

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITÉ DE MENTOURI CONSTANTINE**  
**FACULTÉ DES SCIENCES DE L'INGÉNIEUR**  
**DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE**

N° d'ordre : ..... / ... / 2007  
Série : ..... / GM / 2007

## Mémoire

Présenté pour obtenir le diplôme de magistère en  
Génie mécanique  
Option : thermo-fluides

# SUPPRESSION DES INSTABILITÉS THERMOSOLUTALES PAR L'ACTION D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE

Par :

**Abbas ATTIA**

Soutenu Le: ... / ... / 2007

Devant le jury composé de :

|             |                    |       |                                 |
|-------------|--------------------|-------|---------------------------------|
| Président : | M. Zoubir NEMOUCHI | Prof. | Université Mentouri Constantine |
| Reporteur : | M. Smail BENISSAD  | M.C.  | Université Mentouri Constantine |
| Examineur : | M. Rachid BESSAIH  | Prof. | Université Mentouri Constantine |
|             | M. Kamel TALBI     | M.C.  | Université Mentouri Constantine |

## *REMERCIEMENTS*

Je remercie vivement Monsieur Smail BENISSAAD, Maître de conférence et chef de Département de Génie Mécanique à l'Université Mentouri de Constantine encadreur de ce mémoire, pour la confiance qu'il a placée en moi, pour sa disponibilité permanente, pour sa patience, pour ses conseils, pour sa contribution majeure de l'orientation de mes recherche, pour son aide et son soutien permanents.

Je tiens à exprimer mes remerciements à Monsieur le Professeur Zoubir NEMOUCHI mon encadreur de mémoire de fin d'étude pour avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.

J'exprime mes remerciements à Monsieur Kamel TALBI Maître de conférence l'Université Mentouri de Constantine et à Monsieur Rachid BESSAIH Professeur à l'Université Mentouri de Constantine pour avoir bien voulu accepter de participer à mon jury.

Mes remerciements vont également au groupe de travail du laboratoire constitué de Messieurs Abdelouahab BOUTTOUT, Farid BERAHIL, Adel HAMOUCHE et Moumtez BENSOUISSI.

# *DÉDICACES*

*À mes très chers parents*

*À mes frères et soeurs.*

*À ma famille.*

*À mes Amis*

# SOMMAIRE

|   |     |
|---|-----|
| DÉDICACES.....  | i   |
| REMERCIEMENTS .....   | ii  |
| SOMMAIRE.....   | iii |
| NOMOCLATURE.....  | v   |
| INTRODUCTION .....  | 1   |
| Chapitre I : REVUE BIBLIOGRAPHIQUE .....                                    | 3   |
| CHAPITRE II : GÉOMÉTRIE ET MODÈLE MATHÉMATIQUE.....                         | 16  |
| 2.1 Description et géométrie du problème .....                              | 17  |
| 2.2 Hypothèses simplificatrices .....                                       | 18  |
| 2.3 Formulation mathématique.....   | 19  |
| 2.3.1 Équation de continuité.....   | 19  |
| 2.3.2 Équation de conservation de quantité de mouvement suivant x.....      | 20  |
| 2.3.3 Équation de conservation de quantité de mouvement suivant y.....      | 20  |
| 2.3.4 Équation de conservation de l'énergie.....                            | 20  |
| 2.3.5 Équation de conservation de masse .....                               | 20  |
| 2.4 Les équations adimensionnelle.....                                      | 20  |
| 2.4.2 Équation de conservation de quantité de mouvement suivant X.....      | 21  |
| 2.4.3 Équation de conservation de quantité de mouvement suivant Y.....      | 22  |
| 2.4.4 Équation de conservation de l'énergie.....                            | 22  |
| 2.4.5 Équation de conservation de masse .....                               | 22  |
| 2.5 Conditions aux limites .....  | 23  |
| 2.5.1 Conditions aux frontières hydrodynamiques.....                        | 23  |
| 2.5.2 Conditions aux frontières thermiques et massiques .....               | 23  |
| • Cas coopérant .....   | 23  |
| • Cas opposant.....   | 24  |
| 2.6 Transfert thermique et massique.....                                    | 25  |
| CHAPITRE III : MÉTHODE NUMÉRIQUE .....                                      | 26  |
| 3.1 Introduction .....  | 27  |
| 3.2 Méthode des volumes finis .....   | 27  |
| 3.3 Maillage.....   | 28  |
| 3.4 Stockage des variables.....   | 29  |
| 3.5 Forme générale de l'équation de transport .....                         | 30  |
| 3.6 Discrétisation .....  | 30  |
| 3.6.1 Intégration l'équation générale de transport.....                     | 30  |
| 3.6.2 Différentes schéma de discrétisation: .....                           | 33  |
| 3.6.3 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant X ..... | 36  |

---

|   |   |           |
|---|---|-----------|
| 3.6.4   | Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant Y ..... | 37        |
| 3.6.5   | Discrétisation de l'équation de l'énergie .....                       | 40        |
| 3.6.6   | Discrétisation de l'équation de concentration .....                   | 41        |
| 3.7   | Algorithme SIMPLER .....  | 42        |
| 3.8   | Séquence de l'algorithme SIMPLER .....                                | 46        |
| 3.9   | Méthode de résolution .....   | 46        |
|   | * Méthode de TDMA (Algorithme de Thomas).....                         | 47        |
| 3.10  | Critère de convergence .....  | 48        |
| <b>CHAPITRE IV : RÉSULTATS ET DISCUSSIONS .....</b> |   | <b>50</b> |
| 4.1   | Paramètres de l'écoulement.....                                       | 51        |
| 4.2   | Introduction .....  | 52        |
| 4.3   | Test et choix du maillage.....  | 55        |
| 4.3.1   | Premier test : maillage uniforme .....                                | 55        |
| 4.3.2   | Deuxième test : maillage non uniforme.....                            | 59        |
| 4.3.3   | Conclusion.....   | 61        |
| 4.3   | Validation du code numérique.....                                     | 61        |
| 4.5   | Écoulement stable.....  | 65        |
| 4.5.1   | Introduction .....  | 65        |
| 4.5.2   | Structure d'écoulement.....   | 70        |
| 4.5.3   | Transfert de chaleur:.....  | 70        |
| 4.5.4   | Transfert de masse .....  | 71        |
| 4.5.5   | Profils de la vitesse, la température et de la concentration.....     | 75        |
| 4.6   | Écoulement instable.....  | 78        |
| 4.6.1   | Evolution temporelle .....  | 78        |
| 4.6.2   | Structure de l'écoulement .....                                       | 91        |
| 4.6.3   | Transfert de chaleur .....  | 91        |
| 4.6.4   | Transfert de matière.....   | 91        |
| 4.6.5   | Évolution des transferts de chaleur et de matière .....               | 95        |
| 4.7   | Écoulement avec champ magnétique .....                                | 97        |
| 4.7.1   | L'effet du champ magnétique sur la structure d'écoulement .....       | 98        |
| 4.7.2   | L'effet du champ magnétique sur le transfert de chaleur.....          | 98        |
| 4.7.3   | L'effet du champ magnétique sur le transfert de matière .....         | 98        |
| Conclusion et recommandation.....                   |   | 116       |
| Références bibliographiques .....                   |   | 118       |
| Résumés .....                                       |   | 124       |

## INTRODUCTION

Le phénomène du transfert de chaleur et de masse par convection naturelle à double diffusion est dû à la présence simultanée des gradients de température et de concentration. Ces gradients causent une distribution non uniforme de la densité du mélange qui provoque à son tour un mouvement convectif sous l'effet de la gravité. Dans la plupart des situations, que se soit dans la nature ou dans l'industrie, le fluide étudié est constitué de deux ou plusieurs composants. Ainsi les écoulements naturels engendrés portent le nom de convection naturelle à double diffusion ou bidiffusive ou bien de convection naturelle thermosolutale.

Lorsque les forces de volume, agissent dans le même sens la convection thermosolutale est dite coopérante, et dans le cas contraire elle est dite opposée.

Les phénomènes dus à la convection naturelle à double diffusion ou à la convection thermosolutale, sont fréquemment rencontrés aussi bien dans la nature que dans l'industrie.

Dans la nature, les exemples sont multiples et nous pouvons en citer quelques-uns : les mouvements convectifs dans les océans qui sont dus, d'une part, à la présence de gradient de température et, d'autre part, à la distribution non uniforme de la concentration du sel, la dispersion des polluants dans l'atmosphère (gaz nocifs) et dans le sol (déchets nucléaires) et la migration de l'humidité ou des sels minéraux dans les sols.

Les domaines d'applications industrielles sont nombreux et variés. Ces phénomènes interviennent, par exemple, lors des mécanismes de changement de phases des métaux où la convection affecte directement la structure micrographique et les propriétés mécaniques et thermo-physiques des alliages, lors des procédés de séchage de différents produits industriels et domestiques, au cours de divers procédés thermochimiques et électrochimiques, lors du stockage des gaz liquides, dans les réacteurs chimiques, dans les procédés d'oxydation ou de traitement des surfaces métalliques.

Par ailleurs, l'étude des mouvements des fluides conducteurs d'électricité en présence de champs magnétiques est désignée comme étant la magnétohydrodynamique (MHD). Ce nom compliqué recouvre simplement la notion de fluide (hydro) en mouvement (dynamique) dans

un champ magnétique (magnéto) ou M.H.D. Elle s'applique aux métaux liquides (mercure, métaux alcalins fondus aux plasmas, solution aqueuse).

Le but de notre travail est l'étude de la convection naturelle à double diffusion afin d'étudier, d'observer de déterminer l'influence de la variation d'un paramètre caractéristique, à savoir le nombre de Grashof solutal, sur l'écoulement et les transferts de chaleur et de masse et de détecter les instabilités thermosolutales dans le cas où les forces de volume sont opposantes. Ensuite nous cherchons à supprimer ces instabilités par l'application d'un champ magnétique uniforme, externe et constant appliqué verticalement sur l'écoulement considéré, en variant le nombre de Hartmann, paramètre caractérisant la valeur du champ magnétique.

Le contenu de ce mémoire est composé de quatre chapitres. Dans le premier chapitre nous présentons une revue bibliographique sur le phénomène de la convection naturelle thermosolutale et la magnétohydrodynamique et les domaines d'application dans la nature et dans l'industrie. Le deuxième chapitre est consacré à la définition de la géométrie étudiée, du modèle physique du problème et sa modélisation mathématique par des équations différentielles. Dans le troisième chapitre, nous décrivons la méthode numérique utilisée pour la résolution des équations mathématiques adimensionnelles obtenues dans le deuxième chapitre. Le quatrième chapitre est consacré à validation du code de calcul utilisé par comparaison avec les résultats numériques disponibles dans la littérature avec et sans champ magnétique et ensuite à la présentations et la discussions des divers résultats obtenus, dans les cas deux coopérant et opposant avec et sans champ magnétique. Nous terminons avec une conclusion générale sur les résultats obtenus et les perspectives envisagées.

# CHAPITRE I

# REVUE BIBLIOGRAPHIQUE



# 1. REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

L'importance du phénomène de la convection naturelle à double diffusion a fait l'objet de nombreux travaux expérimentaux, théoriques, analytiques et numériques.

Huppert et Turner [1] ont présenté des études concernant les phénomènes naturels, les applications industrielles, les expériences existantes aux laboratoires, les théories du phénomène de convection naturelle à double diffusion ainsi que l'observation de ces phénomènes dans l'océan et autres applications tels que l'astrophysique, la géologie. Turner [2] a exposé les divers phénomènes de convection naturelle à double diffusion et leurs applications dans la nature, tels que les océans, l'atmosphère, les stars, les métaux liquides ainsi que l'effet chimique et le stockage des gaz liquides.

En générale, La plupart des études de la convection naturelle à double diffusion sont classées selon les conditions aux limites qui s'imposent. On distingue :

- La convection naturelle à double diffusion où les gradients de température et de concentration sont imposés verticalement (les parois horizontales sont soumises à des températures et des concentrations différentes).
- La convection naturelle à double diffusion où les gradients de température et de concentration sont imposés horizontalement (les parois verticales sont soumises à des températures et des concentrations différentes)
- La température est imposée horizontalement mais la concentration est imposée verticalement.

Parmi les travaux expérimentaux sur la convection naturelle thermosolutale, on peut citer les expériences de Kamotani *et al* [3], Han et Kuehn [4], Kamakura et Ozoe [5], Wang et Chen [6], Wang et Chen [7] et Wang *et al.* [8], qui ont utilisé un système électrochimique contenant une Anode et une Cathode pour imposer les concentrations.

A faible rapport de forme et avec des forces de volume coopérantes et opposantes, Kamotani *et al* [3] ont étudié expérimentalement la convection thermosolutale dans une cavité rectangulaire. Les résultats obtenus montrent l'apparition de trois cellules dans le cas où les

poussées thermiques et solutales sont coopérantes ou opposantes quand  $N > 10$  et  $N > 6$  respectivement.

Han et Kuehn [4] ont fait des études expérimentale et numérique en utilisant une technique électrochimique avec des électrodes verticales maintenues à des températures différentes, en effectuant des photographies montrant l'évolution au cours du temps des structures multicellulaires dans une cavité dans le cas des forces de buoyancy opposantes et coopérantes. Ils ont présenté aussi les caractéristiques de l'écoulement multicellulaire qui incluent les profils de température et de concentration et les caractéristiques des transferts de chaleur et de masse.

Kamakura et Ozoe [5] ont présenté les résultats d'une étude combinée expérimentale et numérique de la convection naturelle à double diffusion avec un gradient horizontal de température et un gradient initial vertical de concentration, ce gradient est distribué linéairement de 0,5 au parois inférieure à -0,5 à la surface supérieure. Les calculs ont été portés pour les valeurs des paramètres suivantes:  $A=4$ ,  $Pr = 6$ ,  $Le= 100$ ,  $Ra = 10^6$  et un rapport de force de volume égal à  $N= 10$  et  $20$ . Les résultats obtenus pour la structure d'écoulement sont classés en deux phases:

- Pour  $N=10$  :
  - Au début, il y a formation de deux cellules juste au-dessous de la surface supérieure et au-dessus de la surface inférieure.
  - Après un certain temps d'autres cellules apparaissent.
  - A  $\tau = 0,6$  il y a quatre cellules de structure d'écoulement. Mais, après un temps plus long, ces cellules se confondent pour converger vers une cellule unique.
- Pour  $N=20$  :
  - Au début, il y a formation de deux cellules juste au-dessous de la surface supérieure et au-dessus de la surface inférieure.
  - Avec le temps les deux cellules se développent pour devenir encore plus grande.

Les résultats expérimentaux de Wang et Chen [6] montrent l'influence du rapport des forces de volume  $N$  sur la structure de l'écoulement dans le cas où les forces de volumes sont opposantes Ils ont observé une seule cellule principale avec deux cellules secondaires pour  $N= 1,68$  et trois cellules pour  $N=10,7$ .

Dans une autre expérience, Wang et Chen [7] ont utilisé un système électrochimique pour étudier la convection thermosolutale avec la combinaison horizontale des gradients de température et de concentration dans une cavité rectangulaire avec un rapport d'aspect est élevé. Les résultats obtenues montrent trois cellules dans le cas coopérant, avec les paramètres :  $A=3$ ,  $Gr_t=1,94 \times 10^8$ ,  $Gr_s=3,89 \times 10^8$  où  $A=H/L$  et une cellule principale avec une cellule secondaire avec  $A=7$ ,  $Gr_t=1,34 \times 10^8$ ,  $Gr_s=1,28 \times 10^9$ . Dans le cas opposant, dans le cas où  $A=7$ ,  $Gr_s=3,89 \times 10^8$  et le nombre Grashof thermique est varié, les résultats montrent l'apparition de quatre cellules pour  $Gr_t=7,75 \times 10^7$  et six cellules ou plus pour  $Gr_t=4,84 \times 10^8$ .

Dans leur travail expérimental sur la convection thermosolutale dans une cavité rectangulaire en présence de gradients horizontaux de température et de concentration, Wang *et al.* [8] ont aussi employé un système électrochimique. L'objectif principal de ce travail est d'étudier l'écoulement près des deux parois verticales. Ils ont utilisé la gamme des paramètres suivants :  $Sc=2200$ ,  $Pr=4 \div 7$ ,  $Gr_t=2,50 \times 10^6 \div 5,01 \times 10^7$ ,  $A=0,61 \div 3$  et  $N=0,05 \div 54,8$ . Les résultats expérimentaux obtenus pour cette gamme montrent :

Dans un premier type de test :  $A=3$ ;  $Gr_t=5,01 \times 10^7$ ;  $N=0,30$

- l'interaction entre les champs thermique et massique peut causer l'apparition des petites cellules secondaires, près des deux parois chaude et froide, dans la structure de l'écoulement. Si ces petites cellules apparaissent le long de la plaque en cuivre, leurs positions sont dépendantes du rapport des forces de volume lorsque le rapport d'aspect et le nombre de Grashof solutal sont fixés.

Dans un deuxième type de test :  $A=0,96$ ;  $N=54,8$ ;  $Gr_t=2,5 \times 10^6$ .

- il apparaît une série de couches multicellulaires séparées par des interfaces très minces, l'épaisseur de ces cellules est beaucoup plus mince que celle du premier test.

Sévélédér et Petit [9] se sont intéressés à l'influence des conditions aux limites de la température et de la concentration sur la structure d'écoulement de la convection naturelle à double diffusion dans une cavité carrée avec les paramètres suivants :  $Pr=2,2$ ,  $Sc=130$ ,  $Ra_t=5,5 \times 10^5$ ,  $Ra_s=1,3 \times 10^5$ , qui correspondent à un gaz liquéfié. Les résultats montrent l'apparition d'une seule cellule à cause de la condition de température et de concentration uniforme sur les parois verticales, mais la condition de la variation linéaire de température et de concentration fait apparaître quatre cellules.

L'état stable de la convection naturelle d'une solution d'eau salée a été investi expérimentalement par Lee *et al.* [10], où les gradients de température et de concentrations sont imposés horizontalement, le rapport de forme de la cavité varie de 0,2 à 2. Deux types de structure d'écoulement sont observés, l'écoulement unicellulaire et l'écoulement multicellulaire, dépendant du rapport de forces de buoyancy. Le nombre des cellules qui apparaissent dans le cas des forces opposantes d'origine thermique et solutale est plus grand dans le cas des forces alliées, à cause de la nature de la diffusion de la chaleur et de la concentration.

Dans le cas des forces de volumes coopérantes et opposantes, Lee *et al.* [11, 12] ont étudié la convection à double diffusion dans une cavité rectangulaire. Les résultats obtenus montrent, dans le cas opposant [11] quand  $N$  est modéré, que la structure de l'écoulement est multicellulaire. Les nombres moyens de Nusselt  $\overline{Nu}$  et de Sherwood  $\overline{Sh}$  sont variés en fonction des valeurs de  $N$ . Lorsque  $N$  augmente depuis une faible valeur,  $\overline{Nu}$  décroît de façon monotone jusqu'à une valeur caractéristique de la conduction ; néanmoins  $\overline{Sh}$  atteint une valeur minimale quand  $N$  prend une valeur modérée  $N=3$ . Ceci est qualitativement en accord avec les résultats expérimentaux antérieurs [3].

Une étude numérique de Han et Kuehn [13] complémentaire de l'expérimentale [4] a été faite pour les paramètres suivants :  $Pr = 8$ ,  $Sc = 2000$ ,  $Gr_t = 4 \times 10^5$ ,  $Gr_s = 3 \times 10^6$  et un rapport d'aspect  $A = H/L = 4$  ; Les structures multicellulaires observées expérimentalement par les auteurs sont simulées avec succès et différents régimes de structure d'écoulement sont obtenus en fonction du rapport de  $N$  pour des conditions de force de buoyancy opposantes et coopérantes.

Lee et Hyun [14] ont étudié numériquement la convection naturelle à double diffusion dans une cavité rectangulaire. Les analyses faites pour un large domaine de nombre de Rayleigh solutal  $Ra_s$  et un nombre de Rayleigh thermique  $Ra_t = 10^7$  montrent deux régimes d'écoulement, le régime supercritique ( $Ra > Ra_c = 1,5 \times 10^4$ ) et le régime subcritique ( $Ra < Ra_c$ ).

L'état stable de la convection thermosolutale dans une cavité carrée remplie par l'air, a été étudié numériquement par Béghein *et al* [15], le premier cas consiste à étudier l'influence de force de volume sur les transferts de chaleur et de masse ; le nombre de Rayleigh thermique et de Lewis sont constants ( $Ra_t = 10^7$ ,  $Le = 1$ ) et le nombre de Rayleigh solutal varie ( $Ra_s = 10^5 \div 5, 10^7$ ). Dans le deuxième cas, l'influence du nombre de Lewis sur le mouvement

du fluide ( $Le=0,3\div 5$ ), pour les transferts de chaleur produisant l'écoulement ( $Ra_t=10^7$ ,  $Ra_s=0$ ), et pour le transfert de masse produisant l'écoulement ( $Ra_t=0$ ,  $Ra_s=10^7$ ).

Dans l'étude de la convection à double diffusion avec des gradients horizontaux de température et de concentration, Shyy et Chen [16] ont montré que l'effet du champ thermique est plus important avec l'augmentation de nombre de Rayleigh, ou avec l'augmentation du nombre de Lewis. L'augmentation du rapport de poussée  $N$ , la convection devient de plus en plus contrôlée par le champ solutal. Les résultats obtenus sont en bon accord avec l'étude expérimentale de Kamotani *et al.* [3]

Chang *et al.* [17, 18] ont étudié l'effet des rapports des forces de volume sur la structure de l'écoulement et les caractéristiques de fluctuations de la vitesse, la température et la concentration, Ils ont distingué trois différentes structures d'écoulement pour le cas où les forces de volumes sont opposées.

- Un écoulement multicouche pour un rapport de force élevé  $N = 5$ .
- Une cellule secondaire dominante pour un faible rapport de force  $N = 2 - 2,1$ .
- Et un régime d'écoulement mélangé entre les deux cas ( $N=2,15 - 2,2 - 2,5$ ).

La convection à double diffusion oscillatoire a été étudiée numériquement par Zahou et Zebib [19],  $Pr=0,71$ ,  $Sc=1,5\div 4,5$ . Le but fondamental de cette investigation est : prédire les paramètres critiques associés à ce phénomène et leur influence sur le transfert de chaleur et de masse (voir figure 1.1).

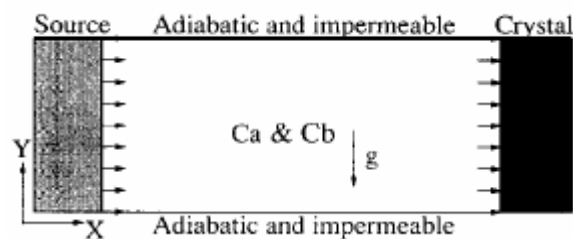


Figure 1.1. Représentation schématique du problème étudié : référence [19].

Les résultats obtenus indiquent que le début du mouvement oscillatoire se produit pour un nombre de Grashof égal à  $10^4$ . Ces résultats ont permis d'étudier l'effet du nombre de Schmidt sur  $Gr_{cr}$  ; quand  $Sc$  augmente  $Gr_{cr}$  diminue et l'effet de rapport d'aspect  $A$  sur  $Gr_{cr}$  ; quand  $A$  augmente  $Gr_{cr}$  diminue (voir figure 1.2).

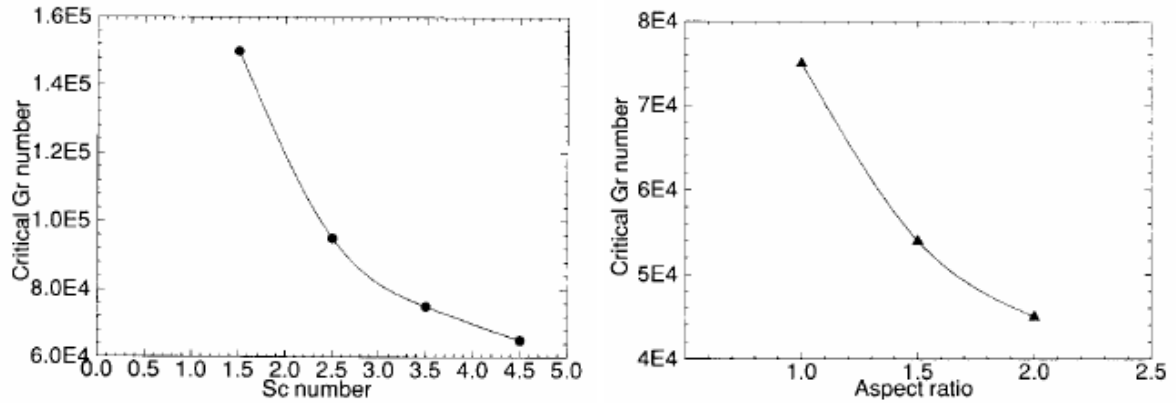


Figure 1.2. Variation de  $Gr_{cr}$  en fonction de  $Sc$  et de  $A$  : référence [19]

Bennacer et Gobin [20] ont étudié numériquement et analytiquement la convection naturelle thermosolutale dans une cavité rectangulaire verticale (voir figure 1.3). Ils ont utilisé l'analyse d'échelle et ont montré et vérifié numériquement que la distinction entre la dominance de l'écoulement par le transfert de thermique ou le transfert massique est dépendant des différents critères qui sont exprimés dans les termes de  $N/Le$  pour le transfert de chaleur et  $N/Le^{1/3}$  pour le transfert de masse.

L'analyse de Gobin et Bennacer [21] concerne l'influence des différents paramètres qui gouvernent le problème dans les caractéristiques du transfert de chaleur et sur la structure d'écoulement (voir figure 1.3).

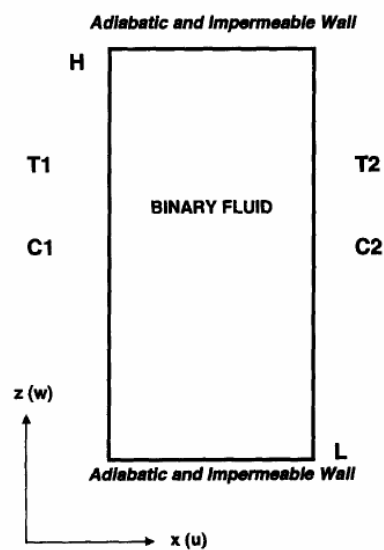


Figure 1.3. Représentation du problème et des conditions aux limites : référence [20] et [21].

Ils ont trouvé trois cas :

- Un régime unicellulaire où l'écoulement est dominant par l'effet thermique (N faible).
- Un régime multicellulaire, où l'effet thermique et solutale sont comparable au centre du cavité (N modérer).
- Un régime unicellulaire où la force solutal est dominante (N élevé). L'écoulement est globalement conduit par la force de volume solutale, avec une cellule thermique persistante dans le centre.

L'influence du nombre de Rayleigh thermique, du rapport de force de volume et du nombre de Lewis sur les nombres de Nusselt et de Sherwood, a été étudiée analytiquement et numériquement dans une cavité rectangulaire par Mamou *et al.* [22]. Les solutions numérique sont basées sur les équations gouvernants l'écoulement pour la gamme des paramètres suivantes :  $1 \leq Ra_t \leq 10^7$ ,  $0 \leq N \leq 10^5$ ,  $10^{-3} \leq Le \leq 10^3$ ,  $1 \leq A \leq 20$ . Les résultats obtenus montrent un bon agrément entre la prédiction analytique et la solution numérique.

L'effet du rapport des forces de volume sur la structure de l'écoulement a été étudié par Nishimura *et al.* [23] pour un mélange de gaz binaire dans le cas où les forces de volume thermique et solutale sont horizontales et opposées avec  $Ra_t = 10^5$ ,  $Pr = 1$ ,  $Le = 2$ ,  $N = 0,0 \div 2,2$  et  $A=2$ . Ils ont trouvé que l'écoulement oscillatoire se produit dans la limite de rapport des forces de buoyancy  $N = 0,9-1,222$ .

L'étude de Bounecer [24] concerne l'effet de nombre de Rayleigh thermique et solutal sur la structure d'écoulement, le transfert de chaleur et de mass, lorsque le rapport des deux nombres de Rayleigh est fixé à 10. La structure d'écoulement est constituée de deux cellules tournant dans le sens d'orientation de la poussée thermique. Le transfert convectif de chaleur et de masse s'intensifie avec l'augmentation des deux nombres de Rayleigh. L'analyse de la stabilité de l'écoulement montre que l'état instable prenne naissance avec le couple ( $Ra_t=10^6$   $Ra_c=10^5$ ). Lorsque le nombre de  $Ra_t$  est fixé à  $10^5$  et le nombre de  $Ra_c$  est varié entre  $10^4$  et  $10^6$ , la structure d'écoulement est bicellulaire, symétrique et stable pour  $Ra_c$  inférieur ou égal à  $5 \times 10^5$  et devient multicellulaire, asymétrique et instable lorsque  $Ra_c$  est égale à  $10^6$ .

L'influence du nombre de Lewis sur la convection naturelle à double diffusion dans une enceinte cubique, a été simulée par Sezai et Mohamed [25]. Les auteurs ont étudié le cas

tridimensionnel où les gradients de température et de concentration sont horizontalement opposés, avec les paramètres suivants:  $Pr=10$ ,  $10 < Ra_t < 2 \times 10^5$ , le rapport de force de flottabilité est :  $-2,0 < N < 0$  ;  $0,1 < Le < 150$ . Le premier cas le nombre de Rayleigh thermique et le rapport  $N$  sont des constants ( $Ra_t=10^5$ ,  $N=-0,5$ ) et Lewis varie de  $0,1 \div 150$ . Dans le deuxième cas  $N$  et  $Le$  sont des constants ( $N=-0,5$ ,  $Le=10$ ) et le nombre de Rayleigh thermique varie :  $10 < Ra_t < 2 \times 10^5$ , les résultats montrent l'apparition d'un écoulement secondaire dans le plans transversal quand  $N$  augmente et une variété de l'écoulement bifurcation est observée entre  $(-8,0 < N < 0)$ .

Bennacer *et al.* [26] ont étudié numériquement et analytiquement la transition de la convection naturelle a double diffusion dans une cavité rectangulaire avec  $A=2$ ,  $Pr=7$ ,  $Le=100$  et le nombre de Rayleigh thermique varie entre  $7 \times 10^3$  et  $7 \times 10^5$ . Les parois verticales sont différentiellement chauffées et le gradient solutal imposée verticalement voir (figure 1.4).

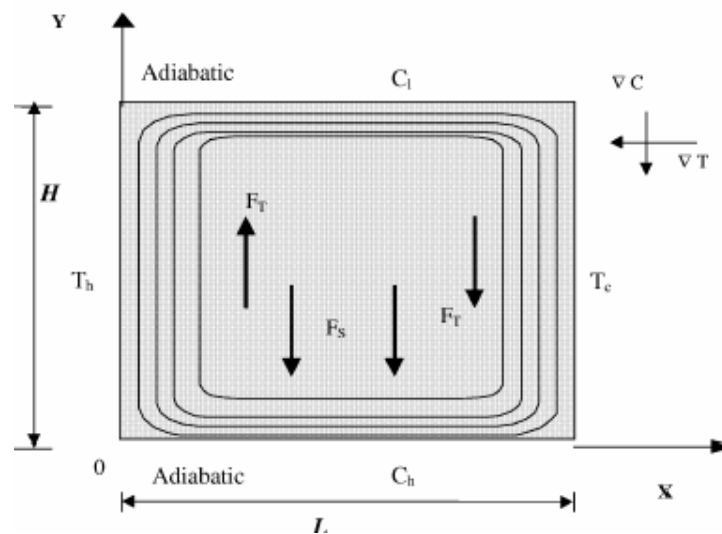


Figure 1.4. Schémas problème étudié avec un gradient horizontal de température et un gradient vertical de concentration : référence [26].

Trois cas ont pus être distingués :

- Un régime thermique convectif pour des valeurs relativement petites de  $N$  ( $N < 1$ ).
- Un régime diffusive thermique et solutale pour des valeurs élevées de  $N$  ( $N > 8$ ).
- Une cellule convective thermosolutale pour  $N$  modéré ( $1 < N < 8$ ).



Akrour *et al.* [27] ont étudié numériquement la convection à double diffusion dans une cavité horizontale ;  $A = 2$ ,  $Pr = 7,0$  et  $Le = 100$  (solution aqueuse). Le nombre de Rayleigh varient entre  $7 \times 10^3$  à  $7 \times 10^5$  et la cavité est soumise à un gradient de concentration verticale et un gradient de température horizontal. Ils ont analysé la stabilité d'un étang de stockage et identifié la transition d'une situation stable avec des transferts essentiellement diffusifs vers une situation défavorable (de moindre efficacité) à échange convectif. Les conclusions principales peuvent être résumés comme suit.

Ils ont constaté trois régimes d'écoulement:

- pour des valeurs faibles de  $N$ , des cellules convectives dues essentiellement aux forces thermiques se mettent en place et le transfert devient indépendant de  $N$ ,
- pour des valeurs de  $N$  plus élevées, le transfert est diffusif et la stratification stable en concentration supprime l'écoulement,
- pour des valeurs intermédiaires de  $N$  (fonction de  $A$ ,  $Le$  et de  $Gr_T$ ), le transfert diminue avec l'accroissement de  $N$ .

Dans la zone de transition, la solution numérique dépend de la condition initiale, et un effet d'hystérésis est observé. Dans cette situation, deux solutions distinguées sont présentées pour le même rapport de poussée  $N$ . L'ajoute du chauffage par le bas rend le système plus instable bien que le phénomène d'hystérésis persiste.

Benissaad et Afrid [28], se sont intéressés à l'influence de Grashof solutal sur l'évolution de l'écoulement, le transfert de chaleur et de matière et la distribution de la température et de la concentration, dans le cas où les forces de volumes opposants ou coopérants dans une enceinte rectangulaire a faible rapport d'aspect  $A=H/L$ . Les résultats obtenus montrent que l'écoulement est stable et unicellulaire ainsi que la convection thermique est dominante pour des nombres de Grashof solutal inférieur  $Gr_s < 2,2 \times 10^6$ . Au-delà de cette valeur l'écoulement devient multicellulaire, la dominance de la convection thermosolutale est observée pour  $Gr_s = 1,1 \times 10^7$  et l'écoulement devient unicellulaire.

Dans une étude numérique de la convection thermosolutale, dans le cas coopérant dans une cavité rectangulaire, Akrou et Kalache [29] ont montré l'influence des forces de volume et le nombre de Lewis sur le transfert de masse, le transfert de chaleur et sur la structuration

de l'écoulement. Ils ont trouvé que les caractéristiques du transfert de chaleur à des nombres de Lewis haut, diminuent avec l'augmentation de rapport de buoyancy mais le nombre de Sherwood augmenté considérablement avec  $N$ . Ils ont trouvé aussi une estimation de transfert de masse à l'aide d'une seule expression valable dans une large gamme de paramètres.

La stabilité de la convection naturelle à double diffusion bi et tridimensionnelle, dans une cavité rectangulaire remplis d'un électrolyte et soumise à des gradients horizontaux de température et de concentration, avec un champ magnétique externe a été étudié par Benissaad [30]. Les résultats obtenus dans le cas de la convection naturelle à double diffusion sont en bon concordance avec les travaux expérimentaux et numérique réalisés dans le domaine. Les résultats de la M.H.D, montrent qu'un champ magnétique vertical fournit l'effet de stabilisation le plus fort. Dans tous les cas étudiés, il a été observé que l'application d'un champ magnétique cause des modifications dans la structure d'écoulement.

Bessaih *et al.* [31] ont étudié l'effet combiné de la conductivité électrique des parois d'une enceinte ayant la configuration de Bridgman et l'effet d'un champ magnétique sur la convection naturelle d'un liquide métal pour la production des cristaux, et l'influence de la force de Lorentz sur les gradients des vitesses et de température.

Dans le cas de la magnétohydrodynamique, Chamkha et Al-Naser [32] ont étudié numériquement les caractéristiques hydromagnétiques d'un écoulement convectif bidiffusive dans une cavité rectangulaire remplie d'un mélange de gaz binaire (voir figure 1.5). L'oscillation du l'écoulement est observé en l'absence de tout champ magnétique. Mais en présence d'un champ magnétique externe appliqué suivant la direction  $X$  l'écoulement n'est plus oscillatoire.

Sayed-Ahmed et Attia [33] ont examiné l'effet du nombre de Hartmann, du paramètre de Hall  $m$  et du rapport d'aspect  $A$  ( $A=H/L$ ) sur l'écoulement et le transfert thermique. Ils ont montré que le nombre de Hartmann a un effet très apparent, sur l'écoulement et le transfert de chaleur, dans le cas de grande valeur de  $A$  et de petite valeur de  $m$ .

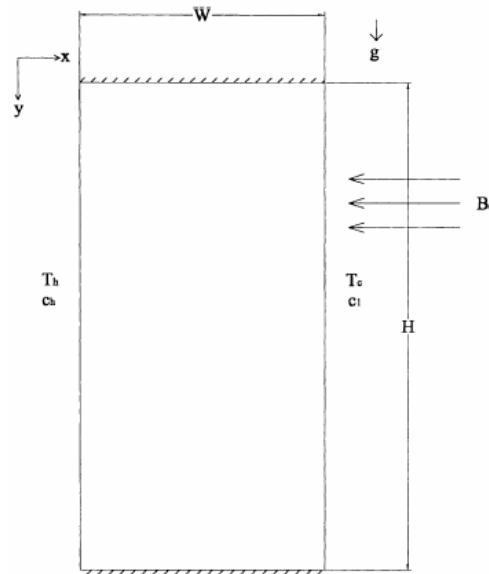


Figure 1.5. Schémas de configuration du problème étudié : référence [32].

Par ailleurs, Gelfgat et Bar-Yoseph [34] ont étudié l'effet du champ magnétique avec plusieurs orientations et plusieurs valeurs sur la stabilité des écoulements de l'état stationnaire (voir figure 1.6). Ils ont établi un diagramme de stabilité, qui représente la dépendance du nombre de Grashof critique  $Gr_c$  sur le nombre de Hartmann  $Ha$ . Ils ont aussi montré qu'un champ magnétique vertical fournit l'effet de la stabilisation le plus fort.

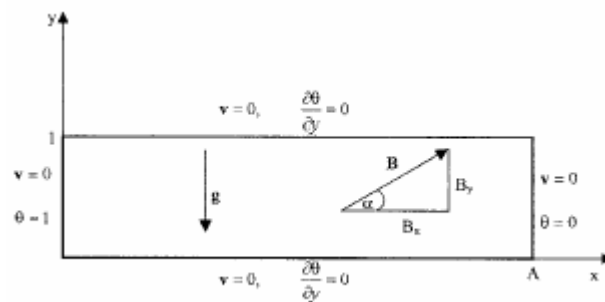


Figure 1.6. Schémas de configuration du problème : référence [34].

Berrahil [35] a étudié, dans des enceintes cylindriques, la convection mixte et la convection naturelle avec et sans champs magnétique. Les résultats numériques obtenus dans le cas de la convection naturelle avec et sans champs magnétique pour un fluide à faible nombre de Prandtl (cas des semi-conducteurs), l'instabilité apparaît sous forme d'oscillations

régulières pour des valeurs du nombre de Grashof critique  $Gr_{Cr} = 0,8 \times 10^6$ ;  $1,1 \times 10^6$ ;  $2 \times 10^6$ ;  $1,8 \times 10^6$ ;  $2,7 \times 10^6$ ;  $4,1 \times 10^6$  et  $6 \times 10^6$  correspondant aux nombres de Hartmann  $Ha = 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60$ . Ces oscillations sont produites par le régime multicellulaire de l'écoulement. Un diagramme de stabilité montre la dépendance du nombre de Grashof critique avec l'augmentation du nombre de Hartmann. L'auteur a constaté, que l'action du champ magnétique a un effet stabilisant sur l'écoulement.

Dans une cavité rectangulaire avec un rapport d'aspect égal à 4 et un faible nombre de Prandtl  $Pr = 0,014$ , Bouabdallah [36] a étudié l'instabilité hydrodynamique et thermique lors d'un changement de phase avec et sans champs magnétique. En absence de champ magnétique des cellules secondaires et principales apparaissent, et aussi que des oscillation de la vitesse et de la température, Par ailleurs l'application d'un champ magnétique orienté arbitrairement, a un effet sur la structure de l'écoulement, la température et que la plus forte stabilisations de l'écoulement est remarquée lorsque le champ magnétique est orienté verticalement.

# CHAPITRE II

# GÉOMÉTRIE ET MODÈLE MATHÉMATIQUE

## 2. GÉOMÉTRIE ET MODÈLE MATHÉMATIQUE

### 2.1 Description et géométrie du problème

La géométrie du problème considéré est une enceinte rectangulaire remplie d'une solution aqueuse de  $Pr=10$  et  $Sc=100$  (Sezai et Mohamed [26]). Cette enceinte a une longueur  $L$ , une hauteur  $H$  et un rapport d'aspect  $A=L/H$  égal à 4. Les parois horizontales sont adiabatiques, imperméables et non-conductrices d'électricité. Les deux parois verticales sont maintenues à deux températures uniformes et constantes, mais différentes. L'une de ces parois est connectée à une anode et l'autre paroi à une cathode. Cette connexion électrique permet le maintien de ces deux parois à deux concentrations uniformes, constantes et différentes. Ainsi, les deux parois verticales de l'enceinte sont soumises à des gradients horizontaux constants de température et de concentration.

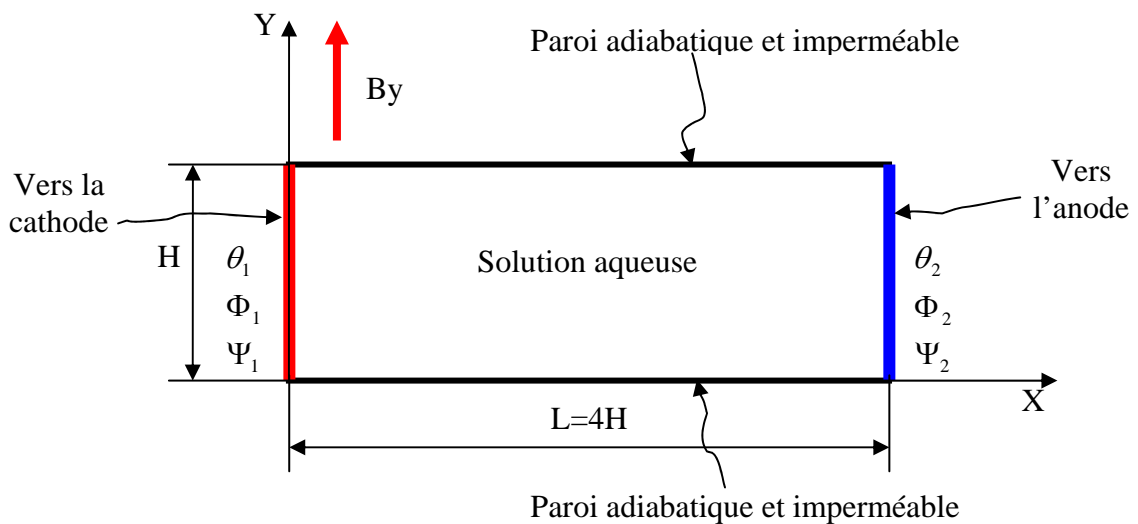


Figure 2.1. Géométrie du problème physique et conditions expérimentales

## 2.2 Hypothèses simplificatrices

Pour simplifier le modèle mathématique, on considère les hypothèses plus couramment utilisées dans ce type de problème. Nous supposons alors que :

1. La vitesse transversal suivant la direction Z est supposé négligeable par rapport aux composantes de la vitesse suivant X et Y, ceci nous ramène à un problème bidimensionnel comme le montre la figure 2.1.
2. la solution est un fluide newtonien et incompressible.
3. L'écoulement est supposé laminaire et transitoire.
4. il n'y a ni réaction chimique ni source de chaleur et de masse.
5. Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable.
6. Les interactions entre le transfert de chaleur et de masse (effets de Soret et Dufour) sont négligeables.
7. Toutes les propriétés thermo-physiques du fluide sont constantes sauf le terme de la densité du fluide dans les forces de volume qui varie linéairement avec la température et la concentration. On considère alors l'approximation de Bousinesq. Elle est donnée par la relation suivante :

$$\rho(T, C) = \rho_0 [1 - \beta_T (T - T_0) - \beta_s (C - C_0)] \quad (2.1)$$

$\rho_0 = \rho(T_0, C_0)$  : La masse volume de référence.

$T_0, C_0$  : la température et la concentration de référence.

Dans l'équation (2.1)  $\beta_T, \beta_s$  représente respectivement les coefficients d'expansion volumique thermique et solutal du fluide.

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_C ; \beta_T > 0 \quad (2.2)$$

$$\beta_s = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_T ; \beta_s > 0 \quad (2.3)$$

## 2.3 Formulation mathématique

La magnétohydrodynamique (M.H.D) est consacrée à l'étude des interactions entre le champ de vitesse et le champ d'induction magnétique, qui décrivent le mouvement d'un fluide conducteur dans un champ magnétique. Elle est donc régie par un système des équations de Maxwell et des équations de l'hydrodynamique.

