

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI-CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

N° d'ordre :...../Doct/2010.

Série :...../GM/2010.

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de Doctorat en Sciences
en Génie Mécanique

Etude de la Stabilité Thermo-Convectif des Ecoulements Tournants Par
Application d'un Champ Magnétique

OPTION :

Energétique

Par : BORDJA Lyes

Soutenue le: 04 /07 /2010

Devant le jury composé de :

Président :	M ^r . Z.NEMOUCHI	Professeur	Université Mentouri - Constantine
Rapporteur :	M ^r . R. BESSAIH	Professeur	Université Mentouri - Constantine
Examineurs :	M ^r . S. BOUGHOUL	Professeur	Université Hadj Lakhdar - Batna
	M ^r . C. BOUGRIOU	Professeur	Université Hadj Lakhdar - Batna
	M ^r . S. BENISSAAD	M. Conférences	Université Mentouri - Constantine

Avant-propos

Je tiens tout d'abord à adresser mes sincères remerciements à Monsieur R. Bessaih, Professeur à l'Université Mentouri de Constantine, pour m'avoir confié cette étude et l'avoir dirigé.

Ma gratitude s'adresse également à Monsieur Z. Nemouchi, Professeur à l'Université Mentouri de Constantine, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. Je remercie vivement : Monsieur S. Benissaad, Maître de Conférences à l'Université Mentouri de Constantine, Monsieur S. Bougoul, Professeur à l'Université Hadj Lakhdar de Batna, Monsieur C. Bougriou, Professeur à l'Université Hadj Lakhdar de Batna, qui ont accepté d'examiner ce travail et faire partie de ce jury, malgré leurs nombreuses préoccupations.

Je tiens particulièrement à remercier Madame L. Tuckerman, Directeur de Recherche au Laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes (PMMH) à l'Université de Paris 6, pour m'avoir accueilli plusieurs fois dans son laboratoire. Son aide précieuse et ses remarques pertinentes m'ont été très utiles pour la publication de mes travaux.

Je m'exprime ma profonde reconnaissance à Monsieur E. Serre, Directeur de Recherche au CNRS, qui m'a accueilli dans son laboratoire M2P2 à l'Université d'Aix-Marseille III qui a mis à ma disposition tous les moyens nécessaires pour la finalisation de ma thèse.

Enfin un grand merci à tous mes collègues thésards qui ont partagé mon quotidien durant ces années de travail.

Resumé

La première partie de cette étude est consacrée à l'écoulement axisymétrique dans un cylindre de rapport d'aspect un, les disques supérieur et inférieur étant maintenus à différentes températures et tournant à la même vitesse angulaire dans des sens opposés. Dans ce problème combiné de Rayleigh-Bénard/von Kàrmàn, le gradient de température imposé est mesuré par le nombre de Rayleigh Ra et la vitesse angulaire par le nombre de Reynolds Re .

En augmentant Ra , la transition vers un état stationnaire se produit pour $Re < 95$, et vers des oscillations pour $Re > 95$. Les cycles limites apparaissent par une bifurcation de Hopf et disparaissent par une bifurcation globale, de période infinie. Les états stationnaires et les cycles limites sont reliés par l'intermédiaire d'une paire de bifurcations Sniper excepté très près du point de codimension-two de Takens-Bogdanov, où le scénario inclut les bifurcations globales. Des portraits de phase et des diagrammes détaillés de bifurcations sont présentés, ainsi que l'évolution de la principale partie du spectre, sur les gammes de paramètres $0 \leq Re \leq 120$ et $0 \leq Ra \leq 30000$. Dans la deuxième partie on présente les résultats numériques de l'écoulement tridimensionnel qui ont été obtenus pour étudier l'effet d'un champ magnétique externe superposé à l'écoulement dans un récipient cylindrique vertical avec un rapport d'aspect l' *height/radius* = 2. Le taux de rotation des disques étant fixé à $Re = 300$, on a étudié l'effet du gradient vertical de température, caractérisé par le nombre de Rayleigh, sur le seuil de la convection oscillatoire. Les paramètres physiques du fluide représentent un liquide électriquement conducteur, avec un nombre de Prandtl, $Pr = 0.015$, et un nombre de Reynolds magnétique $Re_m \ll 1$. On a étudié également l'effet d'un champ magnétique constant, parallèle au gradient de température et à la direction axiale, caractérisé par le nombre de Hartmann Ha . La réso-

lution numérique des équations entièrement non-linéaires a été effectuée en utilisant une méthode numérique des volumes finis d'ordre deux.

Abstract

Our first study is the axisymmetric flow in an aspect-ratio-one cylinder whose upper and lower bounding disks are maintained at different temperatures and rotate at equal and opposite velocities is investigated. In this combined Rayleigh-Bénard/Kàrmàn problem, the imposed temperature gradient is measured by the Rayleigh number Ra and the angular velocity by the Reynolds number Re . Although fluid motion is present as soon as $Re \neq 0$, a symmetry-breaking transition analogous to the onset of convection takes place at a finite Rayleigh number higher than that for $Re = 0$. For $Re < 95$, the transition is a pitchfork bifurcation to a pair of steady states, while for $Re > 95$, it is a bifurcation to a limit cycle. The steady states and limit cycle are connected via a pair of Sniper bifurcations except very near the Takens-Bogdanov codimension-two point, where the scenario includes global bifurcations. Detailed phase portraits and bifurcation diagrams are presented, as well as the evolution of the leading part of the spectrum, over the parameter ranges $0 \leq Re \leq 120$ and $0 \leq Ra \leq 30000$. In the second part, we present the numerical results of the three dimensional incompressible Navier Stokes equations that have been obtained to study the effect of an external magnetic field superimposed to the flow in a vertical cylindrical container of aspect ratio $\Gamma = \text{height}/\text{radius} = 2$, with exact counter-rotating lids and submitted to a vertical temperature gradient. We have fixed the rotation rate of the lids at $Re = 300$ and we have studied the effect of the vertical temperature gradient, characterized by the Rayleigh number, on the onset of oscillatory convection, and on the pattern flow. The physical parameters of the fluid represent an electrically conductive liquid, with low Prandtl number, $Pr = 0.015$ and in the limit of a small magnetic Reynolds number $R_m \ll 1$. We have studied also the effect of a constant magnetic field, parallel to the temperature gradient and to the axial direction, and characterized by the Hartman

number Ha . The numerical computations of the fully nonlinear time dependent equations have been performed using a finite volume numerical method of order two.

Notations

Lettres latines

U	: champ de vitesse (u_r, u_θ, u_z)
V	: champ de vitesse (v_r, v_θ, v_z)
A	: champ potentiel vecteur magnétique (A_r, A_θ, A_z)
B	: champ magnétique (B_r, B_θ, B_z)
B_0	: échelle caractéristique de l'intensité du champ B
E	: champ électrique (E_r, E_θ, E_z)
e_r	: vecteur unité radial du repère cylindrique
e_θ	: vecteur unité azimutal du repère cylindrique
e_z	: vecteur unité axial du repère cylindrique
E	: champ électrique (E_r, E_θ, E_z)
j	: champ de densité de courant électrique (j_r, j_θ, j_z)
F	: champ de force électromagnétique $(F_{MR}, F_{M\theta}, F_{MZ})$
f	: fréquence d'oscillation
r	: coordonnée radiale
z	: coordonnée axiale
J	: fonction de Bessel
T	: champ de température
T_0	: échelle caractéristique de l'intensité du champ T
P	: champ de pression
R	: rayon du cylindre
H	: hauteur du cylindre
t	: temps

Lettres grecques

Γ	: rapport d'aspect
θ	: coordonnée azimutale
Θ	: champ de température adimensionnelle
Ω	: vitesse de rotation
φ	: potentiel électrique
ψ	: fonction de courant
τ	: période d'oscillation
ϕ	: variable indépendante
σ	: partie réelle d'un complexe
ω	: partie imaginaire d'un complexe
ρ	: densité

Nombres adimensionnels

$Re = \Omega R^2 / \nu$: nombre de Reynolds
$Pr = \nu / \alpha$: nombre de Prandtl
$Ra = g\gamma\Delta TR^3 / \alpha\nu$: nombre de Rayleigh
$Ha = B_0 R \sqrt{\sigma / \mu}$: nombre de Hartmann
Re_m	: nombre de Reynolds magnétique

Remarque :

Il peut arriver parfois que certaines lettres aient été utilisées deux fois pour désigner des notions différentes. Ce choix a pour objet de se rapprocher des notations classiques et d'éviter d'introduire des lettres artificielles. Nous nous sommes efforcés de rendre le contexte suffisamment explicite pour qu'il n'y ait pas de confusion.

Table des matières

Avant-propos	i
Resumé	iii
Abstract	v
Notations	vii
Introduction générale	1
1 Écoulements en rotation et stabilité	5
1.1 Bifurcations, brisures de symétrie et transition à la turbulence	5
1.1.1 Bifurcation de Hopf	7
1.1.2 Bifurcation noeud-col	9
1.1.3 Bifurcation fourche	9
1.1.4 Comportements dynamiques au voisinage des bifurcations	10
1.1.5 Bifurcations homocline et hétérocline	10
1.2 Convection thermique en géométrie cylindrique	11
1.2.1 Déstabilisation de l'état conductif	11
1.2.2 Régimes convectifs	13
1.3 Ecoulement tourbillonnaire de von Kármán	16
1.3.1 Origines et travaux analytiques	16
1.3.2 Les Instabilités tridimensionnelles de l'écoulement de von Kármán	17
1.3.3 Magnétohydrodynamique et écoulements de von Kármán	20

2	Modélisation géométrique et mathématique de l'écoulement	23
2.1	Modélisation géométrique	23
2.1.1	Géométrie	23
2.1.2	Symétrie	24
2.2	Modélisation mathématique	26
2.2.1	Écoulement axisymétrique de von Kármán/Rayleigh Bénard, à $Pr = 1$, $\Gamma = 1$	26
2.2.2	Écoulement asymétrique de von Kármán/Rayleigh Bénard en présence d'un champ magnétique, à $Pr = 0.015$, $\Gamma = 2$	29
2.3	Conditions aux limites	32
3	Résolution numérique	37
3.1	Discrétisation	37
3.1.1	Discrétisation temporelle des équations	37
3.1.2	Discrétisation des termes convectifs et non linéaires	38
3.1.3	Discrétisation spatiale des équations	38
3.2	Détails de discrétisation	40
3.2.1	Equation de continuité	40
3.2.2	Equation de quantité de mouvement dans la direction radiale	41
3.2.3	Equation de quantité de mouvement dans la direction azimutale	43
3.2.4	Equation de quantité de mouvement dans la direction axiale	44
3.2.5	Equation d'énergie	46
3.2.6	Equation du potentiel électrique suivi par un champ magnétique axial	47
3.3	Discrétisation des conditions aux limites à l'axe	48
3.4	Obtention de l'équation de discrétisation de pression	49
3.4.1	Equation de pression	49
3.5	Solution du système discrétisé par la méthode de balayage	51
3.6	Algorithme de calcul SIMPLER	51
4	Résultats et discussion de la première partie	53
4.1	Validation du code	53

4.2	Écoulement axisymétrique de von Kàrmàn chauffé par le bas	58
4.2.1	Seuils de convection	58
4.2.2	Etats stationnaires de convection	61
4.2.3	Etats oscillatoires de convection	65
4.2.4	Diagramme de bifurcation	70
4.2.5	Valeurs propres et vecteurs propres	80
	Conclusion	91
5	Résultats et discussion de la deuxième partie	95
5.1	Validation du code	95
5.2	Écoulement de von Kàrmàn axisymétrique chauffé par le bas stabilisé par un champ magnétique azimuthal	96
5.2.1	Solution avec champ thermique ($Ha = 0$)	96
5.2.2	Solution avec champ magnétique ($Ha \neq 0$)	99
5.3	Écoulement de von Kàrmàn en 3D chauffé par le bas	100
5.4	Effet magnétique sur la bifurcation stationnaire	109
5.4.1	Analyse du courant induit	111
5.5	Effet magnétique sur la solution oscillatoire	113
5.5.1	Analyse énergétique	115
5.6	Seuils tridimensionnels en fonction du rapport d'aspect	117
	Conclusion	127
	Conclusion et perspectives	129
A	Valeurs propres et vecteurs propres	133

Table des figures

1.1	Schéma d'une bifurcation super-critique, d'une bifurcation sous-critique, et d'un scénario de transition super-critique vers le chaos spatio-temporel. R est le paramètre de contrôle, et A un paramètre d'ordre. Figure extraite de la thèse (Bottin, 1998).	6
1.2	Formation des rouleaux de Taylor , (a) Agrandissement des rouleaux de Taylor entre le cylindre intérieur et la surface nodale autour de $\Gamma = 3$. On voit clairement la paire des rouleaux contrarotatifs. (b) Apparition des rouleaux de Taylor entre le cylindre intérieur et la surface nodale. Photo extraite de la référence (Chandrasekhar, 1961).	7
1.3	Régime tridimensionnel oscillatoire dit (wavy spiral), $Re_0 = 500$, $Re_i = 375$, $\Gamma = 6$. (a) Iso-surface de la composante azimutale de la vitesse, $u_\theta = -1,67 \cdot 10^{-1}$, (b) Iso-surfaces de la composante axiale de la vitesse, $u_z = -1,15 \cdot 10^{-3}$ et $u_z = 1,67 \cdot 10^{-3}$	8
1.4	Expérience d'un robinet qui goutte.	9
1.5	Exemple d'une bifurcation homocline. La bifurcation a lieu lorsque le paramètre de contrôle μ est égal à μ_h . Pour $\mu < \mu_h$ deux solutions coexistent : un cycle limite stable et un point fixe instable. Lorsque μ tend vers μ_h par valeurs croissantes les deux se rapprochent. A la bifurcation, les variétés stables et instables du point fixe se confondent avec le cycle limite qui n'existe plus pour $\mu > \mu_h$	12

1.6	Controverse dans le cas de deux disques en contrarotation exacte ($s = -1$) pour $Re \rightarrow \infty$. (a) : profil axial de rotation proposé par Batchelor (1951). (b) : profil proposé par Stewartson (1953). en pointillés : $Re \rightarrow \infty$	17
1.7	Instabilité tridimensionnelle à $\Gamma = 3.5$ pour $Re_c \approx 2120$	19
1.8	Configuration rotor-stator à $\Gamma = 3.5$ pour $Re_c \approx 2120$. Ce graphe représente l'iso-surface de la vitesse radiale à $u_r = -0.006$ ($m = 3$).	19
1.9	Isocontours de la vitesse axiale correspondant à la naissance des modes instables de la couche de cisaillement en variant le nombre de Rosby, (a) trois modes, (b) quatre modes, (c) cinq modes.	20
1.10	(a) Configuration expérimentale de von Kármán sodium, (b) schéma de l'écoulement moyen entre les deux turbines contra-rotatives. L'écoulement toroïdal est représenté en bleu et le pompage poloïdal en rouge.	22
2.1	Cylindre de hauteur et de rayon égaux. Le disque inférieur chauffé tourne dans le sens anti-horaire, alors que le disque supérieur refroidi tourne dans le sens horaire.	24
2.2	Cylindre de hauteur égale à deux. Le disque inférieur chauffé tourne dans le sens anti-horaire, alors que le disque supérieur refroidi tourne dans le sens horaire. Un champ magnétique externe est appliqué suivant la direction verticale.	25
2.3	(a) Configuration adimensionnée de l'écoulement. (b) Couche de cisaillement azimuthale et (c) zones de recirculation dues au pompage d'Ekman.	27
3.1	Répartition du maillage dans les trois directions	39
3.2	Volume de contrôle typique	40
3.3	Discrétisation à l'axe du cylindre	48

4.1	Diagramme théorique des bifurcations schématique en fonction de Re pour $\Gamma = 2$. Les solutions stables (instables) sont indiquées en trait continu (discontinu). La partie hachurée correspond aux cycles hétéroclines. Les solutions non calculées sont en trait point-tiret. Les seuils sont marqués par des points : $Re_M = 349$, $Re_P \sim 401$, $Re_{TW} \sim 412$, $Re_{MP} \sim 418$, $Re_{MWH} = 427.3$, $Re_{Het} = 427.4$, $Re_{M'P} \cong 452$	55
4.2	Résultats obtenus à l'état mixé M pour $Re = 355$, près de la bifurcation à $Re_M = 349$. Isocontours de la vitesse verticale à, (a) $z = \Gamma/6$ (haut), (b) $z = 1/2$ (milieu), et (c) $z = -\Gamma/6$ (bas).	55
4.3	Résultats obtenus par Nore à l'état mixé M pour $Re = 355$, près de la bifurcation à $Re_M = 349$. Isocontours de la vitesse verticale à, (a) $z = \Gamma/6$ (haut), (b) $z=0$ (milieu), et (c) $z = -\Gamma/6$ (bas).	56
4.4	Lignes de courant à $Re = 1850$, $\Gamma = 2$ (à gauche) : Résultat obtenu par (Daube et Sorensen, 1989), (à droite) : Notre simulation.	56
4.5	(à gauche) : Évolution temporelle de $U_\theta(r = 0.5, z = 0)$ à $Re = 2800, \Gamma = 2$ (à droite) : spectre d'énergie correspondant au signal de $U_\theta(r = 0.5, z = 0)$	57
4.6	Seuils de la convection en fonction du nombre de Reynolds. Courbe bleue pleine : transition à la convection stationnaire. Courbe rouge à tiret : transition à la convection oscillatoire. Courbe noire pointillée : fit polynômial d'ordre quatre (équation :4.2). Points : seuil obtenu à partir d'un code écrit dans la formulation vorticité-fonction de courant. Les Lettres indiquent les valeurs des paramètres pour l'écoulement présenté sur les figures 4.8 et 4.9 (B, état de base), 4.10 et 4.11 (S, convection stationnaire), et 4.12 et 4.13 (O, convection oscillatoire).	59
4.7	Isocontours des vitesses : (a) radiale , (b) verticale, et (c) azimuthale , à $Re \approx 300$, $z = 1$ (milieu), $m = 2$	61
4.8	Écoulement de base à $Re = 40$, $Ra = 2000$, dans le plan (r, z) . (a) vitesse azimuthale u_θ , (b) champs de température T , et (c) lignes de courant Ψ . Les gammes pour u_θ et T sont $[-1, 1]$ et $[0, 1]$. Les gammes pour u_r et u_z sont $[-0.04, 0.04]$ et $[-0.08, 0.08]$ respectivement.	63

-
- 4.9 Ecoulement de base à $Re = 90$, $Ra = 8000$, dans le plan (r, z) . (a) vitesse azimutale u_θ , (b) champs de température T , et (c) lignes de courant Ψ . Les gammes pour u_θ et T sont $[-1, 1]$ et $[0, 1]$. Les gammes pour u_r et u_z sont $[-0.10, 0.10]$ et $[-0.08, 0.08]$ respectivement. 64
- 4.10 Etat convectif à $Re = 40$, $Ra = 4000$, dans le plan (r, z) . (a) vitesse azimutale u_θ , (b) champs de température T , et (c) lignes de courant Ψ . Les gammes pour u_θ et T sont $[-1, 1]$ et $[0, 1]$. La gamme pour u_r et u_z sont $[-0.10, 0.17]$ et $[-0.29, 0.08]$ respectivement. 66
- 4.11 Etat convectif à $Re = 90$, $Ra = 1250$, dans le plan (r, z) . (a) vitesse azimutale u_θ , (b) champs de température T , et (c) lignes de courant Ψ . Les gammes pour u_θ et T sont $[-1, 1]$ et $[0, 1]$. Les gammes pour u_r et u_z sont $[-0.13, 0.17]$ et $[-0.26, 0.07]$ respectivement. 67
- 4.12 Cycle limite à $Ra = 20000$, $Re = 110$. v est montrée aux temps $0, \tau/8, \tau/4, \tau/2, 3\tau/4, \tau$, indiqués aux séries temporelles sur la figure 4.14,a. le temps est adimensionnalisé par l'unité de $1/\Omega$. Le cycle limite global à la symétrie de réflexion : les états dans la deuxième moitié du cycle sont reliés par la symétrie de réflexion à ceux dans la première moitié du cycle. La cellule dans le bon coin supérieur est plus petite pendant la première moitié du cycle et plus grande pendant la deuxième moitié. Les contours de la fonction de courant ne sont pas également espacés, mais à la place choisie pour illustrer les dispositifs topologiques de l'écoulement. 68
- 4.13 Cycle limite à $Ra = 20000$, $Re = 63$. ψ est montrée aux séries temporelles sur la figure 4.14,b à des instants différents. La cellule dans le bon coin inférieur se développe et la cellule dans le pliure du coin gauche supérieure se divise en trois petits cellule. Deux de ces dernières disparaissent, laissant une petite cellule dans le bon coin supérieur. Le cycle limite global à la symétrie de réflexion : les états dans la deuxième moitié du cycle sont reliés par une symétrie de réflexion à ceux dans la première moitié du cycle. Les contours de la fonction de courant ne sont pas espacés, mais à la place choisie pour illustrer les dispositifs topologiques de l'écoulement 69
-

4.14	Séries temporelles correspondant aux cycles limites à $Ra = 20000$. Les points dans les séries temporelles se rapportent à des visualisations sur les figures 4.12 et 4.13. (a) : à $Re = 110$, les oscillations, à la période $\tau \approx 38$, sont stationnaires. (b) : à $Re = 63$, les oscillations, à la période $\tau \approx 115$, consistent principalement en deux longs plateaux avec des gradients brusques entre eux.	71
4.15	Portraits de phases correspondant aux cycles limites à $Ra = 20000$. Les points dans les portraits de phases sont tracés aux temps espacés de sorte que leurs densités reflètent le taux auquel le cycle limite est traversé	72
4.16	Variation de la fréquence carrée avec Re . (a) : $1/\tau$ pour $Ra = 20000$ (points creux) et pour $Ra = 18000$ (points pleins). (b) : $(Re/\tau)^2$ pour $Re = 20000$ (points creux) et pour $Ra = 18000$ (points pleins).	73
4.17	Courbes de bifurcations dans le plan (Re, Ra) montrant la première fourche (bleu, solide, PF_1), la deuxième fourche (vert, tiret-court PF_2), le Hopf (rouge, long-tiret H), et la bifurcation noeud-col (noir, pointillé, SN). Les points indiquent les points codimension deux où la courbe PF_2 rencontre les courbes SN (90.14300) et H (95.11640). Un agrandissement de la région à l'intérieur du carré est montré sur la figure 4.18. Portraits de phase montrés comme encarts. a, b) en-dessous de PF_1 et H , la seule solution est l'écoulement de base stable, qui est un noeud (a) ou un point en spirale (b). c) Entre PF_1 et PF_2 , l'écoulement de base est instable et il existe deux états convectifs asymétriques stables. d, e) entre PF_2 et SN , existent cinq états : l'écoulement de base instable et deux états convectifs stables et deux instables. f, g) entre SN et H , l'écoulement de base instable est entouré par un cycle limite stable, qui est (f) proche de SN proche-hétérocline et (g) proche H proche-sinusoïdal.	75
4.18	Agrandissement du carré sur la figure 4.17. La courbe additionnelle (en tirets pointillés noirs) indique la bifurcation secondaire de Hopf SH . Les étiquettes correspondent à ceux de la figure 4.17. Le comportement dans le carré est décrit par la forme normale de TB 4.6.	81

- 4.19 Comportement de la forme normale de TB 4.6 avec bifurcation de fourche P , bifurcation de Hopf H , bifurcation secondaire de Hopf SH , noeud-col des orbites périodiques SNP et bifurcation de collage G . Les portraits de phase b), c), g) comme sur la figure 4.17. h) Entre P et SH un cycle limite d'écurie entoure les écoulements de base et les écoulements convectifs instables. i) Entre SH et G , les petits cycles limites instables entourent chaque état convectif stable. j) Entre G et SNP , deux grands cycles limites, un stable et l'autre instable, entourent les trois états stationnaires. La région hachurée indique la bi-stabilité entre le cycle limite et les états stationnaires. 82
- 4.20 Diagrammes de bifurcation le long des lignes dans le diagramme central (Re, Ra) . $T(1/2, 1/2)$ sont tracés en fonction de Ra pour Re fixe dans les diagrammes le long du fond, et en fonction de Re pour Ra fixe dans la colonne du côté droit. Les diagrammes représentent les branches stationnaires pour zéro, une et deux directions instables (respectivement courbes en trait continu vert, en tiret long bleu et en tiret court rouge. Les points noirs indiquent des cycles limites 83
- 4.21 Diagrammes de bifurcations montrant les branches des solutions en fonction de Re pour des valeurs fixes de Ra . Pour $14300 < Ra < 28445$, les diagrammes contiennent des bifurcations noeuds-cols. Deux bifurcations de fourche pour $6643 < Ra < 14300$, une bifurcation de fourche pour $2262 < Ra < 6643$, et aucune bifurcation pour $Ra < 2262$ 84
- 4.22 Diagrammes de bifurcations montrant les branches des solutions en fonction de Ra pour des valeurs fixes de Re 85
-

4.23 Partie réelle de σ principales valeurs propres en fonction de Ra pour six valeurs de Re . à $Re=0$, les valeurs propres sont réelles et se croisent transversalement. Les passages à zéro à $Ra = 2260$ et $Ra = 664$ correspondent aux bifurcations de fourche. Valeurs propres purement thermiques et azimutales à $\sigma = -9.87$ et $\sigma = -24.6$ respectivement, sont indépendants de Ra . Quand $Re > 0$, les croisements transversaux deviennent des paires conjuguées complexes. Pour $Re = 96$, la valeur propre de la bifurcation est une paire conjuguée complexe, menant à une bifurcation de Hopf à $Ra = 11856$ 90

4.24 Principaux vecteurs propres à $Ra = 10000$. Colonne gauche $Re = 0$. a,b) vecteurs propres responsables de la transition à la convection avec un et deux rouleaux toroïdaux, respectivement, avec $\sigma = 38.5$ et $\sigma = 19.5$. c,b) vecteurs propres thermique et de la vitesse azimutale, respectivement, avec $\sigma = -9.87 \approx -\pi^2$ et $\sigma = -24.6 \approx -\pi^2 - j_{11}^2$. e) vecteur propre avec deux rouleaux verticalement empilés, avec $\sigma = -21.2$. Colonne droite : $Re = 96$. f,g) première paire conjuguée complexe, avec $\sigma_{\pm} = i\omega = -2.24 \pm i3.45$. h,i) seconde paire conjuguée complexe, avec $\sigma_{\pm} = i\omega = -19.2 \pm i4.35$.) 92

5.1 Présent modèle : (a) : Lignes de courant, (b) : champs de température, (c) : (Gelfgat et al., 2001a), à $Pr = 0.015$, $\Gamma = 2$, $Re = 300$, et $Ha = 30$ 97

5.2 (a) : Présent modèle , (b) : (Bourgoin et al., 2004). 98

5.3 Vecteur vitesse durant une période à $\Gamma = 2$, $Re = 300$, $Ra_c = 1426$, $Ha = 0$ 99

5.4 Absence d’hystérésis à la bifurcation de Hopf 100

5.5 Atténuation de la variation temporelle des vitesses et de la température par un champ magnétique tournant dans une enceinte cylindrique à $Re = 300$, $Ra_c = 1426$, $Pr = 0.015$ pour quatre valeurs du nombre de Hartman, $Ha = 0$, $Ha = 2$, $Ha = 5$, $Ha = 10$, et $Ha = 15$ 101

5.6 (A) : Vecteur vitesse, (B) : lignes de courant, (C) : champ de température de l’écoulement, à $Re = 300$, $Ra_c = 14263$, $Pr = 0.015$ pour $Ha_c = 14.6$. . 102

5.7	Etat de base pour $\Gamma = 2$ à $Re = 300$. Isocontours et isosurfaces des vitesses axiales (a), azimutales(b), et radiales (c). A noter que u_r est invariant au cours de la réflexion en z tandis que u_z et u_θ changent de signe. Les valeurs positives (négatives) sont indiquées par des lignes continues (pointillées).	104
5.8	Première instabilité stationnaire à $Ra_c \approx 380$. Isocontours de la vitesse verticale à $z = \Gamma/6$ (a), $z = 0$ (b) et $z = -\Gamma/6$ (c). (d) Champ de vecteurs déplié (u_z, u_θ) suivi par des lignes de courant à $r = 0.75$. Le vortex est centré autour du point elliptique près de $\theta = \pi, z = 1$ et est diamétralement opposé au point hyperbolique près de $\theta = 0, z = 1$.	105
5.9	Effet du nombre de Rayleigh sur l'instabilité tridimensionnelle oscillatoire.	106
5.10	(a) : Isocontours et isosurfaces de la vitesse radiale dépliés à $r = 0.80$ (d) champ de vecteurs déplié (u_z, u_θ) suivi par des lignes de courant à $r = 0.60$	107
5.11	(a) : Instabilité tridimensionnelle à $Ra_c = 1620, Re = 300, Pr = 0.015, \Gamma = 2$, (b) : Potrait de phase montrant les deux fréquences f_o , et $f_o/2$ (c) spectre d'énergie correspondant à l'instabilité tridimensionnelle montrant deux pics d'énergie $f_0 = 0.27$, et $f_0/2 = 0.16$	108
5.12	Extrapolation linéaire des trois valeurs du nombre de Nusselt local focalisant le Ra_c	109
5.13	Champ conductif de température à $Re = 300, Ra = 1300, Pr = 0.015$, et $\Gamma = 2$.	110
5.14	Champ convectif de température à $Re = 300, Ra = 1800, Pr = 0.015$, et $\Gamma = 2$.	110
5.15	(a) : Profils de vitesses axiales (b) : variation temporelle en augmentant le nombre de Hartmann suivi par des coupes de la vitesse axiale, à $Re = 300, Ra_c = 380, Ha = 2, 5, 10, 15, 20, \Gamma = 2$.	112
5.16	Iso-surfaces de la vitesse axiale à $m = 1$ pour $Re = 300, Ra_c = 1620, Pr = 0.015, \Gamma = 2, Ha = 20$ la couleur bleue correspond aux valeurs négatives pour $0 < \theta < \pi$, la couleur rouge correspond aux valeurs positives pour $\pi < \theta < 2\pi$.	113

5.17	Champ de vecteurs (u_z, u_θ) et lignes de courant montrant un 'vortex monopole' à $r = 0.60$ et $\theta = 2\pi$, pour $Ra_c = 1620, Re = 300, Pr = 0.015, \Gamma = 2, Ha = 15$	114
5.18	Évolution de la contribution $Rac_m/Ra_c(Re)$ en fonction de Ha , pour un champ magnétique axial	117
5.19	(a) : Potentiel électrique sous l'effet de la rotation différentielle, (b) : Vue en coupes de la structure des lignes de champ magnétique.	118
5.20	(a) : Potentiel électrique convecté par la rotation des disques, (b) : Vue en coupes de la structure des lignes de champ magnétique.	119
5.21	Profils de vitesses axiales en fonction de rayon pour $Ha = 5, 15, 10, 20$	120
5.22	(a) : Iso-surfaces de la vitesse radiale, $u_r = -0.46$ (bleu) et $u_r = 0.46$ (jaune), (b) : Iso-surfaces de la vitesse azimutale, $u_\theta = 0.48$ (bleu) et $u_\theta = -0.48$ (jaune), à $Ra = 10000, Re = 300, Ha = 15, \Gamma = 1$	122
5.23	(a) : Iso-surfaces de la température, (b) : Iso-surfaces du potentiel électrique $\varphi = -0.02714904$ (en jaune) et $\varphi = 0.02714904$ (en vert), à $Ra = 10000, Re = 300, Ha = 15$, et $\Gamma = 1$	123
5.24	(a) : Iso-surfaces de la vitesse radiale, $u_r = -0.0815$ (bleu) et $u_r = 0.0994$ (jaune), (b) : surfaces isothermes, à $Ra = 10000, Re = 300, Ha = 15, \Gamma = 0.7124$	
5.25	(a) : Iso-surfaces de la vitesse radiale, $u_r = -0.093$ (vert) et $u_r = 0.0725$ (jaune), (b) : surfaces isothermes, à $Ra = 20000, Re = 300, Ha = 15, \Gamma = 0.5125$	
5.26	Apparition des modes en fonction du rapport d'aspect pour un champ magnétique axial $Ha = 5, m=1$ à $\Gamma = 2, m=2$ à $\Gamma = 1, m=3$ à $\Gamma = 0.7$, et $m=4$ à $\Gamma = 0.5$	126
5.27	Effet du champ magnétique axial sur le seuil de la convection pour $\Gamma = 2$. Évolution du seuil, correspondant au mode $m = 1$, en fonction du nombre de Hartmann, Ha	127
A.1	Partie réelle σ de principales valeurs propres en fonction de Ra pour six valeurs de Re . Passages à zéro	135
A.2	137

Liste des tableaux

1.1	Exemples de valeurs seuils pour des modes azimutaux différents. Cas d'un cylindre avec des conditions aux limites d'adhérence sur les parois. La paroi latérale est adiabatique.	15
2.1	Paramètres adimensionnels.	34
4.1	Validation numérique des maxima des vitesses radiale, axiale, et des lignes de courant.	54
4.2	Oscillations périodiques pour une configuration rotor-stator à $Re = 2800$, $\Gamma = 2$	57
4.3	Propriétés de la forme normale de Takens-Bogdanov.	77
5.1	Validation numérique des maxima des vitesses radiale, axiale, et des lignes de courant.	96

Introduction générale

La convection thermique, le cisaillement, et le champ magnétique sont les axes principaux de l'étude des instabilités hydrodynamiques. L'intérêt de ces systèmes réside dans leur grand nombre d'applications pratiques et leur statut comme prototypes dans la recherche théorique. Dans cette étude, nous combinons deux configurations cylindriques bien connues : la convection de Rayleigh-Bénard dans un cylindre dont les disques supérieur et inférieur sont maintenus à différentes températures, et l'écoulement de von Kàrmàn dont les disques tournent à la même vitesse mais dans des sens opposés.

Dans un premier temps, on choisit une géométrie de petit rapport d'aspect : un cylindre dont la hauteur et le rayon sont égaux, avec une axisymétrie imposé. Il y a une littérature étendue sur la convection de Rayleigh-Bénard dans un cylindre avec des petits rapports d'aspect (entre 0.5 et 5) (voir la section §1.2§). Dans les références les plus appropriées (Tuckerman et Barkley, 1988; Barkley et Tuckerman, 1989), les simulations axisymétriques utilisées ont produit les modèles des rouleaux concentriques radialement ondulés. Ceux-ci ont été montrés par une bifurcation de noeudcol avec une période infinie (Sniper) qui sera le sujet d'une grande partie de la recherche actuelle.

La littérature sur l'écoulement de von Kàrmàn n'est pas volumineuse, mais elle se développe. En se limitant à la configuration avec des petits rapports d'aspect et à la contra rotation exacte, les articles numériques récents incluant les simulations axisymétriques et non-axisymétriques seront mentionnés dans la section §1.3§. L'intérêt de ce problème a été augmenté par des expériences utilisant cette configuration avec des nombres élevés de Reynolds pour produire de la turbulence, et un champ magnétique par l'intermédiaire de l'effet dynamo (section §1.3.3§). Nous étudions dans la deuxième partie des résultats l'effet d'un champ magnétique uniforme et constant sur les instabilités de Rayleigh Bénard/von

Kàrmàn.

Cependant, la configuration combinée de Rayleigh-Bénard/von Kàrmàn semble encore inconnue. Cette situation se tient contrairement à celle du cisaillement et de l'écoulement tournant. La superposition de l'écoulement plat de Poiseuille avec la convection de Rayleigh-Bénard (PRB), a été le sujet d'un grand nombre d'investigations. En effet, une revue récente (Nicolas, 2002) cite des centaines d'articles. Pour les rouleaux longitudinaux de l'écoulement de Poiseuille et de Couette, le seuil reste inchangé (Clever et Busse, 1992), tandis que le seuil augmente et change sa nature de l'absolu au convectif, pour les rouleaux transversaux de l'écoulement de Poiseuille, (Muller92 et al., 1992). Dans l'écoulement de Taylor-Couette entre deux cylindres à différentes températures, la nature de l'instabilité dépend également de l'angle entre le cisaillement et la force imposée de flottabilité (Lepiller et al., 2008). Appliqué aux disques rotatifs, le transfert thermique dans une configuration rotor-stator est intensivement étudié en raison de ses applications aux turbomachines. La convection tournante de Rayleigh-Bénard est étudiée par les géophysiciens depuis longtemps, ainsi que par les chercheurs dans la formation des motifs par exemple, en raison de la possibilité de chaos au seuil. Des bifurcations de Sniper ont été aussi trouvées dans ce système.

Notre thèse est organisée comme suit. Dans le premier chapitre, on présente une analyse bibliographique sur les écoulements rotatifs et leurs instabilités avec quelques simulations, pour des configurations cylindriques.

Dans le second chapitre, on met en revue la description mathématique et géométrique utilisée. Le fluide considéré évolue dans une enceinte cylindrique fermée par deux disques en rotation chauffés par le bas par un gradient thermique vertical; L'écoulement répond aux principes de conservation de quantité de mouvement et de masse, à l'approximation de Boussinesq et à la loi d'Ohm. Ce qui permet d'obtenir un système d'équations aux dérivées partielles qui sera résolu par l'une des méthodes numériques connues.

Le troisième chapitre de ce mémoire est consacré à l'exposition des différentes caractéristiques de la méthode des volumes finis en second ordre, à savoir : les détails du maillage, la discrétisation des équations en second ordre dans l'espace et dans le temps, et on donne un aperçu sur le code numérique utilisé, ainsi que sa structure.

Le quatrième chapitre montre comment le seuil de transition est affecté par la contre-rotation des disques. Nous présentons les états stationnaires et les cycles limites résultant de la transition. Le raccordement entre les états stationnaires et les cycles limites par l'intermédiaire d'une bifurcation de Sniper, qui présente un diagramme de phase et une analyse complète de la bifurcation.

Dans le cinquième chapitre, nous validons, discutons, et interprétons l'effet stabilisant d'un champ magnétique constant sur l'instabilité de (VK/RB), à savoir l'effet du champ sur la première et la deuxième bifurcation, et l'évolution des seuils en fonction du rapport d'aspect.

Chapitre 1

Écoulements en rotation et stabilité

L'objectif de ce chapitre est de faire une présentation synthétique des différents résultats rencontrés dans la bibliographie concernant les aspects théoriques, numériques et expérimentaux de la structure et la stabilité des écoulement en rotation, avec quelques applications sur l'apparition des instabilités pour différentes configurations.

1.1 Bifurcations, brisures de symétrie et transition à la turbulence

Ce paragraphe est très fortement inspiré de l'ouvrage de Paul Manneville (1991). Pour un état de base connu et simple d'un système dynamique, on peut alors faire une analyse locale de stabilité linéaire. Dans le cas où une perturbation infinitésimale est instable à partir d'une valeur critique du paramètre de contrôle, généralement un nombre de Reynolds dans un cas hydrodynamique, on se trouve alors en présence d'une instabilité super critique. Cette bifurcation s'accompagne très souvent d'une brisure de symétrie. En effectuant une analyse faiblement nonlinéaire, on identifie alors un paramètre d'ordre au sens de la théorie de Landau des transitions de phase. Pour ce paramètre d'ordre, nul dans l'état de base, on écrit une équation de "Ginzburg Landau", généralement pour l'amplitude du mode instable dans le cas d'une analyse en modes normaux (figure 1.1). A mesure que le paramètre de contrôle augmente, on observe ensuite généralement une cascade de bifurcations s'accompagnant d'une augmentation du désordre, menant au chaos spatiotemporel très rapidement. Ce scénario de transition est alors celui d'une cascade

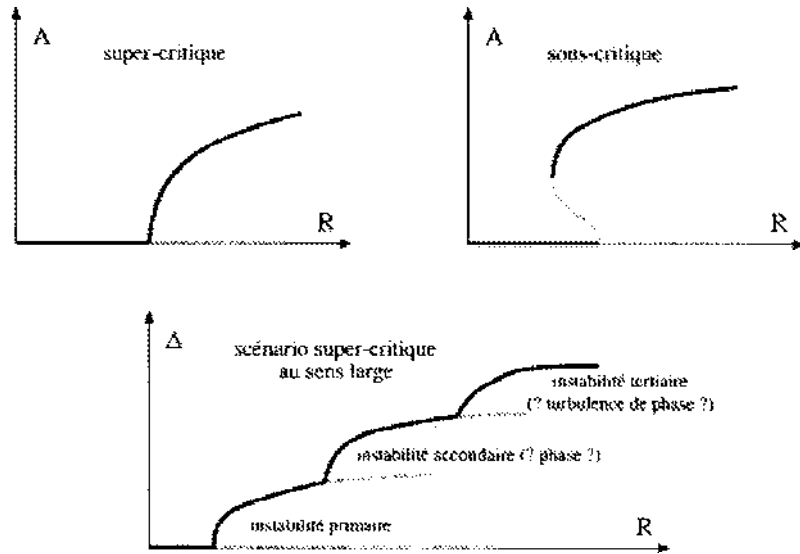


FIGURE 1.1 – Schéma d'une bifurcation super-critique, d'une bifurcation sous-critique, et d'un scénario de transition super-critique vers le chaos spatio-temporel. R est le paramètre de contrôle, et A un paramètre d'ordre. Figure extraite de la thèse (Bottin, 1998).

de bifurcations super-critiques, où le chaos est généré par interactions nonlinéaires d'un faible nombre de modes scénario "à la Ruelle Takens", ou encore par une suite infinie de fréquences incommensurables, l'imprédictibilité venant alors des phases nouvelles introduites à chaque bifurcation qui sont des fonctions inconnues des conditions initiales, scénario "à la Landau" (Manneville, 1991). Un exemple sur la formation des rouleaux de Taylor, dans un écoulement de Couette-Taylor entre cylindres coaxiaux avec parois en contra-rotation montre que la première bifurcation est super-critique (voir par exemple la photo extraite de l'ouvrage de (Chandrasekhar, 1961), et notre simulation à $Re_o = -500$, $Re_i = 300$, $\Gamma = 6$, (figure 1.2)). Les rouleaux de Taylor deviennent ondulés, puis ondulés-modulés (voir aussi notre simulation à la bifurcation secondaire complexe pour la cavité de type Taylor-Couette avec parois en contra-rotation étudiée par (Czarny et al., 2001). La figure 1.3 montre des spirales inter pénétrantes ondulées (WIS), pour un régime complexe tridimensionnel à $Re_o = -500$, $Re_i = 375$, $\Gamma = 6$), et l'écoulement devient enfin "turbulent", c'est-à-dire :

- imprédictible à long terme (propriété partagée avec un système chaotique) ;
- mélangeant les quantités transportées beaucoup plus rapidement que les simples processus de diffusion moléculaire ;
- mettant en jeu des structures de toutes tailles et des fluctuations à petites échelles spatiales et temporelles.

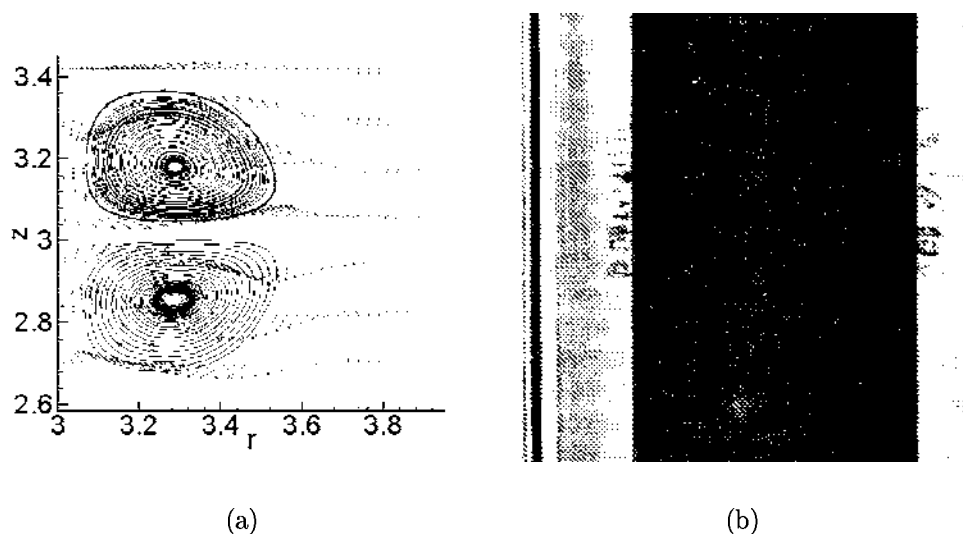
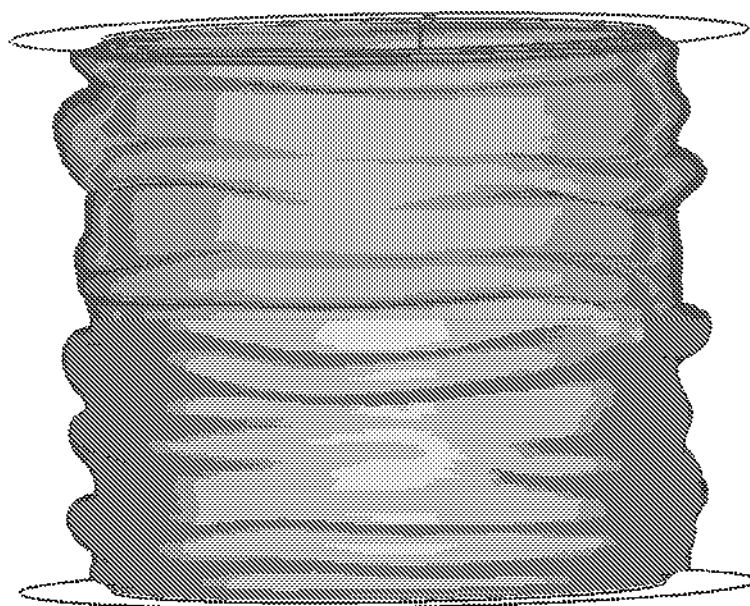


FIGURE 1.2 – Formation des rouleaux de Taylor , (a) Agrandissement des rouleaux de Taylor entre le cylindre intérieur et la surface nodale autour de $\Gamma = 3$. On voit clairement la paire des rouleaux contrarotatifs. (b) Apparition des rouleaux de Taylor entre le cylindre intérieur et la surface nodale. Photo extraite de la référence (Chandrasekhar, 1961).

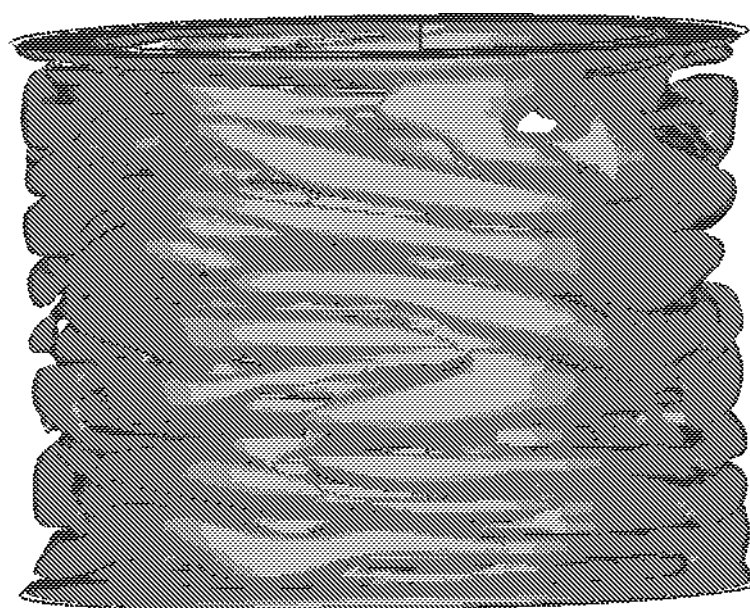
1.1.1 Bifurcation de Hopf

La bifurcation de Hopf correspond à la déstabilisation d'un point fixe au profit d'un cycle limite. Des oscillations d'amplitude finie apparaissent brusquement au point de bifurcation. L'amplitude du cycle est nulle au point de bifurcation, le régime oscillant se raccorde donc continûment à l'état d'équilibre.

