

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de L'Enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE

Faculté des Sciences de l'Ingénieur

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

N° d'ordre : / MAG / 2010

Série : / GM / 2010



MEMOIRE

Présenté pour obtenir le Diplôme de Magister en Génie Mécanique

Option : CONSTRUCTION MECANIQUE

« Mécanique Appliquée en Engineering »

Intitulé :

**Modélisation Numérique du Contact et du Champ des Contraintes
du Couple Tribologique Cuivre-Acier**

Présentée par :

Redha ABOUD

Soutenu le : 29 Avril 2010, Devant le Jury :

Président :	Mr. B. NECIB	Prof. Université Mentouri Constantine
Rapporteur :	Mr. A. BOUCHOUCHA	Prof. Université Mentouri Constantine
Examineur :	Mr. S. MEZIANI	Prof. Université Mentouri Constantine
	Mr. A. FOUATHIA	M.C. Université Mentouri Constantine

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance envers mon directeur de mémoire, le Professeur Bouchoucha Ali du Laboratoire de Mécanique de l'Université de Mentouri, pour sa confiance et pour son aide inestimable. Les deux ans passés à ses côtés ont été indiscutablement les plus formatifs de tout mon cursus. Ses qualités pédagogiques, sa patience conjugée à une rigueur scientifique d'exception ainsi que ses qualités humaines ont contribué de manière décisive à l'aboutissement de ce travail.

Je remercie tout particulièrement le Professeur Necib Brahim de l'Université de Mentouri de Constantine de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Je tiens à remercier les personnes qui ont accepté de juger mon travail de mémoire, Monsieur Meziani Salim Professeur à l'Université Metouri de Constantine ainsi Monsieur Fouathia Atmane Maître de conférences à l'Université Mentouri de Constantine.

J'adresse aussi mes remerciements avec une mention spéciale à Monsieur Mouaji Youcef, chargé de cours au centre Universitaire de Khenchela pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de m'aider pour mener à terme ce modeste travail.

Je n'oublie pas aussi de remercier tous les enseignants de l'ENDMC qui ont contribué à ma formation et spécialement le Directeur de l'Ecole Mr. Toufik BOUKHAROUBA, Professeur à l'USTHB de Bab Ezouar - Alger.

Enfin, je remercie tous mes collègues de promotion, mes amis de longue date en particulier Bouchelif Hamza ainsi que la personne la plus proche de moi Chahboub Meriem, et tous les membres de ma famille bien sûr.

Résumé

Actuellement, il apparaît que le développement des matériaux destinés aux applications tribologiques notamment en frottement sec constitue un champ d'activités et de développements mécaniques.

Les applications industrielles qui en découlent sont nombreuses tel que le domaine médicale, optique, usinage, aéronautique, spatiale, etc.

En fait, quel que soit les performances recherchées pour les matériaux (diminution du frottement, bonne résistance à l'usure, résistance à la rupture, tenue à la fatigue) leur utilisation reste fortement dépendante de leurs caractéristiques mécaniques. L'un des tests les plus utilisés pour la quantifier est le comportement tribologique.

Quand un corps massif lisse ou rugueux est mis en contact avec un autre matériau, des sollicitations mécaniques sont imposées au niveau de la surface et en subsurface par fatigue des deux antagonistes du contact. Ces sollicitations peuvent engendrer des dégradations par fatigue, rupture, usure, etc. afin d'évaluer l'usure ou plus particulièrement les dégradations telles que la formation de débris, l'amorçage et la propagation des fissures ainsi que leurs directions de propagation, il est impératif d'évaluer le type et l'amplitude des contraintes mécaniques imposées. Cette thématique est directement liée au sujet abordé dans ce sujet.

Cette étude sera sans doute une contribution dans le but de répondre à un besoin grandissant dans le domaine des contacts statiques ou dynamiques. Il s'agit de la modélisation des contacts et des contraintes au niveau de la surface et de la matière sous jacente. Cette modélisation permet en outre de prédire la propagation et la fissure dans les contacts glissants sachant le coefficient de frottement et les caractéristiques mécaniques des matériaux constituant le couple. La confrontation des résultats expérimentaux et numériques permet la prédiction et l'amélioration de la fiabilité et donc la durée de service des machines, afin de réduire le coût de l'entretien et le rendre plus fiables.

Abstact

Currently, it appears that the development of materials for tribological applications including dry friction is a field of activity and mechanical developments.

Industrial applications arising are various; medical, optical, processing, aeronautics, space, etc...

In fact, some performance is searched for materials (low friction, good resistance, tensile strength, fatigue resistance) and their use is still heavily dependent on their characteristics mechanics. One of the most widely used tests to quantify is the tribological behaviour.

When a massive body, either smooth or rough, is brought into contact with another material, the mechanical stresses are imposed at the surface and subsurface fatigue of two antagonistic contacts. These stresses can cause fatigue damage, breakage, etc... To assess the damage especially as the formation of debris, initiation and the propagation of cracks and their propagation directions, it is imperative to assess the type of the amplitude of mechanical stresses imposed. This theme is directly related to the topic of this issue.

This study will undoubtedly contribute in order to meet a growing need in the field of static or dynamic contacts. These are the modelling of contact and stress at the surface and the underlying material. This model also allows predicting the crack propagation and sliding contacts in knowing the coefficient of friction and mechanical properties of constituent materials torque. Comparison of experimental and numerical results allows the prediction and improvement of reliability and therefore the service life of machines to reduce the cost of maintenance and make it more reliable.

ملخص

حاليا ، يبدو أن تطور المواد اللازمة لتطبيقات التريبولوجيا بما في ذلك الاحتكاك الجاف يخلق مجالا للأنشطة والتطورات الميكانيكية التي تحدث في أدوات ولوازم التجميع. فالتطبيقات الصناعية الناشئة كثيرة منها الطبية والبصرية ، التجهيز ، علم الطيران ، وعلم الفضاء ، الخ

في الواقع ، مهما كانت الأبحاث في ما يخص أداء بعض المواد (كتحفيض الاحتكاك ، و المقاومة الجيدة للتآكل) فاستخدامها لا يزال يعتمد اعتمادا كبيرا على ميكانيكيتها. ويعد السلوك التريبولوجي واحدا من التجارب الأكثر استخداما للقياس.

عندما يحتك جسم هائل ناعما كان أو خشنا، مع مادة أخرى ، فان أحمالا ميكانيكية تفرض فوق السطح وتحتته مما يشكل ضغوطا على المادتين المتضادتين. هذه الضغوط يمكن أن تسبب أضرارا و تدهورا بالغا كالكسر و التآكل، الخ. و لتقييم تآكل هذه الأسطح أو بعبارة أدق تدهورها مثل تشكيل الحطام، و ظهور الشقوق، لا بد من تقييم سعة الضغوط الميكانيكية المفروضة. وما قد سبق ذكره له صلة مباشرة بموضوع هذه المسألة.

هذه الدراسة سوف تساهم بلا شك في تلبية الحاجة المتزايدة في مجال الاحتكاك ، ساكنا كان أو متحركا بصنع نماذج للاحتكاك و الضغوط، على مستوى السطح والمادة المرافقة. يسمح هذا الطراز أيضا بالتنبؤ بالشقوق في الاحتكاكات و معرفة معامل الاحتكاك والخصائص الميكانيكية للمواد المكونة للمادتين. إن المقارنة بين النتائج التجريبية والعديدية يسمح بالتنبؤ وتحسين الاعتمادية ، وبالتالي طول مدة خدمة الآلات ، للحد من تكلفة الصيانة وجعلها أكثر موثوقية.

TABLE DES MATIERES

RESUME	
INTRODUCTION.....	11

Chapitre I

SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LA TRIBOLOGIE

1. RAPPELS ELEMENTAIRES SUR LA GEOMETRIE DU CONTACT.....	13
1.1. Aires de contact.....	13
2. PARAMETRES FONCTIONNELS.....	14
2.1. Mode de contact.....	14
3. ACTIONS DE CONTACT.....	16
3.1. Définition.....	16
3.2. Action de contact sans frottement.....	17
3.3. Action de contact avec frottement.....	18
3.3.1. Frottement de glissement.....	18
3.3.2. Frottement de roulement.....	20
3.3.3. Pivotement.....	21
4. CARACTERISTIQUES DU FACTEUR DE FROTTEMENT.....	24
5. PROCESSUS D'OXYDATION DES METAUX.....	25
5.1. Généralités.....	25
5.2. Oxydation du cuivre.....	26
5.3. Oxydation des aciers.....	26
6. MECANISME D'ABSORPTION DU CARBONE SUR LE CUIVRE.....	27
6.1. Influences sur le frottement et usure.....	27
7. RESULTATS.....	27

7.1. Matériaux.....	28
7.2. Propriétés.....	28
7.2.1. Composition chimique.....	28
7.2.2. Caractéristiques mécaniques.....	28
7.2.3. Propriétés physiques.....	29
7.3. Charge normale.....	29
7.4. Vitesse.....	31
8. ANALYSE DES SURFACES FROTTEES.....	31

Chapitre II

THEORIE ET CARACTERISTIQUES DES ELEMENTS CONSTITUANT LE COUPLE

1. ELEMENTS DE LA THEORIE DU CONTACT.....	34
1.1. Couple de frottement-éléments géométriques spécifiques.....	34
1.2. Déformations de contact et contraintes.....	36
2. THEORIES ELASTIQUES.....	38
2.1. Hypothèses.....	39
2.2. Force ponctuelle sur un demi-espace élastique.....	39
2.3. Distribution de la pression de contact.....	40
2.4. Equation du contact.....	40
2.5. Contact circulaire ponctuel.....	41
2.6. Contact linéaire.....	44
2.7. Contact elliptique.....	45
2.8. Contraintes dans les solides en contact : cas du contact linéaire.....	45
2.9. Distribution des contraintes dans un contact ponctuel.....	47

2.10. Poinçon à base plane.....	47
3. THEORIES PLASTIQUES.....	48
3.1. Seuil de plasticité pour un contact de cylindres.....	48
3.2. Seuil de plasticité pour un contact sphère-plan.....	49
4. THEORIE DE MINDLIN (1952).....	50
4.1. Transition statique dynamique.....	50
5. CARACTERISTIQUES DU COUPLE ETUDIE.....	54
5.1. Les aciers.....	54
5.2. Les alliages cuivreux.....	55

Chapitre III

MODELES DE CONTACT

1. CONTACT SPHERE - SPHERE ET SPHERE – PLAN.....	57
1.1. Application d'un effort normal.....	57
1.2. Contact cylindre – plan.....	60
2. Modèle de Huber, 1904.....	64
2.1. Analyse des contraintes à la surface du plan.....	64
2.2. Contraintes aux points appartenant à l'axe oz.....	66
3. CHARGEMENT TANGENTIEL.....	67
4. MODELE JKR.....	75
5. MODELE DMT.....	76
6. MODELE DUGDALE.....	76

Chapitre IV

FISSURATION ET CONTACT

1. USURE PAR FATIGUE PENDANT LE GLISSEMENT.....	81
2. USURE PAR PETITS DEPARTTEMENTS (fretting).....	85
3. PLASTIFICATION DES ASPERITES.....	88
4. APPROCHE DE LA MECANIQUE DE LA RUPTURE FRAGILE.....	90
4.1. Théorie de Griffith.....	90
4.2. Modes d'ouvertures des fissures.....	91
4.3. Facteur d'intensité des contraintes.....	91
4.4. Formule d'Irwin.....	93
4.5. Principe de superposition.....	95
4.6. Calcul des facteurs d'intensité de contrainte.....	97
5. APPLICATION AU CAS DE L'INDENTATION SPHERIQUE ET DE LA RAYURE.....	98
5.1. Principe.....	98
5.2. Trajectoire d'une fissure.....	98
5.2.1. Méthode directe.....	99
6. CRITERES DE PLASTICITE.....	101
6.1. Critère de Tresca.....	101
6.2. Critère de Von Mises.....	101
6.3. Critère de Rankine.....	102
6.4. Critères de limite élastique basés sur l'énergie.....	102
6.4.1. Critère de Beltrami.....	103

Chapitre V

MODELISATION DU CHAMP DES CONTRAINTES DU CONTACT CUIVRE/ACIER ET CUIVRE/FILM D'OXYDE/ACIER

1. MODELISATION.....	104
1.1. Distribution des contraintes du contact dynamique cylindre-cylindre de longueur infini...	104
1.1.1 Equations différentielles de l'équilibre et les conditions de compatibilité.....	105
1.1.2 Les conditions aux limites.....	106
1.1.3 Expression des fonctions $\phi(Y)$ et $\Psi(Y)$	107
1.1.4 Evolution de la demi-largeur de contact.....	108
1.1.5. Contrainte en chaque point du contact statique.....	109
1.1.6. Expression de la déformation du contact.....	111
2. RESULTATS DE LA MODELISATION.....	112
2.1. Contact statique cylindre-plan.....	112
2.2. Contact dynamique cylindre/plan.....	117
2.3. Etude de la profondeur en fonction de la charge appliquée.....	128
3. MODELISATION DU CONTACT CYLINDRE/OXYDE/ACIER.....	128
3.1. Les équations d'équilibres et de compatibilités dans le revêtement/substrat.....	129
3.1.1. Etude du contact- statique à chargement unitaire.....	131
3.1.2 Etude du contact dynamique.....	133
4. CALCUL DES CONTRAINTES DU CONTACT.....	133
5. Evolution de l'épaisseur de la couche d'oxyde.....	135
6. CONCENTRATION DES CONTRAINTES.....	138
CONCLUSION.....	139
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	142
ANNEXE.....	146

INTRODUCTION

Le mot tribologie, construit à partir des racines grecques *tribein*, frotter et *logos*, discours, étude, a été proposé en 1968 par G. Salomon pour désigner la science qui étudie les phénomènes susceptibles de se produire lorsque deux corps en contact sont animés de mouvements relatifs. Il recouvre, entre autres, tous les domaines du frottement, de l'usure et de la lubrification.

La tribologie s'intéresse aussi aux diverses méthodes qui permettent de donner un « bon comportement » à ces contacts, sachant que les organes mécaniques « lâchent » bien plus souvent aujourd'hui par leurs surfaces que par leurs volumes. Son étude s'impose pour de nombreuses raisons :

- assurer le bon fonctionnement et la fiabilité des machines,
- diminuer le coût d'obtention des surfaces frottantes,
- améliorer le rendement et la longévité des machines,
- assurer la sécurité des biens et des personnes, particulièrement dans le domaine des transports,
- contribuer à la santé publique et au confort, par exemple en diminuant les bruits, très nombreux liés aux contacts mécaniques.

Notre sujet porte sur le comportement tribologique d'un contact statique ou dynamique du couple cuivre-acier et bien particulièrement sur la distribution des contraintes dans un contact cylindre-plan et voir l'influence des différents paramètres mécaniques (charge normale, coefficient de frottement et taux d'usure).

De ce fait, le mémoire est structuré de la façon suivante :

Le premier chapitre est consacré à une synthèse bibliographique sur les comportements tribologiques du couple cuivre-acier.

Dans le second chapitre, nous présentons les différentes théories de contact ainsi que les différentes caractéristiques des matériaux constituant le couple étudié.

Le troisième chapitre établit la formulation du champ des contraintes pour les différents modèles de contact.

Le quatrième chapitre traite la simulation du mécanisme de formation des fissures dans les matériaux fragiles massifs lorsqu'ils sont soumis à une indentation sphérique ou à un rayage. Pour ce faire, on fait appel à une approche basée sur la mécanique de la rupture fragile, où il a été possible de prédire les lieux d'initiation, le chemin de propagation et la longueur des fissures formées.

Le chapitre cinq porte sur la modélisation et le calcul de la distribution des contraintes dans un contact cylindre-plan en statique et en dynamique. En effet, lorsque deux surfaces sont mises en contact, des sollicitations mécaniques sont imposées aux massifs et peuvent donner lieu à des dégradations. Afin d'évaluer les dégradations telles que la formation des débris, l'amorçage et la propagation de fissure dans le contact, il est important d'évaluer le type et l'amplitude des sollicitations mécaniques imposée. Avec l'introduction des logiciels de calcul Matlab Fortran on peut donner une solution numérique de ces sollicitations et résoudre des problèmes de contact aux géométries complexes. Le modèle d'Hertz appliqué à un matériau isotrope permet de calculer le champ des contraintes d'un contact statique et dynamique en fonction des propriétés élastiques des matériaux en contact. On peut estimer ainsi la zone à contrainte de cisaillement équivalente maximale où il y aura plastification et rupture.

Enfin nous dégagerons dans une conclusion générale les principaux résultats ainsi que les différentes perspectives qui peuvent être envisagées.

CHAPITRE I

SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LA TRIBOLOGIE

1. RAPPELS ELEMENTAIRES SUR LA GEOMETRIE DU CONTACT

1.1. Aires de contact

Si on met en contact sous une charge normale P deux surfaces Figure 1, l'aire apparente de contact est A . cependant, les irrégularités de surfaces (aspérités) relèvent toujours d'une échelle macroscopique et le contact s'effectue sur un nombre restreint de zone d'aires A_1, A_2, \dots, A_n appelées jonctions et dont la somme constitue la surface réelle A_r [4,5]. Le rapport A_r / A peut n'atteindre que quelques centimètres, voire quelques millièmes, de sorte que la charge d'appui unitaire effective sera des centimètres deux fois plus élevée que la charge unitaire répartie théorique [6,7].

Lorsque le contact est dynamique Figure 2 les jonctions sont soumises à des contraintes élevées (normal et tangentielles) et des variations de température micro localisées [8].

Le calcul de A_r et sa dépendance vis-à-vis de la charge P peuvent être établis topographie et les propriétés mécaniques de la surface sont prises en compte de nombreuses modélisations, pour représenter l'aire de contact et son évolution en fonction du système de force appliqué et en fonction du temps, ont été proposés [7, 10,11].

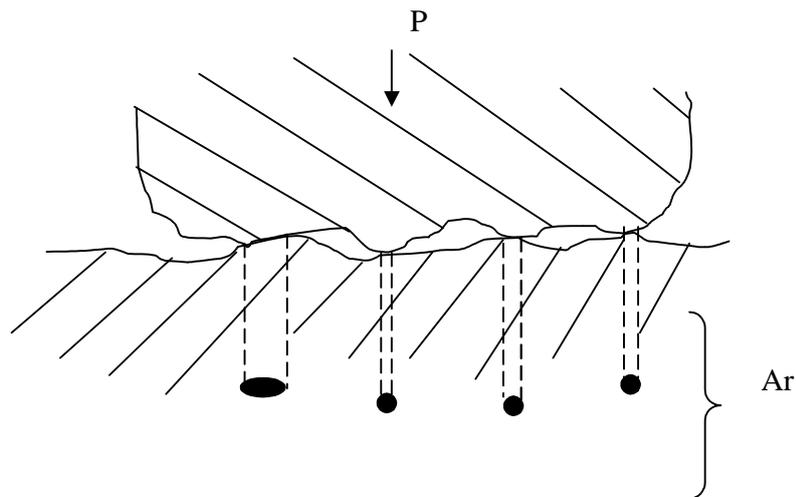


Fig. 1. Illustration schématique d'une interface, où les surfaces réelles et apparentes de contact sont représentées d'après [12].

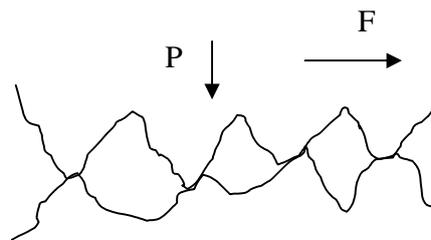


Fig. 2. Schématisation de deux surfaces rugueuses, où le contact réel est établi au niveau de 4 jonctions. F étant la force tangentielle appliquée.

2. PARAMETRES FONCTIONNELS

Pour caractériser une situation tribologique, il importe dans un premier temps d'identifier les différents contacts qui sont mis en jeu et d'extraire les variables opérationnelles qui définissent la nature et le fonctionnement de chaque contact.

2.1. Modes de contact

Il s'agit de définir la nature et la géométrie du contact. Ces informations participeront en particulier à l'évaluation du champ de contrainte imposé au contact. Elles permettront aussi d'avoir une première idée sur les modes de lubrification à mettre en œuvre.

Par nature du contact, on entend la définition générale de ce qui constitue le contact : solide/solide, liquide/solide, liquide+particule/solide, liquide+vapeur/solide, etc. la géométrie du

contact caractérise la forme générale des surfaces qui limitent les solides au voisinage de la zone de contact. On constate que l'ensemble de contacts que l'on rencontre en génie mécanique peut se regrouper en trois grandes familles :

- Les contacts de type ponctuel (typiquement sphère/plan).
- Les contacts linéiques (typiquement cylindre/plan).
- Les contacts surfaciques (typiquement parallélépipède/plan).

Ces familles sont schématisées dans la figure 3 :

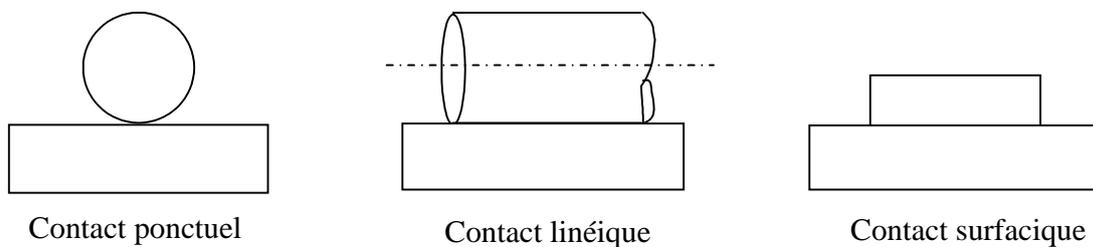


Fig. 3. Schématisation des trois familles de contacts.

Les deux premières familles constituent le contact hertzien ou contacts concentrés. Le contact ponctuel est mis en œuvre dans des applications mécaniques telles que le contact roue/rail de chemin de fer, les contacts billes/bagues des roulements à billes, certains contacts came/poussoir ou came/linguet de moteurs thermiques, etc. le contact linéique est utilisé par exemple dans les roulements à rouleaux cylindriques ou coniques, ou dans les engrenages à denture droite à profil en développement de cercle. Ces deux premiers types de contacts sont virtuels car, dès que l'on applique un effort, une déformation élastique de la zone de contact se produit, induisant une aire de contact capable de supporter raisonnablement la charge appliquée. Les théories initiées par Hertz ont permis de modéliser ces contacts d'une manière très fidèle, en déterminant l'aire de contact et le champ de contraintes induit par les efforts appliqués.

On peut considérer comme contacts surfaciques le contact entre tourillon et coussinet de certains paliers (dans le cas où le jeu est faible), les emmanchements serrés, les joints

d'étanchéité faciaux, les contacts curseurs/glissières, le contact garniture/disque de frein ou d'embrayage, etc.

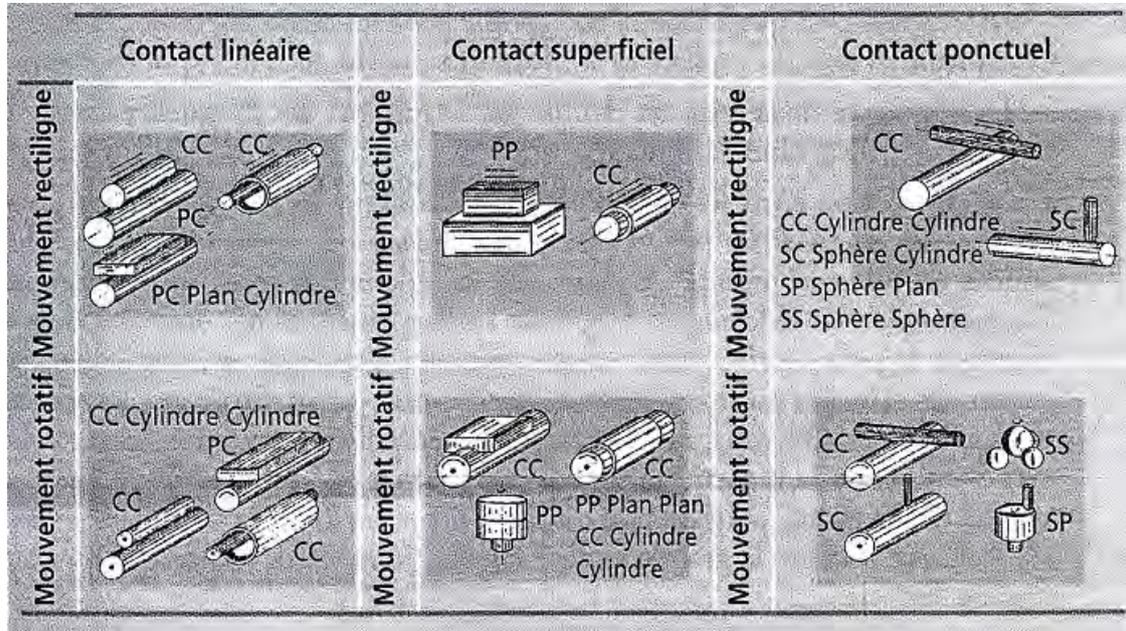


Fig. 4. Représentation d'application technologique des différentes familles de contact.

La géométrie du contact précise aussi les caractéristiques principales et les dimensions du contact : plans de courbure principaux et rayons de courbure principaux par exemple pour les contacts hertziens. Elle sera prise en compte dans la détermination du champ de contraintes généré par les efforts appliqués au contact.

3. ACTIONS DE CONTACT

3.1. Définition

On appelle action de contact entre deux solides les efforts et moments qu'ils exercent l'un sur l'autre au niveau de leur surface commune.

La figure 5 représente deux solides (S_1) et (S_2) en contact en O suivant une aire (Γ) contenue dans le plan tangent commun (P) aux deux solides.

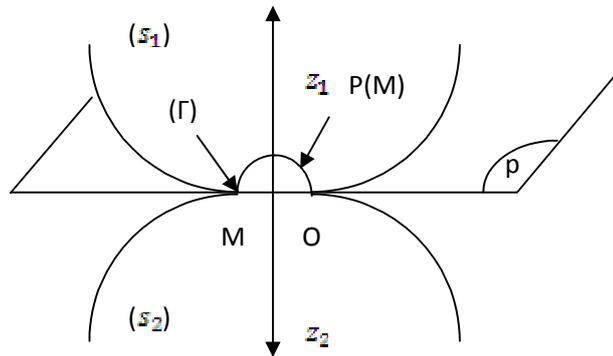


Fig. 5. Contact de deux solides.

Le torseur en O représentatif de l'action de (S_1) sur (S_2) s'écrit :

$$\{T_{1/2}\}_O = \begin{cases} R_{1/2} = \int P(\vec{M}) d\Gamma \\ M_{1/2} = \int \vec{OM} \wedge P(\vec{M}) d\Gamma \end{cases}$$

$R_{1/2}$ Et $M_{1/2}$ représentent respectivement la résultante et les moments des actions exercées par le solide (S_1) sur (S_2) ; $P(M)$ représente la fonction de répartition de la pression de contact agissant au point M appartenant à la surface (Γ) et $d\Gamma$ un élément de surface autour du point M.

3.2. Action de contact sans frottement

Si la liaison est idéale ou parfaite, c'est-à-dire s'il n'existe pas de résistance au déplacement relatif des deux solides l'un par rapport à l'autre, l'action élémentaire exercée par le solide 1 sur le solide 2 au point M s'écrit :

$$P_{1/2}(M) = -P(M)n_2(M)$$

$P_{1/2}(M)$, qui est le torseur d'action de (S_1) sur (S_2) devient :

$$\{T_{1/2}\}_O = \begin{cases} \{R_{1/2}\} = \int P(\vec{M})n_2(\vec{M})d\Gamma \\ \{M_{1/2}\} = \int \vec{OM} \wedge [-P(\vec{M})n_2(\vec{M})]d\Gamma \end{cases}$$

$n_2(M)$ Désigne la normale extérieure en M au plan P.

Dans le cas le plus général d'une surface plane sans frottement, la résultante est normale au plan tangent commun. Ce cas limite idéal est en pratique très utile car il constitue souvent une approximation suffisante pour un premier calcul.

3.3. Action de contact avec frottement

3.3.1. Frottement de glissement

Si la liaison est affectée d'une résistance passive au déplacement, les lois du contact sont plus complexes. On utilise le plus souvent les lois d'Amont-Coulomb pour caractériser le frottement.

La première loi concerne la résistance R_{12} qui dans ce cas, n'est pas portée par la normale au plan tangent commun. En désignant par n le vecteur unitaire de la normale commune et par N_{12} et T_{12} les composantes de R_{12} sur la normale et sur le plan tangent commun (P), on obtient :

$$\overline{R_{1/2}} = \overline{N_{12}} + \overline{T_{12}}$$

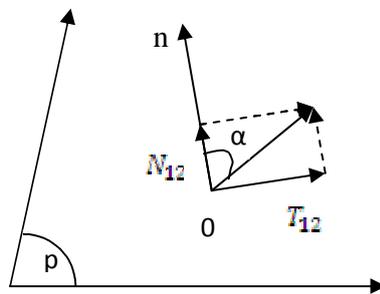


Fig. 6. Représentation des composantes des efforts en O.

On étudiera successivement deux situations.

Si la vitesse de glissement de S_1 par rapport à S_2 est nulle : $\overline{v_{1/2}} = \mathbf{0}$ en O

Si la force tangentielle exercée sur le solide S_1 est inférieure aux résistances passives de frottement $\overline{T_0}$, les deux solides resteront immobiles, rouleront ou pivoteront sans glissement :

$$\overline{T}_{12} = \operatorname{tg} \alpha \overline{N}_{12}$$

Dans ce cas : $0 < \alpha < \varphi_0$

φ_0 Est l'angle d'adhérence.

\overline{T}_{12} Appartient au plan tangent en O à (S_1) et (S_2) . sa direction est inconnue. L'action de contact en O se trouve à l'intérieur d'un cône de demi-angle au sommet φ_0 appelé cône d'adhérence.

$\operatorname{tg} \varphi_0 = \mu_0$ Désigne le facteur de frottement dit statique.

Si la vitesse de glissement de S_1/S_2 n'est pas nulle $\overline{v}_{1/2} \neq 0$.

\overline{T}_{12} Est opposé à $\overline{v}_{1/2}$ avec :

$$\overline{T}_{12} \times \overline{v}_{1/2} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{T}_{12} \overline{v}_{1/2} < 0$$

La résultante des actions de S_1/S_2 se trouve sur un cône de demi-angle au sommet φ : le cône de frottement.

La direction de la force de frottement est fixée.

$$\overline{T}_{12} = \operatorname{tg} \alpha \overline{N}_{12} = \mu_d \overline{N}_{12}$$

$\operatorname{tg} \varphi_0 = \mu_d$ Est le facteur de frottement dynamique.

Pour la plupart des matériaux (métaux en particulier) : $\varphi < \varphi_0$ et $\mu_d < \mu_0$.

	μ_0	μ_d
Acier/Acier	0,2 - 0,8	0,2 - 0,8
Aluminium/Acier	$\cong 0,8$	$\cong 1$
Aluminium/ Aluminium	1	0,8
Cuivre/Acier	0,5	0,45

Tableau 1. Valeurs indicatives usuelles des facteurs de frottement à sec.

3.3.2. Frottement de roulement

Soit un cylindre s'appuyant sur un plan avec une force normale au plan N_{12} figure 7.

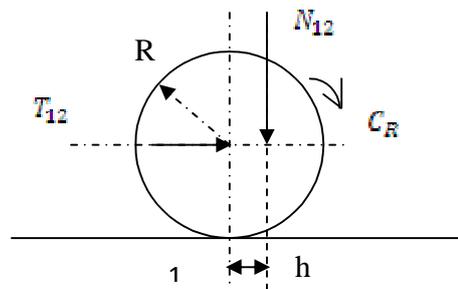


Fig. 7. Définition du facteur de frottement de roulement.

Si l'on exerce sur le cylindre un effort T_{12} parallèle au plan au niveau du centre de gravité du cylindre, ce cylindre peut :

- Soit se mettre à glisser lorsque l'effort T_{12} atteint une valeur T_0 telle que :

$$\frac{\overline{T_{12}}}{\overline{N_{12}}} = \operatorname{tg} \alpha = \mu_0 \text{ (Facteur de frottement de glissement statique)}$$

Ceci n'est que pour les rayons R du cylindre très petits compte tenu de la faible valeur du facteur de frottement de roulement.

- Soit se mettre à rouler pour une valeur :

$$\overline{T_{12}} < T_0$$

Le point 1 est le centre instantané de rotation et le mouvement s'effectue sous la sollicitation du moment (couple) de roulement $\overline{C_R} = \overline{T_{12}} \times R$.

En exprimant ce couple en fonction de la charge $\overline{N_{12}}$, on fait apparaître une grandeur homogène à une longueur h :

$$\overline{C_R} = \overline{N_{12}} \times h = \overline{T_{12}} \times R$$

Le rapport sans dimension $\frac{h}{R}$ est défini comme le « facteur de frottement de roulement » :

$$\mu_r = \frac{h}{R} = \frac{\overrightarrow{T_{12}}}{N_{12}}$$

Il est important de noter que le frottement au démarrage dans les roulements peut atteindre environ deux fois la valeur du frottement dynamique nominal.

3.3.3. Pivotement

Si le solide 1 de la figure 5 est soumis à un moment s'exerçant autour de l'axe Oz, il commencera à pivoter lorsque le couple dépassera une valeur donnée C_0 . Le rapport de ce couple à la charge appliquant le solide 1 sur le solide 2 devient une grandeur homogène à une longueur.

Considérons le contact entre une crapaudine de diamètre $2R$ dans son logement. Les rayons de courbure identiques permettent de supposer, avec une approximation acceptable, que la charge est répartie uniformément figure 8. La charge normale F_N appliquée à la crapaudine génère une pression uniforme :

$$P = \frac{F_N}{\pi R^2}$$

Un élément de surface de la largeur dr supporte un effort égale à $2\pi r dr p$ qui oppose lors du pivotement une force résistante :

$$dF_T = 2\pi r dr p \operatorname{tg}\varphi$$

Et un couple résistant :

$$dC_p = 2\pi r^2 dr p \operatorname{tg}\varphi$$

D'où :

$$C_p = 2 \frac{F_N}{R^2} \operatorname{tg}\varphi \int_0^R r^2 dr$$

$$C_p = \frac{2}{3} R F_N \operatorname{tg}\varphi$$

Comme l'indique l'expression précédente, le facteur de frottement intervenant dans le pivotement est le facteur de frottement de glissement.

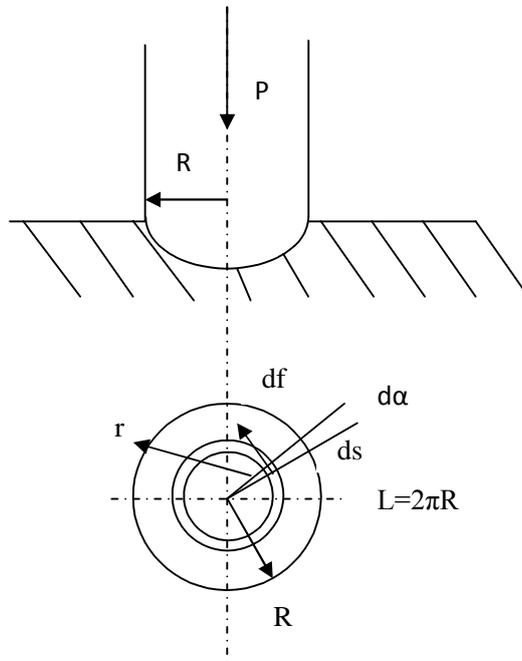


Fig. 8. Frottement de pivotement dans une crapaudine d'après [20].

Le calcul serait identique si l'on considérait deux solides en contact avec des rayons de courbure différents, se déformant suivant la théorie hertzienne du contact. Comme nous verrons, les déformations élastiques des solides engendrent une aire de contact limitée par une ellipse de demi-axes a et b.

Dans le cas d'un contact ponctuel sphère sur plan, l'aire de contact est un cercle de rayon :

$$a = \left(\frac{3}{4\pi} F_N (k_1 + k_2) R \right)^{1/3}$$

La répartition de la pression sur ce cercle s'exprime par :

$$p = p_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \quad \text{Avec } p_0 = \frac{3 F_N}{2 \pi a^2}$$

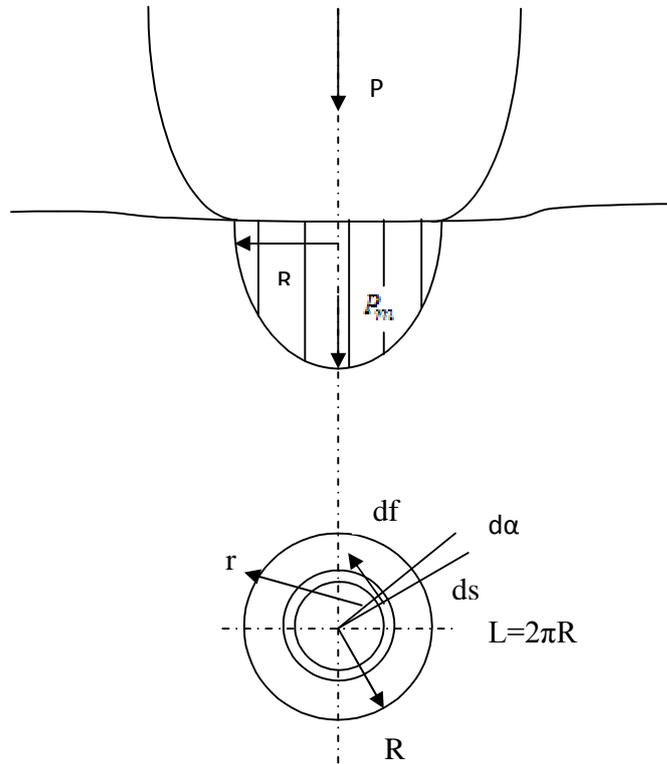


Fig. 9. Frottement de pivotement dans le cas d'une empreinte hertzienne circulaire d'après [17].

La valeur du couple de frottement sur un élément de surface lors d'une rotation autour de l'axe vertical peut s'exprimer par :

$$dC_p = (2\pi r dr) r \mu \frac{3 F_N}{2 \pi a^2} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}$$

Pour l'ensemble du cercle de contact, le couple de pivotement est :

$$C_p = 3\mu \frac{F_N}{a^2} \int_0^a r^2 \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} dr$$

Soit :

$$C_p = \frac{3\pi}{16} a \mu F_N$$

Ou, en exprimant la longueur L de la circonférence qui limite le cercle de contact :

$$C_p = \frac{3\pi}{32} \mu F_N$$

Il se révèle que, sous cette forme, cette expression est valable dans le cas d'appuis de type hertzien circulaire ou elliptique.

Le pivotement, inévitable dans les roulements à contact oblique, et qui peut apparaître dès qu'une charge axiale est appliquée à un roulement classique, se traduit par un accroissement du couple de frottement global du roulement, qui peut atteindre des valeurs de l'ordre de 30%.

4. CARACTERISTIQUES DU FACTEUR DE FROTTEMENT

Léonard de Vinci, Amontons puis Coulomb ont exprimé les lois de base générale caractérisant le frottement, qu'ils ont exprimées de la manière suivante :

- La force de frottement est proportionnelle à la charge normale ;
- La force de frottement est indépendante de l'aire apparente de contact ;
- La force de frottement est indépendante de la vitesse de glissement ;
- Le facteur de frottement est indépendant de la charge ;
- Le facteur de frottement dépend de l'état de surface ;
- Le facteur de frottement dépend de l'environnement.

Ces lois sont assez bien vérifiées en première approximation et peuvent s'utiliser pour un premier dimensionnement des composants. Il est néanmoins souvent constaté, lorsque la plage de variation des paramètres devient importante, que ces lois ne sont plus représentatives du comportement des matériaux. Il convient alors de mettre en œuvre des lois de frottement plus complexes.

D'une manière générale, on observe que le facteur de frottement a tendance à décroître lorsque la vitesse de glissement augmente. Selon [18], la variation du facteur de frottement avec la charge présente une tendance inverse.

Il présente une valeur sensiblement constante pour les faibles valeurs de charge, un domaine de croissance, et une stabilisation à forte charge, ainsi que le montre la figure 10.

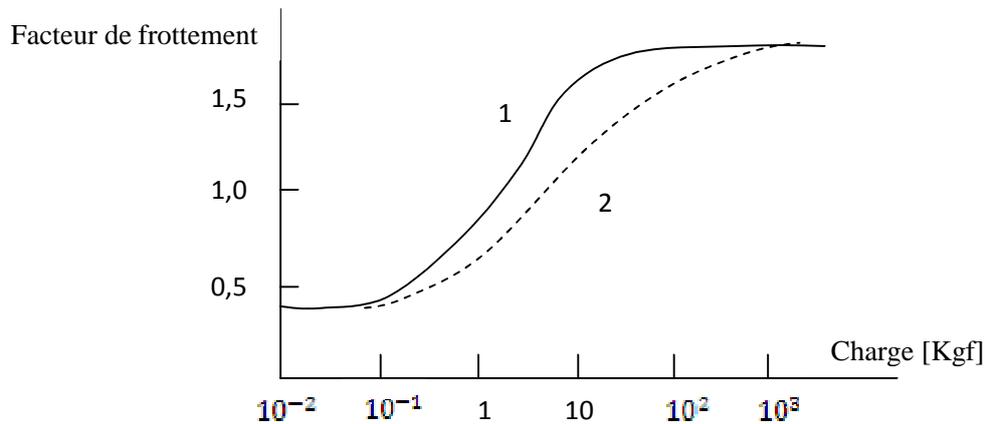


Fig. 10. Frottement cuivre/cuivre en fonction de la charge d'après [21];

Courbe 1 : cuivre poli électrolytiquement ; courbe 2 : cuivre oxydé.

5. PROCESSUS D'OXYDATION DES METAUX

5.1. Généralités

Les surfaces de la grande majorité des métaux réagissent avec l'oxygène de l'atmosphère à laquelle elles sont exposées pour former des oxydes qui ont leurs propriétés caractéristiques [18].

Si un métal forme plusieurs oxydes, les composés sont arrangés de telle sorte que le plus riche en oxygène soit à l'interface solide-gaz, tandis que le plus pauvre se situe à l'interface métal-oxyde [19], c'est par exemple le cas du fer illustré par la figure 11.

L'évolution du processus d'oxydation avec le temps est une caractéristique importante. Si la variation Δm par unité de temps de la masse de l'échantillon est prise comme une mesure d'oxydation, alors, la cinétique du processus peut être représentée par la relation : $\Delta m = f(t)$.

Suivant l'épaisseur de la couche oxydée et la température, cette expression peut être linéaire, parabolique, cubique ou logarithmique. Lorsque la couche d'oxyde est mince, la fonction est logarithmique ou cubique dans la grande majorité des cas. Cependant, si elle est épaisse la fonction est plutôt de forme parabolique ou linéaire c'est généralement le cas des métaux purs [22]

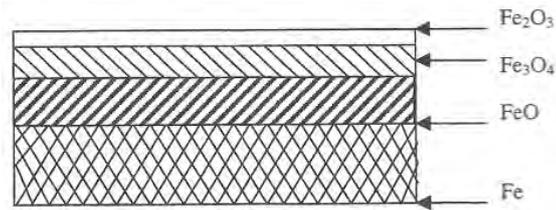


Fig .11. Formation des oxydes superposés sur la surface du fer à 625 °C après 24h d'après [19].

5.2. Oxydation du cuivre

Dans les conditions ordinaires, l'oxydation du cuivre pure dépend de la température à laquelle il se trouve porté [23]. En effet, pour des températures inférieures à 400 °C, l'oxyde cuivreux Cu_2O prédomine, semi-conducteur il est de couleur rose et bien accroché au substrat. Son point de fusion est de 1235° C. quand les températures sont supérieures à 400° C, l'oxyde généré est une couche noire relativement mince situé a la surface externe. C'est l'oxyde cuivrique CuO . Lorsqu'on chauffe le cuivre à des températures élevées (<180° C), CuO devient instable et seul Cu_2O subsiste [24].

Si la température dépasse 180° C, la croissance de la couche oxydée suit une loi linéaire avec le logarithme du temps. A 500 °C, une transition exponentielle vers parabolique est notée.

Ce point de transition est fonction des conditions expérimentales, pureté, etc. dans les conditions atmosphériques, son épaisseur est de quelque dizaines d'Angström, alors qu'entre 100 et 200 °C, elle atteint quelque centaines d'Angström [25].

5.3. Oxydation des aciers

L'objectif est de donner un bref aperçu générale sur l'oxydation des aciers contenant du chrome et du nickel dits : 'acier inoxydable'. Dans l'oxygène sec, les aciers (12% à 19% Cr et 0 à 9% Ni) s'oxyde superficiellement, la couche superficielle d'oxyde est enrichie en oxydes des éléments alliés au fer (Cr et Ni). Les contraintes dans la couche d'oxyde entraînent la rupture de cette dernière découvrant du métal nu qui, à son tour réagit avec l'oxygène et reconstitue la couche d'oxyde [23].