Dans cette étude, l'enceinte est soumise à un champ magnétique externe uniforme et constant. Les équations mathématiques modélisant le problème sont obtenues en considérant le courant électrique  $\vec{J}$  et la force électromagnétique  $\vec{F}$

On définit le courant électrique  $\vec{J}$  par la loi d'Ohm :

$$\vec{J} = \sigma \left( -\vec{\nabla} \varphi + \vec{V} \wedge \vec{B} \right) \quad (2.4.a)$$

Le courant électrique est conservatif

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (2.4.b)$$

La force électromagnétique  $\vec{F}$  de Lorentz est donnée par :

$$\vec{F}_{EM} = \vec{J} \wedge \vec{B} \quad (2.4.c)$$

Les écoulements M.H.D de la convection naturelle thermosolutale susceptibles de se développer dans cette enceinte, sont régis par les équations de continuité, de quantité de mouvement, de conservation d'énergie, de transfert des espèces.

En supposant que la solution aqueuse n'est pas magnétisée, Le champ magnétique induit est aussi négligeable (à l'échelle du laboratoire) car le nombre de Reynolds magnétique  $R_M \ll 1$  [37], et La solution aqueuse n'est pas magnétisée  $\mu_m = 1$  [37]. Le système d'équations différentielles partielles décrivant ce problème s'écrit sous la forme suivante.

### 2.3.1 Équation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.5)$$



### 2.3.2 Équation de conservation de quantité de mouvement suivant x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + f_x \quad (2.6)$$

### 2.3.3 Équation de conservation de quantité de mouvement suivant y

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + g\beta_t(T - T_0) - g\beta_c(c - c_0) + f_y \quad (2.7)$$

### 2.3.4 Équation de conservation de l'énergie

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (2.8)$$

### 2.3.5 Équation de conservation de masse

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(uc)}{\partial x} + \frac{\partial(vc)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D \frac{\partial c}{\partial y} \right) \quad (2.9)$$

## 2.4 Les équations adimensionnelle

Pour mettre les équations précédentes (2.5) à (2.9) sous une forme adimensionnelle nous introduisons les variables adimensionnelles suivantes:

$$\left. \begin{aligned} (X, Y) &= \left( \frac{x}{H}, \frac{y}{H} \right), & (U, V) &= \left( \frac{u}{(\nu/H)}, \frac{v}{(\nu/H)} \right) \\ \tau &= \frac{t}{(H^2/\nu)}, & P &= \frac{P}{\rho_0 \left( \frac{\nu}{H} \right)^2} \\ \theta &= \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}, & \Phi &= \frac{C - C_0}{C_1 - C_0} \\ \Psi &= \frac{\varphi}{(\nu B_0)}, & J &= \frac{j}{(\nu/H) \sigma B_0} \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Où les grandeurs caractéristiques sont données :

$H$  : Longueur caractéristique.

$v/H$  : La vitesse caractéristique.

$H^2/\nu$  : Temps caractéristique.

$\rho_0 (v/H)^2$  : Pression caractéristique.

$(T_1 - T_0)$  : Température caractéristique.

$(C_1 - C_0)$  : Concentration caractéristique.

$(\nu B_0)$  : Potentielle caractéristique.

$(v/H) \sigma B_0$  : Courant électrique caractéristique.

En introduisant les variables adimensionnelles dans les équations précédentes (2.5) à (2.9) on obtient les adimensionnelles suivantes

$$A \tau = 0 ;$$

$$U = 0, V = 0, \theta = 0, \Phi = 0$$

Pour  $\tau > 0$  ; on obtient le système d'équation adimensionnelle suivant :

### 2.4.1 Équation de continuité

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (2.11)$$

### 2.4.2 Équation de conservation de quantité de mouvement suivant X

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial(UU)}{\partial X} + \frac{\partial(UV)}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + F_{EMX} \quad (2.12)$$

### 2.4.3 Équation de conservation de quantité de mouvement suivant Y

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial(VV)}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + (Gr_t \theta - Gr_c \Phi) + F_{EMY} \quad (2.13)$$

### 2.4.4 Équation de conservation de l'énergie

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial(U\theta)}{\partial X} + \frac{\partial(V\theta)}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \right] \quad (2.14)$$

### 2.4.5 Équation de conservation de masse

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial(U\Phi)}{\partial X} + \frac{\partial(V\Phi)}{\partial Y} = \frac{1}{Sc} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right) \right] \quad (2.15)$$

Dans les équations ci dessus on définit les paramètres caractéristiques adimensionnelles  $Gr_t$ ,  $Gr_s$ ,  $Pr$ ,  $Sc$  par :

$$Gr_t = \frac{g\beta_t \Delta T H^3}{\nu^2}, \quad Gr_s = \frac{g\beta_s \Delta C H^3}{\nu^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad Sc = \frac{\nu}{D}$$

Dans le cas, où le champ magnétique étant appliqué suivant Y, les composantes de la force de Lorentz et de la densité du courant suivant X et Y sont données par les expressions suivantes:

$$F_{EMX} = -U Ha^2 \quad (2.16.a)$$

$$F_{EMY} = 0 \quad (2.16.b)$$

Où  $Ha$  est le nombre de Hartmann définie par:

$$Ha = B H \left( \frac{\sigma}{\rho \nu} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.16.c)$$

$$J_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial X} \quad (2.16.d)$$

$$J_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \quad (2.16.e)$$

Le problème reste incomplet sans l'introduction des conditions aux limites que nous spécifions ci-dessous.

## 2.5 Conditions aux limites

### 2.5.1 Conditions aux frontières hydrodynamiques

On considère la condition de non-glissement dans tous les parois.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ à } X = 0; U = V = 0 \\ \bullet \text{ à } X = L; U = V = 0 \end{array} \right\} \forall Y \quad (2.17.a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ à } Y = 0; U = 0, V = 0 \\ \bullet \text{ à } Y = H; U = 0, V = 0 \end{array} \right\} \forall X \quad (2.17.b)$$

### 2.5.2 Conditions aux frontières thermiques et massiques

Les conditions aux frontières sur les deux parois horizontales adiabatique et imperméable sont exprimé par :

$$\left. \begin{array}{l} \text{à } Y = 0, \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0 \\ \text{à } Y = H, \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0 \end{array} \right\} \forall X \quad (2.18)$$

Et pour les deux parois verticales actives, on distingue deux cas :

- **Cas coopérant**

$$\left. \begin{array}{l} X = 0; \theta = 1, \Phi = 0 \\ X = 0; \theta = 0, \Phi = 1 \end{array} \right\} \forall Y \quad (2.18.a)$$



Figure 2.2. Conditions aux limites dans le cas coopérant.

- **Cas opposant**

$$\left. \begin{array}{l} X = 0; \theta = 1, \Phi = 0 \\ X = 4; \theta = 0, \Phi = 0 \end{array} \right\} \forall Y \quad (2.18.b)$$



Figure 2.3. Conditions aux limites dans le cas opposant.

Dans le cas où le champ magnétique est appliqué, les conditions aux limites sont exprimées par :

$$\left. \begin{array}{l} \text{à } X = 0; \theta = \Phi = \Psi = 1 \\ \text{à } X = 4; \theta = \Phi = \Psi = 0 \end{array} \right\} \forall Y \quad (2.18.c)$$



Figure 2.4 : conditions aux limites avec champ magnétique (cas opposant).

## 2.6 Transfert thermique et massique

Le calcul des taux de transfert de chaleur et de masse est exprimé à travers les nombres de Nusselt et de Sherwood locale adimensionnelle.

$$Nu = \left( -\frac{\partial \theta}{\partial X} \right) \quad (2.19)$$

$$Sh = \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial X} \right) \quad (2.20)$$

Dans notre cas où la cavité est soumise à des température et de concentration horizontaux par unité de surface, on définit les nombres de Nusselt et Sherwood moyen par.

$$\overline{Nu} = \int_0^1 \left( -\frac{\partial \theta}{\partial X} \right) dY \quad (2.21)$$

$$\overline{Sh} = \int_0^1 \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial X} \right) dY \quad (2.22)$$

# CHAPITRE III

# MÉTHODE NUMÉRIQUE

## 3. MÉTHODE NUMÉRIQUE

### 3.1 Introduction

La complexité des résolution des équations différentielles de transfert de chaleur et de mass et d'écoulement de fluide, pour la discrétisation de ces équations différentielle il existe plusieurs méthodes numériques se classent en trois grandes familles, à savoir les méthodes de

- La méthode des différences finies.
- La méthode des volumes finis.
- La méthode des éléments finis.

Dans le présent études, on utilisé la méthode des volumes finis.

### 3.2 Méthode des volumes finis

Comme introduite par Patankar [38], la méthode des volumes finis repose sur le fait que les équations qui décrivent les écoulements du fluide sont des équations de conservation, dont la forme fondamentale est une forme intégrale, et consiste à discrétiser cette forme intégrale des équations. Cette méthode consiste à diviser le domaine de calcule (voir Figure 3.1) en un nombre fini de volumes de contrôle ou mailles. Le maillage est structuré et uniforme. Les équations de base sont intégrées sur chaque volume de contrôle. Un maillage décalé est employé pour discrétiser les équations de Navier – Stocks. Autrement dit les composantes de la vitesse et les force électromagnétique sont stocké aux interfaces des volumes de contrôle, alors que la pression, la température et la concentration sont stockées aux centres des volumes de contrôle (voir Figure 3.2).



### 3.3 Maillage

Le domaine physique de calcul est divisé en un certain nombre de volumes. Chaque volume de contrôle a pour dimension  $\Delta X \cdot \Delta Y$ . Les faces d'un volume de contrôle typique sont localisées aux points **e**, **w**, **n**, **s** (voir figure 3.1).

Notons que **P** est le centre du volume de contrôle considéré et **E**, **W**, **N**, **S** sont les centres des volumes de contrôles adjacents situés respectivement à l'Est, à l'Ouest, au Nord et au Sud.

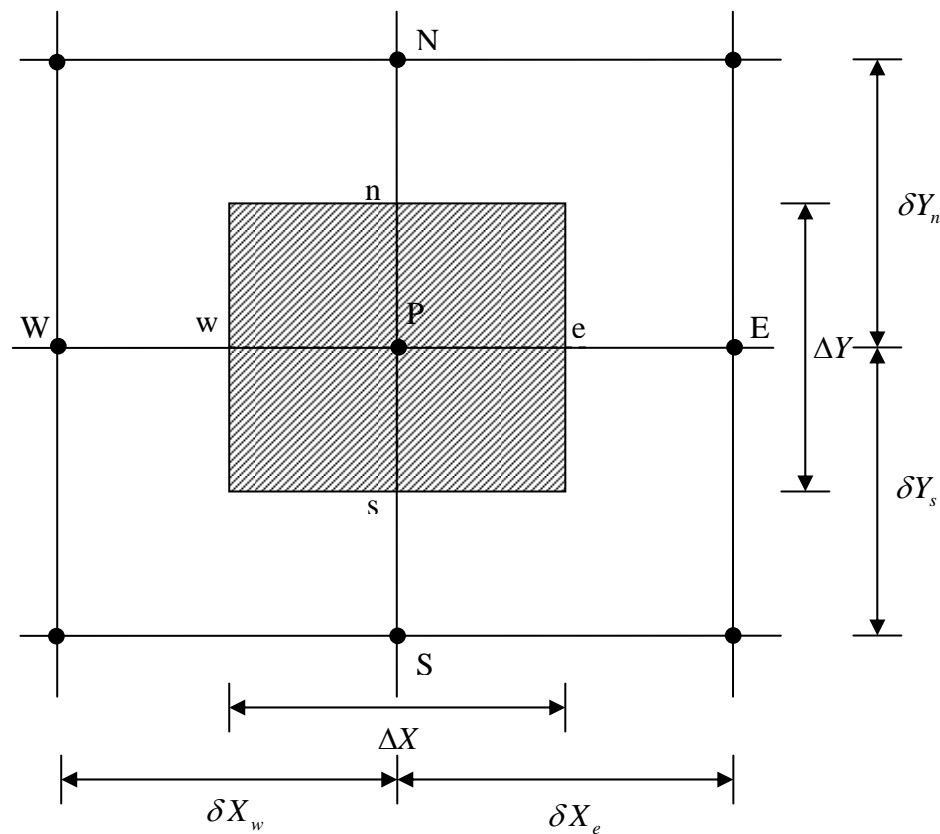


Figure 3.1 : volume de contrôle associé à la variable générale de transport.

### 3.4 Stockage des variables

Les variables dépendantes des quantités scalaires pression, température et concentration ( $P$ ,  $\theta$ ,  $\Phi$ ) sont stockées aux centres des volumes finis (figure 3.2). Par contre, les quantités vectorielles (composantes  $U$ ,  $V$ ,  $F_{EXM}$ ,  $F_{EYM}$ , ...) sont localisées aux interface de volume de contrôle  $e$ ,  $w$ ,  $n$ ,  $s$  (figure 3.2). Les équations de quantité de mouvement sont résolues dans des volumes finis décalés vers la droite et vers le haut. Ce type de maillage, permet une meilleure estimation des flux convectifs. Et une bonne estimation des forces de pression dans les équations de quantité de mouvement.

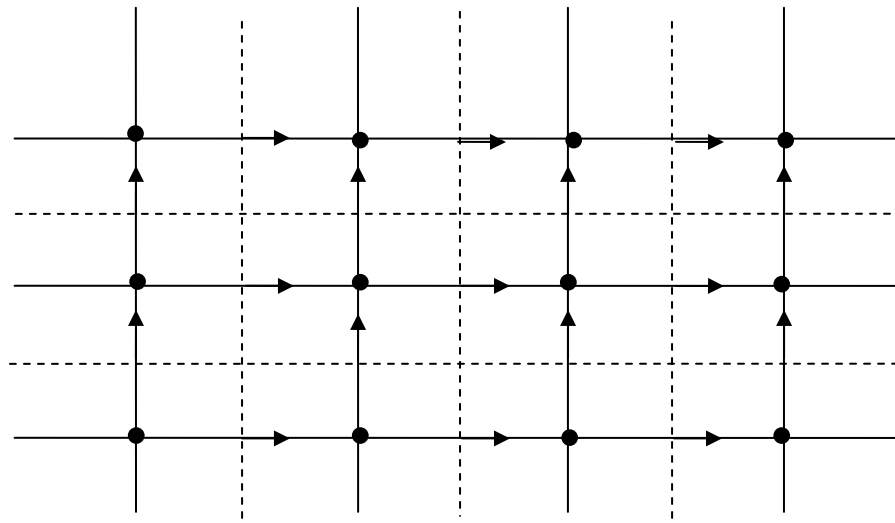


Figure 3.2 : stockage des variables scalaires et les quantités vectorielles.

- : Les variables scalaires ( $P$ ,  $\theta$ ,  $\Phi$ ) sont stockées aux nœud du maillage.
- : La vitesse  $U$  et  $F_{EXM}$  sont stockés sur la face du volume de contrôle associé à la variable scalaire
- ↑ : La vitesse  $V$  et  $F_{EYM}$  sont stockés sur la face du volume de contrôle associé à la variable scalaire

### 3.5 Forme générale de l'équation de transport

Les équations différentielles aux dérivées partielles adimensionnelles présentées dans le chapitre II (2.15)-(2.19) peuvent se mettre sous la forme générale d'une équation de transport

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial(U\Phi)}{\partial X} + \frac{\partial(V\Phi)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right) + S_{\Phi} \quad (3.1)$$

| Equation                        | $\Phi$   | $\Gamma$       | $S_{\Phi}$   |
|---------------------------------|----------|----------------|--|
| Continuité                      | 1        | 0              | 0  |
| Quantité de mouvement suivant X | $U$      | 1              | $-\frac{\partial P}{\partial X} + F_{EMX}$                             |
| Quantité de mouvement suivant Y | $V$      | 1              | $-\frac{\partial P}{\partial Y} + (Gr_t \theta - Gr_c \Phi) + F_{EMY}$ |
| Energie                         | $\theta$ | $\frac{1}{Pr}$ | 0  |
| concentration                   | $\phi$   | $\frac{1}{Sc}$ | 0  |

Tableau 3.1. Variable  $\Phi$ , coefficient de diffusion  $\Gamma$  et terme source  $S_{\Phi}$  pour les équations de notre problème

### 3.6 Discrétisation

#### 3.6.1 Intégration l'équation générale de transport

on fait l'intégration sur le volume de contrôle et sur le temps on trouve :

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w \frac{\partial \phi}{\partial \tau} dXdYd\tau + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w \frac{\partial U\phi}{\partial X} dXdYd\tau + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w \frac{\partial V\phi}{\partial Y} dXdYd\tau = \quad (3.2)$$

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w \frac{\partial}{\partial X} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) dXdYd\tau + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w \frac{\partial}{\partial Y} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right) dXdYd\tau + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w S_{\phi} dXdYd\tau$$

L'intégration des différents termes s'effectue comme suit :

*Terme de la variation temporelle :*

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial\phi}{\partial\tau} dXdYd\tau = (\phi_p^1 - \phi_p^0) \Delta X \Delta Y \quad (3.2.1)$$

$\phi_p^0$  et  $\phi_p^1$  représentent les valeurs du  $\phi$  au point P aux temps  $\tau$  et  $\tau + \Delta\tau$  respectivement

*Termes de transport diffusif:*

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial}{\partial X} \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial X} \right) dXdYd\tau + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial}{\partial Y} \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial Y} \right) dXdYd\tau = \\ \left[ \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial X} \right)_e - \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial X} \right)_w \right] \Delta Y \Delta \tau + \left[ \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial Y} \right)_n - \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial Y} \right)_s \right] \Delta X \Delta \tau \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

*Termes de transport convectif:*

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial U \phi}{\partial X} dXdYd\tau + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial V \phi}{\partial Y} dXdYd\tau = \\ [(U \phi)_e - (U \phi)_w] \Delta Y \Delta \tau + [(V \phi)_n - (V \phi)_s] \Delta X \Delta \tau \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

*Terme source:*

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e S_{\phi} dXdYd\tau = \bar{S}_{\phi} \Delta X \Delta Y \Delta \tau \quad (3.2.4)$$

Après intégration, et la division par  $\Delta\tau$  l'équation (3.4) devient

$$\begin{aligned} \frac{(\phi_p^1 - \phi_p^0)}{\Delta\tau} \Delta X \Delta Y + [(U \phi)_e - (U \phi)_w] \Delta Y + [(V \phi)_n - (V \phi)_s] \Delta X \\ = \left[ \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial X} \right)_e - \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial X} \right)_w \right] \Delta Y + \left[ \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial Y} \right)_n - \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial Y} \right)_s \right] \Delta X + \bar{S}_{\phi} \Delta X \Delta Y \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_e &= \frac{\Phi_E + \Phi_P}{2}, & \Phi_w &= \frac{\Phi_P + \Phi_W}{2} \\ \Phi_n &= \frac{\Phi_N + \Phi_P}{2}, & \Phi_s &= \frac{\Phi_P + \Phi_S}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.3.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial X} \Big|_e &= \frac{\Phi_E - \Phi_P}{(dX)_e}, & \frac{\partial \Phi}{\partial X} \Big|_w &= \frac{\Phi_W - \Phi_P}{(dX)_w} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial X} \Big|_n &= \frac{\Phi_N - \Phi_P}{(dY)_n}, & \frac{\partial \Phi}{\partial X} \Big|_s &= \frac{\Phi_S - \Phi_P}{(dX)_s} \end{aligned} \right\}, \quad (3.3.2)$$

En remplaçant ces expressions (3.3.1) et (3.3.2) dans l'équation (3.3) et Après réarrangement:

$$A_P \Phi_P = A_E \Phi_E + A_W \Phi_W + A_N \Phi_N + A_S \Phi_S + b \quad (3.4)$$

$$\left. \begin{aligned} A_E &= D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ A_W &= D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \\ A_N &= D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ A_S &= D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0) \end{aligned} \right\} \quad (3.4.1)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S - F_e + F_w - F_n + F_s + A_P^0 \quad (3.4.2)$$

$$A_P^0 = \frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta \tau} \quad (3.4.3)$$

Le terme source

$$b = \bar{S}_p \Delta X \Delta Y + A_P^0 \phi_P^0 \quad (3.4.3)$$

Où:

$A_P^0$  est le coefficient de la variable  $\phi$  au temps  $\tau$

$\phi_P^0$  est la valeur de  $\phi$  calculé au temps  $\tau$

$\bar{S}_p$  est le terme source .

Les flux convectifs :

$$\left. \begin{aligned} F_e &= U_e \Delta Y, & F_w &= U_w \Delta Y \\ F_n &= V_n \Delta X, & F_s &= V_s \Delta X \end{aligned} \right\} \quad (3.4.3)$$

Les flux diffusifs:

$$\left. \begin{aligned} D_e &= \frac{\Gamma_e \Delta Y}{(\delta X)_e}, & D_w &= \frac{\Gamma_w \Delta Y}{(\delta X)_w} \\ D_n &= \frac{\Gamma_n \Delta X}{(\delta X)_n}, & D_s &= \frac{\Gamma_s \Delta X}{(\delta X)_s} \end{aligned} \right\} \quad (3.4.4)$$

Les nombres de *Peclet* :

$$\left. \begin{aligned} P_e &= \frac{F_e}{D_e}, & P_w &= \frac{F_w}{D_w} \\ P_n &= \frac{F_n}{D_n}, & P_s &= \frac{F_s}{D_s} \end{aligned} \right\} \quad (3.4.5)$$

### 3.6.2 Différentes schéma de discrétisation:

Les profils approximatifs décrivant la variation de  $\phi$  entre les nœuds, sont exprimés par la fonction  $A(|P|)$  spécifique pour chaque schéma numérique. S. Patankar [38], a cité les cinq schémas suivants:

- Schéma de différents centrées

La fonction  $A(|P|)$  est donnée par l'expression suivante

$$A(|P|) = 1 - 0.5|P| \quad (3.5)$$

$$\left. \begin{aligned} A_E &= D_e (1 - 0.5|P|) + \max(-F_e, 0), & A_W &= D_w (1 - 0.5|P|) + \max(F_w, 0) \\ A_N &= D_n (1 - 0.5|P|) + \max(-F_n, 0), & A_S &= D_s (1 - 0.5|P|) + \max(F_s, 0) \end{aligned} \right\} \quad (3.5.1)$$

- Schéma amont (Upwind)

La fonction  $A(|P|)$  est donnée par l'expression suivante

$$A(|P|) = 1 \quad (3.6)$$

$$\left. \begin{aligned} A_E &= D_e + \max(-F_e, 0), & A_W &= D_w + \max(F_w, 0) \\ A_N &= D_n + \max(-F_n, 0), & A_S &= D_s + \max(F_s, 0) \end{aligned} \right\} \quad (3.6.1)$$

- Schéma Hybride

C'est un schéma couplé de deux schémas, centré et amont.

$$P < -2 \text{ Amont}$$

$$-2 < P < +2 \text{ Différences centrées}$$

$$+2 < P \text{ Amont}$$

La fonction  $A(|P|)$  est donnée par l'expression suivante

$$A(|P|) = \max(0, 1 - 0.5|P|) \quad (3.7)$$

$$\left. \begin{aligned} A_E &= \max\left(-F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0\right), & A_W &= \max\left(F_w, D_w + \frac{F_w}{2}, 0\right) \\ A_N &= \max\left(-F_n, D_n - \frac{F_n}{2}, 0\right), & A_S &= \max\left(F_s, D_s + \frac{F_s}{2}, 0\right) \end{aligned} \right\} \quad (3.7.1)$$

- Schéma exponentiel

$$A(|P|) = \frac{|P|}{\exp^{|P|} - 1} \quad (3.8)$$

$$\left. \begin{aligned} A_E &= \frac{F_e}{\exp\left(\frac{F_e}{D_e}\right) - 1}, A_W = \frac{F_w}{\exp\left(\frac{F_w}{D_w}\right) - 1} \\ A_N &= \frac{F_n}{\exp\left(\frac{F_n}{D_n}\right) - 1}, A_S = \frac{F_s}{\exp\left(\frac{F_s}{D_s}\right) - 1} \end{aligned} \right\} \quad (3.8,1)$$

- Schéma de puissance

$$A(|P|) = \max(0, (1 - 0.5|P|)^5) \quad (3.9)$$

$$\left. \begin{aligned} A_E &= D_e \max[0, (1 - 0.1|P_e|)^5] + \max(-F_e, 0) \\ A_W &= D_w \max[0, (1 - 0.1|P_w|)^5] + \max(F_w, 0) \\ A_N &= D_n \max[0, (1 - 0.1|P_n|)^5] + \max(-F_n, 0) \\ A_S &= D_s \max[0, (1 - 0.1|P_s|)^5] + \max(F_s, 0) \end{aligned} \right\} \quad (3.9.1)$$

Dans notre étude on a considéré une discrétisation des équations différentielles en utilisant le schéma numérique hybride et une discrétisation temporelle implicite d'ordre un.



### 3.6.3 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant X

L'intégration de l'équation de quantité de mouvement suivant X sur un volume de contrôle décalé vers la droite (voir Figure 3.3.a) donne l'équation algébrique :

$$A_p(i, j)U^{n+1}(i, j) = A_E(i, j)U^{n+1}(i+1, j) + A_W(i, j)U^{n+1}(i-1, j) + A_N(i, j)U^{n+1}(i, j+1) + A_S(i, j)U^{n+1}(i, j-1) + b(i, j) \quad (3.10)$$

Avec :

$$\left. \begin{aligned} A_E(i, j) &= D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ A_W(i, j) &= D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \\ A_N(i, j) &= D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ A_S(i, j) &= D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0) \end{aligned} \right\} \quad (3.10.a)$$

$$A_p(i, j) = A_E(i, j) + A_W(i, j) + A_N(i, j) + A_S(i, j) + A_p^0(i, j) \quad (3.10.b)$$

$$A_p^0(i, j) = \frac{\delta X(i) \Delta Y(j)}{\Delta \tau} \quad (3.10.c)$$

Discrétisation du terme source :

$$b(i, j) = \frac{1}{\Delta \tau} \int_{\tau}^{\tau+\Delta \tau} \int_{s_w}^s \int_{s_e}^e \left( -\frac{\partial P}{\partial X} \right) dX dY d\tau + \frac{1}{\Delta \tau} \int_{s_w}^s \int_{s_e}^e (U^n) dX dY + \int_{\tau}^{\tau+\Delta \tau} \int_{s_w}^s \int_{s_e}^e [F_{EMX}] dX dY d\tau \quad (3.10.d)$$

Après l'intégration, le terme source devient :

$$b(i, j) = [P(i, j) - P(i+1, j)] \Delta Y(j) + \left[ F_{EMX} + \frac{U^n(i, j)}{\Delta \tau} \right] \delta X(i) \Delta Y(j) \quad (3.10.e)$$

Les termes convectifs :

$$\left. \begin{aligned} F_e = U_e \Delta Y &= \frac{1}{2} [U(i+1, j) + U(i, j)] \Delta Y(j) \\ F_w = U_w \Delta Y &= \frac{1}{2} [U(i-1, j) + U(i, j)] \Delta Y(j) \\ F_n = U_n \delta X_e &= \frac{1}{2} [V(i, j) + V(i+1, j)] \delta X_e(i) \\ F_s = U_s \delta X_e &= \frac{1}{2} [V(i, j-1) + V(i+1, j-1)] \delta X_e(i) \end{aligned} \right\} \quad (3.10.f)$$

Les termes diffusifs :

$$\left. \begin{aligned} D_e &= \frac{\Delta Y(j)}{\Delta X(i+1)}, D_w = \frac{\Delta Y(j)}{\Delta X(i)} \\ D_n &= \frac{\delta X_e(i)}{\delta Y_n(j)}, D_s = \frac{\delta X_e(i)}{\delta Y_s(j-1)} \end{aligned} \right\} \quad (3.10.g)$$

### 3.6.4 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant Y

L'intégration de l'équation de quantité de mouvement suivant Y sur un volume de contrôle décalé vers le haut (voir Figure 3.3.b) donne l'équation algébrique :

$$\begin{aligned} A_p(i, j)V^{n+1}(i, j) &= A_E(i, j)V^{n+1}(i+1, j) + A_W(i, j)V^{n+1}(i-1, j) + A_N(i, j)V^{n+1}(i, j+1) \\ &\quad + A_S(i, j)V^{n+1}(i, j-1) + b(i, j) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Avec :

$$\left. \begin{aligned} A_E(i, j) &= D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ A_W(i, j) &= D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \\ A_N(i, j) &= D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ A_S(i, j) &= D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0) \end{aligned} \right\} \quad (3.11.a)$$

$$A_p(i, j) = A_E(i, j) + A_W(i, j) + A_N(i, j) + A_S(i, j) + A_p^0(i, j) \quad (3.11.b)$$

$$A_p^0(i, j) = \frac{\Delta X(i)\delta Y(j)}{\Delta \tau} \quad (3.11.c)$$

Discrétisation du terme source:

$$\begin{aligned} b(i, j) &= \frac{1}{\Delta \tau} \int_{\tau}^{\tau+\Delta \tau} \int_{s_w}^{s_e} \int_{w}^e \left(-\frac{\partial P}{\partial Y}\right) dXdYd\tau + \frac{1}{\Delta \tau} \int_{s_w}^{s_e} \int_{w}^e U^n(i, j) dXdY + \int_{\tau}^{\tau+\Delta \tau} \int_{s_w}^{s_e} \int_{w}^e F_{EMY} dXdYd\tau \\ &\quad + \frac{1}{\Delta \tau} \int_{\tau}^{\tau+\Delta \tau} \int_{s_w}^{s_e} \int_{w}^e (Gr_r \theta) dXdYd\tau + \frac{1}{\Delta \tau} \int_{\tau}^{\tau+\Delta \tau} \int_{s_w}^{s_e} \int_{w}^e (Gr_s \Phi) dXdYd\tau \end{aligned} \quad (3.11.d)$$

Après l'intégration, le terme source devient :

$$b(i, j) = [P(i, j) - P(i, j + 1)]\Delta X(i) + \quad (3.11.e)$$

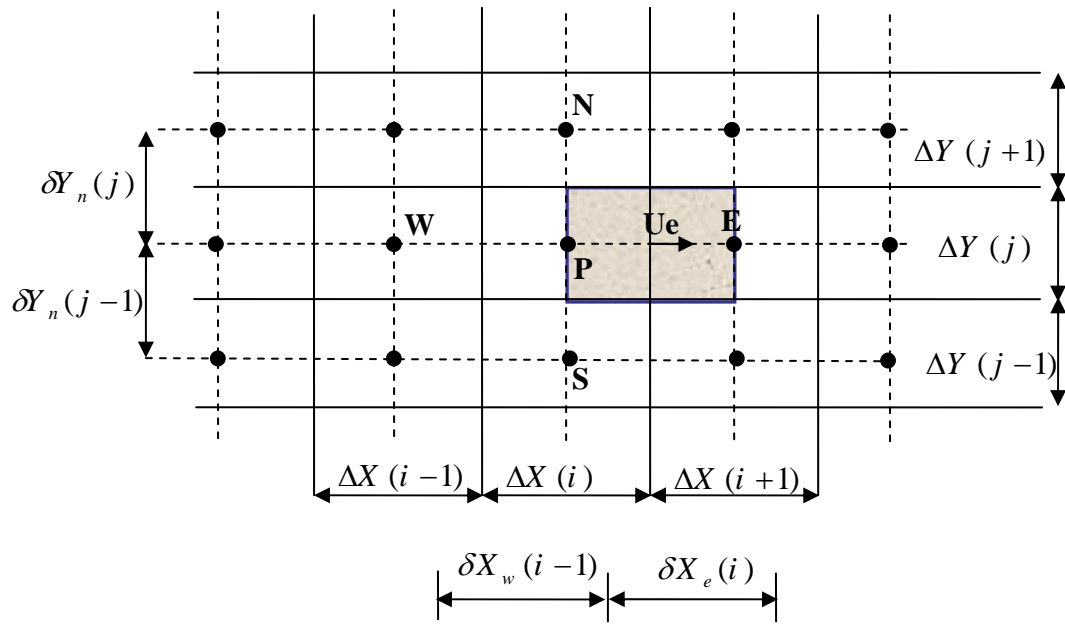
$$\left[ Gr_t \frac{[\theta(i, j) + \theta(i, j + 1)]}{2} + Gr_s \frac{[\Phi(i, j) + \Phi(i, j + 1)]}{2} + \frac{V^n(i, j)}{\Delta \tau} + F_{EMV}(i, j) \right] \Delta X(i) \delta Y(j)$$

Les termes convectifs :

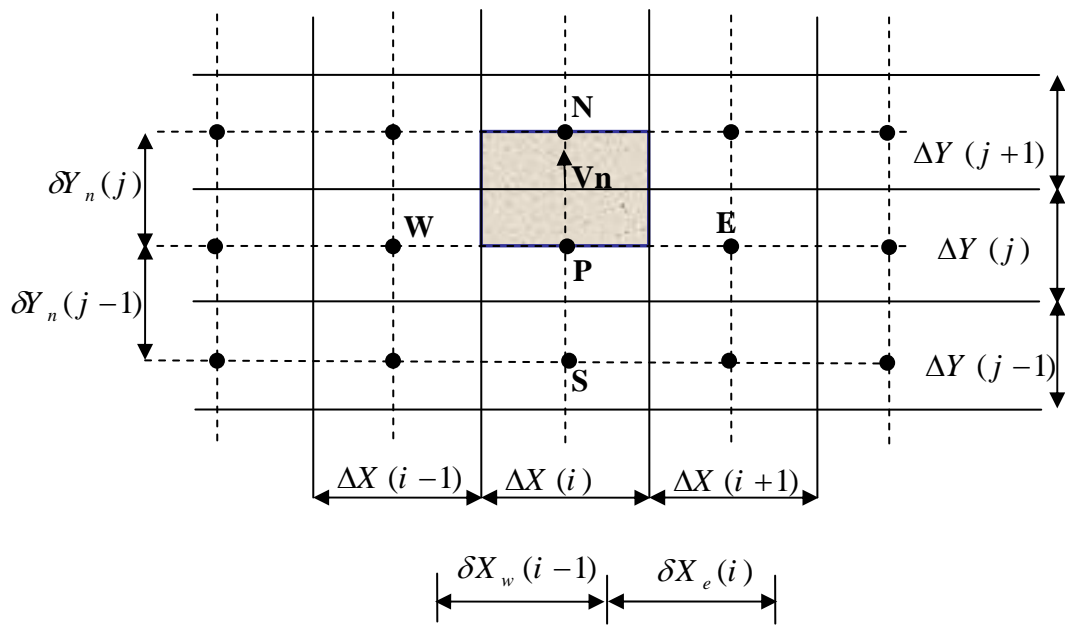
$$\left. \begin{aligned} F_e = U_e \delta Y_n &= \frac{1}{2} [U(i, j) + U(i, j + 1)] \delta Y_n(j) \\ F_w = U_w \delta Y_n &= \frac{1}{2} [U(i - 1, j) + U(i - 1, j + 1)] \delta Y_n(j) \\ F_n = V_n \Delta X &= \frac{1}{2} [V(i, j) + V(i, j + 1)] \Delta X(i) \\ F_s = V_s \Delta X &= \frac{1}{2} [V(i, j - 1) + V(i, j)] \Delta X(i) \end{aligned} \right\} \quad (3.11.f)$$

Les termes diffusifs :

$$\left. \begin{aligned} D_e = \frac{\delta Y_n(j)}{\delta X_e(i)}, D_w = \frac{\delta Y_n(j)}{\delta X_w(i - 1)} \\ D_n = \frac{\Delta X(i)}{\Delta Y(j + 1)}, D_s = \frac{\Delta X(i)}{\Delta Y(j)} \end{aligned} \right\} \quad (3.11.g)$$



(a)



(b)

Figure 3.3 : (a) Volume de contrôle décalé vers la droite.  
 (b) Volume de contrôle décalé vers le haut

### 3.6.5 Discrétisation de l'équation de l'énergie

L'intégration de l'équation de l'énergie adimensionnelle (2.14) sur un volume de contrôle typique (voir figure 3.1) donne l'équation algébrique :

$$A_p(i, j)\theta^{n+1}(i, j) = A_E(i, j)\theta^{n+1}(i+1, j) + A_W(i, j)\theta^{n+1}(i-1, j) + A_N(i, j)\theta^{n+1}(i, j+1) \\ + A_S(i, j)\theta^{n+1}(i, j-1) + b(i, j) \quad (3.12)$$

Avec :

$$A_E(i, j) = D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ A_W(i, j) = D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \quad (3.12.a)$$

$$A_N(i, j) = D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0)$$

$$A_S(i, j) = D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0)$$

$$A_p(i, j) = A_E(i, j) + A_W(i, j) + A_N(i, j) + A_S(i, j) + A_p^0(i, j) \quad (3.12.b)$$

$$A_p^0(i, j) = \frac{\Delta X(i)\Delta Y(j)}{\Delta \tau} \quad (3.12.c)$$

$$b(i, j) = \frac{\theta^0(i, j)}{\Delta \tau} \Delta X(i)\Delta Y(j) \quad (3.12.d)$$

Les termes convectifs :

$$\left. \begin{aligned} F_e &= U_e \Delta Y = U(i, j)\Delta Y(j) \\ F_w &= U_w \Delta Y = U(i-1, j)\Delta Y(j) \\ F_n &= V_n \Delta X(i) = V(i, j)\Delta X(i) \\ F_s &= V_s \Delta X(i) = V(i, j-1)\Delta X(i) \end{aligned} \right\} \quad (3.12.e)$$

Les termes diffusifs :

$$\left. \begin{aligned} D_e &= \frac{\Gamma_e \Delta Y}{(\delta X)_e}, & D_w &= \frac{\Gamma_w \Delta Y}{(\delta X)_w} \\ D_n &= \frac{\Gamma_n \Delta X}{(\delta Y)_n}, & D_s &= \frac{\Gamma_s \Delta X}{(\delta Y)_s} \end{aligned} \right\} \quad (3.12.f)$$

$$\text{Où : } \Gamma_e = \Gamma_w = \Gamma_n = \Gamma_s = \frac{1}{\text{Pr}} \quad (\text{voir tableau 3.1})$$

### 3.6.6 Discrétisation de l'équation de concentration

L'intégration de l'équation de l'énergie adimensionnelle (2.15) sur un volume de contrôle typique (voir figure 3.1) donne l'équation algébrique :

$$A_p(i, j)\Phi^{n+1}(i, j) = A_E(i, j)\Phi^{n+1}(i+1, j) + A_W(i, j)\Phi^{n+1}(i-1, j) + A_N(i, j)\Phi^{n+1}(i, j+1) \\ + A_S(i, j)\Phi^{n+1}(i, j-1) + b(i, j) \quad (3.13)$$

Avec :

$$\left. \begin{aligned} A_E(i, j) &= D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ A_W(i, j) &= D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \\ A_N(i, j) &= D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ A_S(i, j) &= D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0) \end{aligned} \right\} \quad (3.13.a)$$

$$A_p(i, j) = A_E(i, j) + A_W(i, j) + A_N(i, j) + A_S(i, j) + A_p^0(i, j) \quad (3.13.b)$$

$$A_p^0(i, j) = \frac{\Delta X(i)\Delta Y(j)}{\Delta \tau} \quad (3.13.c)$$

$$b(i, j) = \frac{\Phi^n(i, j)}{\Delta \tau} \Delta X(i)\Delta Y(j) \quad (3.13.d)$$

Les termes convectifs :

$$\left. \begin{aligned} F_e &= U_e \Delta Y = U(i, j)\Delta Y(j) \\ F_w &= U_w \Delta Y = U(i-1, j)\Delta Y(j) \\ F_n &= V_n \Delta X(i) = V(i, j)\Delta X(i) \\ F_s &= V_s \Delta X(i) = V(i, j-1)\Delta X(i) \end{aligned} \right\} \quad (3.13.e)$$

Les termes diffusifs :

$$\left. \begin{aligned} D_e &= \frac{\Gamma_e \Delta Y}{(\delta X)_e}, & D_w &= \frac{\Gamma_w \Delta Y}{(\delta X)_w} \\ D_n &= \frac{\Gamma_n \Delta X}{(\delta Y)_n}, & D_s &= \frac{\Gamma_s \Delta X}{(\delta Y)_s} \end{aligned} \right\} \quad (3.13.f)$$

$$\text{Où : } \Gamma_e = \Gamma_w = \Gamma_n = \Gamma_s = \frac{1}{Sc} \quad (\text{voire le tableau 3.1})$$

### 3.7 Algorithme SIMPLER

C'est l'abréviation de SIMPLE Revised. Il a été introduit par Patankar [38]. Dans cet algorithme l'équation de continuité discrétisée est utilisée pour obtenir une équation discrétisée pour la pression au lieu d'une équation pour la correction de pression. Le champ de pression intermédiaire est donc obtenu directement sans utiliser de correction.

Les différentes séquences de l'algorithme SIMPLER sont les suivantes:

1. Estimer un champ de vitesse.
2. Calculer les coefficients des équations de quantité de mouvement et calculer les pseudo- vitesses  $\hat{U}$  et  $\hat{V}$ .

$$\left. \begin{aligned} A_e U_e &= \sum_{nb=E,W,N,S} A_{nb} U_{nb} + b_U + \Delta Y(j)(P_p - P_e) \\ A_w U_w &= \sum_{nb=E,W,N,S} A_{nb} U_{nb} + b_U + \Delta Y(j)(P_w - P_p) \\ A_n U_n &= \sum_{nb=E,W,N,S} A_{nb} U_{nb} + b_V + \Delta X(i)(P_p - P_n) \\ A_s U_s &= \sum_{nb=E,W,N,S} A_{nb} U_{nb} + b_V + \Delta X(i)(P_s - P_p) \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

$b_U$   $b_V$ : contient tous les termes sources de l'équation discrétisée de quantité de mouvement suivant X et Y sauf le terme de pression.

$$\left. \begin{aligned} U_e &= \hat{U}_e + d_e(P_p - P_e) \\ U_w &= \hat{U}_w + d_w(P_w - P_p) \\ V_n &= \hat{V}_n + d_n(P_p - P_n) \\ V_s &= \hat{V}_s + d_s(P_s - P_p) \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Où les coefficient de pression  $d_e, d_w, d_n, d_s$  sont données par:

$$\left. \begin{aligned} d_e &= \frac{\Delta Y(j)}{A_E}, d_w = \frac{\Delta Y(j)}{A_w} \\ d_n &= \frac{\Delta X(i)}{A_N}, d_s = \frac{\Delta X(i)}{A_S} \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Dans l'algorithme SIMPLER les pseudo vitesse  $\hat{U}_e \hat{U}_w \hat{V}_n \hat{V}_s$  sont définies comme suit :

$$\left. \begin{aligned}
 \hat{U}_e &= \frac{\left[ \sum_{nb=E,W,N,S} (A_{nb}(i,j)U_{nb}(i,j) + b_U(i,j)) \right]}{A_e} \\
 \hat{U}_w &= \frac{\left[ \sum_{nb=E,W,N,S} (A_{nb}(i,j)U_{nb}(i,j) + b_U(i,j)) \right]}{A_e} \\
 \hat{V}_n &= \frac{\left[ \sum_{nb=E,W,N,S} (A_{nb}(i,j)V_{nb}(i,j) + b_V(i,j)) \right]}{A_n} \\
 \hat{V}_s &= \frac{\left[ \sum_{nb=E,W,N,S} (A_{nb}(i,j)V_{nb}(i,j) + b_V(i,j)) \right]}{A_n}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

La discrétisation de l'équation de continuité donne:

$$(U_e - U_w)\Delta Y + (V_n - V_w)\Delta X = 0 \quad (3.18)$$

En remplaçant  $U_e, U_w, U_n, U_s$  par leur valeur (3.15), dans l'équation discrétisée de continuité (3.17) on trouve :

$$\begin{aligned}
 A_p(i,j)P(i,j) &= A_E(i,j)P(i+1,j) + A_W(i,j)P(i-1,j) + A_N(i,j)P(i,j+1) + \\
 &A_S(i,j)P(i,j-1) + b(i,j)
 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Où :

$$A_p(i,j) = A_E(i,j) + A_W(i,j) + A_N(i,j) + A_S(i,j) \quad (3.19.a)$$

$$\left. \begin{aligned}
 A_E(i,j) &= d_E(i,j)\Delta Y(j) \\
 A_W(i,j) &= d_W(i-1,j)\Delta Y(j) \\
 A_N(i,j) &= d_N(i,j)\Delta X(i) \\
 A_S(i,j) &= d_S(i,j-1)\Delta X(i)
 \end{aligned} \right\} \quad (3.19.b)$$

$$b(i,j) = [\hat{U}_w(i-1,j) - \hat{U}_e(i,j)]\Delta Y(j) + [\hat{V}_s(i,j-1) - \hat{V}_n(i,j)]\Delta X(i) \quad (3.19.c)$$

Où les coefficient de pression  $d_E, d_W, d_N, d_S$  sont données par :

$$\left. \begin{aligned}
 d_e &= \frac{\Delta Y(j)}{A_E}, \quad d_w = \frac{\Delta Y(j)}{A_W} \\
 d_n &= \frac{\Delta X(i)}{A_N}, \quad d_s = \frac{\Delta X(i)}{A_S}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.19.d)$$



Calculer les coefficients de l'équation de pression discrétisée et résoudre cette équation pour obtenir le champ de pression  $P$ .