Prenons l'exemple du robinet qui goutte : Un petit filet d'eau se déstabilise pour donner des gouttes, mais le passage se fait par un filet d'amplitude oscillante. Dans ce cas, le paramètre de contrôle est le débit. À un débit critique, on passe d'un cylindre à

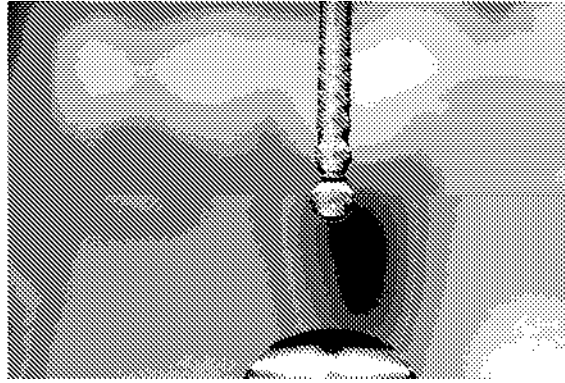


(a)



(b)

FIGURE 1.3 – Régime tridimensionnel oscillatoire dit (*wavy spiral*), $Re_0 = 500$, $Re_i = 375$, $\Gamma = 6$.
(a) Iso-surface de la composante azimutale de la vitesse, $u_\theta = -1,67 \cdot 10^{-1}$, (b) Iso-surfaces de la composante axiale de la vitesse, $u_z = -1,15 \cdot 10^{-3}$ et $u_z = 1,67 \cdot 10^{-3}$.

FIGURE 1.4 – *Expérience d'un robinet qui goutte.*

amplitude constante à un cylindre oscillant. Dans ce cas, la trajectoire asymptotique est un point fixe pour un débit important et un cycle limite pour un débit faible, voir la figure 1.4.

1.1.2 Bifurcation noeud-col

Le système suivant :

$$\frac{\partial X}{\partial t} = r_0 - X^2, \text{ avec } X \in \mathbb{R} \text{ et } r_0 \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

où r_0 est le paramètre de contrôle, a pour solutions stationnaires (dits points fixes) $X_{\pm} = \pm\sqrt{r_0}$ et décrit une bifurcation noeud-col : les deux points fixes, le noeud (stable) X_+ et le col (instable) X_- coalescent au point tournant ($r_0 = 0$).

Le système analogue $dX/dt = r_0 + X^2$ décrit le cas où les solutions n'existent que lorsque $r_0 < 0$.

1.1.3 Bifurcation fourche

$$\frac{\partial X}{\partial t} = r_1 X - X^3, \text{ avec } X \in \mathbb{R} \text{ et } r_1 \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

où r_1 est le paramètre de contrôle, décrit une bifurcation fourche super-critique et a pour points fixes $X_0 = 0$ et $X_{\pm} = \pm\sqrt{r_1}$. Ces derniers sont stables tandis que la solution triviale

ne l'est que pour $r_1 < 0$.

Le système analogue $dX/dt = Xr_1 + X^3$ décrit une bifurcation fourche sous-critique : Les points fixes $X_{\pm} = \pm\sqrt{r_1}$ sont instables.

1.1.4 Comportements dynamiques au voisinage des bifurcations

Lorsque le système étudié subit une des bifurcations évoquées ci-dessus, son comportement dynamique sera dicté par celle-ci.

Ainsi, si le système subit une bifurcation fourche super-critique (c'est le cas pour l'état conducteur d'un fluide lorsque Ra dépasse la valeur seuil Ra_c), alors sa dynamique asymptotique sera donnée par l'étude de l'évolution d'une perturbation (infinitésimale) ϵ de l'équation d'une bifurcation fourche super-critique (1.2). En prenant l'exemple de l'état conducteur (solution $X_0 = 0$), une perturbation d'amplitude $\epsilon \ll 1$ et r_1 proportionnel à $(Ra - Ra_c)$, l'évolution de ϵ au premier ordre sera donnée par :

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = r_1 \epsilon \Rightarrow \epsilon_0 e^{r_1 t}$$

Le taux de croissance $r_1 \propto (Ra - Ra_c)$ de la perturbation sera donc positif si $Ra > Ra_c$ (la perturbation croît, l'état conducteur est instable) et négatif si $Ra < Ra_c$ et le système relaxe (exponentiellement) vers l'état conducteur.

En pratique, il suffit donc d'évaluer les valeurs des taux de croissance ou relaxation λ du système réel pour diverses valeurs de Ra (suffisamment proches de Ra_c). L'utilisation de la relation $\lambda(Ra) \propto (Ra - Ra_c)$ permettant ensuite d'obtenir la valeur seuil avec une bonne précision.

On montre de même qu'à l'approche d'une bifurcation noeud-col, les taux de croissance des perturbations suivent la loi $\lambda \propto \sqrt{Ra - Ra_{SN}}$, où Ra_{SN} est la valeur de Ra à laquelle se trouve le point tournant.

1.1.5 Bifurcations homocline et hétérocline

Comme nous venons de le voir, il est possible d'évaluer les comportements asymptotiques au voisinage des solutions d'un système non linéaire. L'aspect local de ces analyses ne permet cependant pas de capter les bifurcations globales.

A nouveau, il ne s'agit pas ici de discuter ni détailler tous les cas possibles, mais simplement de présenter quelques aspects en rapport avec les résultats qui seront présentés par la suite.

L'évolution du système, à partir d'une condition initiale donnée, dans l'espace des phases dépend des solutions du problème. Ceci implique en particulier que les propriétés de ces solutions (stables et instables) et les ensembles particuliers associés (les variétés) posent des contraintes importantes sur l'aspect global de l'espace des phases, imposant par ce biais les propriétés qualitatives des trajectoires dans ce dernier.

En raison de la propriété d'unicité des trajectoires, les variétés (de même nature) de différents points fixes ne peuvent pas se couper. Rien n'empêche cependant l'existence d'une trajectoire étant à la fois une variété instable issue d'un point fixe et une variété stable y menant. La boucle ainsi formée est dite homocline. De même, une variété instable d'un point fixe peut aboutir à un autre point fixe suivant une variété stable de ce dernier. Une trajectoire (boucle) reliant ainsi plusieurs points fixes est dite hétérocline. Cette connexion entre variétés stables et instables peut, ainsi que l'illustre la figure 1.5, être à l'origine de la destruction (ou la génération, si la séquence est suivie dans l'ordre inverse de celle présenté dans la figure) d'un cycle limite. Précisons de plus qu'à la bifurcation, par opposition au cas d'un cycle limite issu d'une bifurcation de Hopf d'un point fixe (où l'état oscillant est de période finie et d'amplitude nulle, l'oscillation est d'amplitude finie et de période infinie ((Glendinning, 1996) et (Bordja et al., 2009b))).

1.2 Convection thermique en géométrie cylindrique

Dans cette partie on présente les résultats de travaux relatifs à la configuration qui nous intéresse : celle d'un cylindre vertical de petit rapport d'aspect $\Gamma = R/h$, où R est le rayon du cylindre et h sa hauteur.

1.2.1 Déstabilisation de l'état conductif

Une des premières études complètes sur le calcul du nombre de Rayleigh critique Ra_c marquant la déstabilisation de l'état conductif est due à (Charlson et Sani, 1970). En

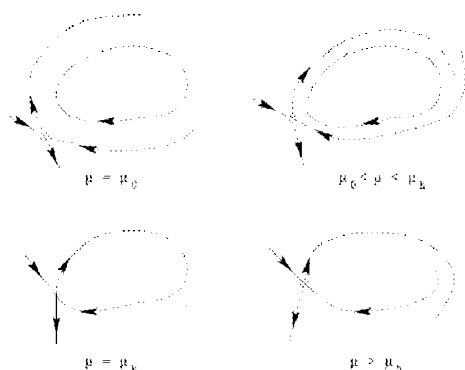


FIGURE 1.5 – Exemple d'une bifurcation homocline. La bifurcation a lieu lorsque le paramètre de contrôle μ est égal à μ_h . Pour $\mu < \mu_h$ deux solutions coexistent : un cycle limite stable et un point fixe instable. Lorsque μ tend vers μ_h par valeurs croissantes les deux se rapprochent. A la bifurcation, les variétés stables et instables du point fixe se confondent avec le cycle limite qui n'existe plus pour $\mu > \mu_h$.

se restreignant au cas axisymétrique et en utilisant une méthode variationnelle, ils ont obtenu la valeur de Ra_c pour tout $\Gamma \in [0.5, 13]$ et plusieurs jeux de conditions aux limites (thermiques et cinématiques) imposées sur la paroi latérale.

- La présence d'un confinement latéral impose une valeur de Ra_c supérieure à celle d'une couche infinie de fluide. La valeur de ce seuil est d'autre part d'autant plus grande que Γ est petit. Ceci s'explique qualitativement par le fait que l'extension latérale du système impose le nombre d'onde de l'instabilité.
- La valeur de Ra_c est plus faible si la paroi latérale est adiabatique plutôt que conductrice de chaleur.
- De même, Ra_c est moins important dans le cas où un glissement est permis le long de la paroi latérale.

L'étude fut ensuite prolongée (Charlson et Sani, 1971) pour inclure la possibilité d'une déstabilisation de l'état conductif par des modes azimutaux. Il s'avéra que le mode déstabilisant n'est généralement pas axisymétrique, sauf sur certaines plages de valeurs de Γ . Ces résultats furent confirmés (et raffinés) par des études ultérieures telles que celles de (Buell et Catton, 1983) où (Hardin et al., 1990). Ces derniers s'intéressèrent de plus

au cas (plus proche de la réalité expérimentale) où la paroi latérale est de conductivité thermique arbitraire.

La configuration particulière (qui sera une de celles utilisées dans les travaux présentés par la suite) où les disques en haut et en bas du cylindre sont en contra-rotation, tandis que la paroi latérale verticale est considérée comme rigide (condition cinématique d'adhérence) et adiabatique latérale.

1.2.2 Régimes convectifs

Une fois la valeur seuil Ra_c de déstabilisation de l'état conductif franchie, on obtient un régime convectif stationnaire. Pour une couche infinie, on a vu que cette transition est une fourche super-critique de révolution. La prise en compte d'une extension latérale donnée induit naturellement la perte de la propriété de translation arbitraire des solutions. Hormis ce fait, le passage d'un état à l'autre en milieu confiné reste semblable à celui obtenu en milieu infini : il s'agit toujours d'une bifurcation fourche super-critique. Le confinement induit de plus, ainsi qu'évoqué dans le paragraphe précédent, une sélection sur les nombres d'ondes des instabilités pouvant se développer. Cette contrainte implique alors naturellement une hausse de la valeur seuil Ra_c par rapport à celle obtenue pour le système infini. Ces particularités mises à part, la nature de la bifurcation implique à nouveau que l'écoulement convectif résulte principalement de l'interaction du mode déstabilisant avec lui-même et ses caractéristiques (notamment son extension ainsi que ses structures radiales et azimutales) sont proches de celles de ce dernier.

Partant de ce fait, l'utilisation de développements faiblement non-linéaires permet une étude de l'évolution de la convection proche du seuil, analytiquement (Manneville et Piquemal, 1983) ou numériquement (Hardin et Sani, 1993).

Pour des nombres de Rayleigh plus élevés, la convection est plus fortement non-linéaire et les approches précédentes ne peuvent s'appliquer. Seules des études expérimentales ou numériques peuvent alors permettre une investigation des régimes convectifs. Ces travaux montrent généralement que, tout comme pour les systèmes de grande extension spatiale, un grand nombre de comportements et transitions peuvent avoir lieu. Ces derniers s'avèrent liés d'une part aux caractéristiques du fluide (à travers le nombre de

Prandtl Pr associé) et d'autre part à la géométrie cylindrique et la présence de parois latérales proches. L'étude des régimes convectifs loin de la première transition (le passage de l'état conductif à l'état convectif) se déroule ainsi au cas par cas (un cas étant fixé par une géométrie, un ensemble de conditions aux limites et une valeur de Pr).

Les études expérimentales sont réalisées à configuration géométrique et fluide fixés, l'évolution du système étant analysée en fonction du seul paramètre directement contrôlable, le nombre de Rayleigh. En dehors des problèmes liés au fait qu'il faut alors souvent se contenter de mesures globales, par exemple lorsque le fluide utilisé est de l'hélium (Behringer, 1985) ou un métal liquide (Kamotani et al., 1994), à partir desquelles on peut tenter de reconstruire la dynamique de l'écoulement. L'influence des variations de Pr ou Γ sur celle-ci est difficilement accessible.

Ainsi se profile tout naturellement l'intérêt que peut apporter une approche par simulation numérique de tels systèmes : D'une part ces dernières donnent accès à tous les champs ainsi qu'un contrôle absolu sur les valeurs de paramètres tels que Γ ou Pr , d'autre part elles permettent certaines études telles que des calculs de stabilité des écoulements (Touihri et al., 1999) . Elles permettent également d'imposer des contraintes simplificatrices (telles que la bidimensionnalité des écoulements), utiles lorsqu'on cherche à dégager les mécanismes physiques sous-jacents, responsables des phénomènes observés expérimentalement.

Par résolution numérique 3D du cas d'un fluide confiné dans un cylindre de rapport d'aspect $\Gamma = 1$, (Neumann, 1990) a observé que l'état conductif se déstabilisait bien par un mode axisymétrique (celui prédit par les calculs de stabilité linéaire présenté dans le tableau 1.1) et que l'écoulement axisymétrique résultant était déstabilisé par une perturbation de mode azimutal 2 menant finalement à un partitionnement de la cavité en deux rouleaux. Wagner et al. (1994) , effectuèrent une simulation directe de la même configuration et Wanschura et al. (1996),menèrent une étude numérique de stabilité linéaire du système axisymétrique vis-à-vis de perturbations azimutales. Ils montrèrent séparément que le résultat de Neumann (1990) n'était qu'un artéfact du à une résolution spatiale insuffisante.

Γ	mode azimuthal	Ra_c	référence
0.5	0	10752	(Touihri et al., 1999)
0.5	1	3669	idem
0.5	2	8939	idem
0.5	1	3750	(Verzicco et Camussi, 1997)
0.5	1	3610	(Neumann.,1990)
1	0	2220	idem
0.5	1	3774	(Hardin et al., 1990)
1	0	2260	idem
2	1	1832	idem
0.5	0	10887.15	(Charlson et Sani, 1970)
1	0	2261.86	idem
1	0	2262.37	(Tuckerman et al., 2008)
2	0	1862.27	(Charlson et Sani, 1970)

TABLEAU 1.1 – Exemples de valeurs seuils pour des modes azimuthaux différents. Cas d'un cylindre avec des conditions aux limites d'adhérence sur les parois. La paroi latérale est adiabatique.

1.3 Écoulement tourbillonnaire de von Kármán

1.3.1 Origines et travaux analytiques

Theodore von Kármán (1921) pose le problème original de l'écoulement engendré pour un fluide visqueux incompressible au dessus d'un disque lisse infini en rotation, le fluide étant au repos loin du disque. La quête de solutions exactes des équations de Navier-Stokes est alors un sujet brûlant. Se basant sur un principe de similitude, considérant des solutions stationnaires axisymétriques, et supposant enfin que la vitesse axiale est indépendante de la coordonnée radiale, von Kármán réduit le jeu d'équation de Navier-Stokes à deux équations différentielles ordinaires non linéaires. Si on note Ω_f la vitesse de rotation du fluide loin du disque, et Ω_d la vitesse de ce dernier, en résumé, von Kármán (1921) se place dans le cas ($\Omega_f = 0; \Omega_d \neq 0$).

Bödewadt (1940) s'intéresse au problème complémentaire d'un fluide en rotation uniforme à l'infini freiné par un disque à l'arrêt ($\Omega_f \neq 0; \Omega_d = 0$). On désigne maintenant la couche limite correspondante du nom de "couche de Bödewadt", la couche limite dans le cas du disque en rotation étant souvent appelée "couche de Kármán". Enfin, la couche limite qui se développe dans le cas d'un disque infini en rotation surmonté d'un fluide lui aussi en rotation uniforme à un taux voisin ($\Omega_f \approx \Omega_d \neq 0$) se nomme "couche d'Ekman", en hommage aux travaux d'Ekman (1905). Batchelor (1951) généralise le problème au cas de deux disques coaxiaux, toujours de rayons infinis, mais séparés d'une distance d'arbitraire, et tournant à des vitesses angulaires différentes. Il introduit ainsi un nombre de Reynolds Re basé sur d et sur la vitesse d'un disque. Le rapport des vitesses de rotation s est le deuxième paramètre adimensionnel du problème. Sauf mention contraire, cette notation historique s du rapport des vitesses a été reprise par tous les auteurs cités dans la suite. Batchelor ne résoud pas les équations, mais donne des arguments qualitatifs sur la forme des écoulements à haut nombre de Reynolds.

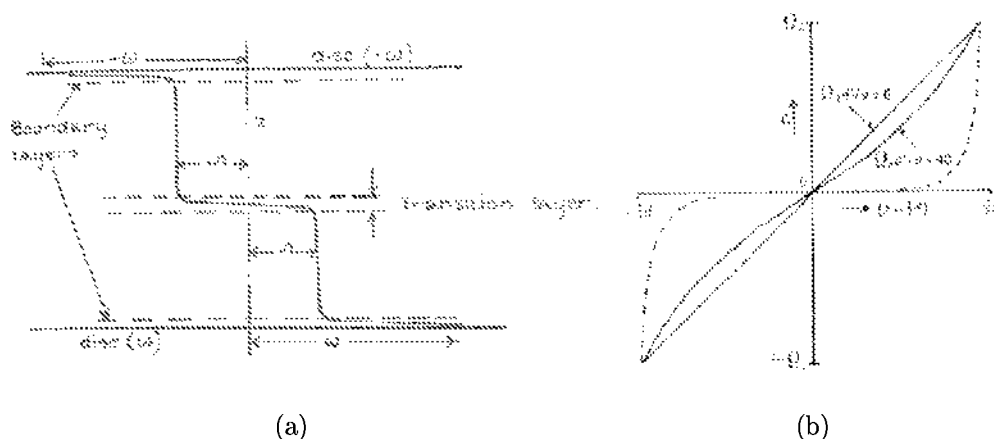


FIGURE 1.6 – Controverse dans le cas de deux disques en contrarotation exacte ($s = -1$) pour $Re \rightarrow \infty$. (a) : profil axial de rotation proposé par Batchelor (1951). (b) : profil proposé par Stewartson (1953). en pointillés : $Re \rightarrow \infty$.

1.3.2 Les Instabilités tridimensionnelles de l'écoulement de von Kármán

Les instabilités de l'écoulement de von Kármán dépendent du rapport entre la hauteur du cylindre et son rayon $\Gamma = H/R$ et du rapport des vitesses de rotation $s = \Omega_{haut}/\Omega_{bas}$ des disques du haut et du bas. De nombreuses études ont été menées pour le cas avec un disque fixe $s = 0$. Lorsque $\Gamma \ll 1$, il s'agit du cas rotor-stator dont la dynamique est dominée par les couches limites d'Ekman et de Bödewadt, situées respectivement au voisinage des disques tournant et fixe (Schouveiler et al. (1998), Gauthier et al. (1999), Schouveiler et al. (2001)). Au dessus du seuil, l'état de base axisymétrique instable donne des tourbillons circulaires axisymétriques et des spirales. Les motifs circulaires ont été étudiés dans le cadre de codes axisymétriques (Lopez, 1996) tandis que les spirales nécessitent des calculs tridimensionnels (Serre et al., 2001). Schouveiler et al. (2001) ont étudié expérimentalement les transitions entre tourbillons circulaires et spirales avec orientation positive par rapport au disque tournant. Gauthier et al. (2002) ont montré que le cas corotatif ou faiblement contra-rotatif donne des instabilités similaires au cas rotor-stator. Lorsque $\Gamma = 1$, le cas d'un disque fixe a aussi largement été analysé à la fois expérimentalement (Escudier, 1984), (Spohn et al., 1998), (Stevens et al., 1999) et numériquement

(Daube et Sorensen (1989), Gelfgat et al. (1996), Lopez et al. (2001)). L'intérêt principal est l'apparition possible de bulles de recirculation axisymétriques le long de l'axe de rotation appelées éclatement tourbillonnaire (Escudier, 1984). Les études expérimentales et numériques dans un cadre axisymétrique ont répertorié les états de base pour différents s (Escudier (1984), Gelfgat et al. (1996), Lopez et al. (1998)). L'avènement d'ordinateurs plus puissants a permis d'étudier les instabilités tridimensionnelles de ces écoulements (Sotiropoulos et Ventikos (1998), Blackburn et Lopez (2000), Gelfgat et al. (2001b), Marques et al. (2002)). Gelfgat et al. (2001b) ont effectué une analyse linéaire de l'état de base axisymétrique pour $\Gamma \in [1, 3.5]$. Ils ont trouvé que la première bifurcation était axisymétrique pour $1.63 \subseteq \Gamma \subseteq 2.76$, justifiant a posteriori les études précédentes dans cette gamme de rapports d'aspect. Dans le régime non linéaire, divers scénarios sont observés pour différents Γ : transition de l'éclatement tourbillonnaire en bulles vers un tourbillon colonne en précession (Sotiropoulos et Ventikos, 1998), coexistence de structures caractérisées par des modes azimutaux 1 et 4 (Marques et Lopez, 2001). Par exemple dans notre test sur une configuration rotor-stator avec un rapport d'aspect $\Gamma = 3.5$, on a trouvé que le premier mode bifurquant correspondait à un mode de fréquence azimutale $m=3$ et à une valeur critique du nombre de Reynolds $Re_c = 2120$. Ce résultat diffère de moins de 1% avec ceux de Boronski et Tuckerman (2007) correspondant à $Re_c = 2116$, et de Marques et Shen (2002) pour $Re_c = 2131$ (figures 1.7 et 1.8), avec double bifurcation de Hopf entre les modes azimutaux 0 et 2 (Marques et al., 2002), et solutions périodiques ou quasi-périodiques d'ondes tournantes modulées (Blackburn et Lopez, 2000).

Le cas contra-rotatif $s < 0$ a récemment ouvert un nouveau champ d'instabilités. (Lopez et al., 2002) ont fait varier s entre 0 et -0.8 pour $\Gamma = 0.5$ et une valeur fixée du nombre de Reynolds. Ils ont observé des ondes tournantes de nombre d'onde 4 et 5 ainsi qu'une dynamique plus compliquée. Ces ondes, sous forme de cheminée, sont dues à la déstabilisation de la couche de mélange issue du détachement de la couche d'Ekman et séparant deux régions de vitesse azimutale opposée. Gauthier et al. (2002) ont d'autre part observé pour $\Gamma \approx 0.05$ des nouvelles spirales d'orientation négative par rapport au disque le plus rapide. Ils ont suggéré que ces spirales pourraient être issues de la même instabilité. Cette hypothèse a été confirmée par une étude exhaustive pour $\Gamma \in [1/20, 9.1/3.8]$ et

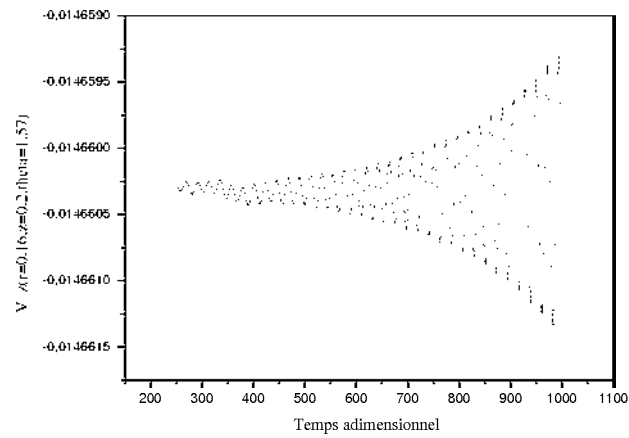


FIGURE 1.7 – *Instabilité tridimensionnelle à $\Gamma = 3.5$ pour $Re_c \approx 2120$.*

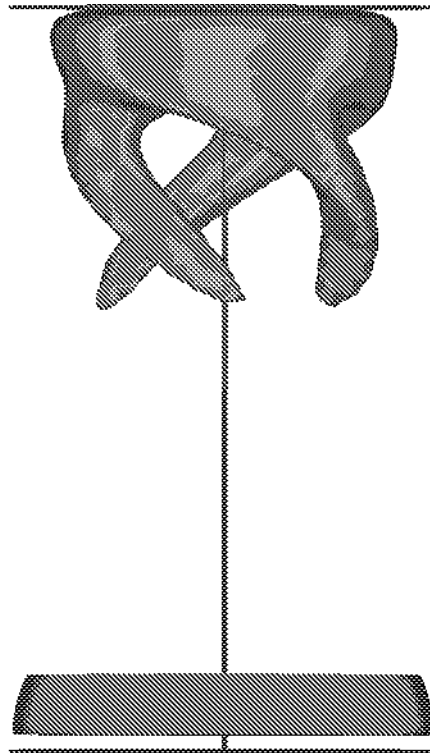


FIGURE 1.8 – *Configuration rotor-stator à $\Gamma = 3.5$ pour $Re_c \approx 2120$. Ce graphe représente l'iso-surface de la vitesse radiale à $u_r = -0.006$ ($m = 3$).*

$s \in [-1, -0.135]$ dans (Moisy et al., 2003), ainsi que notre cas test sur l'apparition de ces instabilités (figure 1.9). La structure résultante est alors constituée de la superposition de tourbillons verticaux et de spirales négatives. Pour des grands Γ et/ou des vitesses élevées, les tourbillons dominant alors que, pour des faibles Γ et/ou des vitesses basses, seules les spirales sont observées. Parmi ces écoulements contra-rotatifs, celui engendré par deux disques en exacte contra-rotation $s = -1$ avec $\Gamma = 1$ et différents fluides comme l'air (Labbé et al., 1996), l'eau (Cadot et al., 1995), l'hélium (Belin et al., 1996), le gallium (Odier et al., 1998) et le sodium (Bourgoin et al., 2004) a permis d'atteindre des nombres de Reynolds de l'ordre de 10^7 , voisins des expériences de turbulence de grille. Même au sein de ces écoulements très turbulents, des tourbillons allongés ont été mis en évidence qui pourraient être des réminiscences des structures cohérentes observées à plus faible Reynolds (Cadot et al., 1995).

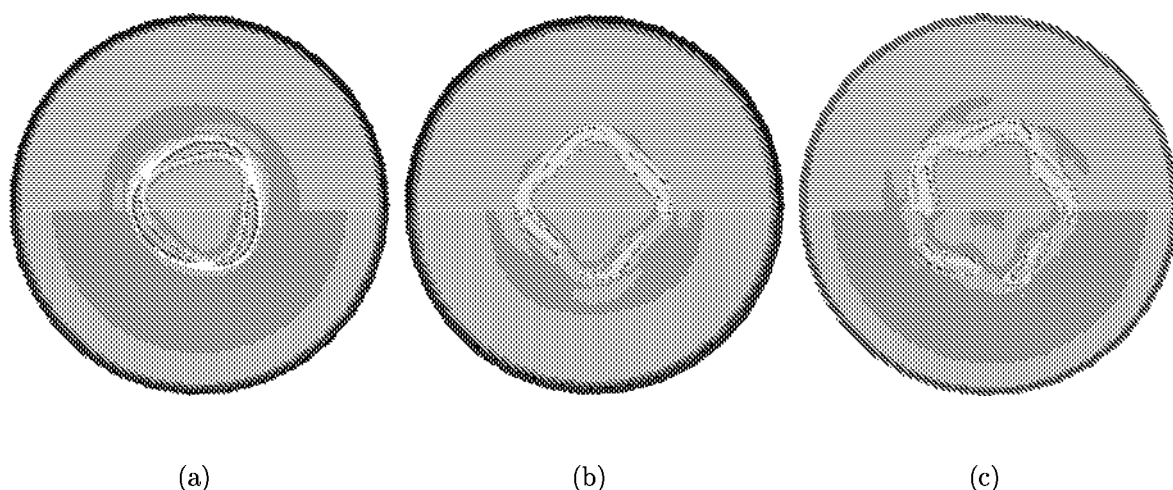


FIGURE 1.9 – Isocontours de la vitesse axiale correspondant à la naissance des modes instables de la couche de cisaillement en variant le nombre de Rosby , (a) trois modes, (b) quatre modes, (c) cinq modes.

1.3.3 Magnétohydrodynamique et écoulements de von Kármán

Les simulations numériques en magnétohydrodynamique (MHD) s'appliquent généralement à deux classes de problèmes distincts : les écoulements industriels comme en métallurgie ou électromécanique et les milieux astrophysiques (Bessaih et al., 2009). La

distinction entre ces classes se fait par la valeur du nombre de Reynolds magnétique Re_m mesurant le rapport entre les temps caractéristiques de diffusion magnétique et d'advection. Les applications industrielles sont caractérisées par $Re_m \ll 1$ de sorte que le champ magnétique induit est négligeable devant celui qui est imposé (c'est notre cas d'étude voir les résultats du chapitre cinq), tandis qu'en astrophysique, $Re_m \gg 1$ et la conversion de l'énergie cinétique en énergie magnétique par l'intermédiaire de l'effet dynamo devient un phénomène prépondérant.

C'est en 2000 que la naissance et l'entretien d'un champ magnétique par effet dynamo au sein d'un écoulement de fluide conducteur (sodium liquide) ont été obtenus pour la première fois en laboratoire pour cette gamme de Reynolds magnétiques (Stieglitz et Muller, 2001). Il faut souligner que les champs de vitesses utilisés dans ces deux réalisations sont fortement contraints par les conditions aux bords et le système de forçage et ont été préalablement optimisés dans des modèles en eau afin de donner le seuil en Reynolds magnétique le plus faible possible : d'où l'appellation de dynamo non homogène souvent employée pour ces expériences.

L'expérience de Riga (Gailitis et al., 2000) s'appuie sur un écoulement modèle générateur d'effet dynamo appelé écoulement de Ponomarenko (Ponomarenko, 1973). Il correspond à un mouvement de translation et de rotation solide d'un conducteur cylindrique infini entouré d'un conducteur solide de même conductivité. L'écoulement expérimental est réalisé dans trois cylindres co-axiaux. Dans le cylindre intérieur, un jet hélicoïdal est produit par une turbine située dans la partie haute. Le fluide boucle dans un second cylindre par un écoulement de retour vertical ascendant et le tout est entouré d'un troisième cylindre contenant du fluide au repos. Le seuil dynamo est donné par le nombre de Reynolds magnétique critique basé sur la vitesse maximale et le rayon du cylindre intérieur $R_c^m \approx 18$. Le champ magnétique obtenu au-delà de ce seuil dynamo est de l'ordre de $100 G = 10mT$, oscille en temps et a une structure hélicoïdale.

L'expérience de Karlsruhe (Stieglitz et Muller, 2001) s'inspire d'un autre écoulement favorable à la dynamo appelé écoulement de G.O. Roberts (Roberts, 1972). Il s'agit d'un réseau bidimensionnel périodique (infini) de tourbillons de signe opposé et alternés traversés par des jets hélicoïdaux dirigés vers le haut ou vers le bas de façon alternée. Dans

l'expérience, le module comporte 52 cellules avec un écoulement central non tournant entouré par un jet hélicoïdal.

Six expériences de dynamo homogène en champ de vitesse non contraint sont en cours d'études (Gailitis et al., 2002). Trois expériences [Sweet et al. (2001), Bourgoin et al. (2002), Forest et al. (2002)] comportent des enceintes remplies de sodium liquide entraîné par des disques ou des turbines en regard et en contra-rotation ou co-rotation créant un écoulement fortement turbulent. Celle située à Cadarache dans le cadre d'une collaboration CNRS-CEA (Bourgoin et al., 2002) utilise un écoulement dans un cylindre appelé von Kármán (VKS).

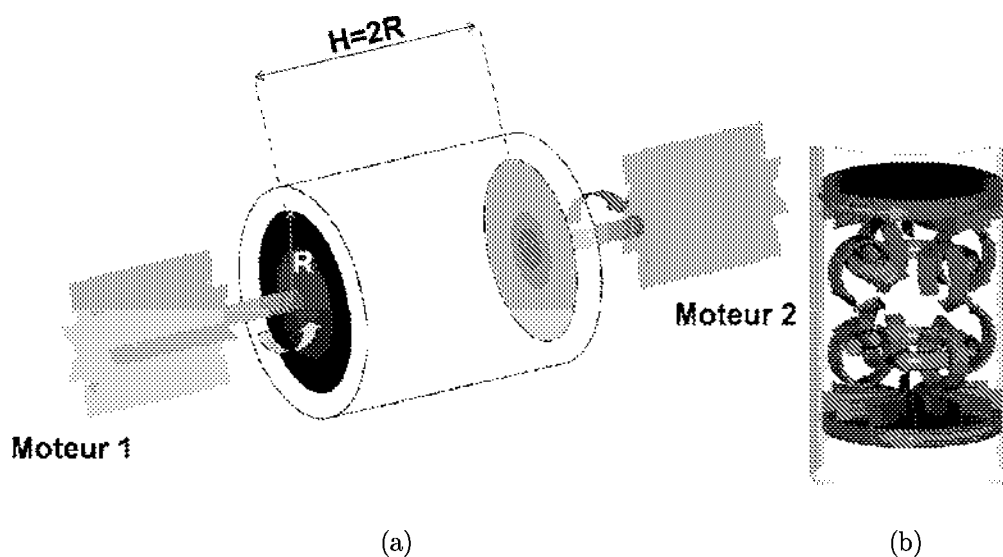


FIGURE 1.10 – (a) Configuration expérimentale de von Kármán sodium, (b) schéma de l'écoulement moyen entre les deux turbines contra-rotatives. L'écoulement toroïdal est représenté en bleu et le pompage poloïdal en rouge.

Chapitre 2

Modélisation géométrique et mathématique de l'écoulement

Les écoulements générés par deux disques en rotation, peuvent être étudiés, de manière théorique, au moyen d'analyse en similitude (pour la structure de l'écoulement) et d'analyse de stabilité. Les études expérimentales et numériques s'intéressent différemment, les études expérimentales et numériques s'intéressent à des écoulements dits "réalistes" impliquant des cavités de dimension finie. L'électromagnétisme et la mécanique des fluides, à la magnéto-hydrodynamique puise sa richesse dans le couplage entre le champ de vitesse et le champ magnétique.

Le sujet traité dans cette thèse utilise de manière équivalente deux systèmes d'équations de base : les équations de Maxwell dans leur approximation de magnéto-statique et les équations de Navier-Stokes, ainsi que l'approximation de Boussinesq. Nous allons les présenter dans ce chapitre. De nombreux ouvrages exposent en détail ces équations (Moreau (1990), Fox et McDonald (1994)).

2.1 Modélisation géométrique

2.1.1 Géométrie

On considère un écoulement incompressible et newtonien dans une cavité cylindrique verticale (figure 2.1). La paroi du cylindre est stationnaire et isolante. Les disques supérieur et inférieur tournent à la vitesse angulaire opposée $+\Omega$ et $-\Omega$. Un gradient de

température vertical est appliqué dans l'approximation de Boussinesq et les disques supérieur et inférieur sont maintenus aux températures T_0 et $T_0 + \Delta T$, respectivement. L'application du champ magnétique B_0 crée une force de freinage (force de Lorentz) à travers l'apparition du courant induit (figure 2.2).

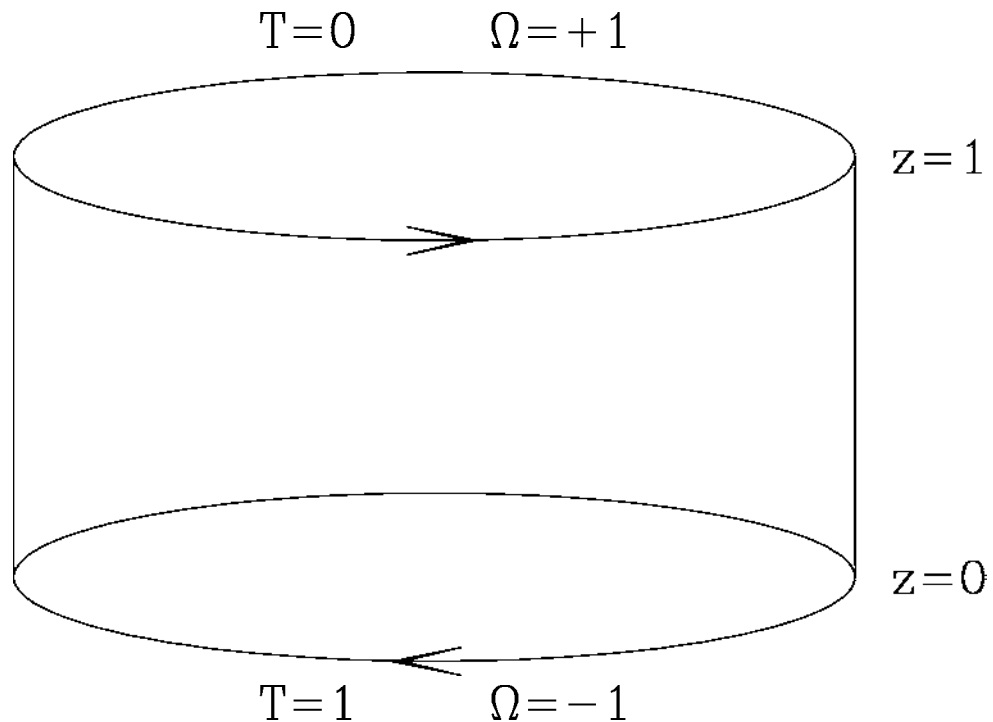


FIGURE 2.1 – *Cylindre de hauteur et de rayon égaux. Le disque inférieur chauffé tourne dans le sens anti-horaire, alors que le disque supérieur refroidi tourne dans le sens horaire.*

2.1.2 Symétrie

Les disques en rotation entraînent dans leur mouvement les couches de fluide immédiatement adjacentes du fait de la viscosité. Cela crée une couche de cisaillement de vitesse azimuthale prédit par Nore et al. (2004). Sous l'effet de la force centrifuge, les particules sont rejetées vers l'enveloppe extérieure. Elles vont remonter le long de la paroi avant d'être redirigées vers le centre à une autre hauteur. Ces mouvements créent des zones de recirculation d'amplitude plus faible selon un schéma appelé pompage d'Ekman (voir fi-

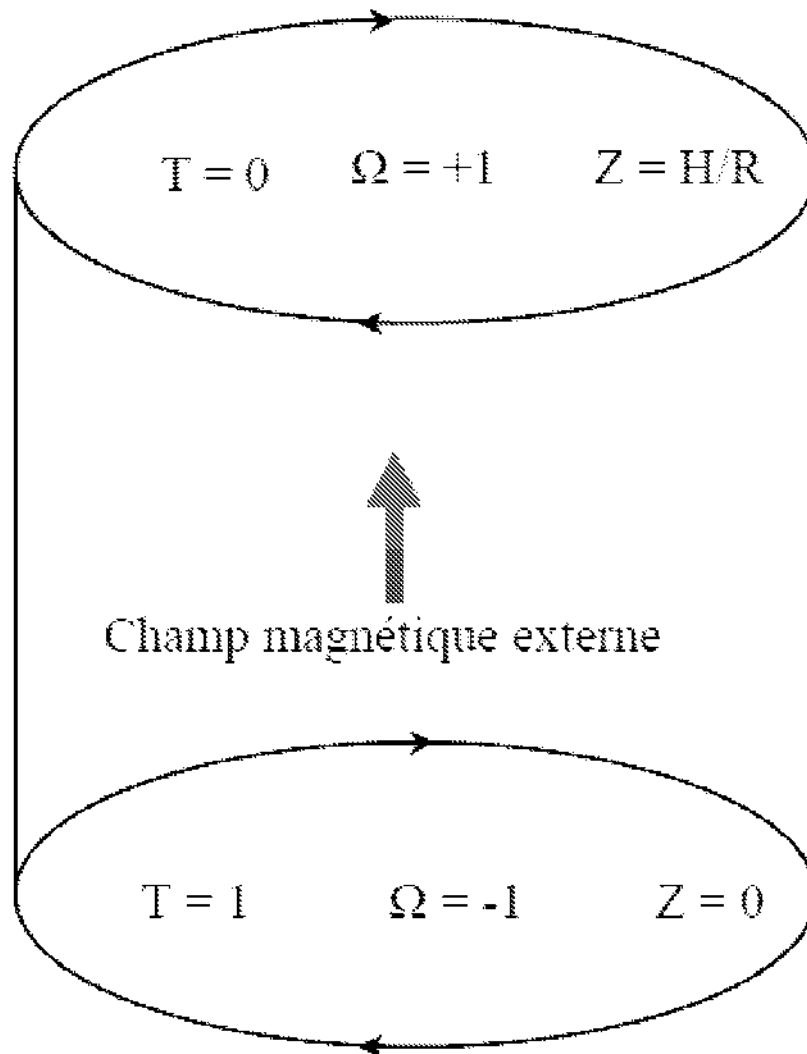


FIGURE 2.2 – Cylindre de hauteur égale à deux. Le disque inférieur chauffé tourne dans le sens anti-horaire, alors que le disque supérieur refroidi tourne dans le sens horaire. Un champ magnétique externe est appliqué suivant la direction verticale.

gures 2.3c). Le long de l'axe, le flux est dirigé vers le disque tournant et compense ainsi la perte de masse qui existait à ce niveau du fait de l'expulsion des particules. L'écoulement est donc caractérisé par la juxtaposition de deux tourbillons contra-rotatifs séparés par une couche de transition.

Le problème de la convection de Rayleigh-Bénard présente une symétrie de réflexion combinée en z et en T au sujet de leurs valeurs moyennes, parfois appelée symétrie de Boussinesq. L'écoulement de von Kármán présente une symétrie de la réflexion combinée en z et en θ . La notée R_π de 180° par rapport à un axe horizontal passant à mi-hauteur du cylindre laisse l'écoulement invariant (Nore et al., 2004). Dans ce problème axisymétrique, la réflexion en θ signifie seulement le changement du signe de U_θ ; puisque toutes les solutions sont invariables sous la rotation en θ , ceux-ci ne sont pas considérés. Le problème de Rayleigh-Bénard/von Kármán présente ainsi la symétrie qui combine la réflexion en z , θ et T . L'état est de réflexion-symétrique s'il est invariable sous l'opérateur de réflexion défini dans les deux formulations par :

$$k : \begin{pmatrix} u_r \\ u_z \\ u_\theta \\ T \end{pmatrix} (r, z) \quad \begin{pmatrix} u_r \\ -u_z \\ -u_\theta \\ 1 - T \end{pmatrix} (r, 1 - z) \quad (2.1a)$$

ou

$$k : \begin{pmatrix} \varphi \\ u_\theta \\ T \end{pmatrix} (r, z) \quad \begin{pmatrix} -\varphi \\ -u_\theta \\ 1 - T \end{pmatrix} (r, 1 - z) \quad (2.1b)$$

2.2 Modélisation mathématique

2.2.1 Écoulement axisymétrique de von Kármán/Rayleigh Bénard, à $Pr = 1$, $\Gamma = 1$

Le principe de conservation de la masse, la loi fondamentale de la dynamique, et l'équation d'énergie, s'écrivent sous la forme vectorielle comme suit :

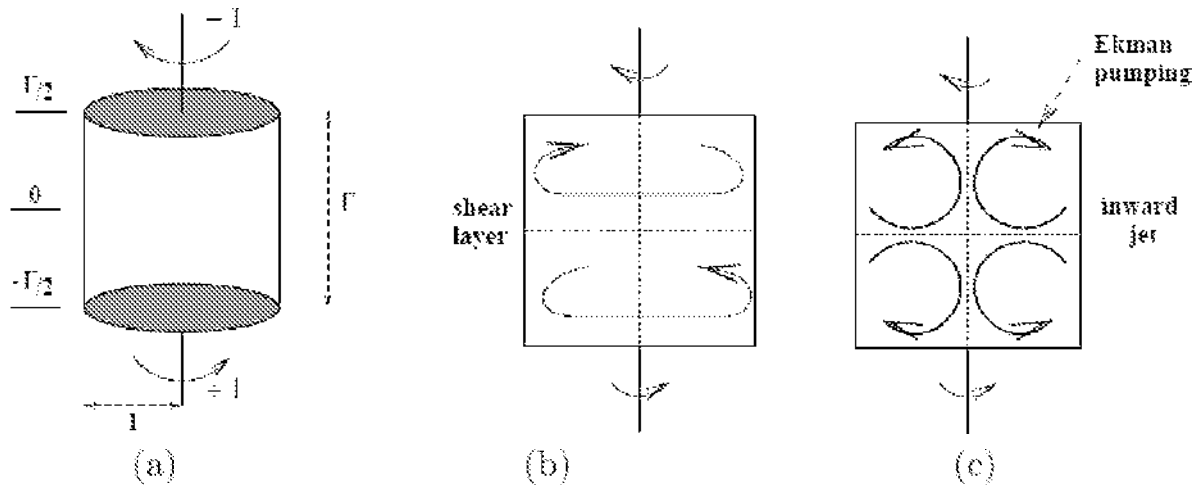


FIGURE 2.3 – (a) Configuration adimensionnée de l'écoulement. (b) Couche de cisaillement azimuthale et (c) zones de recirculation dues au pompage d'Ekman.

$$\nabla \cdot U = 0 \quad (2.2a)$$

$$\partial_t U + (U \cdot \nabla)U = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 U + \frac{Ra}{Pr Re^2} T e_z \quad (2.2b)$$

$$\partial_t T + \nabla T \cdot U = \frac{1}{Pr Re} \nabla^2 T \quad (2.2c)$$

Où U est le vecteur vitesse, P la pression, T la température, et ∇^2 le laplacien scalaire, Δ le laplacien vectoriel. Avec les conditions aux limites du problème :

$$u_r = u_\theta = \partial_r u_z = \partial_r T = 0 \text{ en } r = 0 \quad (2.3a)$$

$$u_r = u_\theta = u_z = \partial_r T = 0 \text{ en } r = 1 \quad (2.3b)$$

$$u_r = u_z = 0 \text{ et } u_\theta = -r \text{ et } T = 1 \text{ en } z = 0 \quad (2.3c)$$

$$u_r = u_z = 0 \text{ et } u_\theta = 1 \text{ et } T = 0 \text{ en } z = 1 \quad (2.3d)$$

A $Re \gg 0$, les composantes méridionales de la vitesse (v_r, v_z) sont décrites par la fonction de courant Ψ :

$$v_r e_r + v_z e_z = \frac{e_r}{r} \partial_z \Psi - \frac{e_z}{z} \partial_r \Psi + \frac{e_\theta}{r} \times \nabla \Psi \quad (2.4a)$$

On définit les opérateurs

$$\partial_{\pm} \equiv \partial_r \pm \frac{1}{r}, \quad (2.4b)$$

la vorticité azimutale (ou tourbillon) de l'écoulement est :

$$D^2\Psi \equiv \frac{1}{r} \left(\nabla^2 - \frac{2}{r}\partial_r \right) \Psi - \frac{1}{r} (\partial_- \partial_r + \partial_z^2) \Psi \quad (2.4c)$$

Le système d' équations adimensionnel de Navier-Stokes et Bonssinesq se réduit alors à :

$$\partial_s D^2\Psi + (v_r \partial_- + v_z \partial_z) D^2\Psi - \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) D^2\Psi - \frac{Ra}{Pr} \partial_r T + \partial_z \left(\frac{v_\theta^2}{r} \right) \quad (2.5a)$$

$$\partial_s T + (v_r \partial_r + v_z \partial_z) T - \frac{1}{Pr} \nabla^2 T \quad (2.5b)$$

$$\partial_s v_\theta + (v_r \partial_r + v_z \partial_z) \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) v_\theta \quad (2.5c)$$

La rotation apparaît en conditions aux limites :

$$\Psi = \partial_z \Psi = 0 \iff v_r = v_z = 0 \text{ et } v_\theta = 1 \text{ et } T = 0 \text{ en } z = 1 \quad (2.6a)$$

$$\Psi = \partial_z \Psi = 0 \iff v_r = v_z = 0 \text{ et } v_\theta = -1 \text{ et } T = 1 \text{ en } z = 0 \quad (2.6b)$$

$$\Psi = \partial_r \Psi = 0 \iff v_r = v_z = 0 \text{ et } v_\theta = 0 \text{ et } \partial_r T = 0 \text{ en } r = 1 \quad (2.6c)$$

$$\Psi = D^2\Psi = 0 \iff v_r = \partial_r v_z = 0 \text{ et } v_\theta = 0 \text{ et } \partial_r T = 0 \text{ en } r = 0 \quad (2.6d)$$

La vitesse et le temps dans (2.2)-(2.3) et dans (2.5)-(2.6) sont reliés par $V = Re U$ et $s = t/Re$; la temperature T et toutes les longueurs restent inchangées. Les équations (2.5c) et (2.5b) peuvent être considérées comme des équations d'advection-diffusion pour la vitesse azimutale v_θ et la température T . L'équation (2.5a) montre que des gradients de v_θ et T produisent à leurs tours de la vorticité. Le gradient vertical $\partial_z(v_\theta^2/r)$, une fois combiné avec les conditions aux limites (2.6a)-(2.6b), correspond au pompage d'Ekman, par lequel z dépend de v_θ , produit de la vorticité et de la vitesse méridionale pour Re diff rent de zéro. Cette vitesse méridionale affecte alternativement la vitesse azimutale et la température par l'intermédiaire des équations (2.5c) et (2.5b). Cependant, le terme

de gradient thermique $\partial_r T$ dans l'équation de vorticité (2.5a) est radial. Ainsi le gradient axial de la température imposé par les conditions aux limites de (2.6a)-(2.6b) ne donne pas immédiatement le mouvement au fluide pour Ra diff rent de zéro. La convection de Rayleigh-Bénard se produit par l'intermédiaire d'une instabilité à un seuil fini Ra_c , contrairement à la convection naturelle, dans laquelle un gradient horizontal imposé produit du mouvement pour n'importe quel $Ra > 0$ par l'intermédiaire du terme $Ra\partial_r T$.

