Coefficients de Poisson de relaxation $n_{ij}(t)$:

$$S_{ij}^*(p) = \frac{-n_{ij}^*(p)}{E_i^*(p)} = \frac{-n_{ji}^*(p)}{E_j^*(p)} \Rightarrow n_{ij}(t) = -E_i^*(p)S_{ij}^*(p)$$

- Modules de Coulomb de relaxation:

$$S_{kk}^*(p) = \frac{1}{G_{ij}^*(p)} \Rightarrow G_{ij}(p) = \frac{1}{S_{kk}^*(p)}$$

• **Remarque:**

Pour les composites renforcés par des fibres longue et cylindrique; les tenseurs de relaxation $R_{ij}^*(p)$ de matériau transversalement isotrope sont donnés par les expressions de Luciano et Barbero [3] comme suit:

$$R_{11}^*(p) = I_0^* + 2m_0^* - V_f \left[\frac{S_3^2}{m_0^{*2}} - \frac{2S_3S_6}{gm_0^{*2}} - \frac{aS_3}{cm_0^*} + \frac{S_6^2 - S_7^2}{g^2m_0^{*2}} + \frac{aS_6 + bS_7}{cgm_0^*} + \frac{a^2 - b^2}{4c^2} \right] / D \quad (IV-18a)$$

$$R_{12}^*(p) = I_0^* + V_f b \left[\frac{S_3}{2cm_0^*} + \frac{S_6 - S_7}{2cgm_0^*} + \frac{a+b}{4c^2} \right] / D \quad (IV-18b)$$

$$R_{23}^*(p) = I_0^* + V_f \left[\frac{aS_7}{2cgm_0^*} - \frac{ab + b^2}{4c^2} \right] / D \quad (IV-18c)$$

$$R_{22}^*(p) = I_0^* + 2m_0^* - V_f \left[-\frac{aS_3}{2cm_0^*} + \frac{aS_6}{2cgm_0^*} + \frac{a^2 - b^2}{4c^2} \right] / D \quad (IV-18d)$$

$$R_{44}^*(p) = m_0^* - V_f \left[-\frac{2S_3}{m_0^*} + (m_0^* - m_1)^{-1} + \frac{2S_7}{m_0^*(1-n_0)} \right]^{-1} \quad (IV-18e)$$

$$R_{66}^*(p) = m_0^* - V_f \left[-\frac{S_3}{m_0^*} + (m_0^* - m_1)^{-1} \right]^{-1} \quad (IV-18f)$$

Avec:

- V_f est le volume de fraction de la fibre.
- $m_0^* I_0^*$ sont des coefficients de Lamé de la matrice.

- m_i I_1 sont des coefficients de Lamé de la fibre.
- $I_0^* = \frac{E_0^* n_0}{(1+n_0)(1-2n_0)}$ (IV-19.a)
- $m_0^* = \frac{E_0^* n_0}{2(1+n_0)}$ (IV-19.b)
- $I_1 = \frac{E_1 n_1}{(1+n_1)(1-2n_1)}$ (IV-20.a)
- $m_0^* = \frac{E_1 n_1}{2(1+n_1)}$ (IV-20.b)
- $E_0^* = \frac{pE^M m^M}{E^M + pm^M}$
- $a = m_1 - m_0^* - 2m_1 n_0 + 2m_0^* n_1$
- $b = -m_0^* n_0 + m_1 n_1 + 2m_0^* n_0 n_1 - 2m_1 n_0 n_1$
- $a = (m_0^* - m_1)(m_1 - m_0^* - m_0^* n_0 - 2m_1 n_0 + 2m_0^* n_1 + m_1 n_1 + 2m_0^* n_0 n_1 - 2m_1 n_0 n_1)$
- $g = 2 - 2n_0$
- $D = \frac{a}{cm_0^{*2}} \left(\frac{S_3^2}{2} - \frac{S_3 S_6}{g} + \frac{(S_6^2 - S_7^2)}{2g^2} \right) + \frac{(a^2 - b^2)}{2c^2 m_0^*} \left(-S_3 + \frac{S_6}{g} \right) + \frac{(ab + b^2) S_7}{2c^2 g m_0^*} + \frac{(a^3 - 2b^3 - 3ab^2)}{8c^3}$
- S_3 , S_6 et S_7 sont obtenues à partir de la compatibilité de Nemat-Nasser et al comme suit:
 - $S_3 = 0.49247 - 0.47603V_f - 0.02748V_f^2$
 - $S_6 = 0.36844 - 0.14944V_f - 0.27152V_f^2$
 - $S_7 = 0.12346 - 0.32035V_f - 0.23517V_f^2$

4.5.2 Modules complexes (méthode de Fourier):

On appelle la transformée de Fourier d'une fonction $F(t)$ la quantité suivante:

$$\hat{F}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-iwt} dt$$

Avec:

- w : La pulsation.
- $f = \frac{w}{2\pi}$: La fréquence.

En appliquant la transformée de Fourier sur l'équation générale de la viscoélasticité on obtient:

$$\hat{S}_{pq}(w) = R_{pqkl}^*(w) \hat{e}_{kl}(w) \quad (IV - 21)$$

Avec:

- $R_{pqrs}^*(w) = iw \hat{R}_{pqkl}(w)$: Le tenseur de relaxation complexe (rigidités complexes).
- $J_{pqrs}^*(w) = iw \hat{J}_{pqkl}(w)$: Le tenseur de retard à déformation
- $E_k^*(w)$: Module d'Young complexe.

Pour le modèle de Maxwell le module de relaxation complexe se traduit par la relation suivante:

$$R^*(w) = E \frac{I^2 w^2}{1 + I^2 w^2} + iE \frac{I w}{1 + I^2 w^2} \quad (IV - 22)$$

Avec:

$$I = \frac{h}{E}$$

- $\text{Re}(R^*(w)) = E \frac{I^2 w^2}{1 + I^2 w^2}$ est le module élastique.
- $\text{Im}(R^*(w)) = E \frac{I w}{1 + I^2 w^2}$ est le module visqueux.

Dans le cas d'une déformation sinusoïdale (voire la figure (IV-23)):

$$e_{pq}(t) = e_{pq}^0 e^{i\omega t}$$

Donc :

$$s_{pq}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(e_{kl}^0 e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{pqkl}(t) e^{-i\omega t} dt \right) \quad (IV - 23)$$

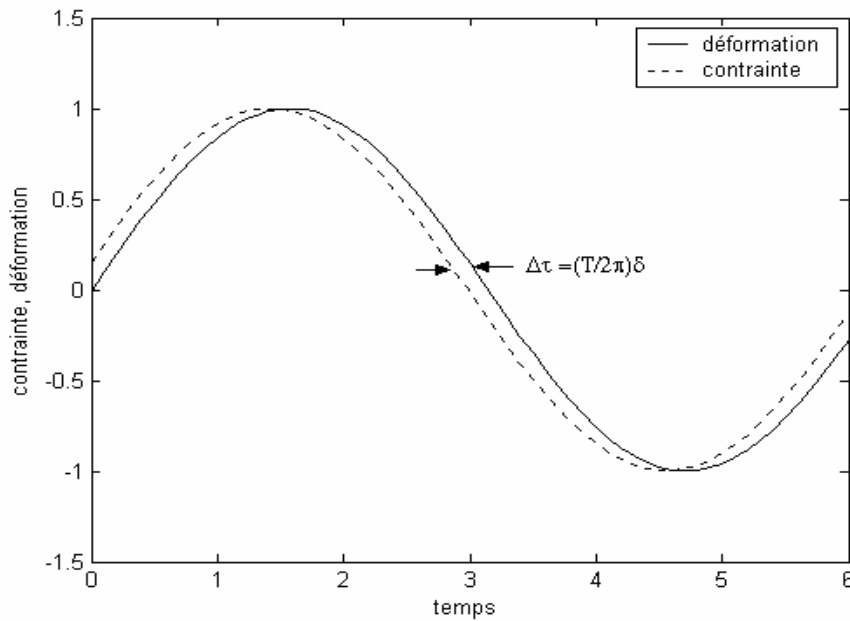


Figure (IV-23) La variation de la déformation et la contrainte en fonction u temps.