Considérer le champ de pression obtenu comme une estimation  $P^*$  et résoudre les équations de quantités de mouvement discrétisées pour obtenir  $U^*$  et  $V^*$

$$\left. \begin{aligned} A_e U_e^*(i, j) &= \sum_{nb=E, W, N, S} A_{nb} U_{nb}^* + b_U + \Delta Y(j)(P_P^* - P_E^*) \\ A_w U_w^*(i, j) &= \sum_{nb=E, W, N, S} A_{nb} U_{nb}^* + b_U + \Delta Y(j)(P_W^* - P_P^*) \\ A_n V_w^*(i, j) &= \sum_{nb=E, W, N, S} A_{nb} V_{nb}^* + b_V + \Delta X(i)(P_P^* - P_N^*) \\ A_s V_w^*(i, j) &= \sum_{nb=E, W, N, S} A_{nb} V_{nb}^* + b_V + \Delta X(i)(P_S^* - P_P^*) \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Calculer le terme  $b$  de l'équation de correction de pression et résoudre cette équation pour obtenir  $P'$

Les valeurs correct des composantes de vitesses et de pression vérifiant les équation de Navier Stokes sont données par :

$$\begin{aligned} P &= P^* + P' \\ U &= U^* + U' \\ V &= V^* + V' \end{aligned} \quad (3.21)$$

Avec  $P'$ ,  $U'$ ,  $V'$  la correction de pression et des vitesses

En remplaçant ces valeur correct dans l'équation (3.15) on obtient

$$\left. \begin{aligned} A_e (U_e^* + U_e') (i, j) &= \sum_{nb=E, W, N, S} A_{nb} (U_{nb}^* + U_{nb}') + b_U + \Delta Y(j)(P_P^* + P_P' - P_E^* - P_E') \\ A_w (U_w^* + U_w') (i, j) &= \sum_{nb=E, W, N, S} A_{nb} (U_{nb}^* + U_{nb}') + b_U + \Delta Y(j)(P_W^* + P_W' - P_P^* - P_P') \\ A_n (V_e^* + V_e') (i, j) &= \sum_{nb=E, W, N, S} A_{nb} (V_{nb}^* + V_{nb}') + b_V + \Delta X(i)(P_P^* + P_P' - P_N^* - P_N') \\ A_s (V_e^* + V_e') (i, j) &= \sum_{nb=E, W, N, S} A_{nb} (V_{nb}^* + V_{nb}') + b_V + \Delta X(i)(P_S^* + P_S' - P_P^* - P_P') \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

En soustrayant les expression (3.20) des expression (3.22) on trouve :

$$\left. \begin{aligned} A_e U'_e(i, j) &= \sum_{nb=E,W,N,S} A_{nb} U'_{nb} + a_e (P'_P - P'_E) \\ A_w U'_w(i, j) &= \sum_{nb=E,W,N,S} A_{nb} U'_{nb} + a_w (P'_W - P'_P) \\ A_n V'_e(i, j) &= \sum_{nb=E,W,N,S} A_{nb} V'_{nb} + a_n (P'_P - P'_N) \\ A_s V'_e(i, j) &= \sum_{nb=E,W,N,S} A_{nb} V'_{nb} + a_s (P'_S - P'_P) \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Pour obtenir les correction  $U'(i, j)$  et  $V'(i, j)$  on fait l'approximations des équations (3.23) on obtient les expressions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} A_e U'_e(i, j) &= a_e (P'_P - P'_E) \\ A_w U'_w(i, j) &= a_w (P'_W - P'_P) \\ A_n V'_e(i, j) &= a_n (P'_P - P'_N) \\ A_s V'_e(i, j) &= a_s (P'_S - P'_P) \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

$$\left. \begin{aligned} U'_e(i, j) &= d_e (P'_P - P'_E) \\ U'_w(i, j) &= d_w (P'_W - P'_P) \\ V'_e(i, j) &= d_n (P'_P - P'_N) \\ V'_e(i, j) &= d_s (P'_S - P'_P) \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

En remplaçant ces expressions dans (3.21) on obtient:

$$\left. \begin{aligned} P &= P^* + P' \\ U_e &= U_e^* + d_e (P'_P - P'_E) \\ U_w &= U_w^* + d_w (P'_W - P'_P) \\ V_n &= V_n^* + d_n (P'_P - P'_N) \\ V_s &= V_s^* + d_s (P'_S - P'_P) \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

En introduisant les expressions (3.26) dans l'équation de continuité discrétisée (3.18), on obtient l'équation correcte suivante de la pression :

$$\begin{aligned} A_P(i, j)P'(i, j) &= A_E(i+1, j)P'(i+1, j) + A_W(i-1, j)P'(i-1, j) + A_N(i, j+1)P'(i, j+1) \\ &\quad + A_S(i, j-1)P'(i, j-1) + b(i, j) \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$A_P(i, j) = A_E(i, j) + A_W(i, j) + A_N(i, j) + A_S(i, j) \quad (3.27.a)$$

$$\left. \begin{aligned} A_E(i, j) &= d_e(i, j)\Delta Y(j) \\ A_W(i, j) &= d_w(i-1, j)\Delta Y(j) \\ A_N(i, j) &= d_n(i, j)\Delta X(i) \\ A_S(i, j) &= d_s(i, j-1)\Delta X(i) \end{aligned} \right\} \quad (3.27.b)$$

$$b(i, j) = [U^*(i-1, j) - U^*(i, j)]\Delta Y(j) + [V^*(i, j-1) - V^*(i, j)]\Delta X(j) \quad (3.27.c)$$

### 3.8 Séquence de l'algorithme SIMPLER

1. Estimer le champ de vitesse.
2. Calculer les coefficients des équations de quantité de mouvement discrétisée, et les pseudo vitesse.
3. Calculer les coefficients de l'équation de pression.
4. Considérer le champ de pression de l'étape 3.
5. Calculer le terme source.
6. Corriger le champ de vitesse.
7. Déterminer la solution des équations de discrétisation correspondantes à la température et à la concentration.
8. S'il y a une convergence arrêter le calcul, sinon retourne à l'étape 2

### 3.9 Méthode de résolution

Les équations de (3.1) sont discrétisées avec la méthode des volumes finies elle donnent un système d'équations algébriques non linéaire, pour résoudre ce système d'équations on considère la notation indicielle afin de faciliter la programmation des étapes de calcul. Donc l'équation de discrétisation générale de transport (3.2) prend la forme suivante :

$$A_p(i, j)\phi^{n+1}(i, j) = A_E(i, j)\phi(i+1, j) + A_W(i, j)\phi(i-1, j) \\ + A_N(i, j)\phi^{n+1}(i, j+1) + A_S(i, j)\phi^{n+1}(i, j-1) + b'(i, j) \quad (3.28)$$

Tel que :  $1 \leq i \leq IL$  et  $1 \leq j \leq JL$

L'équation obtenue si dessus et aussi non linéaire à cause des coefficient  $A_{nb}$  qui dépendent des variables de transport  $\phi$  elles mêmes.

L'équation peut se mettre sous une forme matricielle

$$[A][\Phi] = [S] \quad (3.29)$$

Où

- $[A]$  est une matrice de  $(IL-2) \times (JL-2)$  élément
- $[\Phi]$  vecteur des inconnues  $\phi(i, j)$

### \* Méthode de TDMA (Algorithme de Thomas)

TDMA c'est l'abréviation de (Tri – Diagonal – Matrix –Algorithme)

Le système des équations obtenues étant non linéaires car les coefficients qui apparaissent dans l'équation de discrétisation dépendent des variables elles mêmes.

On va résoudre le système d'équations itérativement par double balayage en utilisant l'algorithme de THOMAS.

$$A_p(i, j)\phi^{n+1}(i, j) = A_E(i, j)\phi(i+1, j) + A_W(i, j)\phi(i-1, j) + A_N(i, j)\phi^{n+1}(i, j+1) + A_S(i, j)\phi^{n+1}(i, j-1) + \overline{S}_\phi(i, j) \quad (3.30)$$

En posant

$$-c_j\phi_{j-1} + a_j\phi_j - b_j\phi_{j+1} = d_j \quad (3.31)$$

Les coefficients de cette équation sont exprimés comme suit :

$$a_j = A_p(i, j) \quad (3.31.a)$$

$$b_j = A_N(i, j) \quad (3.31.b)$$

$$d_j = A_E(i, j)\phi(i+1, j) + A_W(i, j)\phi(i-1, j) + A_N(i, j)\phi^{n+1}(i, j+1) + \overline{S}_\phi(i, j) \quad (3.31.c)$$

La relation de récurrence pour  $\phi_j$  est donnée par :

$$\phi_j = P_j\phi_{j+1} + Q_j \quad (3.32)$$

Calculons  $\phi_{j-1}$  :

$$\phi_{j-1} = P_{j-1}\phi_j + Q_{j-1} \quad (3.33)$$

En substituant l'équation (3.33) dans (3.31), on obtient :

$$-c_j(P_{j-1}\phi_j + Q_{j-1}) + a_j\phi_j - b_j\phi_{j+1} = d_j \quad (3.34)$$

En réarrangeant cette équation, les coefficients  $P_j$  et  $Q_j$  s'obtiennent comme suit :

$$\phi_j = \frac{b_j}{a_j - c_j P_{j-1}} \phi_{j+1} + \frac{d_j + c_j P_{j-1}}{a_j - c_j P_{j-1}} \quad (3.35)$$

De (3.30) et (3.32) on a :

$$P_j = \frac{b_j}{a_j - c_j P_{j-1}} ; Q_j = \frac{d_j + c_j P_{j-1}}{a_j - c_j P_{j-1}} \quad (3.36)$$

L'algorithme de Thomas se résume comme suit

1. Calculer les quantités  $P_1$  et  $Q_1$  par :

$$P_1 = \frac{b_1}{a_1} \quad \text{et} \quad Q_1 = \frac{d_1}{a_1}$$

2. calculer à partir de (3.34) les quantités  $P_j$  et  $Q_j$  pour  $j = 1, 2, 3, \dots, JL$
3. Poser  $\phi_{jL} = Q_{jL}$
4. Utiliser l'équation (3.31) pour  $j = JL - 1, JL - 2, \dots, 3, 2, 1$  pour obtenir  $\phi_{jL-1}, \phi_{jL-2}, \dots, \phi_3, \phi_2, \phi_1$ .

### 3.10 Critère de convergence

Dans le cas où le régime est permanent La convergence est vérifiée après chaque itération. La différence entre deux valeurs successives au temps  $\tau$  et  $\Delta\tau$  des variable U, V,  $\theta$ ,  $\Phi$  et  $\Psi$  dans le cas de M.H.D doit être nulle ou négligeable

$$\text{Max} \left( \left| \frac{\phi_{i,j}^{\tau+\Delta\tau} - \phi_{i,j}^{\tau}}{\phi_{i,j}^{\tau+\Delta\tau}} \right| \right) \leq 10^{-4} \quad (3.37)$$

En plus, les bilans thermique et massique doivent être satisfaits en comparant les nombres de Nusselt et Sherwood près des parois verticales entre deux incréments de temps consécutifs de telle sorte qu'il y'a conservation de chaleur et de masse.

$$\left. \begin{array}{l} |\overline{Nu}_1 - \overline{Nu}_L| \leq 10^{-3} \\ |\overline{Sh}_1 - \overline{Sh}_L| \leq 10^{-3} \end{array} \right\} \quad (3.38)$$

$$\overline{Nu}_1 = \sum_{j=2}^{jl-1} \left( \frac{(\theta(1, j) - \theta(2, j))}{\delta X (1)} \right) \Delta Y (j) \quad (3.38.a)$$

$$\overline{Nu}_L = \sum_{j=2}^{jl-1} \left( \frac{(\theta(il-1, j) - \theta(il, j))}{\delta X (il-1)} \right) \Delta Y (j) \quad (3.38.b)$$

$$\overline{Sh}_1 = \sum_{j=2}^{jl-1} \left( \frac{(\Phi(1, j) - \Phi(2, j))}{\delta X (1)} \right) \Delta Y (j) \quad (3.38.c)$$

$$\overline{Sh}_L = \sum_{j=2}^{jl-1} \left( \frac{(\Phi(il-1, j) - \Phi(il, j))}{\delta X (il-1)} \right) \Delta Y (j) \quad (3.38.d)$$

CHAPITRE IV

RÉSULTATS ET  
DISCUSSIONS

## 4. RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

### 4.1 Paramètres de l'écoulement

En convection naturelle à double diffusion les paramètres caractéristiques adimensionnels sont :

1. Paramètres thermiques :
  - Le nombre de Grashof thermique  $Gr_t$
  - Le nombre de Prandtl  $Pr$  : mesure l'importance de la diffusion de la quantité de mouvement par rapport à la diffusion thermique
2. Paramètres solutales :
  - Le nombre de Grashof thermique  $Gr_s$
  - Le nombre de Prandtl  $Sc$  : mesure l'importance de la diffusion de la quantité de mouvement par rapport à la diffusion thermique
3. Paramètres couplé du transfert de chaleur et de masse :
  - Le rapport entre la poussée thermique et la poussée massique  $N$ .
  - Le nombre de Lewis  $Le$  : le rapport entre la diffusivité thermique et la diffusivité massique
4. Paramètre géométrique :
  - Le rapport d'aspect  $A$ , entre la longueur et la hauteur de la cavité

Le fluide qui circule dans la cavité est une solution aqueuse de sulfate de cuivre ( $CuSO_4 + H_2SO_4 + H_2O$ ) avec les valeurs des nombres adimensionnels suivantes [25] :

- $Pr = 10$ .
- $Sc = 100$ .
- $Le = 10$

Le code de calcul a été exécuté sur un micro-ordinateur PC de caractéristique : Pentium 4 3GHz de fréquence et 512 Mo de capacité de Mémoire.



## 4.2 Introduction

Dans ce chapitre, les calculs numériques sont faites à travers trois cas :

- L'influence du Grashof solutal sur la structure d'écoulement et sur la stabilité de solution, pour cela on fixe le nombre de Grashof thermique à  $Gr_t = 8,8 \times 10^5$  et on augmente progressivement le nombre de Grashof solutal  $Gr_s$  de  $1 \times 10^4$  jusqu'à  $1 \times 10^7$ . Ceci permet la détermination le nombre de Grashof solutal critique  $Gr_{s,cr}$  et aussi les trois mode de convection [20, 21].
  - Quand la convection naturelle est donnée par la poussée thermique.
  - En suite les poussées thermiques et solutales sont comparables.
  - En fin La convection est donnée par la poussée solutale
- Et par ailleurs, on applique un champ magnétique vertical, externe et uniforme sur les oscillations les plus fortes pour supprimer les instabilités et voir l'effet de ce champ magnétique sur la structure d'écoulement et sur les transferts de chaleur et de masse. On augmente progressivement le nombre de Hartmann de 10 jusqu'à la suppression des instabilités.
- Finalement, on cherche l'influence du nombre de Hartmann  $Ha$  sur le nombre de Grashof solutal critique  $Gr_{s,cr}$ , c'est-à-dire on cherche la valeur de  $Ha$  qui correspond à  $Gr_{s,cr}$ , et par la suite on trace la diagramme de stabilité.

Pour visualiser les instabilités physiques on a choisie 7 points arbitraires au sein de la cavité, le tableau 4.1 montre les coordonnées physiques et logiques de chaque point de test, alors que la figure 4.1 montre la localisation de ces points de test.

Dans la convection naturelle à double diffusion, l'orientation de la force de poussée solutale ou thermique, agit sur la structure d'écoulement, sur le sens de rotation de mouvement convectif et sur le processus de transfert de chaleur et de masse [11, 12,17, 18]. Ces deux poussées peuvent être soit en coopération soit en opposition, suivant les conditions aux limites de la température et de la concentration imposées sur les parois de la cavité. Pour bien comprendre et visualisé le sens d'orientation relative de ces deux poussées nous présentons sur la Figure.4.2 les sens d'orientation dans les deux cas.

Tableau 4.1 : coordonnées physique et logique des points de test de la stabilité de l'écoulement

| Point          | Position physique |       | Position logique |
|----------------|-------------------|-------|------------------|
|                | X                 | Y     | (I, J)           |
| P <sub>1</sub> | 0.057             | 0.069 | (5,10)           |
| P <sub>2</sub> | 0.388             | 0.790 | (25,98)          |
| P <sub>3</sub> | 1.991             | 0.889 | (122,110)        |
| P <sub>4</sub> | 1.495             | 0.495 | (92,62)          |
| P <sub>5</sub> | 2.289             | 0.356 | (140,45)         |
| P <sub>6</sub> | 3.842             | 1.516 | (234,20)         |
| P <sub>7</sub> | 3.611             | 0.807 | (220,110)        |

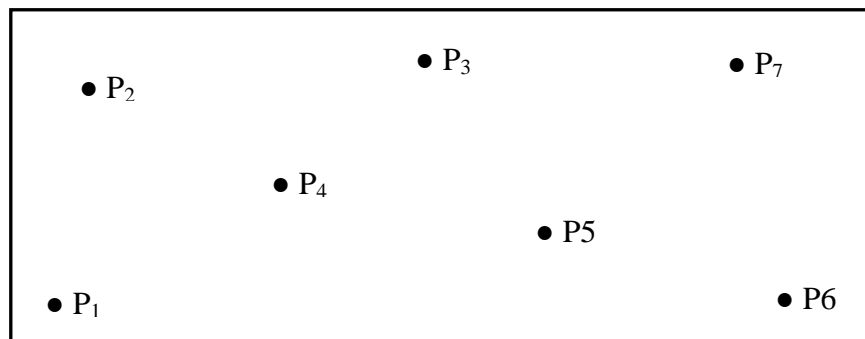


Figure 4.1. Localisation des points de test de la stabilité de l'écoulement.

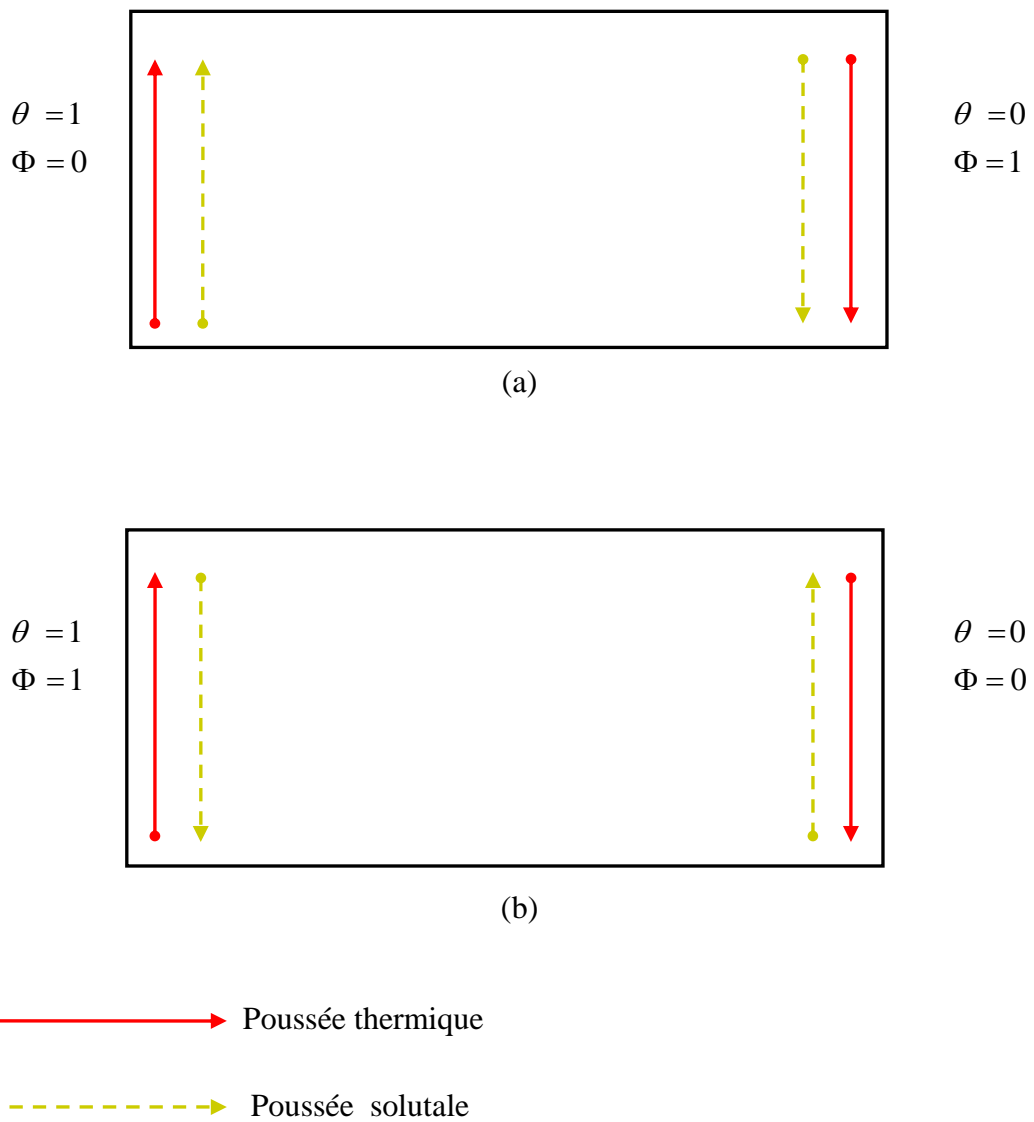


Figure 4.2. L'orientation relative des deux poussées thermique et solutale :

(a) cas de coopération, (b) cas d'opposition.

### 4.3 Test et choix du maillage

La précision des résultats numériques dépend des valeurs des paramètres de contrôle. Afin de montrer l'influence du maillage sur le résultat numérique, on a réalisé plusieurs tests sur une cavité rectangulaire ayant un rapport d'aspect  $A = 4$  et un nombre de Grashof thermique  $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Gr_s = 5 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$ . Pour cela nous avons testé deux types de maillage:

- Maillage uniforme (régulier).
- Maillage non uniforme (irrégulier).

Les résultats obtenus sont présentés dans les tableaux 4.2 et 4.3

#### 4.3.1 Premier test : maillage uniforme

Dans ce type de maillage on a testé cinq maillages différents tel que :  $98 \times 48$  ;  $122 \times 62$  ;  $164 \times 124$  ;  $244 \times 122$  ;  $292 \times 162$ . La figure 4.3 montre l'effet du maillage sur la structure d'écoulement, on voit clairement que la structure d'écoulement est sensible avec le changement de l'espace du maillage, pour le maillage  $98 \times 48$  ;  $122 \times 62$  et  $164 \times 124$  la structure d'écoulement est unicellulaire. Cette structure d'écoulement devient multicellulaire pour un maillage suffisamment fin ( $244 \times 124$ ,  $292 \times 162$ ). Ces deux maillages sont nécessaire pour une bonne résolution des couches limites et des zones de fort effet visqueux, comme c'est illustré sur la figure 4.4 par la vitesse horizontale  $U$  au centre de la cavité à ( $X=2$ ). La différence entre les maillages  $244 \times 124$  et  $292 \times 162$  est presque nulle comme illustré sur cette figure qui montre l'évolution de la vitesse  $U$ .

Le tableau 4.2 montre la sensibilité des résultats numérique aux maillages, on remarque que le transfert de masse est plus sensible au maillage que le transfert de chaleur.

Tableau 4.2 : Effets du maillage sur les différentes caractéristiques de l'écoulement.

Cas coopérant :  $Gr_1 = 8.8 \times 10^5$ ,  $Gr_3 = 5 \times 10^6$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$ .

| Caractéristiques        | Maillages |          |           |           |         |
|-------------------------|-----------|----------|-----------|-----------|---------|
|                         | 98 × 48   | 122 × 62 | 164 × 124 | 244 × 122 | 292×162 |
| $ U_{max} $             | 28,44     | 26,66    | 24,92     | 22,73     | 22,01   |
| $ V_{max} $             | 86,41     | 86,66    | 90,77     | 83,89     | 81,93   |
| $ \overline{Nu} _{X=0}$ | 18,14     | 19,21    | 18,35     | 15,35     | 14,46   |
| $ \overline{Nu} _{X=L}$ | 18,14     | 19,21    | 18,35     | 15,35     | 14,46   |
| $ \overline{Sh} _{X=0}$ | 23,63     | 29,34    | 36,58     | 51,91     | 56,49   |
| $ \overline{Sh} _{X=L}$ | 23,63     | 29,34    | 36,58     | 51,91     | 56,49   |

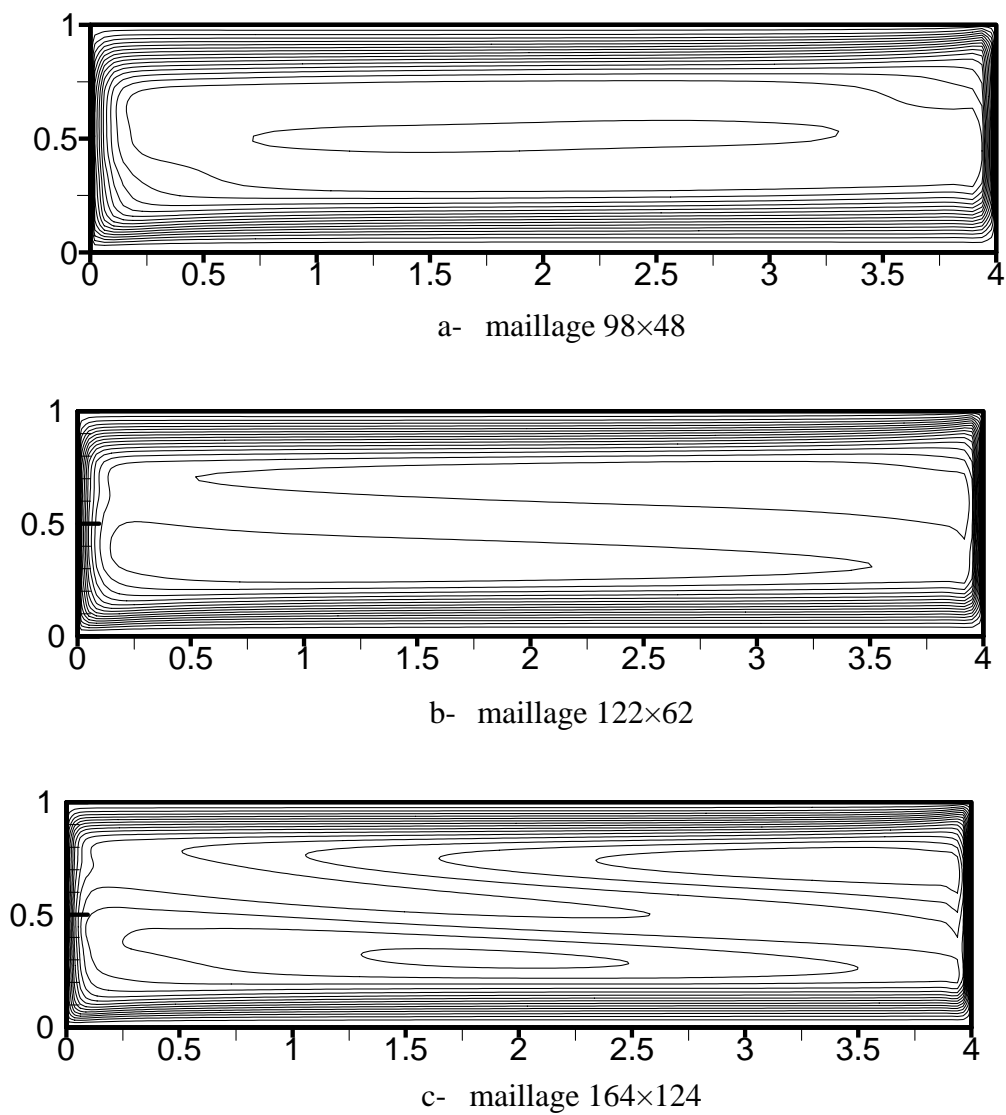


Figure 4.3. Effet de l'espaceur du maillage sur la structure d'écoulement : cas coopératif,  
 $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Gr_s = 5 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$ .

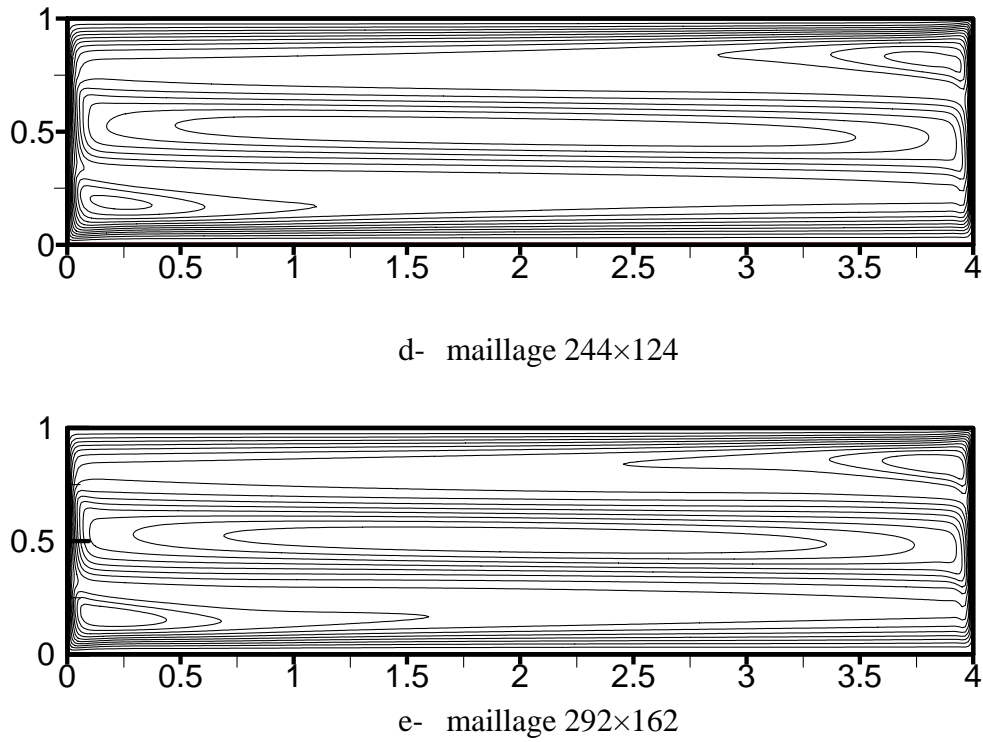


Figure 4.3. (suite). Effet de l'espaceur du maillage sur la structure d'écoulement ; cas coopérant,  $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Gr_s = 5 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$ .

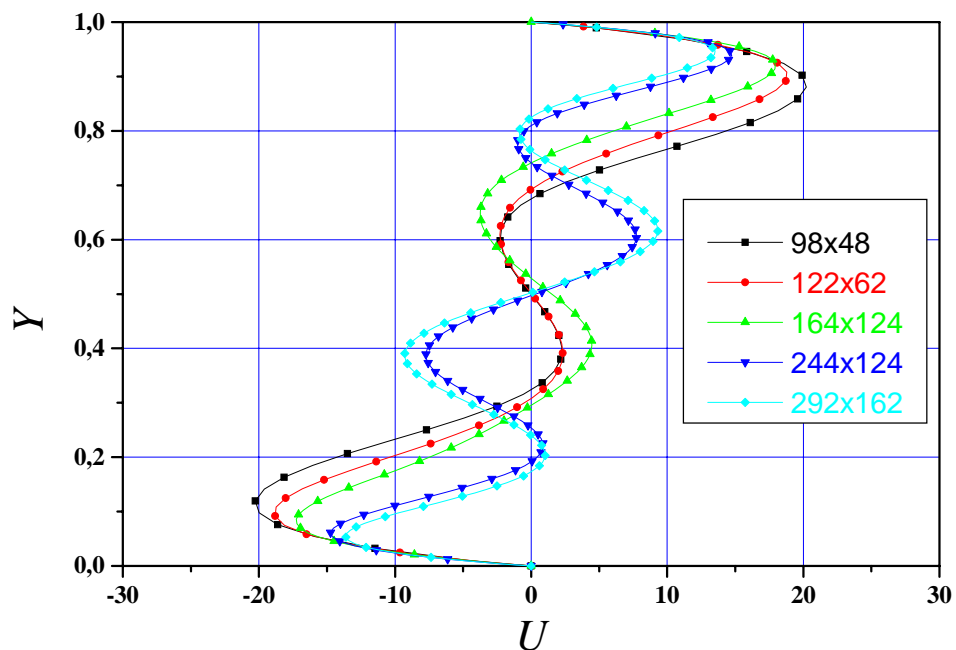


Figure 4.4. Sensibilité au maillage du profil de la composante horizontale de la vitesse  $U$  à  $X=2$  : cas coopérant,  $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Gr_s = 5 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$ .

### 4.3.2 Deuxième test : maillage non uniforme

Dans le deuxième test on a utilisé trois maillages non uniforme (irrégulier) raffinés suivant la direction X à savoir les valeurs de  $C = 1,01; 1,02; 1,03$  (c représente le coefficient la progression géométrique).

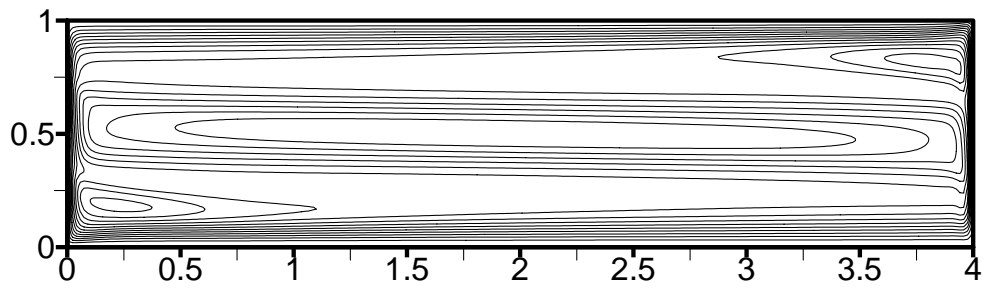
On remarque le premier maillage irrégulier correspond à nombre de Sherwood relativement supérieur de 10% à celui de maillage régulier. Par contre au fur et à mesure qu'on augmente le raffinement la différence relative devient très faible (0,8 % pour le 3<sup>ème</sup> cas).

Tableau 4.3 : Effet du maillage sur les différentes caractéristiques de l'écoulement.

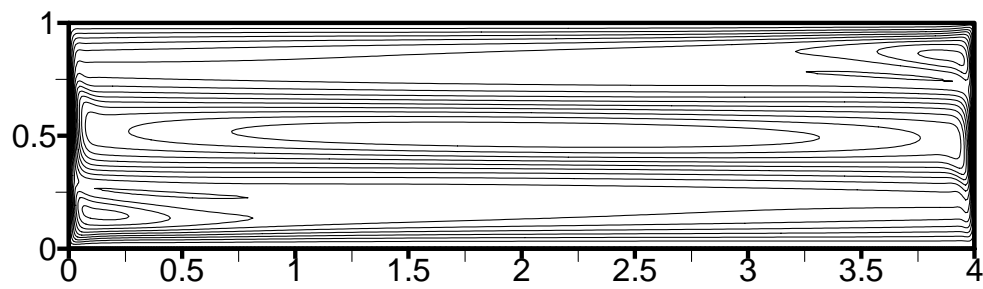
Cas coopérant :  $Gr_t = 8.8 \times 10^5$ ,  $Gr_s = 5 \times 10^6$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$

| caractéristiques        | Maillages 244×124 |            |          |          |
|-------------------------|-------------------|------------|----------|----------|
|                         | —                 | Irrégulier |          |          |
|                         |                   | C = 1,01   | C = 1,02 | C = 1,03 |
| $ U_{max} $             | 22,73             | 21,14      | 22,73    | 22,01    |
| $ V_{max} $             | 83,89             | 74,95      | 82,20    | 81,94    |
| $ \overline{Nu} _{X=0}$ | 15,35             | 14,25      | 14,45    | 14,46    |
| $ \overline{Nu} _{X=L}$ | 15,35             | 14,25      | 14,45    | 14,46    |
| $ \overline{Sh} _{X=0}$ | 51,91             | 57,50      | 52,50    | 51,49    |
| $ \overline{Sh} _{X=L}$ | 51,91             | 57,50      | 52,50    | 51,49    |

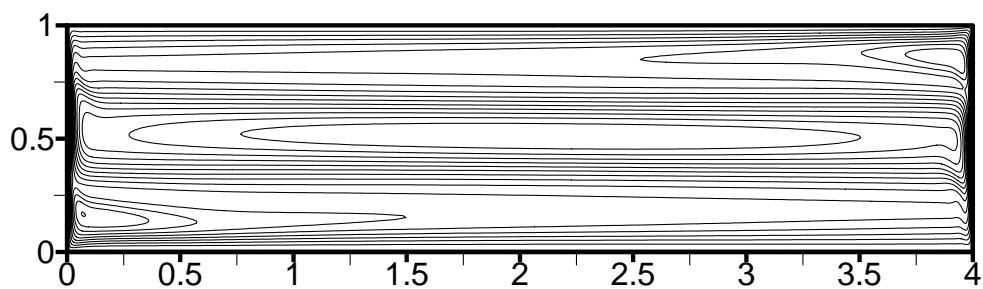




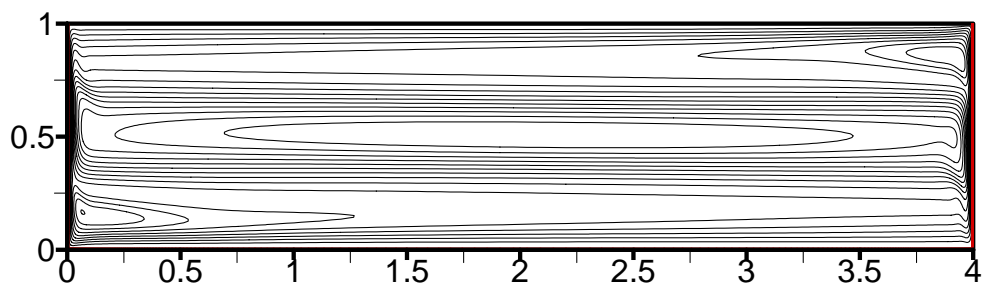
(a)



(b)



(c)



(d)

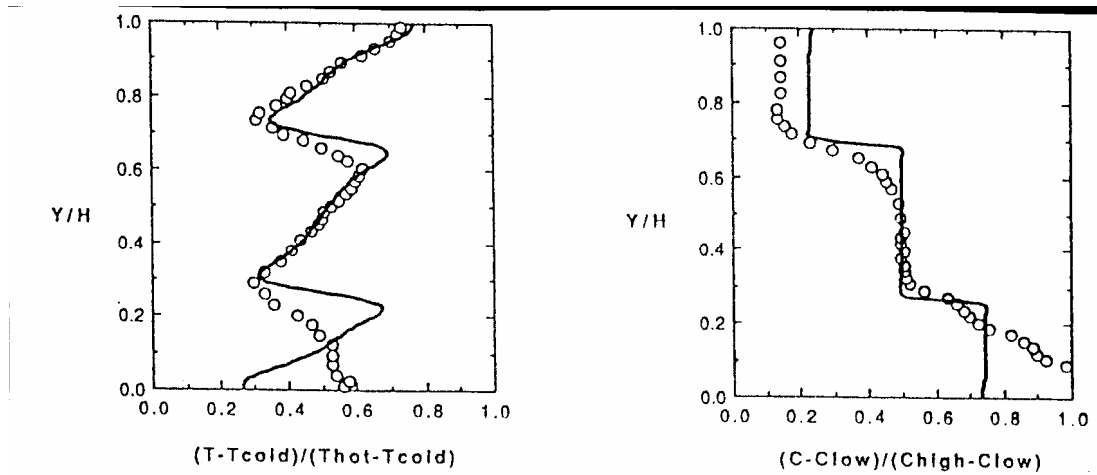
Figure 4.5. Effet de l'espace du maillage sur la structure d'écoulement (a): $c=1$ ; (b):  $c=1,01$ ; (c):  $c=1,02$ ; (d):  $1,03$ ; cas coopérant,  $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Gr_s = 5 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$ .

### 4.3.3 Conclusion

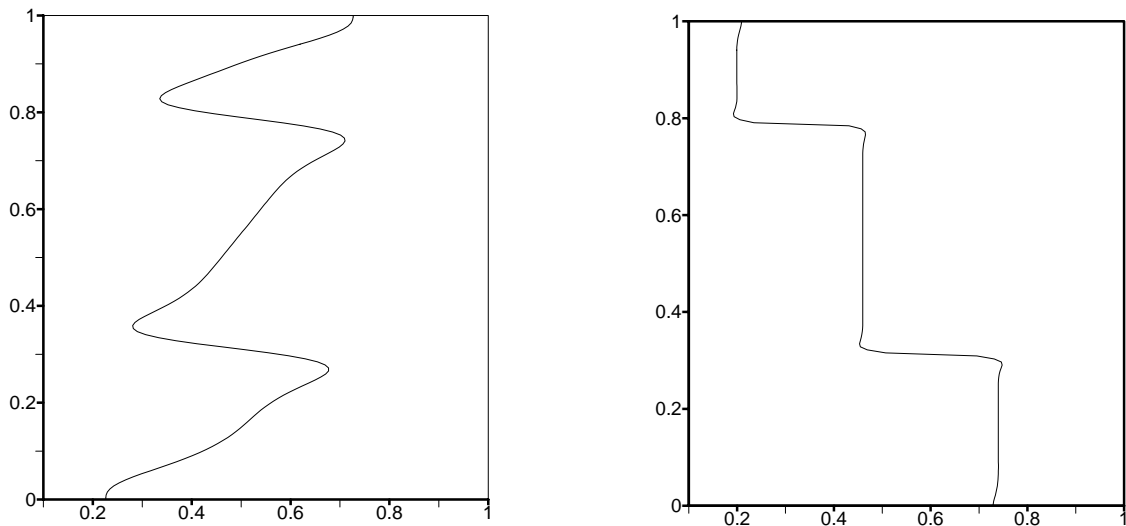
Ces résultats montrent que le maillage régulier de  $244 \times 124$  est suffisant pour assurer une bonne résolution spatiale du problème.

### 4.3 Validation du code numérique

Pour valider notre code de calcul numérique, nous avons choisi d'effectuer une comparaison avec les résultats numériques de Han et Kuehn [13] dans le cas de la convection naturelle à double diffusion où les forces de volumes sont opposantes et avec les paramètres suivants :  $A = H / L = 4$ ,  $Pr = 8$ ,  $Sc = 2000$ ,  $Gr_t = 4 \times 10^5$ ,  $Gr_s = 3 \times 10^6$ . Un maillage de  $48 \times 164$  et un pas du temps de  $1 \times 10^{-4}$  sont utilisés pour la simulation numérique. La figure 4.6 représente les variations de la température et de la concentration au milieu de la cavité de nos résultats et de la référence [13], Nous constatons que nos résultats numériques sont en bon accord avec les résultats numériques de la référence [13]. Pour le champ de vecteur vitesse, les lignes de courants, la température et la concentration la figure 4.7 montre que nos résultats numériques en bon accord avec les résultats numériques de la référence [13]. Dans le cas de la convection naturelle à double diffusion en présence d'un champ magnétique nous avons effectué une autre comparaison de nos résultats avec les résultats numériques de Ali J. Chamkha et Hameed Al-Naser [32] avec les paramètres suivants:  $Le = 2,0$  ;  $N = 0,8$  ;  $Pr = 1,0$  ;  $Ra_t = 10^5$  ;  $Ha = 10$ . La figure 4.8 montre aussi un bon accord entre les structures de l'écoulement les champs thermique et de concentration des résultats obtenus et ceux de la référence numérique [32].