2.2.2 Ecoulement asymétrique de von K rm n/Rayleigh Bénard en présence d' un champ magnétique, à $Pr = 0.015$, $\Gamma = 2$

Les équations de Maxwell, en régime quasi-statique, (c'est à dire quand les courants de déplacements sont négligés) s'écrivent :

$$rot E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.7a)$$

$$rot \left(\frac{B}{\mu} \right) = j \quad (2.7b)$$

De ces équations on déduit :

$$div B = 0 \quad (2.7c)$$

$$div j = 0 \quad (2.7d)$$

La loi d'Ohm complète le système d'équation :

$$j = \sigma(E + V \wedge B) \quad (2.7e)$$

Il est parfois pratique d'introduire le potentiel électrique φ et le vecteur potentiel A du champ magnétique défini par $B = rot A$ de sorte qu'en intégrant l'équation de Maxwell (2.7a) le vecteur champ électrique E s'écrit :

$$E = -grad\varphi - \frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.7f)$$

L'équation de transport du champ magnétique dans un écoulement fluide conducteur s'obtient en prenant le rotationnel de la loi d'Ohm et en utilisant les équations de Maxwell :

$$\frac{\partial B}{\partial t} + rot(V \wedge B) + \frac{1}{\mu_m \sigma_c} \Delta B \quad (2.7g)$$

La formulation équivalente exprimée à l'aide du potentiel vecteur A s'obtient en éliminant j de (2.7b) et (2.7e) :

$$\frac{\partial A}{\partial t} - V \wedge \text{rot}(A) + \frac{1}{\mu_m \sigma_e} \Delta A - \text{grad} \varphi \quad (2.7h)$$

Les propriétés statistiques du fluide représentées par la densité ρ , la viscosité cinématique ν , la perméabilité magnétique μ_m et la conductivité électrique σ_e seront constantes.

Au vu de la géométrie étudiée, le système adimensionnel simplifié pour les équations développées en coordonnées cylindriques (r, θ, z) est le suivant :

– Equation de continuité

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.8)$$

– Equation de quantité de mouvement radiale

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_r}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\theta u_r)}{\partial \theta} + \frac{\partial(u_z u_r)}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} - \frac{\partial p}{\partial r} + \\ & \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} \right) - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] + F_{MR} \end{aligned} \quad (2.9a)$$

– Equation de quantité de mouvement azimutale

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_\theta}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r u_\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\theta u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(u_z u_\theta)}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ & \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] + F_{M\theta} \end{aligned} \quad (2.9b)$$

La prise en compte d'un gradient thermique introduit un couplage entre la densité et la température considéré sous l'approximation de Boussinesq simplifiée. Ainsi, la densité est considérée constante (comme dans le cas incompressible isotherme) mais ses variations sont reliées aux variations de température dans les termes de poussée d'Archimède et dans les champs d'accélération gravifique. On suppose que les variations de la densité du fluide ne sont pas trop importantes ce qui nous permet de considérer la densité constante ρ , égale à ρ_0 , sauf dans le terme de gravité où elle est supposée varier linéairement avec la température, de la façon suivante :

$$\rho = \rho_0(1 - \beta_0(T - T_0)) \quad (2.9c)$$

ou β_0 est le coefficient thermique de dilatation volumique, T_0 une température de référence et ρ_0 la densité correspondant à cette température de référence.

– Equation de quantité de mouvement axiale

$$\frac{\partial u_z}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r u_z)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (u_\theta u_z)}{\partial \theta} + \frac{\partial (u_z u_z)}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] + \frac{Ra}{Pr Re^2} T + F_{MZ} \quad (2.9d)$$

– Equation d'énergie

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r T)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (u_\theta T)}{\partial \theta} + \frac{\partial (u_z T)}{\partial z} - \frac{1}{Pr Re} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \quad (2.10)$$

– Equation du potentiel électrique suivie par un champ magnétique radial (B_r)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \quad (2.11a)$$

– Equation du potentiel électrique suivie par un champ magnétique azimutal (B_θ)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_z)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \quad (2.11b)$$

– Equation du potentiel électrique suivie par un champ magnétique axial (B_z)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \quad (2.11c)$$

Les forces électromagnétiques ainsi que le courant électrique pour les trois directions du champ magnétique :

– Cas d' un champ magnétique radial

$$F_{MR} = 0, \quad j_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (2.12a)$$

$$F_{M\theta} = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial z} - u_\theta \right) \frac{Ha^2}{Re}, \quad j_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + u_z \quad (2.12b)$$

$$F_{MZ} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - u_z \right) \frac{Ha^2}{Re}, \quad j_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - u_\theta \quad (2.12c)$$

– Cas d' un champ magnétique azimutal

$$F_{MR} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - u_r \right) \frac{Ha^2}{Re} \cdot j_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} - u_z \quad (2.12d)$$

$$F_{M\theta} = 0, j_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad (2.12e)$$

$$F_{MZ} = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial r} - u_z \right) \frac{Ha^2}{Re} \cdot j_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - u_r \quad (2.12f)$$

– Cas d' un champ magnétique axial

$$F_{MR} = \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - u_r \right) \frac{Ha^2}{Re} \cdot j_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} - u_\theta \quad (2.12g)$$

$$F_{M\theta} = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial r} - u_\theta \right) \frac{Ha^2}{Re} \cdot j_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - u_r \quad (2.12h)$$

$$F_{MZ} = 0, j_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (2.12i)$$

2.3 Conditions aux limites

Les conditions aux limites à l'état axisymétrique du problème sont exprimées par :

– Condition à l'axe du cylindre

$$u_r = u_\theta = \partial_r u_z = \partial_r T = j.n = 0 \text{ en } r = 0 \quad (2.13a)$$

– Condition à la paroi latérale du cylindre

$$u_r = u_\theta = u_z = \partial_r T = j.n = 0 \text{ en } r = R \quad (2.13b)$$

– Condition de rotation des disques

$$u_r = u_z = j.n = 0 \text{ et } u_\theta = -r \text{ et } T = 1 \text{ en } z = 0 \quad (2.13c)$$

$$u_r = u_z = j.n = 0 \text{ et } u_\theta = +r \text{ et } T = 0 \text{ en } z = \Gamma \quad (2.13d)$$

Les conditions aux limites à l'état non-axisymétrique du problème sont exprimées par :

– Condition à l'axe du cylindre

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \quad \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} \quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0 \quad (2.14a)$$

– Condition de périodicité

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, z) &= u_r(r, \theta + 2\pi, z) \\ u_\theta(r, \theta, z) &= u_\theta(r, \theta + 2\pi, z) \\ u_z(r, \theta, z) &= u_z(r, \theta + 2\pi, z) \end{aligned} \quad (2.14b)$$

– Condition de rotation des disques

$$u_r = u_z = 0, \partial_z \varphi = 0, u_\theta = -r \text{ et } T = 1 \text{ en } z = 0 \quad (2.14c)$$

$$u_r = u_z = 0, \partial_z \varphi = 0, u_\theta = r \text{ et } T = 0 \text{ en } z = \Gamma \quad (2.14d)$$

– Condition à la paroi latérale du cylindre

$$u_r = u_\theta = u_z = \partial_r T = \partial_r \varphi = 0 \text{ en } r = R \quad (2.14e)$$

Le choix des nombres adimensionnels et, surtout, des échelles caractéristiques est toujours très délicat. Cette difficulté est accrue par le fait que le champ magnétique et le champ de vitesse n'ont pas nécessairement les mêmes échelles. La mise sous forme adimensionnelle est devenue une habitude chez les mécaniciens, car c'est un immense avantage de pouvoir réduire à quelques nombres l'ensemble des quantités physiques mises en jeu dans un problème. Cependant, cet outil puissant doit rester au service de la réalité physique et c'est avec une certaine prudence que l'on doit tirer des conclusions des lois d'évaluation trouvées en fonction de nombres adimensionnels.

Dans cette thèse sont présentées, notamment lors de l'étude d'ordres de grandeur, les formulations dimensionnelles et adimensionnelles. Bien que ce choix soit pénalisant pour la facilité de lecture et n'ait pas la rigueur d'une présentation faite uniquement sous forme adimensinnelle, nous pensons que cela permet d'éviter des interprétations erronées et d'être mieux compris par les ingénieurs qui auraient à dimensionner des installations sur sites industriels.

vitesse radiale	ΩR	$u_r^* = u_r / \Omega R$
vitesse axiale	ΩR	$u_z^* = u_z / \Omega R$
vitesse azimutale	ΩR	$u_\theta^* = u_\theta / \Omega R$
coordonnée radiale	R	$r^* = r / R$
coordonnée axiale	R	$z^* = z / R$
temps	$1/\Omega$	$\tau^* = \tau \Omega$
température	ΔT	$\theta = T - T_0 / \Delta T$
pression	$\rho(\Omega R)^2$	$p^* = p - p_0 / \rho(\Omega R)^2$
champs magnétique	B_0	$B^* = B / B_0$
potentiel électrique	$\Omega R^2 B_0$	$\varphi^* = \varphi / \Omega R^2 B_0$

TABLEAU 2.1 – Paramètres adimensionnels.

Dans le tableau 2.1 on présente les échelles d'adimensionnalisation d'espace et de temps introduites dans les équations précédentes.

Les quatre nombres adimensionnels apparaissent pour l'ensemble des équations sont : les nombres de Reynolds Re , Prandtl Pr , Rayleigh Ra et Hartmann Ha , définis comme suit.

$$Re = \Omega R^2 / \nu$$

$$Pr = \nu / \alpha$$

$$Ra = g\gamma\Delta T R^3 / \alpha\nu$$

$$Ha = B_0 R \sqrt{\sigma / \mu}$$

Le nombre de Reynolds est défini comme le rapport des forces centrifuges sur les forces visqueuses. Le nombre de Prandtl est caractéristique des propriétés physiques du fluide et non de l'écoulement. Il est défini comme le rapport des diffusivités cinématique et thermique.

Pour un fluide donné, le nombre de Rayleigh représente le rapport des forces gravifiques sur les forces de viscosité. Plus ce nombre est grand et plus l'écoulement obtenu est dominé par la convection thermique. Le nombre de Hartmann caractérise le rapport des forces électromagnétiques aux forces visqueuses.

Chapitre 3

Résolution numérique

La méthode des volumes finis consiste à discrétiser le domaine physique étudié en un domaine de calcul qui se compose d'un nombre fini de volumes continus entourant chacun un nœud.

3.1 Discrétisation

3.1.1 Discrétisation temporelle des équations

La discrétisation des termes non stationnaires dans les équations de mouvement et dans l'équation d'énergie suit un schéma temporel du second ordre. Si on considère ϕ comme variable dépendante du temps; un développement limité en série de Taylor au deuxième ordre des variables ϕ^t et $\phi^{t+\Delta t}$ est :

$$\phi^t = \phi^{t+\Delta t} - \Delta\tau \frac{\partial \phi^{t+\Delta t}}{\partial t} + \frac{(\Delta\tau)^2}{2} \frac{\partial^2 \phi^{t+\Delta t}}{\partial t^2} + 0(\Delta\tau)^3 \quad (3.1)$$

$$\phi^{t-\Delta t} = \phi^{t+\Delta t} - 2\Delta\tau \frac{\partial \phi^{t+\Delta t}}{\partial t} + \frac{(2\Delta\tau)^2}{2} \frac{\partial^2 \phi^{t+\Delta t}}{\partial t^2} + 0(\Delta\tau)^3 \quad (3.2)$$

On multiplie la relation (3.1) par 4, et on fait la différence entre le produit et la relation (3.2) pour obtenir :

$$4\phi^t - \phi^{t-\Delta t} = 3\phi^{t+\Delta t} - 2\Delta\tau \frac{\partial \phi^{t+\Delta t}}{\partial t} + 0(\Delta\tau)^3. \quad \text{d'où :}$$

Il est clair que l'erreur de troncature est de l'ordre de $(\Delta\tau)^2$. Toutes les dérivées temporelles sont discrétisées comme suit :

$$\frac{\partial\phi^{t+\Delta t}}{\partial t} \approx \frac{3\phi^{t+\Delta t} - 4\phi^t + \phi^{t-\Delta t}}{2\Delta t} \quad (3.3)$$

3.1.2 Discrétisation des termes convectifs et non linéaires

La discrétisation des termes convectif et non linéaires dans l'ensemble des équations, suit le schéma explicite d'Adam-Bashforth. Ce schéma est obtenu par une expansion en série de Taylor au deuxième ordre de la variable $\phi^{t+\Delta t}$. On multiplie la relation (3.1) par 2, puis on fait la différence entre le produit de la relation (3.2), et (3.3) on obtient :

$$\phi^{t+\Delta t} - 2\phi^t + \phi^{t-\Delta t} + \frac{(\Delta\tau^2)}{2} \frac{\partial^2\phi^{t+\Delta t}}{\partial t^2} + O(\Delta\tau)^2 \quad (3.4)$$

donc tous les termes convectifs et non linéaires sont discrétisés comme suit :

$$(U \cdot \nabla) \phi^{t+\Delta t} \approx 2(U \cdot \nabla) \phi^t - (U \cdot \nabla) \phi^{t-\Delta t} \quad (3.5)$$

La discrétisation temporelle des termes diffusifs et des termes des gradients de pression dans l'ensemble des équations modélisantes sont totalement implicites. La discrétisation temporelle de la poussée thermique axiale, dans l'équation d'énergie, et les forces électromagnétiques dans les équations de mouvements suivent le schéma d'Adam-Bashforth.

3.1.3 Discrétisation spatiale des équations

Pour la discrétisation spatiale, on utilise le schéma des différences centrées, ayant une erreur de troncature d'ordre deux $(\Delta r)^2, (\Delta\theta)^2$ et $(\Delta z)^2$ suivant les directions radiale, azimutale et axiale respectivement.

La figure 5.5 représente la répartition du maillage pour les trois directions, et la même démonstration peut se faire dans les deux autres directions.

Les variables scalaires (pression, température, et potentiel électrique) sont stockées dans les nœuds du maillage. Cependant les composantes du champ de vitesse sont stockées aux centres des faces des volumes de contrôle, ce type de maillage dit intercalé permet une meilleure estimation du flux convectif, une bonne estimation de la force de pression dans les équations de mouvement, et offre une grande stabilité numérique.

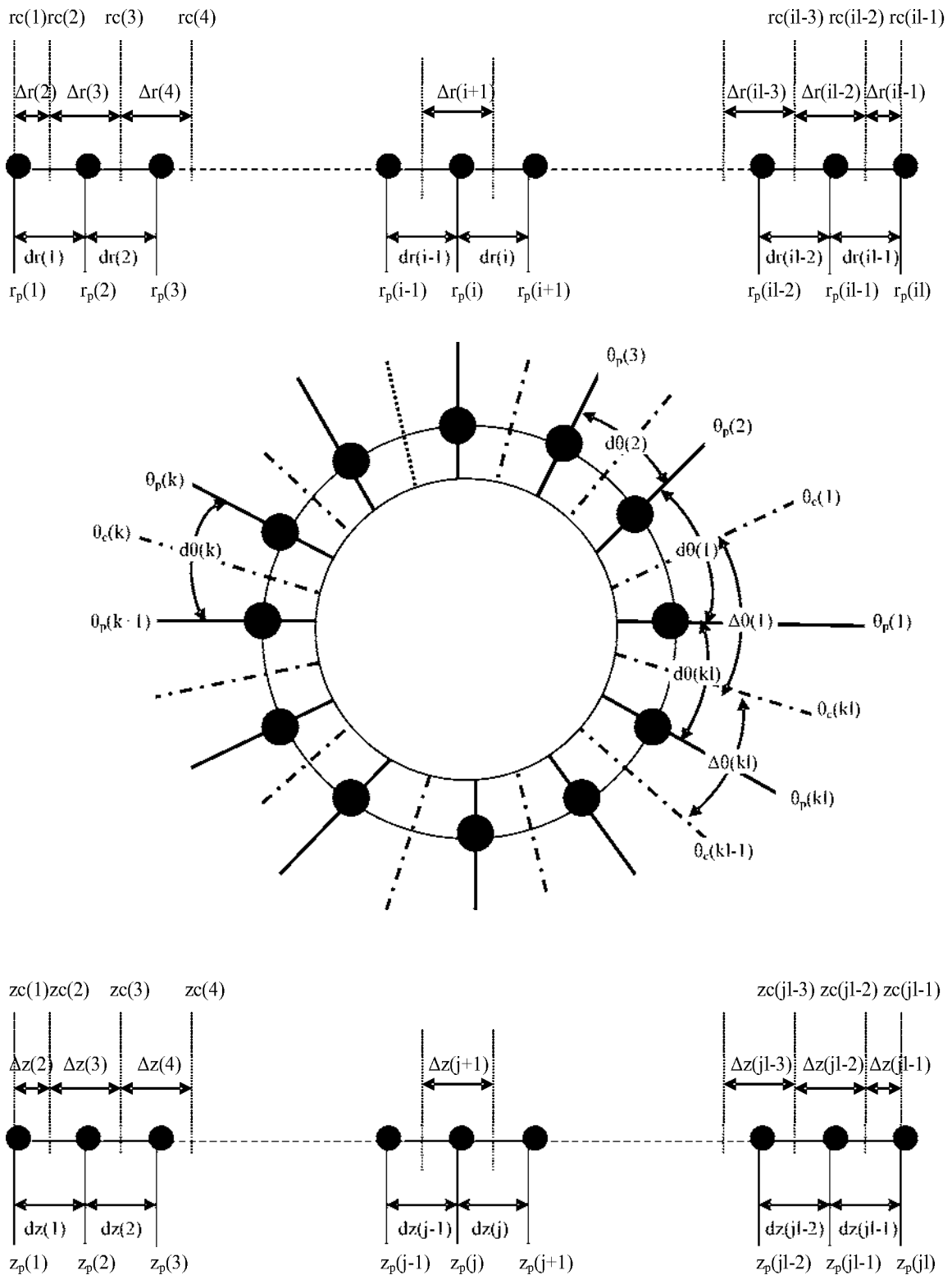


FIGURE 3.1 – Répartition du maillage dans les trois directions

3.2 Détails de discrétisation

Dans l'ensemble des équations (quantité de mouvement, continuité, d'énergie, et potentiel électrique) :

1. Toutes les variables ($u_r, u_\theta, u_z, \Theta, \varphi$) dont l'exposant est 0, désignent celles évaluées au temps $\tau - \Delta\tau$.
2. Toutes les variables ($u_r, u_\theta, u_z, \Theta, \varphi$) dont l'exposant est 1, désignent celles évaluées au temps τ .
3. Toutes les variables ($u_r, u_\theta, u_z, \Theta, \varphi$) qui ne possèdent aucun exposant, désignent celles évaluées au temps $\tau + \Delta\tau$.

3.2.1 Equation de continuité

L'équation de continuité est intégrée dans le volume de contrôle typique (figure 3.2) comme suit :

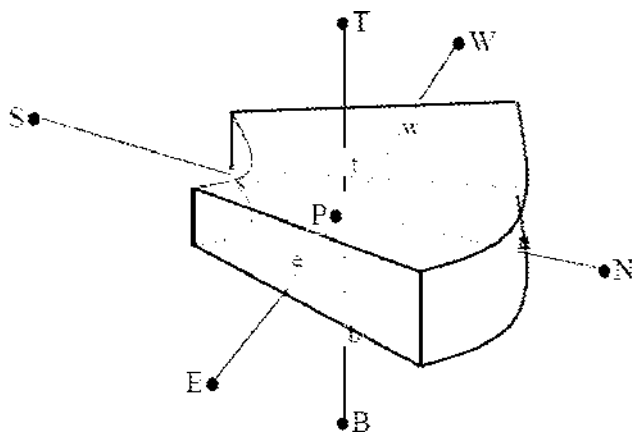


FIGURE 3.2 – Volume de contrôle typique

$$\int_w^c \int_s^u \int_b^t \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right] r dr d\theta dz = 0 \quad (3.6)$$

$$\int_w^c \int_s^u \int_b^t \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} r dr d\theta dz = (r_u u_u - r_s u_s) \Delta\theta_p \Delta z_p \quad (3.7)$$

$$\int_w^c \int_s^u \int_b^t \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} r dr d\theta dz = (w_c - w_w) \Delta r_p \Delta z_p \quad (3.8)$$

$$\int_w^c \int_s^u \int_b^t \frac{\partial v}{\partial z} r dr d\theta dz \quad (v_t - v_b) r_p \Delta\theta_p \Delta z_p \quad (3.9)$$

On peut mettre l'équation de discrétisation finale sous la forme :

$$(r_n u_n - r_s u_s) \Delta\theta \Delta z_p + (w_c - w_w) \Delta r_p \Delta z_p + (v_t - v_b) r_p \Delta\theta_p \quad 0 \quad (3.10)$$

3.2.2 Equation de quantité de mouvement dans la direction radiale

L'intégrale de l'équation de quantité de mouvement radiale se fait dans le volume de contrôle décalé suivant la direction radiale.

$$\int_w^c \int_{su}^{nu} \int_b^t \frac{\partial u}{\partial \tau} r dr d\theta dz \quad \frac{3u_{pu} - 4u_{pa} + u_{pa}^0}{2\Delta\tau} r_n dr_n \Delta\theta_p \Delta z_p \quad (3.11)$$

$$\int_w^c \int_{su}^{nu} \int_b^t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u u) r dr d\theta dz$$

$$[2r_{nu} (u_{nu}^2)^1 - 2r_{su} (u_{su}^2)^1 - r_{nu} (u_{nu}^2)^0 - r_{su} (u_{su}^2)^0] \Delta\theta_p \Delta z_p \quad (3.12)$$

$$\int_w^c \int_{su}^{nu} \int_b^t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r w u) r dr d\theta dz \quad [2(w_{cu}^1 u_{cu}^1 - w_{wu}^1 u_{wu}^1) - (w_{cu}^0 u_{cu}^0 - w_{wu}^0 u_{wu}^0)] dr_n \Delta z_p \quad (3.13)$$

$$\int_w^c \int_{su}^{nu} \int_b^t -\frac{\partial P}{\partial r} r dr d\theta dz \quad (P_P - P_N) r_n \Delta\theta_p \Delta z_p \quad (3.14)$$

$$\int_w^c \int_{su}^{nu} \int_b^t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) r dr d\theta dz \quad \left(r_{nu} \frac{u_{Nu} - u_{Pa}}{dr_n} - \frac{u_{Pa} - u_{Su}}{dr_s} \right) \Delta\theta_n \Delta z_p \quad (3.15)$$

$$\int_w^c \int_{su}^{nu} \int_b^t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) r dr d\theta dz \quad \left(\frac{1}{r_{cu}} \frac{u_{Fu} - u_{Pa}}{d\theta_c} - \frac{1}{r_{wu}} \frac{u_{Pa} - u_{Wu}}{d\theta_w} \right) dr_n \Delta z_p \quad (3.16)$$

$$\int_w^c \int_{su}^{nu} \int_b^t \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) r dr d\theta dz \quad \left(\frac{u_{Fu} - u_{Pu}}{dz_t} - \frac{u_{Pu} - u_{Bu}}{dz_b} \right) r_n dr_n \Delta\theta_p \quad (3.17)$$

$$\int_w^c \int_{su}^{nu} \int_b^t -\frac{u}{r^2} r dr d\theta dz \quad -\frac{u_{pu}}{r_n} dr_n \Delta\theta_p \Delta z_p \quad (3.18)$$

$$\int_w^c \int_{su}^{nu} \int_b^t -\frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} r dr d\theta dz$$

$$-\frac{4}{r_n} \left(\frac{w_{unu}^1 + w_{wsu}^1}{2} - \frac{w_{cnu}^1 + w_{csu}^1}{2} \right) dr_n \Delta z_p + \frac{2}{r_n} \left(\frac{w_{unu}^0 + w_{wsu}^0}{2} - \frac{w_{cnu}^0 + w_{csu}^0}{2} \right) dr_n \Delta z_p \quad (3.19)$$

On regroupe tous les termes précédents pour obtenir une équation de discrétisation finale sous la forme suivante :

$$A_P u_{pu} - A_E u_{Eu} + A_W u_{Wu} + A_N u_{Nu} + A_S u_{Su} + A_T u_{Tu} + A_B u_{Bu} + S_u \quad (3.20)$$

où les coefficients de l'équation de discrétisation et le terme source, sont donnés par les relations suivantes :

$$A_E = \frac{1}{Re} \frac{dr_n \Delta z_p}{r_{cu} d\theta_c} \cdot A_W = \frac{1}{Re} \frac{dr_n \Delta z_p}{r_{wu} d\theta_c} \cdot A_N = \frac{1}{Re} \frac{r_{uu} \Delta \theta_p \Delta z_p}{dr_n} \cdot A_S = \frac{1}{Re} \frac{r_{su} \Delta \theta_p \Delta z_p}{dr_s} \cdot A_T = \frac{1}{Re} \frac{r_n dr_n \Delta \theta_p}{dz_t} \cdot A_B \quad (21)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B + \frac{1}{Re} \frac{dr_n \Delta \theta_p \Delta z_p}{r_n} + \frac{3}{2} \frac{r_n dr_n \Delta \theta_p \Delta z_p}{\Delta \tau} \quad (3.22)$$

$$S_u = \frac{A u_{pu}^1 - u_{pu}^0}{2 \Delta \tau} r_n dr_n d\theta_p dz_p + (P_P - P_N) r_n \Delta \theta_p \Delta z_p + [(2w_{pu}^2)^1 - (w_{pu}^2)^0] dr_n \Delta \theta_p \Delta z_p$$

$$- \frac{4}{r_n} \left(\frac{w_{wu}^1 + w_{su}^1}{2} - \frac{w_{cu}^1 + w_{su}^1}{2} \right) dr_n \Delta z_p +$$

$$\frac{2}{r_n} \left(\frac{w_{wu}^0 + w_{su}^0}{2} - \frac{w_{cu}^0 + w_{su}^0}{2} \right) dr_n \Delta z_p +$$

$$[-2(w_{cu}^1 u_{cu}^1 - w_{wu}^1 u_{wu}^1) + (w_{cu}^0 u_{cu}^0 - w_{wu}^0 u_{wu}^0)] dr_n \Delta z_p +$$

$$[-2r_{nu} (u_{nu}^2)^1 + 2r_{su} (u_{su}^2)^1 + r_{nu} (u_{nu}^2)^0 - r_{su} (u_{su}^2)^0] \Delta \theta_p \Delta z_p +$$

$$[-2(v_{tu}^1 u_{tu}^1 - v_{bu}^1 u_{bu}^1) + (v_{tu}^0 u_{tu}^0 - v_{bu}^0 u_{bu}^0)] r_n dr_n \Delta \theta_p + (2F_{MR}^1 - F_{MR}^0) r_n dr_n \Delta \theta_p \Delta z_p \quad (3.23)$$

Les coefficients de la relation (3.35) sont tous positifs, car ils ne dépendent que des paramètres du maillage et de Reynolds. Ainsi l'une des règles de la méthode des volumes finis (exigeant le même signe pour tous les coefficients de l'équation de discrétisation) est vérifiée, et il n'y a pas de risque d'obtenir des résultats physiquement inacceptables. D'après la relation (3.22), on constate que le coefficient A_p est positif, et supérieur à la somme des autres coefficients. Ce qui permet de satisfaire la deuxième règle de la méthode des volumes finis exigeant la dominance diagonale de la matrice des coefficients de l'équation de discrétisation, ce qui assure la stabilité numérique des calculs.

3.2.3 Equation de quantité de mouvement dans la direction azimutale

L'intégrale de l'équation de quantité de mouvement suivant la direction azimutale (section §2.2§) dans le volume de contrôle décalé est comme suit :

$$\int_{ux}^{cx} \int_s^n \int_b^l \frac{\partial w}{\partial \tau} r dr d\theta dz = \frac{3u_{pu} - 4u_{pu}^1 + u_{pu}^0}{2\Delta\tau} r_p \Delta r_p d\theta_p \Delta z_p \quad (3.24)$$

$$\int_{ux}^{cx} \int_s^n \int_b^l \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ruw) r dr d\theta dz = \int_{ux}^c \int_{su}^{nu} \int_b^l \left[\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ruw)^1 - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ruw)^0 \right] r dr d\theta dz$$

$$\left[2r_{nu} u_{nu}^1 w_{nu}^1 - 2r_{su} u_{su}^1 w_{su}^1 - r_{nu} u_{nu}^0 w_{nu}^0 - r_{su} u_{su}^0 w_{su}^0 \right] d\theta_c \Delta z_p \quad (3.25)$$

$$\int_{ux}^{cx} \int_s^n \int_b^l \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (rww) r dr d\theta dz = \int_{ux}^{cx} \int_s^n \int_b^l \left[\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (rww)^1 - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (rww)^0 \right] r dr d\theta dz$$

$$\left[2(w_{cu}^1 w_{cu}^1 - w_{cu}^0 w_{cu}^0) - (w_{cu}^0 w_{cu}^0 - w_{cu}^0 w_{cu}^0) \right] \Delta r_p \Delta z_p \quad (3.26)$$

$$\int_{ux}^{cx} \int_s^n \int_b^l \frac{uw}{r} r dr d\theta dz = (2u_{pu}^1 w_{pu}^1 - u_{pu}^0 w_{pu}^0) r_p d\theta_c \Delta z_p \quad (3.27)$$

$$\int_{ux}^{cx} \int_s^n \int_b^l -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} r dr d\theta dz = (P_p - P_E) \Delta r_p \Delta z_p \quad (3.28)$$

$$\int_{ux}^{cx} \int_s^n \int_b^l \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) r dr d\theta dz = \left[r_{nu} \frac{\partial w}{\partial r}_{nu} - r_{su} \frac{\partial w}{\partial r}_{su} \right] d\theta_c \Delta z_p$$

$$\left(r_{nu} \frac{w_{Nu} - w_{Pu}}{dr_n} - \frac{w_{Pu} - w_{Su}}{dr_s} \right) d\theta_c \Delta z_p \quad (3.29)$$

$$\int_{ux}^{cx} \int_s^n \int_b^l \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) r dr d\theta dz = \left[\frac{1}{r_{cu}} \frac{\partial w}{\partial \theta}_{cu} - \frac{1}{r_{cu}} \frac{\partial w}{\partial \theta}_{cu} \right] \Delta r_p \Delta z_p$$

$$\left(\frac{1}{r_{cu}} \frac{w_{Ex} - w_{Pw}}{d\theta_c} - \frac{1}{r_{cu}} \frac{w_{Pw} - w_{Ww}}{d\theta_w} \right) \Delta r_p \Delta z_p \quad (3.30)$$

$$\int_{ux}^{cx} \int_s^n \int_b^l \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) r dr d\theta dz = \left[\frac{\partial w}{\partial z}_{tw} - \frac{\partial w}{\partial z}_{bw} \right] r_p \Delta r_p d\theta_c$$

$$\left(\frac{w_{Tx} - w_{Pw}}{dz_t} - \frac{w_{Pw} - w_{Bw}}{dz_b} \right) r_p \Delta r_p d\theta_c \quad (3.31)$$

$$\int_{ux}^{cx} \int_s^n \int_b^l -\frac{w}{r^2} r dr d\theta dz = \frac{w_{pw}}{r_{pw}} \Delta r_p d\theta_c \Delta z_p \quad (3.32)$$

$$\int_{ux}^{cx} \int_s^n \int_b^l -\frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} r dr d\theta dz = -\frac{4}{r_{pw}} \left(\frac{u_{ncu}^1 + u_{scu}^1}{2} - \frac{u_{ncu}^1 + u_{scu}^1}{2} \right) \Delta r_p \Delta z_p$$

$$+ \frac{2}{r_{pw}} \left(\frac{u_{ncu}^0 + u_{scu}^0}{2} - \frac{u_{ncu}^0 + u_{scu}^0}{2} \right) \Delta r_p \Delta z_p \quad (3.33)$$

On regroupe tous les termes précédents, pour obtenir une équation de discrétisation finale sous la forme suivante :

$$A_P w_{pw} = A_E w_{Ew} + A_W w_{Ww} + A_N w_{Nw} + A_S w_{Sw} + A_T w_{Tw} + A_B w_{Bw} + S_w \quad (3.34)$$

où les coefficients de l'équation de discrétisation et le terme source, sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} A_E &= \frac{1}{Re} \frac{\Delta r_p \Delta z_p}{r_{cu} d\theta_c} \cdot A_W = \frac{1}{Re} \frac{\Delta r_p \Delta z_p}{r_{wu} d\theta_c} \cdot A_N = \frac{1}{Re} \frac{r_{nu} d\theta_c \Delta z_p}{dr_n} \\ A_S &= \frac{1}{Re} \frac{r_{su} d\theta_c \Delta z_p}{dr_s} \cdot A_T = \frac{1}{Re} \frac{r_p \Delta r_p d\theta_p}{dz_t} \cdot A_B = \frac{1}{Re} \frac{r_p \Delta r_p d\theta_p}{dz_b} \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B + \frac{1}{Re} \frac{\Delta r_p d\theta_c \Delta z_p}{r_{pw}} + \frac{3}{2} \frac{r_p \Delta r_p d\theta_c \Delta z_p}{\Delta \tau} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} S_w &= \frac{4w_{pw}^1 - w_{pw}^0}{2\Delta \tau} r_p \Delta r_p d\theta_c \Delta z_p + (P_T - P_E) \Delta r_p \Delta z_p + [(2w_{cw}^2)^1 - (w_{cw}^2)^0] \Delta r_p \Delta z_p \\ &\quad - \frac{4}{r_{pw}} \left(\frac{u_{ucw}^1 + u_{scw}^1}{2} - \frac{u_{ucw}^0 + u_{scw}^0}{2} \right) \Delta r_p \Delta z_p \\ &\quad + \frac{2}{r_{pw}} \left(\frac{u_{ucw}^0 + u_{scw}^0}{2} - \frac{u_{ucw}^1 + u_{scw}^1}{2} \right) \Delta r_p \Delta z_p \\ &\quad [-2(v_{tw}^1 w_{tw}^1 - v_{bw}^1 w_{bw}^1) + (v_{tw}^0 w_{tw}^0 - v_{bw}^0 w_{bw}^0)] r_p \Delta r_p d\theta_c \\ &\quad [-2(w_{cu}^1 u_{cu}^1 - w_{au}^1 u_{au}^1) + (w_{cu}^0 u_{cu}^0 - w_{au}^0 u_{au}^0)] dr_n \Delta z_p + \\ &\quad [-2(r_{nu} u_{nu}^1 w_{nu}^1 - r_{su} u_{su}^1 w_{su}^1) + (r_{nu} u_{nu}^0 w_{nu}^0 - r_{su} u_{su}^0 w_{su}^0)] d\theta_c \Delta z_p \\ &\quad - (2u_{pw}^1 w_{pw}^1 - u_{pw}^0 w_{pw}^0) \Delta r_p d\theta_c \Delta z_p - \frac{w_{pw}}{r_{pw}} \Delta r_p d\theta_c \Delta z_p + (2F_{M0}^1 - F_{M0}^0) r_p \Delta r_p d\theta_c \Delta z_p \end{aligned} \quad (3.37)$$

Notons que les coefficients de l'équation de discrétisation sont tous positifs et la relation 3.36 montre que le coefficient A_P est supérieur à la somme des autres coefficients (comme dans le cas de l'équation de discrétisation radiale).

3.2.4 Equation de quantité de mouvement dans la direction axiale

L'intégrale de l'équation de quantité de mouvement suivant la direction axiale (section §2.2§) dans le volume de contrôle décalé est comme suit :

$$\int_w^c \int_s^u \int_{b^c}^{c^t} \frac{\partial v}{\partial \tau} r dr d\theta dz = \frac{3v_{pc} - 4v_{pw}^1 + v_{pw}^0}{2\Delta \tau} r_p \Delta r_p \Delta \theta_p dz_p \quad (3.38)$$

$$\int_w^c \int_s^u \int_{b_r}^{t_c} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ruv) r dr d\theta dz \quad \int_w^c \int_s^u \int_{b_r}^{t_c} \left[\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ruv)^1 - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ruv)^0 \right] r dr d\theta dz$$

$$\left[2r_{mr} u_{uc}^1 v_{uc}^1 - 2r_{sr} u_{sc}^1 v_{sc}^1 - r_{nr} u_{uc}^0 v_{uc}^0 + r_{sr} u_{sc}^0 v_{sc}^0 \right] \Delta\theta_p dz_t \quad (3.39)$$

$$\int_w^c \int_s^u \int_{b_r}^{t_c} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (ruv) r dr d\theta dz \quad \int_w^c \int_s^u \int_{b_r}^{t_c} \left[\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (ruv)^1 - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (ruv)^0 \right] r dr d\theta dz$$

$$\left[2(w_{rc}^1 v_{rc}^1 - w_{bc}^1 v_{bc}^1) - (w_{rc}^0 v_{rc}^0 - w_{bc}^0 v_{bc}^0) \right] \Delta r_p dz_t \quad (3.40)$$

$$\int_w^c \int_s^u \int_{b_r}^{t_c} \frac{\partial}{\partial z} (vv) r dr d\theta dz \quad \int_w^c \int_s^u \int_{b_r}^{t_c} \left[2 \frac{\partial}{\partial z} (vv)^1 - \frac{\partial}{\partial z} (vv)^0 \right] r dr d\theta dz$$

$$\left[2(v_{rc}^1 v_{rc}^1 - v_{bc}^1 v_{bc}^1) - (v_{rc}^0 v_{rc}^0 - v_{bc}^0 v_{bc}^0) \right] r_p \Delta r_p \Delta z_p \quad (3.41)$$

$$\int_w^c \int_s^u \int_{b_r}^{t_c} -\frac{\partial P}{\partial z} r dr d\theta dz \quad (P_p - P_r) \Delta r_p \Delta \theta_p \quad (3.42)$$

$$\int_w^c \int_s^u \int_{b_r}^{t_c} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) r dr d\theta dz \quad \left[r_{mr} \frac{\partial v}{\partial r_{uc}} - r_{sr} \frac{\partial v}{\partial r_{sc}} \right] \Delta\theta_p dz_t$$

$$\left(r_{mr} \frac{v_{Nr} - v_{Pr}}{dr_n} - r_{sr} \frac{v_{Pr} - v_{Sr}}{dr_s} \right) \Delta\theta_p dz_t \quad (3.43)$$

$$\int_w^c \int_s^u \int_{b_r}^{t_c} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) r dr d\theta dz \quad \left[\frac{1}{r_{cc}} \frac{\partial v}{\partial \theta_{cc}} - \frac{1}{r_{wc}} \frac{\partial v}{\partial \theta_{wc}} \right] \Delta r_p dz_t$$

$$\left(\frac{1}{r_{cc}} \frac{v_{Ec} - v_{Pc}}{d\theta_c} - \frac{1}{r_{wc}} \frac{v_{Pc} - v_{Wc}}{d\theta_w} \right) \Delta r_p dz_t \quad (3.44)$$

$$\int_w^c \int_s^u \int_{b_r}^{t_c} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) r dr d\theta dz \quad \left[\frac{\partial v}{\partial z_{tc}} - \frac{\partial v}{\partial z_{bc}} \right] r_p \Delta r_p \Delta \theta_p$$

$$\left(\frac{v_{rc} - v_{Pr}}{dz_t} - \frac{v_{Pr} - v_{Bc}}{dz_b} \right) r_p \Delta r_p \Delta \theta_p \quad (3.45)$$

$$\int_w^c \int_s^u \int_{b_r}^{t_c} \frac{Ra}{PrRe^2} \Theta_p r dr d\theta dz \quad \frac{Ra}{PrRe^2} (2\Theta_p^1 - 2\Theta_p^0) r_p \Delta r_p \Delta \theta_p dz_t \quad (3.46)$$

On regroupe tous les termes précédents, pour l'obtention d'une équation de discrétisation finale sous la forme standard :

$$A_P v_{Pr} - A_E v_{Er} + A_W v_{Wr} + A_N v_{Nr} + A_S v_{Sr} + A_T v_{Tr} + A_B v_{Br} + S_r \quad (3.47)$$

où les coefficients de l'équation de discrétisation et le terme source, sont donnés par les relations suivantes :

$$A_E = \frac{1}{Re} \frac{\Delta r_p dz_t}{r_{cc} d\theta_c}, \quad A_W = \frac{1}{Re} \frac{\Delta r_p dz_t}{r_{wr} d\theta_w}, \quad A_N = \frac{1}{Re} \frac{r_{uc} \Delta \theta_p dz_t}{dr_n},$$

$$A_S = \frac{1}{Re} \frac{r_{sc} \Delta \theta_p dz_t}{dr_s}, \quad A_T = \frac{1}{Re} \frac{r_p \Delta r_p \Delta \theta_p}{dz_t}, \quad A_B = \frac{1}{Re} \frac{r_p \Delta r_p \Delta \theta_p}{dz_b} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned}
& A_P - A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B + \frac{3}{2} \frac{r_p \Delta r_p d\theta_c dz_t}{\Delta \tau} \quad (3.49) \\
S_r & \frac{4v_{pr}^1 - v_{pr}^0}{2\Delta \tau} r_p \Delta r_p \Delta \theta_p dz_t + (P_P - P_T) r_p \Delta r_p \Delta \theta_p + \frac{Ra}{Pr t Re^2} (2\Theta_p^1 - 2\Theta_p^0) r_p \Delta r_p \Delta \theta_p dz_t \\
& [-2(w_{rc}^1 v_{rc}^1 - w_{bc}^1 v_{bc}^1) + (w_{rc}^0 v_{rc}^0 - w_{bc}^0 v_{bc}^0)] \Delta r_p dz_t \\
& [-2r_m u_{nc}^1 v_{nc}^1 + 2r_{sc} u_{sc}^1 v_{sc}^1 + r_{mc} u_{nc}^0 v_{nc}^0 - r_{sc} u_{sc}^0 v_{sc}^0] \Delta \theta_p dz_t \\
& [-2(v_{rc}^1 v_{rc}^1 - v_{bc}^1 v_{bc}^1) + (v_{rc}^0 v_{rc}^0 - v_{bc}^0 v_{bc}^0)] r_p \Delta r_p \Delta z_p + (2F_{MIZ}^1 - F_{MIZ}^0) r_p \Delta r_p d\theta_c dz_t \quad (3.50)
\end{aligned}$$

Comme dans le cas des équations de discrétisation radiale et azimutale les relations 3.48 et 3.60 indiquent respectivement que les coefficients de l'équation de discrétisation axiale sont tous positifs et que le coefficient A_p est supérieur à la somme des autres coefficients.

