

N° d'ordre : / ... / 2010
Série : / GM / 2010



Mémoire :
Présenté pour l'obtention du
Diplôme de Magister en Génie Mécanique

Option :
Energétique appliquée en engineering

THÈME :

**DETERMINATION D'UN
CRITERE DE SIMILITUDE POUR
LA CONVECTION MIXTE
LAMINAIRE DANS UNE CAVITE
CARREE**

Par :
BOULKROUNE Sofiane

Soutenu le : 27/05/2010

Devant les membres de jury :

- | | | | |
|----------------|-----------------------|-------|---------------------------------|
| • Président : | Mr. NEMOUCHI Zoubir | Prof. | Université Mentouri Constantine |
| • Rapporteur : | Mr. KHOLAI Omar | M.C. | Université Mentouri Constantine |
| • Examineurs : | Mr. BOUDEBOUS Sâadoun | Prof. | Université Mentouri Constantine |
| | Mr. BESSAIH Rachid | Prof. | Université Mentouri Constantine |
-

Dédicace

*A mon père et ma très chère maman, qui m'ont éclairés
le chemin en me donnant la main tout au long de mes années d'étude*

« Que dieu me les gardes ».

A mes frères.

A mes sœurs.

A tous mes amis sans exception.

Remerciements

Je remercie tout d'abord Dieu le tout puissant qui nous éclaire le bon chemin.

Je remercie vivement et chaleureusement mon encadreur Monsieur KHOLAI Omar Maître de conférence à l'université Mentouri – Constantine. Je le remercie pour son aide et ses conseils qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier à Monsieur NEMOUCHI Zoubir, Professeur à l'université Mentouri – Constantine, qui ma fait l'honneur d'accepter la présidence du jury.

J'exprime mes vifs remerciements à Monsieur BOUDEBOUS Sâadoun Professeur à l'université Mentouri – Constantine et Monsieur BESSAIH Rachid Professeur à l'université Mentouri – Constantine d'avoir accepté de participer au jury.

A tous, je tiens à exprimer mes sincères remerciements.

TABLE DES MATIERES

| | |
|-------------------|--------|
| Résumé..... | iv |
| Abstract..... | v |
| vi..... | الملخص |
| Nomenclature..... | vii |

Chapitre I

INTRODUCTION ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

| | |
|----------------------------------|---|
| I.1 Introduction générale..... | 1 |
| I.2 Revues bibliographiques..... | 2 |
| I.3 Contenu du mémoire..... | 5 |

Chapitre II

FORMULATION MATHÉMATIQUE

| | |
|---|----|
| II.1 Configuration géométrique..... | 6 |
| II.2 Equations générales..... | 7 |
| II.3 Hypothèses simplificatrices..... | 8 |
| II.4 Conditions aux limites dimensionnelles..... | 9 |
| II.5 Equations adimensionnelles..... | 9 |
| II.6 Conditions aux limites adimensionnelles..... | 11 |

Chapitre III

METHODES NUMERIQUES

| | |
|---|----|
| III.1 Introduction..... | 12 |
| III.2 Notions générales sur la méthode des volumes finis..... | 13 |
| III.3 Distribution des volumes de contrôle..... | 13 |
| III.4 Discrétisation de l'équation générale de transport..... | 15 |
| III.5 Schémas d'interpolation..... | 17 |

| | | |
|---------|--------------------------------|----|
| III.6 | Méthode de résolution..... | 19 |
| III.7 | Couplage vitesse pression..... | 20 |
| III.8 | Détails numériques..... | 23 |
| III.8.1 | La sous relaxation..... | 23 |
| III.8.2 | Critère de convergence..... | 24 |

Chapitre IV

RESULTATS ET DISCUSSION

| | | |
|----------------------------------|--|----|
| IV.1 | Introduction..... | 25 |
| IV.2 | Choix du maillage..... | 25 |
| IV.3 | Validation du code de calcul..... | 27 |
| IV.4 | Discussion des résultats..... | 29 |
| IV.4.1 | Profils de la vitesse..... | 29 |
| IV.4.2 | Les limites de la convection mixte..... | 33 |
| IV.4.3 | Convection forcée prédomine..... | 35 |
| IV.4.4 | Convection mixte..... | 39 |
| IV.4.5 | Convection naturelle prédomine..... | 43 |
| IV.4.6 | Détermination des paramètres qui contrôle la convection mixte..... | 47 |
| CONCLUSION GENERALE..... | | 54 |
| Annexe..... | | 55 |
| Références bibliographiques..... | | 56 |

Résumé

Dans ce travail, nous avons présenté une étude numérique du phénomène de la convection mixte laminaire dans une cavité carrée pour la détermination d'un critère de similitude. La paroi verticale gauche de la cavité est mobile et soumise à une température froide, tandis que la paroi droite est considérée chaude. Les parois horizontales sont supposées adiabatiques.

Les équations régissantes, ont été discrétisées par la méthode des volumes finis sur un maillage décalé et l'algorithme SIMPLE a été utilisé pour le traitement du couplage vitesse-pression.

Les simulations numériques ont été faites pour une large plage des nombres de Reynolds, et de Grashof $1 \leq Re \leq 600$, $24 \leq Gr \leq 2.016 \cdot 10^7$, en restant toujours en régime laminaire. Les limites de transition d'un régime de convection à un autre régime (forcée-mixte, puis mixte-naturelle) ont été déterminées par une combinaison de $f(Gr \text{ et } Re)$.

L'analyse des résultats obtenus met en évidence un écoulement bicellulaire (deux cellules), l'une est née par les déplacements de la paroi située à gauche de la cavité, l'autre à droite est due à la différence des températures entre la paroi droite et la paroi gauche. La connaissance de l'intensité de chacune de ce deux cellules nous a permis d'obtenir un résultat original.

Mots clés : *Convection mixte, cavité carré, Méthode des volumes finis*

Abstract

In this work, we presented a numerical study of the phenomenon of laminar mixed convection in a square cavity for the determination of a criterion of similarity. The left vertical wall of the cavity is mobile and subject to low temperature, while the right wall is considered hot. Horizontal walls are assumed adiabatic.

Governing equations were discretized by finite volume method on a staggered grid and SIMPLE algorithm for the treatment of pressure-velocity coupling.

The numerical simulations were made for a wide range of Reynolds numbers and Grashof $1 \leq Re \leq 600$, $24 \leq Gr \leq 2.016 \cdot 10^7$, remaining always in the laminar regime. The boundaries of transition from one regime to another regime convection (forced-mixed and mixed-natural) have been determined for a combination of $f(Gr$ and $Re)$.

Analysis of results highlights a two-cell flow (two cells), one is created by displacement of the wall to the left of the cavity, and the other right is due to the difference in temperature between the wall right and the left wall. Knowledge of the intensity of each of the two cells allows us to obtain an original result.

Key words: *Mixed convection, Finite volume method, Square cavity.*

الملخص

في هذا العمل, قمنا بدراسة عددية لظاهرة النقل الحراري المختلط من أجل تحديد معيار التشابه في تجويف مربع. الجدار الأيسر من التجويف يخضع لدرجة حرارة منخفضة ويتحرك بسرعة ثابتة نحو الأعلى, في حين أن الجدار الأيمن ساخن. يفترض الجداران الأفقيان عازلين للحرارة.

حل المعادلات المميزة لهذا النظام تم باستعمال طريقة الحجم المتناهية وخوارزمية "سيمبل" لمعالجة التزاوج بين السرعة و الضغط.

الدراسة العددية للأرقام أنجزت من أجل قيم مختلفة لرينولدز (بين 1 و 600) و غراشوف (بين 24 و 10^7 2,016) من أجل تحديد طبيعة الحمل (مختلط, القسري والطبيعي), و كما تم حساب قيم الحدود الدنيا والعليا للحمل المختلط.

تحليل النتائج المحصل عليها يظهر بوضوح سيران ذو حلقتين, إحداهما ناتجة عن حركة الجدار المتواجد بالجهة اليسرى من التجويف والآخرى بالجهة اليمنى ناتجة عن اختلاف درجة الحرارة بين الجدارين الأيمن و الأيسر. معرفة شدة كت حلقة سمح لنا بالحصول على نتائج جديدة.

الكلمات المفتاحية : الحمل المختلط, تجويف مربع , طريقة الحجم المنتهية.

NOMENCLATURE

| | | |
|---------------------------|--|---|
| a_p, a_e, a_w, a_n, a_s | Coefficients de l'équation algébrique de transport discrétisée | |
| A (IPel) | Fonction d'un schéma numérique | |
| Cp | Chaleur spécifique à pression constante | [J.kg ⁻¹ .K ⁻¹] |
| g | Accélération de pesanteur | [m.s ⁻²] |
| Gr | Nombre de Grashof, $g \beta \Delta T L^3 / \nu^2$ | |
| i,j | Coordonnées logiques des points | |
| K | Conductivité thermique | [W.m ⁻¹ .K ⁻¹] |
| L | Longueur dimensionnelle de la cavité | [m] |
| p | Pression | [Pa] |
| P | Pression adimensionnelle | |
| Pe | Nombre de Peclet | |
| Re | Nombre de Reynolds, $Re = \frac{uL}{\nu}$ | |
| Ri | Nombre de Richardson, $Ri = \frac{Gr}{Re^2}$ | |
| T | Température | [K] |
| t | Temps | [s] |
| u, v | Composantes de la vitesse | [m.s ⁻¹] |
| U, V | Composantes de la vitesse adimensionnelle | |
| x, y | Coordonnées cartésiennes dimensionnelles | [m] |
| X, Y | Coordonnées cartésiennes adimensionnelles | |

Symboles Grecs

| | | |
|------------|--|------------------------------|
| α | Diffusivité thermique | $[\text{m}^2.\text{s}^{-1}]$ |
| β | Coefficient d'expansion thermique à pression C^{te} $\beta = \frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial T}$ | $[\text{K}^{-1}]$ |
| θ | Température adimensionnelle $\theta = \frac{(T-T_f)}{(T_c-T_f)}$ | |
| ν | Viscosité cinématique | $[\text{m}^2.\text{s}^{-1}]$ |
| ρ | Masse volumique | $[\text{kg}.\text{m}^{-3}]$ |
| τ | Temps adimensionnel $t \frac{U_0}{L}$ | |
| Ψ | Fonction de courant | |
| Δx | Dimension d'un volume de contrôle suivant « x » | $[\text{m}]$ |
| Δy | Dimension d'un volume de contrôle suivant « y » | $[\text{m}]$ |

Indices et exposants

| | |
|-----|--|
| n | Compteur d'itération correspondant au temps t. |
| n+1 | Compteur d'itération correspondant au temps $t + \Delta t$. |
| c | Chaude. |
| f | Froide. |

CHAPITRE I

INTRODUCTION ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1 INTRODUCTION GENERALE

La convection mixte, (combinaison de la convection forcée avec la convection naturelle), a une grande importance, vu sa présence dans de nombreux processus industriels et des dispositifs de l'ingénierie tel que le refroidissement des composants électroniques, les pertes de chaleur dans les collecteurs solaires, la ventilation des locaux, réacteur nucléaire, etc.

Les écoulements en régime de la convection mixte sont caractérisés par un paramètre adimensionnel $\lambda = f(Gr^b, Re^a)$, où Re représente le nombre de Reynolds, Gr est le nombre de Grashof et a et b sont des constantes qui dépendent de la configuration, de l'écoulement et des conditions aux limites thermique et hydrodynamique. Le régime de la convection mixte est généralement défini par l'intervalle $\lambda_{min} \leq \lambda \leq \lambda_{max}$ avec λ_{min} , λ_{max} représentent les limites inférieure et supérieure de la convection mixte respectivement. Le paramètre λ prévoit d'une mesure d'influence de la convection naturelle en comparaison avec la convection forcée sur l'écoulement de fluide.

L'extérieur de l'intervalle $\lambda_{min} \leq \lambda \leq \lambda_{max}$ représente soit la convection naturelle, soit la convection forcée, où l'analyse des débits et des champs de températures peut être utilisé pour les préciser. La convection forcée prédomine le transfert de chaleur lorsque $\frac{Gr^a}{Re^b} \rightarrow 0$, alors que la convection naturelle prédomine lorsque $\frac{Gr^b}{Re^a} \rightarrow \infty$, ou alternativement lorsque $\frac{Re^a}{Gr^b} \rightarrow 0$.

La convection naturelle peut améliorer le taux de transfert de chaleur à la surface lorsqu'elle agit dans le sens de l'écoulement forcée et vice versa. Les forces de flottabilité jouent également un rôle important dans le début des instabilités de l'écoulement, et qu'elles peuvent être responsables soit pour retarder ou accélérer la transition laminaire-turbulent.

I.2 REVUES BIBLIOGRAPHIQUES

Beaucoup de travaux publiés ont été élaborés dans le domaine de la convection mixte à l'intérieur des cavités, Parmi ces travaux on peut citer ceux de :

K. Torrance et al [1] ont étudié numériquement l'écoulement du fluide dans une cavité rectangulaire dont la paroi supérieure est mobile et maintenue à une température adimensionnelle égale à 1. Les autres parois sont maintenues à une température nulle. Les calculs ont été fait pour des nombres de Grashof variant de 0 à 10^4 . Les résultats trouvés examinent la combinaison entre les différents modes de convection, la convection naturelle prédomine pour des grands nombres de Grashof.

R. Iwatsu, et al [2] ont étudié l'écoulement et le transfert de chaleur d'un fluide visqueux contenu dans une cavité carrée. La paroi supérieure est mobile et maintenue à une température chaude T_H . La paroi inférieure est soumise à une température froide T_C . Les parois verticales sont considérées adiabatiques. Ils ont obtenus pour $0 \leq Ra \leq 10^6$, $0 \leq Re \leq 3000$ que le transfert de chaleur augmente lorsque $\frac{Gr}{Re^2} \ll 1$.

A.Raji et M.Hasnaoui [3] ont étudié numériquement la convection mixte laminaire dans une cavité rectangulaire ventilée et soumise à un flux de chaleur constant sur l'une des parois verticales. Les champs d'écoulement, la distribution de température et le transfert de chaleur moyen sont examinés pour des valeurs de nombres de Rayleigh et de Reynolds telles que : $10^3 \leq Ra \leq 10^6$ et $5 \leq Re \leq 5.10^3$.

D. Angirasa [4] a présenté une étude numérique sur la convection mixte dans une cavité carrée ventilée. La paroi verticale gauche est soumise à une température constante tandis que les autres parois sont considérées adiabatiques. Le fluide entre par le coin gauche de la paroi inférieure et ressort par le coin gauche de la paroi supérieure. Les simulations numériques ont été faites pour un nombre de Grashof égale à 10^6 et $Ri = (2, 1, 0.2, 0.1)$.

Les résultats sont présentés sous forme des isothermes, isocourants ainsi que la variation du nombre de Nusselt en fonction du temps. Les résultats montrent que l'écoulement principal du fluide a lieu le long de la paroi chaude.

O. Aydin et W.J.Yang [5] ont rapporté une étude numérique de la convection mixte laminaire bidimensionnelle dans une cavité carrée avec une paroi supérieure adiabatique. Les parois verticales froides se déplacent vers le bas à une vitesse constante. Une source chaude est placée au centre de la paroi inférieure (température fixe). La partie restante de cette paroi

est supposée adiabatique. Les effets de la longueur de la source de chaleur ainsi que du nombre de Richardson ont été étudiés. Les résultats montrent que l'effet de la convection forcée et de la convection naturelle étant coopérant, aucune bifurcation vers une solution non symétrique n'a été observée.

T.H Hsu et S.G. Wang [6] ont présenté une étude numérique de la convection mixte des fluides micros polaires dans une cavité carrée avec une source de chaleur discrète. Les études ont été effectuées pour une large gamme de nombres de Reynolds et Grashof, ainsi que les paramètres liés au fluide. Les résultats montrent que les champs thermiques dépendent de la viscosité.

M.Najam et al [7] ont étudié numériquement la convection mixte dans une cavité sous forme de « T » chauffée à l'aide d'un flux de chaleur constant et soumise à un jet d'air frais par le bas. Les blocs chauffants sont identiques et le système présente une symétrie par rapport à un axe vertical passant par les milieux des ouvertures. Les équations régissant sont résolues à l'aide d'une méthode aux différences finies. Les paramètres de contrôle sont les nombres de Rayleigh $0 \leq Ra \leq 10^6$, de Reynolds $1 \leq Re \leq 100$ et de Prandtl $Pr = 0,72$, la hauteur relative des blocs chauffants ($B = h/H = 0,5$), la dimension C des ouvertures d'admission et d'évacuation de l'air ($C = l/L = 0,15$) et la distance relative D entre les blocs ($D = d/L = 0,50$). Les résultats obtenus, pour $H/L = 1$, montrent l'existence de solutions multiples et le transfert de chaleur dépend de manière sensible de ces solutions.

H.F. Oztop et I. Dagtekin [8] ont étudié numériquement la convection mixte bidimensionnelle stationnaire dans une cavité carrée portant deux parois mobiles verticales et chauffées différentiellement. Les parois horizontales sont adiabatiques. Trois cas ont été considérés qui dépendent de la direction du mouvement des parois. Toutes les simulations ont été réalisées avec les valeurs des nombres de Richardson ($0.01 \leq Ri \leq 100$) et du nombre de Prandtl ($Pr = 0.7$). Les résultats montrent que le nombre de Richardson influe sur l'écoulement du fluide et le transfert thermique pour $Ri > 1$, et par conséquent, le transfert de chaleur est assez meilleur.

M.A.R. Sharif [9] a étudié numériquement la convection mixte dans une cavité rectangulaire bidimensionnelle à l'aide de l'algorithme SIMPLER. La surface supérieure de la cavité rectangulaire est maintenue à une haute température et la surface inférieure à base température, tandis que les deux surfaces gauche et droite sont adiabatiques. L'étude numérique est faite pour un nombre de Rayleigh varié de 10^5 à 10^7 et un nombre de Reynolds

$Re = 408.21$. Les résultats montrent que le nombre de Nusselt local augmente avec l'augmentation de l'angle de l'inclinaison pour la convection forcée dominante. Aussi, le nombre de Nusselt augmente avec l'augmentation de l'angle de l'inclinaison pour le cas ($Ri = Gr/Re^2 = 0.1$), tandis qu'il augmente plus rapidement dans le cas où ($Ri = 10$).

M.Belhi [10] a étudié par une simulation numérique la convection mixte dans une cavité carrée munie de plusieurs entrées en utilisant la formulation $\Psi - \omega$. Toutes les simulations ont été réalisées avec les valeurs des nombres de Richardson, de Prandtl et de Grashof, respectivement égales à 5, 0.7 et 10^6 . La paroi verticale gauche est soumise à une température fixe et les autres surfaces sont supposées adiabatiques. Les résultats montrent qu'au-delà d'un nombre d'entrées critiques (12 entrées pour le cas étudié), la répartition des isothermes et des lignes de courants reste pratiquement inchangée. Aussi, le nombre de Nusselt moyen décroît brusquement pendant les premiers instants (transport de la chaleur par conduction), ensuite il subit de légères oscillations, probablement dues à l'apparition de zones de recirculation, puis il diminue régulièrement pour se stabiliser à une valeur fixe.

Y.S.Prasad et M.K.Das [11] ont étudié la convection mixte dans une cavité rectangulaire avec la méthode des volumes finis. Les parois verticales sont maintenues à une température froide tandis que la paroi supérieure chaude et la paroi inférieure froide pour un premier cas et inversement pour le deuxième cas. L'étude numérique est faite pour des nombres de Grashof allant de 0 jusqu'à 10^6 , un nombre de Reynolds égale à 100 et un rapport d'aspect égale à 0,5. Les résultats sont donnés sous forme des isothermes, isocourants, ainsi que la variation du nombre de Nusselt.