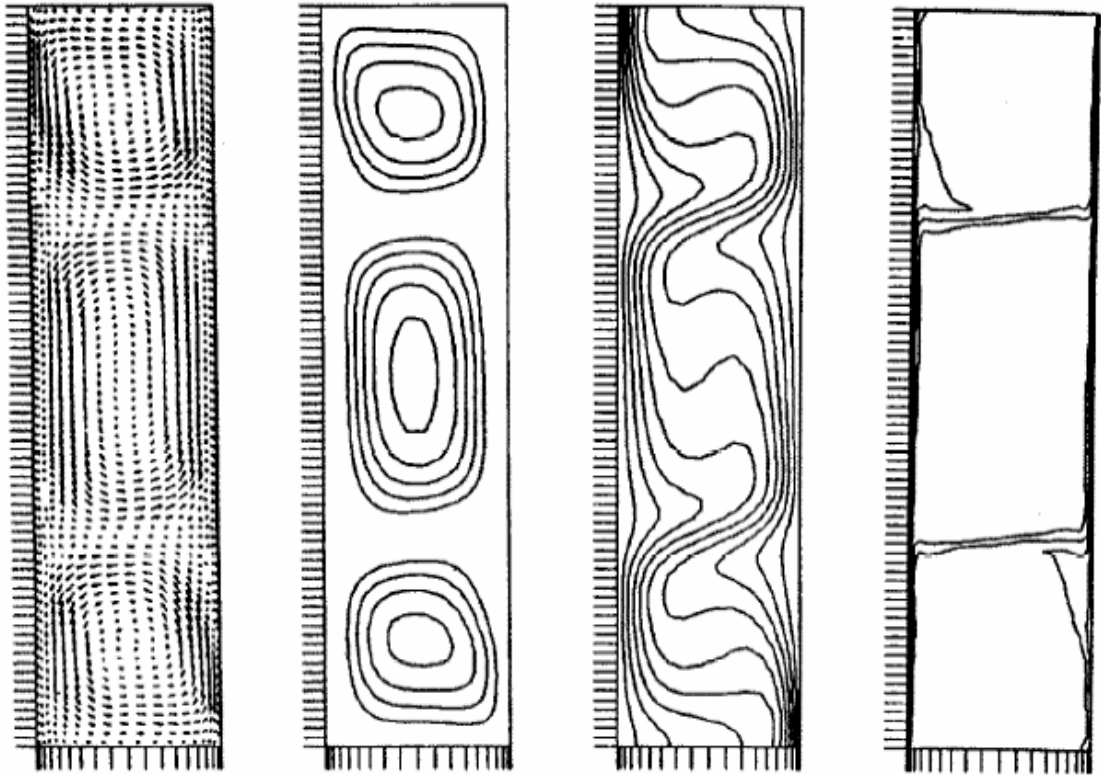


Résultats numériques (courbes) de Han et Kuehn [13] (les symboles représentent leurs résultats expérimentaux)

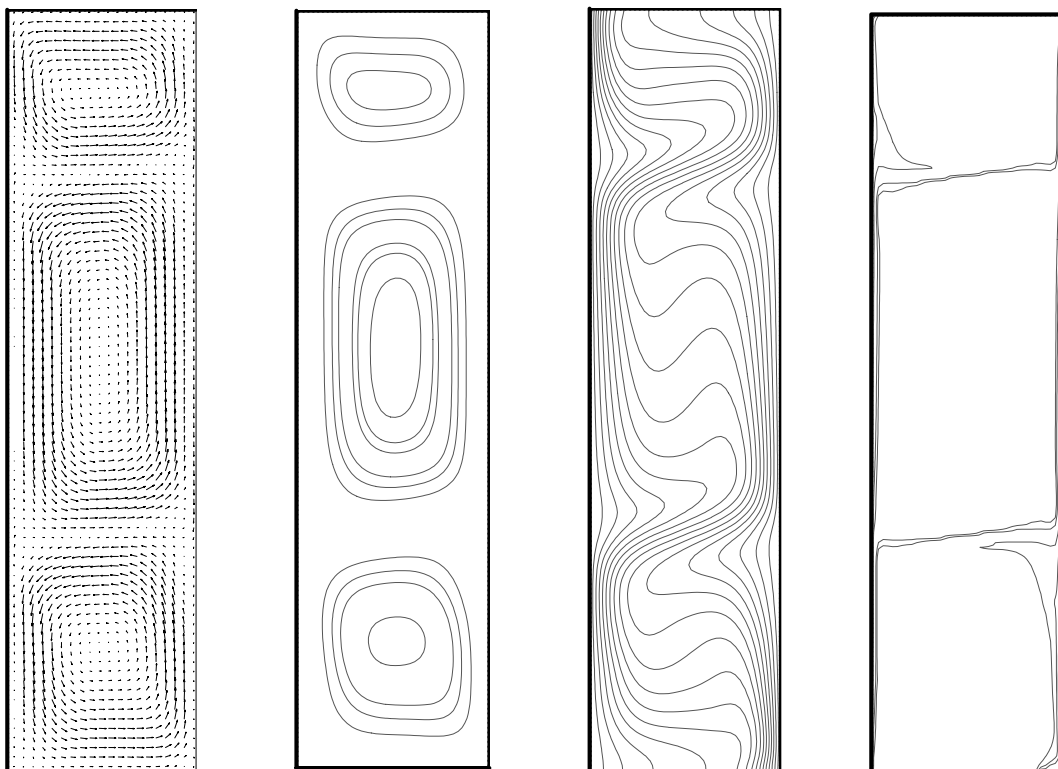


Nos résultats numériques

Figure 4.6. Profile de la température  $\theta$  et de la concentration  $\Phi$  à  $X=L/2$ . Cas opposant :  $A=H/L=4$ ,  $Pr=8$ ,  $Sc=2000$ ,  $Gr_t=4.10^5$  et  $Gr_s=3.10^6$ .

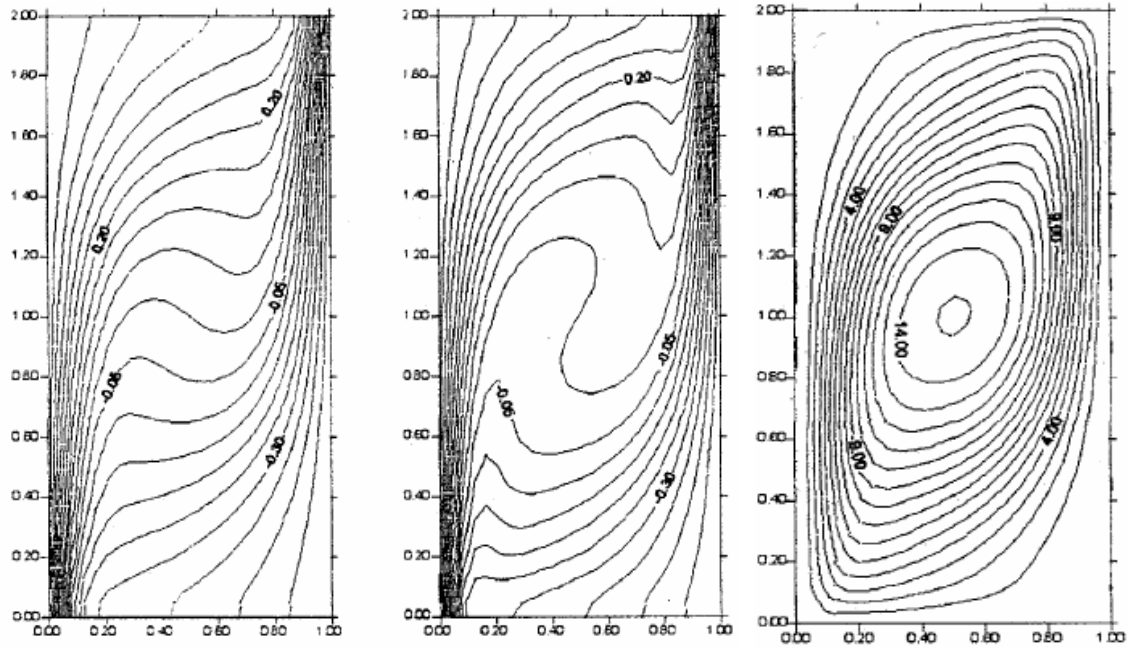


Résultats numérique de H. Han et T. Kuehn[13]



Nos résultats numérique

Figure 4.7. Comparaison des résultats obtenus avec ceux de la référence [13] : les vecteurs vitesses, lignes de courant, distributions de la température et de la concentration. Cas opposant :  $A=H/L=4$ ,  $Pr=8$ ,  $Sc=2000$ ,  $Gr_T=4.10^5$  et  $Gr_S=3.10^6$

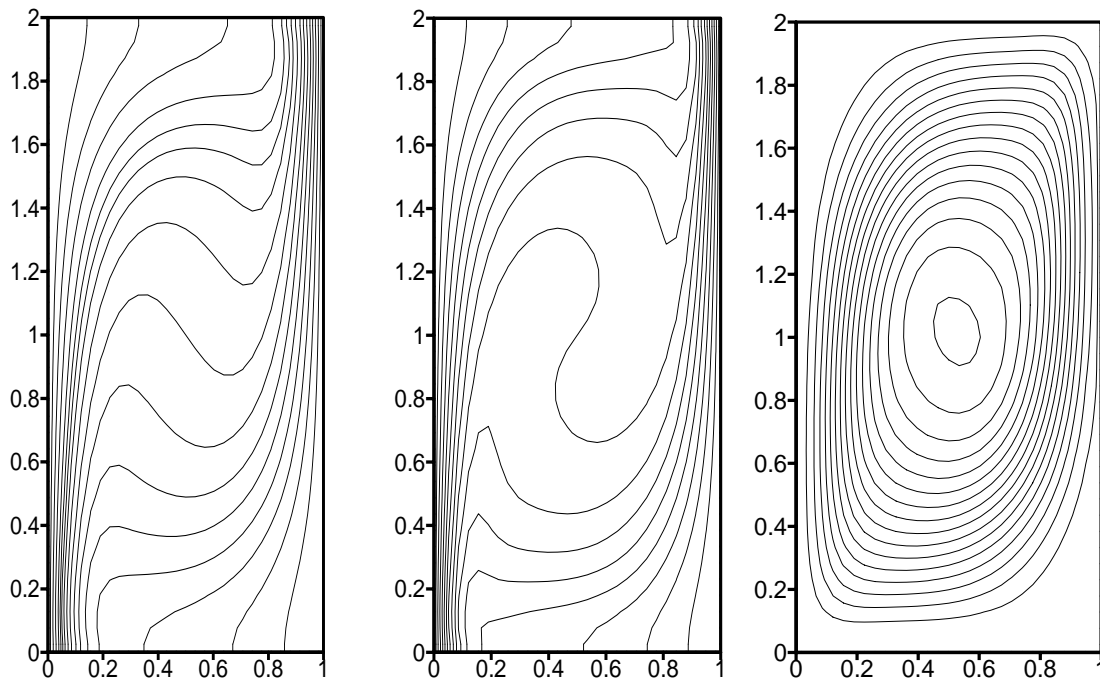


Résultats numérique de A. J.Chamkha, H. Al-Naser [32]

(a)

(b)

(c)



Nos résultats numérique.

Figure 4.8. Comparaison des résultats obtenus avec ceux de la référence [32] :  
 (a) température, (b) concentration, (c) ligne de courant pour  $Le = 2,0$  ;  $N= 0,8$  ;  $Pr=1,0$  ;  
 $Ra_t= 10^5$  ;  $Ha = 10$ .

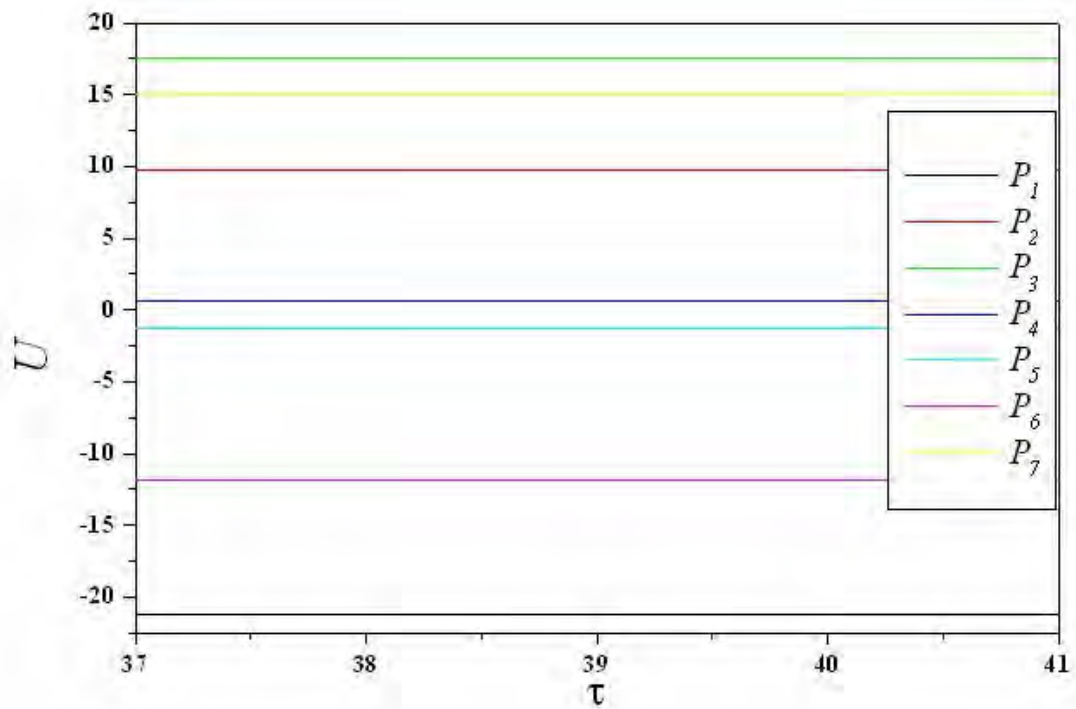
## 4.5 Ecoulement stable

### 4.5.1 Introduction

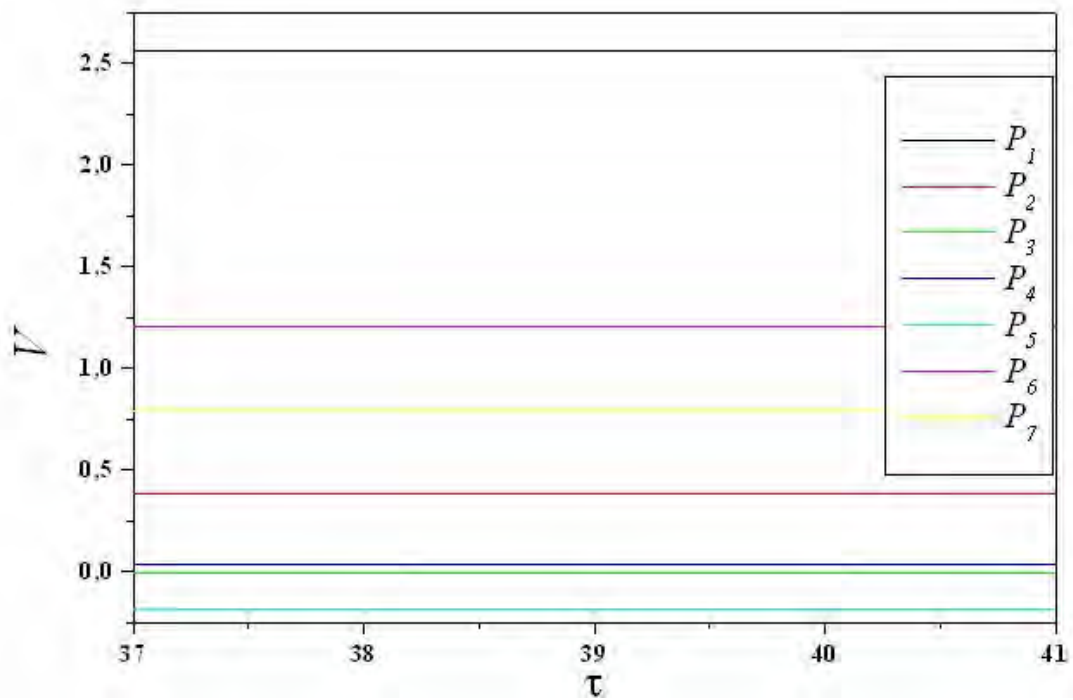
Dans la suite de ce chapitre, nous étudions la convection naturelle à double diffusion dans le cas où les forces de volume, thermique et massique, sont opposantes. Dans ce cas, on distingue trois régimes d'écoulement dépendant de la valeur de Grashof solutal  $Gr_s$ . L'écoulement est au départ stable sous l'effet de la dominance de la force thermique. Ensuite, il y a l'apparition d'un régime instationnaire due à compétition entre les poussées, thermique et solutale, comparables et opposantes. Enfin, l'écoulement devient stable quand la force de volume solutale devient dominante [28].

On s'intéresse dans ce paragraphe à l'étude de l'écoulement stable et dans le paragraphe suivant à celui de l'écoulement instable où instationnaire.

Les figures 4.9, 4.10, 4.11 et 4.12 représentent la variation temporelle des composantes horizontale et verticale de la vitesse, la température et de la concentration aux différentes points arbitrairement choisies dans l'enceinte étudiée ( $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ ). Après convergence des calculs effectués, nous constatons que l'écoulement est parfaitement stable quand  $Gr_s \leq 2 \times 10^5$  et  $Gr_s > 1,25 \times 10^6$ .



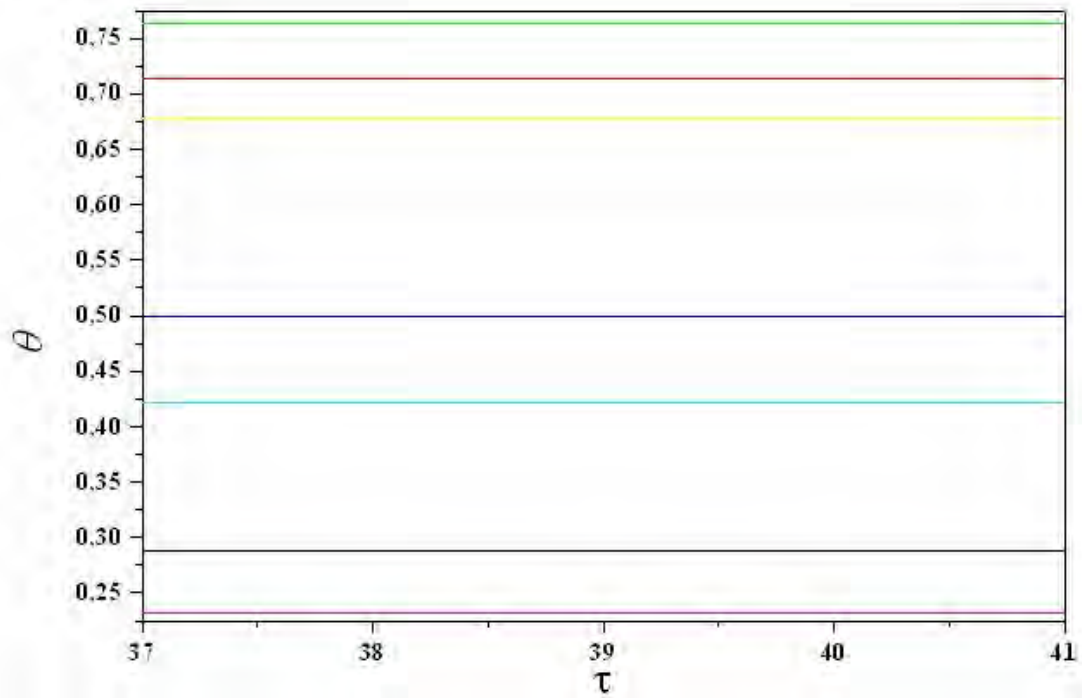
(a)



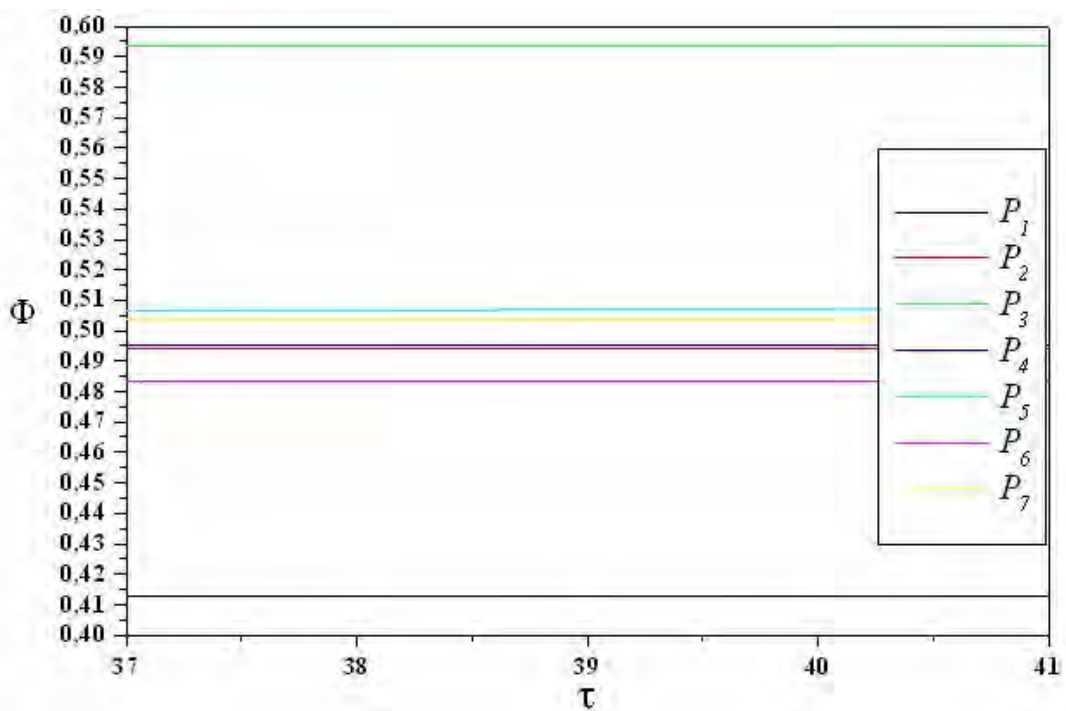
(b)

Figure 4.9. Evolution temporelle de la vitesse: (a) composante horizontale U, (b) composante vertical V aux points ( $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$ ,  $P_5$ ,  $P_6$ ,  $P_7$ ) cas opposant:

$$Gr_t = 8,8 \times 10^5, Gr_s = 1 \times 10^4, Pr = 10, Sc = 100, Ha = 0.$$



(a)



(b)

Figure 4.10. Evolution temporelle de:(a) la température  $\theta$ , (b) la concentration  $\Phi$  aux points ( $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ .) cas opposant:  $Gr_s = 1 \times 10^4$ ,  $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$ ,  $Ha = 0$ .



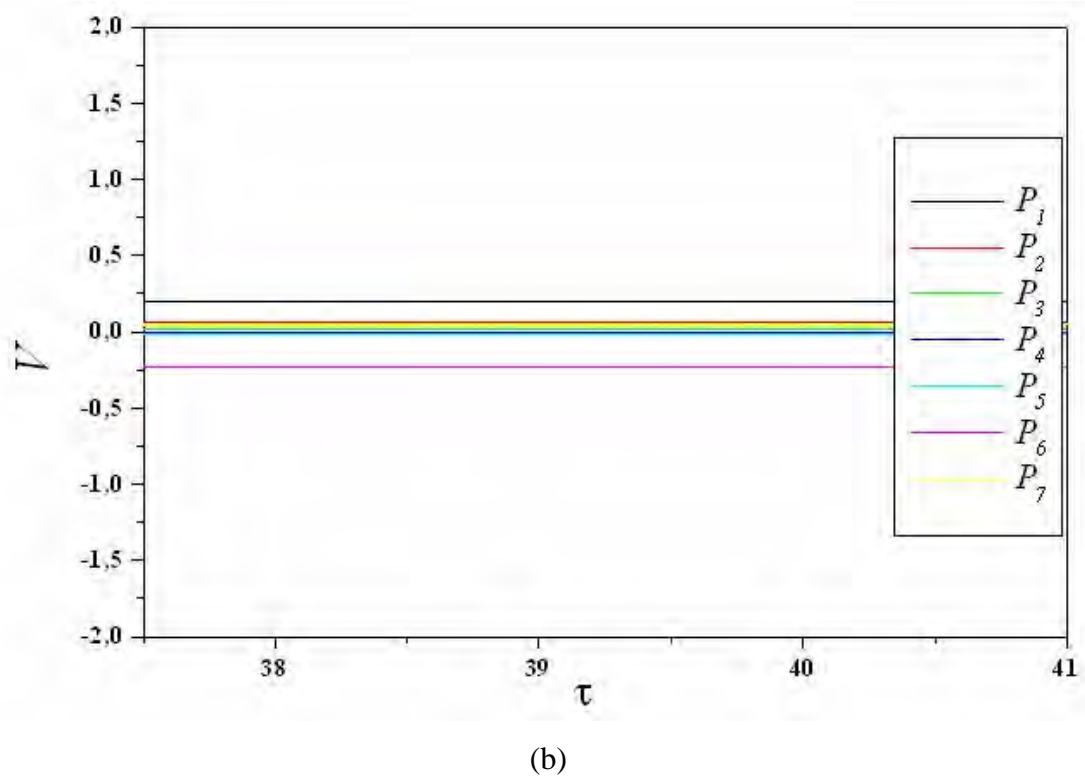
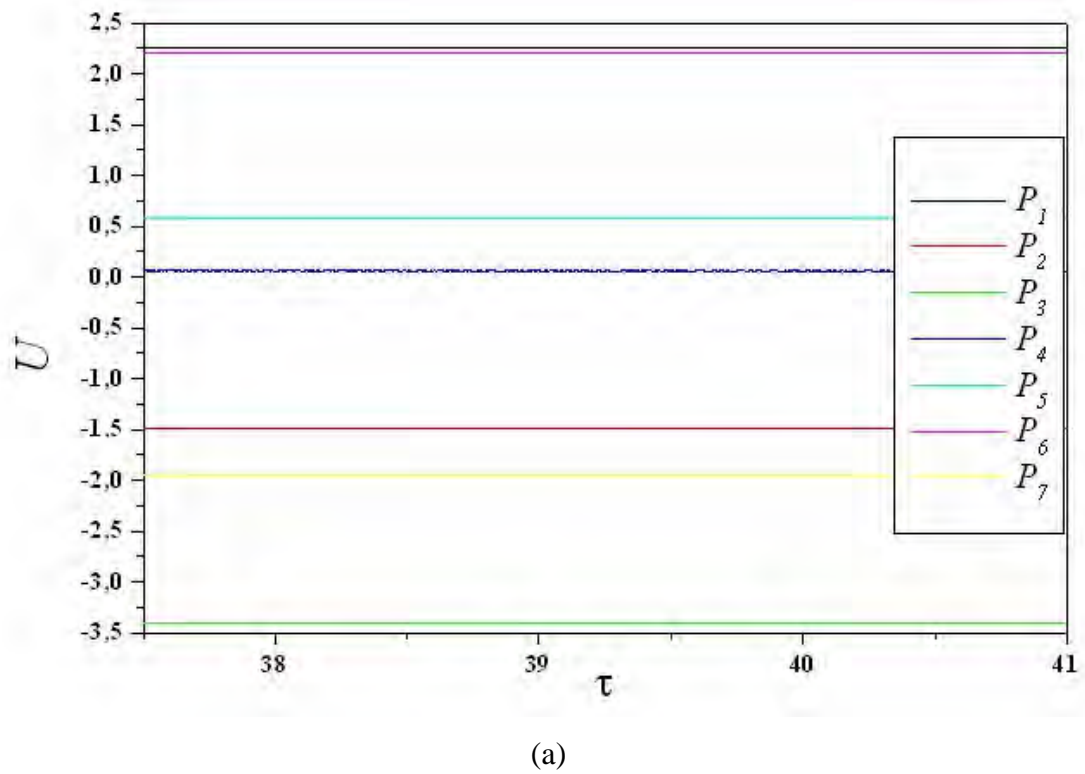
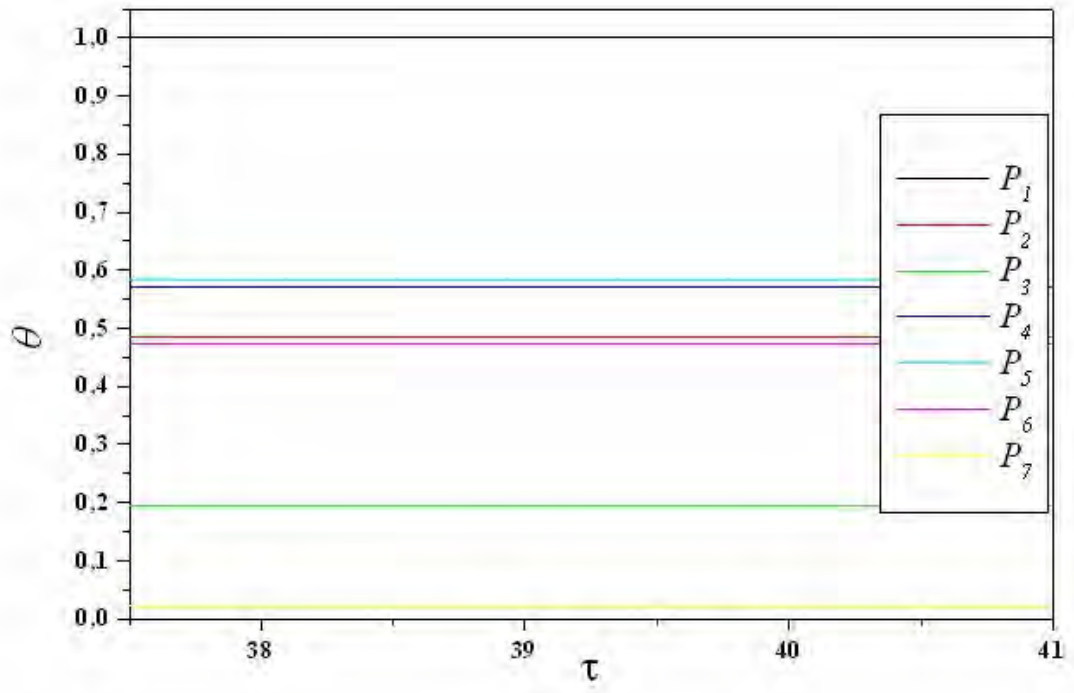
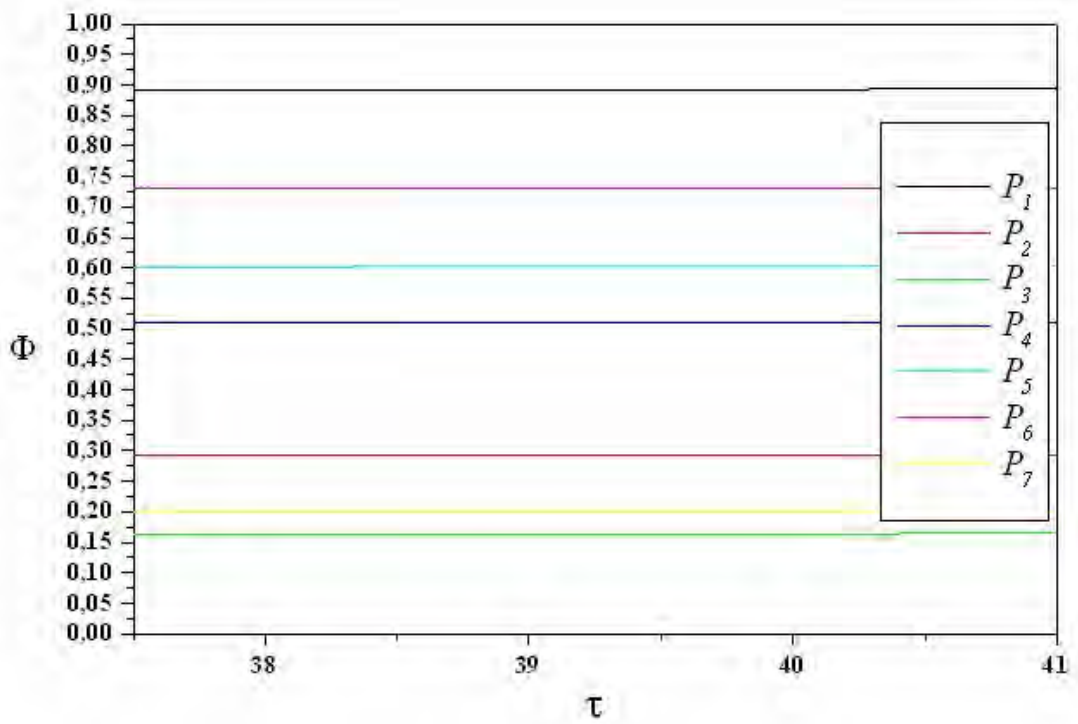


Figure 4.11. Evolution temporelle de la vitesse: (a) composante horizontale  $U$ , (b) composante verticale  $V$  aux points ( $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$ ,  $P_5$ ,  $P_6$ ,  $P_7$ ) cas opposant:

$$Gr_t = 8,8 \times 10^5, Gr_s = 5 \times 10^6, Pr = 10, Sc = 100, Ha = 0.$$



(a)



(b)

Figure 4.12. Evolution temporelle de:(a) la température  $\theta$ , (b) la concentration  $\Phi$  aux points ( $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ .) cas opposant:  $Gr_s = 5 \times 10^6$   $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$ ,  $Ha=0$ .

### 4.5.2 Structure d'écoulement

La figure (4.13) (a - e) montrent la structure de l'écoulement représentée par les contours des lignes de courant lorsque le nombre de Grashof thermique est fixe à  $Gr_t = 8,8 \times 10^5$  et pour différentes valeurs du nombre de Grashof solutal (variants de  $10^4$  à  $10^7$ ) et dans le cas où les forces de volumes opposantes. On constate que les lignes de courant se concentrent près des parois horizontales et verticales et que le régime d'écoulement est unicellulaire, cela veut dire qu'il contient une seule cellule parfaitement symétrique qui tourne dans le sens de rotation horaire pour  $Gr_s \leq 1,25 \times 10^6$ , c'est-à-dire lorsqu'il prend les valeurs:  $10^4, 10^5, 3 \times 10^5, 4 \times 10^5, 5 \times 10^5$  et  $1,25 \times 10^6$  et dans le sens antihoraire quand  $Gr_s > 1,25 \times 10^6$  c'est-à-dire lorsqu'il prend les valeurs  $5 \times 10^6$  et  $10^7$ . Les sens de rotation horaire et antihoraire de l'écoulement sont dus à la dominance de l'effet des poussées thermique et solutale respectivement.

### 4.5.3 Transfert de chaleur:

La figure 4.14 (a - e) représente la distribution de la température au sein du fluide de la cavité. On remarque, dans le cas où la convection naturelle est dominante par la poussée thermique  $Gr_s \leq 1,25 \times 10^6$  ( $N \leq 1,42$ ), que les isothermes sont parallèles aux parois horizontales et elles se concentrent beaucoup plus aux parois verticales, les températures diminuent de valeur du haut vers le bas. Mais dans le cas où la poussée solutale est dominante  $Gr_s > 1,25 \times 10^6$  ( $N > 1,42$ ), on remarque que les températures diminuent de valeur de gauche à droite suivant la direction horizontale (de la paroi chaude vers la paroi froide), et du bas vers le haut suivant la direction verticale. Par conséquent, le sens de rotation de l'écoulement est antihoraire. On constate aussi que ces gradients se concentrent plus aux coins supérieure gauche et inférieure droite de l'enceinte. L'augmentation du nombre de Grashof solutale influe directement sur le transfert de chaleur qui devient plus en plus faible. En effet le transfert de chaleur par conduction devient dominant vis-à-vis du transfert convectif ce qui explique l'allure des isothermes faiblement déformées

#### 4.5.4 Transfert de masse

Les figures 4.15 (a - e) représentent la distribution de la concentration au sein du fluide. Quand la poussée thermique est dominante, On remarque, pour les valeurs de Grashof solutale  $Gr_s = 1 \times 10^4, 1 \times 10^5, 2 \times 10^5$  que les isoconcentrations se confinent près des parois horizontales parce que l'écoulement est conduit par la force thermique dominante ce qui est conforme avec les travaux de Kamotani *et al.* [3] et Benissaad [30]. Au-delà de  $Gr_s = 10^6$  les isoconcentrations se stratifient d'une manière stable parallèlement aux parois horizontales et diminuent de valeur du haut vers le bas. Cette stratification stable est due à la dominance de l'écoulement par la force de volume solutale.

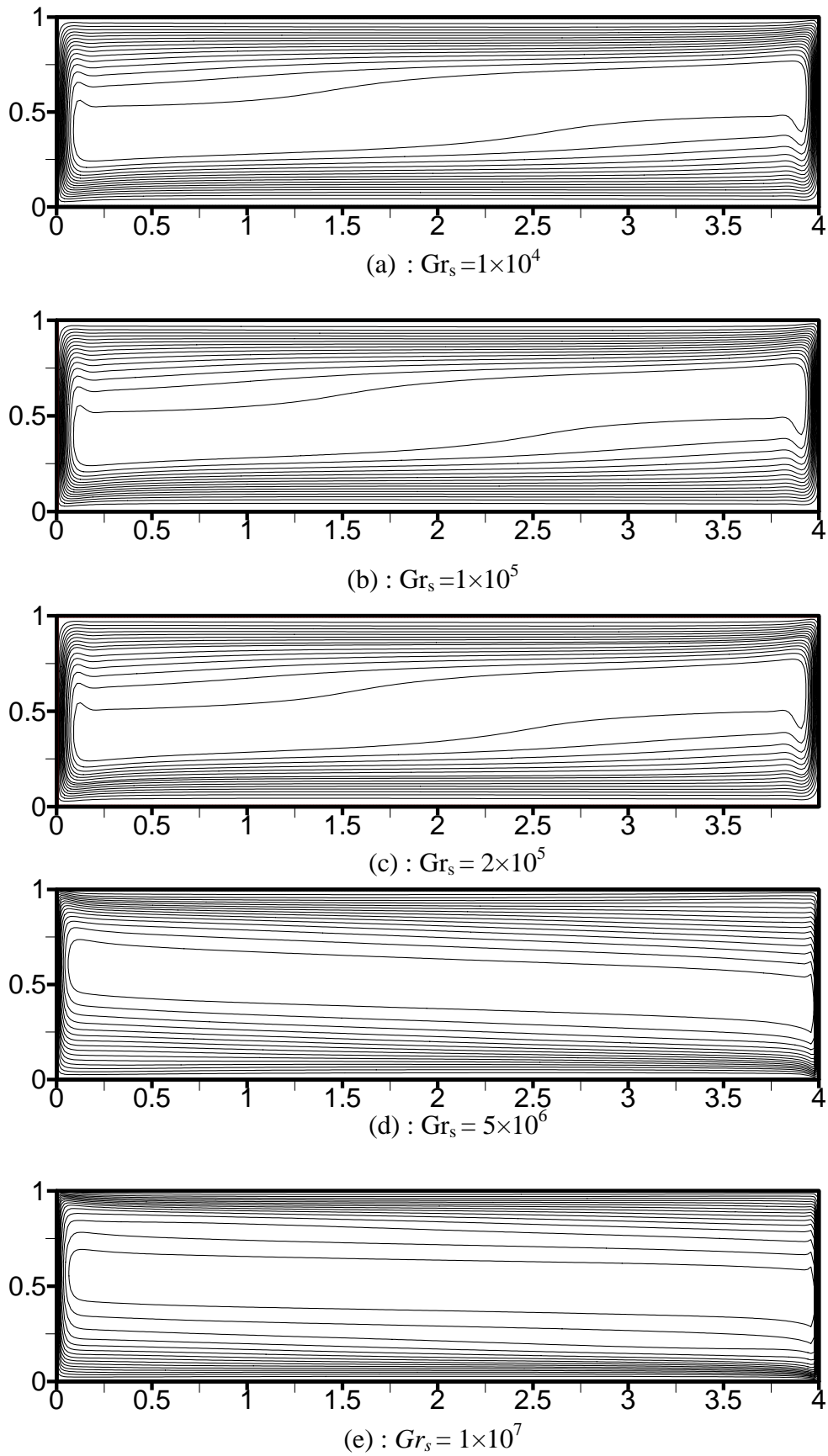


Figure 4.13. Structure de l'écoulement représenté par les contours de la fonction du courant pour différentes valeurs du nombre de Grashof solutal cas opposant:  
 $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$ ,  $Ha = 0$ .

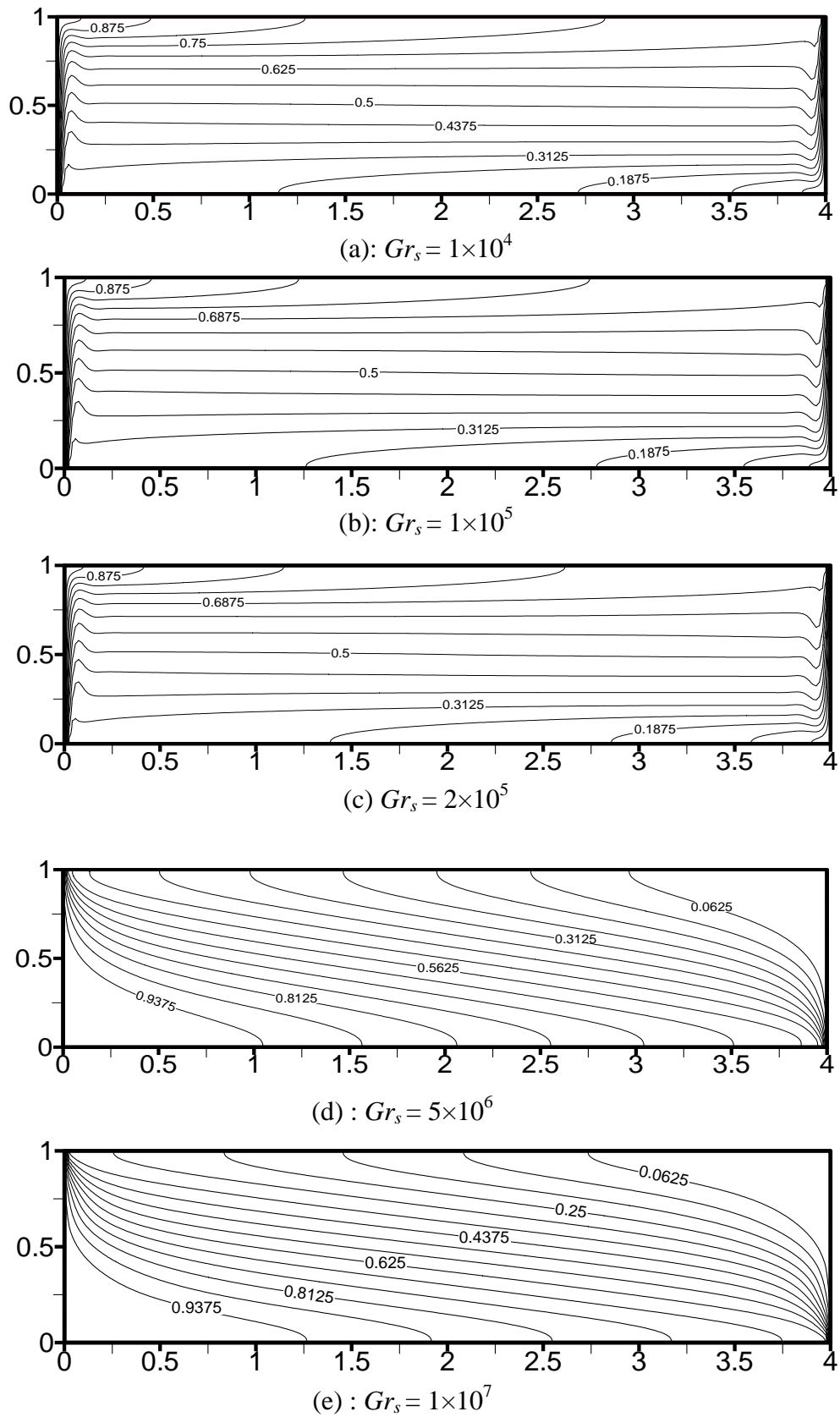


Figure 4.14. Distribution de la température représentée par les isothermes pour différentes valeurs du nombre de Grashof solutal cas opposant:  
 $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$ ,  $Ha = 0$ .

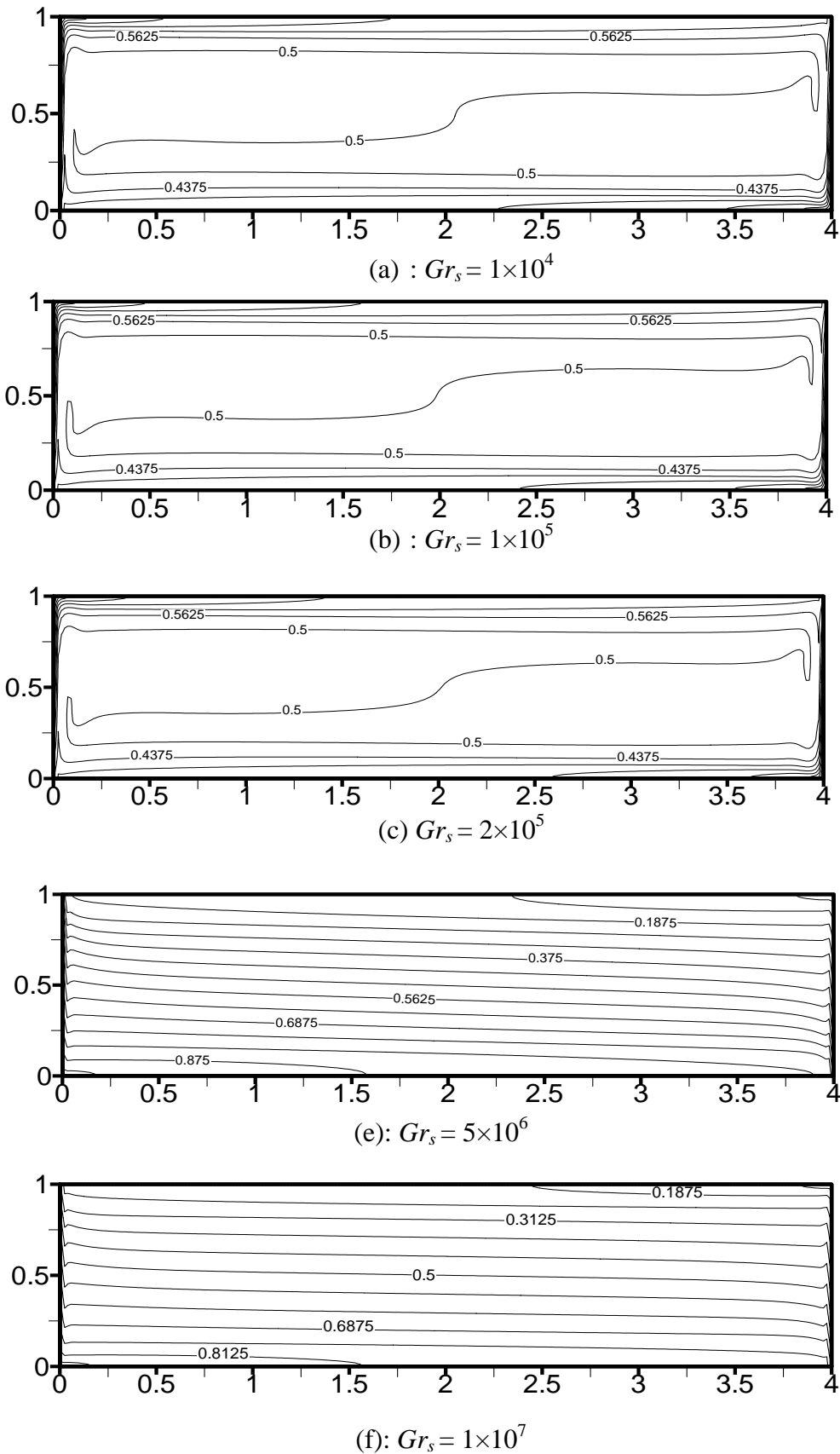


Figure 4.15. Distribution de la matière représentée par les isoconcentrations pour différentes valeurs du nombre de Grashof solutal cas opposant:  
 $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$ ,  $Ha = 0$ .

