

*République algérienne démocratique et populaire*  
*Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique*



**Université Mentouri Constantine**

*Faculté des sciences de l'ingénieur*

*Département de génie mécanique*

**Option:**

*Mécanique appliquée en engineering*

No D'ORDRE:.....

Série:.....

## **MEMOIRE**

**PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE MAGISTER EN  
GENIE MECANIQUE**

**Intitulé:**

**Analyse dynamique libre des plaques  
composites multicouches**

**Présenté par :**

**Mr : MEBARKI ABD ELYAMINE**

Devant le jury :

**Président:** B. NECIB

Pr : Uni. Constantine

**Rapporteur:** T. BENMANSOUR

MC : Uni. Constantine

**Examineurs:** A. BOUCHOUCHA

Pr : Uni. Constantine

T. ZARZA

MC. Uni. Constantine

Année 2009

# Remerciement

Je remercie Dieu avant tout.

Je tiens à remercier très chaleureusement mon encadreur **Dr :**  
**T.BENMANSOUR** pour son aide et ses conseils au long de son travail.

Je remercie également **Mr : ABD ELHAK SAKHRI** et **Mr : KARIM BENSMAIL** pour son aide précieuse et ses conseils judicieux.

J'adressé également mes remerciements à Monsieur le **Pr : B. NECIB** Professeur à l'université de Constantine pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de soutenance.

Je remercie aussi le Professeur **Pr : A. BOUCHOUCHA** Professeur à l'université de Constantine, **Dr : T. ZARZA** Maître de conférence à l'université de Constantine qui ont accepté d'être examinateurs de ce mémoire.

Je remercie très chaleureusement Mon père et ma mère et toute la famille.

Je remercie aussi et particulièrement mon partenaire de ma vie **ILHEM** pour sa compréhension son soutien et son encouragement qui m'ont aidés à bien terminer ce mémoire.

Un grand remerciement à tous les enseignants du département de Génie mécanique et mes collègues et tous mes amis.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## الإهداء

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات .  
بتوفيق من الله عز و جل و بعون منه تعالى تم إنجاز هذا العمل المتواضع  
الذي أهديه إلى كل من :  
الوالدين الكريمين و إلى إخوتي : حمزة و عبد الناصر و إبراهيم و أمال  
و سعاد.  
الجدين العزيزين و كل العائلة و الأقارب و الأحباب.  
العمة الغالية حورية و كل أفراد عائلتها و خاصة صابر و محمد.  
و الأسرة الكريمة عائلة مخلوف من الصغير إلى الكبير .  
و إلى كل الأحبة و الأصدقاء و خاصة : عبد الناصر و عبد الكريم و عادل  
و مولود و بشير و عيسى لا ننسى إطلاقا كل من بدر الدين و شفيق و  
توفيق و صابر و كل من أعرفه من قريب أو من بعيد.

لمين  
لمين

## Résumé

L'utilisation des matériaux composites concerne aujourd'hui de nombreux secteurs industriels. Pour les besoins de la technologie moderne, une bonne connaissance du comportement vibratoire de ces structures est indispensable dans la conception ou la vérification de tout système déformable dans un environnement dynamique. Pour atteindre de tels objectifs, la détermination des caractéristiques dynamiques est nécessaire.

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés à l'étude du comportement vibratoire analytique et calculs des structures des plaques stratifiées (multicouches) en composites. Le travail réalisé est présenté en deux grandes parties :

**La première** est consacrée à l'étude bibliographique sur les stratifiés, suivi par un développement détaillé de la formulation du comportement vibratoire des plaques stratifiées.

**La deuxième** est réservée à la détermination des fréquences et modes propres non amorties en appliquant le programme de calcul élaboré sous *MATLAB et MAPLE* et validé en calcul des structures par éléments finis sous code de calcul ANSYS à des plaques rectangulaires minces pour différentes conditions aux limites. Une solution exacte est exposée dans le cas de la plaque multicouche simplement appuyée sur ses quatre cotés. Pour tous les autres cas, les solutions sont déterminées par la méthode de Rayleigh-Ritz en utilisant les fonctions poutres comme fonctions d'approximation.

### Mots clés :

- Composites stratifiés (multicouches) ;
- Comportement dynamique ;
- Plaques, Vibrations de flexion ;
- Fréquences et modes propres ;
- Méthode de Rayleigh-Ritz ;
- Calculs des structures.

## **Abstract**

Using composite material concern, these days, lot of industrials domains. For modern technologic needs, a good knowledge of structure vibratory behavior is necessary in the design and verification of any deformed system in a dynamic environment. To reach such objective, it is necessarily to determine the dynamic characteristics.

In this memory, our work is dominated by the analytic of vibratory behaviour and structures calculus of multilayer plates made from composite material. This work is presented in two important parts:

**The first part** deals with bibliographic research of multilayer plates made from composite materials followed by detailed formulation development of plate vibratory behaviour.

**The second part** is reserved to the determination of eigenvalues and eigenvectors without dumping applying calculus program elaborated with MAPLE and MATLAB and validated by FEM using ANSYS software for symmetrical thin rectangular plates with different limits conditions. An exact solution is exposed for a case of multilayer plate simply supported (SSSS). Other cases are calculated with Rayleigh-Ritz method using beam functions as approximation function.

## **Keys words**

- Multilayer composite material
- Dynamics behaviour
- Plates, Flexionnel vibratory
- Eigenvalues and eigenvectors
- Rayleigh-Ritz method
- Structure calculus

# التحليل الديناميكي الحر للصفائح المركبة المتعددة الطبقات

## ملخص

إن استعمال الصفائح بالمعادن المركبة يهيم الآن عدة مجالات صناعية من اجل سد احتياجات التكنولوجيا الحديثة كالتيكنولوجية البحرية وصناعة الطائرات و غزو الفضاء...  
لدا من الضروري معرفة التصرف التحريكي و الاهتزازي للمنشآت في الهيكله للحصول على مراقبة كل نضام قابل للتشوه وسط ميدان ديناميكي للوصول لهذا الغرض فان تعيين الخواص التحريكية (الديناميكية) المكافئة يعتبر ضروري.

الهدف الأساسي من هذه الدراسة هو التعرف على أكبر عدد ممكن من العوامل المؤثرة للتمكن من الفهم الجيد للتصرف التحريكي (الديناميكي) للصفائح. من اجل ذلك نبحث على تعيين تأثير مختلف المعاملات من بينها أبعاد الصفيحة -الطول و العرض- سمك الصفيحة. تعدد الأنماط ، طريقة التثبيت و عدد الطبقات.

تشمل الدراسة المنجزة على قسمين رئيسيين :  
القسم الأول يحوي الدراسة البيبلوغرافية الشاملة للصفائح ( المعادن ) المركبة المتعددة الطبقات متبوعة بشرح موسع و شامل على العلاقات الرياضية و الميكانيكية للتصرف الإهتزازي للصفائح.  
القسم الثاني يشمل الدراسة التحليلية و العددية و التحاكي الرقمي للتواترات و التشوهات الذاتية الغير مخمدة ، و ذلك بتطبيق البرنامج الرقمي للحساب باستعمال النظام الحاسوبي - ماطلاب- و - مابل- .  
للتأكد من صحة النتائج المحصل عليها تم إستعمال التحاكي الرقمي للحساب النظامي بطريقة العناصر المنتهية و ذلك بواسطة النظام - أنسيس - للصفائح المستطيلة الرقيقة على مختلف الشروط الحدية .  
الحل الدقيق يكون في الشروط الحدية عند الإسناد البسيط على كل الجوانب ، و من أجل باقي الشروط الحدية الحلول تكون تقريبية و نستعمل لذلك طريقة - رايلي - ريتز- للحساب الإهتزازي.

كلمات مفتاحية :

- المركبة المتعددة الطبقات
- للتصرف التحريكي
- الاهتزازات في اللي (الثني)
- التواترات و التشوهات الذاتية
- طريقة - رايلي - ريتز-
- الحساب النظامي

# ***SOMMAIRE***

## **INTRODUCTION GENERALE**

### **CHAPITRE 1**

Généralités sur les composites multicouches

### **CHAPITRE 2**

Formulation du comportement des composites multicouches

### **CHAPITRE 3**

Détermination analytique et en calcul de structures des fréquences et des modes propres d'une plaque multicouches

### **CHAPITRE 4**

Détermination numérique et analyse comparative des fréquences et déformées propres d'une plaque multicouches

## **CONCLUSION GENERALE**

### **ANNEXE A**

### **ANNEXE B**

### **RESUME**

# TABLE DES MATIERES

**RMERCIEMENTS**

**DEDICACE**

**RESUME**

**INTRODUCTION GENERALE** **1**

**CHAPITRE 1**

**GENERALITES SUR LES COMPOSITES MULTICOUCHES**

|  |    |
|--|----|
| 1.1. Généralités   | 3  |
| 1.2. Constituants et caractéristiques générales                  | 3  |
| 1.3. Classification des matériaux composites                     | 5  |
| 1.3.1 Classification selon la forme des constituants             | 5  |
| a) Composites à fibres   | 5  |
| b) Composites à particules                                       | 5  |
| 1.3.2 Classification selon la nature des constituants            | 5  |
| a) Composites à matrice organique                                | 6  |
| b) Composites à matrice métallique                               | 6  |
| c) Composites à matrice minérale                                 | 6  |
| 1.3.3 Classification suivant performance et diffusion            | 7  |
| a) Les composites grandes diffusions                             | 7  |
| b) Les composites hautes performances                            | 7  |
| 1.4 Principaux constituants des composites à matrices organiques | 7  |
| 1.4.1 Les résines  | 8  |
| 1.4.1.1 Les résines thermodurcissables                           | 8  |
| a) Les résines polyesters insaturées                             | 8  |
| b) Les résines de condensation                                   | 8  |
| c) Les résines époxydes  | 8  |
| 1.4.1.2 Les résines thermoplastiques                             | 9  |
| 1.4.1.3 Autres types de résines                                  | 9  |
| 1.4.2 Les charges et les additifs                                | 9  |
| 1.4.2.1 Les charges  | 9  |
| a) Les charges renforçantes                                      | 9  |
| b) Les charges non renforçantes                                  | 10 |
| 1.4.2.2 Les additifs   | 10 |
| a) Les lubrifiants et agents de démoulage                        | 10 |
| b) Les pigments et colorants                                     | 10 |
| c) Les agents anti-retraits et les agents de fluage              | 10 |

|   |    |
|---|----|
| d) Les agents anti-ultraviolets                                   | 10 |
| 1.4.3 Les fibres et tissu   | 10 |
| 1.4.3.1 Généralités   | 10 |
| 1.4.3.2 Formes linéiques  | 11 |
| 1.4.3.3 Fibres de formes surfaciques                              | 11 |
| a) Les mats   | 11 |
| b) Les tissus et rubans   | 11 |
| 1.4.3.4 Structures tissées unidirectionnel                        | 12 |
| a) Tresses et préformes   | 12 |
| b) Tissus multidirectionnels                                      | 12 |
| 1.4.4 Les principales fibres                                      | 12 |
| 1.4.4.1 Les fibres de verre                                       | 12 |
| a) Elaboration des fibres de verre                                | 13 |
| b) Caractéristiques mécaniques des fibres de verre                | 13 |
| <b>1.4.4.2 Les fibres de carbone</b>                              | 14 |
| a) Elaboration des fibres de carbone                              | 14 |
| b) Caractéristiques mécaniques des fibres de carbone              | 14 |
| 1.4.4.3 Les fibres aramides à caractéristiques mécaniques élevées | 15 |
| a) Caractéristiques mécaniques des fibres aramides                | 15 |
| b) Domaines d'utilisation   | 16 |
| 1.4.4.4 Les fibres céramiques                                     | 16 |
| a) Caractéristiques mécaniques et utilisation                     | 16 |
| 1.4.4.5 Les fibres synthétiques thermostables                     | 16 |
| 1.4.4.5 Autres fibres   | 17 |
| a) Les fibres d'origine végétale                                  | 17 |
| b) Les fibres d'origine minérale                                  | 17 |
| c) Les fibres synthétiques  | 17 |
| d) Les fibres métalliques   | 17 |
| 1.5 Modes de fabrication des composites                           | 17 |
| 1.5.1 Petites séries  | 18 |
| 1.5.1.1 Moulage au contact  | 18 |
| 1.5.1.2 Moulage par projection simultanée                         | 18 |
| 1.5.2 Procédés pour moyennes séries                               | 19 |
| 1.5.2.1 Moulage sous vide   | 19 |
| 1.5.2.2 Moulage par compression à froid                           | 19 |
| 1.5.2.3 Moulage par injection de résine liquide sous pression     | 20 |
| 1.5.2.4 Moulage en autoclave                                      | 20 |
| 1.5.3 Procédés pour grandes séries                                | 21 |
| 1.5.3.1 Moulage par compression à chaud par voie humide           | 21 |
| 1.5.3.2 Moulage par compression à chaud par voie sèche            | 21 |
| 1.5.3.3 Moulage par injection de compounds                        | 21 |
| 1.5.3.4 Moulage par injection réaction (R-RIM)                    | 22 |
| 1.5.4 Procédés pour corps creux                                   | 22 |

|   |    |
|---|----|
| 1.5.4.1 Enroulement filamentaire  | 22 |
| 1.5.4.2 Centrifugation  | 23 |
| 1.5.5 Procédé de moulage en continu   | 23 |
| 1.5.5.1 Moulage entre pellicules  | 23 |
| 1.5.5.2 Pultrusion  | 23 |
| 1.6 Les stratifiés composites   | 24 |
| 1.6.1 Désignation des stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels | 25 |
| 1.6.2 Modes de stratification particuliers                                    | 26 |

## CHAPITRE 2

### FORMULATION DU COMPORTEMENT DES COMPOSITES MULTICOUCHES

|  |    |
|--|----|
| 2.1 Introduction   | 28 |
| 2.2 Détermination des caractéristiques mécaniques d'un pli unidirectionnel dans son repère d'orthotropie | 29 |
| 2.2.1 Schéma d'élasticité linéaire   | 29 |
| 2.2.2. Loi de Hooke généralisé   | 29 |
| 2.2.3. Relation changement de base   | 30 |
| a) Pour le tenseur de contrainte   | 30 |
| b) Pour le tenseur de déformation  | 31 |
| 2.2.4. Caractérisation de matériaux  | 31 |
| a) Matériau triclinique  | 31 |
| b) Matériau monoclinique   | 32 |
| c) Matériau orthotrope   | 32 |
| d) Matériau unidirectionnel  | 33 |
| c) Matériau isotrope   | 34 |
| 2.2.4. Matrice de souplesse et de rigidité d'un composite orthotrope exprimé dans les axes orthotropie   | 34 |
| 2.2.5. Approche théorique pour la détermination des modules élastique d'un composite unidirectionnel     | 36 |
| 2.2.5.1 Comportement local décrit par la loi des mélanges  | 37 |
| a) Module d'élasticité longitudinal  | 37 |
| b) Module d'élasticité transversal $E_T$   | 38 |
| c) Module de cisaillement $G_{LT}$   | 39 |
| 2.2.5.2 Méthodes analytiques pour la détermination des modules d'élasticité du pli                       | 40 |
| a) Module d'élasticité longitudinal  | 41 |
| b) Coefficient de Poisson $\nu_{LT}$   | 41 |
| c) Module de cisaillement $G_{LT}$   | 41 |
| d) Module de compression latéral $K_L$   | 42 |
| e) Module de cisaillement transversal $G_{TT}$   | 42 |
| 2.3 Détermination de l'équation constitutive du stratifié  | 42 |
| 2.3.1 Caractéristiques d'une couche rapportées au référentiel du stratifié                               | 42 |

|  |    |
|--|----|
| 2.3.2 Etat de contraintes planes et constantes de rigidité réduites        | 44 |
|  | 47 |
| 2.3.3 Théorie des plaques - schémas du premier ordre                       |    |
| 2.3.3.1. Développement limite des déplacements selon la variable $x_3 [z]$ | 47 |
| 2.3.3.2. Champ des déformations  | 48 |
| 2.3.3.3. Champ des contraintes   | 51 |
| 2.3.3.4. Résultantes et moments  | 52 |
| a) Résultantes en membrane   | 52 |
| b) Résultantes en cisaillement   | 54 |
| c) Moments de flexion-torsion  | 55 |
| 2.3.3.5 Équation constitutive  | 56 |
| 2.4 Formulation du problème général de dynamique des stratifiés            | 57 |
| 2.4.1 Relations fondamentales des plaques dans un schéma du premier ordre  | 57 |
| 2.4.1.1 Équilibre par rapport aux résultantes en membrane                  | 58 |
| 2.4.1.2. Équilibre par rapport aux résultantes de cisaillement             | 60 |
| 2.4.1.3 équilibres par rapport aux moments                                 | 61 |
| 2.4.2 Equations du mouvement du stratifié                                  | 63 |
| 2.5 Expression des conditions aux limites                                  | 64 |
| 2.5.1 Appui simple   | 65 |
| 2.5.2 Encastrement   | 66 |
| 2.5.3 Condition de bord libre  | 67 |
| 2.6 Formulation énergétique de la théorie des stratifiés                   | 67 |
| 2.6.1 Energie de déformation   | 67 |
| 2.6.2 Énergie cinétique  | 68 |

## CHAPITRE 3

### DETERMINATION ANALYTIQUE ET EN CALCUL DE STRUCTURES DES FREQUENCES ET DES MODES PROPRES D'UNE PLAQUE MULTICOUCHES

|   |    |
|---|----|
| 3.1 Généralités sur la résolution des problèmes de vibrations des structures                        | 69 |
| 3.2 Fréquences et déformées propres des structures composites                                       | 69 |
| 3.3 Vibrations de flexion des plaques minces symétriques  | 71 |
| 3.3.1 Equation du mouvement   | 71 |
| 3.3.2 Fréquences et déformées propres des plaques rectangulaires                                    | 72 |
| 3.4 Détermination des fréquences et modes propres des plaques par la méthode de Rayleigh-Ritz       | 76 |
| 3.4.1 Principe  | 76 |
| 3.4.2 Application au problème de vibrations des plaques stratifiées symétriques                     | 77 |
| 3.4.3 Construction de la base fonctionnelle - Fonctions caractéristiques des vibrations des poutres | 81 |

|   |    |
|---|----|
| 3.4.4 Organigramme du programme de calcul                             | 82 |
| 3.5 Validation du programme élaboré                                   | 87 |
| 3.5.1. Discrétisation de l'élément utilisé pour le maillage           | 87 |
| 3.5.2 Analyse dynamique libre des plaques rectangulaires multicouches | 88 |

## **CHAPITRE 4**

### **DETERMINATION ANALYTIQUE ET EN CALCUL DE STRUCTURES DES FREQUENCES ET DES MODES PROPRES D'UNE PLAQUE MULTICOUCHES**

|  |     |
|--|-----|
| 4.1. Introduction  | 91  |
| 4.2. Calculs analytique des fréquences et modes propres :                      | 91  |
| 4.2.1. Plaque rectangulaire orthotrope simplement appuyée (AAAA)               | 91  |
| 4.2.2. Plaque rectangulaire encasté approximation par des polynômes (EEEE)     | 93  |
| 4.2.3. Les différentes fonctions de formes                                     | 95  |
| 4.2.4. Présentation du model d'étude   | 95  |
| 4.2.5. Plaques multicouches à phases isotropes                                 | 99  |
| 4.3. Calculs des fréquences et des déformées propres sous simulation par ANSYS | 99  |
| 4.3.1. Présentation de la plaque multicouche                                   | 100 |
| 4.3.2. Résultat obtenus  | 100 |
| 4.4. Analyse des résultats   | 108 |
| 4.4.1. Validation des calculs par logiciels ANSYS                              | 109 |
| 4.4.2. Plaques rectangulaire multicouches orthotropes                          | 109 |
| 4.4.3. Influence de l'empilement des couches                                   | 110 |
| 4.4.3.1. Calcul les matrices de rigidité A, B et D                             | 110 |
| 4.4.4. Influence de dimensions (longueur, largeur)                             | 114 |
| 4.4.5. Influence des conditions aux limites                                    | 116 |
| 4.4.6. Influence de séquence des modes   | 117 |

### **CONCLUSION GENERALE**

### **ANNEXE A**

### **ANNEXE B**

### **REFERENCES BIBLIOGRAPHIES**

## INTRODUCTION GENERALE

Le lancement de grands programmes technologiques (spatial, nucléaire, électronique, ..) et les mutations traditionnels par la crise de l'énergie et l'évolution du marché des matières premières ont amenés au constat que les matériaux traditionnels avaient atteint leurs limites.

La recherche de performances techniques alliées au besoin d'optimisation et d'allègement a également motivé la conception et l'utilisation de matériaux spécifiques adaptés à la solution technologique des problèmes à résoudre.

Ainsi des matériaux renforcés à hétérogénéité de structure maîtrisée appelés matériaux composites se sont développés.

Le comportement dynamique est un paramètre important dont il faut tenir compte lors de la conception des structures.

En effet, les mouvements vibratoires sont à l'origine de nombreux problèmes typiques pouvant conduire à la ruine de la structure, tels que la résonance et la fatigue, à une limitation d'exploitation en raison d'un niveau de bruit élevé ou d'une perturbation des performances de la structure par la présence de vibrations indésirables.

Dans le cas des vibrations linéaires la détermination des paramètres modaux d'une structure, à savoir les fréquences et déformées propres des modes de résonance ainsi que les amortissements modaux associés, permet de localiser les problèmes liés aux vibrations et de construire un modèle de comportement en basses fréquences de cette structure, servant à prédire la réponse de celle-ci aux différents types de chargements dynamiques, et ainsi à vérifier les solutions apportées pour le contrôle de ces problèmes.

Le caractère modulable des propriétés des composites multicouches permet d'envisager de larges possibilités d'optimisation des performances d'une structure en agissant directement sur les fréquences et déformées propres de celle-ci sans modifier sa géométrie ou ses dimensions, par simple ajustement des paramètres du matériau (nature des constituants, taux de renfort et séquence d'empilement).

L'objectif fondamental de ce travail est de résoudre le problème en vibration des plaques stratifiées (multicouches) afin d'obtenir les fréquences et les modes propres, en utilisant la théorie classique des stratifiés et la méthode de Rayleigh-Ritz.

Cet aspect nous a conduit à envisager de traiter le problème par deux approches :

i) Méthode des éléments finis sous ANSYS ayant pour but de calculer les fréquences et modes propres non amortis des vibrations en flexion des plaques stratifiées (multicouches) rectangulaires soumises à six (06) différentes configurations de conditions aux limites standards sur les bords (AAAA, EEEE, EAEE, AEAE, AAEE, AAEA).

ii) Méthodes de Rayleigh-Ritz programmée sous MATLAB dans ce calculs déterminer les fréquences propres de deux plaques particulières dans les configurations AAAA et EEEE afin de valider les bases modales correspondantes issues de l'approche de MEF sous ANSYS.

L'étude bibliographique considérée nous a amené à privilégier un développement analytique sous MATLAB dans l'approche numérique sous ANSYS, utilisant la méthode de Rayleigh-Ritz basé sur l'approximation du déplacement de la plaque par les fonctions poutres.

Le travail réalisé est organisé en quatre chapitres.

- **Le chapitre 1** est une présentation générale des composites stratifiés (multicouches) du point de vue définition, classification, principaux constituants, modes d'obtentions et désignation.

- **Le chapitre 2** est consacré à la formulation théorique du comportement dynamique des stratifiés (multicouches).

Il expose dans un premier temps les étapes d'homogénéisations permettant de déterminer les propriétés élastiques à l'échelle d'une couche (modules d'élasticités), et à l'échelle du stratifié (équation constitutive). Ensuite, les équations du mouvement des stratifiés sont dérivées à partir des relations d'équilibre des plaques dans un schéma du premier degré.

Les expressions des conditions aux limites standards sur la frontière d'une plaque sont données en terme de déplacements, efforts et moments. Finalement la formulation énergétique du problème est développée pour introduire les méthodes de résolution approchées.

- **Le chapitre 3** traite la résolution du problème des vibrations de flexion des plaques minces rectangulaires en stratifiés symétriques, pour six (06) des combinaisons de conditions aux limites. La méthodologie de recherche des fréquences et modes propres est exposée et les difficultés qui lui sont liées sont surmontées en utilisant la méthode analytique de Rayleigh-Ritz, basée sur une approximation du déplacement par les fonctions caractéristiques de vibrations des poutres.

La programmation de cette dernière sous MATLAB a permis de calculer les fréquences propres non amorties de ces plaques et de tracer les déformées correspondantes. Les résultats obtenus sont validés en calcul de structures par éléments finis en utilisant le logiciel ANSYS.

- **Le chapitre 4** est une analyse modale et comparative des plaques de stratification distinctes dans les six (06) configurations choisis (AAAA, EEEE, EAEE, AEAE, AAEE, AAEA). Les calculs des fréquences et des modes propres ont été comparés par le modèle analytique sous MATLAB et la Méthode des Elément Finis sous ANSYS.

## 1.1. Généralités

Un matériau composite est une combinaison de deux matériaux distincts que l'on appelle généralement la matrice et le renfort, aux propriétés souvent complémentaires, qui associés possèdent des caractéristiques physiques complètement différentes de leurs composants.

La matrice a généralement pour rôle mécanique de fournir une certaine cohésion entre les différents éléments de renfort et ainsi joue le rôle de « ciment » en assurant un minimum d'homogénéité à l'ensemble. Dans la majorité des matériaux composites, les propriétés mécaniques sont essentiellement fournies par les renforts, de telle sorte que le taux de renfort dans la matrice ainsi que la qualité de l'interface renfort / matrice conditionnent directement les propriétés mécaniques du matériau composite.

## 1.2. Constituants et caractéristiques générales

Les renforts peuvent se trouver utilisés sous différentes formes, comme par exemple en fibres longues, en fibres courtes, en sphères et même en tissu de fibres plus ou moins complexe (tissage 2D, voire même 3D). Ainsi, de nos jours, un très grand nombre de composites sont utilisés de manière courante et il est pratiquement impossible de les traiter tous de la même manière, tant leurs propriétés sont variables. Cependant, nous pouvons distinguer quelques familles de composites en fonction du type de matrice et de renfort utilisés (Tableau 1 et Tableau 2).

Du point de vue des applications industrielles, les composites les plus répandus sont caractérisés généralement par une matrice polymère et des renforts sous forme de fibres longues tissées ou non. Les principales fibres employées aujourd'hui sont de type fibres de verre pour les applications à coûts réduits, ainsi que fibres de carbone et aramide pour les applications plus exigeantes.

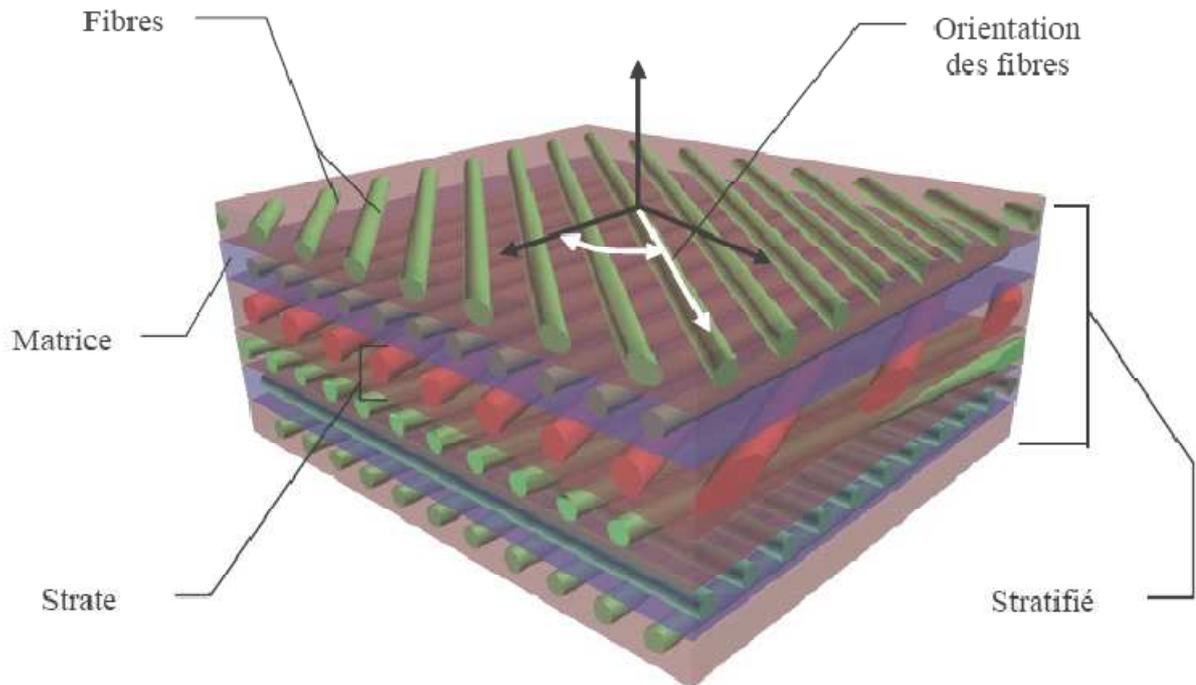
| <i>Type de matrice</i> | <i>Exemples</i>  | <i>Propriétés</i>   |
|------------------------|--|---|
| Polymère               | résine époxyde,<br>polyester,<br>PEEK,<br>PEKK, PPS<br>etc.... | Matériaux pouvant être de type thermodurcis ou thermoplastiques, faible résistance à la température, légers et facilement moulables, généralement ductiles.   |
| Métaux                 | aluminium,<br>magnésium,<br>tungstène                          | Matériaux mis en oeuvre par fonderie ou par métallurgie des poudres de moyenne à haute température de fusion, à bonne résistance mécanique intrinsèque, à densité moyenne à très élevée, généralement ductiles mais parfois fragiles. |
| Céramiques             | carbure de<br>Silicium<br>(SiC)                                | Matériaux généralement mis en oeuvre par frittage de poudres, à très haute température de fonctionnement, à densité élevée, mais fragiles.  |

**Tableau 1.1 : Type de matrices utilisées dans les composites courants**

On appelle « stratifié » un matériau composé d'un ensemble ordonné de couches d'orientation et d'épaisseur données, constituées de divers matériaux. Une couche d'un stratifié est souvent appelée une strate. Le type de stratifié est défini généralement par sa séquence d'empilement, information qui fournit de manière synthétique l'orientation des diverses couches d'un stratifié. Par exemple, un stratifié de type  $(90^\circ, 0^\circ)_2s$  est constitué en fait de 8 couches orientées comme suit : deux groupes de plis à  $90^\circ$  et  $0^\circ$ , puis par symétrie de deux groupes de plis à  $0^\circ$  et  $90^\circ$ . L'avantage que présentent les composites stratifiés est de permettre de créer des matériaux aux propriétés mécaniques orientées de manière optimale afin de mieux répondre aux sollicitations de la structure.

| <i>Type de renfort</i>                            | <i>Propriétés</i>  | <i>Matrice utilisée couramment</i>  |
|---|--|---|
| fibres ou paillettes de verre                     | fibres de verre de type E ou R, à différents diamètres, souvent en tissus ou bobines, à faible coût, à densité moyenne et à propriétés mécaniques moyennes   | <b>polymères:</b><br>polyester,<br>résine<br>époxyde,<br>thermoplastiques |
| fibres de carbone                                 | fibres obtenues par carbonisation de polymères ou frittage, souvent en tissu pré-imprégnés ou bobines, à coût moyen à élevé selon la qualité, de faible densité, à excellentes rigidité et limite de rupture, à faible résilience, à usinage relativement difficile mais possible avec des outils diamantés ou en métal dur. | <b>polymères:</b><br>résine<br>époxyde, PPS,<br>PEEK, PEKK<br>etc...      |
| fibres d'aramide (Kevlar)                         | fibre polymère, souvent en tissu ou pré-imprégnée, parfois combinée en fils mixtes aramide-carbone, à densité faible, à rigidité moyenne à élevée, à hautes ténacité et résilience, très difficile à découper et usiner.   | <b>polymères:</b><br>résine<br>époxyde, PPS,<br>PEEK, PEKK<br>etc...      |
| fibres polypropylène à haute ténacité             | fibre polymère, souvent en tissu ou pré-imprégnées, à densité très faible, à rigidité faible à moyenne, à très hautes ténacité et résilience mais difficile à découper et usiner   | <b>polymères:</b><br>résine<br>époxyde,<br>polyester etc...               |
| fibres / particules d'alumine (oxyde d'aluminium) | fibre à très hautes rigidité et limite de rupture, à densité élevée, à prix élevé et à très haute limite de température  | <b>métaux:</b><br>aluminium,<br>magnésium;<br>céramiques                  |

**Tableau 1.2 : Propriétés des renforts couramment utilisés**



**Figure 1.1 : Nomenclature des stratifiés composites**

### 1.3. Classification des matériaux composites

La distinction entre les différents types de composites peut se faire selon les critères suivants :

#### 1.3.1 Classification selon la forme des constituants

##### *a) Composites à fibres*

La matière renforçante se présente sous forme de fibres longues, courtes ou coupées, dont l'arrangement et l'orientation déterminent les propriétés mécaniques du matériau permettant une conception adaptée à l'application (conception à la carte) en agissant sur :

- La nature des constituants ;
- La proportion de chaque constituant ;
- L'orientation des fibres.

##### *b) Composites à particules*

Dans ce cas le renfort se présente sous forme de particules, qui sont utilisées pour l'amélioration de certaines propriétés mécaniques et physiques de la matrice (rigidité, tenue à la température, résistance à l'abrasion...) ou simplement pour diminuer le coût de production du matériau sans altérer ses caractéristiques.

#### 1.3.2 Classification selon la nature des constituants

Selon la nature de la matrice et du renfort on rencontre plusieurs combinaisons possibles :

**a) Composites à matrice organique**

- résines et charges associées à :
  - Des fibres minérales : verre, carbone, etc. ;
  - Des fibres organiques : kevlar, polyamides, etc. ;
  - Des fibres métalliques : bore, aluminium, etc.
  -

**b) Composites à matrice métallique**

- métaux légers et leurs alliages associés à :
  - Des fibres minérales : carbone, carbure de silicium (SiC) ;
  - Des fibres métalliques : bore ;
  - Des fibres métallo-minérales : fibres de bore revêtues de SiC.
  -

**c) Composites à matrice minérale**

- céramiques associées à :
  - Des fibres métalliques : bore ;
  - Des particules métalliques : cermets ;
  - Des particules minérales : carbures, nitrures, etc.

Les figures (1.2) et (1.3) récapitulent les principaux matériaux utilisés comme renforts et matrices.

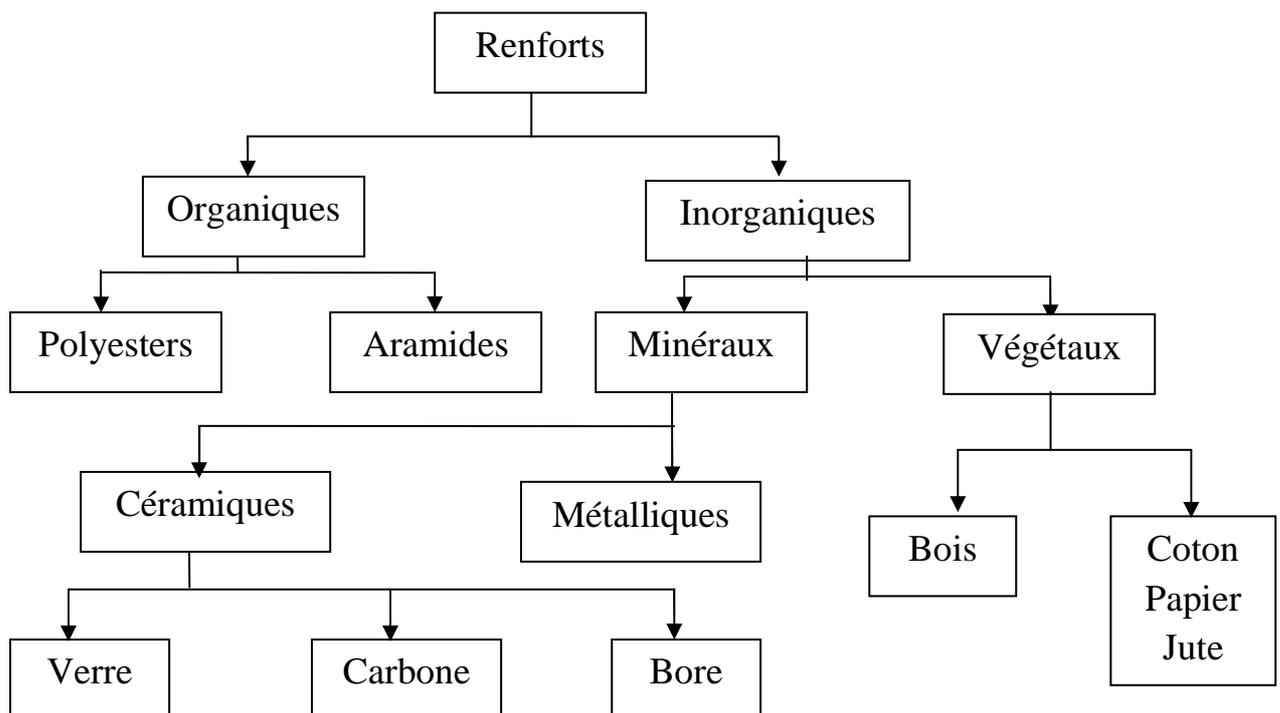


Figure 1.2 : Matériaux de base pour les renforts

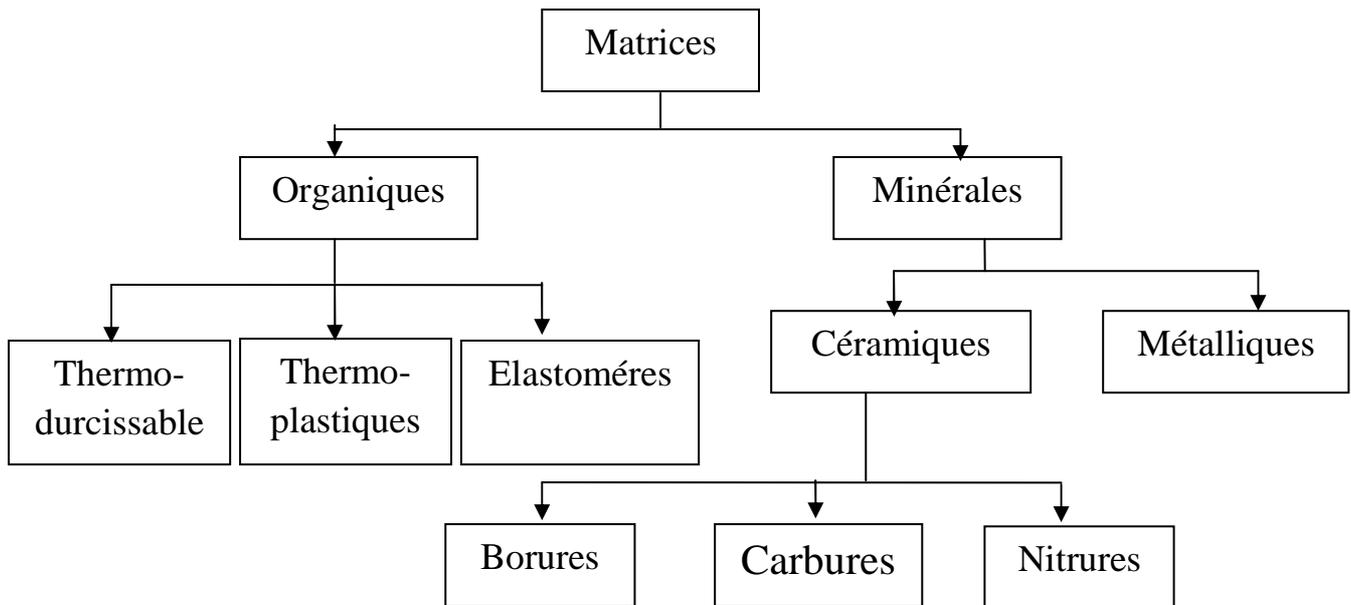


Figure 1.3 : Les principaux types de matrices

### 1.3.3 Classification suivant performance et diffusion

#### a) Les composites grandes diffusions

De caractéristiques moyennes, ils sont orientés vers l'optimisation des coûts. Ils représentent 95% des composites utilisés et ont un domaine d'application très large : capotage, conserveries, décoration, etc.

#### b) Les composites hautes performances

Ils sont orientés vers l'optimisation des caractéristiques mécaniques et thermiques tout en diminuant le poids au maximum. Leurs coûts sont très élevés, ils sont réservés aux applications de pointe tel que l'aéronautique et l'espace, l'armement, le sport de haut niveau, etc.

## 1.4 Principaux constituants des composites à matrices organiques

Nous avons vu qu'un matériau composite est essentiellement constitué d'une matrice et d'un renfort. Le choix de ces deux constituants obéit aux exigences et contraintes de service (caractéristiques mécaniques élevées, tenue en température, résistance à la corrosion, etc.) tout en s'assurant de la compatibilité entre les éléments associés. A cet effet, les matrices organiques constituées de résines polymères associées à différentes charges et additifs sont celles qui offrent le plus de flexibilité du point de vue développement (synthèse de nouvelles résines) et conception (compatibilité avec différents renforts grâce à leur déformabilité et à la diversité de leurs compositions et propriétés mécaniques et physico-chimiques). De plus la légèreté, le faible coût de fabrication et la facilité de mise en œuvre de ce type de résines font des composites à matrices organiques la principale catégorie de composites utilisés dans l'industrie.

Les renforts sous formes de particules sont appelés charges renforçantes. Le terme renfort se restreint aux fibres dans leurs différentes présentation (courtes, longues, tissus, etc.).

#### **1.4.1 Les résines**

Les résines polymères se subdivisent en deux grandes familles : résines thermodurcissables et résines thermoplastiques [1 et 3].

##### **1.4.1.1 Les résines thermodurcissables**

Après polymérisation par traitement thermique (chaleur, radiation) ou physico-chimique (catalyseur, durcisseur) ou par l'association des deux, ce type de résines se transforment en produits essentiellement infusibles et insolubles [4], elles ne peuvent être mises en œuvre qu'une seule fois. Leurs propriétés mécaniques et thermomécaniques remarquables font d'elles les résines les plus utilisées pour la mise en œuvre des matériaux composites, les principales résines employées dans ce domaine sont par ordre d'importance décroissant :

##### **a) Les résines polyesters insaturées**

Les composites à base de résines polyesters connaissent le plus important développement industriel grâce à leur grande diversité (polyesters condensés, vinylesters, dérivés allyliques, etc.), bonne mouillabilité des fibres et tissus, facilité de mise en œuvre (procédés automatisés) ainsi qu'à leur faible coût. Les résines de type polyesters rigides possèdent une bonne stabilité dimensionnelle et tenue chimique, mais leur utilisation est limitée aux températures inférieures à 120 °C, elles sont inflammables, sensibles aux chocs, à l'humidité et aux rayons ultraviolets.

##### **b) Les résines de condensation**

Les résines de condensation comportent les résines phénoliques, les aminoplastes et les résines furaniques :

- Les résines phénoliques, parmi lesquelles on trouve la bakélite, sont les plus anciennes résines thermodurcissables. Elles se caractérisent par une bonne tenue à la chaleur et au fluage. Elles ont une excellente stabilité dimensionnelle, un faible retrait et de bonnes propriétés mécaniques et chimiques. Leur utilisation est pénalisée par de faibles cadences de production, une non adaptation aux utilisations alimentaires et par les couleurs foncées des produits.

- Les résines aminoplastes de caractéristiques semblables à celles des résines phénoliques, offrent en plus la compatibilité avec les produits alimentaires et la possibilité d'être colorées.

- Les résines furaniques sont peu utilisées en raison de leur coût élevé, cependant elles présentent des propriétés intéressantes en terme de rapidité de durcissement (cadence de production élevée) et de résistance aux agents chimiques (fabrication de citernes, tuyaux, bacs, etc. ).

##### **c) Les résines époxydes**

En raison de leur coût élevé et de leurs bonnes caractéristiques mécaniques (traction, flexion, compression, choc, fluage, etc.), les résines époxydes sont essentiellement employées pour l'élaboration de matériaux composites à hautes

performances (aéronautique, espace, balistique,..etc.), utilisables jusqu'à des températures de l'ordre de 190 °C ou en milieu agressif. La mise en oeuvre des composites est facilitée par la très bonne mouillabilité des renforts et la compatibilité avec les différents types de fibres (verre, carbone, Kevlar). Leur faible retrait lors du moulage (<1%) permet d'obtenir des pièces précises. L'obtention de performances optimales requiert un temps de polymérisation assez long, ce qui se répercute sur le coût de fabrication

#### **1.4.1.2 Les résines thermoplastiques**

Ce type de polymères ont la particularité de pouvoir être alternativement ramollis par chauffage et durcis par refroidissement dans un intervalle de températures spécifique à chaque matériau [4]. Contrairement aux résines thermodurcissables, ils sont recyclables, mais présentent des propriétés mécaniques et thermomécaniques plus faibles. Ces résines sont appelées aussi «plastiques», elles comportent une large gamme de produits : polychlorure de vinyle (PVC), polyéthylène, polypropylène, polyamide, polycarbonate, etc., regroupés en plastiques de grande diffusion et plastiques techniques. Les premiers sont mis en oeuvre par injection pour obtenir des pièces moulées ou par extrusion pour obtenir des films, des plaques, des tubes, des profilés, etc. Les seconds sont mis en oeuvre par injection. Leur intérêt réside dans le faible coût de la matière première et le rendement élevé des procédés utilisés (injection, extrusion). Toutefois, leur emploi dans la mise en oeuvre de matériaux composites est limitée en raison de la nécessité de faire appel à des transformations à hautes températures de produits solides (granulés, plaques feuilles ou films).

#### **1.4.1.3 Autres types de résines**

En plus des thermoplastiques et des thermodurcissables, il existe deux autres classes de résines à usages spécifiques :

- Les résines thermostables : on les retrouve aussi bien parmi les résines thermodurcissables que thermoplastiques, elles se distinguent par leurs performances thermiques (stabilité thermique jusqu'à 300 °C). Elles sont développées essentiellement dans les domaines aéronautique et spatial ;
- Les élastomères : renforcés de fibres, ils sont utilisés dans diverses applications du domaine de l'automobile.

#### **1.4.2 Les charges et les additifs**

Différents produits peuvent être ajoutés à la résine pour améliorer ses caractéristiques mécaniques et physiques, faciliter sa mise en oeuvre ou simplement pour en diminuer le coût. On parlera de charges quand la quantité ajoutée est de quelques dizaines de %, et d'additifs lorsque cette quantité ne dépasse pas quelques %.

##### **1.4.2.1 Les charges**

###### **a) Les charges renforçantes**

Elles sont incorporées aux résines pour améliorer leurs caractéristiques mécaniques, selon leur forme géométrique elles sont classées en :

- **Charges sphériques** : sphères de faible diamètre, de 10 à 150 um généralement, appelées aussi microbilles. La forme sphérique évite les concentrations de contraintes

dans la matrice et diminue par conséquent sa sensibilité à la fissuration. Les microbilles de verre creuses représentent 99% des charges sphériques utilisées.

- **Charges non sphériques** : le mica sous forme d'écaillés est le matériau le plus utilisé. Des écailles de dimensions allant de 100 à 500 um et d'une épaisseur de 1 à 20 um sont incorporées à des résines thermoplastiques ou thermodurcissables pour des applications électriques et électroniques.

#### **b) Les charges non renforçantes**

Les charges non renforçantes sont ajoutées pour diminuer le coût de la résine sans altérer ses performances, ou bien pour améliorer certaines de ses propriétés :

- Charges de faible coût : extraites de roches ou de minerais (carbonates, silicates, silices, etc.), leur incorporation augmente le module d'élasticité, la dureté, la viscosité et la stabilité dimensionnelle mais diminue la résistance à la traction et à la flexion.

- Charges ignifugeantes : ont pour rôle de réduire ou d'empêcher la combustion de la résine.

- Charges conductrices et antistatiques : ces charges sont utilisées pour rendre la matrice conductrice de chaleur et d'électricité dans certaines applications.

### **1.4.2.2 Les additifs**

#### **a) Les lubrifiants et agents de démoulage**

Ils sont utilisés pour faciliter le façonnage de la résine et réduire sa tendance à adhérer aux moules et mandrins.

#### **b) Les pigments et colorants**

En fonction de la nature de la résine et de l'utilisation du matériau composite, ce dernier est coloré soit par des pigments (particules insolubles d'oxydes ou de sels métalliques) dispersés dans une pâte, soit par des colorants (composés organiques solubles dans l'eau ou dans un solvant).

#### **c) Les agents anti-retrait et les agents de fluage**

Le retrait de la résine après polymérisation peut aboutir à un mauvais état de surface, à un gauchissement ou à des microfissurations des pièces moulées. L'ajout de produits spécifiques anti-retrait, à base de thermoplastiques ou d'élastomères, permet de diminuer ou même d'annuler le phénomène.

#### **d) Les agents anti-ultraviolet**

Ils ont pour rôle de protéger la résine des rayons ultraviolets contenus dans le rayonnement solaire. En les absorbant, ils évitent une dégradation prématurée de la résine par rupture de liaisons atomiques ou par photo-oxydation.

### **1.4.3 Les fibres et tissu**

#### **1.4.3.1 Généralités**

Les matériaux composites tiennent l'essentiel de leurs caractéristiques mécaniques des matériaux de renfort : rigidité, résistance à la rupture, dureté, etc. Le

choix approprié du renfort permet aussi d'améliorer certaines propriétés physiques d'un composite : comportement thermique, tenue à la température, tenue au feu, résistance à l'abrasion, propriétés électriques, etc. Pour élaborer des composites performants, les caractéristiques recherchées pour les renforts sont : caractéristiques mécaniques élevées, masse volumique faible, bonne compatibilité avec les résines, facilité de mise en œuvre, faible coût, etc. La nature des renforts (organique, minérale, synthétique..) et leurs formes sont fonctions de l'application. Toutefois les plus utilisés sont sous formes de fibres et se présentent sous différentes formes commerciales :

- sous forme linéique (fils, mèches, etc.) ;
- sous forme de tissu surfacique (tissus simples, mats, etc.) ;
- sous forme multidirectionnelle (tresses, tissus complexes, etc.).

Les renforts les plus performants développés à ce jour sont des fibres courtes particulières appelées Trichites ou Whiskers, formées à base de monocristaux.

#### 1.4.3.2 Formes linéiques

Les fibres sont élaborées en filaments unitaires de 5 à 15  $\mu\text{m}$  de diamètre, appelés monofilaments. Ces filaments sont ensuite réunis en fils ou en mèches pour faciliter leur utilisation. Les fils continus ou discontinus sont caractérisés par leur masse linéique dont l'unité est le tex qui représente la masse en gramme d'un fil de 1 Km de longueur, soit :

$$1 \text{ tex} = 1 \text{ g/km} \quad \text{ou} \quad 1 \text{ tex} = 10^{-6} \text{ kg/m}$$

L'utilisation directe des formes linéiques pour la mise en œuvre de composites est limitée à quelques procédés particuliers tels que l'enroulement filamentaire et la pultrusion.

#### 1.4.3.3 Fibres de formes surfaciques

Les fils sont transformés par les techniques de l'industrie papetière et de tissage pour réaliser des formes surfaciques : mats, tissus ou rubans, qui facilitent la manipulation et la mise en œuvre des renforts.

##### a) Les mats

Se sont des nappes de fils continus ou discontinus dispersés dans un plan et assemblés par un liant soluble ou non dans la résine, l'absence d'orientations préférentielles des fibres conduit à un comportement isotrope du mat dans son plan. Les mats de fils coupés, plus déformables, permettent d'obtenir des formes embouties. Les mats de fils continus sont utilisés pour réaliser des formes complexes par moulage.

##### b) Les tissus et rubans

Un tissu (ou ruban) est un ensemble surfacique de fils, mèches, etc., réalisé sur un métier à tisser. L'ensemble est maintenu par l'entrecroisement des fils suivant deux directions (figure 1.4).

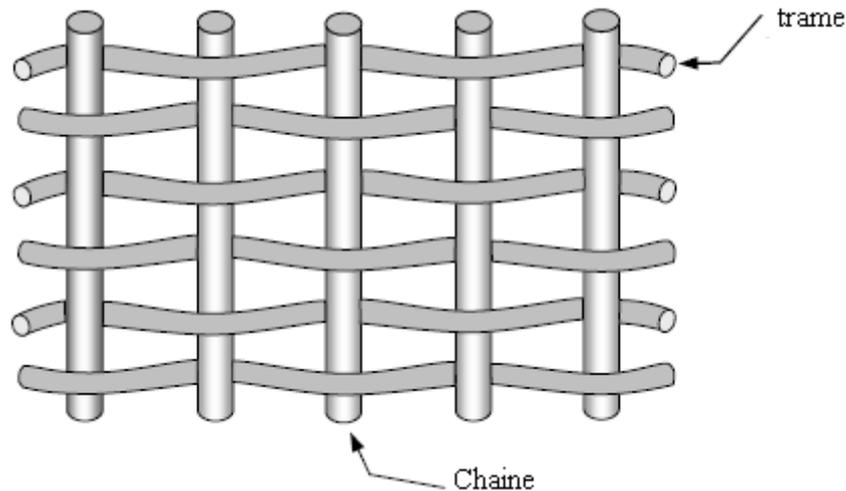


Figure 1.4. Chaîne et trame d'un tissu

- Une direction chaîne, ensemble de fils parallèles répartis dans un plan suivant la longueur du tissu ;
- Une direction trame, ensemble de fils s'entrecroisant avec les fils de chaîne.

Les tissus diffèrent par le type de fils utilisés, donc par la masse linéique des fils, et par le mode d'entrecroisement (ou armure) des fils de chaîne et des fils de trame. Les armures classiques utilisées sont : toile (ou taffetas), satin, sergé, armure haut module, armure unidirectionnelle. Ces deux dernières donnent les meilleures performances (l'absence d'entrecroisement supprime les effets d'ondulation et de cisaillement des fils). Les mats et tissus sont caractérisés par leur masse surfacique en  $\text{gramme/m}^2$ .

#### 1.4.3.4 Structures tissées unidirectionnel

##### a) Tresses et préformes

Des tissus tabulaires (tresses ou préformes) peuvent être obtenus par tissage cylindrique ou conique : les fils s'entrecroisent en hélice, dont la variation de pas permet d'ajuster la tresse à la forme qu'elle doit couvrir. On peut ainsi réaliser une pièce de révolution ayant un diamètre variable le long de son arc, ce qui permet d'obtenir divers tissus en forme de « chaussettes » coniques, ovales ou hémisphériques. Ces tissus sont utilisés dans les constructions aéronautiques (cône de rentrée, tuyères, etc.).

##### b) Tissus multidirectionnels

Des tissages volumiques sont également utilisés. Ils se caractérisent par le nombre de directions de tissage 3D et 4D. La structure la plus simple est celle du tissage 3D où les fils sont disposés suivant trois directions orthogonales.

#### 1.4.4 Les principales fibres

##### 1.4.4.1 Les fibres de verre

Le comportement du verre dans sa forme massive est dominé par son caractère fragile. En revanche, lorsqu'il est élaboré sous forme de fibres de très faibles diamètres, il devient tenace et révèle de bonnes caractéristiques mécaniques. Les fibres sont obtenues à partir du verre textile composé d'un mélange d'oxydes : silice, alumine, chaux, magnésie, et oxyde de bore. Les proportions du mélange, et l'ajout d'oxydes

modificateurs donnent au matériau final ses propriétés spécifiques. Différents types de verre peuvent être distingués :

- Le verre E à usage général, bonnes propriétés électriques ;
- Le verre D à hautes propriétés diélectriques, utilisé pour la construction de matériel de télécommunications ;
- Le verre C résistant aux agents chimiques, enrobage des structures sévèrement exposées ;
- Les verres R et S à caractéristiques mécaniques élevées, utilisés pour la réalisation de structures de hautes performances mécaniques.

#### a) *Elaboration des fibres de verre*

Les fibres de verre sont produites par étirement à grande vitesse et refroidissement de filaments obtenus par l'écoulement du verre en fusion à travers les orifices calibrés d'une filière. Les filaments sont aussitôt enduits d'un agent d'ensimage qui a pour rôles essentiels de protéger les filaments contre l'abrasion, de faciliter par la suite leur imprégnation par la résine et d'améliorer leur liaison avec cette dernière.

Deux procédés d'étirage peuvent être utilisés :

- Etirage mécanique donnant des fibres continues assemblées en fils de base *silionne*;
- Etirage pneumatique donnant des fibres discontinues assemblées en ruban verranne.

#### b) *Caractéristiques mécaniques des fibres de verre*

Les valeurs de référence pour les caractéristiques mécaniques des fibres de verre sont celles mesurées sur des monofilaments prélevés à la sortie de la filière. Le tableau 1.4 donne les valeurs usuelles de ces grandeurs. Cependant, les valeurs les plus représentatives, et en particulier pour les caractéristiques à la rupture des fibres (tableau 1.5), sont celles déduites des caractéristiques mesurées sur un composite unidirectionnel où la liaison verre-résine favorise une répartition assez homogène de la charge entre les filaments dont les caractéristiques sont diminuées par les différentes sollicitations mécaniques et chimiques subies lors des opérations de transformation en fils industriels.

| Caractéristiques         |                    |                   | Verre E | Verre R |
|--------------------------|--------------------|-------------------|---------|---------|
| Masse volumique          | $\rho$             | kg/m <sup>3</sup> | 2600    | 2550    |
| Module de Young          | $E_f$              | GPa               | 73      | 86      |
| Contrainte à la rupture  | $\sigma_{fu}$      | MPa               | 3400    | 4400    |
| Allongement à la rupture | $\varepsilon_{fu}$ | %                 | 4,4     | 5,2     |
| Coefficient de Poisson   | $\nu_f$            |                   | 0.22    | —       |

Tableau 1.4 Caractéristiques mécaniques des verres type E et R mesurées sur monofilaments à la sortie de la filière [1]

|                               | Verre E   | Verre R   |
|-------------------------------|-----------|-----------|
| Contrainte à la rupture (Mpa) | 2400-2600 | 3000-3600 |
| Allongement à la rupture      | 3,4       | 4         |

Tableau 1.5 Caractéristiques à la rupture d'un fil silionne industriel déduites des caractéristiques mesurées sur un composite unidirectionnel verre/époxyde [1]

En plus de leurs bonnes caractéristiques mécaniques, les fibres de verre ont aussi une bonne tenue thermique, elles conservent ces caractéristiques jusqu'à des températures assez élevées 200 °C pour le verre E et 250 °C pour le verre R.