M.M.Abdelkhalek [12] a étudié numériquement la convection mixte laminaire bidimensionnelle dans des milieux poreux. Le fluide convectif et le milieu poreux sont supposés en équilibre thermodynamique. La résolution du système d'équation est faite par l'utilisation d'une technique de perturbation.

Une étude de la convection mixte dans une cavité carrée par la méthode des volumes finis a été menée par **N.O.Morgan et al [13]**. L'air et l'eau ont été choisis respectivement comme fluide interne et externe. Les isocourants, les isothermes et les profils de vitesse ainsi que le nombre de Nusselt local et temporel sont présentés pour le fluide externe. L'étude est faite pour un nombre de Reynolds égale à 200, 500, et un nombre de Richardson égale à 1.

Une simulation numérique avec la méthode des éléments finis a été faite par **T. Basak et al [14]** afin d'étudier la convection mixte à l'intérieur d'une cavité carrée. Les résultats

montrent d'une part, une apparition des zones de recirculation avec l'augmentation du nombre de Prandtl et pour un nombre de Reynolds égale à 10, un nombre de Grashof égale $Gr = 10^5$, dans le cas où les parois latérales sont chauffées linéairement. D'autre part seulement deux zones de recirculation sont formées dans le cas de refroidissement de la paroi droite. L'analyse des résultats montrent que pour un nombre de Reynolds variant de 1 à 10^2 , la convection naturelle prédomine selon la valeur de Gr .

L'étude bibliographique présentée ci-dessus donne un aperçu général sur l'ensemble des travaux entrepris sur la convection mixte en cavités.

Le but de notre étude est la détermination d'un critère de similitude pour la convection mixte laminaire dans une cavité carrée en se basant sur un paramètre $\lambda = f(Gr, Re)$. Le domaine de la convection mixte est caractérisé par $\lambda_{min} \leq \lambda \leq \lambda_{max}$, avec λ_{min} , λ_{max} , représentent les limites de la convection mixte. Sachant que pour $\frac{Gr^b}{Re^a} \rightarrow 0$ La convection forcée prédomine, la convection naturelle prédomine lorsque $\frac{Gr^b}{Re^a} \rightarrow \infty$. Donc on va essayer de déterminer les fonctions $\lambda_{min}(Gr, Re)$ et $\lambda_{max}(Gr, Re)$. La détermination de ces fonctions est basée sur les champs thermique et hydrodynamique trouvés par les simulations numériques.

I.3 CONTENU DU MEMOIRE

Ce mémoire est divisé en quatre chapitres. Le premier chapitre (déjà présenté) donne une idée globale sur la convection mixte ainsi que les objectifs visés, et une revue bibliographique.

Dans le second chapitre nous allons présenter la configuration relative à la cavité carrée considérée et les équations générales régissant le phénomène de la convection mixte.

Le troisième chapitre est consacré à la discrétisation des équations établies précédemment en utilisant la méthode des volumes finis. Les méthodes de résolution des systèmes d'équations ainsi déduits sont présentées dans ce même chapitre. Le quatrième chapitre présente les résultats obtenus numériquement ainsi que leurs interprétations.

En conclusion nous avons dégagé les principaux résultats obtenus au cours de cette étude en signalant les perspectives de ce travail.

CHAPITRE II

FORMULATION MATHÉMATIQUE

I.4 CONFIGURATION GEOMETRIQUE

La configuration géométrique étudiée est présentée sur la figure II-1, Il s'agit d'une cavité carrée dont les parois horizontales sont adiabatiques et fixes. La paroi verticale gauche est maintenue à température T_f et une vitesse constante dirigée vers le haut V . la paroi verticale droite est maintenue fixe avec une température T_c supérieure à celle de la paroi gauche de la cavité.

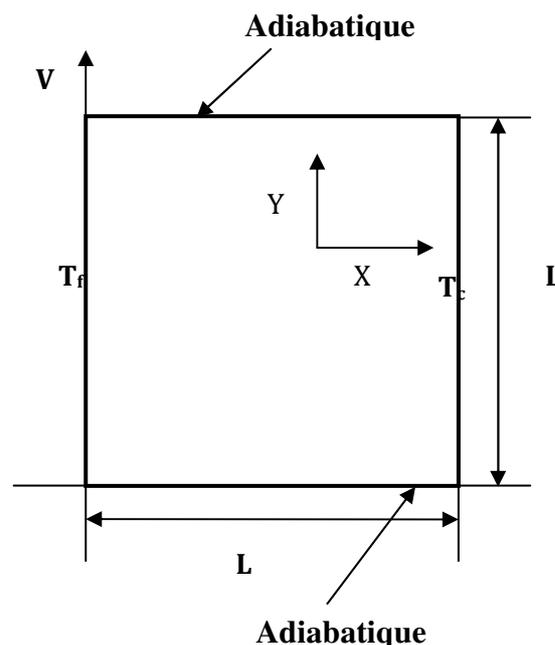


Figure II-1 : Configuration géométrique du problème considéré.

Choix de la géométrie

Le choix de cette configuration avec les conditions aux limites est motivé par :

- La coexistence de deux types de convection au sein de la cavité, la convection forcée déclenchée par la paroi gauche mobile, et la convection naturelle due à la différence de température entre les deux cotés gauche et droite de la cavité.

- La simplicité de la géométrie permet une détermination facile d'un critère d'existence de l'une de deux convections ou les deux en même temps.

I.5 EQUATIONS GENERALES

Pour établir les équations fondamentales de transport qui expriment des bilans de matière, d'énergie et de quantité de mouvement, il faut élaborer pour chaque grandeur physique (masse, quantité de mouvement, énergie) un bilan intégral sur un domaine fixe et fini. Cette procédure permet de bien identifier chaque terme des équations développées [15].

Les lois de conservation indiquent que le taux d'accumulation d'une entité physique quelconque dans un domaine augmenté de son transfert par convection et par diffusion doit compenser sa production et/ou sa destruction (source et puit). Ceci peut se traduire par le système d'équations vectorielles suivantes :

❖ Equation de conservation de la masse (équation de continuité)

C'est l'équation qui exprime le principe de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) \quad (\text{II-1})$$

❖ Equation de la conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \overline{\text{grad}} \vec{V} = \frac{-1}{\rho} \overline{\text{gra}} P + \nu \Delta \vec{V} - \vec{g} \beta (T - T_0) \quad (\text{II-2})$$

❖ Equation de la conservation de l'énergie

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \overline{\text{grad}} T \right) = \beta T \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{V} \overline{\text{grad}} P \right) + P_S + \varphi + \text{div}(K \overline{\text{grad}} T) \quad (\text{II-3})$$

Dans ces équations, t représente le temps, ρ la masse volumique, \vec{V} le vecteur vitesse du fluide, T la température, T_0 la température ambiante, p la pression, ν la viscosité cinématique du fluide, K la conductivité thermique, β le coefficient de dilatation, C_p la chaleur spécifique, P_S la source volumique de chaleur, φ la fonction de dissipation (puissance locale des forces de viscosité) et Δ l'opérateur Laplacien.

I.6 HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES

De façon à obtenir un modèle mathématique simple, on adopte les hypothèses suivantes :

- L'écoulement est bidimensionnel.
- Le fluide est newtonien et incompressible.
- L'écoulement engendré est laminaire.
- le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable.
- le travail, induit par les forces visqueuses et de pression, est négligeable.
- Les propriétés physiques du fluide sont constantes hormis la masse volumique qui obéit à l'approximation de Boussinesq dans le terme de la poussée d'Archimède.

En tenant compte de toutes les hypothèses considérées, on aboutit au modèle mathématique suivant :

❖ Equation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II-4})$$

❖ Equations de la quantité de mouvement

Suivant x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (\text{II-5})$$

Suivant y :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + g \beta (T - T_f) \quad (\text{II-6})$$

❖ Equation d'énergie

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \quad (\text{II-7})$$

I.7 CONDITIONS AUX LIMITES DIMENSIONNELLES

Les conditions aux limites dimensionnelles sont :

$$\begin{aligned}
 \text{Pour : } \quad x = 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq L \quad : \quad u = 0 \quad v = U_0 \quad T = T_f \\
 \quad \quad \quad x = L \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq L \quad : \quad u = v = 0 \quad T = T_c \\
 \quad \quad \quad y = 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq x \leq L \quad : \quad u = v = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \\
 \quad \quad \quad y = L \quad \text{et} \quad 0 \leq x \leq L \quad : \quad u = v = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0
 \end{aligned}$$

T_c et T_f sont les températures chaude et froide respectivement

I.8 EQUATIONS ADIMENSIONNELLES

L'adimensionnalisation ou normalisation consiste à transformer les variables dépendantes et indépendantes en des variables sans dimensions, c'est-à-dire qu'elles seront normalisées par rapport à certaines grandeurs caractéristiques. Cela permet de spécifier les conditions d'écoulement avec un nombre restreint de paramètres de façon à rendre la solution plus générale.

De façon à rendre les équations précédentes adimensionnelles, elles seront transformées par les relations suivantes :

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad U = \frac{u}{U_0}, \quad V = \frac{v}{U_0}, \quad \tau = t \frac{U_0}{L}, \quad P = \frac{p}{\rho U_0^2}, \quad \theta = \frac{(T - T_f)}{(T_c - T_f)}$$

En introduisant les grandeurs sans dimensions dans les équations différentielles (II-4), (II-5), (II-6), (II-7) on obtient le modèle mathématique adimensionnel suivant :

❖ Equation de continuité

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (\text{II-8})$$

❖ Equations de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right] \quad (\text{II-9})$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \theta \quad (\text{II-10})$$

❖ **Equation de conservation de l'énergie**

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re Pr}} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \right] \quad (\text{II-11})$$

Où (Gr) est le nombre de Grashof, (Pr) le nombre de Prandtl, et (Re) le nombre de Reynolds sont définis comme suit:

$$\text{Re} = \frac{U_0 L}{\nu}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}, \quad \text{Gr} = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu^2}$$

Les équations (II-8), (II-9), (II-10), et (II-11) forment le système d'équations qui régit notre problème. Nous remarquons que toutes ces équations sont de la forme des équations de transport qui s'écrivent sous la forme générale :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + U \frac{\partial \phi}{\partial X} + V \frac{\partial \phi}{\partial Y} = \Gamma_{\phi} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right] + S_{\phi} \quad (\text{II-12})$$

Où : ϕ : est la variable dépendante;
 Γ_{ϕ} : est le coefficient de diffusion;
 S_{ϕ} : est le terme source.

Après identification avec le système d'équations précédent, on peut établir le tableau (II-1) dans lequel on donne pour chaque équation le coefficient de diffusion et le terme source relatif à la variable indépendante ϕ .

Tableau II-1 : Identification des équations par rapport à l'équation générale de transport

| Equation | | ϕ | Γ_{ϕ} | S_{ϕ} |
|-----------------------|-----------|----------|---------------------------------------|--|
| Continuité | | 1 | 0 | 0 |
| Quantité de mouvement | Suivant X | U | $\frac{1}{\text{Re}}$ | $-\frac{\partial P}{\partial X}$ |
| | Suivant Y | V | $\frac{1}{\text{Re}}$ | $-\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{Gr}{\text{Re}^2} \cdot \theta$ |
| L'énergie | | θ | $\frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}}$ | 0 |

Remarque :

Au début de notre travail, on a essayé de faire l'adimensionnalisation en introduisant des grandeurs caractéristiques modifiées dans le but de contrôler la convection par un nouveau paramètre. Malheureusement cette dernière n'a pas donné des résultats (voir annexe).

I.9 CONDITIONS AUX LIMITES ADIMENSIONNELLES

La résolution du système d'équations adimensionnelles obtenues précédemment nécessite l'incorporation de conditions initiales et aux limites adimensionnelles pour chaque variable dépendante.

$$\begin{array}{llll}
 \text{Pour : } & X=0 & \text{et } 0 \leq Y \leq 1 & : & U = 0 & V = 1 & \theta = 0 \\
 & X=1 & \text{et } 0 \leq Y \leq 1 & : & U = V = 0 & & \theta = 1 \\
 & Y=0 & \text{et } 0 \leq X \leq 1 & : & U = V = 0 & & \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \\
 & Y=1 & \text{et } 0 \leq X \leq 1 & : & U = V = 0 & & \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0
 \end{array}$$

CHAPITRE III

METHODES NUMERIQUES

I.10 INTRODUCTION

Les solutions analytiques, basées sur la forme locale du problème (Equations aux Dérivées Partielles : « E.D.P. » associées aux conditions initiales et aux limites), ne peuvent être déterminées dans le cas général, sauf dans certains cas classiques connus depuis bien longtemps. Ces cas sont pédagogiquement intéressants mais demeurent beaucoup trop limités pour l'industriel en particulier au niveau des géométries considérées. On cherche donc des méthodes basées sur l'approximation numérique. Celle-ci a pour but de définir une ou plusieurs suites convergentes (vers la solution analytique du système, qui ne converge pas d'ailleurs nécessairement vers un état d'équilibre) dont nous calculons les termes les uns après les autres par itérations successives. Le principe est d'approcher l'équation continue « E.D.P. » déduite de la théorie par une équation algébrique de récurrence liant les termes de ces suites. Nous voyant ici l'utilité des conditions initiales et aux limites permettant de donner un « départ » à notre calcul. Or nous comprenons bien que cette solution ne puisse s'effectuer continûment sur le domaine de calcul. Nous allons donc décomposer ce domaine en plusieurs mailles. Cette notion de maillage sera approfondie plus loin. Actuellement, trois grandes méthodes numériques sont utilisées généralement pour la résolution des systèmes d'équations à dérivées partielles régissant les différents écoulements de transfert de chaleur, de masse etc., ce sont les méthodes des différences finies, des éléments finis et des volumes finis.

La méthode des différences finies consiste à discrétiser les équations continues aux nœuds d'un maillage prédéfini en calculant chaque dérivée partielle à l'aide d'un développement en séries de Taylor tronquées pour obtenir des équations linéaires reliant la valeur des inconnues en un nœud aux valeurs de ces mêmes inconnues aux nœuds voisins.

La technique des éléments finis discrétise l'espace à l'aide d'éléments géométriques simples (généralement des triangles ou des quadrangles). En suite, la forme forte des équations est remplacée par la forme faible dans laquelle les inconnues sont approximées par une combinaison linéaire de fonctions de base dont le support est un des éléments.

La méthode des volumes finis qui a été adoptée dans cette étude consiste à exprimer le bilan de la grandeur étudiée (masse, énergie, quantité de mouvement ...) sur un volume de contrôle [16]. Ces volumes de contrôle sont généralement rectangulaires délimités par des lignes parallèles aux axes des coordonnées. Cependant, il est possible, actuellement, d'utiliser des volumes de diverses formes. L'un des principaux avantages de cette méthode est d'assurer une conservation intégrale exacte des grandeurs quelle que soit la taille du maillage et c'est pour cette raison qu'elle est très largement utilisée pour la résolution des phénomènes gouvernés par des équations à dérivées partielles.

I.11 NOTIONS GENERALES SUR LA METHODE DES VOLUMES FINIS

Dans le but de ne pas trop alourdir ce mémoire nous allons évoquer les bases de la méthode des volumes finis et pour de plus amples détails l'ouvrage de Patankar [16] constitue un excellent guide.

La résolution d'un problème cité précédemment, par la méthode des volumes finis, passe par les étapes suivantes :

- Maillage du domaine physique de calcul (distribution des volumes de contrôle)
- Discrétisation des différentes équations régissant le phénomène considéré.
- Choix d'un algorithme de résolution des systèmes d'équations obtenues après discrétisation.

I.12 DISTRIBUTION DES VOLUMES DE CONTROLE

Dans la méthode des volumes finis, la zone d'intégration est divisée en un certain nombre de volumes élémentaires (voir Figure III-1). Il faut bien distinguer les indices en lettres majuscules qui désignent des grandeurs attachées au point situé au centre du volume et les indices en lettres minuscules qui désignent les grandeurs attachées aux faces des volumes. Si nous appelons P le nœud considéré alors les points qui lui sont adjacents sont dénommés : East (E), West (W), North (N), et South (S) pour des écoulements bidimensionnels.

Les faces du volume de contrôle seront dénommées de la même façon. Dans le but d'assurer une expression correcte du bilan de conservation d'une entité physique quelconque cette méthode utilise un maillage décalé (staggered grid) en fonction de la nature même de l'entité considérée. La pression et la température sont calculées en considérant un volume de contrôle centré autour du point P, donc entre les faces e, w, s, et n (en bidimensionnel). Les

vitesse seront estimées dans un volume centré sur la face est entre deux plans passant par les nœuds P et E et limité par les faces sud et nord. Il découle directement de cette localisation que le calcul des flux de masse à travers des interfaces (ex : $F_e = (\rho U)_e \Delta y$) se fera sans aucune interpolation de la vitesse sur ces interfaces.

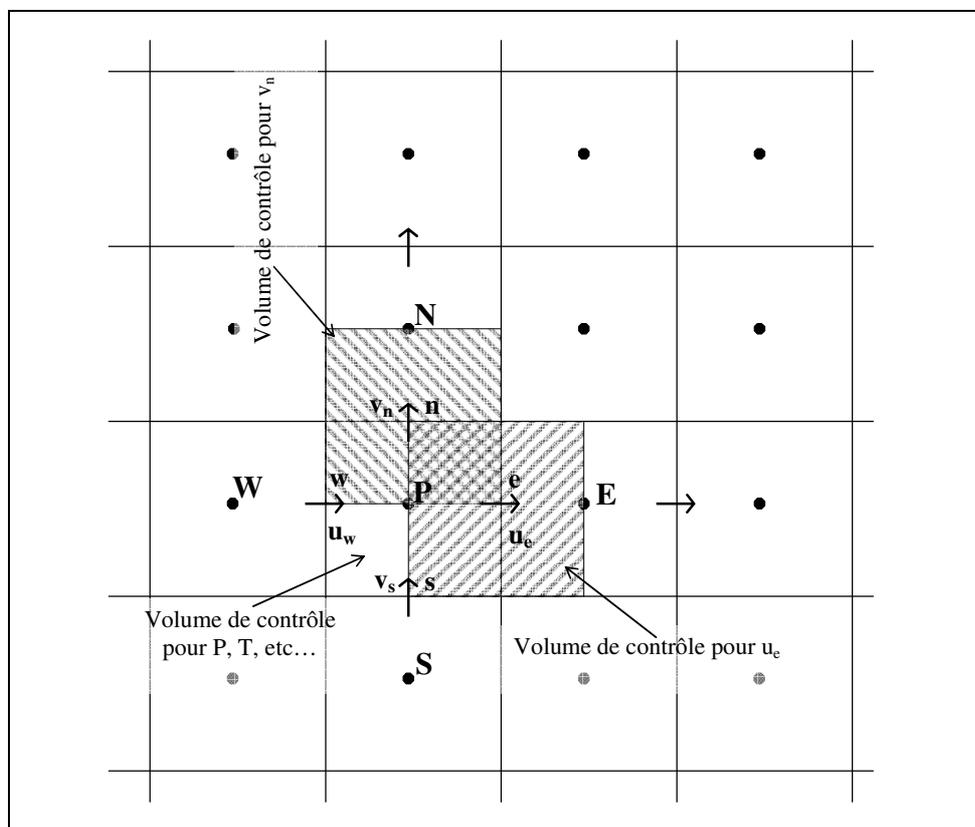


Figure III-1 : Distribution des volumes de contrôle avec maillage décalé.

L'avantage de cet arrangement est nettement plus important au niveau de l'équation de continuité, car celle-ci étant intégrée sur le volume de contrôle principal fera apparaître la différence entre deux vitesses adjacentes, éliminant ainsi les problèmes d'interpolation. D'autre part au niveau de l'équation de la quantité de mouvement, la différence de pression prise en compte sera elle aussi issue de deux nœuds adjacents et sera donc la force motrice naturelle pour la vitesse.