Si $t \rightarrow +\infty$, nous avons alors:

$$s_{pq}(t) = \left[R_{pqkl}^*(w) e_{kl}^0 \right] e^{i\omega t} = s_{pq}^*(w) e^{i\omega t}$$

Donc:

$$\mathbf{s}_{pq}(t) = \mathbf{s}_{pq}^*(\mathbf{w})e^{i\omega t} \quad (IV - 24)$$

$$\mathbf{s}_{pq}^*(\mathbf{w}) = \mathbf{R}_{pqkl}^*(\mathbf{w})\mathbf{e}_{kl}^0 \quad (IV - 25)$$

On peut écrire (IV-21) de matériau orthotrope de la forme:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_{11}^* \\ \mathbf{s}_{12}^* \\ \mathbf{s}_{33}^* \\ \mathbf{t}_{23}^* \\ \mathbf{t}_{31}^* \\ \mathbf{t}_{12}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11}^*(\mathbf{w}) & \mathbf{R}_{12}^*(\mathbf{w}) & \mathbf{R}_{13}^*(\mathbf{w}) & 0 & 0 & 0 \\ & \mathbf{R}_{22}^*(\mathbf{w}) & \mathbf{R}_{23}^*(\mathbf{w}) & 0 & 0 & 0 \\ & & \mathbf{R}_{33}^*(\mathbf{w}) & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mathbf{R}_{44}^*(\mathbf{w}) & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & \mathbf{R}_{55}^*(\mathbf{w}) & 0 \\ & & & & & \mathbf{R}_{66}^*\mathbf{a}(\mathbf{w}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_{11}^* \\ \mathbf{e}_{22}^* \\ \mathbf{e}_{33}^* \\ \mathbf{e}_{23}^* \\ \mathbf{e}_{31}^* \\ \mathbf{e}_{12}^* \end{Bmatrix} \quad (IV - 26.a)$$

L'équation (IV-26.a) peut s'écrire aussi:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{e}_{11}^* \\ \mathbf{e}_{22}^* \\ \mathbf{e}_{33}^* \\ \mathbf{e}_{23}^* \\ \mathbf{e}_{31}^* \\ \mathbf{e}_{12}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11}^*(\mathbf{w}) & \mathbf{J}_{12}^*(\mathbf{w}) & \mathbf{J}_{13}^*(\mathbf{w}) & 0 & 0 & 0 \\ & \mathbf{J}_{22}^*(\mathbf{w}) & \mathbf{J}_{23}^*(\mathbf{w}) & 0 & 0 & 0 \\ & & \mathbf{J}_{33}^*(\mathbf{w}) & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mathbf{J}_{44}^*(\mathbf{w}) & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & \mathbf{J}_{55}^*(\mathbf{w}) & 0 \\ & & & & & \mathbf{J}_{66}^*\mathbf{a}(\mathbf{w}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_{11}^* \\ \mathbf{s}_{12}^* \\ \mathbf{s}_{33}^* \\ \mathbf{t}_{23}^* \\ \mathbf{t}_{31}^* \\ \mathbf{t}_{12}^* \end{Bmatrix} \quad (IV - 26.b)$$

4.6 Comportement d'un pli unidirectionnel dans le domaine de Carson-Laplace:

On peut écrire la relation entre les contraintes et les déformations dans le domaine de Carson-Laplace comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_1^* \\ \mathbf{s}_2^* \\ \mathbf{t}_{12}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{11}^* & \mathcal{Q}_{12}^* & 0 \\ \mathcal{Q}_{12}^* & \mathcal{Q}_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{Q}_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1^* \\ \mathbf{e}_2^* \\ \mathbf{g}_{12}^* \end{Bmatrix} \quad (IV - 27.a)$$

Inversement:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1^* \\ \mathbf{e}_2^* \\ \mathbf{g}_{12}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^* & S_{12}^* & 0 \\ S_{12}^* & S_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & S_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_1^* \\ \mathbf{s}_2^* \\ \mathbf{t}_{12}^* \end{Bmatrix} \quad (IV - 28.b)$$

Avec [4]:

$$\bullet \quad Q_{11}^* = R_{11}^* - \frac{R_{12}^{*2}}{R_{22}^*} \quad (IV - 29.a)$$

$$\bullet \quad Q_{12}^* = R_{12}^* - \frac{R_{23}^* R_{12}^*}{R_{22}^*} \quad (IV - 29.b)$$

$$\bullet \quad Q_{22}^* = R_{22}^* - \frac{R_{23}^{*2}}{R_{22}^*} \quad (IV - 29.c)$$

$$\bullet \quad Q_{66}^* = R_{66}^* \quad (IV - 29.d)$$

Pour la structure de mats, qui est isotrope dans le plan:

$$(Q_{11}^*)_{CSM} = (Q_{22}^*)_{CSM} = \frac{3}{8}Q_{11}^* + \frac{1}{4}Q_{12}^* + \frac{3}{8}Q_{22}^* + \frac{1}{2}Q_{66}^* \quad (IV - 30.a)$$

$$(Q_{12}^*)_{CSM} = \frac{1}{8}Q_{11}^* + \frac{3}{4}Q_{12}^* + \frac{1}{8}Q_{22}^* - \frac{1}{2}Q_{66}^* \quad (IV - 30.b)$$

$$(Q_{66}^*)_{CSM} = \frac{1}{8}Q_{11}^* - \frac{1}{4}Q_{12}^* + \frac{1}{8}Q_{22}^* + \frac{1}{2}Q_{66}^* \quad (IV - 30.c)$$

4.7 Comportement d'un pli orienté dans le domaine Carson-Laplace:

Comme l'élasticité, la relation entre les contraintes et les déformations dans le domaine de Carson-Laplace est s'écrit:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_1^* \\ \mathbf{s}_2^* \\ \mathbf{t}_{12}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^* & Q_{12}^* & 0 \\ Q_{12}^* & Q_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1^* \\ \mathbf{e}_2^* \\ \mathbf{g}_{12}^* \end{Bmatrix} \quad (IV - 31)$$

On peut écrire cette formule dans les axes (x,y) de la même manière de l'élasticité:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_x^* \\ \mathbf{s}_y^* \\ \mathbf{t}_{xy}^* \end{Bmatrix} = [\mathbf{T}]^{-1} [\mathbf{Q}^*] [\mathbf{T}'] \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x^* \\ \mathbf{e}_y^* \\ \mathbf{g}_{xy}^* \end{Bmatrix} \quad (IV - 32.a)$$

Si on pose: $[\mathbf{T}]^{-1} [\mathbf{Q}^*] [\mathbf{T}'] = \overline{[\mathbf{Q}^*]}$, et en remplaçant dans l'équation (IV-24.a), on trouve:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_x^* \\ \mathbf{s}_y^* \\ \mathbf{t}_{xy}^* \end{Bmatrix} = \overline{[\mathbf{Q}^*]} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x^* \\ \mathbf{e}_y^* \\ \mathbf{g}_{xy}^* \end{Bmatrix}$$

Ou bien:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_x^* \\ \mathbf{s}_y^* \\ \mathbf{t}_{xy}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11}^* & \overline{Q}_{12}^* & \overline{Q}_{16}^* \\ \overline{Q}_{12}^* & \overline{Q}_{22}^* & \overline{Q}_{26}^* \\ \overline{Q}_{16}^* & \overline{Q}_{26}^* & \overline{Q}_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x^* \\ \mathbf{e}_y^* \\ \mathbf{g}_{xy}^* \end{Bmatrix} \quad (IV - 32.b)$$

Avec:

- $\overline{Q}_{11}^* = Q_{11}^* c^4 + 2(Q_{12}^* + 2Q_{66}^*) s^2 c^2 + Q_{22}^* s^4$
- $\overline{Q}_{12}^* = (Q_{11}^* + Q_{22}^* - 4Q_{66}^*) s^2 c^2 + Q_{12}^* (s^4 + c^4)$
- $\overline{Q}_{22}^* = Q_{11}^* s^4 + 2(Q_{12}^* + 2Q_{66}^*) s^2 c^2 + Q_{22}^* c^4$
- $\overline{Q}_{16}^* = (Q_{11}^* - Q_{12}^* - 2Q_{66}^*) s^3 c^3 + (Q_{12}^* - Q_{22}^* + 2Q_{66}^*) s^3 c$
- $\overline{Q}_{26}^* = (Q_{11}^* + Q_{22}^* - 2Q_{12}^* - 2Q_{66}^*) s^2 c^2 + Q_{66}^* (s^4 + c^4)$

4.8 Comportement d'un stratifié dans le domaine Carson-Laplace:

L'analyse de comportement d'un stratifié dans le domaine Carson-Laplace est similaire à l'analyse qui a été étudiée dans le chapitre II.