#### 1.4.4.2 Les fibres de carbone

La mise en œuvre des fibres de carbone est motivée par les caractéristiques spécifiques remarquablement élevées que prévoit la théorie pour la structure cristalline hexagonale du graphite. Les fortes liaisons entre atomes voisins d'un même plan cristallographique donnent un module de Young de l'ordre de 1200 GPa et une contrainte à la rupture de 20000 MPa dans les directions parallèles aux plans cristallographiques, pour une masse volumique inférieure à 2000 kg/m<sup>3</sup>. Malgré les imperfections des cristaux obtenus par les procédés industriels, l'élaboration de fibres d'axes parallèles aux plans cristallographiques permet d'obtenir des fibres parmi les plus performantes (650 GPa pour le module de Young et 4000 MPa pour la contrainte à la rupture).

##### *a) Elaboration des fibres de carbone*

Les fibres de carbone sont élaborées par décomposition thermique sans fusion d'un polymère *précurseur* fibres ou fils. Trois opérations successives sont nécessaires : oxydation, carbonisation sous gaz inerte et graphitisation. Le *précurseur* peut être :

##### **\* des fibres acryliques**

Des mèches de filaments acryliques, obtenus à partir du polyacrylonitrile (PAN), sont traitées thermiquement. Après carbonisation les fibres de carbone obtenues ont une haute résistance (fibres HR). Une transformation supplémentaire par graphitisation permet d'obtenir des fibres à haut module de Young (HM) ou très haut module (THM). Les deux types de fibres HR et HM, subissent un traitement de surface (ensimage) pour amélioration de la liaison fibre-résine.

##### **\* le brai**

Le fil obtenu à partir du brai (résidu pâteux de la distillation du charbon ou du pétrole) donne après traitement un carbone de haut module, mais de caractéristiques légèrement plus faibles que celles des fibres (HM) obtenues par le procédé (PAN).

##### *b) Caractéristiques mécaniques des fibres de carbone*

Sur le tableau 1.6 est reportée une comparaison des caractéristiques des fibres de carbone et des fibres de verre E. Les fibres de carbone se distinguent en plus par une excellente tenue à la température, jusqu'à 1500 °C environ, d'où le développement de composites à fibres de carbone et matrice de carbone à haute tenue thermique utilisés dans les tuyères, les disques de freins, etc.

| Caractéristiques                              | Verre E | Carbone HR | Carbone HM | Carbone THM | Carbone HM (brai) |
|---|---------|------------|------------|-------------|-------------------|
| Masse volumique $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )   | 2600    | 1 750      | 1810       | 1950        | 2000              |
| Diamètre ( $\mu\text{m}$ )                    |         | 8          | 8          | 8           | 12                |
| Module de Young $E_f$ (Gpa)                   | 73      | 220        | 400        | 600         | 380               |
| Module spécifique $E_f/\rho$ (MN m/kg)        | 28      | 120        | 210        | 310         | 190               |
| Contrainte à la rupture $\sigma_{fu}$ (Mpa)   | 3400    | 3000-3500  | 2800       | 2000        | 2000-2400         |
| Contrainte spécifique $\sigma_{fu}$ (kN m/kg) | 1300    | 1710-2860  | 1550       | 1030        | 1000-1200         |
| Prix de revient / aux fibres de verre         | 1       | 25-30      | 50-60      | 65-70       | 25-30             |

Tableau 1.6 Caractéristiques des fibres de carbone et du verre E

#### 1.4.4.3 Les fibres aramides à caractéristiques mécaniques élevées

Les fibres aramides à caractéristiques mécaniques élevées sont des fibres de synthèse plus connues sous la désignation commerciale de fibres de « Kevlar », lancée par Dupont de Nemours (USA) depuis 1972. D'autres industriels commercialisent également ces fibres sous des désignations propres à chacun (Twaron, Technora, etc.). Elles sont élaborées par filage d'une solution sulfurique concentrée d'un haut polymère, polyaramide ou polyamide. Les fibres sont ensuite étirées et traitées thermiquement pour augmenter leur module d'élasticité.

##### a) Caractéristiques mécaniques des fibres aramides

Le tableau 1.7 résume les caractéristiques de différents types de fibres aramides, mesurées sur monofilaments. Les valeurs de contrainte à la rupture de ces fibres sont proches de celles des fibres de carbone HR, pour un prix de revient 3 à 5 fois moindre. Des ensimages adaptés sont développés pour améliorer l'adhérence fibre-résine. Les fibres de Kevlar sont associées à d'autres fibres (verre, carbone) pour former des composites hybrides.

| Caractéristiques                                  | Kevlar 29 | Kevlar 49 | Kevlar 149 | Twaron | Technora |
|---|-----------|-----------|------------|--------|----------|
| Masse volumique $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )       | 1440      | 1450      | 1470       | 1440   | 1390     |
| Diamètre ( $\mu\text{m}$ )                        | 12        | 12        | 12         | 12     | 12       |
| Module de Young $E_f$ (Gpa)                       | 60        | 130       | 200        | 100    | 90       |
| Module spécifique $E_f/\rho$ (MNm/kg)             | 42        | 90        | 136        | 70     | 65       |
| Contrainte à la rupture $\sigma_{fu}$ (Mpa)       | 3000      | 3600      | 3000       | 3500   | 38000    |
| Contrainte spécifique $\sigma_{fu}/\rho$ (kNm/kg) | 2080      | 2480      | 2040       | 2430   | 2730     |
| Allongement à la rupture (%)                      | 4         | 3         | 1.5        | 3      | 4        |

Tableau 1.7 Caractéristiques mécaniques de différents types de monofilaments aramides

### **b) Domaines d'utilisation**

L'une des premières utilisations des fibres d'aramides a été le remplacement des armatures d'acier dans les pneumatiques. En raison de leur légèreté et de leur résistance au choc et à l'impact, leur usage s'est développé dans la fabrication de protections contre projectiles (blindages, gilets pare-balles..., etc.), ainsi que dans certains articles de sports (skis, raquettes de tennis..., etc.).

#### **1.4.4.4 Les fibres céramiques**

Le principal intérêt des céramiques est leur caractère réfractaire. Diverses fibres sont obtenues par dépôt chimique en phase vapeur d'un revêtement céramique : de bore (fibres de bore B), de bore-carbure de bore (fibres B-B<sub>4</sub>C), de silicium (fibres de silicium) ou de bore-silicium (fibres BorSic), sur un fil support en tungstène ou en carbone.

#### **a) Caractéristiques mécaniques et utilisation**

Les différentes fibres céramiques ont des caractéristiques assez voisines (tableau 1.8). Ces caractéristiques restent maintenues jusqu'à des températures allant de 500 à 1000 °C. Les fibres SiC et BorSic sont utilisées avec des matrices métalliques ou céramiques pour la fabrication des aubes de compresseurs et de turbines. Les fibres de bore et de bore-carbure de bore associées aux résines thermoplastiques et thermodurcissables, notamment époxydes, sont utilisées dans les domaines des sports et loisirs.

| <b>Caractéristiques</b> |                             | <b>Bore</b> | <b>Bore + B<sub>4</sub>C</b> | <b>SiC</b> |
|-------------------------|-----------------------------|-------------|------------------------------|------------|
| Masse volumique         | $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> ) | 2600        | 2600                         | 3000       |
| Diamètre                | ( $\mu\text{m}$ )           | 100-150     | 100-150                      | 100-150    |
| Module de Young         | $E_f$ (Gpa)                 | 430         | 430                          | 410        |
| Module spécifique       | $E_f/\rho$ (MN m/kg)        | 165         | 165                          | 140        |
| Contrainte à la rupture | $\sigma_{fu}$ (Mpa)         | 3800        | 4000                         | 3900       |
| Contrainte spécifique   | $\sigma_{fu}/\rho$ (kNm/kg) | 1460        | 1540                         | 1300       |

Tableau 1.8 Caractéristiques mécaniques de quelques fibres céramiques

#### **1.4.4.5 Les fibres synthétiques thermostables**

Les fibres synthétiques thermostables sont des fibres organiques obtenues par synthèse. Leurs caractéristiques mécaniques sont faibles mais restent conservées aux températures élevées.

Elles sont associées à des résines thermostables pour obtenir des matériaux composites de bonne tenue thermique, utilisés dans les isolants électriques et thermiques, les protections thermiques : boucliers de missiles et cônes de rentrée de véhicule spatial. Chaque fabricant propose sa propre formule sous une désignation commerciale. Le tableau (1.10) résume les caractéristiques mécaniques de quelques unes d'entre elles.

| Caractéristiques         |                             | Kermel | Nomex | Kynol | PBI  | Apyeil |
|--------------------------|-----------------------------|--------|-------|-------|------|--------|
| Masse volumique          | $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> ) | 1350   | 1380  | 1270  | 1430 | 1380   |
| Module de Young          | $E_f$ (Gpa)                 | 7      | 16    | 4.5   | 6    | 17     |
| Contrainte à la rupture  | (Mpa)                       | 470    | 670   | 280   | 500  | 660    |
| Allongement à la rupture | $\epsilon_{fu}$ %           | 20     | 45    | 20-60 | 30   | 40     |

#### 1.4.4.5 Autres fibres

Il existe d'autres fibres utilisées pour des applications particulières. Ces fibres sont généralement à faibles module et contrainte à la rupture, excepté les fibres métalliques, et dont l'utilisation est réservée à la recherche de :

- produits à bas prix de revient ;
- produits à haute isolation thermique ;
- produits de bonne conductivité thermique ou électrique.

Parmi ces fibres nous avons :

##### *a) les fibres d'origine végétale*

- le bois, utilisé sous forme de fibres orientées, feutres, papiers imprégnés, etc. ;
- le sisal, le jute, le lin, de moins en moins utilisés au profit des fibres de verre.

##### *b) les fibres d'origine minérale*

- l'amiante (interdite dans certaines utilisations) ;
- la silice.

##### *c) les fibres synthétiques*

- fibres polyester (tergal, dacron, térylène, etc.) ;
- fibres polyamides.

##### *d) les fibres métalliques*

- acier ;
- cuivre ;
- aluminium.

Ces fibres sont utilisées avec des matrices métalliques afin d'obtenir des composites:

- de bonne conductivité thermique et électrique,
- de caractéristiques thermo-mécaniques élevées.

### 1.5 Modes de fabrication des composites

Nous présentons les procédés destinés principalement à la fabrication des composites à matrices organiques. Ils comportent trois opérations essentielles [1,3 et 4] :

- mise en forme de la pièce ;
- imprégnation du renfort par la résine : elle peut être antérieure à la mise en forme ou carrément à l'opération de fabrication (pré imprégnés) ;
- durcissement de la résine (polymérisation).

La différence entre les procédés réside dans les moyens mis en œuvre pour réaliser ces trois étapes. L'épaisseur souhaitée des pièces fabriquées est obtenue dans la plus part des cas par l'empilement de plusieurs couches de matrice-renfort formant ainsi les stratifiés.

Une approche pratique pour présenter les divers modes est le classement de ces derniers selon leurs capacités de production (série) et la forme des produits [5 et 6].

### 1.5.1 Petites séries

#### 1.5.1.1 Moulage au contact

L'opération se fait sur un moule ouvert (figure 1.5) et nécessite peu de moyens (c'est le procédé le plus simple et le moins coûteux). Les opérations de moulage restent pour l'essentiel inchangées dans les autres procédés et se déroulent comme suit :

- le demi moule est enduit avec un agent de démoulage, puis une couche de résine de "gel coat" est déposée ;
- le renfort (mat, tissu) est placé sur le moule, il prend la forme de la pièce ;
- imprégnation du renfort par la résine liquide suivie d'un ébullage au rouleau cannelé, on parle aussi de compactage ;
- après gélification de toute l'épaisseur on procède au démoulage ;
- le durcissement (polymérisation) s'effectue en milieu ambiant et peut être accélérée par étuvage ;
- finition de la pièce : détourage, ponçage, peinture..., etc.

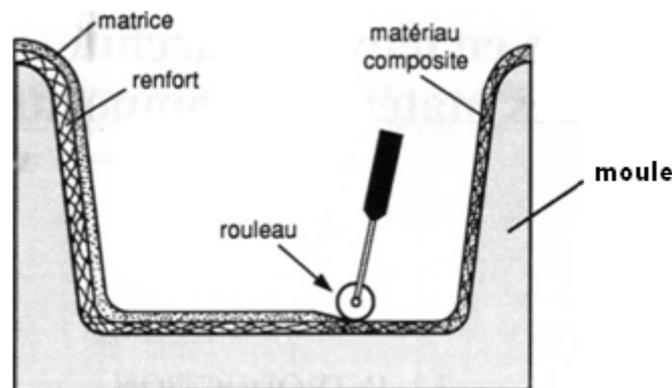


Figure 1.5 Principe du moulage au contact

#### 1.5.1.2 Moulage par projection simultanée

Comme pour le moulage au contact, ce procédé se fait sur un moule ouvert (figure 1.6), la différence est que les couches sont déposées par projection simultanée du renfort (fibres coupées) et de la résine liquide. Toutes les autres opérations sont identiques à celles citées ci-dessus.

Ces deux procédés permettent d'obtenir des pièces et des structures composites avec un faible coût, de dimensions importantes et de formes variées mais de précision et de performances mécaniques limitées.

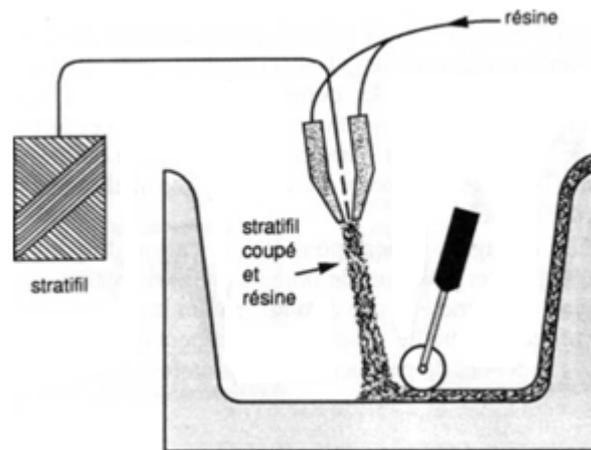


Figure 1.6 : Moulage par projection simultanée

## 1.5.2 Procédés pour moyennes séries

### 1.5.2.1 Moulage sous vide

Le moulage se fait entre moule et contre moule, le renfort est placé en premier, la résine est versée par-dessus et le contre moule poreux, recouvert d'une membrane étanche, vient fermer l'ensemble (figure 1.7). L'étalement de la résine, l'imprégnation et l'ébullage se font sous l'effet de la dépression créée à l'intérieur du moule. Le contre moule peut être réduit à la seule membrane d'étanchéité (moulage au sac). Ce procédé permet d'obtenir des pièces de bonnes caractéristiques mécaniques grâce à une distribution uniforme de la résine et un faible taux de porosité.

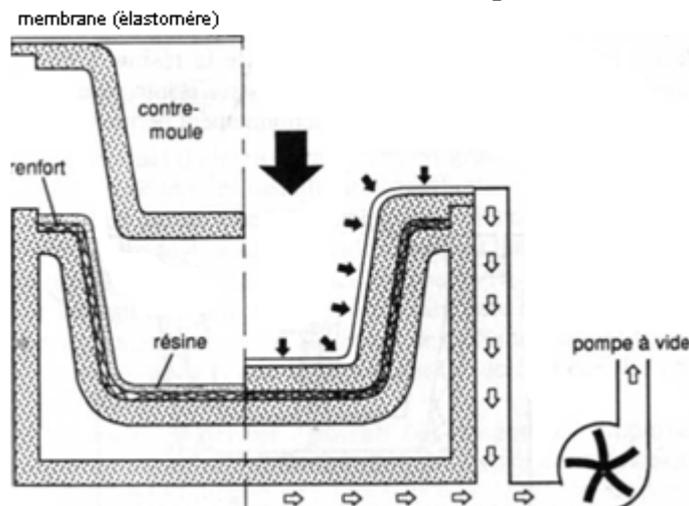


Figure 1.7 : Moulage sous vide

### 1.5.2.2 Moulage par compression à froid

L'imprégnation et l'ébullage se font en moule fermé par pression mécanique (contre moule monté sur la partie mobile de la presse). La durée de fermeture du moule correspond à la polymérisation de la résine. La chaleur accumulée par exothermie maintient la température du moule (50 à 70°C). La différence de pression entre parties horizontales et non horizontales de la pièce donne un taux de renfort variable.

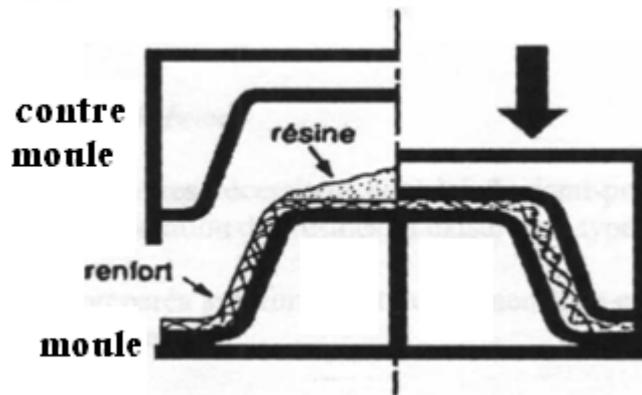


Figure 1.8 Moulage par compression à froid

### 1.5.2.3 Moulage par injection de résine liquide sous pression (RTM\*)

La résine liquide est injectée sous pression dans un moule fermé à l'intérieur duquel le renfort a été préalablement placé (figure 1.9). Ce procédé permet d'intégrer des inserts, de réaliser des pièces compliquées ou même des structures sandwiches avec une très bonne maîtrise du taux de renfort. Une variante de ce procédé (VARTM\*\*) consiste à créer une dépression entre moule et contre moule ce qui diminue d'avantage le taux de porosité.

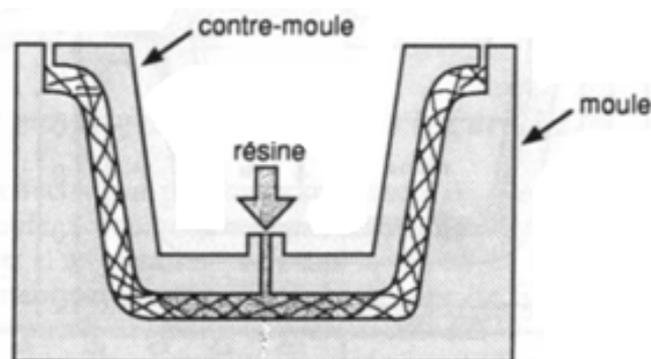


Figure 1.9 Moulage par injection de résine

\* RTM: Resin Transfert Molding

\*\* VARTM: Vaccum Assisted RTM

### 1.5.2.4 Moulage en autoclave

Au lieu d'un contre moule, ce procédé utilise une membrane déformable qui enveloppe le renfort imprégné et le moule, formant ainsi un sac étanche. Le moule est ensuite placé dans une enceinte chauffée et pressurisée (autoclave) qui permet de réaliser des cycles de cuisson précis en température et en pression.

La pression hydrostatique exercée par le fluide de l'enceinte sur la pièce, assistée par une dépression à l'intérieur du sac, permet une répartition uniforme de la résine. L'utilisation de prepregs (drappage de préimprégnés) améliore la maîtrise de l'orientation des fibres et du taux de renfort qui peut atteindre 70% en volume. Ce procédé permet d'obtenir des structures très fines ou sandwiches de hautes performances.

### 1.5.3 Procédés pour grandes séries

Les procédés pour grandes séries nécessitent l'emploi de demi-produits facilitant la mise en place des renforts et la manipulation des résines. Il existe trois types de demi-produits :

- Préformes : renforts préparés aux formes et aux dimensions exactes des pièces à réaliser avant l'opération de fabrication.
- Préimprégnés : renforts de différentes présentations imprégnés de résine et stockés jusqu'à leur emploi, on distingue :

a) Les prepregs : stratifils, roving, rubans ou tissus préimprégnés ;

b) Les Compounds, qui comportent :

- Les mats préimprégnés (SMC : sheet moulding compounds) présentés en feuilles ;
- Les prémix : mélanges de résines, charges et fibres coupées présentés en vrac sous deux formes :
  - BMC : Bulk moulding compounds (vrac) ;
  - DMC : Dough moulding compounds (pâte).

#### 1.5.3.1 Moulage par compression à chaud par voie humide

Le procédé est exactement le même que le moulage par compression à froid sauf qu'il utilise un moule chauffé (figure 1.10) ayant pour but d'accélérer la polymérisation. Il est compatible avec l'emploi des préformes.

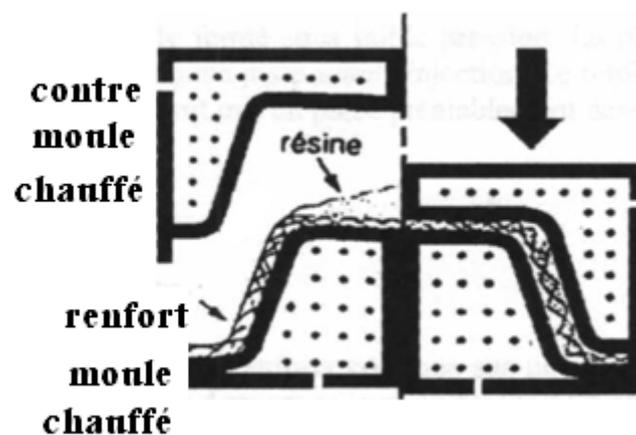


Figure 1.10. Moulage par compression à chaude

#### 1.5.3.2 Moulage par compression à chaud par voie sèche

Semblable au précédent, il requiert l'utilisation de demi-produits compounds. Sous l'effet de la chaleur et de la pression, la matière s'écoule et remplit toute l'empreinte du moule. Les possibilités des formes obtenues sont très grandes et les cadences plus élevées.

#### 1.5.3.3 Moulage par injection de compounds

L'opération consiste à injecter sous forte pression et à grande vitesse, par une vis d'Archimède (figure. 1.11), des compounds (SMC ou prémix) dans un moule fermé

et chauffé où a lieu la polymérisation. Les produits obtenus sont appelés plastiques renforcés. Le procédé permet d'obtenir des pièces complexes monoblocs.

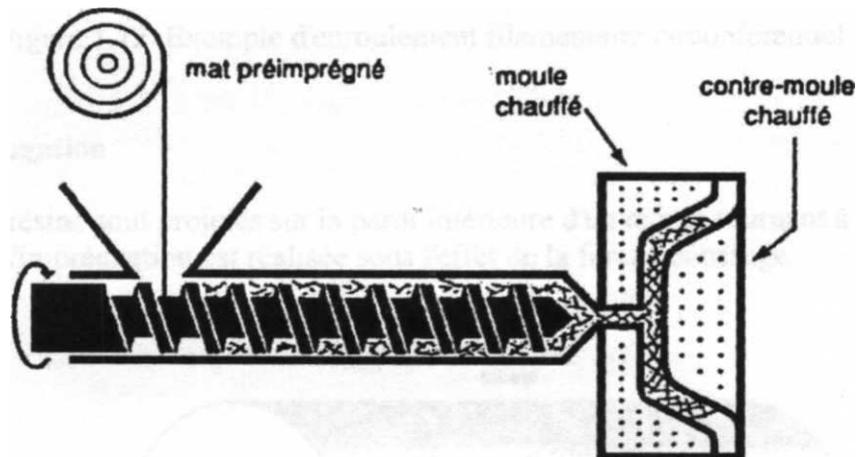


Figure 1.11: Moulage par injection de compounds

#### 1.5.3.4 Moulage par injection réaction (R-RIM)

L'injection se fait dans un moule fermé sous faible pression. La résine est formée de deux constituants mélangés dans une canne juste avant l'injection. Le renfort est soit mélangé à l'un des composants (fibres broyées) soit mis en place préalablement dans le moule (mat ou tissu).

#### 1.5.4 Procédés pour corps creux

##### 1.5.4.1 Enroulement filamentaire

C'est une opération de bobinage de renforts continus sur un moule ou un mandrin (figure 1.12) assurée par la rotation de ces derniers et le mouvement du système d'approvisionnement en renfort. Ces mouvements et leurs combinaisons déterminent le type d'enroulement : circonférentiel, hélicoïdale (continu et discontinu) ou polaire. Les pièces obtenues sont des tubes, des tuyaux, des réservoirs, etc.

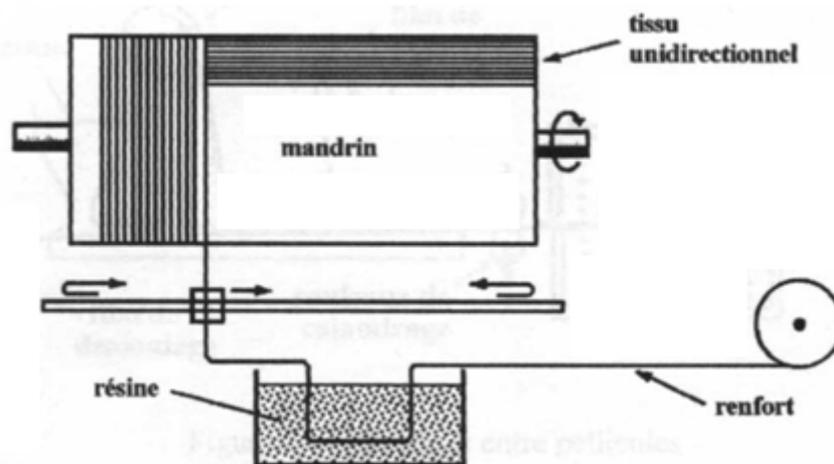


Figure 1.12 Exemple d'enroulement filamentaire circonférentiel

### 1.5.4.2 Centrifugation

Le renfort et la résine sont projetés sur la paroi intérieure d'un moule tournant à grande vitesse (2000 tr/min). L'imprégnation est réalisée sous l'effet de la force centrifuge.

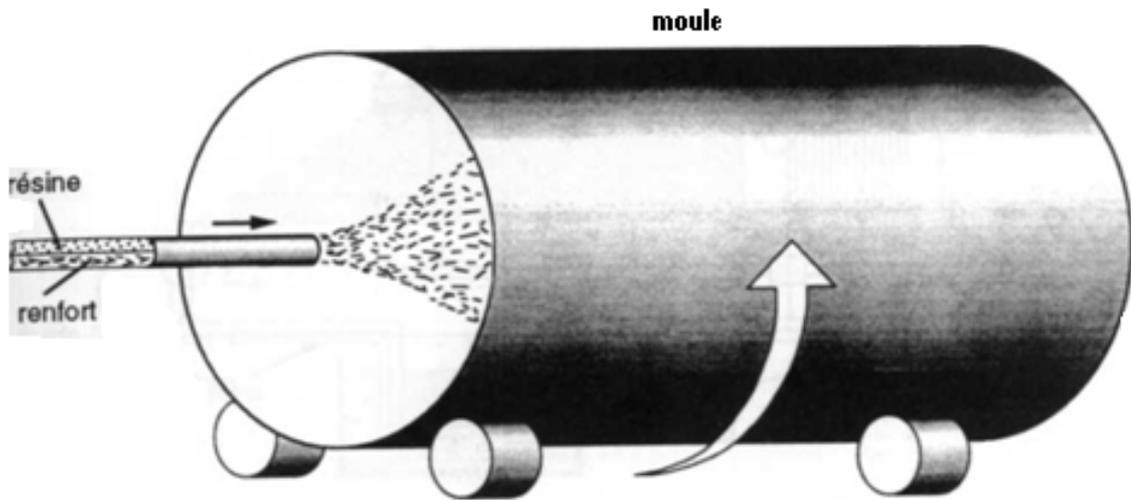


Figure 1.13 Moulage par centrifugation

### 1.5.5 Procédé de moulage en continu

#### 1.5.5.1 Moulage entre pellicules

Le renfort imprégné de résine est pris en sandwich entre deux pellicules (film de démoulage) servant de moule, s'ensuit une mise en forme (plaques planes, sandwichs, panneaux ondulés ou nervures..., etc.) et une polymérisation par chauffage.

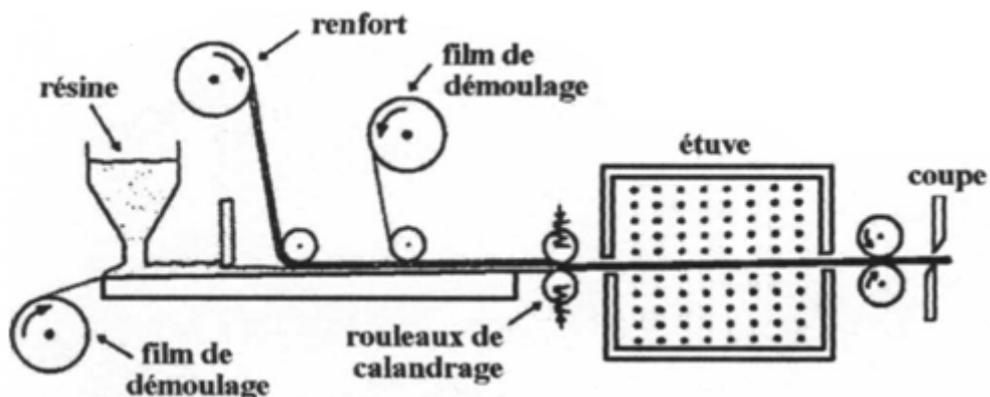


Figure 1.14 Moulage entre pellicules

#### 1.5.5.2 Pultrusion

Le procédé consiste à tirer à travers une filière chauffée (figure 1.15) des renforts imprégnés de résine. La mise en forme et la polymérisation se font simultanément dans la filière et donnent des profilés pleins ou creux de formes complexes et de section constante.

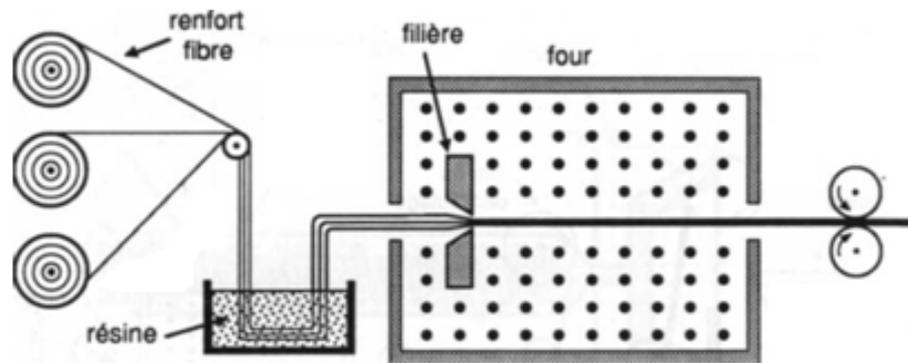


Figure 1.15 Pultrusion

### 1.6 Les stratifiés composites

Les stratifiés sont des composites formés par un empilement de couches successives de renfort-matrice appelées plis ou encore monocouches constituant l'élément de base de toute structure composite. Les plis sont caractérisés par la forme du renfort (mat, fils, roving, tissu,..., etc.) qui détermine leur comportement mécanique, une répartition aléatoire de fibres courtes ou longues (mat par exemple) correspond à une couche pratiquement isotrope dans son plan, une orientation privilégiée des fibres correspond à une anisotropie marquée.

Les couches peuvent être de natures différentes en matière des fibres et forme du renfort. Ces deux paramètres, en plus de l'empilement et de l'orientation, permettent de moduler les caractéristiques du stratifié pour répondre au mieux aux sollicitations imposées.

La désignation d'un stratifié doit tenir compte de tous ces paramètres. Elle se fait généralement selon un code établi pour les stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels auxquels peut se ramener l'étude de tout autre type de stratifiés (figure 1.16).

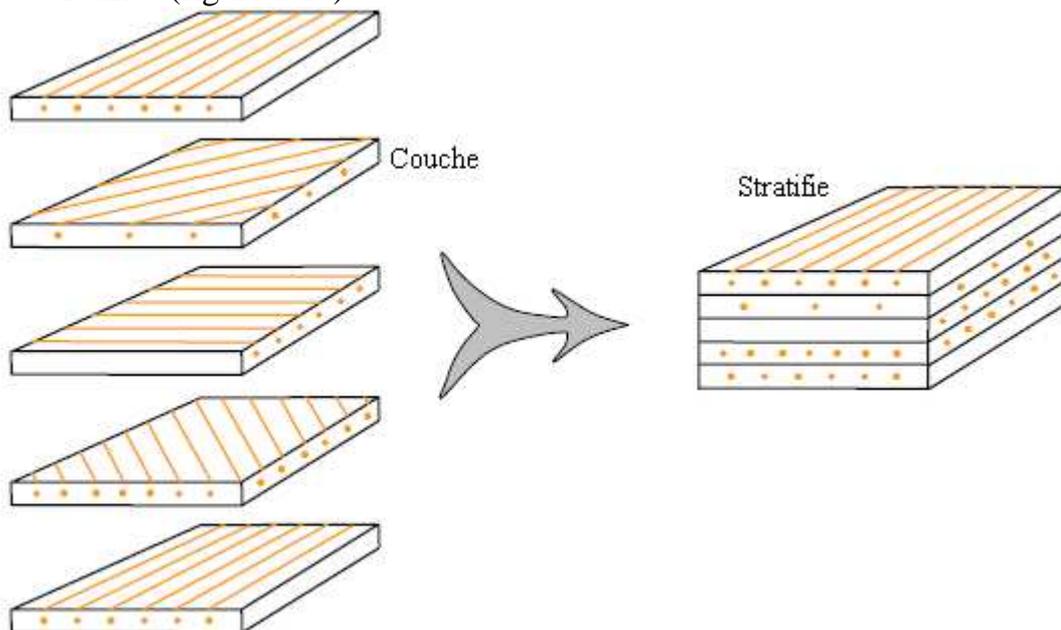


Figure 1.16 Modèle de base des stratifiés

### 1.6.1 Désignation des stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels

Les règles de désignation d'un stratifié sont les suivantes :

- Chaque couche est désignée par la valeur de son angle d'orientation (angle d'orientation des fibres en degrés par rapport à l'axe x de référence). Le sens de l'orientation est pris en compte (positif ou négatif), la désignation dépend donc du référentiel choisi (figure 1.17) ;
- Les couches successives d'angles différents sont séparées par un / si leurs angles sont différents ;
- Les couches successives de même orientation sont désignées par un indice numérique indiquant le nombre de couches dans cette direction ;
- Si deux couches successives ont des orientations de même valeurs et de sens opposés, elles peuvent être désignées par le signe  $\pm$  :

$$+ \theta / - \theta = \pm \theta$$

$$- \theta / + \theta = \pm \theta$$

- La désignation se fait couche par couche en allant d'une face à l'autre, des crochets indiquant le début et la fin.

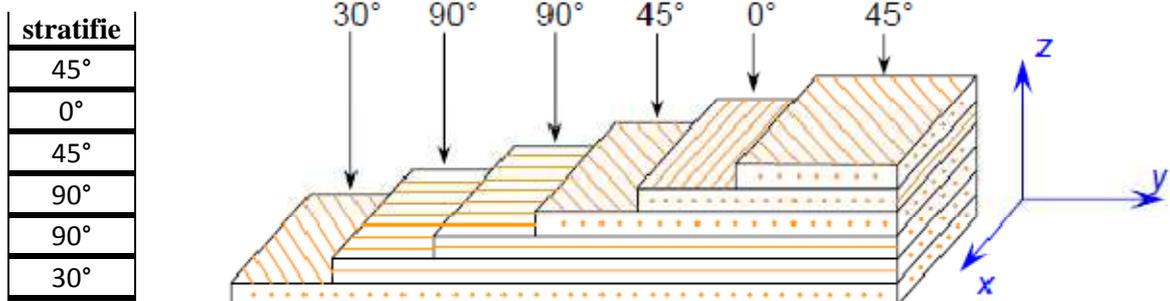


Figure 1.17 Exemple de désignation d'un stratifié

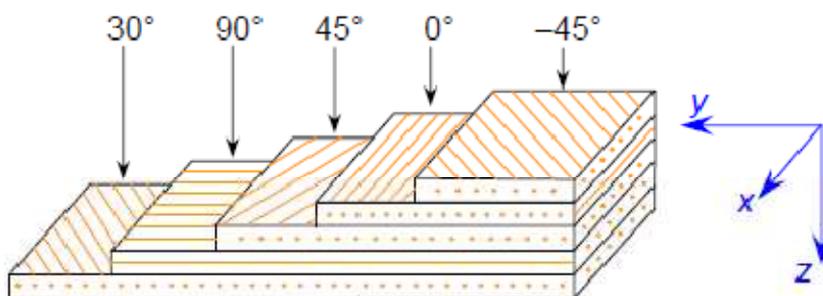
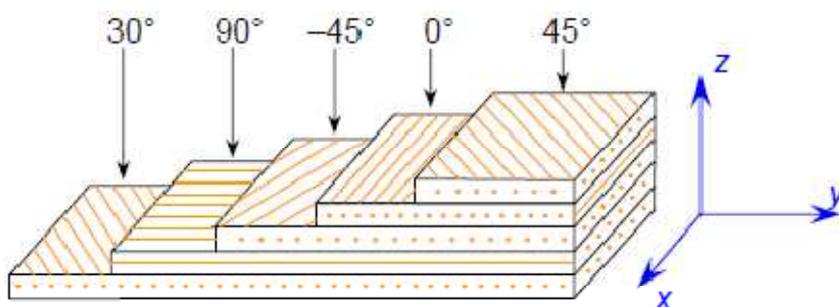


Figure 1.18. Convention de signe pour la désignation des stratifiés

S'il y a une séquence qui se répète, les couches en question sont mises entre parenthèses pour désigner la séquence. Un indice numérique indique le nombre de répétition de celle-ci (figure 1.19).

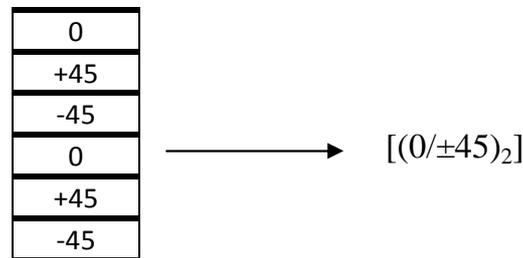


Figure 1.19 Stratifié avec une séquence répétée

### 1.6.2 Modes de stratification particuliers

Selon la séquence d'empilement, on rencontre des stratifiés :

- a) Equilibrés : le stratifié comporte autant de couches orientées suivant la direction +0 que de couches orientées suivant la direction - 0.
- b) Symétriques : le plan moyen du stratifié est plan de symétrie (par rapport à la disposition des couches). La désignation dans ce cas peut se limiter à la moitié des plis en débutant d'une face et en s'arrêtant au plan moyen à côté duquel un indice "s" désigne cette symétrie. Si le nombre total des couches est impair la couche centrale (plan de symétrie) est surlignée (figure 1.20).

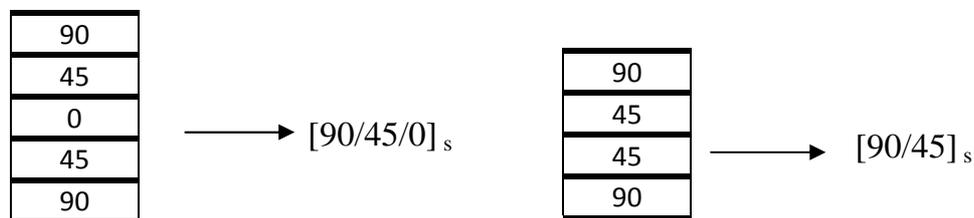


Figure 1.20 Désignation de stratifiés symétriques

- c) Croisés : un stratifié croisé est constitué exclusivement de la séquence  $[0/90^\circ]$  qui se répète n fois.
- d) Orthogonaux : ils comportent autant de couches à  $0^\circ$  que de couches à  $90^\circ$ .
- e) Hybrides : se sont des stratifiés composés de couches renforcées par des fibres de natures différentes. Une meilleure performance peut être obtenue en utilisant au mieux les propriétés de chaque type de renfort. On peut distinguer :
  - des hybrides interplis, constitués d'une suite de couches, chacune de nature différente ;
  - des hybrides intraplis, constitués par une séquence de plis identiques, chaque pli étant constitué de couches différentes ;
  - des couches métalliques peuvent également être intercalées entre les couches.

Le matériau de la fibre doit être mentionné pour chaque couche. Un exemple est donné en figure (1.21)

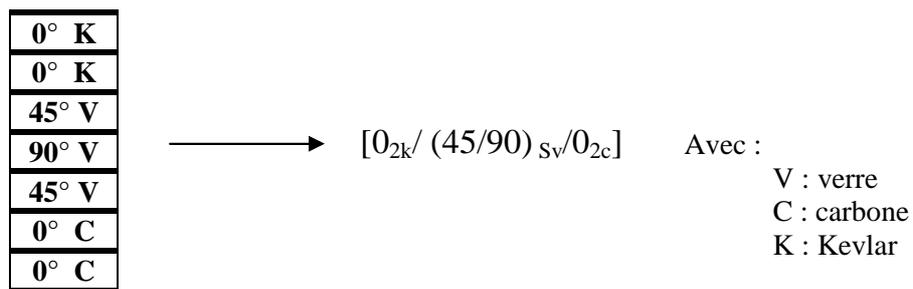


Figure 1.21 Désignation d'un stratifié hybride

## 2.1 Introduction

Dans les différents procédés de mise en œuvre, la réalisation de structures stratifiées en composites se fait par le dépôt de couches successives de renfort-résine sur un moule, comportant des surfaces planes ou courbes. Par conséquent, les structures obtenues sont des structures multicouches de type plaques ou coques [1], comportant deux niveaux d'hétérogénéité :

- Hétérogénéité à l'échelle des constituants d'une couche : fibres et matrice : *hétérogénéité microscopique* ;
- Hétérogénéité à l'échelle des constituants du stratifié : plis de différentes compositions et/ou orientations : *hétérogénéité macroscopique*.

Pour faciliter la modélisation du comportement mécanique de tels composites, les milieux hétérogènes sont remplacés par des milieux homogènes de comportement moyen équivalent. Ce passage appelé **homogénéisation** s'effectue en deux étapes :

- **Homogénéisation micromécanique** : le pli hétérogène est représenté par un pli homogène équivalent dont le modèle de comportement (isotrope, orthotrope ou anisotrope) dépend de la forme du renfort (mat, stratifils ou tissus unidirectionnels, tissus 2D), et dont les caractéristiques dépendent de la nature et des proportions des constituants (fibres et résine).

Les modules d'élasticité du pli ou modules de l'ingénieur, déterminés sur des éprouvettes de laboratoire, sont une très bonne mesure des propriétés homogénéisées d'une couche pour un taux de renfort donné. Cependant le taux de renfort réel obtenu sur le stratifié est généralement différent de celui des éprouvettes de caractérisation (différence liée aux étapes de fabrication), de plus pour la conception et l'optimisation d'un stratifié il sera plus intéressant de déterminer les caractéristiques mécaniques du pli par des formules théoriques en fonction des caractéristiques des fibres et de la matrice et de la fraction volumique des fibres au sein du stratifié.

- **Homogénéisation macro-mécanique** : le stratifié est remplacé par un matériau homogène anisotrope dont les caractéristiques mécaniques sont déterminées à partir des propriétés homogénéisées des plis, à travers l'application des définitions de la théorie des plaques multicouches. Les plis pouvant être orientés différemment, pour pouvoir écrire la loi de comportement (ou équation constitutive) du stratifié, il est nécessaire d'exprimer leurs propriétés dans un même référentiel.

Pour la mise en équation du problème général de mécanique des milieux continus, la formulation variationnelle permet de faciliter l'écriture analytique des équations du mouvement et des conditions aux limites pour les systèmes complexes [7]. Elle permet aussi d'introduire des méthodes de calcul approchées numériques ou analytiques. Dans le cas des stratifiés, la formulation directe des plaques est beaucoup plus facile, et pour une géométrie simple les conditions aux limites sont déduites de manière intuitive, les deux approches (variationnelle ou directe) étant équivalente [8]. Cependant, il sera nécessaire de développer une formulation énergétique des stratifiés pour introduire les méthodes de calcul approchées.

## 2.2 Détermination des caractéristiques mécaniques d'un pli unidirectionnel dans son repère d'orthotropie

### 2.2.1 Schéma d'élasticité linéaire

Un pli unidirectionnel (figure 2.1) est composé de fibres parallèles assemblées et maintenues par la résine. Ses axes principaux sont 1 (L) direction longitudinale portée par les fibres, 2 et 3 ( $T$  et  $T'$ ) perpendiculaires aux fibres.

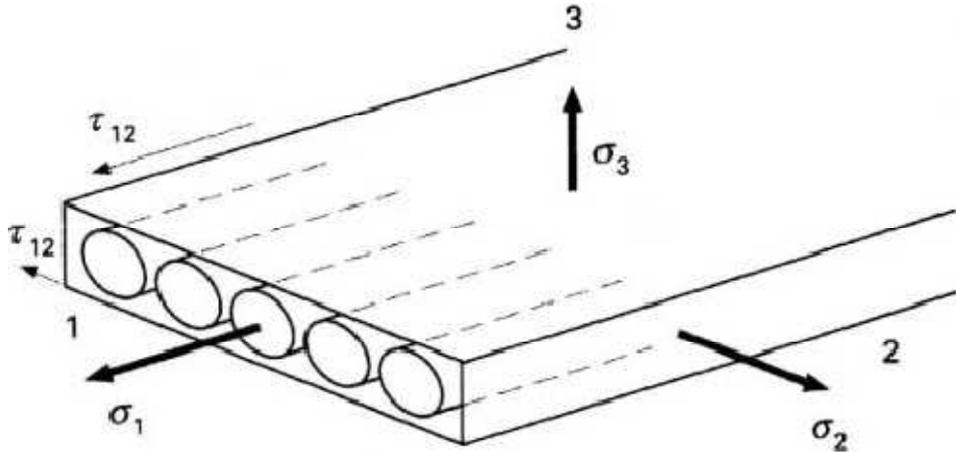


Figure 2.1. Pli composite unidirectionnel

Cette géométrie induit des invariances de comportement par rotation quelconque autour de l'axe  $L$  qui est alors axe d'isotropie, le matériau est isotrope dans tout plan perpendiculaire à cet axe.

### 2.2.2. Loi de Hooke généralisé

La relation entre contraintes et déformations peut être caractérisée par :

$$\sigma(M) = C(M) \cdot \varepsilon(M)$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_R = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & C_{41} & C_{51} & C_{61} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & C_{42} & C_{52} & C_{62} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{43} & C_{53} & C_{63} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{54} & C_{64} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{65} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}_R \quad 2.1$$

Ou bien

$$\varepsilon(M) = S(M) \cdot \sigma(M)$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}_R = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} & S_{41} & S_{51} & S_{61} \\ S_{12} & S_{22} & S_{32} & S_{42} & S_{52} & S_{62} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{43} & S_{53} & S_{63} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{54} & S_{64} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{65} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_R$$

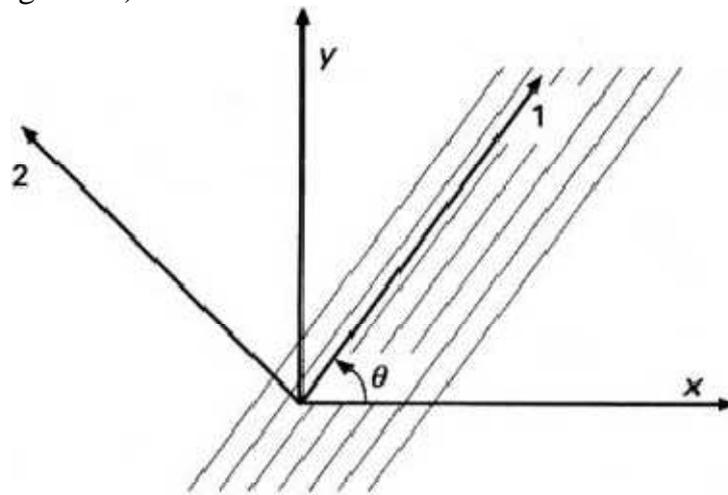
**C** : est la matrice de rigidité;

**S** : la matrice de souplesse.

**C** et **S** sont des matrices symétriques : il y a donc 21 constantes de rigidité **C<sub>ij</sub>** ou constantes de souplesse **S<sub>ij</sub>**.

### 2.2.3. Relation changement de base

On peut exprimer les matrices de rigidité ou de souplesse de différentes manières selon la base choisie (Figure 2.2).



1, 2 axes propres du composite  
x, y axes quelconques  
 $\theta$  angle des axes

Figure 2.2. Changement d'axes

#### a) Pour le tenseur de contrainte

On peut noter les 6 variables du tenseur des contraintes [1] sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}_R$$

2.3

La matrice de changement de base pour une rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe 3 s'écrit :

$$T_{R \rightarrow R}^{\sigma} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad 2.4$$

Pour obtenir la relation de passage inverse, remplacer  $\theta$  par  $-\theta$ .

### b) Pour le tenseur de déformation

On note le tenseur des déformations sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} = 2 \varepsilon_{23} \\ \gamma_{13} = 2 \varepsilon_{13} \\ \gamma_{12} = 2 \varepsilon_{12} \end{pmatrix}_R \quad 2.5$$

La matrice de changement de base pour une rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe 3 s'écrit :

$$T_{R \rightarrow R'}^{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad 2.6$$

Pour obtenir la relation de passage inverse, remplacer  $\theta$  par  $-\theta$

**Remarque : Expression de la matrice  $T_{R-R'}^{\sigma}$  est différente de la matrice  $T_{R-R'}^{\varepsilon}$ .**

En reprenant les formules de changement de base précédentes (Équations 7 et 12) et les définitions des matrices .Équations (2.1) et (2.2),

il vient :

$$\begin{aligned} C_{R'} &= T_{R \rightarrow R'}^{\sigma} C_R T_{R' \rightarrow R}^{\varepsilon} \\ S_{R'} &= T_{R \rightarrow R'}^{\varepsilon} S_R T_{R' \rightarrow R}^{\sigma} \end{aligned} \quad 2.7$$

## 2.2.4. Caractérisation de matériaux

### a) Matériau triclinique

cas général à matrice complète 21 constantes d'élasticité

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & C_{41} & C_{51} & C_{61} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & C_{42} & C_{52} & C_{62} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{43} & C_{53} & C_{63} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{54} & C_{64} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{65} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \quad 2.8$$

### b) Matériau monoclinique

Ce matériau possède un plan de symétrie : l'expression de la matrice de passage ne change pas pour tout changement de repère symétrique par rapport à ce plan. Supposons le plan  $(e_1, e_2)$  plan de symétrie du matériau. Si l'on utilise les relations de passage (2.7) entre le repère  $R = (e_1, e_2, e_3)$  et le repère symétrique  $R' = (e_1, -e_2, e_3)$  avec la forme générale (2.1), on montre que la loi de Hooke se résume à l'expression suivante :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{54} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad 2.9$$

13 constantes d'élasticité

### c) Matériau orthotrope

Le matériau orthotrope est un matériau à 3 plans de symétrie orthogonaux deux à deux. En pratique, c'est le cas des tissus noyés dans un polymère. La même démarche que précédemment conduit aux expressions dans un repère défini par les axes d'orthotropie Figure (2.3) :

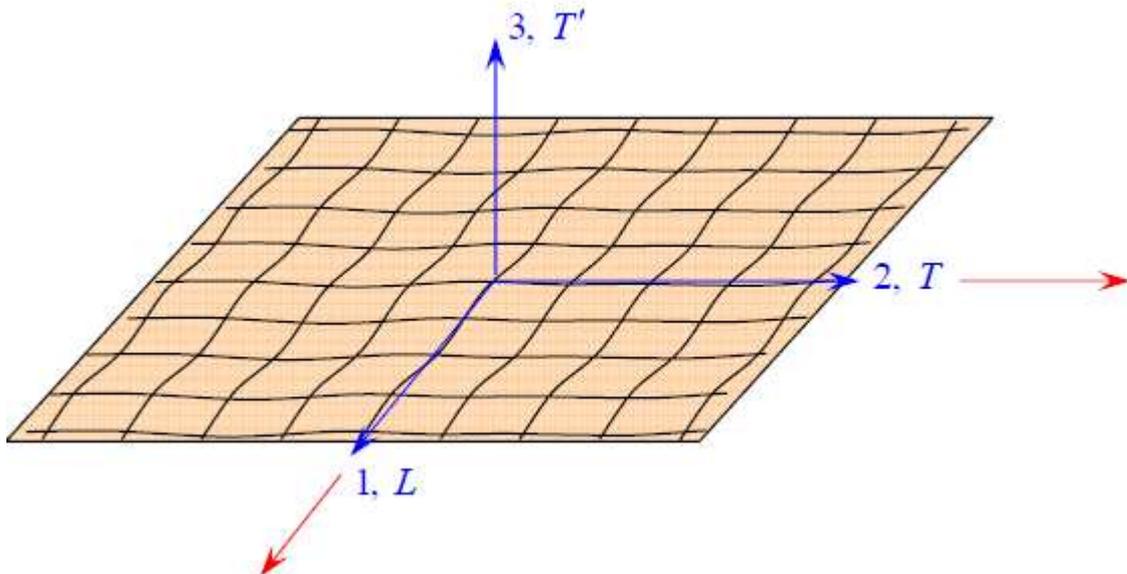


Figure 2.3. Couche d'un matériau composite orthotrope

la loi de Hooke d'une couche orthotrope est écrite de forme de la matrice suivant :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_R = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}_R \quad 2.10$$

Ou

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}_R = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_R \quad 2.11$$

9 constantes d'élasticité

#### d) Matériau unidirectionnel

Le matériau unidirectionnel est un matériau possédant un axe de symétrie, par exemple l'axe e1 (x). C'est le cas pour un ensemble de fibres unidirectionnelles dans un substrat. Par géométrie, le matériau unidirectionnel est orthotrope figure (2.4).

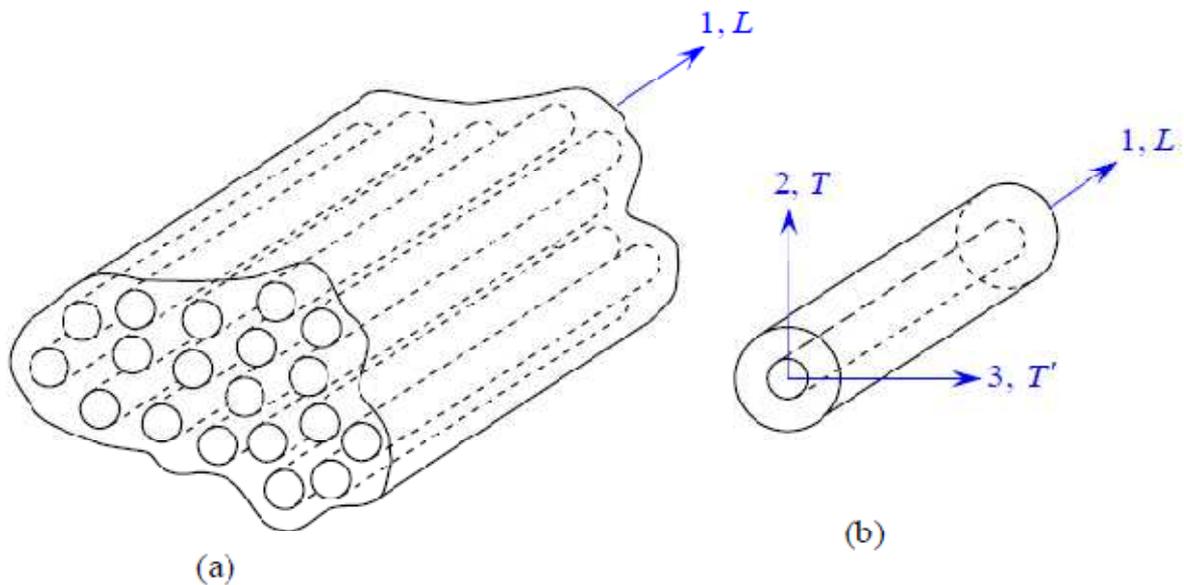


Figure 2.4. Matériau composite unidirectionnel

Il est souvent appelé orthotrope de révolution. Dans le repère d'orthotropie, la matrice s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_R = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22}-C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}_R \quad 2.12$$

Ou

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}_R = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22}-S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_R \quad 2.13$$

5 constantes d'élasticité

#### e) Matériau isotrope

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) \end{bmatrix}_R \quad 2.14$$

2 constantes d'élasticité (coefficients de Lamé ou E,  $\nu$ )

#### 2.2.4. Matrice de souplesse et de rigidité d'un composite orthotrope exprimé dans les axes orthotropie

Si les raisonnements élémentaires mentionnés ci-dessus sont étendus aux différentes sollicitations du matériau, il vient :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}_{R_{ort}} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_1 & -\nu_{13}/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{12}/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_{R_{ort}} \quad 2.15$$

Ou les directions 1(L) suivant x et 2(T) suivant y

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & \frac{-\nu_{LT}}{E_L} & \frac{-\nu_{LT'}}{E_L} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & \frac{-\nu_{TT'}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{LT'}}{E_L} & \frac{-\nu_{TT'}}{E_T} & \frac{1}{E_{T'}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{TT'}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT'}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{bmatrix} \quad 2.16$$

Les constantes de rigidités sont déduites en inversant la matrice de souplesse [1] :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23} \nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} \\ C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13} \nu_{31}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{12} &= \frac{\nu_{21} - \nu_{31} \nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{12} - \nu_{32} \nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{13} &= \frac{\nu_{31} - \nu_{21} \nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{13} - \nu_{12} \nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{23} &= \frac{\nu_{32} - \nu_{12} \nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{23} - \nu_{21} \nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{44} &= G_{23} \\ C_{55} &= G_{13} \\ C_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad 2.17$$

**Avec :**

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23} \nu_{32} - \nu_{31} \nu_{13} - 2 \nu_{21} \nu_{32} \nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$$

Dans le cas d'un matériau isotrope, les équations (2.17) se simplifient à :

$$C_{11} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad 2.18$$

$$C_{12} = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$\frac{C_{11} - C_{12}}{2} = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Il existe un lien entre les modules d'élasticité et les coefficients de Poisson :

$$\frac{E_i}{\nu_{ij}} = \frac{E_j}{\nu_{ji}} \quad 2.19$$

le comportement élastique est décrit par 9 modules indépendants :

**Ou**

$E_i$  : module d'Young dans la direction  $i$  du matériau ;

$\nu_{ij}$  : coefficient de Poisson dans le plan correspondant ;

$G_{ij}$  : module de cisaillement dans le plan correspondant ;

$E_{ij}$  : déformation relative dans la direction  $i$  ;

$\gamma_{ij}$  : glissement de cisaillement dans le plan correspondant ;

$\sigma_i$  : contrainte dans la direction  $i$  ;

$\tau_{ij}$  : contrainte de cisaillement dans le plan correspondant.