Du point de vue physique la pression et la température sont des grandeurs scalaires plus facilement calculables en un point (supposé représentatif du volume), tandis que la vitesse est plutôt liée à un flux (que nous considérons constant) à travers une surface. Conformément aux hypothèses faites précédemment (grandeurs et flux constants) il conviendra de prendre des maillages suffisamment raffinés de façon à ce que les moyennes effectuées soient représentatives.

I.13 DISCRETISATION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DE TRANSPORT

Les phénomènes physiques impliquant l'écoulement d'un fluide et le transfert de chaleur sont régis par les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Ces équations se présentent sous la forme générale d'une équation de transport, soit :

$$\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial t}}_I + \underbrace{\frac{\partial (U_j \phi)}{\partial x_j}}_{II} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)}_{III} + \underbrace{S_\phi}_{IV} \quad (\text{III-1})$$

Où : U_j : les composantes du vecteur vitesse ;

ϕ : est la variable dépendante ;

Γ : est le coefficient de diffusion ;

S_ϕ : est le terme source.

Cette équation de transport comporte quatre termes représentant les processus par lesquels la variable ϕ peut changer.

I : terme de la variation temporelle au sein du volume,

II : terme de convection à travers les faces du volume,

III : terme de diffusion à travers les faces du volume,

IV : terme de génération ou destruction au sein du volume.

On intégrant sur un volume de contrôle typique (voir Figure III-2) ; on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial \phi}{\partial t} dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial (U\phi)}{\partial x} dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial (V\phi)}{\partial y} dx dy dt = \\ & \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy dt + \\ & \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e S_\phi dx dy dt \end{aligned} \quad (\text{III-2})$$

Où : n : correspond au temps (t).

$n+1$: correspond au temps ($t + \Delta t$)

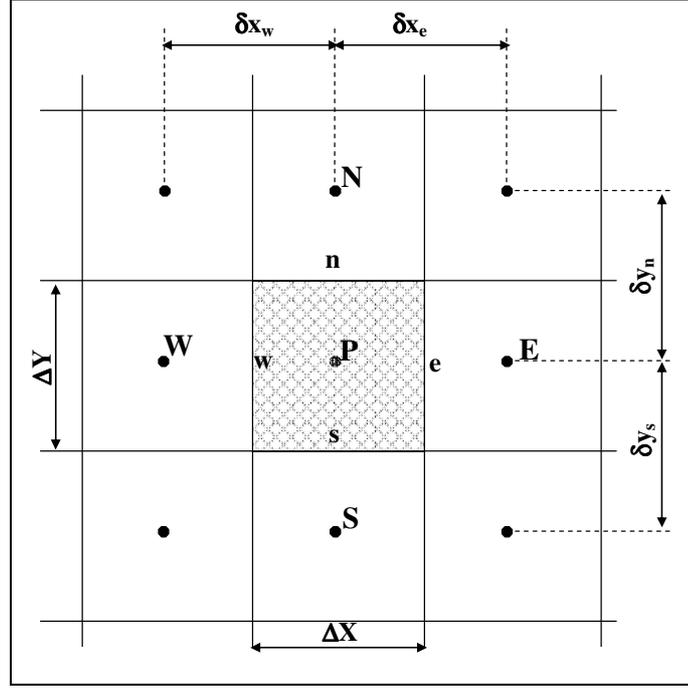


Figure III-2 : Volume de contrôle typique.

On évaluant chaque terme séparément, nous obtenons :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial \phi}{\partial t} dx dy dt = (\phi_p^{n+1} + \phi_p^n) \Delta X \Delta Y$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial (U\phi)}{\partial x} dx dy dt = (U_e \phi_e - U_w \phi_w) \Delta Y \Delta t$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial (V\phi)}{\partial y} dx dy dt = (V_n \phi_n - V_s \phi_s) \Delta X \Delta t$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy dt = \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] \Delta Y \Delta t$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy dt = \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right] \Delta X \Delta t$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e S_\phi dx dy dt = \overline{S_\phi} \Delta X \Delta Y \Delta t$$

En réduisant les termes semblables, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & (\phi_p^{n+1} + \phi_p^n) \frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta t} + (U_e \phi_e - U_w \phi_w) \Delta Y + (V_n \phi_n - V_s \phi_s) \Delta X = \\ & \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] \Delta Y + \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right] \Delta X + \overline{S_\phi} \Delta X \Delta Y \end{aligned} \quad (\text{III-3})$$

En posant :

$$J_x = U\phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad J_y = V\phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Donc le résultat de l'équation (III-3) donne :

$$(\phi_p^{n+1} + \phi_p^n) \frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta t} + J_e^{n+1} + J_w^{n+1} + J_n^{n+1} + J_s^{n+1} = \overline{S_\phi} \Delta X \Delta Y \quad (\text{III-4})$$

Où :

$$\left. \begin{aligned} J_e &= U_e \phi_e \Delta Y - \Gamma \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_e \Delta Y \\ J_w &= U_w \phi_w \Delta Y - \Gamma \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_w \Delta Y \\ J_n &= V_n \phi_n \Delta X - \Gamma \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_n \Delta X \\ J_s &= V_s \phi_s \Delta X - \Gamma \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_s \Delta X \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-5})$$

Les quantités J_e , J_w , J_n et J_s sont les flux aux interfaces (e, w, n, s). Le terme S_ϕ est supposé être constant dans le volume de contrôle. $\overline{S_\phi}$ est évalué au centre de volume de contrôle.

I.14 SCHEMAS D'INTERPOLATION

Nous introduisons maintenant quelques schémas d'interpolation servant à déterminer la valeur de la variable dépendante ϕ aux interfaces du volume de contrôle, Parmi ces schémas, on distingue le schéma aux différences centrées (Central Difference Scheme) qui utilise une procédure d'interpolation linéaire mais qui reste, cependant, limité pour des valeurs de $|\text{Pe}| < 2$.

Une autre alternative à ce schéma est la procédure aux différences décentrées (Upwind Scheme). Ce schéma est moins précis que celui aux différences centrées pour les écoulements qui ne sont pas à convection dominée. Par conséquent, un certain nombre d'auteurs ont proposé des combinaisons des deux schémas précédents. Spalding a développé le schéma hybride (Hybrid Scheme) qui rejoint le schéma aux différences centrées pour $|\text{Pe}| < 2$ et le schéma aux différences décentrées pour $|\text{Pe}| > 2$ [17].

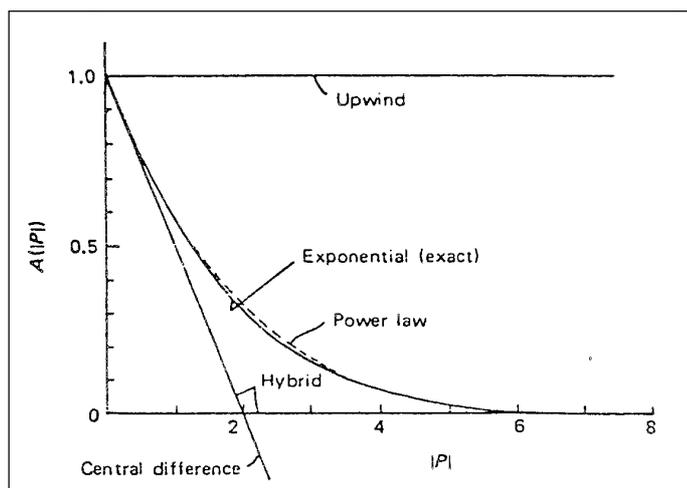


Figure III-3 : La fonction $A(|Pe|)$ pour chacun des schémas.

L'inconvénient majeur du schéma hybride est l'erreur introduite au voisinage de $|Pe| = 2$, (voir Figure III-3). Ainsi, un certain nombre de méthodes ont été développées afin de présenter un changement plus graduel et qui sont en bon accord avec la solution exacte d'un problème monodimensionnel. Patankar propose le schéma d'approximation de la loi de puissance (Power Law Scheme) qui s'avère très efficace puisqu'il approche beaucoup mieux la solution exacte (voir Figure III-4).

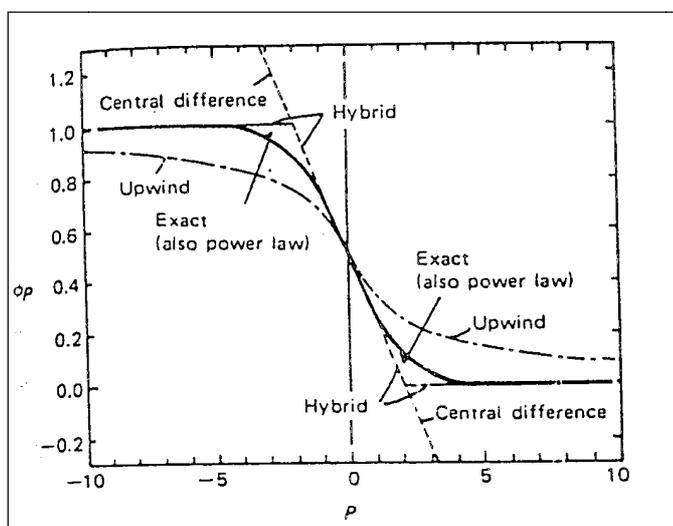


Figure III-4 : Prédiction de ϕ_p par les différents schémas dans un intervalle des nombres de Peclet.

Ce schéma a été développé à partir du schéma exponentiel exact (Exponential Scheme). Ce dernier n'a pas été utilisé à cause du temps de calcul important nécessaire au calcul des exponentielles [17].

Le schéma de la loi de puissance est le plus recommandé dans la littérature, aussi nous l'adapterons dans notre travail. On note aussi que le temps de calcul pour ce schéma est

légèrement plus important que le schéma hybride. Par ailleurs les schémas préalablement définis peuvent être vus comme des choix particuliers de la fonction $A(|Pe|)$. Ainsi on établit le tableau suivant :

Tableau III-1 : La fonction pour chacun des schémas.

| Schémas | Expressions de $A(Pe)$ |
|------------------|------------------------------|
| Centré | $1 - 0,5 Pe $ |
| Upwind | 1 |
| Hybride | $\max\{0, (1 - 0,5 Pe)\}$ |
| Loi de puissance | $\max\{0, (1 - 0,5 Pe)^5\}$ |
| Exponentiel | $ Pe / [\exp(Pe) - 1]$ |

Dans le présent travail nous allons utiliser le schéma de la loi de puissance (power law), car il exige moins de temps de calcul et permet de fournir une meilleure stabilité de la solution numérique et des résultats proches de la solution exacte.

I.15 METHODE DE RESOLUTION

D'une manière générale, le succès de la simulation dépend fortement et presque exclusivement de la méthode de résolution des systèmes d'équations algébriques obtenues après discrétisations des équations différentielles. Une attention particulière a alors été consacrée à ce point et le résultat est un algorithme de résolution très performant pour les problèmes étudiés dans le cadre de ce mémoire. Nous présentons ici une description succincte de cet algorithme [16].

L'algorithme est un assemblage de plusieurs techniques différentes et complémentaires. Ce sont :

- La technique TDMA (Tri Diagonal Matrix Algorithm) ou algorithme de Thomas.
- La technique de balayage rangée par rangée (ligne par ligne).
- La technique de correction par blocs.

Nous commençons par balayer le domaine de calcul rangée par rangée, dans une direction donnée. Pour chaque rangée, nous appliquons la technique TDMA pour déterminer le champ de la variable considérée sur toute la rangée en question. Après le balayage complet,

nous procédons à la correction du champ obtenu et ceci en calculant une correction par rangée (le système d'équations décrivant la répartition des corrections étant résolu par la même technique TDMA). Nous effectuons ensuite les mêmes étapes mais cette fois dans l'autre direction. Ainsi une itération a été réalisée et nous procédons à un test de convergence. Si le critère de convergence est satisfait le champ est déterminé sinon nous recommençons les calculs au début avec le balayage suivant la direction choisie initialement.

Cet algorithme permet de fournir une solution, après seulement quelques itérations ; même pour le champ de pression qui est le plus difficile à calculer à cause de son couplage avec celui des vitesses et que nous allons traiter dans le paragraphe suivant.

I.16 COUPLAGE VITESSE PRESSION

La présence de la pression dans les équations de conservation de la quantité de mouvement sous forme de gradient rend la résolution de celles-ci plus compliquée, pour la principale raison que cette pression est inconnue et constitue l'une des variables du problème. Pour la déterminer, il faut tout d'abord trouver une équation pour la décrire. Cette équation sera constituée à partir de l'équation de la conservation de la masse. Mais, avant de passer à ce point, faisons les deux remarques suivantes :

- La discrétisation des équations de conservation de la quantité de mouvement fait apparaître un problème lié à la pression. En effet, lors de cette discrétisation en un nœud P , par exemple, seules les pressions aux nœuds voisins apparaîtront dans l'équation finale. En passant à un nœud voisin (E par exemple) nous verrons apparaître la pression au nœud initial P et au nœud situé à l'est du nœud E . Nous constatons ainsi que les équations discrétisées utilisent deux champs de pression complètement indépendants. Ce qui est inadmissible et conduit, si nous n'y remédions pas, à des résultats complètement fantaisistes.
- Le même problème apparaît aussi lors de la discrétisation de l'équation de continuité. Nous voyons apparaître deux champs de vitesses sans relation l'un avec l'autre et sans aucun fondement physique.

Pour éviter ces deux inconvénients, Nous décalons le maillage de la pression par rapport à celui des vitesses. Nous allons alors localiser la pression au centre de l'élément de volume et les vitesses sur les faces de celui-ci comme indiqué sur la figure III-1.

Revenons maintenant à la constitution d'une équation pour la pression ou plus exactement pour une correction de la pression P' définie par :

$$P = P^* + P' \quad (\text{III-6})$$

Où P est la pression exacte et P^* une estimation de départ qu'il faut corrigé en déterminant P' . Le problème est ramené à la détermination de P' au lieu de P . L'équation de conservation de la quantité de mouvement discrétisée s'écrit pour les deux composantes de vitesses :

$$a_p^{(u)} U_p = a_E^{(u)} U_E + a_W^{(u)} U_W + a_N^{(u)} U_N + a_S^{(u)} U_S + b_p^{(u)} \quad (\text{III-7a})$$

$$a_p^{(v)} U_p = a_E^{(v)} U_E + a_W^{(vvv)} U_W + a_N^{(v)} U_N + a_S^{(v)} U_S + b_p^{(v)} \quad (\text{III-7b})$$

Les termes sources $b_p^{(u)}$ et $b_p^{(v)}$ font intervenir la pression inconnue. Nous allons donc travailler par itérations successives. Nous supposons pour démarrer que la pression est connue (estimation P^*) et nous calculons le champ des vitesses. Or, les vitesses calculées avec une estimation de la pression ne satisfont pas, en général, l'équation de continuité qui doit être respectée à tout moment. Nous allons alors les corriger en utilisant, comme pour la pression ci-dessus, une correction telle que

$$U = U^* + U' \quad (\text{III-8a})$$

$$V = V^* + V' \quad (\text{III-8b})$$

Où V^* et U^* sont les vitesses calculées avec P^* . U' et V' étant les corrections de ces vitesses à déterminer pour retrouver les vitesses exactes U et V de l'itération en cours.

Le calcul des corrections U' et V' s'effectue en utilisant les relations (III-8) dans les équations (III-7) en faisant des hypothèses simplificatrices.

$$U'_p = \frac{\Delta y}{a_p^{(u)}} (p'_w - p'_e) \quad (\text{III-9a})$$

$$V'_p = \frac{\Delta x}{a_p^{(v)}} (p'_s - p'_n) \quad (\text{III-9b})$$

Pour déterminer la correction de pression P' nécessaire pour le calcul des corrections des vitesses, nous utilisons l'équation de continuité discrétisée suivante (élément de volume scalaire) :

$$(U_E - U_W)\Delta y + (V_N - V_S)\Delta x = 0 \quad (\text{III-10})$$

Nous remplaçons dans cette équation, les vitesses par leurs valeurs données par les relations (III-8). Par identification avec l'équation de conservation de la quantité de mouvement (tout ce qui est en fonction des vitesses U^* et V^* disparaît), nous obtenons une équation pour la correction des vitesses. En utilisant les relations (III-9) dans cette dernière, nous obtenant l'équation suivante :

$$a_p^{(p')} p'_p = a_e^{(p')} p'_e + a_w^{(p')} p'_w + a_n^{(p')} p'_n + a_s^{(p')} p'_s + b_p^{(p)} \quad (\text{III-11})$$

Avec :

$$a_e^{(p')} = \rho \frac{(\Delta y)^2}{(a_p^{(u)})_e}; a_w^{(p')} = \rho \frac{(\Delta y)^2}{(a_p^{(u)})_w}; a_n^{(p')} = \rho \frac{(\Delta x)^2}{(a_p^{(u)})_n}; a_s^{(p')} = \rho \frac{(\Delta x)^2}{(a_p^{(u)})_s}$$

$$a_p^{(p')} = a_e^{(p')} + a_w^{(p')} + a_n^{(p')} + a_s^{(p')}$$

$$b_p^{(p')} = \rho[(U_w^* - U_e^*)\Delta y + (V_s^* - V_n^*)\Delta x]$$

Cette équation permet de déterminer le champ de la correction P' . La correction des pressions et des vitesses et maintenant possible et les valeurs déduites sont considérées comme des nouvelles estimations et la procédure est recommencée jusqu'à la convergence. Cette procédure est connue dans la littérature sous le nom de SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressur Linked Equation) et est très largement utilisée [17].

L'algorithme SIMPLE sera donc défini par les étapes suivantes :

- 1- Estimer le champ de pression ;
- 2- Résoudre les équations de quantité de mouvement pour obtenir U^* et V^* ;
- 3- Résoudre l'équation en P et cela en utilisant U^* et V^* ;
- 4- Calculer le champ de pression P et le champ des vitesses U et V à partir de leurs expressions de correction en utilisant P ;
- 5- Résoudre l'équation discrétisée pour d'autres variables dépendantes ϕ (température, concentration.... etc.) s'ils influencent le champ d'écoulement ;
- 6- Traiter la pression P comme un nouveau estimé P^* , et revenir à l'équation (III-6) pour répéter la même procédure jusqu'à convergence.

I.17 DETAILS NUMERIQUES

I.17.1 La sous relaxation

La sous- relaxation est généralement utilisée dans les problèmes non linéaires pour éviter que le processus itératif décrit précédemment ne diverge. Elle consiste à diminuer la rapidité des changements des valeurs d'une variable, d'une itération à l'autre, par l'introduction d'un coefficient de sous relaxation α_ϕ .

Comme nous l'avons vu précédemment, toutes les équations de transport, après avoir été discrétisées, peuvent être mises sous la forme générale suivante :

$$a_p \phi_p = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + S_\phi \quad (\text{III-12})$$

Si nous notons ϕ_p^* la valeur de ϕ_p à l'itération précédente, il est possible d'écrire :

$$\phi_p = \phi_p^* + \left[\frac{\sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + S_\phi}{a_p} - \phi_p^* \right] \quad (\text{III-13})$$

Le terme entre parenthèse dans cette relation représente le changement survenu à ϕ_p pendant une itération. Cette variation peut être alors amortie par l'introduction d'un facteur de sous relaxation α_ϕ de la manière suivante :

$$\phi_p = \phi_p' + \alpha_\phi \left[\frac{\sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + S_\phi}{a_p} - \phi_p^* \right] \quad (\text{III-14})$$

Il est bien évident que cette procédure de relaxation n'est valable que si la résolution finale de l'équation (III-14) (à la fin des itérations) satisfait bien l'équation (III-12). C'est ici le cas dans la mesure où lorsque le processus a convergé, ϕ_p est censée ne plus varier d'une itération à l'autre. La relation $\phi_p = \phi_p'$ est alors obtenue et associée à l'équation (III-14) donne finalement l'équation (III-12) recherchée.