#### 4.5.5 Profils de la vitesse, la température et de la concentration

La Figure 4.16 montre le profil de la vitesse horizontale  $U$  au milieu de la cavité (à  $X=2$ ), pour différentes valeurs de  $Gr_s$ . Ces profils sont symétriques par rapport à l'axe vertical au milieu de la cavité et possèdent une valeur nulle de la vitesse ( $U=0$ ) aux trois points sur l'axe vertical. L'augmentation du nombre de Grashof solutal, de  $Gr_s=1 \times 10^4$  à  $Gr_s=3 \times 10^5$ , augmente la vitesse  $U$ . Ceci indique que le mouvement convectif est augmenté au sein du fluide. En augmentant d'avantage le nombre de Grashof solutal, à  $Gr_s=5 \times 10^6$  et ensuite à  $Gr_s=1 \times 10^7$ , la composante de la vitesse  $U$  change de direction. Le sens d'écoulement horaire ( $Gr_s=1 \times 10^4$ ,  $Gr_s=3 \times 10^5$ ) et antihoraire ( $Gr_s=5 \times 10^6$ ,  $Gr_s=1 \times 10^7$ ) est expliqué par la dominance de la poussée thermique et la poussée solutale respectivement.

Les figures 4.17 (a- b) montrent les profils de la température  $\theta$  et de la concentration  $\Phi$  au milieu de la cavité (à  $X=2$ ), pour différentes valeurs de  $Gr_s$ . Ces profils sont symétriques par rapport à l'axe vertical au milieu de la cavité. On remarque que l'augmentation du nombre de Grashof solutal, de  $Gr_s=10^4$  à  $Gr_s=3 \times 10^5$ , l'écoulement se fait dans le sens horaire, la température augmente de 0,225 à 0,23 à la paroi inférieure et diminue de 0,780 à 0,765, la variation de la concentration se fait dans le même sens c'est-à-dire augmente de 0,320 à 0,345 à la paroi inférieure et de diminue de 0,680 à 0,660. Ceci est dû à la dominance relative de la poussée solutale sur la poussée thermique. En augmentant encore la valeur de nombre de Grashof solutal de  $5 \times 10^6$  à  $10^7$  l'écoulement se fait maintenant dans le sens antihoraire, la température augmente de 0,82 à 0,87 à la paroi inférieure et diminue de 0,190 à 0,135 à la paroi supérieure, ceci est dû à la dominance de la poussée solutale sur la poussée thermique.



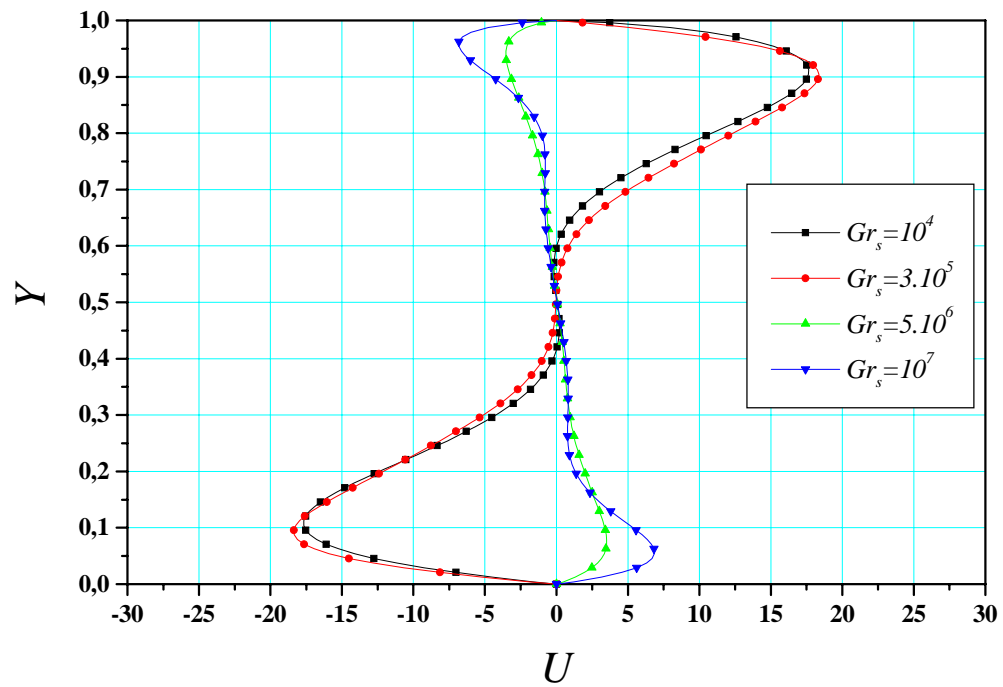


Figure. 4.16. Variation de la vitesse horizontale  $U$  au milieu de la cavité ( $X=2$ ), pour différentes valeurs de  $Gr_s$ . cas opposant:  $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Pr=10$ ,  $Sc=100$ ,  $Ha=0$ .

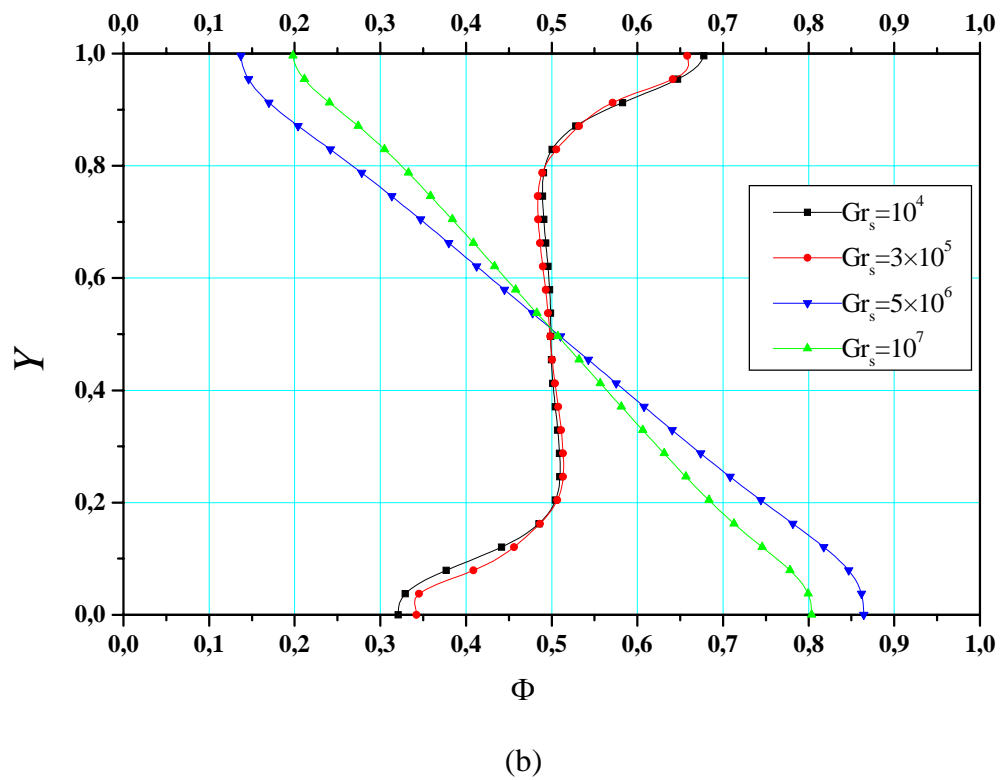
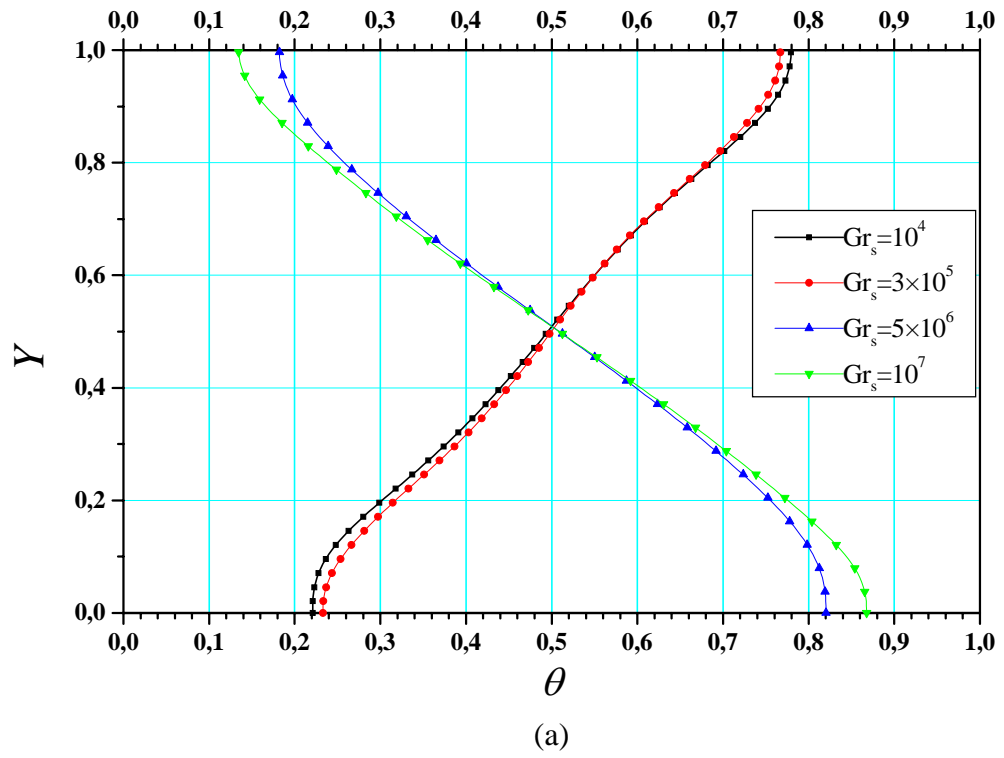


Figure. 4.17. Variation: (a) de la température  $\theta$ , (b) de la concentration  $\Phi$  au milieu de la cavité ( $X=2$ ). Pour différentes valeurs de  $Gr_s$  Cas opposant avec  $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Pr=10$ ,  $Sc=100$ ,  $Ha=0$ .

## 4.6 Écoulement instable

### 4.6.1 Evolution temporelle

Les travaux de Nishimura *et al.* [27] montrent l'existence d'un régime d'écoulement oscillatoire qui se produit dans la limite de rapport de force de volume  $N=0,9 \div 1,222$ .

Les investigations numériques de notre cas montrent que l'écoulement est stable dans le cas où le nombre de Grashof solutale à  $Gr_s \leq 2 \times 10^5$ . Au-delà de cette valeur, on observe le début d'écoulement instable.

Pour vérifier et s'assurer que ces oscillations sont d'origine physique, on garde les mêmes points dans la cavité avec les mêmes paramètres d'écoulement, mais on réduit le pas du temps de  $\Delta t$  à  $\frac{\Delta t}{2}$ . La figure 4.18. montre la superposition de deux périodes correspondant à  $\Delta t = 10^{-4}$  et  $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$  respectivement. On remarque que cette réduction du pas du temps ne réduit pas l'amplitude des ces oscillations dans tous les points. Donc ces instabilités sont d'origine physique et non pas numérique.

Le régime d'écoulement oscillatoire se produit pour les valeurs du nombre de Grashof solutal critique comprise entre :  $2 \times 10^5 < Gr_{s,cr} < 1,25 \times 10^6$ , comme illustre par les figures 4.19.a-b, 4.20.a-b et 4.21.a-b qui montrent l'évolution temporelle des composantes horizontale et verticale de la vitesse, de la température, de la concentration et de la fonction du courant de quelques points choisis dans la cavité pour plusieurs valeurs de  $Gr_s$ . On voit bien et clairement que ces profils sont oscillatoires et périodiques, donc le régime d'écoulement est instable. On observe que l'amplitude de ces oscillations change d'un point à un autre dans l'enceinte.

Les figures 4.22.a-b et 4.27.a-b représentent les transferts de chaleur et de masse moyens au niveau des parois chaude et froide représentés par le nombre moyen de Nusselt  $\overline{Nu}$  et le nombre moyen de Sherwood  $\overline{Sh}$ , qui sont oscillatoires et périodique autour d'une valeur moyenne  $\overline{Nu} = 16,199$ ,  $\overline{Sh} = 38,391$  pour  $Gr_s = 3 \times 10^5$  et  $\overline{Nu} = 15,872$ ,  $\overline{Sh} = 36,504$  pour  $Gr_s = 4 \times 10^5$ .

La différence du degré de l'oscillation dépend de la localisation des points par rapport aux parois solides adiabatiques, à la paroi chaude et à la paroi froide. Par exemple les amplitudes des oscillations des points  $P_4$  et  $P_5$  sont petites par rapport à celles des points  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_6$ ,  $P_7$  situés près des parois chaude et froide. Ceci est du au fait que les points  $P_4$  et  $P_5$  sont au centre de l'enceinte.

Afin d'obtenir le spectre d'énergie des oscillations, on utilise la transformée de Fourier rapide d'un certain nombre de la composant horizontale  $U$  et verticale  $V$  pour et, ce nombre doit être une puissance de 2 dans notre cas  $M=2^{14}$ . Cette transformée est multipliée par son complexe conjugué et divisée par 2 pour obtenir l'énergie  $E$  en fonction des fréquences des oscillations  $F$  qui est définie par  $F = K / (M \times \Delta\tau)$  où  $\Delta\tau = 1 \times 10^{-4}$  est l'incrément du temps sur un période,  $K=0, 1, 2, 3, \dots M/2$ .

La figure 4.23 représente l'algorithme décimal de l'énergie normalisée par  $M^2$  en fonction de fréquence  $F$ ,  $E = f(F)$ . On remarque que la fréquence dominante est  $F_1=19,15$  et ses harmonique  $2F_1=38,30$  et  $3F_1=57,45$  est reste la même dans tous les points de test. Ceci nous permet de considérer la période  $T_1=1/F_1=0,052$  comme période dominante pour ce régime d'écoulement périodique et oscillatoire ( $Gr_s=3 \times 10^5$ ).

Les évolutions temporelles des vitesses horizontale et verticale, de la température, de la concentration et de la fonction du courant pour  $Gr_s=4 \times 10^5$  sont représentées sur les figures 4.24, 4.25 et 4.26 respectivement

La figure 4.28 représente le spectre d'énergie en fonction de la fréquence. On remarque que la fréquence dominante est  $F_1=19,31$  et ses harmonique  $2F_1=38,62$  et  $3F_1=57,93$  est reste la même dans tous les points de test. Ceci nous permet de considérer la période  $T_1=1/F_1=0,051$  comme période dominante pour ce régime d'écoulement périodique et oscillatoire ( $Gr_s=4 \times 10^5$ ). Il s'agit donc d'une autre branche de solutions périodique.

Sur les figures 4.29 on représente l'évolution temporelle de la vitesse horizontale  $U$  au point  $P_1$  pour différentes valeurs de  $Gr_s$ . On constate le caractère oscillatoire et périodique de l'écoulement pour ces différents cas. Les oscillations de la vitesse sont obtenues pour  $Gr_s=2,7 \times 10^5$ ,  $Gr_s=3 \times 10^5$ ,  $Gr_s=4 \times 10^5$ , elles sont sinusoïdales et périodiques autour d'une valeur moyenne absolue égale à 21,6 ; 21,5 et 21,1, respectivement.

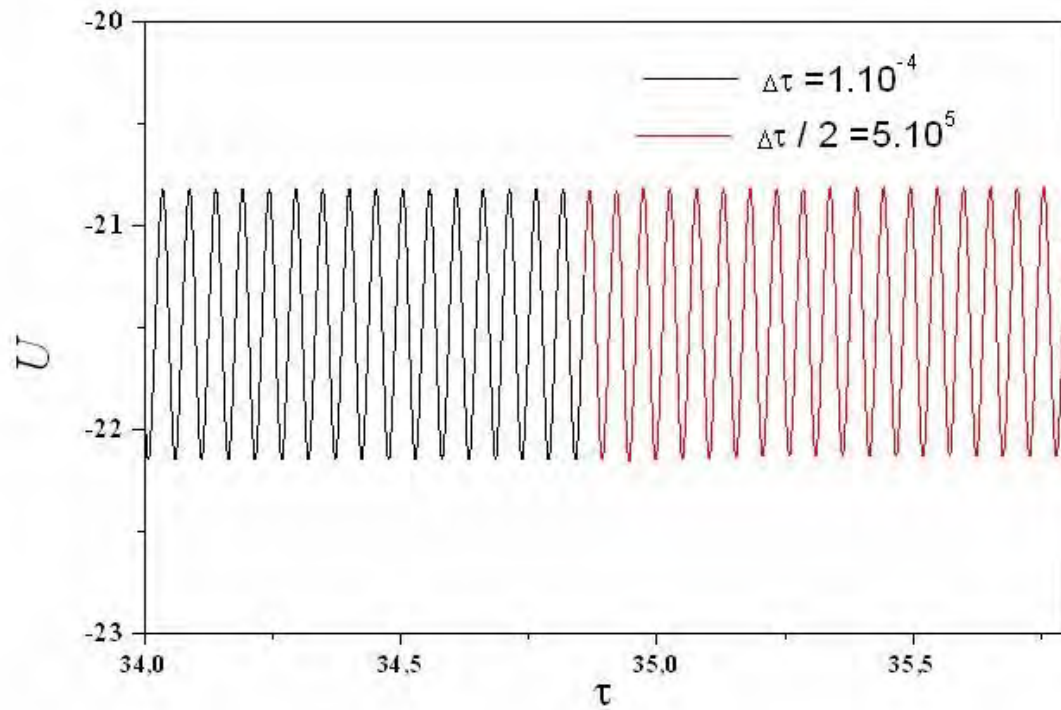
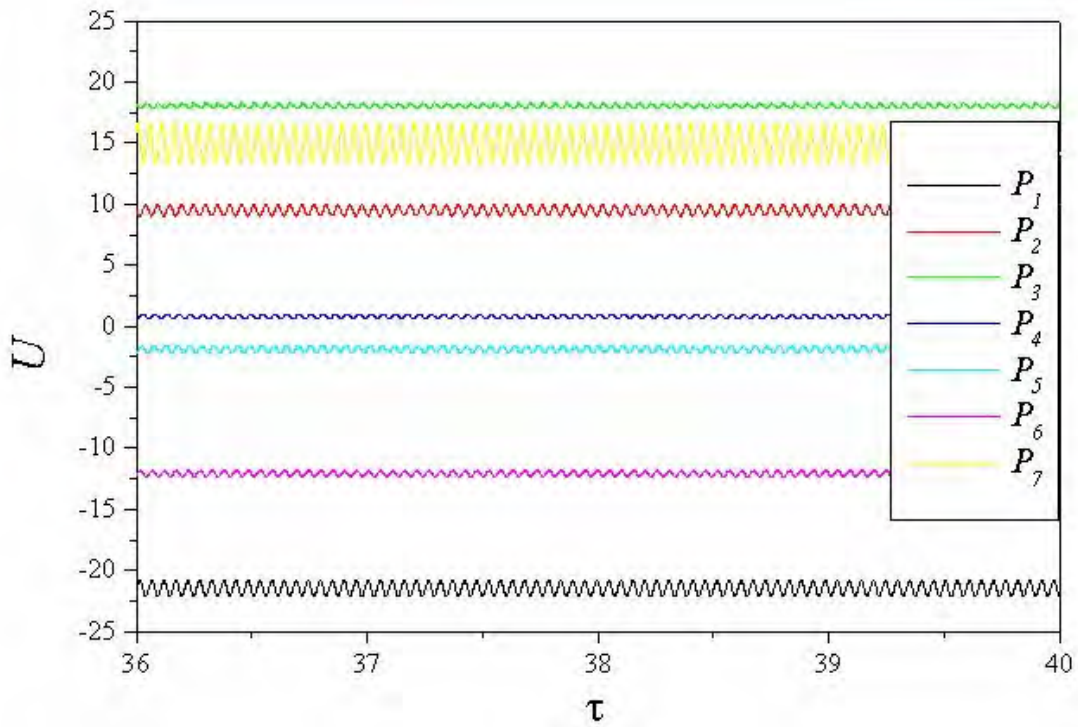
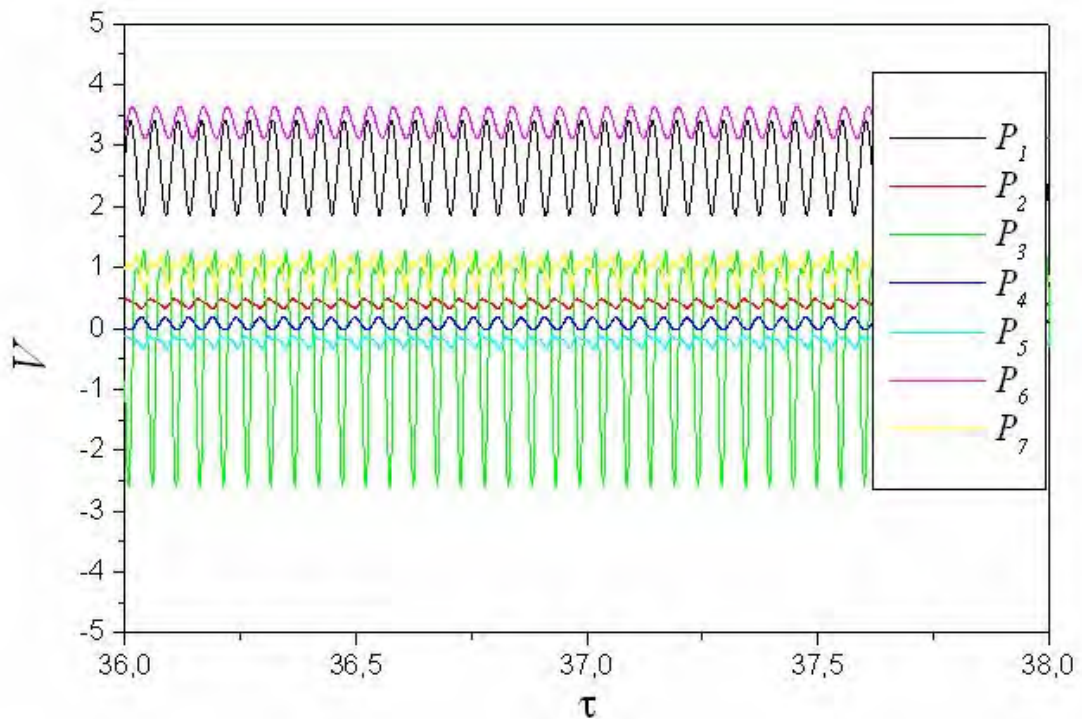


Figure 4.18. Superposition de deux périodes avec l'évolution temporelle de la vitesse  $U$  au Point  $P_1$ . Cas opposant,  $Gr_l = 8,8 \times 10^5$ ,  $Gr_s = 4 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$ ,  $Ha = 0$ .



(a)



(b)

Figure 4.19. Evolution temporelle de: (a) la vitesse horizontale  $U$ , (b) la vitesse vertical  $V$  aux points ( $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$ ,  $P_5$ ,  $P_6$ ). Cas opposant :

$$Gr_t = 8,8 \times 10^5, Gr_s = 3 \times 10^5, Pr = 10, Sc = 100, Ha = 0.$$

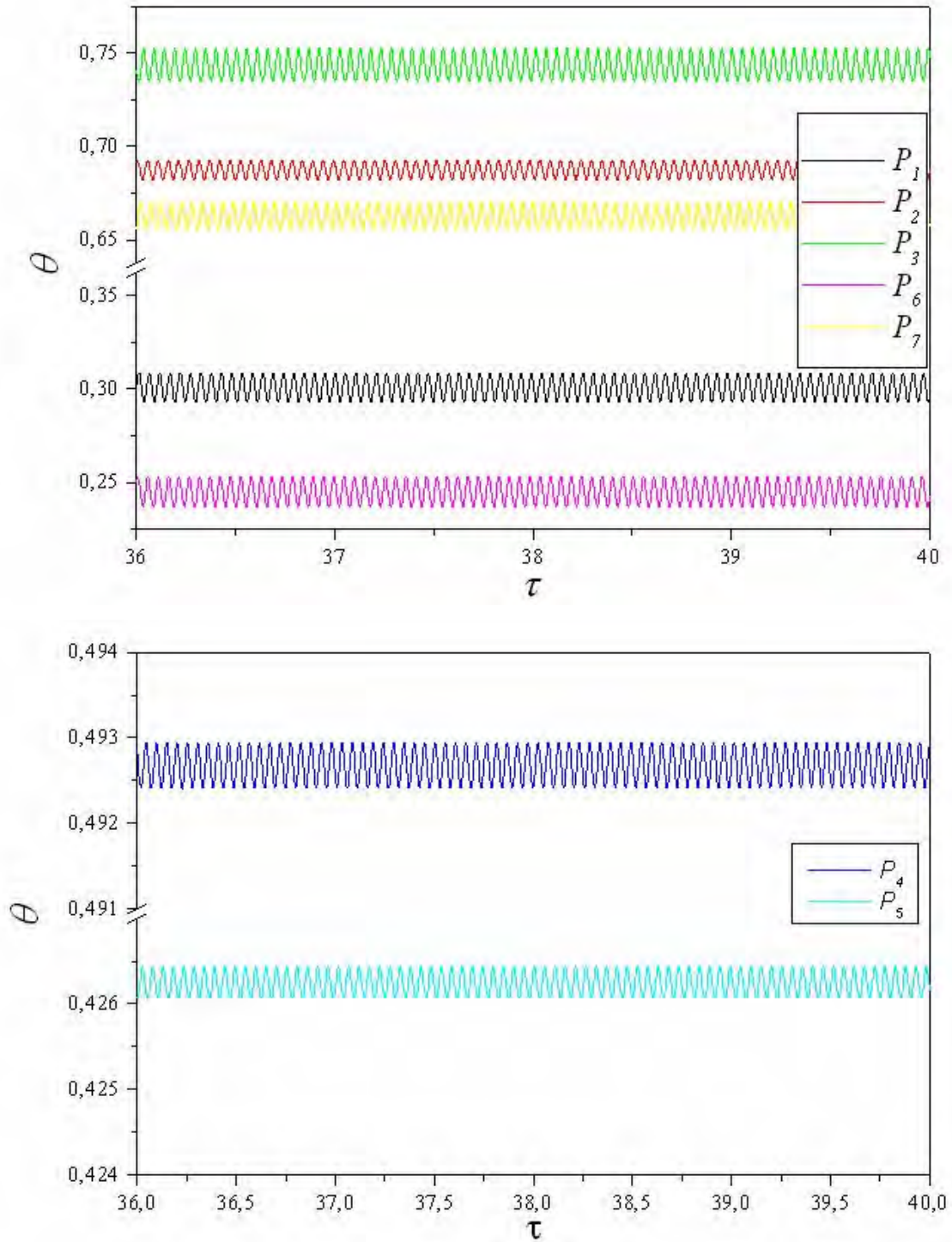
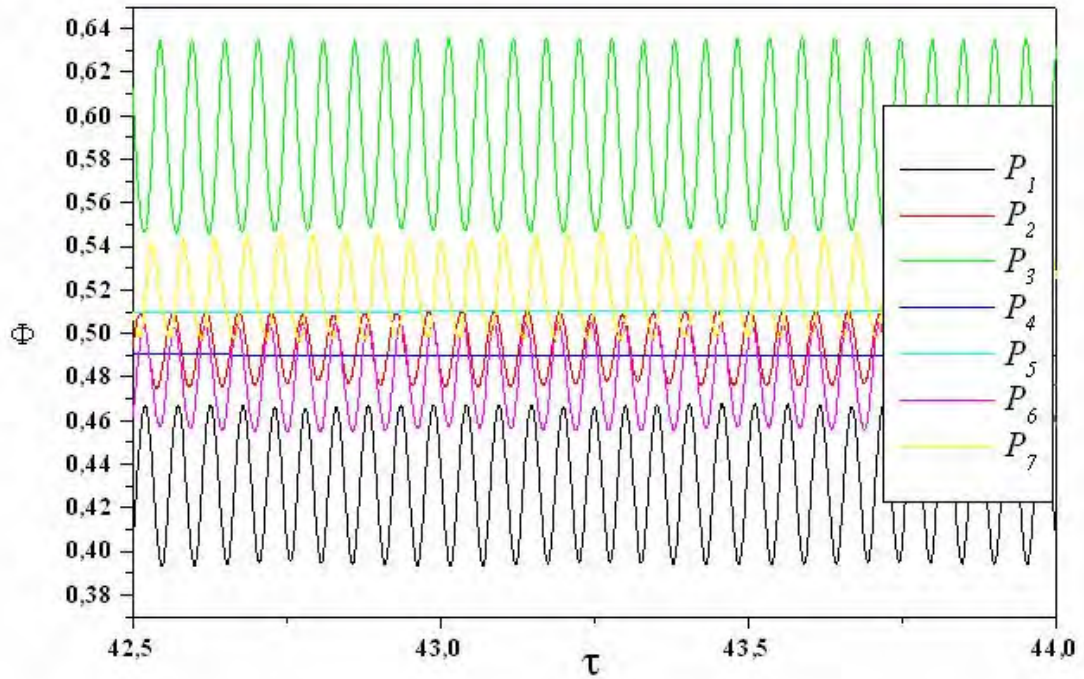


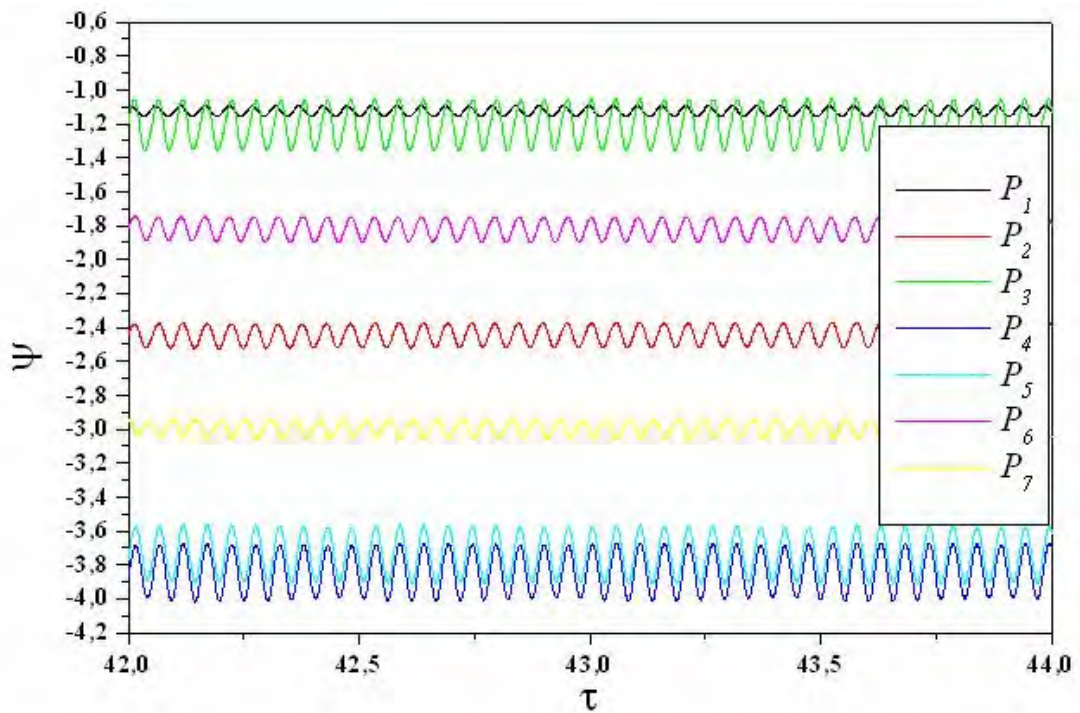
Figure 4.20: Evolution temporelle de la température adimensionnelle  $\theta$  aux points

( $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ ). Cas opposant :

$$Gr_t = 8,8 \times 10^5, Gr_s = 3 \times 10^5, Pr = 10, Sc = 100, Ha = 0$$



(a)

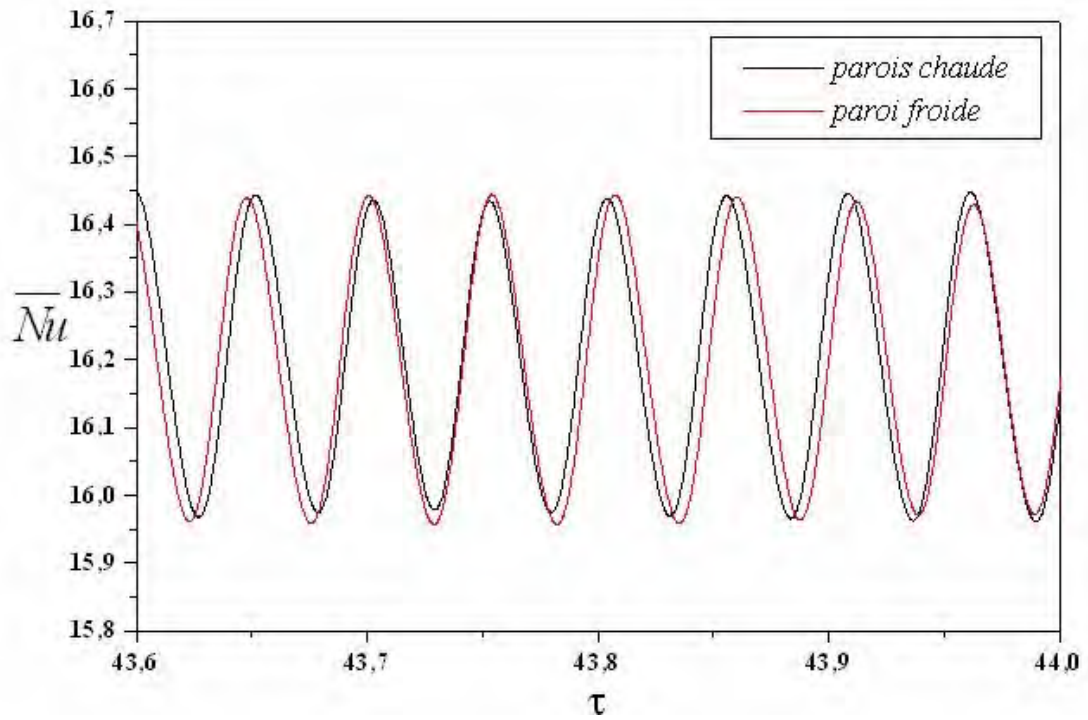


(b)

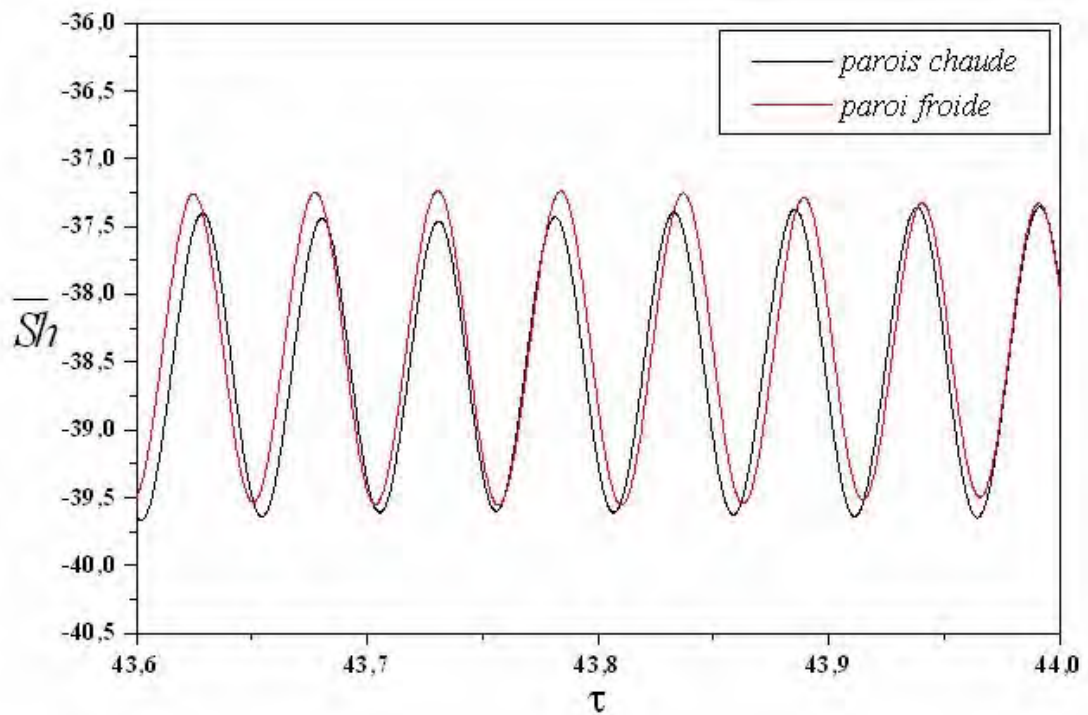
Figure 4.21: Evolution temporelle de : (a) la concentration adimensionnelle  $\Phi$ , (b) la fonction de courant aux points ( $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ ). Cas opposant :

$$\text{Gr}_t = 8,8 \times 10^5, \text{Gr}_s = 3 \times 10^5, \text{Pr} = 10, \text{Sc} = 100, \text{Ha} = 0.$$





(a)



(b)

Figure 4.22. Evolution temporelle des nombres de: (a) Nusselt moyens  $\overline{Nu}$  et Sherwood moyens  $\overline{Sh}$  le long des parois chaude et froide avec:  $Gr_s = 3 \times 10^5$ ,  $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$ .

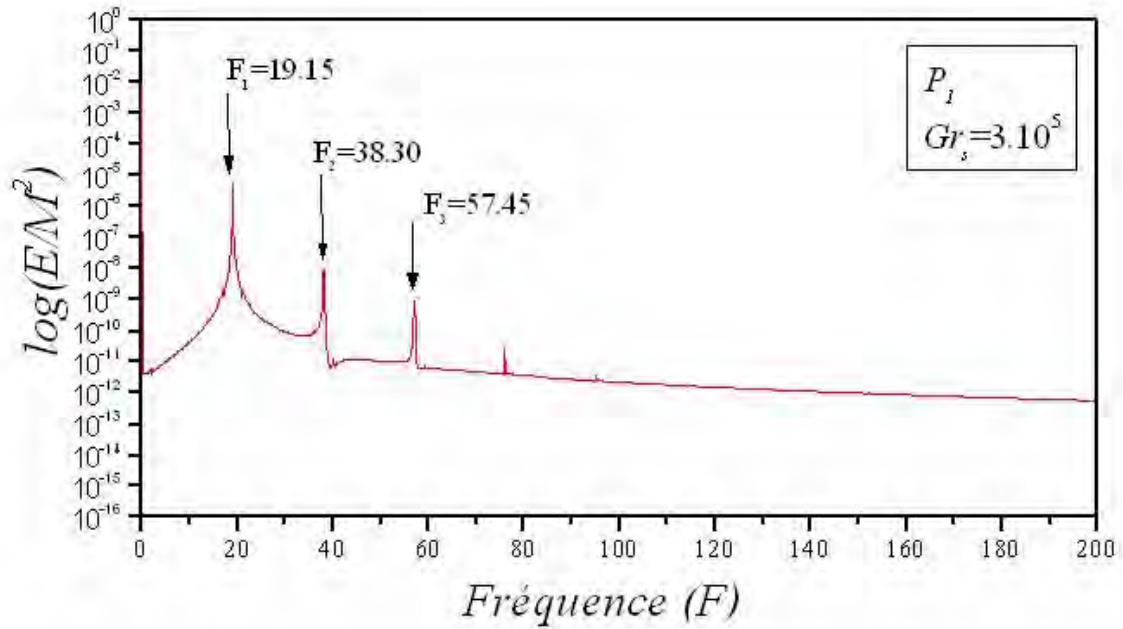
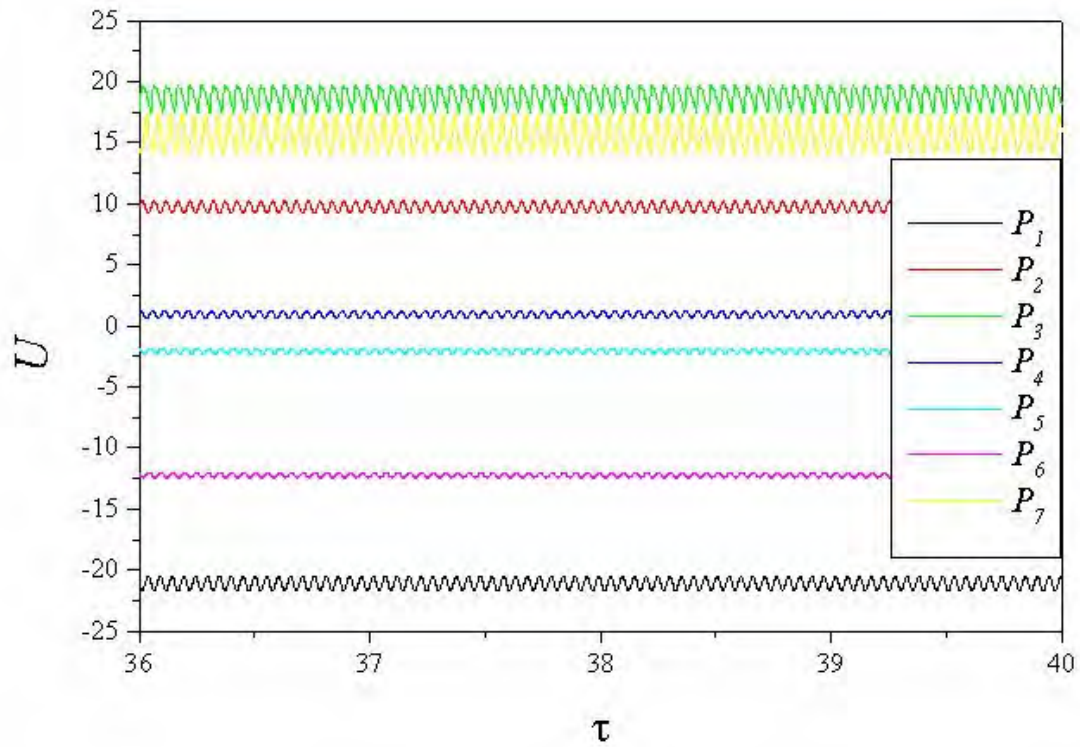
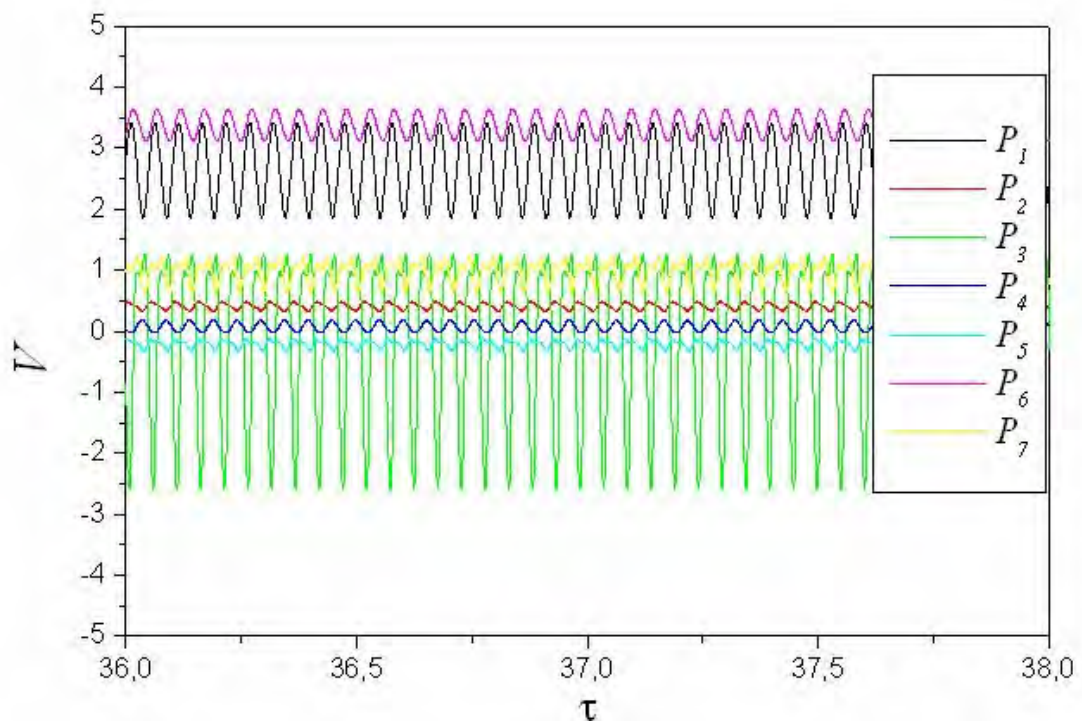


Figure 4.23. Spectre d'énergie de la vitesse horizontale avec  $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Gr_s = 3 \times 10^5$ ,  
 $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$



(a)



(b)

Figure 4.24. Evolution temporelle de : (a) la vitesse horizontale  $U$ , (b) la vitesse vertical  $V$  aux points ( $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ ),  $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Gr_s = 4 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$ .