Les contraintes sont données par l'analogie élasticité-viscoélasticité par la relation suivante:

$$\{s^*\}_k = \overline{Q}^*_k \{e^*\} + z \overline{Q}^*_k \{k^*\}$$

Soit:

$$\begin{Bmatrix} s_x^* \\ s_y^* \\ t_{xy}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11}^* & \overline{Q}_{12}^* & \overline{Q}_{16}^* \\ \overline{Q}_{12}^* & \overline{Q}_{22}^* & \overline{Q}_{26}^* \\ \overline{Q}_{16}^* & \overline{Q}_{26}^* & \overline{Q}_{66}^* \end{bmatrix}_k \left(\begin{Bmatrix} e_x^* \\ e_y^* \\ g_{xy}^* \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^* \\ k_y^* \\ k_{xy}^* \end{Bmatrix} \right) \quad (IV - 33)$$

Les efforts de membrane de chaque couche sont donnés – dans le domaine de Carson-Laplace – par:

$$\begin{Bmatrix} N_x^* \\ N_y^* \\ T_{xy}^* \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} s_x^* \\ s_y^* \\ t_{xy}^* \end{Bmatrix} dz \quad (IV - 34)$$

Pour un stratifié de n couches, l'équation (IV-34) devient:

$$\begin{Bmatrix} N_x^* \\ N_y^* \\ T_{xy}^* \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} s_x^* \\ s_y^* \\ t_{xy}^* \end{Bmatrix} dz \quad (IV - 35)$$

En remplaçant l'équation (IV-31) dans (IV-35) on obtient:

$$\begin{Bmatrix} N_x^* \\ N_y^* \\ T_{xy}^* \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11}^* & \overline{Q}_{12}^* & \overline{Q}_{16}^* \\ \overline{Q}_{12}^* & \overline{Q}_{22}^* & \overline{Q}_{26}^* \\ \overline{Q}_{16}^* & \overline{Q}_{26}^* & \overline{Q}_{66}^* \end{bmatrix}_k \left(\int_{z^{k-1}}^{z^k} \begin{Bmatrix} e_x^{*0} \\ e_y^{*0} \\ g_{xy}^{*0} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^* \\ k_y^* \\ k_{xy}^* \end{Bmatrix} \right) dz$$

Soit:

$$\begin{Bmatrix} N_x^* \\ N_y^* \\ T_{xy}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & A_{16}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & A_{26}^* \\ A_{16}^* & A_{26}^* & A_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x^{*0} \\ e_y^{*0} \\ g_{xy}^{*0} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11}^* & B_{12}^* & B_{16}^* \\ B_{12}^* & B_{22}^* & B_{26}^* \\ B_{16}^* & B_{26}^* & B_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x^* \\ k_y^* \\ k_{xy}^* \end{Bmatrix} \quad (IV-36)$$

Les moments dans chaque couches sont donnés par:

$$\begin{Bmatrix} M_x^* \\ M_y^* \\ M_{xy}^* \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} s_x^* \\ s_y^* \\ t_{xy}^* \end{Bmatrix} z dz \quad (IV-37)$$

Pour un stratifié de n couches l'équation (IV-37) devient:

$$\begin{Bmatrix} M_x^* \\ M_y^* \\ M_{xy}^* \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} s_x^* \\ s_y^* \\ t_{xy}^* \end{Bmatrix} z dz \quad (IV-38)$$

En remplaçant l'équation (IV-31) dans (IV-38) on trouve:

$$\begin{Bmatrix} M_x^* \\ M_y^* \\ M_{xy}^* \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^* & \bar{Q}_{12}^* & \bar{Q}_{16}^* \\ \bar{Q}_{12}^* & \bar{Q}_{22}^* & \bar{Q}_{26}^* \\ \bar{Q}_{16}^* & \bar{Q}_{26}^* & \bar{Q}_{66}^* \end{bmatrix}_k \left(\int_{z^{k-1}}^{z^k} z \begin{Bmatrix} e_x^{*0} \\ e_y^{*0} \\ g_{xy}^{*0} \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} k_x^* \\ k_y^* \\ k_{xy}^* \end{Bmatrix} dz \right)$$

Donc:

$$\begin{Bmatrix} M_x^* \\ M_y^* \\ M_{xy}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}^* & B_{12}^* & B_{16}^* \\ B_{12}^* & B_{22}^* & B_{26}^* \\ B_{16}^* & B_{26}^* & B_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x^{*0} \\ e_y^{*0} \\ g_{xy}^{*0} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ D_{12}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x^* \\ k_y^* \\ k_{xy}^* \end{Bmatrix} \quad (IV-39)$$

Les rigidités de membrane sont donnés par :

$$A_{ij}^* = \sum_{k=1}^n (Q_{ij}^*)_k (z_k - z_{k-1}) \quad (IV - 40)$$

Les rigidités de couplage sont donnés par :

$$B_{ij}^* = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (Q_{ij}^*)_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (IV - 41)$$

Les rigidités de courbure sont donnés par :

$$D_{ij}^* = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (Q_{ij}^*)_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (IV - 42)$$

4.9 Comportement global du stratifié dans le domaine de Carson-Laplace:

On peut résumer ces deux équations (IV-36) et (IV-39) à:

$$\begin{Bmatrix} N_x^* \\ N_y^* \\ T_{xy}^* \\ M_x^* \\ M_y^* \\ M_{xy}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & A_{16}^* & B_{11}^* & B_{12}^* & B_{16}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & A_{26}^* & B_{12}^* & B_{22}^* & B_{26}^* \\ A_{16}^* & A_{26}^* & A_{66}^* & B_{16}^* & B_{26}^* & B_{66}^* \\ B_{11}^* & B_{12}^* & B_{16}^* & D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ B_{12}^* & B_{22}^* & B_{26}^* & D_{12}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ B_{16}^* & B_{26}^* & B_{66}^* & D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x^{*0} \\ e_y^{*0} \\ g_{xy}^{*0} \\ k_x^* \\ k_y^* \\ k_{xy}^* \end{Bmatrix} \quad (IV - 43)$$

Ou bien par:

$$\begin{Bmatrix} e_x^{*0} \\ e_y^{*0} \\ g_{xy}^{*0} \\ k_x^* \\ k_y^* \\ k_{xy}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & a_{16}^* & b_{11}^* & b_{12}^* & b_{16}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & a_{26}^* & b_{12}^* & b_{22}^* & b_{26}^* \\ a_{16}^* & a_{26}^* & a_{66}^* & b_{16}^* & b_{26}^* & b_{66}^* \\ B_{11}^* & B_{12}^* & B_{16}^* & d_{11}^* & d_{12}^* & d_{16}^* \\ B_{12}^* & B_{22}^* & B_{26}^* & d_{12}^* & d_{22}^* & d_{26}^* \\ B_{16}^* & B_{26}^* & B_{66}^* & d_{16}^* & d_{26}^* & d_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x^* \\ N_y^* \\ T_{xy}^* \\ M_x^* \\ M_y^* \\ M_{xy}^* \end{Bmatrix} \quad (IV - 44)$$

4.10 Effet de la température sur le comportement viscoélastique:

4.10.1 l'effet sur le module de relaxation:

L'étude du module de relaxation à 10 secondes $R(10)$ entreprise par TOBOLSKY, conduit à la courbe température $(T, \log R(10))$ présentée sur la figure (IV-26). Cette courbe est caractéristique du comportement des polymères amorphes.