Concernant la pression, la sous relaxation s'effectue d'une manière un peu différente compte tenu de l'existence de l'algorithme de couplage vitesse- pression. Elle est simplement introduite dans la correction de pression P' sous la forme suivante :

$$P = P^* + \alpha_p P' \quad (\text{III-15})$$

Tous les facteurs de sous relaxation doivent être compris entre 0 et 1. Plus ils sont faibles, plus la sous relaxation est forte et plus la convergence est lente. Mais plus, ils sont forts, plus la sous relaxation est faible et plus il y a de chance de faire introduire des instabilités dans le processus itératif.

Il n'existe pas de règle générale pour choisir les coefficients de sous relaxation. Cela peut dépendre de la nature du problème, du nombre et de la taille des cellules du maillage, de la procédure itérative choisie. Il faut cependant savoir que le choix de ces facteurs est essentiel pour le bon déroulement de la procédure itérative. Enfin, nous rappelons que la valeur de ces coefficients peut être différente d'une variable à une autre.

I.17.2 Critère de convergence

Une procédure est convergente si toute erreur tend à décroître au cours des itérations. Elle a convergée lorsque les itérations ne produisent plus de changements significatifs sur les variables selon un critère bien défini. Le critère de convergence est donc utilisé pour stopper le processus itératif lorsqu'il est satisfait.

Le critère de convergence utilisé dans ce travail repose sur le résidu de l'équation de transport, comme suit :

$$R_{\phi} = \sum_{\text{mailles}} (a_e \phi_e + a_w \phi_w + a_n \phi_n + a_s \phi_s + b - a_p \phi_p) \quad (\text{III-16})$$

Dans le cas de l'équation de continuité, le résidu est la source de masse S_m , pour toutes les variables, les résidus sont normalisés par F_{ϕ} (masses entrantes, la somme de la quantité de mouvement à l'entrée). Il est alors attendu que ces grandeurs soient inférieures à un critère de convergence prédéfini par :

$$\frac{\sum |R_{\phi}|}{F_{\phi}} \leq \text{epsilon} \quad (\text{III-17})$$

Dans le cadre de ce travail, nous avons choisi epsilon de l'ordre de 10^{-3} .

CHAPITRE IV

RESULTATS ET DISCUSSION

I.18 INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous nous intéressons à une étude numérique paramétrique de la convection thermique dans la géométrie considérée. Nous verrons en premier lieu, l'influence du maillage sur les résultats. Puis nous procédons à la validation de notre programme de calcul en comparant les résultats obtenus avec ceux obtenus par d'autres auteurs. Pour plus de clarté, nous avons jugé utile de présenter les résultats selon le mode de convection : convection forcée, mixte et en fin convection naturelle.

En commençant tout d'abord par la présentation pour chaque mode de convection, les profils de vitesse, les isothermes et les isocourants, ainsi que le champ vecteur vitesse pour quelques valeurs du nombre de Reynolds. Puis nous présentons (Gr) en fonction de (Re) pour déterminer les limites inférieure et supérieure de la convection mixte. Nous terminons par la détermination d'un paramètre qui caractérise le mode de la convection. Pour cela on trace la courbe qui montre la variation de nombre de Gr en fonction de Re .

I.19 CHOIX DU MAILLAGE

L'influence du maillage sur l'exactitude de la solution numérique a été examinée avant de passer aux calculs de notre étude. Nous avons considéré le cas de la convection mixte, dont le nombre de Reynolds a été pris égal à 20, le nombre de Prandtl égal à 0,71, et le nombre de Grashof égal à 10^4 .

Afin de procéder à cet examen, nous avons pris en compte quatre différents maillages (40×40), (100×100), (200×200), et (240×240).

Le tableau IV-1 donne les résultats des valeurs de vitesses maximales u_{\max} , la fonction de courant Ψ_{\max} , Ψ_{\min} , pour les quatre maillages. Nous avons opté pour les grilles de maillage (200×200) et (240×240) malgré que l'erreur entre (40×40) et (240×240) ne dépasse pas 1%.

$$\frac{|U_{\max}(40 \times 40) - U_{\max}(240 \times 240)|}{U_{\max}(240 \times 240)} = \frac{|0.9055945 - 0.9149741|}{0.9055945} = 0.0103574 \approx 1\%$$

Tableau IV-1 : Effet du maillage sur u_{\max} , Ψ_{\max} , Ψ_{\min}

| | 40×40 | 100×100 | 200×200 | 240×240 |
|---------------|----------------|----------------|-----------------------------|-----------------------------|
| u_{\max} | 0.9055945 | 0.9089059 | 0.9148504 | 0.9149741 |
| Ψ_{\max} | 0.2811865 | 0.2848834 | 0.2893925 | 0.2896426 |
| Ψ_{\min} | -3.8463566E-02 | -3.5098132E-02 | -3.0894492×10 ⁻² | -3.0663958×10 ⁻² |

Les profils de vitesse et de température obtenus par ces grilles sont très proches et vu que le temps d'exécution du programme de calcul pris en utilisant (240×240) est plus grand, notre choix a été définitivement orienté vers la grille (200×200). Ce choix est dans le but d'un calcul des débits très précis dans la cavité afin de bien situer le régime convectif.

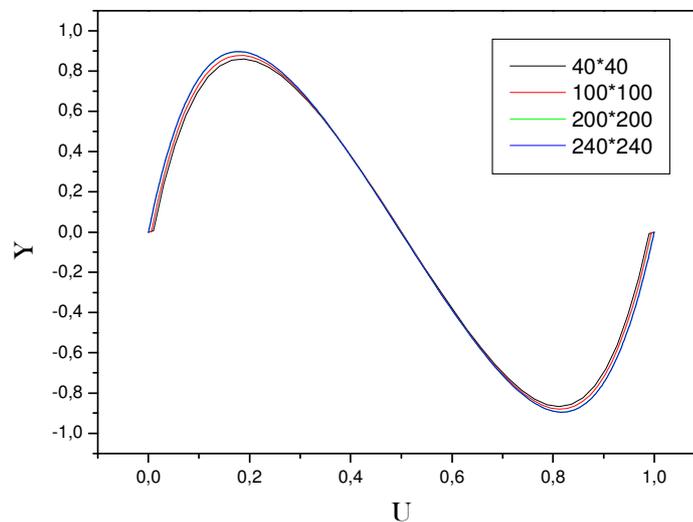


Figure IV-1 : Profil de la vitesse au niveau du centre de la cavité.

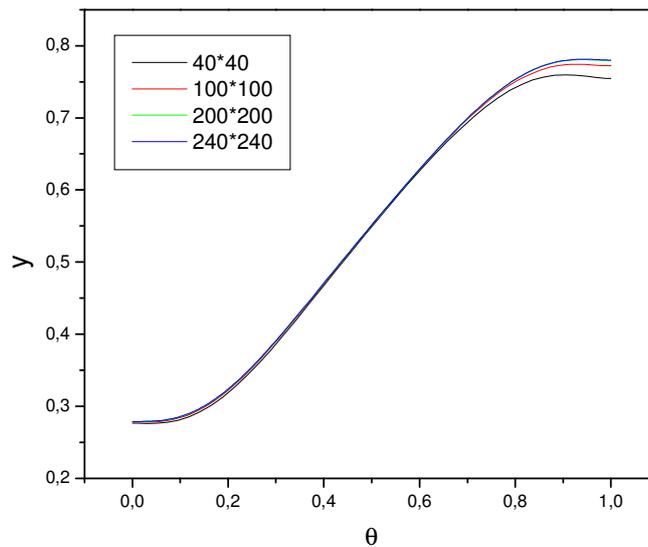


Figure IV-2 : Profil de la température au niveau du centre de la cavité.

I.20 VALIDATION DU CODE DE CALCUL

Pour la vérification des résultats numériques obtenus dans le présent travail, une validation du code numérique a été faite en prenant en compte les résultats de R. Iwatsu et al [2], obtenus dans le cas d'une cavité carrée, dont la paroi supérieure est mobile et maintenue à une température chaude. La paroi inférieure est soumise à une température froide. Les parois verticales sont adiabatiques.

Les champs thermique et dynamique obtenus par notre code de calcul sont très similaires à ceux obtenus par [2].

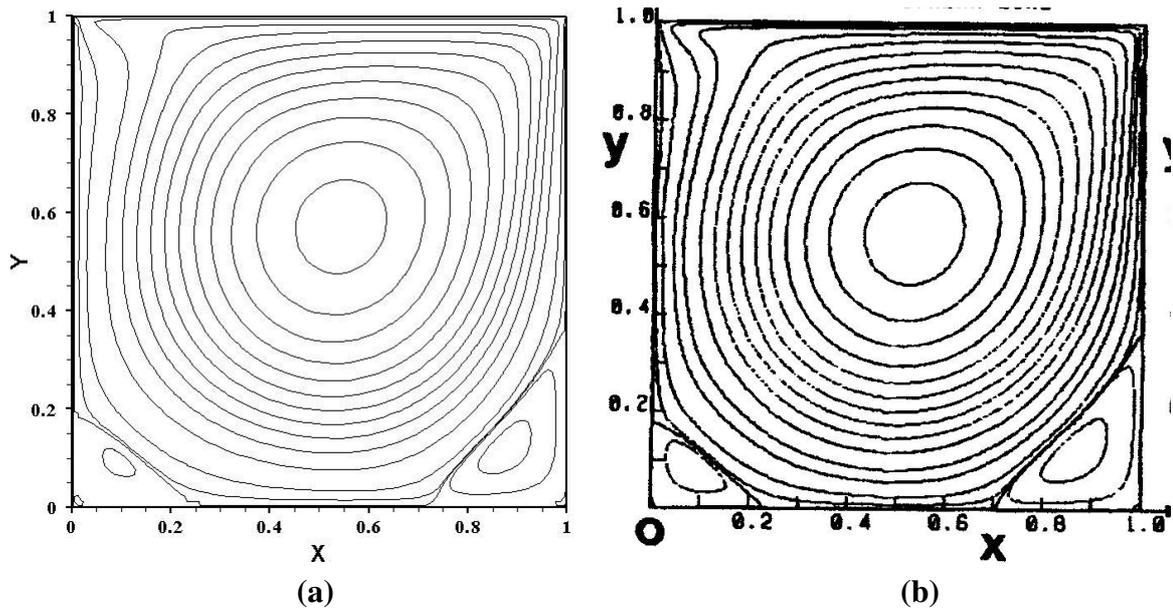


Figure IV-3 : Comparaison des contours de la fonction de courant pour $Re=10^3$, $Gr=10^2$ ($Ri=0.0001$)
 (a) Présent travail (b) Résultat de R. Iwatsu, et al [2]

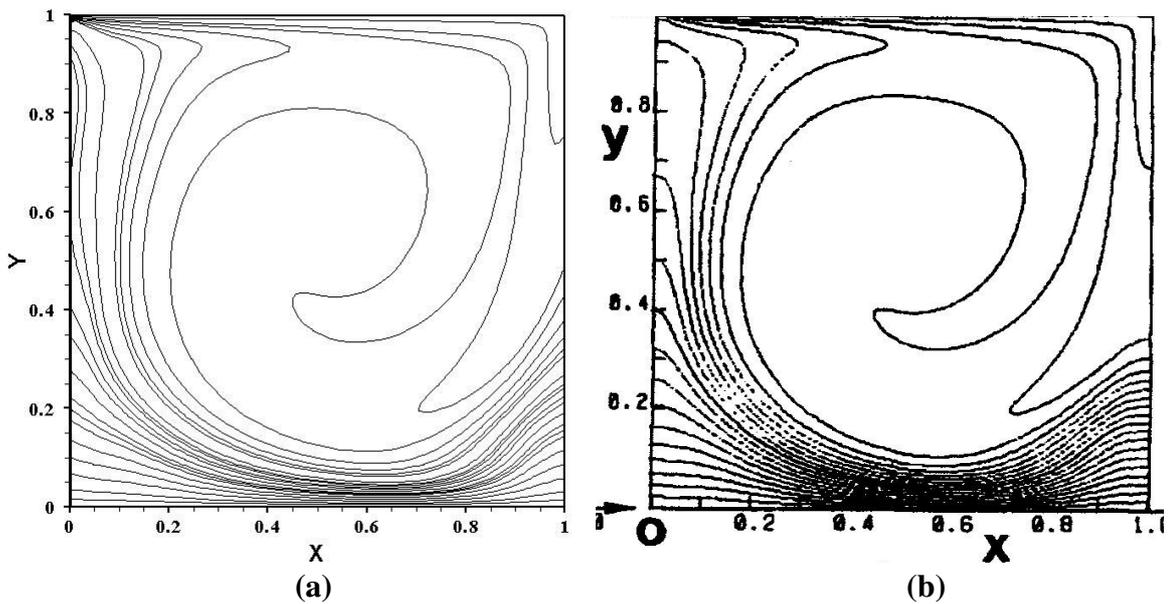


Figure IV-4 : Comparaison des isothermes pour $Re=10^3$, $Gr=10^2$ ($Ri=0.0001$)
 (a) Présent travail (b) Résultat de R. Iwatsu, et al [2]

I.21 DISCUSSION DES RESULTATS

I.21.1 Profils de la vitesse

Les profils de vitesse au centre de la cavité pour différents nombre de Reynolds (5,70 et 200) et différents nombre de Grashof (122.5-1920000) sont présentés sur les figures IV-5 à IV-7

Pour que la convection forcée soit dominante, on a supposé que le débit dû aux effets mécaniques (paroi mobile) à gauche de la cavité est presque 30 fois le débit dû aux effets naturels (différence de températures) à droite de la cavité. Pour cela on a calculé les débits en basant sur les profils de vitesse au centre de la cavité, où la surface sous la courbe représente le débit :

- $Re = 5, Gr = 122.5 : Q_F = 0.08488, Q_N = 0.00281 \Rightarrow \frac{Q_F}{Q_N} = 30.20641$
- $Re = 70, Gr = 1519 : Q_F = 0.08591, Q_N = 0.00286 \Rightarrow \frac{Q_F}{Q_N} = 30.03846$
- $Re = 200, Gr = 5360 : Q_F = 0.09205, Q_N = 0.0298 \Rightarrow \frac{Q_F}{Q_N} = 30.88926$

Dans le cas où les deux débits sont de même ordre, le régime convectif est caractérisé par la convection mixte.

- $Re = 5, Gr = 250 : Q_F = 0.0432, Q_N = 0.03387 \Rightarrow \frac{Q_F}{Q_N} = 1.27541$
- $Re = 70, Gr = 4900 : Q_F = 0.06243, Q_N = 0.04282 \Rightarrow \frac{Q_F}{Q_N} = 1.45796$
- $Re = 200, Gr = 32000 : Q_F = 0.0385, Q_N = 0.05256 \Rightarrow \frac{Q_F}{Q_N} = 0.73249$

En fin lorsque la convection naturelle prédomine, on fait la même chose que pour la convection forcée, mais en inversant le rapport entre les débits. C'est-à-dire, le débit près de la paroi chaude est presque 30 fois le débit près de la paroi mobile.

- $Re = 5, Gr = 2750 : Q_F = 0.01731, Q_N = 0.52762 \Rightarrow \frac{Q_N}{Q_F} = 30.48065$
- $Re = 70, Gr = 235200 : Q_F = 0.00692, Q_N = 0.21422 \Rightarrow \frac{Q_N}{Q_F} = 30.95667$
- $Re = 200, Gr = 1920000 : Q_F = 0.00439, Q_N = 0.13316 \Rightarrow \frac{Q_N}{Q_F} = 30.33257$

Ou :

Q_F, Q_N débits adimensionnels de la convection forcée et naturelle respectivement.

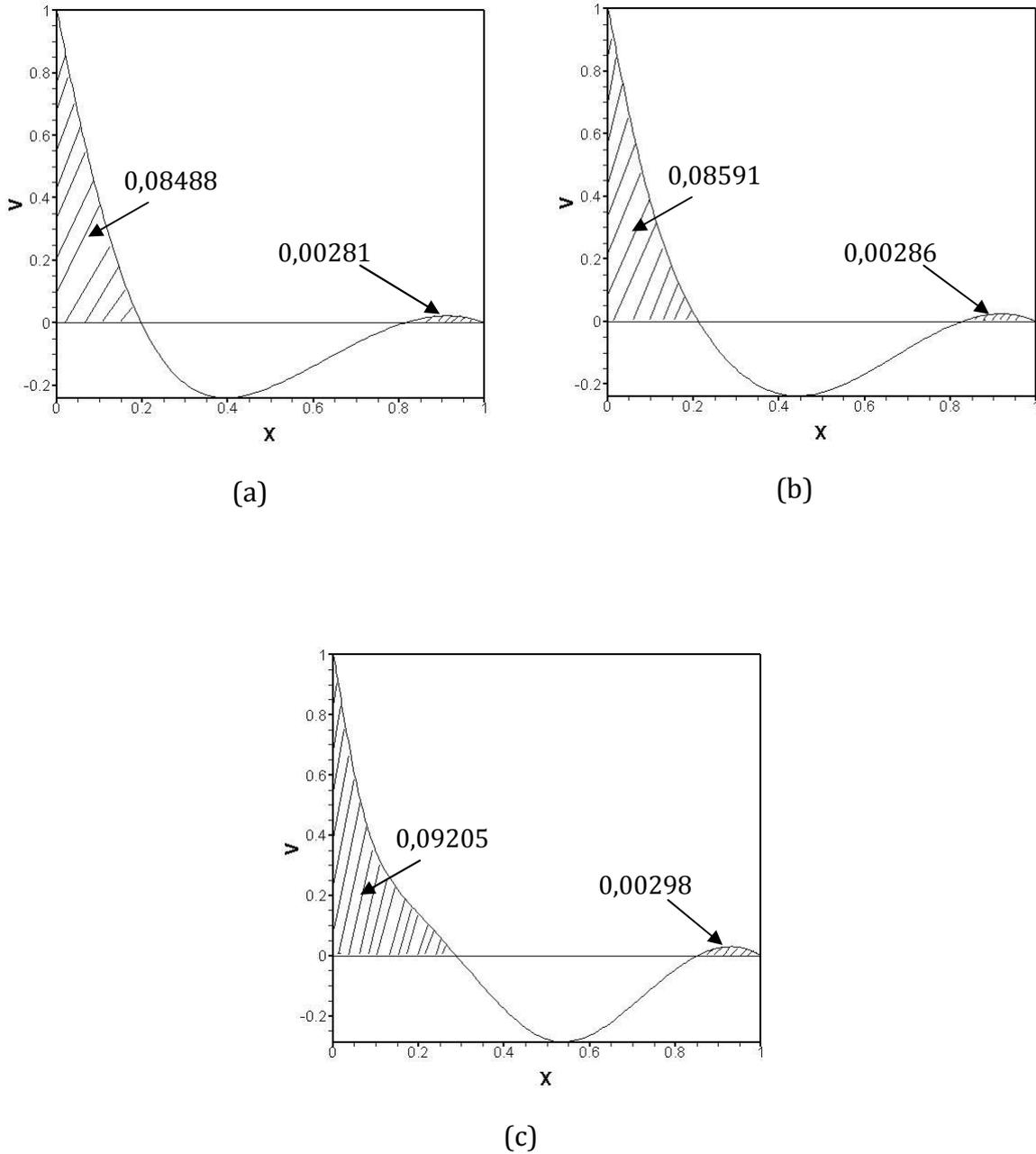
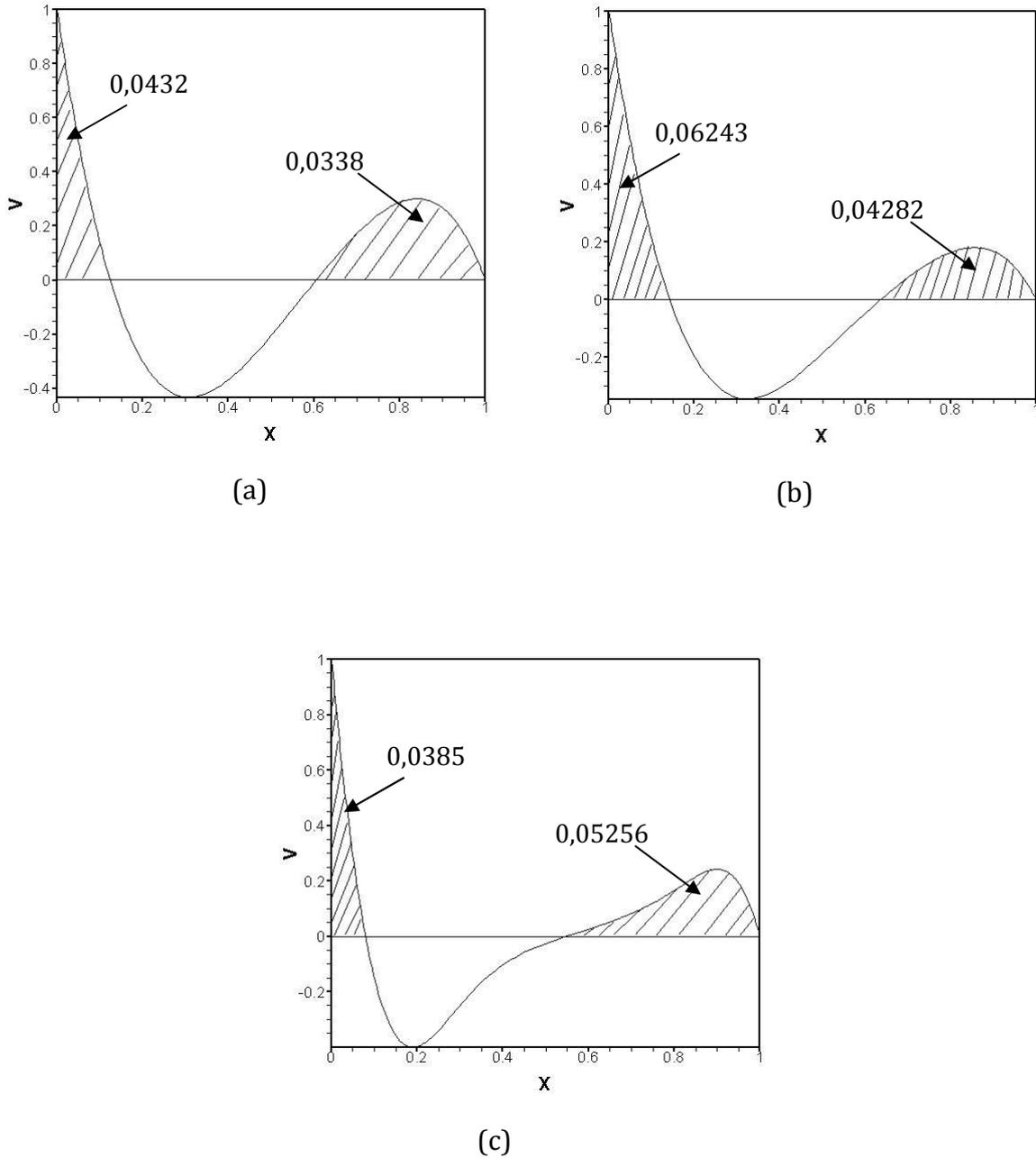