Les éléments alliés, en particulier le chrome, s'oxydent facilement et la première couche d'oxyde formée est riche en oxyde de chrome, les ions fer diffusent à travers cette couche et s'oxydent à leur tour en arrivant à la surface, aussi, observe-t-on, dans la couche oxydée, une variation du taux d'oxyde de chrome, plus faible dans la couche externe que dans la couche interne de l'oxyde, ces résultats ont été confirmés par [26] par diffraction de électrons.

La couche oxydée peut être un mélange d'oxyde de fer et des oxydes de chrome protecteur mais qui joue dans le frottement un rôle très abrasif.

6. MECANISME D'ABSORPTION DU CARBONE SUR LE CUIVRE

6.1. Influences sur le frottement et usure

Il existe deux types de liaisons possibles entre le carbone et le métal :

- des liaisons directes entraînant la formation des carbones métalliques [3].
- des liaisons chimiques provenant de la chimisorption du carbone et des oxydes de carbone par les oxydes métalliques.

Des études [1.2] ont montré que le film de carbone sur la surface métallique joue le rôle de lubrifiant solide et pour des valeurs minimales du coefficient du frottement l'usure est très faible. Par ailleurs, Lancaster en 1964 [9] a proposé que le transfert de carbone sur le cuivre empêche une augmentation de l'usure pour un couple électrographite-cuivre.

D'autre part, des travaux [13.14] ont montré que la rugosité du cuivre peut influencer l'usure de carbone, en effet, les irrégularités du cuivre relativement dures accroissent les contraintes localisées dans le carbone transférée sur le cuivre s'adapte aux irrégularités de ce dernier et protège les éléments frottant contre l'usure.

7. RESULTATS

Les résultats sont obtenus par [15] dans un Laboratoire en France.

7.1. Matériaux

a) Disque en acier

Le disque est en acier inoxydable austénitique NS 22 S. Ce type d'acier est caractérisé par sa très bonne résistance à la corrosion inter cristalline, une bonne ductilité et de plus susceptible d'acquérir un très beau poli.

b) Fils

Ils sont en cuivre pur 99% bon conducteur de la chaleur et d'électricité, sa structure C F C le laisse mallable et ductile, facilement déformable à froid, sa recristallisation commence vers 220⁰ C

7.2. Propriétés

7.2.1. Composition chimique

	C	Cr	Ni	Cu	Réf
N 22 S	0.03max	18	10	/	[25]
Cu	/	/	/	99,98	[26]

Tableau 2. Propriétés physiques du cuivre et de l'acier d'après [15].

7.2.2. Caractéristiques mécaniques

	R	E _{0,2}	A%	E	Réf
NS 22 S	50 à 65	17	50	19.10 ³	[25]
Cu	11 à 20 coulés	/	8 à 25 coulés	12600	[26]
	22 laminé- recuit	10	/		[27]
	49 écroui	13	35 à 50 autres		[28]

Tableau 3. Caractéristiques mécaniques du couple cuivre/acier d'après [15].

R [10^6 daN/m²] : résistance à la traction, $E_{0,2}$ [10^6 daN/m²] : limite élastique conventionnelle à 0.2%, A% : allongement pour cent, E [10^6 daN/m²] : module d'élasticité.

7.2.3. Propriétés physiques

	γ	θ_f	C_p	K	λ	ρ	Réf
NS 22 S	7,9	1450	50,6	14,9	$17,3 \cdot 10^{-6}$	70	[28]
Cu	8,9	1083	384,14	385,8	$16,47 \cdot 10^{-6}$	1,682	[29]

Tableau 4. Caractéristiques physiques du cuivre et de l'acier d'après [15].

γ [10^3 Kg/m³] : poids spécifique, θ_f [$^{\circ}$ C] : température de fusion, C_p [J/kg $^{\circ}$ C] : chaleur spécifique, K [J.m/m².s.C] : conductibilité thermique, λ [$^{\circ}$ C] : coefficient moyen de dilatation linéaire, ρ [10^{-2} $\mu\Omega$ m] : résistivité électrique.

7.3. Charge normale

La figure 12 illustre la variation du coefficient du frottement (moyen) μ en fonction de la charge normale appliquée. En examinant cette figure. La courbe donnant la force de frottement F, montre une dépendance linéaire en fonction de la charge ce qui conduit à un coefficient de frottement sensiblement ($\mu = 0,6$). Ceci vérifie la loi d'Amontou-Coulomb. l'influence de la charge sur l'usure. Pour des essais effectués à l'aide des charge comprises entre 0,2 et 2 [daN], l'usure varie sensiblement de façon linéaire.

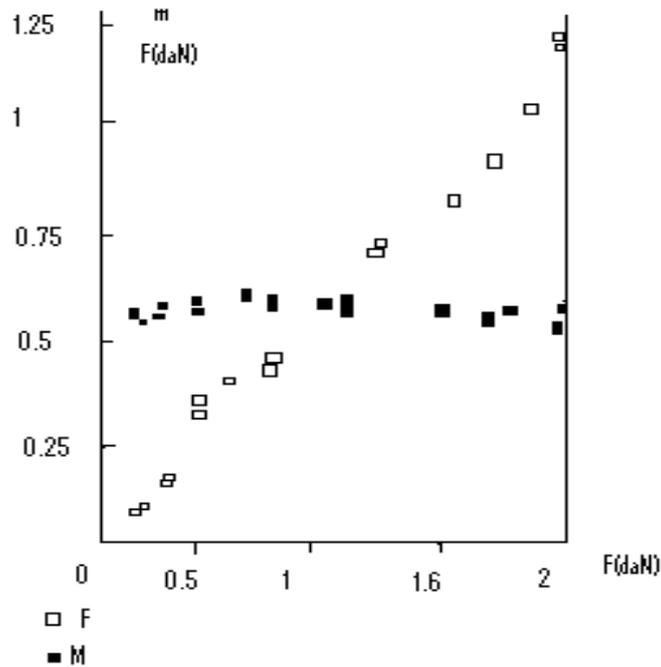


Fig. 12. Variation du coefficient du frottement μ et de la force de frottement F en fonction de la charge. $V=1,2$ [m/s]. $t=30$ [mn], d'après [15].

Le tableau donne la variation du coefficient de frottement en fonction de la charge normale. Les testes effectués dans les mêmes conditions à différentes charges normales $N = 63$ [N] ; $N = 94$ [N] ; $N = 126$ [N] et $N = 157$ [N] montre que le coefficient de frottement est quasi constant, il est stable aux alentours de la valeur moyenne $\mu = 0,3$.

Coefficient de frottement	0,32	0,27	0,30	0,30
Force de contact [N]	63	94	126	157

Tableau 5. Evolution du coefficient de frottement en fonction de la charge normale d'après [15].

On notera les valeurs moyenne du coefficient de frottement sont calculées à la phase stable avec une précision de ± 10 %.

L'évolution du taux d'usure sous environnement ambiant montre que le taux d'usure augmente avec la charge normale.

Taux d'usure [10^{-4} g/m]	3,8790	4,7333	9,4500	10,1060
Force de contact [N]	63	94	126	157

Tableau 6. Evolution du taux d'usure en fonction de la charge normale d'après [15].

7.4. Vitesse

Le coefficient de frottement en régime stationnaire varie également avec la vitesse d'après [15] la variation de μ avec la vitesse de glissement est divisée en trois branches différentes :

- a) $0 < v < 1,2$ [m/s] : selon la première branche, μ augmente depuis ($\mu = 0,54$) pour atteindre une valeur maximale de l'ordre de 0,60 aux alentours de ($v = 1,2$ [m/s]).
- b) $1,2 \leq v \leq 5$ [m/s] : dans la deuxième branche, μ diminue sensiblement quand la vitesse augmente, pour atteindre une valeur limite μ , de l'ordre de 0,41.
- c) $5 < v < 7,2$ [m/s] : la dernière branche est caractérisée par une relative stabilité de μ à la valeur limite de μ_1 .

La vitesse est un paramètre important qui a un effet marqué sur l'usure et le taux d'usure du couple tribologique étudié.

Aux faible vitesse, la perte de masse du fil qui caractérise l'usure entraîne des incertitudes considérables sur les valeurs W (usure) et K (taux d'usure) particulièrement pour les vitesses inférieures à 1 [m/s]. Au-delà de 2 [m/s] , l'usure est sensiblement linière en fonction de la vitesse et le taux d'usure à peu pré constant.

8. ANALYSE DES SURFACES FROTTEES

Des analyses faites au MEB par [16] ont montré que la surface du cuivre qui a frotté sous la charge $N = 63$ [N] et à la vitesse de glissement $v = 0,38$ [m/s] en absence du courant électrique est reporté par l'image de la figure 13.

On peut observer d'après l'analyse une présence importante de rayures liées aux contraintes de cisaillement du contact de type adhésif.

L'analyse quantitative des éléments chimiques sur la surface frottée du cuivre montre la présence d'oxyde. Il s'agit d'un mélange d'oxyde de cuivre et de fer ces oxydes s'adaptent bien aux irrégularités de la surface et leur présence aide à diminuer le coefficient de frottement et offre généralement une bonne résistance à l'usure [15]. Il faut néanmoins savoir que l'usure par oxydation est une usure douce. L'épaisseur du film d'oxyde doit être minimale pour ne pas être arrachée du substrat.

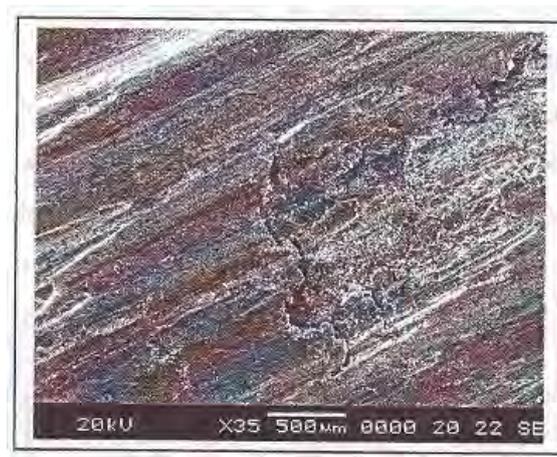


Fig. 13. Image MEB piste de frottement en absence du courant pour une charge normale $P=63[N]$, $v=0,38$ [m/s] et $t=30$ [mn], d'après [16].



Fig. 14. Microanalyse X de l'échantillon ayant frotté durant

30 [mn], $v=0,38$ [m/s], pour (a) $N=94$ [N] et (b) $N=157$ [N], d'après [16].

- Les images de la figure 14 montrent un enlèvement de matière en surface et la présence de rayures sur la surface usées.

- L'analyse par Microanalyse X montre la présence d'une quantité importante de cuivre et très peu de fer, ainsi qu'une faible quantité d'oxygène. Il s'agit dans ce cas d'un mélange de cuivre de fer et d'oxyde de cuivre.

Charge normale [N]	Quantité [%]		
	O	Fe	Cu
94	6,35	7,56	86,09
157	4,85	2,33	92,83

Tableau 7. Pourcentage atomique

V = 0,38 [m/s] et t = 30 [mn], d'après [16].

CHAPITRE II

THEORIE ET CARACTERISTIQUES DES ELEMENTS CONSTITUANT LE COUPLE

1. ELEMENTS DE LA THEORIE DU CONTACT

1.1. Couple de frottement-éléments géométriques spécifiques

Le frottement entre les éléments d'un couple de matériau en contact et la charge normale appliquée engendre l'apparition de contraintes superficielle et des contraintes volumiques. Des déformations locales élastiques et plastiques des surfaces apparaissent dans la zone du contact.

On considère avec une bonne approximation que :

- Les surfaces des couples de frottement sont lisses.
- Les déformations de contact se situent dans le domaine élastique.
- Les matériaux des deux corps en contact sont des milieux continus, homogènes et isotropes.

Le calcul des contraintes et des déformations dans le contact peut être fait à l'aide des équations de la théorie de l'élasticité (dans le cas de frottement sec) ainsi, on décrira un contact ponctuel (Figure 1) à l'aide des éléments géométrique suivants :

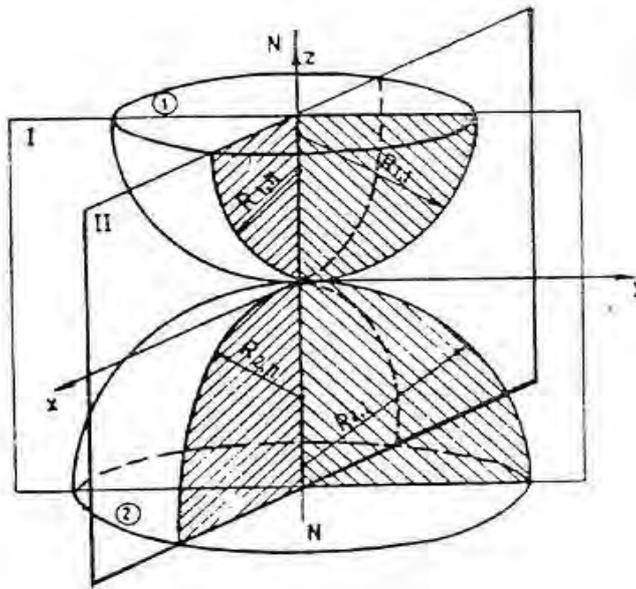


Fig. 1. Contact ponctuel des éléments 1 et 2.

- Les plans (I) et (II) (d'interaction la normale commune N-N)

- Les rayons de courbure des sections d'intersection entre les plans principaux et les surfaces des deux corps $R_{1I}, R_{1II}, R_{2I}, R_{2II}$

La courbure pour chaque plan est exprimée par la relation :

$$\frac{1}{R_{1(II)}} = +(-)\frac{1}{R_{11(II)}} + (-)\frac{1}{R_{21(II)}} \quad (II-1)$$

Où le signe (+) concerne le cas des surfaces convexes, et le signe (-) celui des surfaces concaves.

Les courbures sont exprimées par la relation :

$$\rho = +(-)\frac{1}{R} \quad (II-2)$$

La courbure totale équivalente. $\sum\rho$ est :

$$\sum\rho = \rho_{1I} + \rho_{2I} + \rho_{1II} + \rho_{2II} \quad (II-3)$$

La fonction des courbures $F(\rho)$ est :

$$F(\rho) = \frac{(\rho_{1I} - \rho_{2I}) + (\rho_{1II} - \rho_{2II})}{\sum\rho} \quad (II-4)$$

Pour le contact linéaire (couple de frottement de Vieme classe figure 2)) qui est représenté par le contact de deux cylindres on utilise les mêmes relations mais avec la particularité suivante :

$$\rho_{1II} = \rho_{2II} = 0$$

$$F(\rho) = 1 \quad (II-5)$$

$$R_{1II} \text{ et } R_{2II} \rightarrow \infty$$

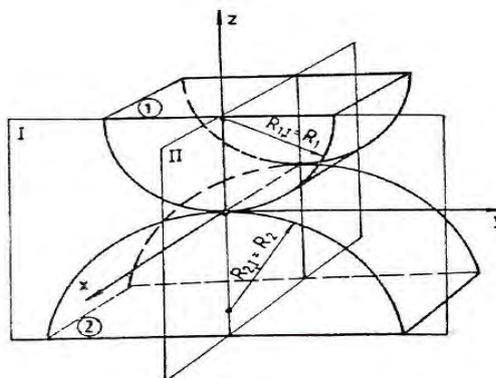


Fig. 2. Contact linéaire de deux cylindres.

1.2. Déformations de contact et contraintes

Si on applique dans la direction de la normale commune N-N une charge F , il se produit une déformation élastique et l'air de contact s'agrandit, dans le cas du contact ponctuel, la surface de contact a une forme d'ellipse, ayant pour demi-axe a , b figure 3 et dans le cas du contact linéaire de deux cylindres, la surface de contact est un rectangle dont la longueur est égale à la génératrice commune figure 4

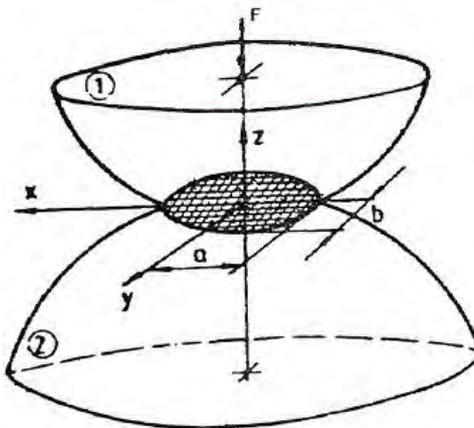


Fig. 3. Zone de contact ponctuel de deux couples de frottement.

Conformément à la théorie de l'élasticité, on peut calculer les valeurs de a et b et la valeur de l'approche relative, δ , en fonction de la charge appliquée, des caractéristiques des matériaux des deux corps, (ν , E) et des éléments géométriques du contact.

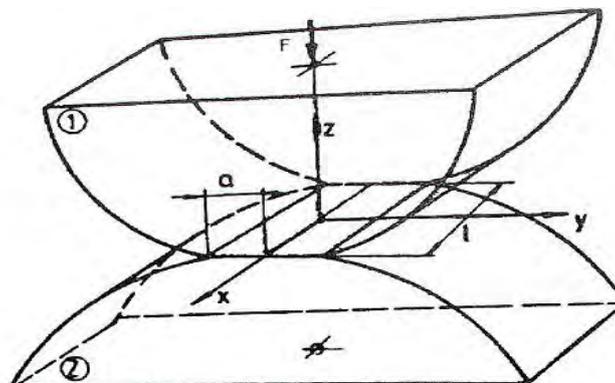


Fig. 4. Contact linéaire de deux cylindres.

Sous l'action de la force F, il apparaît, à l'intérieur de chaque demi-plan élastique, en état spatial des contraintes caractérisées par des contraintes normales (σ_x , σ_y , σ_z) et des contraintes tangentielles (τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx}).

Pour l'étude des processus de frottement et d'usure, la contrainte normale à la surface de l'ellipse de contact présente une importance particulière.

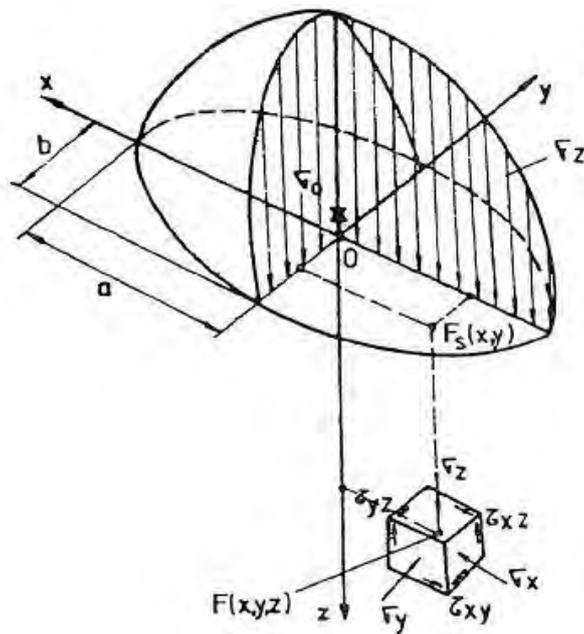


Fig. 5. Contrainte de compression sur la surface de l'ellipse de contact.

Cette contrainte a une distribution ellipsoïdale (figure 5) exprimée par la relation :

$$\sigma_z(x,y) = \sigma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad [\text{MPa}] \quad (\text{II-6})$$

La contrainte maximale est atteinte pour l'origine et sa valeur est :

$$\sigma_0 = \frac{2}{3} \frac{F}{\pi ab} \quad [\text{MPa}] \quad (\text{II-7})$$

Où a, b sont les demi-axes de l'ellipse de contact, [mm]

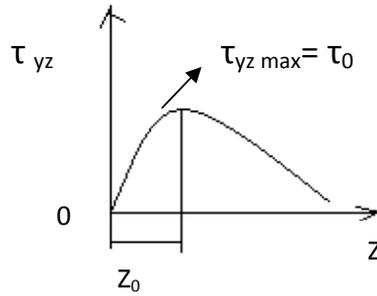


Fig. 6. Evaluation de la contrainte tangentielle en fonction de la profondeur.

Les contraintes tangentielles atteignent leurs valeurs maximales sous la surface de contact par exemple, la distribution de la contrainte τ_{yz} a un maximum situé à une profondeur Z_0 sous la surface de contact et est donnée par la relation

$$\tau_{yz \max} = \tau_0 \quad (\text{II-8})$$

Pour le cas des couples ayant un contact linéaire, la distribution de contraintes normales sur la surface de contact est exprimée par la relation :

$$\sigma_z = \sigma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad (\text{II-9})$$

Dont la valeur maximale est donnée par la relation

$$\sigma_0 = 2 \frac{F}{\pi l b} = \frac{4}{\pi} \frac{F}{2 l b} \quad (\text{II-10})$$

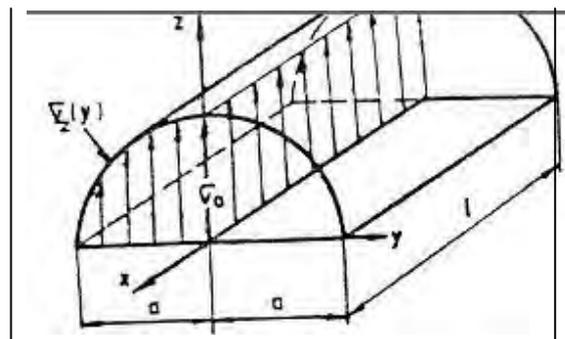


Fig. 7. Distribution des contraintes pour les couples ayant un contact linéaire.

2. THEORIES ELASTIQUES

Elles furent élaborées par H. Hertz (1885) et J. Boussinesq (1885).

2.1. Hypothèses

- Les solides sont soumis à des petites déformations sans dépasser leurs limites élastiques.
- Les surfaces sont continues et non conformables.
- La déformation élastique est calculée en admettant que chaque corps en contact est un demi-espace-élastique.
- Les surfaces sont sans frottement, les composantes de la force tangentielle dans le plan du contact sont nulles, $F_x = F_y = 0$.
- Les dimensions de l'aire de contact, par exemple le rayon (a) dans le cas du contact sphère/plan, sont petites par rapport au rayon de courbure des surfaces ($a \ll R$) Figure 8.

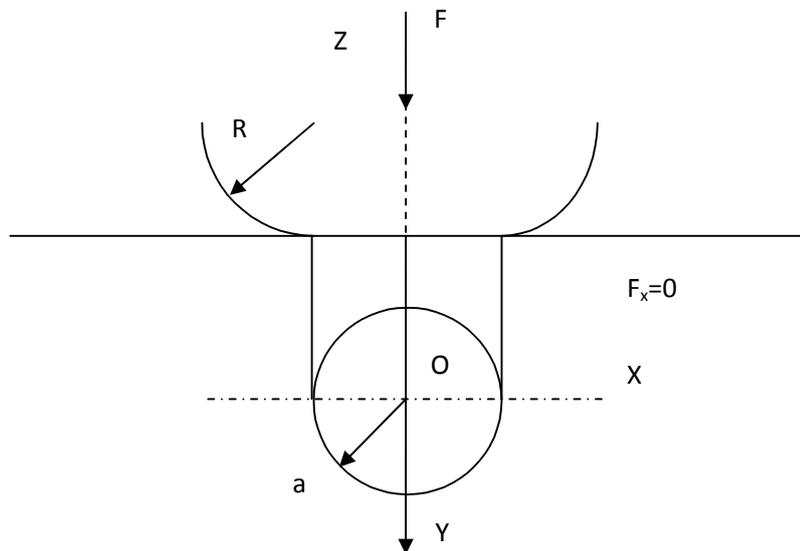


Fig. 8. Contact d'une sphère de rayon R sur un plan.

2.2. Force ponctuelle sur un demi-espace élastique

Les théories de la mécanique des milieux continus, faisant appel à une loi élastique conduisent aux résultats suivants :

Le déplacement $w(r)$ figure 9 à une distance r du point d'application de la force normale F est donné par l'expression :

$$W(r) = \frac{1-\nu^2}{E\pi} \frac{F_z}{r} \quad (\text{II-11})$$

Où E est le module d'élasticité du solide, et ν est le coefficient de poisson.

2.3. Distribution de la pression de contact

Soit une distribution de pression $p(\xi, \eta)$, la force élémentaire au point B est F_z , sa valeur est : $F_z = p(\xi, \eta) d\xi d\eta$.

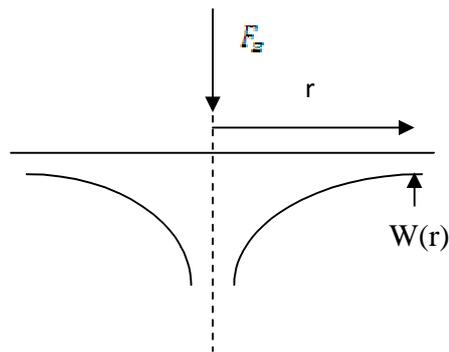


Fig. 9. Déformations théorique provoquée par une force localisée.

Cette force F_z appliquée en B crée en A figure 10 une déformation donnée par la relation (II-11).

La distance $r = BA$ a pour valeur :

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$$

La déformation totale du point A provoquée par la distribution de pression est

$$w(x, y) = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \quad (\text{II-12})$$

2.4. Equation du contact

A l'intérieur du contact, la géométrie nous permet d'écrire la relation suivante :

$$W_1(x, y) + W_2(x, y) = \delta - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} \quad (\text{II-13})$$

Où δ est le rapprochement total des solides sous l'action de la force, w_1, w_2 sont les déformations respectives des deux solides, et R_1, R_2 sont définis tels que :

$$R_1 = \frac{R'_{11} R''_{11}}{R'_{11} + R''_{11}} \quad \text{Et} \quad R_2 = \frac{R'_{22} R''_{22}}{R'_{22} + R''_{22}}$$

C'est-à-dire que R'_1, R'_2 et R''_1, R''_2 sont les rayons principaux de chaque solide.

Si l'on substitue (II-12) dans (II-13), puisque la pression agit également sur les deux corps, on obtient :

$$\frac{1}{\pi} \left[\frac{1-\nu^2}{E_1} + \frac{1-\nu^2}{E_2} \right] \iint \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = \delta - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} \quad (\text{II-14})$$

C'est une équation intégrale pour la pression.

Hertz trouve que cette équation est satisfaite par une distribution elliptique de la pression répartie sur une ellipse dont les demi-axes sont a et b.

$$P(x, y) = P_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (\text{II-15})$$

2.5. Contact circulaire ponctuel

Dans le cas de sphères, ou de cylindres croisés perpendiculairement, $R_1 = R_2$ et la zone de contact est un cercle : $a = b$, et l'équation (II-15) devient :

$$P(r) = P_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \quad \text{Avec } r^2 = x^2 + y^2 \quad (\text{II-16})$$

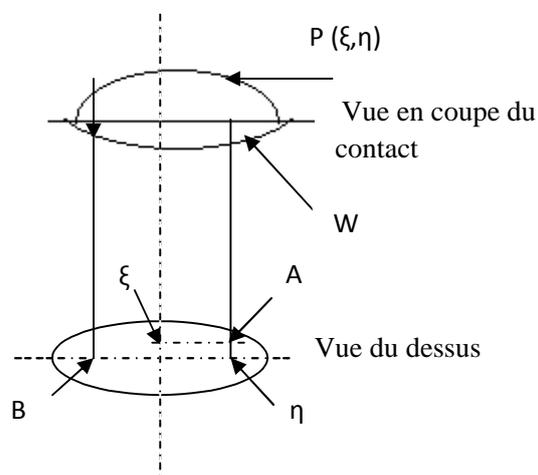


Fig. 10.a. Pression de contact.

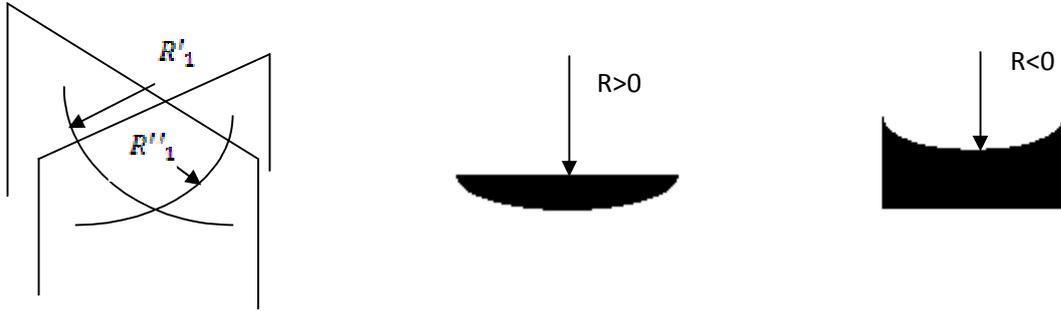


Fig. 10.b. Les rayons de courbure.

On utilise l'équation (II-12)

$$W(r) = \frac{1-\nu^2}{E_2} \frac{\pi P_0}{4\alpha} (2a^2 - r^2) \quad (\text{II-17})$$

La substitution dans l'équation (II-14) et l'intégration de l'équation donne :

$$\left[\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right] \frac{\pi P_0}{4\alpha} (2a^2 - r^2) = \delta - \frac{r^2}{2R} \quad (\text{II-18})$$

Cette équation doit être vérifiée pour tout r, ce qui conduit à :

$$\delta = \pi a p_0 / 2E^* \quad (\text{II-19})$$

Et
$$\alpha = \pi R p_0 / 2E^* \quad (\text{II-20})$$

Où
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Et où
$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$$

La pression répartie sur la surface de contact équilibre la charge F_z appliquée, c'est-à-dire que l'on peut écrire :

$$F_z = \int_0^a P_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} 2\pi r dr = \frac{2}{3} \pi a^2 P_0 \quad (\text{II-21})$$

En combinant les équations (II-19, II-20, II-21) on obtient les équations d'Hertz :

a : rayon du cercle de contact
$$a = \left[\frac{3F_z R}{4E^*} \right]^{1/3}$$

δ : déformation totale des solides au centre du contact
$$\delta = \frac{a^2}{R} = \left[\frac{9F_z^2}{16E^{*2}} \right]^{1/3} \quad (\text{II-22})$$

P_0 : Pression maximale du contact

$$P_0 = \frac{3F}{2a^2\pi} = \frac{3}{2}\bar{P} = \left[\frac{6F_z E^* a^2}{\pi^3 R^2} \right]^{1/3}$$

Le profil de la surface en dehors de la zone de contact est : $z(r) = \frac{r^2}{2R} - \frac{a^2}{R} + u(r)$

$$U(r) = \frac{a^2}{\pi R} \left[\left(\frac{r^2}{a^2} - 1 \right)^{3/2} - \left(\frac{r^2}{a^2} - 1 \right) \arctang \left(\frac{r^2}{a^2} - 1 \right)^{-1/2} \right]$$

Si les matériaux ont les mêmes constantes élastiques $E_1 = E_2 = E$, il vient :

$$a \cong 1,1 \left[\frac{F_z R}{E} \right]^{1/3}$$

$$\delta = \frac{a^2}{R} \tag{II-23}$$

$$P_0 = \frac{3F_z}{2a^2\pi} = \frac{3}{2}\bar{P}$$

Dans le cas d'un contact sphère-plan, où la sphère est réalisée dans un matériau régie (E infini), le rapprochement δ correspond à l'enfoncement total de la sphère et du plan ($\delta = a^2/R$). Le contact réel entre la sphère et le plan s'effectue sur une hauteur dont la valeur correspond à la moitié de la déformation δ sphère-plan Figure 11.

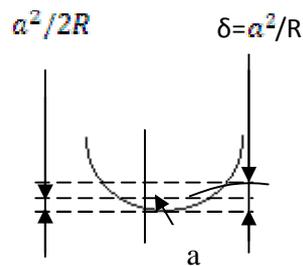


Fig. 11. Géométrie du contact sphère/plan (la déformation totale est δ).

2.6. Contact linéaire

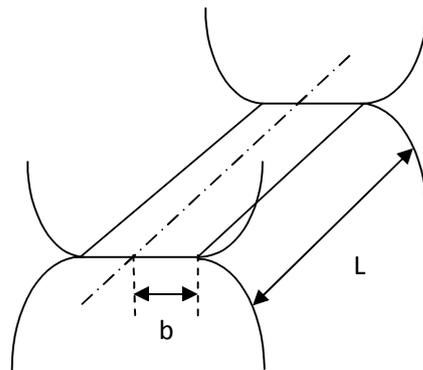


Fig. 12. Contact linéaire.

La pression dans le contact est : $p(x) = p_0 \sqrt{1 - x^2/b^2}$ où b est la demi-largeur du contact.

La force normale appliquée par unité de longueur F'_z (N/m) est donc $F'_z = F_z/L$, où F_z est la force appliquée :

$$F'_z = \int_{-b}^b P_0 \sqrt{\frac{1 - x^2}{b^2}} = \frac{\pi}{2} P_0 b$$

Le calcul conduit aux résultats suivants :

La demi-largeur du contact b est :

$$b = \sqrt{\frac{4RF'_z}{\pi E^*}} \quad b = \sqrt{\frac{4RF_z}{L\pi E^*}}$$

La déformation totale des solides en contact δ est : $\delta = \frac{b^2}{R}$ (II-24)

La pression maximale P_0 au centre du contact est

$$P_0 = \frac{4}{\pi} \bar{P} = \sqrt{\frac{FE^*}{R\pi}}$$

On note que : $\bar{P} = \frac{\pi}{8} E^* \sqrt{\frac{\delta}{R}}$

2.7. Contact elliptique

Les deux demi-axes a et b peuvent être obtenus si l'on fait l'approximation que les rayons de courbure principaux des deux solides sont tels que $R'/R'' < 5$

$$b/a = [R''/R']^{2/3} \quad (\text{II-25})$$

$$c = \sqrt{ab} = \left[\frac{3 F_z}{4 E^*} R_c \right]^{1/3} \text{ avec } R_c = \sqrt{R' R''}$$

2.8. Contraintes dans les solides en contact : cas du contact linéaire

Les calculs sont effectués à partir des hypothèses sur les déformations élastiques.

Nous recherchons à présent la distribution des contraintes dans un des solides, σ_{xx}, σ_{yy} sont les contraintes principales le long de l'axe Oz, de sorte que la contrainte de cisaillement τ_1 est donnée par la relation dont nous verrons plus loin une application.

$$\tau_1 = 0,5(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})$$

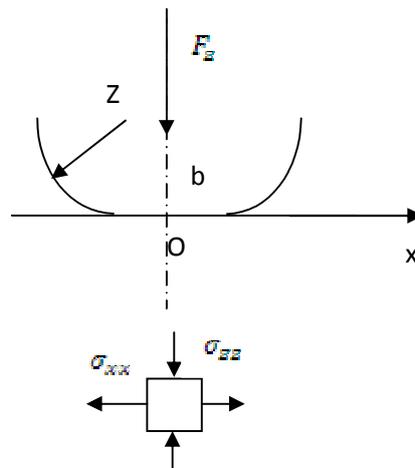


Fig. 13. Coupe transversale d'un contact linéaire et état des contraintes en un point du plan.

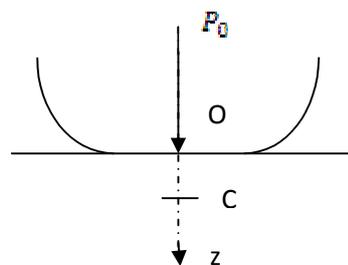


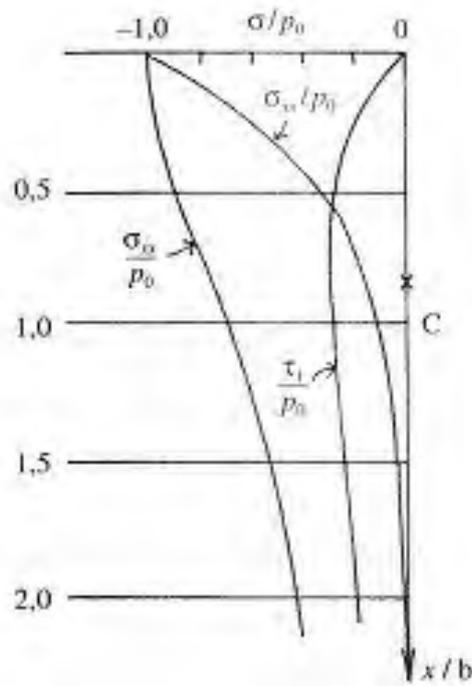
Fig.14. Coupe d'un contact cylindre - plan.

Les évolutions des contraintes principales et de cisaillement le long de l'axe Oz sont présentées à la Figure 15.

La contrainte de cisaillement est maximale au point C. une image de photoélasticité confirme ce résultat Figure 16

En conséquence :

A la surface, les contraintes sont pour $z = 0$, $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = P_0$ et $\tau_1 = 0$; la valeur de cisaillement maximale est obtenue pour $[\tau_1]_{max} = 0,30 P_0$, pour une profondeur $z=0,78 b$.



**Fig. 15. Evolution des contraintes principales et de cisaillement le long de l'axe oz
Pour un contact sphère - plan.**



**Fig. 16. Image de photoélasticité qui montre le champ de déformation
D'un contact cylindre - cylindre.**

2.9. Distribution des contraintes dans un contact ponctuel

La contrainte maximale de compression est au centre du contact en O, et $\sigma_{zz} = P_0$.

La contrainte maximale de tension est le long du cercle de contact et sa valeur est $\sigma_{zz} = 0,1 P_0$.

La contrainte maximale de cisaillement se trouve en un point C, de coordonnées :

$Z = 0,48a$, $r = 0$, et sa valeur est $\tau_{max} = 0,31 P_0$.

On doit à présent noter ceci dans les régions sensibles qui sont les suivantes :

- Pour les matériaux ductiles, le point C où la valeur de la contrainte de cisaillement est maximale. C'est en ce point que se produit la première plastification figure16 ;
- Pour les matériaux fragiles, le cercle de contact où la valeur de la contrainte de traction est maximale. C'est en ces points que se produit les premières ruptures ;
- Pour les matériaux composites, le point O où la valeur de la contrainte de compression est maximale. C'est en ce point que se produit la première décohésion.

2.10. Poinçon à base plane

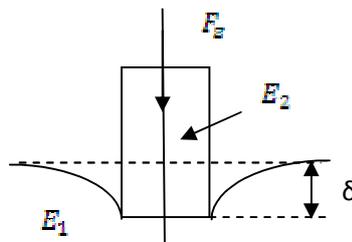


Fig. 17. Poinçon à base plane s'enfonçant dans un massif élastique.

Un poinçon axisymétrique à base plane de rayon a s'appuie sur un massif élastique semi-infini l'enfoncement δ et la répartition des contraintes de compression $p(x)$ dont l'aire de contact ont été calculés et valent :

$$\delta = \frac{F_Z}{2aE^*} \text{ avec } \frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad (\text{II-26})$$

$$P(r) = \frac{F_Z}{a^2 \pi} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}}$$

3. THEORIES PLASTIQUES

3.1. Seuil de plasticité pour un contact de cylindres

L'analyse du champ de contrainte présenté en 2.9 montre que l'axe Oz est un axe de symétrie et que σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{zz} sont les contraintes principales le long de l'axe Oz.

L'application du critère de Tresca donne une relation entre k et y d'une part et la pression P_0 appliquée au centre du contacte d'une autre part.

Au seuil de la plasticité du contact la pression P_0 est donc P_{0y} elle est donnée par la relation

$$P_{0y} = 3,3k = 1,67 Y$$

Le critère de Von Mises conduit à une relation voisine :

$$P_{0y} = 3,1k = 1,79 k$$

La force normale appliquée par longueur F_{ZY}' (N/m) est donc :

$$F_{ZY}' = \frac{8,8 RY^2}{E^*}$$

Cette force provoque le début de la plasticité.

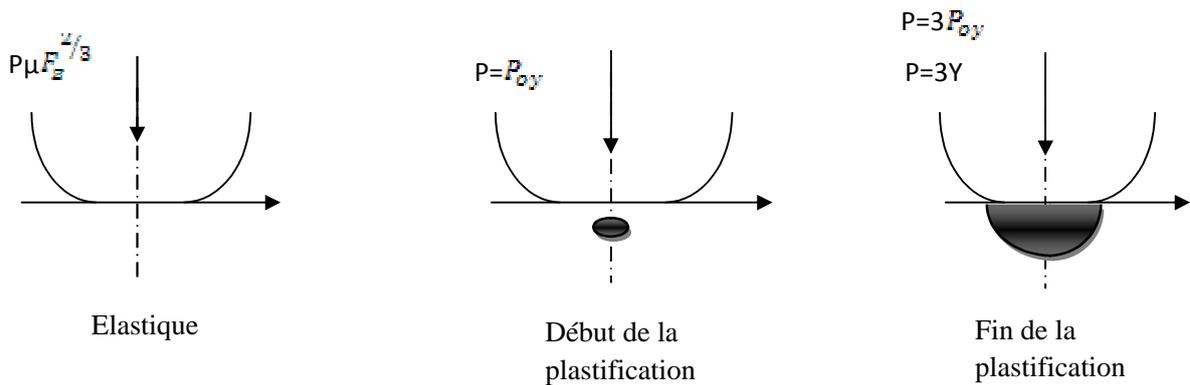


Fig. 18. Les étapes de la plastification.

3.2. Seuil de plasticité pour un contact sphère-plan

La contrainte maximale de cisaillement se trouve en un point de coordonnées :

$Z = 0,48a$, $X = 0$, et sa valeur est : $\tau_{\max} = 0,31 P_0$.

L'application du critère de Tresca donne la relation

$$P_{0Y} = 3,2 K = 1,60 Y$$

Le critère de Von Mises conduit à une relation voisine :

$$P_{0Y} = 2,8 K = 1,60 Y$$

La force normale appliquée F'_{ZY} et donc :

$$F'_{ZY} = \frac{21R^2Y^3}{(E^*)^2}$$

Le tableau 8 montre des exemples d'application de cette dernière relation.

Qu'observe-t-on à la lecture du tableau ?

Pour les métaux, les charges supportées par les aspérités sont négligeables. Pour un contact métal/métal rugueux, les aspérités sont toujours plastifiées. Il faut donc réduire la rugosité des pièces métalliques dans un contact à sec.

En revanche, pour des matériaux comme les polymères, l'effet de l'élasticité n'est pas négligeable. D'une façon générale ce tableau montre l'importance du rapport E/Y .

Nature	Dureté H Vickers $X \cdot 10^7$ [Pa]	Seuil de Plasticité $Y \cdot 10^7$ [Pa]	Module De Young $E \cdot 10^7$ [Pa]	F_{zy} [N]		
				R=1[μ m]	R=100[μ m]	R=10[mm]
Plomb	6	2	1600	$6 \cdot 10^{-10}$	$6 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-2}$
Cuivre	60	20	12000			
Cuivre écroui	93	31	12000	$4,5 \cdot 10^{-8}$	$4,5 \cdot 10^{-4}$	4,5
Acier doux	200	65	20000			
Acier allié	600	220	20000	$4,5 \cdot 10^{-6}$	$4,5 \cdot 10^{-2}$	450
polymère	10	5	100	$2,6 \cdot 10^{-2}$	2,6	260

Tableau 8. Calcul de la charge limite provoquant la plasticité d'un contact sphère/plan.

Différents rayons de courbure de la bille sont considérés. Les petits rayons simulent la rugosité d'un contact, les plus gros la forme d'un objet.

4. THEORIE DE MINDLIN (1952)

4.1. Transition statique dynamique

La situation considérée dans le modèle de Mindlin est la suivante : deux solide élastiques (par exemple une sphère et un plan) sont en contact sous une charge normale F_z et une force tangentielle F_x . la zone de contact entre les solides est circulaire (son rayon a étant donné par la théorie élastique d'Hertz).

Lorsque F_x est appliquée, une hypothèse de non-glissement sur toute la zone du contact (pas de déplacement relatif entre les points de la surface), conduit à une valeur théorique infinie de la contrainte tangentielle en $r = a$, comme le montre la figure 19. Il y a adhésion sur tout le contact.

Mindlin suppose donc qu'un microglissement s'amorce à la périphérie du contact afin d'accommoder la contrainte tangentielle. Pour des raisons de symétrie, cette zone de microglissement est un anneau de rayon intérieur c et le rayon extérieur a .

Deux situations sont alors possibles dans le contact :

- Pour $c < r < a$, il y a glissement avec frottement de Coulomb, pour lequel la contrainte tangentielle τ est égale à μp (avec p la contrainte normale), où μ est le coefficient de frottement ;
- Pour $r < c$, l'hypothèse de non-glissement est respectée et la contrainte tangentielle est supposée inférieure à μp .