Avec 1, 2 et 3 directions de symétrie,

alors

3 modules d'Young :  $E_1, E_2, E_3$

3 coefficients de Poisson :  $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{14}$

3 modules de cisaillement :  $G_{12}, G_{13}, G_{23}$

### 2.2.5. Approche théorique pour la détermination des modules élastique d'un composite unidirectionnel

Le problème consiste à évaluer le comportement local de l'association fibre-matrice à partir des caractéristiques mécaniques et des proportions des constituants, et de le généraliser ensuite au composite. Les fibres et la matrice sont considérées comme étant des matériaux isotropes à élasticité linéaire. Leur comportement est décrit par les modules suivants :

|                                       | Pour la matrice                   | Pour le fibre                     |
|---------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| <b>Module de young</b>                | $E_m$                             | $E_f$                             |
| <b>Coefficient de Poisson</b>         | $\nu_m$                           | $\nu_f$                           |
| <b>Module de cisaillement</b>         | $G_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)}$  | $G_f = \frac{E_f}{2(1 + \nu_f)}$  |
| <b>Module de compressibilité</b>      | $k_m = \frac{E_m}{3(1 - 2\nu_m)}$ | $k_f = \frac{E_f}{3(1 - 2\nu_f)}$ |
| <b>Module de compression latérale</b> | $K_m = k_m + \frac{G_m}{3}$       | $K_f = k_f + \frac{G_f}{3}$       |

### 2.2.5.1 Comportement local décrit par la loi des mélanges

Pour déterminer les caractéristiques mécaniques d'un composite, nous étudions un assemblage de géométrie donnée de deux phases (fibre et matrice) de caractéristiques mécaniques différentes, soumis à des sollicitations simples.

#### a) Module d'élasticité longitudinal

Considérons un chargement  $F$  parallèle au plan de séparation de la fibre et de la matrice (figure 2.5). Les deux matériaux étant considérés parfaitement collés par hypothèse, la matrice (m) et la fibre (f) possèdent la même déformation longitudinale  $e_L$  que le matériau composite :

$$\epsilon_{Lm} = \epsilon_{Lf} = \epsilon_L$$

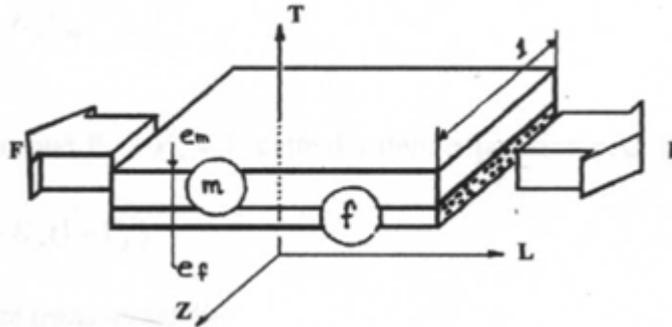


Figure 2.5. Chargement longitudinal

L'état de contraintes dans chaque matériau est un état de traction pure, et les contraintes de traction sont données par :

$$\begin{aligned} \sigma_m &= E_m \epsilon_L \text{ dans la matrice ;} \\ \text{et } \sigma_f &= E_f \epsilon_L \text{ dans la fibre.} \end{aligned}$$

La charge totale appliquée est :

$$F = \sigma_f S_f + \sigma_m S_m \quad 2.20$$

Où :  $S_f$  et  $S_m$  sont respectivement les aires de la section droite de la fibre et de la matrice.

En reportant les expressions des contraintes dans cette dernière relation nous obtenons :

$$F = (E_f S_f + E_m S_m) \epsilon_L \quad 2.21$$

La contrainte de traction dans le composite est définie par :

$$\sigma_L = F/S = E_L \epsilon_L \quad 2.22$$

En remplaçant  $F$  par son expression on obtient.

$$E_L = E_f S_f/S + E_m S_m/S \quad 2.23$$

Avec :

$E_L$  : Module d'élasticité longitudinal du composite ;

$S = S_f + S_m$  : Section droite du composite.

Pour un composite de largeur et de longueur égales à l'unité, les fractions volumiques de la fibre ( $V_f$ ), et de la matrice ( $V_m$ ) sont données par :

$$V_f = \frac{S_f \times 1}{S \times 1} = \frac{e_f}{e_f + e_m} \quad 2.24$$

$$V_m = \frac{S_m \times 1}{S \times 1} = \frac{e_m}{e_f + e_m} \quad 2.25$$

Le module d'élasticité du composite s'écrit alors :

$$E_L = E_f V_f + E_m V_m \quad 2.26$$

Finalement, en notons que  $V_f + V_m = 1$ , cette dernière expression peut s'écrire :

$$E_L = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \quad 2.27$$

### b) Module d'élasticité transversal $E_T$

Considérons à présent le même matériau que précédemment, soumis à un chargement suivant l'épaisseur du composite (figure 2.6).

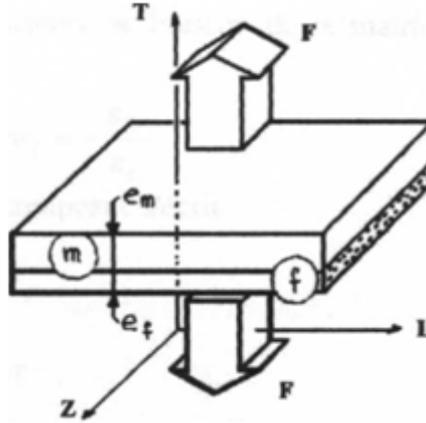


Figure 2.6. Chargement transversal

Dans ce cas les états de contraintes dans la fibre et dans la matrice sont identiques, et sont définies par la contrainte de traction dans le composite  $\sigma_T$ , tel que :

$$\sigma_m = \sigma_f = \sigma_T \quad 2.28$$

La déformation dans le composite est donné par :

$$\varepsilon_T = \frac{1}{E_T} \sigma_T = \frac{\Delta(e_m + e_f)}{e_m + e_f} = \frac{\Delta e_m}{e_m + e_f} + \frac{\Delta e_f}{e_m + e_f} = \varepsilon_{Tm} V_m + \varepsilon_{Tf} V_f \quad 2.29$$

Cette expression peut être réécrite sous la forme :

$$\frac{1}{E_T} \sigma_T = \frac{1}{E_m} \sigma_T V_m + \frac{1}{E_f} \sigma_T V_f \Rightarrow \frac{1}{E_T} = \frac{1}{E_m} V_m + \frac{1}{E_f} V_f \quad 2.30$$

Le module d'élasticité transversal a pour expression :

$$E_T = \frac{E_m E_f}{V_m E_f + V_f E_m} \quad 2.31$$

Ou encore :

$$E_T = E_m \frac{1}{(1-V_f) + \frac{E_m V_f}{E_f}} \quad 2.32$$

c) Coefficient de Poisson  $\nu_{LT}$

Le coefficient de Poisson  $\nu_{LT}$  est défini comme étant le rapport des déformations transversales - longitudinale, pour un chargement longitudinal (figure 2.5).

$$\nu_{LT} = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L} \quad 2.33$$

En remplaçant la déformation transversale ( $\varepsilon_T$ ) par son expression (2.29), nous obtenons

$$\nu_{LT} = \frac{\varepsilon_{Tm} V_m + \varepsilon_{Tf} V_f}{\varepsilon_L} \quad 2.34$$

Et en introduisant les coefficients de Poisson de la matrice et de la fibre pour la même déformation ( $\varepsilon_{Lm} = \varepsilon_{Lf} = \varepsilon_L$ ) ;

$$\nu_m = -\frac{\varepsilon_{Tm}}{\varepsilon_L} \quad \text{et} \quad \nu_f = \frac{\varepsilon_{Tf}}{\varepsilon_L} \quad 2.35$$

Le coefficient de Poisson du composite s'écrit :

$$\nu_{LT} = \nu_m (1 - \nu_f) + \nu_f V_f \quad 2.36$$

d) Module de cisaillement  $G_{LT}$

L'état de chargement donnant lieu à une déformation de cisaillement est illustré par la figure

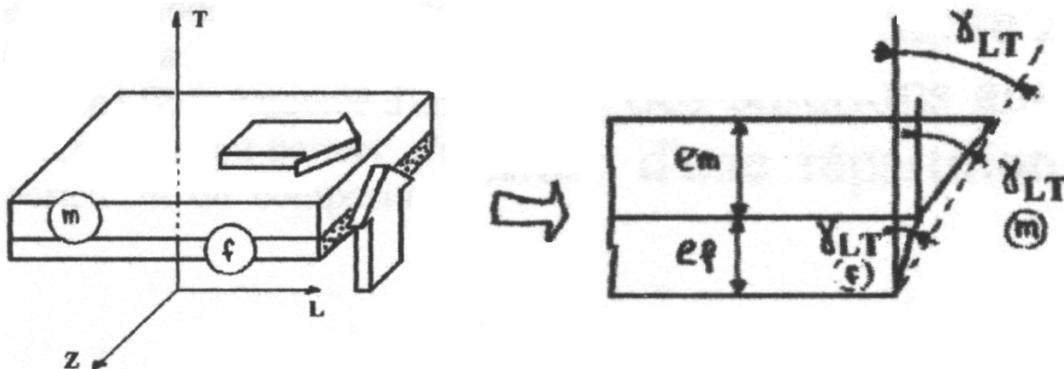


Figure 2.7. Changement donnant le cisaillement

Les contraintes de cisaillement dans la matrice et la fibre sont identiques et égales à la contrainte dans le composite :

$$\tau_{LTm} = \tau_{LTf} = \tau_{LT} \quad 2.37$$

La déformation angulaire ( $\gamma_{LT}$ ) dans un matériau élastique est liée à la contrainte de cisaillement par le module de cisaillement ( $G_{LT}$ ) selon l'expression :

$$\gamma_{LT} = \frac{2(1 + \nu_{LT})}{E_L} \tau_{LT} = \frac{\tau_{LT}}{G_{LT}}$$

D'autre part on observe sur la figure (2.7) que :

$$\gamma_{LT} \times (e_m + e_f) = \gamma_{LTm} \times e_m + \gamma_{LTf} \times e_f \quad 2.39$$

Ce qui revient à écrire :

$$\gamma_{LT} = \gamma_{LTm} V_m + \gamma_{LTf} V_f \quad 2.40$$

Ou encore :

$$\frac{\tau_{LT}}{G_{LT}} = \frac{\tau_{LTm}}{G_m} V_m + \frac{\tau_{LTf}}{G_f} V_f \quad 2.41$$

Finalement, en tenant compte de l'égalité des contraintes, le module de cisaillement du composite prend la forme :

$$G_{LT} = G_m \frac{1}{(1-V_f) + \frac{G_m V_f}{G_f}} \quad 2.42$$

### 2.2.5.2 Méthodes analytiques pour la détermination des modules d'élasticité du pli

La comparaison entre les valeurs des modules déterminées expérimentalement sur des unidirectionnels et évaluées par la loi des mélanges a montré que seules les formules (2.27) et (2.36) donnent des valeurs proches de celles obtenues expérimentalement. De plus, cette méthode ne permet pas d'évaluer le module de cisaillement  $G_{TT}$ .

Une approche plus précise consiste à développer des modèles tenant compte de la géométrie des fibres et de leur arrangement à l'intérieur de la matrice. En considérant un arrangement cylindrique (cellule élémentaire constituée d'une fibre entourée d'un cylindre de résine figure (2.8)), la résolution du problème d'élasticité correspondant permet d'aboutir à des solutions analytiques exactes [1] représentant le comportement du composite constitué d'une répartition uniforme de cette cellule.

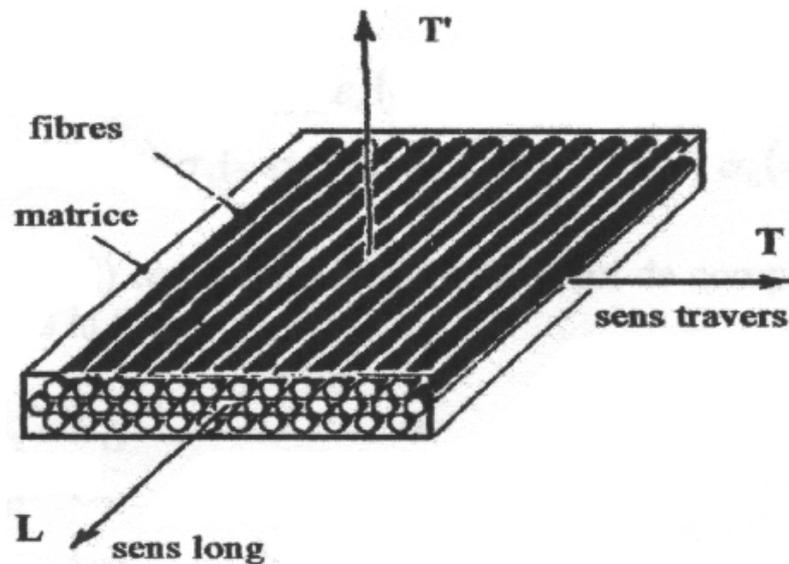


Figure 2.8. Composite unidirectionnel

Les cinq modules indépendants obtenus par cette approche sont :

a) *Module d'élasticité longitudinal*

$$E_L = E_f V_f + E_m (1 + V_f) + \frac{4V_f(1 - V_f)(\nu_f - \nu_m)^2}{\frac{V_f}{K_m} + \frac{1}{G_m} + \frac{1 - V_f}{K_f}} \quad 2.43$$

$$\approx E_f V_f + E_m (1 - V_f)$$

b) *Coefficient de Poisson  $\nu_{LT}$*

$$\nu_{LT} = \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f) + \frac{V_f(1 - V_f)(\nu_f - \nu_m) \left( \frac{1}{K_m} - \frac{1}{K_f} \right)}{\frac{V_f}{K_m} + \frac{1}{G_m} + \frac{1 - V_f}{K_f}} \quad 2.44$$

$$\approx \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f)$$

c) *Module de cisaillement  $G_{LT}$*

$$G_{LT} = G_m \frac{G_f(1 + V_f) + G_m(1 - V_f)}{G_f(1 - V_f) + G_m(1 + V_f)} \quad 2.45$$

d) *Module de compression latéral  $K_L$*

$$K_L = K_m + \frac{V_f}{\frac{1}{k_f - k_m} + \frac{(G_f - G_m)}{3} + \frac{1 - V_f}{k_m + \frac{4}{3}G_m}} \quad 2.46$$

e) *Module de cisaillement transversal  $G_{TT'}$*

$$G_{TT'} = G_m \left\{ 1 + \frac{V_f}{\frac{G_m}{G_f - G_m} + \frac{k_m + \frac{7}{3}G_m}{2k_m + \frac{8}{3}G_m} (1 - V_f)} \right\} \quad 2.47$$

Le module de Young transversal est calculé à partir des modules précédents grâce à la relation d'élasticité :

$$E_T = \frac{2}{\frac{1}{2K_L} + \frac{1}{2G_{TT'}} + 2\frac{\nu_{LT}^2}{E_L}} \quad 2.48$$

## 2.3 Détermination de l'équation constitutive du stratifié

### 2.3.1 Caractéristiques d'une couche rapportées au référentiel du stratifié

Dans le cas général, un stratifié est constitué de plusieurs couches orthotropes, homogènes ou composites, chacune d'elles pouvant être orientée différemment par rapport au référentiel du stratifié.

L'orientation d'une couche est mesurée par l'angle  $\theta$  (figure 2.9), formé par son axe principal 1 ( $\mathbf{L}$ ) avec l'axe 1' ( $x$ ) de référence. La notation ( $1',2',3'$ ) est utilisée dans les relations matricielles, tandis que la notation ( $x,y,z$ ) trouve son application pour les relations tensorielles.

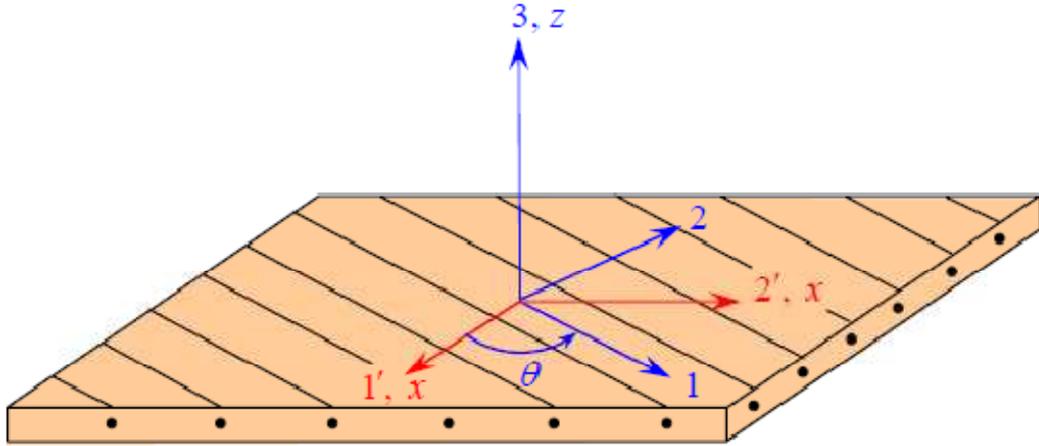


Figure 2.9. Axes principaux (1,2 ,3) d'une couche et référentiel (1',2',3') ou ( $x,y,z$ ) du stratifié

La matrice de passage du système (1,2,3) au système de référence ( $x,y,z$ ) est donnée par :

$$[\mathbf{a}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2.49$$

La relation de changement de base correspondante pour le tenseur des contraintes s'écrit :

$$[\boldsymbol{\sigma}'] = [\mathbf{a}][\boldsymbol{\sigma}][\mathbf{a}]^T \quad 2.50$$

Qui après développement et réécriture en notation matricielle prend la forme :

$$\{\boldsymbol{\sigma}'\} = [\mathbf{T}_\sigma]\{\boldsymbol{\sigma}\} \quad 2.51$$

Ou

$$T_{R \rightarrow R}^\sigma = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad 2.52$$

La relation de changement de base pour la matrice de rigidité s'écrit alors :

$$[\mathbf{C}'] = [\mathbf{T}_\sigma][\mathbf{C}][\mathbf{T}_\sigma]^T \quad 2.53$$

Quelque soit  $\theta$ , la relation entre contrainte et déformation rapportée aux axes du stratifié possède la structure suivante:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad 2.54$$

ou

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ S'_{13} & S'_{23} & S'_{33} & 0 & 0 & S'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S'_{44} & S'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S'_{45} & S'_{55} & 0 \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{36} & 0 & 0 & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} \quad 2.55$$

Cette forme met en évidence des termes de couplage traction-cisaillement dans le plan ( $C'_{16}$ ,  $C'_{26}$ ,  $C'_{36}$ ), et cisaillement-cisaillement ( $C'_{45}$ ), de nature différente du couplage induit par l'effet de Poisson.

### 2.3.2 Etat de contraintes planes et constantes de rigidité réduites

Un état de contraintes planes dans une couche est définie par le tenseur des contraintes au point ( $M$ ), exprimé dans le référentiel du stratifié par :

$$\sigma'(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 2.56$$

Il est rencontré si la longueur caractéristique dans une direction (ici la direction 3 (z)) est très faible devant les autres. Dans cette expression, le cisaillement transverse est supposé non nul; le plus souvent on le considère comme nul; alors  $\sigma_{13}=\sigma_{23}=0$ .

### La matrice de rigidité réduite

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_R = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{61} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{62} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{63} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{54} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}_R$$

Il vient donc :

$$\varepsilon_4 = 0$$

$$\varepsilon_5 = 0$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{1}{C_{33}}(C_{13}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2 + C_{63}\varepsilon_6)$$

**2.58**

Il est possible d'exprimer  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_6$  en fonction de  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_6$  :

$$\sigma_1 = \left(C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}\right)\varepsilon_1 + \left(C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}}\right)\varepsilon_2 + \left(C_{16} - \frac{C_{13}C_{36}}{C_{33}}\right)\varepsilon_6$$

$$\sigma_2 = \left(C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}}\right)\varepsilon_1 + \left(C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}}\right)\varepsilon_2 + \left(C_{26} - \frac{C_{23}C_{36}}{C_{33}}\right)\varepsilon_6$$

$$\sigma_6 = \left(C_{16} - \frac{C_{13}C_{36}}{C_{33}}\right)\varepsilon_1 + \left(C_{26} - \frac{C_{23}C_{36}}{C_{33}}\right)\varepsilon_2 + \left(C_{66} - \frac{C_{36}^2}{C_{33}}\right)\varepsilon_6$$

**2.59**

L'équation de comportement du mono pli peut donc s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_R = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}_R = Q_R \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}_R$$

Et

**2.60**

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_5 \end{pmatrix}_R = \begin{bmatrix} C_{44} & C_{45} \\ C_{45} & C_{55} \end{bmatrix}_R \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_5 \end{pmatrix}_R$$

**2.61**

La matrice symétrique  $Q_{ij}$  est appelée « matrice de rigidité réduite ». Elle représente le comportement de la couche anisotrope en contraintes planes.

Dans le cadre de l'étude des matériaux orthotropes, la matrice  $Q_{ij}$  devient dans le repère d'orthotropie :

$$Q' = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}_R \quad 2.62$$

### Détermination les module d'élasticité

Pour une couche à renfort unidirectionnel rapportée à son repère d'orthotropie, et si le composite subit une traction pure selon chacun de ses axes principaux ou un cisaillement plan dans ses axes principaux, , on montre facilement que :

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = Q_{11} - \frac{Q_{12}^2}{Q_{22}} \quad 2.63$$

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} = Q_{22} - \frac{Q_{12}^2}{Q_{11}}$$

$$v_{12} = -\frac{Q_{12}}{Q_{11}}$$

$$v_{21} = -\frac{Q_{21}}{Q_{22}}$$

$$G_{12} = \frac{\sigma_6}{\varepsilon_6} = Q_{66}$$

Et les constantes de rigidité réduites sont reliées aux modules de la couche selon les relations suivantes :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - v_{12}v_{21}} = \frac{E_1}{1 - v_{12}^2 \frac{E_1}{E_2}} \quad 2.64$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - v_{12}v_{21}} = \frac{E_2}{1 - v_{12}^2 \frac{E_2}{E_1}} = \frac{E_2}{E_1} Q_{11}$$

$$Q_{11} = \frac{v_{12}E_2}{1 - v_{12}v_{21}} = v_{12}Q_{22}$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

Les relations de changement de base pour les constantes de rigidité réduites  $Q_{ij}$  et pour les rigidités de cisaillement  $C'_{44}$ ,  $C'_{45}$  et  $C'_{55}$ , déduites des expressions (2.53) et (2.60), sont données par :

$$\begin{aligned}
Q'_{11} &= Q_{11}\cos^4\theta + Q_{22}\sin^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta \\
Q'_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})\cos^2\theta\sin^2\theta + Q_{12}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \\
Q'_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta \\
Q'_{22} &= Q_{11}\sin^4\theta + Q_{22}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta \\
Q'_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta \\
Q'_{66} &= [Q_{11} - Q_{12} - 2(Q_{12} + Q_{66})]\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta)
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
C'_{44} &= C_{44}\cos^2\theta + C_{55}\sin^2\theta \\
C'_{45} &= (C_{55} - C_{44})\sin\theta\cos\theta \\
C'_{55} &= C_{44}\sin^2\theta + C_{55}\cos^2\theta
\end{aligned} \tag{2.65b}$$

Ou :

$$C_{44} = G_{TT'}$$

$$C_{55} = G_{LT'}$$

### 2.3.3 Théorie des plaques - schémas du premier ordre

Une plaque (figure 2.10) est un système matériel délimité par deux plans parallèles, distants l'un de l'autre d'une distance  $h$ , et une surface cylindrique dont les génératrices sont perpendiculaires à ces plans. Un plan intermédiaire parallèle aux deux premiers définit le plan de référence ( $xoy$ ). L'épaisseur  $h$  mesurée dans le sens  $oz$  est petite comparativement aux deux autres dimensions ( $ox$  et  $oy$ ), ce qui justifie l'hypothèse de contrainte normale négligée ( $\sigma_{zz}=0$ ) [11].

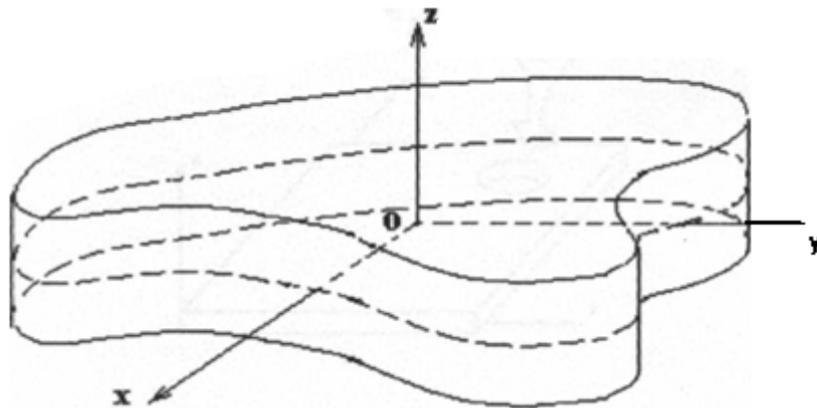


Figure 2.10. Élément de plaque

### 2.3.3.1. Développement limite des déplacements selon la variable $x_3$ [z]

Les schémas du premier ordre sont basés sur l'hypothèse de Kirchhoff qui stipule que "les sections droites restent droites après chargement". L'expression mathématique de cette hypothèse consiste à développer les déplacements de tout point  $M(x, y, z)$  de la plaque, notés  $u, v$  et  $w$ , en polynômes du premier degré en  $z$ , fonctions des déplacements d'un point de référence du plan moyen  $M_0(x, y, z)$ , notés  $u_0, v_0$  et  $w_0$ .

Dans la théorie de plaques, on ramène le comportement des points de la plaque à celui de la surface moyenne et on suppose un champ de déplacement selon la variable  $x_3$ .

Le champ des déplacements s'écrit alors :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u(x, y, 0, t) + z\varphi_x(x, y, t) + z^2\psi_x(x, y, t) + z^3\phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v(x, y, 0, t) + z\varphi_y(x, y, t) + z^2\psi_y(x, y, t) + z^3\phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w(x, y, 0, t) + z\varphi_z(x, y, t) + z^2\psi_z(x, y, t) \end{aligned} \quad 2.66$$

L'expression (2.66) est un développement en série selon  $x_3$ . Comme  $x_3$  reste faible devant les autres dimensions, on supposera qu'un schéma du premier degré est suffisant (hypothèse de Hencky-Medlin). D'autre part, on notera  $u_1(x_1, x_2, 0) = u_1^0(x_1, x_2)$ , de même pour  $u_2(x_1, x_2, 0) = u_2^0(x_1, x_2)$ ,

L'expression (2.66) devient :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, 0, t) + z\varphi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, 0, t) + z\varphi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, 0, t) \end{aligned} \quad 2.67$$

$\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0$  : Déplacements en membrane.

$w_0$  : Déplacement transversal (flèche)

$\mathbf{Q}_x, \mathbf{Q}_y$  : Rotations des sections droites respectivement dans les plans  $(x, z)$  et  $(y, z)$ .

En remarque que la conséquence de cette hypothèse est qu'une section droite reste droite (voir figure (2.11)). En revanche, dans le cadre que nous nous sommes fixé, il n'y a pas d'hypothèse sur l'angle  $\varphi$ , alors que dans la Théorie des Plaques Stratifiées, le cisaillement hors plan est négligé, si bien qu'une section normale au plan du stratifié reste normale au plan après déformation (hypothèses de Love-Kirchhoff), ce qui se traduit par les conditions :

$$\varphi_1 = -\frac{\partial u_3^0}{\partial x_1} \quad \text{et} \quad \varphi_2 = -\frac{\partial u_3^0}{\partial x_2} \quad 2.68$$

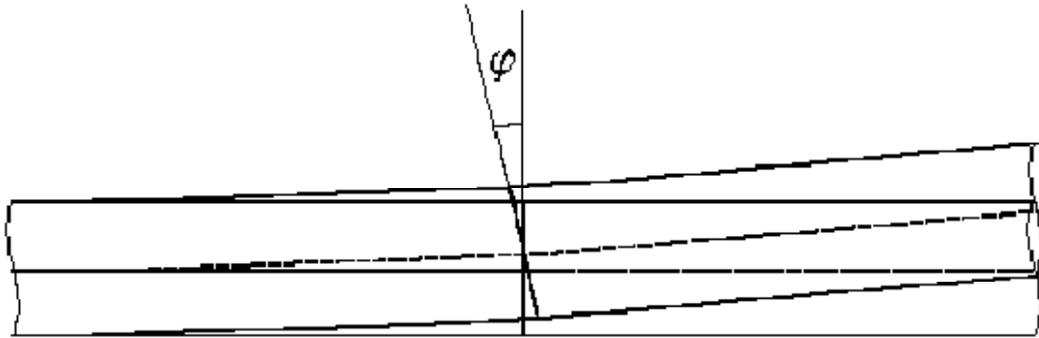


Figure 2.11. Déformation d'une section dans le cadre d'un schéma au premier degré

**2.3.3.2. Champ des déformations**

Le champ des déformations associé, déduit à partir de la définition du tenseur de la petite déformation qui s'énonce figure (2.12) :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad 2.69$$

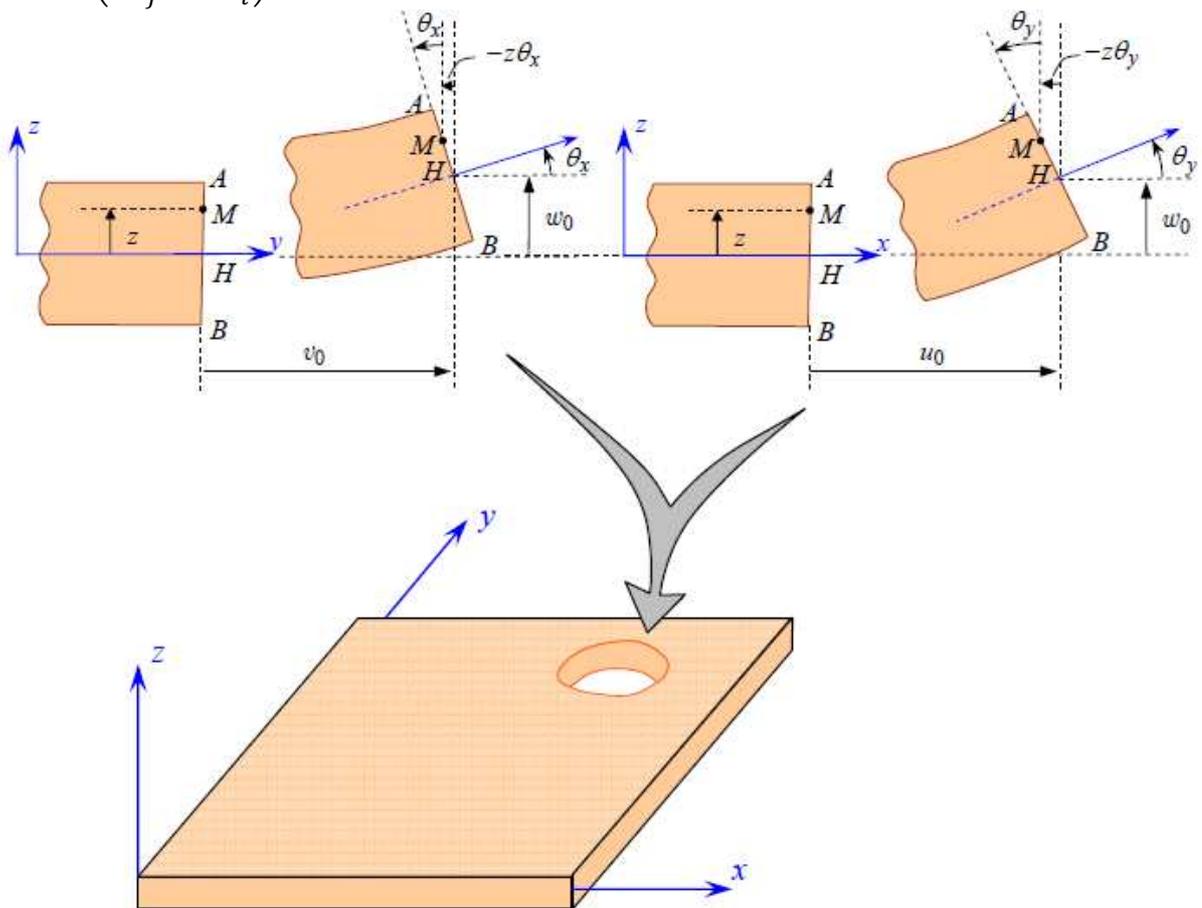


Figure 2.12. Schématisation des déformations dans le cas des théories du premier ordre

Alors :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\
 \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\
 \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\
 \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\
 \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\
 \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

Comme dans le cas des contraintes, le champ de déformations au point M d'un solide est donc un tenseur de rang 2 symétrique noté  $\varepsilon(M)$ . Il y a donc 6 grandeurs représentant les déformations [11] (3 translations et 3 rotations).

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.71}$$

En appliquant les équations (2.69) et (2.66), l'expression des déformations devient :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\
 \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

Les équations (2.71) montrent que les déformations dans le plan de la plaque sont issues de deux contributions :

**A) Une déformation « en membrane » :**

$$\varepsilon_m(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ \gamma_{12}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

**B) Une déformation « en flexion et torsion » :**

$$\varepsilon_f(M) = x_3 \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ k_{12} \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad 2.74$$

On notera que dans la théorie classique des plaques stratifiées (hypothèses de Love-Kirchhoff), les équations (2.68) et (2.74) donnent l'expression des déformations en flexion et torsion suivante :

$$\varepsilon_f(M) = x_3 \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ k_{12} \end{pmatrix} = -x_3 \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} \\ 2 \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2} \end{pmatrix} \quad 2.75$$

La déformation totale est de la forme :

$$\varepsilon_{mf}(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ \gamma_{12}^0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ k_{12} \end{pmatrix} \quad 2.76$$

### 2.3.3.3. Champ des contraintes

Dans un stratifié constitué de  $n$  couches, la relation contraintes-déformations dans la couche  $k$  rapportée au référentiel du stratifié s'écrit, en fonction de la loi (2.57), comme suit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

En considérant l'hypothèse de la théorie des plaques ( $\sigma_{zz} = \sigma_{33} = 0$ ), et en remarquant que le champ des contraintes de cisaillement transverse est découplé du champ des contraintes de membrane-flexion, ce dernier correspond à un état de contraintes planes. En introduisant les coefficients de rigidité réduite et en séparant les contraintes et les déformations de cisaillement transverse, la relation (2.77) devient :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} & 0 & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} & 0 & 0 \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q'_{44} & Q'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & Q'_{45} & Q'_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} \quad 2.78$$

Et

$$\varepsilon_{33} = -\frac{1}{C_{33}} (C_{13}\varepsilon_{11} + C_{23}\varepsilon_{22} + C_{36}\gamma_{12}) \quad 2.79$$

Ou

$$Q'_{ij} = C'_{ij} - \frac{C'_{i3}C'_{j3}}{C'_{33}} \quad , \quad i, j = 1, 2, 6 \quad 2.80$$

$$Q'_{ij} = Q'_{ji}$$

En décomposant le champ des déformations, les relations de comportement en membrane flexion s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad 2.81$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = [Q']_k \{\varepsilon_m(x, y)\} + z [Q']_k \{\mathbf{k}(x, y)\} \quad 2.82$$

Et les relations de comportement en cisaillement transverse sont données par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{44} & C'_{45} \\ C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix}_k \{\gamma_c(x, y)\} \quad 2.83$$

### 2.3.3.4. Résultantes et moments

La figure (2.13) représente la disposition des couches et leur repérage par rapport au plan moyen du stratifié. Par convention [12], les couches sont numérotées de bas en haut dans le référentiel du stratifié, chaque couche  $k$  étant limitée par deux cotes  $h_{k-1}$  et  $h_k$ , mesurées par rapport à la surface moyenne [13].

L'intégration des contraintes dans l'épaisseur du stratifié, en respect de la relation de comportement pour chaque couche (2.78) et du champ des déformations de la plaque, permet de définir les résultantes et moments à l'échelle du stratifié.

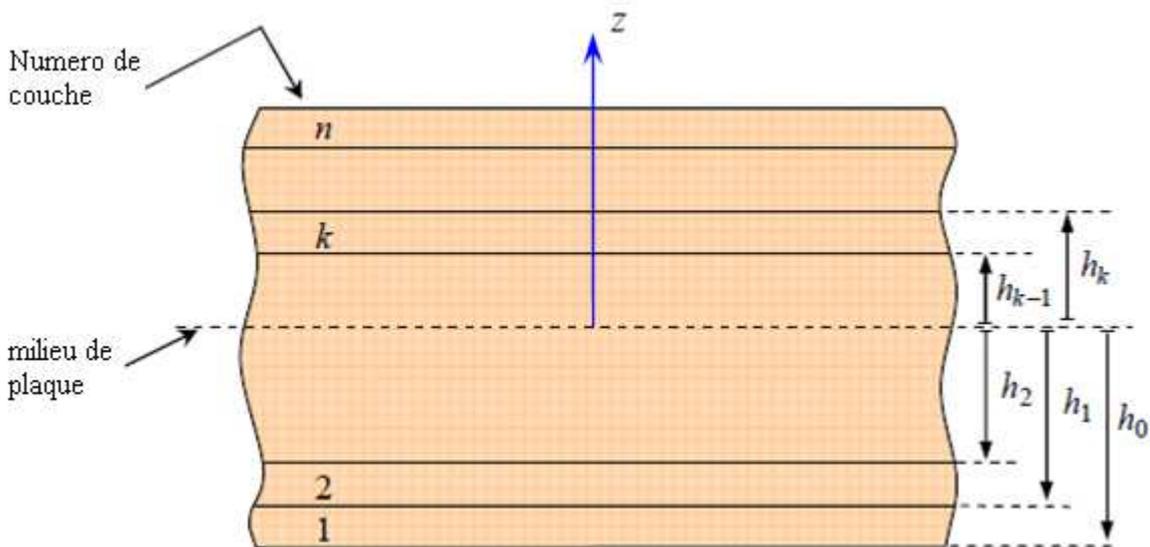


Figure 2.13. Élément de plaque stratifiée

#### a) Résultantes en membrane

Le champ des résultantes en membrane, noté  $N(x, y)$  est défini par :

$$N(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_k(M) dz \quad 2.84$$

$N_x, N_y, N_{xy}$  sont les résultantes par unité de longueur, respectivement des contraintes normales selon  $x, y$  et des contraintes de cisaillement dans le plan  $(x, y)$ , elles sont représentées sur la figure (2.14)

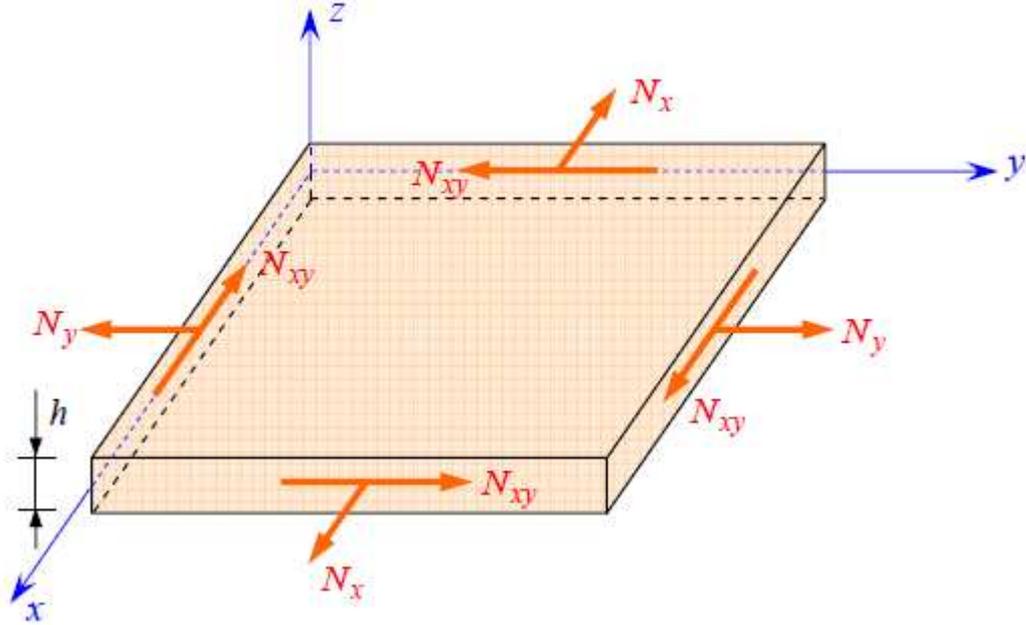


Figure 2.14. Représentation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de plaque stratifiée

Ou  $\sigma_k(M)$  matrice de contrainte en membrane pour les éléments  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\sigma_{xy}$  dans la couche  $k$ . alors, la matrice de résultantes réécrite sous la forme :

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad 2.85$$

En reportant (2.82) dans cette dernière expression, les résultantes en membrane s'écrivent :

$$\begin{aligned} N(x, y) &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} ([Q']_k \{\varepsilon_m(x, y)\} + z[Q']_k \{k(x, y)\}) dz \quad 2.86 \\ &= \sum_{k=1}^n \{[Q']_k \{\varepsilon_m(x, y)\}\} \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz + [Q']_k \{k(x, y)\} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \\ &= \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) [Q']_k [\varepsilon_m] + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h_k^2 + h_{k-1}^2) [Q']_k [K(x, y)] \end{aligned}$$

Soit :

$$\{N(x, y)\} = [A] \{\varepsilon_m(x, y)\} + [B] \{k(x, y)\} \quad 2.87$$

Avec :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1})(Q'_{ij})_k \quad 2.88$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2)(Q'_{ij})_k \quad 2.89$$

### b) Résultantes en cisaillement

De la même manière, on définit les résultantes en cisaillement, par unité de longueur, comme suit :

$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} dz \quad 2.90$$

Ces résultantes sont schématisées sur la figure (2.15)

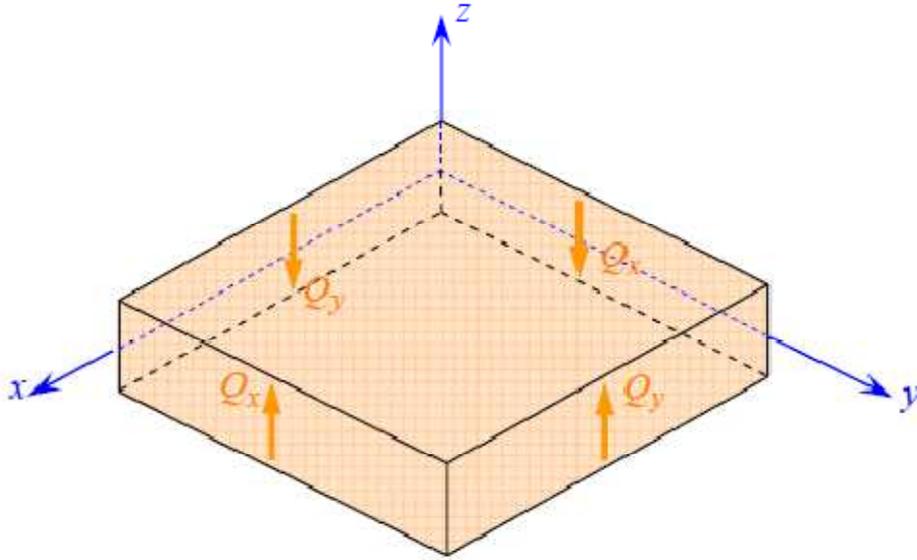


Figure 2.15. Représentation des résultantes en cisaillement

En introduisant la relation (2.83) dans l'expression (2.90), les résultantes en cisaillement s'écrivent :

$$\begin{aligned} \{Q(x, y)\} = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} C'_{44} & C'_{45} \\ C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix}_k \{\gamma_c(x, y)\} dz & 2.91 \\ &= \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} C'_{44} & C'_{45} \\ C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \\ &= \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) \begin{bmatrix} C'_{44} & C'_{45} \\ C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Soit :

$$\{Q(x, y)\} = \begin{bmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \quad 2.92$$

Avec :

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (C'_{ij}) \quad i, j = 4, 5 \quad 2.93$$

Pour tenir compte de l'état de déformation réel (gauchissement des sections droites), les résultantes de cisaillement sont modifiées en remplaçant les coefficients  $F_{ij}$  par de nouveaux coefficients  $H_{ij}$  [1], tels que :

$$F_{ij} = k_{ij} H_{ij}$$

Où les paramètres  $k_{ij}$  sont des facteurs de correction en cisaillement, à déterminer. Les résultantes de cisaillement sont alors données par :

$$\{Q(x, y)\} = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{44} & H_{45} \\ H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \quad 2.94$$

### c) Moments de flexion-torsion

Les contraintes de traction et de cisaillement exercées sur un élément de stratifié génèrent des moments résultants de flexion et de torsion, définis par unité de longueur selon :

$$M_f(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad 2.95$$

$M_x$  et  $M_y$  sont les moments de flexion et  $M_{xy}$  le moment de torsion. La figure (2.16) illustre ce cas.

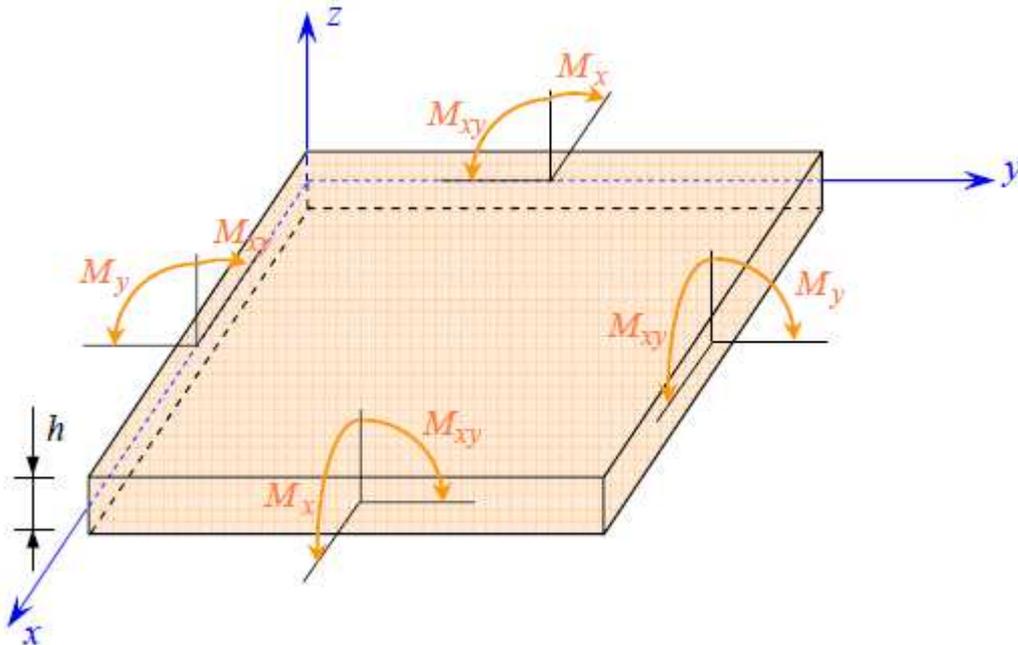


Figure 2.16. Représentation des moments de flexion et de torsion

En remplaçant les contraintes dans le plan par leur expression (2.82), les moments résultants s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \{\mathbf{M}_f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \mathbf{z}([\mathbf{Q}']_k \{\boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} + \mathbf{z}[\mathbf{Q}']_k \{\mathbf{k}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}) d\mathbf{z} \\
 &= \sum_{k=1}^n \{[\mathbf{Q}']_k \{\boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}\} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \mathbf{z} d\mathbf{z} + \sum_{k=1}^n [\mathbf{Q}']_k \{\mathbf{k}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \mathbf{z}^2 d\mathbf{z} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) [\mathbf{Q}']_k [\boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} (h_k^3 + h_{k-1}^3) [\mathbf{Q}']_k [\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y})]
 \end{aligned}$$

Soit :

$$\{\mathbf{M}_f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} = [\mathbf{B}]\{\boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} + [\mathbf{D}]\{\mathbf{k}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} \quad 2.96$$

Avec :

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) (Q'_{ij})_k \quad 2.97$$

### 2.3.3.5 Équation constitutive

En regroupant les expressions (2.86), (2.94) et (2.96), nous obtenons une équation qui relie les efforts et les moments résultants aux déformations et courbures du plan moyen du stratifié. Cette équation décrit le comportement global du stratifié, elle est appelée équation constitutive et prend la forme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{11} & B_{11} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{11} & B_{11} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{11} & B_{11} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \quad 2.98$$

Avec :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (Q'_{ij})_k = \sum_{k=1}^n Q_{ij}^k e^k \quad 2.99$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) (Q'_{ij})_k = \sum_{k=1}^n Q_{ij}^k e^k z^k$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) (Q'_{ij})_k = \sum_{k=1}^n Q_{ij}^k \left[ e^k (z_k^2 + \frac{z_k^3}{12}) \right]$$

Et

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1})(C'_{ij})_k = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k e^k \quad \text{pour } i, j = 4, 5$$

Ou

$\mathbf{A}_{ij}$  : est la matrice de rigidité en membrane ;

$\mathbf{B}_{ij}$  : est la matrice de couplage membrane-flexion-torsion.

$\mathbf{D}_{ij}$  : est la matrice de rigidité en flexion-torsion ;

$\mathbf{F}_{ij}$  : est la matrice de rigidité en cisaillement transverse ;

Ce couplage est nul pour une stratification symétrique. Mais même dans ce cas, ils subsistent d'autres niveaux de couplage qui font la spécificité du comportement des stratifiés. Il s'agit du

- Couplage traction-cisaillement induit par les termes  $A_{16}$  et  $A_{26}$  ;
- Couplage flexion-torsion induit par les termes  $D_{16}$  et  $D_{26}$  ;
- Couplage cisaillement-cisaillement induit par le terme  $F_{45}$

## 2.4 Formulation du problème général de dynamique des stratifiés

### 2.4.1 Relations fondamentales des plaques dans un schéma du premier ordre

Les relations fondamentales ou équations d'équilibre d'un solide élastique sont données par la forme élémentaire :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho a_i \quad i, j = 1, 2, 3 \quad 2.100$$

Si l'on pose que les efforts de volume exercés sur un solide (champ de gravité, le champ magnétique...) sont  $f_x$ ,  $f_y$  et  $f_z$  et si le repère choisi est galiléen, la Relation Fondamentale de la Dynamique s'écrit localement suivant les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz} + f_x &= \rho a_x \\ \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yz} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} + f_y &= \rho a_y \end{aligned} \quad 2.101$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yz} + f_z = \rho a_z$$

Ou

$f_x$ ,  $f_y$  et  $f_z$  : sont les forces volumiques appliqué au point M.

$a_x$ ,  $a_y$  et  $a_z$  : sont les composantes d'un vecteur d'accélération au point M.

$\rho$  : la masse volumique .

L'expression de l'accélération écrire

$$a_x = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad 2.102$$

$$a_y = \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}$$

$$a_z = \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}$$

Dans le cas des plaques multicouches, l'intégration de ces équations suivant l'épaisseur de la plaque permet d'obtenir les relations d'équilibres relatives aux résultantes et moments [13].

#### 2.4.1.1 Equilibre par rapport aux résultantes en membrane

La première équation d'équilibre, exprimée dans le référentiel du stratifié ( $i = x$ ), correspond à l'équilibre des efforts en membrane dans la direction  $x$  et s'écrit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} f_x dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho a_x dz \quad 2.103$$

La continuité des contraintes dans chaque couche  $k$ , et leur discontinuité d'une couche à l'autre conduisent à écrire :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\partial \sigma_{xx}^k}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xx}^k dz = \frac{\partial N_x}{\partial x} \quad 2.104$$

De même pour la contrainte de cisaillement plan  $\sigma_{xy}$  :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz = \frac{\partial N_y}{\partial y} \quad 2.104$$

Ainsi que pour la contrainte de cisaillement transversale  $\sigma_{xz}$  :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\partial \sigma_{xz}^k}{\partial z} dz = \sigma_{xz} \left( \frac{h}{2} \right) - \sigma_{xz} \left( -\frac{h}{2} \right)$$

Où  $\sigma_{xz} \left( \frac{h}{2} \right)$  et  $\sigma_{xz} \left( -\frac{h}{2} \right)$  sont les contraintes de cisaillement extérieures exercées respectivement sur les faces supérieure et inférieure de la plaque, notées :

$$\tau_{1x} = \sigma_{xz} \left( \frac{h}{2} \right) \quad \text{et} \quad \tau_{2x} = \sigma_{xz} \left( -\frac{h}{2} \right) \quad 2.105$$

L'intégrale de la composante suivant  $x$  de la force de volume se note :

$$\int_{-h/2}^{h/2} f_x dz = F_x \quad 2.106$$

L'intégration du second terme de l'équation (2.103), compte tenu de la forme du champ des déplacements (2.67) nous permet d'écrire :

$$2.107$$

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \rho a_x dz &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho(x, y, z) \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \right) dz \\ &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz + \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho z dz \end{aligned}$$

Finalement en posant :

$$(\rho_s, R) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(\mathbf{1}, z) dz \quad 2.108$$

L'équation d'équilibre en membrane, dans la direction x et de même pour la direction y dont l'équation d'équilibre est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} &= \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} &= \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \end{aligned} \quad 2.109$$

Ou

$$\begin{aligned} \tau_{1x} &= \sigma_{xy} \left( \frac{h}{2} \right), \quad \tau_{2x} = \sigma_{xz} \left( -\frac{h}{2} \right) \\ \tau_{1y} &= \sigma_{yz} \left( \frac{h}{2} \right), \quad \tau_{2y} = \sigma_{yz} \left( -\frac{h}{2} \right) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \rho_s &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k dz = \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k - h_{k-1}) \\ \rho_s &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \end{aligned} \quad 2.110$$

#### 2.4.4.2. Équilibre par rapport aux résultantes de cisaillement

La dernière relation d'équilibre pour (i = z) s'écrit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} f_z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho a_z dz \quad 2.111$$

La même démarche précédente conduit à

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dz = \frac{\partial Q_x}{\partial x} \quad 2.112$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} dz = \frac{\partial Q_y}{\partial y} \quad 2.113$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz = \sigma_{zz} \left( \frac{h}{2} \right) - \sigma_{zz} \left( -\frac{h}{2} \right) = q(x, y) = q \quad 2.114$$

Où  $q$  est la différence entre les pressions exercées sur les faces de la plaque.

La relation d'équilibre devient alors

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + F_z = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad 2.115$$

Avec :

$$F_x, F_y, F_z = \int_{-h/2}^{h/2} (f_x, f_y, f_z) dz \quad 2.116$$

#### 2.4.1.3 équilibres par rapport aux moments

L'expression de l'équilibre des moments, pour un élément de plaque, s'obtient en multipliant les deux premières équations d'équilibre (2.100) par  $z$  et en les intégrant dans l'épaisseur. L'équilibre des moments le long de la direction  $X$  s'exprime selon l'équation :

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz + \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz + \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} z f_x dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z a_x dz \quad 2.117$$

Les deux premiers termes s'écrivent :

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz = \frac{\partial M_x}{\partial x} \quad 2.118$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad 2.119$$

L'intégration par parties du troisième terme aboutit à

$$2.120$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = [z \sigma_{xz}]_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz = \frac{h}{2} \sigma_{xz} \left( \frac{h}{2} \right) + \frac{h}{2} \sigma_{xz} \left( -\frac{h}{2} \right) - Q_x$$

$$= \frac{h}{2} (\tau_{1x} - \tau_{2x}) - Q_x$$

Finalemnt en introduisant le moment d'inertie par rapport au plan moyen ( $xoy$ ) de l'élément de plaque unitaire situé au point  $(x, y)$  :

$$R, I_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} (z, z^2) \rho dz \quad 2.121$$

Avec :

$$I_{xy} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad 2.122$$

En en posant :

$$P_x, P_y = \int_{-h/2}^{h/2} (z f_x, z f_y) dz \quad 2.123$$

L'équilibre des moments le long de la direction  $x$  s'écrit :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2} (\tau_{1x} - \tau_{2x}) + P_x - Q_x = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad 2.124$$

De la même manière, nous obtenons l'équation d'équilibre des moments le long de la direction  $y$  :

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2} (\tau_{1y} - \tau_{2y}) + P_y - Q_y = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \quad 2.125$$

Les relations (2.109), (2.115), (2.124), et (2.125) constituent les équations d'équilibre ou équations du mouvement dans le cas de la théorie classique des plaques. Elles s'appliquent aussi bien à des plaques homogènes qu'à des stratifiés [1].