Figure IV-5 : Profil de la vitesse au niveau du centre de la cavité dans le cas de la convection forcée prédomine
 (a) $Re=5,Gr=122.5$; (b) $Re=70,Gr=1519$; (c) $Re=200,Gr=5360$



**Figure IV-6 : Profil de la vitesse au niveau du centre de la cavité
dans le cas de la convection mixte
(a) $Re=5, Gr=250$; (b) $Re=70, Gr=4900$; (c) $Re=200, Gr=32000$**

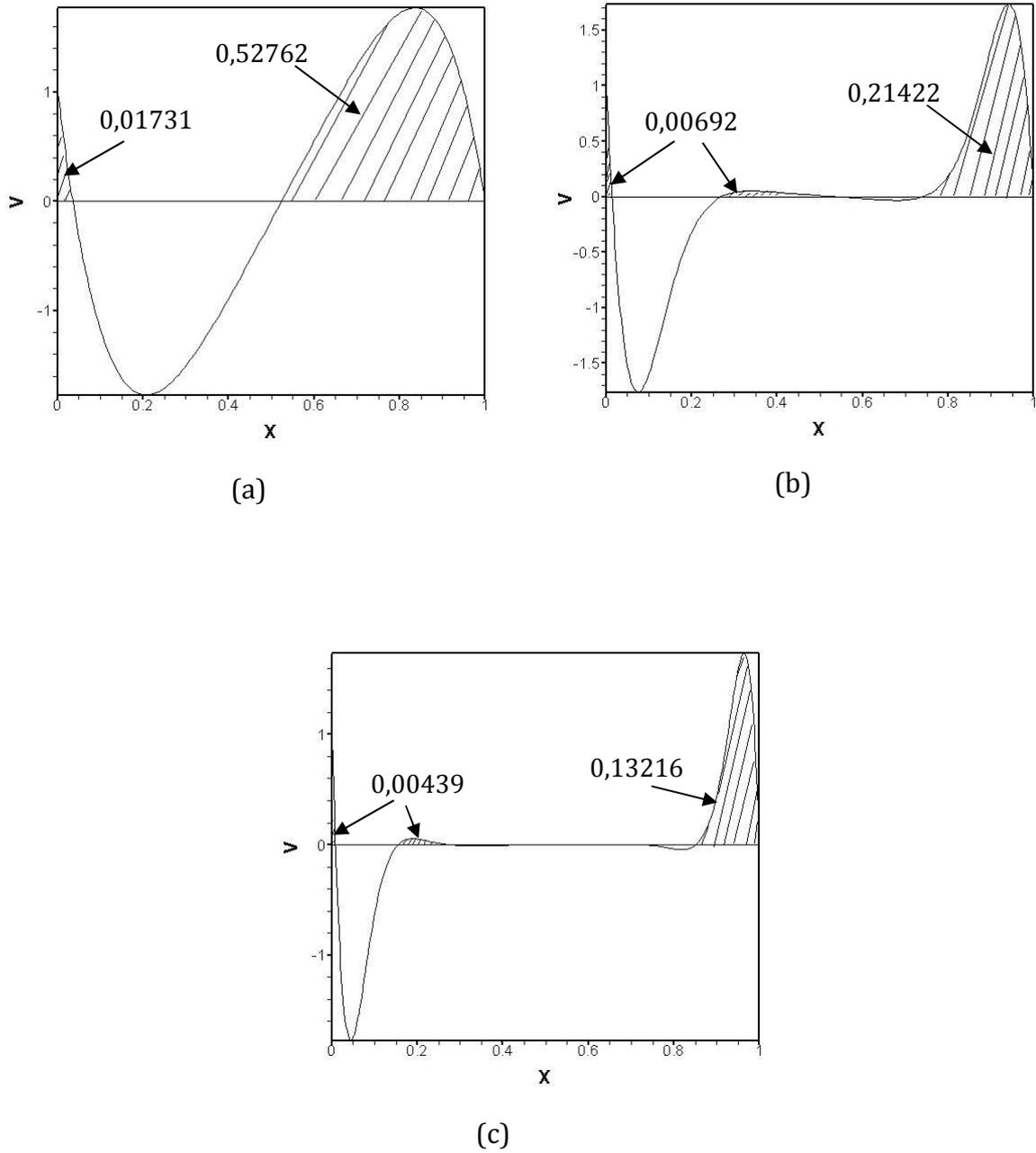


Figure IV-7 : Profil de la vitesse au niveau du centre de la cavité dans le cas de la convection naturelle prédomine
 (a) $Re=5, Gr=2750$; (b) $Re=70, Gr=235200$; (c) $Re=200, Gr=1920000$

I.21.2 Les limites de la convection mixte

La figure IV-8 représente la variation du Gr en fonction de Re sur une échelle logarithmique.

On remarque la présence de trois zones, une zone médiane (illustre la convection mixte) possède deux frontières limites. Au-delà de la limite supérieure, les effets gravitationnels augmentent (Gr augmente) par rapport aux effets d'inertie (Re). Cette zone est dominée par la convection naturelle. En fin, la zone inférieure du graphe est dominée par le régime de convection forcée.

On remarque aussi que pour un nombre de Reynolds entre 1-10, l'épaisseur de la zone médiane (convection mixte) est presque constante, au fur et à mesure que le nombre de Reynolds augmente, cette épaisseur devient plus large.

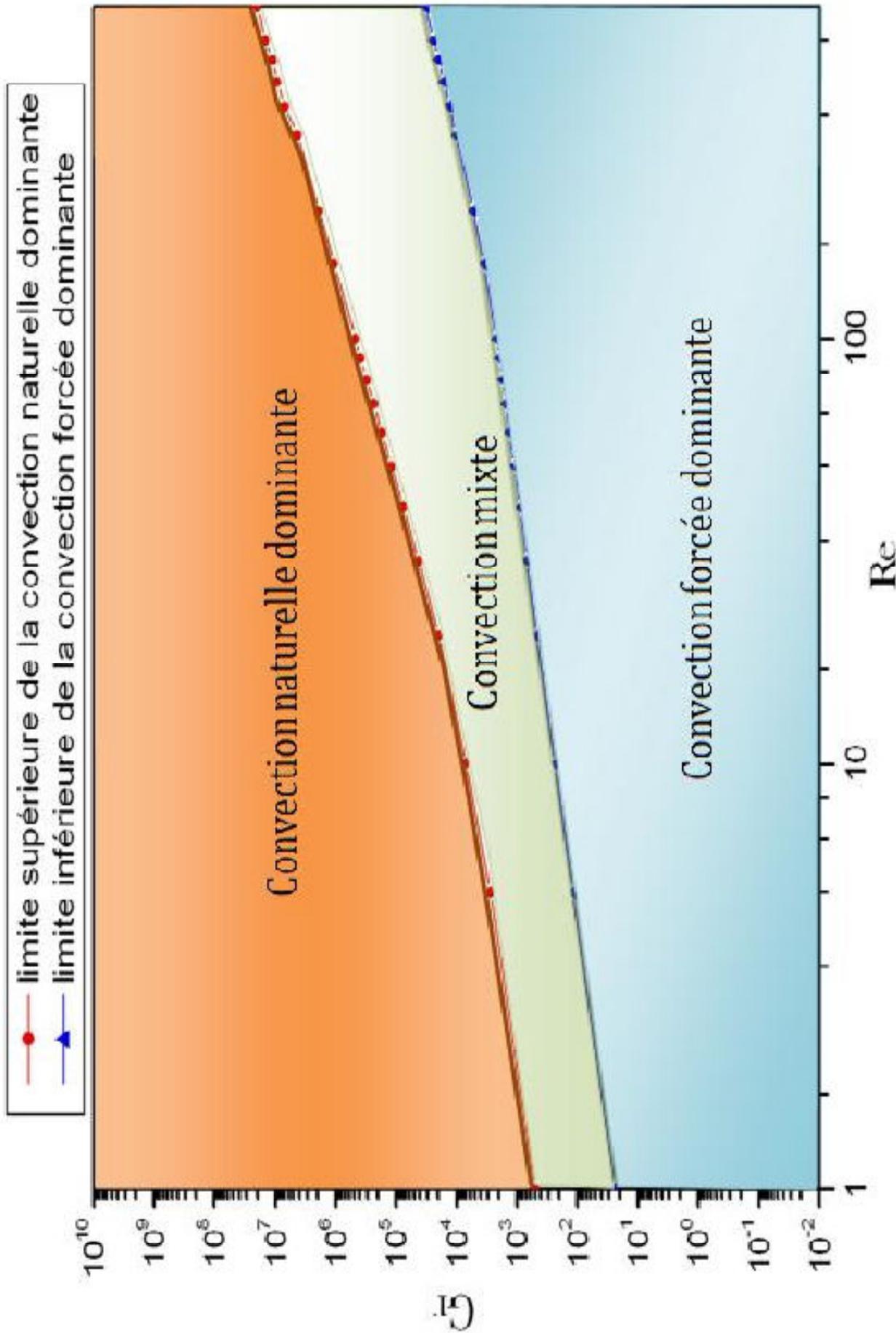


Figure IV-8 : la variation de (Gr) en fonction de (Re)

I.21.3 Convection forcée prédomine

❖ Fonctions de courant

Les isocourants sont présentés sur la figure IV-9 pour différents nombres de Reynolds (5, 70, et 200) et différents nombres de Grashof (122.5, 1519 et 5360) dans la zone de la convection forcée dominante.

Nous pouvons noter que, quelque soit le nombre de Reynolds, la structure de l'écoulement est qualitativement la même. En effet nous distinguons la présence des lignes de formes circulaires fermées qui révèlent la présence des zones de recirculation contrarotatives dans les deux parties gauche et droite de la cavité.

Le débit entraîné par la cellule près de la paroi mobile froide est plus important que celui par la cellule près de la paroi chaude; ceci est expliqué par la prédominance de la convection forcée.

❖ Isothermes

Les isothermes sont montrées par la figure IV-10 pour les mêmes nombres de Reynolds (5, 70, 200) et différents nombres de Grashof (122.5, 1519 et 5360).

Les lignes matérialisant les isothermes se concentrent parallèlement le long de la paroi chaude où les gradients sont importants et le transfert thermique dans cette partie est conductif.

Nous notons également que les lignes sont perpendiculaires aux parois horizontales et traduisent ainsi la condition d'adiabacité sur celles-ci. Le mouvement ascendant de la paroi latérale mobile froide entraîne vers le haut les couches de fluide adjacentes à la paroi par les forces visqueuses. Nous remarquons aussi que lorsque le nombre de Reynolds augmente la température froide règne dans la majorité de la partie gauche supérieure.

❖ Champ du vecteur vitesse

Le champ du vecteur vitesse est présenté par la figure IV-11.

On remarque que l'influence des forces visqueuses est notée près de la paroi mobile (gauche), tandis que les forces de flottabilités faibles entretenues par la paroi chaude se traduit par une zone presque morte (vitesse très faible). On note aussi que les forces de viscosité (convection forcée) sont plus importantes que les forces de flottabilité.

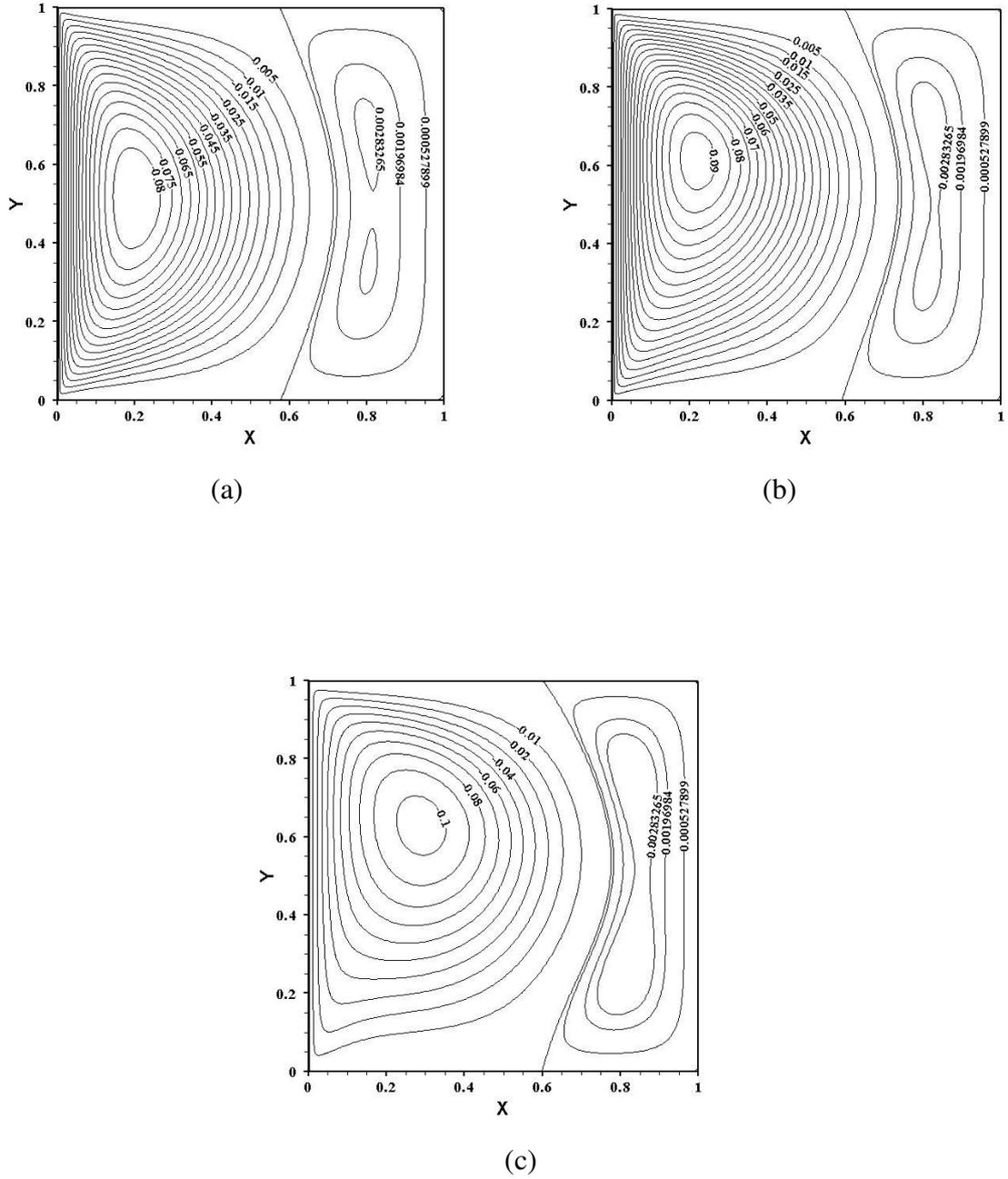


Figure IV-9 : Fonctions de courant dans le cas de la convection forcée prédomine

(a) $Re=5, Gr=122.5$; (b) $Re=70, Gr=1519$; (c) $Re=200, Gr=5360$

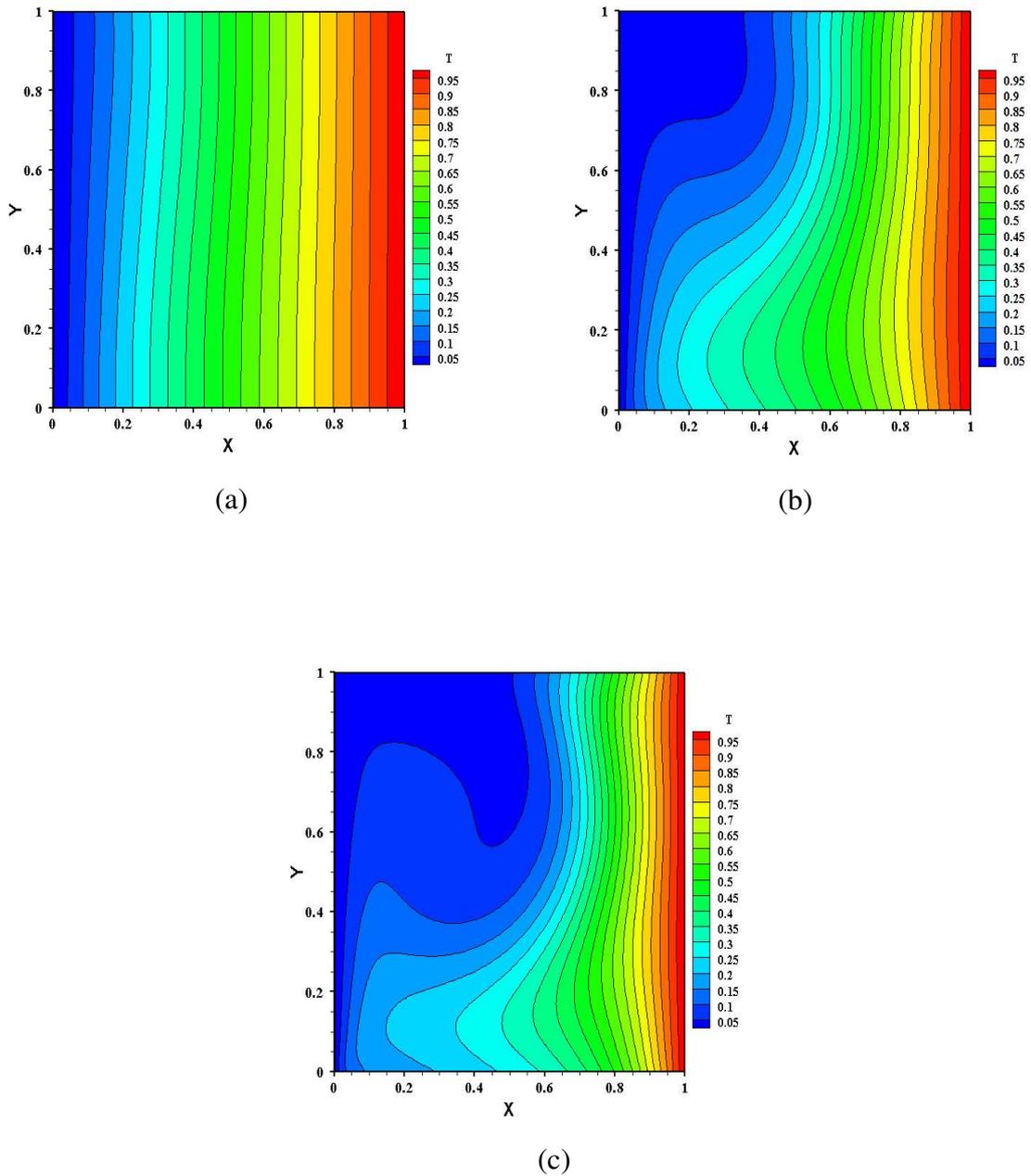


Figure IV-10 : Isothermes dans le cas de la convection
forcée prédomine
(a) $Re=5, Gr=122.5$; (b) $Re=70, Gr=1519$; (c) $Re=200, Gr=5360$