Lors de la mise en déplacement, la force tangentielle F_x est augmentée à partir de zéro, la zone de microglissement s'étend radialement vers l'intérieur du contact avec :

$$c = a \left[1 - \frac{F_x}{\mu F_z} \right]$$

La raideur initiale tangentielle du contact est une donnée importante, sa valeur est :

$$K_x = 4\alpha \frac{G}{2 - \nu} = \frac{2\alpha E}{(2 - \nu)(1 + \nu)}$$

Si les matériaux sont différents, la raideur est :

$$K_x = 8\alpha \frac{1}{\frac{2 - \nu_1}{G_1} + \frac{2 - \nu_2}{G_2}}$$

Il est intéressant de comparer cette raideur tangentielle à la raideur normale.

La raideur normale est :

$$K_z = \alpha \frac{E}{1 - \nu^2}$$

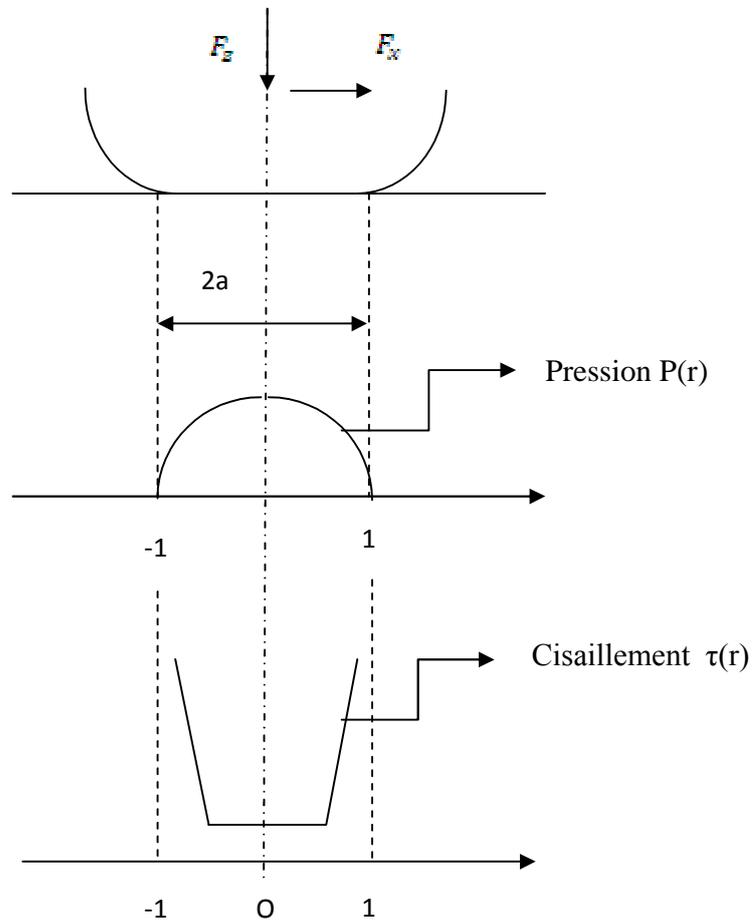


Fig. 19. Distribution des contraintes normales p et tangentielles τ dans un contact adhésif. Pour $r = a$, la contrainte tangentielle est infinie et la contrainte normale est nulle.

Il vient donc

$$\frac{K_x}{K_z} = \frac{2(1-\nu)}{2-\nu}$$

On conclut que les deux raideurs sont du même ordre de grandeur.

La transition entre le frottement statique avec microglissement et le frottement dynamique se fait pour δ_z égale à Figure 21

$$\delta_z = \frac{3\mu F_z}{8\alpha} \frac{2-\nu}{G}$$

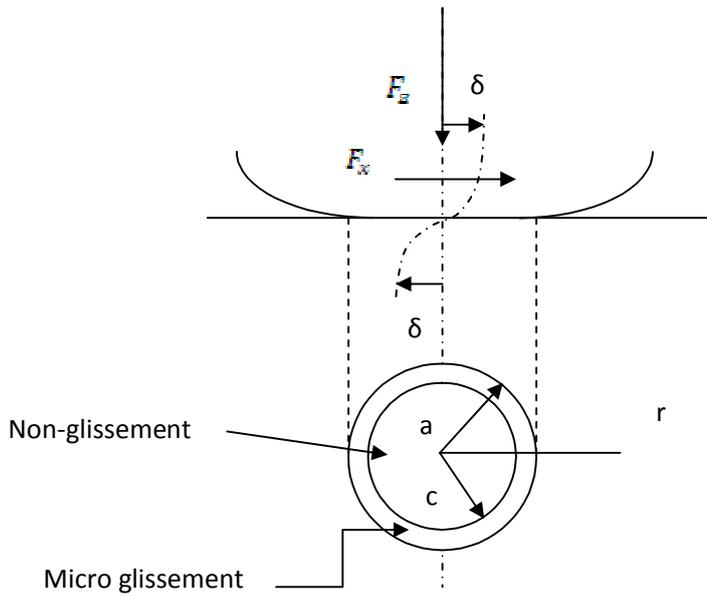


Fig. 20. Contact statique avec force tangentielle.

Deux zones se développent dans le contact.

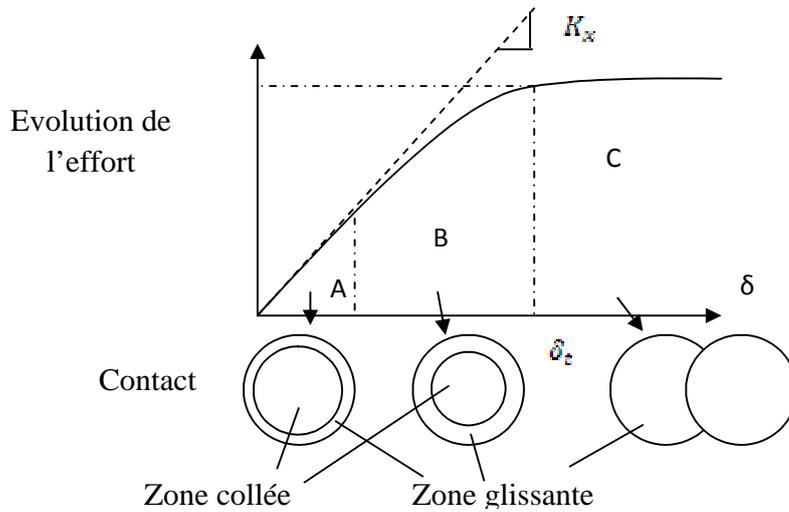


Fig. 21. Evolution de la force tangentielle avec le déplacement.

5. CARACTERISTIQUES DU COUPLE ETUDIE

5.1. Les aciers

Les différentes phases présentes dans l'acier ont une résistance à l'usure et des propriétés mécaniques très différentes les unes des autres. La ferrite, l'austénite et la perlite sont des phases relativement molles (dureté comprise entre 100 et 300 HV) et offrent une faible résistance à l'usure. D'une manière générale, on évite l'utilisation de matériaux à structure homogène (ferrite ou austénite), et on préfère la perlite ou une structure ferrito-perlitique avec précipitation de carbures durcissant. Les phases dures telles que la martensite et la bainite (dureté comprise entre 800 et 1000 HV) sont particulièrement adaptées à lutter contre l'abrasion.

La microstructure de l'acier retenue pour une application donnée devra tenir compte du type de sollicitations auxquelles sera soumise la surface du matériau et du type d'usure qu'elle risque. Dans le cas de l'usure abrasive, on privilégiera la dureté, alors qu'en cas d'impacts, on cherchera plutôt une microstructure conférant au matériau une certaine ductilité. Lorsqu'il y a risque d'usure adhésive, on adaptera la composition de surface à celle du matériau antagoniste. On évitera en particulier de faire frotter des surfaces antagonistes possédant la même microstructure (ceci est particulièrement vrai pour les phases homogènes).

Les caractéristiques mécaniques de l'acier sont sensiblement améliorées par l'addition de chrome, molybdène, vanadium, manganèses et nickel. L'ajout de petites quantités (1 à 4%) de ces éléments permet d'affiner la microstructure et de conférer au matériau une dureté et une résistance à l'usure plus élevées.

Certains aciers sont plus riches en tel ou tel élément qui leur confère des propriétés spécifiques. C'est le cas des aciers au manganèse qui peuvent contenir jusqu'à 15% de cet élément. Grâce à leur bonne résistance à la corrosion et à leurs caractéristiques mécaniques remarquables, en particulier leur haute ténacité, ces aciers sont particulièrement mis en œuvre dans les broyeurs, aussi bien dans les carrières que dans les cimenteries ou les mines. Ils sont également utilisés pour la fabrication de rails de chemin de fer, de l'outillage, etc, ou encore les barreaux de prison (ce sont des matériaux très écrouis sables : plus on les scie, plus ils durcissent !).

Dans le domaine du frottement, les aciers fortement alliés sont mis en œuvre dans des applications très variées. Parmi ces matériaux on peut citer :

- Les aciers à outils (acier rapides : HGH SPEED STEEL (HSS)) : ils sont utilisés dans des applications nécessitant une bonne résistance à l'usure et de hautes caractéristiques mécaniques que le matériau conserve même à température élevée. Ces matériaux servent à fabriquer aussi bien des bagues d'usure, des pistons d'injection que des outils d'usinage de toutes sortes. Les caractéristiques mécaniques et anti-usinage de ces outils sont généralement améliorées par la déposition de revêtements céramiques tels que le nitrure de titane, le nitrure de chrome ou le nitrure mixte de titane et d'aluminium ;
- Les aciers inoxydables : ils sont utilisés lorsque de bonnes caractéristiques mécaniques et une certaine résistance à la corrosion et à l'usure sont recherchées. On trouve ces matériaux dans des applications aussi diverses que la coutellerie, les articles de cuisine, ou encore comme éléments de pompes ou de robinetterie.

5.2. Les alliages cuivreux

Le cuivre et ces alliages présentent une bonne aptitude à l'accommodation et peuvent être utilisés sans lubrification lorsque les pressions de contact ne sont pas trop importantes. Parmi les alliages de cuivre, on peut citer le bronze au plomb et le laiton au plomb qui sont utilisés dans les coussinets, les glissières ou comme matériaux de roulement. Les alliages cuivre-nickel et cuivre-aluminium, tout en conservant une certaine ductilité, possèdent des propriétés mécaniques meilleures que celle du bronze et du laiton, ainsi qu'une meilleure résistance à la corrosion. Ils peuvent être utilisés dans des systèmes frottant en milieu corrosif tel que le milieu marin.

Les alliages cuivre-aluminium sont moins sensibles que les laitons à la corrosion sous contrainte en milieu ammoniacal, et sont principalement utilisés sous forme de tube échangeurs dans les industries de la potasse et les salines, ainsi que comme alliages monétaires. Les cupro-aluminiums de fonderie, avec addition de fer et de nickel, trouvent des applications dans la fabrication de pompes, turbine et plaques pour échangeurs.

Les caractéristiques mécaniques des cupro-nickels sont sensiblement améliorées par addition de certains éléments tels que le fer, l'aluminium ou le silicium. Les cupro-nickels trouvent des

applications dans les évaporateurs, les échangeurs de chaleurs, les canalisations d'eau salée et les refroidisseurs de circuits hydrauliques.

On peut également citer ici les matériaux frittés à base de bronze. Ces derniers sont imprégnés d'huile ou de lubrifiants solides (graphite, bisulfure de molybdène). Ce qui leur confère des propriétés de frottement exceptionnelles et une excellente résistance au grippage. Ces matériaux sont largement utilisés comme bagues de frottement (coussinet, palier...).

CHAPITRE III

MODELES DE CONTACT

1. CONTACT SPHERE - SPHERE ET SPHERE - PLAN

1.1. Application d'un effort normal

La théorie d'Hertz montre que lorsque deux solides de révolution sphérique sont mis en contact sous l'effet normal, l'aire de contact est un cercle de rayon a figure 1.a. Les relations d'Hertz permettent d'établir différentes relations en fonction de l'effort normal, de la propriété élastique et de la géométrie de contact. Considérons le contact sphère-plan à pression normale figure 1.b. L'indice 1 et les valeurs sans indice (lorsque ceci n'est pas précisé), sont associées au plan, alors que l'indice 2 correspond au matériau de la sphère. Les symboles E_1 , E_2 correspondent respectivement aux modules élastiques (d'Young) du plan et de la sphère. Le coefficient de Poisson du plan et de la sphère sont désignés par ν_1 , ν_2 .

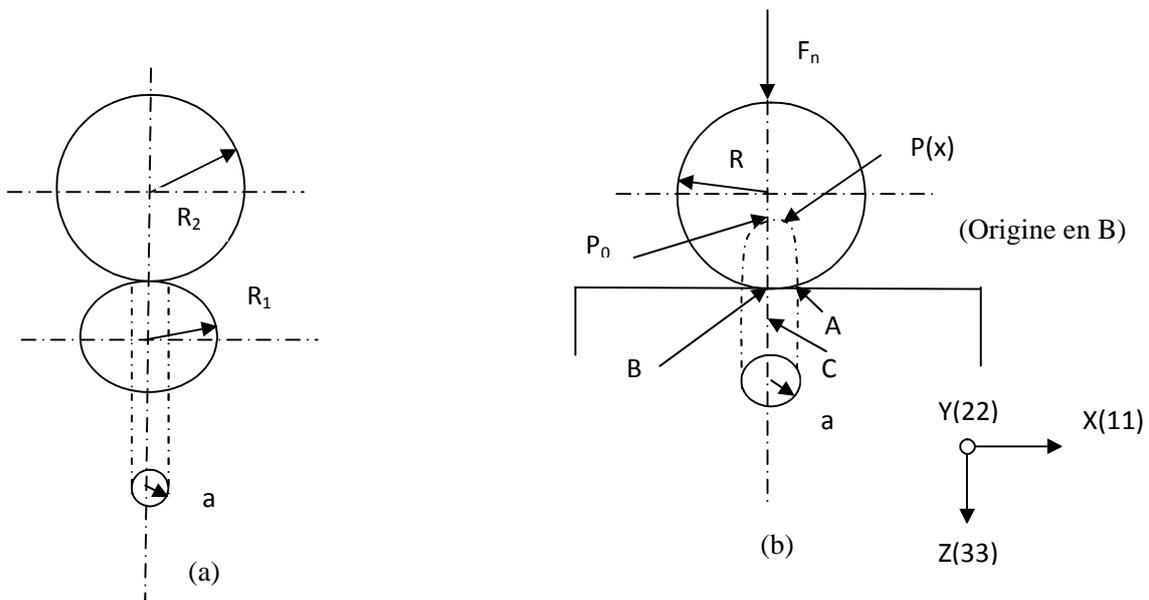


Fig. 1. (a) Contact sphère - sphère ;(b) condition du contact sphère – plan.

On détermine le rayon équivalent R par $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ pour le contact sphère-plan on a $R_1 = \infty$ et donc $R = R_2$.

Le module d'élasticité effectif E^* est donné par la relation :

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}$$

Et finalement le rayon de contact a ,

$$a = \left[\frac{3 F_N R}{4 E^*} \right]^{1/3} \quad (\text{III-1})$$

L'enfoncement δ_0 des surfaces est égale à

$$\delta_0 = \frac{a^2}{R} = \left[\frac{9 F_N^2}{16 E^{*2}} \right]^{1/3} \quad (\text{III-2})$$

Le maximum de la pression appliquée au centre de la surface P_0 est égale à

$$P_0 = \frac{3 F_N}{2 \pi a^2} = \left[\frac{9 F_N^2}{16 E^{*2}} \right]^{1/3} = \frac{3}{2} P_m \text{ et } F_N = \frac{\pi^3 R^2}{6 E^{*2}} P_0^3 \quad (\text{III-3})$$

Où P_m est la pression moyenne.

Compte tenu de la symétrie d'axe, il est commode d'utiliser une représentation polaire. On évalue la distribution radiale de la pression

$$P_r = P_0 \left[1 - \frac{r^2}{a^2} \right]^{1/2} \text{ avec } r^2 = x^2 + y^2 \quad (\text{III-4})$$

Suivant l'axe des X nous aurons la relation :

$$P_x = P_0 \left[1 - \frac{x^2}{a^2} \right]^{1/2} \quad (\text{III-5})$$

Les expressions des contraintes à l'intérieur du plan, dans l'espace 3D, peuvent être exprimées sous une forme analytiquement simple. Dans le plan médian X, Z, nous avons les relations simplifiées [26] des composantes du tenseur associées à l'effort normal F_N ($y = 0$) :

$$\sigma_{11}^N = \frac{P_0}{\alpha} \left[(1 + \nu) z \phi + \frac{1}{x^2} \left\{ M z \alpha \nu + \frac{1 - 2\nu}{3} (N S + 2 N A + \alpha^3) - (1 - \nu) N z^2 \right\} - N \frac{M z \alpha}{S} \right]$$

$$\sigma_{22}^N = \frac{P_0}{\alpha} \left[(1 + \nu) z \phi + \frac{1}{x^2} \left\{ M z \alpha \nu + \frac{1 - 2\nu}{3} (N S + 2 N A + \alpha^3) - (1 - \nu) N z^2 \right\} - 2 N \nu \right]$$

$$\sigma_{33}^N = \frac{P_0}{\alpha} \left[\frac{Mz\alpha}{S} - N \right] ; \sigma_{13}^N = \frac{P_0}{\alpha} \left[-x \left\{ \frac{xN}{S} - \frac{xzH}{G^2+H^2} \right\} \right] \text{ Et } \sigma_{12}^N = \sigma_{23}^N = 0$$

Avec

$$A = x^2 + z^2 - a^2, S = (A^2 + 4a^2z^2), M = \left(\frac{S+A}{2} \right)^{1/2}, N = \left(\frac{S-A}{2} \right)^{1/2}$$

$$\Phi = \tan^{-1} \left(\frac{\alpha}{W} \right), G = M^2 - N^2 + zM - aN, H = 2MN + aM + Nz.$$

Pour le cas particulier où $x=0$, le long de l'axe Z, les expressions ne sont plus valables et devront être remplacées par :

$$\sigma_{11}^N = \sigma_{22}^N = \frac{P_0}{\alpha} \left[(1+\nu) \left(z \tan^{-1} \left(\frac{\alpha}{z} \right) - a \right) + \frac{a^3}{(\alpha^2+z^2)} \right] ; \sigma_{33}^N = - \frac{P_0}{\alpha} \left[\frac{a^3}{\alpha^2+z^2} \right]$$

Les autres composantes étant nulles.

Toutes les contraintes de surface sont en compression sauf en bordure de contact où elles sont tension :

$$\sigma_{11}^a = - \sigma_{22}^a = - \frac{(1-2\nu)}{3} P_0 = 0,13 P_0. \text{ (Suivant l'axe des X au point A).}$$

Au centre du contact, en surface (point B),

$$\sigma_{33}^{(0)} = \sigma_{22}^{(0)} = - \frac{(1+2\nu)}{2} P_0 \text{ et } \sigma_{33}^{(0)} = - P_0.$$

C'est sur l'axe des Z ($r = 0$), en sous-couche et à la profondeur $z = 0,48$ (point c), que la contrainte de cisaillement et la contrainte équivalente de Von Mises sont maximales. Ainsi pour $\nu=0,3$ la valeur de cisaillement maximal $\tau_{\max(c)}$ en ce point est égale à $0,31 P_0$.

En comparaison ces grandeurs sont respectivement (pour les point A et B) :

$$\tau_{\max(A)} = \frac{|1-2\nu|}{3} P_0 = 0,13 P_0, \tau_{\max(B)} = \frac{|1-2\nu|}{4} P_0 = 0,10 P_0$$

La pression de première plastification, identique pour les deux critères de plasticité (Tresca, Von Mises) est,

$$P_{0y(c)} = \frac{k}{0,13} = 0,16 \sigma_y \quad \text{(III-6)}$$

De la même façon on déduit la force normale limite de première plastification en sous couche,

$$F_{Nr(c)} = \frac{\pi^3 R^2}{6E^{*2}} \cdot P_{0r(c)}^3 = 21 \cdot \frac{R^2 \sigma_y^3}{E^{*2}} \quad (\text{III-7})$$

1.2. Contact cylindre - plan

Une approche similaire peut être appliquée au contact cylindre-plan. On considère un chargement linéique sur un massif semi-infini. Dans ce cas, le problème se résume à l'étude d'un contact bidimensionnel.

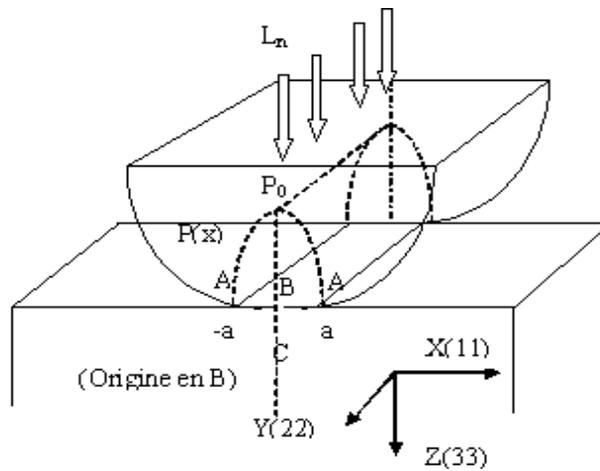


Fig. 2. Contact cylindre - plan.

Nous obtenons :

$$a = 2 \left[\frac{L_n R}{\pi E^*} \right]^{1/2}, \quad P_0 = \frac{L_n^2}{\pi a} = \frac{4}{\pi} P_m = \left[\frac{L_n R}{\pi E^*} \right]^{1/2} \quad \text{et} \quad L_n = \frac{\pi R}{E^*} \cdot P_0^2 \quad (\text{III-8})$$

L_n est défini comme la charge normale par unité de longueur. On déduit une distribution de pression elliptique.

$$P_x = P_0 \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Différentes expressions sont données pour décrire l'état de contrainte dans le plan X, Z. on retiendra les expressions formulées par [27.28.29].

$$\sigma_{11}^N = P_0 \cdot \frac{z}{a} \cdot \left[2 - \frac{s}{\sqrt{a^2 + s^2}} - \frac{\sqrt{a^2 + s^2}}{s} - \frac{x^2 s^2 a^2}{(a^2 + s^2)^{3/2} (s^2 + z^2 a^2)} \right]$$

$$\sigma_{22}^N = \frac{-2zvp_0}{a} \left[\frac{\sqrt{a^2 + s^2}}{s} - 1 \right]$$

$$\sigma_{33}^N = -P_0 \cdot \frac{z^3 a \sqrt{a^2 + s^2}}{s(s^4 + z^2 a^2)}$$

$$\sigma_{13}^N = -P_0 \cdot \frac{xz^2 s a}{\sqrt{a^2 + s^2}(s^4 + z^2 a^2)}$$

$$\sigma_{12}^N = \sigma_{23}^N = 0$$

$$s^2 = \frac{1}{2} \left\{ [(a^2 - x^2 - z^2 a^2)^2 + 4z^2]^{1/2} - (a^2 - x^2 - z^2) \right\} \quad (\text{III-9})$$

En surface ($z=0$), $\sigma_{11(x)} = \sigma_{33(x)}$ et en dehors du contact toutes les composantes sont nulles. Le long de l'axe z (direction 3).

$$\sigma_{11(x)}^N = \frac{-p_0}{a} \left[(a^2 + 2z^2)(a^2 + z^2)^{-1/2} - 2z \right] \quad (\text{III-10})$$

$$\sigma_{33(x)}^N = -P_0 \frac{a}{(a^2 + z^2)^{1/2}}$$

Les autres composantes sont nulles.

σ_{11}^N et σ_{33}^N Étant les contraintes principales σ_1^N et σ_2^N , nous obtenons dans ce cas

$$\tau_{\max}(x) = \frac{P_0}{a} \cdot \left[z - \frac{z^2}{(a^2 - z^2)^{1/2}} \right] \quad (\text{III-11})$$

La contrainte maximale de cisaillement en sous-couche se situe à $z = 0,78a$ et est égale à $\tau_{\max} = 0,3P_0$. De la même manière que pour le contact sphère-plan, la pression et la force normale de la première plastification sont exprimées par (critère de Tresca) :

$$P_{0y(c)} = \frac{K}{0,3} = 1,667 \cdot \sigma_y \quad \text{et} \quad L_{Ny(c)} = \frac{\pi R}{E^*} P_{0y(c)}^2 = 8,72 \frac{R \sigma_y^2}{E^*}$$

Le maximum du critère de Von Mises est toujours observé en sous-couche mais en $z = 0,7a$ avec pour pression limite associée $P_{0y(c)} = 1,79 \sigma_y$.

Les formulations présentées ne prennent pas en compte l'influence du frottement puisque de nature identique, aucune déformation relative n'apparaît à l'interface des deux solides. Cependant pour des matériaux différents, les déformations seront différentes créant une déformation relative susceptible d'intégrer une accommodation par frottement. On montre que l'influence des caractéristiques mécaniques sur le modèle d'Hertz n'est observée que pour de différences significatives de propriétés élastiques.

Nous avons étudié jusqu'à présent le cas d'un contact convexe très facile à mettre en œuvre pour la sphère, plus difficile pour le cylindre compte tenu de la génératrice de contact. Cependant dans de nombreuses configurations industrielles et parfois pour des essais tribologiques, on utilise le contact plan-plan sous pression normale ou plus exactement le contact poinçon-plan. Différentes formulations peuvent être considérées. Dans le cas d'une distribution uniforme de pression, correspondant au cas d'un poinçon souple, on détermine les composantes du tenseur en différents point du massif à l'aide des relations suivantes :

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^N &= \frac{-P}{2\pi} [2(\theta_1 - \theta_2) - (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)] \\ \sigma_{33}^N &= \frac{-P}{2\pi} [2(\theta_1 - \theta_2) + (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)] \\ \sigma_{13}^N &= \frac{-P}{2\pi} (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2) \\ \theta_1 &= \arctg \left(\frac{z}{x-a} \right), \theta_2 = \arctg \left(\frac{z}{x+a} \right)\end{aligned}\quad (\text{III-12})$$

On calcule respectivement les valeurs principales :

$$\sigma_{12}^N = -\frac{P}{\pi} (\alpha \pm \sin \alpha) \text{ Et le cisaillement maximal } \tau_{\max} = \frac{P}{\pi} \sin \alpha.$$

Les iso valeurs des contraintes principale σ_1 et σ_2 et du cisaillement maximal τ_{\max} sont décrites par la famille de cercle passant par les deux point du contact O_1 et O_2 figure 3. La valeur maximale est obtenue pour $\alpha = \pi/2$ avec $\tau_{\max}^{\text{max}} = P/\pi$.

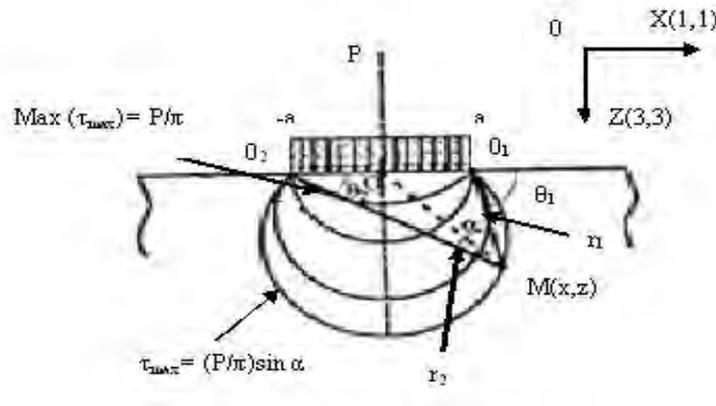


Fig. 3. Isovaleurs des contraintes principales σ_1, σ_2 et du cisaillement maximale τ_{max} .

La pression limite de première plastification est $p = \pi K$. on met en évidence une discontinuité de chargement en bordure de contact (O_1 et O_2) puisque les sollicitations en surface, nulles à l'extérieur du contact, passent par une valeur maximale au bord du contact.

Pour une indentation par un massif infiniment rigide, avec l'hypothèse d'un contact sans frottement, la distribution de la pression dans l'aire du contact bidimensionnel poinçon-plan est :

$$P_x = \frac{L_x}{\pi(a^2 - x^2)^{1/2}}$$

Avec un enfoncement constant sous le contact figure 4

Lorsque $|x| = a$, P_x tend vers une valeur infinie.

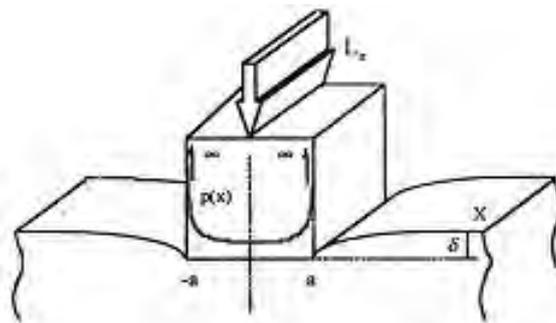


Fig. 4. Indentation par un massif infiniment rigide.

Une contrainte infinie ne pouvant exister, le matériau va accommoder le chargement au travers d'une déformation non réversible. Cette accommodation dépend des propriétés physiques

du matériau. Pour un matériau très fragile, cela entraîne l'amorçage et la propagation de fissures, alors que l'accommodation se fait par déformation plastique pour un matériau plus ductile.

Il faut insister sur le fait que ce type de contact ne permet pas d'analyser convenablement les aspects tribologiques. En effet, quel que soit l'effort normal, aussi petit soit-il, des surcontraintes conduisant dans certains cas à la plastification, apparaissent en bordure du contact. Cette remarque peut se généraliser à la conception des produits industriels pour lesquels il est préférable de limiter ce type de contact, ou tout du moins de limiter les effets de bord en réalisant des chanfreins. On confirme des notions de conception de systèmes mécaniques où tout effet de coin et plus généralement de discontinuité géométrique doit être évité.

2. Modèle de Huber, 1904

Dans le cas d'un contact ponctuel sphère/plan, le tenseur des contraintes qui se développent en tout point du massif a été exprimé par Huber [34]. Du fait de la symétrie axiale, on adoptera des coordonnées cylindriques : O_r, θ, O_z . Les composantes du tenseur de Huber sont présentées sur les équations (III-13).

En ce qui concerne les aspects tribologiques, il est intéressant de s'intéresser à deux familles de points :

- Les points appartenant à la surface du plan ;
- Les points appartenant à l'axe O_z : axe partant du point de contact O et pénétrant vers l'intérieur du matériau du plan.

2.1. Analyse des contraintes à la surface du plan

Compte tenu de la symétrie cylindrique du système autour de l'axe O_z , dans l'aire de contact (Γ), la surface pour $z = 0$ est une surface principale et les contraintes $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ sont des contraintes principales. Leur expression est la suivante :

Répartition des contraintes : Huber 1904

En coordonnées cylindriques (r, θ, z) , dans le cas sphère/plan, les contraintes s'écrivent :

$$\frac{\sigma_r}{p_0} = \frac{1-2\nu a^2}{3} \frac{1 - \left(\frac{z}{\sqrt{u}}\right)^3}{r^2} + \left(\frac{z}{\sqrt{u}}\right)^3 \frac{a^2 u}{u^2 + a^2 z^2} + \frac{z}{\sqrt{u}} \left(\frac{1-\nu}{a^2+u} u + (1+\nu) \frac{\sqrt{u}}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{u}} - 2 \right)$$

$$\frac{\sigma_\theta}{p_0} = \frac{1-2\nu a^2}{3} \frac{1 - \left(\frac{z}{\sqrt{u}}\right)^3}{r^2} - \frac{z}{\sqrt{u}} \left(2\nu + \frac{1-\nu}{a^2+u} u - (1+\nu) \frac{\sqrt{u}}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{u}} \right)$$

$$\frac{\sigma_z}{p_0} = - \left(\frac{z}{\sqrt{u}}\right)^3 \frac{a^2 u}{u^2 + a^2 z^2}$$

$$\frac{\tau_{rz}}{p_0} = \frac{r z^2}{u^2 + a^2 z^2} \frac{a^2 \sqrt{u}}{a^2 + u} \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0 \quad (\text{III-13})$$

Avec $u = \frac{1}{2} \left(r^2 + z^2 - a^2 + \sqrt{((r^2 + z^2 - a^2)^2 + 4a^2 z^2)} \right)$ racine > 0 de $\frac{r^2}{a^2+u} + \frac{z^2}{u} = 1$

La contrainte hydrostatique s'écrit :

$$\frac{\sigma_m}{p_0} = \frac{2}{3} (1+\nu) \frac{z}{a} \left(\operatorname{Arctg} \frac{a}{\sqrt{u}} - \frac{a}{\sqrt{u}} \right)$$

Points contenus à l'intérieur du cercle de contact ($r < a$ et $z = 0$) :

$$\sigma_z = - \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{1/2} P_0$$

$$\sigma_r = \left(\frac{1-2\nu a^2}{3} \frac{1 - \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{3/2}}{r^2} - \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{1/2} \right) P_0$$

$$\sigma_\theta = \left(\frac{1-2\nu a^2}{3} \frac{1 - \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{3/2}}{r^2} - 2\nu \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \right) P_0$$

$\tau_{rz} = \tau_{z\theta} = \tau_{\theta r} = 0 \Rightarrow$ La surface est une surface principale.

Au centre du cercle ($r = 0, z = 0$) :

$$\sigma_r = \sigma_\theta = - \frac{1+2\nu}{2} P_0 \quad \sigma_z = -P_0$$

La cission maximale au sens de Tersca s'exprime par :

$$\tau_M = \frac{1}{2} (\sigma_z - \sigma_r) = \frac{-1+2\nu}{4} P_0$$

Sur le cercle de contact ($r = a, z = 0$) :

$$\sigma_r = \frac{1-2\nu}{3} P_0 \quad \text{Tension} \quad \sigma_\theta = \frac{1-2\nu}{3} P_0 \quad \sigma_z = 0$$

$$\tau_{rz} = \tau_{z\theta} = \tau_{\theta r} = 0 \quad \tau_{max} = \frac{1-2\nu}{3} P_0$$

Hors du cercle de contact ($r > a, z = 0$) :

$$\sigma_r = \frac{1-\nu^2}{3} \frac{a^2}{r^2} p_0 \quad , \quad \sigma_\theta = \frac{1-\nu^2}{3} \frac{a^2}{r^2} p_0$$

$$\sigma_z = 0 \quad , \quad \tau_{rz} = \tau_{z\theta} = \tau_{\theta r} = 0$$

L'évolution des contraintes en surface et représentée sur la figure 5. On y observe que la contrainte radiale devient positive sur la circonférence qui limite le cercle de contact ($\sigma_r = 0,13p_0$ pour $\nu = 0,3$). Il apparaît à une zone critique, car cette contrainte tensile peut être à l'origine de fissurations dites « hertzienne » dans le cas des matériaux à caractère fragile sensibles au mode 1 de rupture.

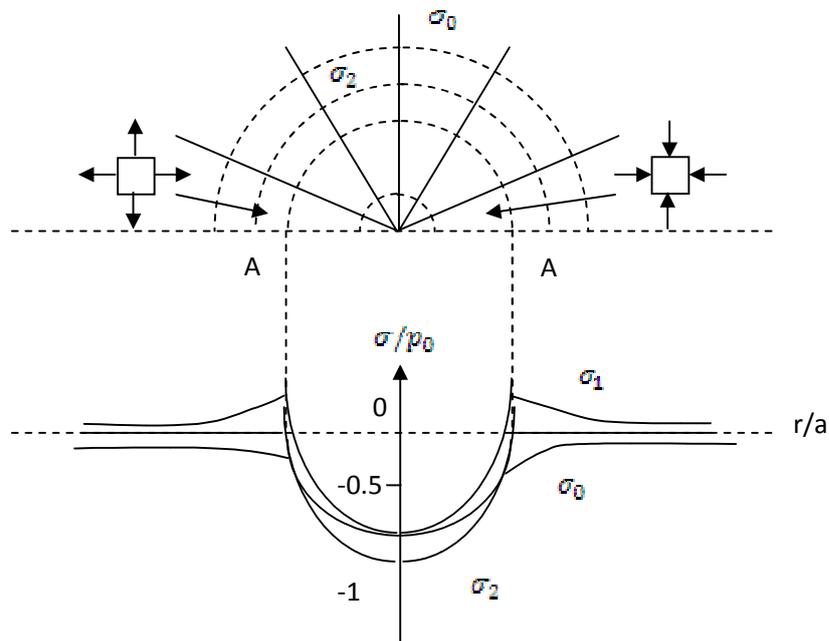


Fig. 5. Contact sphère - plan, répartition des contraintes en surface.

2.2. Contraintes aux points appartenant à l'axe Oz

Sous la surface, on étudiera uniquement les contraintes s'exerçant sur les points appartenant à l'axe Oz : $r = 0$.

Compte tenu de la symétrie cylindrique, l'axe Oz est un axe principal, les contraintes sont des contraintes principales et les cisssions élémentaires sont nulle, d'où :

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \left(-(1 + \nu) \left(1 - \frac{z}{a} \operatorname{Arctg} \frac{a}{z} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{a} \right)^2} \right) P_0$$

$$\sigma_z = -\frac{1}{1 + \left(\frac{z}{a} \right)^2} P_0$$

$$\tau_{rz} = \tau_{z\theta} = \tau_{\theta r} = 0 \quad \tau_{max} = \frac{1}{2} (\sigma_z - \sigma_r)$$

La figure 6 présente l'évolution des contraintes sur l'axe Oz, on y observe que la cisssion maximale (contrainte de cisaillement maximale) au sens de Tresca τ_{max} passe par un maximum :

$\tau_{max} \approx 0,31p_0$, pour $z = 0,5a$

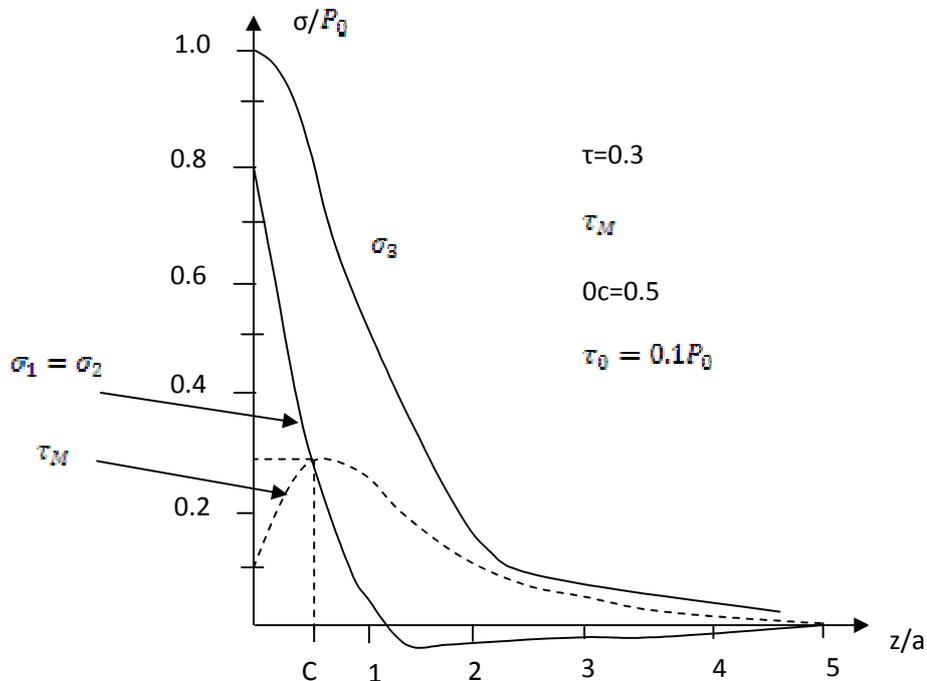


Fig. 6. Contact ponctuel. Evolution des contraintes sur l'axe Oz.

L'existence d'un point de cission maximale « C » sous la surface doit être prise en compte dans le cas des matériaux à comportement ductile, pour éviter les déformations par surcontraintes ($\tau_{max} < H_E/\epsilon$).

3. CHARGEMENT TANGENTIEL

Très souvent un déplacement tangentiel dynamique et associé à la charge appliquée. Dans certains cas le massif peut rouler. Si aucun mouvement de rotation n'est possible, il frotte. Au déplacement imposé et associé un effort tangentiel que l'on mesure. La loi de frottement de Coulomb est ici élargie à une approche locale par le principe d'Amontons, pour le quel en tout point du contact, la contrainte de cisaillement $q_{(x,y)}$ est proportionnelle à la pression.

$$\mu = \left| \frac{q_{(x,y)}}{P_{(x,y)}} \right| \quad (\text{III-14})$$

On suppose que les distributions hertziennes de chargement ne sont pas modifiées par la sollicitation tangentielle. Ceci est vérifié lorsque les deux massifs ont des propriétés identiques. Dans le cas du contact associant des matériaux différents, et pour le contact sphère-plan, l'influence des caractéristiques mécaniques peut être estimée à l'aide de la variable γ [30] et du paramètre mesurant la différence des propriétés élastiques entre les deux solides donné par [31]

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1-2\nu_1}{G_1} \right] - \left[\frac{1-2\nu_2}{G_2} \right] \right\} \text{ avec } G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{III-15})$$

Où G = le module élastique de cisaillement. On a : $\gamma = -\frac{\beta\mu}{\pi}$.

Si γ reste inférieur à 0,06, la distribution de cisaillement reste inchangée différents calculs montre que pour inférieur à 0,12 et dans le cas général de coefficient de frottement inférieurs à 1, l'effet des différences de propriété mécaniques est négligeable et la distribution hertzienne de la pression et du champ de cisaillement reste valable.

Dans le cas d'un contact sphère-plan sous effort tangentiel, la distribution de cisaillement est identique au signe près à celle de la pression, la seule composante non nulle étant celle orientée suivant la direction de glissement associée à l'axe de X. nous obtenons,

$$q_{(x,z)} = \pm \mu p_{(x,z)} = \pm \mu p_0 \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{III-16})$$

Le signe (-) est associé au sens positif de glissement puisque la force de frottement s'oppose toujours au sens du déplacement. Pour les expressions des tenseurs des contraintes en tout point du plan, on utilise la formulation simplifiée de [32]. Dans les plans X, Z, (y=0), nous obtenons les relations suivantes (composantes du tenseur associé au chargement tangentiel F_T) :

$$\sigma_{11}^T = \frac{\mu P_0}{a} \left\{ -x \left(1 + \frac{\nu}{4} \right) \phi - \frac{\alpha M}{2x^3} (S\nu - 2Av + z^2) + \frac{\alpha M}{x} \left(1 - 2\nu + \frac{z^2}{s} + \frac{7\nu}{4} \right) + \frac{\alpha N}{2x^3} \left[\left(\frac{s}{6} + \frac{A}{3} \right) (1 - 2\nu) + \frac{1}{2}(z^2 + 3a^2) \right] + \frac{\alpha N}{x} \left(\frac{z^2}{s} - \frac{\nu+7}{4} \right) + \frac{2\alpha^3 z}{3x^3} (2\nu - 1) \right\}$$

$$\sigma_{22}^T = \frac{\mu P_0}{a} \left\{ -\frac{3x\phi\nu}{4} + \frac{\alpha M}{2x^3} [v(S - 2A + x^2) + x^2] + \frac{3\nu\alpha M}{4x} - \frac{\alpha N}{2x^3} \left[\left(\frac{s}{6} + \frac{A}{3} \right) (1 - 2\nu) + \frac{1}{2}(z^2 + 3a^2) \right] - \frac{\alpha N}{x} (1 + 3\nu) + \frac{2\alpha^3 z}{3x^3} (1 - 2\nu) \right\}$$

$$\sigma_{33}^T = \frac{\mu P_0}{a} \left\{ \frac{\alpha N}{2x} \left(1 - \frac{x^2 + z^2 + a^2}{s} \right) \right\}$$

$$\sigma_{13}^T = \frac{\mu P_0}{a} \left\{ \frac{3z\phi}{2} + \frac{\alpha z M}{x^2} \left(2 - \frac{x^2}{s} \right) + \frac{N}{x^2} \left[z^2 + \frac{3}{4}(s - 2A + x^2) \right] - \frac{N}{4} \left(1 + \frac{3x^2}{x^2} \right) \right\}$$

$$\sigma_{12}^T = \sigma_{23}^T = 0$$

Pour x=0 selon l'axe Z, toutes les composantes sont nulles sauf,

$$\sigma_{13}^T = \frac{\mu P_0}{a} \left[-a + \frac{3}{2} z \tan^{-1} \left(\frac{a}{z} \right) - \frac{\alpha z^3}{2(\alpha^2 + z^2)} \right] \quad (\text{III-17})$$

Aux composantes associées au chargement normale, on superpose celles induites par le chargement tangentiel pour obtenir l'état globale de chargement $\sigma = \sigma^Q + \sigma^P$.

Le calcul général des sollicitations montre que la première plastification, initialement observée en sous couche pour un contact sans frottement, remonte progressivement en surface, avec l'augmentation du coefficient du frottement.

Lorsque le coefficient de frottement est supérieur à 0,3, la première plastification σ_e sera observée en bordure à l'arrière du contact, en surface, sur l'axe médian de glissement (point c), figure 7 et figure 8. On retrouve aussi en ce point le maximum de la contrainte principale σ_1 .