Finalemnt en obtient les équations d'équilibre suivant :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + F_z = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2} (\tau_{1x} - \tau_{2x}) + P_x - Q_x = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2} (\tau_{1y} - \tau_{2y}) + P_y - Q_y = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}$$

2.126

La combinaison des trois dernières relations d'équilibre permet d'écrire une nouvelle équation du mouvement indépendante des résultantes de cisaillement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q \\ = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + R \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) + I_{xy} \left( \frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial y \partial t^2} \right) \end{aligned} \quad 2.127$$

#### 2.4.2 Equations du mouvement du stratifié

Les équations du mouvement du stratifié sont obtenues en reportant les expressions des résultantes et des moments données par l'équation constitutive (2.70) dans les relations fondamentales des plaques. Dans le cas où les faces du stratifié sont libres de toutes contraintes et les forces de volume sont nulles, les équations du mouvement du stratifié sollicité transversalement par une charge  $q$  sont données par :

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \\ + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} \\ + B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} \\ = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \end{aligned} \quad 2.128$$

$$\begin{aligned}
& A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \\
& + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} \\
& + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} \\
& = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2.129}$$

$$\begin{aligned}
& F_{55} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + F_{45} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\
& + F_{44} \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2.130}$$

$$\begin{aligned}
& B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \\
& + B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} \\
& + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} \\
& - F_{55} \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - F_{45} \left( \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\
& = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2.131}$$

$$\begin{aligned}
& B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \\
& + B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} \\
& + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - F_{45} \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\
& - F_{44} \left( \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2.132}$$

## 2.5 Expression des conditions aux limites

Les conditions imposées aux frontières d'une structure permettent d'aboutir à des solutions uniques des équations du mouvement (2.128) à (2.132).

La figure (2.17) représente un élément de frontière repéré au point P ( $x, y, 0$ ) par le système d'axes  $n$ , normale extérieure,  $t$  la tangente dans le plan moyen et  $k = z$ . La déformée au point P du stratifié est caractérisée par le déplacement de ce point exprimé dans la base  $(\vec{e}_n, \vec{e}_t, \vec{e}_k)$  par ses composantes  $u_{0n}(x, y)$ ,  $v_{0n}(x, y)$ ,  $w_{0n}(x, y)$ , et par l'orientation de la déformée définie par  $\frac{\partial w_0}{\partial n}$ .

Les efforts exercés au point P sont les résultantes en membrane  $N_n$ ,  $N_{nt}$ , en cisaillement  $Q_n$ , les moments de flexion  $M_n$ , et de torsion  $M_{nt}$ . Les conditions imposées portent sur l'une des grandeurs de chacune des paires suivantes :

$$u_{0n}, N_n; \quad u_{0t}, N_t; \quad \frac{\partial w_0}{\partial n}, M_n; \quad w_0, \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} + Q_n \quad 2.133$$

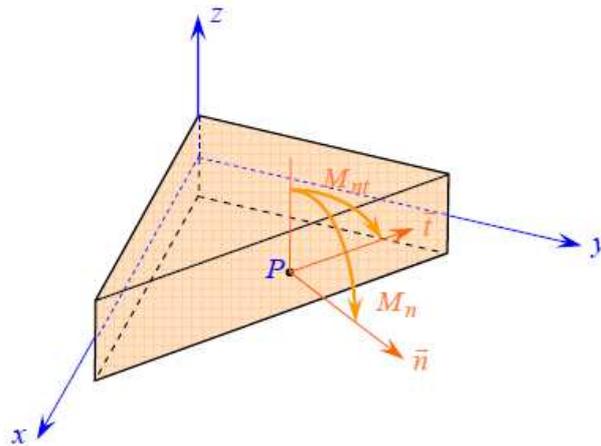


Figure 2.17 Elément de frontière de la plaque et repère associé

### 2.5.1 Appui simple

La figure (2.18) représente la condition d'appui simple. L'expression de cette condition est donnée par :

$$w_0 = 0, \quad M_n = 0, \quad N_n = 0 \quad N_{nt} = 0 \quad 2.134$$

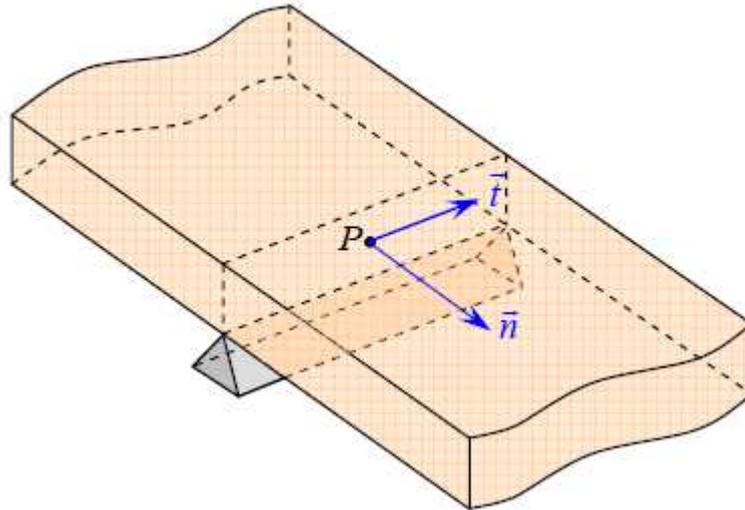


Figure 2.18 Schématisation d'un appui simple

### 2.5.2 Encastrement

En considérant la figure (2.19), la condition de bord encasté peut s'exprimer selon

$$w_0 = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial n} = 0, \quad u_{0n} = 0 \quad u_{0t} = 0 \quad 2.135$$

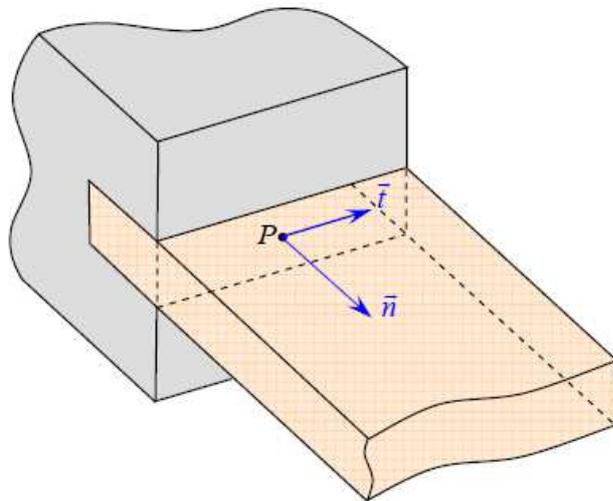


Figure 2.19 Représentation d'un encastrement

### 2.5.3 Condition de bord libre

Un bord libre est caractérisé par la nullité de tous les efforts et moments :

$$N_n = N_{nt} = Q_n = M_n = M_{nt} \frac{\partial w_0}{\partial n} = 0 \quad 2.135$$

L'équilibre des moments de torsion sur ce bord (figure 2.20) s'exprime sous la forme :

$$2.136$$

$$-M_{nt} + M_{nt} + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} dt + Q_n dt = 0$$

Où  $Q_n dt$  : est le moment résultant dû à l'effort de cisaillement. La résultante de cisaillement est donc reliée au moment de torsion par :

2.137

$$\frac{\partial M_{nt}}{\partial t} + Q_n = 0$$

Qui est la condition de frontière de Kirchhoff. Elle exprime la contribution du moment de torsion sur le bord à l'effort tranchant total exercé sur ce dernier [7]. La condition de bord libre se résume dans ce cas à :

$$N_n = 0 ; \quad N_{nt} = 0 ; \quad M_n = 0 ; \quad \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} + Q_n = 0 \quad 2.138$$

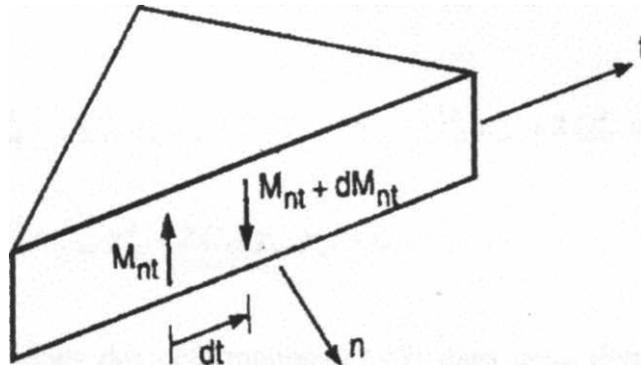


Figure 2.20. Variation du moment de torsion le long d'un bord

## 2.6 Formulation énergétique de la théorie des stratifiés

La résolution du problème général de dynamique des stratifiés consiste à déterminer les trois déplacements  $u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$ , et les deux rotations  $Q_x$  et  $Q_y$ , satisfaisant simultanément les équations du mouvement (2.128) à (2.132) et les conditions aux limites imposées sur la frontière.

L'utilisation d'une approche variationnelle permet de développer des méthodes de résolution approchées. Ces approches sont basées sur le calcul des énergies de la structure, énergie de déformation, énergie cinétique, travail des efforts extérieurs et énergie dissipée [7].

### 2.6.1 Energie de déformation

Pour un milieu élastique, l'énergie de déformation élémentaire s'exprime par :

2.139

$$dU_d = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv$$

L'intégration de cette relation sur le volume d'un solide permet d'obtenir l'expression de l'énergie de déformation totale du solide élastique :

$$U_d = \frac{1}{2} \iiint \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv \quad 2.140$$

Ou sous forme explicite :

$$U_d = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz} + \sigma_{xz} \varepsilon_{xz} + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy}) dx dy dz \quad 2.141$$

En tenant compte de l'hypothèse de contraintes planes ( $\sigma_{zz} = 0$ ), et des relations contraintes déformations pour chaque couche k (2.78), l'énergie de déformation totale d'un stratifié peut se mettre sous la forme :

$$U_d = \frac{1}{2} \iiint (Q_{11}^k \varepsilon_{xx}^2 + Q_{22}^k \varepsilon_{yy}^2 + Q_{66}^k \gamma_{xy}^2 + 2Q_{12}^k \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + 2Q_{16}^k \varepsilon_{xx} \gamma_{xy} + 2Q_{26}^k \varepsilon_{yy} \gamma_{xy}) dx dy dz \quad 2.142$$

En reportant les expressions des déformations (2.72) dans cette dernière expression et en intégrant dans l'épaisseur, nous obtenons l'expression de l'énergie de déformation totale d'un stratifié en fonction des déplacements et des constantes de rigidité de l'équation constitutive.

$$U_d = \frac{1}{2} \iint \left[ A_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{22} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + A_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy + \frac{1}{2} \iint \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \left( D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad 2.142$$

### 2.6.2 Énergie cinétique

L'énergie cinétique d'un volume élémentaire est donnée par :

$$dE_c = \frac{1}{2} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} dv \quad 2.143$$

Ou  $u_i$  est le vecteur déplacement de composantes :  $u, v, w$ .

l'énergie cinétique totale d'un solide s'exprime donc selon l'intégrale :

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint \rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz \quad 2.144$$

En remplaçant chaque composante du vecteur déplacement par son expression (2.67), et en intégrant dans l'épaisseur, l'énergie cinétique du stratifié, dans le cas d'un schéma du premier ordre, s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint \rho \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_0}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz \quad 2.145$$

Ou :

$$R, I_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} (z, z^2) \rho dz \quad 2.146$$

$$\rho_s = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k dz = \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k - h_{k-1})$$

Avec :

$\rho_s$  : Masse surfacique du stratifié au point (X,Y) ;

$I_{xy}$  : Moment d'inertie par rapport au plan (XOY) de l'élément unitaire de plaque situé au point (X, y).

### 3.1 Généralités sur la résolution des problèmes de vibrations des structures

L'étude des vibrations d'une structure a pour objectif de déterminer son comportement aux chargements dynamiques, dans le but de comprendre et de contrôler les problèmes typiques liés aux mouvements vibratoires (fatigue, résonance, bruit...). La maîtrise du problème inverse [14] permet de développer des techniques efficaces et rapides de caractérisation élastique ou viscoélastique, de contrôle de qualité, d'inspection et diagnostic des structures, basées sur les mesures des vibrations. Dans les deux cas, la première étape consiste à évaluer la réponse de la structure en fonction de tous les paramètres influant sur cette réponse. Selon les hypothèses retenues, la formulation permet de tenir compte du comportement du matériau, des défauts et des endommagements, de la nature du chargement et éventuellement de l'amortissement externe et de l'effet du milieu, en exprimant la relation entre ces paramètres et les inconnues du problème, champ des contraintes (approche contraintes) ou des déplacements (approche déplacements), sous forme d'équations aux dérivées partielles. La complexité de ces équations, conjuguée à la géométrie de la structure et aux conditions aux limites, ne permet pas en général d'aboutir à une solution exacte, et seules les méthodes d'intégration directe permettent d'obtenir des solutions numériques [7]. La modélisation apporte une simplification du problème [8] en introduisant des approximations des champs inconnus, compatibles avec la géométrie et les conditions aux limites. Pour une approche déplacement, la modélisation peut être discrète (masses concentrées), analytique (déplacements généralisés) ou par éléments finis. Elle permet, dans le domaine des vibrations linéaires, la résolution du problème par superposition modale (ou intégration modale). Cette méthode consiste à décomposer la réponse dans une base formée par les modes propres de la structure appelée base modale. Chaque composante  $m$  représente la participation du mode  $m$  à la réponse globale, solution de l'équation de l'oscillateur à 1 degré de liberté découplée des autres modes. Le comportement dynamique de la structure sera alors défini par ses caractéristiques modales: fréquences et déformées propres et amortissements modaux. Ces caractéristiques sont obtenues en résolvant le problème aux valeurs et vecteurs propres correspondant aux vibrations libres de la structure.

### 3.2 Fréquences et déformées propres des structures composites

L'étude la plus détaillée qui puisse être menée sur les vibrations des structures composites repose sur la théorie de l'élasticité tridimensionnelle. Dans ce cadre Chen et Lue [15] reportent une solution analytique exacte pour les vibrations libres d'une plaque stratifiée orthotrope, rectangulaire, simplement appuyée sur ses quatre cotés et proposent une résolution semi analytique, basée sur la méthode de quadrature différentielle, pour le même type de plaques ayant deux bords opposés en appui simple. Hormis ces cas, une telle étude nécessite le recours à une modélisation par éléments finis 3D . Toutefois, les types de chargements auxquels sont généralement destinés les stratifiés (membrane, flexion) font que les théories des plaques constituent des approximations suffisantes du comportement des plaques et coques stratifiées. Les théories d'ordre supérieur tendant à modéliser la déformation réelle des sections droites (gauchissement) permettent une analyse précise des effets de cette déformation sur les

fréquences et amortissements modaux, effets qui sont majorés dans le cas des structures épaisses (stratifiés épais). Khatri et Asnani [16] ont associé la puissance de la méthode variationnelle pour la mise en équation à un traitement individuel des couches pour étudier les vibrations d'une coque stratifiée conique en appui simple. Les équations du mouvement développées dans une approche viscoélastique (principe de correspondance) et tenant compte des inerties de translation et de rotation sont résolues par la méthode de Galerkin pour obtenir les modes propres et les amortissements. Koo et Lee [17] proposent, une modélisation éléments finis basée sur une distribution linéaire des déplacements plans amortissements de plaques symétriques rectangulaires simplement appuyées. Qian et al [18] ont développé un élément finis plaque spécifique avec une distribution cubique des déplacements plans pour résoudre le problème d'identification (problème inverse) à partir des vibrations de flexion, et pour l'étude de sensibilité, de plaques rectangulaires complètement libre, en stratifiés unidirectionnels ou croisés. Cependant, la méthode des éléments finis est difficile à mettre en œuvre. Pour les problèmes d'optimisation, d'identification ou pour les études de sensibilité, les approches analytiques sont mieux adaptées. Wang [19] utilise la méthode Rayleigh-Ritz basée sur les fonctions B-spline dans le contexte de la théorie du premier ordre pour déterminer les fréquences et déformées propres de plaques en stratifiés quelconques en forme de losange. Hufenbach et al [20] utilisent la méthode de Rayleigh-Ritz pour résoudre le problème des vibrations d'un tube stratifié symétrique, cylindrique, en appui simple. Le déplacement transversal est modélisé par la fonction caractéristique de la poutre appuyée-appuyée dans le cadre de la théorie de Timoshenko. Angoulvant [21] a appliqué la méthode de Rayleigh-Ritz à 36 termes, aux plaques symétriques rectangulaires, basées sur la théorie classique des stratifiés, et a comparé deux types d'approximations : les fonctions poutres et les fonctions polynomiales pour différentes combinaisons de bords encastres ou libres. Il conclut que les fonctions poutres donnent de meilleurs résultats. Ayorinde et Yu [22] ont optimisé la méthode, dans le cas des plaques épaisses, sur la base d'une approximation à trois modes des déplacements et rotations par les fonctions poutres en formulation de Timoshenko. Cheung et Zhou [23] ont développé des fonctions poutres avec appuis intermédiaires pour modéliser des plaques symétriques, supportées en un ou plusieurs points à l'intérieur de leurs domaines, par la méthode de Rayleigh-Ritz. Anlas et Goker [24] ont utilisé des polynômes orthogonaux comme fonctions d'approximation avec transformation de base pour décrire les vibrations libres de plaques symétriques en forme de losange simplement appuyées ou complètement encastres. Nallim et al [25] généralise cette approche pour les plaques quadrilatérales de formes quelconques, à stratification symétriques pour différentes conditions aux limites.

L'analyse de ces différents travaux met en évidence quatre niveaux de difficulté abordés : la formulation (élasticité 3D, théories des plaques), géométrie et conditions aux limites (plaque rectangulaires ou non, coques de révolution), type de stratification (orthotrope, symétrique ou quelconque) et méthodes de résolution (analytique exacte ou approchée, éléments finis). Partant du fait qu'en règle générale la conception des matériaux stratifiés fait appel à des architectures symétriques [10], et que les épaisseurs réalisées permettent souvent d'approcher le problème avec la théorie classique des stratifiés [26], notre travail consiste à déterminer les fréquences et

déformées propres non amorties de plaques symétriques minces rectangulaires, en balayant les différentes combinaisons possibles de conditions aux limites standards sur les bords. Le seul cas qui se prête à une résolution analytique exacte est présenté (plaque orthotrope simplement appuyée sur ses quatre cotés) et sa solution est exposée. Pour tous les autres cas, les solutions sont déterminées par la méthode de Rayleigh-Ritz en utilisant les fonctions poutres comme fonctions d'approximation.

### 3.3 Vibrations de flexion des plaques minces symétriques

#### 3.3.1 Equation du mouvement

Dans le cadre de la théorie classique des stratifiés, les déformations de cisaillement transverse sont négligées :

$$\gamma_{xz} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0 \quad 3.1$$

En reportant cette égalité dans les relations (2.72) nous obtenons :

$$\varphi_x(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \quad 3.2$$

$$\varphi_y(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$$

Pour un stratifié symétrique, et plaque orthotrope les termes de couplage membrane-flexion-torsion (2.99), ainsi que le terme intégral  $\mathbf{R}$  (2.108), sont nuls :

$$B_{ij}=0 \quad \text{et} \quad R=0 \quad \text{et} \quad D_{12}=D_{26}=0$$

Dans ces conditions, et d'après les équations du mouvement (2.128) à (2.132), les déplacements du stratifié dans le plan sont découplés du déplacement transversal. Les résultantes en cisaillement étant nulles par hypothèse (3.1), le déplacement transversal (ou de flexion) est complètement décrit par l'équation du mouvement (2.127) qui en considérant l'expression des moments (3.3a) et des courbures (3.3b), prend la forme de l'expression (3.7).

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad 3.3a$$

$$k_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}(x, y, t), \quad k_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}(x, y, t), \quad k_{xy} = -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}(x, y, t) \quad 3.3b$$

Peut être écrire équation a inverse :

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^{-1} & D_{12}^{-1} & D_{16}^{-1} \\ D_{12}^{-1} & D_{22}^{-1} & D_{26}^{-1} \\ D_{16}^{-1} & D_{26}^{-1} & D_{66}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} \quad 3.4$$

Ou  $D_{ij}^{-1}$  la matrice inverse de  $[D_{ij}]$

$$\begin{aligned} D_{11}^{-1} &= \frac{1}{\Delta} (D_{22}D_{66} - D_{26}^2), & D_{12}^{-1} &= \frac{1}{\Delta} (D_{16}D_{26} - D_{12}D_{66}) \\ D_{16}^{-1} &= \frac{1}{\Delta} (D_{12}D_{26} - D_{16}D_{22}), & D_{22}^{-1} &= \frac{1}{\Delta} (D_{11}D_{66} - D_{16}^2) \\ D_{26}^{-1} &= \frac{1}{\Delta} (D_{12}D_{16} - D_{26}D_{11}), & D_{66}^{-1} &= \frac{1}{\Delta} (D_{11}D_{22} - D_{12}^2) \end{aligned} \quad 3.5$$

Et  $\Delta$  le déterminent de la matrice  $[D]$

$$\Delta = D_{11}D_{22}D_{66} + 2D_{12}D_{16}D_{26} - D_{11}D_{26}^2 - D_{22}D_{16}^2 - D_{66}D_{12}^2 \quad 3.6$$

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + \rho_s \frac{\partial^4 w_0}{\partial t^4} + q \\ = I_{xy} \left( \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \end{aligned} \quad 3.7$$

Dans le cas où les termes de l'inertie rotatifs peuvent être négligés,  $I_{xy}=0$  l'équation de la vibration est déduite comme:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + \rho_s \frac{\partial^4 w_0}{\partial t^4} = 0 \quad 3.8$$

### 3.3.2 Fréquences et déformées propres des plaques rectangulaires

Considérant l'équation du mouvement transversal libre du stratifié ( $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ ). La solution vibratoire harmonique de cette équation est recherchée, par la méthode de séparation des variables d'espaces et du temps, sous la forme :

$$w_0(x, y, t) = w_0(x, y)e^{i\omega t} \quad 3.9$$

ou

$\omega$  : est la pulsation ou fréquence circulaire du mouvement ;

$w_0(x, y)$  : est la solution spatiale ou déformée.

En reportant cette forme dans l'équation du mouvement, nous aboutissons à l'équation aux fréquences :

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - \rho_s \omega^2 w_0 = 0 \quad 3.10$$

La résolution du problème consiste à déterminer toutes les fonctions  $w_0(x, y)$  satisfaisant les conditions aux limites (déformées propres) et d'en déduire les fréquences propres correspondantes. Dans le cas d'une plaque rectangulaire de longueur  $a$  et de largeur  $b$  (figure 3.1), les conditions aux limites standards (paragraphe 2.5) s'écrivent, pour les bords parallèles à la direction  $y$  :

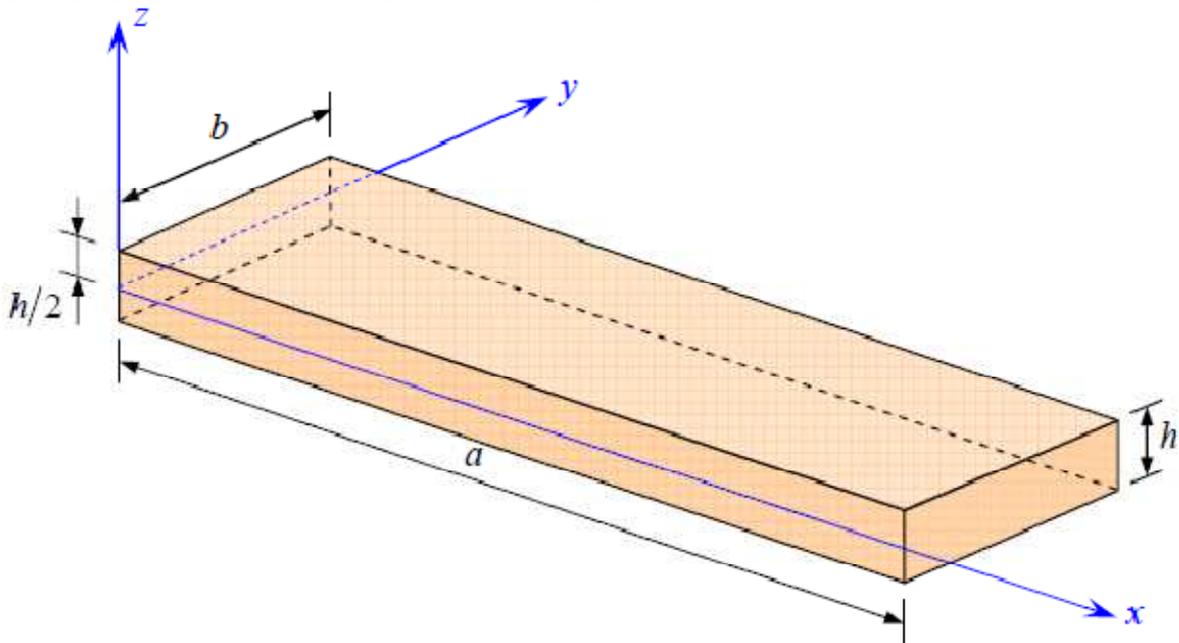


Figure 3.1 Plaque rectangulaire

➤ **En appui simple :**

Pour  $x=0$  et  $x=a$

$$w_0 = 0, \quad M_x = 0$$

Pour  $y=0$  et  $y=b$

$$w_0 = 0, \quad M_y = 0$$

3.11

➤ **Encastré :**

$$w_0 = 0$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} = 0$$

3.12

➤ **Libre :**

$$M_x = 0 \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x = 0 \quad 3.13$$

Où la résultante de cisaillement transverse  $Q_x$  est reliée aux moments par la relation (2.96). En tenant compte des différentes hypothèses retenues, la condition de bord libre devient :

$$M_x = 0 \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0 \quad 3.14$$

En remplaçant les moments et courbures par leurs expressions (3.3a) et (3.3b), les conditions aux limites s'expriment en fonction du déplacement :

❖ **Pour l'appui simple :**

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases} \quad 3.15$$

❖ **Pour l'encastrement :**

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad 3.16$$

❖ **Pour le coté libre :**

$$\begin{cases} D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0 \\ D_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + 4D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 4D_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases} \quad 3.17$$

De même pour les cotés parallèles à la direction x, nous obtenons

❖ **Pour l'appui simple :**

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases} \quad 3.18$$

❖ Pour l'encastrement :

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad 3.19$$

❖ Pour le coté libre :

$$\begin{cases} D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0 \\ 2D_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + 4D_{66} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + D_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} = 0 \end{cases} \quad 3.20$$

La solution recherchée doit donc satisfaire simultanément l'équation du mouvement (3.9), et les conditions aux limites définies par une combinaison quelconque de quatre conditions parmi (3.18) à (3.20).

Dans le cas d'une plaque orthotrope ( $D_{12} = D_{26} = 0$ ), en appui simple sur ses quatre bords, la solution analytique exacte est donnée sous la forme (3.21) qui satisfait explicitement les conditions (3.15) et (3.16).

$$w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(n\pi \frac{y}{b}\right) \quad 3.21$$

la déformée propre du mode ( $\mathbf{m}, \mathbf{n}$ ) et sa fréquence propre sont donnée par [1] :

$$w_{mn} = A_{mn} \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(n\pi \frac{y}{b}\right) \quad 3.22$$

Et

$$\omega_0 = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{1}{\rho_s} [m^4 D_{11} + 2m^2 n^2 R^2 (D_{12} + 2D_{66}) + n^4 R^4 D_{22}]} \quad 3.23$$

Avec

$$\mathbf{R} = \mathbf{a/b}$$

R : le Rapport de dimension (longueur / largeur)

L'absence de solutions exactes pour toutes les autres conditions aux limites conduit à la recherche de solutions approchées.

### 3.4 Détermination des fréquences et modes propres des plaques par la méthode de Rayleigh-Ritz

#### 3.4.1 Principe

La méthode de Rayleigh-Ritz est une méthode d'approximation basée sur une approche variationnelle. Elle consiste à écrire une solution approchée du déplacement  $u$  sous la forme d'une série pondérée de fonctions admissibles  $u_n$  chacune d'elles vérifiant séparément les conditions aux limites essentielles imposées au solide.

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \tilde{\mathbf{u}}_i \quad 3.24$$

L'ensemble de ces fonctions constitue la base fonctionnelle, et l'approximation est d'autant plus précise que le nombre de termes  $n$ , ou de degrés de liberté, utilisés est important [7],

L'application de la méthode à la fonctionnelle énergie totale du solide déformable, et l'écriture du théorème des travaux virtuels relatif à cette dernière (3.25), permet de déterminer les paramètres  $a_i$  de l'approximation (amplitudes ou coordonnées généralisées), en écrivant les conditions de stationnarité de la fonctionnelle par rapport à chaque terme  $a_i$ , selon (3.26).

$$\delta \left[ \int_{t_1}^{t_2} (E_c + W - U_d) dt \right] = \delta U = 0 \quad 3.25$$

Avec :

- $E_c$  : Energie cinétique totale ;
- $W$  : Travail des forces extérieures ;
- $U_d$  : Energie de déformation totale.

$$\delta \tilde{U}(\tilde{\mathbf{u}}) = \delta \tilde{U}(a_i) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \tilde{U}}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, n \quad 3.26$$

Dans le cas des vibrations libres, le travail des forces extérieures est nul :

$$W=0$$

Les conditions de stationnarité s'écrivent alors [21] :

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial a_i} = \frac{\partial}{\partial a_i} (\tilde{U}_{d \max} - \tilde{E}_{c \max}) = 0 \quad 3.27$$

Ces  $n$  équations permettent de construire un système linéaire de taille  $n \times n$  équivalant au problème aux valeurs (fréquences) et vecteurs (déformées) propres du problème réel.

Pour un stratifié symétrique, sous les hypothèses de la théorie classique des stratifiés et en négligeant les inerties de rotation, les énergies cinétique et de déformation exprimées respectivement par (2.145) et (2.146) se réduisent à :

$$E_{c \max} = \frac{1}{2} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \rho_s \omega^2 w_0^2 dx dy \quad 3.28$$

Et

$$E_{d \max} = \frac{1}{2} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{12} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + C \quad 3.29$$

### 3.4.2 Application au problème de vibrations des plaques stratifiées symétriques

Un choix judicieux des fonctions admissibles pour décrire le déplacement transverse de la plaque rectangulaire considérée, consiste à approcher ce dernier par une double somme :

$$w_0(x,y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad 3.30$$

Où :  $X_m(x)$  et  $Y_n(y)$  sont des fonctions vérifiant les conditions aux limites des deux plaque reposant respectivement le long des directions  $x$  et  $y$ .

En remplaçant le déplacement transversal par l'approximation (3.29), l'énergie totale maximale de la plaque devient :

$$E_{d \max} - E_{c \max} = \frac{1}{2} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{12} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 - \rho_s \omega^2 w_0^2 \right] dx dy \quad 3.31$$

avec :

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{\partial^2 X_m(x)}{\partial x^2} Y_n(y) \quad 3.32$$

$$\left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{mn} A_{ij} \frac{\partial^2 X_m(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 X_i(x)}{\partial x^2} Y_n(y) Y_j(y) \quad 3.33$$

Et

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial A_{mn}} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} \frac{\partial^2 X_m(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 X_i(x)}{\partial x^2} Y_n(y) Y_j(y) \quad 3.34$$

L'intégrale de cet terme obtenue

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial A_{mn}} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 dx dy = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} \int_0^a \frac{\partial^2 X_m(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 X_i(x)}{\partial x^2} dx \int_0^b Y_n(y) Y_j(y) dy \quad 3.35$$

Pour simplifier cette intégrale, en utilise changement de variable, on pose :

$$u = \frac{x}{a} \quad \text{et} \quad v = \frac{y}{b} \quad 3.36$$

Alors

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial A_{mn}} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 dx dy = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} \frac{b}{a^3} \int_0^1 \frac{\partial^2 X_m(u)}{\partial u^2} \frac{\partial^2 X_i(u)}{\partial u^2} dx \int_0^1 Y_n(v) Y_j(v) dv$$

Soit, après dérivation et réarrangement l'énergie de déformation donne:

$$\frac{\partial \tilde{U}_d}{\partial A_{mn}} = \frac{1}{R a^2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \{ D_{11} I_{mi}^{22} J_{nj}^{00} + [D_{12} (I_{mi}^{20} J_{nj}^{02} + I_{mi}^{02} J_{nj}^{20}) + 4D_{66} I_{mi}^{11} J_{nj}^{11}] R^2 + D_{22} I_{mi}^{00} J_{nj}^{22} R^4 \} A_{ij} \quad 3.37$$

Avec :

$$I_{mi}^{pq} = a \int_0^1 \frac{\partial^p X_m(u)}{\partial u^p} \frac{\partial^q X_i(u)}{\partial u^q} du = \int_0^a \frac{\partial^p X_m(x)}{\partial x^p} \frac{\partial^q X_i(x)}{\partial x^q} dx \quad 3.38$$

$$m, i = 1, 2, \dots, M \text{ et } p, q = 00, 02, 11, 20, 22.$$

$$J_{nj}^{rs} = b \int_0^1 \frac{\partial^r Y_n(v)}{\partial v^r} \frac{\partial^s Y_j(v)}{\partial v^s} dv = \int_0^a \frac{\partial^r Y_n(y)}{\partial y^r} \frac{\partial^s Y_j(y)}{\partial y^s} dy$$

$$n, j = 1, 2, \dots, N \text{ et } r, s = 00, 02, 11, 20, 22.$$

Et l'énergie cinétique donne :

$$E_{c \max} = \frac{1}{2} \rho_s \omega^2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \int_{x=0}^a X_m(x) X_i(x) dx \int_{y=0}^b Y_n(y) Y_j(y) dy \quad 3.39$$

Alors

$$\frac{\partial E_{c \max}}{\partial A_{ij}} = \frac{1}{R} \rho_s a^4 \omega^2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N I_{mi}^{00} J_{nj}^{00} \quad 3.40$$

Finalement, les  $M \times N$  conditions de stationnarité (3.26) conduisent à écrire équations homogène :

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \{ D_{11} I_{mi}^{22} J_{nj}^{00} + [D_{12} (I_{mi}^{20} J_{nj}^{02} + I_{mi}^{02} J_{nj}^{20}) + 4D_{66} I_{mi}^{11} J_{nj}^{11}] R^2 + D_{22} I_{mi}^{00} J_{nj}^{22} R^4 - \rho_s a^4 \omega^2 I_{mi}^{00} J_{nj}^{00} \} A_{ij} = 0 \quad 3.41$$

Pour

$$m, i = 1, 2, \dots, M \text{ et } n, j = 1, 2, \dots, N$$

En écrire le produit de l'intégrale (3.5) et (3.6) comme :

$$C_{minj}^{pqrs} = I_{mi}^{pq} J_{nj}^{rs} = \int_0^a \frac{\partial^p X_m(x)}{\partial x^q} \frac{\partial^p X_i(x)}{\partial x^q} dx \int_0^a \frac{\partial^r Y_n(y)}{\partial y^r} \frac{\partial^s Y_j(y)}{\partial y^s} dy \quad 3.42$$

Et en pose

$$D_{12} = \alpha_{12} D_{11}, \quad D_{66} = \alpha_{66} D_{11}, \quad D_{22} = \alpha_{22} D_{11} \quad 3.43$$

En introduisant la pulsation propre adimensionnelle

$$\Omega = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho_s}{D_{11}}} \quad 3.45$$

En obtient :

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \{ C_{minj}^{2200} + [\alpha_{12}(C_{minj}^{2002} + C_{minj}^{0220}) + 4\alpha_{66} C_{minj}^{1111}] R^2 + \alpha_{22} C_{minj}^{0022} R^4 - \Omega^2 C_{minj}^{0022} \} A_{ij} = 0 \quad 3.46$$

Pour

$$m, i = 1, 2, \dots, M \text{ et } n, j = 1, 2, \dots, N$$

On définit alors les termes :

$$a_{kl} = C_{minj}^{2200} + [\alpha_{12}(C_{minj}^{2002} + C_{minj}^{0220}) + 4\alpha_{66} C_{minj}^{1111}] R^2 + \alpha_{22} C_{minj}^{0022} R^4 \quad 3.47$$

$$b_{kl} = C_{minj}^{0000}$$

Finalement le problème aux valeurs et vecteurs propres est obtenu sous la forme :

$$([a] - \Omega^2 [b]) \{A\} = 0 \quad 3.49$$

Dont les valeurs propres  $\Omega_{mn}$ , sont reliées aux fréquences propres de la plaque par la relation :

$$f_{mn} = \frac{\omega_{mn}}{2\pi} = \frac{\Omega_{mn}}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{D_{11}}{\rho_s}} \quad 3.50$$

### 3.4.3 Construction de la base fonctionnelle - Fonctions caractéristiques des vibrations des poutres

Nous utilisons dans ce travail les fonctions caractéristiques des vibrations des poutres comme fonctions admissibles. Cette méthode a été introduite par D. Young pour les plaques isotropes et depuis largement reprise pour l'étude de différents types de plaques notamment composites [21].

Une poutre stratifiée peut être considérée comme une plaque dont le rapport a/b est élevé (Figure 3.1). La formulation de base reste donc inchangée.

Les hypothèses de condensation dans le cas d'une flexion dans le plan (x, z) [27] sont données par :

$$w_0(x, y, t) = w_0(x, y) = e^{i\omega t} X(x) \quad 3.51$$

$$M_x = M_{xy} = 0$$

Dans ces conditions, l'équation du mouvement (2.99) devient :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} = -\rho_s \omega^2 e^{i\omega t} X \quad 3.52$$

Considérant la relation de comportement (3.4) du stratifié, l'inversion de la matrice de rigidité de flexion permet d'écrire :

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^{-1} & D_{12}^{-1} & D_{16}^{-1} \\ D_{12}^{-1} & D_{22}^{-1} & D_{26}^{-1} \\ D_{16}^{-1} & D_{26}^{-1} & D_{66}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} \quad 3.53$$

Ce qui implique, d'après (3.5), (3.46) et (3.47)

$$k_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = D_{11}^{-1} M_x \quad 3.54$$

Soit :

$$M_x = -e^{i\omega t} \frac{1}{D_{11}^{-1}} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \quad 3.55$$

En reportant ce dernier résultat dans l'équation aux fréquences (3.48), celle-ci prend la forme :

$$\frac{\partial^4 X}{\partial x^4} - \omega^2 \rho_s D_{11}^{-1} X = 0 \quad 3.56$$

Nous retrouvons ici une forme analogue à l'équation aux fréquences des poutres homogènes isotropes en flexion, sous les hypothèses d'Euler-Bernouli [28]. Les solutions (déformées propres) sont indépendantes des propriétés mécaniques du matériau de la poutre. En considérant les variables adimensionnelles (3.36), la solution générale de cette équation différentielle prend la forme :

$$X_i(x) = C \cos(\lambda_i u) + D \sin(\lambda_i u) + E \cosh(\lambda_i u) + F \sinh(\lambda_i u) \quad 3.57$$

Où  $\lambda_i$  est le nombre d'onde caractéristique du  $i^{\text{ème}}$  mode de vibration.

Les nombres d'onde et les constantes C, D, E et F sont déterminés en imposant le respect des conditions aux limites aux extrémités de la poutre. Ces conditions sont déduites des expressions (3.14) à (3.16) en tenant compte de l'hypothèse (3.51), soit :

➤ **Pour l'appui simple :**

Ou  $x=0$

$$X_i|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 X_i}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0 \quad 3.58$$

Et  $x=a$

$$X_i|_{x=a} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 X_i}{\partial x^2} \right|_{x=a} = 0$$

➤ **Pour l'encastrement :**

Ou  $x=0$

$$X_i|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial X_i}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad 3.59$$

Et  $x=a$

$$X_i|_{x=a} = 0, \quad \left. \frac{\partial X_i}{\partial x} \right|_{x=a} = 0$$

➤ **Pour le coté libre :**

Ou  $x=0$

$$\left. \frac{\partial^2 X_i}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^3 X_i}{\partial x^3} \right|_{x=0} = 0 \quad 3.60$$

Et  $x=a$

$$\left. \frac{\partial^2 X_i}{\partial x^2} \right|_{x=a} = 0, \quad \left. \frac{\partial^3 X_i}{\partial x^3} \right|_{x=a} = 0$$

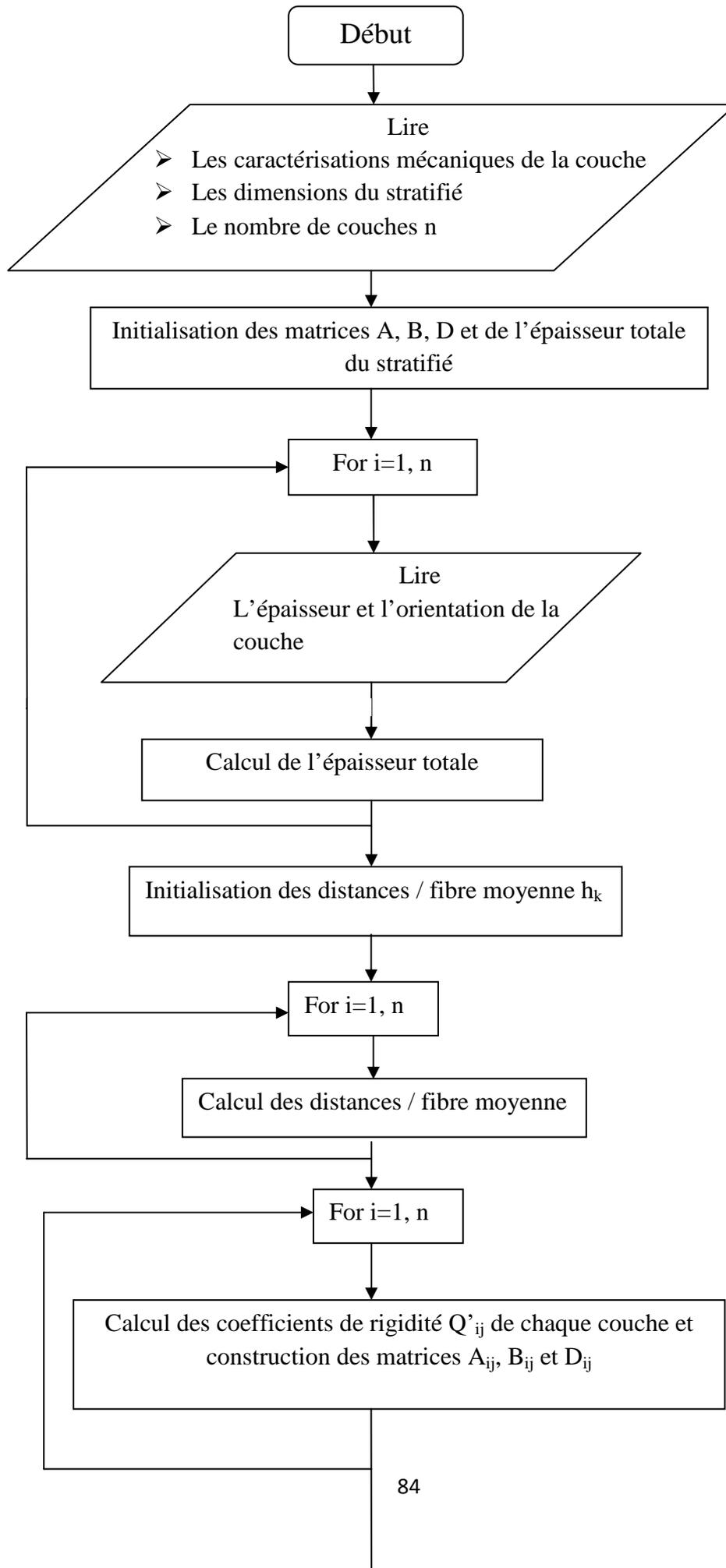
En examinant ces expressions, on s'aperçoit que lorsqu'une plaque est modélisée par deux poutres croisées, seule la condition de bord encasté de la plaque est entièrement vérifiée (3.14) et (3.59). Dans le cas d'un appui simple, la condition relative au déplacement est vérifiée, (3.15) et (3.58), alors que celle relative au moment fléchissant (3.15) est tronquée (3.58). Pour la condition de bord libre, l'expression du moment (3.15) et celle de l'effort tranchant (3.15) sont tronquées. Ces deux conditions (appui simple et coté libre) ne sont qu'approchées, influant ainsi sur la précision de la méthode.

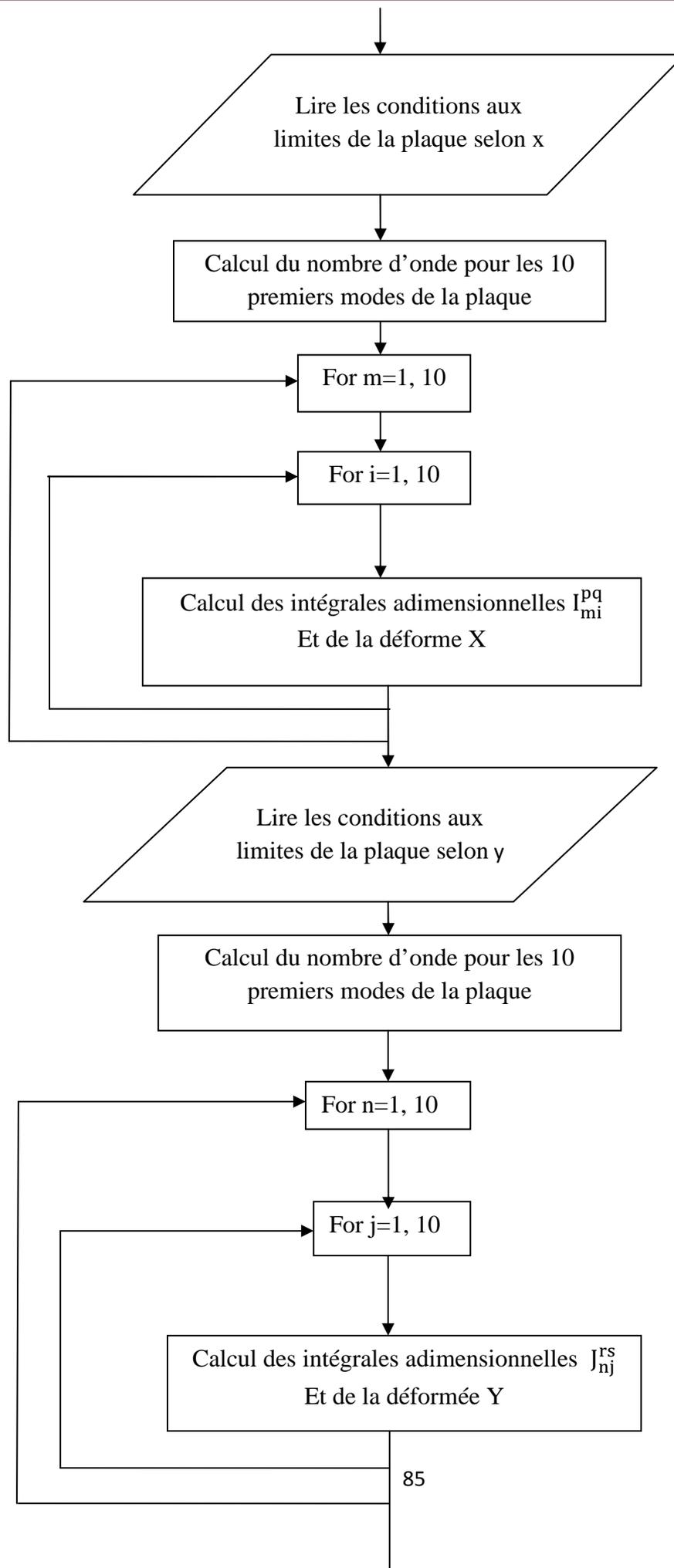
### 3.4.4 Organigramme du programme de calcul

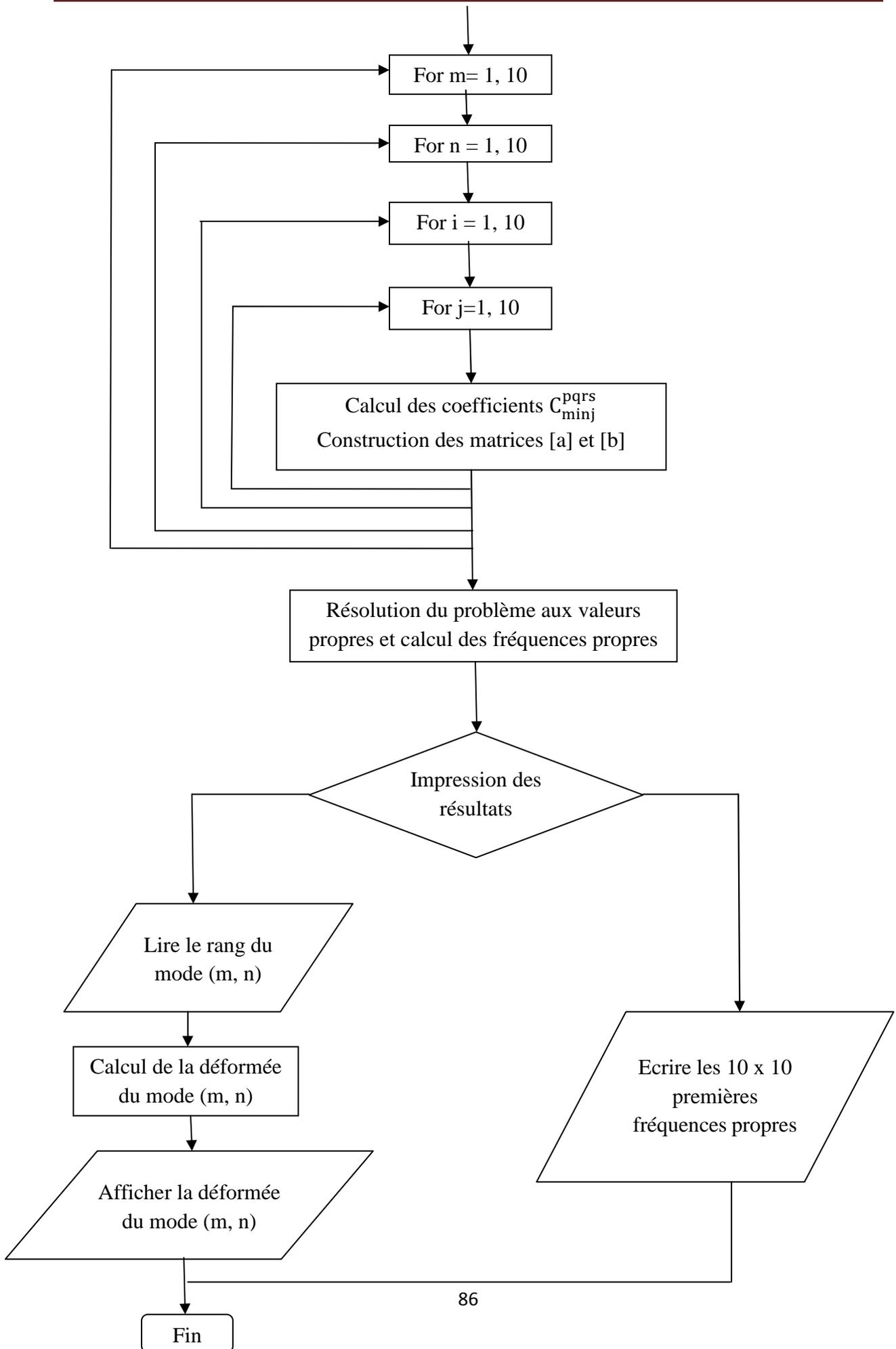
Nous utilisons une approximation à 100 termes ( $M = N = 10$ ) pour déterminer les cent premières fréquences et déformées propres d'une plaque multicouche symétrique, rectangulaire.

La plaque étant modélisée par deux poutres croisées, trente six (6x6) combinaisons de conditions aux limites sont possibles dont vingt et une sans répétition. Les expressions exactes des intégrales adimensionnelles  $I_{mi}^{pq}$  et  $I_{nj}^{rs}$  pour chaque cas de poutre sont programmées sous **Matlab** [30 et 31] qui permet de calculer les coefficients de la loi constitutive d'un stratifié.

L'organigramme de ce programme est présenté ci-après







### 3.5 Validation du programme élaboré

Dans le but de valider le programme élaboré, les résultats issus de ce dernier sont confrontés aux fréquences et déformées propres d'une plaque multicouche rectangulaire symétrique, obtenues en calcul de structures par éléments finis sous logiciel ANSYS.

#### 3.5.1. Description de l'élément utilisé pour le maillage

Pour faire les calculs par les éléments finis sous ANSYS en choisit l'élément de maillage **SHELL 63** Figure (3.2).

L'élément SHELL 63 est conçu pour modéliser les structures en coques épaisses. Le nombre de nœud de cet élément est égal 8. Chaque nœud a six degrés de liberté ( $U_x, V_y, W_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ ). L'élément SHELL63 est capable d'être utilisé pour les calculs des contraintes pour des grandes déformations, et peut être aussi utilisé pour les matériaux isotrope et orthotrope [ANSYS v 09].

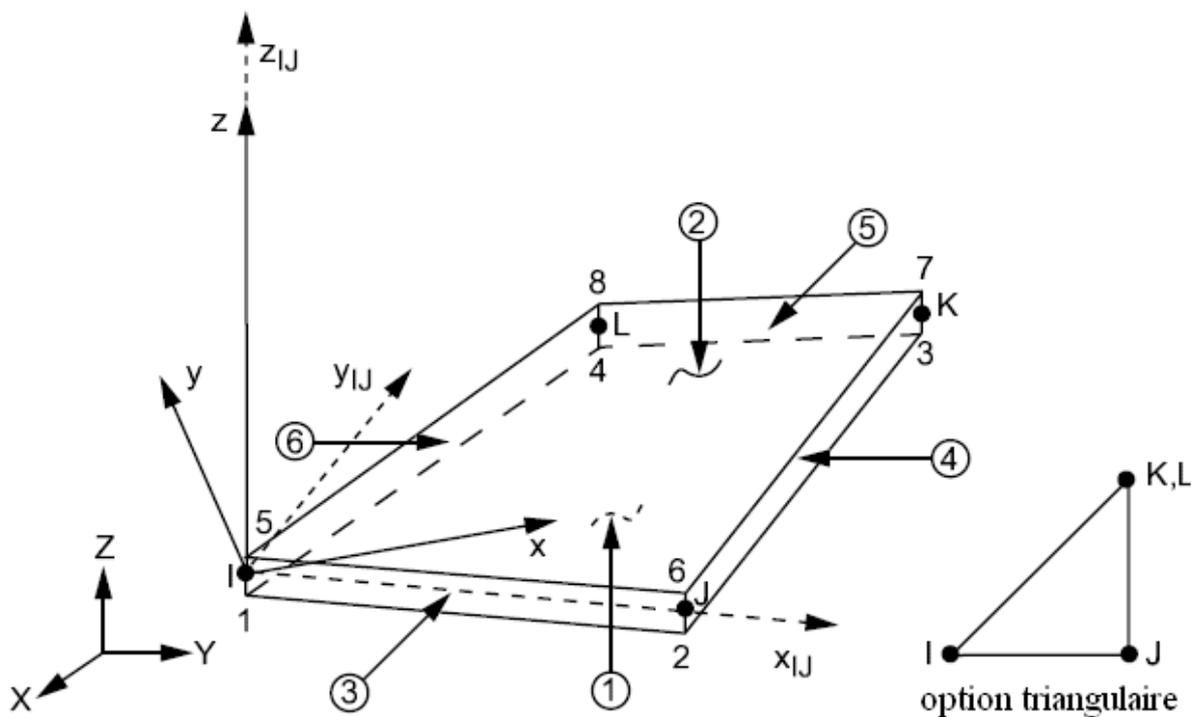


Figure 3.2. Géométrie de l'élément de maillage SHELL 63

### 3.5.2 Analyse dynamique libre des plaques rectangulaires multicouches

#### Méthode qualitative

Notre contribution consiste à étendre cette investigation aux plaques orthotropes allongées (longueur infinie), dont l'analyse est dominée par le comportement poutre, c'est-à-dire à confirmer la tendance à limiter l'analyse dynamique à l'étude de bandes unitaires ( $b=1$ ) de la plaque allongée, considérée suivant le petit sens. Les conditions de fixités de la plaque seront alors ceux des bords allongés. (Figure 3.1)

Les plaques étudiées se distinguent par le type de condition de fixité:

#### Cas d'appuis homogène

- Plaque rectangulaire simplement appuyée AAAA
- Plaque rectangulaire totalement encastrée EEEE

Dans ces cas quelque soit le rapport des dimensions de la plaque rectangulaire ( $a/b$ ), on aboutit toujours à des bandes poutres de portée égale à la petite longueur, avec respectivement les conditions de fixité AA pour le premier cas, et EE pour le deuxième cas

#### Cas d'appuis non homogènes:

- Plaque rectangulaire AEAE
- Plaque rectangulaire AAEE
- Plaque rectangulaire AAEA
- Plaque rectangulaire EAEE

Suivant le rapport des dimensions de la plaque on aboutit pour chaque cas de plaque à deux types de poutres avec des conditions de fixité différentes.