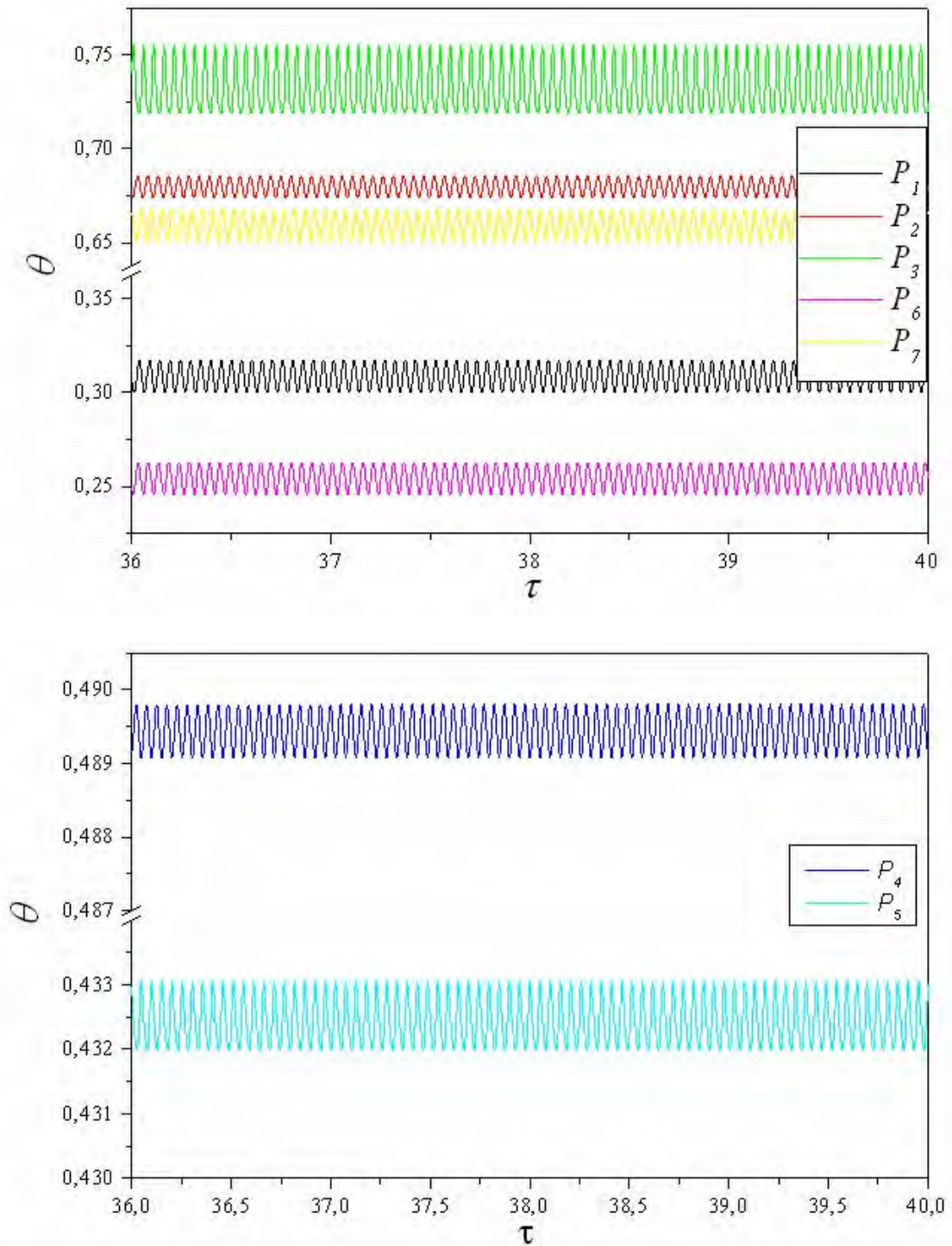
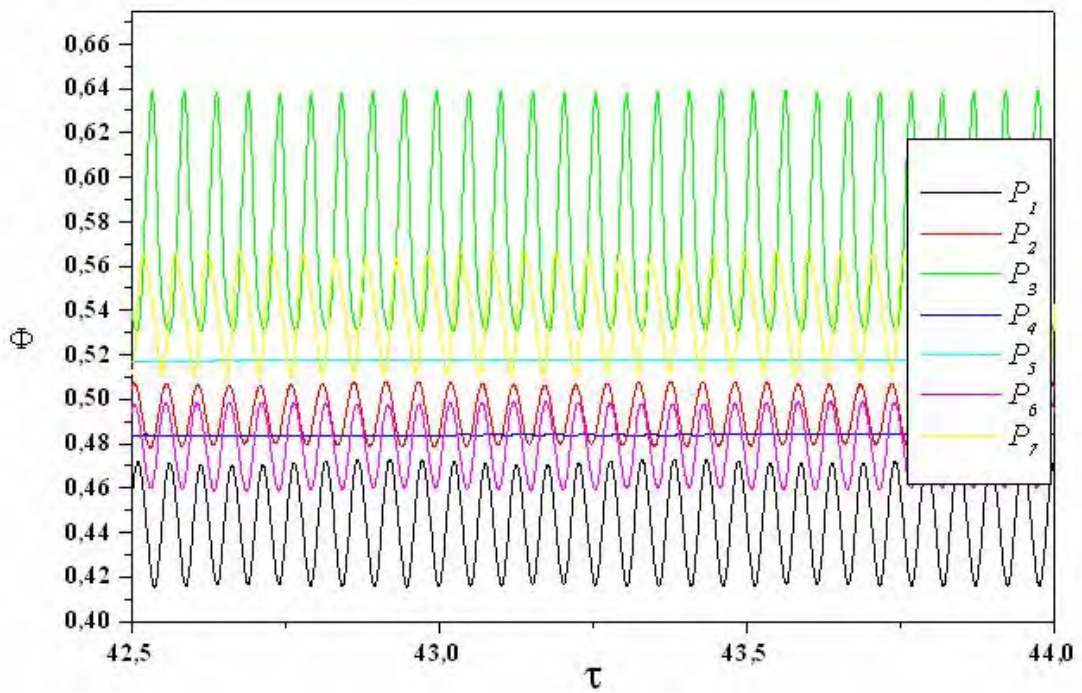
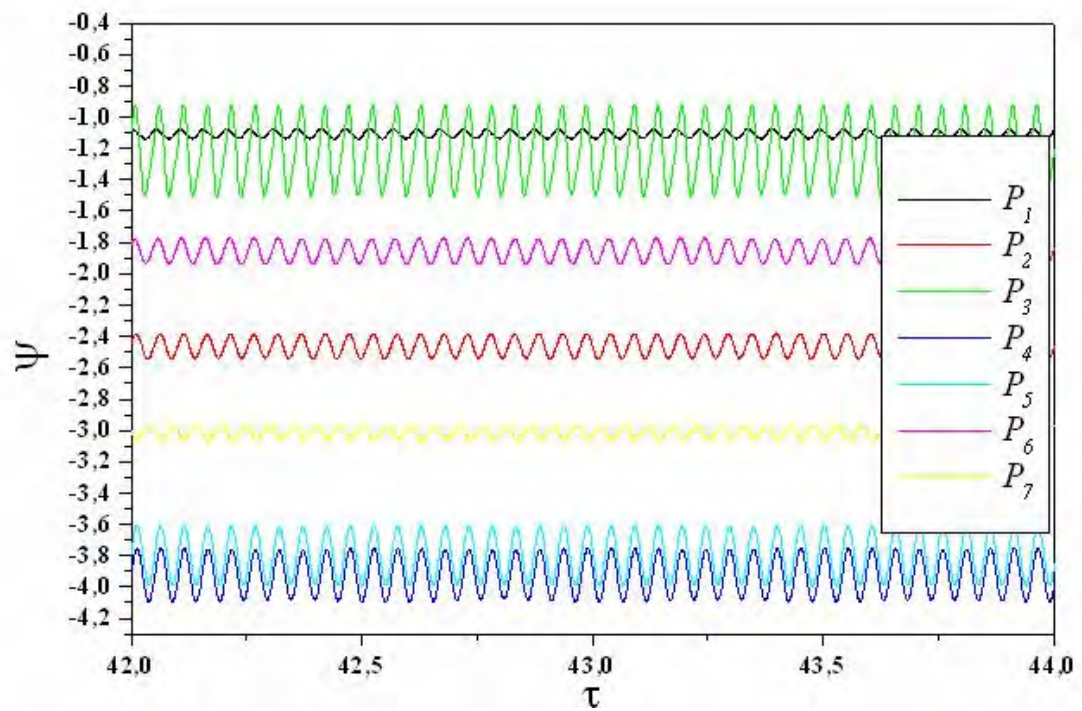


Figure 4.25 : Evolution temporelle de la température adimensionnelle  $\theta$  aux points ( $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ ) avec  $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Gr_s = 4 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$

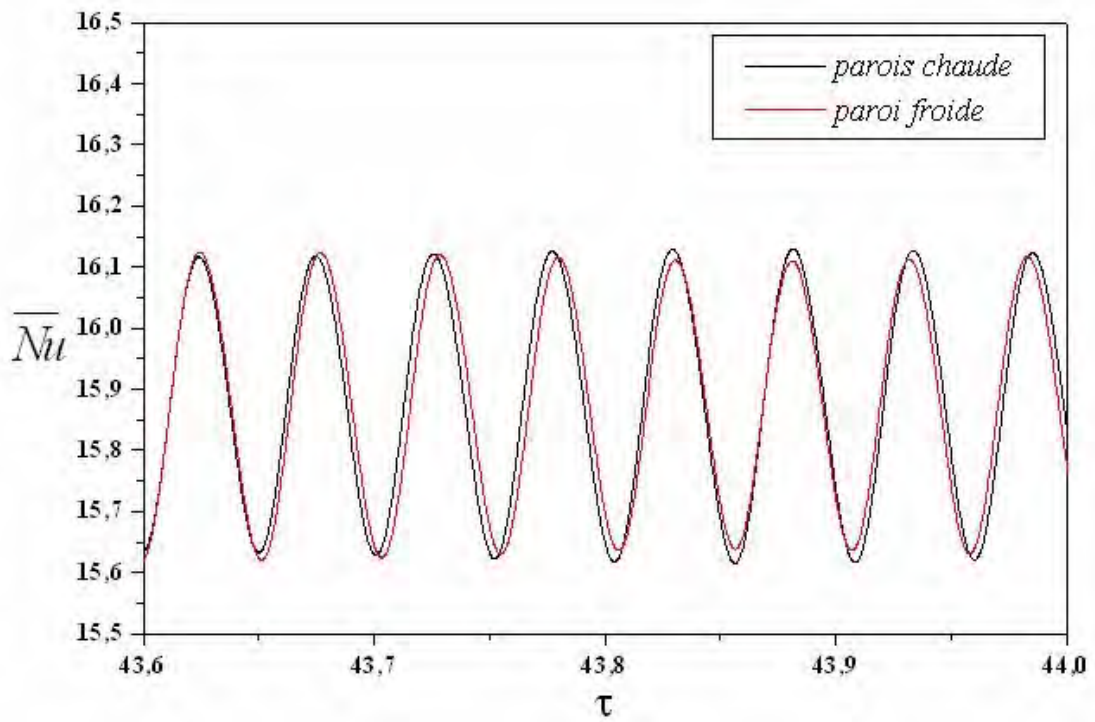


(a)

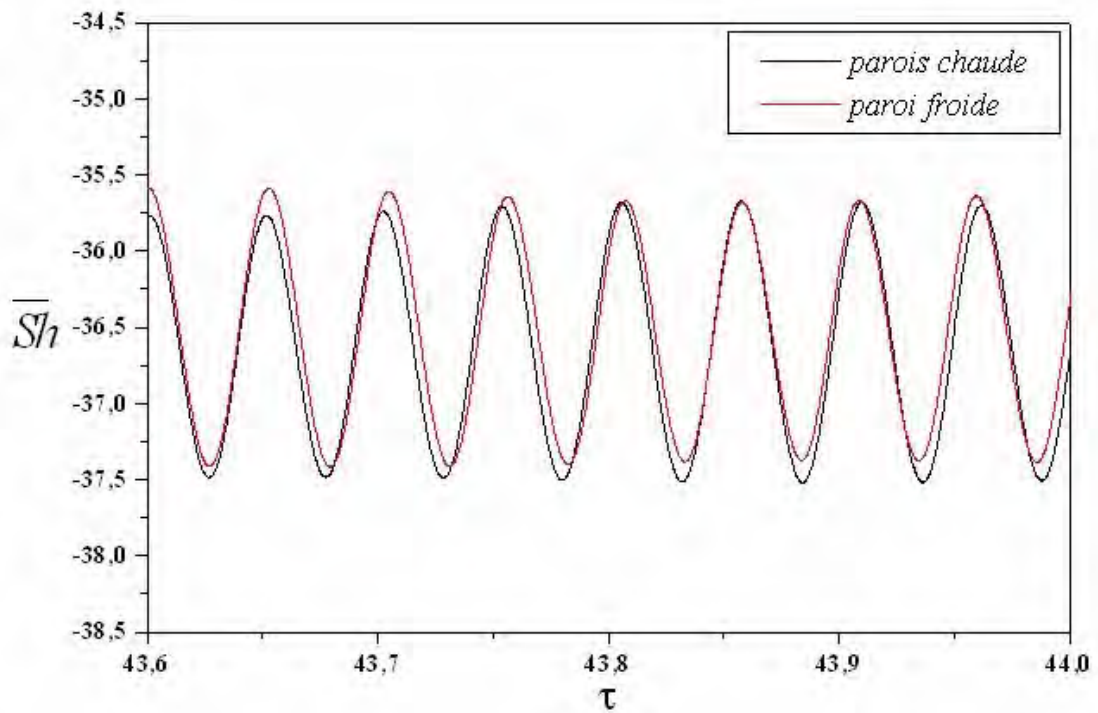


(b)

Figure 4.26 : Evolution temporelle de : (a) la concentration adimensionnelle  $\Phi$ , (b) la fonction de courant aux points ( $P_1, P_2, P_3, P_6, P_7$ ) cas opposant pour différents valeurs de  $Gr_s = 4 \times 10^5$ ,  $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$ .



(a)



(b)

Figure 4.27. Evolution temporelle des nombres de : (a) Nusselt moyens  $\overline{Nu}$  etSherwood moyens  $\overline{Sh}$  le long des parois chaude et froide avec :

$$Gr_s = 4 \times 10^5, Gr_t = 8,8 \times 10^5, Pr = 10, Sc = 100.$$

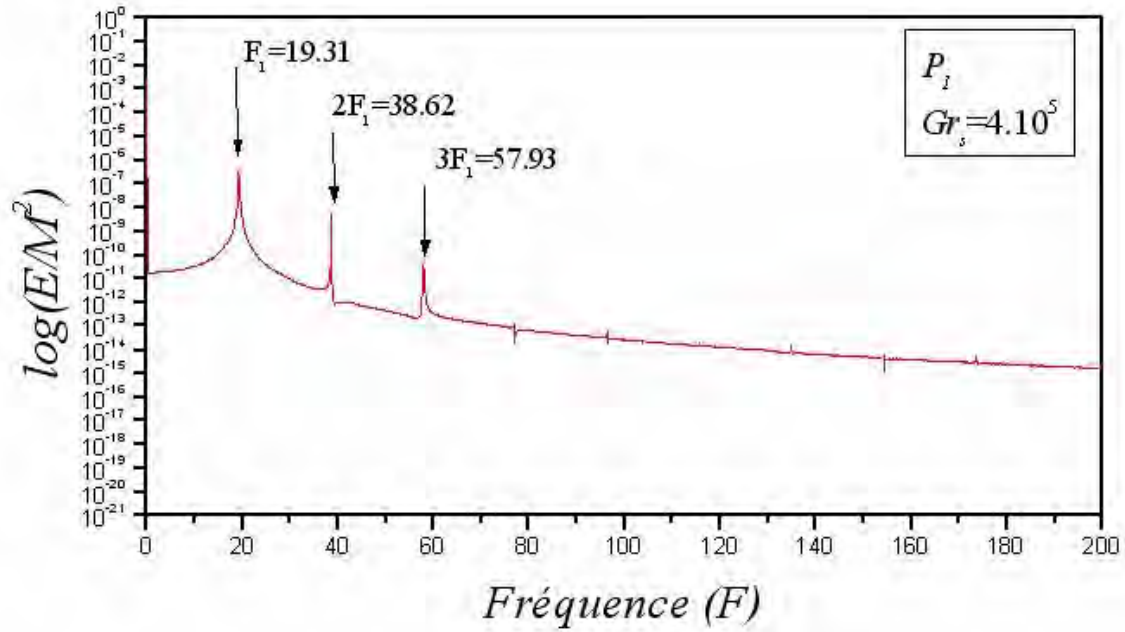


Figure.4.28. Spectre d'énergie de la vitesse horizontale  $U$  avec  $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  
 $Sc = 100$

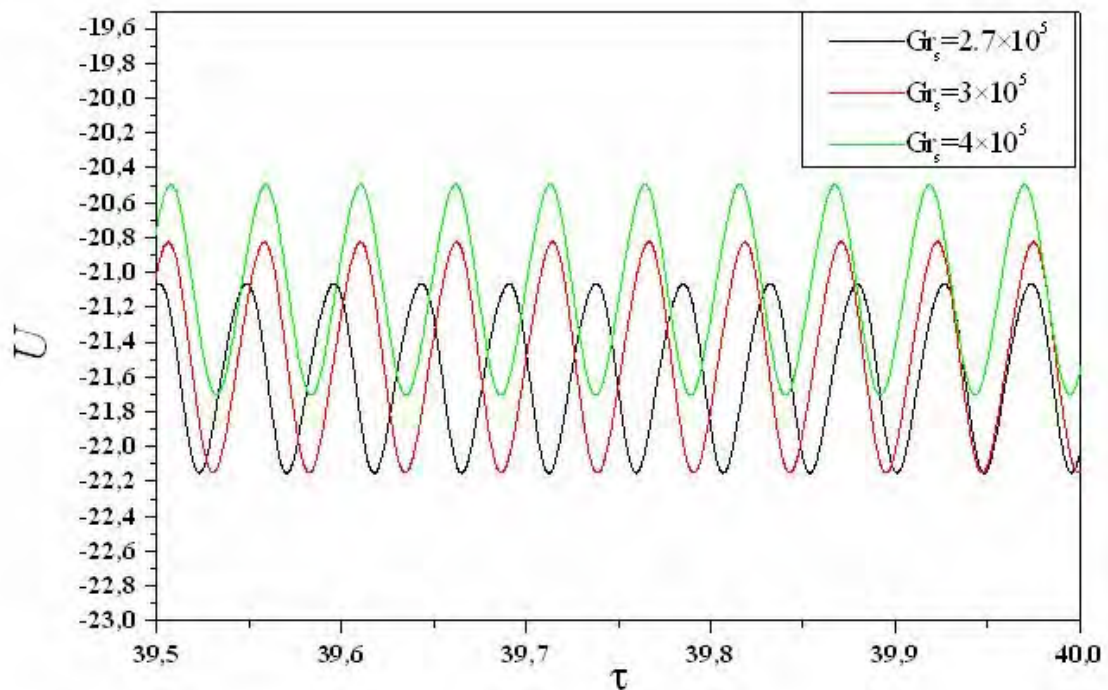


Figure.4.29. Evolution temporelle de la vitesse  $U$  au point  $P_1$ , pour différentes valeurs de  $Gr_s$  avec  $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$ .

### 4.6.2 Structure de l'écoulement

Les figures 4.30 a-c illustre la structure de l'écoulement représenté par les contours de la fonction de courant pour différentes valeurs du nombre de Grashof solutal. On constate que l'écoulement reste monocellulaire est instable et que les lignes de courant présentent un aspect oscillatoire accentué au niveau des parois horizontales, on augment le nombre de Grashof solutal les ligne de courant devient plus en plus oscillatoire.

### 4.6.3 Transfert de chaleur

Les figures 4.31 a-c représentent la distribution des isothermes avec l'évolution de nombre de Grashof solutale. Dans ce cas là, la force de poussée thermique est comparable avec la force de poussée massique ( $N = 0,34; 0,45; 0,56$ ) où le nombre de Grashof solutale égal à  $3 \times 10^5, 4 \times 10^5$  et  $5 \times 10^5$  respectivement. On remarque, que les isothermes sont parallèles aux parois horizontales et ils se concentrent plus aux parois verticales. Les températures diminuent de valeur de haut vers le bas, on remarque que les températures diminuent de valeur de gauche à droite suivant la direction horizontale (de parois chaude vers la parois froide), et de haut vers le bas suivant la direction verticale. Par conséquent, le transfert de chaleur est entraîné par l'écoulement convectif qui est le sens de rotation de l'horaire.

### 4.6.4 Transfert de matière

Les figures 4.32. a -c représente la distribution de la concentration au sein du fluide. Quand la poussée solutale est dominante on remarque que et les isoconcentrations se confinent près du parois verticale où les gradient de concentrations sans très importants et horizontale adiabatique, les isoconcentrations devient se stratifient parallèlement aux parois horizontale adiabatique. Néanmoins, cette stratification est instable.



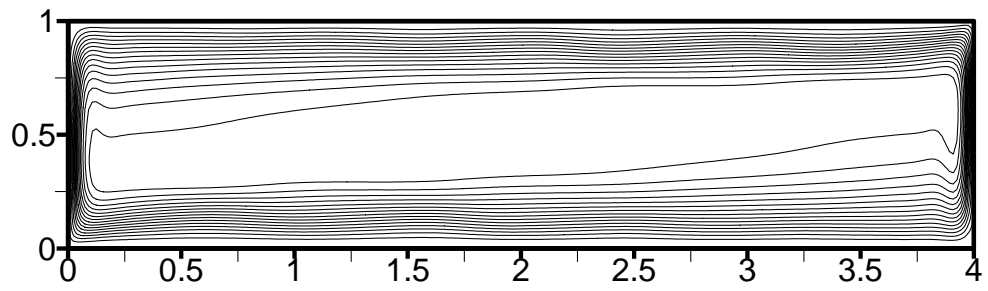
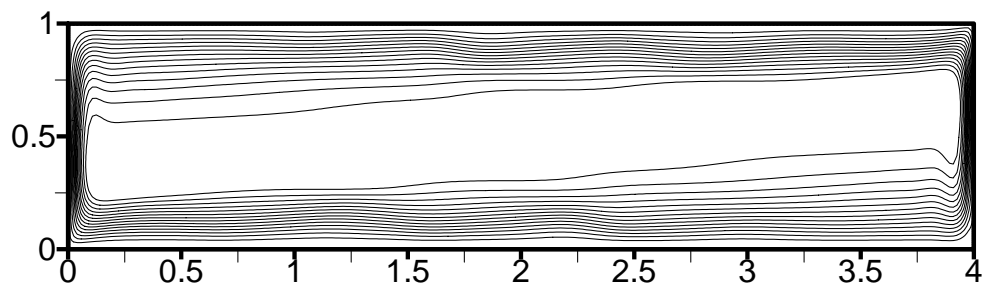
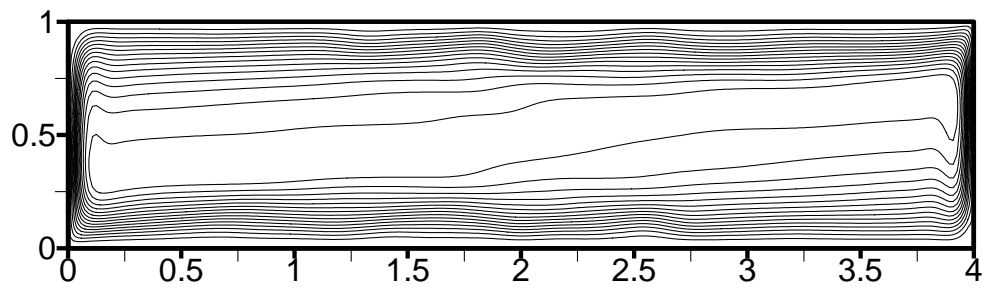
(a):  $Gr_s = 3 \times 10^5$ (b)  $Gr_s = 4 \times 10^5$ (c):  $Gr_s = 5 \times 10^5$ 

Figure 4.30. Structure de l'écoulement représenté par les contours de fonction du courant pour différentes valeurs du nombre de Grashof solutal.

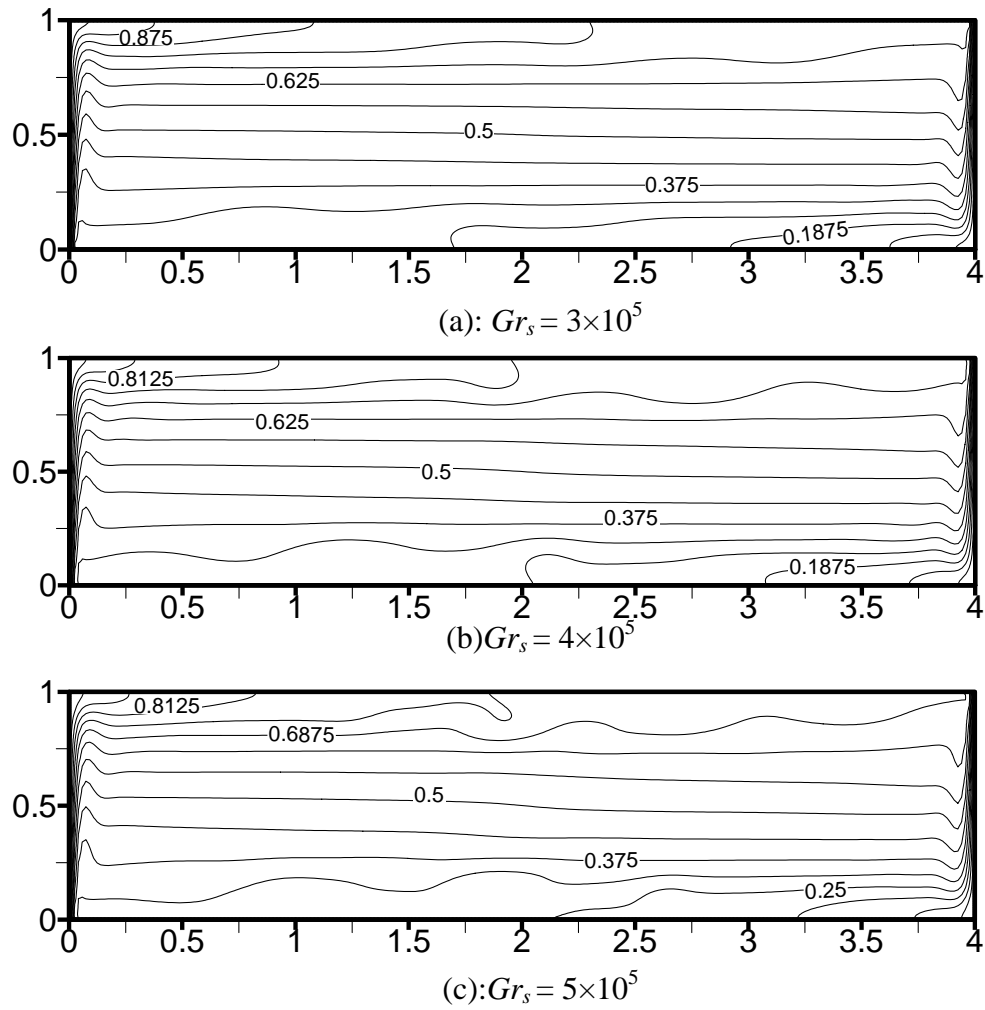


Figure 4.31. Distribution de la température représentée par les isothermes pour différentes valeurs du nombre de Grashof solutal.

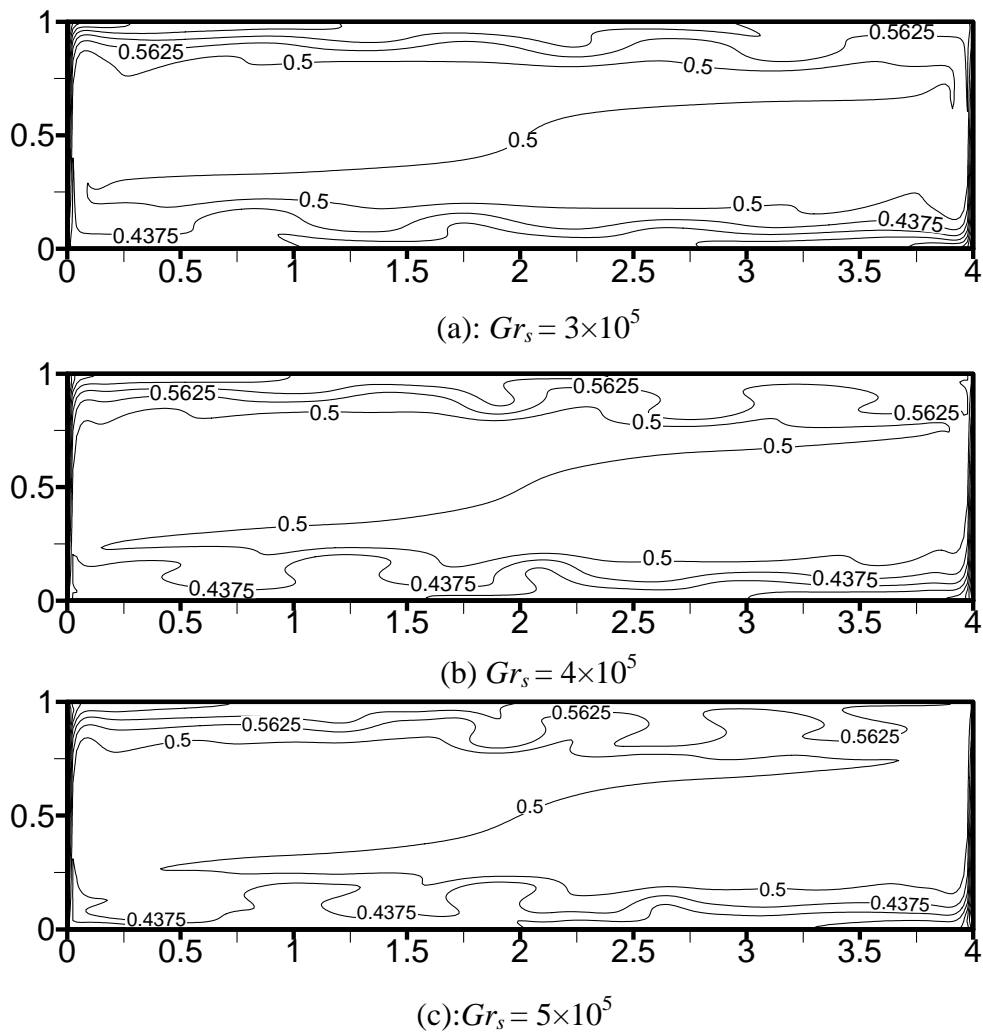
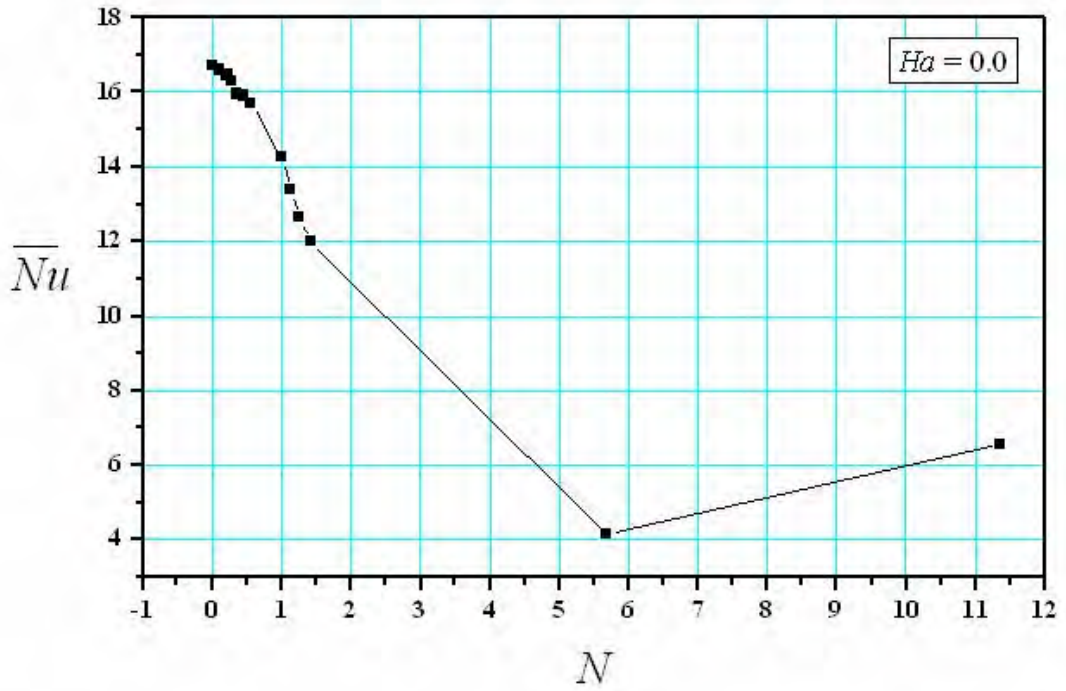


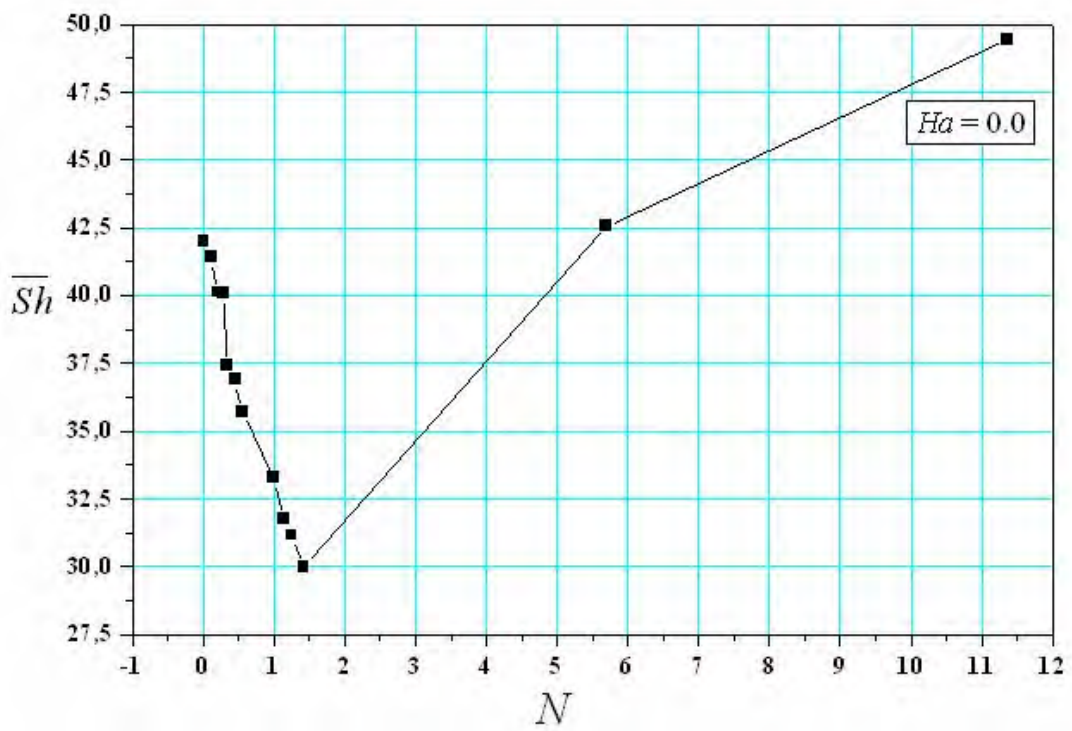
Figure 4.32. Distribution de la matière représentée par les isoconcentrations pour différentes valeurs du nombre de Grashof.

#### 4.6.5 Évolution des transferts de chaleur et de matière

L'évolution des taux de transferts de chaleur et masse en fonction du rapport des forces de volumes  $N$ , sont présentés sur la figure 4.1 par les nombres moyens de Nusselt (figure.33.a) et de Sherwood (figure.33.b). On constate que, l'augmentation du nombre de Grashof solutal (augmentation de  $N$ ) manifeste par la diminution des transferts thermique et massique. Aussi,  $\overline{Nu}$  décroît de 16.74 jusqu'à la valeur de 4,17 quand  $N$  passe de 0,01 à 5,68. Ensuite,  $\overline{Nu}$  croît a la valeur de 6,56 quand  $N$  augmentée à la valeur de 11,36. Quand à  $\overline{Sh}$ , il décroît de 42 jusqu'à 30 quand  $N$  passe de 0,01 jusqu'à 1,42 .Mais croit rapidement et atteint à la valeur de 59,42 quand  $N$  prend la valeur de 11,36.



(a)



(b)

Figure 4.33. Effet de rapport de force de volume sur le transfert de chaleur moyen  $\overline{Nu}$  (a), et sur le transfert de mass moyen  $\overline{Sh}$  (b).

## 4.7 Écoulement avec champ magnétique

Les investigations numériques que nous avons accomplies, montrent l'existence d'un régime instationnaire qui dépend d'une gamme du nombre de Grashof solutale ( $2 \times 10^5 < Gr_s \leq 1,25 \times 10^5$ ). Le degré des instabilités dépend de la position des particules par rapport aux parois solides de l'enceinte, les oscillations le plus fortes sont obtenues pour  $Gr_{s,cr} = 4 \times 10^5$ , elle sont sinusoïdales et périodiques.

Afin d'étudier l'influence d'un champ magnétique constant sur la convection naturelle thermosolutale, nous avons considéré le cas d'un écoulement instable quand les forces de volume sont opposantes représenté sur la figure 4.24, 4.25 et 4.26. Nous avons appliqué un champ magnétique au cas considéré suivant la direction vertical Y. Pour voir l'influence de ce champ magnétique sur les oscillations des vitesses, la structure de l'écoulement, les transferts de chaleur et de masse, en augmentant le nombre de Hartmann (Ha=10, 25, 50, 75, 100).

On observe que cette augmentation du champ magnétique représenté par le nombre de Hartmann, a pour l'effet de diminuer l'amplitude des oscillations, notamment pour Ha=100 où ces oscillations disparaissent totalement et l'écoulement devient stable. Sur les figures.4.34, 4.35, 4.36 et 4.37, nous constatons que les amplitudes des composantes horizontale U et verticale V de la vitesse de la température  $\theta$  et la concentration  $\Phi$ , sont légèrement amorties au début, ensuite et pour  $Ha \geq 100$  elles sont totalement amorties.

Les figures 4.34.a-e, montrent l'influence de nombre de Hartmann sur l'amplitude des oscillations de la composante horizontale de la vitesse U aux 7 points choisies dans l'enceinte pour un nombre de Grashof solutal fixe égal à  $Gr_{s,cr} = 4 \times 10^5$ , on observe que l'augmentation de nombre de Hartmann fait diminuer légèrement l'amplitude des oscillations pour (Ha=10). Pour Ha =25, 50 et 75, on remarque qu'à l'exception du point P<sub>3</sub>, l'amplitude des oscillations diminue, mais la vitesse moyenne diminue pour tous les points tests considérés. Cependant, et pour, Ha=100 les oscillations disparaissent totalement au niveau de ces points et l'écoulement devient stable.

Sur les figures.4.38, 4.39 et 4.40 nous pouvons observer l'effet du champ magnétique en fonction de Ha sur la structure de l'écoulement, les distributions de la température et de la concentration. Ces résultats sont en bon accord avec ceux de référence [39].

### 4.7.1 L'effet du champ magnétique sur la structure d'écoulement

Les figures 4.38-a-e représentent la structure d'écoulement pour différentes valeurs de Hartmann, on remarque que l'augmentation de nombre de Hartmann influe sur la structure d'écoulement. Pour  $Ha=10$  et  $25$ , on voit bien que les lignes de courant présentent un aspect oscillatoire accentué au niveau des parois horizontales, ce qui explique que l'amortissement du point  $P_3$ , par à l'amortissement des autres points.

### 4.7.2 L'effet du champ magnétique sur le transfert de chaleur

Les figures 4.39-a-e illustrent la distribution de la température représentée par les isothermes pour différentes valeurs de nombre de Hartmann. Pour faible nombre de Hartmann ( $Ha=10, 20$ ) on remarque que les isothermes sont parallèles aux parois horizontales et un peut incliné près des parois horizontale adiabatique il se concentrent plus aux parois verticales, ces gradients de température diminuent de valeur de haut vers la bas. Pour les nombre de Hartmann  $Ha=50, 75$  les isotherme devient plus en plus inclinés, notamment pour  $Ha=100$  où les isothermes devient plus inclinées.

### 4.7.3 L'effet du champ magnétique sur le transfert de matière

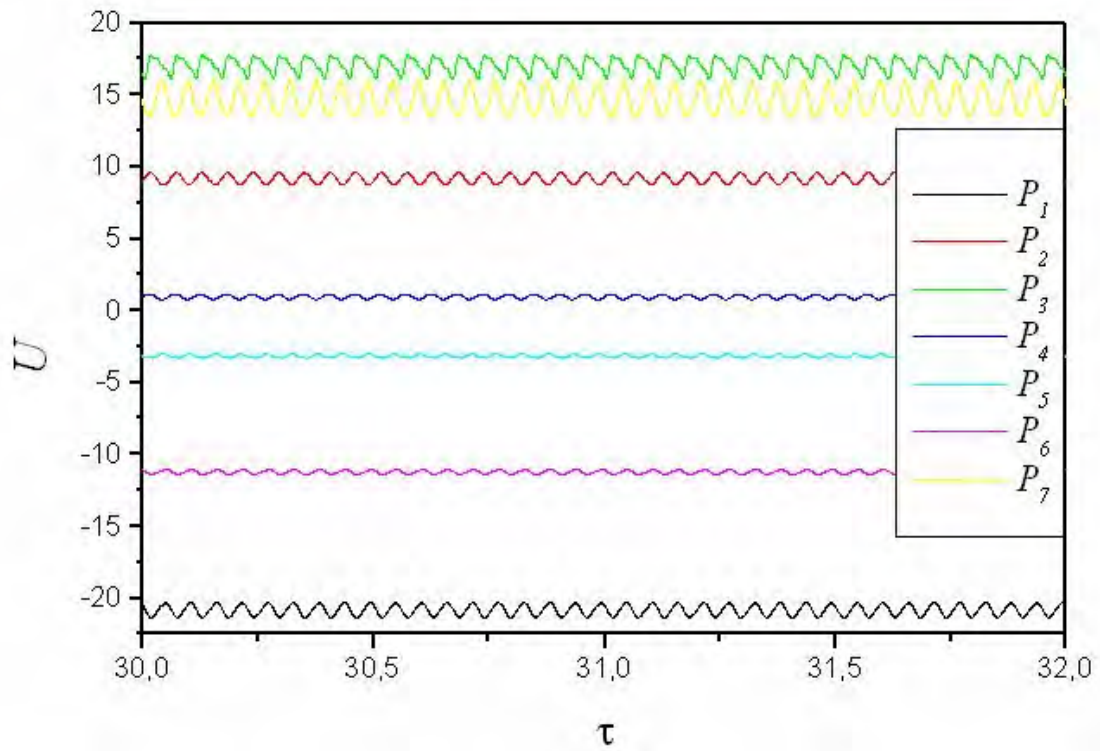
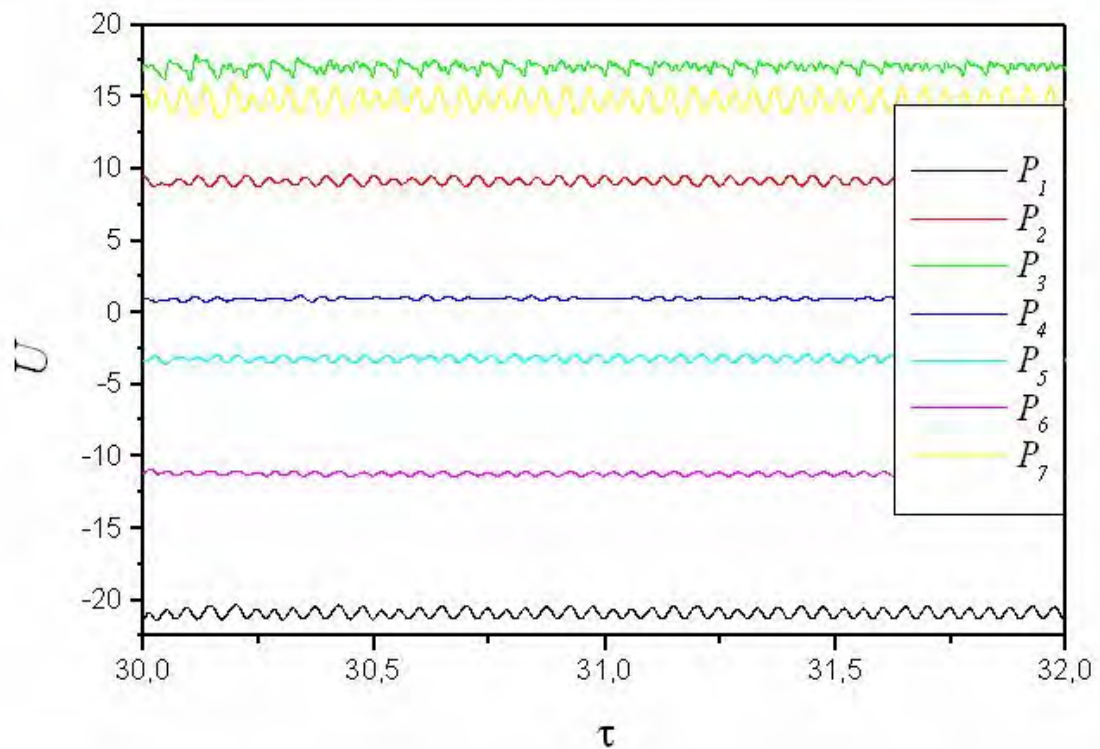
Les figures 4.40-a-e illustrent distribution de la matière représentée par les isoconcentrations pour différentes valeurs de nombre de Hartmann. Pour faible nombre de Hartmann ( $Ha=10, 20$ ) on remarque que les isothermes sont parallèles aux parois horizontales et un peut incliné près des parois horizontale adiabatique il se concentrent plus aux parois verticales, ces gradients de température diminuent de valeur de haut vers la bas. Pour les nombre de Hartmann  $Ha=50, 75$  les isotherme devient plus en plus inclinés, notamment pour  $Ha=100$  où les isothermes devient plus inclinées.