En revanche, le maximum de cisaillement est situé plus à l'intérieur du contact figure 7 (b).

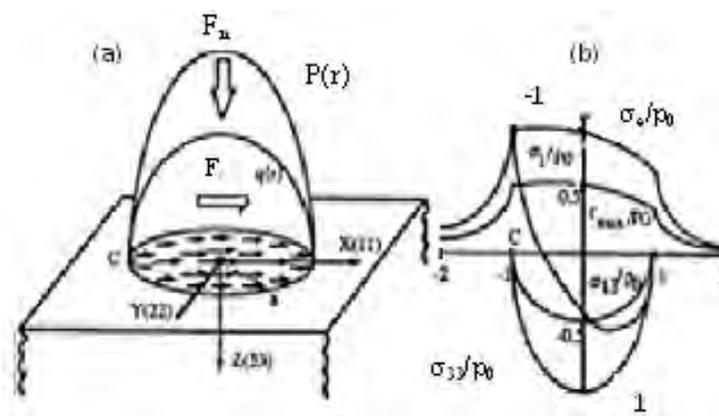


Fig. 7. Contact sphère/plan glissant ($\mu=0,5$; $\nu=0,3$) pour (a) distribution en surface du champ de pression P_r et du champ de cisaillement q_r et (b) évolution en surface suivant l'axe médian du glissement (X) des grandeurs mécaniques

$\sigma_1(x), \sigma_e(x), \tau_{max}(x), \sigma_{33}(x) = -p(x)$ Et $\sigma_{13}(x) = -q(x)$ normalisées par la pression hertzienne maximale P_0 .

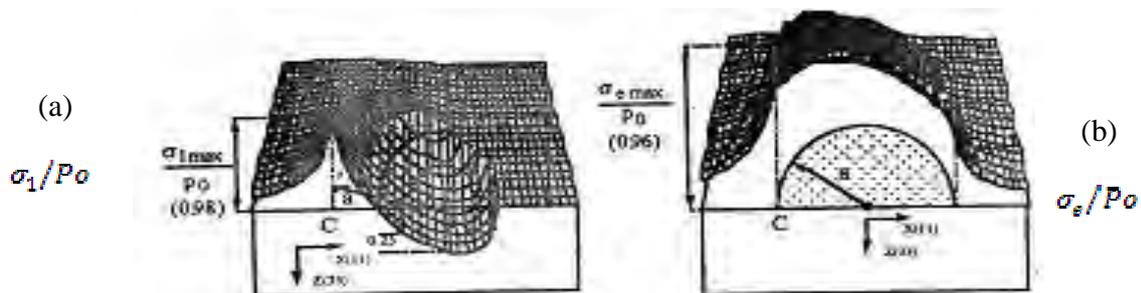


Fig .8. Contact sphère/plan glissant ($\mu = 0,5$; $\nu = 0,3$) pour (a) distribution en surface de la contrainte principale σ_1 , et (b) la contrainte équivalente de Von Mises σ_e . Les maximales de cisaillement sont observé dans le plan médian (X, Z) ce qui justifie le choix de ce domaine pour l'analyse mécanique.

Au point C :

$$\sigma_c = \begin{cases} \sigma_{11} = \sigma_{11}^{F_T} + \sigma_{11}^{F_N} = P_0 \left(\frac{4+v}{8} \mu\pi + \frac{1-2v}{3} \right) \\ \sigma_{22} = \sigma_{22}^{F_T} + \sigma_{22}^{F_N} = P_0 \left(\frac{3v}{8} \mu\pi + \frac{1-2v}{3} \right) \end{cases} \quad (\text{III-18})$$

Les autres composantes étant nulles, l'état de chargement induit par le chargement tangentiel se résume à un état bi axial.

Puisque $\sigma_{22} \leq 0$, tant que

$$\mu \leq \pi \left[\frac{8(1-2v)}{9v} \right] = 3,72$$

On montre que : $\sigma_{1(c)} = \sigma_{11}$, ($\sigma_2 = \sigma_{22}, \sigma_3 = \sigma_{33}$).

Le cisaillement en (C) est :

$$\tau_{\max(c)} = \frac{\sigma_{11}}{2} = \frac{P_0}{2} \left[\left(\frac{4+v}{8} \right) \mu\pi \left(\frac{1-2v}{3} \right) \right] \quad (\text{III-19})$$

Et la contrainte équivalente de Von Mises est :

$$\sigma_{e(c)} = \frac{P_0}{\sqrt{2}} \left[(\mu\pi)^2 \left(\frac{7v^2-4v+16}{32} \right) + (\mu\pi) \left(\frac{2v^2-5v+2}{6} \right) + \frac{2(1-v)^2}{3} \right]^{1/2} \quad (\text{III-20})$$

$$P_{0y(c)Tresca} = \frac{2k}{\left(\frac{4+v}{8} \right) \mu\pi + \frac{(1-2v)}{3}}$$

$$P_{0y(c)Von\ Mises} = \frac{\sigma_y \sqrt{2}}{\left[(\mu\pi)^2 \left(\frac{7v^2-4v+16}{32} \right) + (\mu\pi) \left(\frac{2v^2-5v+2}{6} \right) + \frac{2(1-2v)^2}{3} \right]^{1/2}} \quad (\text{III-21})$$

Les forces normales limites correspondantes sont :

$$F_{N(c)Tresca} = \left(\pi P_{0y(c)Tresca} \right)^3 \frac{R^2}{E^*{}^2}$$

$$F_{N(c)Von\ Mises} = \left(\pi P_{0y(c)Von\ Mises} \right)^3 \frac{R^2}{E^*{}^2}$$

Dans le cas où le cylindre ou le plan présente des caractéristiques élastiques similaires, la largeur du contact cylindre-plan sous effort tangentiel est $2a$, la distribution de pression et de cisaillement restant Hertzienne figure (8). Nous obtenons :

$$q(x) = \pm \mu p_0 \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^{1/2}$$

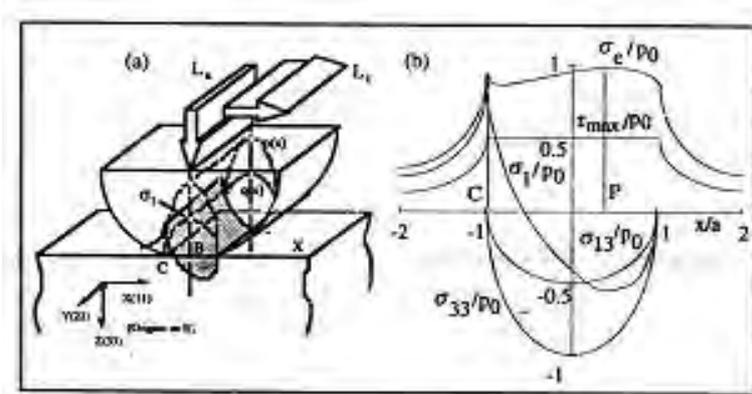


Fig. 9. Contact cylindre/plan ($\mu = 0,5$; $\nu = 0,3$) pour (a) vue de profil de la distribution surfacique du champ de pression $P(x)$, du champ de cisaillement $q(x)$ ainsi que la contrainte principale $\sigma_1(x)$ et (b) évolution en surface suivant l'axe médian du glissement (x) des grandeurs mécaniques $\sigma_1(x)$, $\sigma_e(x)$, $\tau_{max}(x)$, $\sigma_{33}(x) = -p(x)$ et $\sigma_{13}(x) = -q(x)$ normalisées par la pression Hertzienne maximale P_0 .

Le calcul montre là encore que le maximum de cisaillement, d'abord en sous couche remonte en surface pour $\mu > 0,25$ (Tresca) ou $\mu > 0,3$ (Von Mises). L'état de chargement en surface le long de l'axe X dans l'aire de contact $x \in [-a, a]$ est :

$$\sigma_{11} = -P_0 \left\{ \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^{1/2} + \mu \frac{x}{a} \right\} \quad (\text{III-22})$$

$$\sigma_{22} = -2\nu P_0 \left\{ \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^{1/2} + \mu \frac{x}{a} \right\} \quad (\text{III-23})$$

$$\sigma_{33} = -P_0 \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^{1/2} \quad \sigma_{13} = -P_0 \mu \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{III-24})$$

Le cisaillement maximal suivant l'axe X est donné par

$$\tau_{\max}(x) = \frac{1}{2} [(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + \sigma_{13}^2]^{1/2} = \mu P_0 \quad (\text{III-25})$$

Cependant seule la contrainte principale présente une discontinuité maximale en bordure à l'arrière du contact en (C) : $\sigma_1(c) = \sigma_{11} = 2\mu P_0$, ($\sigma_2 = \sigma_{22}$, $\sigma_3 = \sigma_{33}$). Le Tresca $\tau_{\max} = \mu P_0$ est constant dans tout le contact alors que le Von Mises $\sigma_{\#}$ présente un maximum à l'intérieur du contact. La pression de première plastification en fonction des limites élastiques et du coefficient de frottement est : $P_{0y\text{Tresca}} = K/\mu$. De la même façon la force normale correspondante est :

$$L_{n\text{Tresca}} = \left(\frac{K}{\mu}\right)^2 \frac{R\pi}{E^*}$$

La valeur du Von Mises en bordure de contact (c), inférieur au maximum (P) est égale à :

$$\sigma_{\#(c)} = P_0 \mu 2(v^2 - v + 1)^{1/2}$$

Pour $v = 0,3$

La pression Hertzienne correspondante est :

$$P_{0y(c)\text{Tresca}} = \frac{\sigma_y}{\mu 2(v^2 - v + 1)^{1/2}}$$

Pour un contact plan-plan sous effort tangentiel, lorsqu'un déplacement relatif est imposé, le maintien parallèle des surfaces en contact plan et extrêmement difficile à obtenir. Une inclinaison apparaît, conduisant inmanquablement à des effets de coin.

L'introduction de l'effort tangentiel, outre le fait qu'il induit un mésalignement, accentue les discontinuités observées en bordure de contact pour un chargement normale simple.

Dans le cas idéal d'un alignement parfait, pour un poinçon souple conduisant à une distribution homogène du champ de cisaillement,

$$\sigma_{11}^T = \frac{\mu P}{2\pi} \left[4 \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right) - (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2) \right]$$

$$\sigma_{33}^T = \frac{\mu P}{2\pi} (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2)$$

$$\sigma_{33}^T = -\frac{\mu P}{2\pi} [2(\theta_1 - \theta_2) + (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)]$$

$$r_1, r_2 = [(x \pm a)^2 + z^2]^{1/2}$$

Contrairement au chargement purement normal qui présente toujours des valeurs finies, l'introduction du chargement tangentiel introduit une discontinuité infinie par la composante σ_{11}^T en bordure de contact.

Ainsi, aussi petite soit la valeur de la force tangentiel associée, cette sur contrainte ne pourra être adaptée que par une accommodation irréversible du matériau et donc par plastification ou fissuration. Nous retrouvons ainsi les conclusions faites à propos de l'indenteur rigide.

Les formulations présentées, en exprimant les sollicitations dans le contact, permettent de calculer les grandeurs caractéristiques de la mécanique ($\sigma_1, \sigma_s, \tau_{max}$) pour un contact statique et glissant. Bien que rudimentaire, cette première approche définie pour un contact élastique associe sous une formulation simple les conditions de sollicitation aux propriétés mécaniques et inter faciale des matériaux mis en contact. Ainsi au travers d'une approche systématique, dans une étude paramétrique, on peut évaluer en fonction de sollicitations imposées, la réponse du matériau. Cette étude peut se faire tant sur les approches qualitatifs décrivant les processus d'endommagement (fissuration, plastification ...), que sur les approches quantitatives avec l'étude de la cinétique de la dégradation.

On peut par exemple quantifier l'influence du coefficient du frottement, mesurer celui de la géométrie de surface et en particulier de l'augmentation du rayon de courbure. Enfin il est possible d'estimer l'influence de traitements de surfaces (coefficient de frottement, contrainte résiduelles...).

Ce type d'analyse est valable tant que les conditions de sollicitations vérifient les hypothèses initiales de contact ou lorsque l'on ne s'en éloigne pas trop. Il importe par exemple que le niveau des sollicitations reste en deçà du seuil de plastification. Il faut aussi vérifier que les matériaux mis en contact ne sont pas trop différents ou utiliser des approches plus complexes [28.29.30]. D'autre part les conditions de semi infinité, et celle de la petite dimension du contact vis-à-vis du rayon de courbure, doivent être vérifiées.

Un des paramètres les plus significatif et pourtant généralement le moins considéré concerne la topographie du contact. En effet les hypothèses de calcul posent l'hypothèse de surfaces parfaite sans discontinuités. Or toute surface présente des discontinuités liées à sa rugosité et l'aire réelle de contact et par définition différente de l'aire apparente. Des zones du contact sont portante et d'autre non. On peut citer à ce sujet le modèle de [33.34]. En particulier on remarque que les rugosités supportant un chargement localement supérieur à la distribution d'Hertz vont subir une plastification alors même que le calcul global d'Hertz reste élastique. Ces surcontraintes et la plastification qui en résulte sont à l'origine de multiples lois d'usure et d'amorçage de fissures.

Outre les aspects de la rugosité il est aussi extrêmement important de considérer l'évolution dans le temps du contact. Effectivement au cours de l'essai, avec l'usure de surfaces, la formulation et l'agglomération des débris, la géométrie du contact se trouve profondément modifiée. Les hypothèses d'Hertz valables au cours des premières instants de l'essai sont très rapidement rendues caduques.

Un formalisme relativement simple permet de quantifier et d'estimer l'influence de divers paramètres du contact. Cette analyse mécanique peut être affinée par des moyens plus puissants tels que le calcul par élément finis où il devient possible d'intégrer différents lois de comportement pour le matériau et le coefficient de frottement et surtout d'étendre cette analyse à n'importe quelle géométrie de contact.

4. MODELE JKR

En 1971, Johnson, Kendall et Roberts ont proposé la théorie JKR [35] qui exprime les paramètres du contact par :

$$a^3 = \frac{R}{K} \left(F + 3\pi RW + \sqrt{6\pi RWF + (3\pi WR)^2} \right)$$

$$\delta = \frac{a^2}{R} - \sqrt{\frac{8\pi Wa}{3K}} \quad (\text{III-26})$$

Ces deux relations font clairement apparaître l'influence de l'adhésion au travers du travail d'adhésion W entre les deux corps. Lorsque ce dernier est nul, ce modèle coïncide avec la théorie d'Hertz. La surface de contact engendre des efforts d'adhésion qu'il est nécessaire de

vaincre pour séparer les deux objets en contact. Toujours d'après cette théorie, il est nécessaire d'appliquer dans ce but une charge P appelée force de décollement, ou *pull-off*, donnée par :

$$P = \frac{3}{2}\pi RW$$

La théorie JKR s'applique particulièrement pour les fortes énergies d'adhésion, les matériaux souples ainsi que les grands rayons de courbure. Néanmoins, cette méthode sous-estime la charge en surface et présente cependant, d'un point de vue théorique, une anomalie, puisqu'elle prévoit une tension infinie au bord de la zone de contact.

5. MODELE DMT

En 1975, Derjaguin, Muller et Toporov ont proposé une théorie à mi-chemin entre les deux précédentes, la théorie DMT [36] pour éviter cette tension infinie, en considérant une déformation Hertzienne de la zone de contact et une adhésion due aux forces de surface agissant en dehors de cette dernière. Le rayon de contact est alors donné par :

$$a^3 = \frac{R}{K}(F + 2\pi RW) \quad (\text{III-27})$$

Sous charge nulle, ce rayon vaut :

$$a_0^3 = \frac{2\pi WR^2}{K} \quad (\text{III-28})$$

Cette théorie prévoit qu'il est nécessaire de fournir une force P pour séparer les solides exprimée par :

$$P = 2\pi RW$$

Ce modèle s'applique surtout pour des faibles énergies d'adhésion ainsi que pour des faibles rayons de courbures. Néanmoins, cette théorie sous-estime la valeur du rayon de contact, du fait de la considération d'une géométrie hertzienne.

6. MODELE DUGDALE

Dugdale a montré que les deux modélisations sont deux cas limites d'un modèle plus large. La transition entre les modèles DMT et JKR a été étudiée analytiquement par [37]. Un paramètre λ appelé paramètre d'élasticités introduit :

$$\lambda = 2\sigma_0 \left(\frac{R}{\pi W K^2} \right)^{1/3} \text{ avec } \sigma_0 = \frac{W}{h} \text{ et } h \approx 1A^0 \quad (\text{III-29})$$

Il est à noter qu'un rapport pertinent apparaît pour qualifier à la fois l'adhésion et la rigidité du solide. Il est égal à :

$$r = \frac{W}{E} \quad (\text{III-30})$$

La force de pull-off s'écrit alors :

$$P = 2\sigma_0 a^2 \left(m^2 \arctan \sqrt{m^2 - 1} + \sqrt{m^2 - 1} \right)$$

Les paramètres du contact, a et d, ainsi que le coefficient m sont déterminés par la résolution du système suivant de trois équations à trois inconnues :

$$\frac{\lambda a^2}{2} \left(\frac{k}{\pi W R^2} \right)^{2/3} \left((m^2 - 2) \arctan \sqrt{m^2 - 1} + \sqrt{m^2 - 1} \right) + \frac{4\lambda^2 a}{3} \left(\frac{k}{\pi W R^2} \right)^{2/3} \left((\sqrt{m^2 - 1}) \arctan \sqrt{m^2 - 1} + \sqrt{m^2 + 1} \right) = 1$$

$$F = \frac{K a^3}{R} - \lambda a^2 \left(\frac{R}{\pi W K^2} \right)^{1/3} \left(\sqrt{m^2 + 1} + m^2 \arctan \sqrt{m^2 - 1} \right)$$

$$\delta = \frac{a^2}{R} - \frac{4a\lambda}{3} \left(\frac{\pi W}{K R} \right)^{1/3} \sqrt{m^2 - 1} \quad (\text{III-31})$$

Modèles	Hypothèses	Cas applicables
Hertz	Contact élastique sans adhésion	
JKR $\lambda > 5$	Déformation due à l'adhésion	Forte énergie d'adhésion, matériau souple et grand rayon de courbure
DMT $\lambda < 0.1$	Déformation Hertzienne du contact + adhésion	Faible énergie d'adhésion, matériau rigide et faible rayon de courbure
Dugdale $0.1 < \lambda < 5$	La force d'adhésion est une force attractive en dehors de la zone de contact	Transition entre les modèles JKR et DMT

Tableau 9. Les modèles de contact et les hypothèses associées.

- Le premier modèle (JKR) est celui de Johnson, Kendall et Roberts. Il est basé sur un critère énergétique et suppose que les forces attractives sont confinées dans l'aire de contact et sont nulles à l'extérieur de cette zone figure (14 b)

- Le deuxième modèle (DMT) est celui de Derjaguin, Muller et Toporov. Il tient compte des forces attractives à l'extérieur de la zone de contact, mais suppose que le profil du contact sphère-plan demeure inchangé (contact du type Hertz) figure (10 c)

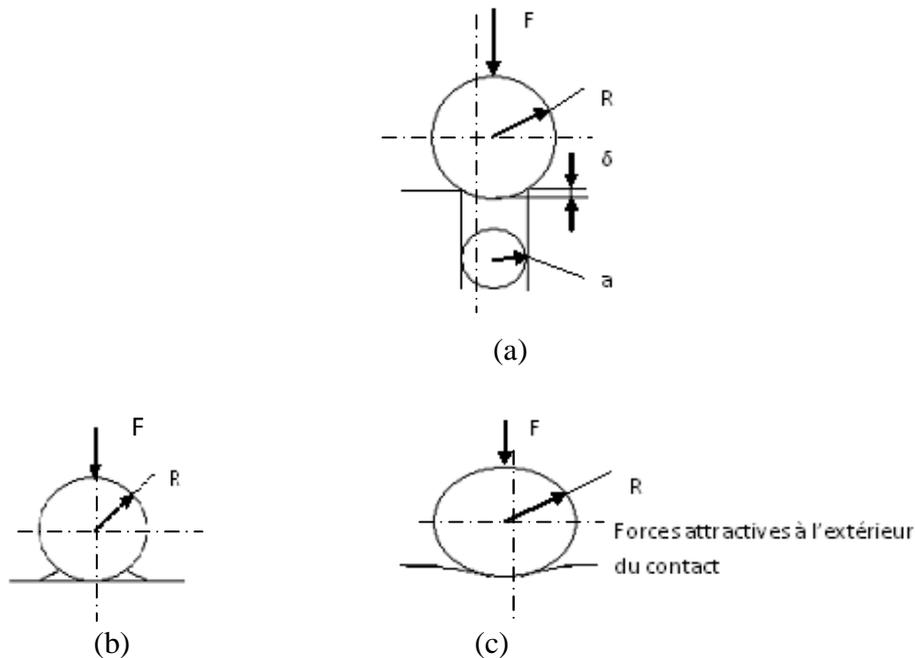


Fig. 10. (a) Contact sphère-plan montrant l'enfoncement δ de la sphère dans le plan ; (b) Contact sphère-plan montrant les forces attraction qui sont confinées dans la zone de contact (modèle JKR) ; (c) Contact d'Hertz avec les forces attraction qui agissent à l'extérieur de la zone de contact (modèle DMT).

Le tableau 10 rassemble les principales caractéristiques du contact sphère-plan pour les trois types de contact : Hertz, JKR et DMT. Dans ce tableau, F_{ad} désigne la force d'adhésion (force nécessaire pour rompre le contact), a et a_0 désignent respectivement le rayon de l'aire de contact sous une charge F ou sous une charge nulle, δ représente la déformation totale figure 10 (a), R est le rayon de la sphère, F est la force normale appliquée, W est le travail d'adhésion entre la sphère et le plan, et K est donné par la relation :

$$\frac{1}{K} = \frac{3}{4} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)$$

	Contact d'Hertz	Modèle JKR	Modèle DMT
F_{ad}	0	$\frac{3}{2}\pi WR$	$2\pi WR$
a	$\left(\frac{R}{K}F\right)^{\frac{1}{3}}$	$\left(\frac{R}{K}\left(F + 3\pi RW + \sqrt{6\pi RWF + (3\pi RW)^2}\right)\right)^{\frac{1}{3}}$	$\left(\frac{R}{K}(F + 2\pi RW)\right)^{\frac{1}{3}}$
a_0	0	$\left(\frac{6W\pi R^2}{K}\right)^{\frac{1}{3}}$	$\left(\frac{2W\pi R^2}{K}\right)^{\frac{1}{3}}$
δ	$\frac{\alpha^2}{R}$	$\frac{\alpha^2}{R} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{6\pi W\alpha}{K}}$	$\frac{\alpha^2}{R}$

Tableau 10. Quelques grandeurs caractéristiques du contact sphère-plan.

La théorie JKR s'applique principalement dans le cas de matériaux à forte énergie de surface avec des aires de contact importantes (matériaux mous ou sphères a grandes rayons, typiquement quelques mm) alors que la théorie DMT est plutôt vérifiée pour des sphère de petit rayons, pour des matériaux durs et à faible énergie de surface.

La figure 11 montre l'évolution de l'aire de contact entre une pointe fine et une surface plane en fonction de la force nominale appliquée. Lorsque cette dernière est nulle, l'aire de contact devient également nulle en l'absence de forces de surface (contact d'Hertz). Lorsque les forces de surfaces agissent (JKR ou DMT), on constate que, même pour une force appliquée égale à zéro, voir négative, l'aire de contact a toujours une valeur non nulle.

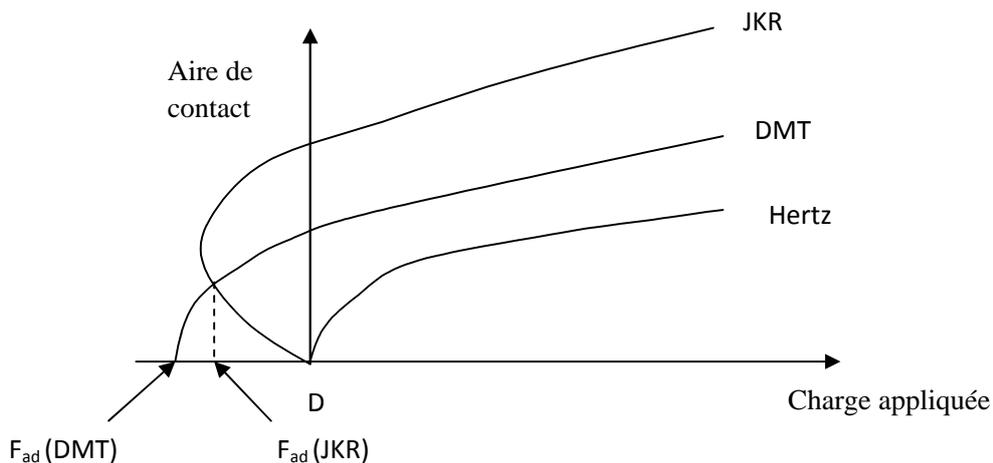


Fig .11. Variation de l'aire de contact en fonction de la charge appliquée.

Comparaison des trois modèles : Hertz, DMT et JKR.

Plusieurs auteurs ont rapporté que la force d'adhésion due aux seules forces de surface peut être suffisante pour induire la plastification de la surface indentée. Des valeurs de quelque micro newtons à plusieurs dizaine de micro newtons ont été mesurées sous vide entre surface métalliques.

Si γ désigne l'énergie de surface, on peut écrire, dans le cas de deux matériaux identique 1 et 2 :

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma \text{ et } \gamma_{12} = 0$$

Ceci permet de poser

$$W = \gamma_1 + \gamma_1 - \gamma_{12} = 2\gamma \quad (\text{III-32})$$

On aura donc, en exploitant l'équation (III-32) et en utilisant les équations de F_{ad} (tableau 10) :

- pour le modèle JKR :

$$F_{ad} = 3\gamma\pi R$$

- pour le modèle DMT

$$F_{ad} = 4\gamma\pi R$$

En mesurant expérimentalement F_{ad} , il sera donc possible d'accéder à l'énergie de surface de matériau. A noter que ceci n'est possible que lorsque la force négative (force de séparation) est appliquée suffisamment lentement au contact, de manière à conserver un comportement réversible. Lorsque la vitesse de séparation augmente, on peut enregistrer des pertes viscoélastiques dans le matériau (ceci a été observé dans le cas du caoutchouc), ce qui conduit à des valeurs de γ qui peuvent atteindre 100 à 1000 fois les valeurs prévues par la thermodynamique.

Notons enfin que l'adhésion dépend également de la température et du temps (durée) de contact entre les matériaux.

CHAPITRE IV

FISSURATION ET CONTACT

1. USURE PAR FATIGUE PENDANT LE GLISSEMENT

Pour des conditions sévères de frottement par glissement, il a été démontré [37] que la zone affectée par la déformation plastique orientée dans le sens du glissement dépassait 0,1mm figure 1(b) et que le taux de déformation résultant du cisaillement atteignait une valeur extrême à la surface. Diverses tentatives de modélisation à partir de l'effet de rochet sont prometteuses pour décrire ces phénomènes qui concernent l'industrie ferroviaire par exemple. Les observations au microscope électronique mettent en évidence la formation d'une microstructure cellulaire similaire à celle observée dans les métaux sous très haute déformation [38]. Des fissures superficielles sont également visibles à la surface. Elles résultent de la formation de microfissures amorcées aux points faibles, qui se propagent le long des plans faibles tels que joints de cellules ou joints de grains. La figure 1 donne une description schématique des processus de dégradation par fatigue :

- Amorçage de fissure par fatigue.
- Propagation de la fissure initiale.
- Amorçage d'une fissure secondaire.
- Propagation de la fissure secondaire et formation de débits.

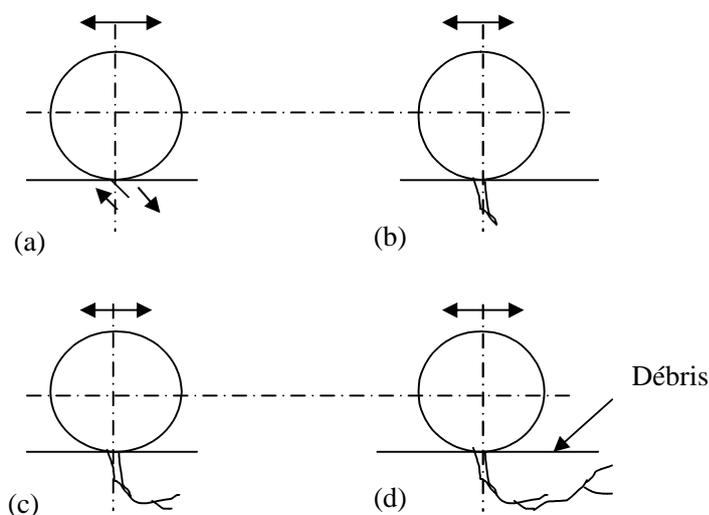


Fig. 1. Description schématique du processus de dégradation par fatigue (mouvement alternatif) : (a) amorçage de fissure, (b) propagation d'une fissure initiale (c) amorçage de fissures secondaire conduisant la formation d'un débris (d).

Des débits d'usure peuvent être dus à la croissance de fissures initiées à la surface par un glissement non lubrifié (en particulier dans le cas de glissement non réciproque) [39]. La formation des débris résulte donc de la création des fissures secondaires.

Pendant le contact répété alterné entre deux corps, des endommagements se produisent également sous les surfaces frottantes. Les matériaux contiennent des inclusions ou d'autres imperfections qui constituent des sites de microfissuration dans la zone déformée plastiquement. Les microfissures induites se propagent sous la zone de la surface soumise à de fortes contraintes triaxiales (état hydrostatique). Ce comportement est décrit par la théorie de délamination [40] qui est présentée schématiquement à la Figure 2.

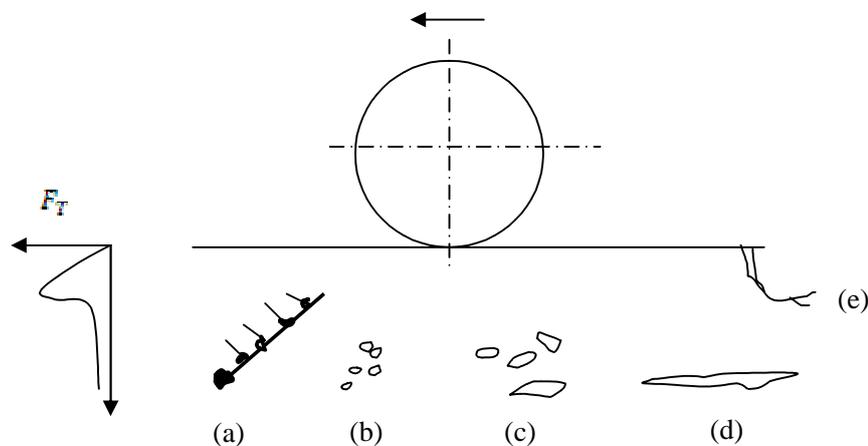


Fig. 2. Description schématique des processus de formation et de croissance de microfissures sous la surface adaptée de la théorie de délamination :

(a) Particules dures avec accumulation des dislocations ; (b) formation de microactivité ; (c) extension des microactivités ou fissures ; (d) fissure continue ; (e) fissure en surface initiant les débris d'usure.

Il est difficile de résumer les principales avaries liées à, l'amorçage des fissures de fatigue. Dans les zones de faible glissement, on note essentiellement [41]

- Les micros écailles dont les dimensions sont à l'échelle de celles des aspérités des surfaces auxquelles elles sont directement associées.
- Les écailles, plus larges et plus profondes ayant quelques millimètres carrés de surface et quelques dixièmes de millimètre de profondeur. Elles sont caractéristiques du contact hertzien.

Pour juger de la nocivité de ces avaries, il faut considérer un effet d'échelle : la même particule détachée par un même mécanisme de fatigue pourra être nocive si elle est de dimension grande par rapport au contact (écaille d'un roulement) ou au contraire participer à combattre l'usure si, vue la dimension du contact, elle peut être considérée comme alimentant le troisième corps. Toutefois la coalescence de micro écailles superficielles peut entraîner une fissuration profonde dans les volumes.

L'état de finition des surfaces (micro géométrie), l'état des contraintes résiduelles et le lubrifiant (sa composition chimique ou son altération) peuvent fragiliser les matériaux au contact

et sont des paramètres prioritaires pour décrire les risques de fissuration pour un chargement et de matériaux donnés. Cette dégradation par fissuration qui apparaît en général pour de grands nombres de cycles est souvent inévitable pour les contacts glissants et roulants. Elle régit la durée de vie de nombreuses installations.

Les matériaux fragiles se fissurent facilement sous l'effet répété de grandes déformations d'origine mécanique ou thermique alors que les matériaux plus ductiles sont très souvent le siège d'un écrouissage cyclique. Les réseaux de fissure observé sur des surfaces ne sont pas toujours pris en compte dans les études tribologique car ils ne correspondent pas a une perte de matière. Toutefois, cette fissuration peut favoriser de phénomène de corrosion ou conduire a des résultats catastrophiques. Curieusement, dans certains cas, des réseaux des fissures superficielles non propagées peuvent empêcher toute usure. L'accommodation de vitesse dans le contact résulte alors de l'ouverture et de la fermeture de fissures.

Enfin la fissuration superficielle peut être masquée par une avance rapide de l'usure :

Les couches fissurées sont usées avant que les fissures n'aient pu se propager.

Le développement de critère de fatigue permet aujourd'hui de prédire dans des configurations simples, les zones d'amorçage des fissures de fatigue. Toutefois, si l'utilisation de critère dans la fatigue conventionnelle est répandue, leur utilisation en fatigue de contact ne fait que commencer.

De nombreux critère de fatigue ont été proposés sans qu'un caractère universel ne leur soit reconnu [42,43]. Une méthode de détermination du comportement à la fatigue, en fatigue multiaxial a été proposée [44]. Cette méthode se propose de décrire le chemin de chargement imposé à un volume élémentaire. Les volumes élémentaires subissent un écrouissage cyclique avant instabilité. La démarche considère le chargement macroscopique et le chargement microscopique local au tenseur macroscopique.

Récemment, cette approche a été appliquée au cas du fretting-wear et du fretting-fatigue d'un contact bille-plan pour une condition de glissement partiel. L'amorçage de fissure en limite de contact ainsi que l'orientation de première fissurations ont été validés et une carte de fretting théorique a été proposée donnant les conditions expérimentales (charge normale, débattement)

conduisant à l'amorçage de fissures pour diverse durée de vie. Cette approche a été validée expérimentalement.

2. USURE PAR PETITS DEPARTTEMENTS (fretting)

On considère un contact avec une sollicitation tangentielle et alternée est appliquée. Elle est caractérisée par de très petites amplitudes de déplacement δ (typiquement entre 1 et 100 μm).

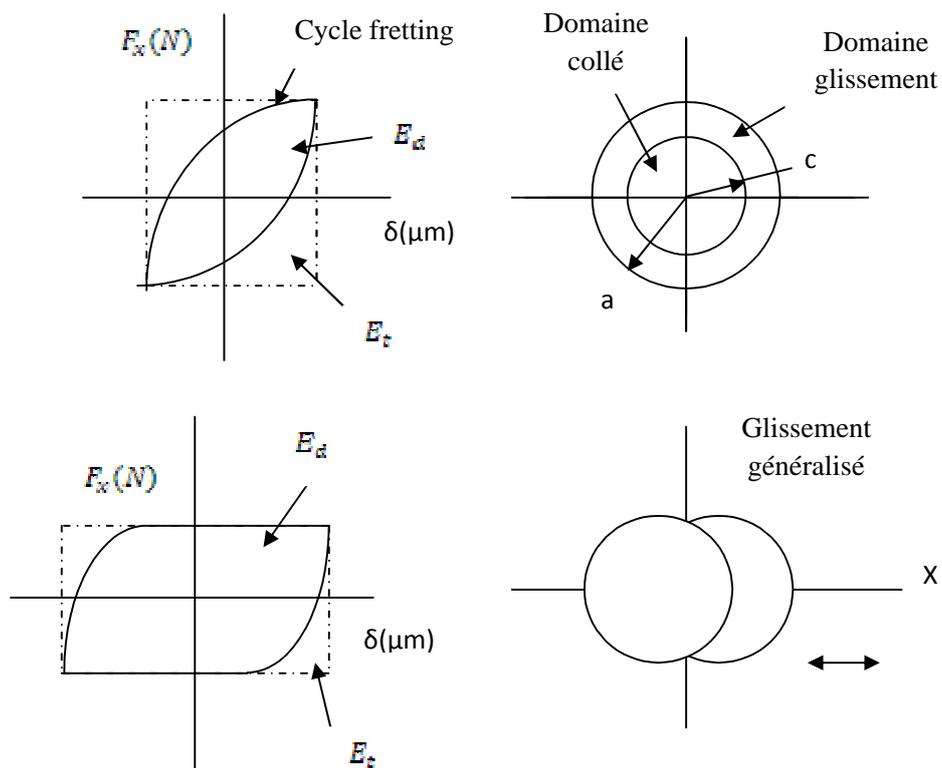


Fig. 3. Contact sphère - plan en glissement partiel et glissement total.

Pour les plus faible déplacements, un glissement partiel du contact est observé, le contact présente une structure composée des domaines collés et glissants. Au centre du contact, on observe un disque maintenu, collé, entouré d'un domaine dans lequel le front de glissement va évoluer au cours du cycle. Le cycle de l'effort tangential en fonction du déplacement présente une forme qui peut être assimilée à une forme elliptique.

Pour les plus grandes amplitudes, la zone collée centrale disparaît et l'hystérésis du cycle est caractérisée par un plateau caractéristique de la condition de glissement total.

On peut quantifier la transition entre ces deux conditions, en calculant le rapport entre l'énergie dissipée E_d et l'énergie totale E_t , ($A = E_d / E_t$).

Le calcul élastique met en évidence une constante telle que :

- Si $A < 0,2$, il s'agit d'un glissement partiel.
- Si $A \geq 0,2$, il s'agit d'un glissement total.

La sollicitation de « fretting » engendre deux types de dégradations :

- L'amorçage et la propagation de fissure, essentiellement observées en glissement partiel ;
- L'usure associée à la formation des débris, qui est principalement observée en glissement total.

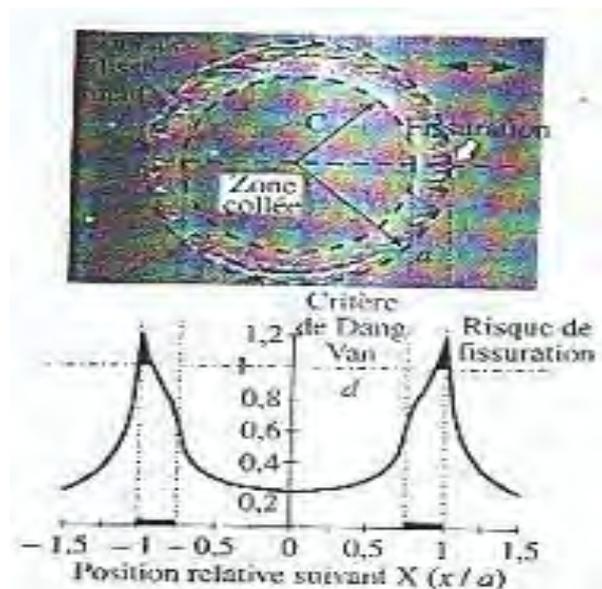


Fig. 4. Contact sphère - plan en glissement partiel $A = E_d/E_t < 0,2$

(S.Fouvry, P.Kapsa, L.Vincent 1995).

L'analyse mécanique du contact, couplant la description de Mindlin et le formalisme analytique de Hamilton, permet de calculer, en chaque point du plan, l'évolution du tenseur des contraintes. Outre les grandeurs classiques (contrainte principale, contrainte équivalente de Von Mises), il est possible de calculer les différents critères multiaxiaux de fatigue.

Le critère de Dang Van (d), calculé à partir du chargement et des grandeurs classiques (limite de fatigue en flexion et en torsion alternée), permet de localiser le site de premier amorçage dans le contact, et d'estimer le risque de fissuration à grands nombres de cycles :

- Si $d \geq 1$, il existe un risque d'amorçage de fissure ;
- Si $d < 1$, le risque d'amorçage de fissure est nul.
- L'analyse en glissement partiel montre que le site de premier amorçage est situé en bordure de la zone de contact.

De même, on peut quantifier l'usure en glissement total à partir de l'énergie interraciale cumulée, associée au travail du frottement qui est dissipé dans l'interface (E_d). On trouve une évolution linéaire entre le volume usé (v) et l'énergie qui est dissipée.

Cela permet d'établir pour chaque système un coefficient énergétique d'usure (ξ) tel que :

$$V = \frac{1}{\xi} E_d$$

Ainsi, à partir du calcul du critère de glissement A, de la transposition de critère d'amorçage et de la détermination du coefficient énergétique d'usure ξ , il devient plus facile de décrire le comportement d'un contact vis-à-vis de la sollicitation de « fretting ».

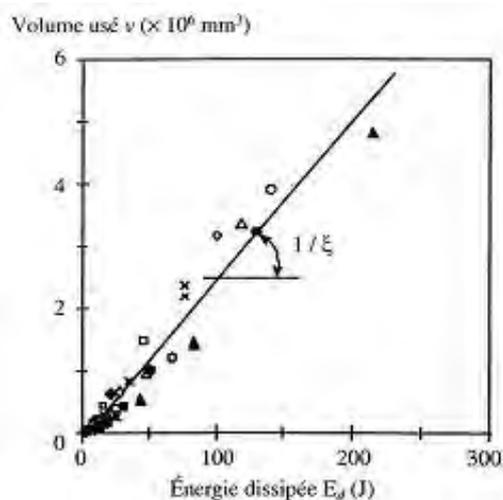


Fig. 5. Evolution de l'usure d'un acier en fonction de l'énergie dissipée en glissement total.

Exemple du frottement alumine-acier (S.Fouvry, P.Kapsa, L.Vincent 1995).

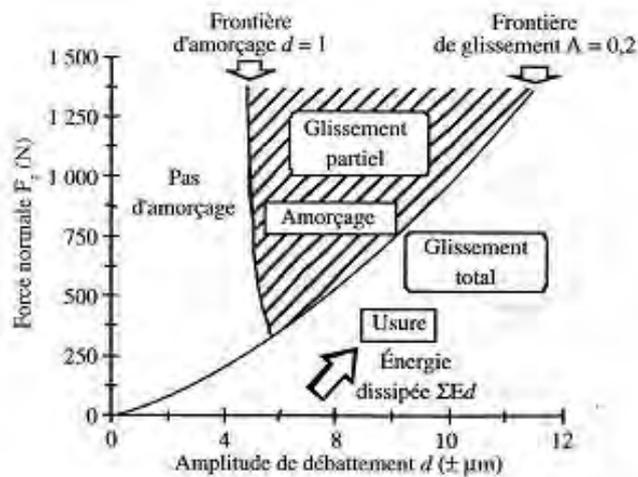


Fig. 6. Représentation schématique de la carte de réponse du matériau.

Cette formulation permet de tracer des cartes de dégradation, en fonction du coefficient de frottement, de la fréquence et de la géométrie du contact, où les différents domaines de dégradation sont établis par rapport à l'effort normal et au déplacement imposé.

3. PLASTIFICATION DES ASPÉRITES

Dans le cas d'une distribution gaussienne des aspérités, la pression de contact s'exprime à l'aide de la relation :

$$P = 0,3 \left[\frac{E}{(1-\nu^2)} \right] \sqrt{\frac{\sigma}{\beta}}$$

Où β désigne le rayon de courbure moyen des aspérités (supposés sphériques) et σ représente l'écart type de la distribution de leur hauteur.

Un indice de plasticité Ψ a été introduit pour déterminer la limite entre déformation élastique et déformation plastique des aspérités en contact. Dans le cas d'une distribution gaussienne des aspérités, cet indice s'exprime sous la forme d'un produit de deux facteurs : le premier facteur définit les propriétés mécaniques des matériaux, alors que le second facteur tient compte de la topographie des surfaces.

L'indice de plasticité Ψ s'écrit :

$$\Psi = \left[\frac{E}{H(1-\nu^2)} \right] \sqrt{\frac{\sigma}{\beta}}$$

E, H et ν représentent respectivement le module d'Young, la dureté et le coefficient de poisson du matériau le plus mou.

La nature de la déformation des aspérités dépend de la valeur de Ψ comme suit :

- $\Psi \geq 1$: le contact de type plastique ;
- $1 > \Psi \geq 0,6$: le contact de type élasto-plastique ;
- $\Psi < 0,6$: le contact est de type élastique.