-plaque rectangulaire AEAE:

1. si le rapport  $[(lx=a)/(ly=b)>1]$ , on aboutit à la poutre de longueur  $l=ly$  avec les conditions de fixités du type EE.
2. si le rapport  $[(lx=a)/(ly=b)<1]$ , on aboutit à la poutre de longueur  $l=lx$  avec les conditions de fixités du type AA

-plaque rectangulaire AAEE:

3. si le rapport  $[(lx=a)/(ly=b)>1]$ , on aboutit à la poutre de longueur  $l=ly$  avec les conditions de fixités du type AE.
4. si le rapport  $[(lx=a)/(ly=b)<1]$ , on aboutit à la poutre de longueur  $l=lx$  avec les conditions de fixités du type AE

Pour les deux cas d'hypothèses on aboutit à la même bande de poutre caractérisée par les conditions de fixité du type AE. Pour ce type de plaque on a même type de comportement vibratoire, quelque soit l'orientation de l'allongement de la plaque. ce cas s'identifie à celui du cas homogène  $(\omega_{AAEE}=\omega_{AE})_{XX}$  et  $(\omega_{AAEE}=\omega_{AE})_{YY}$

-plaque rectangulaire AAE

5. si le rapport  $[(l_x=a)/(l_y=b)] > 1$ , on aboutis à la poutre de longueur  $l=l_y$  avec les conditions de fixités du type AE.
6. si le rapport  $[(l_x=a)/(l_y=b)] < 1$ , on aboutis à la poutre de longueur  $l=l_x$  avec les conditions de fixités du type AA

On voit que le premier cas de la plaque allongée suivant l'axe (x-x), développe une bande de poutre AE plus rigide que celui du deuxième cas de la plaque allongée suivant l'axe (y-y), qui aboutis à une bande de poutre AA . de ce fait on peut comprendre que la plaque rectangulaire allongée d'après le premier cas ( $a/b > 1$ ), développe un niveau de fréquence supérieure à celui du deuxième cas ( $a/b < 1$ ), de ce fait on peut déduire le sens physique pour le comportement vibratoire de la plaque rectangulaire allongée suivant l'un (x-x), ou l'autre (y-y), des deux sens avec  $(\omega_{AEAE} = \omega_{EE})_{xx} > (\omega_{AEAE} = \omega_{AA})_{yy}$

7. si le rapport  $[(l_x=a)/(l_y=b)] > 1$ , on aboutis à la poutre de longueur  $l=l_y$  avec les conditions de fixités du type EA.
8. si le rapport  $[(l_x=a)/(l_y=b)] < 1$ , on aboutis à la poutre de longueur  $l=l_x$  avec les conditions de fixités du type EE

On voit que le premier cas de la plaque allongée suivant l'axe (x-x), développe une bande de poutre EA moins rigide que celui du deuxième cas de la plaque allongée suivant l'axe (y-y), qui aboutis à une bande de poutre EE . de ce fait on peut comprendre que la plaque rectangulaire allongée d'après le premier cas ( $a/b > 1$ ), développe un niveau de fréquence supérieure à celui du deuxième cas ( $a/b < 1$ ), de ce fait on peut déduire le sens physique pour le comportement vibratoire de la plaque rectangulaire allongée suivant l'un (x-x), ou l'autre (y-y), des deux sens avec  $(\omega_{AEAE} = \omega_{EE})_{xx} < (\omega_{AEAE} = \omega_{AA})_{yy}$

### **Stratégie pour une analyse qualitative et quantitative du comportement dynamique des plaques isotropes et orthotropes**

La problématique consiste à un besoin réel de développer une méthode qualitative et quantitative pour permettre aux ingénieurs de conception et chercheur, afin de les aider pendant leurs investigations lors de l'analyse vibratoire des structures complexes, ou lors du travail de pré- dimensionnement de la structure d'étude, ainsi que dans le cadre d'un travail d'expertise de la qualité des réponses dynamiques que l'on obtient aux moyens de codes de calcul sophistiqués. Le risque d'erreur pouvant affecté la qualité des réponses pendant une investigation dynamique peut se situer à différents niveaux:

- identification du modèle idéal (analytique) représentatif de la structure réelle (le niveau des hypothèses injectés dans le modèle analytique, varie suivant la phase de conception allant d'hypothèses simplifier permettant de développer une première impression du comportement pour des fins de pré-

dimensionnement, jusqu'à des modèles de plus en plus élaborés nécessitant des logiciels de plus en plus performant, faisant intervenir le recours à des experts hautement qualifiés).

- Pour chaque type de modèle analytique on obtient des modèles mathématiques correspondre plus ou moins sophistiqués:
  - un modèle continu nécessite des équations différentielles partielles
  - un modèle discret nécessite des équations différentielles ordinaires
  - un modèle élément finis
- Les solutions aux problème pour chaque type de modèle adopté et chaque équation correspondante, nécessitent une méthode spécifique: .

(Méthodes exactes, méthodes numériques)

Les méthodes exactes nécessitent beaucoup d'effort de calcul parfois non justifiés par rapport l'objectif, d'autre part les solutions restent limitées et accessible seulement aux expert. Les méthodes numériques cumulent aussi des risques d'erreurs potentielles.

- La confrontation avec l'analyse expérimentale peut engendrer des dispersions par rapport aux réponses obtenues d'après la simulation numérique. Dans ce cas une expertise est nécessaire au niveau de chaque phase d'investigation précédemment d'écrite. L'inconvénient pour l'analyse expérimentale n'est toujours pas accessible, au commun des ingénieurs et cela en plus des coups excessifs de l'investigation expérimentale. D'autre part même si les moyens sont disponibles pour effectuer les tests, il est toujours raisonnable de s'assurer suffisamment par les calculs qualitatifs et quantitatifs préalable avant de s'engager dans le voie expérimentale.

Notre travail consiste alors à faire appel à une double stratégie pour l'analyse vibratoire des plaques isotropes et orthotropes. Une analyse qualitative précédemment discutée, d'autre part une méthode approchée qui permet de donner les réponses dynamiques de la structure réelle avec un degré de précision suffisant.

## 4.1. Introduction

L'objectif de notre étude est l'identification des caractéristiques dynamiques (fréquences et modes propres,..) des plaques composites multicouches en vibration de flexion.

Lors de la recherche des fréquences et modes propres, les équations de mouvement sont résolues par la méthode de Rayleigh-Ritz.

Les fréquences propres de vibration d'une structure dépendant des rigidités des matériaux constitutif toutefois la recherche systématique des modes n'est pas aisée car la déformée d'une plaque résulte de la superposition des déformées de différentes modes.

Dans tous les cas les vibrations mettent en jeu un échange permanent entre l'énergie cinétique et l'énergie de déformation des éléments de la plaque.

L'énergie cinétique est associée à la vitesse vibratoire et la masse des éléments déformés Alors que la déformation est associée aux contraintes dynamiques liées à la rigidité des éléments déformés par le mouvement vibratoire.

Le but est consisté de calculer à investir l'analyse des paramètres fréquentiels naturelles d'une plaque multicouches rectangulaire à phase isotrope et orthotrope avec différente fixité sur les quatre bords.

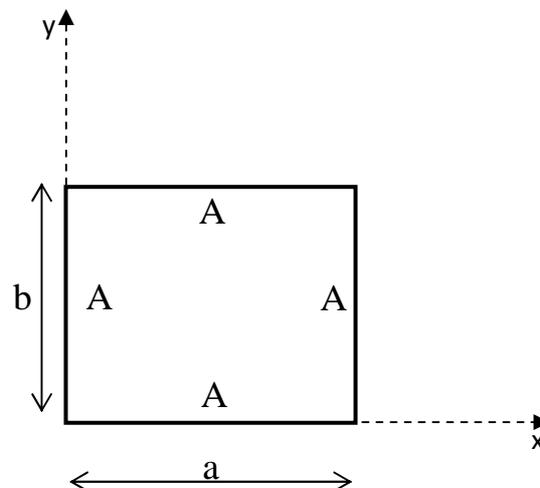
Les fréquences propres des plaques sont déterminées par la méthode de Rayleigh Ritz, la solution du problème aux valeurs propres est obtenue d'après une déformé de fonction de forme qui vérifier les conditions aux limites de la plaque.

Dans ce chapitre nous étudions l'effet de certains paramètres fondamentaux tels que les conditions aux limites, les dimensions de la plaque, l'épaisseur de la plaque et des couches et la nature de matériau.

Les différents étapes de calcul des caractéristiques dynamiques d'une plaque travaillant en flexion et la recherche de l'influence de toutes ces derniers paramètres sur la fréquence propre des différents plaques sont illustrées par un programme de calcul Matlab et MAPLE .

## 4.2. Calculs analytique des fréquences et modes propres :

### 4.2.1. Plaque rectangulaire orthotrope simplement appuyée (AAAA) :



En utilise la méthode de Rayleigh-Ritz pour les calculs des fréquences et modes propres d'une plaque rectangulaire orthotrope simplement appuyée (AAAA).

Après les relations (3.37) et (3.40) en obtient la relation (3.41)

$$\frac{\partial U_{d \max}}{\partial A_{mn}} - \frac{\partial E_{c \max}}{\partial A_{mn}} = 0 \quad 4.1$$

Pour calculs les pulsations propres  $\omega_{mn}$  de chaque m, n mode après la relation (3.46) et (3.47) et utilise le logiciel mathématique MAPLE 10.

La fonction de forme :

$$W(x,y) = \sin(m\pi \frac{x}{a}) \sin(n\pi \frac{y}{b}) \quad 4.2$$

Ou :

$$X_m = \sin(m\pi \frac{x}{a}) \quad 4.3$$

$$Y_n = \sin(n\pi \frac{y}{b}) \quad 4.4$$

Les intégrales adimensionnelles sont calculées selon les expressions

$$C_{minj}^{2200} = I_{mi}^{22} J_{nj}^{00} = \int_{u=0}^1 \frac{d^2 X_m}{du^2} \frac{d^2 X_i}{du^2} du \int_{v=0}^1 \frac{d^2 Y_n}{dv^2} \frac{d^2 Y_j}{dv^2} dv \quad 4.5$$

**Ou**

$$u = \frac{x}{a} \quad \text{et} \quad v = \frac{y}{b} \Rightarrow dx = a du \quad \text{et} \quad dy = b dv$$

Après le changement de variable la relation réécire

$$C_{minj}^{2200} = I_{mi}^{22} J_{nj}^{00} = \frac{1}{a b} \int_{x=0}^a \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{d^2 X_i}{dx^2} dx \int_{y=0}^b \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \frac{d^2 Y_j}{dy^2} dy \quad 4.6$$

De même façon pour les autres intégrales

$$C_{minj}^{2002} = I_{mi}^{20} J_{nj}^{02}$$

$$C_{minj}^{0220} = I_{mi}^{02} J_{nj}^{20}$$

$$C_{minj}^{1111} = I_{mi}^{11} J_{nj}^{11}$$

$$C_{minj}^{0022} = I_{mi}^{00} J_{nj}^{22}$$

$$C_{minj}^{0000} = I_{mi}^{00} J_{nj}^{00}$$

La relation de fréquence pour chaque m, n modes de vibration écrire sous forme

$$\omega_{m n} = \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{D_{11}}{\rho_s}} \sqrt{C_{mmnn}^{2200} + 2(\alpha_{12} + 2\alpha_{66})C_{mmnn}^{1111} R^2 + \alpha_{22}C_{mmnn}^{0022} R^4} \quad 4.7$$

Pour le premier mode  $m=n=1$  la fonction de forme réécrite comme

$$W(x, y) = \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(\pi \frac{y}{b}\right) \quad 4.8$$

$$\omega_{m n} = \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{D_{11}}{\rho_s}} \sqrt{C_{1111}^{2200} + 2(\alpha_{12} + 2\alpha_{66})C_{1111}^{1111}R^2 + \alpha_{22}C_{1111}^{0022}R^4} \quad 4.9$$

$$C_{1111}^{2200} = \frac{1}{4} \frac{\pi^4 b}{a^3}$$

$$C_{1111}^{1111} = \frac{1}{4} \frac{\pi^4}{a b}$$

$$C_{1111}^{0022} = \frac{1}{4} \frac{\pi^4 a}{b^3}$$

**Ou :**

$$\alpha_{12} = \frac{D_{12}}{D_{11}}, \alpha_{66} = \frac{D_{66}}{D_{11}} \quad \text{et} \quad \alpha_{22} = \frac{D_{22}}{D_{11}}$$

$$R = \frac{a}{b}$$

#### 4.2.2. Plaque rectangulaire orthotrope encastré approximation par des polynômes : (EEEE)

Pour étudier le premier mode de vibration on choisit comme fonction de comparaison. La fonction de forme  $m=n=1$  :

$$W(x, y) = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^2$$

De même façon pour calculée les fréquences propres d'une plaque multicouches par la méthode de Rayleigh-Ritz approchée.

#### 4.2.3. Les différentes fonctions de formes :

Le problème de la flexion d'une plaque revient à chercher la fonction  $w(x, y)$  qui vérifie les conditions aux limites et qui rend minimale l'énergie totale qui est la somme de l'énergie de déformation et de l'énergie potentielle. [44]

**Premier cas AAAA:**  

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

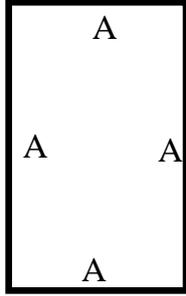


Fig 4.1. Plaque orthotrope AAAA

**Deuxième cas EEEE:**  

$$w(x, y) = A_{mn} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) xy \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

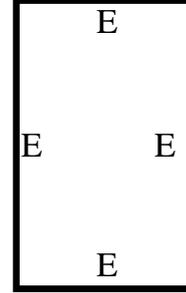


Fig 4.2. .Plaque orthotrope EEEE

**Troisième cas AEAE**  

$$w(x, y) = \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} y \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

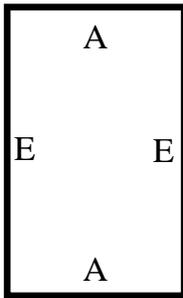


Fig 4.3. Plaque orthotrope AEAE

**Quatrième cas AAEE:**  

$$w(x, y) = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

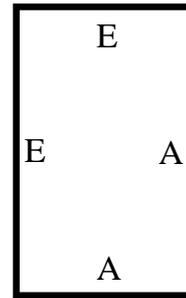


Fig 4.4. Plaque orthotrope AAEE

**Cinquième cas EAEE:**  

$$w(x, y) = A_{mn} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

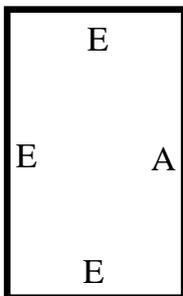


Fig 4.5. Plaque orthotrope EAEE

**Sixième cas AAEEA:**  

$$w(x, y) = A_{mn} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

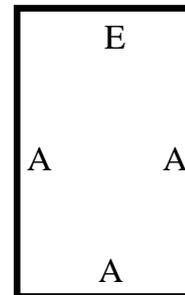


Fig 4.6. Plaque orthotrope AAEEA

Pour faire les calculs dynamiques des plaques composites multicouches en choisit par exemple un modèle d'une plaque multicouches a phase isotrope et une plaque multicouches a phase orthotrope.

#### 4.2.4. Présentation des modèles d'étude

#### 4.2.5. Plaques multicouches à phases isotropes

Une structure du type multicouche à phases isotropes réparties symétriquement par rapport au plan moyen figures (4.7) et (4.8) est traitée à titre d'application. Il s'agit d'une plaque sollicitée à l'action dynamique. Libre transversale, ou l'intérêt est portée essentiellement sur l'étude comparative des réponses propres (fréquences propres, périodes, modes,...), obtenue d'après la méthode des éléments finis sous ANSYS et la méthode de Rayleigh-Ritz sous MATLAB et Maple 10.

La plaque étudiée présente 5 couches isotropes de même épaisseurs réparties en modèle symétrie miroir. Afin de cerner les réponses dynamiques pour différentes catégories de plaque ( $R=0.5$ ,  $R=1$ ,  $R=1.5$ ,  $R=2$ ).

Les Tableaux (4.7) et (4.8) qui suivent présentes respectivement, les propriétés géométriques et mécaniques de la plaque d'étude.

Tableau (4.1) : Propriétés physiques et géométriques du model analytique de la plaque multicouche ( $N_p=5$ ).

| Types de plaque | Longueur a (m) | Largeur b (m) | Rapport $R=a/b$ (longueur/largeur) | Hauteur totale H (mm) | Epaisseur de pli h (mm) |
|-----------------|----------------|---------------|------------------------------------|-----------------------|-------------------------|
| Modèle 01       | 1              | 2             | 0.5                                | 10                    | 2                       |
| Modèle 02       | 1              | 1             | 1                                  | 10                    | 2                       |
| Modèle 03       | 3              | 2             | 1.5                                | 10                    | 2                       |
| Modèle 04       | 2              | 1             | 2                                  | 10                    | 2                       |

Tableau (4.2) : Caractéristiques Mécaniques des plis constitutifs du model analytique de la plaque multicouche ( $N_p=5$ ).

| Numéro de la couche | Type de Matériau | Masse volumique $\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> ) | Module de Young E $10^7$ (kg/m <sup>2</sup> ) | Coefficient de Poisson $\nu$ |
|---------------------|------------------|---|---|------------------------------|
| 2 (extrême)         | Aluminium        | 2700  | 720   | (0,3 - 0,34)                 |
| 1 (intermédiaire)   | Cuivre           | 2930  | 1200  | (0,3 - 0,33)                 |
| 0 (centrale)        | Acier            | 7800  | 200   | 0,3                          |
| 1 (intermédiaire)   | Cuivre           | 2930  | 1200  | (0,3 - 0,33)                 |
| 2 (extrême)         | Aluminium        | 2700  | 720   | (0,3 - 0,34)                 |

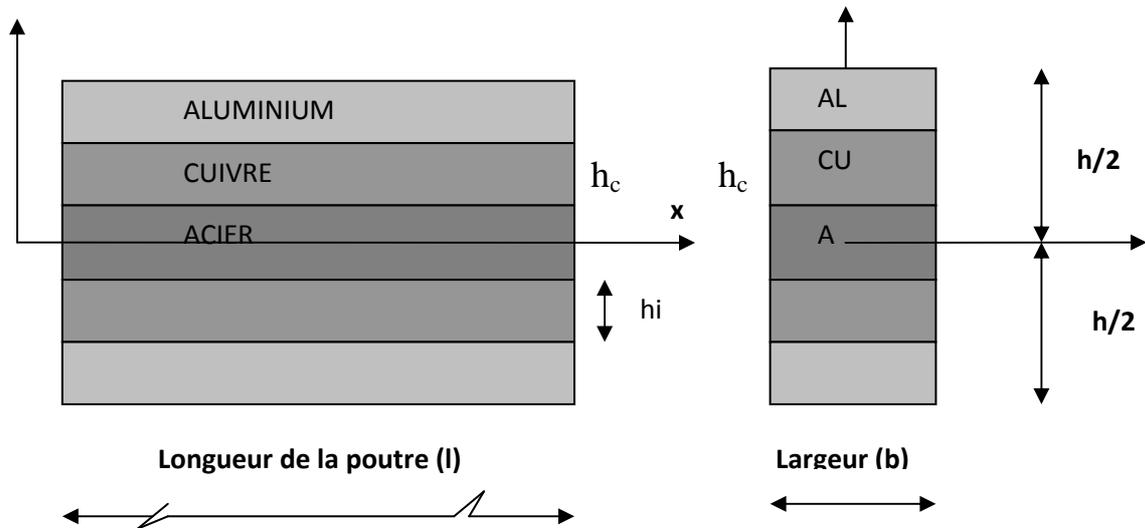


Figure.4.7. Modèle de plaque multicouche ( $N_p=5$ ), à phases isotropes

La Modélisation Element Finis du composite multicouche d'après la simulation numérique par le logiciel ANSYS v09

L'élément choisis pour faire les calculs Shell 63 modèle de calcul.

Plusieurs essais sont envisagés pour la discrétisation de la plaque ( $N_p=5$ ) :

- Plaque discrétisée avec 4 éléments
- Plaque discrétisée avec 6 éléments
- Plaque discrétisée avec 10 éléments

Pour choisir le meilleur discrétisation de la plaque en utilise le modèle 01 pour  $R=1.5$  et les conditions de fixités EEEE figure (4.2) a, b, c et d.

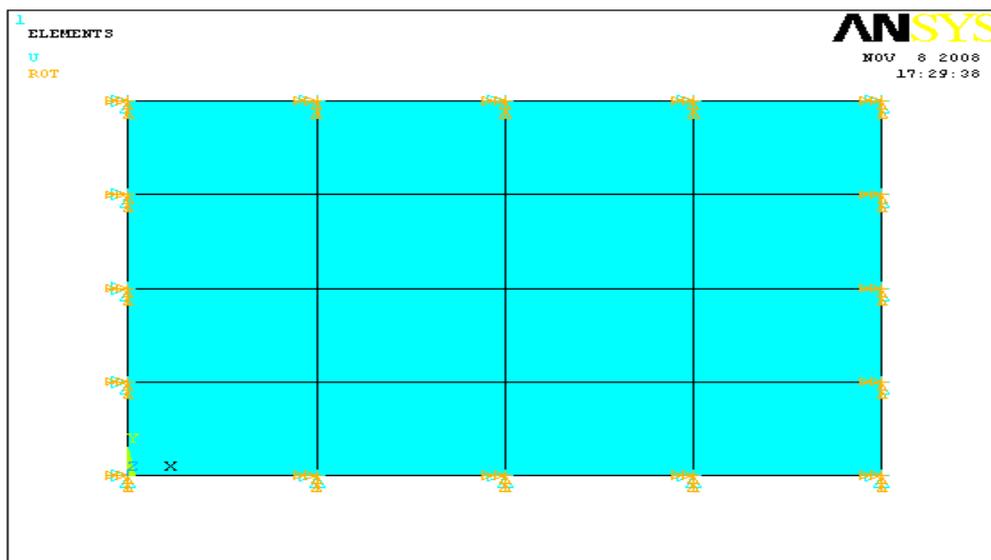


Figure (4.8.a). Discrétisation à 4 éléments de la plaque

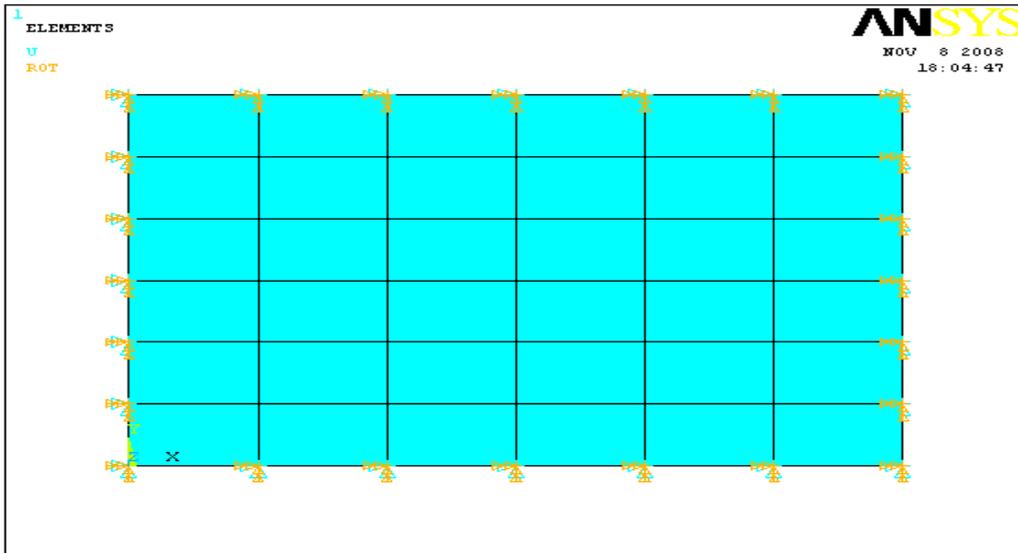


Figure (4.8.b). Discrétisation à 6 éléments de la plaque

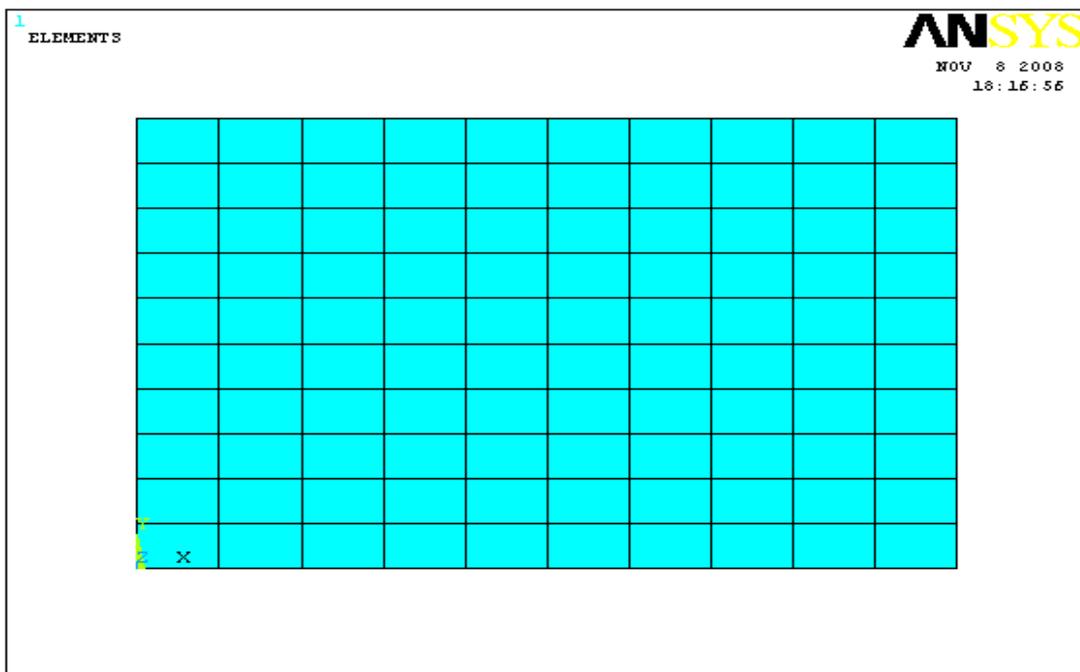


Figure (4.8.c). Discrétisation à 10 éléments de la plaque

Les réponses maintenues pour la suite de l'analyse comparative correspondent au modèle discrétisé basé sur 10 éléments, ce qui donne une meilleure qualité des réponses vu leurs bonnes convergences.

### 4.3. Calculs des fréquences et des déformées propres sous simulation par ANSYS

Pour faire les calculs par la méthode des éléments finis sous ANSYS en choisissant l'élément de maillage SHELL 63 (coque élastique) avec 10 éléments et en utilisant comme exemple une plaque rectangulaire multicouche (5 plis – acier-aluminium-cuivre)

Chaque fois que l'on change la géométrie de la plaque  $R=a/b$  et les conditions aux limites et on calcule les fréquences et les déformées propres.

#### 4.3.1. Présentation de la plaque multicouche

La figure (4.10) représente la plaque discrétisée en éléments finis dans le cas de la configuration EEEE

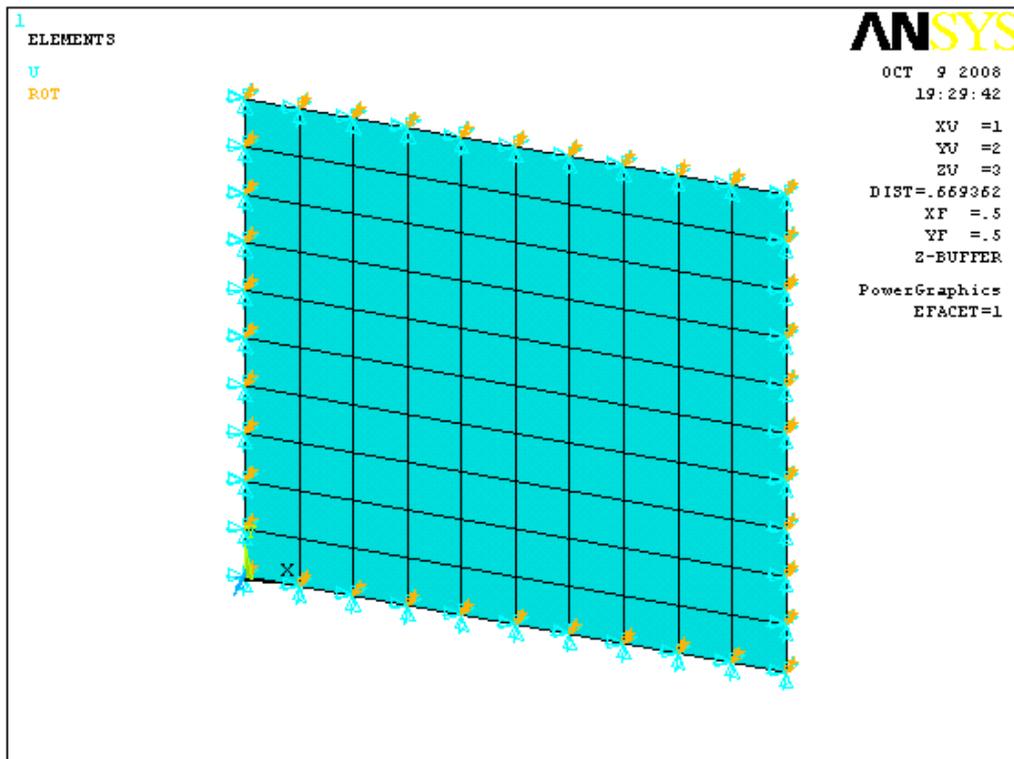
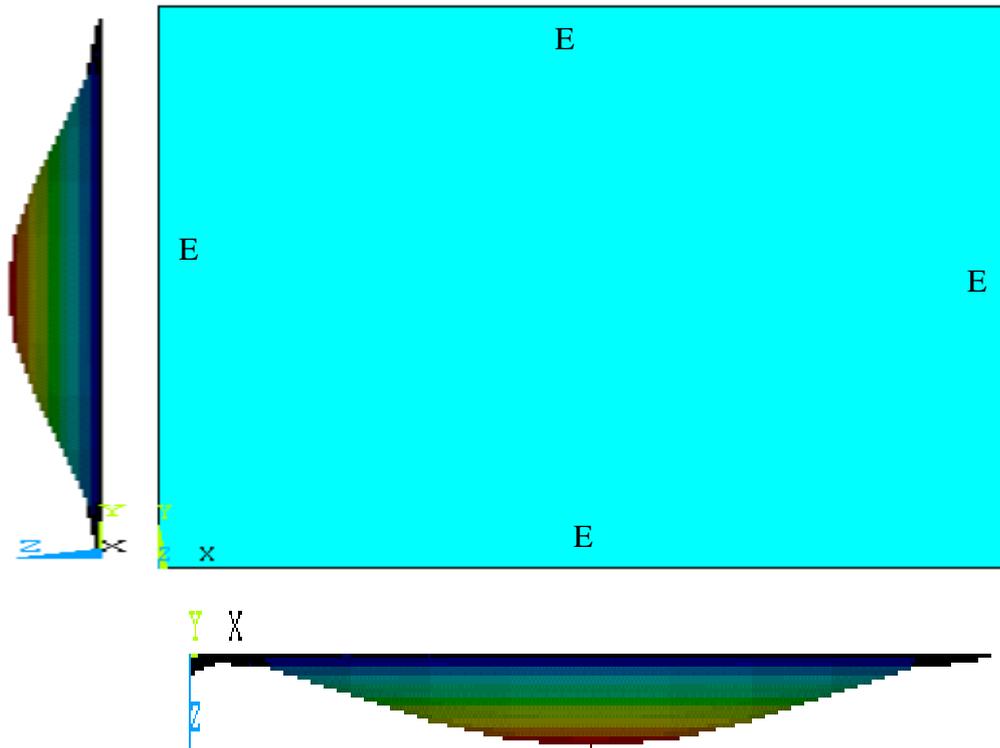


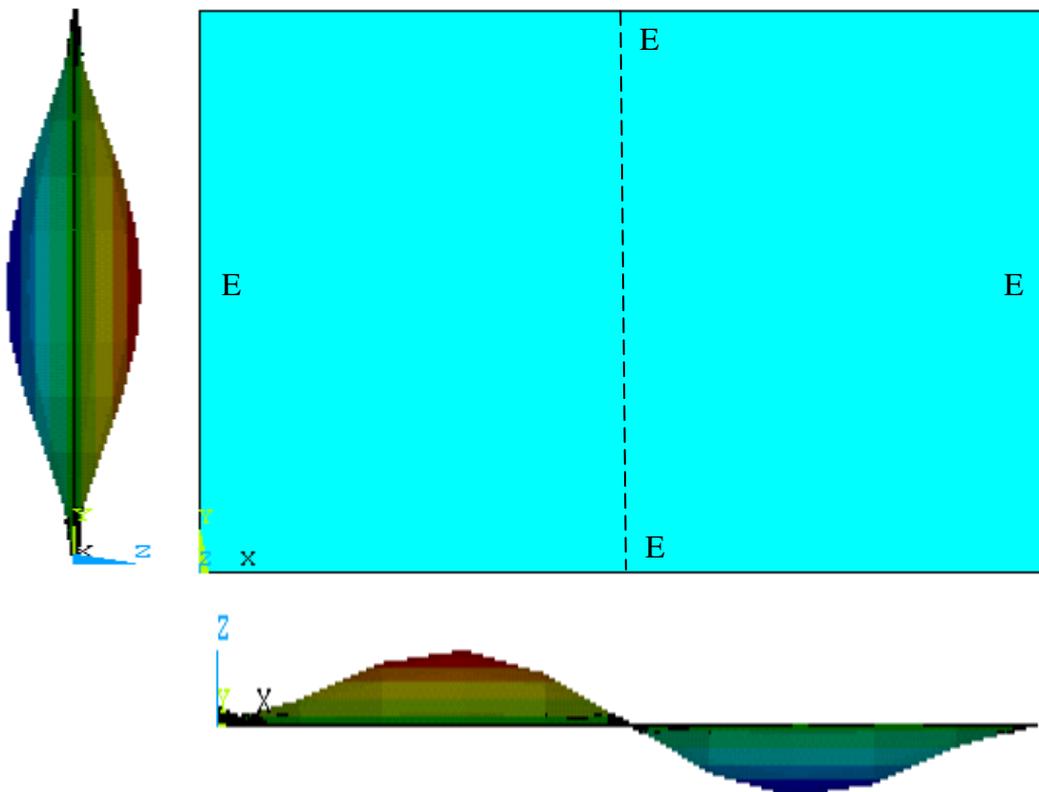
Figure 4.10. Maillage et condition aux limites appliquées à la plaque

Cas de la plaque EEEE

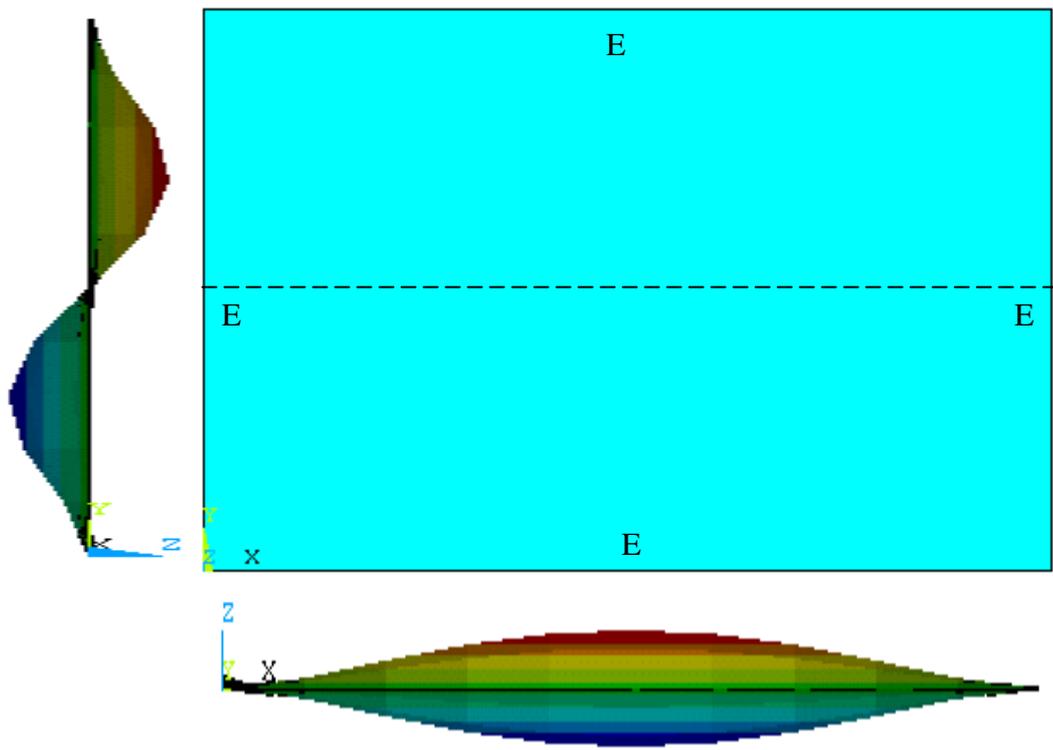




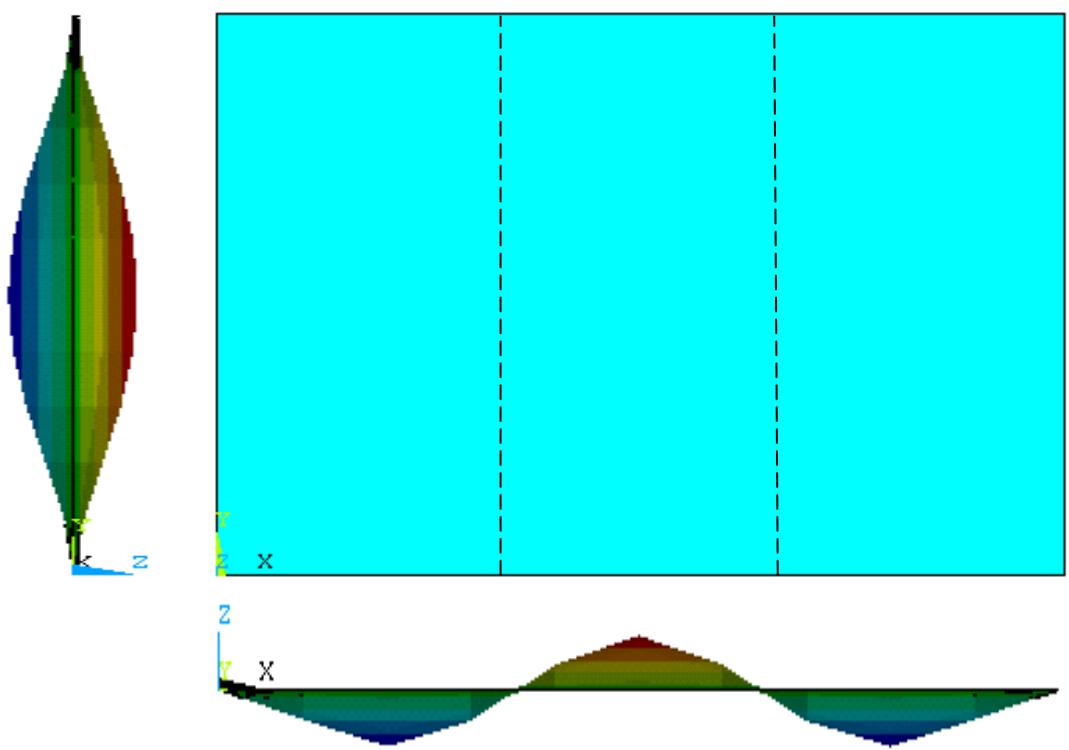
Premier mode 1-1  $m=1$  et  $n=1$



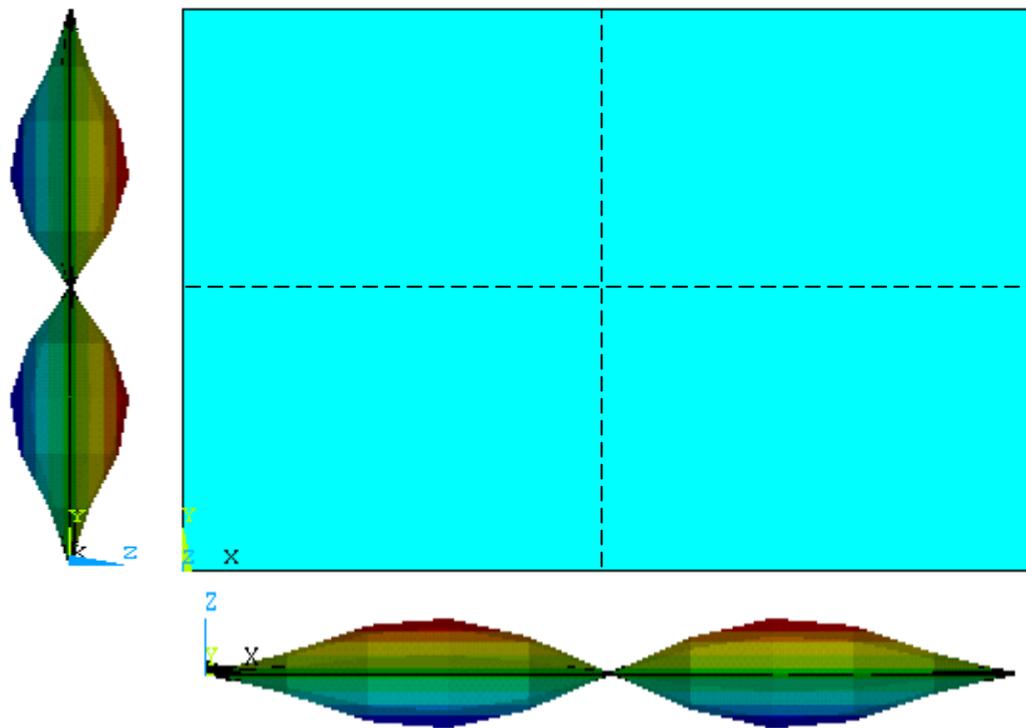
Deuxième mode 2-1  $m=2$  et  $n=1$



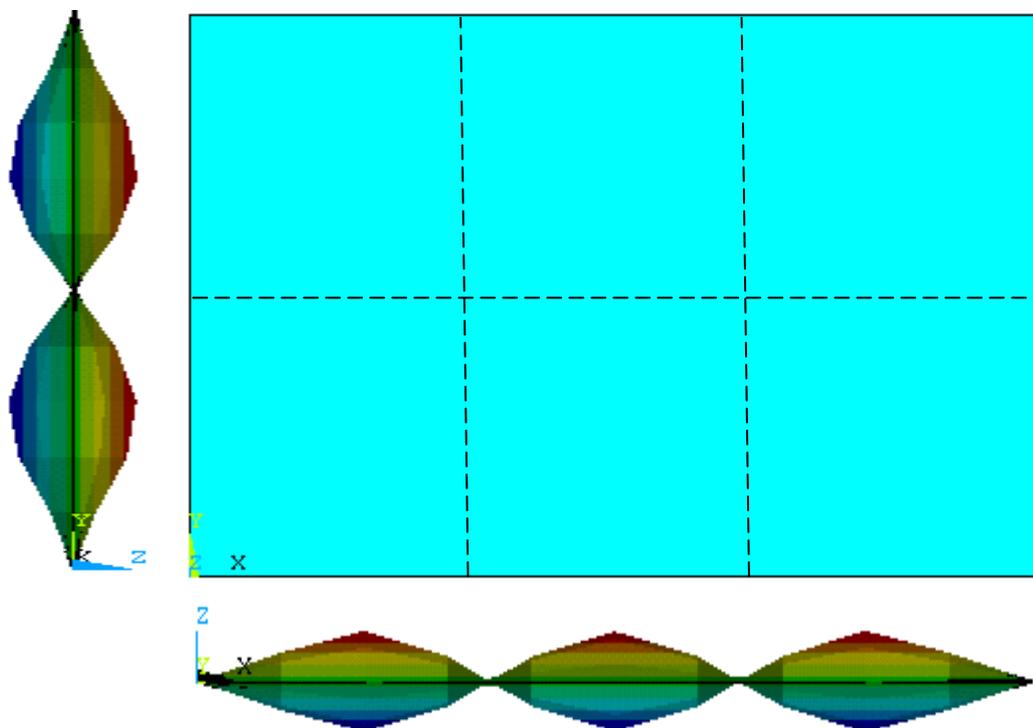
Troisième mode 1-2  $m=1$  et  $n=2$



Quatrième mode 3-1  $m=3$  et  $n=1$

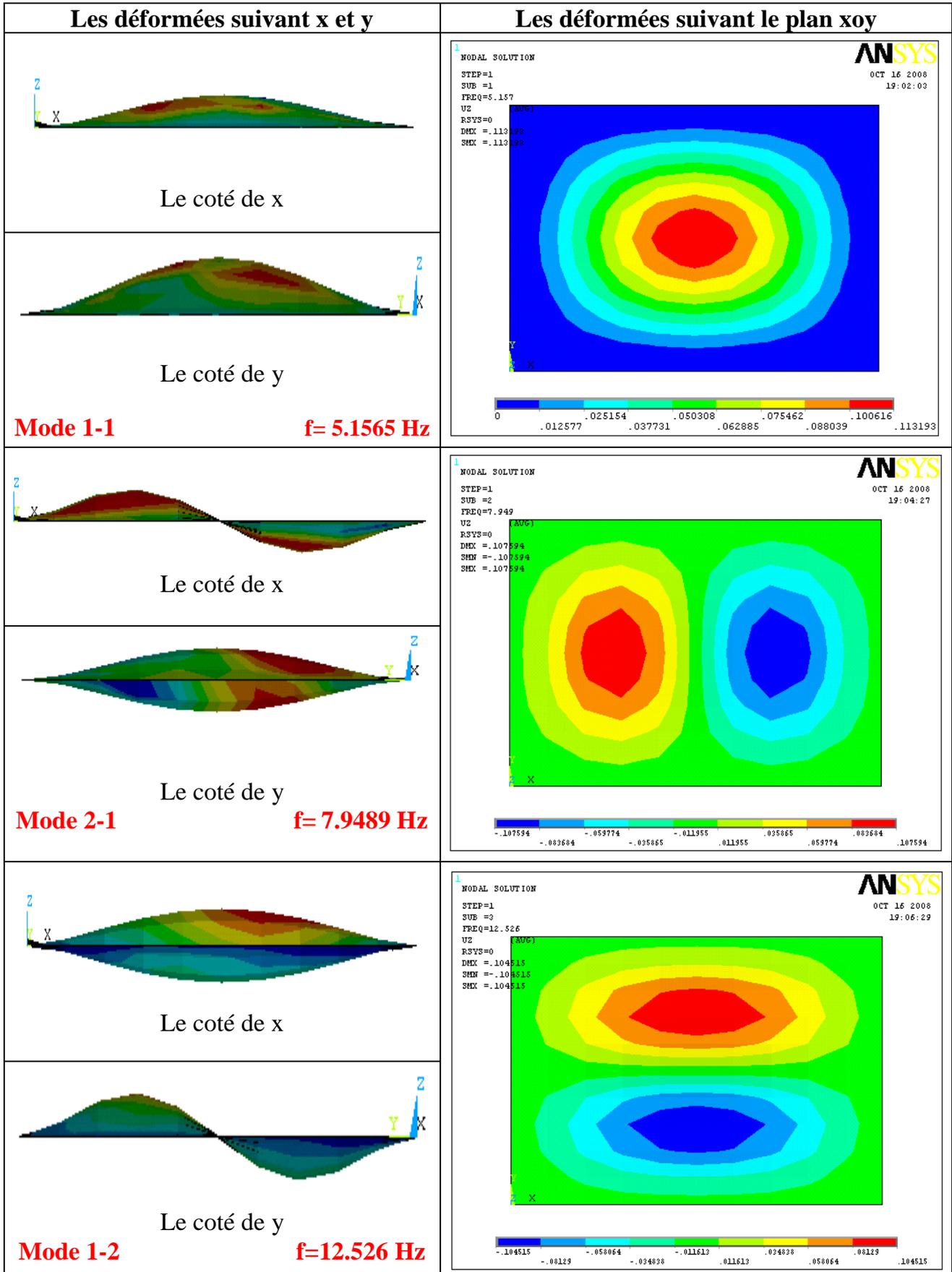


Cinquième mode 2-2  $m=2$  et  $n=2$



Sixième mode 3-2  $m=3$  et  $n=2$

Figure 4.12. Présentation des lignes modales de six (06) premiers modes de la plaque EEEE



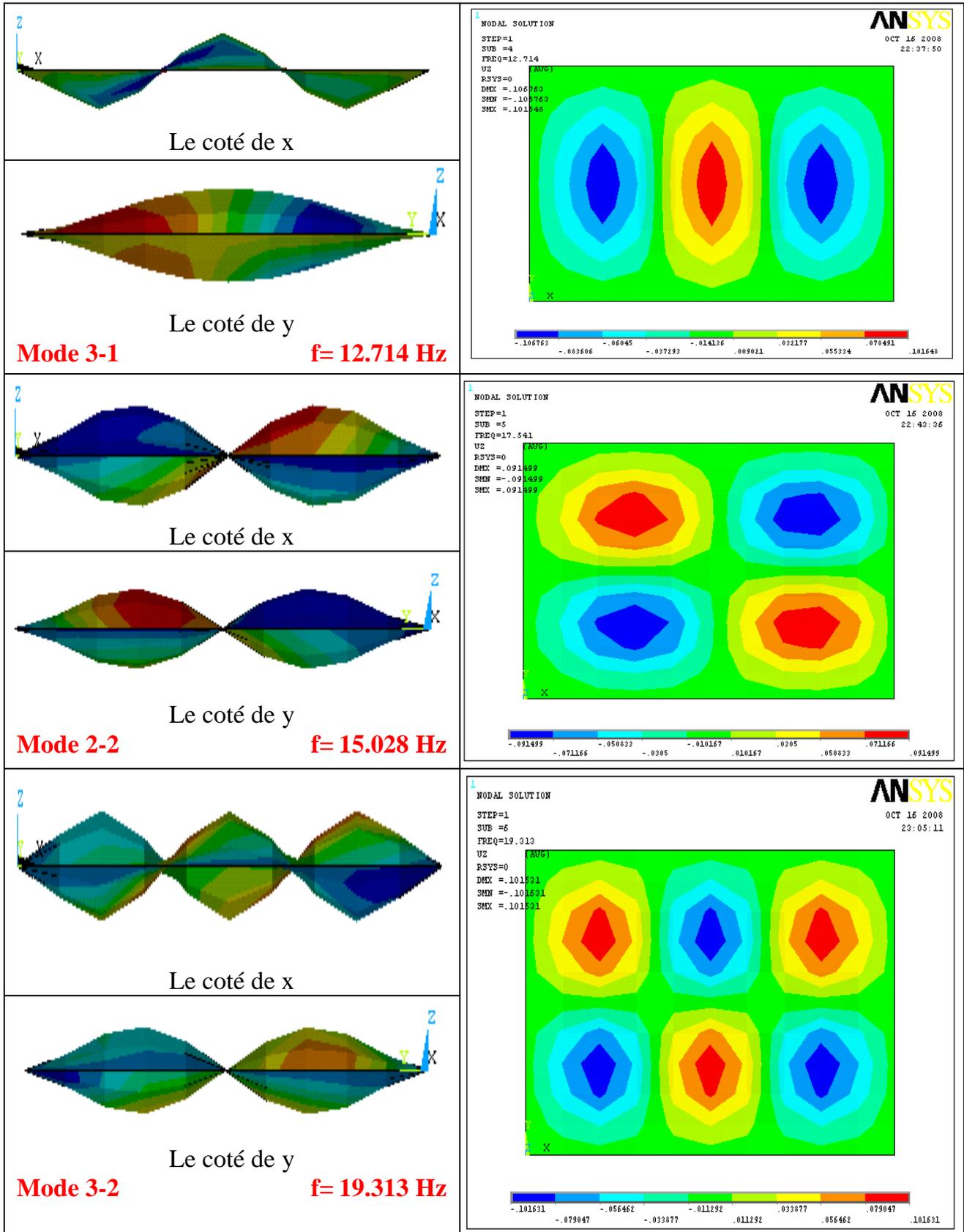
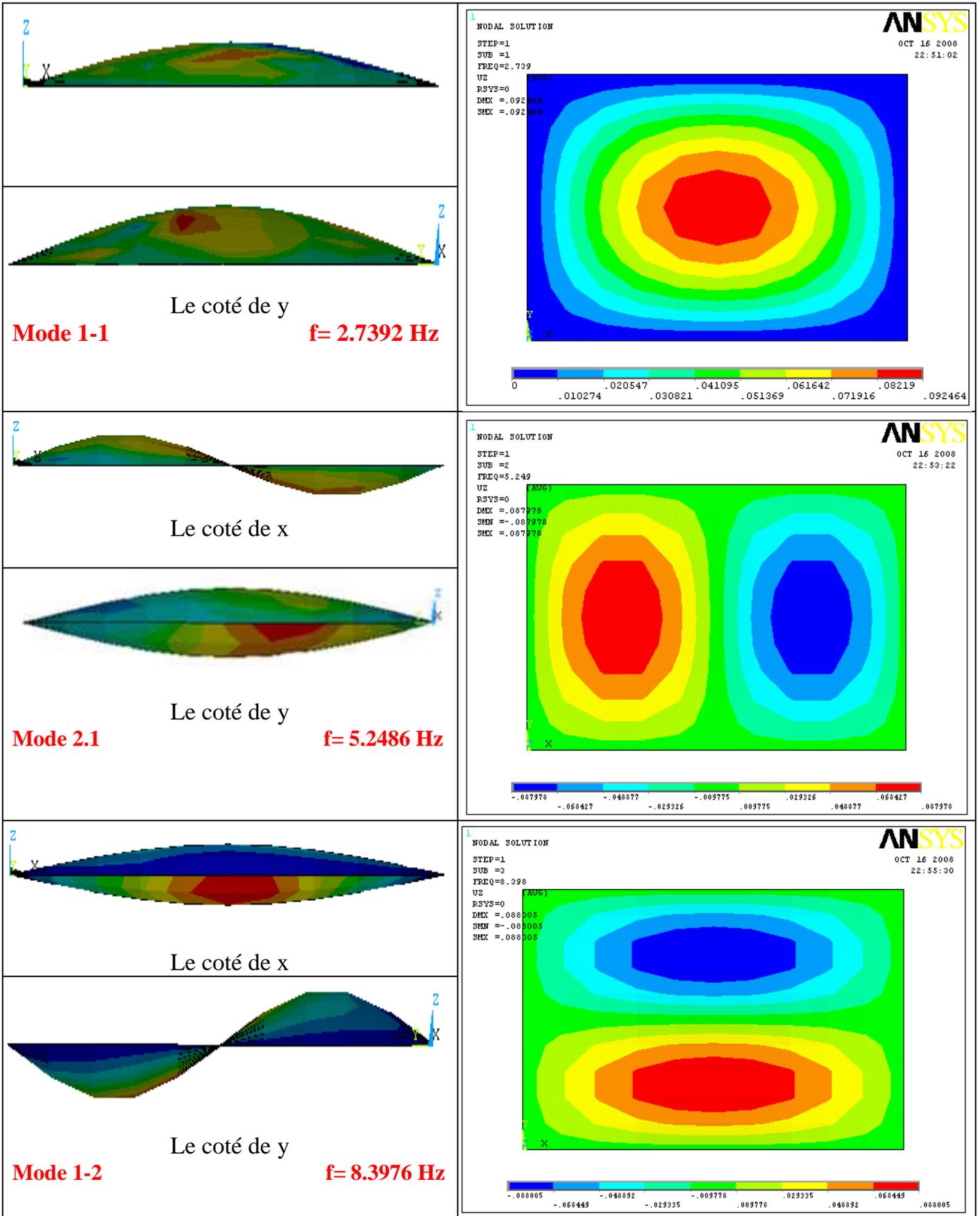


Figure 4.13. Fréquences et déformées propre des six premiers modes de flexion de la plaque EEEE calcul de structure sous ANSYS



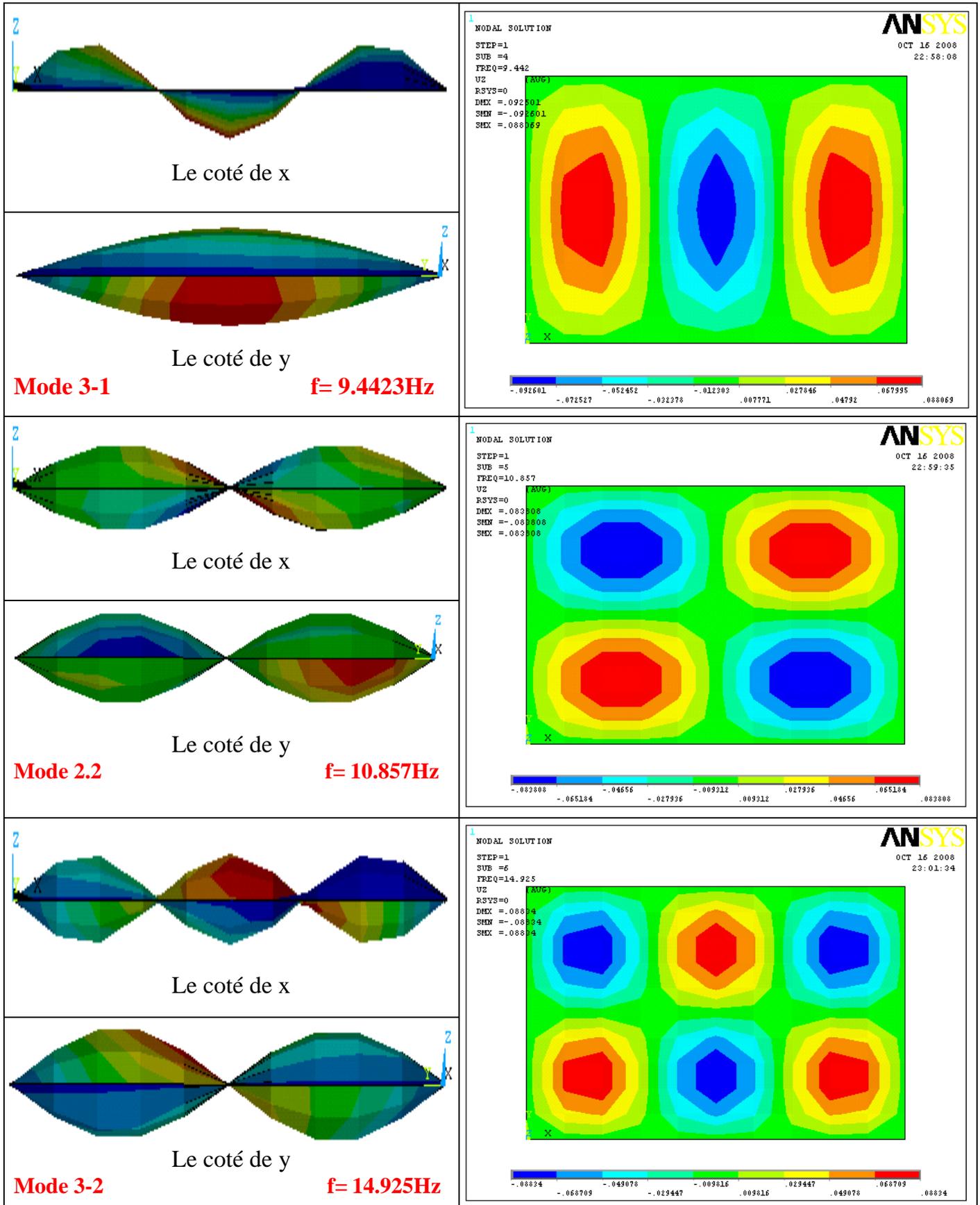


Figure 4.14. Fréquences et déformées propre des six premiers modes de flexion de la plaque AAAA calcul de structure sous ANSYS

#### 4.4. Analyse des résultats

Sur les tableaux (4.3) et (4.4) sont reportées les valeurs des fréquences propres obtenues par deux méthodes considérées, analytique et calcul de structures par les éléments finis, respectivement pour les configurations (AAAA) et (EEEE). La plaque choisie  $R=a/b > 1$  ( $R=1.5$ ) et  $h=2\text{mm}$  est constante de chaque couche de la plaque.

| <b>R=1.5 ou a=3 et b=2 plaque AAAA</b> |           |                                     |   |            |   |
|--|-----------|-------------------------------------|---|------------|---|
| modes                                  | Déformées | Fréquences propres obtenues par MEF | Fréquences propres calculées par méthode de Rayleigh-Ritz | Ecart (Hz) | Ecart relatif $\Delta (\%) = \frac{f_{cs}-f_a}{f_{cs}}$ |
| 1                                      | 1-1       | 9,4749                              | 10,3681   | 0.8932     | 0.0861  |
| 2                                      | 2-1       | 15.071                              | 15,976  | 0.9050     | 0.0566  |
| 3                                      | 1-2       | 24.405                              | 26,0817   | 1.6767     | 0.0642  |
| 4                                      | 2-2       | 32.038                              | 33,336  | 1.2980     | 0.0389  |
| 5                                      | 3-1       | 37.496                              | 41,7157   | 4.2197     | 0.1011  |
| 6                                      | 3-2       | 37.611                              | 41,0809   | 3.4699     | 0.0844  |

Tableau 4.3. Comparaison des fréquences propres calculées analytiquement et en calcul de structure dans le cas de la plaque AAAA

| <b>R=1.5 ou a=3 et b=2 plaque EEEE</b> |           |                                     |   |            |   |
|--|-----------|-------------------------------------|---|------------|---|
| modes                                  | Déformées | Fréquences propres obtenues par MEF | Fréquences propres calculées par méthode de Rayleigh-Ritz | Ecart (Hz) | Ecart relatif $\Delta (\%) = \frac{f_{cs}-f_a}{f_{cs}}$ |
| 1                                      | 1-1       | 5,1565                              | 5,5969  | 0,4404     | 0,078686  |
| 2                                      | 2-1       | 7,9489                              | 8,841   | 0,8921     | 0,100905  |
| 3                                      | 1-2       | 12,526                              | 14,419  | 1,893      | 0,131285  |
| 4                                      | 2-2       | 12,714                              | 14,5567   | 1,8427     | 0,126588  |
| 5                                      | 3-1       | 15,028                              | 18,1762   | 3,1482     | 0,173205  |
| 6                                      | 3-2       | 19,313                              | 23,5334   | 4,2204     | 0,179337  |

Tableau 4.4. Comparaison des fréquences propres calculées analytiquement et en calcul de structure dans le cas de la plaque EEEE

Le problème résolu sous ANSYS est le problème général décrit par les équations (2.128) à (2.132), et prend en considération les trois composantes du déplacement de la plaque, alors que dans notre approche nous ne considérant que le déplacement transversal.