3.2.5 Equation d'énergie

L'intégrale de l'équation d'énergie (section §2.2§) dans le volume de contrôle typique est développée comme suit :

$$\int_w^c \int_s^u \int_b^t \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} r dr d\theta dz = \frac{3\Theta_p - 4\Theta_p^1 + \Theta_p^0}{2\Delta \tau} r_p \Delta r_p \Delta \theta_p \Delta z_p \quad (3.51)$$

$$\int_w^c \int_s^u \int_b^t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru\Theta) r dr d\theta dz = [2r_u u_u^1 \Theta_u^1 - 2r_s u_s^1 \Theta_s^1 - r_u u_u^0 \Theta_u^0 + r_s u_s^0 \Theta_s^0] \Delta \theta_p \Delta z_p \quad (3.52)$$

$$\int_w^c \int_s^u \int_b^t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (rw\Theta) r dr d\theta dz = [2(w_r^1 \Theta_r^1 - w_b^1 \Theta_b^1) - (w_r^0 \Theta_r^0 - w_b^0 \Theta_b^0)] \Delta r_p \Delta z_p \quad (3.53)$$

$$\int_w^c \int_s^u \int_b^t \frac{\partial}{\partial z} (v\Theta) r dr d\theta dz = [2(v_r^1 \Theta_r^1 - v_b^1 \Theta_b^1) - (v_r^0 \Theta_r^0 - v_b^0 \Theta_b^0)] r_p \Delta r_p \Delta \theta_p \quad (3.54)$$

$$\int_w^c \int_s^u \int_b^t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \Theta}{\partial r}) r dr d\theta dz = (r_u \frac{\Theta_N - \Theta_P}{dr_u} - r_s \frac{\Theta_P - \Theta_S}{dr_s}) \Delta \theta_p \Delta z_p \quad (3.55)$$

$$\int_w^c \int_s^u \int_b^t \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\frac{\partial \Theta}{\partial \theta}) r dr d\theta dz = (\frac{1}{r_c} \frac{\Theta_E - \Theta_P}{d\theta_c} - \frac{1}{r_w} \frac{\Theta_P - \Theta_W}{d\theta_w}) \Delta r_p \Delta z_p \quad (3.56)$$

$$\int_w^c \int_s^u \int_b^t \frac{\partial}{\partial z} (\frac{\partial \Theta}{\partial z}) r dr d\theta dz = (\frac{\Theta_T - \Theta_P}{dz_t} - \frac{\Theta_P - \Theta_B}{dz_b}) r_p \Delta r_p \Delta \theta_p \quad (3.57)$$

Le regroupement de tous les termes précédents, conduit à l'équation de discrétisation de la température suivante :

$$A_P - A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B + S_\Theta \quad (3.58)$$

les coefficients de l'équation de discrétisation et du terme source sont :

$$\begin{aligned} A_E &= \frac{1}{PrRe} \frac{\Delta r_p \Delta z_p}{r_c d\theta_c}, A_W = \frac{1}{PrRe} \frac{\Delta r_p \Delta z_p}{r_w d\theta_w}, A_N = \frac{1}{PrRe} \frac{r_n \Delta \theta_p \Delta z_p}{dr_n}, \\ A_S &= \frac{1}{PrRe} \frac{r_s \Delta \theta_p \Delta z_p}{dr_s}, A_T = \frac{1}{PrRe} \frac{r_p \Delta r_p \Delta \theta_p}{dz_t}, A_B = \frac{1}{PrRe} \frac{r_p \Delta r_p \Delta \theta_p}{dz_b} \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B + \frac{3 r_p \Delta r_p \Delta \theta_p \Delta z_p}{2 \Delta \tau} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} S_\Theta &= \frac{3\Theta_p - 4\Theta_p^1 + \Theta_p^0}{2\Delta\tau} r_p \Delta r_p \Delta \theta_p \Delta z_p \\ &[-2r_n u_n^1 \Theta_n^1 + 2r_s u_s^1 \Theta_s^1 + r_n u_n^0 \Theta_n^0 - r_s u_s^0 \Theta_s^0] \Delta \theta_p \Delta z_p \\ &+ [-2(w_t^1 \Theta_t^1 - w_b^1 \Theta_b^1) + (w_t^0 \Theta_t^0 - w_b^0 \Theta_b^0)] \Delta r_p \Delta z_p \\ &+ [-2(v_t^1 \Theta_t^1 - v_b^1 \Theta_b^1) + (v_t^0 \Theta_t^0 - v_b^0 \Theta_b^0)] r_p \Delta r_p \Delta \theta_p \end{aligned} \quad (3.61)$$

3.2.6 Equation du potentiel électrique suivi par un champ magnétique axial

L'intégrale de l'équation du potentiel (section §2.2§) dans le volume de contrôle typique est comme suit :

$$\int_w^c \int_s^u \int_b^t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) r dr d\theta dz = \left(r_n \frac{\varphi_N - \varphi_P}{dr_n} - r_s \frac{\varphi_P - \varphi_S}{dr_s} \right) \Delta \theta_p \Delta z_p \quad (3.62)$$

$$\int_w^c \int_s^u \int_b^t \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) r dr d\theta dz = \left(\frac{1}{r_c} \frac{\varphi_E - \varphi_P}{d\theta_c} - \frac{1}{r_w} \frac{\varphi_P - \varphi_W}{d\theta_w} \right) \Delta r_p \Delta z_p \quad (3.63)$$

$$\int_w^c \int_s^u \int_b^t \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) r dr d\theta dz = \left(\frac{\varphi_T - \varphi_P}{dz_t} - \frac{\varphi_P - \varphi_B}{dz_b} \right) r_p \Delta r_p \Delta \theta_p \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \int_w^c \int_s^u \int_b^t \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} r dr d\theta dz &= [2(r_n u_n^1 - r_s u_s^1) - (r_n u_n^0 - r_s u_s^0)] \Delta \theta_p \Delta z_p \\ &- [2(u_t^1 - u_b^1) - (u_t^0 - u_b^0)] \Delta r_p \Delta z_p \end{aligned} \quad (3.65)$$

Le regroupement de tous les termes précédents, conduit à l'équation de discrétisation suivante :

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B + S_\varphi \quad (3.66)$$

les coefficients de l'équation de discrétisation et la source sont :

$$A_E = \frac{\Delta r_p \Delta z_p}{r_c d\theta_c}, A_W = \frac{\Delta r_p \Delta z_p}{r_w d\theta_w}, A_N = \frac{r_n \Delta \theta_p \Delta z_p}{dr_n}.$$

$$A_S = \frac{r_s \Delta \theta_p \Delta z_p}{dr_s}, A_r = \frac{r_p \Delta r_p \Delta \theta_p}{dz_t}, A_B = \frac{r_p \Delta r_p \Delta \theta_p}{dz_b} \quad (3.67)$$

$$S_\varphi = [2(r_n w_n^1 - r_s u_s^1) - (r_n w_n^0 - r_s u_s^0)] \Delta \theta_p \Delta z_p - [2(u_l^1 - u_b^1) - (u_l^0 - u_b^0)] \Delta r_p \Delta z_p \quad (3.68)$$

3.3 Discrétisation des conditions aux limites à l'axe

– Sur l'axe du cylindre (pour le cas 3D) :

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad \frac{\partial \Theta}{\partial r} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad \text{constante} \quad (3.69)$$

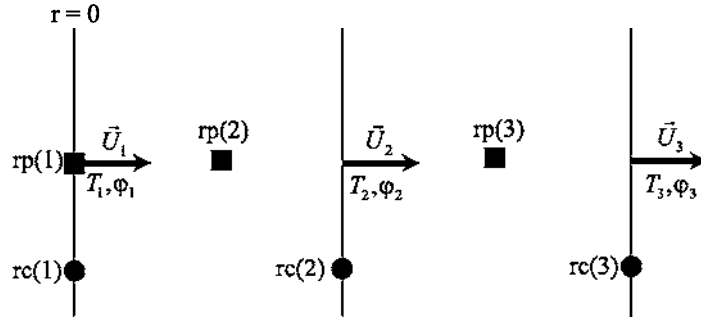


FIGURE 3.3 – Discrétisation à l'axe du cylindre

$$u_1 = u_2 - \frac{r_c(2) - r_c(1)}{r_c(3) - r_c(2)} (u_3 - u_2) \quad (3.70)$$

$$w_1 = w_2 - \frac{r_p(2) - r_p(1)}{r_p(3) - r_p(2)} (w_3 - w_2) \quad (3.71)$$

$$v_1 = v_2 - \frac{r_p(2) - r_p(1)}{r_p(3) - r_p(2)} (v_3 - v_2) \quad (3.72)$$

$$\Theta_1 = \Theta_2 - \frac{r_p(2) - r_p(1)}{r_p(3) - r_p(2)} (\Theta_3 - \Theta_2) \quad (3.73)$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 - \frac{r_p(2) - r_p(1)}{r_p(3) - r_p(2)} (\varphi_3 - \varphi_2) \quad (3.74)$$

3.4 Obtention de l'équation du discrétisation de pression

Les équations discrétisées de quantité de mouvement sont réécrites sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 A_u u_n &= \sum A_i u_i + b_u + a_u(P_N - P_P) \cdot A_s u_s = \sum A_i u_i + b_u + a_s(P_P - P_S), \\
 A_l v_l &= \sum A_i v_i + b_c + a_l(P_T - P_P) \cdot A_b v_b = \sum A_i v_i + b_c + a_b(P_P - P_B), \\
 A_c w_c &= \sum A_i w_i + b_w + a_c(P_E - P_P) \cdot A_w w_w = \sum A_i w_i + b_w + a_w(P_P - P_W) \quad (3.75)
 \end{aligned}$$

b_u , b_v et b_w contiennent les termes sources des équations discrétisées radiale, axiale et azimutale. Le système 3.75 est réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
 u_n &= \hat{u}_n + d_n(P_N - P_P) \cdot u_s = \hat{u}_s + d_s(P_P - P_S) \cdot v_l = \hat{v}_l + d_l(P_T - P_P), \\
 v_b &= \hat{v}_b + d_b(P_P - P_B) \cdot w_c = \hat{w}_c + d_c(P_E - P_P) \cdot w_w = \hat{w}_w + d_w(P_P - P_W) \quad (3.76)
 \end{aligned}$$

où les pseudo vitesses \hat{u}_n , \hat{u}_s , \hat{v}_l , \hat{v}_b , \hat{w}_c , et \hat{w}_w sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 \hat{u}_n &= \frac{\sum A_i u_i + b_u}{A_n} \cdot \hat{u}_s = \frac{\sum A_i u_i + b_u}{A_s} \cdot \hat{v}_l = \frac{\sum A_i v_i + b_c}{A_l}, \\
 \hat{v}_b &= \frac{\sum A_i v_i + b_c}{A_b} \cdot \hat{w}_c = \frac{\sum A_i w_i + b_w}{A_c} \cdot \hat{w}_w = \frac{\sum A_i w_i + b_w}{A_w} \quad (3.77)
 \end{aligned}$$

3.4.1 Equation de pression

L'introduction du champ de vitesse 3.76 dans l'équation de continuité discrétisée 3.10, nous donne l'équation de discrétisation de pression sous la forme :

$$a_p A_P = a_c P_E + a_w P_W + a_n P_N + a_s P_S + a_l P_T + a_b P_B + b \quad (3.78)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 a_n &= r_n dr_n \Delta \theta_p \Delta z_p \cdot a_s = r_s dr_s \Delta \theta_p \Delta z_p \cdot a_c = d\theta_c \Delta r_p \Delta z_p \cdot \\
 a_w &= d\theta_w \Delta r_p \Delta z_p \cdot a_l = dz_l r_p \Delta \theta_p \Delta r_p \cdot a_b = dz_b r_p \Delta \theta_p \Delta r_p \quad (3.79)
 \end{aligned}$$

$$b = -(r_n \hat{u}_n - r_s \hat{u}_s) \Delta \theta_p \Delta z_p + (\hat{w}_c - \hat{w}_w) \Delta r_p \Delta z_p + (\hat{v}_l - \hat{v}_b) r_p \Delta \theta_p \Delta r_p \quad (3.80)$$

Avec un champ de vitesse estimé, utilisé dans le terme source 3.80, la résolution de l'équation de pression 3.78, permet d'obtenir la pression en chaque noeud du domaine. Cependant cette pression n'est qu'une estimation, notée P^* , dans les équations de Navier Stokes, nous donne une estimation du champ de vitesse par (u^*, v^*, w^*) .

$$\begin{aligned} A_n u_n^* &= \sum A_i u_i^* + b_u + a_n(P_N^* - P_P^*) \cdot A_s u_s^* = \sum A_i u_i^* + b_u + a_s(P_P^* - P_S^*). \\ A_l v_l^* &= \sum A_i v_i^* + b_c + a_l(P_T^* - P_P^*) \cdot A_b v_b^* = \sum A_i v_i^* + b_c + a_b(P_P^* - P_B^*). \\ A_c w_c^* &= \sum A_i w_i^* + b_w + a_c(P_E^* - P_P^*) \cdot A_w w_w^* = \sum A_i w_i^* + b_w + a_w(P_P^* - P_W^*) \end{aligned} \quad (3.81)$$

Les estimations, nécessitent des corrections :

$$u = u^* + u', v = v^* + v', w = w^* + w', P = P^* + p' \quad (3.82)$$

où u', v', w', p' , représentent respectivement les corrections de la vitesse radiale, axiale, azimutale et la correction de pression. Après soustraction des systèmes 3.81 et 3.75, on obtient les systèmes d'équations des corrections :

$$\begin{aligned} A_n u'_n &= \sum A_i u'_i + b_u + a_n(p'_N - p'_P) \cdot A_s u'_s = \sum A_i u'_i + b_u + a_s(p'_P - p'_S). \\ A_l v'_l &= \sum A_i v'_i + b_c + a_l(p'_T - p'_P) \cdot A_b v'_b = \sum A_i v'_i + b_c + a_b(p'_P - p'_B). \\ A_c w'_c &= \sum A_i w'_i + b_w + a_c(p'_E - p'_P) \cdot A_w w'_w = \sum A_i w'_i + b_w + a_w(p'_P - p'_W) \end{aligned} \quad (3.83)$$

Les termes $\sum A_i u'_i$, $\sum A_i v'_i$, $\sum A_i w'_i$ sont éliminés pour éviter de résoudre un système linéaire des équations de corrections et suivant (Patankar, 1980) on redéfinit les corrections des vitesses qui ne dépendent que des corrections de pression :

$$\begin{aligned} u'_n &= d_n(p'_N - p'_P) \cdot u'_s = d_s(p'_P - p'_S) \cdot v'_l = d_l(p'_T - p'_P). \\ v'_b &= d_b(p'_P - p'_B) \cdot w'_c = d_c(p'_E - p'_P) \cdot w'_w = d_w(p'_P - p'_W) \end{aligned} \quad (3.84)$$

Le champ de vitesse dans le système 3.84 doit satisfaire l'équation de continuité. En introduisant ce champ de vitesse dans la relation 3.10, on obtient l'équation de correction de pression discrétisée suivante :

$$a_p A'_P = a_c p'_E + a_w p'_W + a_n p'_N + a_s p'_S + a_l p'_T + a_b p'_B + b' \quad (3.85)$$

Les coefficients a_p , a_n , a_s , a_w , a_t , et a_b sont les mêmes que ceux de l'équation de pression 3.78, mais la source b' est différente :

$$b' = |(r_n u_n^* - r_s u_s^*) \Delta \theta_p \Delta z_p + (w_c^* - w_w^*) \Delta r_p \Delta z_p + (v_j^* - v_b^*) r_p \Delta r_p \Delta \theta_p| \quad (3.86)$$

La correction de la pression est obtenue par la résolution de l'équation 3.85, qui permet par la suite de corriger le champ de vitesse.

3.5 Solution du système discrétisé par la méthode de balayage

Le système des équations discrétisées peut se mettre sous la forme matricielle suivant : $[A] \cdot [\Phi] = [B]$ Où $[A]$: représente une matrice heptagonale, car la fonction Φ dans un nœud dans le domaine est lié à six nœuds adjacents. En notation indicielle le système se présente sous la forme :

$$a_p(i, j, k) \Phi_{i, j, k} + a_n(i, j, k) \Phi_{i+1, j, k} + a_s(i, j, k) \Phi_{i-1, j, k} + a_t(i, j, k) \Phi_{i, j+1, k} + a_b(i, j, k) \Phi_{i, j-1, k} + a_c(i, j, k) \Phi_{i, j, k+1} + a_w(i, j, k) \Phi_{i, j, k-1} = s(i, j, k). \quad (3.87)$$

Avec : $1 \leq i \leq il$, $1 \leq j \leq jl$, $1 \leq k \leq kl$.

A cause de la taille de la matrice des coefficients, une méthode itérative doit être adoptée pour résoudre le système. La technique de balayage utilisant les l'algorithme de Thomas et l'algorithme tri-diagonal cyclique est utilisée pour la solution itérative.

3.6 Algorithme de calcul SIMPLER

- Donner un champ initial comme première estimation pour la vitesse, la température et le potentiel au temps τ et $\tau - \Delta\tau$.
- Calculer les coefficients des équations discrétisées pour déterminer les pseudo- vitesses.
- Utiliser les pseudo vitesses pour calculer le terme source de l'équation de pression.

- Résoudre l'équation discrétisée de la pression et trouver la pression estimée P^* .
Calculer le champ de vitesse estimé (u^*, v^*, w^*) , en utilisant la pression estimée.
 - Calculer le terme source pour l'équation de correction de pression.
 - Résoudre l'équation de correction de pression et corriger le champ de vitesse au temps $\tau + \Delta\tau$.
 - Résoudre l'équation de discrétisation d'énergie et du potentiel pour obtenir le champ de température et le champ potentiel électrique.
 - Arrêter le calcul dans le cas d'un régime permanent atteint ou d'un régime transitoire établi ou bien considérer les champs trouvés comme des estimations au temps τ et ceux du temps τ comme des champs au temps $\tau - \Delta\tau$ et retourner à l'étape 2 ...
-

Chapitre 4

Résultats et discussion de la première partie

Dans ce chapitre, on présente les résultats numériques obtenus pour l'écoulement axisymétrique de Kàrmàn/Rayleigh Bénard. Le nombre de Prandtl Pr et le rapport d'aspect sont supposés égaux à un. Les nombres de Reynolds varient dans la gamme ($0 \leq Re \leq 120$), et les nombres de Rayleigh dans la gamme ($0 \leq Ra \leq 30000$).

4.1 Validation du code

Nous avons validé notre code sur des cas-test bien documentés dans la littérature. La première comparaison des résultats a été faite sur une configuration hydrodynamique en contra-rotation étudiée par Nore et al. (2004) dans une cavité de rapport de forme $\Gamma = 2$.

Les résultats des figures 4.2,4.3, représentant u_z dans différents plans montrent que les états mixés M conservent la symétrie (voir le diagramme théorique de la figure 4.1). Qualitativement les valeurs numériques obtenues des composantes radiale et axiale de la vitesse sont identique avec les résultats de Nore et al. (2004), (tableau 4.1).

Nous avons aussi testé notre code sur un cas rotor-stator. Le premier test est mené sur un problème très classique du vortex-breakdown, ou l' éclatement tourbillonnaire, étudié notamment par Daube et Sorensen (1989), et Lopez (1990). Ce phénomène apparait

lorsque, dans une cavité cylindrique, on met en rotation l'une des parois d'extrémité. Le fluide est alors mis en rotation par la force centrifuge puis revient le long de l'axe par continuité. Pour certains rapports d'aspect, si le nombre de Reynolds basé sur la vitesse de rotation du disque est supérieur à une valeur critique, alors des zones de stagnation et des recirculations secondaires peuvent apparaître le long de l'axe de symétrie. Des cartes dans l'espace (Reynolds, rapport d'aspect) ont été établies expérimentalement dans des travaux (Escudier, 1984). Nous avons traité le cas particulier à $Re = 1850$ et $\Gamma = 2$ qui est décrit en détail dans l'article de Daube et Sorensen (1989). La figure 4.4 où le disque tournant est situé en $z = 0$ représente les lignes de courant obtenues et montre l'existence d'un éclatement tourbillonnaire sur l'axe en $z \approx 1.5$. Un deuxième vortex semble prendre naissance sur l'axe en $z \approx 1.1$. Cela vient probablement du fait que, comme le montre la carte (Escudier, 1984).

Cet écoulement subit une bifurcation de Hopf vers un état oscillatoire à $Re \approx 2600$. Concernant la période de ces oscillations (mesurée à $Re = 2800$, figure 4.5), on a trouvé un bon accord entre nos résultats et ceux obtenus dans la littérature (voir les valeurs numériques dans le tableau 4.2).

Référence	u_{rmax}	u_{zmax}	ψ_{max}
Nore et al.,2004	0.11	0.13	
Notre simulation	0.1120	0.1328	
Gelfgat et al.,2001			132.83
Notre simulation			132.06

TABEAU 4.1 – Validation numérique des maxima des vitesses radiale, axiale, et des lignes de courant.

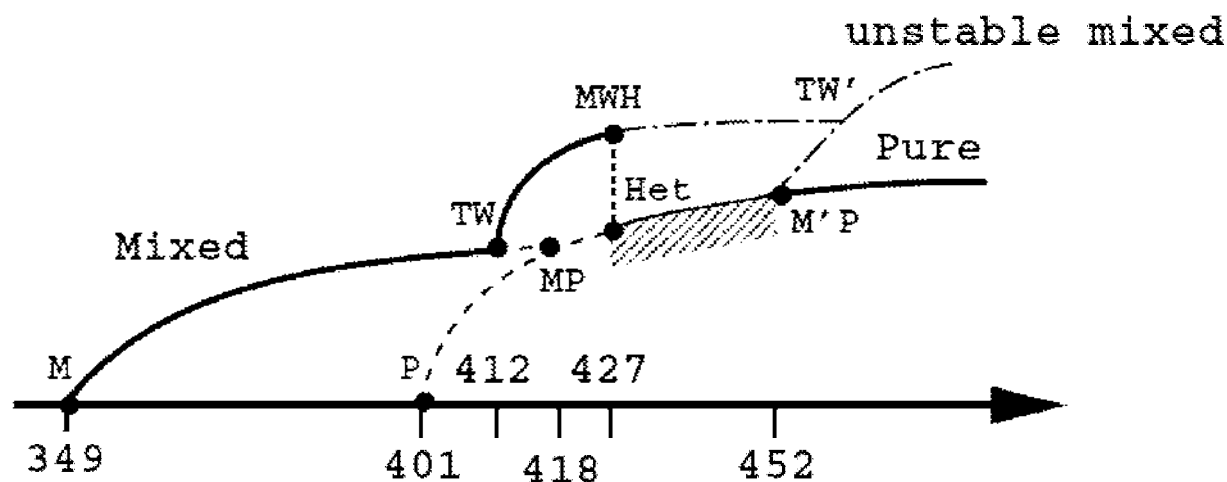


FIGURE 4.1 – Diagramme théorique des bifurcations schématisé en fonction de Re pour $\Gamma = 2$. Les solutions stables (instables) sont indiquées en trait continu (discontinu). La partie hachurée correspond aux cycles hétéroclines. Les solutions non calculées sont en trait point-tiret. Les seuils sont marqués par des points : $Re_M = 349$, $Re_P \sim 401$, $Re_{TW} \sim 412$, $Re_{MP} \sim 418$, $Re_{MWH} = 427.3$, $Re_{Het} = 427.4$, $Re_{M'P} \cong 452$.

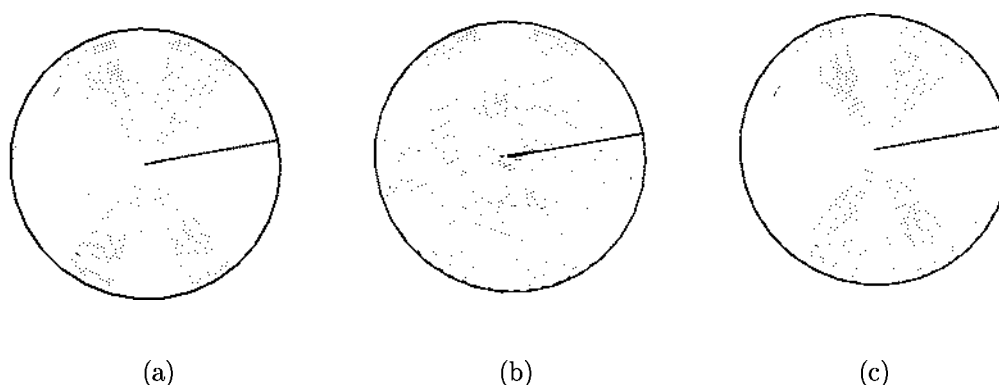


FIGURE 4.2 – Résultats obtenus à l'état mixé M pour $Re = 355$, près de la bifurcation à $Re_M = 349$. Isocontours de la vitesse verticale \hat{u} , (a) $z = 1/6$ (haut), (b) $z = 1/2$ (milieu), et (c) $z = -1/6$ (bas).

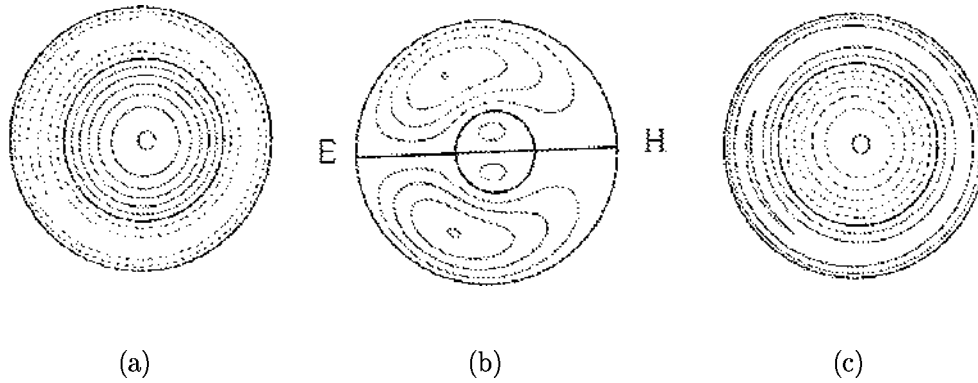


FIGURE 4.3 – Résultats obtenus par Nore à l'état mixé M pour $Re = 355$, près de la bifurcation à $Re_M = 349$. Isocontours de la vitesse verticale à, (a) $z = \Gamma/6$ (haut), (b) $z=0$ (milieu), et (c) $z = -\Gamma/6$ (bas).

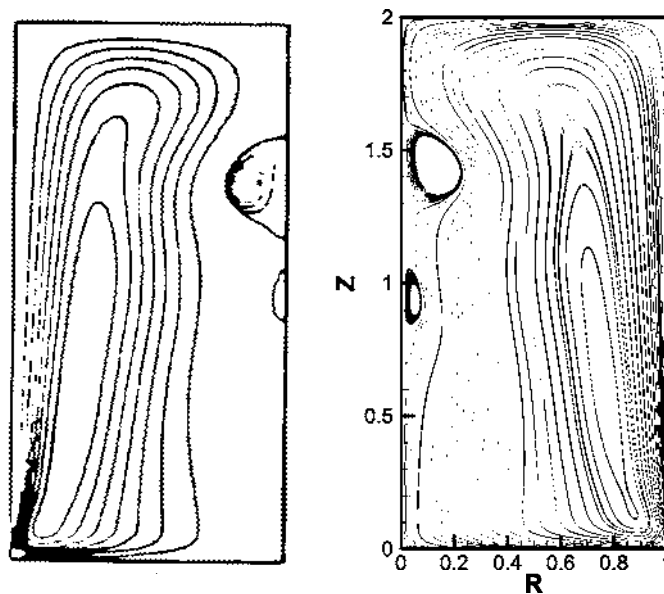


FIGURE 4.4 – Lignes de courant à $Re = 1850$, $\Gamma = 2$ (à gauche) : Résultat obtenu par (Daube et Sorensen, 1989), (à droite) : Notre simulation.

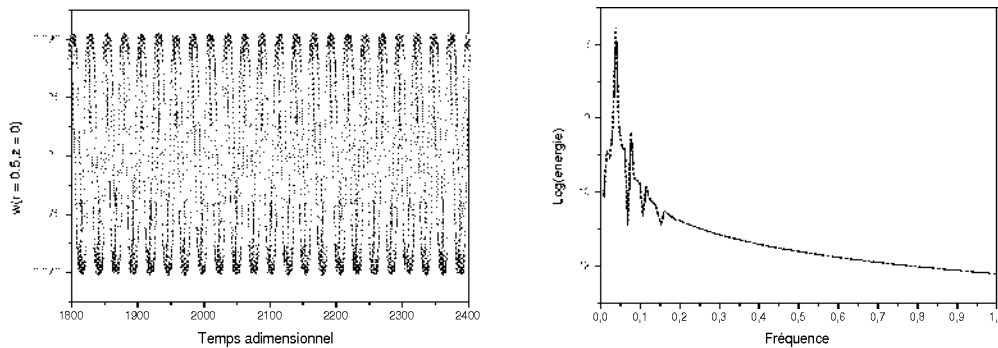


FIGURE 4.5 – (à gauche) : Evolution temporelle de $U_0(r = 0.5, z = 0)$ à $Re = 2800, \Gamma = 2$ (à droite) : spectre d'énergie correspondant au signal de $U_0(r = 0.5, z = 0)$.

Méthode	Référence	Période
$u - \omega$	Daube.,1989	25.52
$\eta - \omega$	Daube.,1989	25.84
$u - \omega$	Speetjens.,2001	26.61
$u - p$	Gelfgat et al.,2001	26.7
$\psi - \phi$	Boronski et al.,2007	26.55
$u - p$	Notre simulation	25.88

TABLEAU 4.2 – Oscillations périodiques pour une configuration rotor-stator à $Re = 2800, \Gamma = 2$.

4.2 Ecoulement axisymétrique de von Kàrmàn chauffé par le bas

4.2.1 Seuils de convection

Il faut d'abord déterminer le nombre critique de Rayleigh pour le seuil de la convection axisymétrique en fonction du nombre de Reynolds. La valeur propre critique est réelle (bifurcation à l' état stationnaire) pour $Re < 95$ et complexe (bifurcation à l'état oscillatoire) pour $Re > 95$. Sur la figure 4.6 les seuils sont obtenus par le calcul des valeurs propres du problème linéarisé, avec des valeurs fixes de (Re, Ra) . La valeur de $Ra_c(Re)$ à laquelle la valeur propre ou sa partie réelle croise zéro est déterminée par extrapolation linéaire.

Des seuils ont été également obtenus indépendamment à partir de n'importe quel état initial menant à des champs qui finissent par décroître exponentiellement vers la solution conductive.

$$T = (r, z = 1/2, t) - 1/2 = Ae^{\lambda t} \quad (4.1)$$

L'amplitude A dépend de l'état initial et λ (taux de croissance ou de décroissance) dépend de Re et Ra . L'exposant λ est négatif pour $Ra < Ra_c$, extrapolation linéaire des deux valeurs de Ra permettant de déterminer Ra_c .

Suffisamment loin, la bifurcation change de nature et Ra_c devrait être une fonction de Re . En effet, Ra_c doit être une fonction de Re , puis inverser Re par des méthodes inversant la direction de la rotation des disques supérieur et inférieur. Cette opération laisse toutes les propriétés dynamiques inchangées Muller92 et al. (1992) dans le contexte de la convection de Rayleigh Bénard avec acheminement. On a adapté Ra_c sur la gamme de la bifurcation stationnaire $0 \leq Re \leq 94$ à un polynôme égal, obtenant :

$$Ra_c = a_0 + a_2 * Re^2 + a_1 * Re^1 = 2262.37 + 6.5752 * Re^2 + 6.13 * 10^{-4} Re^1 \quad (4.2)$$

Nous voyons que l'écoulement de von Kàrmàn stabilise le système contre la convection

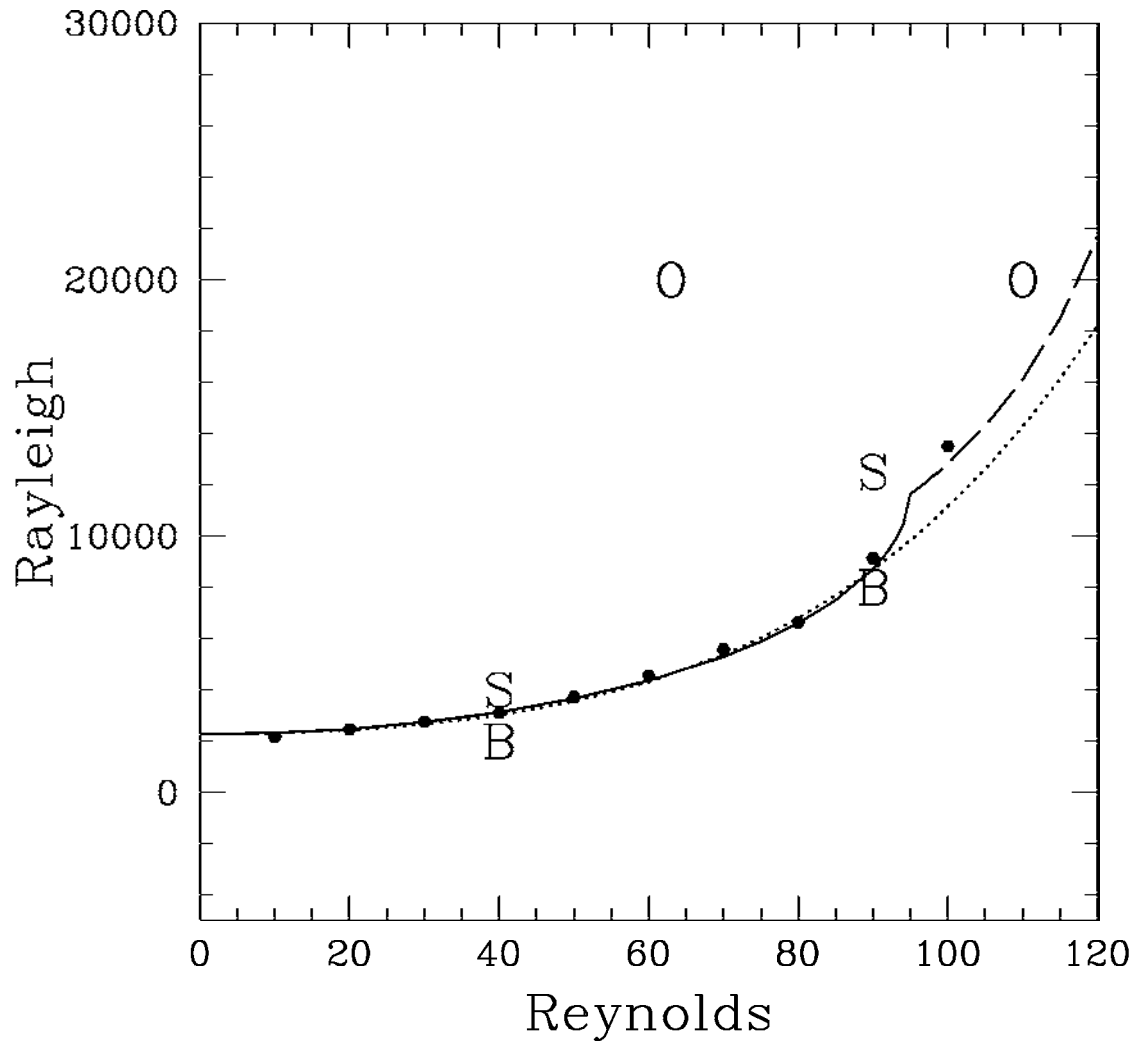


FIGURE 4.6 – Seuils de la convection en fonction du nombre de Reynolds. Courbe bleue pleine : transition à la convection stationnaire. Courbe rouge à tiret : transition à la convection oscillatoire. Courbe noire pointillée : fit polynômial d'ordre quatre (équation :4.2). Points : seuil obtenu à partir d'un code écrit dans la formulation vorticité-fonction de courant. Les Lettres indiquent les valeurs des paramètres pour l'écoulement présenté sur les figures 4.8 et 4.9 (B, état de base), 4.10 et 4.11 (S, convection stationnaire), et 4.12 et 4.13 (O, convection oscillatoire).

thermique. C'est plausible, étant donné que l'écoulement méridional induit le mélange fluide à différentes tailles.

Ces résultats sont comparés avec ceux des systèmes mélangés (thermal/shear). Dans l'écoulement de Poiseuille, le cisaillement stabilise le système contre les rouleaux transversaux, Ra_c augmentant avec Re , alors que le seuil pour les rouleaux longitudinaux demeure sans changement (Gage et Reid, 1968). C'est également le cas pour les rouleaux longitudinaux dans l'écoulement de Couette plan (Clever et Busse, 1992). Dans notre système, les rouleaux peuvent être considérés comme longitudinaux, puisque les axes des rouleaux concentriques sont azimutaux, de même que la vitesse limite des disques. Cependant, la différence entre notre système (avec sa géométrie fortement contrainte, courbure, et rotation différentielle) et le système de Poiseuille (dans lequel aucun écoulement à travers une section d'un canal n'est engendré avant la transition) est trop grande pour qu'une comparaison soit significative.

Dans l'écoulement de Taylor-Couette (mesuré par le nombre de Taylor Ta) avec un gradient radial de température (mesuré par le nombre de Grashof Gr), le rôle de la rotation et du chauffage sont inversés à notre système. N'importe quel gradient radial de température provoque un mouvement à grande échelle (rôle joué par Re dans notre système) et une bifurcation aux rouleaux de Taylor est vue à un taux fini de rotation (rôle joué par Ra dans notre système). Dans les expériences de (Lepiller et al., 2008) sur ce système, on constate une diminution de Ta_c avec Gr , contrairement à l'augmentation de Ra_c avec Re dans notre cas. Toutefois, les différences entre les deux systèmes sont trop grandes pour que cette contradiction soit préoccupante.

La valeur du seuil $Ra_c(Re = 0) = 2262.37$ est bien conforme bien à ceux rapportés précédemment au seuil de la convection avec parois latérales isolantes et rapport d'aspect $\Gamma = 1$, notamment 2300 ($\Delta Ra_c/Ra_c = 1.6\%$) (Wanschura et al., 1996), 2250 ($\Delta Ra_c/Ra_c = 0.5\%$) (Boronska et Tuckerman, 2006), 2241 ($\Delta Ra_c/Ra_c = 0.9\%$) (Touihri et al., 1999), et 2260 ($\Delta Ra_c/Ra_c = 0.1\%$) (Charlson et Sani, 1970; Buell et Catton, 1983). Tous ces auteurs ont déterminé le mode axisymétrique le plus instable pour la convection axisymétrique à ce rapport d'aspect. L'étude a été menée en faisant varier Re et en analysant les seuils des modes propres non-axisymétrique montrant les nombres

d'ondes critiques $m = 0$ pour $Re \leq 53.8$, $m = 2$ pour $53.8 \leq Re \leq 58$ et $m = 1$ pour $58 \leq Re \leq 120$. A $Re = 0$, la première branche convective axisymétrique devient instable $m = 1$, pour une perturbation près de $Ra = 3000$ (Wanschura et al. (1996), Touihri et al. (1999)). Pour l'écoulement pur de von Kàrmàn, avec Ra égale à zéro et Re supérieur à zéro, la première instabilité se produit à $Re \approx 300$ avec un nombre d'onde $m = 2$. (Voir les modes obtenus avec notre simulation sur le cas échéant (figure 4.7), et que celle de Nore et al. (2004).)

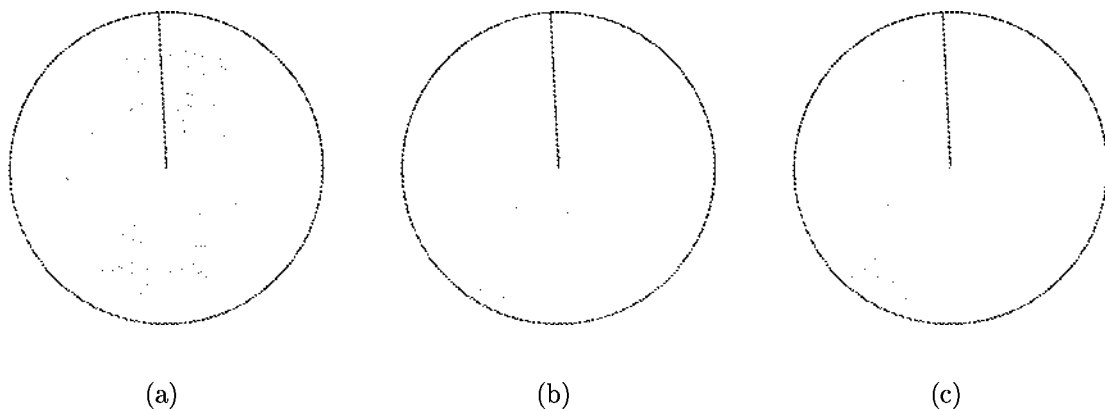


FIGURE 4.7 – Isocontours des vitesses : (a) radiale , (b) verticale, et (c) azimutale , à $Re \approx 300$, $z = 1$ (milieu), $m = 2$.

On se limite ici aux bifurcation et aux modes propres axisymétriques, pour les raisons suivantes : Une compréhension du problème axisymétrique est théoriquement importante. Les branches qui sont instables peuvent néanmoins jouer un rôle dans la dynamique. En effet, le problème axisymétrique montre un certain nombre de phénomènes fascinants, linéaires et non-linéaires. En conclusion, les effets physiques additionnels, par exemple un champ magnétique, peuvent stabiliser la configuration axisymétrique.

4.2.2 Etats stationnaires de convection

Dans ce paragraphe, on étudie la nature de l'écoulement stationnaire en dessous et au dessus du seuil de convection. Sans rotation, c'est-à-dire à $Re = 0$, la solution est de type conductif : l'écoulement est stationnaire et la température varie linéairement dans la direction verticale :

$$U = 0, T = 1 - z \quad (4.3)$$

Dans le système de von Kàrmàn, comme mentionné dans la section §2.1.2§, le pompage d'Ekman mène à la recirculation des régions pour n'importe quelle valeur de Re différente de zéro. L'état analogue conductif en présence de l'écoulement de von Kàrmàn est montré dans les figures 4.8 et 4.9 à $Re = 40, Ra = 2000$ et à $Re = 90, Ra = 8000$ respectivement. Nous appelons ceci l'écoulement de base. La vitesse azimutale, montré dans la figure 4.8 augmente progressivement des valeurs négatives, dans la moitié inférieure, aux valeurs positives dans la moitié supérieure du cylindre, suivant la contra rotation des disques.

Il ne se produit rien de remarquable aux coins à $r = 1, z = 0, 1$, puisque les conditions aux limites sont discontinues où le cylindre stationnaire rencontre des disques rotatifs. Les grandes cellules de recirculation dans le plan méridional (r, z) sont importantes. Physiquement on peut expliquer l'apparition de ces cellules comme suit : les particules fluides sont repoussées vers l'extérieur par la force centrifuge alors que la force de pression les repousse vers l'intérieur du cylindre. Généralement, si la force centrifuge est légèrement supérieure à la force de pression, les particules peuvent atteindre l'extérieur du cylindre. Une partie des particules est alors déviée vers le haut et retourne vers l'intérieur du cylindre, l'autre partie est déviée vers le bas et fait de même. Les cellules des vitesses azimutales et les cellules de recirculation produisent ensemble des trajectoires toroïdales.

On constate que les gradients de la vitesse azimutale sont concentrés près des disques et près du cylindre externe ; voir figure 4.9. Les cellules de recirculation sont plus concentrées, avec une vitesse maximale de $|u_r^{max}| = 0.13$, comparé à $|u_r^{max}| = 0.045$ pour $Re = 40$. Une autre différence est que $|u_z^{max}| < |u_r^{max}|$, comparé à $|u_z^{max}| \approx |u_r^{max}|$ pour $Re = 40$, la force de réflexion est augmentée lorsque $Re = 90$. Ces valeurs de $|u_z^{max}|, |u_r^{max}|$ doivent être considérées des fractions de $|u_\theta^{max}| = 1$. L'influence des cellules de recirculation sur le champ de température pour $Re = 90$ est très claire.

En $r = 0$, les isothermes sont déviées vers la mi-hauteur pendant que le fluide chaud est poussé vers le haut à partir du disque inférieur et le fluide froid en bas à partir du disque supérieur. A $r = 1$, les isothermes sont de nouveau déviées, vers les disques supérieurs et inférieurs. Contrairement à l'état conductif pour $Re = 40$, les isothermes à

l'état conductif montré dans la figure 5.7(c) sont très différentes des droites horizontales du profil conductif. Cependant, la solution maintient une symétrie de réflexion en z .

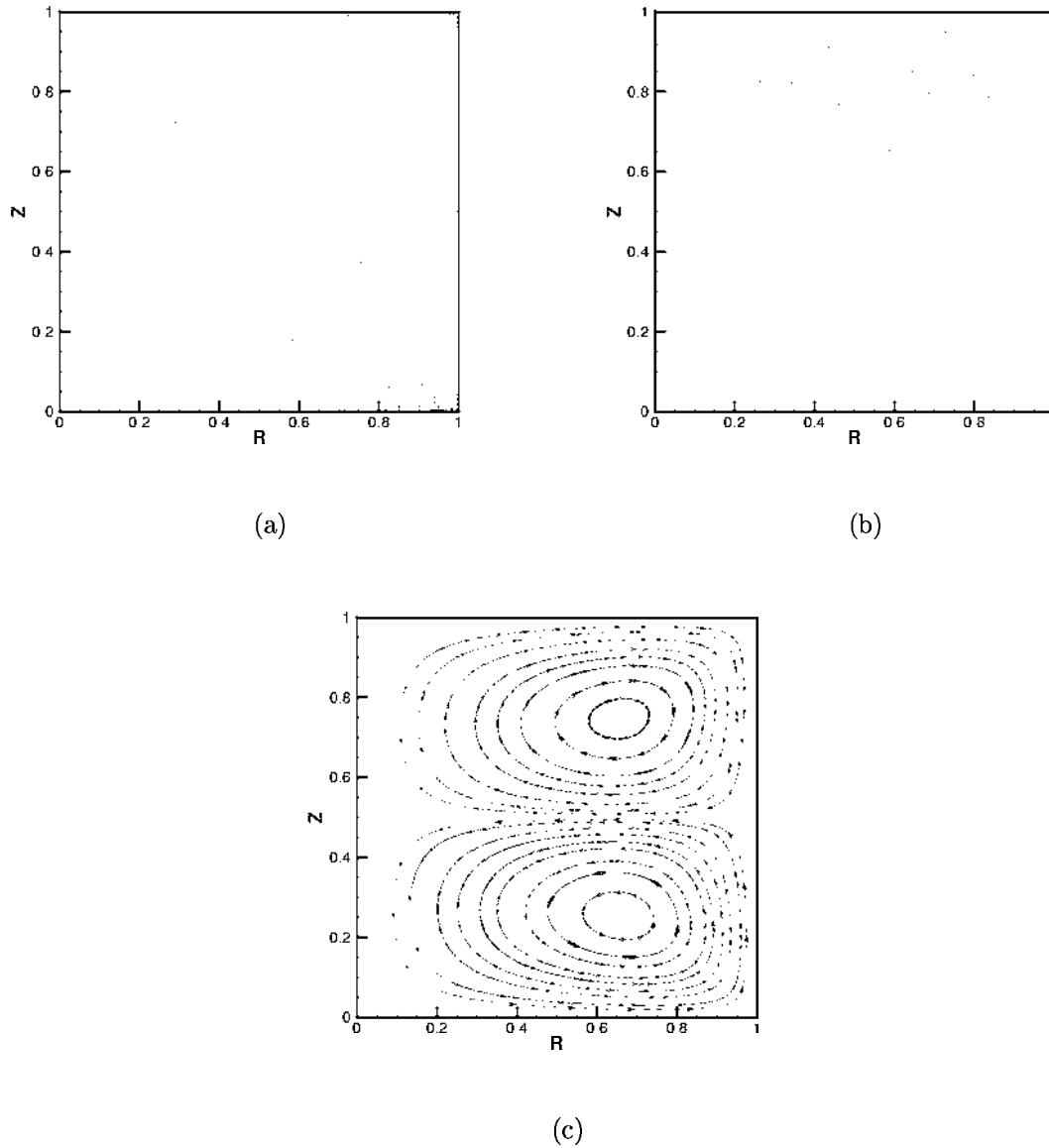


FIGURE 4.8 – *Ecoulement de base à $Re = 40$, $Ra = 2000$, dans le plan (r, z) . (a) vitesse azimutale u_θ , (b) champs de température T , et (c) lignes de courant Ψ . Les gammes pour u_θ et T sont $[-1, 1]$ et $[0, 1]$. Les gammes pour u_r et u_z sont $[-0.04, 0.04]$ et $[-0.08, 0.08]$ respectivement.*

Avec un rapport d'aspect $\Gamma = 1$ et en l'absence de rotation, la transition à la convection brise la symétrie de réflexion en z et mène à une seule cellule de convection axisymétrique simple qui occupe la cavité entière pour $Re = 40$. La transition se produit à $Ra_c = 3105$

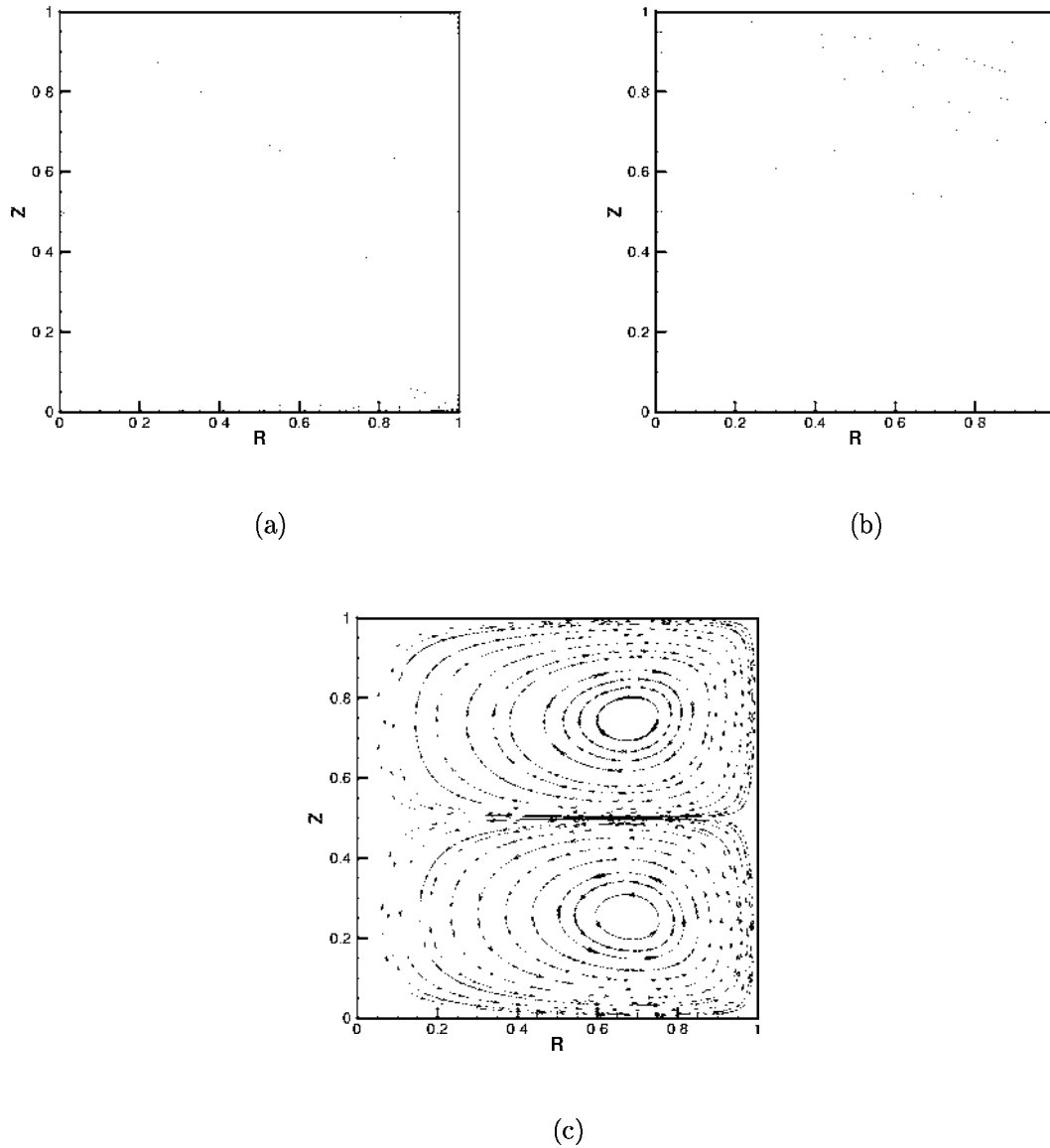


FIGURE 4.9 – *Ecoulement de base à $Re = 90$, $Ra = 8000$, dans le plan (r, z) . (a) vitesse azimutale u_θ , (b) champs de température T , et (c) lignes de courant Ψ . Les gammes pour u_θ et T sont $[-1, 1]$ et $[0, 1]$. Les gammes pour u_r et u_z sont $[-0.10, 0.10]$ et $[-0.08, 0.08]$ respectivement.*

et l'état convectif résultant est montré dans la figure 4.10 pour $Ra = 4000$. La circulation créée par la convection domine celle créée par le faible écoulement de von Kármán. Ainsi un rouleau est beaucoup plus grand que l'autre, la vitesse radiale maximale augmente de $|u_r^{max}| = 0.045$ pour la conduction à $|u_r^{max}| = 0.17$ pour la convection. Cette transition brisant la symétrie est nécessairement une bifurcation de fourche : le petit rouleau peut être situé au dessus ou au coin inférieur.