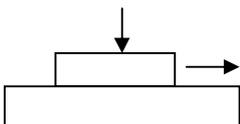
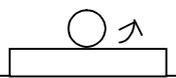
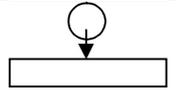
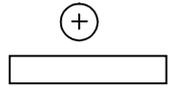
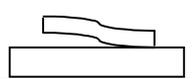
Éléments en interaction	Mode de sollicitation		Mécanismes d'usure les plus probables
Solide/solide		glissement	Adhésion Abrasion
		roulement	Fatigue de contact
		impact	Surcontraint déformation ou fissuration
		oscillation	Fretting fatigue Fretting wear (adhesion, abrasion) fretting corrosion
Liquide/solide		écoulement	Cavitation Erosion
Fluide+ particules/Solide		écoulement	Erosion

Tableau 11. Modes d'usure principaux en fonction du mode de sollicitation.

4. APPROCHE DE LA MECANIQUE DE LA RUPTURE FRAGILE

4.1. Théorie de Griffith

Griffith [45] a abordé le problème de la rupture des corps fragiles d'un point de vue énergétique.

Nous allons tout d'abord supposer que le solide est homogène, isotrope élastique et linéaire. Les seules propriétés mécaniques de ce solide nécessaires au calcul sont le module d'Young et le coefficient de Poisson. Les forces de volume et les accélérations sont négligées (pas de rupture dynamique). Et enfin il faut que ce solide possède une fissure initiale S .

Lorsque la propagation de la fissure a lieu quand la géométrie de celle-ci change, l'aire augmente de dS . L'écriture de la conservation de l'énergie totale du système s'écrit de la façon suivante:

$$dE_{\text{tot}} = dE_{\text{élas}} + dE_{\text{ext}} + dE_s + dE_{\text{cin}} = 0 \quad (\text{IV-1})$$

dE : variation de l'énergie totale.

$dE_{\text{élas}}$: variation de l'énergie élastique.

dE_{ext} : variation de l'énergie potentielle des forces extérieures ou travail de ces forces.

dE_s : énergie dissipée dans la séparation ou $2\gamma dS$, γ étant l'énergie de rupture de deux surface unitaires ou énergie superficielle du matériau.

dE_{cin} : variation d'énergie cinétique.

Juste avant la propagation, nous avons un état d'équilibre entre les sollicitations extérieures et la fissure de surface S . il y aura propagation que si l'énergie cinétique augmente $dE_{\text{cin}} > 0$ soit:

$$\frac{\partial (E_{\text{élas}} + E_{\text{ext}})}{\partial S} + 2\gamma < 0 \quad (\text{IV-2})$$

$$\text{Soit} \quad \varphi = - \frac{\partial (E_{\text{élas}} + E_{\text{ext}})}{\partial S} \quad (\text{IV-3})$$

Le paramètre φ est appelé taux de restitution d'énergie. Le critère de propagation de Griffith se traduit donc par:

$$\varphi > 2\gamma \quad (\text{IV-4})$$

Si φ est égal à 2γ à tout instant, la rupture est contrôlée, avec une croissance stable de la fissure. Si φ est inférieur à 2γ la fissure devrait se refermer. En réalité, cela ne se produit pas en raison de l'apparition de divers processus irréversibles, par exemple l'oxydation des surfaces de rupture.

4.2. Modes d'ouvertures des fissures

Les fissures peuvent se propager selon trois modes d'ouvertures: ouverture, glissement dans le plan, glissement perpendiculaire au plan.

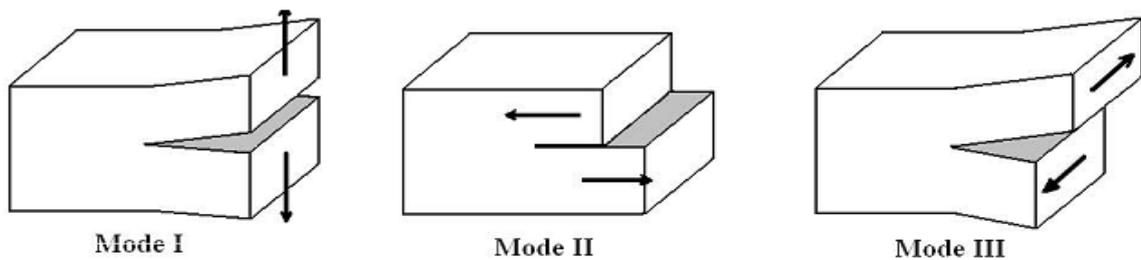


Fig. 7. Les modes fondamentaux de la mécanique de la rupture.

4.3. Facteur d'intensité de contrainte

A chacun des trois modes peut être associé un facteur d'intensité de contrainte noté K_I , K_{II} , K_{III} pour chacun des modes respectivement I,II,III.

Prenons les axes de coordonnées cartésiennes ou x_I est dans le prolongement de la fissure dont la trace est représentée en figure 8. Le facteur d'intensité des contraintes au point M est donné par la formule suivante [46] :

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right)$$

$$u_1 = \frac{K_I}{(2\mu)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (k - \cos(\theta)) + \frac{K_{II}}{(2\mu)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (k - \cos(\theta) + 2)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (\text{IV-5})$$

$$u_2 = \frac{K_I}{(2\mu)\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (k - \cos(\theta)) + \frac{K_{II}}{(2\mu)\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (k - \cos(\theta) - 2)$$

Avec μ le module de cisaillement et ν le coefficient de Poisson, et:

$k = 3-4\nu$ en déformation plane

$k = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ en contrainte plane

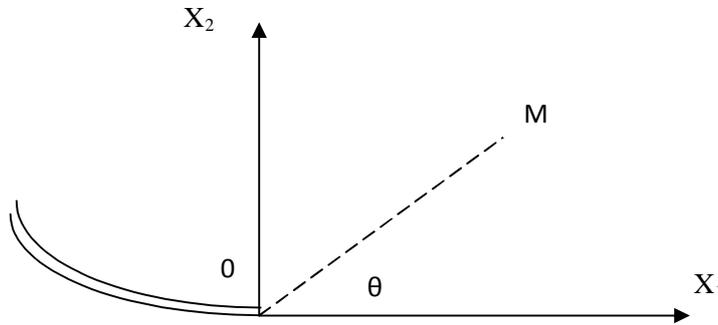


Fig. 8. Représentation polaire d'une fissure.

Dans le cas du chargement anti plan par rapport au plan (x_1, x_2) , la composante du déplacement u_3 et les contraintes σ_{13} et σ_{23} sont données par:

$$\sigma_{13} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} (-\sin \theta / 2)$$

$$u_3 = \frac{K_{III}}{(2\mu)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (\text{IV-6})$$

$$\sigma_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\theta / 2)$$

Remarquons que:

Les contraintes sont infinies au fond de la fissure car elles sont liées au facteur $r^{-1/2}$. En fait, les facteurs d'intensité des contraintes mesurent la force de la singularité des contraintes. Ils peuvent aussi être interprétés autrement. D'après les formules précédentes donnant les

déplacements, les facteurs K_I et K_{II} correspondant aux deux modes I et II sont directement proportionnelles aux discontinuités des composantes u_1 et u_2 respectivement:

$$[\mu_1] = \mu_1(r, \pi) - \mu_1(r, -\pi) = \frac{K_{II}}{\mu} (k + 1) \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2}$$

$$[\mu_2] = \mu_2(r, \pi) - \mu_2(r, -\pi) = \frac{K_I}{\mu} (k + 1) \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2} \quad (\text{IV-7})$$

Ainsi l'interprétation cinématique des facteurs d'intensité conduit à des formules plus simples et compréhensibles que les formules (IV-5) donnant les contraintes. En conclusion, et c'est là une remarque très importante pour la suite, les facteurs d'intensité des contraintes apparaissent comme des facteurs de discontinuité des déplacements.

4.4. Formule d'Irwin

Plaçons-nous par exemple en mode I, dans un cas plan. Irwin considère la propagation d'une fissure de longueur α jusqu'à $\alpha + \Delta\alpha$. Il calcule le taux de restitution d'énergie φ par le travail nécessaire pour réduire cette fissure de la longueur $\alpha + \Delta\alpha$ jusqu'à la longueur α .

D'après les relations (IV-5), la contrainte en avant de la fissure de longueur α vaut:

$$\sigma_{22}(M) = \sigma_{22}(r = \Delta\alpha + x, \theta = 0)$$

Le déplacement en arrière de la fissure de longueur $\alpha + \Delta\alpha$ vaut:

$$u_2(M) = u_2(r = -x, \theta = 0)$$

On note que nous sommes en coordonnées polaires, et donc que r est toujours positif, c'est pour cela que $r = -x$ pour les x négatif.

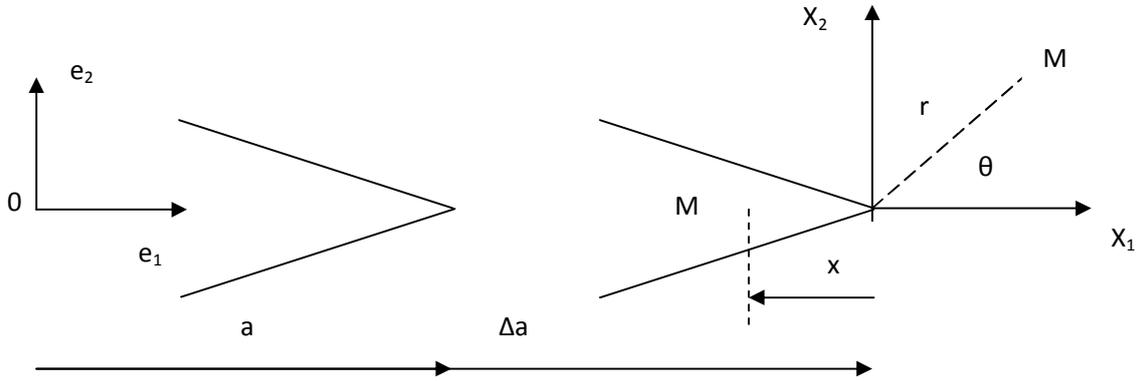


Fig. 9. Notation, avancée et fermeture virtuelle d'une fissure.

Alors, d'après (IV-5), le travail de fermeture pour les deux lèvres est :

$$\Delta\omega = \int_0^{\Delta\alpha} u_2 \sigma_{22} dx = \frac{K_I [fiss\alpha]}{\sqrt{2\pi(x+\Delta\alpha)}} \frac{K_I [fiss\alpha + \Delta\alpha] (k+1) \sqrt{-x}}{2\mu\sqrt{2\pi}} dx \quad (IV-8)$$

Soit tous calculs faits:

$$\Delta\omega = \frac{K_I [fiss\alpha] K_I [fiss\alpha + \Delta\alpha] (k+1)}{4 \cdot 2\mu} \Delta\alpha \quad (IV-9)$$

Or l'énergie de restitution $\varphi = \lim_{\Delta\alpha} \frac{\Delta\omega}{\Delta\alpha}$

Ce qui nous donne finalement en négligeant les termes du second ordre en $\Delta\alpha$:

$$\varphi = \frac{K_I^2 (k+1)}{4 \cdot 2\mu} = \frac{K_I^2 (k+1)(1+\nu)}{4 \cdot E} \quad (IV-10)$$

D'où les relations suivantes entre φ et K_I :

$$\varphi = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 \text{ En déformation plane car } k = 3-4\nu \quad (IV-11)$$

$$\varphi = \frac{1}{E} K_I^2 \text{ En contrainte plane } k = \frac{3-\nu}{1+\nu} \quad (IV-12)$$

Le même type de calcul peut être fait en mode II et III. Cependant, il est nécessaire de supposer que la fissure se propage dans son propre plan (extension coplanaire). On obtient ainsi les contributions des trois modes sous la forme :

$$\varphi = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 + \frac{1-\nu^2}{E} K_{II}^2 + \frac{1-\nu}{E} K_{III}^2 \text{ En déformation planes.} \quad (\text{IV-13})$$

$$\varphi = \frac{1}{E} K_I^2 + \frac{1}{E} K_{II}^2 + \frac{1-\nu}{E} K_{III}^2 \text{ En contraintes planes.} \quad (\text{IV-14})$$

4.5. Principe de superposition

Dans le cas de l'étude complexe d'une fissure présente dans le massif lors d'une indentation ou d'un rayage nous allons utiliser ce principe de superposition. Nous allons l'énoncer [47] et le démontrer:

«Le facteur d'intensité de contrainte dans n'importe quel cas de chargement est égal au facteur d'intensité obtenu en appliquant aux lèvres de la fissure les contraintes qui existeraient à cet endroit s'il n'y avait pas de fissure».

En effet, soit un corps sans fissure soumis à un chargement quelconque (cas A). Soit σ_0 les contraintes obtenues par ce chargement sur une ligne qu'occuperait une fissure virtuelle non existante. Un corps semblable avec présence d'une fissure (cas B) est rendu aveugle à la présence de cette fissure par application de limites - σ_0 sur les bords de cette fissure (principe de l'action et de la réaction). Cette application de cette contrainte supplémentaire $-\sigma_0$ sur les lèvres de la fissure résultera donc en une situation identique au cas A. le cas B est la superposition de deux autres cas de chargements simples C et D comme indiqué sur la figure 10.

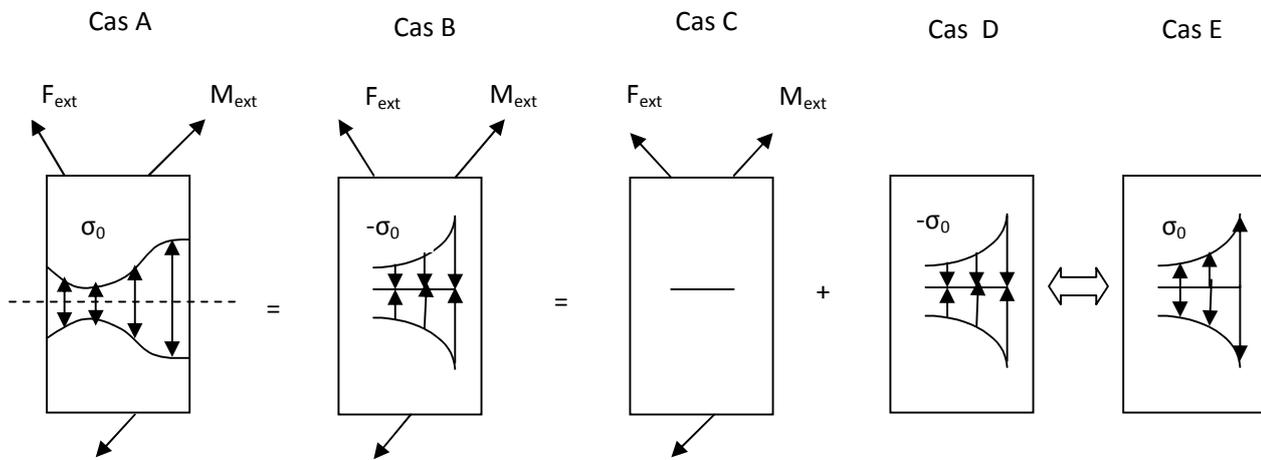


Fig. 10. Application du principe de superposition.

Le FIC (facteur d'intensité de contrainte) du cas A est le même que celui de B:

$$K(B) = K(A)$$

Dans le cas A, il n'y a pas de singularité des contraintes ou de discontinuité de déplacements. D'après les remarques faites sur définition du FIC, il sera nul dans ce cas, et par la même, nul dans le cas B.

Le FIC du cas B est la somme des FIC des cas C et D:

$$K(B) = K(C) + K(D)$$

Comme le $K(B)$ est nul, alors:

$$K(D) = -K(C)$$

Si on inverse les contraintes appliquées dans le cas D, le signe des contraintes en pointe de fissure (et donc du FIC) va également changer en un cas E, donc:

$$K(E) = -K(D)$$

D'où finalement:

$$K(E) = K(C)$$

4.6. Calcul des facteurs d'intensité de contrainte

Considérons d'abord une fissure de longueur 2α soumise à un chargement quelconque seulement sur ses deux bords (figure 11). Si on calcule le facteur d'intensité de contrainte en proposant une solution qui fait appel aux fonctions de Westergaard qu'on appelle $Z(z)$ [48].

Il trouve :

$$Z(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{P(\xi)}{z-\xi} \sqrt{\frac{\alpha^2-\xi^2}{z^2-\alpha^2}} d\xi \quad (\text{IV-15})$$

En développant au voisinage de la singularité A (figure 11) : $z = \alpha + \zeta$, on isole le terme singulier:

$$Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\zeta}} \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \int_{-\alpha}^{\alpha} P(\xi) \sqrt{\frac{\alpha+\xi}{\alpha-\xi}} d\xi + O(\sqrt{\zeta}) \quad (\text{IV-16})$$

$$\text{Or } K_I(A) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} Z \sqrt{2\pi\zeta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha}^{\alpha} P(\xi) \sqrt{\frac{\alpha+\xi}{\alpha-\xi}} d\xi$$

Au voisinage de A on pose $z' = -\alpha - \zeta'$, on obtient:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2\pi\zeta'}} \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \int_{-\alpha}^{\alpha} P(\xi) \sqrt{\frac{\alpha+\xi}{\alpha-\xi}} d\xi + O(\sqrt{\zeta'}) \quad (\text{IV-17})$$

$$\text{Et } K_I(A') = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \int_{-\alpha}^{\alpha} P(\xi) \sqrt{\frac{\alpha-\xi}{\alpha+\xi}} d\xi + O(\sqrt{\zeta'}) \quad (\text{IV-18})$$

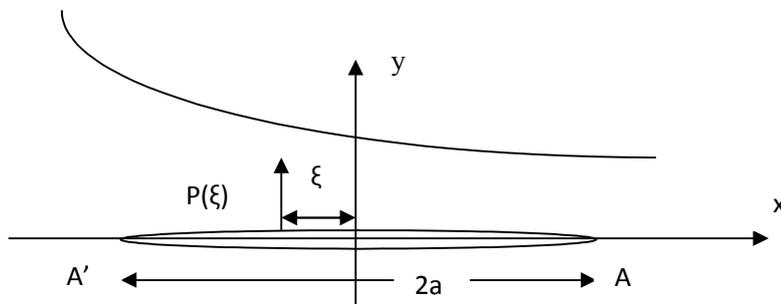


Fig. 11. Fissure soumise à un chargement quelconque $P(\xi)$.

Dans le cas d'une fissure débouchante, Mougnot [49], Hellan [50] supposent qu'une fissure de longueur a débouchant sur le bord d'un demi-plan infini est ramenée au problème résolu d'une fissure de longueur $2a$ dans un plan infini.

L'hypothèse supplémentaire étant bien entendu:

$$P(\zeta) = P(-\zeta) \text{ pour } -a \leq x \leq 0 \quad (\text{IV-19})$$

Dans cette condition, on trouve:

$$K_I(A) = 2 \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^a \frac{P(\varepsilon)}{\sqrt{a^2 - \varepsilon^2}} d\varepsilon \quad (\text{IV-20})$$

5. APPLICATION AU CAS DE L'INDENTATION SPHERIQUE ET DE LA RAYURE

5.1. Principe

Nous allons considérer dans cette partie le cas d'un défaut de longueur c présent dans le massif pouvant être assimilé à une fissure. Ce massif est soumis soit à une indentation par poinçon sphérique soit à un rayage. Nous allons reprendre l'approche développée par Mougnot et d'autres en vue de l'appliquer aussi au cas du rayage.

En appliquant le principe de superposition précédemment cité, il suffit de connaître le champ des contraintes dans le cas où la surface est rendue invisible (n'existe pas) pour calculer le facteur d'intensité de contrainte. Cela en appliquant aux lèvres de la fissure les mêmes contraintes trouvées précédemment sur ce même emplacement.

5.2. Trajectoire d'une fissure

L'équation (IV-20) permet de calculer le facteur d'intensité de contrainte en mode I, avec rappelons le ζ l'abscisse curviligne du point le long de la fissure où agit la contrainte normale $P(\zeta)$. Il faut donc à tout moment connaître la trajectoire de la fissure. Puisque nous nous trouvons en mode I, en tout point de son évolution, la fissure reste donc et se propage perpendiculairement à la contrainte principale σ_1 . En fait, cela revient à dire comme les contraintes principales sont

en tout point normales entre elles que la fissure suit l'isostatique de σ_3 dans le plan xz et celle de σ_2 dans le plan x, y.

5.2.1. Méthode directe

Cette méthode est basée sur la connaissance en tout point des directions principales et ne nécessite pas la détermination des isoclines au préalable. De plus, elle est applicable même dans un état de contrainte tridimensionnel. Il suffit de se donner un point de départ A_0 , à partir duquel nous voulons tracer par exemple l'isostatique d'une des deux contraintes principales (figure 12). Une fois les directions principales calculées sur ce point A_0 , il suffit alors d'effectuer une homothétie de centre A_0 dans la direction principale voulue et de rapport k suffisamment petit. On obtient le point A_1 en ayant par exemple choisi la direction de σ_1 . Sur le point A_1 , on détermine à nouveau la direction principale, on effectue une nouvelle homothétie dans cette nouvelle direction mais cette fois-ci de centre A_1 et ainsi de suite.

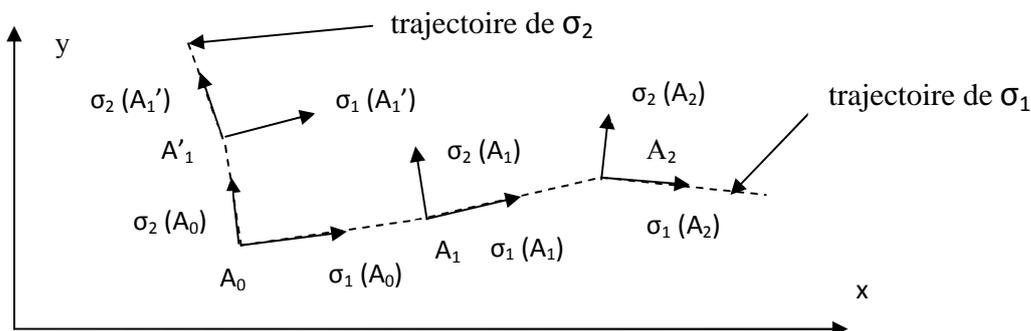


Fig. 12. Détermination des trajectoires des contraintes σ_1 , σ_2 par méthode directe.

Il faut noter que le rapport k de l'homothétie est petit, plus la trajectoire ainsi déterminée ne tend vers la solution exacte du problème.

Sur la figure 13, nous avons représenté les isostatiques de σ_2 dans le plan $z = 0$ pour différents points de départ A_0 : $x = -1,1 \alpha$; $x = -1,2 \alpha$; $x = -1,3 \alpha$; et $x = -1,4 \alpha$.

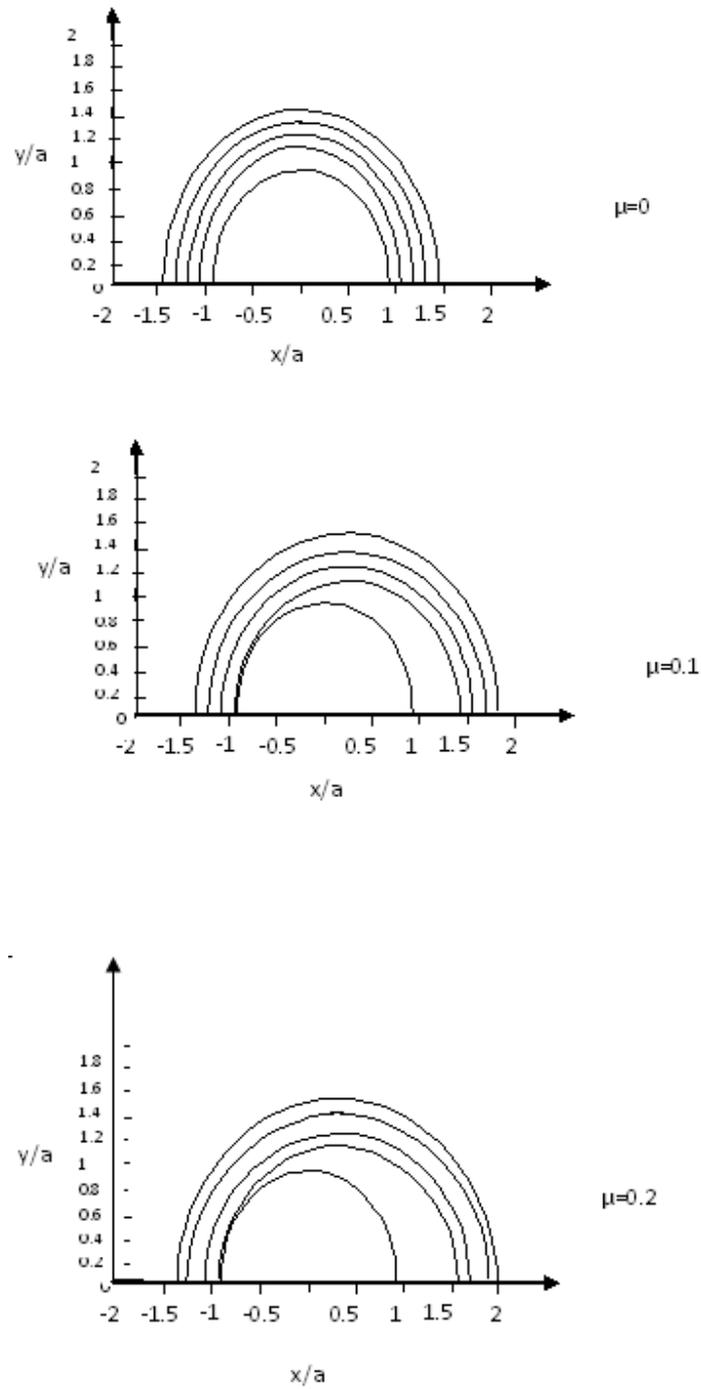


Fig. 13. Isostatiques ou trajectoires de la seconde contrainte principale sur la surface $z = 0$ pour différents coefficient de frottement μ , pour $\nu = 0,22$, obtenues par la méthode directe.

6. CRITERES DE PLASTICITE

Un critère de plasticité se traduit par un ensemble d'équations qui définissent des conditions sur les composantes σ_{ij} du tenseur de contrainte. Il s'exprime sous la forme :

$$F(\sigma_{ij}) = 0$$

Où F est une fonction connue.

Lorsque cette condition sera vérifiée, le matériau se déformera plastiquement.

L'équation précédente peut s'exprimer en fonction des contraintes principales à l'aide d'une nouvelle fonction F' :

$$F'(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}) = 0.$$

6.1. Critère de Tresca

C'est un critère de scission maximale. Il suppose que la plastification se produit lorsque le cisaillement maximal atteint une certaine valeur seuil.

En prenant $\sigma_{xx} \geq \sigma_{yy} \geq \sigma_{zz}$, ce critère s'écrit :

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2} \geq k = \frac{Y}{2}$$

Lorsque τ_{\max} devient supérieur ou égale à la contrainte limite d'écoulement en cisaillement K, alors le matériau se plastifiera. Y désigne la contrainte d'écoulement obtenue à partir d'un essai de traction (ou compression).

6.2. Critère de Von Mises

Ce critère suppose que la déformation plastique a lieu lorsque l'énergie élastique de distorsion emmagasinée atteint une certaine valeur critique.

En utilisant Y et K définis précédemment, le critère de Von Mises s'exprime dans le repère principale par :

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 = 2Y^2 = 6K^2$$

Les deux critères superposés sur la Figure 18, et l'on peut constater que l'écart maximal (E) entre les deux est égale à :

$$E = \sqrt{\frac{2}{3}} Y - \frac{Y}{\sqrt{2}}$$

Soit une différence d'environ 15%.

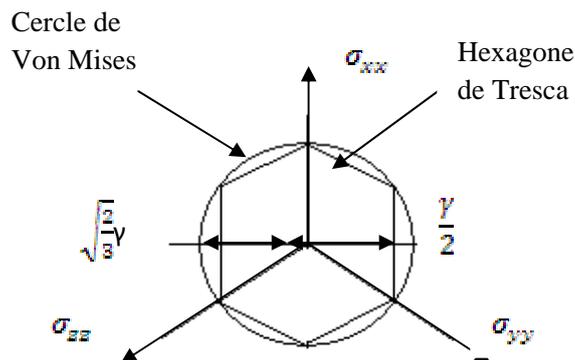


Fig. 18. Représentation des critères de Tresca et de Von Mises dans le repère de contraintes principale.

6.3. Critère de Rankine

Le critère de Rankine énonce simplement que pour rester dans le domaine élastique, aucune contrainte principale ne doit dépasser la limite élastique :

$$\max (|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) \leq Re.$$

Dans le cas de contraintes planes, la frontière dessine un carré dans le plan (σ_1, σ_2) .

6.4. Critères de limite élastique basés sur l'énergie

Au lieu de baser la limite élastique sur la notion de contrainte, on suppose que c'est l'énergie de déformation qui doit être limitée. Cette méthode prend donc en compte les valeurs des trois contraintes normales principales.

6.4.1. Critère de Beltrami

On suppose que la limite élastique est déterminée par une valeur limite de l'énergie de déformation par unité de volume. On fait un essai de traction pour déterminer l'énergie de déformation limite.

On remarque que dans un essai de traction uniaxial, le tenseur des contraintes est $\sigma = s u X u$. On trouve facilement que, dans cet essai, l'énergie de déformation par unité de volume est $\frac{s^2}{E}$.

Le critère s'écrit donc (en élasticité linéaire isotrope)

$$\frac{1}{2} \sigma \otimes \sigma \leq \frac{\sigma_e^2}{E}$$

Où σ_e est la contrainte de limite élastique trouvée dans l'essai de traction.

Soit encore, en utilisant la loi de comportement, et exprimant tout en fonction des contraintes principales :

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \leq \sigma_e^2$$

Ce critère a le défaut d'imposer que les limites en traction et en compression sont opposées. De plus, il est souvent en désaccord avec les confrontations expérimentales.

CHAPITRE V

MODELISATION DU CHAMP DES CONTRAINTES DU CONTACT CUIVRE/ACIER ET CUIVRE/FILM D'OXYDE/ACIER

Lorsque deux surfaces sont mises en contact, des sollicitations mécaniques sont imposées en surface et en subsurface et peuvent donner lieu à des dégradations par fatigue. Afin d'évaluer l'usure ou plus judicieusement les dégradations telles que la formation des débris, l'amorçage et la propagation des fissures dans le contact, il est important d'évaluer le type et l'amplitude des contraintes mécaniques imposées. La formulation des contraintes de contact est une approche analytique simple pour des sollicitations élastiques des matériaux massifs et pour des géométries de contacts relativement simples. Dans ce chapitre on va s'intéresser également à la formulation et l'analyse de la distribution des contraintes en déformation élastique dans le revêtement fin (film d'oxyde) en contact statique ou dynamique.

Nous considérons les formulations d'Hertz comme méthode de calcul dans le domaine de l'élasticité linéaire des corps homogènes, ainsi que les hypothèses spécifiques au problème des massifs semi-infini. Hertz a montré que lorsque deux corps sphériques sont en contact sous chargement normal, l'aire de contact est un cercle de rayon(a) très petit devant les rayons de courbures des corps en contact. Dans le cas d'un contact cylindre/plan, le chargement est linéique (charge par unité de longueur L) et est appliqué sur un massif semi-infini. Le problème se résume à l'étude d'un contact bidimensionnel sans concertation de contraintes aux bords. En réalité la longueur finie du cylindre induit une concentration des contraintes aux bords que nous discuterons par la suite.

1. MODELISATION

1.1. Distribution des contraintes du contact dynamique cylindre-cylindre de longueur infini

L'investigation de la distribution des contraintes dans les frotteurs et considérée comme l'un des problèmes importants de la tribologie, du fait qu'au voisinage de la surface du contact,

des endommagements importants sont observés en surface par usure ou en subsurface par fissure et par fatigue

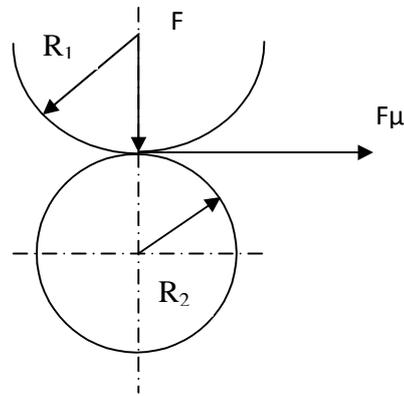


Fig. 1. Contact dynamique cylindre - cylindre.

Lors d'un glissement relatif, sous l'effet d'une force tangentielle de frottement $F_T = \mu F$, la contrainte tangentielle de glissement induite dans le contact en surface de contact est $\tau_{XZ} = \mu P$ où P est la pression de contact.

Considérons le cas de deux corps cylindriques élastiques en contact de rayons R_1 et R_2 figure 1 dont l'un est soumis à l'action de deux force extérieures (force normale par unité de longueur F et force tangentielle μF).

Tout d'abord (annexe) on peut expliciter les équations d'équilibre et de compatibilité du contact.

1.1.1 Equations différentielles de l'équilibre et les conditions de compatibilité

Un élément de surface sollicité par les contraintes σ_{XX} , σ_{ZZ} et τ_{XZ} est en équilibre si seulement si :

$$\frac{\partial \sigma_{XX}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{XZ}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{XZ}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{ZZ}}{\partial z} = 0 \quad (V-1)$$

La compatibilité des déformations avec le champ des contraintes conduit à la relation de Laplace suivant :

$$\Delta(\sigma_{XX} + \sigma_{ZZ}) = 0 \quad (V-2)$$

Où σ_{XX} , σ_{ZZ} sont les contraintes normales dans les directions normales X , Z et τ_{XZ} la contrainte tangentielle.

1.1.2 Les conditions aux limites

Les conditions aux limites imposées sur le contact pour une distribution elliptique de la charge sur un contact semi-infini sont les suivantes (Figure 2(b)).

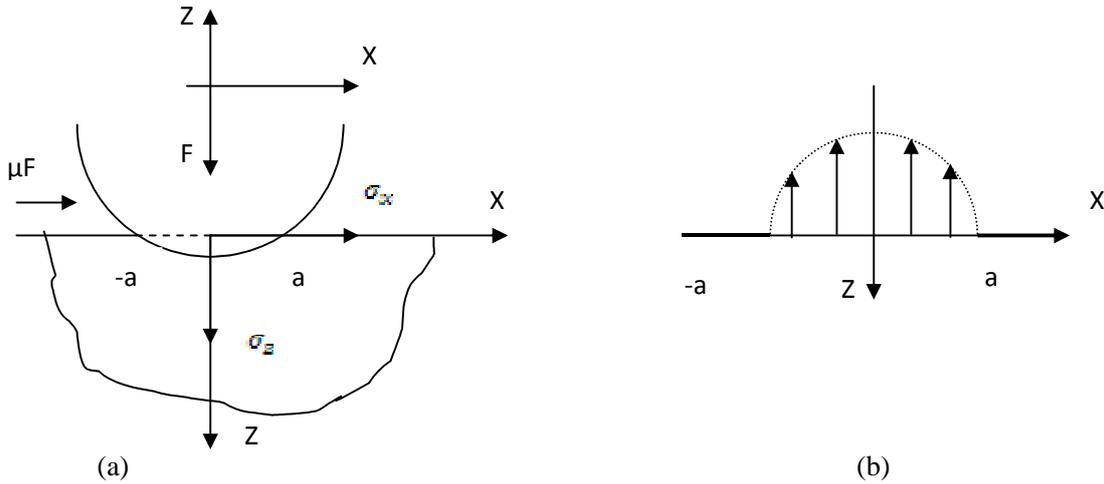


Fig. 2. Cas d'un solide semi-infini

(a) Contact cylindre/espace semi-infini. (b) Distribution elliptique de la charge de contact.

Dans la zone de contact $[-a, a]$ à $Z=0$ où a est la demi largeur de contact on a : $\int_{-a}^{+a} \sigma_{zz} dx = -F$, force appliquée par unité de longueur et $\tau_{xz} = \mu\sigma_z(x, z)$.

En dehors de la zone de contact en surface, la contrainte σ_{zz} est nulle pour $|x| > a$ à $Z = 0$

$$\sigma_{zz} = 0 \quad (V-3)$$

Les conditions s'annulent dans le matériau, loin de la zone de contact

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \rightarrow 0 \\ \sigma_{zz} \rightarrow 0 \end{cases} \text{ Quand } \text{Im } z > 0. \quad (V-4)$$

Les solutions de l'équation de Laplace (V-2) sont obtenues à l'aide des fonctions holomorphes :

Soit $\Gamma(Y) = \phi(Y) + i\Psi(Y)$ une fonction holomorphe de la variable complexe $Y = x+i z$ (annexe), dont les partie, fonction imaginaire Ψ et fonction réelle ϕ vérifient l'équation de Laplace (V.2), $\Gamma(Y)$ et une fonction dérivable dont les dérivées partielles du premier ordre par rapport à X et Z existent et satisfont aux conditions de Cauchy Riemann :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \text{ et } \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (\text{V-5})$$

Les contraintes σ_{xx} , σ_{zz} et τ_{xz} dans l'un des corps du couple des matériaux pour le contact dynamique semi-infini cylindre/plan de coefficient de frottement μ sont données par les relations (V-6.V-7.V-8.V-9)

$$\sigma_{xx} = \phi + 2\mu\Psi - z \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \mu z \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (\text{V-6})$$

$$\sigma_{zz} = \phi + z \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \mu z \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (\text{V-7})$$

$$\tau_{xz} = \mu\phi - z \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \mu z \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (\text{V-8})$$

Les équations (V-6.V-7.V-8) vérifient les équations d'équilibre et de compatibilité (V-1.V-2).

1.1.3 Expression des fonctions $\phi(Y)$ et $\Psi(Y)$

$$\Gamma = \frac{-2F}{\pi\alpha^2} (\sqrt{\alpha^2 - Y^2} + iY) = \frac{-2F}{\pi\alpha^2} (\sqrt{\alpha^2 - x^2 + z^2 - 2ixz} + ix - z) \quad (\text{V-9})$$

A $Z = 0$ l'équation (V-9) devient : $\Gamma_{Z=0} = \frac{-2F}{\pi\alpha^2} (\sqrt{\alpha^2 - x^2} + ix)$, par identification on obtient :

$$\phi_{Z=0} = \frac{-2F}{\pi\alpha^2} \sqrt{\alpha^2 - x^2} \quad (\text{V.10}) \text{ Et } \Psi_{Z=0} = \frac{-2F}{\pi\alpha^2} x \quad (\text{V-11})$$

Ainsi d'après l'équation (V-7) : $\sigma_{zzZ=0} = \phi_{Z=0} = \frac{-2F}{\pi\alpha^2} \sqrt{\alpha^2 - x^2}$

Ce qui conduit dans la zone de contact $[-a, a]$ pour $Z=0$,

$$\int_{-a}^{+a} \sigma_{zz} dx = \frac{-2F}{\pi\alpha^2} \int_{-a}^{+a} \sqrt{\alpha^2 - x^2} dx = -F \quad (\text{V-12})$$

En utilisant un développement asymptotique, l'expression (V-9) peut s'écrire :

$$\Gamma = \frac{-2F}{\pi\alpha^2} (\sqrt{\alpha^2 - Y^2} + iY) = \frac{-2F}{\pi\alpha^2} iY \left[1 - \left(1 - \frac{\alpha^2}{2Y^2} \right) + \dots \right]$$

Γ tend vers 0 si Y tend vers l'infini et vérifie donc les conditions aux limites (V-4).

1.1.4 Evolution de la demi-largeur de contact

Le problème est un problème de déformation plane. L'équation de la déformée dans les deux contacts s'écrit

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{1}{E_i} \{ (1 - \nu_i^2) \sigma_{zz} - \nu_i (1 - \nu_i) \sigma_{xx} \} = \frac{1 + \nu_i}{E_i} \left\{ (1 - 2\nu) \phi - 2\mu \sigma \Psi - z \frac{\partial \phi}{\partial z} - \mu z \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right\} \quad (\text{V-13})$$

Où ζ est le déplacement dans la direction Z

ν_i et E_i sont le coefficient du poisson et le module de Young du matériau, avec $i = 1, 2$.

En intégrant par rapport à z, en dérivant deux fois par rapport à x et en appliquant les équations de Cauchy Riemann (V-5), l'équation (V-13) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} = \frac{1 + \nu_i}{E_i} \left\{ 2(1 - \nu_i) \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \mu(1 - 2\nu_i) \frac{\partial \phi}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \mu z \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right\} \quad (\text{V-14})$$

Dans la zone de contact à $Z = 0$.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{-2F}{\pi \alpha^2} \text{ et } \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{-2F}{\pi \alpha^2} \frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} \quad (\text{V-15})$$

En remplaçant dans l'équation (V-14) on obtient :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = \frac{-2F(1-\nu_i)}{\pi \alpha^2 E_i} \left\{ 2(1 - \nu_i) - \mu(1 - 2\nu_i) \frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} \right\} \quad (\text{V-16})$$

Cette équation (V-16) concerne les deux matériaux en contact, des caractéristiques ν_1, E_1 et ν_2, E_2 :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = \frac{-2F(1-\nu_1)}{\pi \alpha^2 E_1} \left\{ 2(1 - \nu_1) - \mu(1 - 2\nu_1) \frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} \right\} \quad (\text{V-17})$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = \frac{-2F(1-\nu_2)}{\pi \alpha^2 E_2} \left\{ 2(1 - \nu_2) - \mu(1 - 2\nu_2) \frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} \right\} \quad (\text{V-18})$$

La somme des deux équations (V-17.V-18) est égale au rayon de courbure relative R_r , donnée par :

$$\frac{1}{R_r} = \frac{4F}{\pi \alpha^2} \left\{ \theta_1 + \theta_2 + \frac{\mu x}{2\sqrt{\alpha^2 - x^2}} \left[\frac{(1 + \nu_1)(1 - \nu_1)}{E_1} - \frac{(1 + \nu_2)(1 - \nu_2)}{E_2} \right] \right\} \quad (\text{V-19})$$

Où $\theta_i = (1 - \nu_i^2)/E_i$ avec $i=1, 2$.

La demi-largeur du contact statique a ($\mu = 0$) est donnée par la relation classique de Hertz :

$$\alpha = \sqrt{\frac{4FR_T(\theta_1 + \theta_2)}{\pi}} \quad (\text{V-20})$$

1.1.5. Contrainte en chaque point du contact statique

$$\text{Soit : } \phi = \frac{-2F}{\pi\alpha^2} [m - z]$$

$$\Psi = \frac{-2F}{\pi\alpha^2} [n - x] \quad (\text{V-21})$$

Des équations (V.9.V.21) on a les deux relations suivantes :

$$m = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ (a^2 - x^2 + z^2) + \sqrt{(a^2 - x^2 + z^2)^2 + 4(xz)^2} \right\}} \quad (\text{V-22})$$

$$n = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ -(a^2 - x^2 + z^2) + \sqrt{(a^2 - x^2 + z^2)^2 + 4(xz)^2} \right\}}, m \text{ et } n \in R \quad (\text{V-23})$$

Les dérivées premières des équations (V.22.V.23) sont :

$$\frac{\partial m}{\partial x} = \frac{-\partial n}{\partial z} = \frac{-x \frac{z^2 - m^2}{m^2 + n^2}}{m \frac{z^2 - m^2}{m^2 + n^2}} = \frac{z \frac{x^2 - n^2}{n^2 + m^2}}{n \frac{x^2 - n^2}{m^2 + n^2}} \quad (\text{V-24})$$

$$\frac{\partial m}{\partial z} = \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{z \frac{x^2 - m^2}{m^2 + n^2}}{m \frac{z^2 - m^2}{m^2 + n^2}} = \frac{x \frac{z^2 - n^2}{n^2 + m^2}}{n \frac{z^2 - n^2}{m^2 + n^2}} \quad (\text{V-25})$$

On obtient ainsi les équations des contraintes normales en chaque point du matériau :

$$\sigma_{xx} = \frac{-2F}{\pi\alpha^2} \left[m - 2z + 2\mu(x - n) + m \frac{z^2 - m^2}{m^2 + n^2} + \mu n \frac{x^2 - n^2}{m^2 + n^2} \right] \quad (\text{V-26})$$

$$\sigma_{zz} = \frac{-2F}{\pi\alpha^2} \left[m - m \frac{z^2 - n^2}{m^2 + n^2} + \mu n \frac{z^2 - m^2}{m^2 + n^2} \right] \quad (\text{V-27})$$

$$\tau_{xz} = \frac{-2F}{\pi\alpha^2} \left[2\mu(m - 2z) + n \frac{z^2 - m^2}{m^2 + n^2} + \mu m \frac{z^2 - n^2}{m^2 + n^2} \right] \quad (\text{V-28})$$

Pour un cylindre de longueur infini, le déplacement suivant l'axe Y étant nul, la déformation ϵ_y est nulle. En utilisant la loi de Hooke (déformations- contraintes) on peut expliciter l'expression de la contrainte normale dans la direction Y de la forme :

$$\sigma_{yy} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \quad (\text{V-29})$$

Des équations (V-26.V-27) on a :

$$\sigma_{yy} = \frac{-2F}{\pi a^2} [m - z + \mu(x - n)] \quad (V-30)$$

Le cas statique où il n'y a pas de frottement et un cas particulier de la méthode avec $\mu = 0$. On obtient ainsi :

$$\sigma_{xx} = \frac{2F}{\pi a^2} \left[m - 2z + m \frac{z^2 - n^2}{m^2 + n^2} \right] \quad (V-31)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{-2F}{\pi a^2} [m - z] \quad (V-32)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{-2F}{\pi a^2} \left[m - m \frac{z^2 - n^2}{m^2 + n^2} \right] \quad (V-33)$$

$$\tau_{xz} = \frac{2F}{\pi a^2} \left[n \frac{z^2 - m^2}{m^2 + n^2} \right] \quad (V-34)$$

REMARQUE : pour le cas d'un contact cylindrique/plan il suffit de considérer l'un de deux rayons des deux cylindres infinis.