D'autre part, la formulation des éléments retenus par le code de calcul est basée sur la théorie des stratifiés (multicouches) du premier ordre (Mindlin) alors que celle utilisée pour développer le programme de calcul élaboré est la théorie classique des stratifiées.

Cette dernière négligeant le cisaillement transverse et l'inertie de rotation des sections droites, conduit à surestimer les valeurs des fréquences propres. En effet les contraintes de cisaillement transverse tendent à diminuer l'énergie de déformation alors que l'inertie de rotation augmente l'énergie cinétique totale de la plaque ce qui abaisse les fréquences propres représentées schématiquement par le rapport énergie de déformation-énergie cinétique, ou quotient de Rayleigh [7]. Ces deux effets s'accroissent dans le sens du rang du mode expliquant ainsi la tendance à l'augmentation de l'écart entre les deux formations pour les modes de rang supérieur.

#### 4.4.1. Validation des calculs par logiciels ANSYS

Pour vérifier la consistance des résultats obtenus d'après les calculs des structure par les éléments finies sous ANSYS, on utilise une comparaison avec les résultats obtenue par la méthode de Hearmon [37].

En utilise comme exemple de calcul le modèle d'une plaque rectangulaire orthotrope de caractéristique mécanique

$$E_x=1E+10 \text{ pa}, E_y=5 E+09 \text{ et } \nu_{xy}=0.2, G_{xy}=3.1 E+09 \text{ pa et } \rho=7800 \text{ kg/m}^3$$

Pour chaque modèle de plaque (R=1.25, R=1.33, R=1.5) et six (06) conditions de fixations (AAAA, EEEE, EAEE, AEAE, AAEE, AAEA). (Annexe B)

Tableau 4.5. Comparaison des fréquences propres calculées par méthode de Hearmon et en calcul de structure sous ANSYS dans le cas de la plaque AAAA

| <b>R=1.25 ou a=4m et b=3.2m</b> |                 |              |             |                   |              |
|---------------------------------|-----------------|--------------|-------------|-------------------|--------------|
| <b>modes</b>                    | <b>Déformée</b> | <b>ANSYS</b> | <b>NM</b>   | <b>Ecart (Hz)</b> | <b>Δ (%)</b> |
|                                 |                 | <b>AAAA</b>  | <b>AAAA</b> |                   |              |
| <b>1</b>                        | <b>1-1</b>      | 0,68239      | 0.68        | -0.00239          | -0.3514      |
| <b>2</b>                        | <b>2-1</b>      | 1.6548       | 1.66        | 0.0052            | 0.3132       |
| <b>3</b>                        | <b>1-2</b>      | 1.7568       | 1.76        | 0.0032            | 0.1818       |
| <b>4</b>                        | <b>2-2</b>      | 2.7293       | 2.73        | 0.0007            | 0.0256       |
| <b>5</b>                        | <b>3-1</b>      | 3.2752       | 3.28        | 0.0048            | 0.1463       |
| <b>6</b>                        | <b>3-2</b>      | 4.3493       | 4.35        | 0.0007            | 0.0160       |

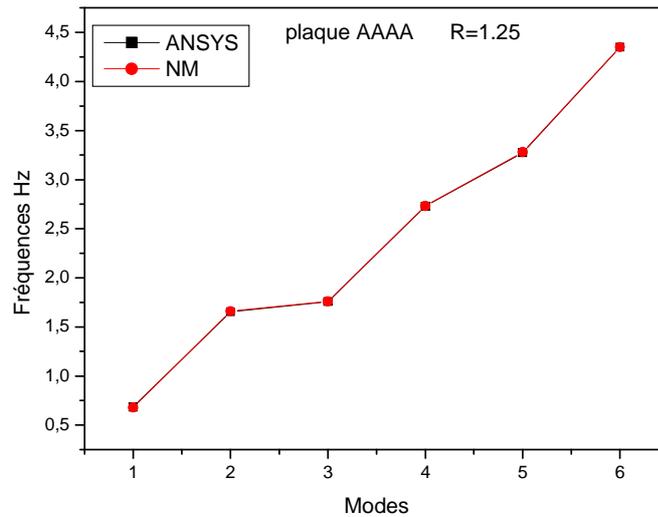


Figure 4.15. Comparaison des fréquences propres calculées par Hearmon et en calcul de structure sous ANSYS dans le cas de la plaque AAAA

Après cette comparaison on obtient une petite erreur de calculs entre les deux méthodes de calculs pour ce les calculs de structure par les éléments finis sous ANSYS est correcte. Les autres comparaisons pour différentes conditions de frontières représente dans l'annexe B.

#### 4.4.2. Plaques Rectangulaire orthotropes multicouches

Les plaques étudiées présentent 4 couches orthotropes de même épaisseurs réparties en modèle symétrie miroir et antisymétrie. Afin de cerner les réponses dynamiques pour différentes catégories de plaque (R=0.5, R=1, R=1.5, R=2 et R=1.25, R= 1.333, R=1.5 ).

Les Tableaux (4.6) et (4.7) qui suivent présentes respectivement, les propriétés mécaniques et géométriques de les plaques.[43]

Tableau (4.6) : Caractéristiques Mécaniques des plaques multicouches à phase orthotrope (Np=4.).

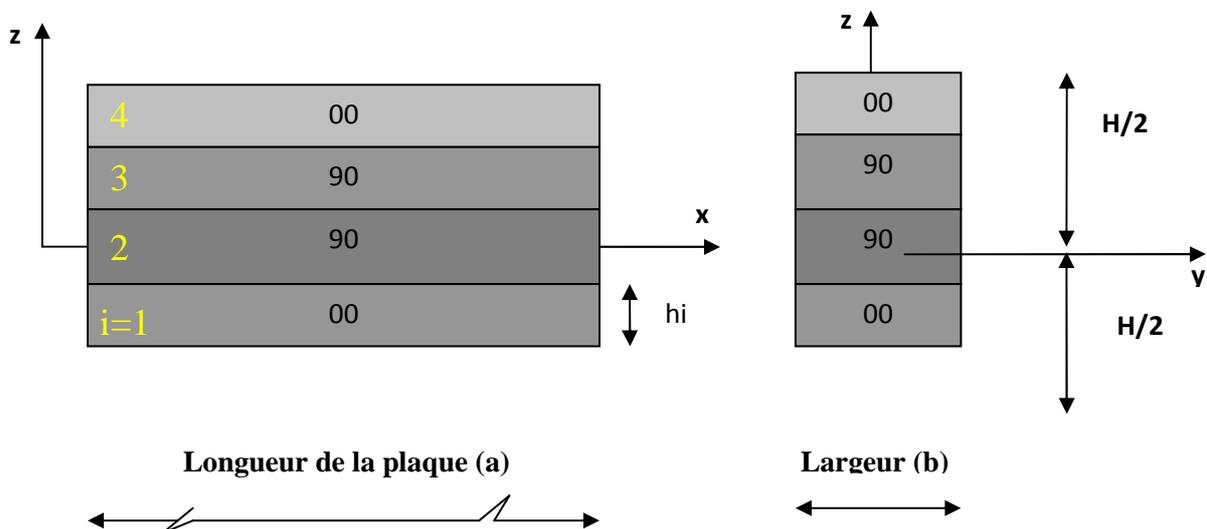
| Modèle de plaque | Matériaux       | E <sub>1</sub> (Gpa) | E <sub>2</sub> (Gpa) | G <sub>12</sub> (Gpa) | ν <sub>12</sub> | ρ (kg/m <sup>3</sup> ) |
|------------------|-----------------|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------|------------------------|
| Ortho 01         | AS4 (3501/6)    | 148                  | 10.50                | 5.61                  | 0.30            | 1520                   |
| Ortho 02         | AS/3501         | 138                  | 9.00                 | 6.90                  | 0.30            | 1600                   |
| Ortho 03         | T300/5208       | 132                  | 10.8                 | 5.65                  | 0.24            | 1540                   |
| Ortho 04         | Kevlar/époxy    | 76.8                 | 5.5                  | 2.07                  | 0.34            | 1380                   |
| Ortho 05         | Boron/Al        | 227                  | 139                  | 57.6                  | 0.24            | 2650                   |
| Ortho 06         | SCS-6/TI-15-3   | 221                  | 145                  | 53.2                  | 0.27            | 3860                   |
| Ortho 07         | S-2 glass/epoxy | 43.5                 | 11.5                 | 3.45                  | 0.27            | 2000                   |

Tableau (4.7) : Propriétés géométriques du model des plaques multicouche orthotropes (Np=4).

| Types de plaque | Longueur a (m) | Largeur b (m) | Rapport R=a/b (longueur/largeur) | Hauteur totale H (mm) | Epaisseur de pli h (mm) |
|-----------------|----------------|---------------|----------------------------------|-----------------------|-------------------------|
| Modèle 01       | 1              | 2             | 0.5                              | 2                     | 0.5                     |
| Modèle 02       | 1              | 1             | 1                                | 2                     | 0.5                     |
| Modèle 03       | 3              | 2             | 1.5                              | 2                     | 0.5                     |
| Modèle 04       | 2              | 1             | 2                                | 2                     | 0.5                     |

### 4.4.3. Influence de l'empilement des couches

#### 4.4.3.1. Plaque orthotrope constituée d'un stratifié équilibré symétrique ( i pair)



#### 4.4.3.2. Calcul les matrices de rigidité A, B et D

Après les relations (2.64), (2.99) et utilise le programme sous MATLAB en obtient les matrices de rigidité pour chaque matériau. (Tableau 4.6)

##### Ortho 1

$$[Q] = \begin{bmatrix} 148.938 & 3.13 & 0 \\ 3.13 & 10.566 & 0 \\ 0 & 0 & 5.61 \end{bmatrix} \text{ Gpa}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 159.504 & 6.26 & 0 \\ 6.26 & 152.068 & 0 \\ 0 & 0 & 11.22 \end{bmatrix} \text{ Gpa.mm}$$

$$[B] = 0 \text{ Gpa.mm}^2$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 1053.132 & 25.04 & 0 \\ 25.04 & 170.848 & 0 \\ 0 & 0 & 44.88 \end{bmatrix} \text{ Gpa. mm}^3$$

**Ortho 2**

$$[Q] = \begin{bmatrix} 138.812 & 2.715 & 0 \\ 2.715 & 9.0529 & 0 \\ 0 & 0 & 6.9 \end{bmatrix} \text{ Gpa}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 147.864 & 5.43 & 0 \\ 5.43 & 141.527 & 0 \\ 0 & 0 & 13.8 \end{bmatrix} \text{ Gpa. mm}$$

$$[B] = 0 \text{ Gpa. mm}^2$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 980.736 & 5.43 & 0 \\ 5.43 & 157.817 & 0 \\ 0 & 0 & 55.2 \end{bmatrix} \text{ Gpa. mm}^3$$

**Ortho 3**

$$[Q] = \begin{bmatrix} 132.623 & 2.593 & 0 \\ 2.593 & 10.805 & 0 \\ 0 & 0 & 5.65 \end{bmatrix} \text{ Gpa}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 143.428 & 5.186 & 0 \\ 5.186 & 135.216 & 0 \\ 0 & 0 & 11.3 \end{bmatrix} \text{ Gpa. mm}$$

$$[B] = 0 \text{ Gpa. mm}^2$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 939.166 & 20.744 & 0 \\ 20.744 & 150.774 & 0 \\ 0 & 0 & 45.2 \end{bmatrix} \text{ Gpa. mm}^3$$

**Ortho 4**

$$[Q] = \begin{bmatrix} 77.25 & 1.880 & 0 \\ 1.880 & 5.532 & 0 \\ 0 & 0 & 2.07 \end{bmatrix} \text{ Gpa}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 82.782 & 3.761 & 0 \\ 3.761 & 79.130 & 0 \\ 0 & 0 & 4.14 \end{bmatrix} \text{ Gpa. mm}$$

$$[B] = 0 \text{ Gpa. mm}^2$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 546.282 & 15.047 & 0 \\ 15.047 & 90.416 & 0 \\ 0 & 0 & 16.56 \end{bmatrix} \text{Gpa. mm}^3$$

**Ortho 5**

$$[Q] = \begin{bmatrix} 235.242 & 34.571 & 0 \\ 34.571 & 144.047 & 0 \\ 0 & 0 & 57.6 \end{bmatrix} \text{Gpa}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 379.289 & 69.142 & 0 \\ 69.142 & 269.813 & 0 \\ 0 & 0 & 115.2 \end{bmatrix} \text{Gpa. mm}$$

$$[B] = 0 \text{ Gpa. mm}^2$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 1790.741 & 276.568 & 0 \\ 276.568 & 477.239 & 0 \\ 0 & 0 & 460.8 \end{bmatrix} \text{Gpa. mm}^3$$

**Ortho 6**

$$[Q] = \begin{bmatrix} 232.091 & 41.114 & 0 \\ 41.114 & 152.277 & 0 \\ 0 & 0 & 53.2 \end{bmatrix} \text{Gpa}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 384.368 & 82.228 & 0 \\ 82.228 & 273.205 & 0 \\ 0 & 0 & 106.4 \end{bmatrix} \text{Gpa. mm}$$

$$[B] = 0 \text{ Gpa. mm}^2$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 1776.914 & 328.912 & 0 \\ 328.912 & 519.889 & 0 \\ 0 & 0 & 425.6 \end{bmatrix} \text{Gpa. mm}^3$$

**Ortho 7**

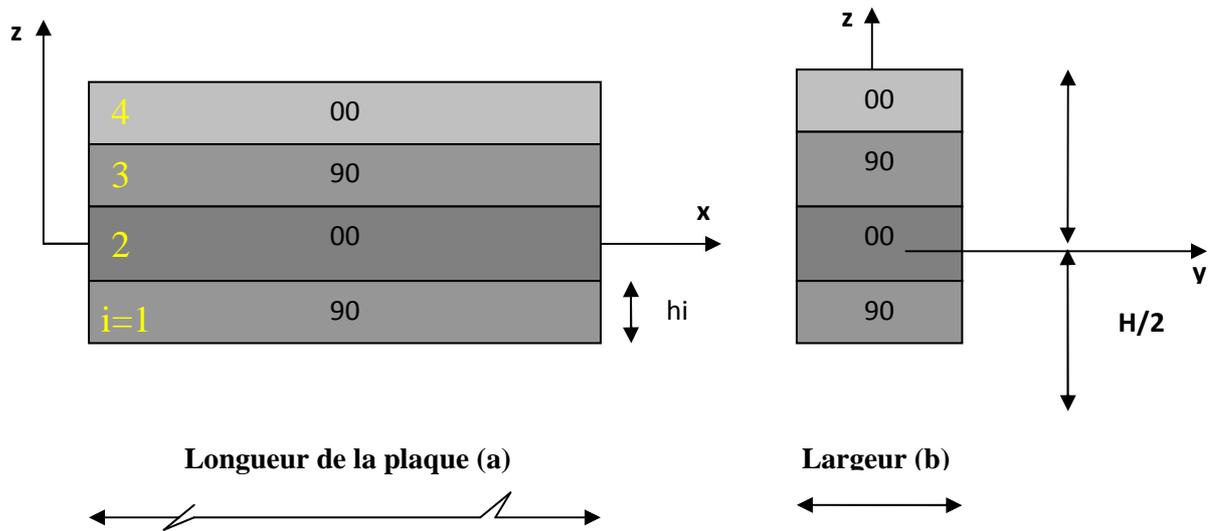
$$[Q] = \begin{bmatrix} 44.353 & 3.165 & 0 \\ 3.165 & 11.725 & 0 \\ 0 & 0 & 3.45 \end{bmatrix} \text{Gpa}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 56.078 & 6.33 & 0 \\ 6.33 & 47.518 & 0 \\ 0 & 0 & 6.9 \end{bmatrix} \text{Gpa. mm}$$

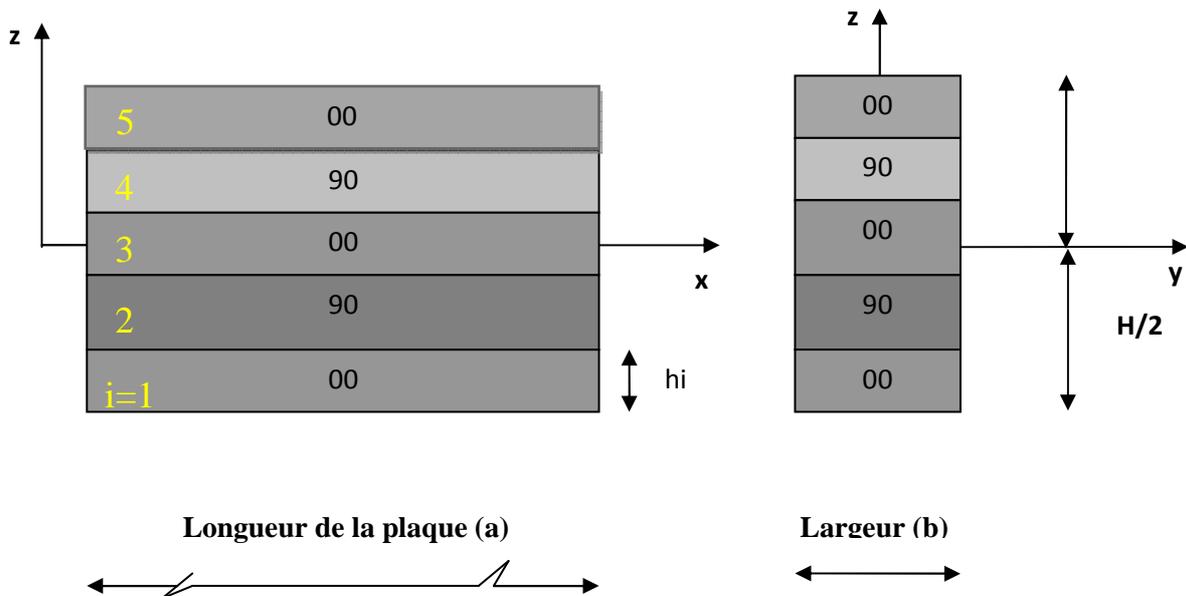
$$[B] = 0 \text{ Gpa. mm}^2$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 322.196 & 25.32 & 0 \\ 25.32 & 66.508 & 0 \\ 0 & 0 & 27.6 \end{bmatrix} \text{ Gpa. mm}^3$$

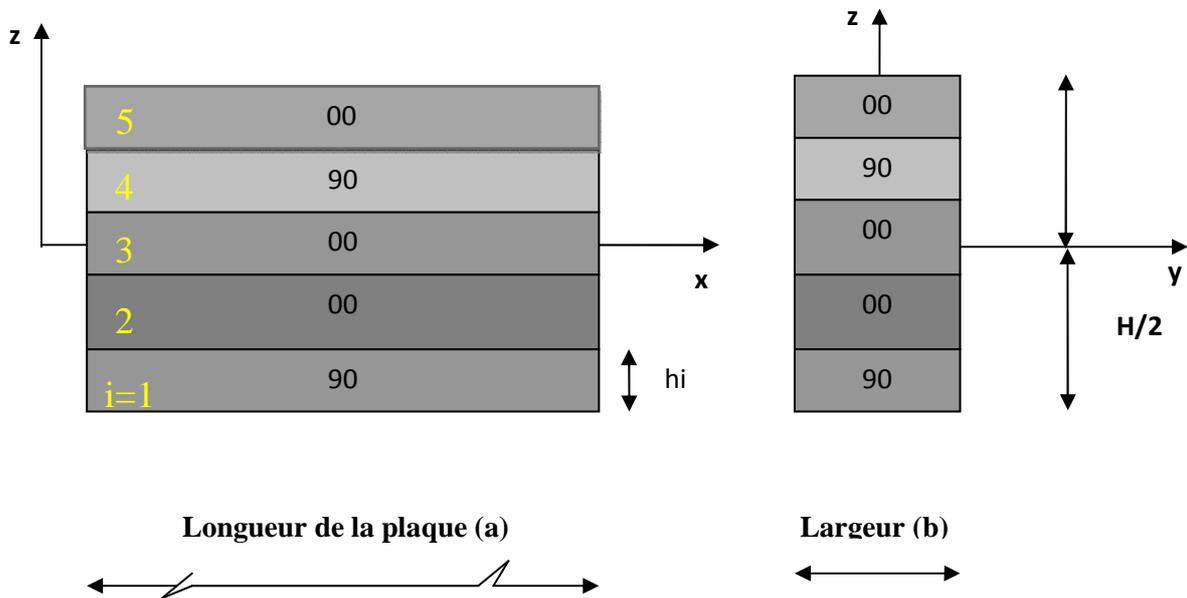
**4.4.3.2. Plaque orthotrope constituée d'un stratifié équilibré antisymétrique ( i pair)**



**4.4.3.3. Plaque orthotrope constituée d'un stratifié alterné (non équilibré) symétrique ( i impair)**



**4.4.3.3. Plaque orthotrope constituée d'un stratifié alterné (non équilibré) antisymétrique (i impair)**



**4.4.4. Influence de dimensions (longueur, largeur):**

**A) plaque multicouche à phase isotrope (Np=5)**

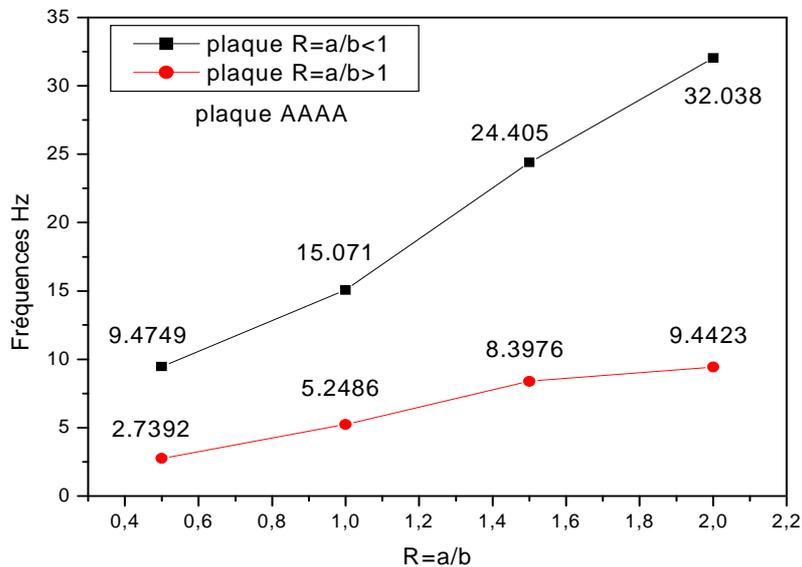


Figure.4.16. Effet de rapport des dimensions (a/b) sur l'évolution du paramètre fréquentiel De la plaque AAAA

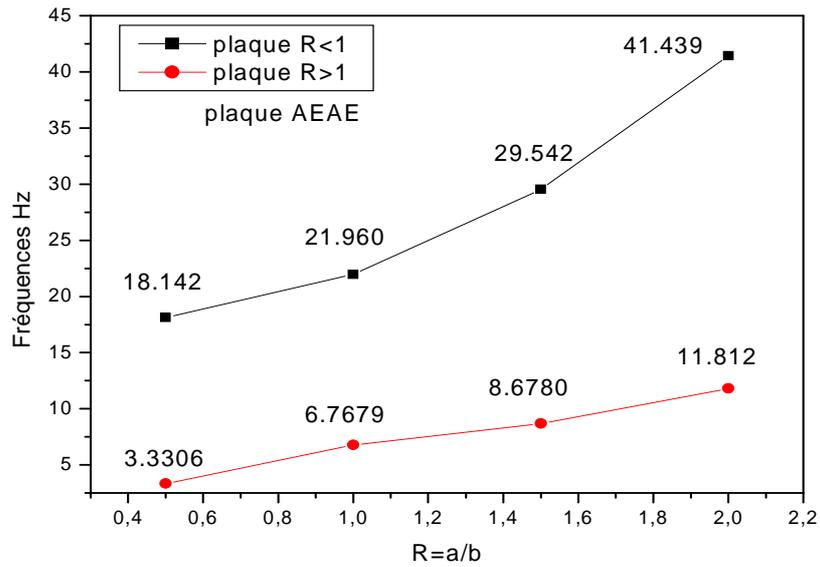


Figure.4.17. influence de rapport (a/b) sur l'évolution de paramètre fréquentiel de la plaque EAEA dans les deux cas ( $a>b$  et  $b>a$ )

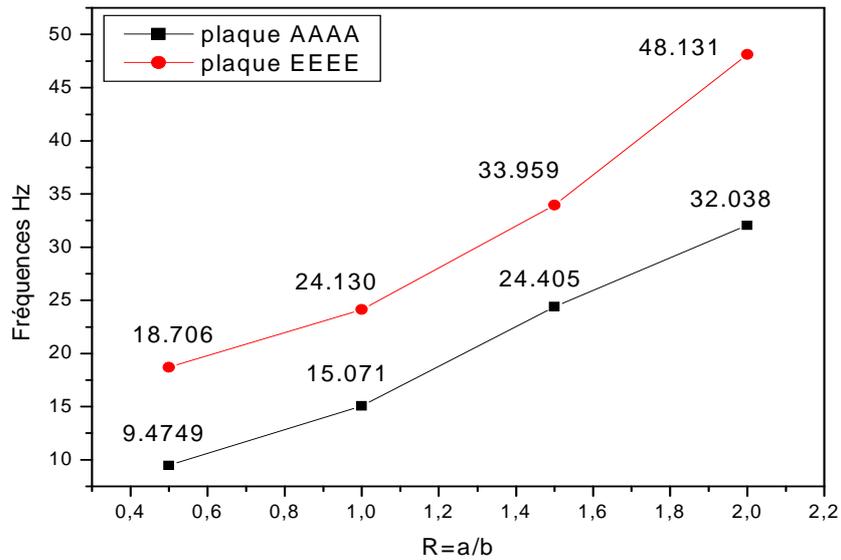


Figure 4.18. Influence de rapport (a/b) sur l'évolution du paramètre fréquentiel des plaques Simplement appuyé (AAAA) et encastre (EEEE)

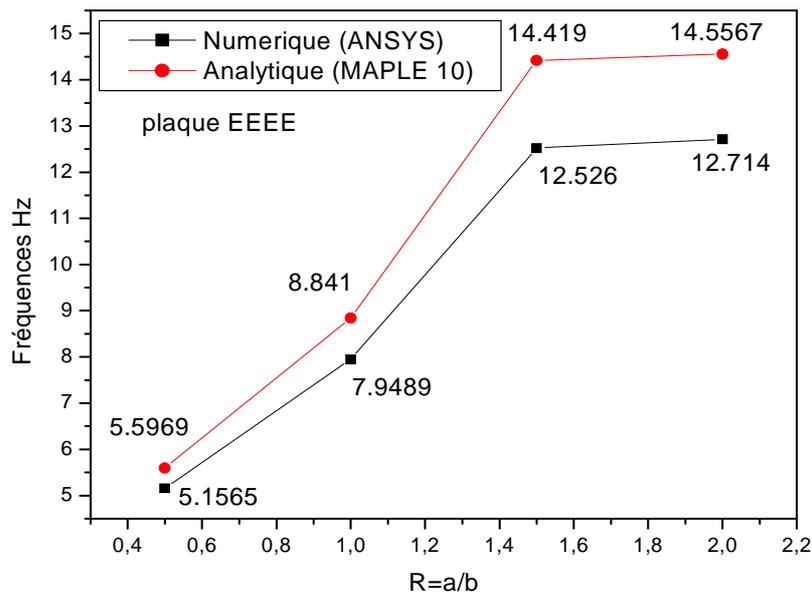


Figure 4.19. Influence de rapport (a/b) sur l'évolution du paramètre fréquentiel de la plaque EEEE d'après deux méthodes

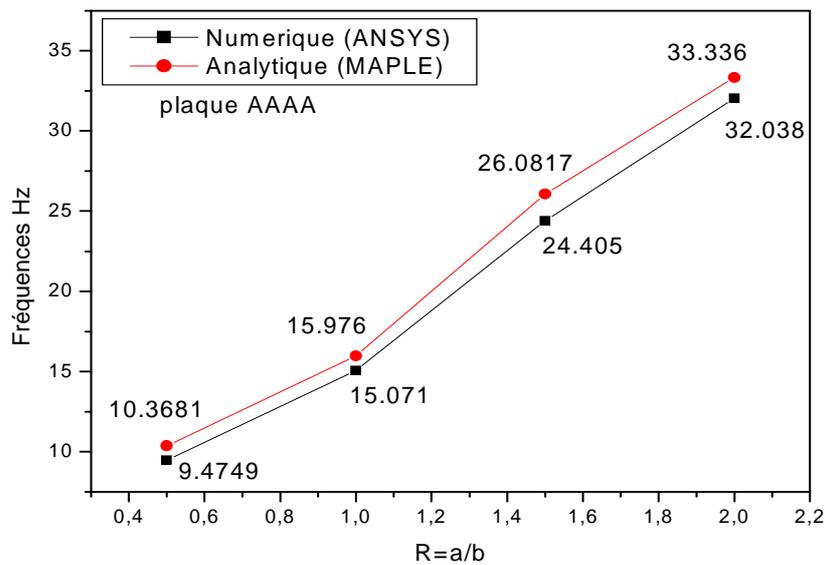


Figure 4.20. Influence de rapport (a/b) sur l'évolution du paramètre fréquentiel de la plaque AAAA d'après deux méthodes

4.4.3. Influence des conditions aux limites

A) plaque multicouche à phase isotrope (Np=5)

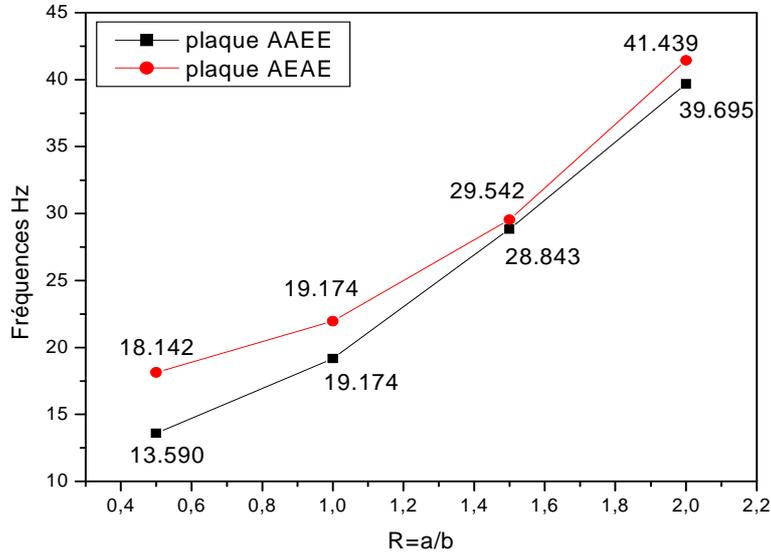


Figure 4.21. Influence du rapport des dimensions (a/b) et des conditions aux limites AAEE et AEAE sur l'évolution de paramètre fréquentiel d'une plaque multicouche

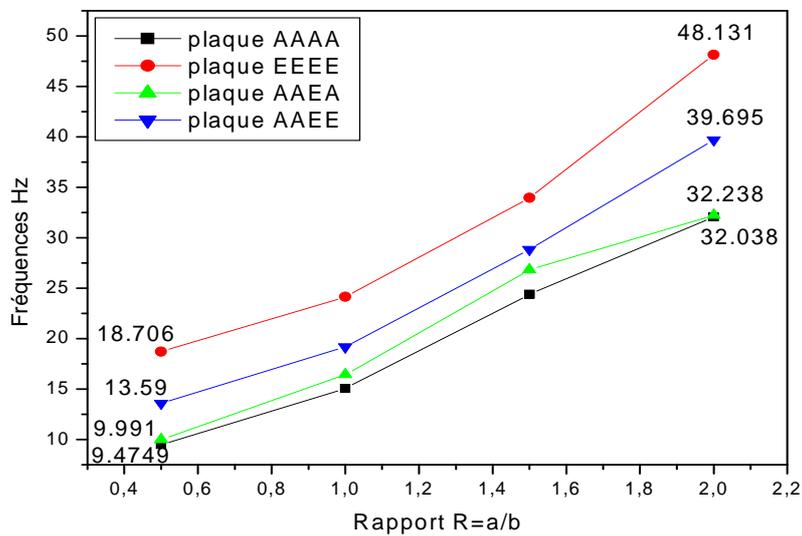


Figure 4.22. Influence des conditions aux limites sur le paramètre fréquentiel d'une plaque rectangulaire multicouche

Dans ces graphes on voit l'influence croissante du rapport de dimensions sur l'accroissements des courbes pour les deux cas de fixités AAEE et AEAE (figure 4.21) d'autre part l'influence des conditions aux limites est observée en comparant dans le sens vertical la dispersion des deux courbes .cette constatation est confirmée par l'analyse qualitative car la plaque évolue dans le petit sens du comportement poutre (AAEE→EA) et

(AEAE→AA), la rigidité de la poutre EA étant plus grande que celle de la poutre AA explique l'écart supérieure des fréquences  $\omega_{AAEE}$  Par rapport à  $\omega_{AEAE}$ . ce résultat est bien en accord avec celui obtenu par calculs des structure MEF sous ANSYS.

La figure (4.22) montre que le paramètre fréquentiel de la plaque EEEE est plus grand que les autres plaques car elle est plus rigide.

#### 4.4.4. Influence de séquence des modes

Nous considérons une plaque rectangulaire multicouche (a . b), a partir de l'équation (4.9) nous déterminons la variation de la fréquence pour le premier mode et les autres modes élevées.  $\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{21}, \omega_{22}, \omega_{31}, \omega_{32}$

La figure 4.23. Représente l'évolution de la fréquence en fonction de numéro de mode pour une plaque rectangulaire et encastree sur les quatre bords.

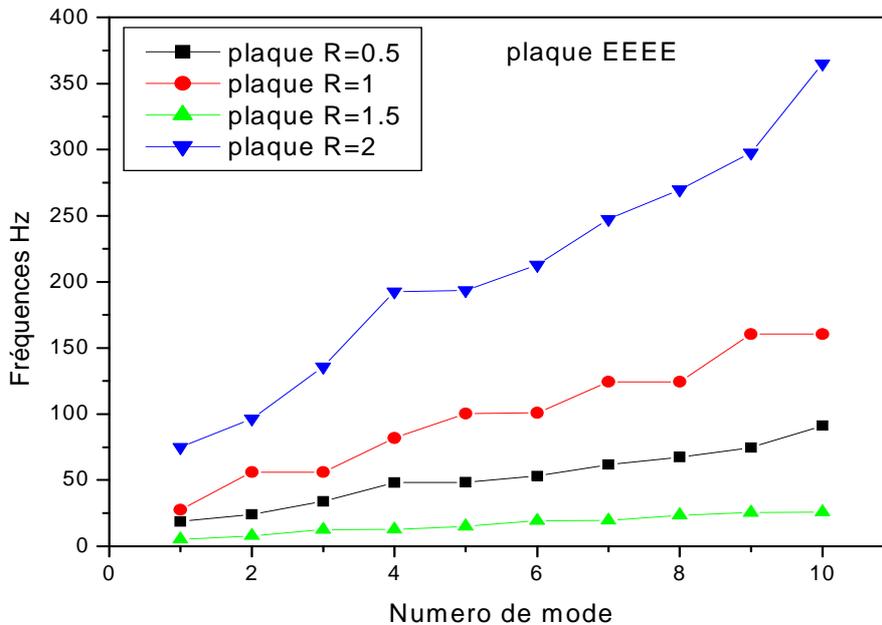


Figure 4.23. Influence de la fréquence propre en fonction du numéro de mode de la plaque Rectangulaire multicouche EEEE

Cette figure montre que la croissance du la fréquence circulaire liée aux numéros de mode

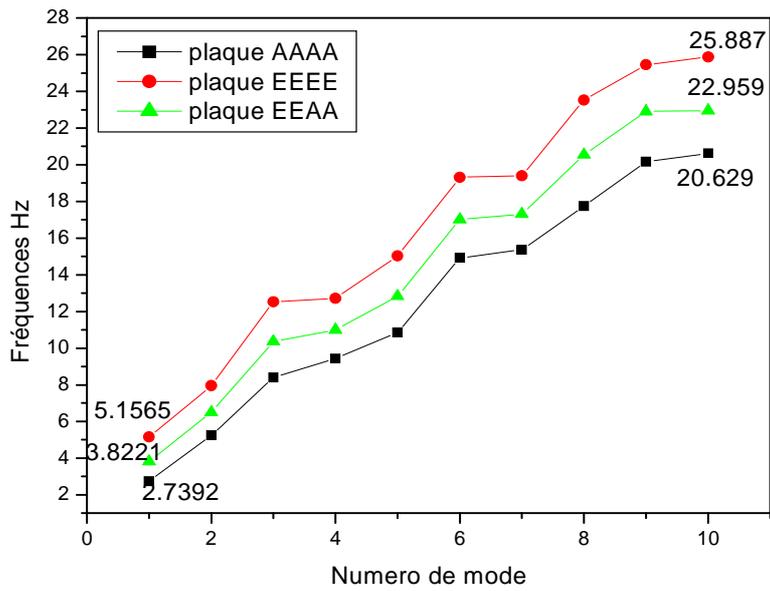


Figure 4.24. Variation du paramètre fréquentiel d'une plaque rectangulaire multicouche a différentes Fixités dans les premiers modes de vibration

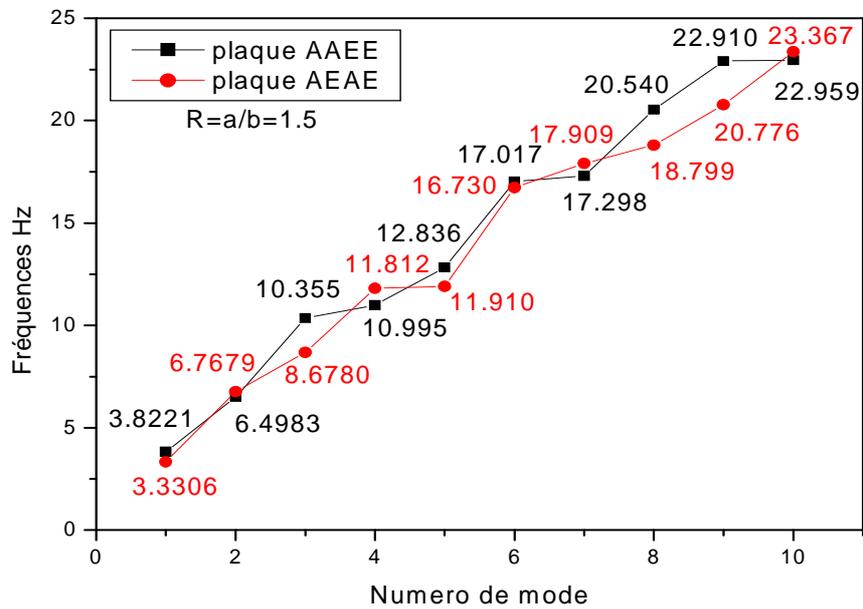


Figure 4.25. Variation du paramètre fréquentiel en fonction du numéro de mode de deux type de plaque AEAE et AAEE

### Discussion de l'influence de l'effet combiné du rapport des dimensions (a/b), et du numéro du mode N sur le comportement vibratoire libre de la plaque rectangulaire multicouche

Dans ces graphes on étudie l'évolution du facteur des fréquences naturelles sous la double l'influence du rapport des dimensions et du numéro du mode.

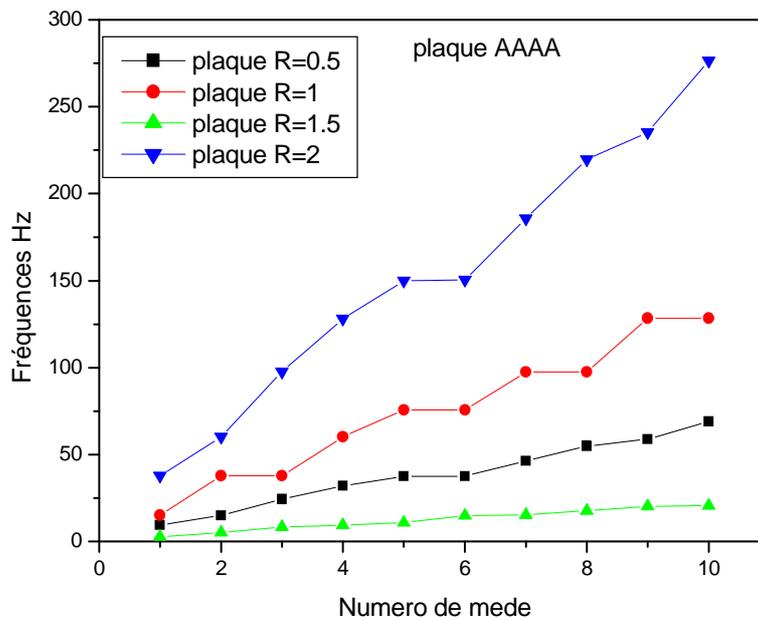


Figure 4.26. Evolution du facteur de fréquence en fonction du numéro modale ( $N_1[\omega_{11}]$ ,  $N_2[\omega_{21}]$ ,  $N_3[\omega_{12}]$ ,  $N_4[\omega_{31}]$ ,  $N_5[\omega_{22}]$ ,  $N_6[\omega_{32}]$ ,  $N_7[\omega_{41}]$ ,  $N_8[\omega_{13}]$ ,  $N_9[\omega_{23}]$ ,  $N_{10}[\omega_{42}]$ ).

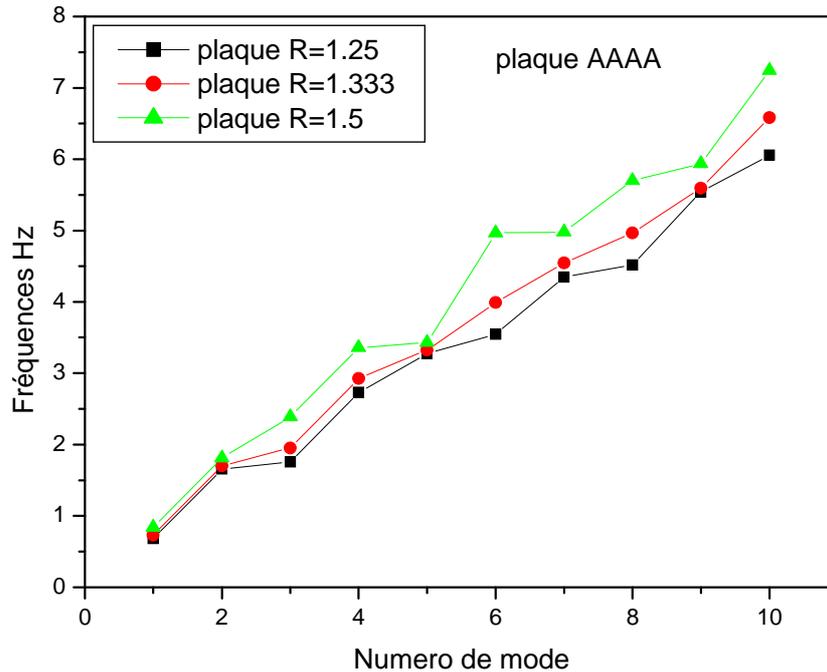


Figure 4.27 : Evolution du facteur de fréquence en fonction du numéro modale ( $N_1[\omega_{11}]$ ,  $N_2[\omega_{12}]$ ,  $N_3[\omega_{21}]$ ,  $N_4[\omega_{22}]$ ,  $N_5[\omega_{23}]$ ,  $N_6[\omega_{32}]$ ,  $N_7[\omega_{41}]$ ,  $N_8[\omega_{13}]$ ,  $N_9[\omega_{23}]$ ,  $N_{10}[\omega_{42}]$ ,

**Conclusion**

Cette application montre la croissance du terme correctif liée aux numéros des modes, d'autre part on voit l'effet du rapport de dimension qui donne pour la plus grand valeur du rapport  $(a/b)=2$  une enveloppe inférieur, ce qui est conforme avec l'analyse qualitative qui explique que pour ce même rapport le comportement de la plaque à tendance à rejoindre celui d'une poutre AA, et perd ainsi le soutien des rigidités du deuxième sens, qui est par contre conservé pour les autres rapports inférieurs notamment pour le plus petit rapport  $(a/b)=0.5$  dont le facteur de fréquence correspond à l'enveloppe supérieur c'est-à-dire au comportement vibratoire qui se rapproche à celui d'une plaque carrée qui bénéficie de l'apport des rigidités des deux sens. On doit satisfaire alors la condition de cohérence qualitative  $[(\omega_{AAAA} \approx \omega_{AA}), \text{ pour } (a/b)=2] < [(\omega_{AAAA}, \text{ pour } (a/b)=1.5]$ .

Plaque: AAAA

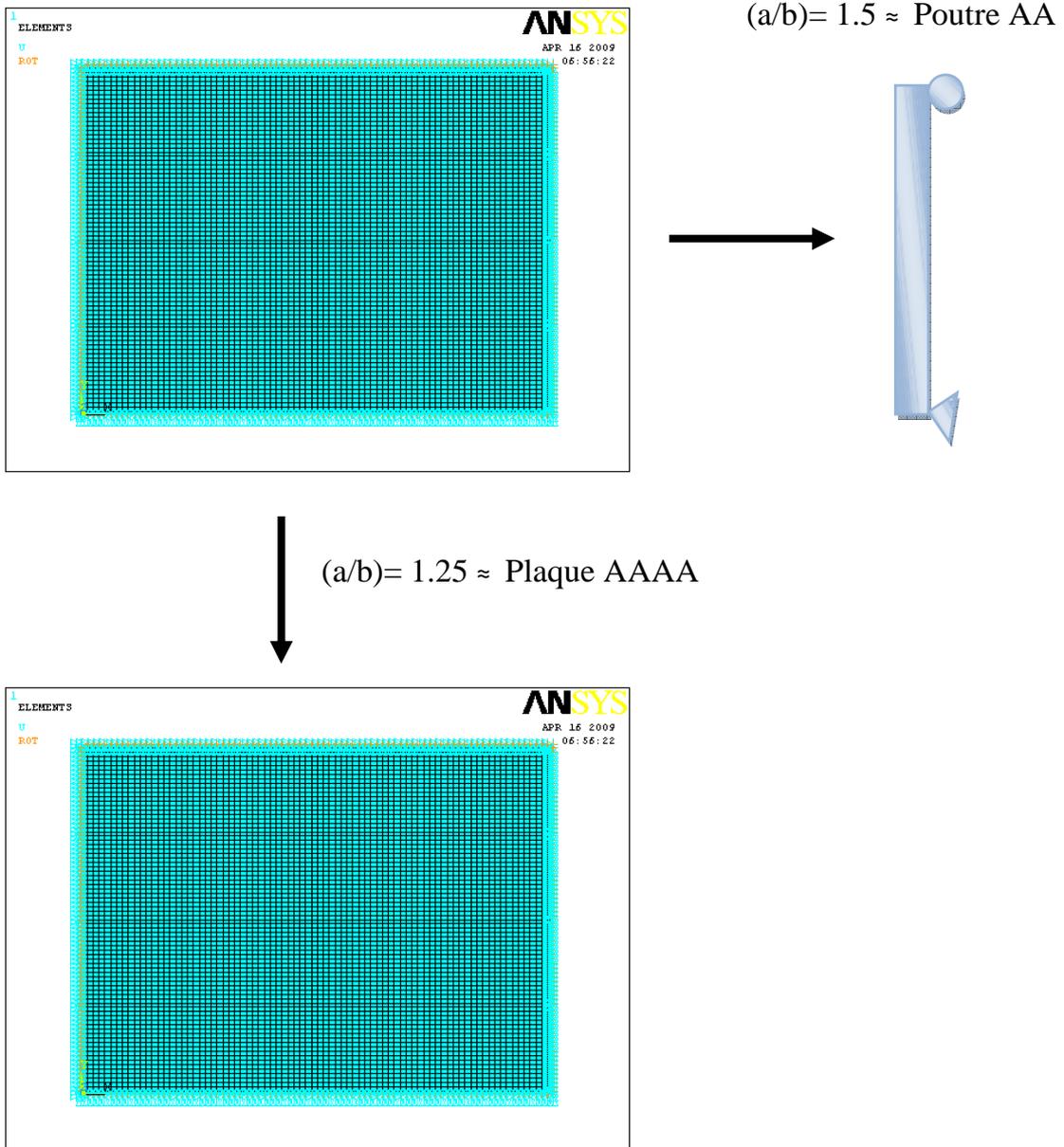


Figure 4.28. Analyse vibratoire qualitative d'une plaque rectangulaire AAAA d'après le concept des plaques allongées.

**Discussion de l'influence de l'effet combiné du rapport des dimensions ( $a/b$ ), et des conditions de fixités sur le comportement vibratoire libre de la plaque rectangulaire orthotrope.**

Dans ces graphes on étudie l'évolution du facteur des fréquences naturelles sous la double l'influence du rapport des dimensions et des conditions de fixités

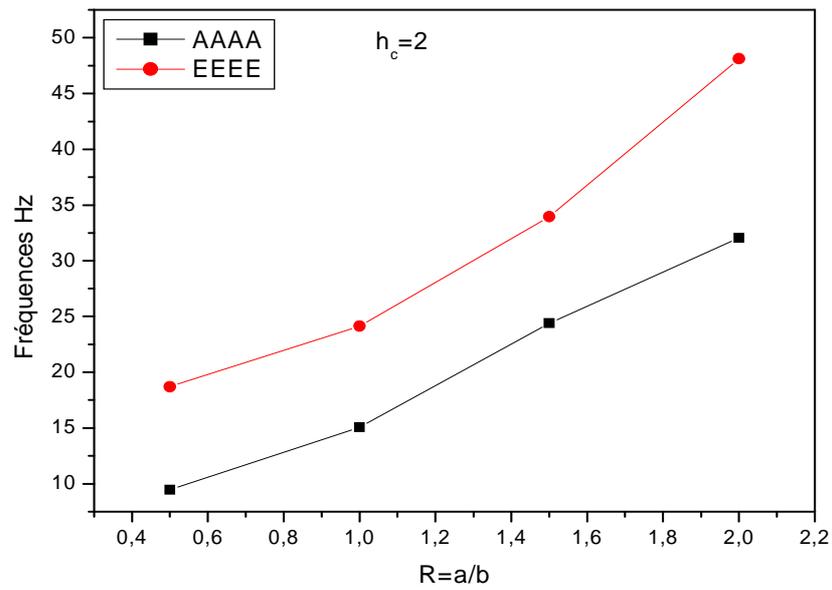


Figure 4.29. Influence de rapport (a/b) sur l'évolution du paramètre fréquentiel des plaques simplement appuyé (AAAA) et encastre (EEEE)

**Plaques orthotropes soumises aux conditions limites du type :**

- Cas : AAAA
- Cas : EEEE

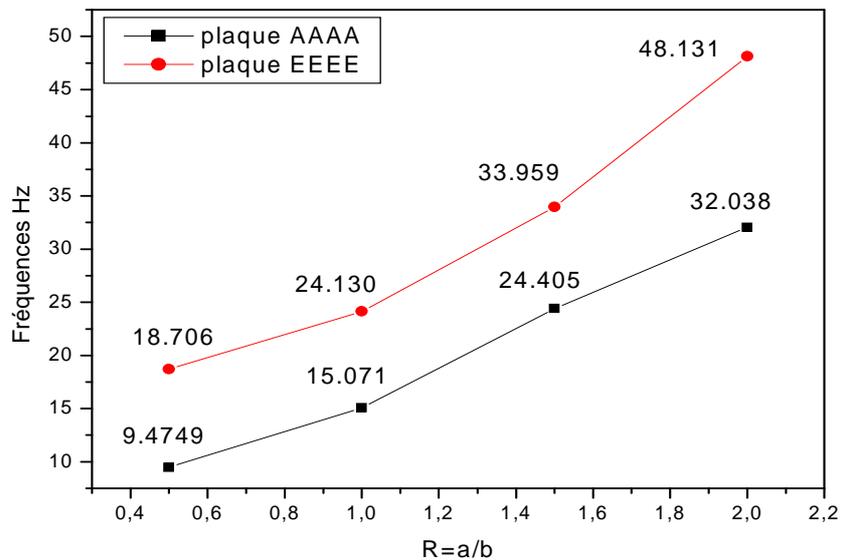
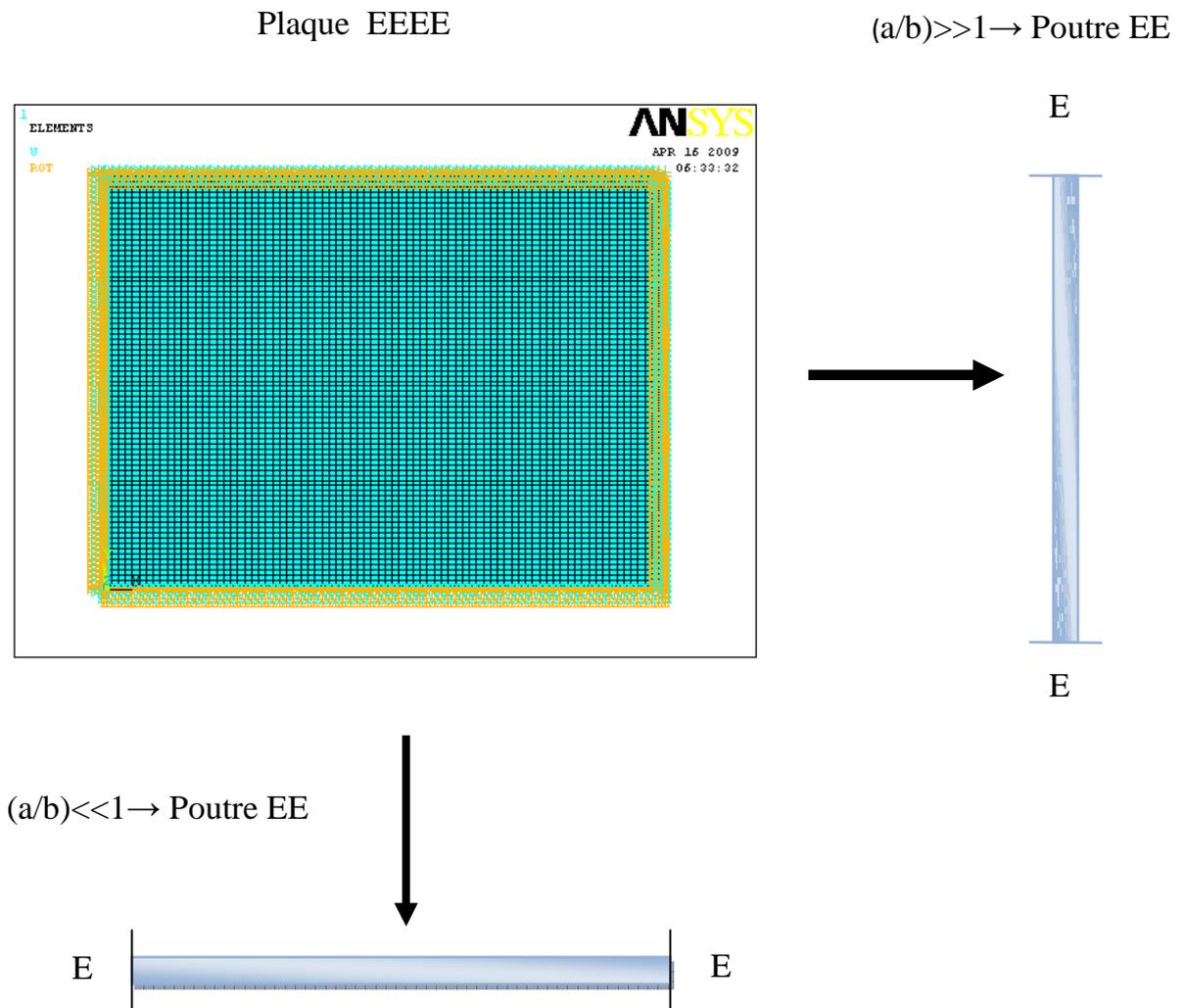


Figure 4.30: Influence du rapport des dimensions (a/b) et des conditions de fixités AAAA et EEEE sur l'évolution du facteur des fréquences d'une plaque rectangulaire orthotrope.