Pour $Re = 90$, le seuil a lieu à $Ra_c = 12500$ et l'état convectif est montré dans la figure 4.11 à $Ra = 14000$. L'influence de la contra-rotation des disques est plus marquée qu'elle ne l'est à $Re = 40$. La vitesse radiale maximale augmente seulement de $|u_r^{max}| = 0.13$ pour la conduction à $|u_r^{max}| = 0.18$ pour la convection. Les valeurs de $|u_r^{max}|$, $|u_z^{max}|$ pour une faible convection supercritique à $Re = 90$ sont relativement inchangées de leurs valeurs à $Re = 40$.

Les isothermes des états convectifs montrent que le gradient de température est moins uniforme pour $Re = 90$ que pour $Re = 40$.

Le fait que la petite cellule dans la figure 4.10 est dans la partie inférieure du cylindre tandis que celle sur la figure 4.11 est dans la partie supérieure n'a aucune signification physique, puisque la bifurcation de fourche peut produire l'une ou l'autre des configurations pour chacun des nombres de Reynolds.

4.2.3 Etats oscillatoires de convection

Pour $Re \geq 95$, la transition de l'état de base est une bifurcation de Hopf, créant des écoulements oscillatoires. Pour $Ra = 20000$ on présente deux états oscillatoires, un cycle limite, à $Re = 110$ sur la figure 4.12 et l'autre à $Re = 63$ sur la figure 4.13. Bien que pour $Re = 63$, la première bifurcation lorsque Ra est augmenté à la convection stationnaire, il y a une autre bifurcation lorsque le nombre de Ra est élevé, la convection oscillatoire et les cycles limites résultants sont stables et reliés à ceux créés par la bifurcation de Hopf pour $Re \geq 95$ (section§4.2.4§). On appelle les cycles limites à $Re = 110$ et $Re = 63$ proches-sinusoïdaux et proches-hétéroclines, respectivement (section§4.2.5§).

Les figures 4.12 et 4.13 montrent des cellules méridionales se bousculant entre elles. A $Re = 110$ (la figure 4.12), les cellules sont de taille peu semblable, avec une cellule dans le

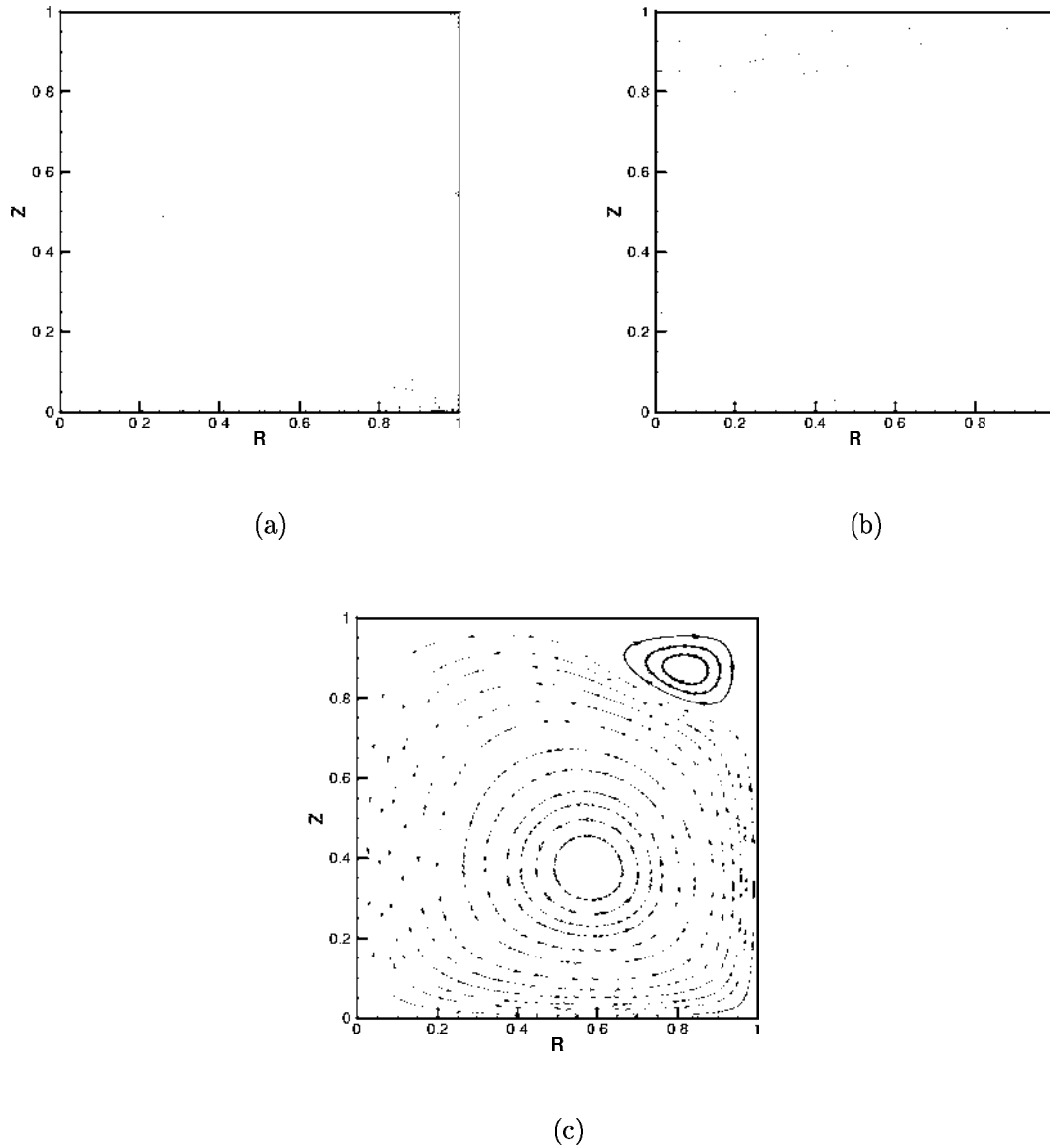


FIGURE 4.10 – *Etat convectif à $Re = 40$, $Ra = 4000$, dans le plan (r, z) . (a) vitesse azimutale u_θ , (b) champs de température T , et (c) lignes de courant Ψ . Les gammes pour u_θ et T sont $[-1, 1]$ et $[0, 1]$. La gamme pour u_r et u_z sont $[-0.10, 0.17]$ et $[-0.29, 0.08]$ respectivement.*

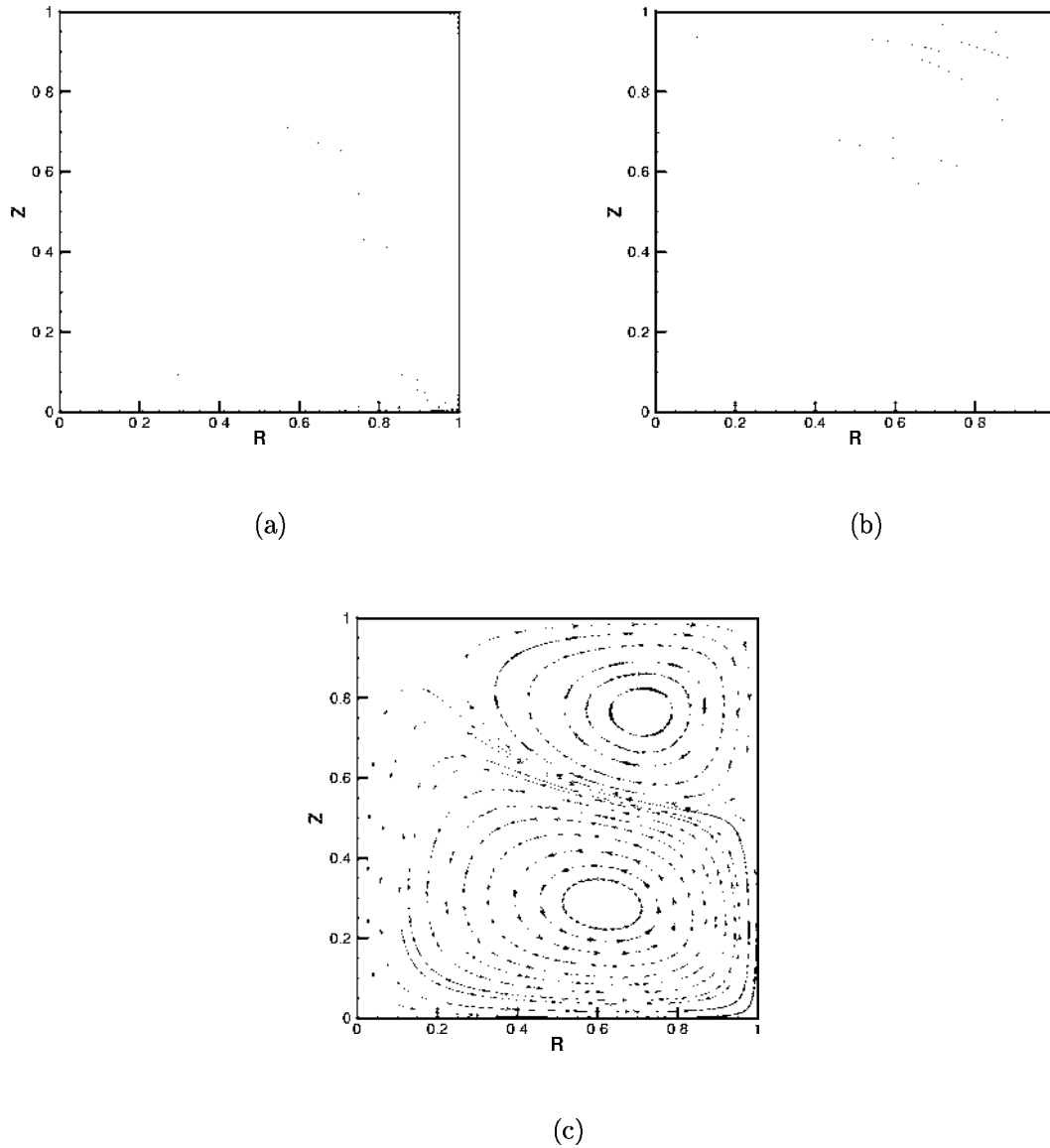


FIGURE 4.11 – *Etat convectif à $Re = 90$, $Ra = 1250$, dans le plan (r, z) . (a) vitesse azimutale u_θ , (b) champs de température T , et (c) lignes de courant Ψ . Les gammes pour u_θ et T sont $[-1, 1]$ et $[0, 1]$. Les gammes pour u_r et u_z sont $[-0.13, 0.17]$ et $[-0.26, 0.07]$ respectivement.*

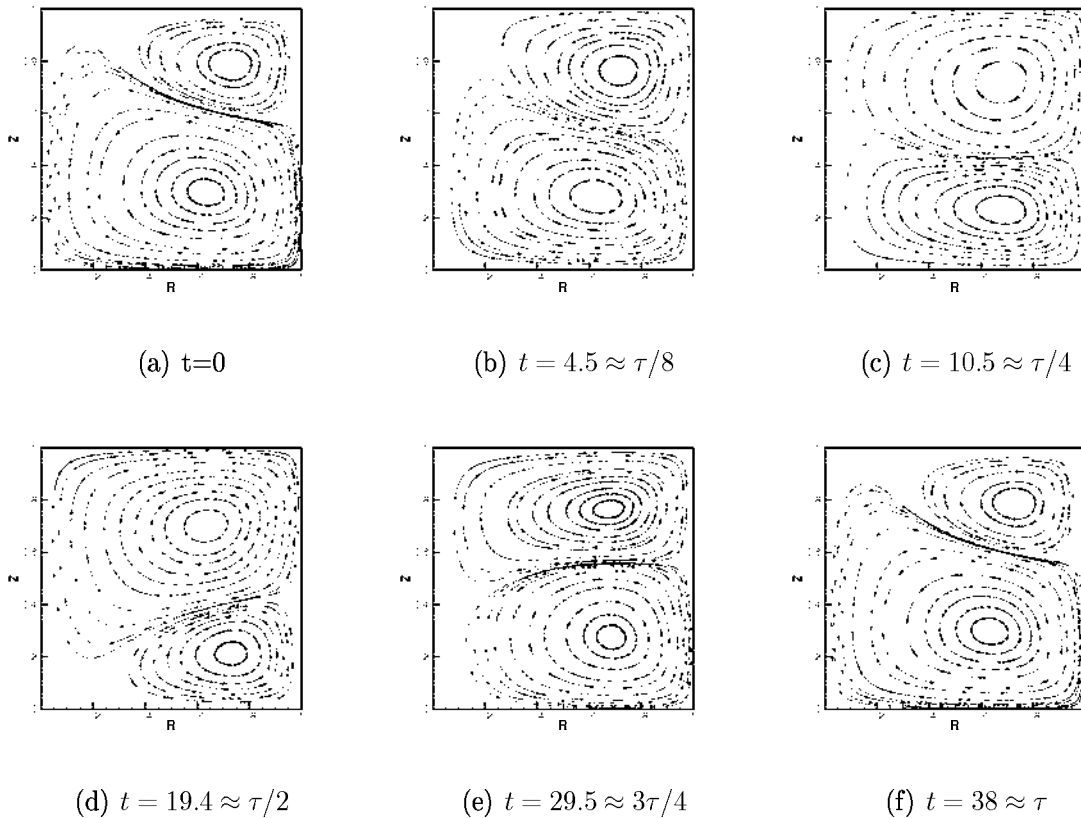


FIGURE 4.12 – Cycle limite à $Ra = 20000$, $Re = 110$. ψ est montrée aux temps $0, \tau/8, \tau/4, \tau/2, 3\tau/4, \tau$, indiqués aux séries temporelles sur la figure 4.14,a. le temps est adimensionné par l'unité de $1/\Omega$. Le cycle limite global à la symétrie de réflexion : les états dans la deuxième moitié du cycle sont reliés par la symétrie de réflexion à ceux dans la première moitié du cycle. La cellule dans le bon coin supérieur est plus petite pendant la première moitié du cycle et plus grande pendant la deuxième moitié. Les contours de la fonction de courant ne sont pas également espacés, mais à la place choisie pour illustrer les dispositifs topologiques de l'écoulement.

coin externe supérieur ou inférieur devenant alternativement plus petite et plus grande. À $Re = 63$ (la figure 4.13), la cellule principale demeure beaucoup plus grande dans tout le cycle limite, avec des cellules beaucoup plus petites sur la périphérie. À $t = 71.0$, il semble y avoir deux cellules toutes deux prolongées au-dessus de la taille entière, suggérant une interprétation de ce cycle limite comme concurrence entre une et deux cellules radiales concentriques.

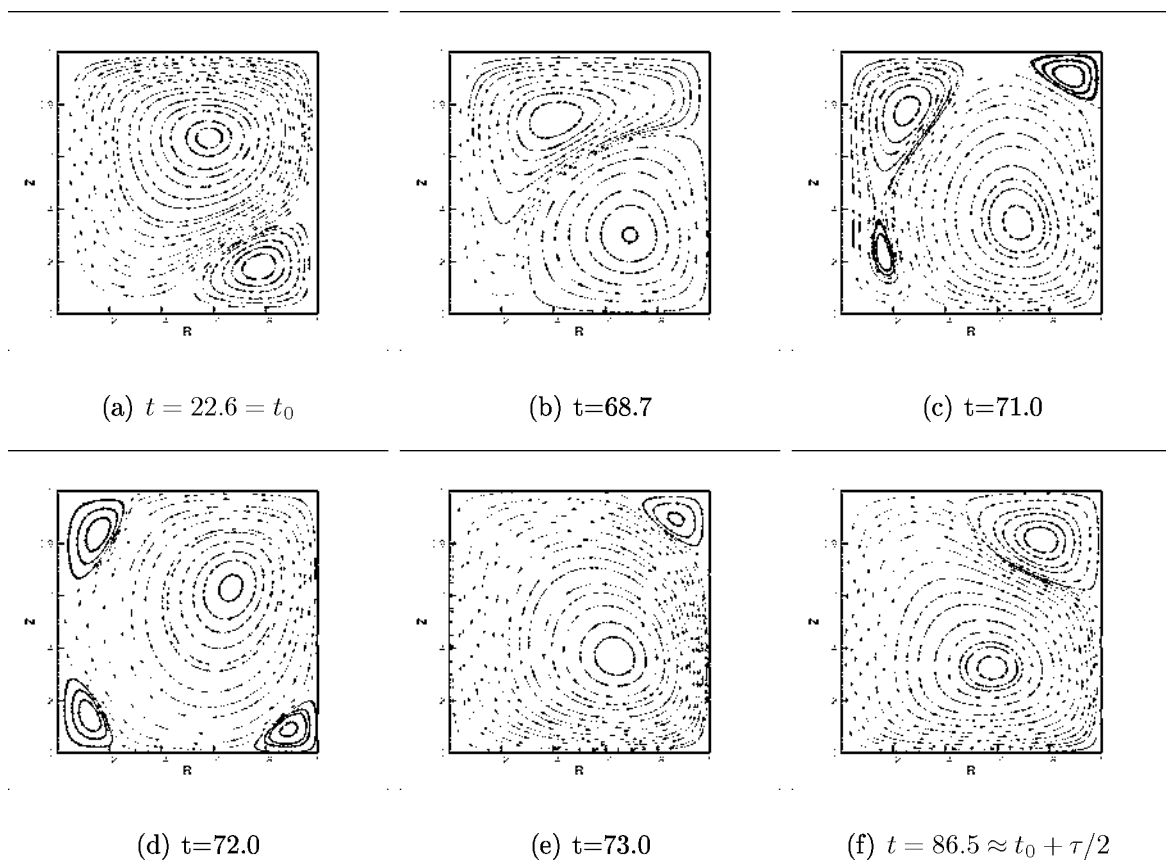


FIGURE 4.13 – Cycle limite à $Ra = 20000$, $Re = 63$. ψ est montrée aux séries temporelles sur la figure 4.14,b à des instants différents. La cellule dans le bon coin inférieur se développe et la cellule dans le pliure du coin gauche supérieure se divise en trois petites cellule. Deux de ces dernières disparaissent, laissant une petite cellule dans le bon coin supérieur. Le cycle limite global à la symétrie de réflexion : les états dans la deuxième moitié du cycle sont reliés par une symétrie de réflexion à ceux dans la première moitié du cycle. Les contours de la fonction de courant ne sont pas espacés, mais à la place choisie pour illustrer les dispositifs topologiques de l'écoulement .

A la section §4.2.2§on a montré que la transition à la convection stationnaire casse

la symétrie de réflexion, créant deux états axisymétriques rapportés par l'opérateur de réflexion k . La transition à la convection oscillatoire à une propriété correspond à chacun des états instantanés représentés sur les figures 4.12 et 4.13 et qui sont asymétriques. La deuxième moitié de chaque cycle limite est liée à la première moitié par réflexion :

$$(U_r, U_\theta, U_z, T)(t + \tau/2) = k(U_r, U_\theta, U_z, T)(t) \quad (4.4)$$

Pour comprendre mieux les cycles limites représentés sur les figures 4.12 et 4.13, on trace les diverses quantités scalaires $U_z(0.16, 0.5)$, $U_\theta(0.08, 0.5)$ et $T(0.16, 0.5)$ en fonction du temps pour créer les portraits de phases et les évolutions temporelles.

La figure 4.14 montre que les cycles limites à $Re = 110$ et $Re = 63$ sont de natures tout à fait différentes. A $Re = 110$, l'évolution temporelle est assez stationnaire, et le portrait de phase (figure 4.15,a) montre que le cycle limite est traversé par une vitesse assez constante. En revanche, à $Re = 63$, l'évolution temporelle montre deux phases avec un changement très lent, ponctué par des transitions brusques. Le portrait de phase confirme ceci : deux régions du cycle limite montrent une accumulation dense des points, indiquant un traversé lent de ces régions.

On a vu que la période à $Re = 63$ ($\tau = 115$) est considérablement plus longue que celle à $Re = 110$ ($\tau = 38$). Ceci est montré sur la figure 4.16 , qui représente la dépendance de la fréquence carrée (période carrée inverse) à Re pour $Ra = 20000$ et $Ra = 18000$, pour deux graduations différentes : la période de rotation des disques $1/\Omega$ (a) et avec la diffusion visqueuse du temps R^2/ν (b).

4.2.4 Diagramme de bifurcation

On a mentionné plusieurs dispositifs des états oscillatoires dans la section §4.2.3§ :

- La période change sensiblement avec des changements de Re ou de Ra , comme représenté sur la figure 4.16.
- Le caractère des oscillations change sensiblement, de proche-sinusoïdal au relaxation (des plateaux ponctués par les changements rapides), comme représenté sur la figure 4.14.

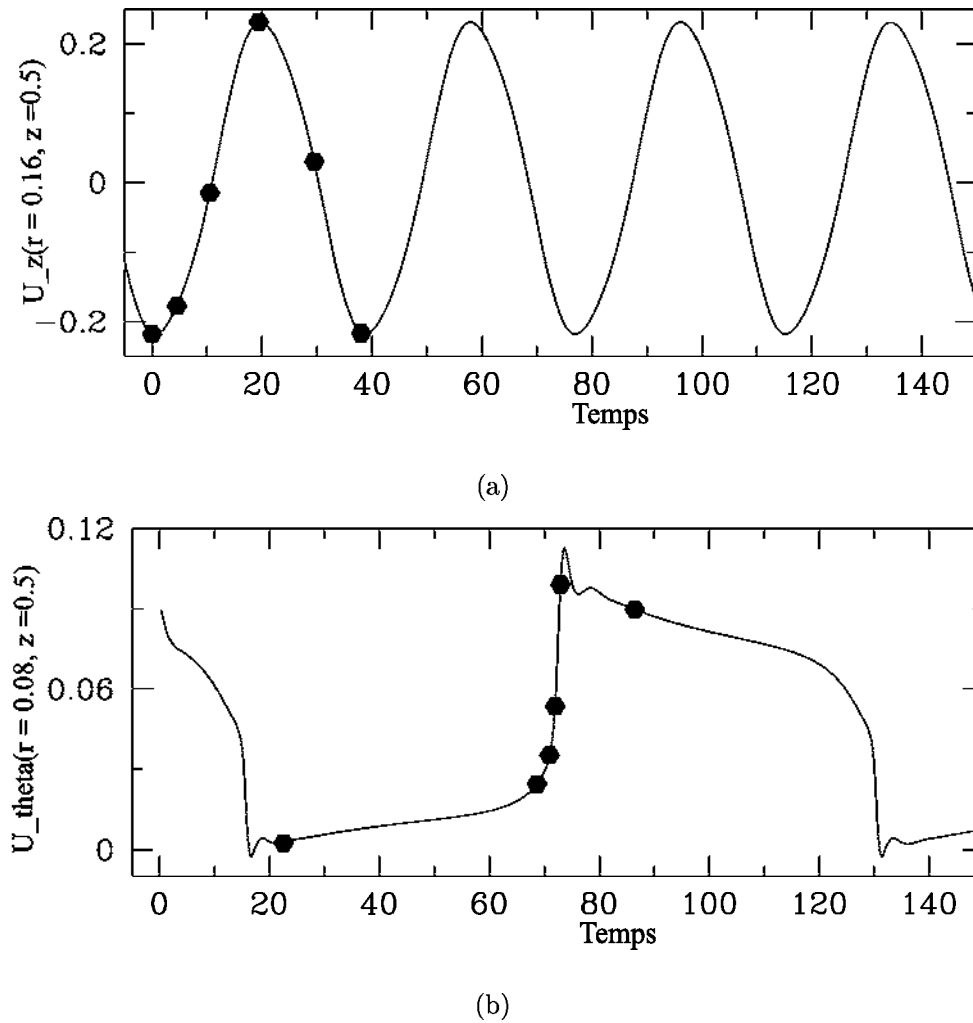


FIGURE 4.14 – Séries temporelles correspondant aux cycles limites à $Ra = 20000$. Les points dans les séries temporelles se rapportent à des visualisations sur les figures 4.12 et 4.13. (a) : à $Re = 110$, les oscillations, à la période $\tau \approx 38$, sont stationnaires. (b) : à $Re = 63$, les oscillations, à la période $\tau \approx 115$, consistent principalement en deux longs plateaux avec des gradients brusques entre eux.

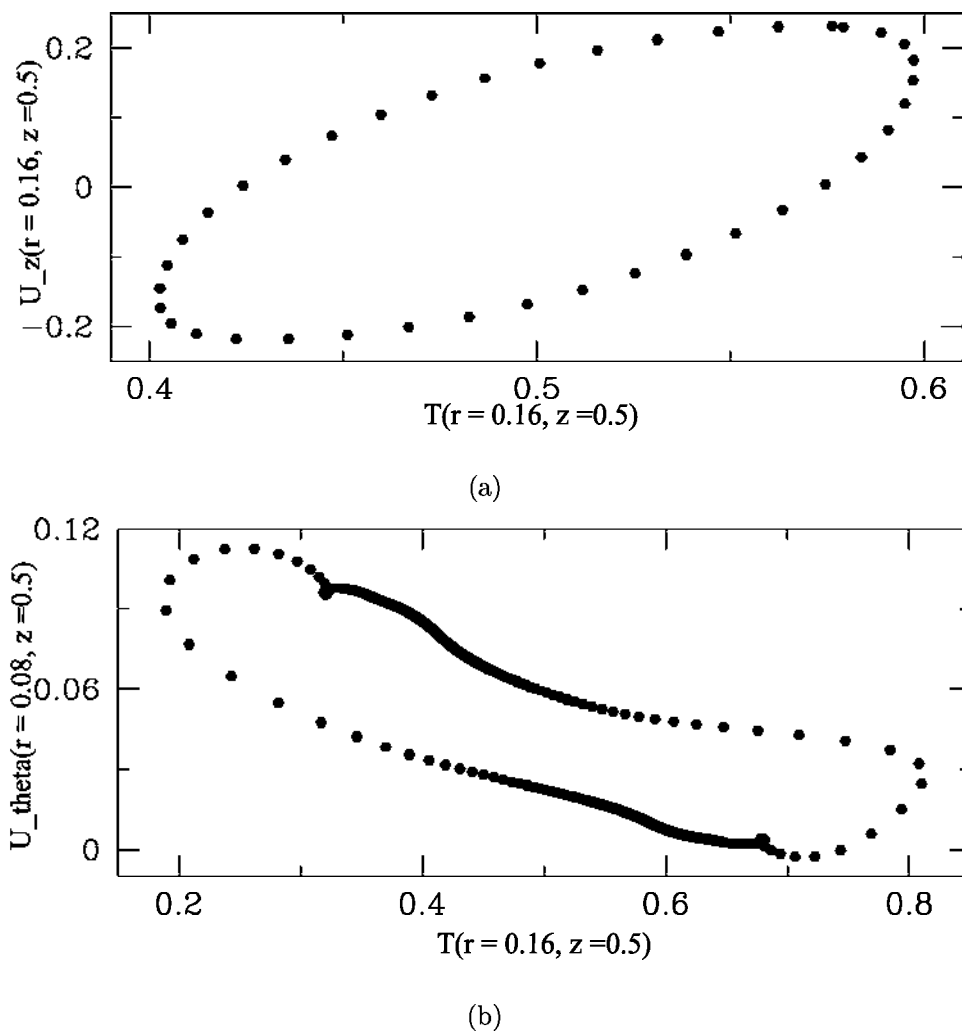
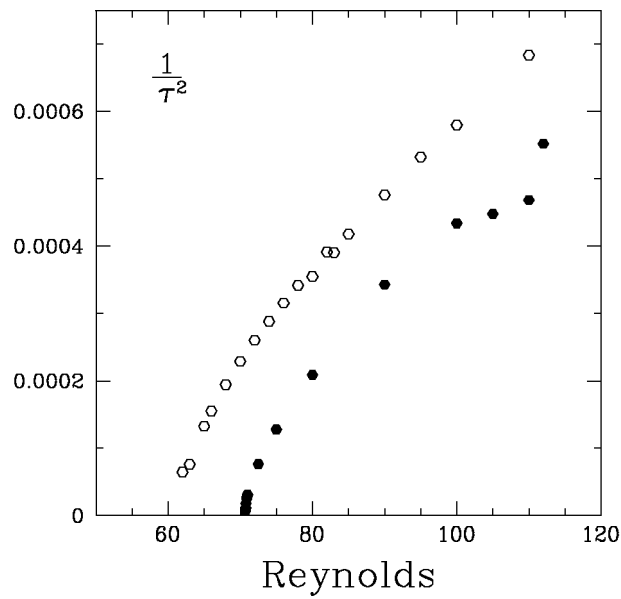
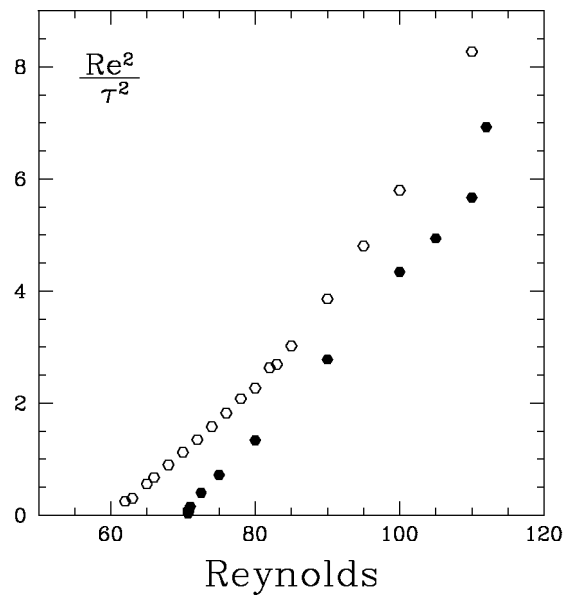


FIGURE 4.15 – Portraits de phases correspondant aux cycles limites à $Ra = 20000$. Les points dans les portraits de phases sont tracés aux temps espacés de sorte que leurs densités reflètent le taux auquel le cycle limite est traversé



(a)



(b)

FIGURE 4.16 – Variation de la fréquence carrée avec Re . (a) : $1/\tau$ pour $Ra = 20000$ (points creux) et pour $Ra = 18000$ (points pleins). (b) : $(Re/\tau)^2$ pour $Re = 20000$ (points creux) et pour $Ra = 18000$ (points pleins).

- La petite cellule ne demeure pas dans le coin supérieur ou inférieur, comme pour les états convectifs stationnaires, mais elle alterne entre les deux endroits, comme représenté sur les figures 4.12 et 4.13.

Tous ces dispositifs sont typiques du scénario de la bifurcation que nous décrirons, et qui est illustré sur la figure 4.17. A $Re < 95$, le seuil pour la convection, déjà représenté sur la figure 4.6, correspond à une bifurcation de fourche. A Ra en-dessous de PF_1 c-à-d l'encart (a) de la figure 4.17, la seule solution est l'écoulement de base, dont un exemple est donné sur la figure 4.8. Procédant dans le sens des aiguilles d'une montre, à PF_1 , l'état de base perd la stabilité et provoque deux états convectifs symétriques, comme illustré sur l'encart (c) de la figure 4.10. Pour des valeurs de Re , une deuxième bifurcation de fourche PF_2 , se produit à une valeur plus élevée de Ra . Dans les régions (d) et (e), il existe deux états stationnaires additionnels instables. Ils sont également reliés par l'opération de symétrie §2.1.2§. La trajectoire laissant les deux états instables se termine par deux états stables, formant un ensemble invariable qui ressemble à un cercle ou à une ellipse. En partant de PF_2 et en s'approchant de SN , les deux états stable et instable s'approchent à d'un autre ensemble le long de cette invariable, comme montré en (e), en fusionnant et détruisant finalement les autres ensembles dans deux bifurcations symétriques reliées par le noeud-col à SN . Les trajectoires passent par une période infinie, exactement à SN , aux deux endroits auxquels les états stables et instables sont fusionnés, formant un cycle limite dont la période est infinie (cycle hétérocline).

Pour Ra en haut de SN , mais suffisamment près, comme en encart (f), une grande partie du temps pendant le cycle limite est dépensé dans le voisinage des anciens points fixes, comme il est montré à $Re = 63$, $Ra = 20000$ sur la figure 4.13 et dans la moitié inférieure de la figure 4.14. A partir de SN , par l'augmentation de Ra ou Re , comme en encart (g), le temps passé à proximité de ces points est raccourci, et la période diminue, comme il est montré dans $Re = 110$, $Ra = 20000$ sur la figure 4.12 et dans la moitié supérieure de la figure 4.14. En conclusion, pour $Re > 95$, la courbe H correspond à une bifurcation de Hopf, au-dessous de laquelle, l'état de base est un foyer en spirale stable, comme en encart (b).

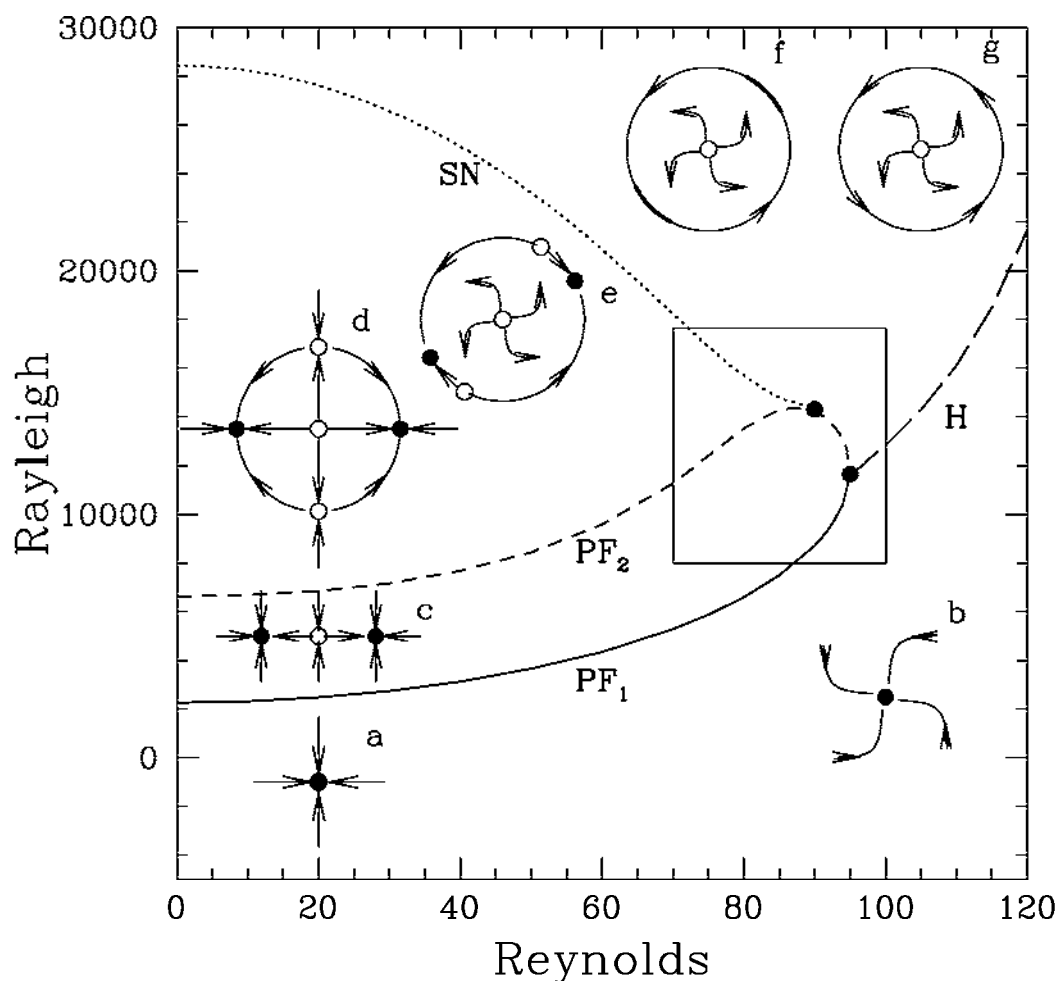


FIGURE 4.17 – Courbes de bifurcations dans le plan (Re, Ra) montrant la première fourche (bleu, solide, PF_1), la deuxième fourche (vert, tiret-court PF_2), le Hopf (rouge, long-tiret H), et la bifurcation noeud-col (noir, pointillé, SN). Les points indiquent les points codimension deux où la courbe PF_2 rencontre les courbes SN (90.14300) et H (95.11640). Un agrandissement de la région à l'intérieur du carré est montré sur la figure 4.18. Portraits de phase montrés comme encarts. a, b) en-dessous de PF_1 et H , la seule solution est l'écoulement de base stable, qui est un noeud (a) ou un point en spirale (b). c) Entre PF_1 et PF_2 , l'écoulement de base est instable et il existe deux états convectifs asymétriques stables. d, e) entre PF_2 et SN , existent cinq états : l'écoulement de base instable et deux états convectifs stables et deux instables. f, g) entre SN et H , l'écoulement de base instable est entouré par un cycle limite stable, qui est (f) proche de SN proche-hétérocline et (g) proche H proche-sinusoidal.

Bien que la bifurcation de noeud-col signale le fusionnement de deux paires d'états stationnaires, elle a comme conséquence d'un cycle limite en raison des raccordements entre ces états stationnaires. Ces raccordements résultent à leur tour de la formation des états stables par l'intermédiaire de deux bifurcations successives de fourches. Dans ces circonstances, la bifurcation de noeud-col s'appelle un Sniper, pour le noeud-col dans une orbite périodique, où la période de noeud-col est infinie. On peut citer d'autres noms : noeud-col homoclinique, SNIC (Noeud-col sur le cercle invariable), ou bifurcation d'Andronov ((Andronov et Leontovich, 1939),(Kuznetsov, 1998)). On peut montrer que, près d'une bifurcation de Sniper, la fréquence d'oscillation change comme

$$2\pi/\tau \approx \sqrt{\mu - \mu_c} \quad (4.5)$$

où $\sqrt{\mu - \mu_c}$ prend la valeur $Ra - Ra_{SN}$ (pour Re) fixe, ou bien $Re - Re_{SN}$ (pour Ra) fixe, ou toute combinaison des deux. La fréquence carrée est proportionnelle à la distance du seuil suffisamment près du seuil pour n'importe quelle graduation. Toutefois, la figure 4.16 montre que, pour notre cas, la dépendance linéaire 4.5 se tient sur un éventail de Re lorsque τ est mesuré par le temps visqueux de diffusion (4.16a) que lorsque il est mesuré par la période de rotation de disque (4.16b).

La figure 4.17 montre deux points de codimension-deux. L'un à (95.11640), auquel les courbes H , PF_1 et PF_2 se rassemblent dans un point de Takens-Bogdanov, et l'autre à (90.14300), où la courbe SN se termine à un point d'hystérésis au dessus de PF_2 . Entre ces deux points, la figure 4.17 montre la courbe PF_2 séparant les régions (c), dans lesquelles l'état de base instable coexiste avec deux états stationnaires stables, et la région (f, g) où il coexiste avec un cycle limite stable. La bifurcation de fourche PF_2 ne peut pas provoquer une telle transition. Les autres chemins entre (c) et (f, g), l'un ou l'autre dans le sens des aiguilles d'une montre à travers PF_2 , les régions d/e et SN; dans le sens contraire des aiguilles d'une montre à travers PF_1 , les régions a/b et H, peuvent provoquer cette transition. Ceci signifie que la figure 4.17 est inachevée. La solution doit être trouvée sous la forme normale du point de codimension de Takens-Bogdanov (TB) en présence de la symétrie de réflexion :

$$\frac{dx}{dt} = -y \quad (4.6a)$$

$$\frac{dy}{dt} = \mu_1 x - \mu_2 y - \delta x^3 - x^2 y \tag{4.6b}$$

où $\delta = \pm 1$. On prend $\delta = +1$, puisque c'est ce choix qui reproduit les phénomènes constatés dans la simulation fluide-dynamique. Le comportement de la forme normale (4.6) est illustré sur la figure 4.18 et dans le tableau 4.3. Le point de codimension deux TB est localisé à $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$ et l'état de base $(x, y) = (0, 0)$. L'état de base subit une bifurcation de fourche ($\lambda_{\pm} = 0$), correspond au PF_1 et PF_2 , à $\mu_1 = 0$, et une bifurcation de Hopf ($R(\lambda_{\pm}) = 0$), correspond au H à $\mu_2 = 0$ pour $\mu_1 > 0$. De plus, le tableau 4.3 montre que les solutions $(\sqrt{\mu_1}, 0)$ subissent une bifurcation de Hopf à $\mu_2 = -\mu_1$ pour $\mu_1 < 0$. En effet, on a calculé une bifurcation secondaire de Hopf SH pour le système hydrodynamique, et indiqué sur la figure 4.18. Cette bifurcation est sous-critique et les cycles limites produits sont instables. Arnold (1982) a montré que le système contient deux courbes additionnelles de bifurcation émanant du point de codimension deux $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$, une bifurcation de collage G , et l'autre un noeud-col pour des orbites périodiques, SNP . Les courbes G et SNP correspondent aux bifurcations globales, ne peuvent pas être calculées en examinant des valeurs propres au tableau 4.3. Elles ont été déterminées par (Kuznetsov, 1998). Cependant, empiriquement, la courbe SNP semble être $\mu_2 = -0.77\mu_1$ pour la forme normale. On n'a calculé ni SNP ni G pour notre système hydrodynamique. L'ensemble, des bifurcations SNP , G , SH et P accomplissent la transformation dans la petite place de la figure 4.17, entre les trois états stationnaires de la région (c) aux cycles limites stables de la région (g).

Etat stationnaire	Jacobien	Valeurs propres
(x, y)	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \mu_1 - 3x^2 - 2xy & \mu_2 - x^2 \end{pmatrix}$	$\lambda_{\pm} = \frac{-\frac{1}{2}(\mu_2 - 1 - x^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(-\mu_2 - x^2)^2 - (\mu_1 - 3x^2 - 2xy)}}{1}$
$(0, 0)$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \mu_1 & -\mu_2 \end{pmatrix}$	$\lambda_{\pm} = -\frac{1}{2}\mu_2 \pm \sqrt{\frac{1}{4}\mu_2^2 - \mu_1}$
$\pm(\sqrt{\mu_1}, 0)$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2\mu_1 & -\mu_2 - \mu_1 \end{pmatrix}$	$\lambda_{\pm} = \frac{-(\mu_1 - 1 - \mu_2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\mu_2 - 1 - \mu_1)^2 + 2\mu_1}}{1}$

TABLEAU 4.3 – Propriétés de la forme normale de Takens-Bogdanov.

On décrit les bifurcations et les portraits de phase sur la figure 4.18, procédant autour du point TB dans le sens anti-horaire. Dans la région (b) , la seule solution est l'état de base stable. La bifurcation de Hopf H déstabilise l'état de base et produit un cycle limite stable (g) . La bifurcation de fourche P est sous-critique, et produit deux états asymétriques instables tout en ramenant le nombre de directions instables de l'état de base de deux à un (h) . La bifurcation secondaire de Hopf SH est également sous-critique, stabilise les deux états asymétriques tout en créant la limite instable faisant un cycle entourant chacun (i) . La bifurcation de collage G joint ces deux cycles limites à l'état symétrique dans une figure-huit. Après, elle forme un cycle limite instable simple entourant chacun des trois états stationnaires (j) . Les courbes SH et SNP tracent une cale étroite où il y a deux stabilités entre le cycle limite et les états convectifs stationnaires. Les cycles limites stables et instables défruitent dans un noeud-col aux orbites périodiques SNP , laissant seulement l'écoulement de base instable et les états stationnaires asymétriques stables (c) . En croisant la bifurcation de fourche P , on revient à l'état stable symétrique simple (b) . La figure 4.18 montre un troisième point de codimension deux où SH et SN se rassemblent à $(74, 17100)$. D'autres points de codimension deux non localisés doivent marquer les extrémités des courbes G et SNP . Bien que l'analyse entourant le point TB soit théoriquement importante. Dans le plan (Re, Ra) , la transition entre la convection stationnaire et oscillatoire a lieu par l'intermédiaire de la bifurcation de Sniper; Elle se trouve seulement entre (95.11640) et (90.14300) que d'autres bifurcations héritent le jeu.

La figure 4.20 montre les diagrammes représentatifs de la bifurcation. Des branches sont indiquées par leur index de stabilité. L'index de stabilité change par un, à une bifurcation de fourche (pour l'état de base), ou à une bifurcation de noeud-col, et par deux pour une bifurcation de Hopf. On trace la température à un point fixe $\bar{T} \equiv T(r = 1/2, z = 1/2)$ en fonction de Ra pour Re fixe, le long du fond de la figure, et en fonction de Re pour Ra fixe, le long de la droite. Pour représenter les cycles limites, on trace $\left[\frac{1}{T} \int_0^T dt T(t)^2 \right]^{1/2}$, L_2 la norme T sur une période τ . Les trois points de codimension deux à $(74, 17100)$, $(90, 14300)$ et $(95, 11640)$, les limites de la fourche et les courbes noeud-col ($Ra = 2262$ et 28445) délimitent les gammes au-dessus de laquelle les différents types des diagrammes de bifurcations se produisent.