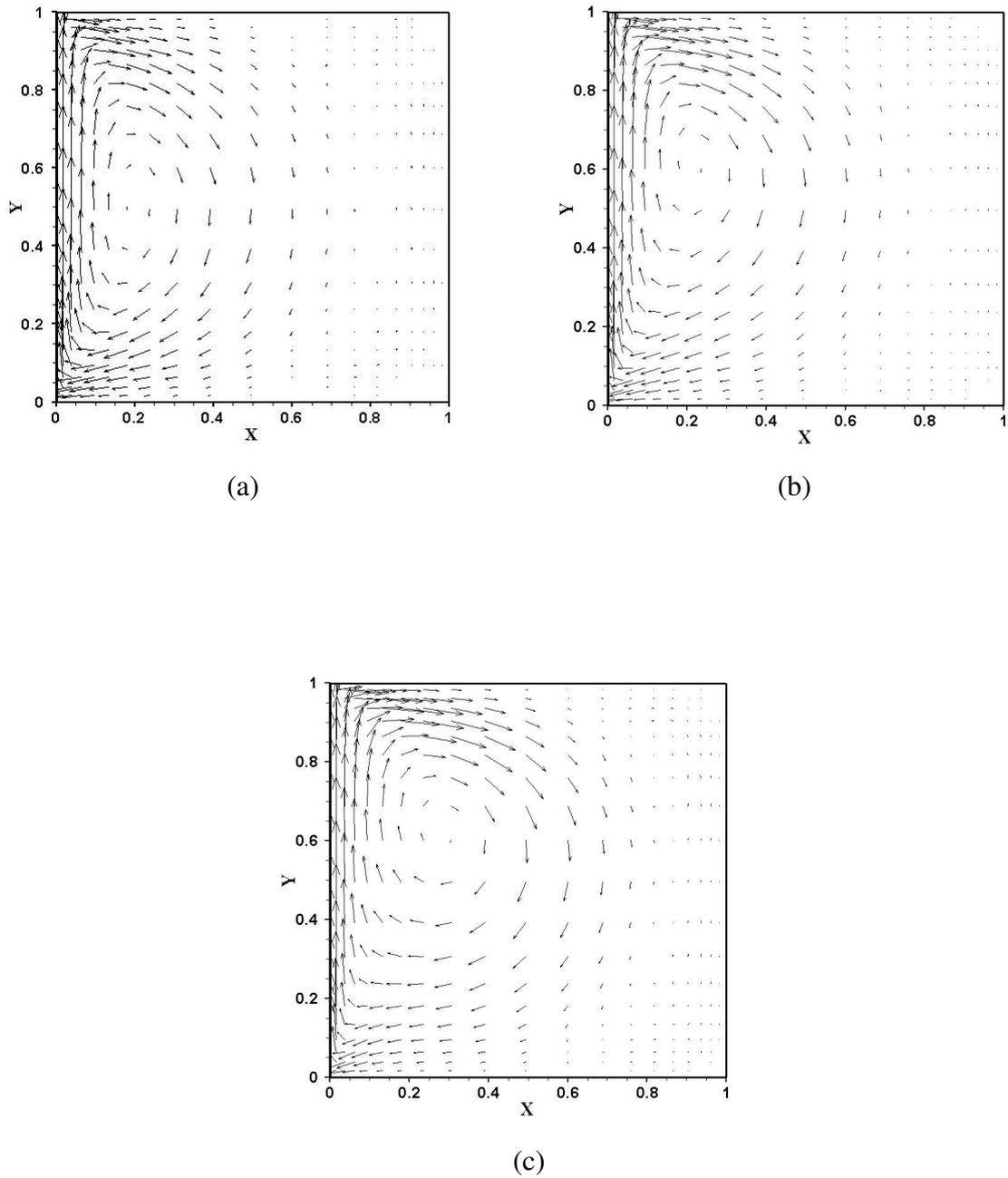


Figure IV-11 : Champ du vecteur vitesse dans le cas de la convection forcée prédomine

(a) $Re=5, Gr=122.5$; (b) $Re=70, Gr=1519$; (c) $Re=200, Gr=5360$

I.21.4 Convection mixte

❖ Fonctions de courant

Les isocourants sont présentés sur la figure IV-12 pour différents nombres de Reynolds (5, 70, et 200) et différents nombres de Grashof (250, 4900 et 32000).

Deux cellules contrarotatives des différentes formes et intensités mais comparables sont observées, l'une dans le sens antihoraire occupe les deux tiers jusqu'au trois quart de la cavité. L'autre de sens horaire occupe la zone gauche.

On remarque aussi que le débit entraîné par la cellule près de la paroi mobile froide et celui par la cellule près de la paroi chaude, ont le même ordre de grandeur.

❖ Isothermes

La figure IV-13 représente les isothermes pour les mêmes nombres de Reynolds et de Grashof.

On remarque que la déviation des lignes isothermes est significative près de deux parois (froide et chaude), ce qui explique l'effet combiné de deux régimes de la convection sur ces isothermes.

❖ Champ du vecteur vitesse

Ce champ est représenté dans la figure IV-14.

Les forces de flottabilité et les forces visqueuses ont le même effet sur les vecteurs vitesses de même ordre de grandeurs.

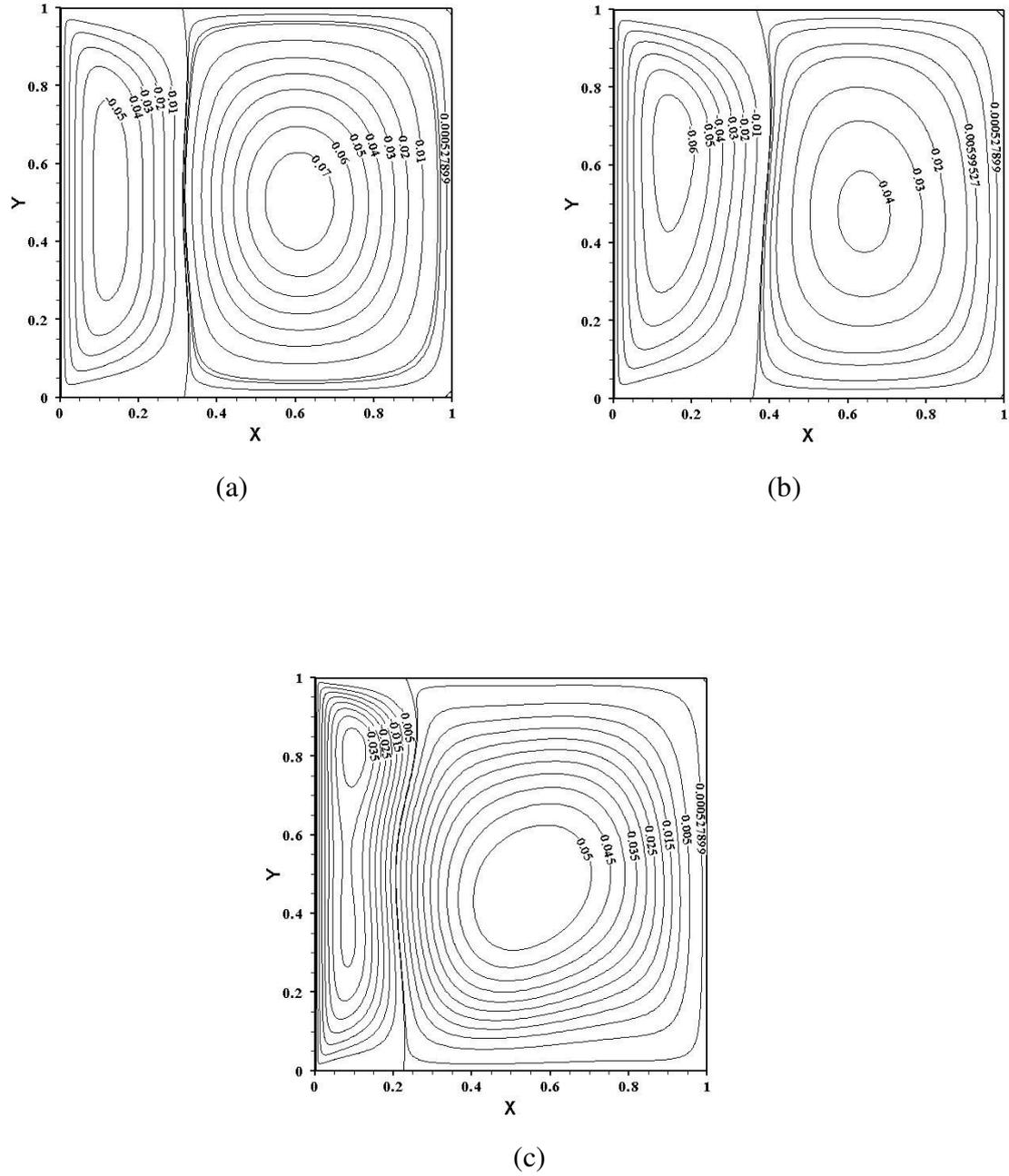


Figure IV-12 : Fonctions de courant dans le cas de la convection mixte

(a) $Re=5, Gr=250$; (b) $Re=70, Gr=4900$; (c) $Re=200, Gr=32000$

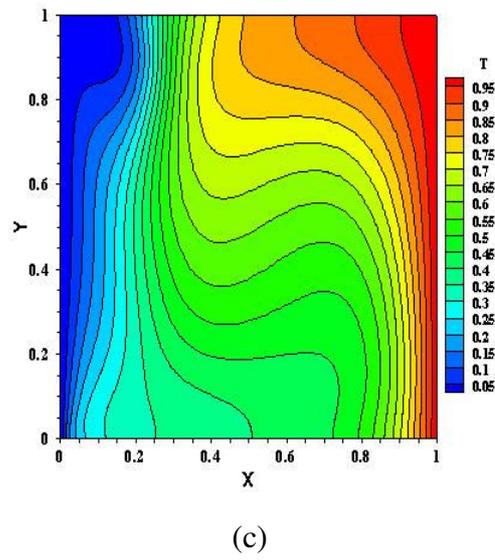
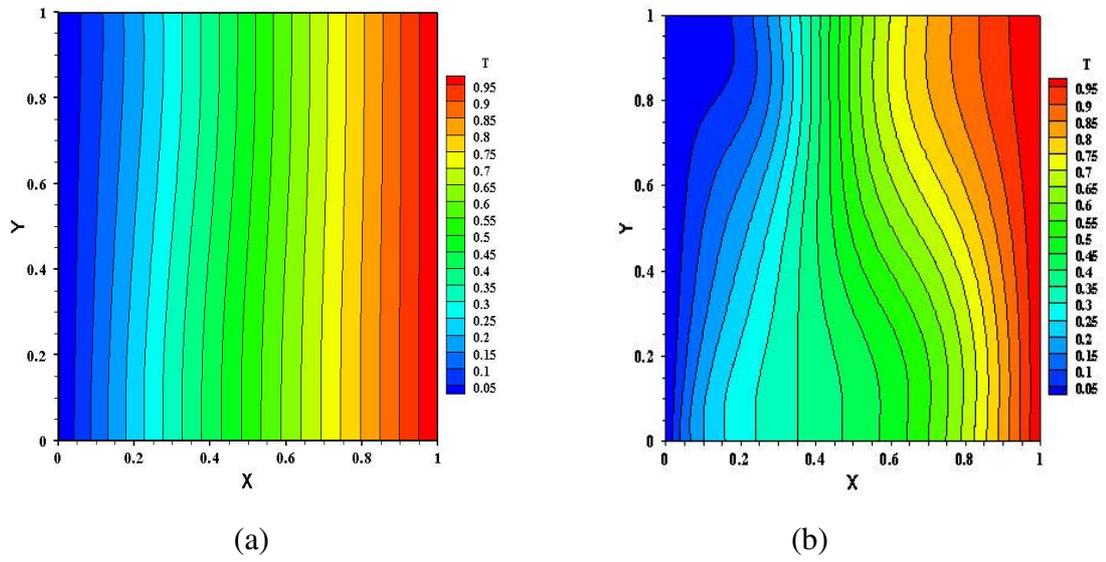


Figure IV-13 : Isothermes dans le cas de convection mixte
 (a) $Re=5, Gr=250$; (b) $Re=70, Gr=4900$; (c) $Re=200, Gr=32000$

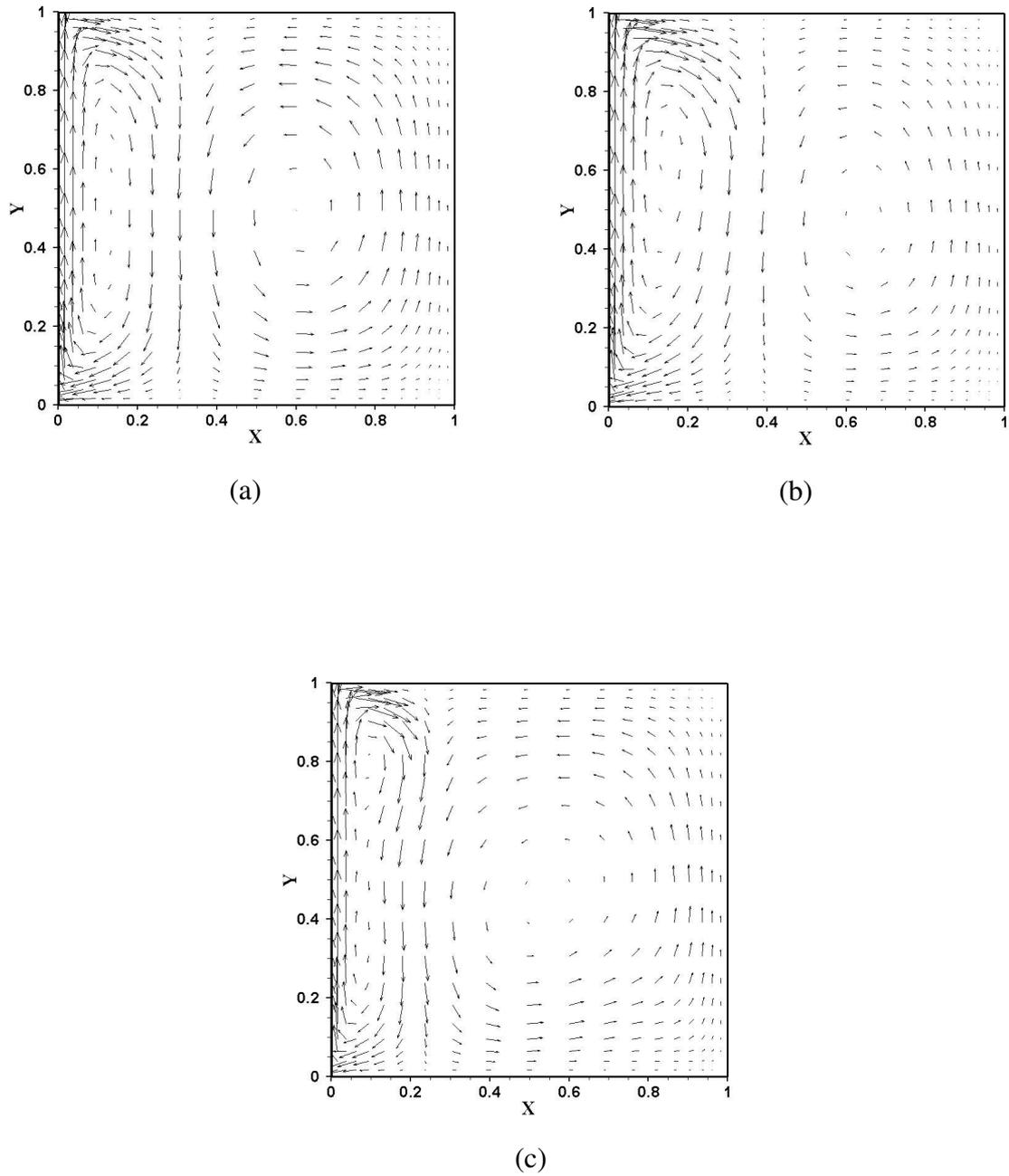


Figure IV-14 : Champ du vecteur vitesse dans le cas de la convection mixte
(a) $Re=5, Gr=250$; (b) $Re=70, Gr=4900$; (c) $Re=200, Gr=32000$

I.21.5 Convection naturelle prédomine

❖ Fonctions de courant

Les isocourants sont présentés sur la figure IV-15 pour les mêmes nombres de Reynolds et différents nombres de Grashof (2750, 235200 et 1920000).

Par comparaison avec le cas où la convection forcée prédomine, on remarque que cette fois la cellule intense se trouve dans la partie droite de la cavité et devient de plus en plus grande avec l'augmentation du nombre de Reynolds, d'où on remarque que pour $Re = 7, 200$ la cellule droite occupe presque toute la cavité et la cellule gauche se rétrécisse.

❖ Isothermes

Les isothermes sont montrées par la figure IV-16.

Lorsque le nombre de Reynolds augmente nous observons une stratification de la température dans la partie droite de la cavité. Dans ce cas, la convection naturelle domine la convection forcée et la chaleur se propage à partir de la paroi chaude vers la paroi froide de la cavité en commençant par la partie supérieure.