Tobolsky y distingue cinq plages des températures [13].

1. Un domaine où le matériau est vitreux dur est fragile.
2. une zone de transition.
3. le plateau caoutchoutique, le matériau se comporte comme un élastomère.
4. une zone où le matériau se comporte comme un fluide viscoélastique.
5. une zone où le matériau est un fluide presque totalement dénué de possibilité de recouvrance élastique.

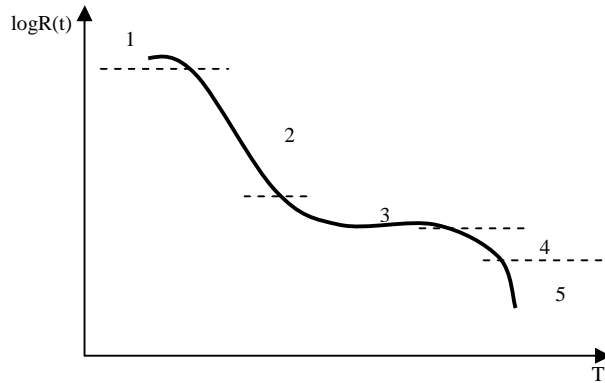


Figure (IV-24) variation du module de relaxation d'un polymère en fonction de la température

Pour les polymères cristallins la courbe $\log R(t)$ est beaucoup plus aplatie que la courbe correspondante pour les polymères amorphes.

4.10.2 loi de comportement:

On a d'après le chapitre III la loi de comportement thermoélastique suivante:

$$s_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} - a_{ij} \Delta T$$

$$e_{ij} = S_{ijkl} s_{kl} + a_{ij} \Delta T$$

En utilisant le principe de superposition de Boltzmann sur les deux équations précédentes de la même manière à celle de IV-4.2 on trouve les relations suivantes:

$$s_{ij}(t) = R_{ijkl}(0)e_{kl}(t) + \int_0^t \frac{dR_{ijkl}}{dt}(t)e_{kl}(t-t)dt - a_{ij}(0)\Delta T(t) - \int_0^t \frac{da_{ijkl}}{dt}(t)\Delta T(t-t)dt \quad (IV - 45.a)$$

Ou encore sous la forme suivante:

$$s_{ij}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t R_{ijkl}(t-t)e_{kl}(t)dt - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t a_{ij}(t-t)\Delta T(t)dt \quad (IV - 45.b)$$

En appliquant la transformation de Carson-Laplace on trouve la relation suivante.

$$s_{ij}^*(p) = R_{ijkl}^*(p)e_{kl}^*(p) - a_{ij}^*(p)\Delta T^*(p) \quad (IV - 46)$$

De la même manière en appliquant le principe de superposition de Boltzmann sur la deuxième équation:

$$e_{ij}(t) = J_{ijkl}(0)s_{kl}(t) + \int_0^t \frac{dJ_{ijkl}}{dt}(t)s_{kl}(t-t)dt + a_{ij}(0)\Delta T(t) + \int_0^t \frac{da_{ijkl}}{dt}(t)\Delta T(t-t)dt \quad (IV - 47.a)$$

Ou bien:

$$e_{ij}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t J_{ijkl}(t-t)s_{kl}(t)dt - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t a_{ij}(t-t)\Delta T(t)dt \quad (IV - 47.b)$$

Et en appliquant la transformation de Carson-Laplace on trouve:

$$e_{ij}^*(p) = J_{ijkl}^*(p)s_{kl}^*(p) + a_{ij}^*(p)\Delta T^*(p) \quad (IV - 48)$$

Avec $\Delta T = T(t) - T_0$

4.10.3 Effet thermique sur le comportement viscoélastique du stratifié:

Dans le domaine de Carson-Laplace, les efforts de membrane sont données (de même méthode de la thermoélasticité) par:

$$\begin{Bmatrix} N_x^* \\ N_y^* \\ T_{xy}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & A_{16}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & A_{26}^* \\ A_{16}^* & A_{26}^* & A_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x^{*0} \\ e_y^{*0} \\ g_{xy}^{*0} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11}^* & B_{12}^* & B_{16}^* \\ B_{12}^* & B_{22}^* & B_{26}^* \\ B_{16}^* & B_{26}^* & B_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_x^{*Th} \\ N_y^{*Th} \\ T_{xy}^{*Th} \end{Bmatrix} \quad (IV - 49.a)$$

Avec les forces thermiques sont obtenues dans le domaine Carson-Laplace de façon suivante:

$$\begin{Bmatrix} N_x^{*Th} \\ N_y^{*Th} \\ T_{xy}^{*Th} \end{Bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^* & \bar{Q}_{12}^* & \bar{Q}_{16}^* \\ \bar{Q}_{12}^* & \bar{Q}_{22}^* & \bar{Q}_{26}^* \\ \bar{Q}_{16}^* & \bar{Q}_{26}^* & \bar{Q}_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_x^* \\ a_y^* \\ a_{xy}^* \end{Bmatrix} \Delta T^* dz \quad (IV - 49.b)$$

De même façon, on trouve les moments dans ce domaine (Carson-Laplace):

$$\begin{Bmatrix} M_x^* \\ M_y^* \\ M_{xy}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}^* & B_{12}^* & B_{16}^* \\ B_{12}^* & B_{22}^* & B_{26}^* \\ B_{16}^* & B_{26}^* & B_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x^{*0} \\ e_y^{*0} \\ g_{xy}^{*0} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ D_{12}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} M_x^{*Th} \\ M_y^{*Th} \\ M_{xy}^{*Th} \end{Bmatrix} \quad (IV - 50.a)$$

D'où les moments thermiques sont donnés par:

$$\begin{Bmatrix} M_x^{*Th} \\ M_y^{*Th} \\ M_{xy}^{*Th} \end{Bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^* & \bar{Q}_{12}^* & \bar{Q}_{16}^* \\ \bar{Q}_{12}^* & \bar{Q}_{22}^* & \bar{Q}_{26}^* \\ \bar{Q}_{16}^* & \bar{Q}_{26}^* & \bar{Q}_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_x^* \\ a_y^* \\ a_{xy}^* \end{Bmatrix} \Delta T^* z dz \quad (IV - 50.b)$$

CHAPITRE V:

APPLICATION AU COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE DES MATERIAUX ORTHOTROPES

5.1 Introduction :

Les matériaux composites modernes se distinguent avant tout par une rigidité élevée, par leur grande stabilité dimensionnelle et par un faible poids. Parmi les autres avantages, on peut citer aussi leur faible dilatation thermique, leur résistance à la corrosion, leur grande endurance aux efforts alternés et leur bonne tenue aux chocs.

Parmi ces matériaux, on rencontre les matériaux composites à fibres de renfort typiques tel que : des matériaux en fibres de verre et matrice la résine vinylester.

En conséquence, lorsque la matrice est additionnée aux fibres, il se forme une monocouche, ou strate. L'empilement de plusieurs couches constitue le stratifié, ou structure composite.

Dans notre étude, les matériaux verre/vinylester et les stratifiés $[(+/- 45^\circ / CSM)_2]_s$ et $[(90^\circ +/- 45^\circ / CSM)_3]_s$ ont été considérés, où les coefficients de complaisance de fluage et de relaxation ont été déterminés utilisant les méthodes de Carson-Laplace et de Fourier.

5.2 Définition des matériaux:

Vinylesters: On peut la considérer comme une variante des polyesters produite à l'acide acrylique, mais elles sont plus fortes que des résines de polyester, et utilisent un type de résine de polyester de molécules d'édition absolue dans le processus de liaison.

La résine de vinylester est une forme hybride de résine de polyester qui a été durcie avec les molécules époxydes dans la structure principale de moléculaire.

Les résines de vinylester possèdent une bonne résistance à la fatigue et un excellent comportement à la corrosion, mais demeure combustible

La résine de vinylester représente une meilleure résistance à l'absorption d'humidité que des résines de polyester mais elle est du côté incliné. Parfois elle ne traitera pas si les conditions atmosphériques ne sont pas exactes. Elle a également la difficulté en matériaux différents et déjà traités de liaison.