- $Re = 60$ représente la gamme typique entre $0 \leq Re \leq 74$: deux bifurcations supercritiques successives de fourche produisent deux paires d'états stationnaires qui sont détruites par une bifurcation noeud-col (Sniper), menant à un cycle limite. $Re = 85$ représente [74, 90] : la bifurcation secondaire de Hopf a été ajoutée aux diagrammes.
- $Re = 93$ représente [90, 95] : la deuxième bifurcation de fourche est devenue sous-critique.
- Pour $Re > 95$ (non montré), il n'y a aucun état stationnaire non trivial et une bifurcation de Hopf mène directement au cycle limite.
- $Ra = 5000$ représente la gamme entre $2262 \leq Ra \leq 6643$: une bifurcation simple de fourche mène à une paire d'états stationnaires lorsque le nombre de Re diminue.
- $Ra = 7000$ représente l'intervalle [6643, 11638] : une bifurcation de fourche et une paire additionnelle de branches stationnaires peuvent être observées.
- $Ra = 13000$ représente l'intervalle [11638, 14290] : des bifurcations primaires et deux secondaires de Hopf ont été ajoutées au scénario.
- $Ra = 15000$ représente l'intervalle [14290, 17100] : les deux paires de branches non triviales ne sont plus connectées à la branche insignifiante par l'intermédiaire des bifurcations de fourche, mais surgissent à la place par l'intermédiaire des bifurcations noeuds-cols.
- $Ra = 18000$ représente l'intervalle [17100, 28445] : les bifurcations secondaires de Hopf ont disparu.
- Pour $Ra > 28445$ (non montré), il n'y a aucun état stationnaire non trivial, mais seulement un cycle limite produit par la bifurcation de Hopf.

Les autres bifurcations représentées dans l'agrandissement de la figure 4.18, présentés pour les gammes entre $74 \leq Re \leq 95$ et $11638 \leq Ra \leq 17100$, sont omises de la figure 4.20 pour la clarté.

Des scénarios semblables à ceux rapportés dans cette section ont été calculés dans d'autres configurations hydrodynamiques. On passe en revue ces études on énumère les similitudes et les différences entre ces observations et les résultats actuels. Dans un cylindre ayant un rapport d'aspect $\Gamma = 5$, $Pr = 10$ et de paroi latérale thermiquement

conductrice (Tuckerman et Barkley, 1988; Barkley et Tuckerman, 1989), une bifurcation de Sniper mène à un modèle de cinq rouleaux concentriques ondulants radialement vers l'intérieur. En réduisant la conductivité de la paroi latérale, d'autres bifurcations noeuds-cols sur le même cercle invariable sont apparues, en créant quatre-rouleaux stationnaires à des états stables. Aucune bifurcation de Hopf ou point de Takens-Bogdanov n'a été trouvée. Une bifurcation de Sniper est également trouvée pour $\Gamma = 5$, $Pr = 7$ dans une étude de la convection tournante (Lopez et al., 2006). Quand la rotation est commencée, la symétrie de réflexion est cassée et les fourches deviennent imparfaites, mais la bifurcation de Sniper persiste, depuis que le cycle limite est créé par une bifurcation noeud-col au lieu de deux simultanées. Cette bifurcation peut également être responsable des oscillations de longue période qui se sont produites (mais pouvant être visualisées) dans les expériences (Behringer et al., 1983). (Siggers, 2003), a effectué un aperçu étendu entre $4 \leq \Gamma \leq 10$, à $Pr = 0.1$ avec des états aux frontières soumises à une contrainte-libre. Dans l'article de (Siggers, 2003), 20 – 30 fonctions propres ont été maintenues. Ce nombre est suffisamment important pour permettre un suivi automatique des bifurcations. Un diagramme de phase très semblable à ses dispositifs à grande échelle, est décrit dans cette section. Les cycles limites concurrencent les états stationnaires qui sont créés par deux bifurcations de fourches et qui sont détruits par des bifurcations de noeud-col. Cependant, à la différence de notre cas, l'état de base ne subit jamais une bifurcation de Hopf comme le notre H ; les seules bifurcations de Hopf sont ceux, comme le notre SH , qui créent de petits cycles limites, comme ceux en encart (*i*) de la figure 4.18. Le grand cycle limite n'est créé ni par un Sniper ni par une bifurcation de Hopf, mais plutôt par des orbites périodiques du noeud-col (comme dans l'encart (*j*) de notre figure 4.18) ou par une bifurcation hétérocline.

4.2.5 Valeurs propres et vecteurs propres

Le comportement des valeurs propres et des vecteurs propres de l'écoulement de base varie lorsque les nombres de Rayleigh et de Reynolds sont changés. Bien que l'analyse linéaire de stabilité d'un problème soit habituellement présentée avant le scénario de bifurcation, on montre ici quelques dispositifs des valeurs propres et des vecteurs propres

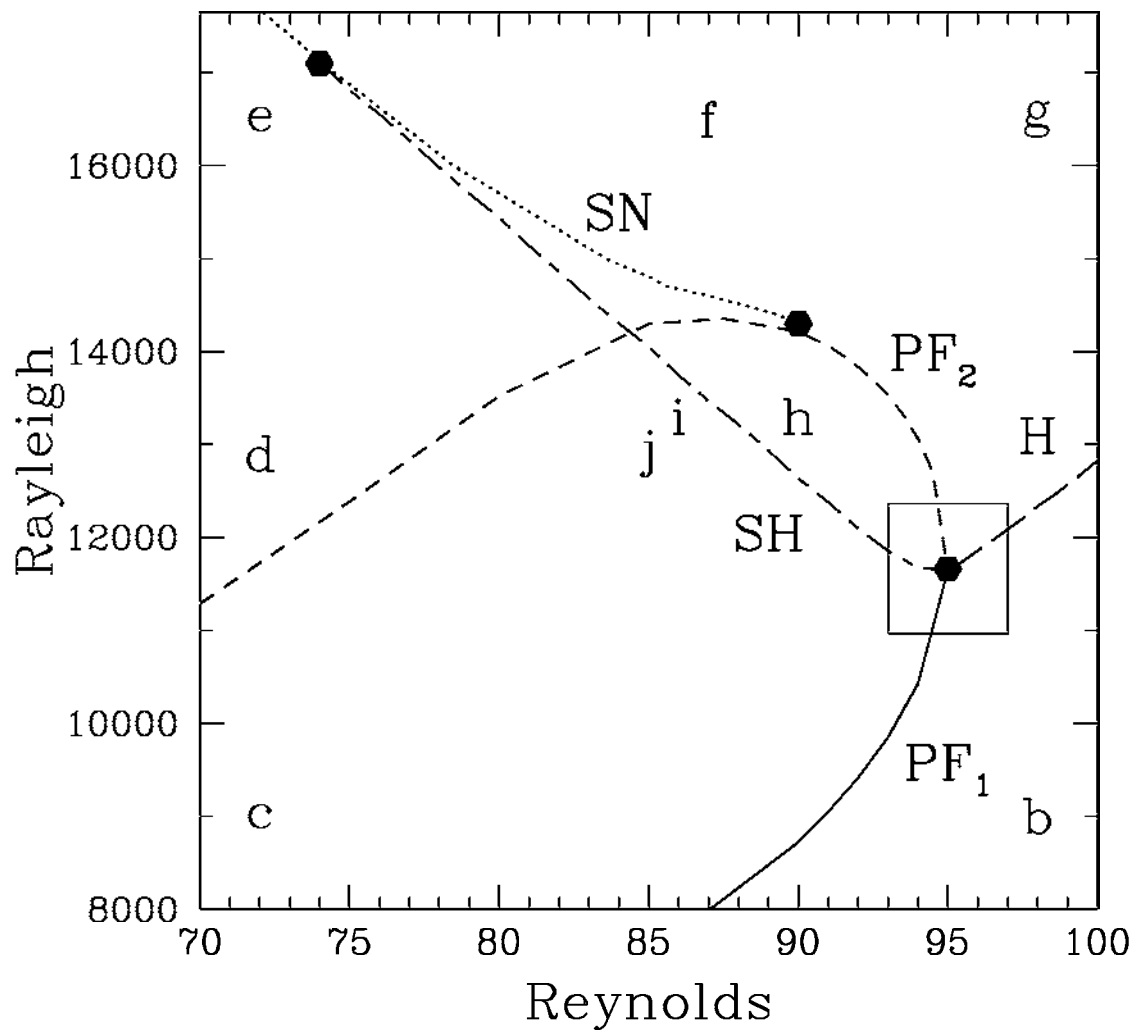


FIGURE 4.18 – *Agrandissement du carré sur la figure 4.17. La courbe additionnelle (en tirets pointillés noirs) indique la bifurcation secondaire de Hopf SH . Les étiquettes correspondent à ceux de la figure 4.17. Le comportement dans le carré est décrit par la forme normale de TB 4.6.*

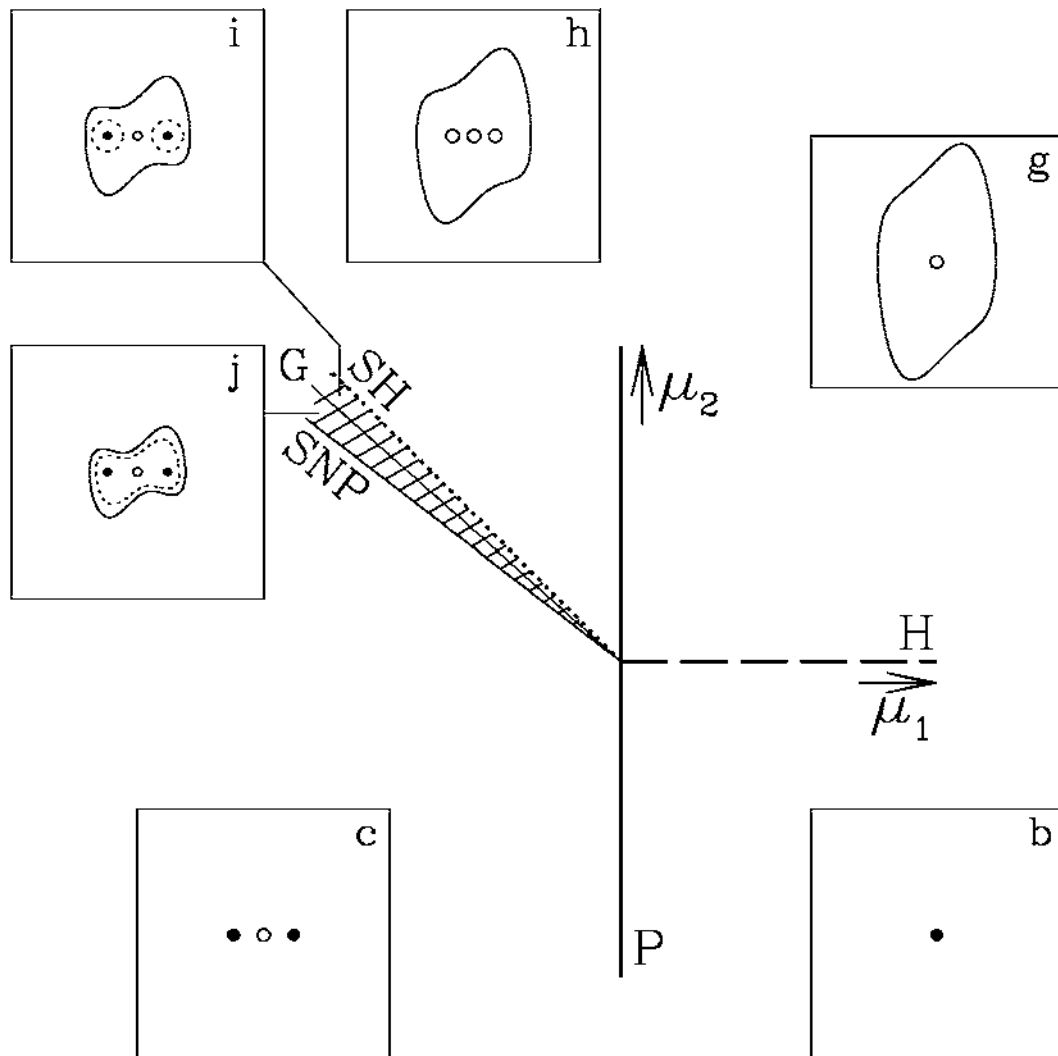


FIGURE 4.19 – Comportement de la forme normale de TB 4.6 avec bifurcation de fourche P , bifurcation de Hopf H , bifurcation secondaire de Hopf SH , noeud-col des orbites périodiques SNP et bifurcation de collage G . Les portraits de phase b), c), g) comme sur la figure 4.17. h) Entre P et SH un cycle limite d'écurie entoure les écoulements de base et les écoulements convectifs instables. i) Entre SH et G , les petits cycles limites instables entourent chaque état convectif stable. j) Entre G et SNP , deux grands cycles limites, un stable et l'autre instable, entourent les trois états stationnaires. La région hachurée indique la bi-stabilité entre le cycle limite et les états stationnaires.

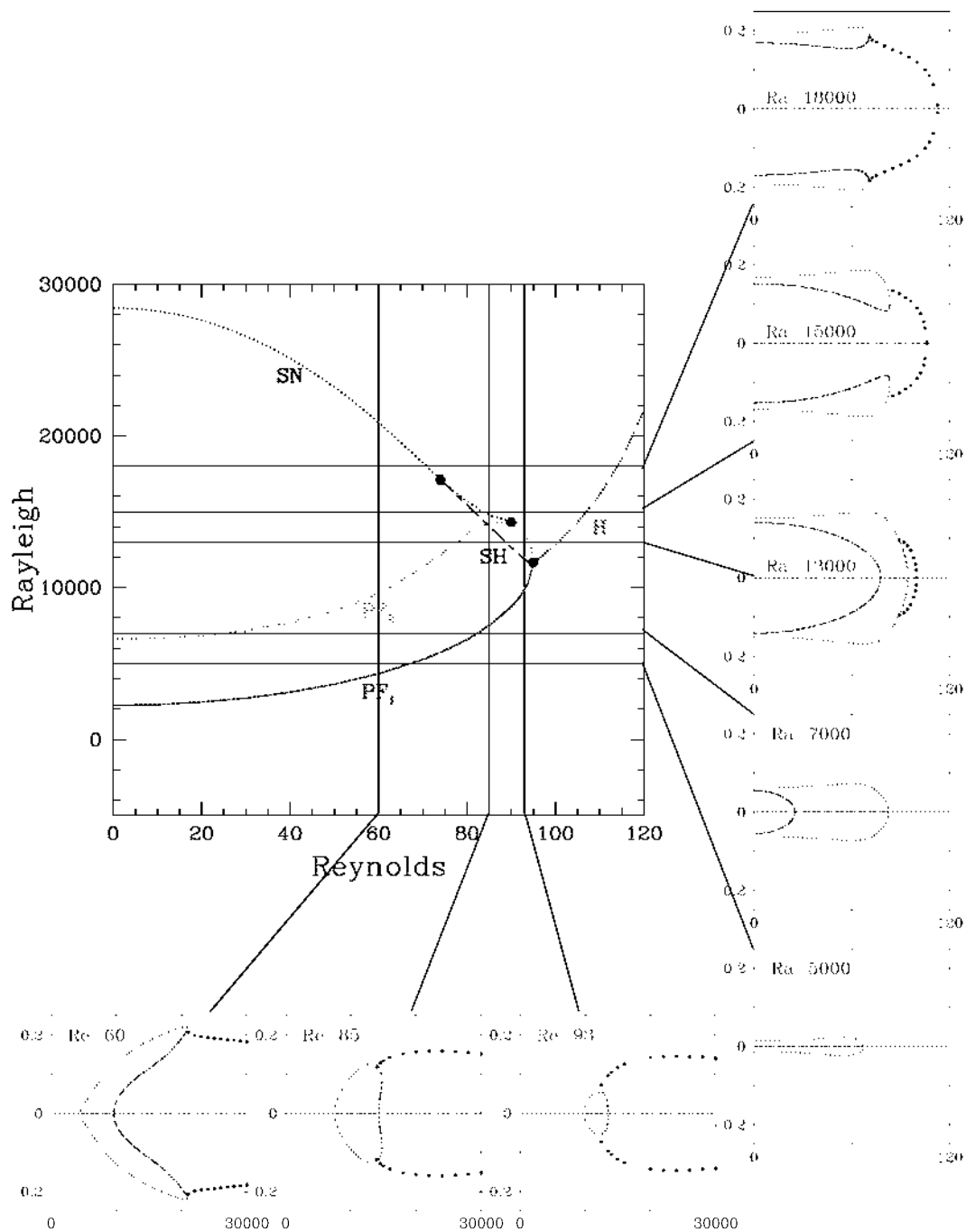


FIGURE 4.20 – Diagrammes de bifurcation le long des lignes dans le diagramme central (Re, Ra). $T(1/2, 1/2)$ sont tracés en fonction de Ra pour Re fixe dans les diagrammes le long du fond, et en fonction de Re pour Ra fixe dans la colonne du côté droit. Les diagrammes représentent les branches stationnaires pour zéro, une et deux directions instables (respectivement courbes en trait continu vert, en tiret long bleu et en tiret court rouge. Les points noirs indiquent des cycles limites

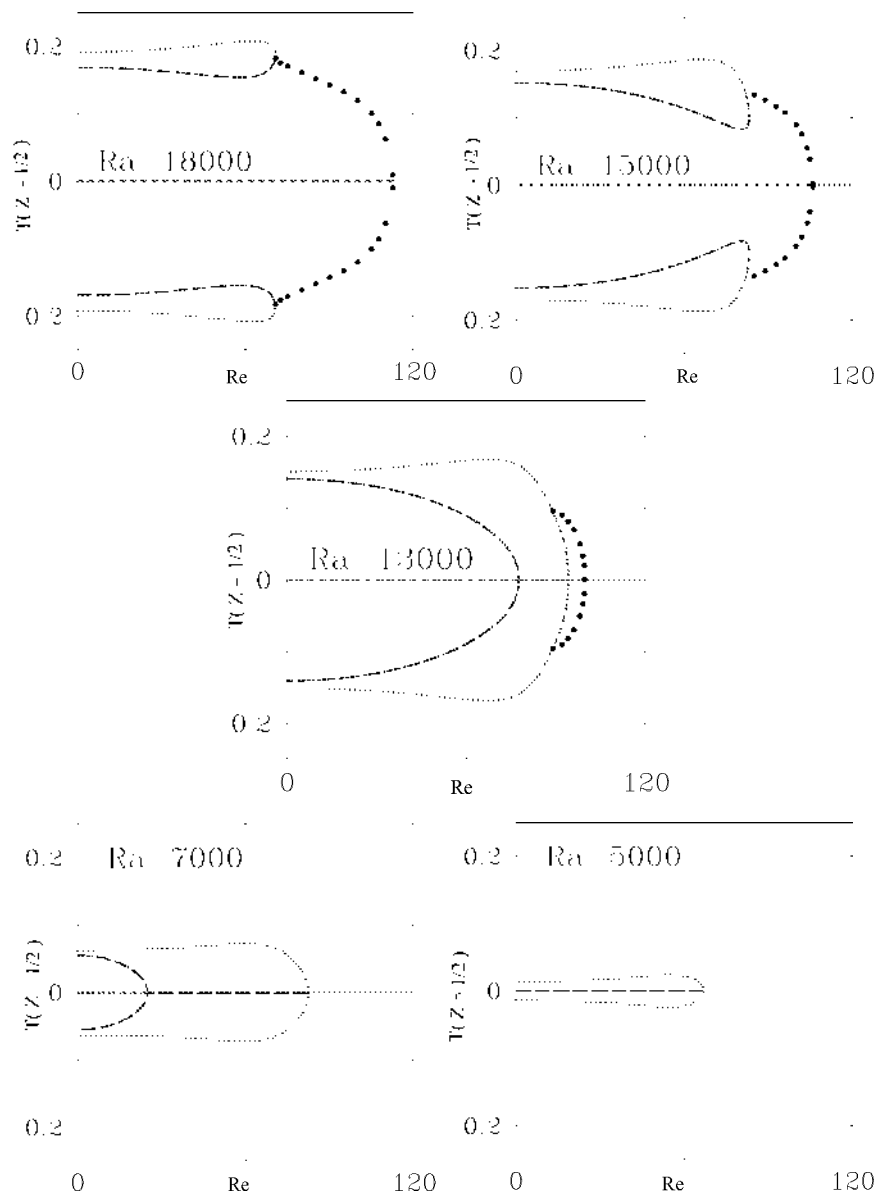


FIGURE 4.21 – Diagrammes de bifurcations montrant les branches des solutions en fonction de Re pour des valeurs fixes de Ra . Pour $14300 < Ra < 28445$, les diagrammes contiennent des bifurcations noeuds-cols. Deux bifurcations de fourche pour $6643 < Ra < 14300$, une bifurcation de fourche pour $2262 < Ra < 6643$, et aucune bifurcation pour $Ra < 2262$.

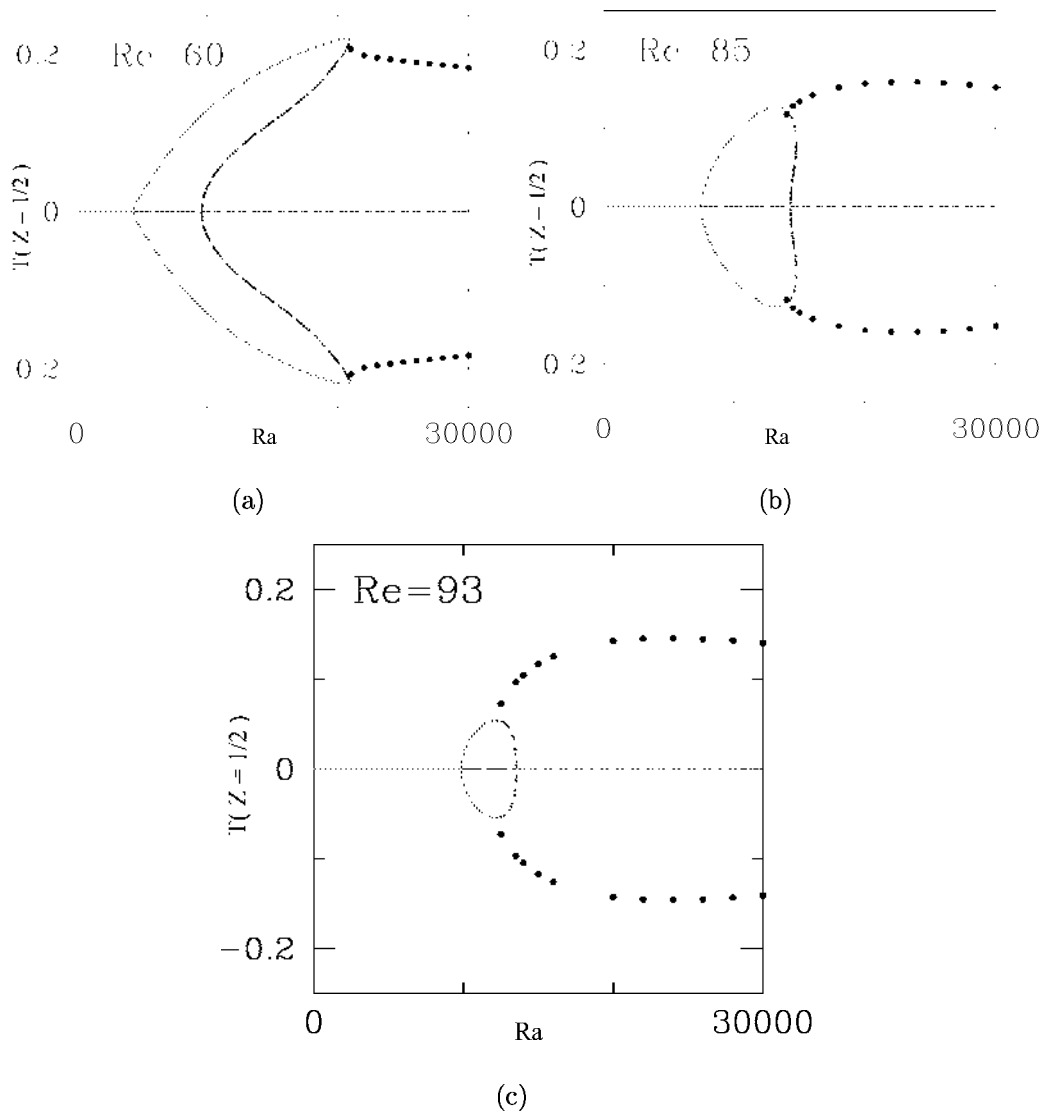


FIGURE 4.22 – Diagrammes de bifurcations montrant les branches des solutions en fonction de Ra pour des valeurs fixes de Re .

qui sont indépendants du scénario de bifurcation. Pour obtenir les équations linéaires de stabilité, nous substituons

$$(\Psi, V_\theta, T)(r, z) + e^{\sigma t}(v, v_\theta, \Theta)(r, z) \quad (4.7)$$

Dans les équations régissantes (2.5)-(2.6) de la section §2.2.1§, d'où (Ψ, V_θ, T) est une solution stationnaire, et (v, v_θ, Θ) est une perturbation avec le taux de croissance σ . Nous notons que la perturbation Θ de la température est indépendante de l'angle azimutal θ tandis que la perturbation méridionale de la vitesse est $v_r e_r + v_z e_z = e_\theta/r \times \nabla v$. Si l'on garde seulement les termes linéaires, on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma D^2 v &= -(v_r \partial_r + v_z \partial_z) D^2 \Psi - (v_z \partial_r + v_r \partial_z) D^2 v + \\ &(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}) D^2 v - \frac{Ra}{Pr} \partial_r \Theta + 2 \partial_z (\frac{V_\theta v_\theta}{r}) \end{aligned} \quad (4.8a)$$

$$\sigma \Theta = -(v_r \partial_r + v_z \partial_z) T - (V_r \partial_r + V_z \partial_z) \Theta + \frac{1}{Pr} \nabla^2 \Theta \quad (4.8b)$$

$$\sigma v_\theta = -(v_r \partial_r + v_z \partial_z) V_\theta - (V_r \partial_r + V_z \partial_z) v_\theta + (\nabla^2 - \frac{1}{r^2}) v_\theta \quad (4.8c)$$

avec des conditions aux limites homogènes :

$$v = \partial_z v = 0 \Leftrightarrow v_r = v_z = 0 \text{ et } v_\theta = 0 \text{ et } \Theta = 0 \text{ à } z = 1 \quad (4.9a)$$

$$v = \partial_z v = 0 \Leftrightarrow v_r = v_z = 0 \text{ et } v_\theta = 0 \text{ et } \Theta = 0 \text{ à } z = 0 \quad (4.9b)$$

$$v = \partial_r v = 0 \Leftrightarrow v_r = v_z = 0 \text{ et } v_\theta = 0 \text{ et } \partial_r \Theta = 0 \text{ à } r = 1 \quad (4.9c)$$

$$v = D^2 v = 0 \Leftrightarrow v_r = \partial_r v_z = 0 \text{ et } v_\theta = 0 \text{ et } \partial_r \Theta = 0 \text{ à } r = 0 \quad (4.9d)$$

Le nombre de Reynolds apparaît par l'intermédiaire des conditions aux limites non homogènes sur les équations non-linéaires (2.6a,b), ce qui rend V_θ proportionnel à Re . Afin de rendre cette dépendance à l'égard explicite à l'égard de Re , on mesurera V_θ (mais pas $V_{r,z}$ ou Ψ) par l'intermédiaire de Re :

$$V_\theta = Re U_\theta \quad (4.10)$$

Cette graduation est utilisée lorsque $Re = 0$, puisque V_θ est proportionnel à Re . Nous réécrivons alors (4.8) d'une matrice plus compacte comme suit :

$$\sigma \begin{pmatrix} D^2 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \Theta \\ v_\theta \end{pmatrix} = \mathfrak{L} \begin{pmatrix} \psi \\ \Theta \\ v_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{L}_{\psi\psi} & \mathfrak{L}_{\psi\Theta} & Re\mathfrak{L}_{\psi v_\theta} \\ \mathfrak{L}_{\Theta\psi} & \mathfrak{L}_{\Theta\Theta} & 0 \\ Re\mathfrak{L}_{v_\theta\psi} & 0 & \mathfrak{L}_{v_\theta v_\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \Theta \\ v_\theta \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Les opérateurs $\mathfrak{L}_{\psi\psi} \dots$ qui comportent \mathfrak{L} , et qui dépendent de Re par l'intermédiaire de l'état stationnaire, sont énumérés ci-dessous. Les boîtes entourant les limites sont différentes de zéro quand $Re = 0$ et l'état stationnaire est la solution conductive $V = 0$, $T = 1 - z$.

$$\mathfrak{L}_{\psi\psi}\psi = -\frac{1}{r}((\partial_z\psi)\partial_r - (\partial_r\psi)\partial_z)D^2\Psi - (V_r\partial_r + V_z\partial_z)D^2\Psi + \boxed{(\nabla^2 - \frac{1}{r^2})D^2\psi} \quad (4.12a)$$

$$\mathfrak{L}_{\psi\Theta}\Theta = \boxed{\frac{Ra}{Pr}\partial_r\Theta} \quad (4.12b)$$

$$\mathfrak{L}_{\psi v_\theta}v_\theta = \frac{2}{r}\partial_z(U_\theta v_\theta) \quad (4.12c)$$

$$\mathfrak{L}_{\Theta\psi}\psi = -\frac{1}{r}(\partial_z\psi)\partial_r T + \boxed{\frac{1}{r}(\partial_r\psi)\partial_z T} \quad (4.12d)$$

$$\mathfrak{L}_{\Theta\psi}\psi = -\frac{1}{r}((\partial_z\psi)\partial_r - (\partial_r\psi)\partial_z)U_\theta \quad (4.12e)$$

$$\mathfrak{L}_{\Theta\Theta}\Theta = -(V_r\partial_r + V_z\partial_z)\Theta + \boxed{\frac{1}{Pr}\nabla^2\Theta} \quad (4.12f)$$

$$\mathfrak{L}_{v_\theta\psi}v_\theta = -(V_r\partial_r + V_z\partial_z)v_\theta + \boxed{(\nabla^2 - \frac{1}{r^2})v_\theta} \quad (4.12g)$$

La figure 4.23 montre la partie réelle des principales valeurs propres (dans les unités du temps diffusif visqueux inverse) en fonction de Ra pour plusieurs valeurs fixes de Re , alors que la figure 4.24 montre certains des principaux vecteurs propres correspondants pour $Re = 0$ et pour $Re = 96$, tous deux pour $Ra = 10000$. La figure 4.23 montre plusieurs valeurs propres indépendantes de Ra quand $Re = 0$. L'origine de ces derniers est bien connue et facilement comprise. Pour $Re = 0$, les équations (4.11)-(4.12) montrent que le problème linéaire de stabilité devient :

$$\sigma \begin{pmatrix} D^2 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \Theta \\ v_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\nabla^2 - \frac{1}{r^2})D^2 & -\frac{Ra}{Pr}\partial_r & 0 \\ -\frac{1}{r}\partial_r & \frac{1}{Pr}\nabla^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\nabla^2 - \frac{1}{r^2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \Theta \\ v_\theta \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

avec les conditions aux limites homogènes 4.9. Les vecteurs propres purement thermiques correspondent à $V = 0$, d'où :

$$\left. \begin{array}{l} 0 \quad -\frac{Ra}{Pr} \partial_r \Theta \\ \sigma \Theta \quad \frac{1}{Pr} \nabla^2 \Theta \\ 0 \quad \Theta_{z=0,1} \quad \partial_r \Theta_{r=0,1} \end{array} \right\} \Rightarrow \Theta = \sin(k\pi z) \text{ avec } \sigma = -(k\pi)^2 \quad (4.14)$$

La première valeur propre thermique est montrée sur la figure 4.23 ($Re = 0$) sous forme de trait horizontal très proche de sa valeur analytique de $-\pi^2 = -9.8696$. Le vecteur propre thermique correspondant est montré dans la figure 4.24c. Un autre ensemble de solutions contient seulement la vitesse azimutale : avec $\Theta = \psi = 0$ et v_θ une solution à

$$\left. \begin{array}{l} \sigma v_\theta \quad (\nabla^2 - \frac{1}{r^2}) v_\theta \\ 0 \quad v_{\theta, z=0,1} \quad v_{\theta, r=0,1} \end{array} \right\} \Rightarrow v_\theta = \sin(k\pi z) J_1(r j_{1n}) \text{ avec } \sigma = -((k\pi)^2 + J_{1n}^2) \quad (4.15)$$

où J_1 est la première fonction de Bessel et $J_{1n} = 3.8317, 7.0156, \dots$ est un des zéros de J_1 . La première valeur propre de la vitesse azimutale est montrée sur la figure 4.23 ($Re = 0$) sous forme de trait horizontal, encore très proche de sa valeur analytique calculée de $-(\pi^2 + 3.8317^2) = -24.551$. Le vecteur propre correspondant pour la vitesse azimutal est montré dans la figure 4.24d. Les autres valeurs propres sont représentées sur la figure 4.23 ($Re = 0$) en augmentant Ra . Le passage de zéro à deux plus grandes valeurs propres est associé aux bifurcations de fourches discutées en détail dans la section précédente. Celles-ci ont lieu à $Ra = 2262$ et $Ra = 6643$. Leurs vecteurs propres associés sont montrés dans la figure 4.24a,b, pour $Ra = 10000$, où leurs valeurs propres sont 38.477 et 15.742 respectivement. Elles sont observées pour comporter un et deux rouleaux radiaux concentriques, respectivement. Les principaux vecteurs propres des valeurs plus élevées de Re sont semblables. Les états convectifs sur les figures 4.10 et 4.11 ne ressemblent pas ceux de la figure 4.24a, quoi qu'ils résultent d'une bifurcation de fourche impliquant ce vecteur propre. En effet, que les états stationnaires non-linéaires sur les figures 4.10 et 4.11 sont une superposition de ces vecteurs propres et les écoulements de base représentés sur les figures 4.8 et 4.9. Le vecteur propre dans la figure 4.24e, avec deux rouleaux verticalement empilés, est associé à la valeur propre $\sigma = -21.26$, entre cela des valeurs propres

thermiques et azimutales à $Ra = 10000$.

Un dispositif global des valeurs propres pour $Re = 0$ peut être observé sur la figure 4.23. Celles-ci sont toutes réelles et en coupes transversales. En effet, pour la convection de Rayleigh-Bénard ($Re = 0$), toutes les valeurs propres sont réelles. Quand $Re > 0$, les croisements des valeurs propres qui se produisent pour $Re = 0$ deviennent des paires conjuguées complexes. Puisque les parties réelles des valeurs propres sont montrées sur la figure 4.23, les paires complexes conjuguées apparaissent comme fusion de deux courbes de valeurs propres. A $Re = 96$, les valeurs propres réelles responsables de la bifurcation de fourche ont fusionnées dans une paire conjuguée complexe, dont la partie réelle croise zéro à $Ra = 11856$ au point de la bifurcation de Hopf. A $Re = 95$ (non montré sur la figure), la fusion de deux valeurs réelles propres dans une paire conjuguée complexe et le croisement zéro se produit simultanément à $Ra = 11640$: c'est le point de codimension-deux de Takens-Bogdanov.

Les figures 4.24f,g, montrent la partie réelle et imaginaire de la paire conjuguée complexe qui est le principal vecteur propre pour $Re = 96$. Le fait que cette paire complexe à $Re = 96$ provienne de la fusion des principaux vecteurs propres réels est inférieur à Re , est rendue de façon remarquable quand les lignes de courant ψ dans la figure 4.24f,g sont comparés à ceux de la figure 4.24a,b. A noter que le choix des parties réelles et imaginaires d'un vecteur propre est arbitraire, puisqu'un vecteur propre peut être multiplié par tout nombre complexe. Le choix particulier ici est imposé par la normalisation $\Im(\psi(r = 1/2, z = 1/2)) = 0$. La décomposition du vecteur propre complexe en deux vecteurs contenant un et deux rouleaux concentriques radiaux montre que le cycle limite impliquera les structures radiales de concurrence. Comme avec les états stationnaires, le manque de ressemblance entre les figures 4.24f,g et le cycle limite sur la figure 4.12 est dû au fait que ce sont des superpositions de l'état de base et des vecteurs propres.

Nous étudions la progression des valeurs propres réelles et complexes avec l'augmentation de Re en examinant la matrice 4.11. Ces valeurs propres et vecteurs propres se composent ainsi deux ensembles : ceux du problème thermique de la convection (sous-matrice gauche supérieure) et ceux du problème azimutal (sous-matrice inférieure). Les valeurs propres convectives, thermiques et azimutales se croisent transversalement, parce

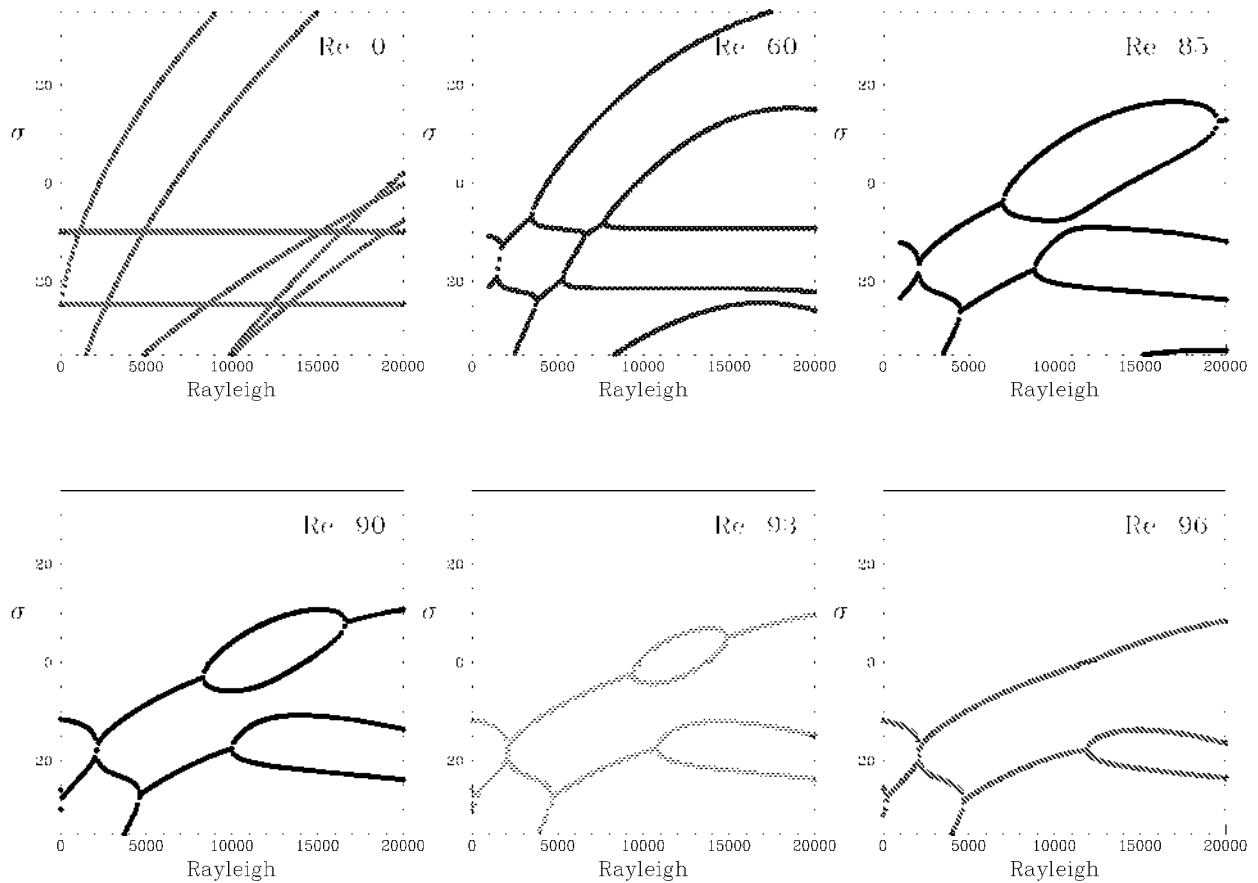


FIGURE 4.23 – *Partie réelle de σ principales valeurs propres en fonction de Ra pour six valeurs de Re . à $Re=0$, les valeurs propres sont réelles et se croisent transversalement. Les passages à zéro à $Ra = 2260$ et $Ra = 664$ correspondent aux bifurcations de fourche. Valeurs propres purement thermiques et azimutales à $\sigma = -9.87$ et $\sigma = -24.6$ respectivement, sont indépendants de Ra . Quand $Re > 0$, les croisements transversaux deviennent des paires conjuguées complexes. Pour $Re = 96$, la valeur propre de la bifurcation est une paire conjuguée complexe, menant à une bifurcation de Hopf à $Ra = 11856$.*

que la matrice 4.13 n'a aucune limite en diagonale et que les valeurs propres dans chacun de ces sous-problèmes, lié à une structure spatiale différente, ne croise pas un autre.

Ce comportement ressemble à celui observé près du point de Takens-Bogdanov qui se produit dans le fluide binaire pour la convection thermosolutale. le cas de la convection binaire thermosolutale, les vecteurs propres qui agissent l'un sur l'autre ont différentes origines : l'un peut être considéré comme résultat principal de la convection thermique et l'autre de la convection solutale (Tuckerman, 2001). Dans le Rayleigh Bénard/von Kàrmàn étudié ici, les vecteurs propres qui deviennent complexes tous les deux résultent la convection thermique. La différence entre eux réside dans leur structure spatiale, représentée sur la figure 4.24a,b.

Dans le cas de la convection binaire/thermosolutale, les croisements transversaux subissent deux destins différents, selon le signe du paramètre de séparation S , qui décrit l'acte thermique et solutal de la convection. Pour S positif, les courbes des valeurs propres sont séparées par deux hyperboles, formant les croisements évités, et restent réelles. Pour S négatif, les valeurs propres s'associent aux paires conjuguées complexes, comme sur la figure 4.23. Ces deux cas peuvent être compris en termes de matrice. Ici, on n'a pas essayé une telle analyse, mais on peut conclure que les matrices peuvent être dans un certain sens de signes opposés, puisque le couplage causé entre la convection et les vecteurs propres azimuthaux de la vitesse mène aux valeurs propres complexes. Le couplage entre les vecteurs propres convectifs et purement thermiques doit également être de ce type. Tuckerman (2001), effectue un calcul du signe limite de couplage présenté pour le cas la convection binaire/thermosolutale, impliquant la projection sur les vecteurs propres des sous-matrices diagonales.

Conclusion

On a présenté les résultats de la convection de Rayleigh-Bénard dans un cylindre de rapport d'aspect un, lorsque les disques supérieur et inférieur sont en contrarotation, générant l'écoulement dit de von Kàrmàn. Le seuil de convection augmente et, pour une rotation suffisamment rapide, l'instabilité devient oscillatoire. Le cycle limite qui appa-

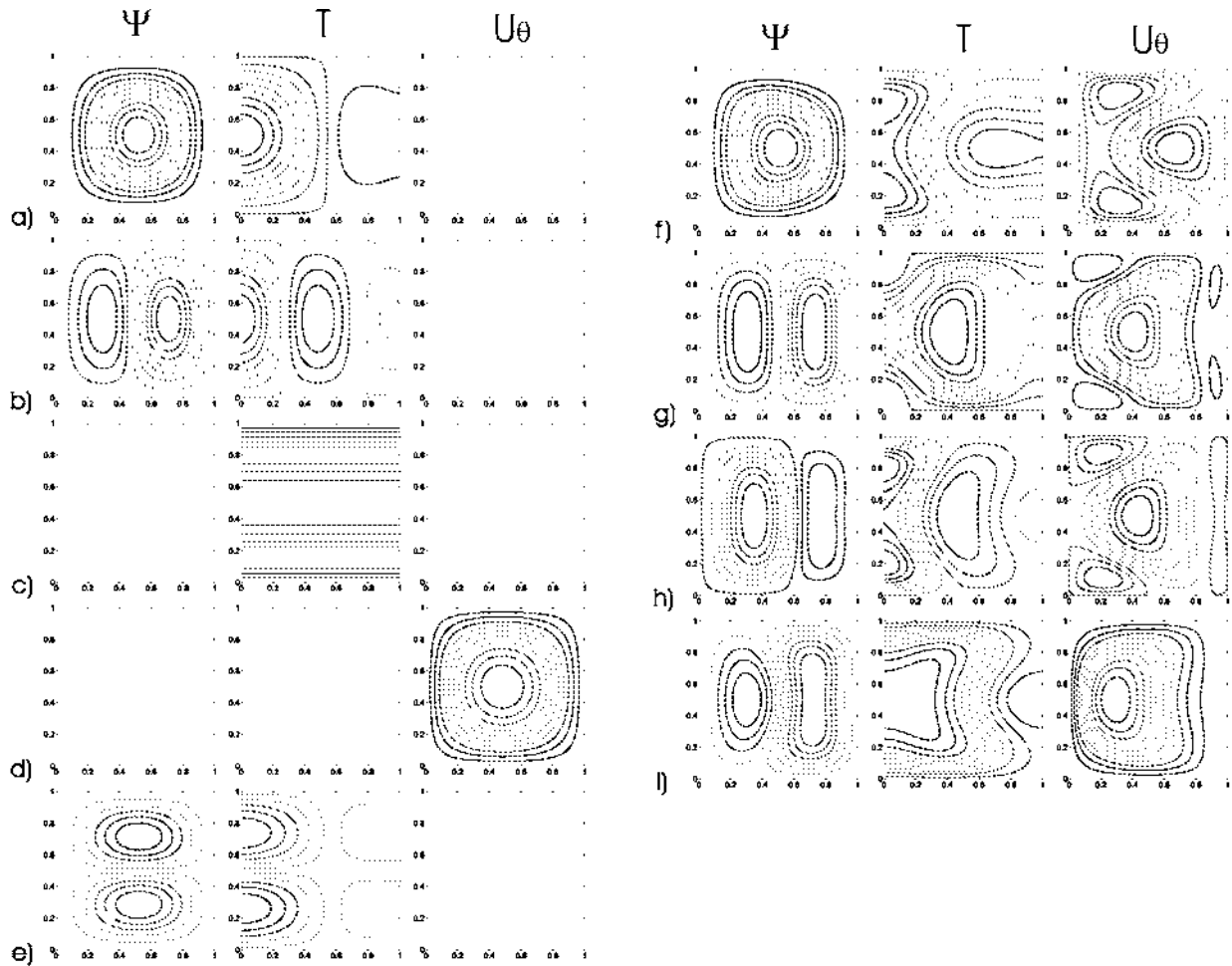


FIGURE 4.24 – Principaux vecteurs propres à $Ra = 10000$. Colonne gauche $Re = 0$. a,b) vecteurs propres responsables de la transition à la convection avec un et deux rouleaux toroidaux, respectivement, avec $\sigma = 38.5$ et $\sigma = 19.5$. c,b) vecteurs propres thermique et de la vitesse azimutale, respectivement, avec $\sigma = -9.87 \approx -\pi^2$ et $\sigma = -24.6 \approx -\pi^2 - j_{11}^2$. e) vecteur propre avec deux rouleaux verticalement empilés, avec $\sigma = -21.2$. Colonne droite : $Re = 96$. f,g) première paire conjuguée complexe, avec $\sigma \pm i\omega = -2.24 \pm i3.45$. h,i) seconde paire conjuguée complexe, avec $\sigma \pm i\omega = -19.2 \pm i4.35$.)

raît à la bifurcation de Hopf est détruit par une bifurcation Sniper (saddle-node infinite period), sauf autour du point de Takens-Bogdanov, où le scénario est plus compliqué.

Ces résultats ont fait l'objet, des communications suivantes : ICEPC'07 (Bordja et al., 2007), APS 2008 (Tuckerman et al., 2008), CFM 2009 (Bordja et al., 2009b), Journée de Dynamique des Fluides sur le Plateau (Tuckerman et al., 2009), et d'une publication dans un journal de renommé Physical Review E (Bordja et al., 2010).

Chapitre 5

Résultats et discussion de la deuxième partie

Ce chapitre est consacré à l'analyse des résultats obtenus numériquement. L'influence d'un champ magnétique sur l'instabilité convective combinée (VK/RB) pour un fluide newtonien, électriquement conducteur, confiné dans une cavité cylindrique est étudiée. Les effets des paramètres de contrôle du problème, à savoir le nombre de Rayleigh thermique Ra , le nombre de Reynolds Re , le rapport de forme de la cavité Γ , et le nombre de Hartmann Ha , sur la structure de l'écoulement seront discutés. Dans cette étude les nombres de Reynolds et de Prandtl sont fixés à 300 et 0.015, respectivement. Cette valeur du nombre de Reynolds correspond à l'écoulement de base (Nore et al., 2004), et le nombre de Prandtl correspond à un fluide semi-conducteur (Gelfgat et al., 2001a). Seuls les nombres de Hartmann et de Rayleigh sont variés.