Dans le cas d'un contact sphère-plan la contrainte exprimée par la relation (4) du chapitre (III) peut être modélisée comme suit

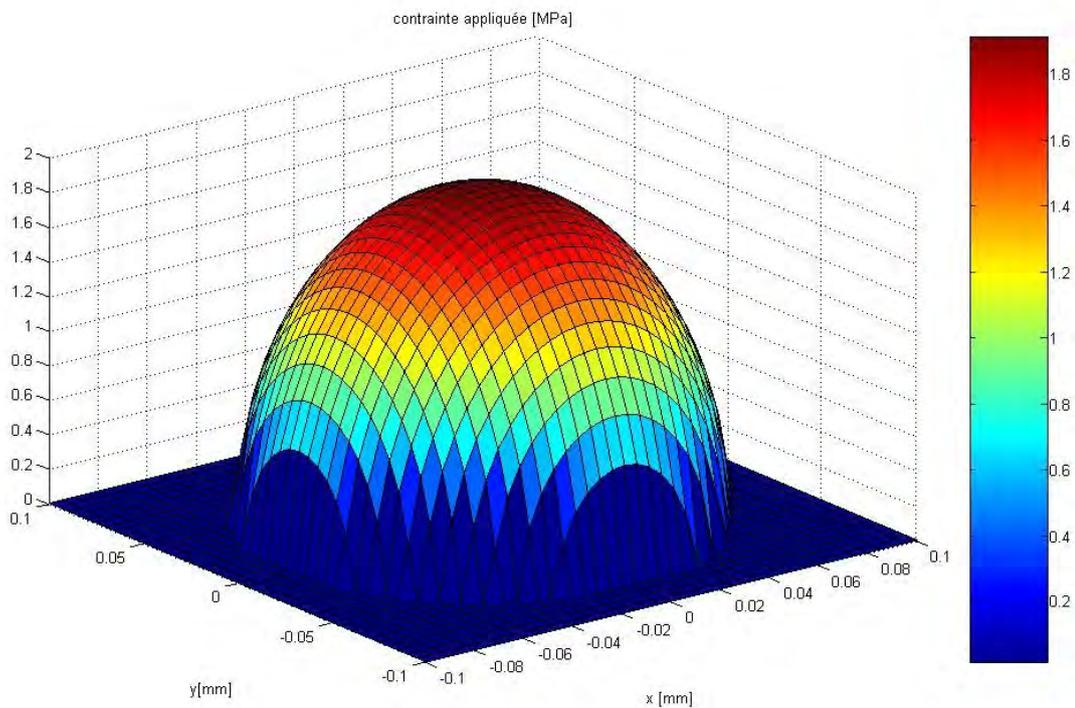


Fig. 3. Contact statique sphère – plan.

1.1.6. Expression de la déformation du contact

Dans la première partie nous avons établi le lien entre les forces appliquées et les contraintes qui en résultent sans prendre en compte des déformations induites dans le contact. Nous avons écrit les conditions d'équilibre d'un matériau chargé par une distribution de force ou une pression produite par le deuxième corps supposé quasi indéformable.

Dans un contact réel les deux corps en contact subissent des déformations. L'effort appliqué sur le contact induit une déformation globale qui est la somme des deux déformations ε_1 et ε_2 dans les deux corps.

Le calcul du rayon de contact (a) dépend de ε_1 et ε_2 , autrement dit, il dépend des caractéristiques mécaniques E_1, E_2, ν_1 et ν_2 des deux matériaux. Pour exprimer a en fonction de la charge et des caractéristiques des matériaux on doit exprimer la déformation globale du contact en fonction de la contrainte appliquée.

Le chargement étant linéique et la distribution de la pression est elliptique, et est donnée sous la forme suivante :

$$P_x = P_0 \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^{1/2} \quad \text{Et} \quad P_0 = 2 \frac{L_n}{\pi a} \quad (\text{V-35})$$

Dans le cas de contacts cylindre/plan, la demi-largeur a la surface du contact est exprimée par :

$$a = 2 \left(\frac{L_n R}{\pi E_{\text{eq}}} \right)^{1/2} \quad (\text{V-36})$$

Où R est le rayon du cylindre ; L_n , et la charge normale appliquée par unité de longueur et E_{eq} , module de Young équivalent (V.36)

$$\frac{1}{E_{\text{eq}}} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad \text{Où} \quad E_{\text{eq}} = \frac{E_1 E_2}{E_1(1-\nu_2^2) + E_2(1-\nu_1^2)} \quad (\text{V-37})$$

Avec E_1 et E_2 sont le module d'Young du cylindre et du plan respectivement. ν_1, ν_2 sont les coefficients de Poisson des deux matériaux P_0 est la pression maximale exercée sur l'axe du cylindre.

L'état des contraintes dans le repère (x, y, z) et donné par les relations (V-29.V-30.V-31).

2. RESULTATS DE LA MODELISATION

2.1. Contact statique cylindre - plan

L'étude de la distribution des contraintes d'Hertz porte sur le contact pion en cuivre-
disque en acier sous la charge appliquée $N = 63$ [N], la longueur L du cylindre est $L = 15$ [mm] et
le rayon du cylindre est $R = 10$ [mm] Figure 4.

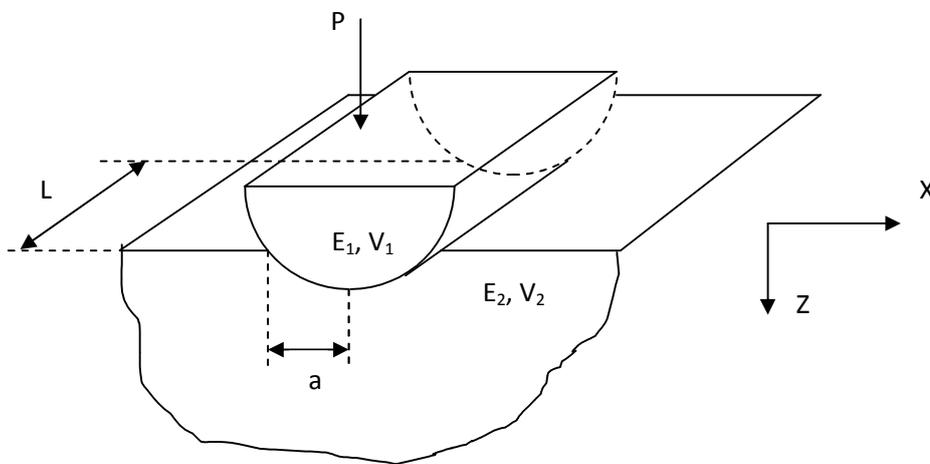


Fig. 4. Contact statique cylindre - plan.

a : la demi largeur du contact, E_1, E_2, ν_1 et ν_2 sont les modules de Young et les coefficients de Poisson du pion et du disque respectivement.

En déformation élastique du contact, le calcul des contraintes principales dans la matière le long de la profondeur perpendiculaire en O au plan de l'ellipse d'appui, montre que les courbes de $\sigma_{xx}(z)$, $\sigma_{yy}(z)$, $\sigma_{zz}(z)$ évoluent parallèlement entre elles Figure 5.

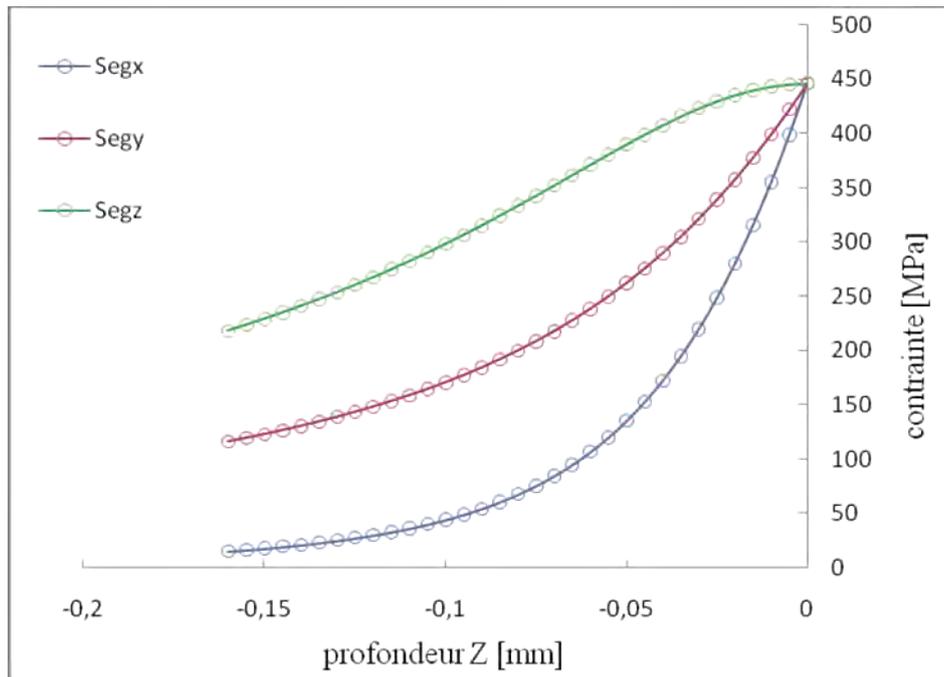


Fig. 5. Tracé des valeurs des contraintes principales en statique σ_{xS} , σ_{yS} , σ_{zS} à ($x = 0$) en fonction de la profondeur z dans un contact cylindre - plan.

Ainsi, la contrainte de cisaillement la plus grande $\tau_s(Z) = \frac{|\sigma_{iS} - \sigma_{jS}|}{2}$; $i = x, y, z$; $j = x, y, z$ obtenue dans le tricerclé de Mohr associé à σ_{xS} , σ_{yS} , σ_{zS} est (figure 6) :

- Pour $Z \geq 0$: $\tau_s(Z) = \frac{|\sigma_{xS} - \sigma_{zS}|}{2}$. Elle est située dans le plan (x, z) à $\pm 45^\circ$ par rapport à l'axe X d'après le module de Jhonson le cisaillement en fonction de (z) à $x = 0$ est exprimé par la relation suivante :

$$\tau = \frac{P_0}{a} \left(Z - \frac{Z^2}{(\alpha^2 + Z^2)^{3/2}} \right) \quad (V-38)$$

Où P_0 et a sont donnés par les expressions (V-35.V-36)

Le programme de calcul effectué sous Matlab permet l'étude de la variation de la contrainte de cisaillement en profondeur et à la verticale du point d'appui de la charge. La distribution des isocontraintes de cisaillement dans le contact statique cuivre-acier est reportée sur la figure 6.

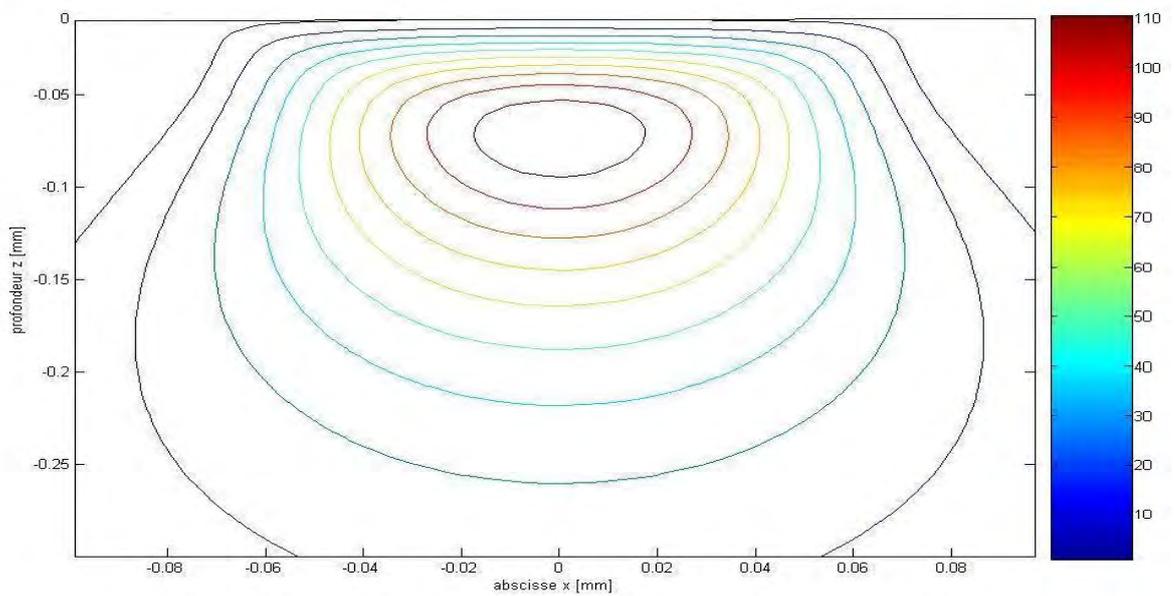


Fig. 6. Tracé des contours des isocontraintes de cisaillement τ dans le plan du contact statique cylindre - plan dans le cas $\mu = 0$.

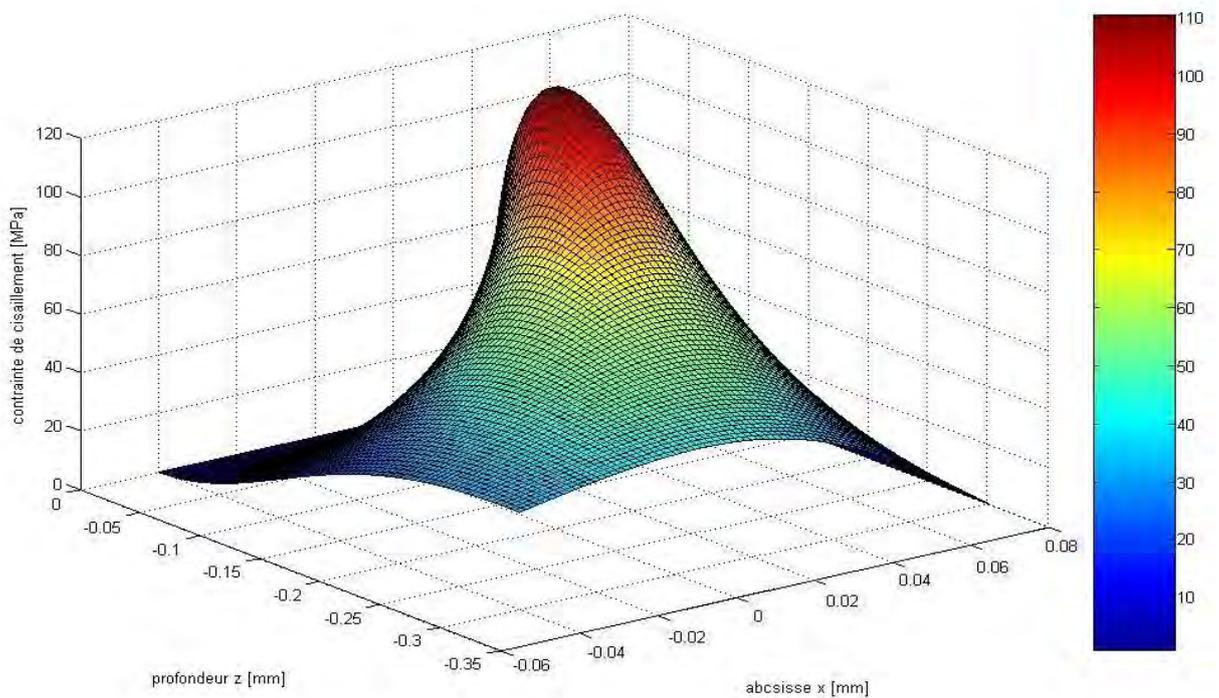


Fig. 7. Tracé de surface des isocontraintes de cisaillement τ dans le plan du contact statique cylindre - plan dans le cas $\mu = 0$.

Afin de déterminer la maximum de cisaillement, nous avons étudié la dérivée de $\tau_z(z)$ en fonction de z :

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{P_0}{a} \left[1 - \frac{\frac{2a^2}{z^3} + \frac{z}{z^3}}{2 \left(\frac{a^2}{z^4} + \frac{1}{z^2} \right)^{3/2}} \right] = \frac{P_0}{a} \left[1 - \frac{(2a^2 + z^2)/z^3}{\left(\frac{a^2 + z^2}{z^4} \right)^{3/2}} \right] = 0 \quad (V-39)$$

$$1 - \frac{(2a^2z + z^3)}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = 0 \Leftrightarrow (2a^2z + z^3) = (a^2 + z^2)^{3/2}$$

Soit $u = \frac{a^2}{z^2}$ on aura :

$$2u + 1 = (1 + u)^{3/2} \Leftrightarrow (2u - 1)^2 = (1 + u)^3$$

Après simplification on obtient :

$$u^3 - u^2 - u = 0 \Leftrightarrow u(u^2 - u - 1) = 0 \quad (V-40)$$

C'est une équation de second degré dont la solution : $u = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$

Si l'on réintègre dans u on aura finalement :

$z^2 = \frac{a^2}{u} \Leftrightarrow z = a \sqrt{\frac{1}{u}} \Leftrightarrow z \approx 0,78a$. En remplaçant z dans l'équation (V-38) on peut déduire le cisaillement maximal correspondant qui égal à $0,3 P_0$.

Le point maximal d'Hertz se trouve à une profondeur de $0,0542a$. A cette profondeur, le glissement relatif de la matière est accompagné de dégagement de chaleur qui provoquera la désagrégation de la matière et la formation de fissure internes.

Dans le cas d'un contact sphère - plan la distribution des contraintes est la suivante :

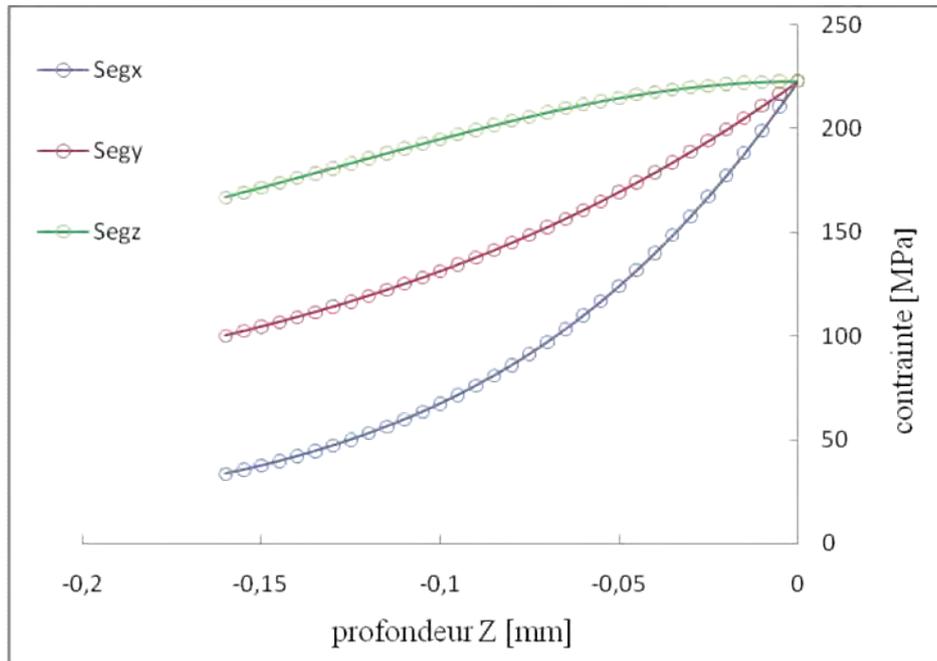


Fig. 8. Tracé des valeurs des contraintes principales en statique σ_{xS} , σ_{yS} , σ_{zS} à ($x = 0$) en fonction de la profondeur z dans un contact sphère - plan.

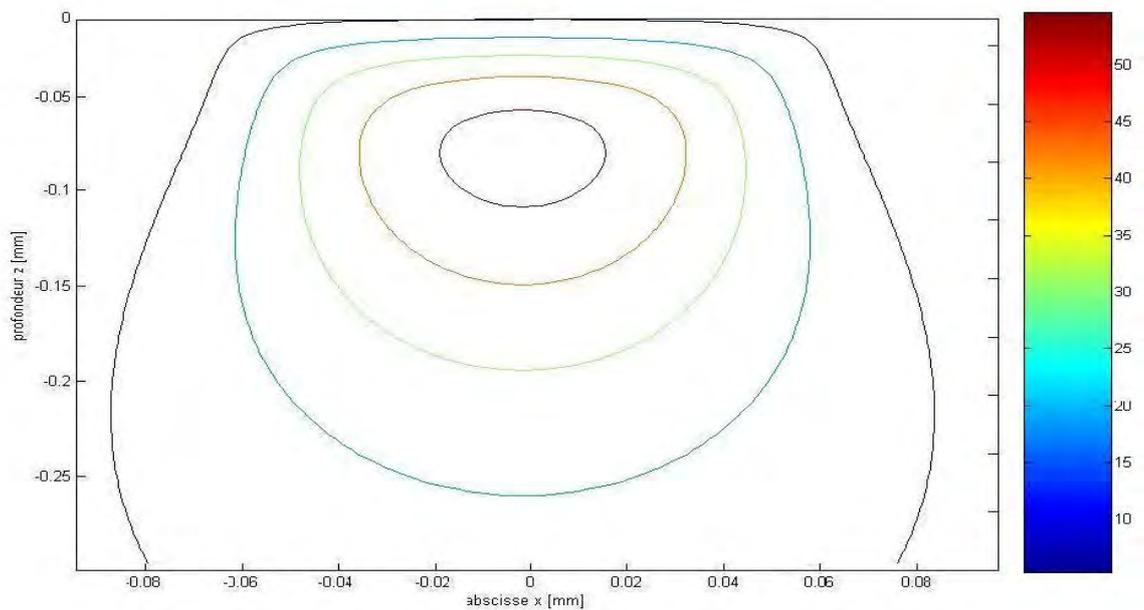


Fig. 9. Tracé des contours des isocontraintes de cisaillement τ dans le plan du contact statique sphère - plan dans le cas $\mu = 0$.

On remarque que dans le cas du contact statique sphère – plan les contraintes sont moins importantes et que la dégradation de la contrainte de cisaillement se fait plus rapidement d’une zone à une autre par rapport au contact statique cylindre – plan.

2.2. Contact dynamique cylindre - plan

L’exploitation des équations (V-26.V-27.V-28.V-30) pour contact cuivre/acier, sous la charge $N = 63$ [N] en glissement relatif avec un coefficient de frottement μ conduit aux résultats suivants.

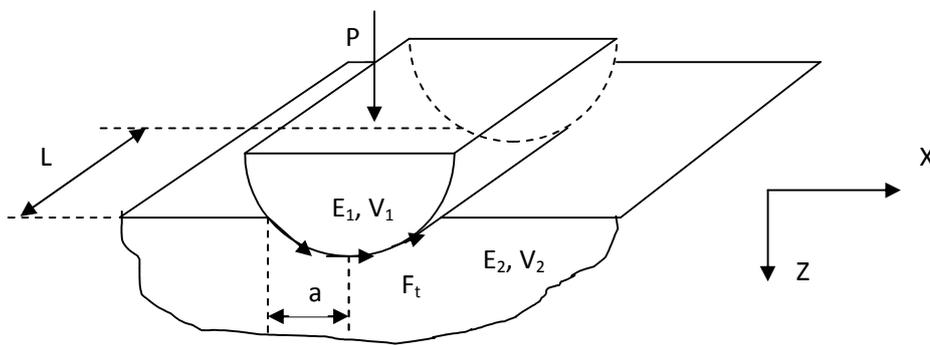
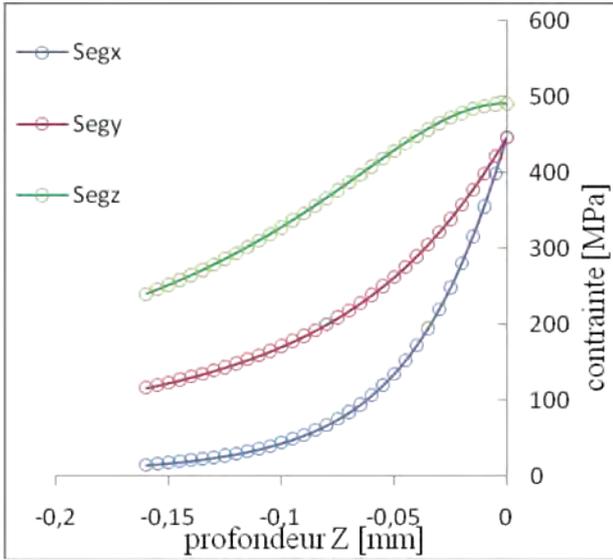
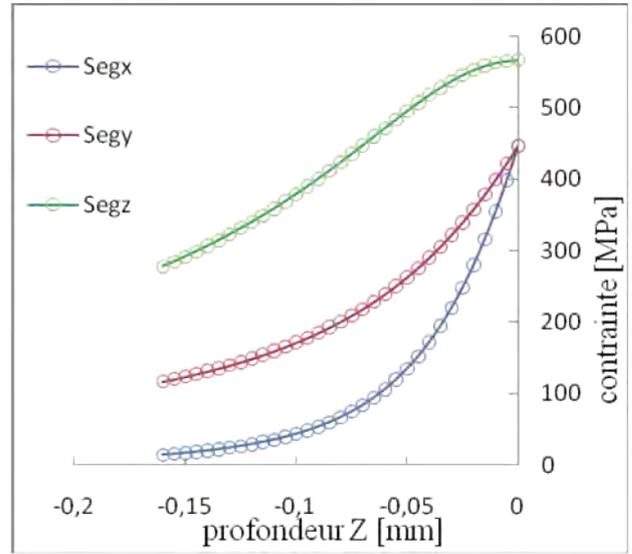


Fig. 10. Contact dynamique cylindre - plan.

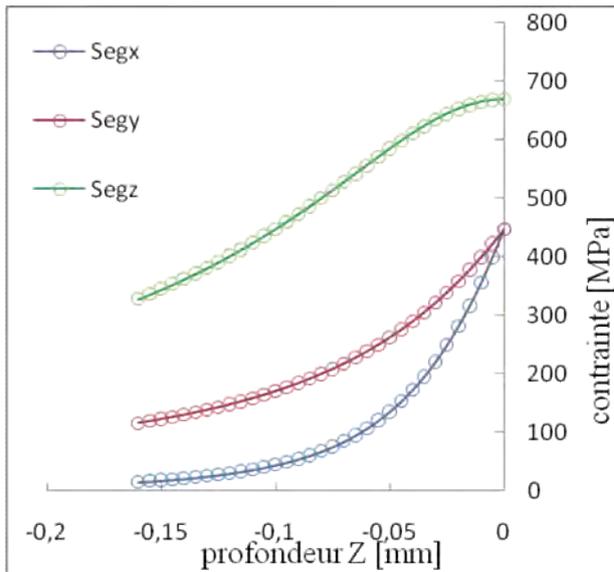
Le tracé des contraintes principales σ_{XD} , σ_{YD} , σ_{ZD} figure 11 à différente valeur du coefficient de frottement permet d’obtenir la distribution de la contrainte maximale de cisaillement de Tresca $\tau_z(Z) = \frac{|\sigma_{XD} - \sigma_{ZD}|}{2}$, déduite du tricerple de Mohr est égale à :



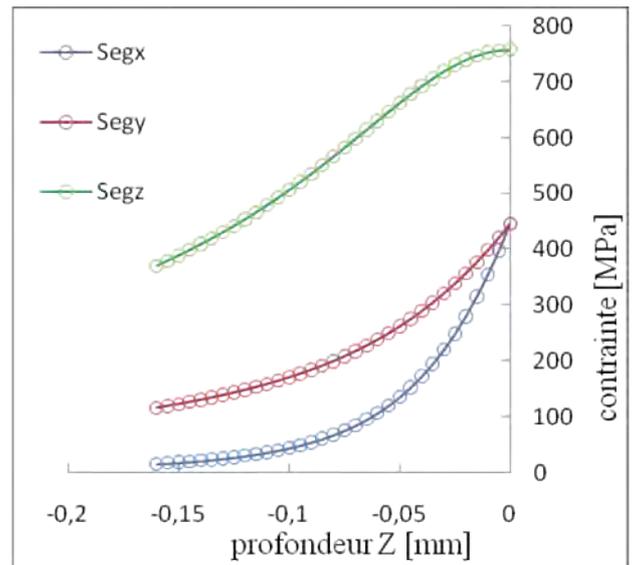
(a) $\mu = 0,1$



(b) $\mu = 0,3$



(c) $\mu = 0,5$



(d) $\mu = 0,7$

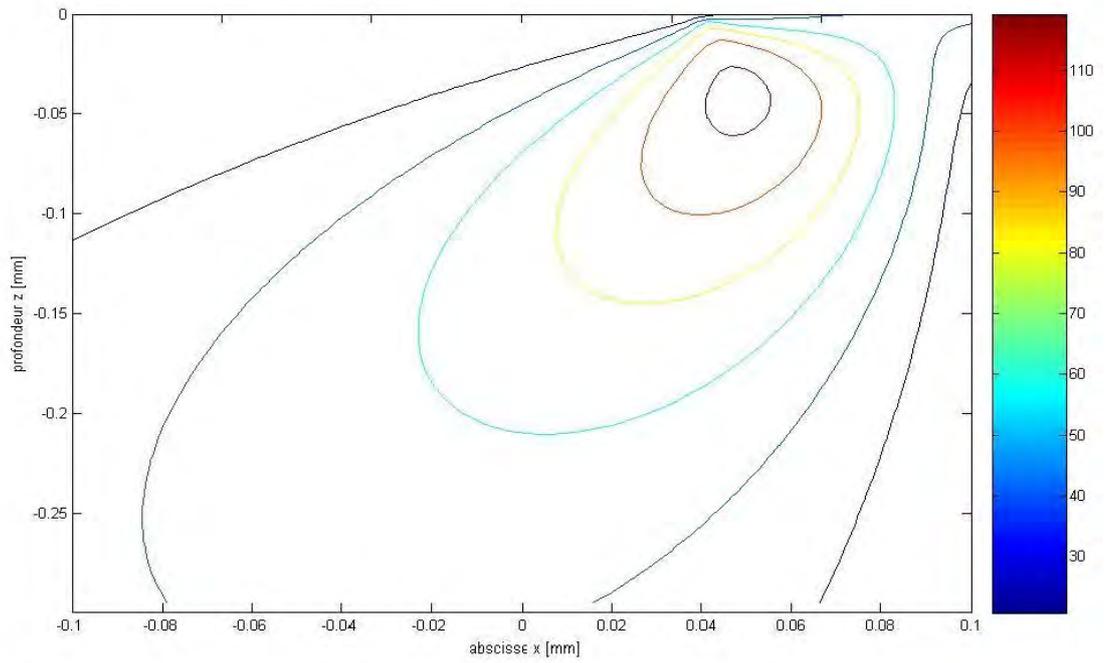
Fig. 11. Tracé des valeurs des contraintes principales en dynamique σ_{xD} , σ_{yD} , σ_{zD} à

$x = 0$ en fonction de la profondeur z dans un contact cylindre – plan, pour : (a) $\mu = 0,1$, (b) $\mu = 0,3$, (c) $\mu = 0,5$ et (d) $\mu = 0,7$.

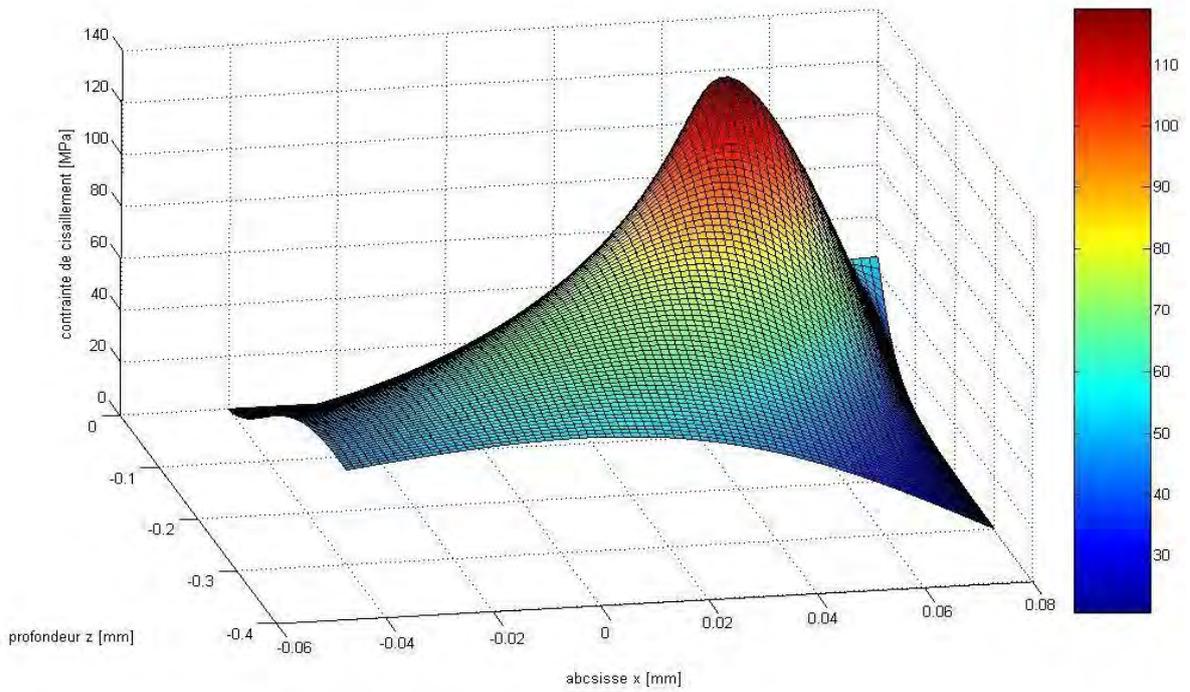
La figure 12 reporte les tracés des isocontraintes de cisaillement du contact dynamique cuivre-acier à différent coefficients de frottement $\mu = 0,1$, $\mu = 0,3$, $\mu = 0,5$ et $\mu = 0,7$. Le

coefficient de frottement est un paramètre qui a une influence considérable sur la distribution des contraintes dans le contact dynamique.

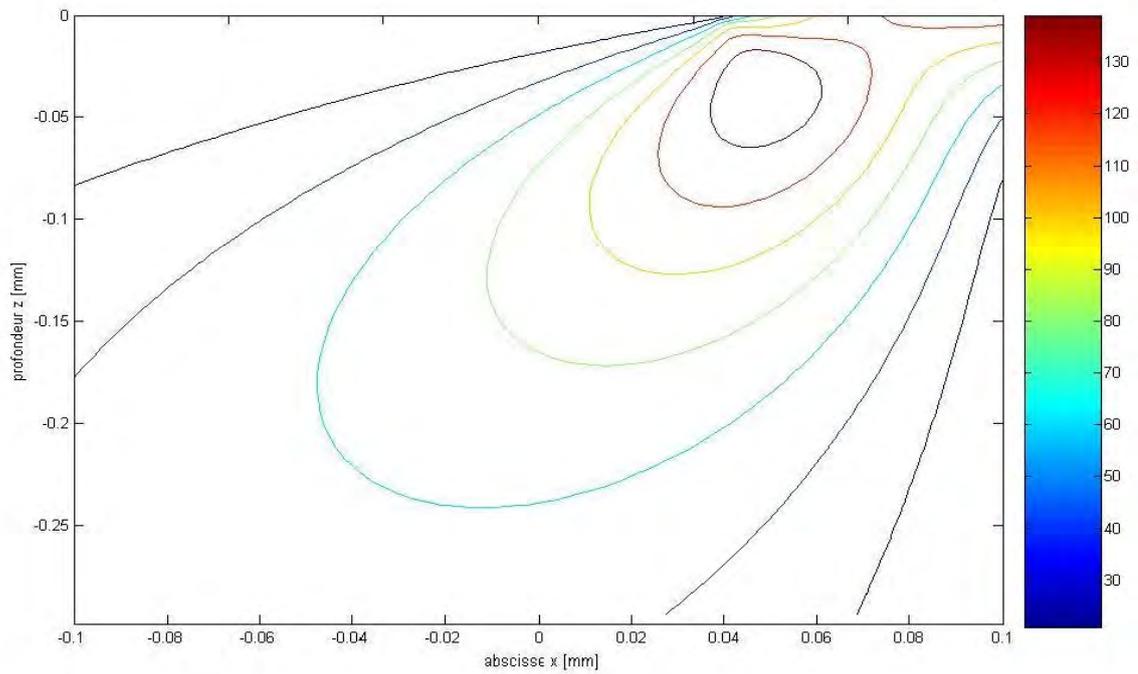
Pour des coefficients de frottement $\mu < 0,3$ le point maximal d'Hertz est situé en subsurface et se déplace vers la surface lorsque μ augmente. Pour des coefficients de frottement $\mu > 0,3$ le point maximal d'Hertz se trouve en surface de contact. Toutes les lignes des isocontraintes de cisaillement sont ouvertes sur la surface.



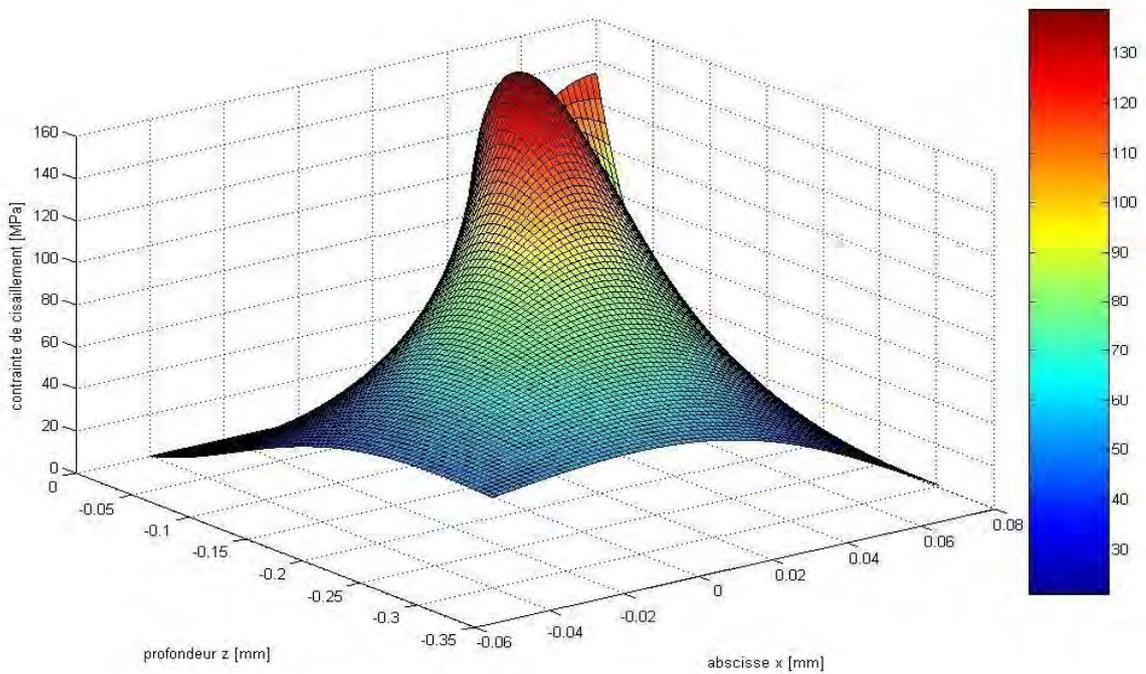
Contour des isocontraintes de cisaillement τ pour (a) $\mu = 0,1$.



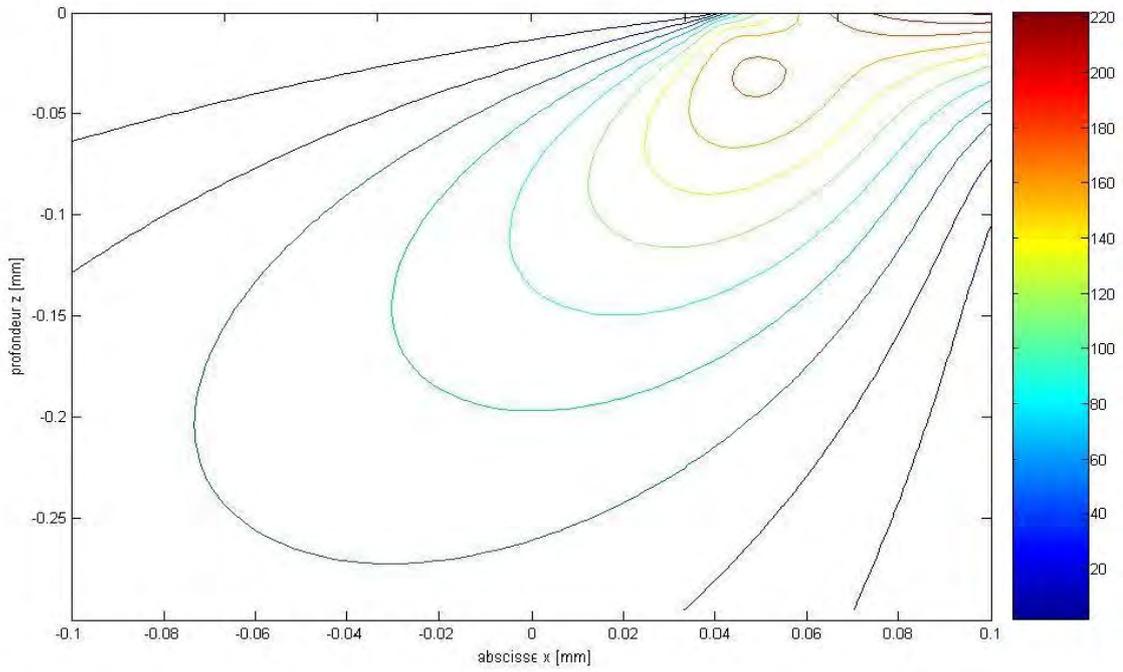
Surface des isocontraintes de cisaillement τ pour (a) $\mu = 0,1$.



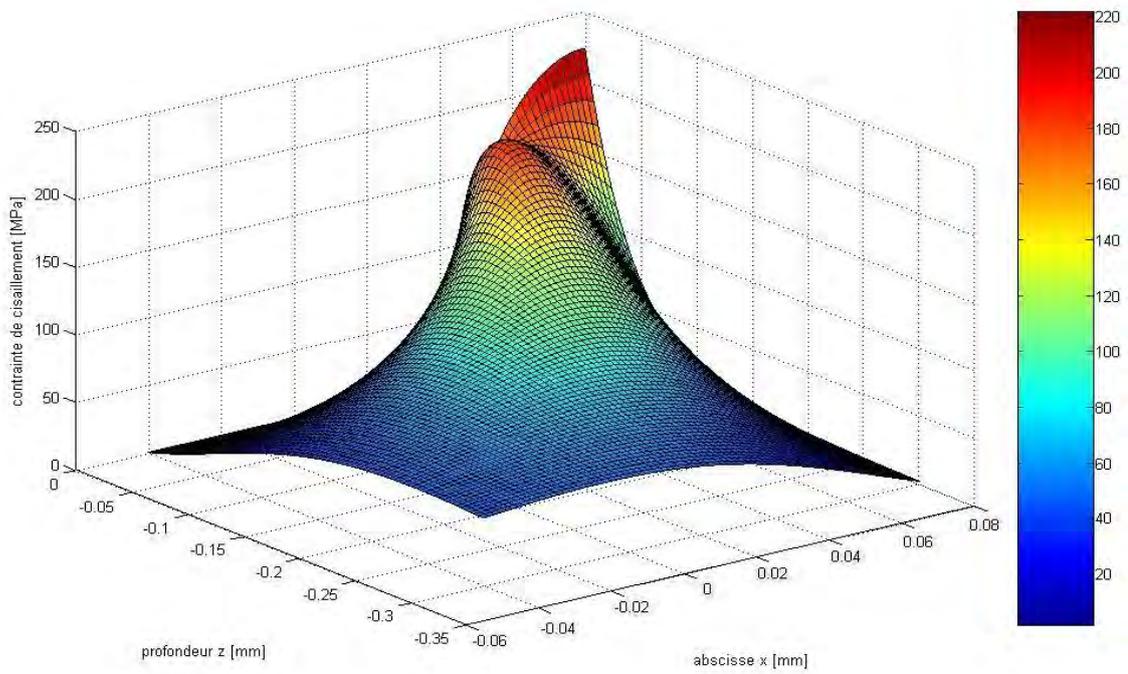
Contour des isocontraintes de cisaillement τ pour (b) $\mu = 0,3$.