Afin d'étudier l'influence d'un champ magnétique constant sur la vitesse horizontale, nous avons considéré le cas d'un écoulement instable représenté sur les figures 4.41 pour  $Gr_s=4 \times 10^5$  fixe, quand les forces de volume sont opposées. Nous avons appliqué un champ magnétique au cas considéré suivant la direction vertical Y. On observe que l'augmentation de l'intensité du champ magnétique représenté par le nombre de Hartmann,  $Ha=10, 25, 50, 75$  et  $100$  a pour effet de diminuer la vitesse horizontale au milieu de la cavité  $X=2$ , notamment pour  $Ha=100$  où la vitesse est faible . Ces résultats sont en bon accord avec ceux de la référence [39].

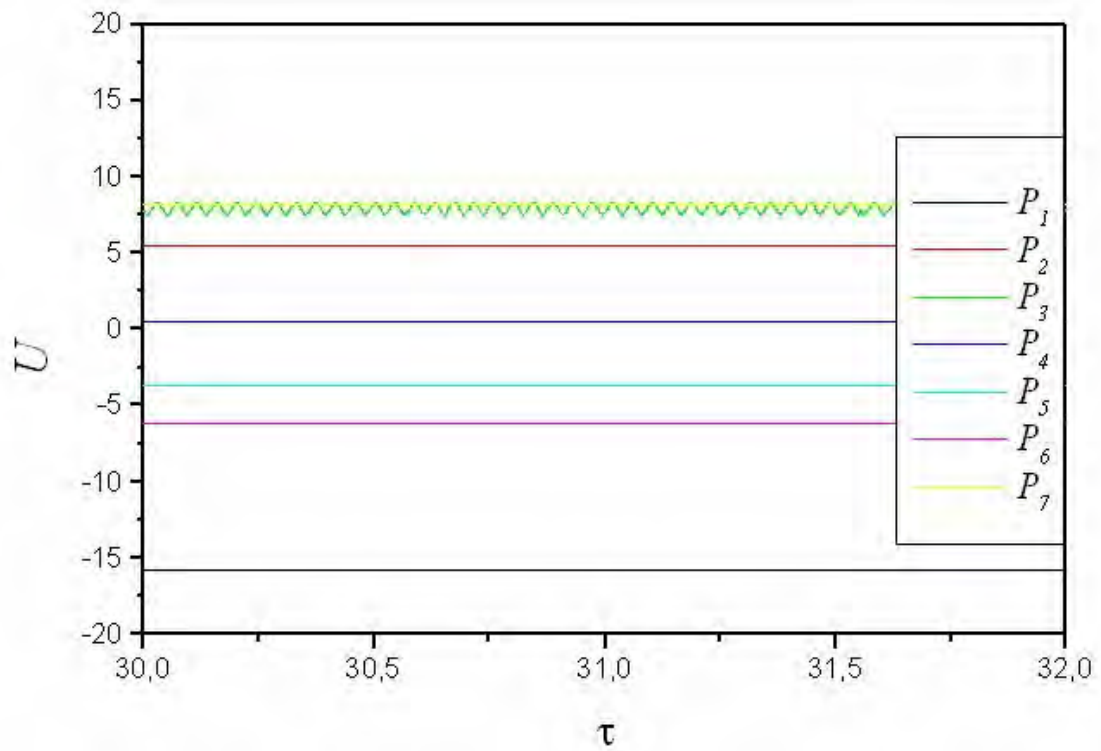
Les Figures.4.42.a-b montrent l'effet du nombre de Hartmann sur le nombre de Nusselt moyen  $\overline{Nu}$  et sur le nombre de Sherwood moyen  $\overline{Sh}$ . On remarque aussi que l'augmentation du nombre de Hartmann  $Ha$  diminue les transferts moyens de chaleur et de masse [32].

La figure 4.43 montre l'évolution de nombre de Grashof solutal en fonction du nombre de Hartmann, on remarque qu'il y'a deux régions d'écoulement ; l'écoulement stable et instable, séparé par un limite : c'est le diagramme de stabilité. Ce diagramme indique qu'au-dessus de cette limite l'écoulement est instable et qu'au-dessous de cette limite l'écoulement est stable. On remarque aussi que l'application d'un champ magnétique verticale permet de stabiliser l'écoulement, et que l'augmentation de nombre de Hartmann augmente le nombre de Grashof solutale critique, c'est-à-dire que l'écoulement instable est retardé par le champ magnétique.

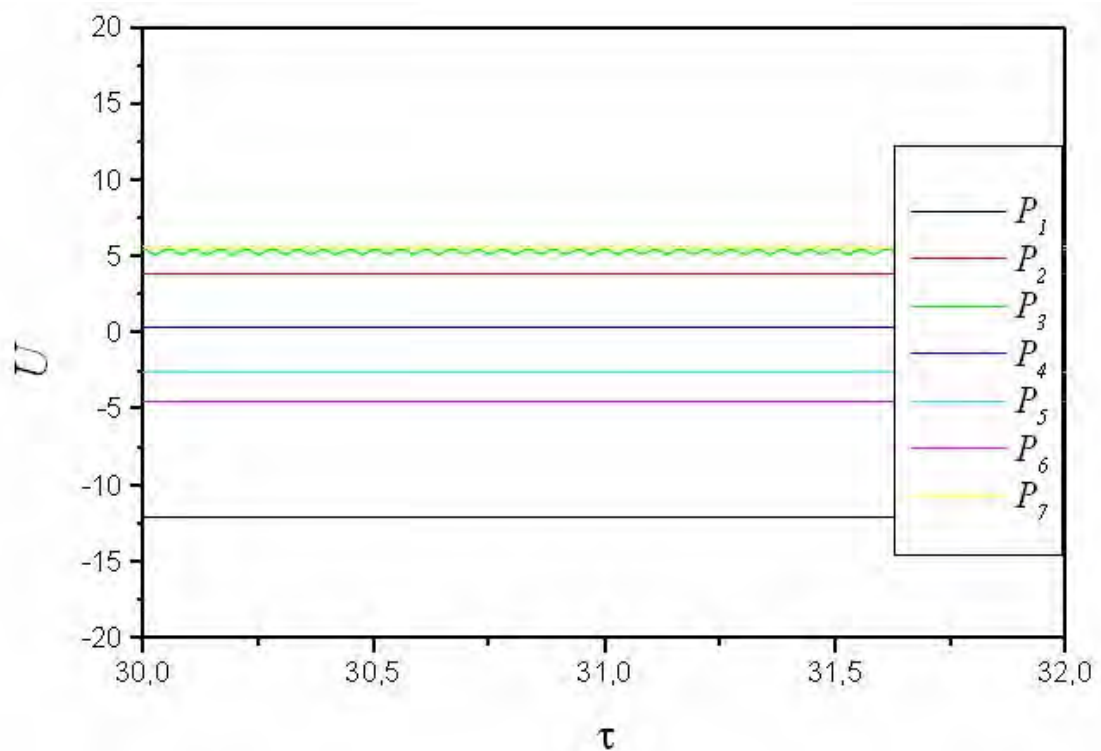


(a):  $Ha=10$ (b):  $Ha=25$ 

Figures 4.34. Evolution temporelle de la composante horizontale de la vitesse  $U$  pour différentes valeurs de nombre de Hartmann,  $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Gr_s = 8,8 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc=100$ .

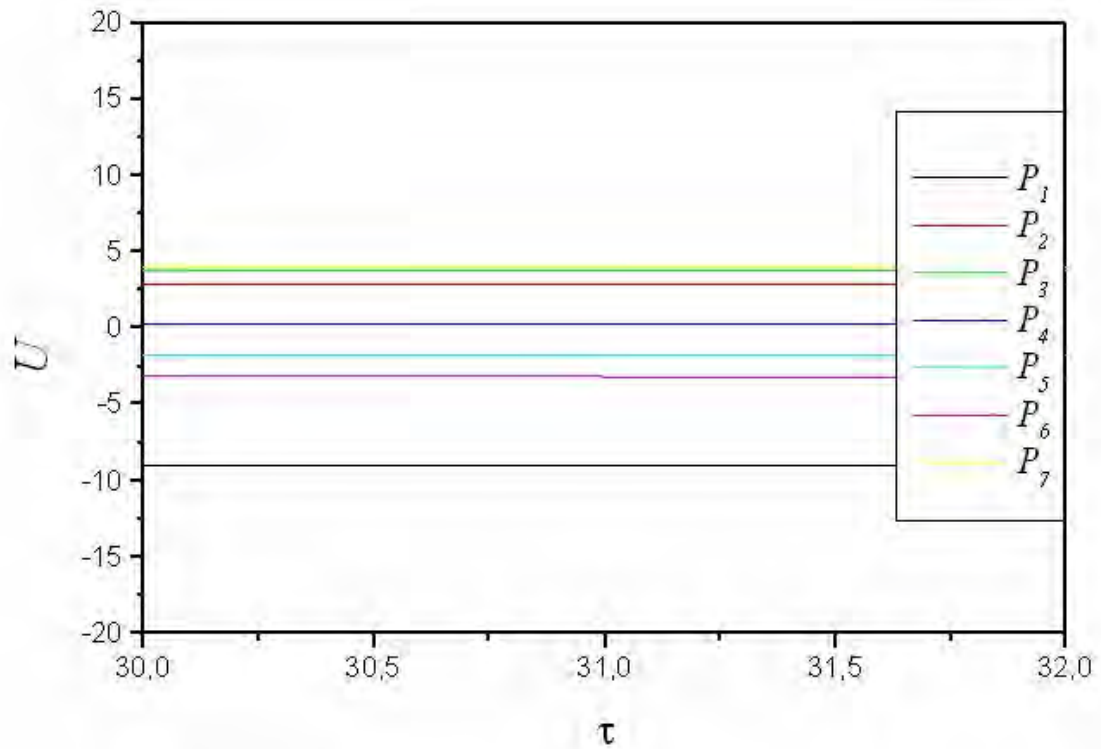


(c): Ha=50



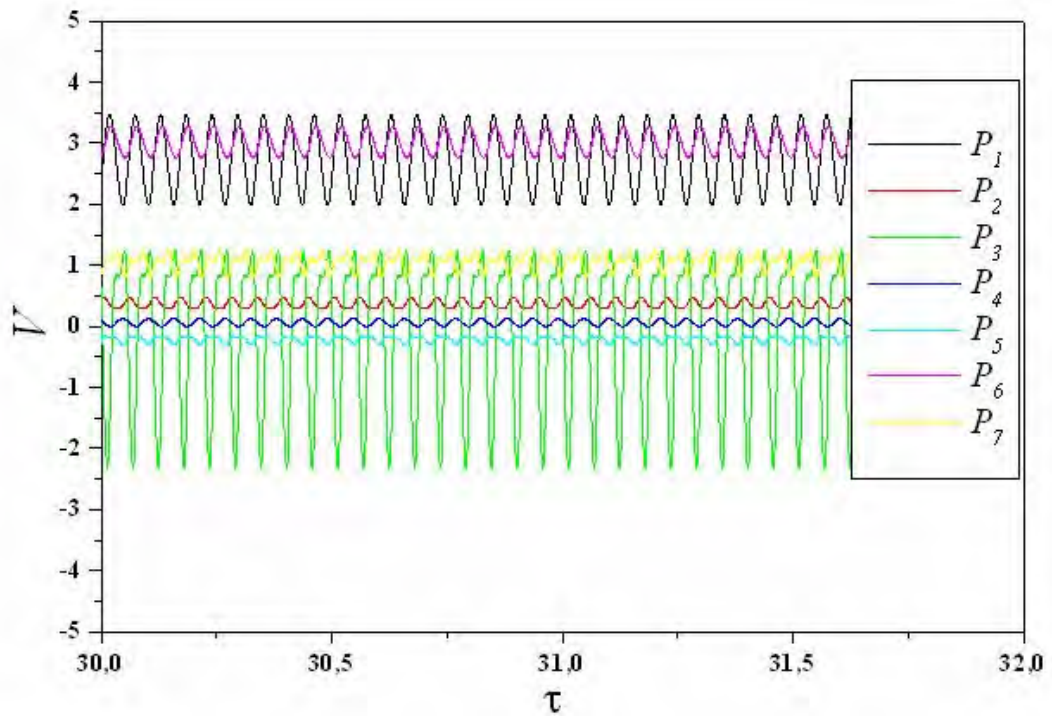
(d): Ha=75

Figures 4.34 (suite). Evolution temporelle de la composant horizontale de vitesse  $U$  pour différentes valeurs de nombre de Hartmann,  $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Gr_s = 8,8 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$ .

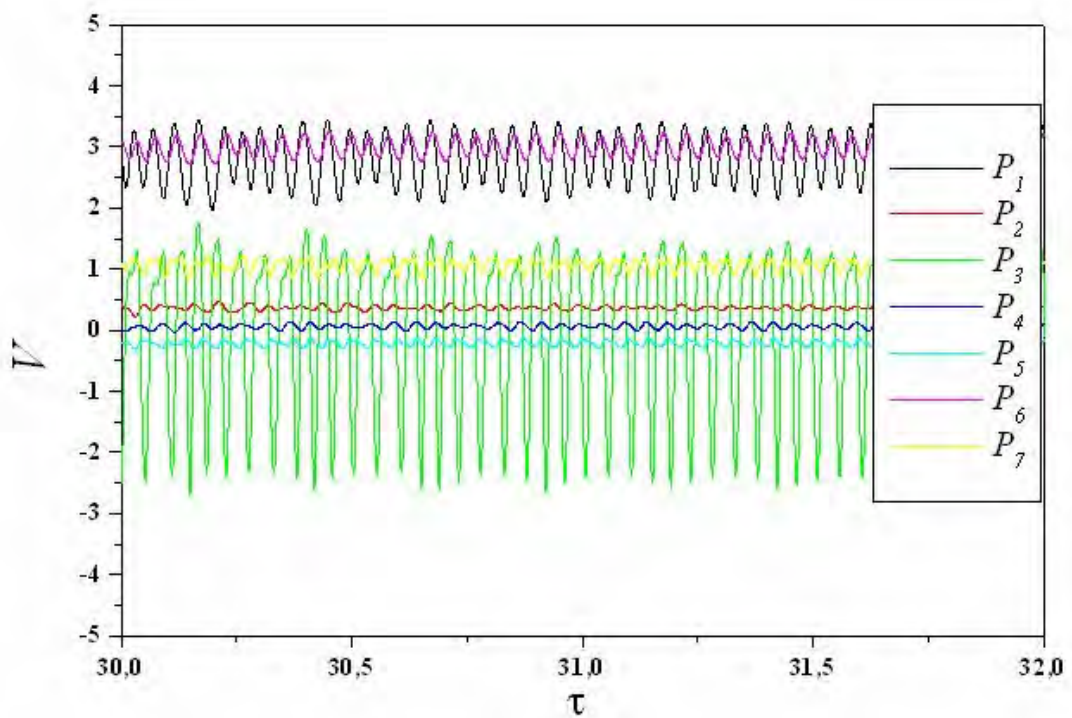


(e):Ha = 100

Les figure 4.34 (suite) : l'évolution temporelle de la composant horizontale de vitesse  $U$  pour différentes valeurs de nombre de Hartmann,  $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Gr_s = 8,8 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$ .

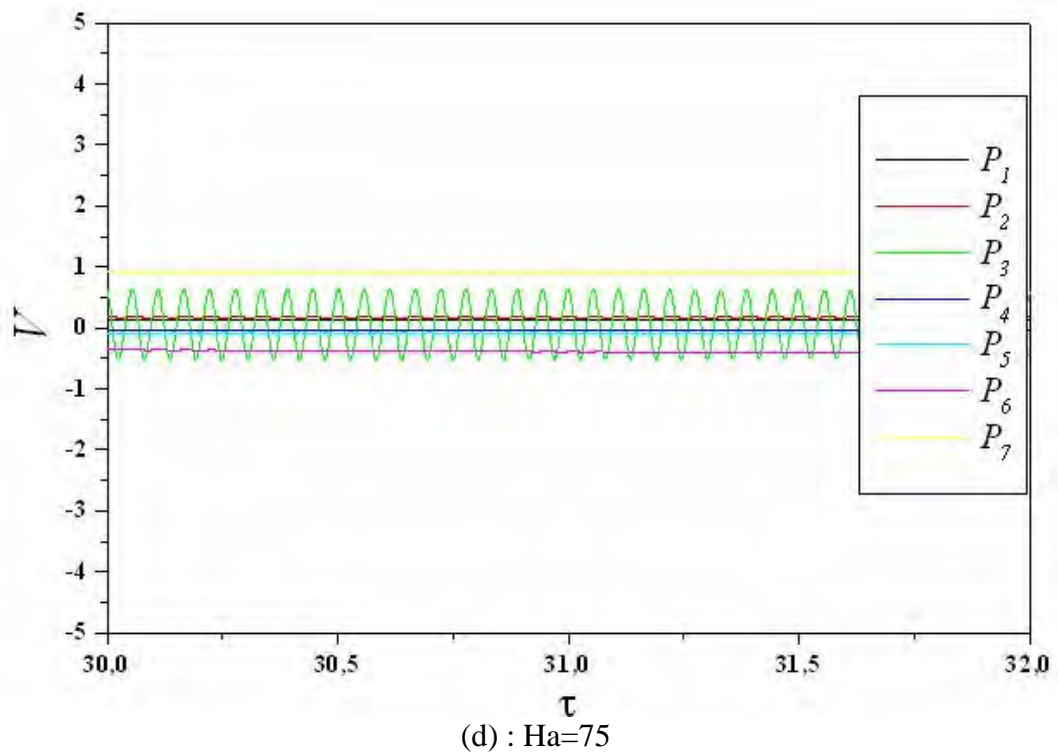
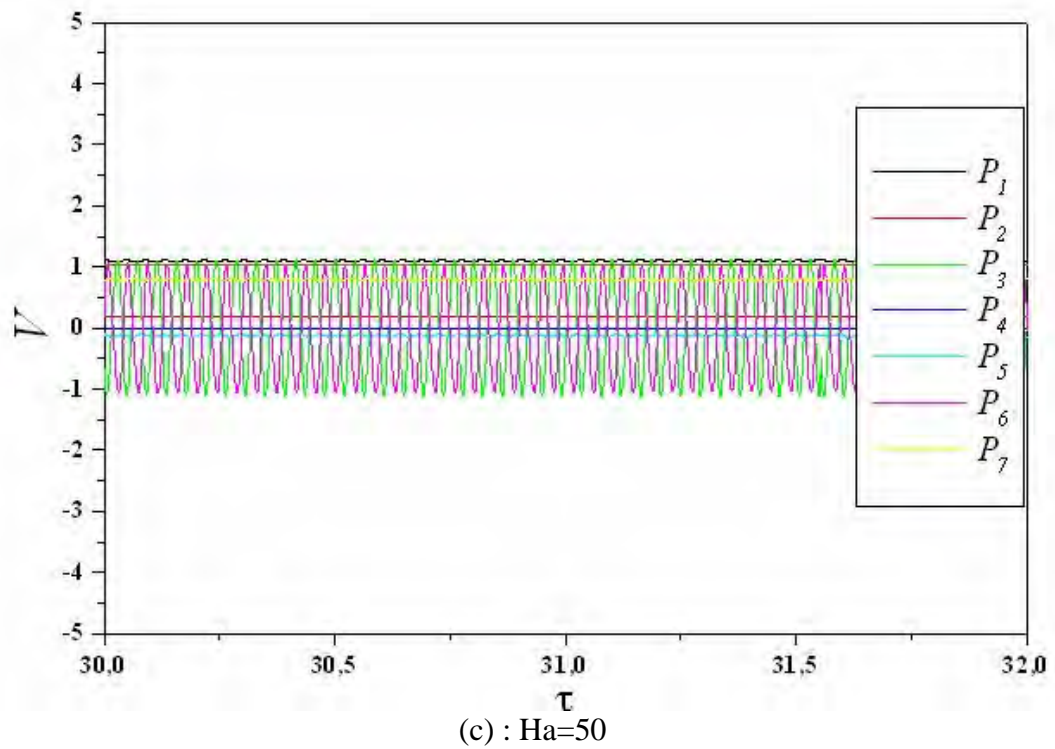


(a) : Ha=10

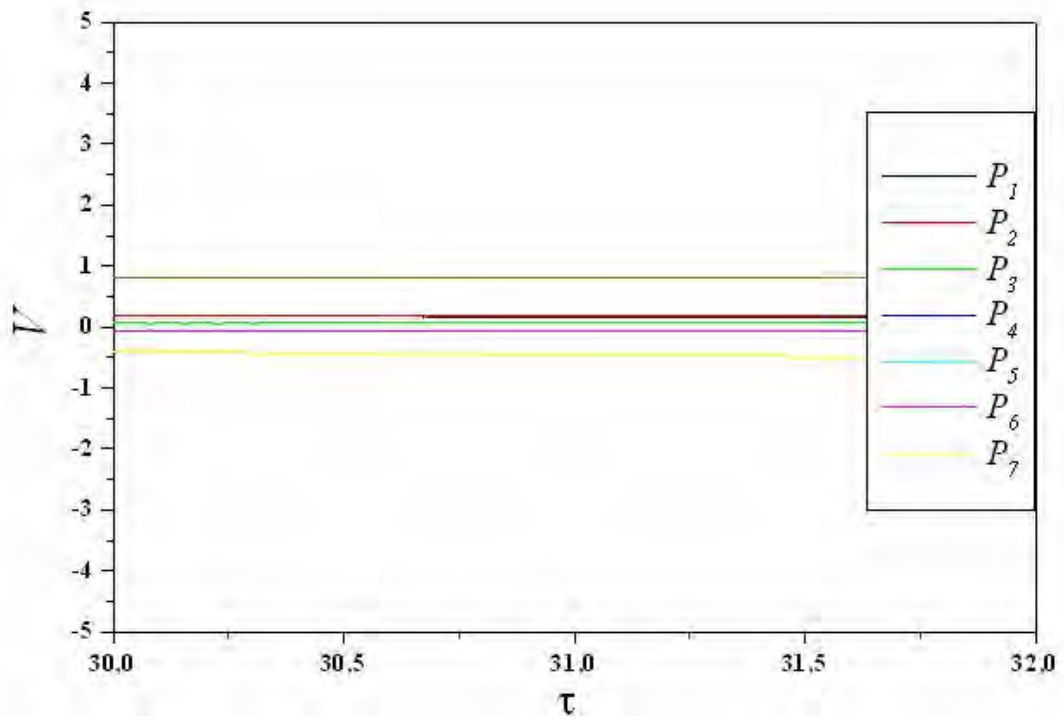


(b) : Ha=25

Les figure 4.35: l'évolution temporelle de la composant verticale de vitesse  $V$  pour différentes valeurs de nombre de Hartmann,  $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Gr_s = 8,8 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$ .

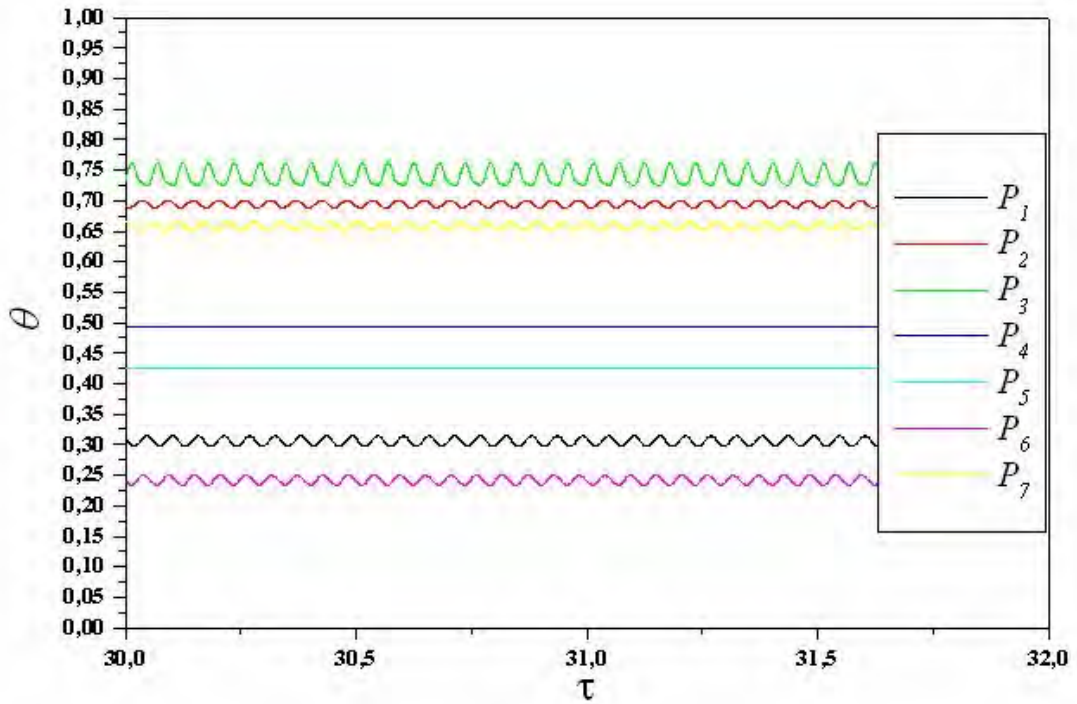


Les figure 4.35 (suite). L'évolution temporelle de la composant vertical de vitesse  $V$  pour différentes valeurs de nombre de Hartmann,  $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Gr_s = 8,8 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$ .

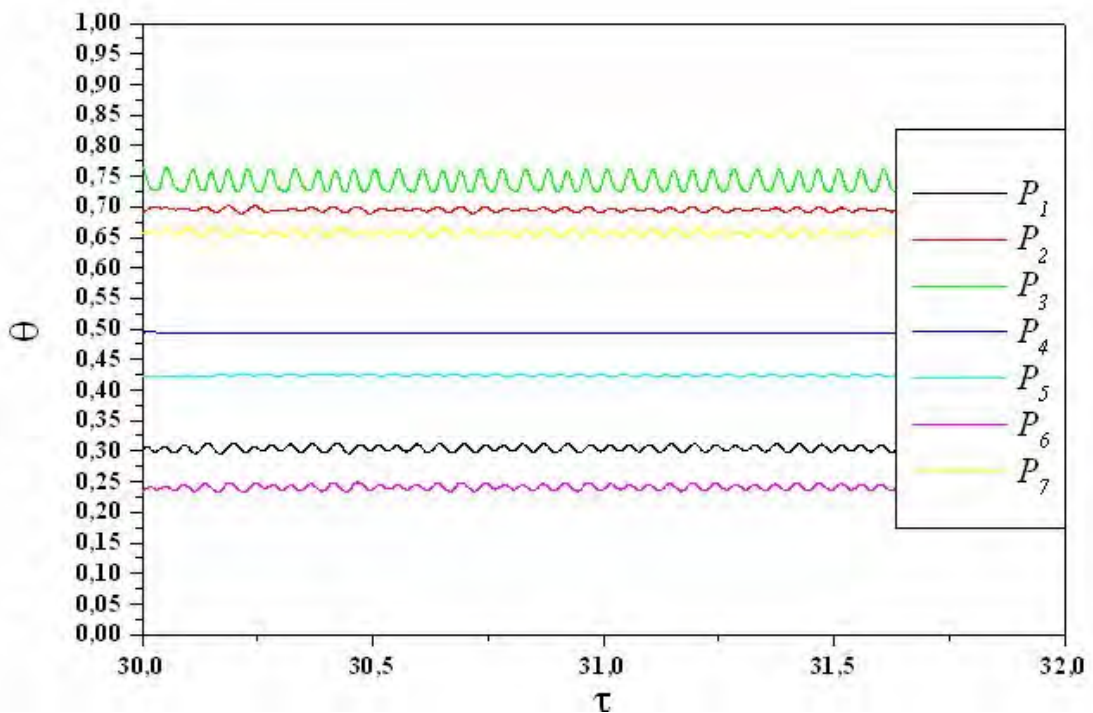


(e) :  $Ha = 100$

Les figure 4.35 (suite). L'évolution temporelle de la composant vertical de vitesse  $V$  pour différentes valeurs de nombre de Hartmann,  $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Gr_s = 8,8 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$ .

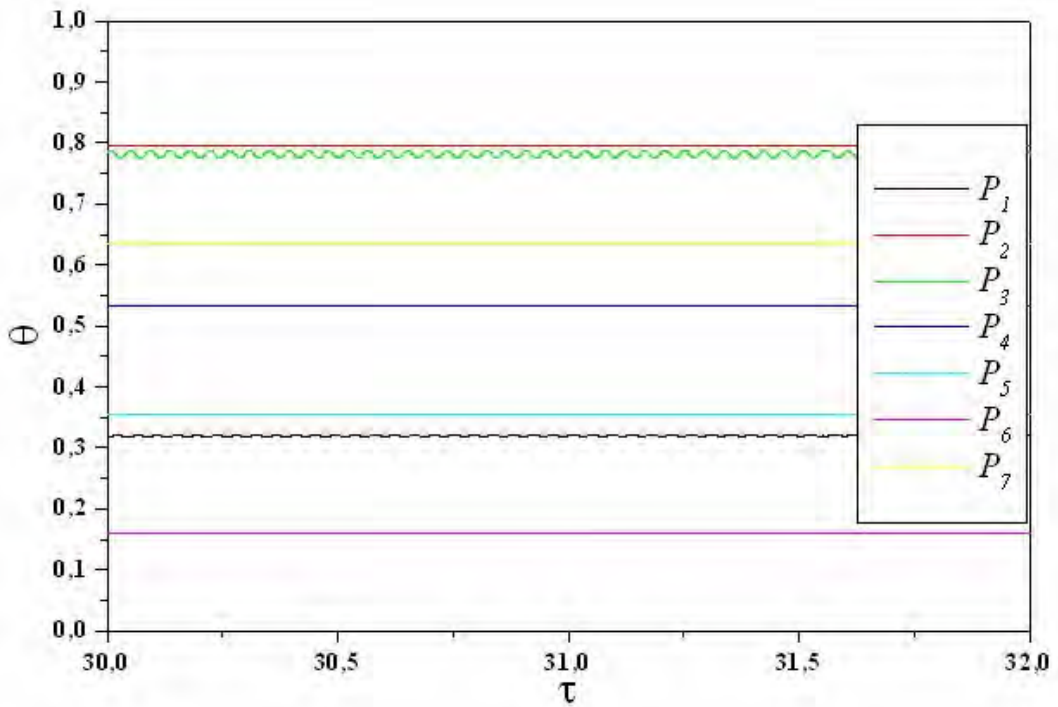


(a) : Ha=10

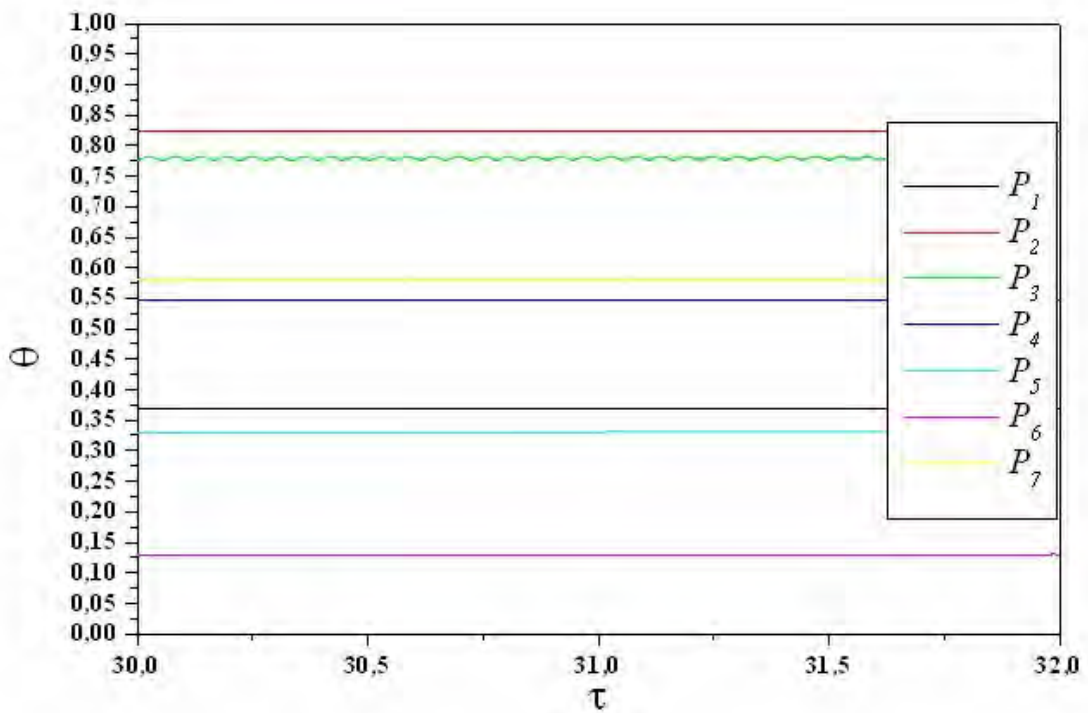


(b) : Ha=25

Figure 4.36. Evolution temporelle de la température  $\theta$  aux points ( $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ ) pour différentes valeurs Ha avec  $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Gr_s = 4 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$ .



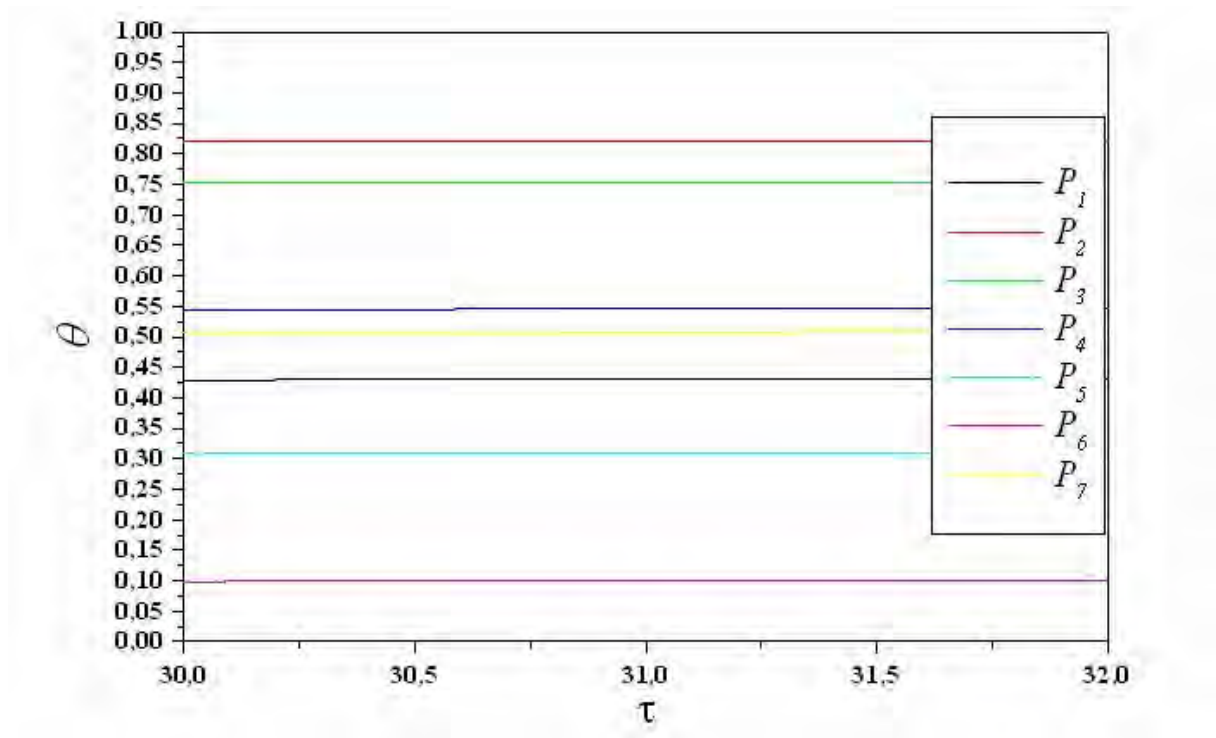
(c) :  $Ha=50$



(d) :  $Ha=75$

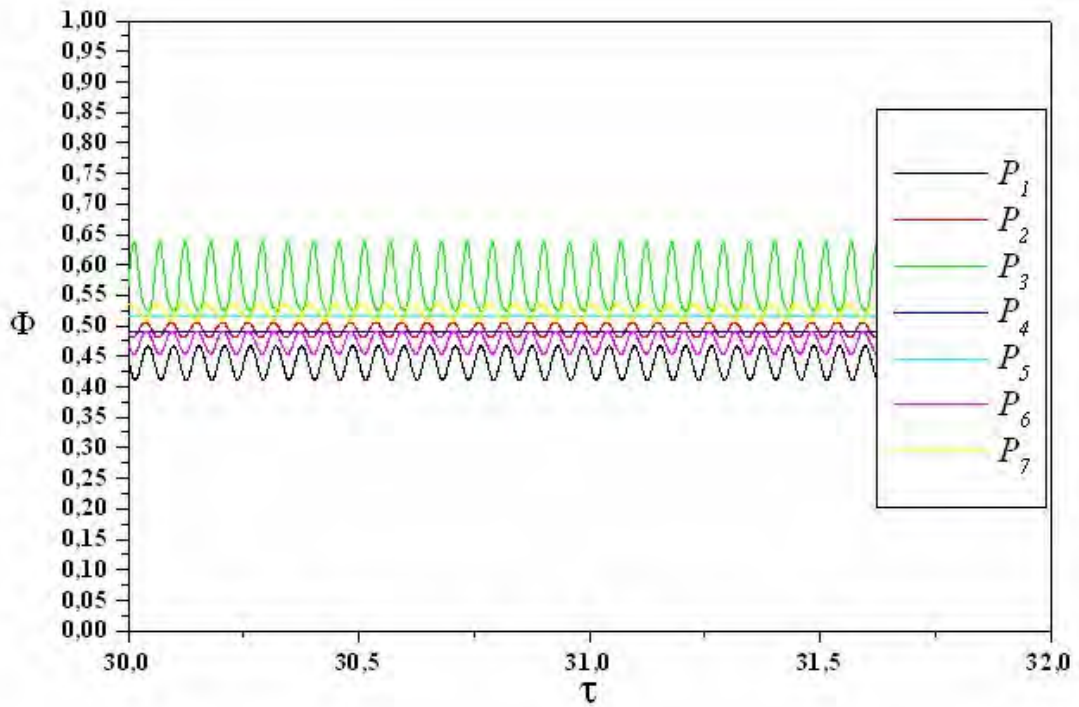
Figure 4.36 (suite). Evolution temporelle de la température  $\theta$  aux points( $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ ) pour différentes valeurs  $Ha$  avec  $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Gr_s = 4 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$ .



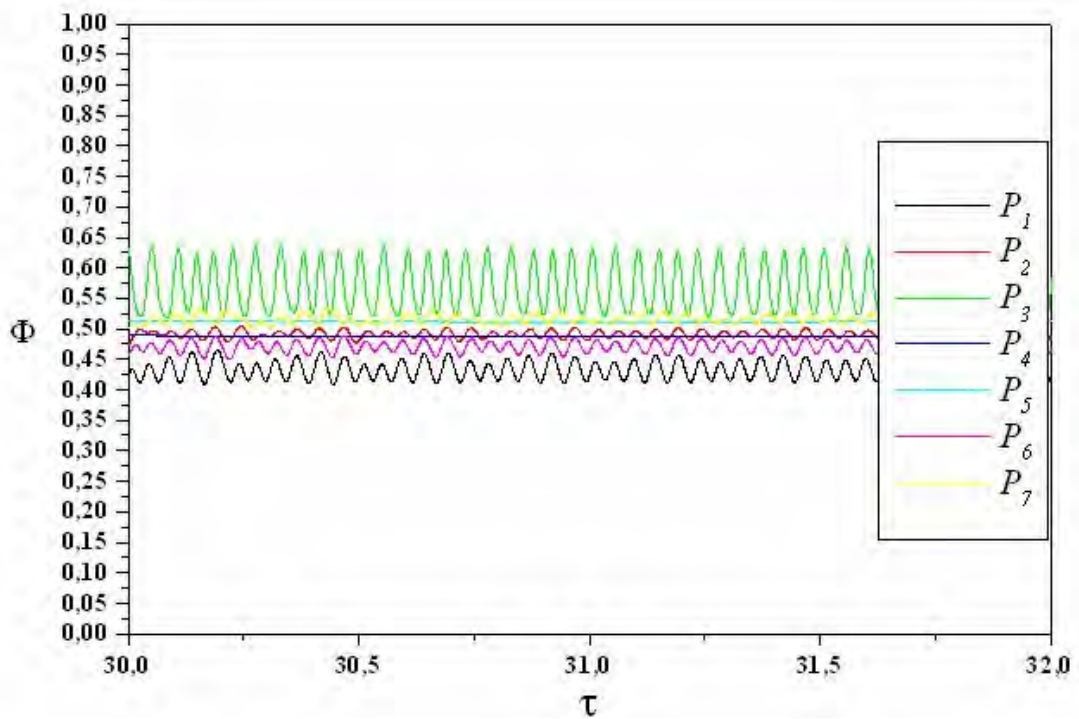


(e) : Ha=100

Figure 4.36 (suite). Evolution temporelle de la température  $\theta$  aux points( $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ ) pour différentes valeurs Ha avec  $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Gr_s = 4 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$ .

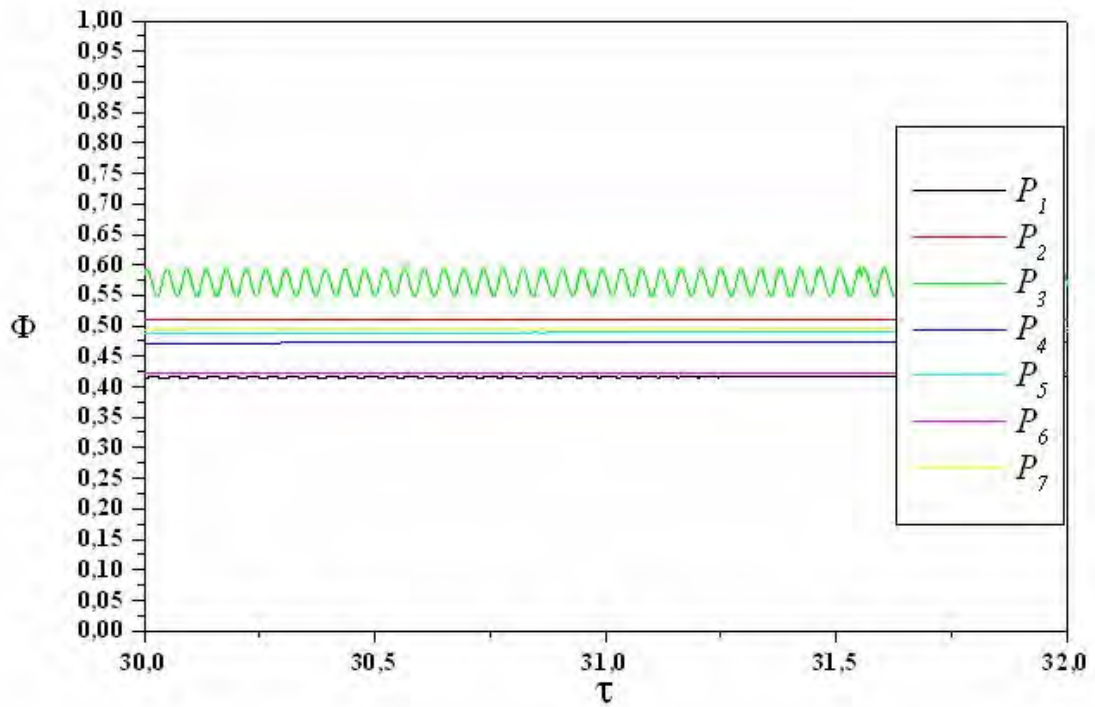


(a) : Ha=10

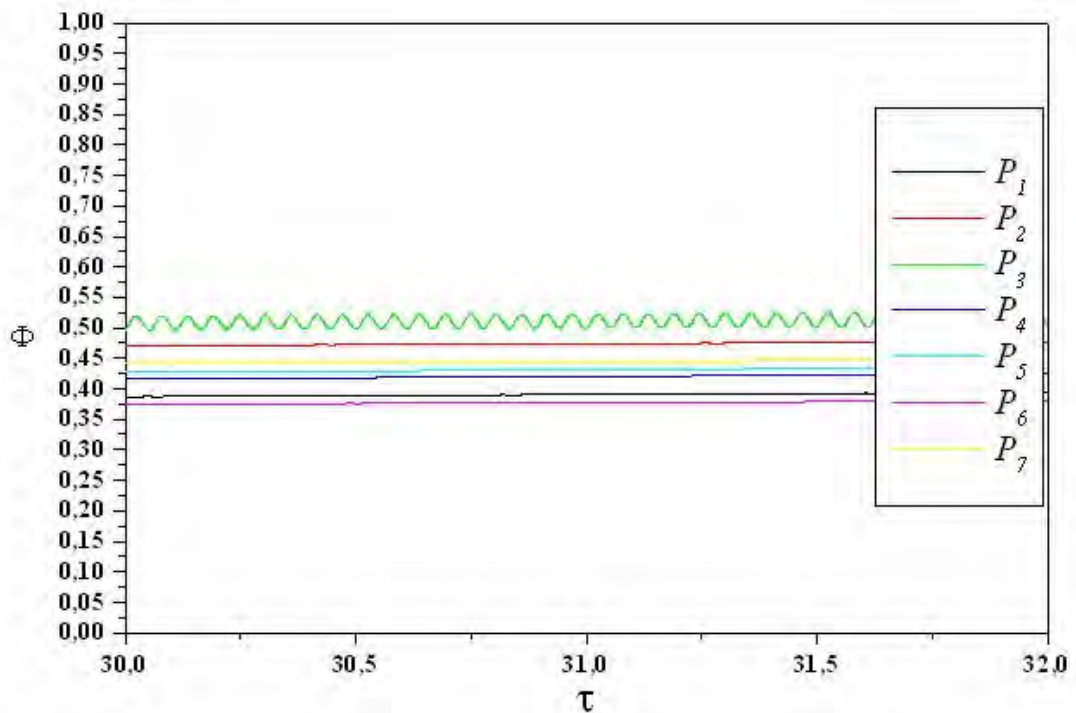


(b) : Ha=25

Figure 4.37. Evolution temporelle de la concentration  $\Phi$  aux points ( $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ ) pour différentes valeurs de Ha avec  $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Gr_s = 3 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$ .