5.1 Validation du code

Pour la validation avec un champ magnétique on a considéré la configuration d'une cavité cylindrique de rapport de forme $\Gamma = 2$ proposée par (Gelfgat et al., 2001a) à $Ra_c = 45300$, $Ha = 30$, $Pr = 0.015$ (figure 5.1). La représentation des lignes de courant montre une grande cellule qui occupe toute la cavité. La valeur maximale des lignes de

courant obtenue dans la présente étude est identique à celle de (Gelfgat et al., 2001a) avec une erreur inférieure à 0.0018%, (tableau 5.1).

Le code 3D a été testé sur une structure spatiale du potentiel électrique, de la densité de courant et du champ magnétique induit à l'ordre 1 (effet de la rotation), étudiée par (Bourgoin et al., 2004) pour une résolution effectuée dans le cas du Reynolds magnétique égal à un (figure 5.2).

Référence	u_{rmax}	u_{zmax}	ψ_{max}
Nore et al.,2004	0.11	0.13	
Notre simulation	0.1120	0.1328	
Gelfgat et al.,2001			132.83
Notre simulation			132.06

TABLEAU 5.1 – Validation numérique des maxima des vitesses radiale, axiale, et des lignes de courant.

5.2 Ecoulement de von Kàrmàn axisymétrique chauffé par le bas stabilisé par un champ magnétique azimuthal

5.2.1 Solution avec champ thermique ($Ha = 0$)

On s'intéresse tout d'abord à la configuration axisymétrique chauffée par le bas mais en l'absence de champ magnétique $Ha = 0$. La transition vers une solution oscillatoire de période 7.62 (figure 5.3) est obtenue pour un nombre de Rayleigh critique estimé à $Ra_c = 14623$. La bifurcation est de type Hopf supercritique comme le montre l'absence d'hystérésis, voir figure 5.4. La circulation par convection domine celle correspondant à

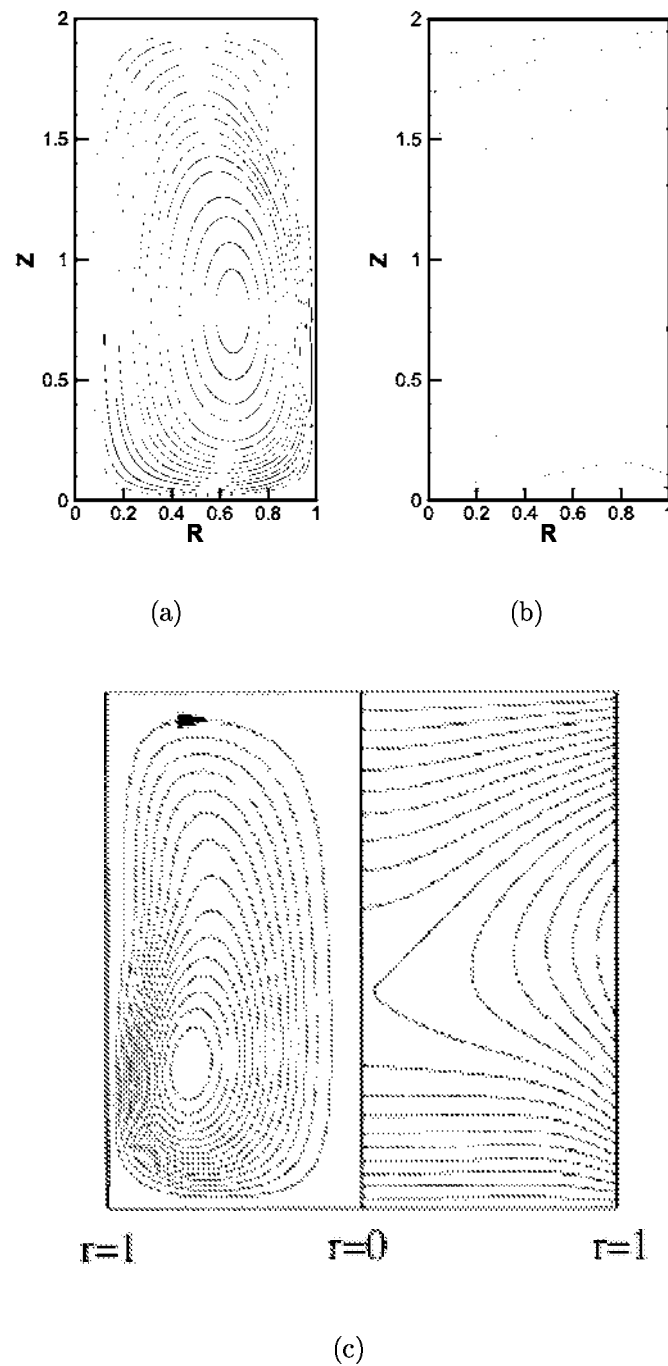
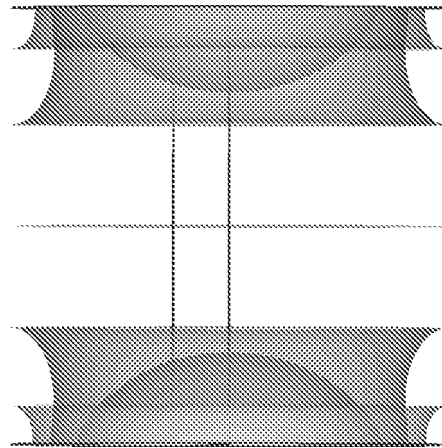
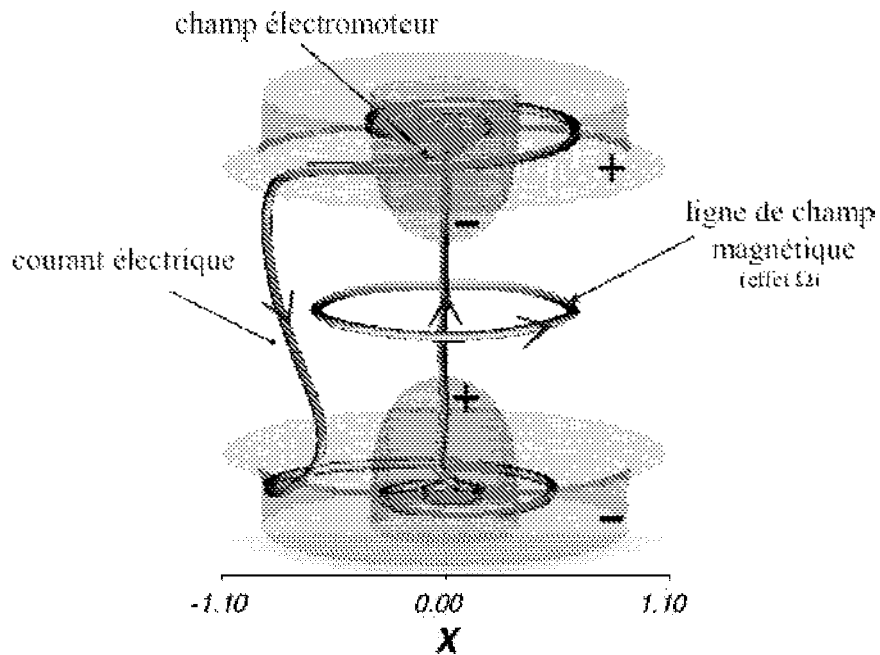


FIGURE 5.1 – *Présent modèle* : (a) : Lignes de courant, (b) : champs de température, (c) : (Gelfgat et al., 2001a), à $Pr = 0.015$, $\Gamma = 2$, $Re = 300$, et $Ha = 30$.



(a) Potentiel électrique sous l'effet de la rotation suivi par un champ magnétique axial.



(b) Potentiel électrique, densité de courants et champ magnétique induits à l'ordre 1 (effet de la rotation).

FIGURE 5.2 – (a) : *Présent modèle* , (b) : (Bourgoin et al., 2004).

l'écoulement de von Kármán caractérisé par les deux grandes cellules contra-rotatives. La nature de l'écoulement durant une période montre néanmoins une symétrie de réflexion.

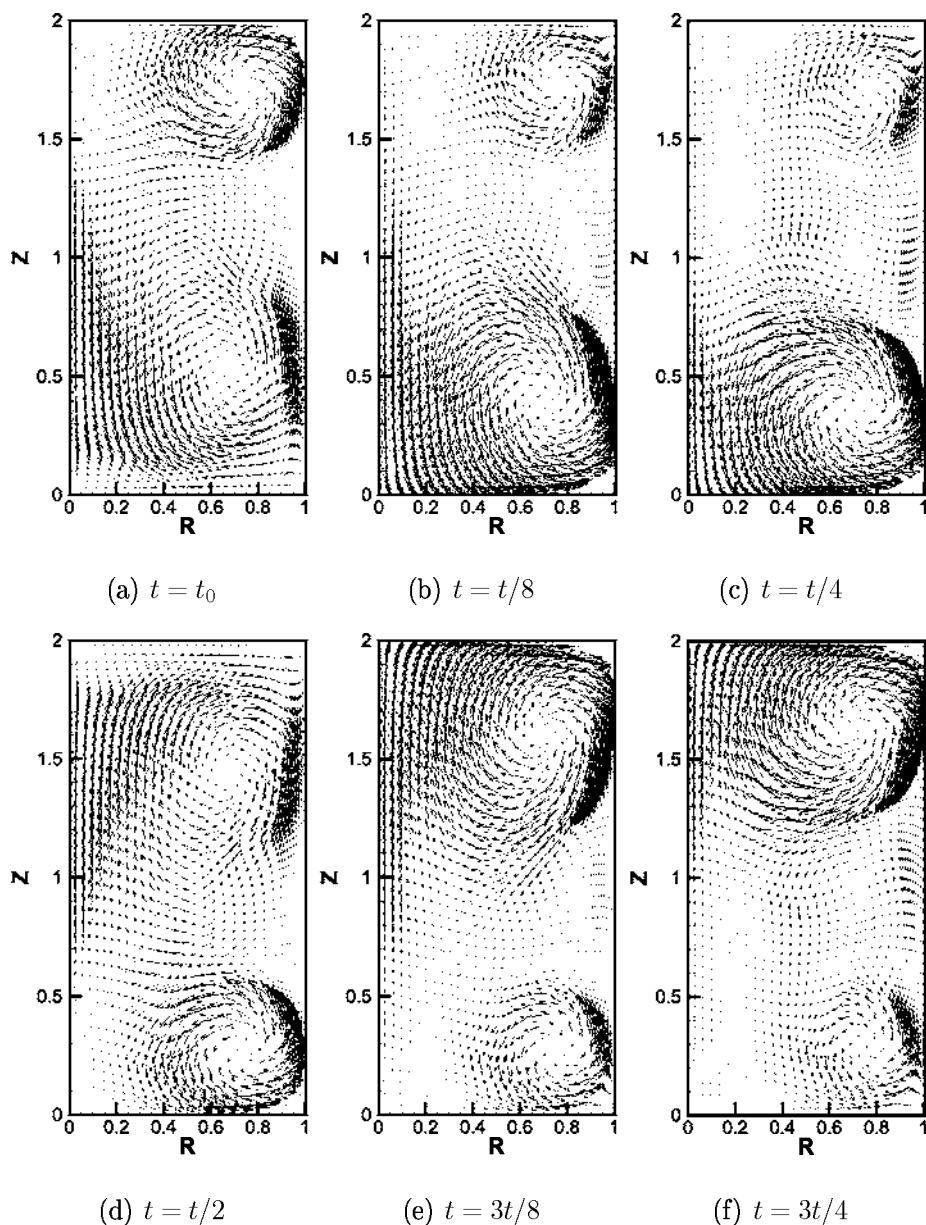


FIGURE 5.3 – Vecteur vitesse durant une période à $\Gamma = 2$, $Re = 300$, $Ra_c = 1426$, $Ha = 0$

5.2.2 Solution avec champ magnétique ($Ha \neq 0$)

La condition initiale est la solution oscillatoire décrite ci-dessus à $Ra_c = 14263$. Un champ magnétique est appliqué dans la direction azimutale. Le nombre de Hartmann est

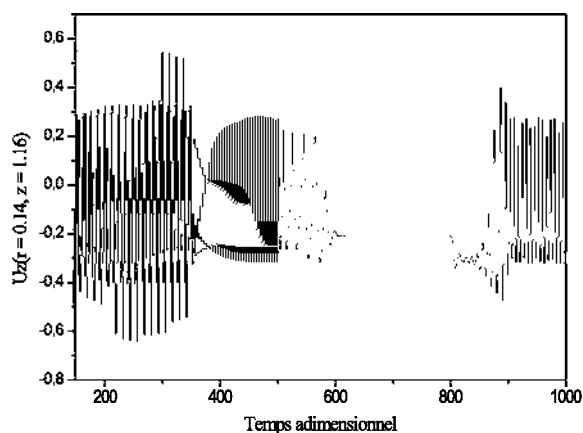


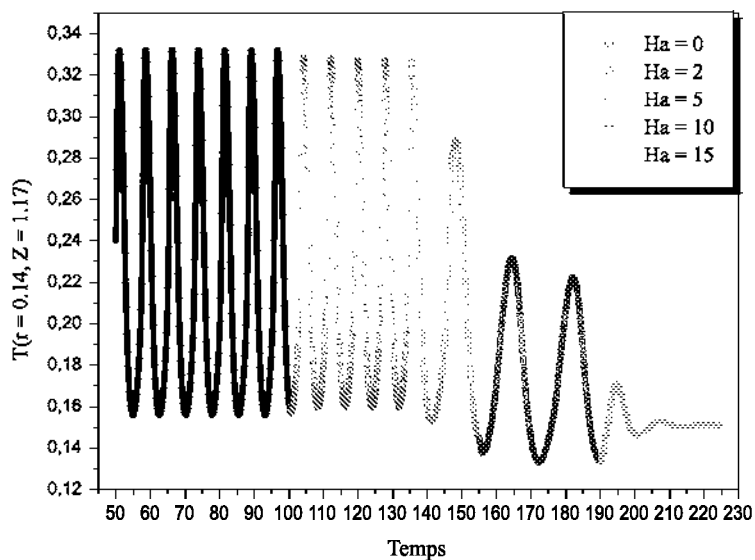
FIGURE 5.4 – Absence d’hystérésis à la bifurcation de Hopf

augmenté progressivement de 0 à 10. Cet accroissement de l’intensité du champ magnétique entraîne une diminution de l’amplitude des perturbations associée à une augmentation de la période d’oscillation (figure 5.5). La fréquence diminue de $f\Omega^{-1} = 0.82$ à $f\Omega^{-1} = 0.36$. Au-delà d’une valeur critique estimée à $Ha_c = 14.6$, l’écoulement se restabilise sous l’effet du champ magnétique et redevient stationnaire. L’écoulement présente la même structure que l’état de base initialement obtenue à $Ra = 0$ et $Ha = 0$ et retrouve en particulier la symétrie de réflexion (figure 5.6).

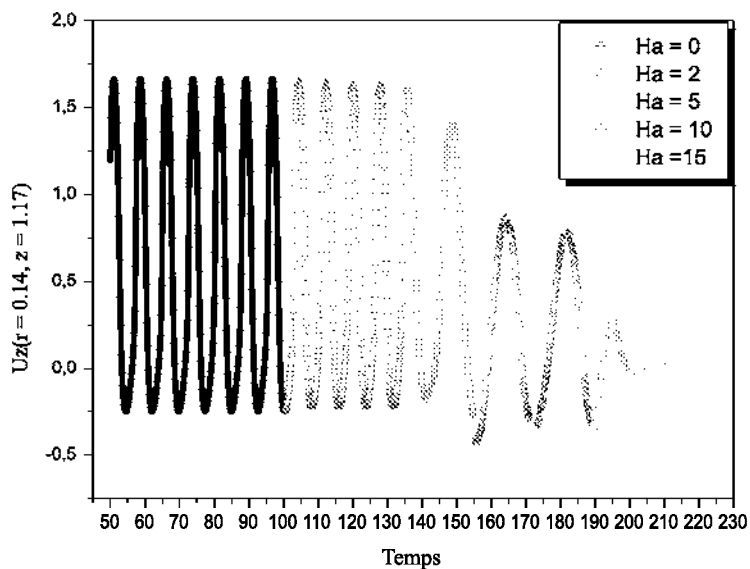
L’écoulement stable de von Kàrmán montre deux grandes cellules, suivant la contre-rotation des disques. On note néanmoins une baisse significative des maxima de vitesse : environ 30% sur $u_r = 8.020E - 002$ et 60% sur $u_z = 5.391E - 002$.

5.3 Écoulement de von Kàrmán en 3D chauffé par le bas

L’écoulement de von Kàrmán pur (sans effet Rayleigh Bénard) montre deux grandes cellules de recirculations symétriques par rapport au plan médian $z = 1$, et produisant ensemble des trajectoires toroïdales (Nore et al., 2004). La géométrie et l’état de base



(a) Température



(b) Vitesse axiale

FIGURE 5.5 – Atténuation de la variation temporelle des vitesses et de la température par un champ magnétique tournant dans une enceinte cylindrique à $Re = 300$, $Ra_c = 1426$, $Pr = 0.015$ pour quatre valeurs du nombre de Hartman, $Ha = 0$, $Ha = 2$, $Ha = 5$, $Ha = 10$, et $Ha = 15$.

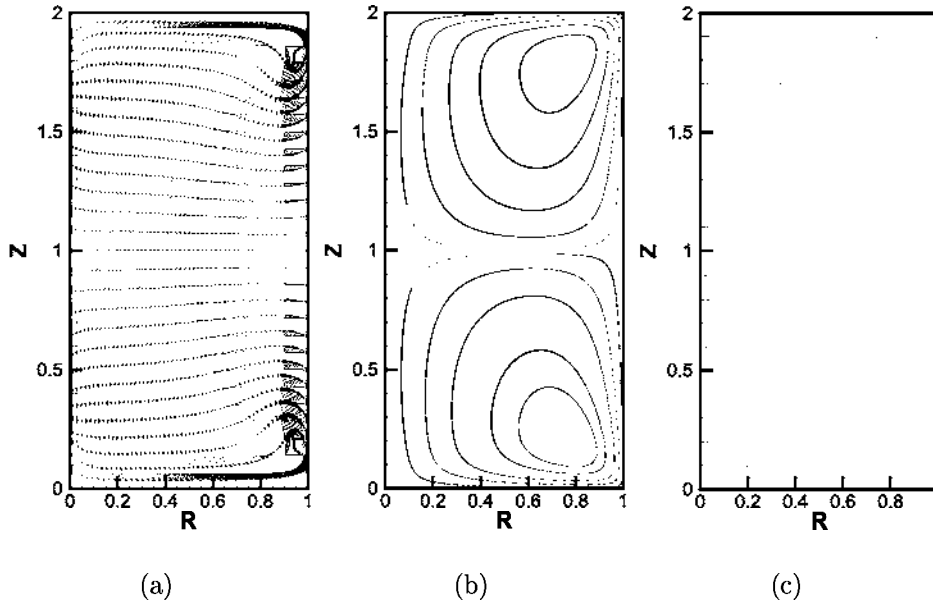


FIGURE 5.6 – (A) : Vecteur vitesse, (B) : lignes de courant, (C) : champ de température de l'écoulement, à $Re = 300$, $Ra_c = 14263$, $Pr = 0.015$ pour $Ha_c = 14.6$.

seraient invariants par rotation en θ et par réflexion en z , (figure 5.7).

On augmentant le nombre de Rayleigh, l'écoulement subit une première bifurcation stationnaire à $Ra \approx 380$. Les résultats de La figure (5.8a,b,c) représentant u_z dans différents plans montre que les états de l'écoulement conservent la symétrie. En effet, à l'équateur du cylindre $z = 1$, les contours négatifs pour $0 < \theta < \pi$ correspondent aux contours positifs pour $\pi < \theta < 2\pi$. L'isocontour $u_z = 0$ dans ce plan est une ligne droite. L'action de symétrie reliant les isocontours de $z = \Gamma/6$ et de $z = -\Gamma/6$: en prenant un détail dans le plan $\Gamma/6$, en lui faisant subir une réflexion en θ , en inversant son signe on le retrouve dans le plan $-\Gamma/6$. La bifurcation brisant la symétrie est nécessairement une bifurcation de fourche, l'état de l'écoulement est stationnaire. D'autres modifications correspondent au développement du caractère tridimensionnel de l'écoulement, en particulier au milieu du cylindre (figure 5.8,d). Le vecteur vitesse dans le plan (z, θ) montre un vortex à $r = 0.6$ semblable à celui de l'état mixé produit par (Nore et al., 2004). Le vortex est centré autour du point elliptique près de $\theta = \pi$, $z = 1$ et est diamétralement opposé au point hyperbolique près de $\theta = 0$, $z = 1$. A la valeur critique du nombre de Rayleigh estimée à ($Ra_c \approx 1620$), l'écoulement subit une deuxième bifurcation oscillatoire périodique.

La structure de l'écoulement change avec un grand vortex près de $\theta = \pi$, $z = 1$ qui pulse sur le cycle limite obtenu (voir figure 5.10). Cela explique que le vortex est sous l'effet de la convection thermique, et non sous l'effet de rotation, contrairement à celui obtenu par (Nore et al., 2004). La variation temporelle des vitesses et de températures sous l'effet de convection est présentée sur la figure 5.9. Le signal temporel de v_z montre que la solution oscillatoire est caractérisée par une période égale à 7.42 (voir figure 5.11,a).

En outre, on a constaté que l'amplitude des oscillations de v_z varie comme $(Ra - Ra_c)^{1/2}$. Il s'ensuit que l'écoulement perd sa stabilité via une bifurcation de Hopf super-critique dominée par le mode azimutal $m = 1$. Ce dernier est responsable de la brisure de symétrie (axisymétrie).

Le point de bifurcation est estimé par une extrapolation linéaire des trois valeurs du nombre de Nusselt local des deux disques supérieur et inférieur trouvant Ra_c (figure 5.12). Le nombre de Nusselt local est défini comme le rapport entre le flux total de chaleur (convection et diffusion) et le flux de diffusion à la paroi. Il est défini comme suit :

$$Nu = -\frac{\partial T}{\partial z}_{z=0} \quad (5.1a)$$

$$Nu = -\frac{\partial T}{\partial z}_{z=\Gamma} \quad (5.1b)$$

A fin d'obtenir le spectre d'énergie, on utilise la transformée de Fourier (Afrid et Zebib, 1990) d'un nombre de puissance deux pour les valeurs temporelles des quantités physiques. Cette transformée est multipliée par son complexe conjugué, et divisé par deux pour aboutir à l'énergie en fonction de la fréquence des oscillations f . Le spectre d'énergie de la figure 5.11,c montre deux pics de fréquences à f_0 et $f_0/2$. Ce mode de spectre explique que le régime périodique de la fréquence f subit une instabilité sous-harmonique et donne naissance à un autre régime périodique de période double (Berge et al.). Le portrait de phase de la figure 5.11,b confirme cette cascade sous-harmonique.

Le comportement de l'écoulement au voisinage de la bifurcation oscillatoire, en dessous de la bifurcation (figure 5.13) on voit que la température varie linéairement dans la direction verticale. Sans rotation, c'est-à-dire à $Re = 0$, la solution est de type conductif : l'écoulement est stationnaire. Les isothermes augmentent progressivement des droites horizontales du profil conductif. Au dessus de la bifurcation l'état est convectif et les

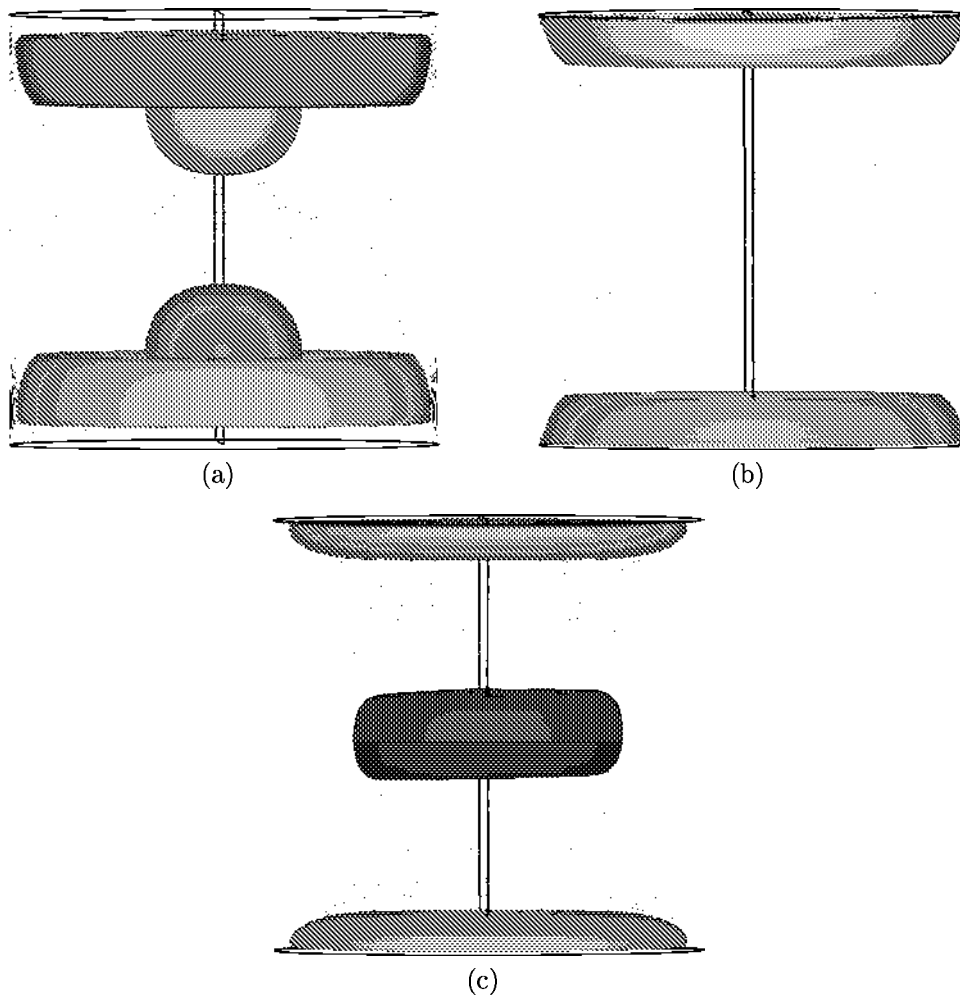


FIGURE 5.7 – *Etat de base pour $\Gamma = 2$ à $Re = 300$. Isocontours et isosurfaces des vitesses axiales (a), azimutales(b), et radiales (c). A noter que u_r est invariant au cours de la réflexion en z tandis que u_z et u_θ changent de signe. Les valeurs positives (négatives) sont indiquées par des lignes continues (pointillées).*

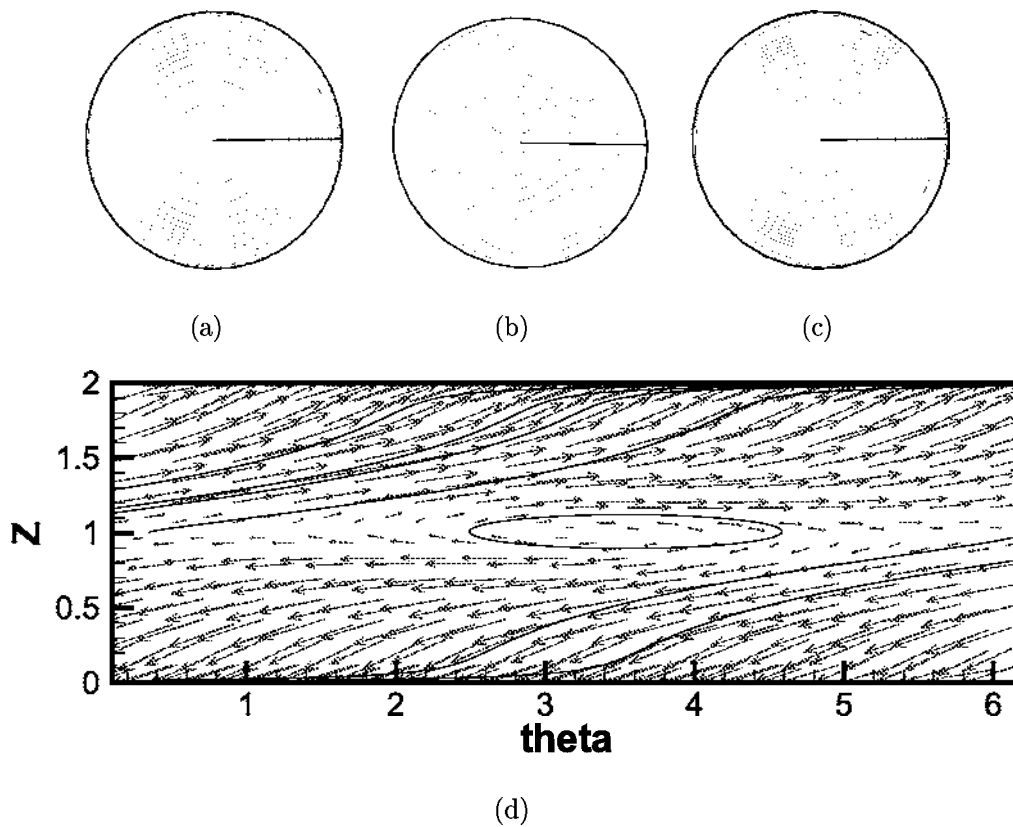
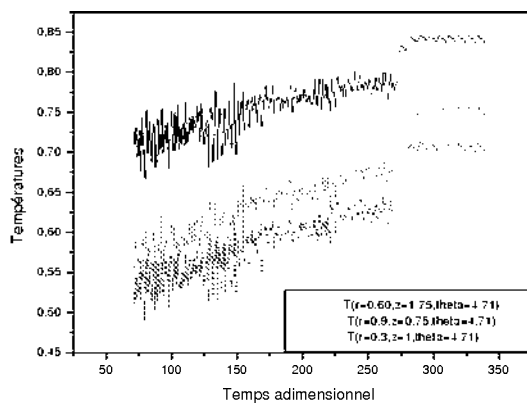
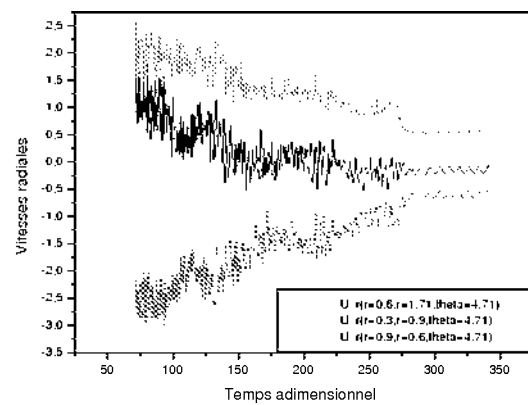


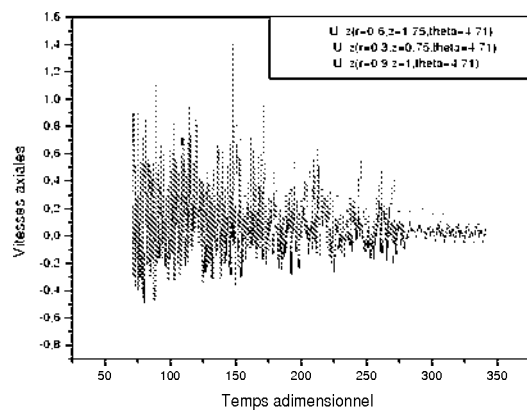
FIGURE 5.8 – Première instabilité stationnaire à $Ra_c \approx 380$. Isocontours de la vitesse verticale à $z = 1/6$ (a), $z = 0$ (b) et $z = -1/6$ (c). (d) Champ de vecteurs déplié (u_z, u_θ) suivi par des lignes de courant à $r = 0.75$. Le vortex est centré autour du point elliptique près de $\theta = \pi$, $z = 1$ et est diamétralement opposé au point hyperbolique près de $\theta = 0$, $z = 1$.



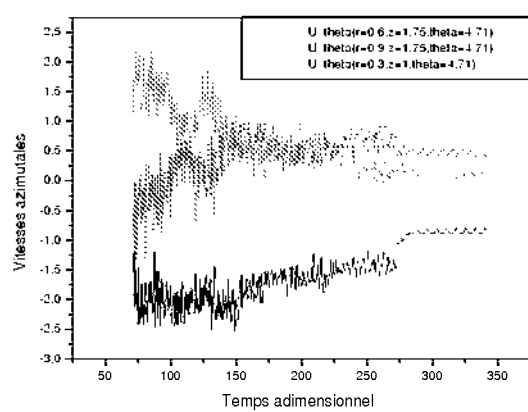
(a) Températures



(b) Vitesses radiales



(c) Vitesses axiales



(d) Vitesses azimutales

FIGURE 5.9 – Effet du nombre de Rayleigh sur l'instabilité tridimensionnelle oscillatoire.

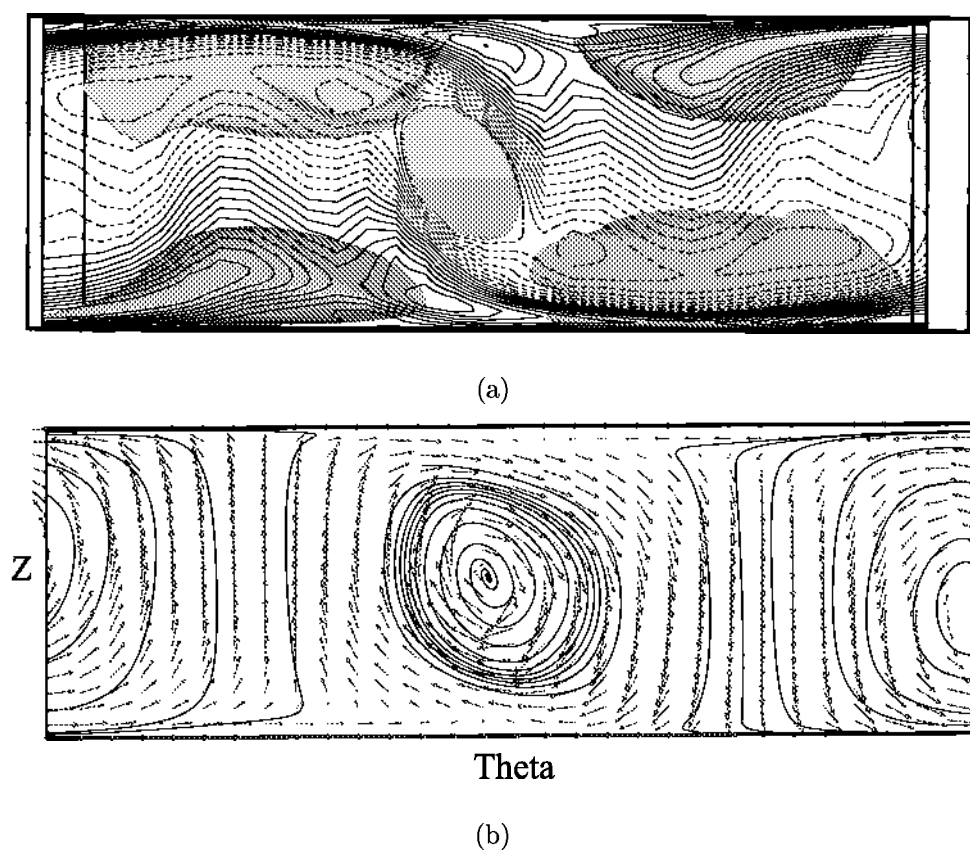
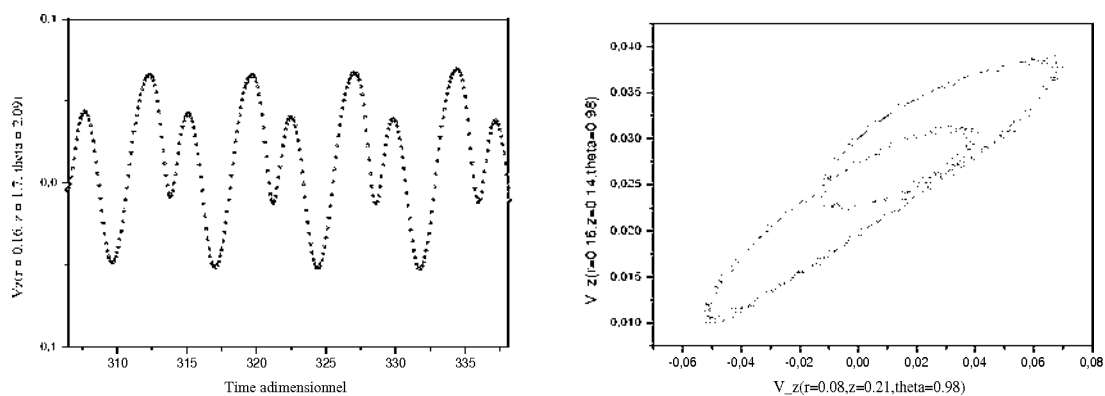
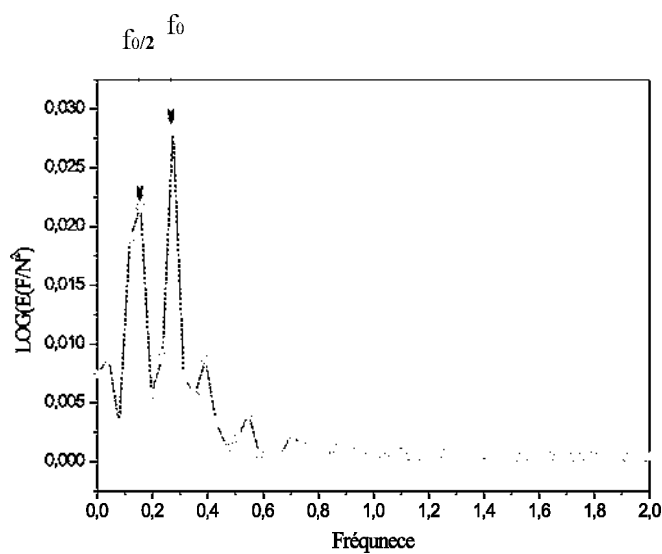


FIGURE 5.10 – (a) : Isocontours et isosurfaces de la vitesse radiale dépliés à $r = 0.80$ (d) champ de vecteurs déplié (u_z, u_θ) suivi par des lignes de courant à $r = 0.60$



(a)

(b)



(c)

FIGURE 5.11 – (a) : *Instabilité tridimensionnelle* à $Ra_c = 1620$, $Re = 300$, $Pr = 0.015$, $\Gamma = 2$,
 (b) : *Potrait de phase* montrant les deux fréquences f_o , et $f_o/2$ (c) *spectre d'énergie* correspondant
 à l'instabilité tridimensionnelle montrant deux pics d'énergie $f_0 = 0.27$, et $f_0/2 = 0.16$

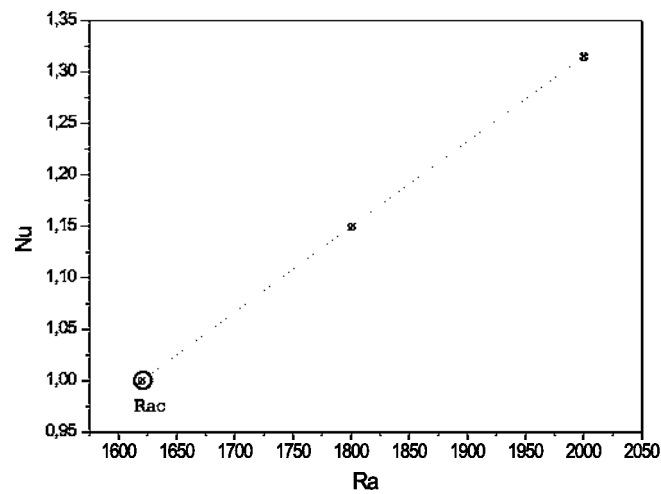


FIGURE 5.12 – *Extrapolation linéaire des trois valeurs du nombre de Nusselt local focalisant le Ra_c*

isothermes sont déviées vers la mi-hauteur pendant que le fluide chaud est poussé vers le haut à partir du disque inférieur et le fluide froid en bas à partir du disque supérieur (figure 5.14)

$$u = 0, T = 2 - z \quad (5.2)$$

5.4 Effet magnétique sur la bifurcation stationnaire

On présente les vitesses axiales donnant l'évolution correspond à l'effet d'un champ magnétique axial sur la bifurcation de fourche, en fonction du nombre de Hartmann, Ha . On remarque tout d'abord la diminution importante de la vitesse axiale lorsque le nombre de Hartmann augmente. La vitesse axiale augmente de zéro près des parois à une valeur maximale de 0.12 à $Ha = 0$ située dans la sous-couche visqueuse. Dans le cœur de la cavité (figure 5.15b), les profils de vitesses deviennent de plus en plus linéaires pour des valeurs croissantes du nombre de Hartmann, jusqu'à la valeur maximale de la vitesse axiale de 0.010 à $Ha = 20$.

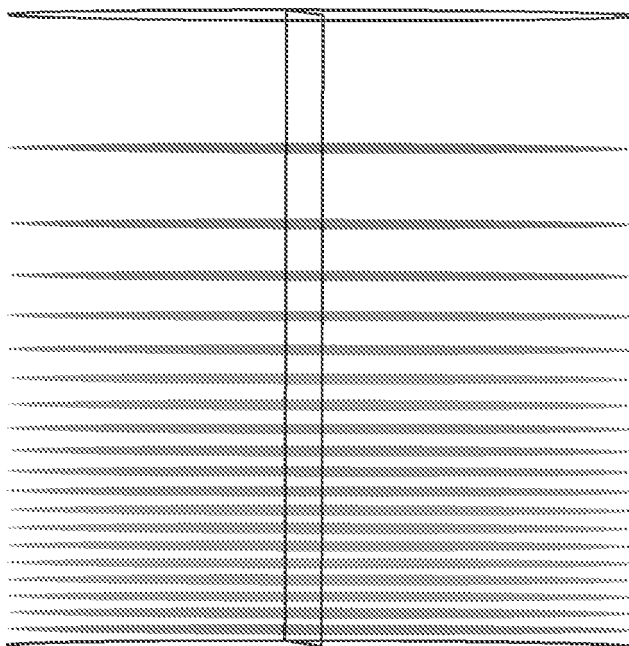


FIGURE 5.13 – *Champ conductif de température à $Re = 300$, $Ra = 1300$, $Pr = 0.015$, et $\Gamma = 2$.*

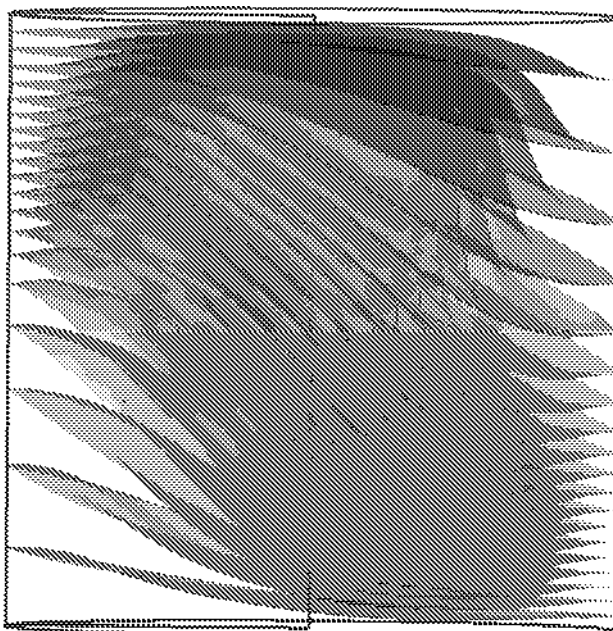


FIGURE 5.14 – *Champ convectif de température à $Re = 300$, $Ra = 1800$, $Pr = 0.015$, et $\Gamma = 2$.*

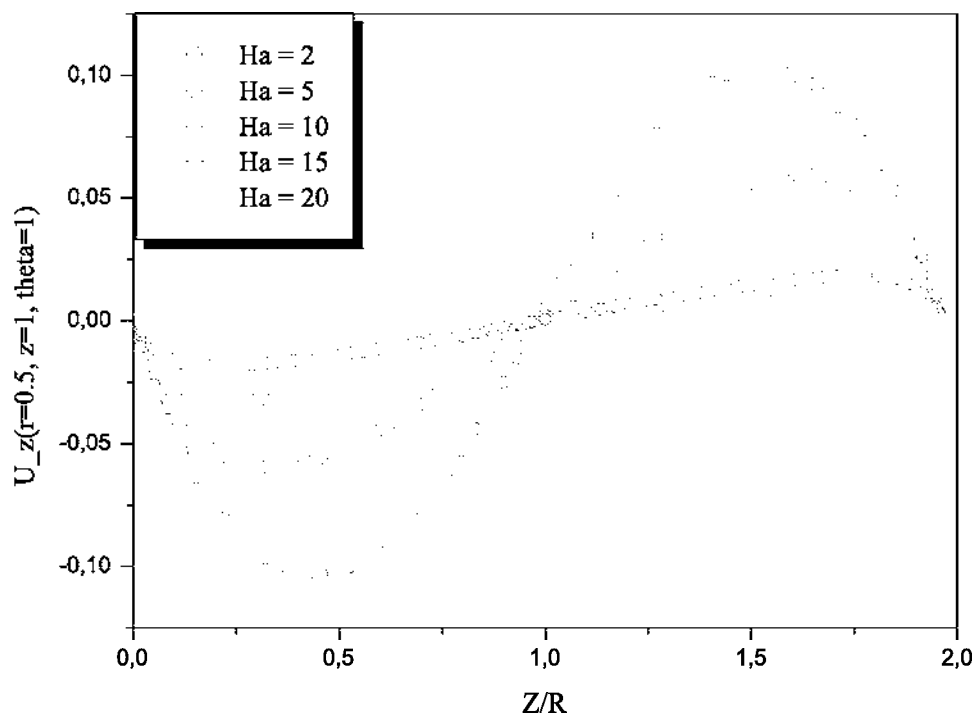
La variation temporelle de l'écoulement en augmentant le champ magnétique nous donne des solutions différentes. Sur des coupes de la vitesse axiale à $z = \Gamma/2$, (figure 5.15a) on voit que les petits vortex aux voisinage de l'axe sont supprimés, laissant leur place aux grands vortex. On peut dire que le champ magnétique surprime les symétries de rotation, et ne conserve que les symétrie de réflexion par rapport au plan médian. A $Ha = 10, 15, 20$ on voit une autre apparition des vortex, Ces derniers sont influencés par l'apparition des boucles du courant électrique lorsque le champ magnétique est intensifié, voir l'analyse de la section §5.4.1§.