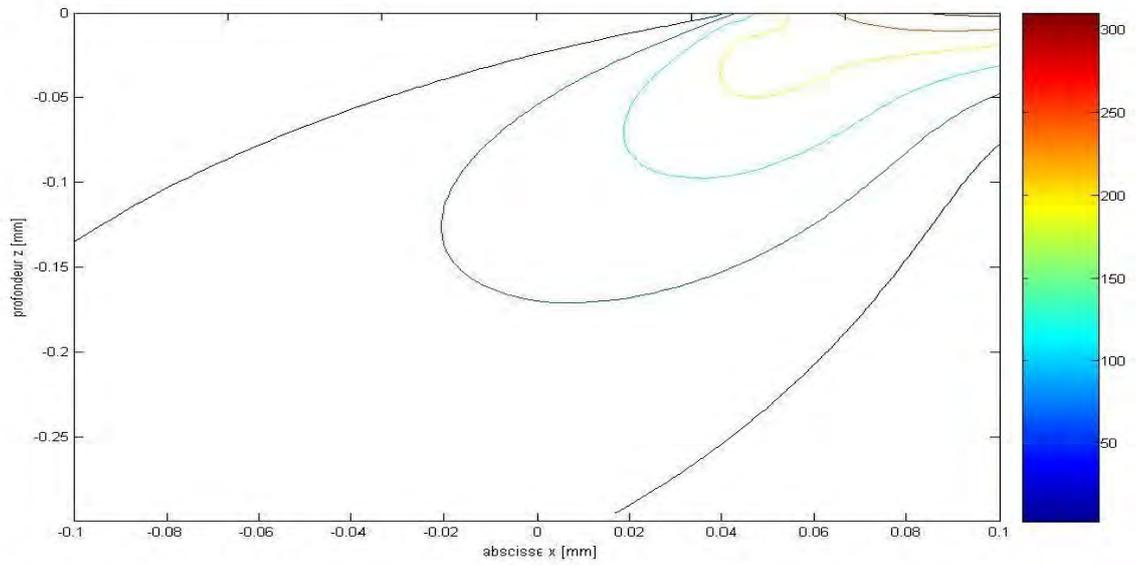
Surface des isocontraintes de cisaillement τ pour (b) $\mu = 0,3$.



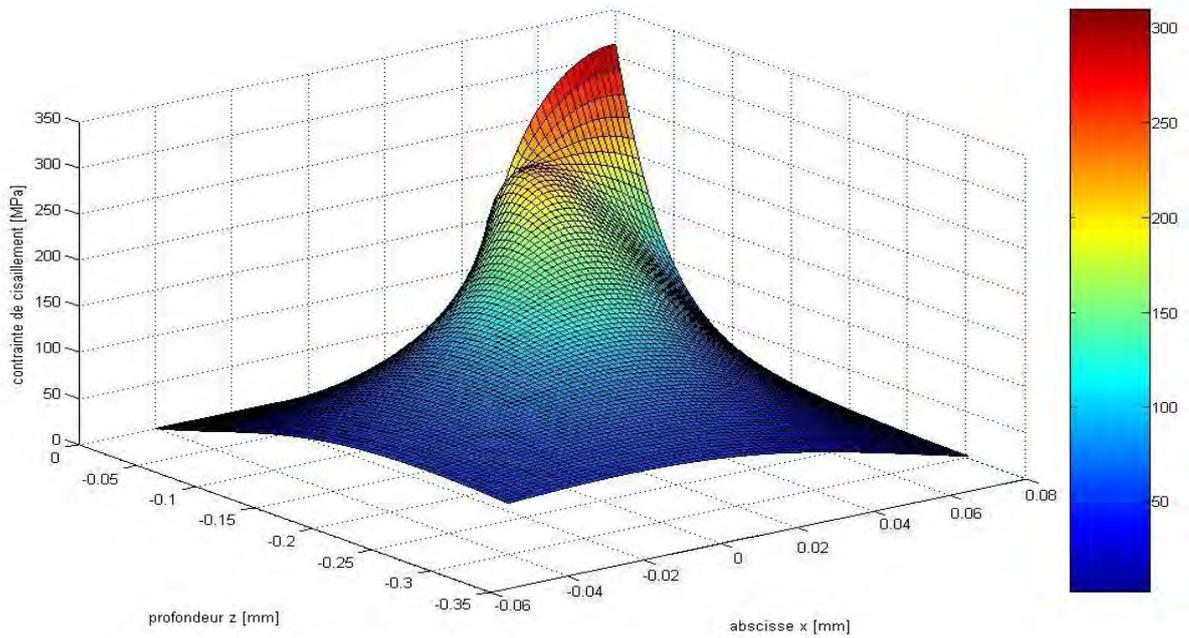
Contour des isocontraintes de cisaillement τ pour (c) $\mu = 0,5$.



Surface des isocontraintes de cisaillement τ pour (c) $\mu = 0,5$.



Contour des isocontraintes de cisaillement τ pour (d) $\mu = 0,7$.



Surface des isocontraintes de cisaillement τ pour (d) $\mu = 0,7$.

Fig. 12. Tracé des isocontraintes de cisaillement dans le plan de contact dynamique cuivre/acier à différents coefficients de frottement (μ) dans un contact cylindre – plan pour : (a) $\mu = 0,1$, (b) $\mu = 0,3$, (c) $\mu = 0,5$ et (d) $\mu = 0,7$.

La contrainte maximale se déplace en fonction du coefficient de frottement μ sur l'axe X. Ce maximum se déplace vers l'avant du contact lorsque μ augmente.

Le point maximum de τ_z se déplace de la profondeur $Z = 0,78a$ vers la surface de contact. Pour μ supérieur à 0,3 la contrainte maximale de cisaillement se trouve en surface.

La contrainte maximale de cisaillement τ augmente avec le coefficient de frottement μ .

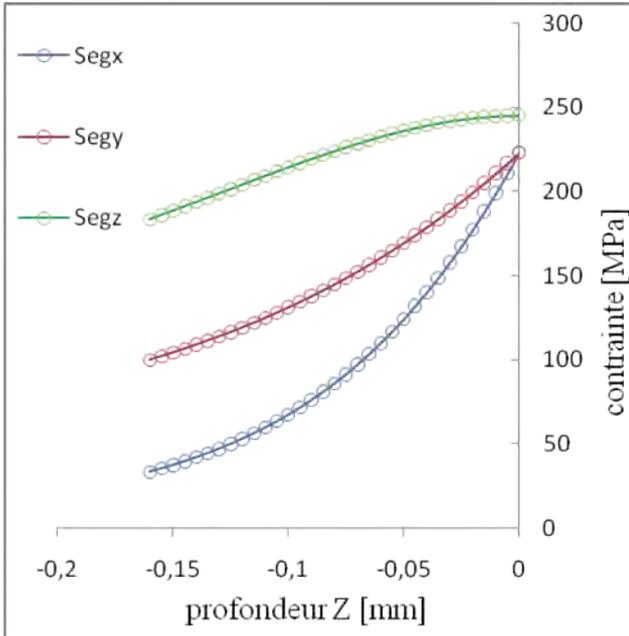
Il faut noter que dans le cas statique, le point d'Hertz n'est pas la seule zone critique en cisaillement maximal. Les plans parallèles à la surface de contact sont soumis à des cisaillements τ_{xz} induits par la pression de contact qui présentent des extremums à la profondeur $z = 0,5a$. Le point de coordonnées A (+0,87a ; -0,5a) et soumis au cisaillement $\tau_{Axz} = + 0,25P_{max}$ et le point B de coordonnées B (- 0,87a ; - 0,5a) est aussi soumis au cisaillement $\tau_{Bxz} = + 0,25P_{max}$

En dynamique les contraintes de cisaillement totales respectives aux points A et B sont :

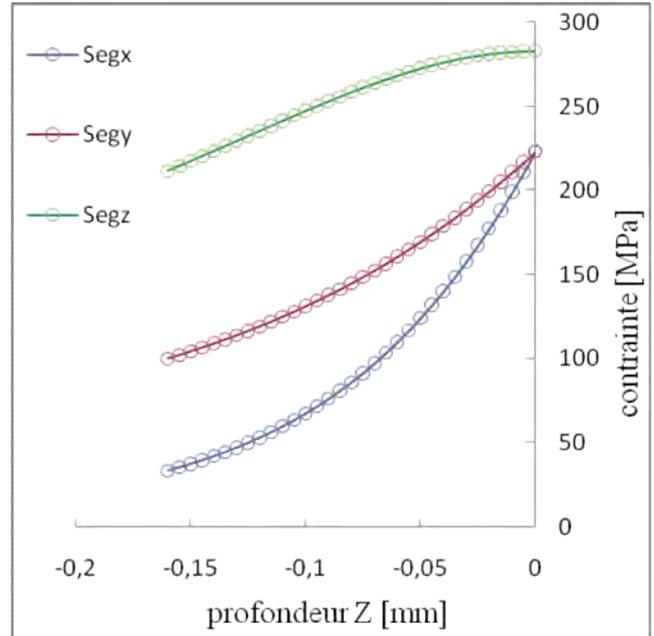
$$\tau_A = (+0,25 - 0,36\mu) P_{max} \text{ et } \tau_B = (- 0,25 - 0,36\mu) P_{max} .$$

Pour un contact cyclique de type pion/disque la variation totale de cisaillement cyclique dans le disque entre ces deux points A et B de 0,174a et $(\tau_A - \tau_B)$ et est indépendante du coefficient de frottement μ , $|\tau_A - \tau_B| = 0,5P_{max}$. Cette valeur est supérieure au cisaillement maximal $\tau_{max} = 0,3P_{max}$ au point d'Hertz. La zone de cisaillement alternative localisée en suburface à $Z = 0,5a$ constitue une zone de fissuration par fatigue.

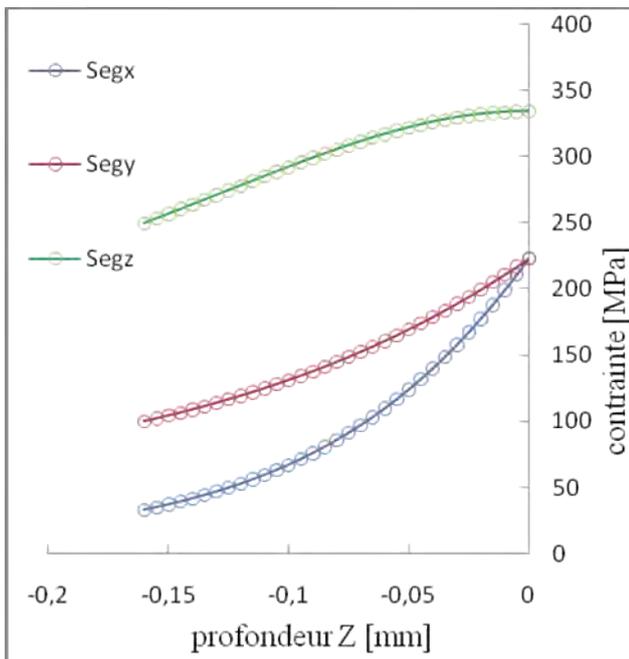
Dans le cas d'un contact dynamique sphère-plan et pour différents coefficients de frottement la distribution des contraintes est la suivante :



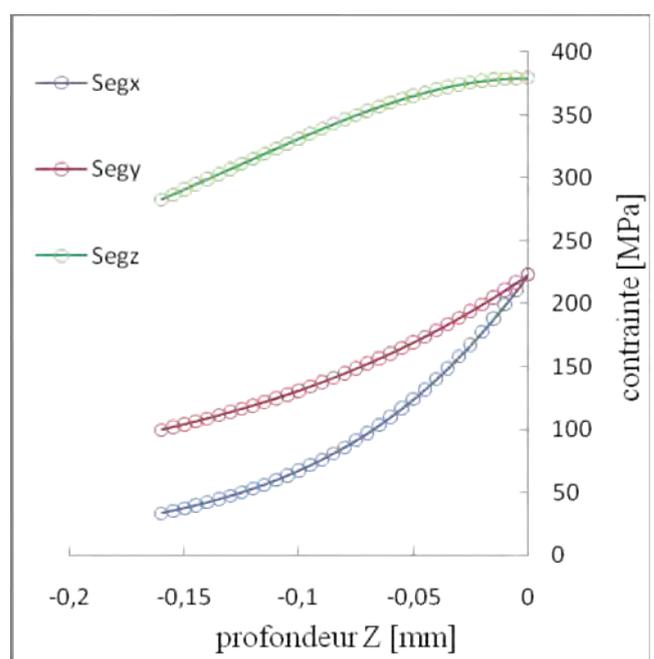
(a) $\mu = 0,1$



(b) $\mu = 0,3$

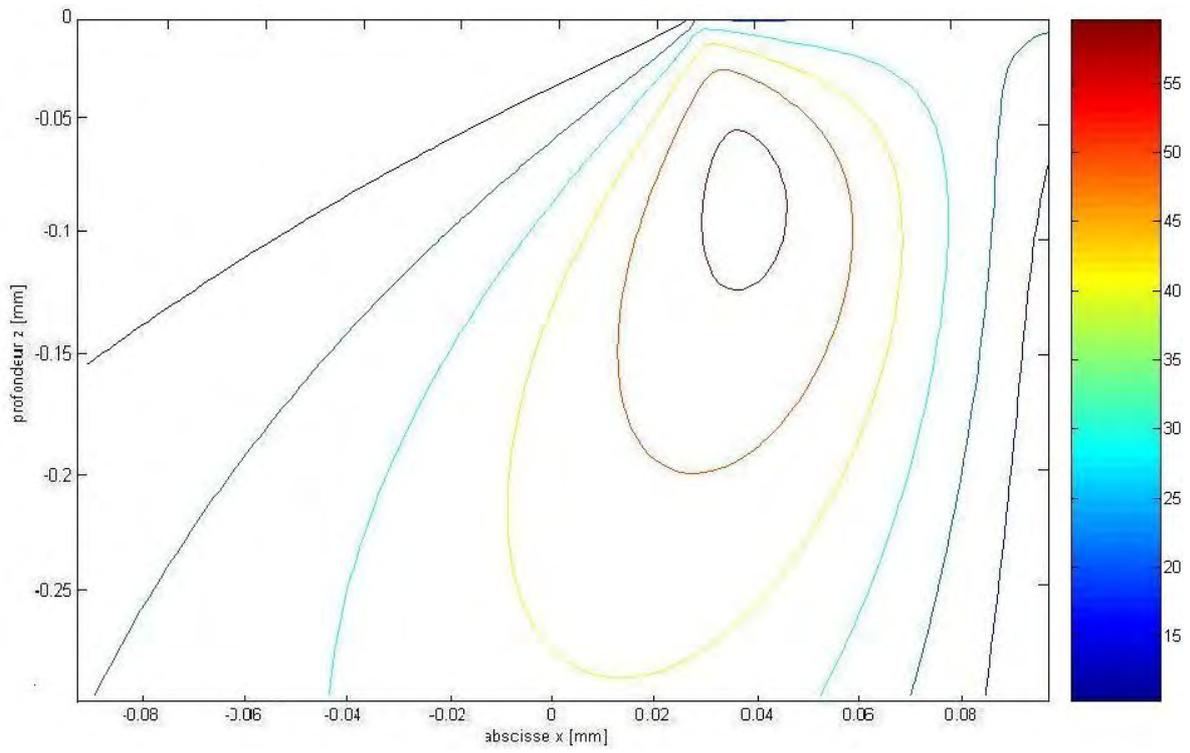


(c) $\mu = 0,5$

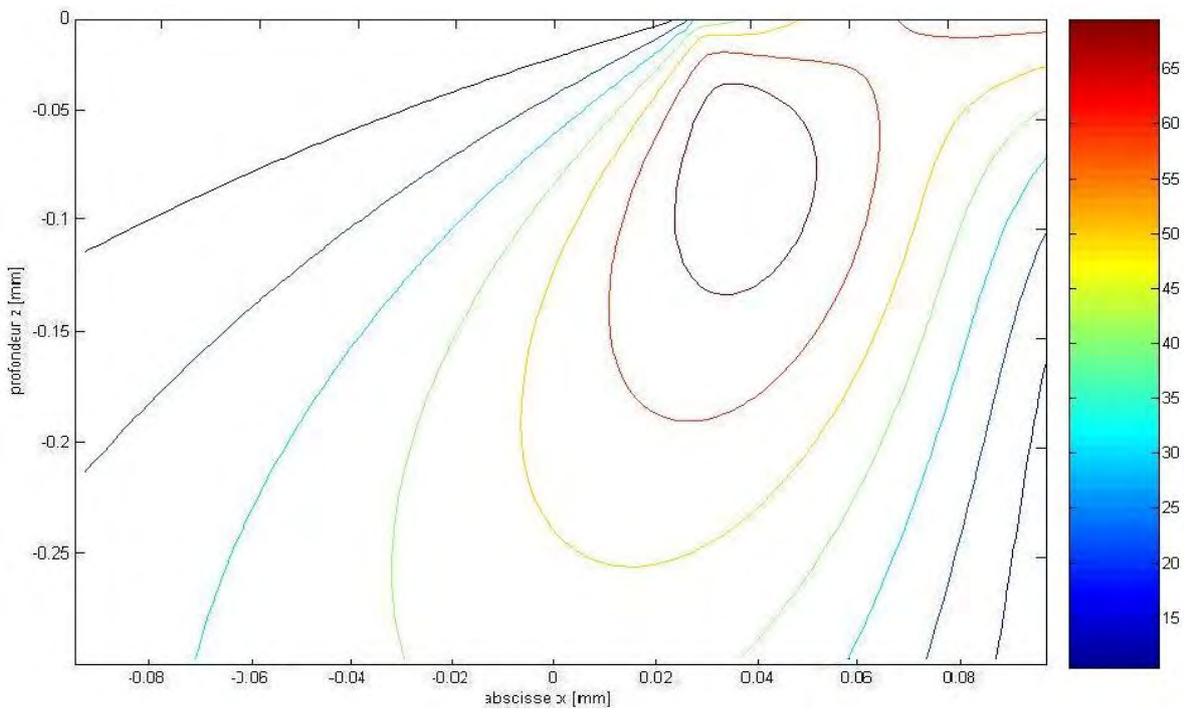


(d) $\mu = 0,7$

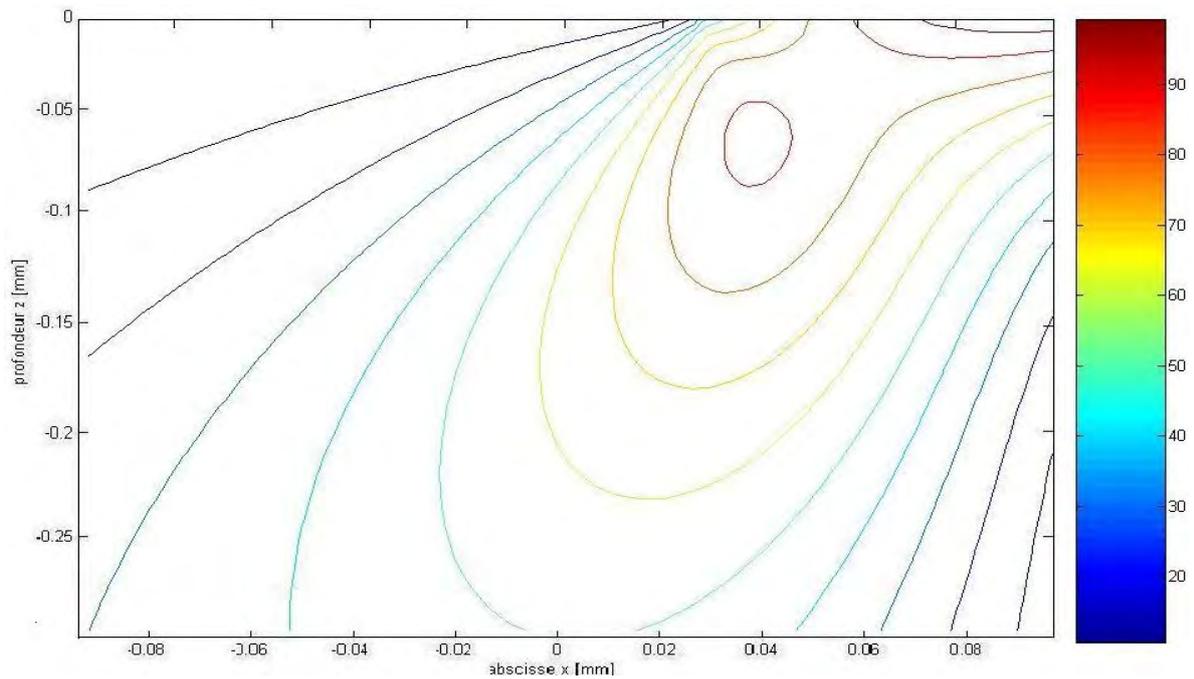
Fig. 13. Tracé des valeurs des contraintes principales en dynamique $\sigma_{XD}, \sigma_{YD}, \sigma_{ZD}$ à $x = 0$ en fonction de la profondeur z dans un contact sphère - plan pour : (a) $\mu = 0,1$, (b) $\mu = 0,3$, (c) $\mu = 0,5$ et (d) $\mu = 0,7$.



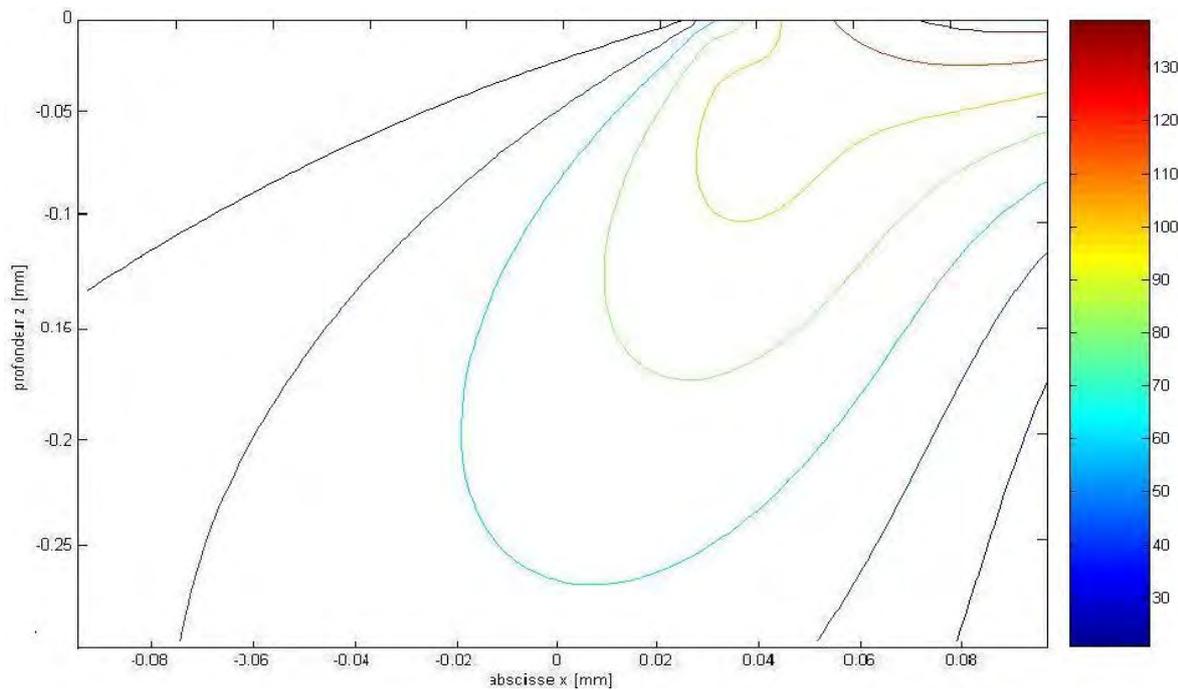
(a) $\mu = 0,1$.



(b) $\mu = 0,3$.



(c) $\mu = 0,5$.



(d) $\mu = 0,7$.

Fig. 14. Tracé des isocontraintes de cisaillement dans le plan de contact dynamique cuivre/acier à différents coefficients de frottement (μ) dans un contact sphère – plan pour : (a) $\mu = 0,1$, (b) $\mu = 0,3$, (c) $\mu = 0,5$ et (d) $\mu = 0,7$.

2. 3. Etude de la profondeur en fonction de la charge appliquée

On a calculé la variation de la profondeur (enfoncement) grâce aux relations présentées dans les modèles de contact et on les a comparées à des résultats expérimentaux. Les résultats obtenus sont les suivants :

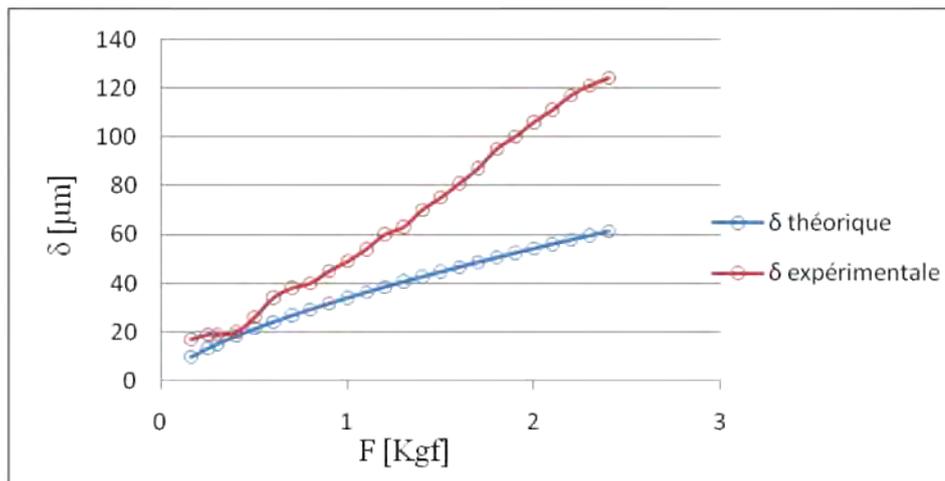


Fig. 15. Variation de la profondeur en fonction de la charge appliquée.

D'après la figure 13 on a calculé le rapport $\frac{\delta_{the}-\delta_{exp}}{\delta_{the}}$ et on a pu tirer les remarques suivantes :

- quand $F \in [0 - 0,5]$, on remarque que le rapport diminue pour atteindre presque 0 pour $F = 0,4$.
- quand $F > 0,5$, on remarque une augmentation du rapport de 0 à -1,018 pour $F = 2,4$.

3. MODELISATION DU CONTACT CUIVRE /COUCHE D'OXYDE/ACIER

L'étude du champ des contraintes dans un contact dynamique entre les corps 1 et 2 semi-infini se ramène après quelques révolutions de rotation à un contact corps 1/film/corps2 car il y a toujours des modifications de surfaces. L'échauffement du contact, la création de surface fraîche par usure abrasive, le durcissement et la fatigue induits par les contraintes cycliques du contact conduisent à la création de film fin en surface tel que les films d'oxydes ou les films fins en surface par durcissement et modification des propriétés mécaniques.

Dans cette partie nous présentons les différentes caractéristiques du contact des revêtements ductiles et fragiles et modéliser les champs des contraintes en surface et en subsurface. On donne

par conséquent une analyse exacte de la distribution des contraintes dans un demi-espace élastique linéaire composé d'une ou deux couche liées à un autre demi-espace homogène. Pour résoudre ce problème on s'est intéressé a plusieurs méthodes de calcul, notons celle d' (O'Suullivan, 1988 et Gupta, 1974). Les auteurs ont considéré le cas d'une pression elliptique sur une surface circulaire et le cas demi espace à couche échancrée par un cône circulaire. Pour notre étude on suppose le cas d'un contact cylindrique sur une couche dans un demi-espace élastique, soit la Figure 16 suivante :

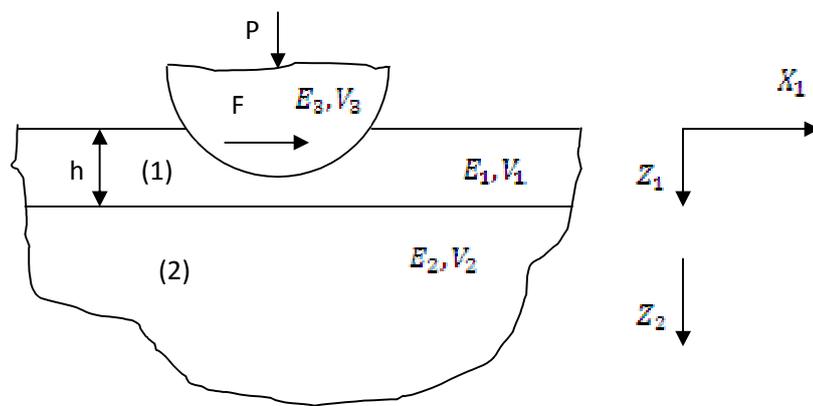


Fig. 16. Contact dynamique cylindre - couche.

3.1. Les équations d'équilibres et de compatibilités dans le revêtement/substrat

L'équation biharmonique bidimensionnelle obtenue pour un contact massif/massif reste encore valable pour un matériau revêtu avec les conditions aux limites suivantes :

$$\text{En surface à } Z = 0 \text{ dans le revêtement, } \begin{cases} \sigma_{zz}^{(1)} = -P \\ \tau_{zx}^{(1)} = \mu P \end{cases}, \text{ pour } -a < |x| < a \quad \begin{cases} \sigma_{zz}^{(1)} = 0 \\ \tau_{zx}^{(1)} = 0 \end{cases} \text{ pour } |x| > a$$

A l'interface revêtement/substrat il y a égalité des contraintes normales et tangentielles,

$$\begin{cases} \sigma_{zz}^{(1)} \text{ à } z=h = \sigma_{zz}^{(2)} \text{ à } z=0 \\ \tau_{zx}^{(1)} \text{ à } z=h = \tau_{zx}^{(2)} \text{ à } z=0 \end{cases}$$

La résolution de l'équation biharmonique $\nabla^4(\varphi)$ obtenue à l'aide de fonction transformée de Fourier (annexe) conduit aux contraintes $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ et aux déplacements u et v :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x)^2} = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 G \exp(-i\omega x) d\omega \quad (\text{V-41})$$

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial z)^2} = \frac{+1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 G}{(\partial z)^2} \exp(-i\omega x) d\omega \quad (\text{V-42})$$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = \frac{+1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial z} \exp(-i\omega x) d\omega \quad (\text{V-43})$$

$$u = \frac{1-\nu^2}{2\pi E} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial^2 G}{(\partial x)^2} - \frac{2-\nu}{1-\nu} \omega^2 G \right] \exp(-i\omega x) d\omega \quad (\text{V-44})$$

$$v = \frac{1-\nu^2}{2\pi E} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial^2 G}{(\partial x)^2} - \frac{2-\nu}{1-\nu} \omega^2 G \right] \exp(-i\omega x) d\omega \quad (\text{V-45})$$

ω : est la variation de la transformée de Fourier ;

G : et la transformée de Fourier de la fonction d'Airy φ qui satisfait à la fonction biharmonique

$$\nabla^4 \varphi = 0 \text{ exprimée par : } G(\omega, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, z) \exp(i\omega x) dx$$

$$\text{Dont la transformée inverse est } \varphi(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega, z) \exp(i\omega x) d\omega$$

En dérivant deux fois les contraintes normales et de cisaillement (V-41, V-42, V-43) et en remplaçant dans l'équation biharmonique bidimensionnelle :

$$\Delta^2 \varphi = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^4 \varphi}{(\partial z)^4} + \frac{\partial^4 \varphi}{(\partial x)^4} + \frac{\partial^4 \varphi}{(\partial x)^2 (\partial z)^2} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{(\partial z)^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial z} = 0 \quad (\text{V-46})$$

On obtient l'équation différentielle linéaire de la fonction G :

$$\frac{\partial^4 G}{(\partial z)^4} - 2\omega^2 \frac{\partial^2 G}{(\partial z)^2} + \omega^4 G = 0 \quad (\text{V-47})$$

Equation différentielle du quatrième ordre à coefficients constant, dont l'équation caractéristique est : $r^4 - 2\omega^2 r^2 + \omega^4 = 0$.

$$\text{On pose } u = r^2 \text{ on a : } u^2 - 2\omega^2 u + \omega^4 = 0 \Leftrightarrow (u - \omega^2)^2 = 0 \Leftrightarrow u = \omega^2$$

D'où $r = \pm i|\omega|$

ω et $-\omega$ sont racines doubles de l'équation caractéristique, ainsi la solution est donnée sous la forme suivante :

$$G_i(\omega, z) = (A_i + B_i z) \exp(-|\omega|z) + (C_i + D_i z) \exp(|\omega|z) \quad (\text{V-48})$$

Où A_i, B_i, C_i et D_i sont des fonctions de ω avec $i = 1$ et 2 correspondant au revêtement et au substrat respectivement.

Huit équations sont obtenues $A_1, B_1, D_1, A_2, B_2, C_2$ et D_2 en inversant les équations (V-42, V-43, V-44, V-45) et en substituant G à partir de l'expression (V-48).

On sait que si Z est infini la contrainte normale σ_z et la contrainte tangentielle τ_{xz} sont nulles. En utilisant cette condition comme une troisième condition aux limites $C_2 = D_2 = 0$, ceci nous mène finalement à la résolution de six équations.

3.1.1. Etude du contact- statique à chargement unitaire

Pour un chargement unitaire du contact, nous supposons que la demi-largeur du contact est chargée par une pression uniforme d'amplitude $1/a$.

$$\sigma_{zz}^{(1)} = -P(x) \Leftrightarrow \sigma_x = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 G \exp(-t\omega x) d\omega = -P(x) \quad (V-49)$$

La transformation inverse de Fourier donne l'expression (V-50) suivante :

$$\omega^2 G = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \exp(-t\omega x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} \exp(-t\omega x) dx \quad (V-50)$$

La partie réelle de la fonction (V-50) est une fonction paire et continue, on a

$$\omega^2 G = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{a} \cos(\omega x) dx = \frac{2}{a} \frac{\sin(\omega a)}{\omega} \rightarrow 2 \text{ quand } a \text{ tend vers } 0 \quad (V-51)$$

Dans le revêtement ($0 < z < h$), la fonction G est donnée par $G_1(\omega, z)$:

$$G_1 = (A_1 + B_1 z) \exp(-|\omega|z) + (C_1 + D_1 z) \exp(|\omega|z) \quad (V-52)$$

$$\text{à } z = 0; G_1 = (A_1 + C_1) \quad (V-53)$$

$$\text{D'où } \omega^2 G = \omega^2 (A_1 + C_1) = 1 \quad (V-54)$$

La contrainte tangentielle à la surface du revêtement étant nulle :

$$\frac{\partial G_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = B_1 - |\omega|A_1 + |\omega|C_1 + D_1 = 0 \quad (V-55)$$

Soit G_2 la fonction dans le substrat, les conditions de continuité à l'interface revêtement/substrat conduisent à :

$$G_1|_{z=h} = G_1|_{z=h} \Leftrightarrow (A_1 + B_1 h) \exp(-|\omega|h) + (C_1 + D_1 h) \exp(|\omega|z) = A_2 \quad (\text{V-56})$$

$$\frac{dG_1}{dz}|_{z=h} = \frac{dG_1}{dz}|_{z=0}$$

$$B_1(1 - |\omega|h) \exp(-|\omega|h) - |\omega|A_1 + |\omega|C_1 + D_1(1 + |\omega|h) \exp(|\omega|h) = B_2 - |\omega|A_2 \quad (\text{V-57})$$

En dérivant la relation (V-56) deux fois par rapport à z, on peut expliciter l'expression du déplacement transversale à l'interface :

$$\frac{1-v_1^2}{E_1} \left[\frac{d^2 G}{dx_1^2} + \frac{v_1}{1-v_1} \omega^2 G_1 \right]_{z=h} = \frac{1-v_2^2}{E_2} \left[\frac{d^2 G}{dx_2^2} + \frac{v_2}{1-v_2} \omega^2 G_2 \right]_{z=0} \quad (\text{V-58})$$

De même, en dérivant trois fois la relation (V-48), le déplacement normal à l'interface est :

$$\frac{1-v_1^2}{E_1} \left[\frac{d^3 G}{dx_1^3} + \frac{2-v_1}{1-v_1} \omega^2 \frac{dG_1}{dx_1} \right]_{z=h} = \frac{1-v_2^2}{E_2} \left[\frac{d^3 G}{dx_2^3} + \frac{2-v_2}{1-v_2} \omega^2 \frac{dG_2}{dx_2} \right]_{z=0} \quad (\text{V-59})$$

En regroupant les équations (V-54 à V-59) sous forme matricielle on obtient la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} \omega^2 & 0 & \omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ -|\omega| & 1 & |\omega| & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{q} & \frac{h}{q} & q & hq & -1 & 0 \\ -|\omega| & \frac{1-|\omega|h}{q} & |\omega|q & q(1+|\omega|h) & |\omega| & -1 \\ \frac{(v'_1-1)}{q} & k_1 & |\omega|q(1-v'_1) & k_2 & (1-v'_2)|\omega|\lambda & (v'_2-3)\lambda \\ \frac{|\omega|(1+v''_1)}{q} & k_3 & |\omega|q(1-v''_1) & k_4 & (1-v''_2)|\omega|\lambda & 2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V-60})$$

Avec

$$q = e^{|\omega|h}; v'_i = \frac{2-v_i}{1-v_i}; v''_i = \frac{v_i}{1-v_i}; m = 3-v'_i; (i=1,2); k_1 = \frac{m-|\omega|h(1-v'_1)}{q}$$

$$k_2 = q[m+|\omega|h(1-v'_1)]; k_3 = \frac{|\omega|h(1-v'_1)-2}{q}; k_4 = q[|\omega|h(1-v''_1)+2]$$

$$\text{Et } \lambda = \frac{(1-v_2^2)E_1}{(1-v_1^2)E_2}$$

En inversant cette matrice on peut expliciter les variables $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2$ en fonction des paramètres mécanique (E_1, E_2, v_1, v_2) du revêtement et du substrat et du paramètre

de Fourier. l'inverse de Fourier de l'expression générale (V.47) permet de définir les expressions des contraintes et déplacement pour les deux régions revêtement et substrat (V-41 à V-45).

3.1.2. Etude du contact dynamique

Dans le cas d'un contact cylindre/plan soumis à une charge normale $P(x)$ et à une force tangentielle $F(x) = \mu P(x)$, la matrice (V-60) devient :

$$\begin{bmatrix} \omega^2 & 0 & \omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ -|\omega| & 1 & |\omega| & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{q} & \frac{h}{q} & q & hq & -1 & 0 \\ -|\omega| & \frac{1-|\omega|h}{q} & |\omega|q & q(1+|\omega|h) & |\omega| & -1 \\ \frac{(v'_2-1)}{q} & k_1 & |\omega|q(1-v'_1) & k_2 & (1-v'_2)|\omega|\lambda & (v'_2-3)\lambda \\ \frac{|\omega|(1+v''_2)}{q} & k_3 & |\omega|q(1-v''_1) & k_4 & (1-v''_2)|\omega|\lambda & 2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(\omega) \\ F(\omega) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(V-61)

Où $P(\omega)$ et $F(\omega)$ ont les transformées de Fourier respectives de $P(x)$ et $F(x)$ donnée par les expressions suivante :

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \exp(i\omega x) dx \quad (V-62)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \exp(i\omega x) dx \quad (V-63)$$

4. CALCUL DES CONTRAINTES SOUS CHARGEMENT UNITAIRE

Pour estimer les valeurs des contraintes des deux régions dans les deux cas de contact statique et dynamique, on considère le cas d'une pression normale appliquée $P(x) = 1/a$ et on pose les variables suivantes $\xi = z/h$, $\zeta = x/h$ et $s = \omega h$ (h étant l'épaisseur du revêtement).

$$A'_1 = \frac{A_1}{h_1^2}, B'_1 = \frac{B_1}{h_1^2}, C'_1 = \frac{C_1}{h_1^2}, D'_1 = \frac{D_1}{h_1^2}, A'_2 = \frac{A_2}{h_1^2}, B'_2 = \frac{B_2}{h_1^2}, C'_2 = D'_2 = 0$$

Les expressions des contraintes (V-40, V-41, V-42) deviennent alors

$$\sigma_{z_i} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{s^2}{h} [\alpha_i e^{-s\xi} + \beta_i e^{s\xi}] \cos s\zeta ds \quad (V-64)$$

$$\sigma_{x_i} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{s}{h} [(2B'_i - s\alpha_i) e^{-s\xi} - (2D_i - s\beta_i) e^{s\xi}] \cos s\zeta ds \quad (V-65)$$

$$\tau_{xz_i} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{s}{h_i} [(B'_i - s\alpha_i) e^{-s\xi} - (D_i - s\beta_i) e^{s\xi}] \sin s\zeta ds \quad (V-66)$$

Avec $\alpha_i = A'_i + B'_i \xi$ et $\beta_i = C'_i + D'_i \xi$

$$A'_1 = \frac{1}{\alpha} \frac{2h}{s^3} \sin \frac{s\alpha}{h}, B'_1 = \frac{1}{\alpha} \frac{2h}{s^2} \sin \frac{s\alpha}{h}, C'_1 = D'_1 = 0$$

Pour le revêtement, les expressions des contraintes peuvent être exprimées comme suit :

$$\sigma_{z_1} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{s^2}{h} [\alpha_1 e^{-s\xi} + \beta_1 e^{s\xi}] \cos s\zeta ds + \frac{2}{\alpha} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1+s\xi}{s} \right) e^{-s\xi} \sin \frac{s\alpha}{h} \cos s\zeta ds \quad (V-67)$$

En utilisant les conditions trigonométriques, l'expression (V-67) devient :

$$\sigma_{z_1} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{s^2}{h} [\alpha_1 e^{-s\xi} + \beta_1 e^{s\xi}] \cos s\zeta ds + \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1+s\xi}{s} e^{-s\xi} \right) \sin \left(s \left(\frac{\alpha}{h} + \zeta \right) \right) + \sin \left(s \left(\frac{\alpha}{h} - \zeta \right) \right) ds \quad (V-68)$$

$$\sigma_{x_1} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{s}{h} [(2B'_1 - s\alpha_1) e^{-s\xi} - (2D_1 - s\beta_1) e^{s\xi}] \cos s\zeta ds + \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1-s\xi}{s} e^{-s\xi} \right) \sin \left(s \left(\frac{\alpha}{h} + \zeta \right) \right) + \sin \left(s \left(\frac{\alpha}{h} - \zeta \right) \right) ds \quad (V-69)$$

$$\tau_{xz_1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{s}{h_2} [(B'_1 - s\alpha_1) e^{-s\xi} - (D_1 - s\beta_1) e^{s\xi}] \sin s\zeta ds - hP_0 \xi \int_0^{+\infty} \left(\frac{1-s\xi}{s} e^{-s\xi} \right) \cos \left(s \left(\frac{\alpha}{h} + \zeta \right) \right) + \cos \left(s \left(\frac{\alpha}{h} - \zeta \right) \right) ds \quad (V-70)$$

Pour le substrat les expressions des contraintes sont :

$$\sigma_{z_2} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{s^2}{h} \alpha_1 e^{-s\xi} \cos s\zeta ds \quad (V-71)$$

$$\sigma_{x_2} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{s}{h} [(2B'_1 + s\alpha_2) e^{s\xi}] \cos s\zeta ds \quad (V-72)$$

$$\tau_{xz_2} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{s}{h_2} [B'_1 + s\alpha_2] e^{s\xi} \sin s\zeta ds \quad (V-73)$$

5. EVOLUTION DE L'ÉPAISSEUR DE LA COUCHE D'OXYDE

L'aire réelle de contact dans le cas d'une aspérité est obtenue en utilisant les relations classiques de Hertz : $P = Ar H$ où P est la force d'appui, H est la dureté du métal le plus tendre, Ar dépend de la nature du contact métal/métal ou oxyde/métal. $Ar = \pi a^2$ où a est le rayon de contact, et la force de frottement $F = \mu P$.

- Pour un contact cuivre/acier, la dureté du cuivre est $H = 4.10^8$, on obtient pour la charge $N = 63$ [N], le rayon de contact $a_{cu} = 223$ [μm].

- Pour un contact sur l'oxyde de cuivre dont la dureté est de l'ordre $13 \cdot 10^8$ [Pa], on obtient un rayon de contact $a_0 = 124$ [μm].

Le contact dynamique présente des caractéristiques élastiques similaires au contact statique car le contact est non fortement chargé. L'épaisseur de la couche d'oxyde de cuivre peut être calculée par la mesure de la résistance de contact R_c entre les zones de contact des corps en frottement R_c et la somme des deux termes.

- Résistance de constriction : $R_{const} = \frac{\sigma_{cu}}{2a_{cu}}$; σ_{cu} : résistivité électrique du contact.

- Résistance de la couche d'oxyde : $R_{oxyde} = \frac{\sigma_0 h}{\pi a_{cu}^2}$; σ_0 : résistivité du film d'oxyde de cuivre et h est l'épaisseur du film.