❖ Champ du vecteur vitesse

La figure IV-17 représente le champ du vecteur vitesse.

On note que les forces de flottabilité sont plus importantes que les forces de viscosité, donc la convection naturelle prédomine.

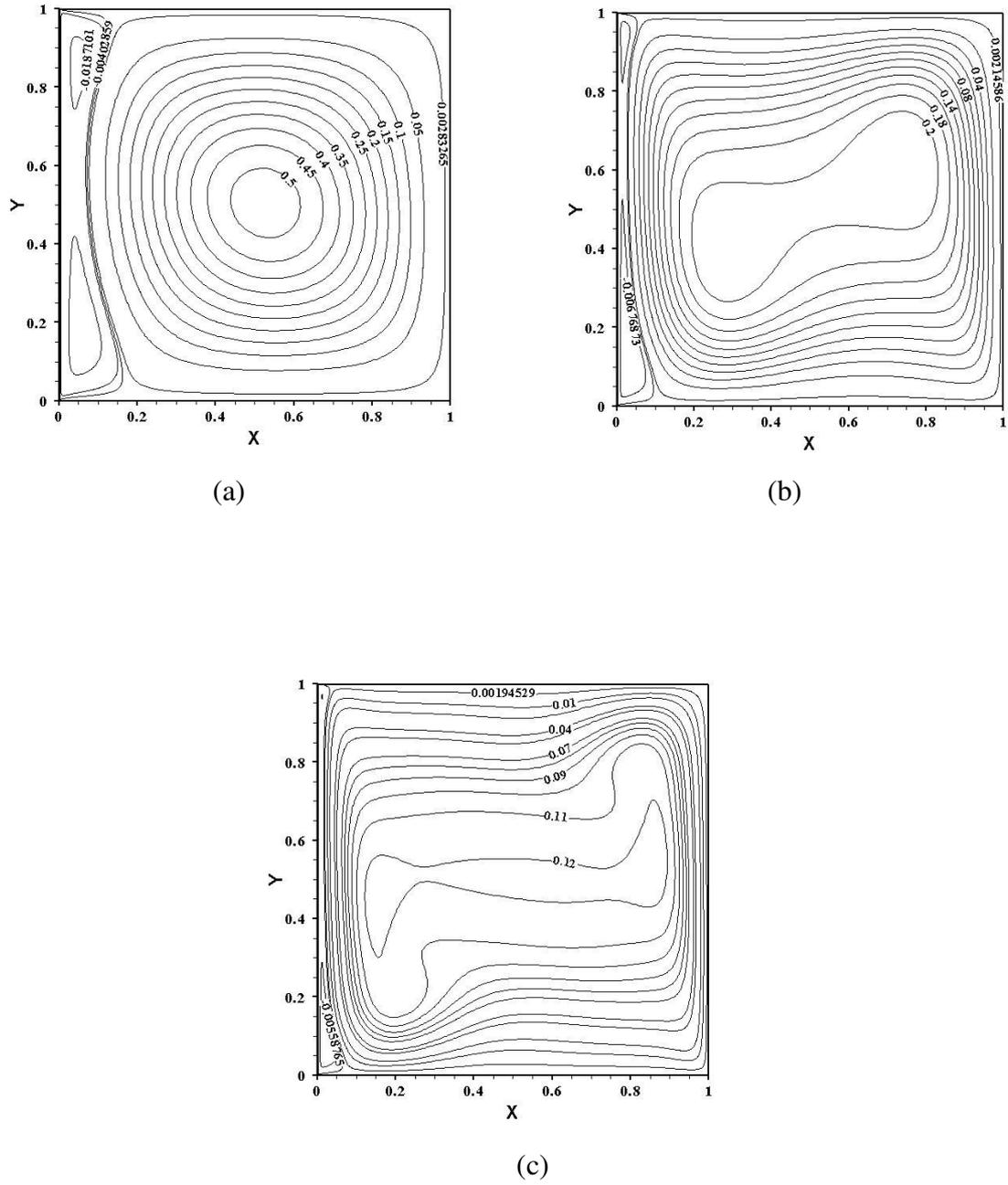


Figure IV-15 : Fonctions de courant dans le cas de la convection naturelle prédomine
 (a) $Re=5, Gr=2750$; (b) $Re=70, Gr=235200$; (c) $Re=200, Gr=1920000$

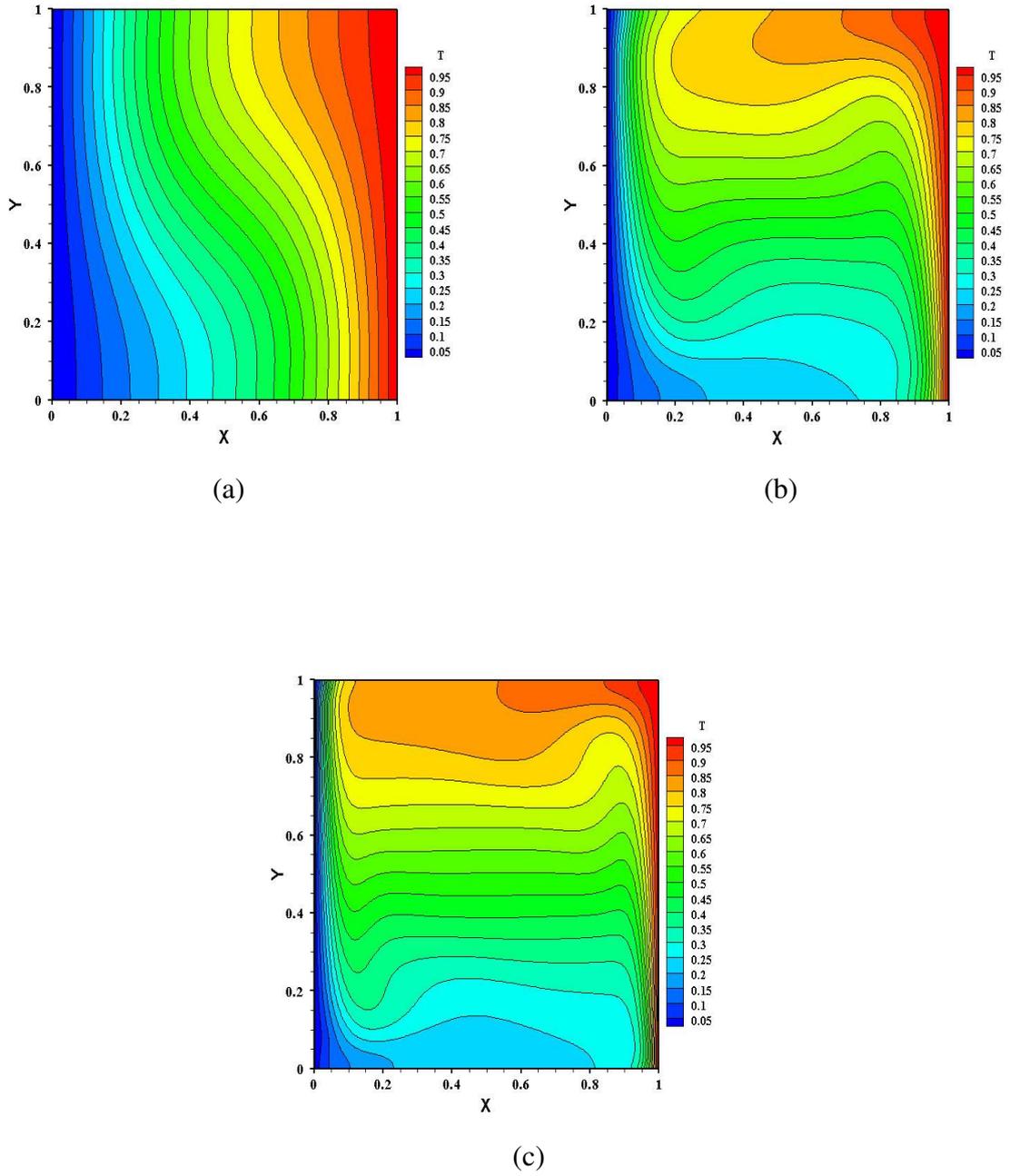


Figure IV-16 : Isothermes dans le cas de la convection naturelle prédomine
 (a) $Re=5, Gr=2750$; (b) $Re=70, Gr=235200$; (c) $Re=200, Gr=1920000$

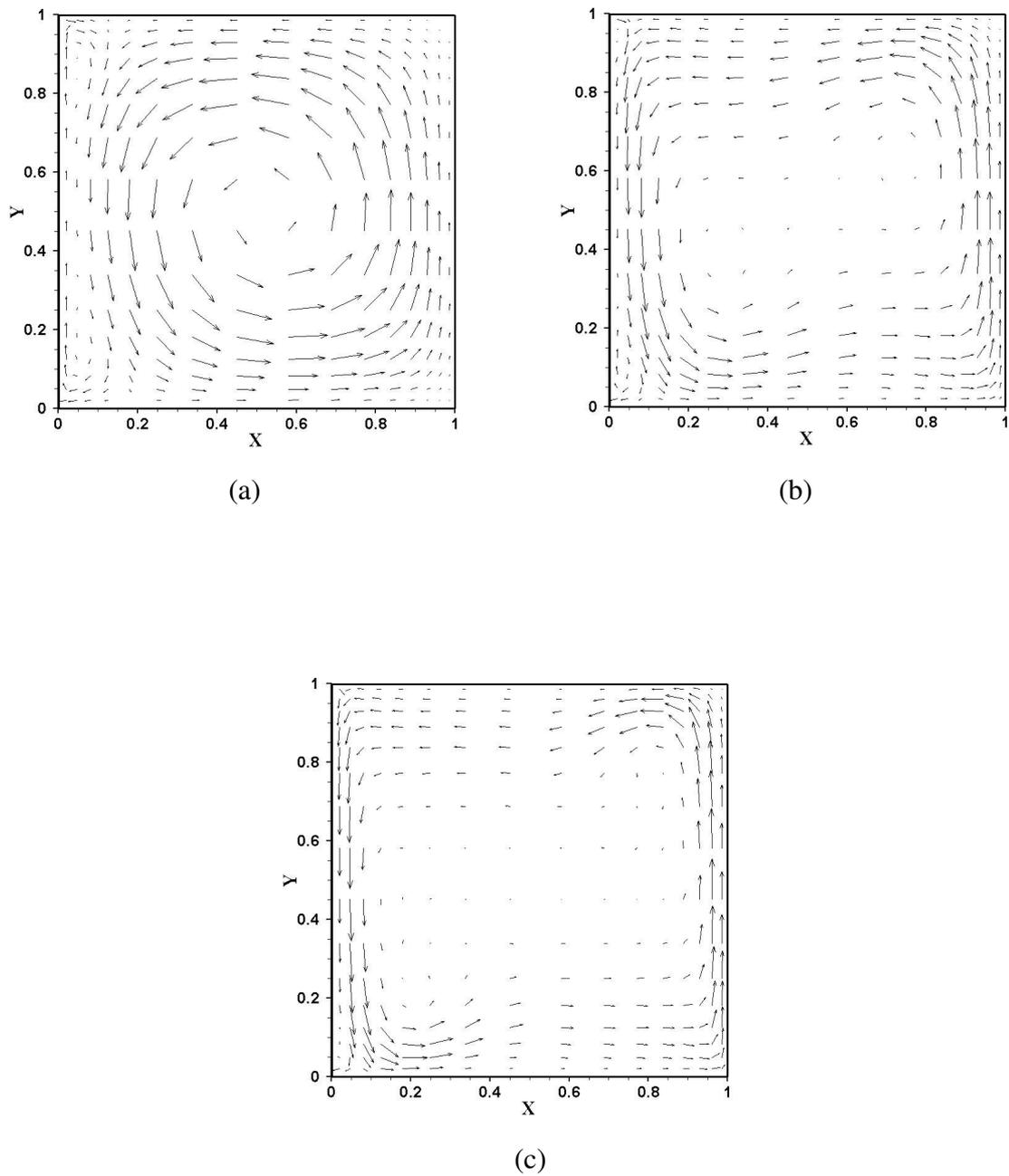


Figure IV-17 : Champ du vecteur vitesse dans le cas de la convection naturelle prédomine

(a) $Re=5, Gr=2750$; (b) $Re=70, Gr=235200$; (c) $Re=200, Gr=1920000$

I.21.6 Détermination des paramètres qui contrôlent la convection mixte

❖ Convection naturelle

La figure IV-18 représente la variation du nombre de Grashof critique en fonction du nombre de Reynolds critique nécessaire pour le passage d'un régime de convection mixte à un régime de convection naturelle. On remarque que cette courbe est une fonction de la forme :

$$Gr_{cri} = \lambda Re_{cri}^a$$

En utilisant le logiciel (origine) on trouve que

$$\lambda = 46.5791, \text{ et } a = 2.03202 \text{ alors : } Gr = 46.58 Re^2 Re^{0.03202} \Rightarrow \frac{Gr}{Re^2} = 46.58 Re^{0.03202}$$

et donc $Ri = 46.58 Re^{0.03202}$.

Ce résultat montre le bon accord entre nos calculs et la théorie, c'est-à-dire, que Ri est le paramètre décisif au passage d'un régime de convection mixte à un régime dominé par la convection naturelle. $Re^{0.03202}$ est très petit et ne peut pas changer beaucoup de chose dans les résultats.

Donc pour $Re = 600 \Rightarrow Re^{0.03202} = 1.23$

$$Re = 10 \Rightarrow Re^{0.03202} = 1.07$$

Si on suppose que dans l'intervalle $10 \leq Re \leq 600$, on peut prendre $Re^{0.03202}$ égale à une valeur moyenne constante.

$$\text{Donc : } Re^{0.03202} = \frac{1.23+1.07}{2} = 1.15.$$

Finalement, on trouve $Ri = 54$. Ce qui entraîne que la convection naturelle est dominante pour $Ri \geq 54$.

$$\frac{Gr}{Re^2} > 54 \Rightarrow \text{Convection naturelle prédomine (voir la figure IV-19).}$$

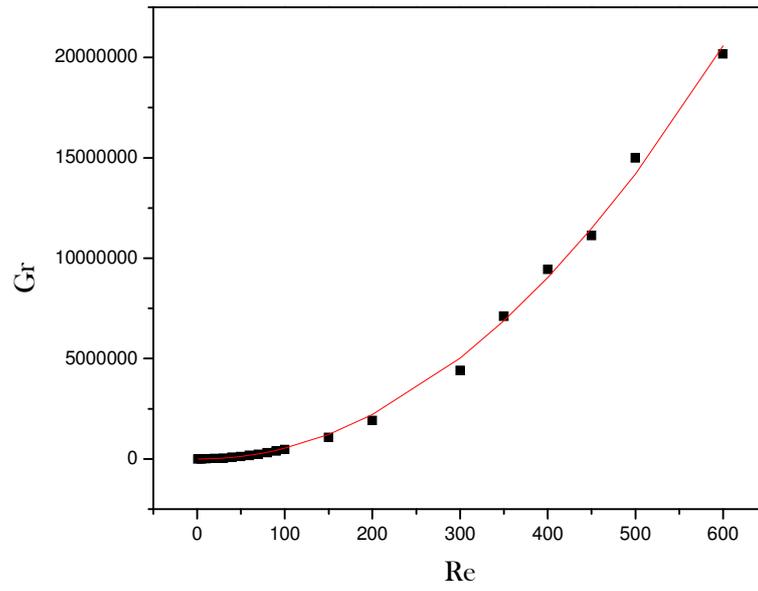


Figure IV-18 : La variation du nombre de Grashof en fonction du nombre de Reynolds

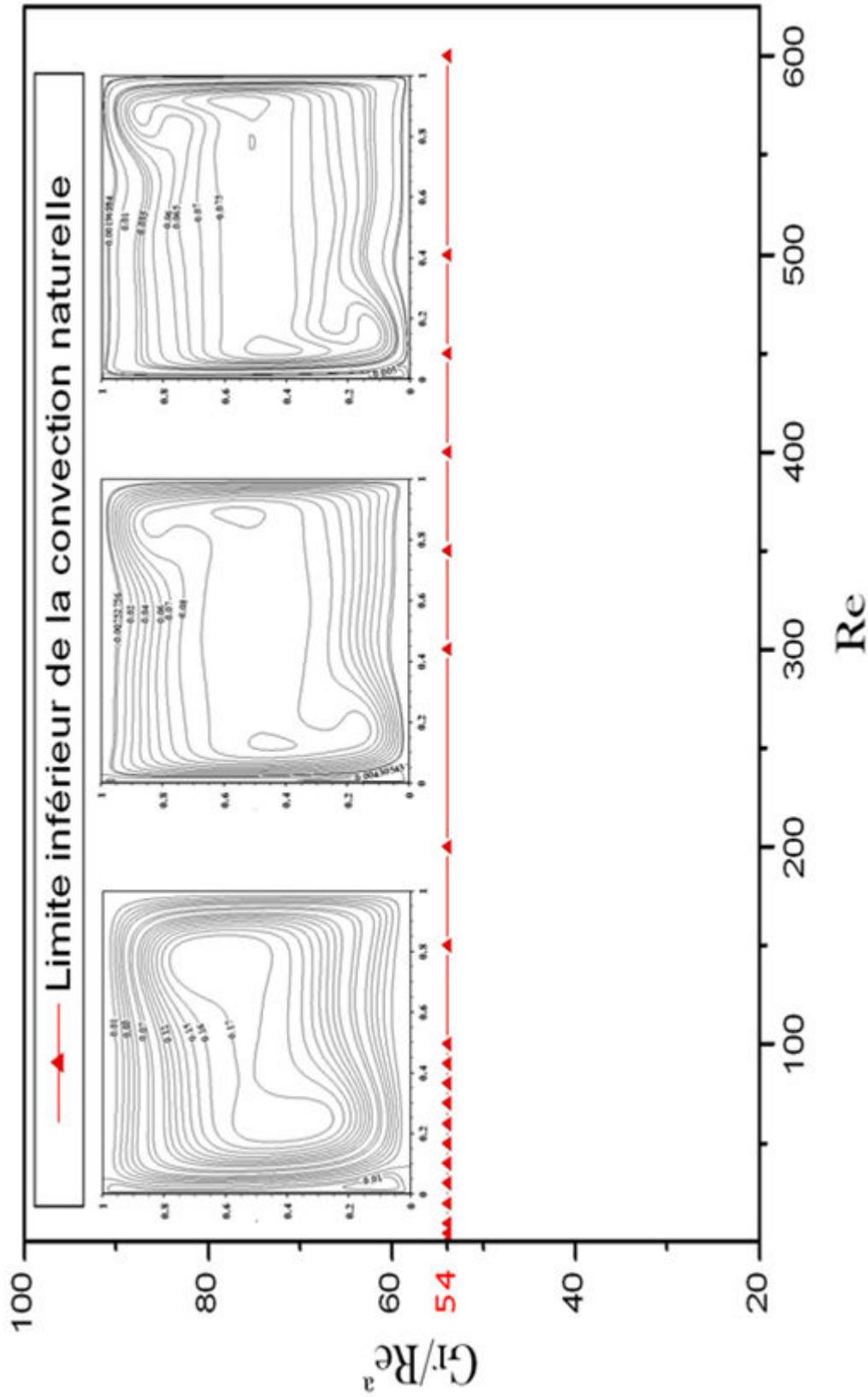


Figure IV-19 : La limite inférieure de la convection naturelle

❖ Convection forcée

La figure IV-20 montre la variation du paramètre adimensionnel $\frac{Gr}{Re^a}$ en fonction du nombre de Reynolds. On distingue deux parties remarquables.