On sait également que les résines de vinylester collent très bien sur la fibre de verre, mais offre un lien faible à Kevlar et des fibres de carbone dues à la nature de ces deux fibres plus exotiques. En raison de la nature délicate de la résine de vinylester, la préparation extérieure soignée est nécessaire si l'adhérence raisonnable est désirée pour n'importe quel travail de réparation.

Le matériau composite verre/vinylester est très sensible à température et l'humidité [37].

Les spécimens ont été examinés à différents niveaux de la température et l'humidité pour étudier les effets sur l'environnement sur les comportements de fluage et de relaxation. Le comportement viscoélastique des résines de vinylester dans de diverses conditions environnementales a été caractérisé et représenté par un modèle de maxwell de deux paramètres.

Les composites ont été fabriqués en utilisant les fibres de verre et de résine de vinylester, qui ont les caractéristiques suivantes :

Tableau (V-1) les propriétés des composantes verre et vinylester.

		E(Gpa)	$m(Gpa.hr)$	Coefficient de Lamé ν	Fraction du volume V(%)
Matrice	21°C et 12% RH	3.33	855.09	0.35	70
	66°C et 80% RH	2.62	165.99	0.35	70
	Fibre	72.5	-	0.22	30

5.3 Etapes de calcul:

En appliquant les théories développées dans le chapitre précédent et en utilisant le logiciel « Matlab », les coefficients de complaisances de fluage et de relaxation pour les matériaux verre/vinylester, le stratifié $[(+/- 45^\circ / CSM)_2]_s$ et le stratifié $[(90^\circ +/- 45^\circ / CSM)_3]_s$ ont été déterminés.

En utilisant les formules (IV-18.a) jusqu'à (IV-18.f), on peut tirer les coefficients de la relaxation dans le domaine de C-L du composite verre/vinylester à 21°C et 12%RH, pour déterminer ces coefficients dans le domaine du temps, on utilise la transformation inverse du Carson-Laplace.

La matrice des coefficients de complaisance de fluage est l'inverse de la matrice des coefficients de relaxation dans le domaine de C-L, on peut déterminer ces coefficients dans le domaine du temps par la transformation inverse du C-L.

Pour la méthode de Transformation de Fourier, on utilise la formule (IV-22) et (IV-22) pour déterminer les module de relaxation élastique et visqueux, puis on utilise la formule (IV-25) pour déterminer la contrainte $s_{pq}^*(w)$ à un déformation sinusoïdale $e_{pq}^*(w) = e_{pq}^0 e^{iwt}$.

5.4 Discussions des résultats:

Les figures (V-1) et (V-2) représentent respectivement la variation des coefficients de la complaisance de fluage et les modules de relaxation du composite verre/vinyleste unidirectionnel à 21°C et 12%RH en fonction du temps.

Il est noter que les coefficients de la complaisance $J_{ij}(t)$ varient linéairement en fonction du temps et la pente de chaque droite est l'inverse de l'amortissement qui est différente pour chaque coefficient. Il est à noter que le rapport de chaque coefficient d'amortissement et chaque module d'Young respectif du matériau est constant est à peu près égal à : $3.9 \cdot 10^{-3}$; c'est dire :

$$\frac{m_{ij}}{E_{ij}} = I = C^{ne} = 3.6 \cdot 10^{-3}$$

Concernant les modules de relaxation (fig. V.2), il est à noter que ces coefficients varient exponentiellement en fonction du temps et que R_{12} , R_{22} et R_{66} tendent vers zéro à partir de 600 heures ; tandis que R_{11} tends vers 22.4 Gpa. Cela s'explique par le fait que le matériau ne répond pas à la viscoélasticité dans le sens des fibres (R_{11} ne tend pas vers zéro en fonction du temps) et répond à la viscoélasticité dans les autres sens (car R_{12} , R_{22} et R_{66} tendent vers zéro). Cela est dû au rôle de la matrice vinylester qui est très important dans le matériau.

Les figures (V.3) et (V.4) représentent la variation de la complaisance en fonction du temps des stratifiés $[(+/-45^\circ/CSM)_2]_S$ et $[(90^\circ +/-45^\circ/CSM)_3]_S$ respectivement. Il est clair de voir que la théorie développée répond convenablement avec les résultats expérimentaux développés par P.Qiaq, E.J.Barbero et F.Davalos [5]. Le maximum de différence de pourcentage est de 1.0% pour le stratifié $[(+/-45^\circ/CSM)_2]_S$, et de 2,5% pour le stratifié $[(90^\circ +/-45^\circ/CSM)_3]_S$.

La figure (V-5) représente seulement une étude de variation des coefficients de complaisances de fluage (S_{ij}) en fonction de l'angle d'orientation des fibres du stratifié $[+/-q]_S$ à 21°C et 12%RH. La matrice (résine) est renforcée avec des fibres pour résister à la déformation de fluage.

Les coefficients de complaisances de fluage S_{11} et S_{22} sont antisymétriques entre eux et prennent la même valeur pour $q=45^\circ$, tandis que S_{12} et S_{66} ont des valeurs minimales. Ce qui explique que le stratifié $[+/-45^\circ]_S$ fournit des meilleures conditions de résistance à la viscoélasticité sous l'effet de fluage et des charges de cisaillement.

La figure (V-6) représente la variation du module de relaxation longitudinal à différents niveaux de fraction du volume du composite verre/vinylester unidirectionnel en fonction du temps. La descente des courbes est due à l'effet de relaxation de la matrice car les fibres sont purement élastiques (selon l'hypothèse), à partir de 600 hrs (le temps de relaxation de la matrice), le module de relaxation de la matrice est nul, le matériau ne répond que le comportement des fibres (purement

élastique) et le module de relaxation est à peu près égale à $R = V_f E_f$ (puisque $E_m=0$ à $t=600$ hrs).

A partir de $t=600$ hrs, Les modules de relaxation du composite aux niveaux de la fraction du volume des fibres sont illustrés dans le tableau suivant :

V_f (%)	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
R après 600 hr	0	14.5	29.0	43.5	58.0	72.5

Les figures (V-7) et (V-8) représente l'évolution de déformations longitudinale et transversale respectivement en fonction du temps au cours de la relaxation à 21°C et 12% RH du composite verre/vinylester à différents niveaux de la contrainte. En effet, la déformation augmente progressivement sous l'effet de la tension au cours du temps, cette augmentation est due au l'effet de fluage de la matrice.

Il est noter que la déformation longitudinale est constante à partir de 600 hrs est à peu près égale la valeur correspondante à la déformation élastique du verre de chaque charge, en tenant compte la fraction du volume, telle que $\frac{S_i}{V_f E_f}$.

On résulte que l'amortissement du matériau est plus grand pour les grandes valeurs de fraction du volume de la fibre.

Les déformations longitudinales du composite après 600 hrs à différents niveaux de la contrainte sont illustrées dans le tableau suivant :

s (Gpa)	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50
e (%) après 600 hr	0.023	0.034	0.046	0.057	0.069

Par contre, dans le sens transversal, figure (V-8), la rupture se produite si les déformations correspondantes sont tendent vers la déformation transversale de la rupture du composite verre/vinylester, aux temps différents pour chaque charge.

On résulte, que le sens des fibres (longitudinale) a une bonne résistance au fluage, et la rupture se produite dans le sens transversal sous l'effet de fluage.

Les résultats obtenus expliquent que les fibres assurent, aussi, la résistance du matériau composite au fluage.

Les figures (V-9) et (V-10) représentent la variation des modules de relaxation élastique R_{11}^e , R_{22}^e et visqueux R_{11}^v , R_{22}^v du composite verre/vinylester à 21°C et 12% RH. On remarque que la réponse visqueuse est plus faible que la réponse élastique dans le sens des fibres, par contre, elle est plus considérable dans l'autre sens.

La réponse visqueuse du module de relaxation complexe du composite est due à la matrice seulement. Aux pulsation extrêmes, tel que $w = 0$ et $w = \infty$, les réponses visqueuses des modules de relaxation R_{11}^v , R_{22}^v sont nulles, le matériau est donc purement élastique.