**Conclusion :**

Dans ce graphe on voit l'influence croissante du rapport des dimensions sur l'accroissement des courbes pour les deux cas de **fixités AAAA et EEEE**, d'autre part l'influence des conditions limites est observée en comparant dans le sens vertical la dispersion des deux courbes.

Cette constatation est confirmée par l'analyse qualitative car la plaque encadrée est plus rigide par rapport à la plaque simplement appuyée. Le rapport du facteur des fréquences pour les deux limites inférieurs et supérieur est égale à 2, et de ce fait les bords encadrés **EEEE** ont pour effet de doubler le seuil des fréquences.



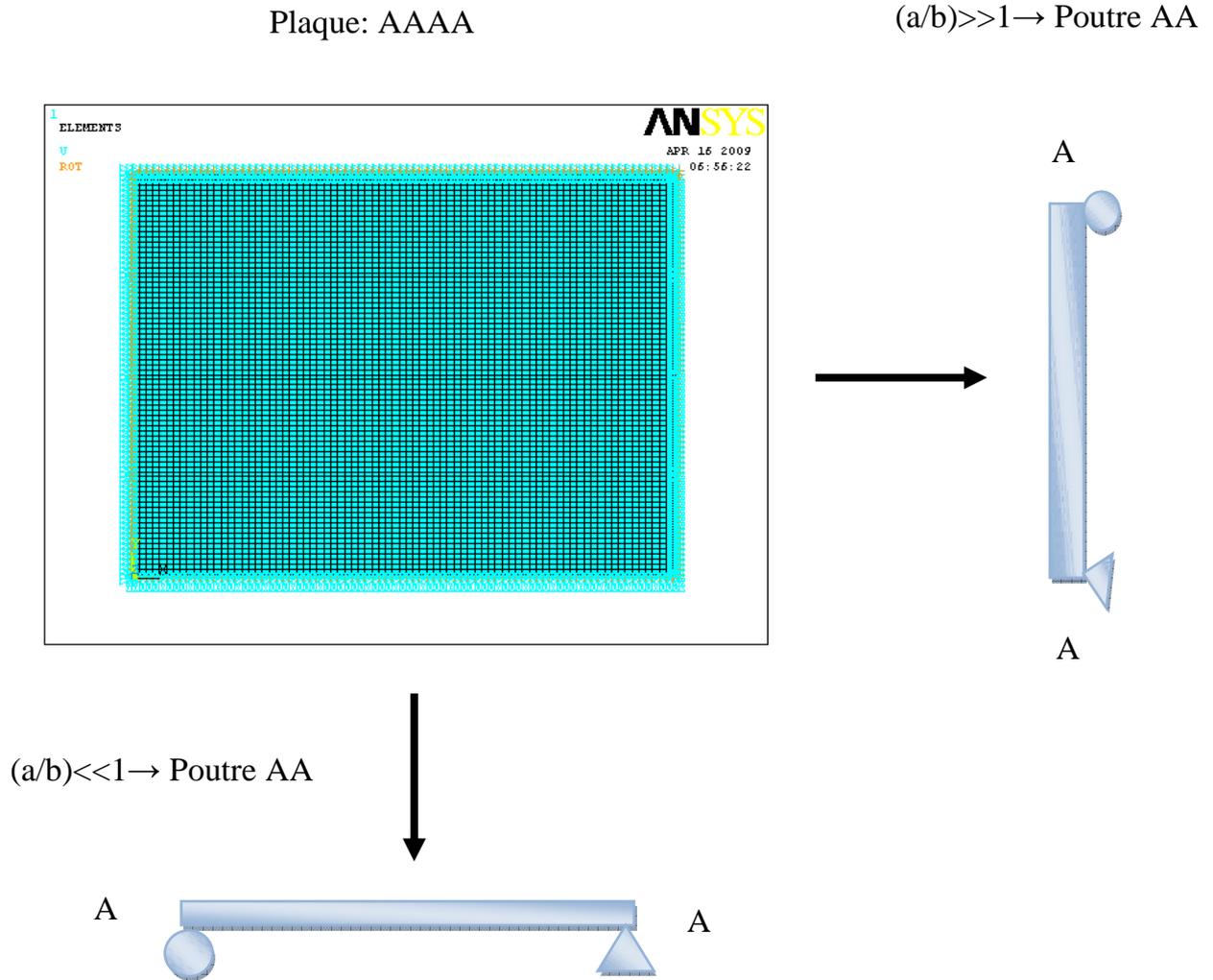


Figure 4.31. Analyse vibratoire qualitative des plaques rectangulaires AAAA et EEEE  
D'après le concept des plaques allongées.

**Plaques orthotropes soumises aux conditions limites du type :**

- Cas : AAEA
- Cas : EAEE

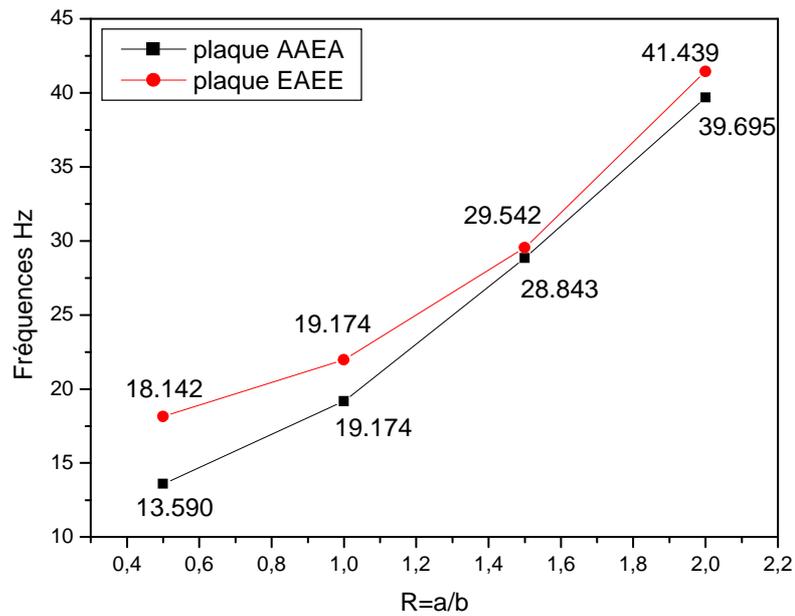


Figure 4.32 : Influence du rapport des dimensions (a/b) et des conditions de fixités AAEA et EAEE sur l'évolution du facteur des fréquences d'une plaque rectangulaire orthotrope.

**Conclusion :**

Dans ce graphe Figure (4.32) on voit l'influence croissante du rapport des dimensions sur l'accroissement des courbes pour les deux cas de fixités EAEE et AAEA, d'autre part l'influence des conditions limites est observée en comparant dans le sens vertical la dispersion des deux courbes. Cette constatation est confirmée par l'analyse qualitative Figure (4.33) car la plaque évolue dans le sens du comportement poutre dominé par le petite sens ( $l_x=a$ ) avec les conditions de fixités (EAEE→EA) et (AAEA→AA), la rigidité de la poutre EA étant plus grande que celle de la poutre AA explique l'écart supérieur des fréquences  $\omega_{EEAE}$  par rapport à  $\omega_{AEAA}$  ( $\omega_{EEAE} > \omega_{AEAA}$ ).

Le rapport du facteur des fréquences pour les deux limites inférieurs et supérieur varie respectivement de 1.47 à 1.27, cette diminution de l'écart des fréquences s'explique par le rapprochement du comportement des deux cas de plaques vers celui des poutres qui réduit l'effet des quatre bords à celui de l'effet d'un même bord appuyé (A) pour les deux cas d'une part, et celui d'un bord encastré et appuyé d'une autre part.

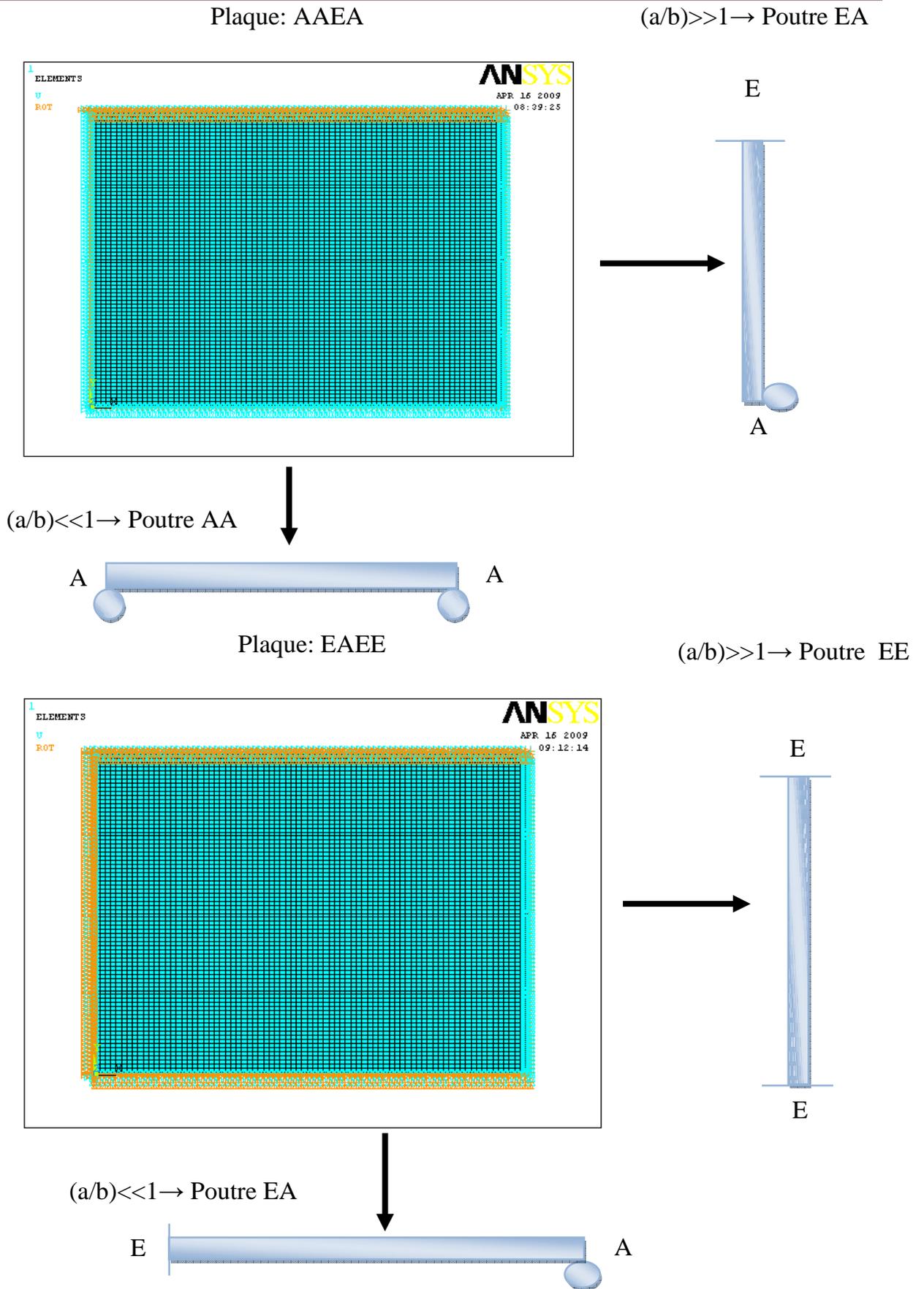


Figure 4.33 : Analyse vibratoire qualitative des plaques rectangulaires EAEE et AAEA d'après le concept des plaques allongées.

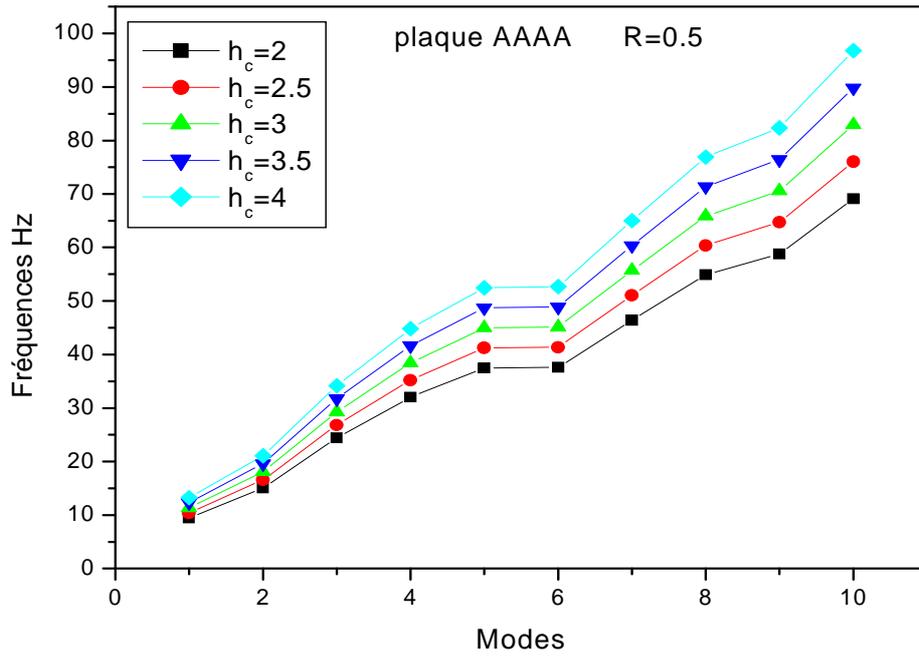


Figure 4.34. Influence de la fréquence en fonction du numéro de mode de la plaque Avec changement de l'épaisseur de la couche de cuivre  $h_c$  du plaque AAAA

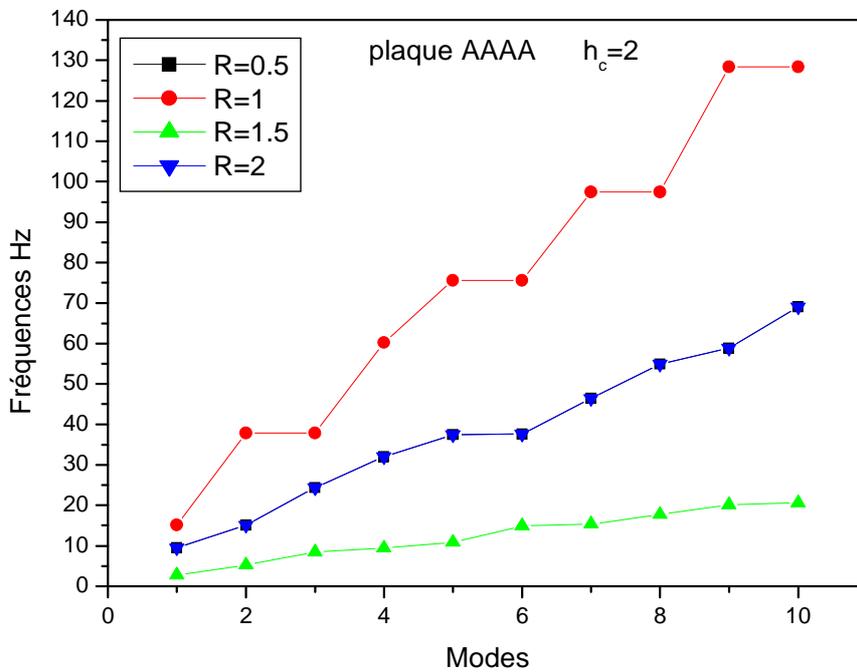


Figure 4.35. Influence de la fréquence en fonction du numéro de mode de la plaque Rectangulaire multicouches de phase isotrope AAAA

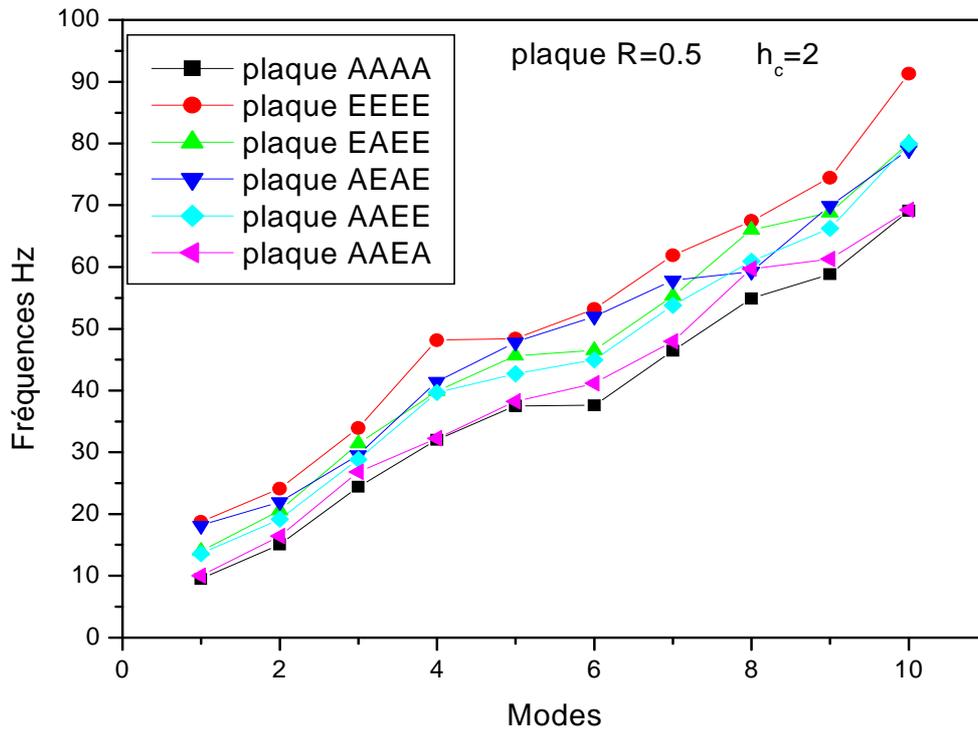


Figure 4.36. Variation du paramètre fréquentiel d'une plaque rectangulaire multicouche de phase isotrope a différentes Fixités dans les dix premiers modes de vibration

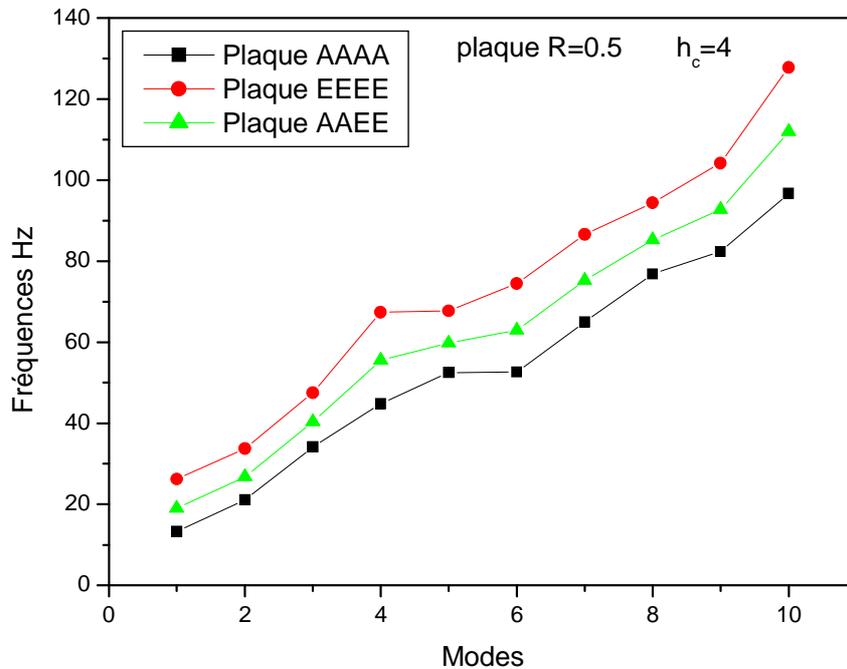


Figure 4.37. Variation du paramètre fréquentiel d'une plaque rectangulaire multicouche de phase isotrope a trois (03) différentes Fixités dans les dix premiers modes de vibration

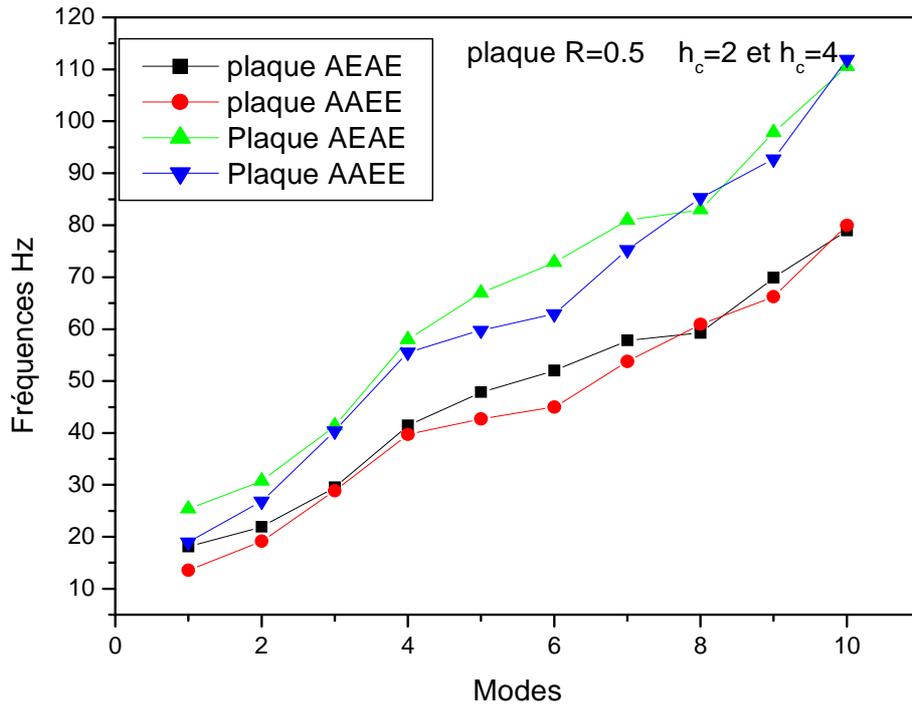


Figure 4.38. Variation du paramètre fréquentiel en fonction du numéro de mode de deux type de plaque AEAE et AAEE pour deux épaisseurs de cuivre

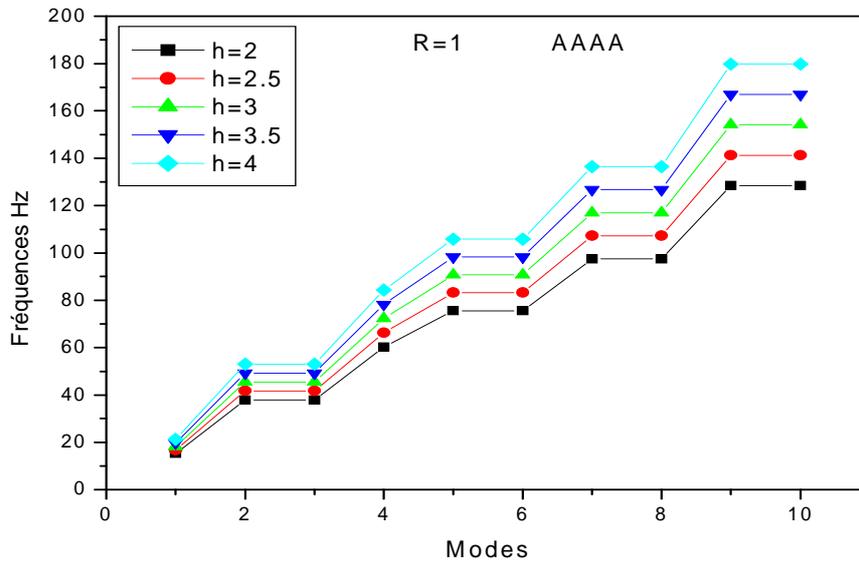


Figure 4.39. Variation du paramètre fréquentiel en fonction du numéro de mode de la plaque AAAA pour plusieurs changements d'épaisseurs de cuivre

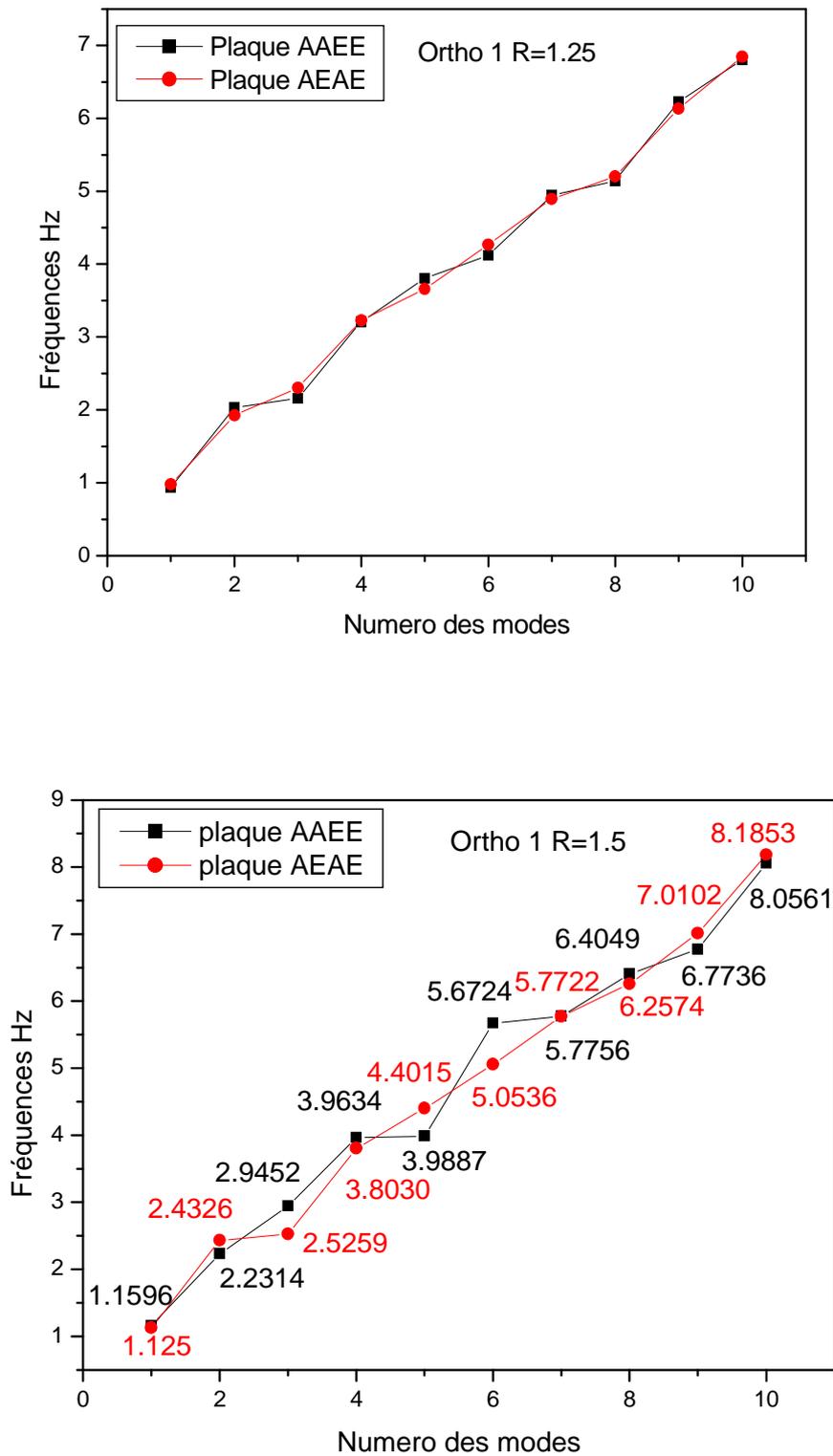
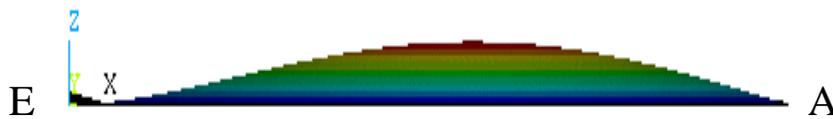
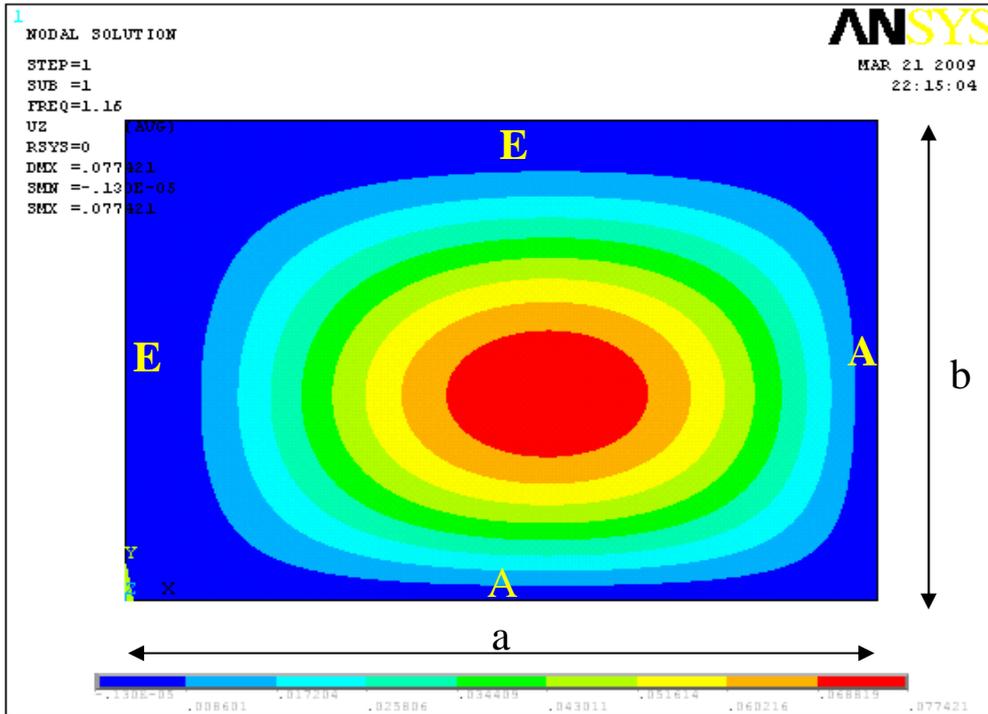
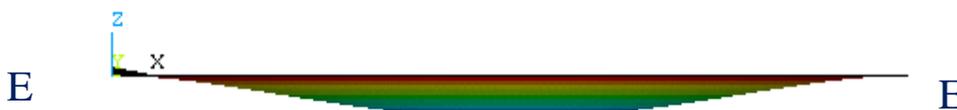
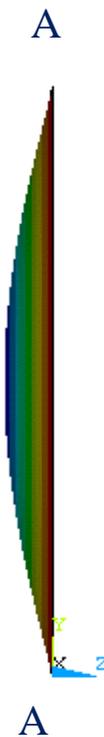
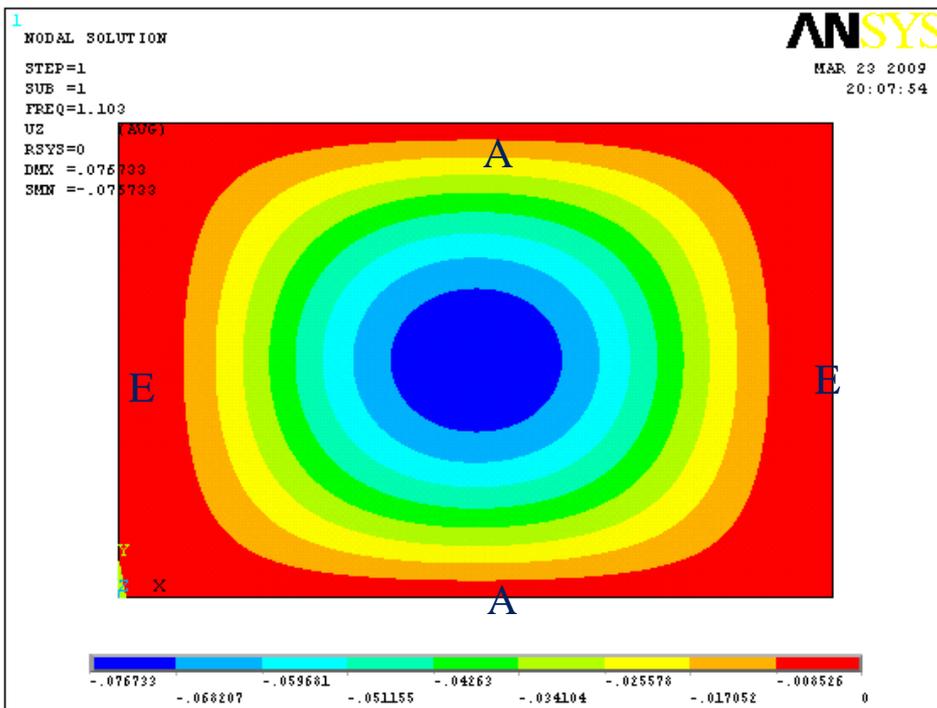
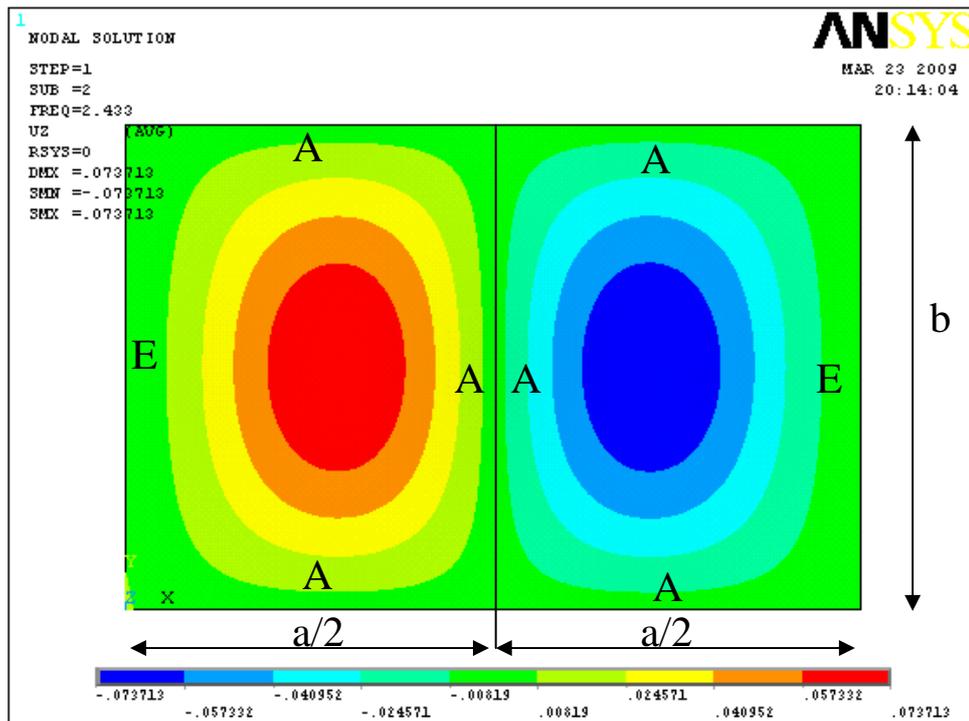
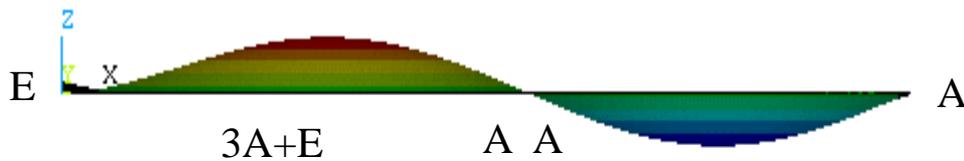
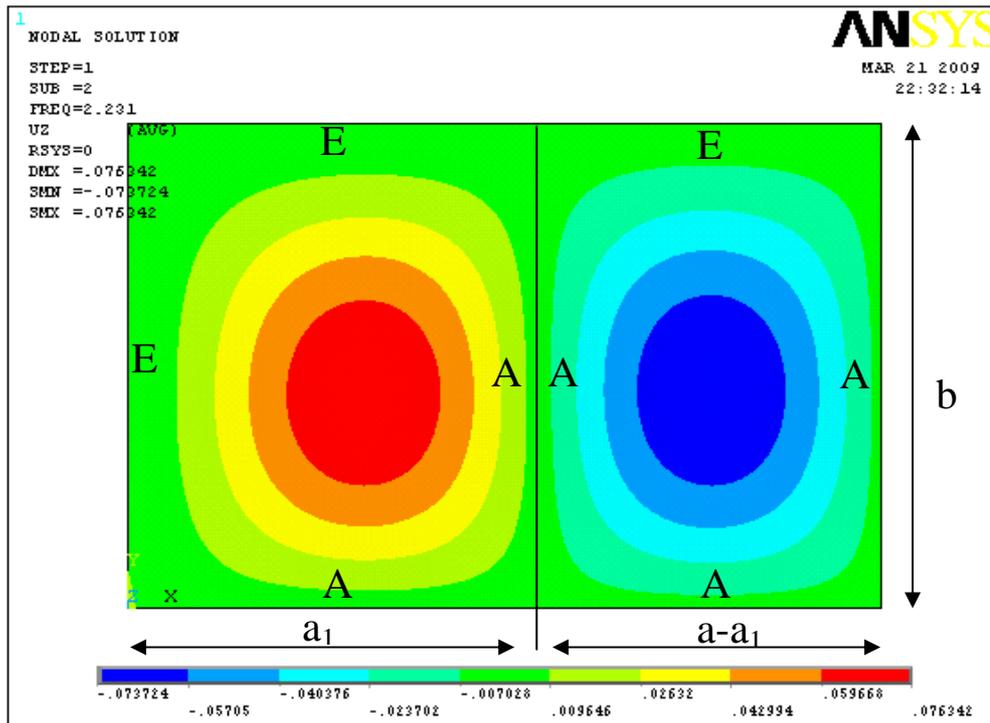


Figure 4.40. Variation du paramètre fréquentiel en fonction du numéro de mode de deux type de plaque AEAE et AAEE

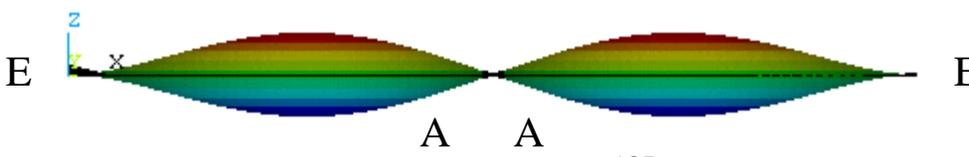
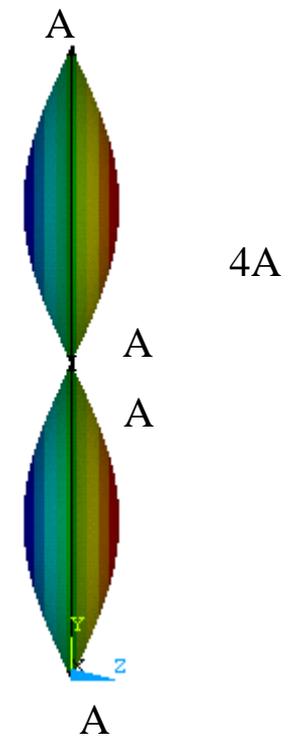
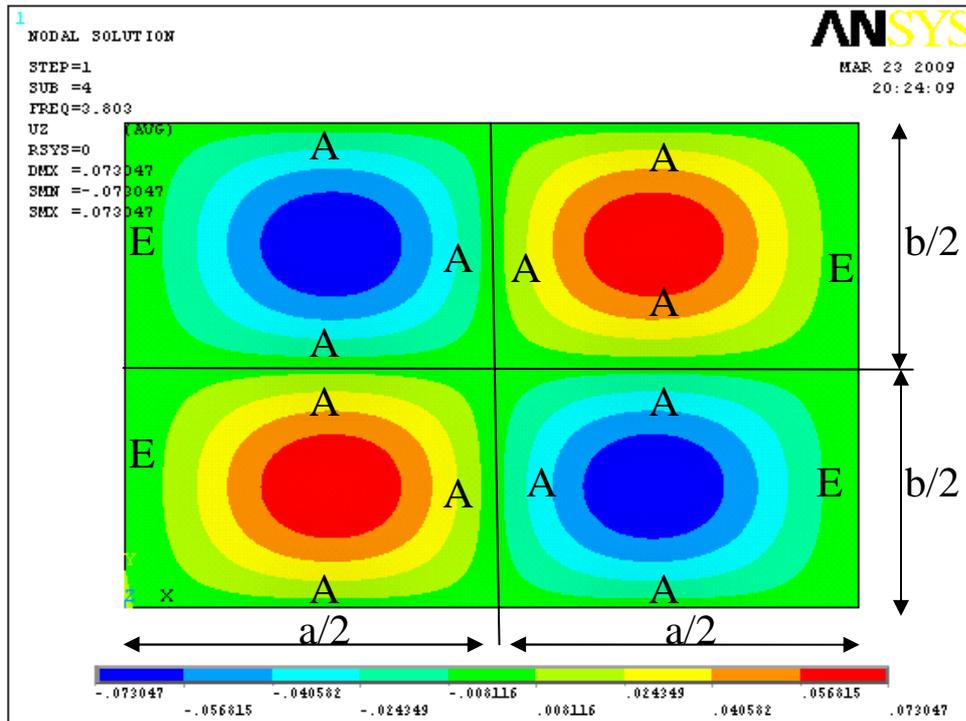
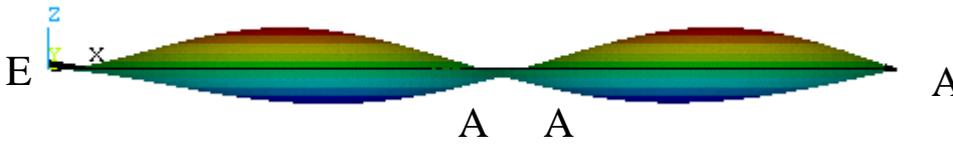
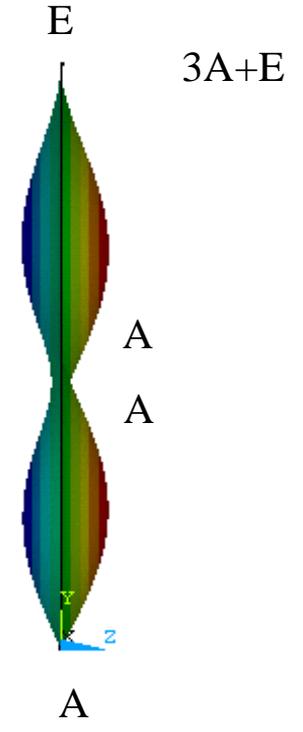
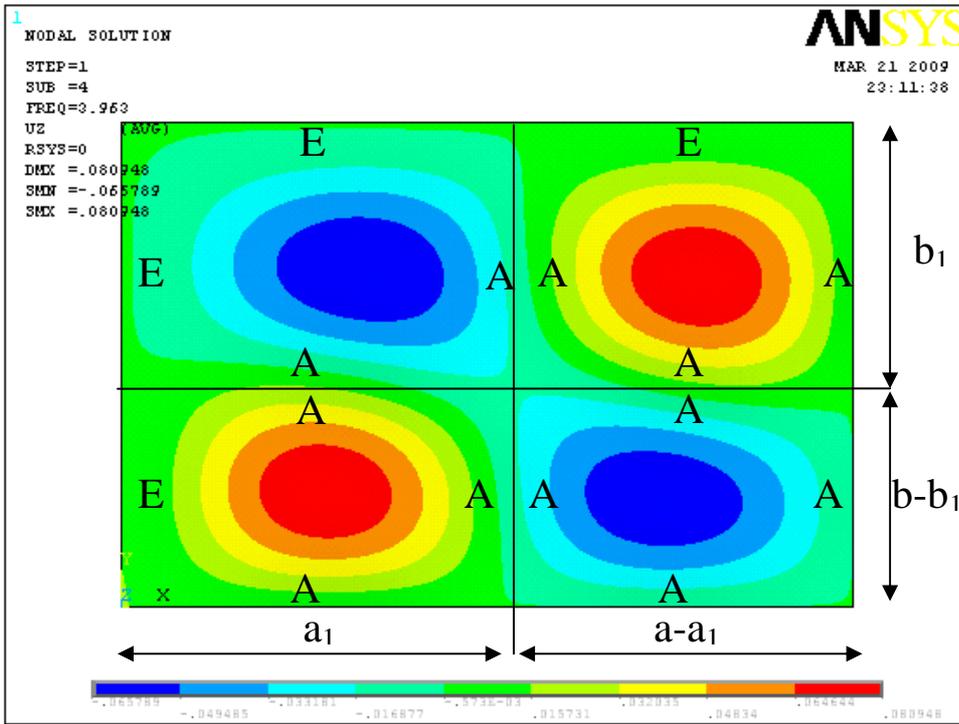


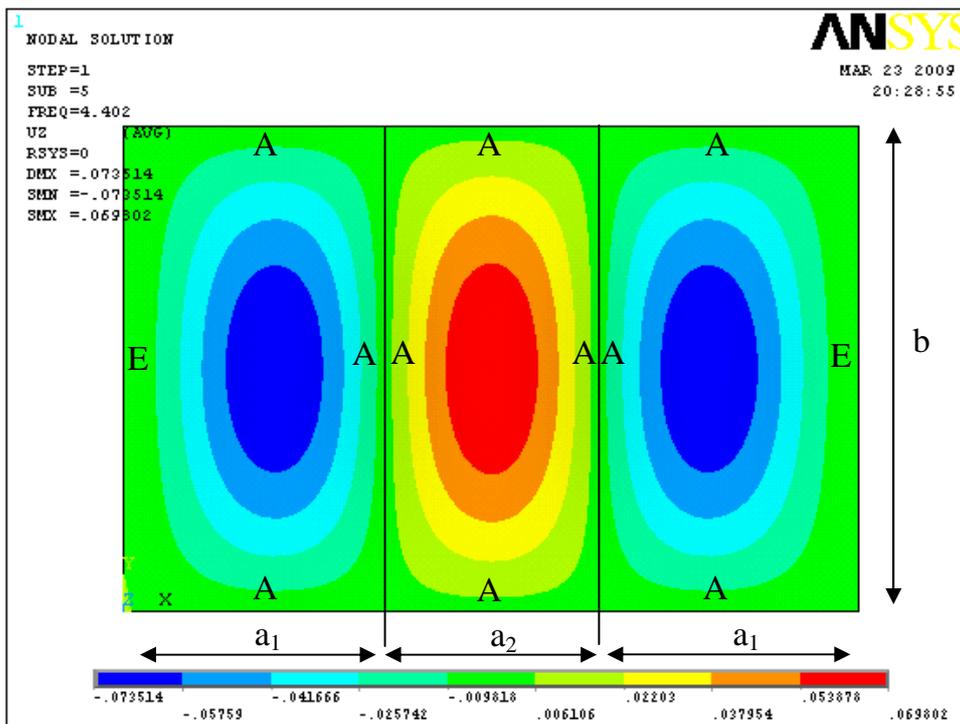
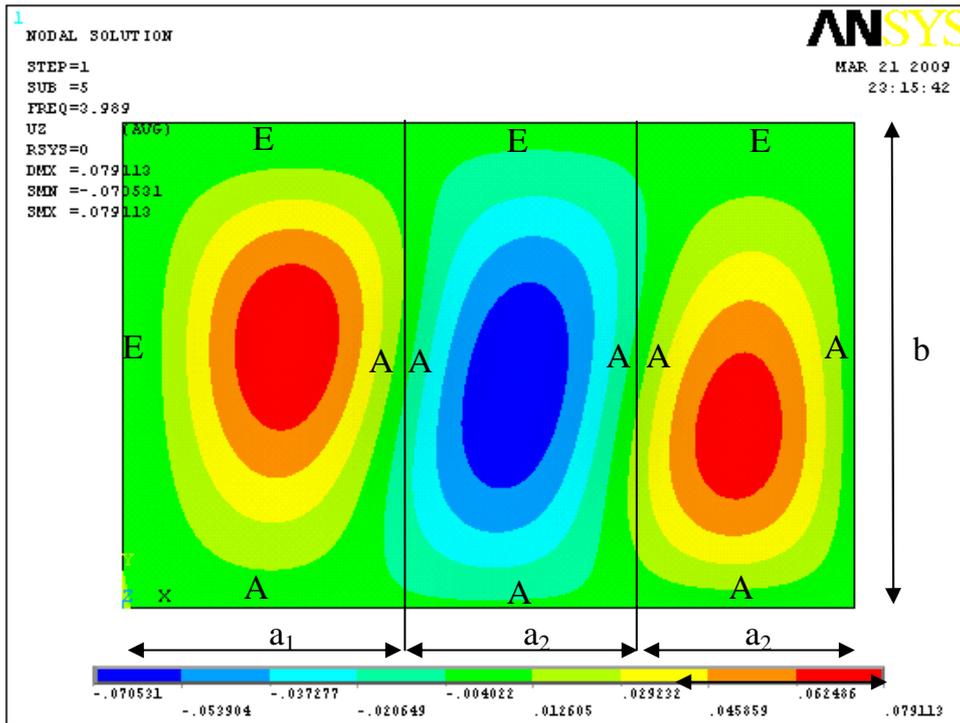
$2A+2E$











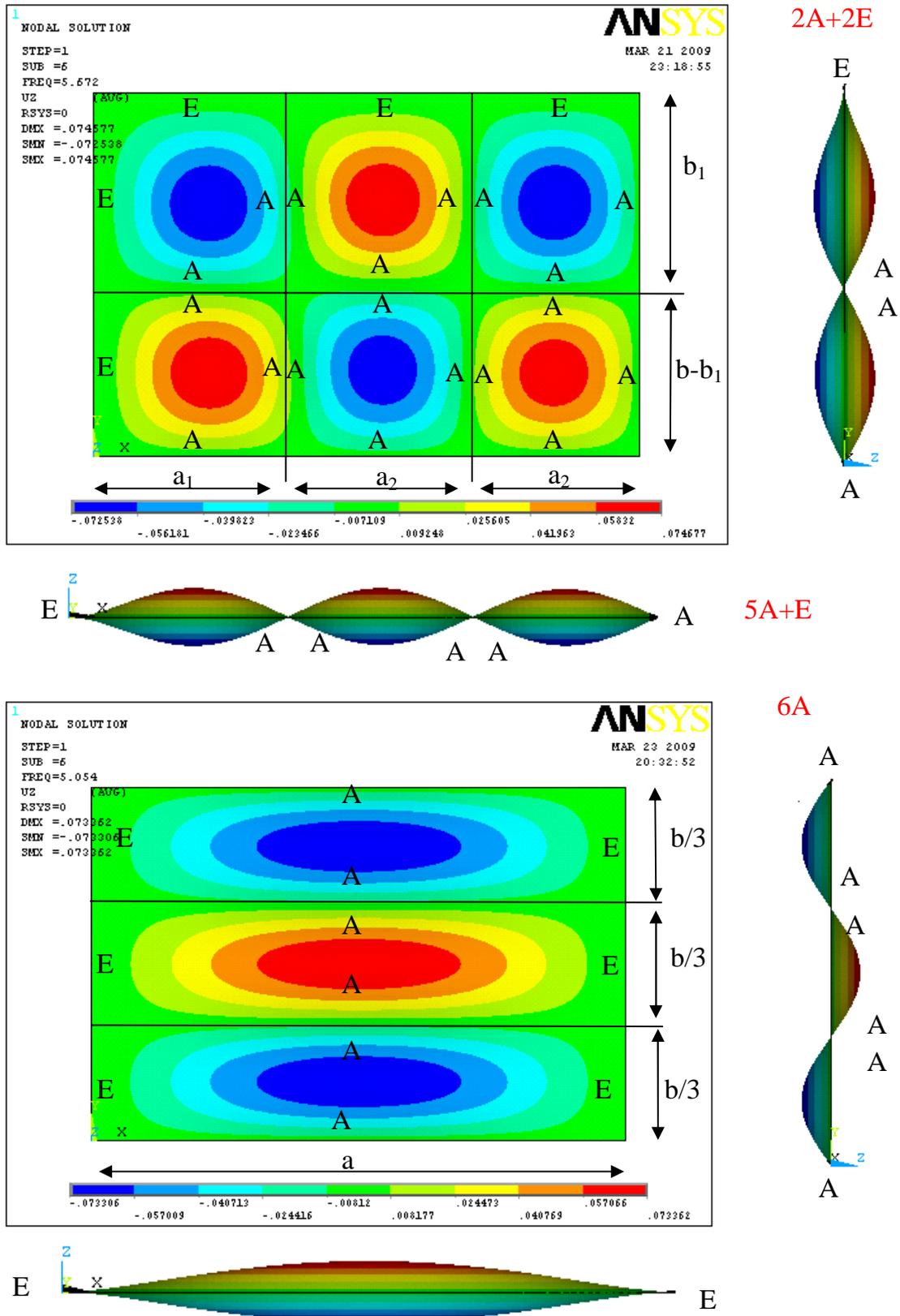


Figure 4.41 : Analyse vibratoire qualitative des plaques rectangulaires AEAE et AAEE d'après le concept des plaques allongées.

## CONCLUSIONS GÉNÉRALE

Cette étude consiste à décrire le comportement vibratoire des plaques composites stratifiées (multicouches) à différentes séquences d'empilement (symétriques et antisymétrique). Afin d'aboutir à notre objectif, on a supposé que la flèche (déformée) peut être approchée par une double série trigonométrique orthonormée qui doit satisfaire aux conditions aux frontières. En connaissant l'équation de Lagrange permet de définir le mouvement de la plaque, les fréquences propres qui caractérisent les modes de vibrations dépendent des matrices de rigidité du stratifié.

L'objectif assigné à ce travail est l'étude du comportement vibratoire, Analytique et numérique de plaques Composites Multicouche. Pour atteindre cet objectif nous avons commencé par une étude bibliographique détaillée sur les Composites Multicouches. De nombreux travaux sont consacrés à l'étude du comportement dynamique des structures multicouches dans le souci d'une meilleure compréhension et maîtrise des problèmes vibratoires. Les structures étudiées sont de types plaques ou coques et la formulation de base des stratifiés est largement adaptée à de telles analyses.

La résolution du problème est essentiellement basée sur l'approche modale consistant à déterminer les caractéristiques modales des structures, Analytique ou numérique. Un grand intérêt est accordé aux performances de l'épaisseur des couches de la plaque étudié.

L'approximation par la théorie classique des stratifiés permet une application aisée de la méthode analytique de Rayleigh-Ritz basée sur la modélisation du déplacement transversal de la plaque par les fonctions caractéristiques de vibrations des poutres homogènes. Cette approximation a permis de traiter la totalité des combinaisons de conditions aux limites standards sur les bords d'une plaque rectangulaire.

La programmation de la méthode sous MATLAB et MAPLE à permis d'obtenir les fréquences et déformées propres de ces plaques, elle est validée en calcul de structures par éléments finis sous code de calcul ANSYS. La formulation analytique permet d'envisager des études de conception et optimisation ainsi que des analyses de sensibilité.

La comparaison des résultats obtenus par le programme de calcul élaboré avec ceux issus du calcul de structures pour un stratifié symétrique a permis de valider l'approche analytique utilisée et a mis en évidence l'avantage de cette dernière en terme de rapidité de convergence.