- La première partie est presque une ligne horizontale allant de $Re \approx 0$ jusqu'au $Re = 100$. Cette courbe est représentée par la fonction $Gr = \lambda Re^a$. La solution de cette fonction donne $\lambda = 27.00949$ et $a = 0.95143$. Donc le paramètre qui contrôle la convection forcée est $\frac{Gr}{Re^{(1-0.049)}} = \frac{Gr}{Re} Re^{0.049}$; ainsi, au dessous de la valeur

$\lambda = 27.00949$, La convection forcée prédomine.

$Re \leq 100 : \frac{Gr}{Re} \leq 27.00949 \Rightarrow$ convection forcée prédomine (voir figure IV-23)

- Le deuxième partie est aussi presque une droite qui augmente linéairement avec Re pour $100 \leq Re \leq 600$. On trouve la même fonction mais :

$\lambda = 0.58818$ et $a = 1.71046$. Donc le paramètre qui contrôle la convection forcée est $\frac{Gr}{Re^{1.71046}}$, ainsi ; au dessous de la valeur $\lambda = 0.58818$, la convection forcée prédomine (voir figure IV-24).

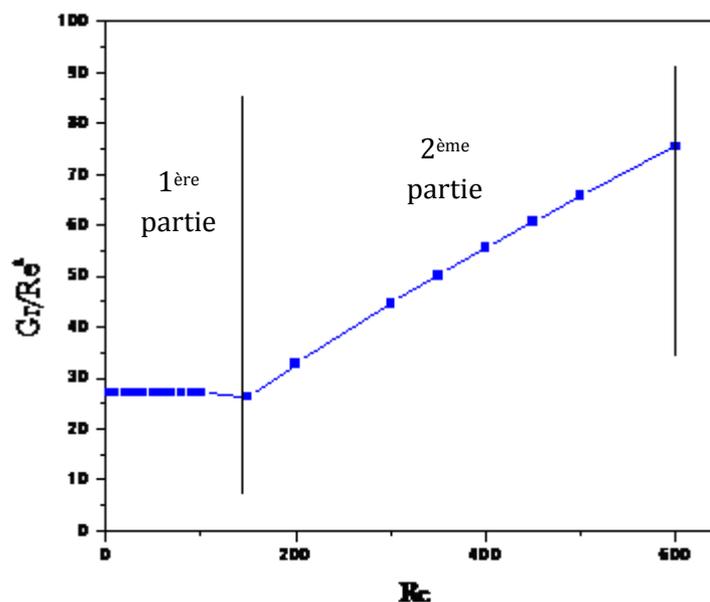


Figure IV-20 : La variation du nombre de Grashof en fonction du nombre de Reynolds

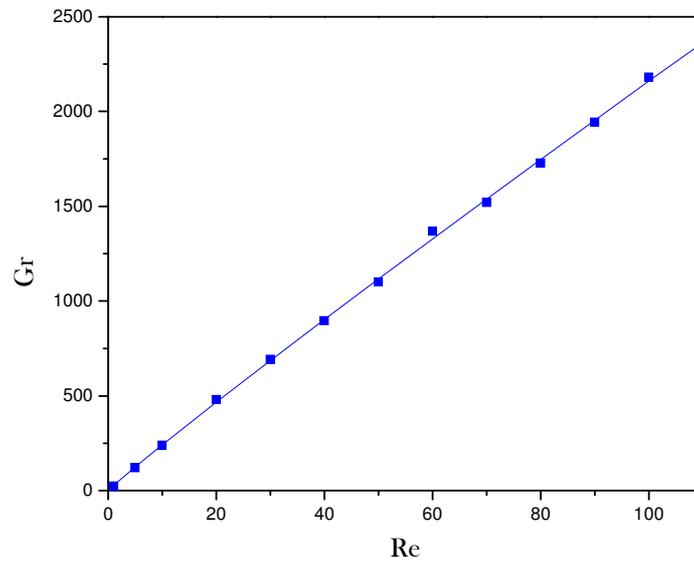


Figure IV-21 : La variation du nombre de Grashof en fonction du nombre de Reynolds pour $Re \leq 100$

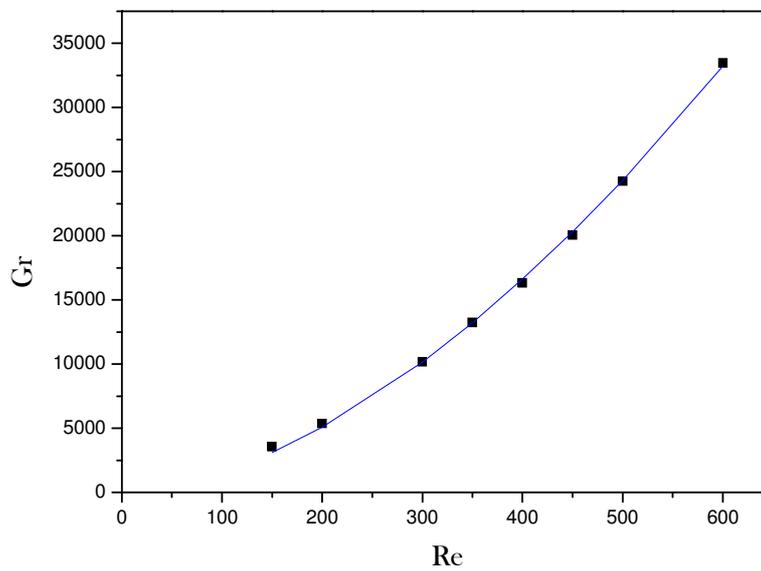


Figure IV-22 : La variation de nombre du Grashof en fonction du nombre de Reynolds pour $Re > 100$

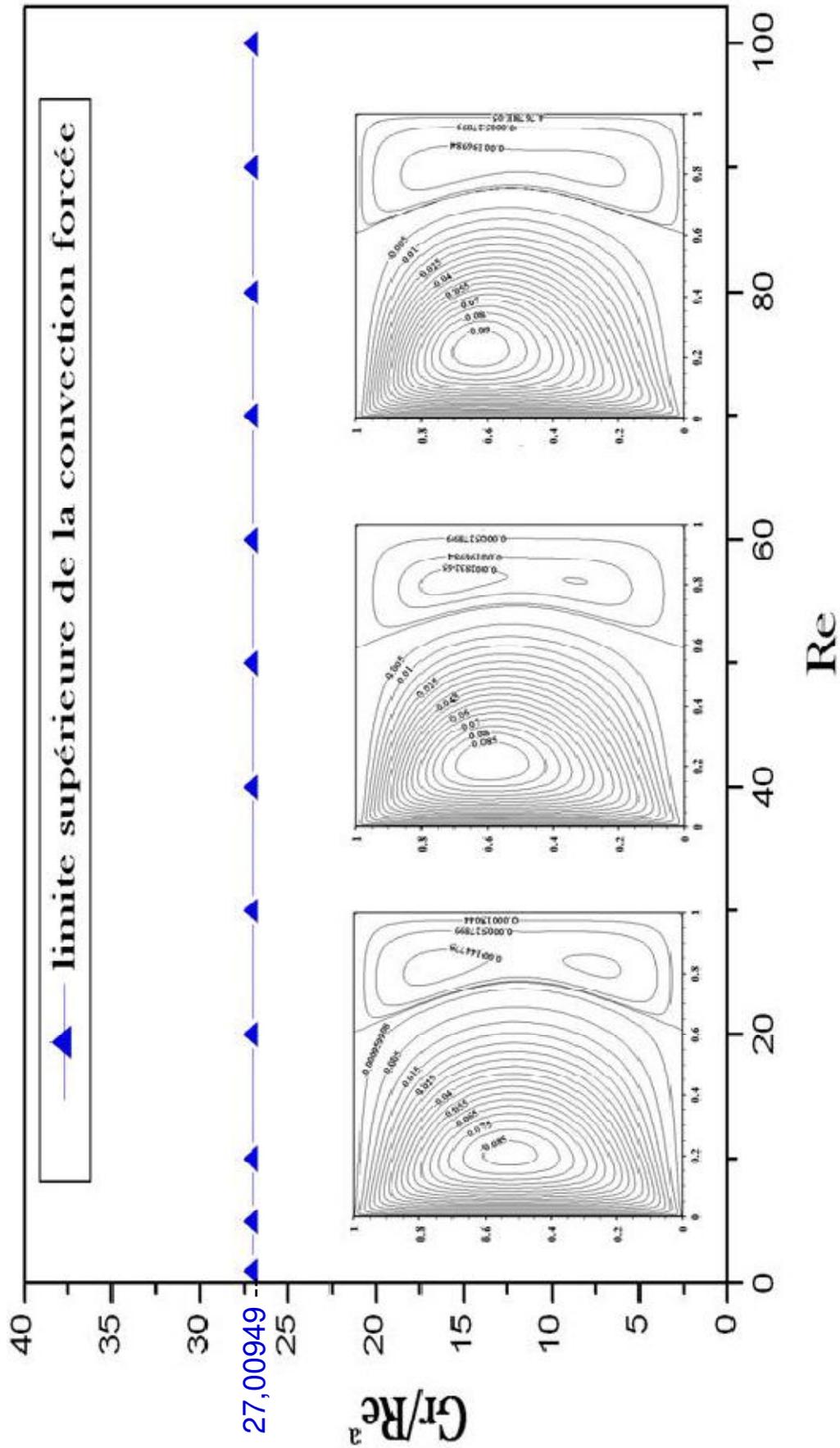


Figure IV-23 : La limite supérieure de la convection forcée pour $Re \leq 100$

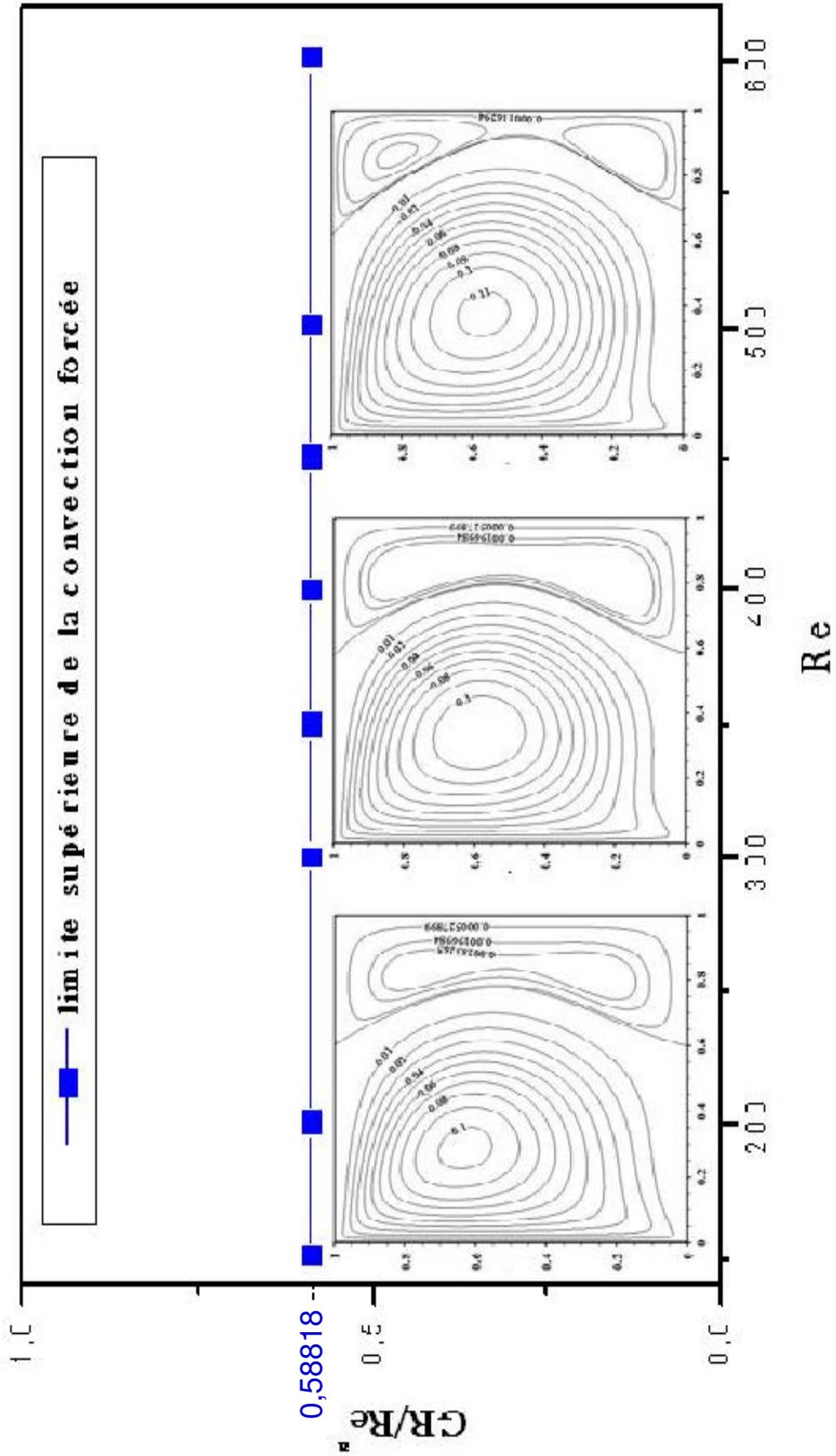


Figure IV-24 : La limite supérieure de la convection forcée pour $Re > 100$

CONCLUSION GENERALE

L'étude présentée dans ce mémoire porte sur la recherche d'un critère de similitude pour la convection mixte dans une cavité carrée. La paroi verticale gauche de la cavité est mobile et soumise à une température froide, tandis que la paroi droite est considérée chaude. Les parois horizontales sont supposées adiabatiques.

En se basant sur la méthode des volumes finis pour discrétiser les équations gouvernant ce phénomène, on a pu déterminer des paramètres qui caractérisent la convection mixte : le premier paramètre égale à λ_{\min} au dessous de laquelle la convection forcée prédomine et le deuxième paramètre égale à λ_{\max} au dessus de laquelle la convection naturelle prédomine. Pour plus de clarté, nous avons présenté pour chaque mode de convection le bilan des débits, les isothermes et les isocourants, ainsi que le champ vecteur vitesse pour trois valeurs du nombre de Reynolds.

Les résultats obtenus montrent que quelque soit la valeur du nombre de Reynolds dans les trois régions (régions où la convection forcée prédomine, la convection mixte et la convection naturelle prédominent) la structure de l'écoulement est qualitativement la même (écoulement multicellulaire). La différence entre ces trois cas est l'intensité et la taille des cellules et leurs situations. D'où la cellule intense occupe la partie gauche de la cavité (presque le deux tiers de la cavité) lorsque la convection forcée prédomine, alors que lorsque la convection naturelle prédomine, la cellule intense occupe la partie droite de la cavité (paroi chaude).

Finalement, nous avons trouvé que le paramètre qui précise la convection naturelle est presque égale au nombre de Richardson et pour la convection forcée c'est $\left(\frac{Gr}{Re}\right)$ pour Re inférieur ou égale à 100 et $\left(\frac{Gr}{Re^{1.71046}}\right)$ pour Re supérieur à 100.

ANNEXE

Avant d'orienter notre étude vers la détermination des paramètres caractérisant le régime convectif, nous avons essayé plusieurs tentatives d'adimensionner les équations de Navier Stocks d'énergie dans le but de trouver un paramètre représentatif de la convection mixte directement dans les équations. Mais malheureusement, nous n'avons pas réussi.

EQUATIONS ADIMENSIONNELLES

De façon à rendre les équations régissant le phénomène de l'écoulement adimensionnelles, elles seront transformées par les relations suivantes :

$$X = \frac{x}{v/U_0} \quad , \quad Y = \frac{y}{v/U_0} \quad , \quad U = \frac{u}{U_0} \quad , \quad V = \frac{v}{U_0} \quad , \quad \tau = t \frac{U_0}{v/U_0} \quad , \quad P = \frac{P}{\rho U_0^2} \quad , \quad \theta = \frac{(T-T_f)}{(T_c-T_f)}$$

Le nombre de Grashof (Gr), le nombre de Prandtl (Pr), et le nombre de Reynolds (Re) sont définis comme suit:

$$Re = \frac{U_0 L}{\nu} \quad , \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad , \quad Gr = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu^2}$$

En introduisant les grandeurs sans dimensions dans les équations dimensionnelles (cités dans le chapitre II), on obtient le modèle mathématique adimensionnel suivant :

❖ Equation de continuité

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0$$

❖ Equations de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] + \frac{Gr}{Re^3} \theta$$

❖ Equation de conservation de l'énergie

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \right]$$

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] K. Torrance, R. Davis, K. Eike, P. Gill, D. Gutman, A. Hsui, S. Lyons, H. Zien, Cavity flows driven by buoyancy and shear, *J. Fluid Mech, Part 2*, pp.221-231,1972.
- [2] R. Iwatsu, J. M. Hyun, K. Kuwahara, Mixed convection in driven cavity with a stable vertical temperature gradient, *Int. J. Heat. Mass Transfer*, Vol 36, N° 6, pp.1601-1608, 1993.
- [3] A. Raji, M. Hasnaoui, Corrélations en convection mixte dans des cavités ventilées, *Rev. Gen. Therm.* 37, pp. 874-884, 1998.
- [4] D. Angirasa, Mixed convection in vented enclosure with an isothermal vertical surface, *Fluid. Dynamics Research* 26, pp.219-233, 2000
- [5] O. Aydin, W. J. Yang, Mixed convection in cavities with a locally heated lower wall and moving sidewalls, *Numerical Heat Transfer, Part A*, 37, pp.695-710, 2000
- [6] T. H. Hsu, S. G. Wang, Mixed convection of micropolar fluids in a cavity, *Int. J. Heat. Mass Transfer*, Vol 43, Issue 9, pp.1563-1572, 2000.
- [7] M. Najam, M. El Alami, M. Hasnaoui, A. Amahmid, Etude numérique de la convection mixte dans une cavité en forme de T soumise à un flux de chaleur constant et ventilée par le bas à l'aide d'un jet d'air vertical, *C. R. Mécanique* 330, pp.461-467, 2002.
- [8] H. F. Oztop, I. Dagtekin, Mixed convection in two sided lid driven differentially heated square cavity, *Int. J. Heat. Mass Transfer* 47, pp.1761-1769, 2004.
- [9] M. A. R. Sharif, Laminar mixed convection in shallow inclined driven cavities with hot moving lid on top and cooled from bottom, *Applied Thermal Engineering* 27, pp.1036-1042, 2007.
- [10] M. Belhi, Etude de la convection mixte dans une cavité carrée munie de plusieurs entrées, Mémoire de magister. Département De Génie Mécanique, Université Mentouri Constantine, 2007.
- [11] Y. S. Prasad, M. K. Das, Hopf bifurcation in mixed convection flow inside a rectangular cavity, *Int. J. Heat. Mass Transfer* 50, pp.3583-3598, 2007.
- [12] M. M. Abdelkhalek, Mixed convection in a square cavity by a perturbation technique, *Computational Materials science* 42, pp.212-219, 2008.

- [13] N. O. Moraga, J. A. Riquelme, L. A. Jauriat, Unsteady conjugate water/ air mixed convection in square cavity, *Int. J. Heat. Mass Transfer* 52, pp.5512-5524, 2009.
- [14] T. Basak, S. Roy, P. K. Sharma, I. Pop, Analysis of mixed convection flows within a square cavity with linearly heated side walls, *Int. J. Heat. Mass Transfer* 52, pp.2224-2242, 2009.
- [15] E. schlichting, *Boundary-layer theory*, 7th Edition, Mac Graw-Hill, New-york, 1998
- [16] H.K. Versteeg, W. Malalasekera, *An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method*, Ed. Longman, England, 1995.
- [17] S.V.Patankar, *Numerical heat transfer and fluid flow*, Hemisphere, Washington DC, 1980.