Pour $w = 0$ la réponse élastique du module de relaxation $R_{11}(w)$ est à peu près égale 22.4 Gpa, cette valeur représente la réponse des fibres seulement (en tenant compte la fraction du volume des fibres $V_f=0.3$). Aux pulsation supérieur à $w = 0.02 \text{ rad} / s$, on peut considérer la réponse visqueuse du module de relaxation est tend vers zéro, donc le module de relaxation tend vers le module élastique du matériau composite (en tenant compte la fraction du volume des fibres et de la matrice).

Ces modules sont représentés dans le tableau suivant :

$R_{11}(Gpa)$	$R_{22}(Gpa)$
24	3.6

A la pulsation $w = 0.004 \text{ rad} / s$ les réponses visqueuses sont extrêmement grandes, à peu près égales à :

$R_{11MAX}^v(Gpa)$	$R_{22MAX}^v(Gpa)$
1.8	1.4

Les figures (V-11) et (V-12) représentent respectivement la variation en fonction de la pulsation des réponses élastique S_{11}^e et visqueuse S_{11}^v de la contrainte du composite verre/vinylester unidirectionnel à $t=500$ hr et $e_0 = 0.05\%$. Les contraintes varient périodiquement au cours de la pulsation, et leurs modules ont la même forme avec les modules de relaxation correspondants, et chaque module représente une enveloppe pour la contrainte correspondante.

Car le matériau est élastique à partir de $w = 0.02 \text{ rad/s}$ le module de la contrainte est à peu près égale à 1.8 Gpa

La valeur extrême de la réponse visqueuse de la contrainte est pour la pulsation $w = 0.004 \text{ rad/s}$ à peu près égale à $5.8 \cdot 10^{-3}$ Gpa.

Les figures (V-13) et (V-14) représentent respectivement la variation en fonction de la pulsation des réponses élastique S_{22}^e et visqueuse S_{22}^v de la contrainte du composite verre/vinylester unidirectionnel à $t=1000$ hr et $e_0 = 0.05\%$.

Car le matériau est élastique aux pulsations supérieurs à $w = 0.02 \text{ rad/s}$ le module de la contrainte est à peu près égale à 0.18 Gpa

La valeur extrême de la réponse visqueuse de la contrainte est aussi pour la pulsation $w = 0.004 \text{ rad/s}$ à peu près égale à $9.4 \cdot 10^{-3}$ Gpa.

CONCLUSION

Dans notre travail, une analyse viscoélastique des matériaux orthotropes à matrice organique et à fibres de verre a été considérée. Les deux méthodes de résolution du problème développées dans cette étude sont la méthode de transformée de Carson-Laplace qui est purement un modèle mathématique, et la méthode de transformée de Fourier qui offre un contenu physique, tel que la fréquence et la mise en évidence de la périodicité du matériau.

Basé sur ces deux méthodes, les formules de la complaisance de fluage et de module de relaxation sont développées et résolues par des méthodes analytiques en fonction du temps et des fréquences. Ensuite, des exemples pour trois types de matériaux orthotropes ont été considérés.

D'après cette formulation il est clair de voir que l'architecture du matériau, tel que l'orientation des fibres et leur fraction du volume, ainsi que la température, la fréquence de chargement, et le niveau de l'effort, influent sur la réponse de fluage et de relaxation. Les résultats des applications considérées montrent que la théorie développée répond convenablement avec les résultats trouvés par P.Qiaq, E.J.Barbero et F.Davalos, et que les coefficients de la complaisance $J_{ij}(t)$ varient linéairement en fonction du temps et que les rapports des pentes des droites et les modules d'Young sont constants et tendent à la même valeur qui est de : $3.6 \cdot 10^{-3}$.

Par ailleurs, il a été constaté que le rôle de la matrice est très important dans la viscoélasticité et que le sens des fibres du matériau composite verre/vinylester est pratiquement élastique, et possède quasiment les propriétés d'amortissement de la résine dans le sens transversal qui est dû à la bonne adhérence de la fibre-matrice du matériau. En conséquence, la matrice assure alors le comportement viscoélastique, par contre, les fibres assurent la résistance du matériau au fluage et à la relaxation.

Ce qui nous permettra de conclure que le comportement viscoélastique du matériau considéré sous l'effet de fluage devient important lorsqu'il est soumis à des charges de hauts niveaux, tandis que sa relaxation se minimise à des bas niveaux de déformation. Par contre pour des conditions de sollicitation environnementales importantes telles que la température ou l'humidité élevée, la réponse viscoélastique du matériau devient considérable.

LISTES DES FIGURES

1. Figure (I-1) classification des matériaux composites	18
2. Figure (I-2) Moulage au contact	18
3. Figure (I-3) Moulage par projection simultanée	18
4. Figure (I-4) Moulage par compression - SMC	19
5. Figure (I-5) Moulage par injection - BMC	19
6. Figure (I-6) Moulage par enroulement filamentaire	19
7. Figure (I-7): Pultrusion	21
8. Figure (I-8) Pièces d'automobile en composites	21
9. Figure (I-9) Pièces ferroviaire en composites	22
10. Figure (I-10) Pièces de Sports et loisirs en composites	23
11. Figure (I-11) Pièces aéronautiques en composites	27
12. Figure (II-1) Variation de la contrainte en fonction de la déformation	30
13. Figure (II-2) Matériau transversalement isotrope.	33
14. Figure (II-3) Matériau composite à système d'axes naturels	34
15. Figure (II-4) Matériau composite à système d'axes naturels	34
16. Figure (II-5) Matériau composite orienté	34
17. Figure (II-6) L'état de contrainte dans le système (x,y)	39
18. Figure (II-7) Système de coordonnées et les éléments de réduction.	39
19. Figure (II-8) Section droite d'un stratifié déformé	40
20. Figure (II-9) présentation de n couches du stratifié	46
21. Figure (III-1) variation du module 'élasticité en fonction de la température T	59
22. Figure (IV-1) Composition d'un matériau composite	60
23. Figure (IV-2) Recouvrance d'un matériau	62
24. Figure (IV-3) Représentation d'un essai de fluage	62
25. Figure (IV-4) Réponse de l'essai de fluage (déformation/temps)	63
26. Figure (IV-5) superposition de contrainte	63
27. Figure (IV-6) Représentation de la superposition de Boltzmann	66
28. Figure (IV-7) La relaxation	66
29. Figure (IV-8) Représentation d'un essai de relaxation	67
30. Figure (IV-9) La réponse de l'essai de la relaxation (contrainte/temps)	68
31. Figure (IV-10) Représentation de l'essai de l'effacement des contraintes	68
32. Figure (IV-11) Représentation de l'essai de recouvrance des déformations	69
33. Figure (IV-12) Modèle de Maxwell	70
34. Figure (IV-13) Réponse de la relaxation (contrainte/temps) du modèle de Maxwell	70
35. Figure (IV-14) La réponse de relaxation (module de relaxation/temps) du modèle de Maxwell	70
36. Figure (IV-15) La réponse de fluage (déformation/temps) du modèle de Maxwell	71
37. Figure (IV-16) La réponse de fluage (complaisance/temps) du modèle de Maxwell	71
38. Figure (IV-17) Modèle de Kelvin-Voigt	71
39. Figure (IV-18-a) la déformation en fonction du temps d'après le modèle de Kelvin-Voigt	72