Tableaux des fréquences propres calculées en calcul de structures sous ANSYS pour une plaque symétrique multicouche de 5 plis à phase isotrope avec épaisseur  $h_c$  variable de couche du cuivre sous différentes combinaisons des conditions aux limites et pour chaque modèle de plaque.

| <b>R=0.5</b> | <b>AAAA</b>                 |                               |                             |                               |                             |
|--------------|-----------------------------|-------------------------------|-----------------------------|-------------------------------|-----------------------------|
| <b>Modes</b> | <b><math>h_c = 2</math></b> | <b><math>h_c = 2,5</math></b> | <b><math>h_c = 3</math></b> | <b><math>h_c = 3,5</math></b> | <b><math>h_c = 4</math></b> |
| <b>1</b>     | 9,4749                      | 10,422                        | 11.370                      | 12.317                        | 13.265                      |
| <b>2</b>     | 15.071                      | 16.578                        | 18.085                      | 19.592                        | 21.099                      |
| <b>3</b>     | 24.405                      | 26.845                        | 29.286                      | 31.726                        | 34.167                      |
| <b>4</b>     | 32.038                      | 35.242                        | 38.446                      | 41.650                        | 44.853                      |
| <b>5</b>     | 37.496                      | 41.246                        | 44.996                      | 48.745                        | 52.495                      |
| <b>6</b>     | 37.611                      | 41.372                        | 45.133                      | 48.894                        | 52.655                      |
| <b>7</b>     | 46.421                      | 51.063                        | 55.706                      | 60.348                        | 64.990                      |
| <b>8</b>     | 54.907                      | 60.397                        | 65.888                      | 71.379                        | 76.869                      |
| <b>9</b>     | 58.811                      | 64.692                        | 70.573                      | 76.455                        | 82.336                      |
| <b>10</b>    | 69.103                      | 76.013                        | 82.923                      | 89.834                        | 96.744                      |

| <b>R=1</b>   | <b>AAAA</b>                 |                               |                             |                               |                             |
|--------------|-----------------------------|-------------------------------|-----------------------------|-------------------------------|-----------------------------|
| <b>Modes</b> | <b><math>h_c = 2</math></b> | <b><math>h_c = 2,5</math></b> | <b><math>h_c = 3</math></b> | <b><math>h_c = 3,5</math></b> | <b><math>h_c = 4</math></b> |
| <b>1</b>     | 15.179                      | 16.697                        | 18.215                      | 19.733                        | 21,251                      |
| <b>2</b>     | 37.865                      | 41.652                        | 45.438                      | 49.225                        | 53.011                      |
| <b>3</b>     | 37.865                      | 41.652                        | 45.438                      | 49.225                        | 53.011                      |
| <b>4</b>     | 60.235                      | 66.258                        | 72.282                      | 78.305                        | 84.328                      |
| <b>5</b>     | 75.619                      | 83.181                        | 90.743                      | 98.305                        | 105.87                      |
| <b>6</b>     | 75.619                      | 83.181                        | 90.743                      | 98.305                        | 105.87                      |
| <b>7</b>     | 97.493                      | 107.24                        | 116.99                      | 126.74                        | 136.49                      |
| <b>8</b>     | 97.493                      | 107.24                        | 116.99                      | 126.74                        | 136.49                      |
| <b>9</b>     | 128.44                      | 141.29                        | 154.13                      | 166.98                        | 179.82                      |
| <b>10</b>    | 128.44                      | 141.29                        | 154.13                      | 166.98                        | 179.82                      |

| <b>R=1.5</b> | <b>AAAA</b>             |                           |                         |                           |                         |
|--------------|-------------------------|---------------------------|-------------------------|---------------------------|-------------------------|
| <b>Modes</b> | <b>h<sub>c</sub> =2</b> | <b>h<sub>c</sub> =2,5</b> | <b>h<sub>c</sub> =3</b> | <b>h<sub>c</sub> =3,5</b> | <b>h<sub>c</sub> =4</b> |
| <b>1</b>     | 2,7392                  | 3.0132                    | 3.2871                  | 3,561                     | 3,8349                  |
| <b>2</b>     | 5.2486                  | 5.7735                    | 6.2983                  | 6.8232                    | 7.3481                  |
| <b>3</b>     | 8.3976                  | 9.2373                    | 10.077                  | 10.917                    | 11.757                  |
| <b>4</b>     | 9.4423                  | 10.387                    | 11.331                  | 12.275                    | 13.219                  |
| <b>5</b>     | 10.857                  | 11.942                    | 13.028                  | 14.114                    | 15.199                  |
| <b>6</b>     | 14.925                  | 16.417                    | 17.910                  | 19.402                    | 20.895                  |
| <b>7</b>     | 15.360                  | 16.896                    | 18.432                  | 19.968                    | 21.504                  |
| <b>8</b>     | 17.742                  | 19.516                    | 21.291                  | 23.065                    | 24.839                  |
| <b>9</b>     | 20.158                  | 22.174                    | 24.190                  | 26.205                    | 28.221                  |
| <b>10</b>    | 20.629                  | 22.692                    | 24.754                  | 26.817                    | 28.880                  |

| <b>R=2</b>   | <b>AAAA</b> |              |            |              |            |
|--------------|-------------|--------------|------------|--------------|------------|
| <b>Modes</b> | <b>h=2</b>  | <b>h=2,5</b> | <b>h=3</b> | <b>h=3,5</b> | <b>h=4</b> |
| <b>1</b>     | 9,4749      | 10,422       | 11.370     | 12.317       | 13.265     |
| <b>2</b>     | 15.071      | 16.578       | 18.085     | 19.592       | 21.099     |
| <b>3</b>     | 24.405      | 26.845       | 29.286     | 31.726       | 34.167     |
| <b>4</b>     | 32.038      | 35.242       | 38.446     | 41.650       | 44.853     |
| <b>5</b>     | 37.496      | 41.246       | 44.996     | 48.745       | 52.495     |
| <b>6</b>     | 37.611      | 41.372       | 45.133     | 48.894       | 52.655     |
| <b>7</b>     | 46.421      | 51.063       | 55.706     | 60.348       | 64.990     |
| <b>8</b>     | 54.907      | 60.397       | 65.888     | 71.379       | 76.869     |
| <b>9</b>     | 58.811      | 64.692       | 70.573     | 76.455       | 82.336     |
| <b>10</b>    | 69.103      | 76.013       | 82.923     | 89.834       | 96.744     |

| <b>R=0.5</b> | <b>EEEE</b> |              |            |              |            |
|--------------|-------------|--------------|------------|--------------|------------|
| <b>Modes</b> | <b>h=2</b>  | <b>h=2,5</b> | <b>h=3</b> | <b>h=3,5</b> | <b>h=4</b> |
| <b>1</b>     | 18.706      | 20.577       | 22.448     | 24.318       | 26,189     |
| <b>2</b>     | 24.130      | 26.543       | 28.956     | 31.369       | 33.782     |
| <b>3</b>     | 33.959      | 37.355       | 40.751     | 44.146       | 47.542     |
| <b>4</b>     | 48.131      | 52.944       | 57.757     | 62.570       | 67.383     |
| <b>5</b>     | 48.367      | 53.204       | 58.041     | 62.877       | 67.714     |
| <b>6</b>     | 53.202      | 58.522       | 63.842     | 69.163       | 74.483     |
| <b>7</b>     | 61.876      | 68.063       | 74.251     | 80.438       | 86.626     |
| <b>8</b>     | 67.466      | 74.213       | 80.959     | 87.706       | 94.452     |
| <b>9</b>     | 74.448      | 81.892       | 89.337     | 96.782       | 104.23     |
| <b>10</b>    | 91.292      | 100.42       | 109.55     | 118.68       | 127.81     |

| <b>R=1</b>   | <b>EEEE</b> |              |            |              |            |
|--------------|-------------|--------------|------------|--------------|------------|
| <b>Modes</b> | <b>h=2</b>  | <b>h=2,5</b> | <b>h=3</b> | <b>h=3,5</b> | <b>h=4</b> |
| <b>1</b>     | 27.561      | 30,317       | 33.073     | 35.830       | 38.586     |
| <b>2</b>     | 56.044      | 61.648       | 67.252     | 72.857       | 78.461     |
| <b>3</b>     | 56.044      | 61.648       | 67.252     | 72.857       | 78.461     |
| <b>4</b>     | 81.916      | 90.107       | 98.299     | 106.49       | 114.68     |
| <b>5</b>     | 100.29      | 110.31       | 120.34     | 130.37       | 140.40     |
| <b>6</b>     | 100.85      | 110.94       | 121.02     | 131.11       | 141.19     |
| <b>7</b>     | 124.32      | 136.75       | 149.18     | 161.62       | 174.05     |
| <b>8</b>     | 124.32      | 136.75       | 149.18     | 161.62       | 174.05     |
| <b>9</b>     | 160.42      | 176.46       | 192.50     | 208.54       | 224.58     |
| <b>10</b>    | 160.42      | 176.46       | 192.50     | 208.54       | 224.58     |

| <b>R=1.5</b> | <b>EEEE</b> |              |            |              |            |
|--------------|-------------|--------------|------------|--------------|------------|
| <b>Modes</b> | <b>h=2</b>  | <b>h=2,5</b> | <b>h=3</b> | <b>h=3,5</b> | <b>h=4</b> |
| <b>1</b>     | 5,1565      | 5,6722       | 6,1878     | 6,7035       | 7,2191     |
| <b>2</b>     | 7.9489      | 8.7438       | 9.5387     | 10.334       | 11.128     |
| <b>3</b>     | 12.526      | 13.779       | 15.031     | 16.284       | 17.537     |
| <b>4</b>     | 12.714      | 13.985       | 15.257     | 16.528       | 17.800     |
| <b>5</b>     | 15.028      | 16.530       | 18.033     | 19.536       | 21.039     |
| <b>6</b>     | 19.313      | 21.244       | 23.176     | 25.107       | 27.038     |
| <b>7</b>     | 19.389      | 21.328       | 23.267     | 25.206       | 27.144     |
| <b>8</b>     | 23.524      | 25.876       | 28.229     | 30.581       | 32.933     |
| <b>9</b>     | 25.453      | 27.998       | 30.543     | 33.089       | 35.634     |
| <b>10</b>    | 25.887      | 28.475       | 31.064     | 33.653       | 36.241     |

| <b>R=2</b>   | <b>EEEE</b> |              |            |              |            |
|--------------|-------------|--------------|------------|--------------|------------|
| <b>Modes</b> | <b>h=2</b>  | <b>h=2,5</b> | <b>h=3</b> | <b>h=3,5</b> | <b>h=4</b> |
| <b>1</b>     | 18.706      | 20,577       | 22.448     | 24,318       | 26.189     |
| <b>2</b>     | 24.130      | 26.543       | 28.956     | 31.369       | 33.782     |
| <b>3</b>     | 33.959      | 37.355       | 40.751     | 44.146       | 47.542     |
| <b>4</b>     | 48.131      | 52.944       | 57.757     | 62.570       | 67.383     |
| <b>5</b>     | 48.367      | 53.204       | 58.041     | 62.877       | 67.714     |
| <b>6</b>     | 53.202      | 58.522       | 63.842     | 69.163       | 74.483     |
| <b>7</b>     | 61.876      | 68.063       | 74.251     | 80.438       | 86.626     |
| <b>8</b>     | 67.466      | 74.213       | 80.959     | 87.706       | 94.452     |
| <b>9</b>     | 74.448      | 81.892       | 89.337     | 96.782       | 104.23     |
| <b>10</b>    | 91.292      | 100.42       | 109.55     | 118.68       | 127.81     |

| <b>R=0.5</b> | <b>EAAE</b> |              |            |              |            |
|--------------|-------------|--------------|------------|--------------|------------|
| <b>Modes</b> | <b>h=2</b>  | <b>h=2,5</b> | <b>h=3</b> | <b>h=3,5</b> | <b>h=4</b> |
| <b>1</b>     | 14,02       | 15.422       | 16.824     | 18.226       | 19.628     |
| <b>2</b>     | 20.580      | 22.638       | 24.696     | 26.754       | 28.812     |
| <b>3</b>     | 31.401      | 34.541       | 37.681     | 40.821       | 43.961     |
| <b>4</b>     | 39.887      | 43.876       | 47.865     | 51.853       | 55.842     |
| <b>5</b>     | 45.660      | 50.226       | 54.792     | 59.358       | 63.924     |
| <b>6</b>     | 46.503      | 51.154       | 55.804     | 60.454       | 65.105     |
| <b>7</b>     | 55.290      | 60.819       | 66.348     | 71.877       | 77.406     |
| <b>8</b>     | 66.011      | 72.613       | 79.214     | 85.815       | 92.416     |
| <b>9</b>     | 68.798      | 75.677       | 82.557     | 89.437       | 96.317     |
| <b>10</b>    | 80.061      | 88.067       | 96.073     | 104.08       | 112.09     |

| <b>R=1</b>   | <b>EAAE</b> |              |            |              |            |
|--------------|-------------|--------------|------------|--------------|------------|
| <b>Modes</b> | <b>h=2</b>  | <b>h=2,5</b> | <b>h=3</b> | <b>h=3,5</b> | <b>h=4</b> |
| <b>1</b>     | 24,395      | 26.835       | 29.274     | 31.714       | 34.153     |
| <b>2</b>     | 48.404      | 53.245       | 58.085     | 62.926       | 67.766     |
| <b>3</b>     | 54.334      | 59.768       | 65.201     | 70.635       | 76.068     |
| <b>4</b>     | 76.421      | 84.063       | 91.705     | 99.347       | 106.99     |
| <b>5</b>     | 88.839      | 97.723       | 106.61     | 115.49       | 124.37     |
| <b>6</b>     | 99.473      | 109.42       | 119.37     | 129.31       | 139.26     |
| <b>7</b>     | 114.64      | 126.10       | 137.57     | 149.03       | 160.49     |
| <b>8</b>     | 120.37      | 132.41       | 144.45     | 156.48       | 168.52     |
| <b>9</b>     | 144.84      | 159.32       | 173.80     | 188.29       | 202.77     |
| <b>10</b>    | 156.57      | 172.22       | 187.88     | 203.53       | 219.19     |

| <b>R=1.5</b> | <b>EAAE</b> |              |            |              |            |
|--------------|-------------|--------------|------------|--------------|------------|
| <b>Modes</b> | <b>h=2</b>  | <b>h=2,5</b> | <b>h=3</b> | <b>h=3,5</b> | <b>h=4</b> |
| <b>1</b>     | 4,9398      | 5,4338       | 5,9278     | 6,4218       | 6,9158     |
| <b>2</b>     | 7.2563      | 7.9819       | 8.7075     | 9.4331       | 10.159     |
| <b>3</b>     | 11.501      | 12.651       | 13.801     | 14.951       | 16.101     |
| <b>4</b>     | 12.416      | 13.658       | 14.900     | 16.141       | 17.383     |
| <b>5</b>     | 14.618      | 16.079       | 17.541     | 19.003       | 20.465     |
| <b>6</b>     | 17.656      | 19.421       | 21.187     | 22.952       | 24.718     |
| <b>7</b>     | 18.477      | 20.324       | 22.172     | 24.020       | 25.867     |
| <b>8</b>     | 23.454      | 25.799       | 28.144     | 30.490       | 32.835     |
| <b>9</b>     | 24.122      | 26.534       | 28.946     | 31.358       | 33.770     |
| <b>10</b>    | 25.605      | 28.166       | 30.727     | 33.287       | 35.848     |

| <b>R=2</b>   | <b>EAAE</b> |              |            |              |            |
|--------------|-------------|--------------|------------|--------------|------------|
| <b>Modes</b> | <b>h=2</b>  | <b>h=2,5</b> | <b>h=3</b> | <b>h=3,5</b> | <b>h=4</b> |
| <b>1</b>     | 73.537      | 80.891       | 88.245     | 95,599       | 102.95     |
| <b>2</b>     | 91.740      | 100.91       | 110.09     | 119.26       | 128.44     |
| <b>3</b>     | 126.39      | 139.03       | 151.67     | 164.31       | 176.95     |
| <b>4</b>     | 178.91      | 196.80       | 214.69     | 232.58       | 250.47     |
| <b>5</b>     | 191.88      | 211.06       | 230.25     | 249.44       | 268.63     |
| <b>6</b>     | 210.26      | 231.29       | 252.32     | 273.34       | 294.37     |
| <b>7</b>     | 241.93      | 266.12       | 290.32     | 314.51       | 338.70     |
| <b>8</b>     | 249.84      | 274.82       | 299.81     | 324.79       | 349.78     |
| <b>9</b>     | 288.19      | 317.01       | 345.83     | 374.65       | 403.47     |
| <b>10</b>    | 340.09      | 374.10       | 408.11     | 442.11       | 476.12     |

| <b>R=0.5</b> | <b>AEAE</b> |              |            |              |            |
|--------------|-------------|--------------|------------|--------------|------------|
| <b>Modes</b> | <b>h=2</b>  | <b>h=2,5</b> | <b>h=3</b> | <b>h=3,5</b> | <b>h=4</b> |
| <b>1</b>     | 18,142      | 19,3957      | 21,771     | 23.585       | 25,399     |
| <b>2</b>     | 21.960      | 24.156       | 26.352     | 28.548       | 30.744     |
| <b>3</b>     | 29.542      | 32.496       | 35.451     | 38.405       | 41.359     |
| <b>4</b>     | 41.439      | 45.583       | 49.727     | 53.871       | 58.015     |
| <b>5</b>     | 47.829      | 52.612       | 57.395     | 62.178       | 66.961     |
| <b>6</b>     | 52.011      | 57.212       | 62.413     | 67.614       | 72.815     |
| <b>7</b>     | 57.847      | 63.632       | 69.417     | 75.201       | 80.986     |
| <b>8</b>     | 59.251      | 65.176       | 71.101     | 77.026       | 82.951     |
| <b>9</b>     | 69.897      | 76.887       | 83.877     | 90.866       | 97.856     |
| <b>10</b>    | 78.972      | 86.869       | 94.766     | 102.66       | 110.56     |

| <b>R=1</b>   | <b>AEAE</b> |              |            |              |            |
|--------------|-------------|--------------|------------|--------------|------------|
| <b>Modes</b> | <b>h=2</b>  | <b>h=2,5</b> | <b>h=3</b> | <b>h=3,5</b> | <b>h=4</b> |
| <b>1</b>     | 22.206      | 24.427       | 26.648     | 28.868       | 31,89      |
| <b>2</b>     | 41.870      | 46.057       | 50.244     | 54.431       | 58.618     |
| <b>3</b>     | 53.044      | 58.348       | 63.652     | 68.957       | 74.261     |
| <b>4</b>     | 71.819      | 79.001       | 86.183     | 93.365       | 100.55     |
| <b>5</b>     | 78.128      | 85.941       | 93.754     | 101.57       | 109.38     |
| <b>6</b>     | 98.579      | 108.44       | 118.30     | 128.15       | 138.01     |
| <b>7</b>     | 105.97      | 116.57       | 127.17     | 137.77       | 148.36     |
| <b>8</b>     | 117.01      | 128.71       | 140.41     | 152.11       | 163.81     |
| <b>9</b>     | 130.20      | 143.22       | 156.24     | 169.26       | 182.28     |
| <b>10</b>    | 149.73      | 164.70       | 179.67     | 194.65       | 209.62     |

| <b>R=1.5</b> | <b>AEAE</b> |              |            |              |            |
|--------------|-------------|--------------|------------|--------------|------------|
| <b>Modes</b> | <b>h=2</b>  | <b>h=2,5</b> | <b>h=3</b> | <b>h=3,5</b> | <b>h=4</b> |
| <b>1</b>     | 3,3306      | 3,6636       | 3,9967     | 5,3261       | 5,7358     |
| <b>2</b>     | 6.7679      | 7.4446       | 8.1214     | 9.4390       | 10.165     |
| <b>3</b>     | 8.6780      | 9.5458       | 10.414     | 13.630       | 14.678     |
| <b>4</b>     | 11.812      | 12.993       | 14.174     | 15.933       | 17.158     |
| <b>5</b>     | 11.910      | 13.102       | 14.293     | 17.285       | 18.614     |
| <b>6</b>     | 16.730      | 18.403       | 20.076     | 23.288       | 25.080     |
| <b>7</b>     | 17.909      | 19.699       | 21.490     | 24.776       | 26.682     |
| <b>8</b>     | 18.799      | 20.679       | 22.558     | 26.805       | 28.867     |
| <b>9</b>     | 20.776      | 22.854       | 24.932     | 30.189       | 32.511     |
| <b>10</b>    | 23.367      | 25.704       | 28.040     | 31.625       | 34.058     |

| <b>R=2</b>   | <b>AEAE</b> |              |            |              |            |
|--------------|-------------|--------------|------------|--------------|------------|
| <b>Modes</b> | <b>h=2</b>  | <b>h=2,5</b> | <b>h=3</b> | <b>h=3,5</b> | <b>h=4</b> |
| <b>1</b>     | 10.481      | 11.529       | 12,578     | 13.626       | 14.674     |
| <b>2</b>     | 18.035      | 19.838       | 21.642     | 23.445       | 25.249     |
| <b>3</b>     | 29.551      | 32.506       | 35.461     | 38.416       | 41.371     |
| <b>4</b>     | 32.470      | 35.717       | 38.964     | 42.211       | 45.458     |
| <b>5</b>     | 39.078      | 42.986       | 46.894     | 50.802       | 54.710     |
| <b>6</b>     | 45.083      | 49.591       | 54.099     | 58.607       | 63.116     |
| <b>7</b>     | 49.631      | 54.594       | 59.557     | 64.520       | 69.483     |
| <b>8</b>     | 63.994      | 70.394       | 76.793     | 83.193       | 89.592     |
| <b>9</b>     | 64.900      | 71.390       | 77.880     | 84.370       | 90.860     |
| <b>10</b>    | 69.347      | 76.282       | 83.216     | 90.151       | 97.086     |

| <b>R=0.5</b> | <b>AAEE</b> |              |            |              |            |
|--------------|-------------|--------------|------------|--------------|------------|
| <b>Modes</b> | <b>h=2</b>  | <b>h=2,5</b> | <b>h=3</b> | <b>h=3,5</b> | <b>h=4</b> |
| <b>1</b>     | 13.590      | 14.949       | 16.308     | 17.667       | 19.026     |
| <b>2</b>     | 19.174      | 21.091       | 23.008     | 24.926       | 26.843     |
| <b>3</b>     | 28.843      | 31.727       | 34.612     | 37.496       | 40.380     |
| <b>4</b>     | 39.695      | 43.664       | 47.633     | 51.603       | 55.572     |
| <b>5</b>     | 42.699      | 46.969       | 51.239     | 55.509       | 59.778     |
| <b>6</b>     | 44.951      | 49.447       | 53.942     | 58.437       | 62.932     |
| <b>7</b>     | 53.756      | 59.131       | 64.507     | 69.882       | 75.258     |
| <b>8</b>     | 60.908      | 66.999       | 73.090     | 79.181       | 85.271     |
| <b>9</b>     | 66.246      | 72.871       | 79.495     | 86.120       | 92.744     |
| <b>10</b>    | 79.947      | 87.942       | 95.937     | 103.93       | 111.93     |

| <b>R=1</b>   | <b>AAEE</b> |              |            |              |            |
|--------------|-------------|--------------|------------|--------------|------------|
| <b>Modes</b> | <b>h=2</b>  | <b>h=2,5</b> | <b>h=3</b> | <b>h=3,5</b> | <b>h=4</b> |
| <b>1</b>     | 20.761      | 22.837       | 24.913     | 26.989       | 29.065     |
| <b>2</b>     | 46.329      | 50.962       | 55.595     | 60.228       | 64.861     |
| <b>3</b>     | 46.536      | 51.190       | 55.844     | 60.497       | 65.151     |
| <b>4</b>     | 70.537      | 77.590       | 84.644     | 91.697       | 98.751     |
| <b>5</b>     | 87.551      | 96.307       | 105.06     | 113.82       | 122.57     |
| <b>6</b>     | 87.677      | 96.445       | 105.21     | 113.98       | 122.75     |
| <b>7</b>     | 110.24      | 121.27       | 132.29     | 143.31       | 154.34     |
| <b>8</b>     | 110.55      | 121.60       | 132.66     | 143.71       | 154.77     |
| <b>9</b>     | 143.92      | 158.31       | 172.70     | 187.09       | 201.49     |
| <b>10</b>    | 144.02      | 158.42       | 172.82     | 187.22       | 201.63     |

| <b>R=1.5</b> | <b>AAEE</b> |              |            |              |            |
|--------------|-------------|--------------|------------|--------------|------------|
| <b>Modes</b> | <b>h=2</b>  | <b>h=2,5</b> | <b>h=3</b> | <b>h=3,5</b> | <b>h=4</b> |
| <b>1</b>     | 3,8221      | 4.2043       | 4,5865     | 4,9687       | 5,3509     |
| <b>2</b>     | 6.4983      | 7.1481       | 7.7979     | 8.4477       | 9.0976     |
| <b>3</b>     | 10.355      | 11.391       | 12.427     | 13.462       | 14.498     |
| <b>4</b>     | 10.995      | 12.095       | 13.194     | 14.294       | 15.393     |
| <b>5</b>     | 12.836      | 14.120       | 15.404     | 16.687       | 17.971     |
| <b>6</b>     | 17.017      | 18.719       | 20.421     | 22.122       | 23.824     |
| <b>7</b>     | 17.298      | 19.028       | 20.758     | 22.488       | 24.217     |
| <b>8</b>     | 20.540      | 22.595       | 24.649     | 26.703       | 28.757     |
| <b>9</b>     | 22.910      | 25.202       | 27.493     | 29.784       | 32.075     |
| <b>10</b>    | 22.959      | 25.255       | 27.551     | 29.847       | 32.143     |

| <b>R=2</b>   | <b>AAEE</b> |              |            |              |            |
|--------------|-------------|--------------|------------|--------------|------------|
| <b>Modes</b> | <b>h=2</b>  | <b>h=2,5</b> | <b>h=3</b> | <b>h=3,5</b> | <b>h=4</b> |
| <b>1</b>     | 13.590      | 14.949       | 16.308     | 17.667       | 19.026     |
| <b>2</b>     | 19.174      | 21.091       | 23.008     | 24.926       | 26.843     |
| <b>3</b>     | 28.843      | 31.727       | 34.612     | 37.496       | 40.380     |
| <b>4</b>     | 39.695      | 43.664       | 47.633     | 51.603       | 55.572     |
| <b>5</b>     | 42.699      | 46.969       | 51.239     | 55.509       | 59.778     |
| <b>6</b>     | 44.951      | 49.447       | 53.942     | 58.437       | 62.932     |
| <b>7</b>     | 53.756      | 59.131       | 64.507     | 69.882       | 75.258     |
| <b>8</b>     | 60.908      | 66.999       | 73.090     | 79.181       | 85.271     |
| <b>9</b>     | 66.246      | 72.871       | 79.495     | 86.120       | 92.744     |
| <b>10</b>    | 79.947      | 87.942       | 95.937     | 103.93       | 111.93     |

| <b>R=0.5</b> | <b>AAEA</b> |              |            |              |            |
|--------------|-------------|--------------|------------|--------------|------------|
| <b>Modes</b> | <b>h=2</b>  | <b>h=2,5</b> | <b>h=3</b> | <b>h=3,5</b> | <b>h=4</b> |
| <b>1</b>     | 9,991       | 10,9         | 11.891     | 12.317       | 13.265     |
| <b>2</b>     | 16.427      | 18.070       | 19.713     | 19.592       | 21.099     |
| <b>3</b>     | 26.829      | 29.512       | 32.195     | 31.726       | 34.167     |
| <b>4</b>     | 32.238      | 35.461       | 38.685     | 41.650       | 44.853     |
| <b>5</b>     | 38.235      | 42.058       | 45.882     | 48.745       | 52.495     |
| <b>6</b>     | 41.180      | 45.298       | 49.417     | 48.894       | 52.655     |
| <b>7</b>     | 47.935      | 52.729       | 57.522     | 60.348       | 64.990     |
| <b>8</b>     | 59.716      | 65.688       | 71.659     | 71.379       | 76.869     |
| <b>9</b>     | 61.276      | 67.404       | 73.531     | 76.455       | 82.336     |
| <b>10</b>    | 69.219      | 76.141       | 83.063     | 89.834       | 96.744     |

| <b>R=1</b>   | <b>AAEA</b> |              |            |              |            |
|--------------|-------------|--------------|------------|--------------|------------|
| <b>Modes</b> | <b>h=2</b>  | <b>h=2,5</b> | <b>h=3</b> | <b>h=3,5</b> | <b>h=4</b> |
| <b>1</b>     | 18.163      | 19.979       | 21,795     | 23.611       | 25.428     |
| <b>2</b>     | 39.596      | 43.555       | 47.515     | 51.474       | 55.434     |
| <b>3</b>     | 44.940      | 49.434       | 53.928     | 58.421       | 62.915     |
| <b>4</b>     | 65.566      | 72.122       | 78.679     | 85.236       | 91.792     |
| <b>5</b>     | 76.745      | 84.419       | 92.094     | 99.768       | 107.44     |
| <b>6</b>     | 86.615      | 95.277       | 103.94     | 112.60       | 121.26     |
| <b>7</b>     | 101.42      | 111.56       | 121.70     | 131.84       | 141.98     |
| <b>8</b>     | 106.76      | 117.44       | 128.11     | 138.79       | 149.46     |
| <b>9</b>     | 129.25      | 142.18       | 155.10     | 168.03       | 180.95     |
| <b>10</b>    | 141.46      | 155.61       | 169.76     | 183.90       | 198.05     |

| <b>R=1.5</b> | <b>AAEA</b> |              |            |              |            |
|--------------|-------------|--------------|------------|--------------|------------|
| <b>Modes</b> | <b>h=2</b>  | <b>h=2,5</b> | <b>h=3</b> | <b>h=3,5</b> | <b>h=4</b> |
| <b>1</b>     | 3,6236      | 3,9859       | 4,3483     | 4,7107       | 5,73       |
| <b>2</b>     | 5.8584      | 6.4443       | 7.0301     | 7.6159       | 8.2018     |
| <b>3</b>     | 9.8657      | 10.852       | 11.839     | 12.825       | 13.812     |
| <b>4</b>     | 10.250      | 11.275       | 12.300     | 13.325       | 14.350     |
| <b>5</b>     | 12.445      | 13.689       | 14.933     | 16.178       | 17.422     |
| <b>6</b>     | 15.670      | 17.237       | 18.804     | 20.371       | 21.938     |
| <b>7</b>     | 16.226      | 17.849       | 19.471     | 21.094       | 22.717     |
| <b>8</b>     | 20.472      | 22.519       | 24.566     | 26.614       | 28.661     |
| <b>9</b>     | 21.686      | 23.855       | 26.023     | 28.192       | 30.361     |
| <b>10</b>    | 22.663      | 24.930       | 27.196     | 29.462       | 31.729     |

---

| <b>R=2</b>   | <b>AAEA</b> |              |            |              |            |
|--------------|-------------|--------------|------------|--------------|------------|
| <b>Modes</b> | <b>h=2</b>  | <b>h=2,5</b> | <b>h=3</b> | <b>h=3,5</b> | <b>h=4</b> |
| <b>1</b>     | 13.266      | 14.592       | 15.919     | 17.245       | 18,572     |
| <b>2</b>     | 18.006      | 19.807       | 21.608     | 23.408       | 25.209     |
| <b>3</b>     | 26.589      | 29.247       | 31.906     | 34.565       | 37.224     |
| <b>4</b>     | 39.258      | 43.184       | 47.110     | 51.036       | 54.962     |
| <b>5</b>     | 39.530      | 43.483       | 47.436     | 51.389       | 55.342     |
| <b>6</b>     | 44.313      | 48.744       | 53.175     | 57.606       | 62.038     |
| <b>7</b>     | 52.391      | 57.631       | 62.870     | 68.109       | 73.348     |
| <b>8</b>     | 56.189      | 61.808       | 67.427     | 73.046       | 78.665     |
| <b>9</b>     | 63.943      | 70.337       | 76.731     | 83.125       | 89.520     |
| <b>10</b>    | 77.647      | 85.411       | 93.176     | 100.94       | 108.71     |

## Comparaison entre les fréquences obtenues par ANSYS (MEF) et new Method de Hearmon

### Matériau Orthotrope 1

**MATERIAL NUMBER = 1**

**EX = 0.10000E+11 pa**

**EY = 0.50000E+10 pa**

**NUXY = 0.10000**

**GXY = 0.31000E+10 pa**

**GYZ = 0.0000**

**GXZ = 0.0000**

**DENS = 7800.0 kg/m<sup>3</sup>**

**PRXY = 0.20000**

**H= 10<sup>-3</sup> m**

**Pour la comparaison des résultats obtenue par ANSYS, calculé l'écart relatif  $\Delta$**

**Ou  $\Delta = [(f_{NM}-f_{ANSYS})/f_{NM}] \times 100$**

| R=1.25 ou a=4m et b=3.2m |          |         |      |            |              |
|--------------------------|----------|---------|------|------------|--------------|
|                          |          | ANSYS   | NM   | Ecart (Hz) | $\Delta$ (%) |
| modes                    | Déformée | AAAA    | AAAA |            |              |
| 1                        | 1-1      | 0,68239 | 0.68 | -0.00239   | -0.3514      |
| 2                        | 2-1      | 1.6548  | 1.66 | 0.0052     | 0.3132       |
| 3                        | 1-2      | 1.7568  | 1.76 | 0.0032     | 0.1818       |
| 4                        | 2-2      | 2.7293  | 2.73 | 0.0007     | 0.0256       |
| 5                        | 3-1      | 3.2752  | 3.28 | 0.0048     | 0.1463       |
| 6                        | 3-2      | 4.3493  | 4.35 | 0.0007     | 0.0160       |

| R=1.25 ou a=4m et b=3.2m |          |        |      |            |              |
|--------------------------|----------|--------|------|------------|--------------|
|                          |          | ANSYS  | NM   | Ecart (Hz) | $\Delta$ (%) |
| modes                    | Déformée | EEEE   | EEEE |            |              |
| 1                        | 1-1      | 1,2447 | 1,25 | 0,0053     | 0,424        |
| 2                        | 1-2      | 2,6144 | 2,63 | 0,0156     | 0,593156     |
| 3                        | 2-1      | 2,4604 | 2,47 | 0,0096     | 0,388664     |
| 4                        | 2-2      | 3,7414 | 3,76 | 0,0186     | 0,494681     |
| 5                        | 3-1      | 4,37   | 4,4  | 0,03       | 0,681818     |
| 6                        | 3-2      | 5,5916 | 5,63 | 0,0384     | 0,68206      |

| <b>R=1.25 ou a=4m et b=3.2m</b> |                 |              |             |                   |              |
|---------------------------------|-----------------|--------------|-------------|-------------------|--------------|
|                                 |                 | <b>ANSYS</b> | <b>NM</b>   | <b>Ecart (Hz)</b> | <b>Δ (%)</b> |
| <b>modes</b>                    | <b>Déformée</b> | <b>AAEA</b>  | <b>AAEA</b> |                   |              |
| <b>1</b>                        | <b>1-1</b>      | 0,82797      | 0,83        | 0,00203           | 0,244578     |
| <b>2</b>                        | <b>1-2</b>      | 2,0978       | 2,1         | 0,0022            | 0,104762     |
| <b>3</b>                        | <b>2-1</b>      | 1,7431       | 1,75        | 0,0069            | 0,394286     |
| <b>4</b>                        | <b>2-2</b>      | 2,9968       | 3           | 0,0032            | 0,106667     |
| <b>5</b>                        | <b>3-1</b>      | 3,3352       | 3,36        | 0,0248            | 0,738095     |
| <b>6</b>                        | <b>3-2</b>      | 4,556        | 4,57        | 0,014             | 0,306346     |

| <b>R=1.25 ou a=4m et b=3.2m</b> |                 |              |             |                   |              |
|---------------------------------|-----------------|--------------|-------------|-------------------|--------------|
|                                 |                 | <b>ANSYS</b> | <b>NM</b>   | <b>Ecart (Hz)</b> | <b>Δ (%)</b> |
| <b>modes</b>                    | <b>Déformée</b> | <b>AAEE</b>  | <b>AAEE</b> |                   |              |
| <b>1</b>                        | <b>1-1</b>      | 0,93552      | 0,94        | 0,00448           | 0,476596     |
| <b>2</b>                        | <b>1-2</b>      | 2,1608       | 2,17        | 0,0092            | 0,423963     |
| <b>3</b>                        | <b>2-1</b>      | 2,0334       | 2,05        | 0,0166            | 0,809756     |
| <b>4</b>                        | <b>2-2</b>      | 3,2093       | 3,22        | 0,0107            | 0,332298     |
| <b>5</b>                        | <b>3-1</b>      | 3,803        | 3,82        | 0,017             | 0,445026     |
| <b>6</b>                        | <b>3-2</b>      | 4,9456       | 4,96        | 0,0144            | 0,290323     |

| <b>R=1.25 ou a=4m et b=3.2m</b> |                 |              |             |                   |              |
|---------------------------------|-----------------|--------------|-------------|-------------------|--------------|
|                                 |                 | <b>ANSYS</b> | <b>NM</b>   | <b>Ecart (Hz)</b> | <b>Δ (%)</b> |
| <b>modes</b>                    | <b>Déformée</b> | <b>AEAE</b>  | <b>AEAE</b> |                   |              |
| <b>1</b>                        | <b>1-1</b>      | 0,97681      | 0,98        | 0,00319           | 0,32551      |
| <b>2</b>                        | <b>1-2</b>      | 1,9253       | 1,94        | 0,0147            | 0,757732     |
| <b>3</b>                        | <b>2-1</b>      | 2,304        | 2,31        | 0,006             | 0,25974      |
| <b>4</b>                        | <b>2-2</b>      | 3,2278       | 3,24        | 0,0122            | 0,376543     |
| <b>5</b>                        | <b>3-1</b>      | 4,2677       | 4,27        | 0,0023            | 0,053864     |
| <b>6</b>                        | <b>3-2</b>      | 5,203        | 5,21        | 0,007             | 0,134357     |

| <b>R=1.25 ou a=4m et b=3.2m</b> |                 |              |             |                   |              |
|---------------------------------|-----------------|--------------|-------------|-------------------|--------------|
|                                 |                 | <b>ANSYS</b> | <b>NM</b>   | <b>Ecart (Hz)</b> | <b>Δ (%)</b> |
| <b>modes</b>                    | <b>Déformée</b> | <b>EAAE</b>  | <b>EAAE</b> |                   |              |
| <b>1</b>                        | <b>1-1</b>      | 1,1148       | 1,12        | 0,0052            | 0,464286     |
| <b>2</b>                        | <b>1-2</b>      | 2,543        | 2,56        | 0,017             | 0,664062     |
| <b>3</b>                        | <b>2-1</b>      | 2,1361       | 2,15        | 0,0139            | 0,646512     |
| <b>4</b>                        | <b>2-2</b>      | 3,5073       | 3,52        | 0,0127            | 0,360795     |
| <b>5</b>                        | <b>3-1</b>      | 3,8696       | 3,89        | 0,0204            | 0,524422     |
| <b>6</b>                        | <b>3-2</b>      | 5,1718       | 5,2         | 0,0282            | 0,542308     |

| <b>R=1.333 ou a=4m et b=3m</b> |                 |              |             |                   |              |
|--------------------------------|-----------------|--------------|-------------|-------------------|--------------|
|                                |                 | <b>ANSYS</b> | <b>NM</b>   | <b>Ecart (Hz)</b> | <b>Δ (%)</b> |
| <b>modes</b>                   | <b>Déformée</b> | <b>AAAA</b>  | <b>AAAA</b> |                   |              |
| <b>1</b>                       | <b>1-1</b>      | 0,73174      | 0,73        | -0,00174          | -0,23836     |
| <b>2</b>                       | <b>1-2</b>      | 1,9542       | 1,95        | -0,0042           | -0,21538     |
| <b>3</b>                       | <b>2-1</b>      | 1,7041       | 1,7         | -0,0041           | -0,24118     |
| <b>4</b>                       | <b>2-2</b>      | 2,9266       | 2,93        | 0,0034            | 0,116041     |
| <b>5</b>                       | <b>3-1</b>      | 3,3246       | 3,33        | 0,0054            | 0,162162     |
| <b>6</b>                       | <b>3-2</b>      | 4,5467       | 4,55        | 0,0033            | 0,072527     |

| <b>R=1.333 ou a=4m et b=3m</b> |                 |              |             |                   |              |
|--------------------------------|-----------------|--------------|-------------|-------------------|--------------|
|                                |                 | <b>ANSYS</b> | <b>NM</b>   | <b>Ecart (Hz)</b> | <b>Δ (%)</b> |
| <b>modes</b>                   | <b>Déformée</b> | <b>EEEE</b>  | <b>EEEE</b> |                   |              |
| <b>1</b>                       | <b>1-1</b>      | 1,3384       | 1,34        | 0,0016            | 0,119403     |
| <b>2</b>                       | <b>1-2</b>      | 2,9124       | 2,93        | 0,0176            | 0,600683     |
| <b>3</b>                       | <b>2-1</b>      | 2,5357       | 2,55        | 0,0143            | 0,560784     |
| <b>4</b>                       | <b>2-2</b>      | 4,018        | 4,04        | 0,022             | 0,544554     |
| <b>5</b>                       | <b>3-1</b>      | 4,4413       | 4,47        | 0,0287            | 0,642058     |
| <b>6</b>                       | <b>3-2</b>      | 5,8488       | 5,88        | 0,0312            | 0,530612     |

| <b>R=1.333 ou a=4m et b=3m</b> |          |         |      |            |              |
|--------------------------------|----------|---------|------|------------|--------------|
|                                |          | ANSYS   | NM   | Ecart (Hz) | $\Delta$ (%) |
| modes                          | Déformée | AAEA    | AAEA |            |              |
| 1                              | 1-1      | 0,90277 | 0,91 | 0,00723    | 0,794505     |
| 2                              | 1-2      | 2,3469  | 2,35 | 0,0031     | 0,131915     |
| 3                              | 2-1      | 1,8105  | 1,82 | 0,0095     | 0,521978     |
| 4                              | 2-2      | 2,3469  | 2,35 | 0,0031     | 0,131915     |
| 5                              | 3-1      | 3,3974  | 3,42 | 0,0226     | 0,660819     |
| 6                              | 3-2      | 4,7931  | 4,81 | 0,0169     | 0,351351     |

| <b>R=1.333 ou a=4m et b=3m</b> |          |        |      |            |              |
|--------------------------------|----------|--------|------|------------|--------------|
|                                |          | ANSYS  | NM   | Ecart (Hz) | $\Delta$ (%) |
| modes                          | Déformée | AAEE   | AAEE |            |              |
| 1                              | 1-1      | 1,017  | 1,01 | -0,007     | -0,69307     |
| 2                              | 1-2      | 2,4058 | 2,42 | 0,0142     | 0,586777     |
| 3                              | 2-1      | 2,0943 | 2,11 | 0,0157     | 0,744076     |
| 4                              | 2-2      | 3,4441 | 3,45 | 0,0059     | 0,171014     |
| 5                              | 3-1      | 3,86   | 3,88 | 0,02       | 0,515464     |
| 6                              | 3-2      | 5,1713 | 5,18 | 0,0087     | 0,167954     |

| <b>R=1.333 ou a=4m et b=3m</b> |          |        |      |            |              |
|--------------------------------|----------|--------|------|------------|--------------|
|                                |          | ANSYS  | NM   | Ecart (Hz) | $\Delta$ (%) |
| modes                          | Déformée | EAEE   | EAEE |            |              |
| 1                              | 1-1      | 1,2173 | 1,22 | 0,0027     | 0,221311     |
| 2                              | 1-2      | 2,8466 | 2,86 | 0,0134     | 0,468531     |
| 3                              | 2-1      | 2,2199 | 2,23 | 0,0101     | 0,452915     |
| 4                              | 2-2      | 3,7963 | 3,81 | 0,0137     | 0,35958      |
| 5                              | 3-1      | 3,9419 | 3,97 | 0,0281     | 0,707809     |
| 6                              | 3-2      | 5,443  | 5,48 | 0,037      | 0,675182     |

| <b>R=1.333 ou a=4m et b=3m</b> |          |        |      |            |              |
|--------------------------------|----------|--------|------|------------|--------------|
|                                |          | ANSYS  | NM   |            |              |
| modes                          | Déformée | AEAE   | AEAE | Ecart (Hz) | $\Delta$ (%) |
| 1                              | 1-1      | 1,0153 | 1,02 | 0,0047     | 0,460784     |
| 2                              | 1-2      | 2,1119 | 2,13 | 0,0181     | 0,849765     |
| 3                              | 2-1      | 2,344  | 2,35 | 0,006      | 0,255319     |
| 4                              | 2-2      | 3,4063 | 3,42 | 0,0137     | 0,400585     |
| 5                              | 3-1      | 4,3095 | 4,31 | 0,0005     | 0,011601     |
| 6                              | 3-2      | 5,3801 | 5,39 | 0,0099     | 0,183673     |

| <b>R=1.5 ou a=4m et b=2.667</b> |          |         |      |            |              |
|---------------------------------|----------|---------|------|------------|--------------|
|                                 |          | ANSYS   | NM   |            |              |
| modes                           | Déformée | AAAA    | AAAA | Ecart (Hz) | $\Delta$ (%) |
| 1                               | 1-2      | 0,83986 | 0,84 | 0,00014    | 0,016667     |
| 2                               | 2-1      | 2,3866  | 2,39 | 0,0034     | 0,142259     |
| 3                               | 2-2      | 1,8123  | 1,81 | -0,0023    | -0,12707     |
| 4                               | 3-1      | 3,3591  | 3,36 | 0,0009     | 0,026786     |
| 5                               | 3-2      | 3,3591  | 3,43 | 0,0709     | 2,067055     |
| 6                               | 1-2      | 4,9791  | 4,98 | 0,0009     | 0,018072     |

| <b>R=1.5 ou a=4m et b=2.667</b> |          |        |      |            |              |
|---------------------------------|----------|--------|------|------------|--------------|
|                                 |          | ANSYS  | NM   |            |              |
| modes                           | Déformée | EEEE   | EEEE | Ecart (Hz) | $\Delta$ (%) |
| 1                               | 1-2      | 1,5521 | 1,56 | 0,0079     | 0,50641      |
| 2                               | 2-1      | 3,571  | 3,59 | 0,019      | 0,529248     |
| 3                               | 2-2      | 2,7095 | 2,72 | 0,0105     | 0,386029     |
| 4                               | 3-1      | 4,6374 | 4,67 | 0,0326     | 0,698073     |
| 5                               | 3-2      | 4,6374 | 4,62 | -0,0174    | -0,37662     |
| 6                               | 1-2      | 6,4278 | 6,47 | 0,0422     | 0,652241     |

| <b>R=1.5 ou a=4m et b=2.667</b> |                 |              |             |                   |              |
|---------------------------------|-----------------|--------------|-------------|-------------------|--------------|
|                                 |                 | <b>ANSYS</b> | <b>NM</b>   |                   |              |
| <b>modes</b>                    | <b>Déformée</b> | <b>AAEA</b>  | <b>AAEA</b> | <b>Ecart (Hz)</b> | <b>Δ (%)</b> |
| <b>1</b>                        | <b>1-2</b>      | 1,0678       | 1,07        | 0,0022            | 0,205607     |
| <b>2</b>                        | <b>2-1</b>      | 2,893        | 2,89        | -0,003            | -0,10381     |
| <b>3</b>                        | <b>2-2</b>      | 1,9609       | 1,97        | 0,0091            | 0,461929     |
| <b>4</b>                        | <b>3-1</b>      | 3,7791       | 3,78        | 0,0009            | 0,02381      |
| <b>5</b>                        | <b>3-2</b>      | 3,536        | 3,56        | 0,024             | 0,674157     |
| <b>6</b>                        | <b>1-2</b>      | 5,3168       | 5,33        | 0,0132            | 0,247655     |

| <b>R=1.5 ou a=4m et b=2.667</b> |                 |              |             |                   |              |
|---------------------------------|-----------------|--------------|-------------|-------------------|--------------|
|                                 |                 | <b>ANSYS</b> | <b>NM</b>   |                   |              |
| <b>modes</b>                    | <b>Déformée</b> | <b>AAEE</b>  | <b>AAEE</b> | <b>Ecart (Hz)</b> | <b>Δ (%)</b> |
| <b>1</b>                        | <b>1-2</b>      | 1,1596       | 1,17        | 0,0104            | 0,888889     |
| <b>2</b>                        | <b>2-1</b>      | 2,9452       | 2,96        | 0,0148            | 0,5          |
| <b>3</b>                        | <b>2-2</b>      | 2,2314       | 2,25        | 0,0186            | 0,826667     |
| <b>4</b>                        | <b>3-1</b>      | 3,9634       | 3,97        | 0,0066            | 0,166247     |
| <b>5</b>                        | <b>3-2</b>      | 3,9887       | 4,01        | 0,0213            | 0,531172     |
| <b>6</b>                        | <b>1-2</b>      | 5,6724       | 5,68        | 0,0076            | 0,133803     |

| <b>R=1.5 ou a=4m et b=2.667</b> |                 |              |             |                   |              |
|---------------------------------|-----------------|--------------|-------------|-------------------|--------------|
|                                 |                 | <b>ANSYS</b> | <b>NM</b>   |                   |              |
| <b>modes</b>                    | <b>Déformée</b> | <b>AAEE</b>  | <b>AAEE</b> | <b>Ecart (Hz)</b> | <b>Δ (%)</b> |
| <b>1</b>                        | <b>1-2</b>      | 1,125        | 1,11        | -0,015            | -1,35135     |
| <b>2</b>                        | <b>2-1</b>      | 2,4326       | 2,54        | 0,1074            | 4,228346     |
| <b>3</b>                        | <b>2-2</b>      | 2,5259       | 2,44        | -0,0859           | -3,52049     |
| <b>4</b>                        | <b>3-1</b>      | 3,803        | 3,82        | 0,017             | 0,445026     |
| <b>5</b>                        | <b>3-2</b>      | 4,4015       | 4,4         | -0,0015           | -0,03409     |
| <b>6</b>                        | <b>1-2</b>      | 5,7722       | 5,78        | 0,0078            | 0,134948     |

| <b>R=1.5 ou a=4m et b=2.667</b> |                 |              |             |                   |                                |
|---------------------------------|-----------------|--------------|-------------|-------------------|--------------------------------|
|                                 |                 | <b>ANSYS</b> | <b>NM</b>   |                   |                                |
| <b>modes</b>                    | <b>Déformée</b> | <b>EAAE</b>  | <b>EAAE</b> | <b>Ecart (Hz)</b> | <b><math>\Delta</math> (%)</b> |
| <b>1</b>                        | <b>1-2</b>      | 1,4465       | 1,45        | 0,0035            | 0,241379                       |
| <b>2</b>                        | <b>2-1</b>      | 3,5144       | 3,53        | 0,0156            | 0,441926                       |
| <b>3</b>                        | <b>2-2</b>      | 2,4115       | 2,42        | 0,0085            | 0,35124                        |
| <b>4</b>                        | <b>3-1</b>      | 4,4381       | 4,46        | 0,0219            | 0,491031                       |
| <b>5</b>                        | <b>3-2</b>      | 4,107        | 4,13        | 0,023             | 0,556901                       |
| <b>6</b>                        | <b>1-2</b>      | 6,0495       | 6,08        | 0,0305            | 0,501645                       |

---

## Références bibliographiques

- [1] **BERTHELOT J.M.**, « Matériaux composites comportement mécanique et analyse des structures », Masson, 1992.
- [2] **BILLOET J.L.**, « Introduction aux matériaux composites à hautes performances », Teknea ENSAM 1992.
- [3] **CHRETIEN G.**, « Matériaux composites à matrice organique », Techniques et Documentations, Lavoisier, 1986.
- [4] **BERBAIN F., CHEVALIER A.**, « Mise en œuvre des plastiques renforcés », Technique de l'ingénieur, traité A 9 III, article 3250.
- [5] **DESSARTHE A., GUYOT H., CARAYOL M.**, « Techniques de fabrication des pièces mécaniques en plastiques ou composites », CETIM, 1994.
- [6] **GERARDIN M., RTXEN D.**, « Théorie des vibrations Application à la dynamique des structures » 2<sup>e</sup> édition, Masson 1996.
- [7] **LEMAITRE J., CHABOCHE J.L.**, « Mécanique des matériaux solides », 2<sup>ème</sup> édition, Dunod 1988.
- [8] **GAY D.**, « Matériaux Composites », Hermès, 1991.
- [9] **BATOZ J.L., DHATT G.**, « Modélisation des structures par éléments finis Volume 2 poutres et plaques », Hermès, 1990.
- [10] **PABIOT J.**, « Plastiques renforcés Propriétés mécaniques. Calcul », Technique de l'ingénieur, traité A 91, article 3245.
- [11] **LAROZE S.X., BARRAI J.J.**, « Mécanique des Structures, Tome 4, Calcul des Structures En Matériaux Composites », Eyrolles Masson, 1987.
- [12] **GIBSON R.F.**, « Modal vibration response measurements for characterization of composite materials and structures », Composites science and technology, 2000, 60, 2769-2780.
- [13] **CHEN W.Q., LUE C.F.**, « 3D free vibration analysis of cross-ply laminated plates with one pair of opposite edges simply supported », Composite Structures, 2005, 69, 77-87.
- [14] **KOO K.N., LEE L.**, « Vibration and damping analysis of fiber-reinforced composites material conical shells », Journal of sound and vibration, 1996, 193(3), 581-595
- [15]. **G.B. Warburton**, « the vibration of rectangular plates », proceeding of the institute
- [16]. **A.W. LEISSA**, "Vibration of plates", Nasa SP-160, Washington DC, 1969.

- 
- [17]. **JUC JAOUEN**: "Vibration de flexion des plaques" , Rapport de recherché/ Université de Sherbrooke , 2002
- [18]. **Philippe MESTAT** "Etude critique des modelisations de plaques encastrées en vibration" ,Travail de fin d'etudes (Memoire de DEA) , 2juin 1981
- [19]. **A.W.LEISSA**, "Plate vibration Research", classical theory, shok vibration or simply supported Edgas", journal of Applied Mechanics (1959)
- [20]. **R.F.S HEARMON**, "The frequency of flexural vibration of rectangular plates with clamped or simply supportes Edges", journal of applied mechanics, (1959), 26, 537-540.
- [21]. **I.E HARIK**. X. Liu and N. malakrishnan, "Analytical solution to free vibration of rectangular plates", Journal of sound and vibration, (1992), 153(1), 51-62.
- [22]. **DANIEL GAY** : "Materiaux Composites" , Hermès ,1997
- [23]. **O.KOPMAZ AND S.TELLI**, "Free vibration of rectangular plate carrying a distributed mass", Journal of sound and vibration, (2001), 251 (1), 39-97..
- [24]. **TIMOSHENKO ,S. P** ,"Theory of vibration in engineering -GTTI, 1931 section56, p. 308tr.from English.
- [25]. **JAE.HOON KANG. HYSIN-JUSTIM**, "Exact solutions for the force vibration of rectangular plates having in-plane moments acting on two simply supported Edges". Journal of sound and vibration, (2003), 273, 933-948.
- [26]. **LAROZE S. ,BARRAU J.J** : "Mecaniques des structures-solides élastiques-plaques et coques" ,Eyrollres/Masson ,1988
- [27]. **K.M LIEW, S. KITIPORNCHAR, A.Y.T. LEANG, C W. LI**, "Analysis of the free vibration of rectangular plates with central cu-outs using the Discrete Ritz Method", international journal of mechanical sciences (2005), 45, 941-959.
- [28]. **MIHIR CHANDRA MONNA**, "Free vibration analysis of isotropic rectangular plates usinf a high-order triangular finite element with shear", Journal of sound and vibration, (2005) 281,235,295.
- [29]. **R.F.S. HEARMAN**, The frequency of flexural vibration of rectangular orthotropic xith clamped or supportd edges, Journal of applied mechanics 26 (1959) 537-540.
- [30]. **J.N. REDDY**, Areview of the literature on final element mode lling of laminated composite plates and sells, shock and vibration digest 17 (4) (1985) 3-8.
- [31]. **WHITNEY , J .M** , "Structred Analysis of Laminated Anisotropic Plates" , technnomic publishing CO , Lancaster ,PA (1987)

- 
- [32]. **J.N. REDDY**, A review of the literature on final element modeling of laminated composite plates and shells, shock and vibration digest 17 (4) (1985) 3-8.
- [33]. **WHITNEY , J .M** , "Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates" , technomic publishing CO , Lancaster ,PA (1987)
- [34]. **C.W. BERT**, Recent research in composite, and sandwich plate dynamics, shock and vibration Digest 14(10) (1982) 17-34.
- [35]. **M .E .BIANCOLINI ,C . Butti ,L. Reccia**, "Approximation solution for free vibration of thin orthotropic rectangular plates" journal of sound and vibration 2005
- [36]. **V.S. GUMENYUK**, determination of the lowest (fundamental frequency of free vibration of orthotropic plates *Prikladnaya Mekhnika*.
- [37]. **D. YOUNG , R.P. FELGAR JR .**, "Tables of characteristic functions representing normal modes of vibration of a beam" the university of texas publication, no.4913, Bureau of engineering research, Engineering research series no.44, 1994 (cited by Hearmon)
- [38]. **LAROZE S.BARRAU J.J**: "Mécanique des structures – calcul des structures en matériaux composites", Eyrolles/Masson, 1987.
- [39]. **PLUSQUELLEC J** : « Vibration », technique de l'ingénieur (A410)
- [40]. **TIMOSHENKO, STEPHEN P., JAMES M. GERE** : "Théories of elastic stability", MC Graw-Hill, Newyork, 1961.
- [41]. **DANIEL GAY** : "matériaux composites", hermes, 1997.
- [42]. **LALANE. M., BETHIER P., HAGOPAIN J.D**, « Mécanique des vibration linéaires ».
- [43]. **CARL T. HERAKOVICH**, « Mechanics of Fibrous Composites». University of Virginia.1997.
- [44].**T. ZARZA**, «Analyse Dynamique des Plaques Homogènes et Non-Homogènes » Thèse de Doctorat d'État en Génie Civil de l'université de Constantine.
- [45]. **H. CHERIDI**, « Analyse dynamique des plaques minces et épaisses: Application aux matériaux homogènes et non homogènes » Mémoire de Magistère en Génie mécanique de l'université de Constantine.