La résistance de contact est la somme des résistances de constriction et du film.

$$R_c = \frac{\sigma_{cu}}{2a_{cu}} + \frac{\sigma_0 h}{\pi a_{cu}^2} ; \sigma_0 \text{ est de l'ordre de } 4 \cdot 10^{-3} [\Omega \cdot \text{m}]. \quad (\text{V-74})$$

Connaissant la valeur de la variation de la résistance électrique de contact, on peut estimer l'épaisseur du film d'oxyde h , et déduire le champ électrique du contact.

$$\Delta R_c = \frac{\Delta U}{I} = \frac{0,15}{20} = 7,5 \cdot 10^{-3} \approx \frac{\sigma_0 h}{\pi a_0^2}$$

On obtient l'épaisseur : $h = \frac{\pi a_{cu}^2 R_c}{\sigma_0} = 0,1$ [μm]

D'où le champ électrique de contact : $E = \frac{\Delta V}{h} = \frac{I \Delta R_c}{h} = 1,5 \cdot 10^6$ [V/m]. E est le champ de rupture du film.

Dans les conditions de plus faibles oxydations, en particulier en présence d'argon, nous avons des résistances de contact de $1,2 \cdot 10^{-3}$ [Ω]. Dans le domaine des aires de contact que nous avons calculées de 50 à 100 [μm] [15], la relation ci-dessus permet d'obtenir aisément h :

F [N]	a [μm]	h [Å]
2	17,8	0,15
4	35,6	10,4
6	53,4	20,002
8	71,2	43,87
10	89	69,6
12	100	90

Tableau 12. Variation de l'épaisseur du film d'oxyde en présence d'argon.

Dans les conditions d'oxydation importantes, en particulier sous oxygène, les valeurs mesurées de la résistance électrique de contact très fluctuantes atteignent $12 \cdot 10^{-3}$ [Ω] [15]. L'épaisseur de la couche d'oxyde de cuivre est alors h est :

F [N]	a [μm]	h [Å]
2	17,8	17
4	35,6	106
6	53,4	243
8	71,2	389
10	89	721
12	100	950

Tableau 13. Variation de l'épaisseur du film d'oxyde sous oxygène.

A partir des expressions des contraintes calculées dans le paragraphe modélisation du contact cuivre/couche d'oxyde/acier, l'analyse du champ des contraintes. Figure17 montre que le maximum de cisaillements est dans le substrat à des faibles coefficients de frottement $\mu < 0,3$. Au-delà de $\mu = 0,3$, il est à l'interface ou dans le revêtement. La rupture du film d'oxyde est due au déplacement de la contrainte maximale de cisaillement en sous couche.

Dans un contact cuivre/oxyde de fer/acier, le cisaillement en subsurface a lieu au niveau du fer ou de l'oxyde ferreux Fe O à caractère ductile. Les oxydes à caractère dur et fragile tel l'oxyde ferrique $Fe_2 O_3$ et la magnétite Fe_3O_4 sont détaché par cisaillement de la couche de l'oxyde ferreux.

Dans un contact cuivre/oxyde de cuivre/acier, quand la contrainte maximale de cisaillement est en subsurface, c'est l'oxyde cuivrique qui se détache par cisaillement de la couche d'oxyde cuivreux ductile et située en dessus.

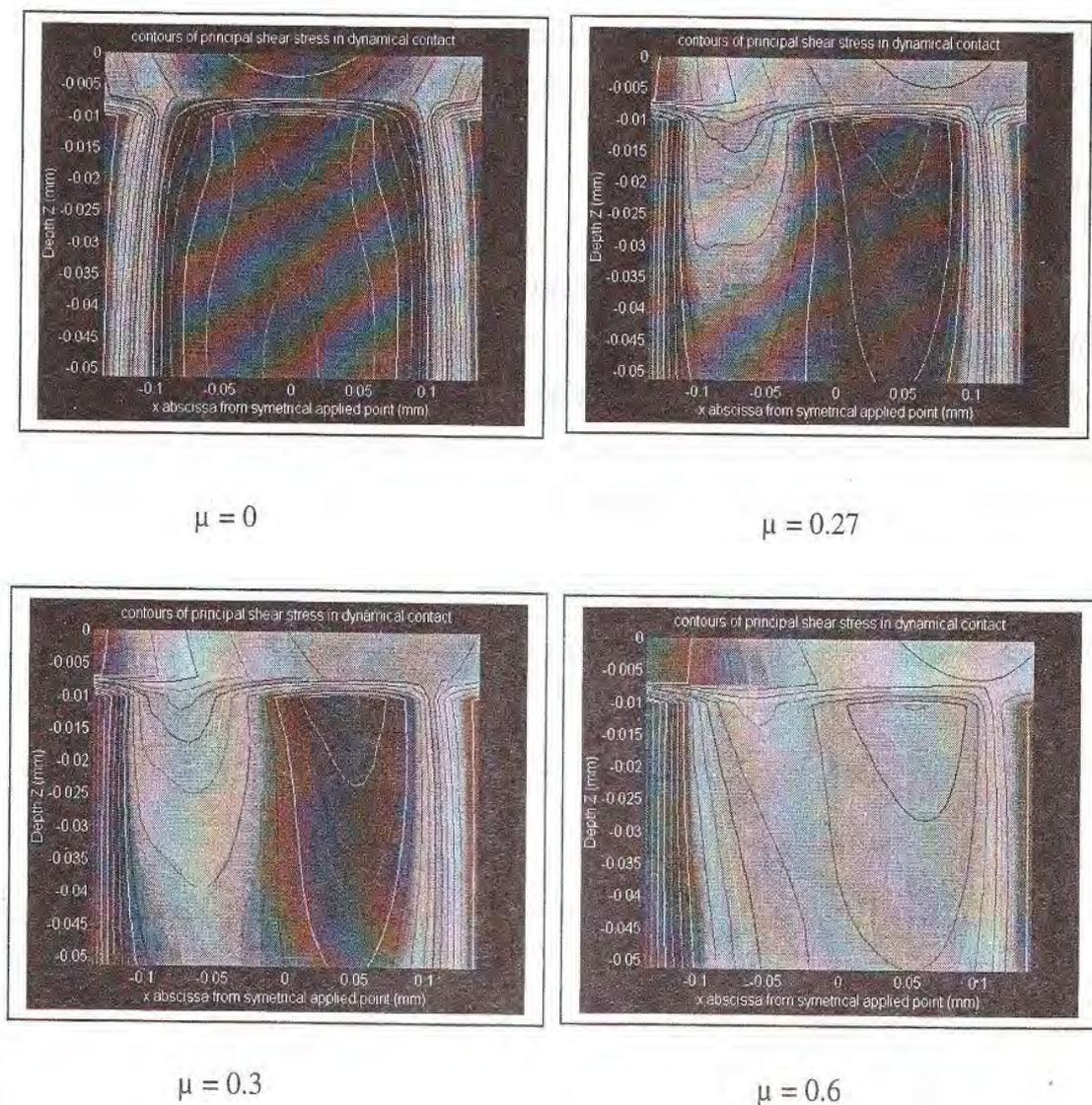


Fig. 17. Tracé des isocontraintes de cisaillement dans le plan du contact dynamique film d'oxyde/disque à différents coefficients de frottement (μ) d'après [16].

Le coefficient de frottement dans un contact cuivre cathode/acier est de l'ordre de 0,4. Cette valeur conduit à une contrainte de cisaillement en subsurface $\tau_{\text{max}} = 0,36P_{\text{max}}$ au point de coordonnées A (+0,87a ; -0,5a). Ce point constitue la zone la plus sollicitée et probablement la zone de fissuration par fatigue. La présence des particules dans le contact entraîne l'usure abrasive du contact comme nous l'avons montré par profilomètre.

La contrainte de cisaillement de rupture est estimée à $0,6H$, où H est la dureté du matériau. Pour une rupture dans l'oxyde de cuivre dont la dureté $H = 13 \cdot 10^8$ et pour un rayon de contact $a = 124 \text{ } [\mu\text{m}]$ on obtient une force de cisaillement de rupture de l'ordre 125 [N] .

6. CONCENTRATION DES CONTRAINTES

Le contact cylindre/plan est un contact à longueur fini. Il y a concentration des contraintes au bord du cylindre. Cette concentration change selon le profil de surface latérale du cylindre. La figure 18. (a) a montré que les contraintes de bord sont trois fois plus importantes que les contraintes au milieu du contact. [49] a constaté que si la courbure de génératrice de la surface latérale est logarithmique figure 18. (b), la distribution des contraintes est uniforme sans concentration aux bords. Cependant pour notre cas le contact est linéique seulement quelque instant au début du test. L'usure du contact conduit à un contact plan/plan, ce qui diminue la concentration des contraintes.

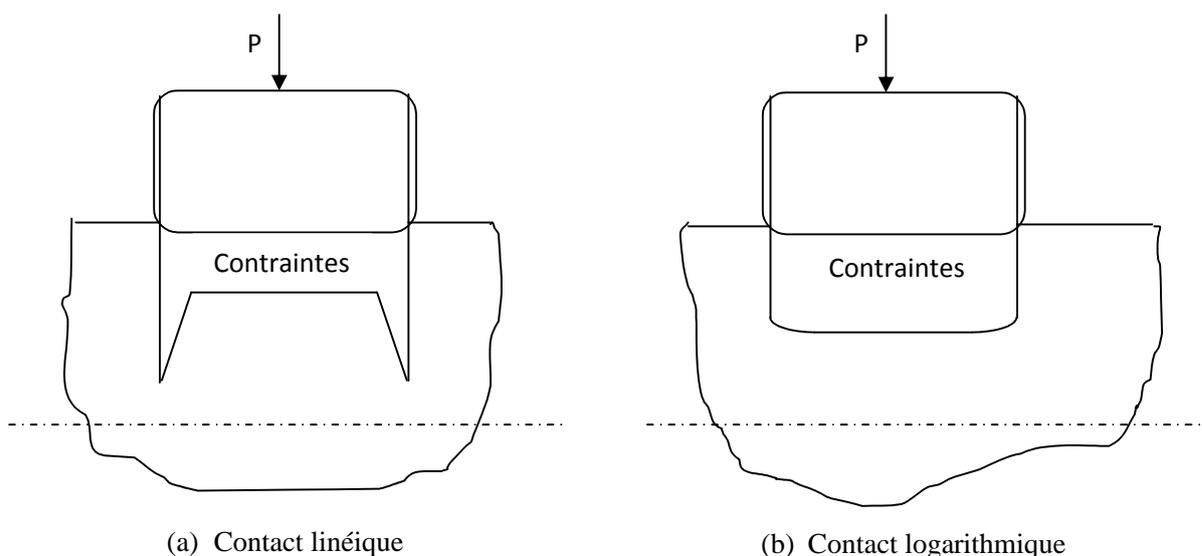


Fig. 18. Concentration des contraintes à la surface latérale du contact.

CONCLUSION

Dans notre étude, nous avons proposé des modèles de calculs pour la détermination de la distribution du champ des contraintes dans un contact cuivre/acier et cuivre/film d'oxyde/acier. La modélisation des contraintes normales principales et des contraintes maximales de cisaillement de Tresca a été effectuée pour les contacts statique et dynamique.

La modélisation du contact dynamique cuivre/acier à partir des équations de Mc Ewen nous a permis de distinguer que, pour un régime de frottement avec $\mu < 0,3$, la contrainte de cisaillement maximale est en subsurface, les isocontraintes de cisaillements ne s'ouvrent pas vers l'extérieur. Quand $\mu > 0,3$, la contrainte maximale de cisaillement est déplacée en surface. Cette contrainte de cisaillement conduit à une usure sévère. Les isocontraintes s'ouvrent vers l'extérieur ce qui augmente la rugosité et les déformations en surface.

Le calcul numérique du champ des contraintes à partir de la modélisation du contact a été complètement établi, et fait apparaître les observations suivantes:

- La contrainte maximale de traction apparaît toujours sur l'axe de glissement au point $x = -a$. ce point est susceptible de produire un endommagement lorsque la limite élastiques des matériaux est dépassée.
- Pour un coefficient de frottement en dessous de 0,2, le maximum du critère limite de Von Mises se situe en dessous de la surface à une profondeur avoisinant $0,4.a$, alors qu'il se retrouve au point $x = -a$ dès que le coefficient de frottement dépasse la valeur de 0,2. Ce point caractérise les endommagements irréversibles (de type abrasif en surface), il produit alors des déformations plastiques induites par le glissement. Ce mécanisme est déterminant dans le cas des matériaux ductiles.

Ces modèles permettent de prédire la zone de contact nominale, les contraintes de surface et de subsurface. D'autre part, les effets de contact tels que le frottement, l'usure, la géométrie de débris, l'endommagement (rupture) fragile, et la délamination des matériaux.

Par ailleurs, les résultats obtenus montrent aussi que le choix des propriétés mécaniques du matériau et sa rugosité influent largement sur le comportement tribologique du contact. En

effet, un matériau rigide est bénéfique pour la réduction de l'adhésion due au frottement et la formation de particules d'usure par réduction de la zone de contact réelle. Cependant, l'augmentation des contraintes de tension (traction) sur la surface et la contrainte de cisaillement à l'interface du couple favorise le potentiel des mécanismes d'usures tels que la délamination et la rupture fragile. Inversement un matériau plus souple où on remarque une augmentation de la zone de contact, engendre une augmentation du frottement et la formation de particules d'usure. Le matériau dans ce cas diminue les valeurs des contraintes de traction et de cisaillement, ce qui diminue les phénomènes de rupture fragile et de délamination.

Dans le cas du contact quasi-statique, on met en évidence la division de la zone de contact en une zone d'adhérence ("stick"-sans mouvement relatif entre les deux surfaces) et une zone de microglissement ("slip" où il y a un mouvement local). La géométrie de ces zones est déterminée par la géométrie du contact.

Dans le cas du contact en roulement, la division de la zone de contact est déterminée par l'interaction entre la traction tangentielle et les déformations élastiques. Les recherches s'appuient sur le roulement pur (force tangentielle nulle) et roulement avec traction. Lors du roulement pur d'une sphère dans une cavité toroïdale conforme, l'aire de contact est divisée en trois zones de microglissements: une zone centrale avec microglissement négatif et deux zones périphériques avec microglissement positif séparées entre elles par deux lignes de roulement pur.

Les dimensions des zones de contacts réelles ont été évaluées par plusieurs méthodes qui conduisent à des aires de contact réelles dont le rayon est fonction du degré d'oxydation et de l'ordre de 50 à 100 [μm].

De même, l'évaluation des épaisseurs des couches d'oxydes a permis de les situer entre 20[Å] pour les atmosphères dites neutres à faible teneur en oxygène et 1000[Å] pour l'oxygène pur. Il est intéressant de remarquer que nos résultats conduisent à des valeurs plus faibles des épaisseurs des couches d'oxydes que ceux qu'estiment certains tribologues mais proche de ce que proposent les physico-chimistes.

Pour une géométrie choisie, en utilisant le programme sur le logiciel Matlab, on peut estimer la durée de vie de n'importe quel couple et quelle que soient les conditions de

fonctionnement il suffit d'injecter au programme les conditions du contact et les propriétés des matériaux constituant le couple.

Le travail est une contribution dans laquelle on a supposé des géométries simples. On peut étudier les cas des géométries plus complexes, ce qui rend le problème plus difficile à résoudre et donc utiliser des outils informatiques plus performants.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] A.A. Voevodin, J.S. Zabinski, Laser surface texturing for adaptive solid lubrication, *Wear*. 2006.
- [2] O. Wilhelmsson, M. Rasander, M. Lindquist, B. Sanyal, U. Wiklund, O. Eriksson, U. Jansson, Design of nanocomposite low-friction coatings, *Advanced Functional Materials* 2007.
- [3] A. Cavaleiro, J.T.M. De Hosson, Nanostructured Coatings, in: D.J. Lockwood (Ed.), *Nanostructure Science and Technology*, Springer, Ottawa, 2006.
- [4] E. Lewin, O. Wilhelmsson, U. Jansson, Nanocomposite nc-TiC/a-C thin films for electrical contact applications, *Journal of Applied Physics*, 2009.
- [5] S. Hogmark, S. Jacobson, E. Coronel. On adhesion in tribological contacts—causes and consequences, *Tribologia* 2008.
- [6] D.H.E. Persson, On the mechanisms behind the tribological performance of stellites, Ph.D. Thesis, *Acta Universitatis Upsaliensis*, 2007.
- [7] C. Canudas. Modelling and control of systems with dynamic friction. *Workshop on Systems with Friction*, Hawaii, August 1999.
- [8] U. Beste, S. Jacobson, A new view of the deterioration and wear of cemented carbide rock drill buttons, *Wear*, 2007.
- [9] U. Beste, S. Hogmark, S. Jacobson, Rock penetration into cemented carbide drill buttons during rock drilling, *Wear*. 2009.
- [10] U. Beste, E. Coronel, S. Jacobson, Wear induced material modification of cemented carbide rock drills, *Int. J. Refractory Met. Hard Mater.* 2006.
- [11] J-M. Georges. Frottement, usure et lubrification - La tribologie ou science des surfaces, chapter V, VI, VII. CNRS Editions - Eyrolles, 2000.
- [12] J.T. Oden et J.A.C. Martins. Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005.
- [13] F.P. Bowden et D. Tabor. The friction and lubrication of solids. Oxford University Press, Ely House, London, 1971.
- [14] B. Podgornik, D. Hren, J. Vičzintin, S. Jacobson, N. Stavlid, S. Hogmark, Combination of DLC coatings and EP additives for improved tribological behaviour of boundary lubricated surfaces, *Wear*. 2006.

- [15] Bouchoucha Ali, Etude du comportement en frottement et usure des contacts électrique glissants cuivre-acier et cuivre-graphite. Thèse de mécanique, LMPM ,Nancy 1998.
- [16] Senouci Abdelhak, étude théorique et expérimentale au comportement tribologique d'un contact électrique cuivre-acier Thèse de doctorat l'Université de Poitiers, 2001.
- [17] N. Stavlid, On the formation of low-friction tribofilms in Me-DLC—steel sliding contacts, Ph.D. Thesis, Acta Universitatis Upsaliensis, 2006.
- [18] ISO/TS CD 25178-2, Geometrical Product Specification (GPS) – Surface Texture: Areal – Part 2. Terms, Definitions and Surface Texture Parameters. 2006
- [19] E. Sura, M. El Mansori, T. Dal Negro, Local-pressure control in belt finishing process: feasibility study and experimental validation, in: Proceedings of the Second International Meeting of Abrasion, ENSAM, Câlons en champagne, France, May 2006.
- [20] M. El Mansori, E. Sura, P. Ghidossi, T. Dal Negro, H. Khanfir, S. Deblaise, Toward physical description of form and finish performance in dry belt finishing process by a tribo-energetic approach, Journal of Materials Process Technology. 2007.
- [21] E. Sura, M. ElMansori, An energy analysis of belt polishing process and its applications to time cycle and tracking effects, Machining Science and Technology. 2007.
- [22] J.-M. Georges. Frottement, usure et lubrification. Eyrolles, CNRS Editions, Collection Sciences et Techniques de l'Ingénieur, France, 2000.
- [23] Z. Zhang and G. H. Paulino. Cohesive zone modeling of dynamic failure in homogeneous and functionally graded materials. International Journal of Plasticity, 2005.
- [24] Dieterich, J.H., Kilgore, B.D., Direct observation of frictional contacts :new insights for state-dependent properties, Pure Appl. Geophys.2004.
- [25] H. Zahouani, S. Mezghani, R. Vargiolu, M. Dursapt, Identification of manufacturing signature by 2D wavelet decomposition, Wear. 2009.
- [26] B.N.J. Persson, Contact mechanics for randomly rough surfaces, Surface Science Report. 2007.
- [27] J. Jamari, D.J. Schipper, An elastic-plastic contact model of ellipsoid bodies, Tribology. Lett. 2008.
- [28] A. Almqvist, F. Sahlin, R. Larsson, S. Glavatskih, On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces, ASME Tribology. Int. 2008.
- [29] S.M. Bateni, D.S. Jeng, B.W. Melville, Bayesian neural network for prediction of equilibrium and time-dependent scour depth around bridge piers, Adv. Eng. Software. 2007.

- [30] R. Kemp, G.A. Cottrell, H.K.D.H. Bhadeshia, G.R. Odette, T. Yamamoto, H. Kishimoto, Neural network analysis of irradiation hardening in lowactivation steels, *J. Nucl. Mater.* 2007.
- [31] H.M. Yates, M.G. Nolan, D.W. Sheel, M.E. Pemble, The role of nitrogen doping on the development of visible light-induced photocatalytic activity in thin TiO₂ films grown on glass by chemical vapour deposition, *J. Photochem. Photobiol. Chem.* 2006.
- [32] G. Zhang, A.K. Schlarb, Correlation of the tribological behaviors with the mechanical properties of poly-ether-ether-ketones (PEEKs) with different molecular weights and their fiber filled composites, *Wear.* 2008.
- [33] N.L. McCook, M.A. Hamilton, D.L. Burris, W.G. Sawyer, Tribological results of PEEK nanocomposites in dry sliding against 440C in various gas environments, *Wear* 2009.
- [34] H. Ruckdäschel, J.K.W. Sandler, V. Altstädt, On the friction and wear of carbon nanofiber-reinforced PEEK-based polymer composites, in: K. Friedrich, A.K. Schlarb (Eds.), *Tribology of Polymeric Nanocomposites*, Elsevier. 2009.
- [35] O. Jacobs, B. Schädel, Wear behavior of carbon nanotube-reinforced polyethylene and epoxy composites, in: K. Friedrich, A.K. Schlarb (Eds.), *Tribology of Polymeric Nanocomposites*, Elsevier. 2009.
- [36] V.K. Gorana, V.K. Jain, G.K. Lal, Forces prediction during material deformation in abrasive flow machining, *Wear.* 2006.
- [37] S.Y. Liang, J.C. Su, Residual stress modeling in orthogonal machining, *CIRP Annals—Manufacturing Technology.* 2007.
- [38] C.H. Gao, J.M. Huang, X.Z. Lin, X.S. Tang, Stress analysis of thermal fatigue fracture of brake disks based on thermomechanical coupling, *Journal of Tribology.* 2009.
- [39] M. Taburdagitan, M. Akkok, Determination of surface temperature rise with thermo elastic analysis of spur gears, *Wear.* 2007.
- [40] X. Zhao, X. Jin, W. Zhai, Analysis of thermal-elastic stress of wheel-rail in rollingsliding contact, *Chinese Journal of Mechanical Engineering (English Edition).* 2007.
- [41] P.M. Amaral, J.C. Fernandes, L.G. Guerra Rosa, Weibull statistical analysis of granite bending strength, *Rock Mechanics and Rock Engineering*, doi:10.1007/s00603-007-0154-7. Available online since 27 November 2007.
- [42] P.M. Amaral, L.G. Rosa, J.C. Fernandes, Assessment of fracture toughness in ornamental stones, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences.* 2009.

- [43] Grzesik W, Wanat T. Comparative assessment of surface roughness produced by hard machining with mixed ceramic tools including 2D and 3D analysis. *J Mater Proc Technol*. 2005.
- [44] Gong Z-Q, Komvopoulos K. Thermo mechanical analysis of semi-infinite solid in sliding contact with a fractal surface. *ASME J Tribology* 2007.
- [45] Fillot N, Iordanoff I, Berthier Y. Wear modeling and the third body concept. *Wear* 2007.
- [46] Fillot N, Iordanoff I, Berthier Y. Modelling third body fows with a discrete element method—a tool for understanding wear with adhesive particles. *Tribology Int* 2007.
- [47] Hegadekatte V, Huber N, Kraft O. Finite element based on simulation of dry sliding wear. *Tribol Lett*. 2007.
- [48] Kim NH, Won D, Burris D, Holtkamp B, Gessel G, Swanson P, et al. Finite element analysis and experiments of metal/metal wear in oscillatory contacts. *Wear* 2005.
- [49] Kanavalli B. Application of user defined subroutine UMESHMOTION in ABAQUS to simulate dry rolling/sliding wear. Master thesis. Stockholm, Sweden: Royal Institute of Technology (KTH). 2006.
- [50] L. Pei, S. Hyun, J.F. Molinari, M.O. Robbins, Finite element modeling of elasto-plastic contact between rough surfaces *J. Mech Phys. Solids*. 2008.

ANNEXE

1. Les équations d'équilibre et de compatibilité

Considérons un élément de surface ABCD présenté par la Figure 1 suivante :

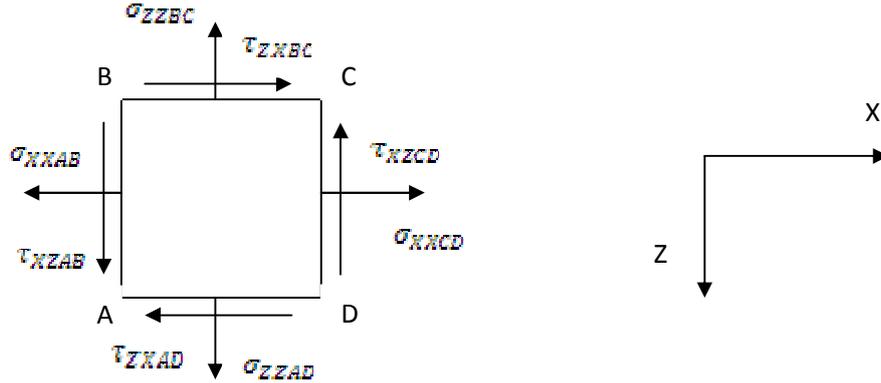


Fig. 1. Distribution des contraintes sur un élément de surface

- Les équations d'équilibre

$$(\sigma_{xxCD} - \sigma_{xxAB})\delta_x\delta_y + (\tau_{zxBC} - \tau_{zxAD})\delta_x\delta_y + X\delta_x\delta_y\delta_z = 0 \quad (1)$$

Où X est un élément de volume.

Si on divise l'équation (1) par $\delta_x\delta_y\delta_z$ on aura :

$$\frac{(\sigma_{xxCD} - \sigma_{xxAB})}{\delta_x} + \frac{(\tau_{zxBC} - \tau_{zxAD})}{\delta_z} + X = 0 \quad (2)$$

A la limite δ_x et δ_z tendent vers 0 et l'écartement devient très petit, les termes deviennent des dérivées partielles en fonction de x et z. Avec dans notre cas $X=0$.

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

Dans la direction z :

$$(\sigma_{zzBC} - \sigma_{zzAD})\delta_x\delta_y + (\tau_{zxBC} - \tau_{zxAD})\delta_x\delta_y + X\delta_x\delta_y\delta_z = 0 \quad (4)$$

En divisant l'équilibre (4) par $\delta_x\delta_y\delta_z$ on aura :

$$\frac{(\sigma_{zzBC} - \sigma_{zzAD})}{\delta_z} + \frac{(\tau_{zxBC} - \tau_{zxAD})}{\delta_x} + X = 0 \quad (5)$$

D'où

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

Les équations d'équilibre des deux corps sont finalement :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

Les équations de compatibilité :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial z}, \varepsilon_z = \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{xz} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) * \frac{1}{2} \quad (8)$$

En dérivant deux fois ces expressions on aura :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{(\partial z)^2} = \frac{\partial^2 u}{(\partial z)^2 \partial x}, \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{(\partial x)^2} = \frac{\partial^2 v}{(\partial x)^2 \partial z}, \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) * \frac{1}{2} \quad (9)$$

De la relation (9) on peut déduire que :

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{(\partial x)^2} + \frac{\partial \varepsilon_z}{(\partial z)^2} \right) * \frac{1}{2} \quad (10)$$

Les relations contraintes –déformations sont données par :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{V \sigma_z}{E} \\ \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{V \sigma_x}{E} \\ \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} - \frac{2\nu(1+V)}{E} \end{cases} \quad (11)$$

En remplaçant dans l'expression (10) on a :

$$\frac{1}{E} \frac{\partial^2 \sigma_x}{(\partial x)^2} - \frac{V}{E} \frac{\partial^2 \sigma_z}{(\partial x)^2} + \frac{1}{E} \frac{\partial^2 \sigma_z}{(\partial z)^2} - \frac{V}{E} \frac{\partial^2 \sigma_x}{(\partial z)^2} = \frac{2\nu(1+V)}{E} \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial z} \quad (12)$$

Dérivons les équations (3 et 5) par rapport à x et z

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{(\partial z)^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{(\partial z)^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{(\partial x)^2} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

La somme de ces deux équations donne :

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{(\partial z)^2} = -2 \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial z} \quad (14)$$

Par identification des équations (12 et 14) on aura :

$$\nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) = 0 \quad (15)$$

- Rappel sur la fonction Airy

On peut définir trois fonctions (φ_1 , Ψ_1 et ϕ_1) des contraintes dont ces derniers se déduisent par une simple dérivation et qui obéissent à une équation différentielle caractéristique :

Les contraintes sont σ_x , σ_y et σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} et τ_{xz}

Soient : $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y}$, $\tau_{yz} = -\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y \partial z}$, $\tau_{xz} = -\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial z}$

Les équations d'équilibre élastique s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma_x + \frac{\partial^2 \varphi_1}{(\partial y)^2} - \frac{\partial^2 \phi_1}{(\partial z)^2} \right] = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\sigma_y + \frac{\partial^2 \psi_1}{(\partial z)^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{(\partial x)^2} \right] = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\sigma_z + \frac{\partial^2 \phi_1}{(\partial x)^2} - \frac{\partial^2 \psi_1}{(\partial y)^2} \right] = 0 \quad (18)$$

En intégrant ces relations, on obtient :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi_1}{(\partial y)^2} - \frac{\partial^2 \phi_1}{(\partial z)^2} + \frac{\partial^2 f_1(x,z)}{(\partial y)^2} \quad (19)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \psi_1}{(\partial z)^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 f_2(x,z)}{(\partial z)^2} \quad (20)$$

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 \phi_1}{(\partial x)^2} - \frac{\partial^2 \psi_1}{(\partial y)^2} + \frac{\partial^2 f_3(x,y)}{(\partial x)^2} \quad (21)$$

Où les constantes d'intégration sont mises sous formes de dérivée secondes.

Les équations de lamé qui relient les contraintes aux déplacements sont :

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_y = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_z = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad \text{Et} \quad \begin{cases} \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{cases} \quad (22)$$

Avec : $\theta = \frac{s}{3\lambda+2\mu}$, $s = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$, $E = \mu \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}$ et $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$

On a :

$$\begin{cases} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = \sigma_x - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} s & (a) \\ 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = \sigma_y - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} s & (b) \\ 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} = \sigma_z - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} s & (c) \end{cases} \quad (23)$$

On dérive deux fois (23.a) par rapport à y et deux fois (23.b) par rapport à x puis on les additionne.

De même on dérive deux fois (23.b) par rapport à z et deux fois (23.c) par rapport à y puis on les additionne.

Puis on dérive deux fois (23.a) par rapport à x et deux fois (23.c) par rapport à z puis on les additionne.

On obtient

$$2\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x^2} \right) = \frac{\partial^2 \sigma_x}{(\partial y)^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{(\partial x)^2} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} \left(\frac{\partial^2 s}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 s}{(\partial y)^2} \right) \quad (24)$$

$$2\mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 \sigma_y}{(\partial z)^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{(\partial y)^2} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} \left(\frac{\partial^2 s}{(\partial y)^2} + \frac{\partial^2 s}{(\partial z)^2} \right) \quad (25)$$

$$2\mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 \sigma_z}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{(\partial z)^2} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} \left(\frac{\partial^2 s}{(\partial z)^2} + \frac{\partial^2 s}{(\partial x)^2} \right) \quad (26)$$

En tenant compte des équations (23) et en additionnant les trois équations précédentes on obtient :

$$2 \left[\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial z \partial x} \right] = \frac{\partial^2 \sigma_x}{(\partial y)^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{(\partial z)^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{(\partial z)^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{(\partial y)^2} - \frac{2\lambda}{3\lambda+2\mu} \Delta s \quad (27)$$

Si on introduit les fonctions $(\varphi_1, \Psi_1 \text{ et } \phi_1)$ nous avons :

$$-2 \left[\frac{\partial^4 \varphi_z}{(\partial x)^2 (\partial y)^2} + \frac{\partial^4 \psi_z}{(\partial y)^2 (\partial z)^2} + \frac{\partial^4 \phi_z}{(\partial z)^2 (\partial x)^2} \right] = \frac{\partial^2 \sigma_x}{(\partial y)^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{(\partial z)^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{(\partial z)^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{(\partial y)^2} - \frac{2\lambda}{3\lambda + 2\mu} \Delta s \quad (28)$$

De même :

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{(\partial y)^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{(\partial z)^2} = 2 \left[\frac{\partial^4 \varphi_z}{(\partial x)^2 (\partial y)^2} + \frac{\partial^4 \psi_z}{(\partial y)^2 (\partial z)^2} + \frac{\partial^4 \phi_z}{(\partial z)^2 (\partial x)^2} \right] \quad (29)$$

L'équation (27) s'écrit :

$$\Delta s \left[1 - \frac{2\lambda}{3\lambda + 2\mu} \right] = 0 \text{ d'où } \Delta s = 0$$

Soit $\Delta (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0$. La somme des trois contraintes obéit à une équation de Laplace.

Ainsi si
$$\begin{cases} \varphi = \varphi_1 + f_1(y, z) \\ \psi = \psi_1 + f_2(x, z) \\ \phi = \phi_1 + f_3(x, y) \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial y)^2} + \frac{\partial^2 \psi}{(\partial z)^2} \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{(\partial z)^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x)^2} \\ \sigma_z = \frac{\partial^2 \psi}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 \phi}{(\partial y)^2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \\ \tau_{yz} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \\ \tau_{xz} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \end{cases} \quad (30)$$

La quantité s a pour valeur :

$$\Delta \left(\frac{\partial^2 (\varphi + \phi)}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 (\psi + \varphi)}{(\partial y)^2} + \frac{\partial^2 (\phi + \psi)}{(\partial z)^2} \right) = 0 \quad (31)$$

Dans le cas bidimensionnel on a $\psi = \phi$ et $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial x \partial y}$

Soit (31) se simplifie en :

$$\Delta \left(\frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial y)^2} \right) = 0 \quad (32)$$

C'est-à-dire $\Delta^2 \varphi = 0$. Le Laplacien du Laplacien de φ est nul. La fonction φ est donc biharmonique.

Remarque : l'équation (30) ou (31) est une équation universelle et ne contient aucun coefficient caractéristique du matériau. Or on a aussi $\Delta \varphi = \sigma_x + \sigma_y$ d'où $\Delta (\sigma_x + \sigma_y) = 0$

Ainsi si les conditions aux limites ont uniquement des efforts appliqués, la répartition des contraintes et un problème de Dirichlet. Les contraintes développées par un système d'efforts sont indépendantes des matériaux choisis. Cette remarque est fondamentale pour l'étude expérimentale des contraintes par examen d'un modèle constitué d'un matériau différent (photoélasticimétrie). Cependant, si le problème à des conditions aux limites imposées sur les déplacements « problème de Newman » la simulation ne reste plus valable.

En plus si on ne néglige pas l'effet de la pesanteur, la distribution des contraintes dépend de la masse volumique et du coefficient de Poisson ν . (voire équation d'équilibre).

2. Fonctions à variables complexe

Si à chacun des éléments d'un ensemble de nombres complexes dont une variable z peut assumer les valeurs, il correspond une ou plusieurs valeur de la variable w , alors w est dite fonction de la variable complexe z .

Une fonction est uniforme si à chaque valeur de z correspond une valeur de w est une seule ; autrement la fonction est multiforme. Nous pouvons écrire en générale $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, où u et v sont des fonctions réelles de x et y ($U(x, y) = (f(z) + \overline{f(z)})^{1/2}$ et $v(x, y) = (f(z) - \overline{f(z)})^{1/2}$).

- Condition de Cauchy Riemann

Une condition nécessaire pour que $w=f(z)=u(x, y) + i v(x, y)$ soit holomorphe dans un domaine D et que u et v vérifient les conditions de Cauchy Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (33)$$

Si les dérivées partielles dans (33) sont continues dans D . Les conditions de Cauchy Riemann sont satisfaisantes pour que $f(z)$ soit holomorphe dans D . si les dérivées secondes de u et v par rapport à x et y existent et sont continues en dérivant (33), il vient :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 v}{(\partial z)^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{(\partial z)^2} + \frac{\partial^2 v}{(\partial x)^2} = 0 \end{cases} \quad (34)$$

- Calcul du module de Young équivalent du contact

Soient E_1, ν_1 et E_2, ν_2 le module de Young et le coefficient de Poisson respectifs des deux matériaux en contact, déterminons le module de Young équivalent E_{eq} du contact.

Les déformations de matériaux du contact sont analogues aux courants électriques dans un circuit électrique avec deux résistances électriques montées en parallèle Figure 2.

La contrainte σ qui est un paramètre intensif et assimilé à la tension U .

$$U_1 = U_2 = U \text{ (intensif)} \Leftrightarrow \dots$$

$$\text{D'après la loi des nœuds on a : } I = I_1 + I_2 \Leftrightarrow \dots \quad (35)$$

$$\text{Selon la loi d'ohm : } U = R_1 I_1 = R_2 I_2. \quad (36)$$

$$\text{On peut écrire ainsi : } U = (1/R_{eq}) I \Leftrightarrow \sigma = E_{eq} \quad (37)$$

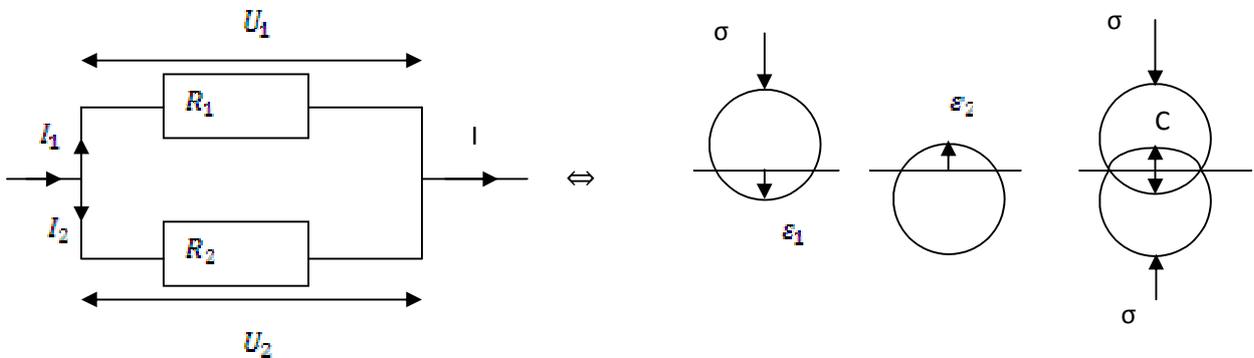


Fig. 2. Analogie entre les paramètres électriques et mécaniques

On sait que :

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \epsilon_1 \Rightarrow \epsilon_1 = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} \sigma_1 \quad (38)$$

$$\sigma_2 = \frac{E_2}{1-\nu_2^2} \epsilon_2 \Rightarrow \epsilon_2 = \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \sigma_2 \quad (39)$$

En faisant la somme des deux équations et sachant que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ (équilibre) on obtient l'expression de la déformée :

$$\varepsilon = \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right) \sigma \quad (40)$$

3. Contact sphérique

La distribution elliptique de la pression pour un contact sphérique ($a=b$) dans le plan x, y et dans le cas général est présentée sur la Figure 3 suivante :

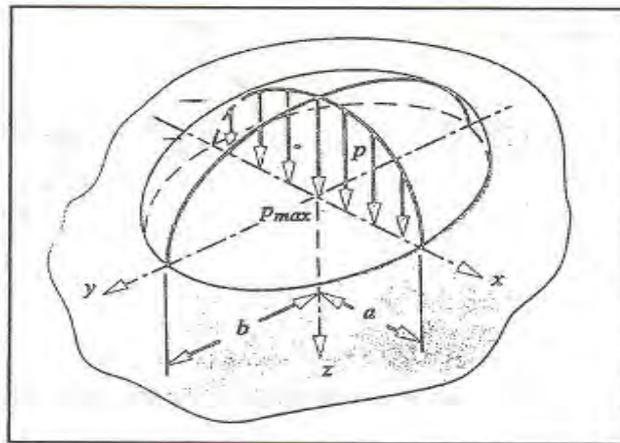


Fig. 3. Distribution elliptique de la pression dans un contact général pour un contact sphérique $a=b$

La pression de contact est maximale et est égale à P_{max} au centre et elle est nulle sur les bords. La force totale appliquée sur le contact est égale au volume de l'hémisphère :

$$F = \frac{2}{3} \pi a^2 P_{max} \quad (41)$$

Où a est la demi largeur du contact. Elle peut être déduite à partir de la pression maximale

$$P_{max} = \frac{3}{2} \frac{F}{\pi a^2} \quad (42)$$

La pression moyenne du contact est la force appliquée divisé par l'aire réelle du contact :

$$P_{moy} = \frac{F}{\pi a^2} \quad (43)$$

Des équations (42.43) on a :

$$P_{max} = \frac{3}{2} P_{moy}$$

On définit les constantes m_1 et m_2 en fonction des paramètres mécaniques pour les deux sphères par les équations suivantes :

$$m_1 = \frac{1-\nu_1^2}{E_1}, \quad m_2 = \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad (45)$$

Où E_1 , E_2 , ν_1 , ν_2 sont les modules de Young et les coefficients de poisson pour les deux matériaux respectivement.

La demi largeur du contact a est définie par :

$$a = \sqrt[3]{\frac{\pi}{4} P_{max} \frac{m_1 + m_2}{B}} \quad (46)$$

En substituant P_{max} on obtient

$$a = \sqrt[3]{0.375 \frac{m_1 + m_2}{B} F} \quad (47)$$

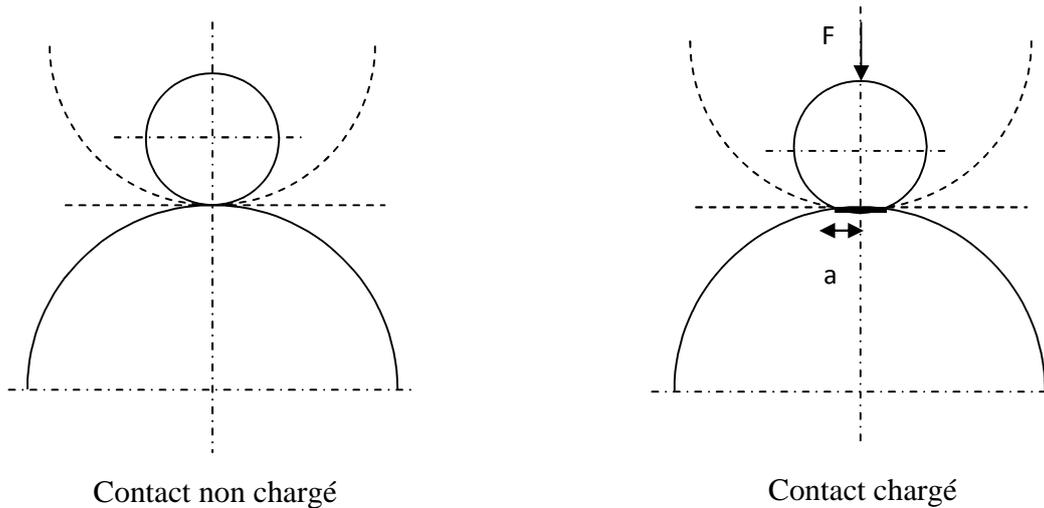


Fig. 4. Contact sphère/plan.

La distribution de la pression dans l'hémisphère est :

$$P = P_{max} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2}} \quad (48)$$

- Distribution des contraintes dans un contact sphérique

Les contraintes hertziennes appliquées dans les directions principales x, y et z sont :

$$\sigma_z = P_{max} \left[-1 + \frac{z^3}{(\alpha^2 + z^2)^{3/2}} \right] \quad (49)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{P_{max}}{2} \left[-(1 + 2\nu) + 2(1 + \nu) \left(\frac{z}{\sqrt{\alpha^2 + z^2}} \right) - \left(\frac{z}{\sqrt{\alpha^2 + z^2}} \right)^3 \right] \quad (50)$$

La contrainte de cisaillement de Tresca est :

$$\tau = \sigma_x = \sigma_y = \frac{P_{max}}{2} \left[\frac{(1+2\nu)}{2} + (1 + \nu) \left(\frac{z}{\sqrt{\alpha^2 + z^2}} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{\alpha^2 + z^2}} \right)^3 \right] \quad (51)$$

Elle est maximale au point :

$$z = \alpha \sqrt{\frac{2+2\nu}{7-2\nu}} \quad (52)$$

Et $\tau_{max} = \frac{P_{max}}{2} \left[\frac{(1+2\nu)}{2} + \frac{2}{9}(1 + \nu)\sqrt{2(1 + 2\nu)} \right] \quad (53)$