40. Figure (IV-18-b) La réponse de fluage du modèle de Kelvin-Voigt	72
41. Figure (IV-19) La réponse de relaxation du modèle de Kelvin-Voigt	72
42. Figure (IV-20) Représentation du modèle de Zener	73
43. Figure (IV-21) Modèle de Maxwell généralisé	73
44. Figure (IV-22) Modèle de Burger	82
45. Figure (IV-23) La variation de la déformation et la contrainte en fonction du temps.	89
46. Figure (IV-24) variation du module de relaxation d'un polymère en fonction de la température	100
47. Figure (V-1) Complaisance de fluage d'un composite verre/vinylester unidirectionnel à 21°C et 12% RH	101
48. Figure (V-2) Modules de relaxation d'un composite verre/vinylester unidirectionnel à 21°C et 12% RH	102
49. Figure (V-3) la complaisance de fluage du stratifié composite $[(+/-45^\circ / CSM)_2]_s$ à 21°C et 12% RH	103
50. Figure (V-4) la complaisance de fluage du stratifié composite $[(90^\circ / + / -45^\circ / CSM)_3]_s$ à 21°C et 12% RH	104
51. Figure (V-5) Variation de la complaisance en fonction de l'angle d'orientation des fibres à 21°C et 12% RH	105
52. Figure (V-6) Variation du module de relaxation à différents niveaux du volume de fraction du composite verre/vinylester à 21°C et 12% RH	106
53. Figure (V-7) Evolution de la déformation longitudinale en fonction du temps au cours de la relaxation à 21°C et 12% RH du composite verre/vinylester unidirectionnel à différents niveaux de la contrainte	107
54. Figure (V-8) Evolution de la déformation transversale en fonction du temps au cours de la relaxation à 21°C et 12% RH du composite verre/vinylester unidirectionnel à différents niveaux de la contrainte.	108
55. Figure (V-9) Modules de relaxation ($R_{11}(w)$) élastique et visqueux du verre/vinylester unidirectionnel à 21°C et 12% RH.	109
56. Figure (V-10) Modules de relaxation ($R_{22}(w)$) élastique et visqueux du verre/vinylester unidirectionnel à 21°C et 12% RH	110
57. Figure (V-11) La réponse élastique de la contrainte s_{11} du composite verre/vinylester unidirectionnel à 21°C, 12% RH, $t=500$ hr et $e_0 = 0.05\%$	111
58. Figure (V-12) La réponse visqueuse de la contrainte s_{11} du composite verre/vinylester unidirectionnel à 21°C, 12% RH, $t=500$ hr et $e_0 = 0.05\%$	112
59. Figure (V-13) La réponse élastique de la contrainte s_{22} du composite verre/vinylester unidirectionnel à 21°C, 12% RH, $t=1000$ hr et $e_0 = 0.05\%$	113
60. Figure (V-14) La réponse visqueuse de la contrainte s_{11} du composite verre/vinylester unidirectionnel à 21°C, 12% RH, $t=1000$ hr et $e_0 = 0.05\%$	

Nomenclature

- [A] Matrice de rigidité en membrane.
- [A^*] Matrice de rigidité en membrane dans le domaine de C-L.
- [B] Matrice de couplage.
- [B^*] Matrice de couplage dans le domaine de C-L.
- [C] La matrice de rigidité.
- [D] Matrice de rigidité en flexion et torsion.
- [D^*] Matrice de rigidité en flexion et torsion dans le domaine de C-L.
- E Module d'Young.
- $E^*(w)$ Module d'Young complexe.
- f Fréquence.
- G Module de cisaillement.
- $J(t)$ Complaisance de fluage.
- $J^*(p)$ Complaisance opérationnel.
- { k } Courbure du plan moyen.
- { k^* } Courbure dans le domaine de Carson-Laplace.
- { M } Moment.
- { M^{Th} } Moments thermiques.
- { M^H } Moments hygroélastiques.
- { M^* } Vecteur des moments suivant x dans le domaine de C-L.
- N_x Effort normal suivant x .
- N_y Effort normal suivant y .
- { N^{Th} } Efforts thermiques.
- { N^H } Efforts hygroélastiques.
- { N^* } Vecteur des efforts suivant x dans le domaine de C-L.
- q Chaleur.
- [Q] La matrice de rigidité.
- [\bar{Q}] Matrice de rigidité suivant la direction des fibres.
- [Q^*] Matrice de rigidité dans le domaine du Carson-Laplace.
- [\bar{Q}^*] Matrice de rigidité dans le domaine du Carson-Laplace suivant de l'orientation des fibres.
- $R(t)$ Module de relaxation.
- $R^*(p)$ Module opérationnel.
- R_r Dissipation.
- S Entropie massique.
- [S] La matrice de souplesse.
- [\bar{S}] Matrice de souplesse suivant la direction des fibres.

$[S^*]$ Matrice de souplesse dans le domaine du Carson-Laplace.

$[\bar{S}^*]$ Matrice de souplesse dans le domaine du Carson-Laplace suivant de

l'orientation des fibres.

T Température.

$[T]$ Matrice de transformation.

T_{xy} Effort tangentiel.

u^0 Déplacement du plan moyen suivant la direction x.

v^0 Déplacement du plan moyen suivant la direction y.

w Déplacement du plan moyen suivant la direction z.

u Déplacement suivant la direction x.

v Déplacement suivant la direction y.

w Déplacement suivant la direction z.

V_f Fraction de volume des fibres.

V_m Fraction de volume de matrice.

z Distance.

$\{s\}$ Le vecteur de contrainte.

$\{e\}$ Le vecteur de déformation.

n Coefficient de poisson.

q Angle d'orientation des fibres.

$h_{x,xy}$ Coefficients de couplage.

r Masse volumique.

Ψ Energie libre massique.

u Energie interne massique.

c_e Capacité thermique.

Φ_1 Dissipation intrinsèque volumique.

Φ_2 Dissipation thermique.

Φ Dissipation volumique.

l Conductivité thermique.

$\{a\}$ Tenseur de la dilatation thermique.

$\{a\}$ Tenseur de compressibilité thermique.

$\{b\}$ Tenseur de dilatation hygrométrique.

m Amortissement interne.

$\&$ Vitesse de la déformation.

$\&$ Vitesse de la contrainte.

H Fonction d'Heaviside.

t Temps.

l conductivité thermique.

m_1 I_1 Coefficients de Lamé de la fibre.

m_0^* I_0^* Coefficients de Lamé de la matrice dans le domaine de Carson-Laplace.

w Pulsation.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] B.NECIB, « cours de la théorie générale des milieux continus »
- [2] F. MILI, « cours des matériaux composites », 2003
- [3] YVON CHEVALIER, "Comportement élastique et viscoélastique des composites" technique d'ingénieur....
- [4] J. S. HARRIS ET E. J. BARBERO, "Prediction of creep properties of laminated composites from matrix creep data", Mai 1997.
- [5] PIZHONG QIAQ, EVER J. BARBERO ET JULIO F. DAVALOS, "On the linear viscoelasticity of thin-walled laminated composite beams".
- [6] DAWEI LAI, IRYNA YAKIETS ET MICHELE GUIGON, " Modélisation du comportement viscoélastique d'un polymère semi-cristallin", 2002
- [7] NADIA BOUHLOULI, « Cours Matériaux Composites »
- [8] J. LEMAIRE et J.L. CHARBODRE, « Mécanique des matériaux solides », 2000
- [9] JHON O. HALQIST, "LS-DYNA Rhological manual", Mai 1998.
- [10] J. MANDEL, « cours des milieux continus », 1966
- [11] NODAL CONSULTANTS, "L'industrie française des matériaux composites", Rév. 2 du 13 mai 2002
- [12] C. P. CHEN, Ph.D. ET R. S. LAKES , Ph.D., "Analysis of high loss viscoelastic composites"
- [13]: ENCYCLOPEDIE DES SCIENCES INDUSTRIELLES QUILLET, Librairie Artstide QUILLET, Paris, 1974.
- [14] TUAN (PD) et VERCHERY (G), "Théorie des plaques sandwiches assurant les continuités du déplacement et de la contrainte aux interfaces. C.R Acad. Sc. 282 mai 1839-42
- [15] D. LE NIZERHY, T.VINH et Y. CHEVALIER ; « Sur les vibrations des poutres en matériaux composites. Couplage éventuel avec la torsion et effets d'inertie par rotation et cisaillement », C.R. Acad. Sc. 277 sept 1973.
- [16] L. DELNESTE ; « composites multidirectionnels ». Publié par F. JOUBERT et A. MASSIAH 514 p. Bordeaux 1983 Codamac.

[17] J.DUC et D. BELLET « Mécanique des solides réels, élasticité. » Toulouse 1977 Ed. Cepadues.

[18] S.G LEKHNITSKII ; « Theory of elastivity of an anisotropic elastic body” San Francisco 1963 Holden-day Ink.

[19] R.M. JONES. « Mechanics of compositie materials ». New York 1975 McGraw Hill.