(c) : Ha=50



(d) : Ha=75

Figure 4.37 (suite). Evolution temporelle de la concentration  $\Phi$  aux points ( $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ ) pour différentes valeurs de Ha avec  $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Gr_s = 3 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$ .

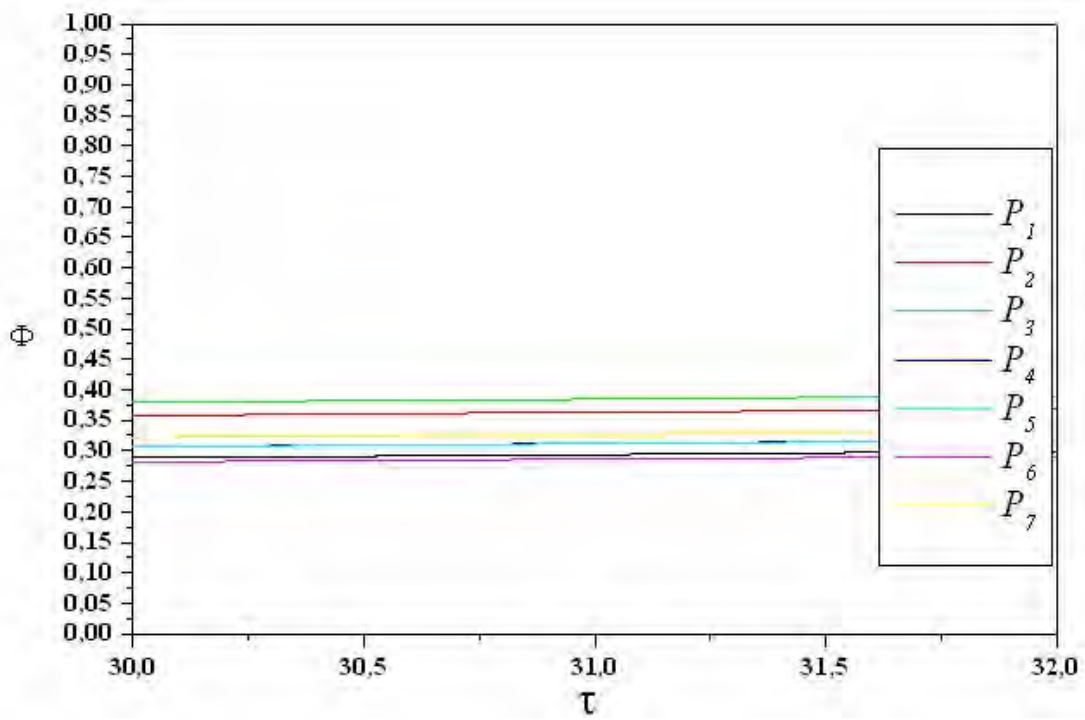
(e) :  $Ha=100$ 

Figure 4.37 (suite) : Evolution temporelle de la concentration  $\Phi$  aux points ( $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ ) pour différentes valeurs de  $Ha$  avec  $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Gr_s = 3 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$ .

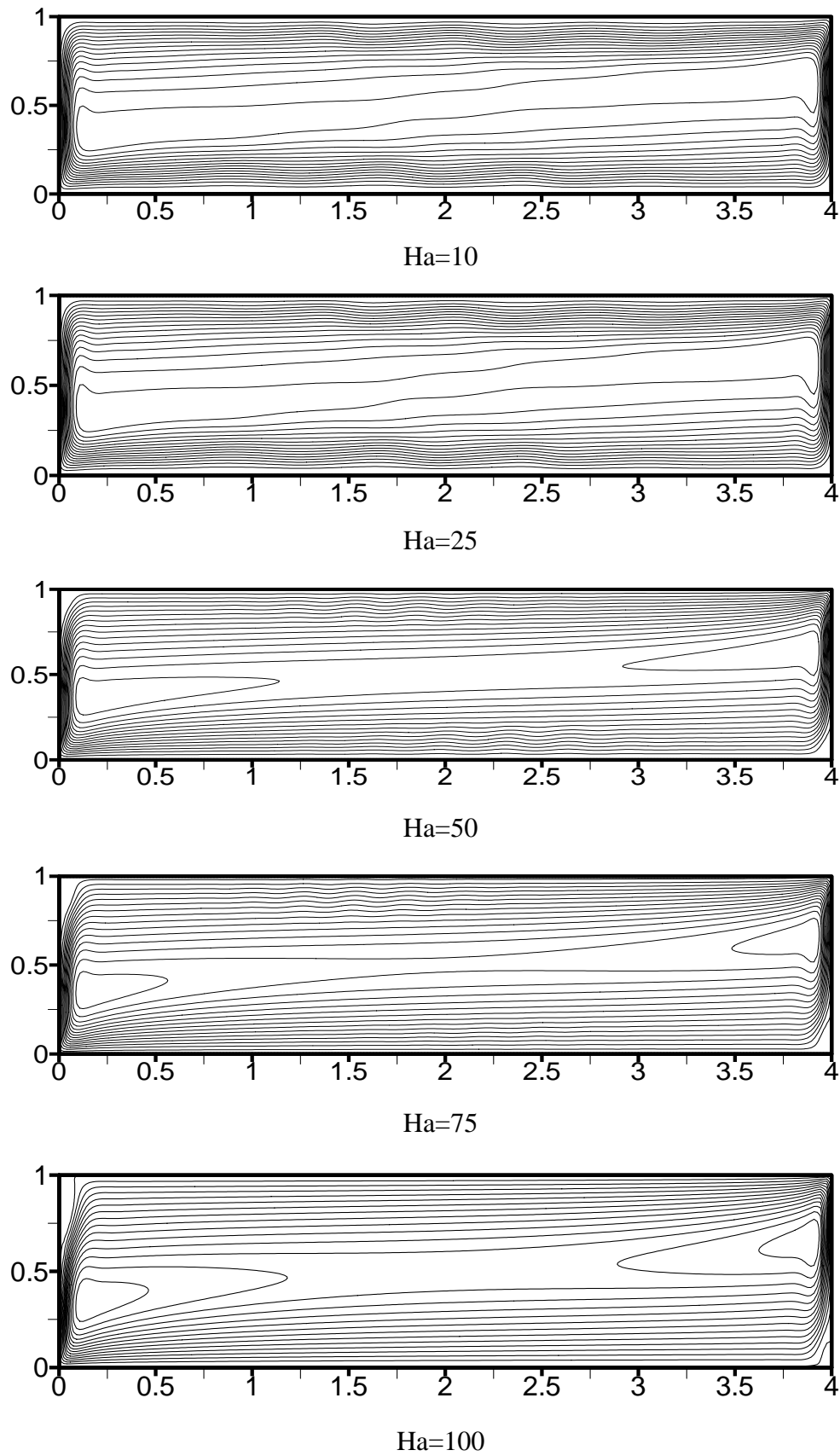


Figure 4.38. Structure de l'écoulement pour différentes valeurs de nombre de Hartmann,

$$Gr_t = 8,8 \times 10^5, Gr_s = 8,8 \times 10^5, Pr = 10, Sc = 100.$$

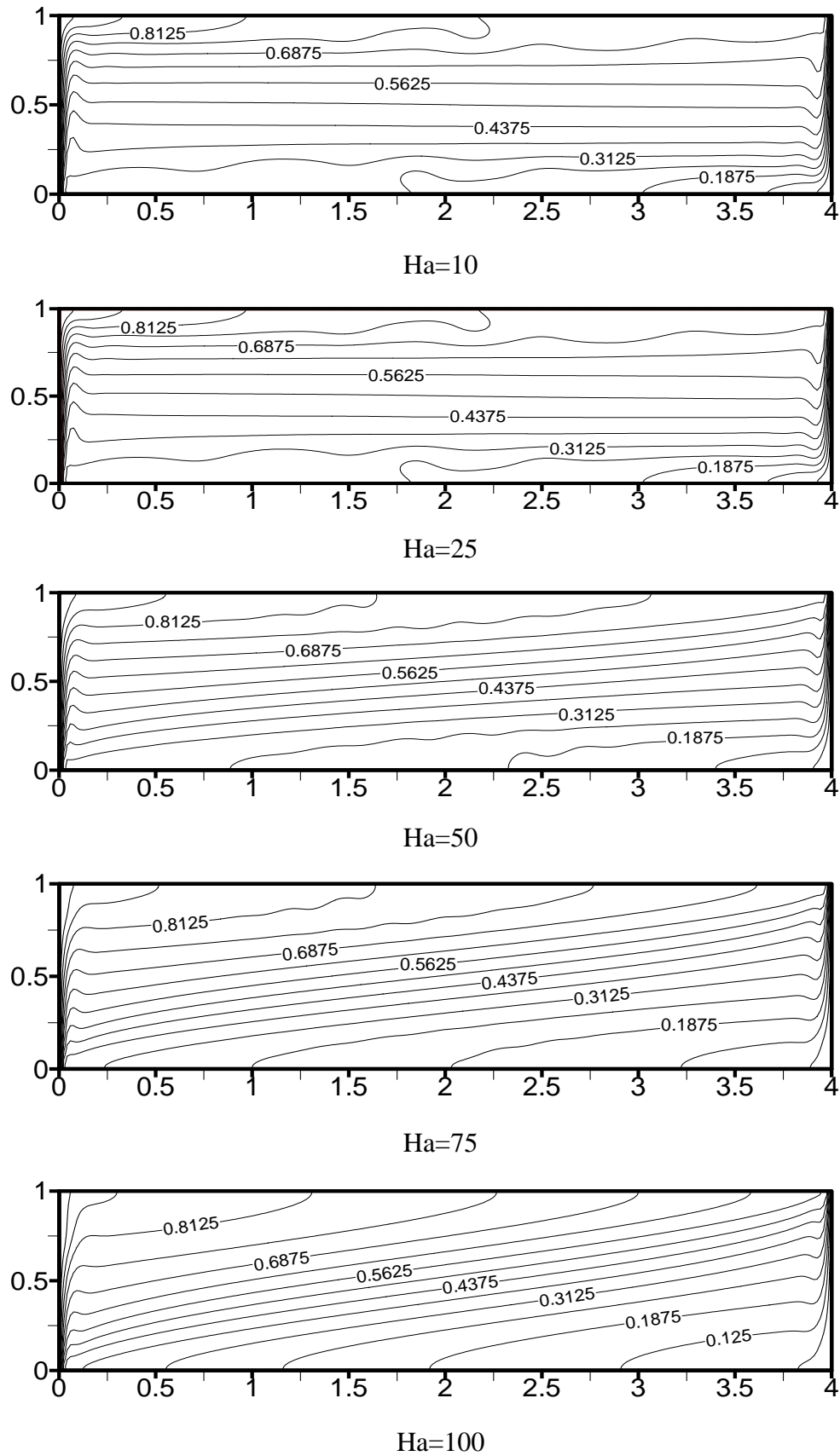


Figure 4.39. Distribution de la température représentée par les isothermes pour différentes valeurs de nombre de Hartmann,  $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Gr_s = 8,8 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$ .

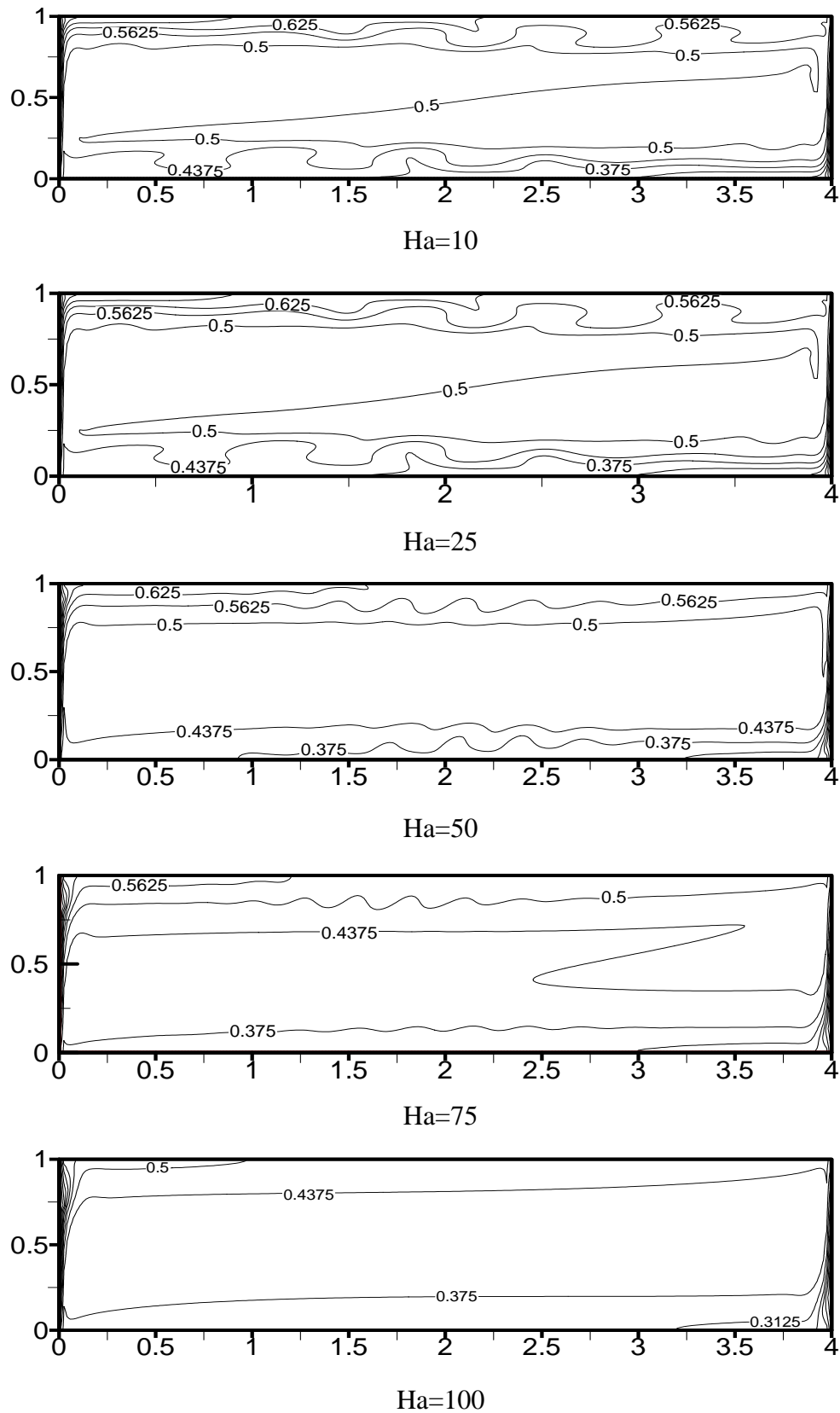


Figure 4.40. Distribution de la matière représentée par les isoconcentrations pour différentes valeurs de nombre de Hartmann,  $Gr_t = 8,8 \times 10^5$ ,  $Gr_s = 8,8 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc=100$ .

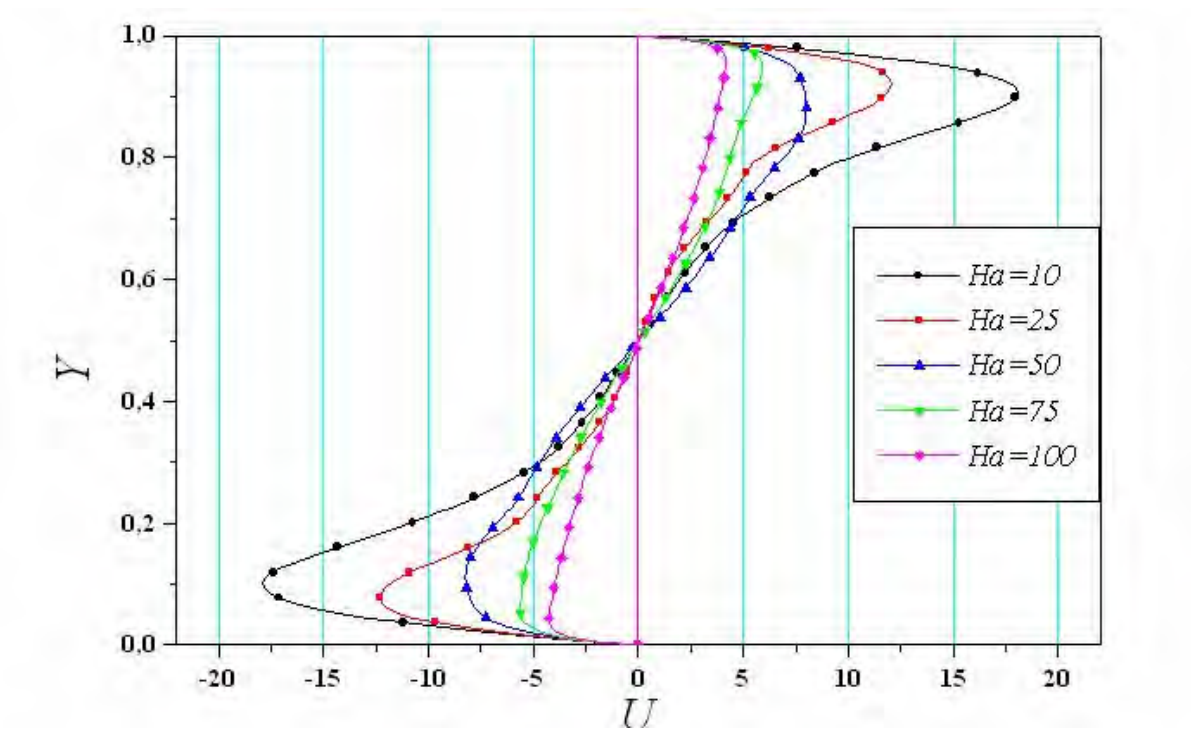
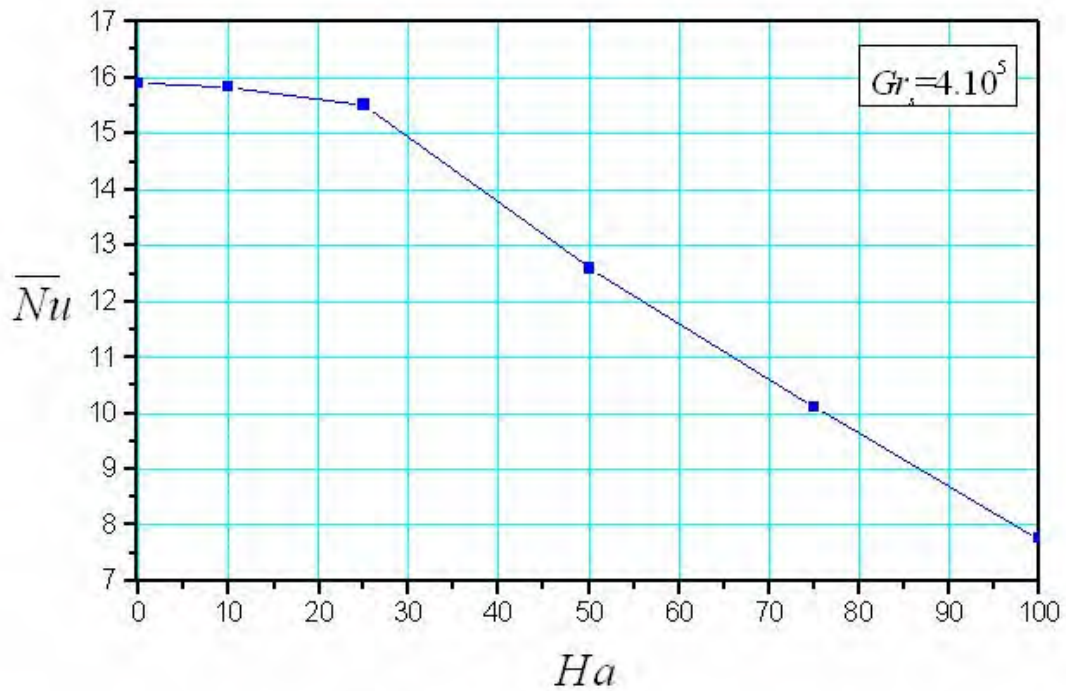
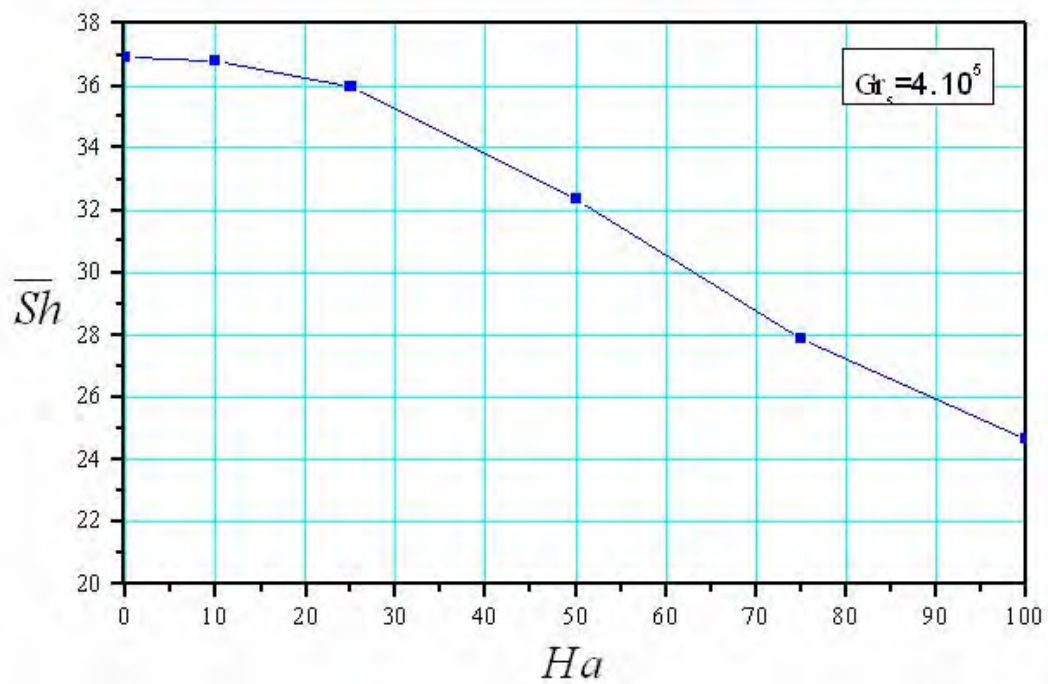


Figure 4.41. Variation de la vitesse horizontale  $U$  au milieu de la cavité ( $X=2$ ), pour différentes valeurs de  $Ha$  :  $Gr_s=4 \times 10^5$ ,  $Gr_t=8,8 \times 10^5$ ,  $Pr=10$ ,  $Sc=100$ .





(a)



(b)

Figure 4.42. Effet de nombre de Hartmann sur: (a) le transfert de chaleur moyen  $\overline{Nu}$ , (b) le transfert de mass moyen  $\overline{Sh}$ :  $Gr_t = 8.8 \times 10^5$ ,  $Gr_s = 8.8 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$ .

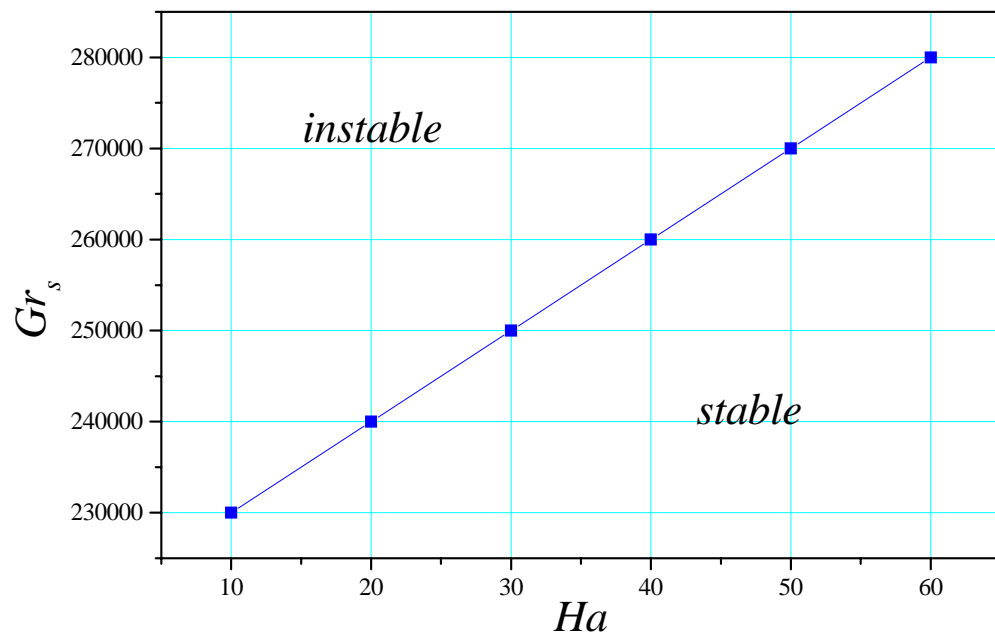


Figure 4.43 diagramme de la stabilité  $Gr_{scr}$ - $Ha$

Avec  $Gr_t = 8.8 \times 10^5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$ .

## Conclusion et recommandation

Dans ce travail, nous avons étudié la convection naturelle à double diffusion dans une enceinte rectangulaire ayant un rapport d'aspect égal à 4. Cette enceinte est remplie d'une solution aqueuse ( $Pr = 10, Sc = 100$ ) et soumise à des gradients horizontaux de température et de concentration. Les forces des poussées thermique et massique sont opposantes. Un champ magnétique externe, uniforme et constant est appliqué verticalement sur l'écoulement.

Le modèle mathématique est un système d'équations différentielles, formé par l'équation de continuité, les équations de conservation de quantité de mouvement, l'équation d'énergie, l'équation de transfert de matière et les équations de la magnétohydrodynamique.

Le code de calcul a été validé par la comparaison avec les résultats numériques disponibles dans les travaux disponibles dans la littérature, dans le cas de la convection naturelle thermosolutale avec et sans champ magnétique.

Les équations du modèle mathématique sont discrétisées à l'aide de la méthode des volumes finies. L'algorithme SIMPLER est utilisé pour la résolution séquentielle des équations de discrétisées.

Les résultats numériques obtenus ont permis, dans le cas où les forces de volume sont coopérantes, de tester et de choisir le maillage convenable. Dans le cas où les forces de volume sont opposantes et en absence de champ magnétique ( $Ha = 0$ ), l'influence du nombre de Grashof solutal sur la structure d'écoulement et les transferts de chaleur et de masse a été mise en évidence. Ensuite, nous avons déterminé le nombre de Grashof solutal critique à partir duquel le régime instable et apparaît. L'application d'un champ magnétique ( $Ha \neq 0,0$ ) a permis de supprimer les instabilités thermosolutales et à contrôler les transferts de chaleur et de masse.

On a trouvé, que pour un nombre de Grashof thermique fixé à  $8,8 \times 10^5$  et avec la variation du nombre de Grashof solutal de  $1 \times 10^4$  à  $2 \times 10^5$  l'écoulement est unicellulaire et stable par la dominance de la poussée thermique. Pour  $Gr_s$  varié entre  $1,25 \times 10^6$  et  $1 \times 10^7$  l'écoulement est stable et constitué d'une seule cellule par la dominance de la poussée solutale. Entre les deux cas, ( $2 \times 10^5 \leq Gr_s \leq 1,25 \times 10^6$ ) l'écoulement est instable et oscillatoire.

Finalement, la variation du champ magnétique considéré dans le cas d'un écoulement instable, où les oscillations les plus fortes sont observées ( $Gr_s = 4 \times 10^5$ ), on observe que l'augmentation de l'intensité du champ magnétique représenté par le nombre de Hartmann ( $Ha = 10, 25, 50, 75, \text{ et } 100$ ) a pour effet de diminuer l'amplitude des oscillations, notamment pour  $Ha = 100$  où celles-ci disparaissent totalement et l'écoulement devient stable.

Une partie des résultats obtenus a été confirmée par une communication internationale au Congrès Français de Thermique SFT [40] et une autre communication nationale au « First National Conference on Mechanics and Engineering Systems » à Boumerdes, NCMES'07 [41].

Notre étude est bidimensionnelle, il serait intéressant de considérer la troisième direction suivant  $Z$  et d'étudier la convection naturelle thermosolutale tridimensionnelle en absence et présence du champ magnétique.

## NOMENCLATURE

|           |   |
|-----------|---|
| A         | rapport d'aspect géométrique = L/H<br>Coefficient dans l'équation de discrétisation |
| $A P $    | fonction du schéma numérique en fonction du nombre de Peclet                        |
| B         | champ magnétique [T]  |
| $B_x$     | composante du champ magnétique orientée suivant la direction X [T]                  |
| $B_y$     | composante du champ magnétique orientée suivant la direction Y [T]                  |
| $B_0$     | champ magnétique de référence [T]   |
| C         | concentration [g.mol.l <sup>-1</sup> ]  |
| D         | coefficient de diffusivité massique [m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> ]              |
| E         | énergie des oscillations  |
| F         | fréquence des oscillations [Hz]   |
| F         | vecteur de la force de Lorentz [N.m <sup>-3</sup> ]                                 |
| $F_{EMX}$ | composante adimensionnelle de la force de Lorentz suivant la direction X            |
| $F_{EMY}$ | composante adimensionnelle de la force de Lorentz suivant la direction Y            |
| J         | vecteur de densité du courant électrique [A.m <sup>-2</sup> ]                       |
| $J_x$     | composante adimensionnelle de la densité du courant suivant la direction X          |
| $J_y$     | composante adimensionnelle de la densité du courant suivant la direction Y          |
| g         | accélération de la pesanteur [m.s <sup>-2</sup> ]                                   |
| H         | hauteur de l'enceinte [m]   |
| L         | longueur de l'enceinte [m]  |
| P         | pression adimensionnelle  |
| S         | source de l'équation de discrétisation  |
| T         | température [°K]  |
| t         | temps dimensionnel  |
| u         | vitesse horizontal [m/s]  |
| U         | composante horizontale adimensionnelle de la vitesse                                |
| u         | vitesse vertical [m/s]  |
| V         | composante verticale adimensionnelle de la vitesse                                  |

---

|   |  |
|---|--|
| X | coordonnée horizontale adimensionnelle |
| Y | coordonnée verticale adimensionnelle   |

## Symboles Grecs :

$\alpha$  coefficient de diffusivité thermique  $[\text{m}^2.\text{s}^{-1}]$

$\beta_s$  coefficient d'expansion solutal  $[\text{g.mol.l}^{-1}]$

$\beta_t$  coefficient d'expansion thermique  $[\text{°K}^{-1}]$

$\Phi$  concentration adimensionnelle,  $\frac{C - C_{\min}}{C_{\max} - C_{\min}}$

$\Delta C = C_{\max} - C_{\min}$   $[\text{g.mol.l}^{-1}]$

$\varphi$  potentiel électrique  $[\text{V}]$

$\mu$  perméabilité magnétique  $[\text{H.m}^{-1}]$

$\nu$  viscosité cinématique  $[\text{m}^2.\text{s}^{-1}]$

$\theta$  température adimensionnelle,  $\frac{T - T_{\min}}{T_{\max} - T_{\min}}$

$\Delta t = T_{\max} - T_{\min}$   $[\text{°K}]$

$\rho$  masse volumique  $[\text{kg.m}^{-3}]$

$\sigma$  conductivité électrique  $[\Omega^{-1}.\text{m}^{-1}]$

$\phi$  variable dépendante

$\Psi$  potentiel électrique adimensionné

$\psi$  fonction de courant

$\tau$  temps adimensionnel

$\Delta \tau$  incrément de temps adimensionnel

$\Delta X$  dimension d'un volume de contrôle dans la direction horizontale  $[\text{m}]$

$\Delta Y$  dimension d'un volume de contrôle dans la direction verticale  $[\text{m}]$

Nombres adimensionnels :

$$Gr_t \quad \text{nombre de Grashof thermique} = g\beta_t \Delta T \frac{H^3}{\nu^2}$$

$$Gr_s \quad \text{nombre de Grashof solutal} = g\beta_s \Delta C \frac{H^3}{\nu^2}$$

$$Ha \quad \text{nombre de Hartmann} = B_0 H \left( \frac{\sigma}{\rho_0 \nu} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$Le \quad \text{nombre de Lewis} = \alpha/D$$

$$N \quad \text{rapport des forces de volume solutale et thermique} = \frac{\beta_s \Delta C}{\beta_t \Delta T}$$

$$Nu \quad \text{nombre de Nusselt local}$$

$$\overline{Nu} \quad \text{nombre de Nusselt moyen}$$

$$Pr \quad \text{nombre de Prandtl} = \nu/\alpha$$

$$Ra_t \quad \text{nombre de Rayleigh thermique} = g\beta_t \Delta T \frac{H^3}{\nu \alpha}$$

$$Ra_s \quad \text{nombre de Rayleigh solutal} = g\beta_s \Delta C \frac{H^3}{\nu D}$$

$$Sc \quad \text{nombre de Schmidt} = \nu/D$$

$$Sh \quad \text{nombre de Sherwood local}$$

$$\overline{Sh} \quad \text{nombre de Sherwood moyen}$$

Exposant :

n     relatif au temps  $\tau$

n+1   relatif au temps  $\tau + \Delta\tau$

Indices :

P     point au centre du volume fini

E     point à l'est du point P

W     point à l'ouest du point P

- N point au nord du point P
- S point au sud du point P
- 0 état de référence ( $T_{\min}$ ,  $C_{\min}$ )
- 1 état de référence ( $T_{\max}$ ,  $C_{\max}$ )
- t thermique
- s solutale



## Références bibliographiques

- [1] J.S. Turner, Double Diffusion phenomena, Université de Combridge , (1974).
- [2] H E. Huppert et J.S. Turner, Double diffusion convection, J. Fluide Mech. 106(1980) 299-329
- [3] Y.Kamotani, J.S. Wang, S. Ostrach, H.D. Jiang, Experimental study of natural convection in shallow enclosures with temperature and concentration gradients. Int. J. Heat and Mass Transfer 28(1) (1985)165-173.
- [4] H. Han et T. Kuehn, Double diffusion natural convection in a vertical rectangular enclosure- I experimental study. Int. J. Heat and Mass Transfer 34(2) (1991)449-459.
- [5] K. Kamakura et H. Ozoe, Experimental and numerical analyses of double diffusive natural convection heated and cooled from opposing vertical walls with an initial condition of a vertically linear concentration gradient. Int. J. Heat and Mass Transfer 36(8) (1993)2125-2134.
- [6] L.W. Wang et J.J. Chen, Flow patterns of thermosolutal convection in low aspect ratio enclosures. Int. J. Heat and Mass Transfer 28(1) (1985)165-173.
- [7] L.W. Wang et C.T. Chen, Thermosolutal Convection in High Aspect Ratio Enclosures. 25th National Heat Transfer Conference
- [8] L.W. Wang, J.J. Chen et C.T. Chen, Fingering Flow Patterns of Thermosolutal convection in Rectangular Enclosures. National Fluid Dynamics Congress
- [9] V. Séveléder, J.P. Petit, Flow structures induced by opposing forces in double diffusion natural convection in a cavity. Numerical Heat and mass Transfer Part A 15 (1989) 431-444.
- [10] J. Lee, M.T. Hyen et K.W. Kim, Natural convection in confined fluids with combined horizontal temperature and concentration gradients, Int. J. Heat and Mass Transfer 31(10) (1988)1969-1977.

- [11] J.W. Lee et J.M. Hyun, Double diffusive convection in a rectangle with opposing horizontal temperature and concentration gradients, *Int. J. Heat and Mass Transfer* 33(8) (1990)1619-1632.
- [12] J.M. Hyun, J.W. Lee, Double diffusive convection in a rectangle with cooperating horizontal temperature and concentration gradients, *Int. J. Heat and Mass Transfer* 33(8) (1990)1605-1617.
- [13] H. Han et T. Kuehn : Double diffusion natural convection in a vertical rectangular enclosure – II Numerical study. *Int. J. Heat and Mass Transfer* 34(2) (1991)461-471
- [14] J.W. Lee et J.M. Hyun: Time dependent double diffusion in a stably stratified fluid under lateral heating. *Int. J. Heat and Mass Transfer* 34(9) (1991)2409-2421.
- [15] C. Béghein, F. Haghighat et F. Allard, Numerical study of double diffusive natural convection in a square cavity. *Int. J. Heat and Mass Transfer* 35(4) (1992)833-846.
- [16] W. Shyy, M-H Chen, Double diffusive flow in enclosures. *Phys. Fluids A* 3 (1991) 2592-2607.
- [17] J. Chang, T. F. lin et C. H. Chien, Unsteady thermosolutal opposing convection of a liquid-water mixture in a square cavity – I Flow formation and heat and mass transfert characteristics, *Int. J. Heat and Mass Transfer* 36(5) (1993)1315-1331.
- [18] J. Chang, T. F. lin et C. H. Chien, Unsteady thermosolutal opposing convection of a liquid-water mixture in a square cavity – II Flow structure and fluctuation analysis, *Int. J. Heat and Mass Transfer* 36(5) (1993)1333-1345
- [19] H. Zahou et A. Zebib, Oscillatory double diffusive convection in crystal growth, *Journal of Crystal Growth* 135 (1994) 587-593
- [20] R. Bennacer et D. GOBIN, Cooperating thermosolutal convection in enclosures: I. Scale analysis and mass transfer. *Int. J. Heat and Mass Transfer* 39(13) (1996)2671-2681.
- [21] D. Gobin et R. Bennacer, Cooperating thermosolutal convection in enclosures: II Heat transfer and flow structure, *Int. J. Heat and Mass Transfer* 39(13) (1996)2683-2697.

- [22] M. Mamou, P. Vasseur, E. Bigen, analytical and numerical study of double diffusive convection in a vertical enclosure. *Heat and Mass Transfer* 32 (1996)115-125.
- [23] T. Nishimura, M. Wakamatsu, A. M. Morega, Oscillatory double diffusive convection in a rectangular enclosure with combined horizontal temperature and concentration gradients. *Int. J. Heat and Mass Transfer* 41(11) (1998)1061-1611.
- [24] A. Bounecer, Convection naturelle double diffusive, thèse de magistère. Institut de Physique Université MENTOURI- Constantine, 1997.
- [25] I. Sezai et A.A. Mohamed, Double diffusion convection in a cubic enclosure with opposing temperature and concentration gradients. *Physics of Fluids* 12(9) (2000)1070-6631.
- [26] R. Bennacer, A. A. Mohamad, D. Akrou, Transient natural convection in an enclosure with horizontal temperature and vertical solutal gradients. *Int. J. Thermal Science.* (2001) 40, 899–910
- [27] D. Akrou, R. Bennacer et M. Betrouni, Effet d'Hystérésis en Convection Thermosolutale avec des Gradients Croisés : Etang de Stockage. *Rev. Energ. Ren. Vol. 3(2000) 39 - 47*
- [28] S. Benissaad et M. Afrid, Influence of Grashof number on the natural convection double diffusion in rectangular enclosure with a weak aspect ratio *Entropie* 242(2002) 44-55.
- [29] D. Akrou et D. Kalache, Cooperating thermosolutal convection in enclosures heat and mass transfer, 17<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique Troyes,-Septembre2005
- [30] Smail Benissaad, Stabilité de la convection naturelle à double diffusion, Thèse doctorat d'Etat, Institut de Génie Mécanique, Université MENTOURI- Constantine, 2003.
- [31] R. Bessaih, M. Kadja, Ph . Marty, Effect of wall electrical conductivity and magnetic field orientation in liquide metal flow in geometry similar to the horizontal Bridgman configuration for crystal growth. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 42 (1999) 4345–4362.
- [32] A. J. Chamkha, H. Al-Naser, Hydromagnetic double-diffusive convection in a rectangular enclosure with opposing temperature and concentration gradients, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 45 (2002) 2465–2483.

- [33] M. E. Sayed-Ahmed, H. A. Attia, MHD flow and heat transfer in a rectangular duct with emperature dependent viscosity and Hall effect, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 27 (8) (2000) 1177-1187.
- [34] A. Yu. Gelfgat et P. Z. Bar-Yoseph, The effect of an external magnetic field on oscillatory iinstability of convective flows in a rectangular cavity, *Physics of Fluids*.13 (2001), 2269-2279.
- [35] F. Berrahil, Hydrodynamique, Transfert de Chaleur d'un Ecoulement Tournant et Stabilité MHD, Mémoire de Magistère, Département de Génie Mécanique, Université MENTOURI- Constantine, 2005.
- [36] S. Bouabdallah, Étude de L'instabilité Hydrodynamique et Thermique lors d'un Changement de Phase avec et sans Champs Magnétique, Mémoire de Magistère, Département de Génie Mécanique, Université MENTOURI- Constantine, 2006.
- [37] R. Moreau, *Magnetohydrodynamics*, Kluwer Academic Publishers, (1990) 36-39.
- [38] S.V. Patankar, *Numerical heat transfer and fluid flow*, Hemisphere, Washington, DC, (1980).
- [39] A. J. Chamkha, H. Al-Naser "Hydromagnetic double-diffusive convection in a rectangular enclosure with uniform side heat and mass fluxes and opposing temperature and concentration gradients", *International Journal of Thermal Sciences* 41 (2002) 936–948
- [40] A. ATTIA, S. BENISSAAD, R. BESSAIH, Suppression des instabilités thermosolutales par l'action d'un champ magnétique, Congrès Français de Thermique SFT'07, 28/05-01/06/2007, Ile des Embiez, France.
- [41] A. ATTIA, S. BENISSAAD Effet des nombres de Grashof solutal et de Hartmann sur la convection naturelle à double diffusion, "First National Conference on Mechanics and Engineering Systems", NCMES'07, 26-27/05/2007, Boumerdes.

(Ha=100)

## ABSTRACT

In this work, we consider a two dimensional numerical study of the double diffusion natural convection in a rectangular enclosure subjected to horizontal gradients of temperature and concentration, in presence of a uniform constant and external magnetic field. The flow is driven by the thermal and solutal buoyancies, jointly with the Lorentz electromagnetic force. Constant temperature and concentration are imposed on the left and right vertical walls of the enclosure, whereas the remaining walls are impermeable and adiabatic. The natural convection structure depends on six adimensional parameters: the thermal Grashof number, the solutal Grashof number, the Prandtl number, the Schmidt number, the Hartmann number and the aspect ratio of the enclosure. All the parameters are maintained fixed. Only the numbers of Grashof solutal and Hartmann are varied. The obtained results show that the variation of the solutal Grashof number allows obtaining many types of flows. In the case of magnetohydrodynamics, the results obtained show that magnetic field ( $Ha=100$ ) provides the effect of stabilization the flow and suppression the instabilities. It was as observed that the application of a magnetic field causes modifications in the structure of the flow and makes it possible to control the convection and the heat and mass transfers.

**Key words:** Two dimensional natural convection. Double diffusion. Magnetohydrodynamic. Transitory mode. Magnetic field.

## RESUME

Dans le présent travail, on considère une étude numérique bidimensionnelle de la convection naturelle à double diffusion dans une enceinte rectangulaire soumise à des gradients de température et de concentration horizontaux en présence d'un champ magnétique externe uniforme et constant. Les autres parois sont imperméables et adiabatiques. L'écoulement est entraîné par les forces des poussées, thermique et solutale, conjointement avec la force électromagnétique de Lorentz. La structure de la convection naturelle dépend de six paramètres adimensionnels : les nombres de Grashof thermique et solutal, le nombre de Prandtl, le nombre de Schmidt, le nombre de Hartmann et du rapport d'aspect de l'enceinte. Tous les paramètres sont maintenus fixes. Seuls les nombres de Grashof solutal et de Hartmann sont variés. Les résultats obtenus montrent que la variation du nombre de Grashof solutal a permis l'obtention de plusieurs types d'écoulements. Dans le cas de la magnétohydrodynamique, les résultats obtenus montrent qu'un champ magnétique relativement élevé ( $Ha=100$ ) provoque la suppression des oscillations et fournit un effet de stabilisation de l'écoulement. Il a été aussi observé que ce champ magnétique cause des modifications dans la structure de l'écoulement et permet de contrôler la convection et les transferts de chaleur et de masse.

**Mots clefs :** Convection naturelle bidimensionnelle. Double diffusion. Régime transitoire. Magnétohydrodynamique. Champ magnétique.