[20] T. VINH, Y. CHEVALIER et D. LE NIZERETHY; "Mécanique des matériaux composites. Caractérisation mécanique. Etudes dynamiques" Saint-Ouen 1977

[21] G. VERCHERY "Matériaux composites, calcul des caractéristiques mécaniques. Extrait du guide des matières plastiquess en mécanique" 1976.

[22] P. GERMAIN; "Cours de mécanique des milieux continus. Tome 1: théorie générale"; Paris 1973 Masson et Cie.

[23] B. PERSOZ. "La rhéologie. Monographie du centre d'Actualisation scientifique et technique de l'INSA" Paris 1969 Masson et Cie.

[24] R.HARRY, « Les matériaux composites »

[25] RHONE ALPES, « bulletin de veille N°3 : Composites et textiles techniques dans l'aéronautique », juin 2003.

[26] P. P. Provenzano, R. S. Lakes, D. T. Corr, R. Vanderby Jr.« Application of nonlinear viscoelastic models to describe ligament behaviour », 2002

[27] E. BALMES, « Damping and complex modes», Ecole Centrale Paris.

[28] Angel Ivanov Baltov, Varbinka Valeva Valeva, Jordanka Alexandrova Ivanova “Modeling of materials sensitive to the type of rheological processes”, Institute of Mechanics, Bulgarian Academy of Sciences, Acad. G. Bonchev str.

[29] I. Urrutia-Roman’ý, R.Rodr’ýguez-Ramos, J.Bravo-Castillero and R.Guinovart-D’ýaz “Asymptotic homogenization method applied to linear viscoelastic composites. Example”, Technical Report No. 3/04, August 2004.

[30] C. P. Chen, and R. S. Lakes, “Analysis of high loss viscoelastic composites”, University of Wisconsin-Madison, 1993.

[31]N.LAYMARIE “Analyse du comportement viscoélastique de matériaux anisotropes par reconstruction de formes d’ondes », thèse de docteur université Bordeaux 1, 2002.

[32] S. MAKKAPATI, “Compressive strength of pultruded structurel shpaps” West Virginia university, 1994.

[33] R. W. SULLIVAN, « An Analytical method to determine the mechanical properties of linear viscoelastic solids », Mississippi State, Mississippi, December 2003

[34] L.P. Li. and W. HERZOG “The role of viscoelasticity of collagen fibers in articular cartilage: Theory and numerical formulation”, University of Calgary, Alberta, Canada, 2004.

[35] T CHEN “Determining a Prony Series for a Viscoelastic Material From Time Varying Strain Data”, NASA 2000.

[36] CENTRE D’ANIMATION REGIONAL EN MATERIAUX AVANCES, « Glossaire des matériaux composites », 2004.

[37] SATEH ABDELOUAHAB, « Essais de qualification Essais de qualification d’un matériau composite d’un matériau composite Verre/ Vinylester pour Verre/ Vinylester pour usage aéronautique usage aéronautique », 2003.

[38] Agence de l’Environnement et de la Maîtrise de l’Energie « Les émissions de COV dans le secteur des composites (polyester) », 2004.

[39] ANISH SEN SENAN, « Determination of the viscoelastic properties of general anisotropic materials », B.Tech. Kerala University (India) 1998

ملخص

تجد المواد المركبة بمصفوفة عضوية وألياف الزجاج أو الكربون تطبيقات متعددة في مجال الهندسة وخاصة في صناعة القطع البنيوية بمختلف الأبعاد في كثير من القطاعات الصناعية. إن الهدف من هذه الدراسة هو قبول النموذج الذي اقترحه ماكسوال بالمقارنة مع الدراسة النظرية للزوجة المرنة لتحديد التدفق والاسترخاء للمواد الأورتوتروبية. إذن الحاجة ملحة لتبسيط النموذج النظري الذي يعطي النتائج الحقيقية للسلوك اللزج المرن تحت تأثير التدفق أو الاسترخاء. نتحصل على قانون السلوك اللزج المرن لهذه المواد باستعمال تراكيب بولتزمان، وحل العلاقات الخاصة الناتجة باستعمال طريقتين: الأولى خاصة بتحويل كارسون-لابلاس، والأخرى بتحويل فوريي. أخذنا تطبيقات السلوك اللزج المرن لثلاث أنواع من المواد الأورتوتروبية في ميدان كارصون لابلاس؛ أول هذه المواد هو verre/vinylester ذو الاتجاه الوحيد، والثنتين من المواد دواتا عدة طبقات متناظرة $[(+/- 45^\circ / CSM)_2]_S$ و $[(90^\circ + / - 45^\circ / CSM)_3]_S$. تحسب معاملات التدفق الاسترخاء لهذه المواد باستعمال نموذج ماكسوال بدلالة الزمن، غير أن طريقة فوريي تستعمل لتحديد معامل الاسترخاء، والإجهادات الطولية والعرضية للمادة verre/vinylester ذات الاتجاه الوحيد بدلالة النبض، والنتائج المتحصل عليها كانت جيدة.

كلمات مفتاحية: المواد الأورتوتروبية، اللزوجة المرنة، التدفق، الاسترخاء

Résumé

Les matériaux composites à matrice organique et à fibre de verre ou de carbone trouvent de plus importantes applications dans le domaine de l'engineering et spécialement dans la réalisation des pièces structurales de dimensions diverses dans de nombreux secteurs industriels.

L'objectif de cette étude est de valider le modèle rhéologique, tel que le modèle de Maxwell, avec la théorie de la viscoélasticité pour prévoir les réponses de fluage et de relaxation des matériaux orthotropes. En conséquence, il est nécessaire de développer le modèle analytique qui peut prévoir exactement le comportement des structures de ces matériaux sous l'effet de fluage et de relaxation.

La loi du comportement viscoélastique des matériaux composites a été déterminée basant sur la superposition de Boltzmann, et les équations caractéristiques ont été résolues par deux méthodes : l'une basée sur la transformation de Carson-Laplace, et l'autre basée sur la transformation de Fourier

Une application au comportement viscoélastique pour trois types de matériaux orthotropes dans le domaine de Carson-Laplace a été considérée. Le premier type est du verre/vinylester unidirectionnel, et les deux autres sont des stratifiés symétriques $[(\pm 45^\circ / CSM)_2]_S$ et $[(90^\circ \pm 45^\circ / CSM)_3]_S$. Les coefficients de la complaisance et de relaxation de ces types de matériaux sont calculés utilisant le modèle de Maxwell en fonction du temps. Tandis que la méthode de Fourier a été utilisée pour déterminer les modules de relaxation et les contraintes longitudinale et transversale pour le matériaux verre/vinylester en fonction des pulsations de la fréquence ; et de bons résultats ont été obtenus.

Mots clefs : Matériaux orthotropes, viscoélasticité, fluage, relaxation.

Abstract

The composites materials with organic matrix and glass fiber or carbon are finding more important applications in the areas of engineering and specially in the realization of structural pieces of various dimensions in many industrial sectors.

The objective of this study is to valid the rhéological model, such as the Maxwell model, for orthotropic materials using the visco elastic theory in order to predict the creep and the relaxation responses of theses materials. Consequently, it is necessary to develop an analytical model which can pedict exactly the structural behavior of these materials under the creep and the relaxation effects.

The the visco elastic behaviour law of these materials have been determinated based on the Boltzmann superposition, and the characteristic equations thus obtained are solved by two methods: the first one is based on the Carson-Laplace transformation and the author isbased on the Fourier transformation.

A visco elastic behavior application for three types of orthotropic materials in the area of Carson-Laplace has been considered. The first is an unidirectional glass/vinylester, and the two others are symmetric laminated materials $[(\pm 45^\circ / CSM)_2]_5$ and $[(90^\circ \pm 45^\circ / CSM)_3]_5$. The compliance and relaxation coefficients of these materials are calculated using the Maxwell model in time function. While the Fourier method has been used to fined the relaxation modulus and the longitudinal and transversal stresses for the unidirectional verre/vinylester in function of the frequencies pulsations; and good results have been founds.

Key words: orthotropic materials, visco elasticity, creep, relaxation.