5.4.1 Analyse du courant induit

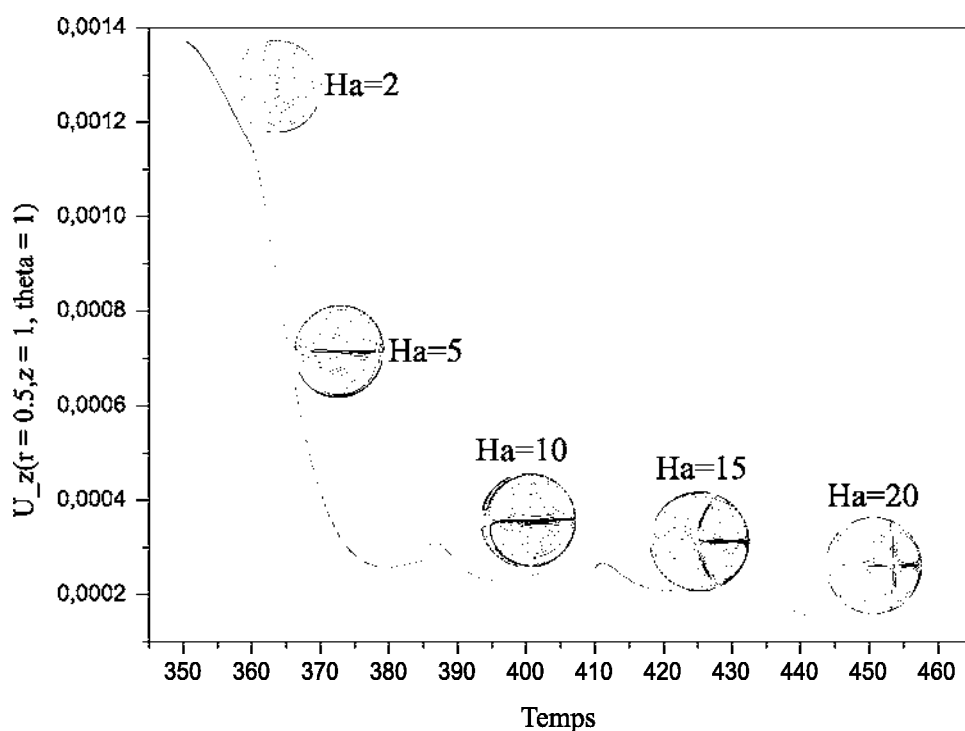
En vue d'une meilleure compréhension de l'influence d'un champ magnétique sur l'écoulement, on analyse le courant induit qui peut être écrit par :

$$j = \sigma_e(u \times B - \nabla\varphi) \quad (5.3)$$

La première contribution, $j = \sigma_e(u \times B)$, est appelée le courant induit continu, résultats de l'interaction entre l'écoulement du fluide et le champ magnétique B . La deuxième contribution, $j = \sigma_e \nabla\varphi$, est le résultat d'un champ de potentiel électrique φ . Quelques règles générales peuvent être données : j_1 est créé le premier par le mouvement du fluide. Si j_1 n'est pas conservé [$div(j_1) \neq 0$], les charges électriques conduites par j_1 s'accumulent dans quelques parties de l'écoulement créant un champ de potentiel électrique global φ . Ce potentiel électrique produit par j_2 permet alors au courant électrique global j d'être conservé. j_2 s'oppose généralement à j_1 dans les zones où j_1 est fort, diminuant de ce fait l'effet freinant. Mais dans les zones où j_1 est petit, car il assure la conservation du courant, j_2 créera également très souvent des boucles de courant, en particulier pour les parois électriquement isolantes où la conservation du courant doit se produire à l'intérieur du fluide. Pour telles parois, le potentiel électrique φ est alors prévu pour jouer un plus grand rôle que pour les parois électriquement conductrices où le courant peut circuler à l'intérieur des parois. Ainsi le freinage de l'écoulement devrait être plus faible.



(a)



(b)

FIGURE 5.15 – (a) : Profils de vitesses axiales (b) : variation temporelle en augmentant le nombre de Hartmann suivi par des coupes de la vitesse axiale, à $Re = 300$, $Ra_c = 380$ $Ha = 2, 5, 10, 15, 20$, $\Gamma = 2$.

5.5 Effet magnétique sur la solution oscillatoire

Pour l'écoulement en 3D sous l'effet d'un champ magnétique axial on commence par la présentation du motif spatial stabilisé par un champ magnétique à $Ha = 20$, correspondant au mode azimutal $m = 1$. La figure 5.16 montre la vitesse axiale avec les valeurs en couleur bleue correspondant aux valeurs négatives pour $0 < \theta < \pi$, la couleur rouge correspondant aux valeurs positives pour $\pi < \theta < 2\pi$. Le vecteur vitesse est suivi par des lignes de courants sous l'effet de la convection à $r = 0.60$. On voit clairement une grande cellule dans le sens trigonométrique du cylindre de l'ordre de $z = 1.45$ (figure 5.17). On constate sur la figure 5.17 qu' en appliquant le champ magnétique, les lignes de courant deviennent plus organisées sur l'instabilité convective obtenue. Cette analyse est confirmée aussi par (Battira et Bessaih, 2009).

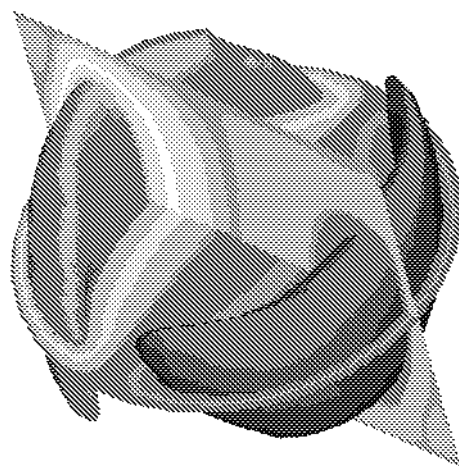
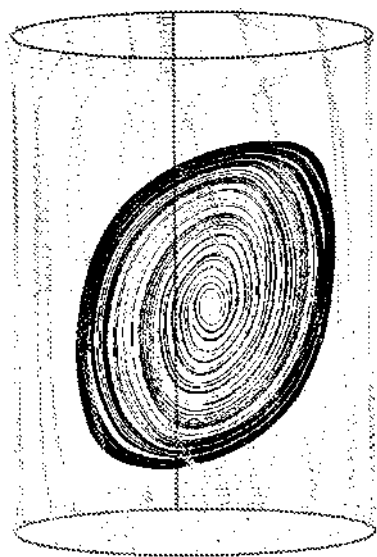


FIGURE 5.16 – Iso-surfaces de la vitesse axiale à $m = 1$ pour $Re = 300$, $Ra_c = 1620$, $Pr = 0.015$, $\Gamma = 2$, $Ha = 20$ la couleur bleue correspond aux valeurs négatives pour $0 < \theta < \pi$, la couleur rouge correspond aux valeurs positives pour $\pi < \theta < 2\pi$.

Le potentiel électrique sous l'effet de la rotation des deux disques étant à symétrie de révolution reliée à la composante axiale de la vitesse azimutale, son gradient ne possède aucune composante azimutale. D'un autre côté, \vec{B}_0 étant purement axial, \vec{e}_z ne possède aucune composante selon Oz . on interprète ainsi les branches axiales de \vec{j}_z orientées des



(a)

FIGURE 5.17 – *Champ de vecteurs (u_z, u_θ) et lignes de courant montrant un 'vortex monopole' à $r = 0.60$ et $\theta = 2\pi$, pour $Ra_c = 1620$, $Re = 300$, $Pr = 0.015$, $\Gamma = 2$, $Ha = 15$.*

régions de potentiel positif vers les régions de potentiel négatif : sur la figure 5.19, la branche centrale est montante et la branche périphérique est descendante. Les conditions aux limites isolantes imposant au courant de ne pas sortir du cylindre, les deux branches doivent nécessairement se rejoindre (Bourgoin et al., 2004). La structure spatiale obtenue du potentiel à l'induction montre quatre demi-tours à côté des extrémités du cylindre deux positifs et deux négatifs (figure 5.20). L'interaction du courant électrique avec le champ magnétique appliqué ainsi que l'isolation électrique des parois sont expliquées par la conservation du courant qui est garanti par la fermeture des lignes des courants électriques. On observe une très bonne similitude avec les résultats de (Benhadid et Henry, 1997) et (Battira et Bessaih, 2009).

Sur des coupes de la structure des lignes de courant à $z = \Gamma/2$ on voit que le champ magnétique est convecté par la rotation des disques et les lignes de champ s'enroulent autour de l'axe. La densité d'énergie du champ se trouve expulsée du centre du cylindre (figure 5.19). Le maximum de la vitesse axiale est diminué et son lieu est déporté vers la paroi (figure A.2). Une approche simplifiée a été faite par (Martin-Witkowski, 1987), où la vitesse du fluide devient proche de la vitesse de synchronisme, dans le cas où l'inertie

est négligée.

5.5.1 Analyse énergétique

On veut analyser la stabilisation de l'écoulement sous l'effet du champ magnétique par des considérations énergétiques. Nous dérivons d'abord quelques relations au sujet de l'énergie électrique. Le courant électrique induit peut être exprimé comme suit :

$$\frac{j}{\sigma_e} = E + u \times B \quad (5.4)$$

Si l'on multiplie cette relation par J et on intègre sur le volume liquide Ω , on obtient :

$$\int_{\Omega} j \cdot E d\Omega - \int_{\Omega} u \cdot (j \times B) d\Omega \quad (5.5)$$

ce qui peut être écrit

$$p_e = p_j + p_m. \quad (5.6)$$

Cette relation signifie que l'énergie électrique dans le système P_e est la somme de la puissance absorbée par l'effet Joule P_j , et de la puissance développée par la force de Lorentz P_m . En remplaçant E par $-\nabla\psi$, nous exprimons par P_e

$$\begin{aligned} p_e &= - \int_{\Omega} j \cdot \nabla\psi d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\psi j) d\Omega + \int_{\Omega} \psi (\nabla \cdot j) d\Omega \end{aligned} \quad (5.7)$$

Ces deux termes sont égaux à zéro : le premier terme parce que toutes les frontières sont en isolation électrique, et le second terme en raison de l'équation de continuité pour le courant électrique.

Ainsi, l'énergie électrique dans le système P_e est égale à zéro, car P_j est positif, P_m sera négatif.

Énergétiquement, la stabilisation de l'écoulement par le champ magnétique peut être expliquée par le fait que la puissance développée par la force de Lorentz est ajoutée à la dissipation visqueuse pour équilibrer le terme de flottabilité. Pour rendre cette remarque plus claire, on fera la même analyse énergétique aux seuils de la section §4.2.1§. L'équation de l'énergie cinétique peut être écrite par

$$I_v + I_b + I_d + I_m = I_k \quad (5.8)$$

ici, I_v , I_b , I_d , I_m , et I_k (respectivement production par l'écoulement de basse, production par la flottabilité, dissipation, et taux de changement de l'énergie cinétique) ont la même signification pour notre cas, et I_m est un terme additionnel dû aux forces de Lorentz et défini comme :

$$I_m = -Ha^2/Re \int_{\Omega} \frac{J^2}{\sigma_c} d\Omega. \quad (5.9)$$

Aux seuils stationnaires, $I_v = 0$ (l'état base statique) et $I_k = 0$.

$$\frac{Ra}{Re^2 Prt} \dot{I}_b + \dot{I}_d + \dot{I}_m = 0 \quad (5.10)$$

ou

$$\frac{Ra_c}{Re^2 Prt} = \frac{-\dot{I}_d}{\dot{I}_b} + \frac{-\dot{I}_m}{\dot{I}_b} \quad (5.11)$$

Cette relation signifie que le Rayleigh critique est la somme de deux termes positifs, premier terme dû à la dissipation visqueuse, de Rac_d , et le deuxième terme dû à la puissance de la force de Lorentz, Rac_m . On constate que lorsque un champ magnétique est appliqué, la contribution de Rac_d peut être changée (positivement ou négativement) en raison de l'évolution de la structure de l'écoulement, mais l'effet principal vient de la nouvelle contribution de Lorentz, Rac_m , qui augmente rapidement avec Ha . Dans la figure 5.18 , on présente l'évolution de $Rac_m/Rac_c(Re)$ (en %) en fonction de Ha , pour le champ magnétique axial et le mode $m = 1$, on constate que ce mode est fortement stabilisé. Une analyse énergétique de la stabilisation des modes $m = 0$ et $m = 2$ pour un champ magnétique axial ($\Gamma = 1$) montre un comportement différent (Touihri et al., 1999). La contribution de Lorentz est forte pour les deux modes, mais plus grande pour $m = 2$ comparé à $m = 0$, qui indique une plus grande stabilisation de ce mode. En fait, l'effet global de stabilisation est plus fort pour le mode $m = 0$, qui permet au mode $m = 2$ de devenir le mode critique au delà de $Ha = 24$. Ceci est dû aux variations de la contribution visqueuse, Rac_d . Ces variations sont légèrement positives pour le mode $m = 0$, donnant une légère suite additionnelle de stabilisation, mais elles sont fortement négatives pour le mode $m = 2$ et contribuent à une diminution de l'effet global de stabilisation.

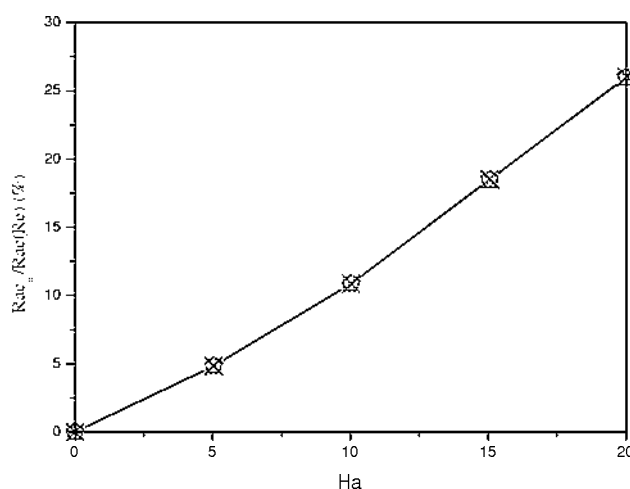
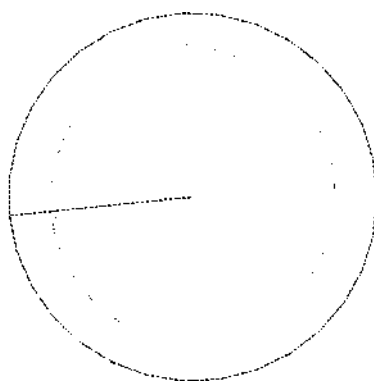
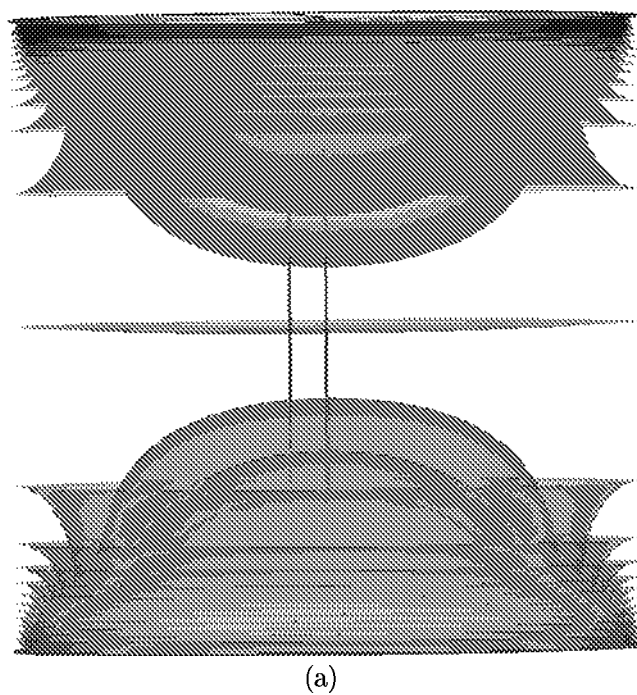


FIGURE 5.18 – Évolution de la contribution $Rac_m/Rac(Re)$ en fonction de Ha , pour un champ magnétique axial

5.6 Seuils tridimensionnels en fonction du rapport d'aspect

Sur la figure 5.26 on présente le seuil de l'écoulement en fonction du rapport d'aspect $0.5 \leq \Gamma \leq 2$ à $Ha = 5$ suivi par des coupes de la vitesse axiale (r, θ) à $z = \Gamma/2$, montrant l'apparition des modes stables azimutaux. Pour chaque Γ , nous calculons le nombre de Rayleigh critique $Ra_c(\Gamma)$. Il atteint sa valeur maximale de $Ra_c \approx 2600$ pour $\Gamma = 0.5$ et $m = 4$.

Le nombre de Rayleigh critique décroît avec Γ . Concernant les modes 3D, on a choisi les iso-surfaces de la vitesse radiale, de la vitesse axiale, du champ de température, et du potentiel électrique. On voit que les modes de la vitesse radiale sur la figure 5.22,(a) sont situés près des disques : deux modes positifs à proximité du disque supérieur, et deux modes négatifs inférieurs à proximité du disque inférieur (figure 5.22(b)). Pour la vitesse azimutale les modes positifs et négatifs apparaissent ensemble à côté des deux disques. Cela explique que la stabilisation électromagnétique est plus faible pour des cylindres plus grands. Gelfgat et al. (2001a) a justifié l'allongement du rouleau convectif le long du



(b) $z = \Gamma/2$

FIGURE 5.19 – (a) : Potentiel électrique sous l'effet de la rotation différentielle, (b) : Vue en coupes de la structure des lignes de champ magnétique.



(a)

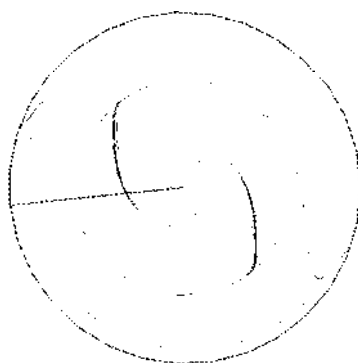
(b) $z = \Gamma/2$

FIGURE 5.20 – (a) : Potentiel électrique convecté par la rotation des disques, (b) : Vue en coupes de la structure des lignes de champ magnétique.

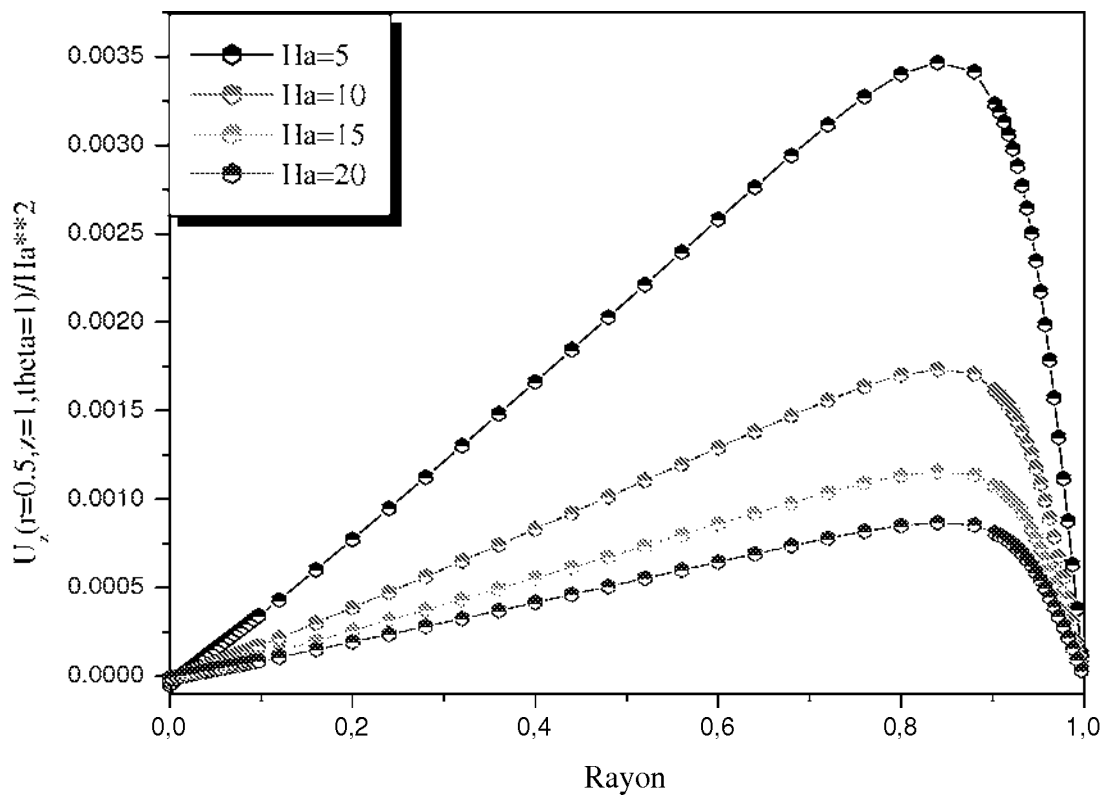


FIGURE 5.21 – Profils de vitesses axiales en fonction de rayon pour $Ha = 5, 10, 15, 20$.

champ magnétique par l'atténuation électromagnétique à faible conséquence. Cet effet est semblable aussi pour les configurations rectangulaires (Gelfgat et al., 2001b).

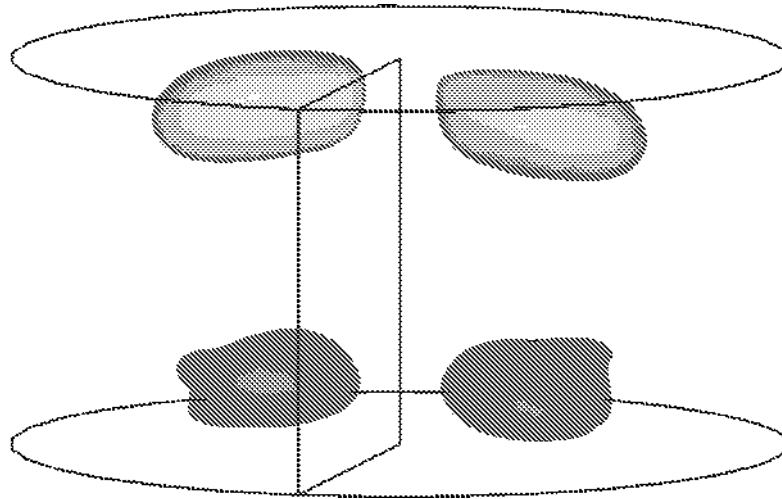
L'effet de la direction du champ magnétique sur la structure de la température tridimensionnelle est essentiellement au centre de la cavité. Près des parois latérales, cet effet est approximativement peu sensible à la direction du champ magnétique (Battira et Bessaih, 2009) (figure 5.23(a)).

La structure spatiale du potentiel électrique sur la figure 5.23(b) présente l'ensemble des modes stable de l'écoulement. Contrairement à $\Gamma = 0.7, 0.5$, sur les figures 5.24,(a), et 5.25,(a), on voit que les modes négatifs apparaissent au milieu de la cavité et les modes positifs aux extrémités du cylindre. Les surfaces isothermes présentent des lignes presque droites horizontales conductif à Hartmann égal à $Ha = 5$ (figures 5.24(b), et 5.25(b)).

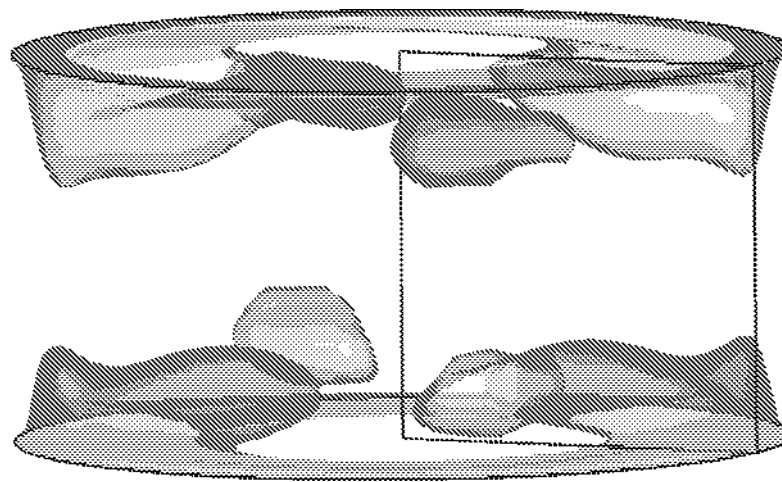
Chaque mode propre a brisé l'axisymétrie. Comme mentionné par Nore et al. (2004), il possède un axe horizontal de symétrie dont on peut choisir l'orientation telle que le mode soit symétrique suivant R_π . Ceci peut être vérifié sur des coupes de la vitesse axiale dans la figure 5.26. Un autre point commun à tous les modes est la localisation équatoriale. Les iso-surfaces mènent à la conclusion que la localisation radiale évolue avec le rapport d'aspect : à grands Γ , la perturbation maximale est proche de l'axe tandis qu'à petits Γ , elle se concentre à la périphérie.

Pour montrer l'effet d'un champ magnétique axial sur le seuil de la convection, on présente dans la figure 5.27 le diagramme de stabilité donnant l'évolution du seuil correspondant au mode azimutal $m = 1$, en fonction du nombre de Hartmann pour $\Gamma = 2$.

On remarque tout d'abord que tous ces seuils sont croissants avec Ha , ce qui confirme le phénomène de stabilisation de la convection par champ magnétique. D'une façon générale, le champ magnétique stabilise faiblement les modes parallèles à sa direction. Cela explique que le champ magnétique surprime les symétries de rotation, et ne conserve que les symétrie de réflexion par rapport au plan médian. L'analyse énergétique de cette transition vers la convection sous champ magnétique montre que la stabilisation vient principalement de la dissipation d'énergie dûe au terme de Lorentz.

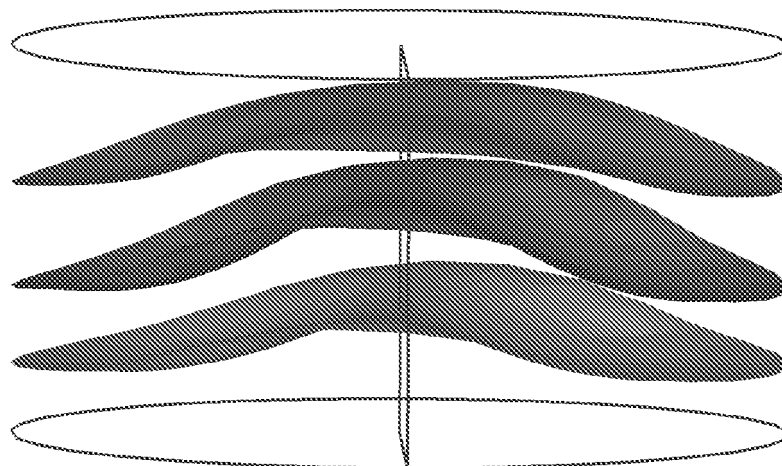


(a)

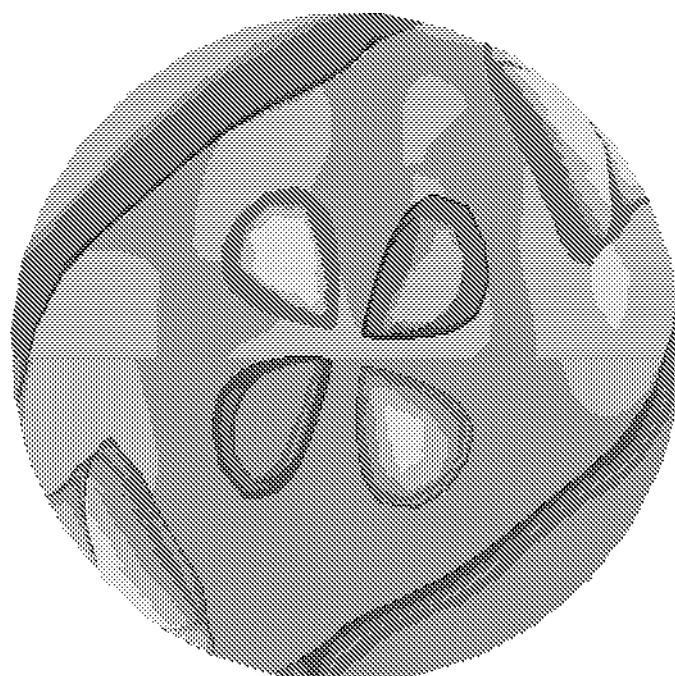


(b)

FIGURE 5.22 – (a) : Iso-surfaces de la vitesse radiale, $u_r = -0.46$ (bleu) et $u_r = 0.46$ (jaune),
 (b) : Iso-surfaces de la vitesse azimutale, $u_\theta = 0.48$ (bleu) et $u_\theta = -0.48$ (jaune), à $Ra = 10000$,
 $Re = 300$, $Ha = 15$, $\Gamma = 1$

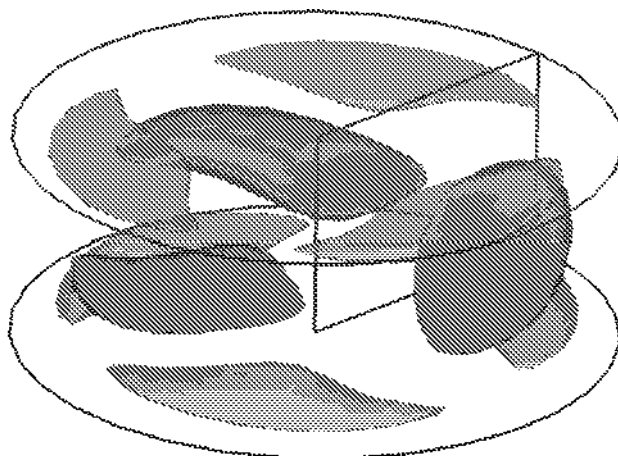


(a)

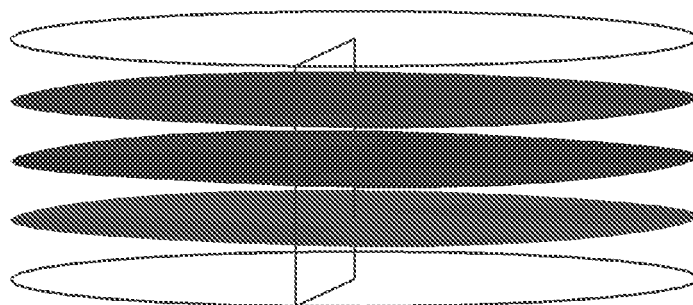


(b)

FIGURE 5.23 – (a) : Iso-surfaces de la température, (b) : Iso-surfaces du potentiel électrique $\varphi = -0.02714904$ (en jaune) et $\varphi = 0.02714904$ (en vert), à $Ra = 10000$, $Re = 300$, $Ha=15$, et $\Gamma = 1$

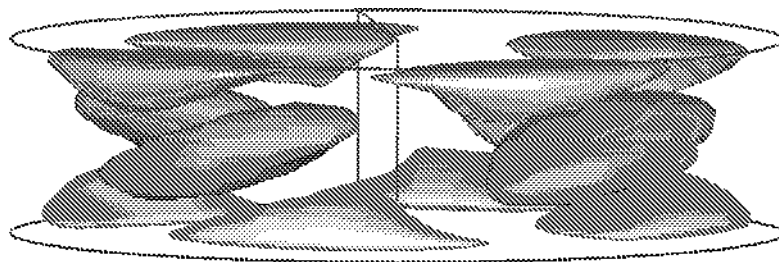


(a)

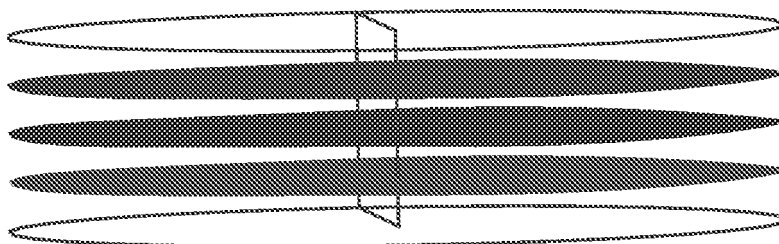


(b)

FIGURE 5.24 – (a) : Iso-surfaces de la vitesse radiale, $u_r = -0.0815$ (bleu) et $u_r = 0.0994$ (jaune),
(b) : surfaces isothermes, à $Ra = 10000$, $Re = 300$, $Ha = 15$, $\Gamma = 0.7$



(a)



(b)

FIGURE 5.25 – (a) : Iso-surfaces de la vitesse radiale, $u_r = -0.093$ (vert) et $u_r = 0.0725$ (jaune),
(b) : surfaces isothermes, à $Ra = 20000$, $Re = 300$, $Ha = 15$, $\Gamma = 0.5$

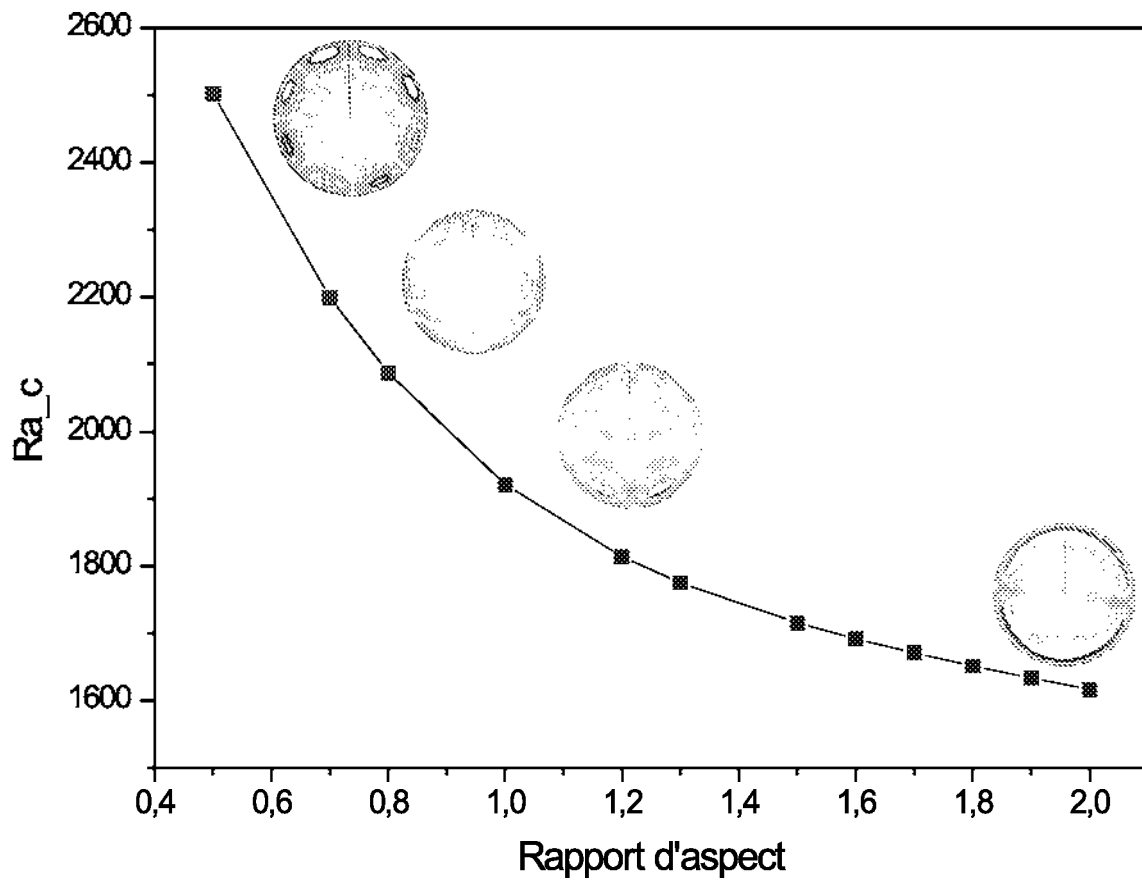


FIGURE 5.26 – Apparition des modes en fonction du rapport d'aspect pour un champ magnétique axial $Ha = 5$, $m=1$ à $\Gamma = 2$, $m=2$ à $\Gamma = 1$, $m=3$ à $\Gamma = 0.7$, et $m=4$ à $\Gamma = 0.5$.

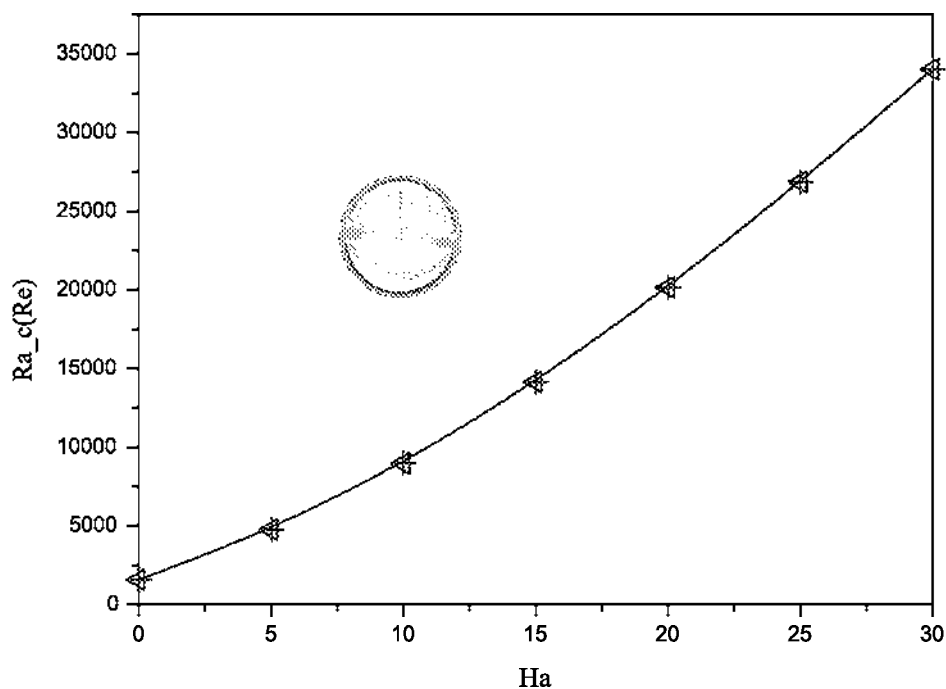


FIGURE 5.27 – Effet du champ magnétique axial sur le seuil de la convection pour $\Gamma = 2$. Évolution du seuil, correspondant au mode $m = 1$, en fonction du nombre de Hartmann, Ha .

Conclusion

On a présenté les résultats de la stabilité de l'écoulement par un champ magnétique azimutal sur la convection axysymétrique produite par un gradient thermique axial et les disques en rotation. Dans un cylindre avec le rapport d'aspect égal à deux. On a ensuite développé l'effet de l'action d'un champ magnétique axial sur la convection asymétrique de von Kàrmàn/Rayleigh-Bénard. Le champ magnétique axial influe sur les propriétés de la symétrie et sur la sélection et l'évolution des modes convectifs.

Ces résultats ont fait l'objet d'une communication au CFM 2009 (Bordja et al., 2009a).

Conclusion et perspectives

Ce travail numérique est consacré aux instabilités qui se développent dans un écoulement de Rayleigh-Bénard/von Kármán dans un cylindre, et l'effet stabilisant par un champ magnétique constant.

On a montré dans la première partie des résultats qu'une transition au seuil de la convection se produit dans un récipient cylindrique axisymétrique soumis à un gradient de température et à la vitesse azimutale, c'est-à-dire dans l'écoulement de Rayleigh-Bénard/von Kármán. La rotation différentielle, qui cause le mélange par l'intermédiaire de pompage d'Ekman, retarde le seuil de la convection. La transition est une bifurcation de fourche, menant à la convection stationnaire, pour $Re \leq 95$ et une bifurcation de Hopf, menant à la convection oscillatoire, pour $Re \geq 95$. Entre ces deux types de convection, plus de la majeure partie de l'espace paramètres ($0 \leq Re \leq 120$, $0 \leq Ra \leq 30000$), la transition se produit par l'intermédiaire d'une bifurcation de Sniper, dans laquelle les états stationnaires stables rencontrent une paire d'états stationnaires instables et se détruisent mutuellement, laissant un cycle limite dans leur sillage. Au-dessus d'une petite partie de l'espace paramètre, le scénario est plus compliqué et comporte plusieurs bifurcations globales.

L'analyse linéaire de la stabilité du problème axisymétrique de Rayleigh-Bénard/von Kármán montre également des dispositifs intéressants. On a tracé la manière avec laquelle la rotation différentielle couple les branches des valeurs propres, qui sont réelles pour la convection de Rayleigh-Bénard, de telle manière qu'elles deviennent complexes. La ressemblance exacte entre la partie réelle des principales valeurs propres pour $Re < 95$ et la partie complexe des principales valeurs propres pour $Re > 95$ soutient l'idée qu'une

base commune des vecteurs propres pourrait être utilisée pour rendre le modèle réduit étudié dans le papier de (Navarro et al., 2010) plus économique.

Depuis sa découverte par Andronov et Leontovich (1939), la bifurcation de Sniper est apparue dans un certain nombre de systèmes d'ODE utilisés pour les modèles de réactions chimiques, notamment dans des milieux excitable et la réaction de Belousov-Zhabotinsky (Guckenheimer, 1986). Dans le contexte hydrodynamique, et le contexte PDE, la bifurcation de Sniper avec les simulations de la convection axisymétrique de Rayleigh-Bénard est expliquée par (Tuckerman et Barkley, 1988; Barkley et Tuckerman, 1989; Lopez et al., 2006; Rubio et al., 2008). Les états convectifs avec différentes longueurs d'onde radiales concurrent, beaucoup comme il est produit dans la configuration actuelle de Rayleigh-Bénard/von Kármán. L'analogie la plus étroite avec le scénario de la bifurcation que nous observons est trouvée dans les études de l'écoulement de Taylor-Couette avec un petit rapport aspect (Abshagen et al., 2005a,b), dans laquelle la rotation et les ondes tournantes modulées jouent le rôle des états stationnaires et cycles limites, respectivement.

Récemment, la bifurcation de Sniper a été un sujet d'attention et remplacée comme explication possible pour les inversions du champ magnétique de la Terre. Une dynamo engendrée par mouvement liquide en bloc a été produite pour la première fois dans une expérience de laboratoire pour un écoulement de von Kármán en sodium (VKS), un fluide électriquement conducteur (Berhanu et al., 2007). Cette expérience VKS montre des inversions de la polarité du champ magnétique, ce qui soutient une certaine similitude avec celle du champ terrestre. Une explication comportant une bifurcation de Sniper dans un système dynamique sur la loi-dimensionnelle avec bruit a été proposée pour expliquer ces inversions F Ravelet et al. (2008); Pétrélis et al. (2009). Cette manifestation de la bifurcation de Sniper fournit également quelques justifications possibles pour étudier l'écoulement axisymétrique.

Stefani et Gerbeth (2005) ont proposé un mécanisme différent pour des inversions de champ magnétique, un bruit est ajouté à un système dynamique sur la loi-dimensionnel montrant un point de Takens-Bogdanov. Le point de Takens-Bogdanov, séparant un point stationnaire de la bifurcation de Hopf, joue également un rôle essentiel dans notre système, comme dans les investigations sur la convection axisymétrique de Rayleigh-Bénard

par (Siggers, 2003) et de l'écoulement de Taylor-Couette par (Abshagen et al., 2005a,b). Il semble plausible que le point de TB et le point d'hystérésis terminant la courbe de bifurcation de Sniper qui fait partie du déploiement d'un point de codimension-trois.

Notre étude axisymétrique a été prévue la première fois pour déterminer l'effet de l'écoulement de von Kármán sur le seuil de la convection de Rayleigh-Bénard. Au cours de la recherche, on a rencontré un scénario d'intérêt croissant et complexe qui devrait donc être intéressant à la communauté de systèmes dynamiques aussi bien qu'aux fluides dynamiques.

On a mené aussi dans la deuxième partie des résultats, une étude préliminaire axisymétrique qui permis de mettre en évidence le rôle stabilisant du champ magnétique rotatif sur l'écoulement. Le champ magnétique semble agir comme un frein sur les disques, agissant comme une baisse du nombre de Reynolds. On a ensuite développé l'effet de l'action d'un champ magnétique axial sur la convection asymétrique de von Kármán/Rayleigh-Bénard. Le champ magnétique axial influe sur les propriétés de la symétrie et sur la sélection et l'évolution des modes convectifs. Il supprime les symétries de rotation et ne conserve que les symétries de réflexion. L'analyse énergétique a montré que la stabilisation vient principalement de la dissipation d'énergie due au terme de Lorentz.

Enfin, finalement comme on l'a vu, la richesse et la complexité de la dynamique de l'écoulement permettent d'envisager de nombreuses directions de recherche. On s'est engagé dans certaines d'entre-elles mais de nombreuses autres restent à explorer. On pense à l'effet de l'induction magnétique sur l'écoulement de von Kármán, et au passage de la magnéto-statique à la magnéto-hydrodynamique (MHD).

Annexe A

Valeurs propres et vecteurs propres

Le comportement des valeurs propres et des vecteurs propres de l'écoulement de base pendant que les nombres de Rayleigh et de Reynolds sont changés. Bien que l'analyse linéaire de stabilité d'un problème soit habituellement présentée avant le scénario de bifurcation, nous nous montrons ici quelques dispositifs des valeurs propres et des vecteurs propres qui sont indépendants du scénario de bifurcation. Pour obtenir les équations linéaires de stabilité, nous substituons

$$(\Psi, V_\theta, T)(r, z) + e^{\sigma t}(\psi, v_\theta, \Theta)(r, z) \quad (\text{A.1})$$

Dans les équations régissantes (section), d'où (Ψ, V_θ, T) est une solution stationnaire, et (ψ, v_θ, Θ) est une perturbation

Les autres valeurs propres représentées sur la figure 14 ($\text{Re} = 0$) en augmentant Ra . Le passage de zéro à deux plus grandes valeurs propres sont associés aux bifurcations de fourche discutées en détail dans la section précédente 4.13(f); ceux-ci ont lieu à $Ra = 2262$ et $Ra = 6643$. Leur vecteurs propres associés sont montrés dans la figure, pour $Ra = 10000$, où leurs valeurs propres sont 38.477 et 15.742 respectivement, et elles sont observés pour comporter un et deux rouleaux radiaux concentriques, respectivement. Les principaux vecteurs propres pour plus haut Re sont semblables. Les états convectifs sur les figures 5 et 6 ne ressemblent pas à la figure, quoi qu'ils résultent d'une bifurcation de fourche impliquant ce vecteur propre. C'est parce que les états stationnaires non-linéaires

sur les figures 5 et 6 sont une superposition de ces vecteurs propres et les écoulements de base représentés sur les figures 3 et 4. Le vecteur propre dans la figure , avec deux rouleaux verticalement empilés, est associé à la valeur propre 21.26 , entre cela des valeurs propres thermiques et azimutales à $Re = 10000$. Un dispositif global des valeurs propres pour $Re = 0$ qui peut être observé sur la figure 14 est qu'elles sont toutes réelles et en coupes transversales. En effet, il est bien connu que pour la convection de Rayleigh-Bénard (c.-à-d. $Re = 0$), toutes les valeurs propres sont réelles. Quand $Re > 0$, les croisements de valeur propre qui se produisent pour $Re = 0$ deviennent des paires conjuguées complexes. (puisque les parties réelles des valeurs propres sont montrées sur le schéma 14, les paires complexes conjuguées apparaissent comme fusion de deux courbes de valeur propre.) A $Re = 96$, les vraies valeurs propres responsables de la bifurcation de fourche ont fusionné dans une paire conjuguée complexe dont la vraie partie croise zéro à $Ra = 11856$ au point de la bifurcation de Hopf. A $Re = 95$ (non montré), la fusion de deux vraies valeurs propres dans une paire conjuguée complexe et le zéro-croisement se produisent simultanément à $Ra = 11640$: c'est le point de codimension-deux de Takens-Bogdanov.

Figure 15f, expositions de g , la partie réelle et imaginaire de la paire conjuguée complexe qui est le principal vecteur propre pour $Re = 96$. Le fait que cette paire complexe à $Re = 96$ provient de la fusion des principaux vecteurs propres réelles est inférieur à Re , et rendu de façon remarquable quand les lignes de courant ψ dans la figure 15f, g sont comparés à ceux de la figure 1. Noter que le choix des parties réelles et imaginaires d'un vecteur propre est arbitraire, puisqu'un vecteur propre peut être multiplié par tout nombre complexe. Le choix particulier ici est imposé par la normalisation $((r = 1/2, z = 1/2))$. La décomposition du vecteur propre complexe dans deux vecteurs contenant un et deux rouleaux concentriques radial montre que le cycle de limite impliquera les structures radiales de concurrence. Comme avec les états stationnaires, le manque de ressemblance entre les figures 15f, g et le cycle de limite sur le schéma 7 est dû au fait que ce sont des superpositions de l'état de base et des vecteurs propres.

Nous étudions la progression des valeurs propres réelles aux complexes en engmentant Re en examinant la matrice dans (18), qui est diagonale de bloc pour $Re = 0$, comme montré dans (20). Ses valeurs propres et vecteurs propres se composent ainsi deux en-

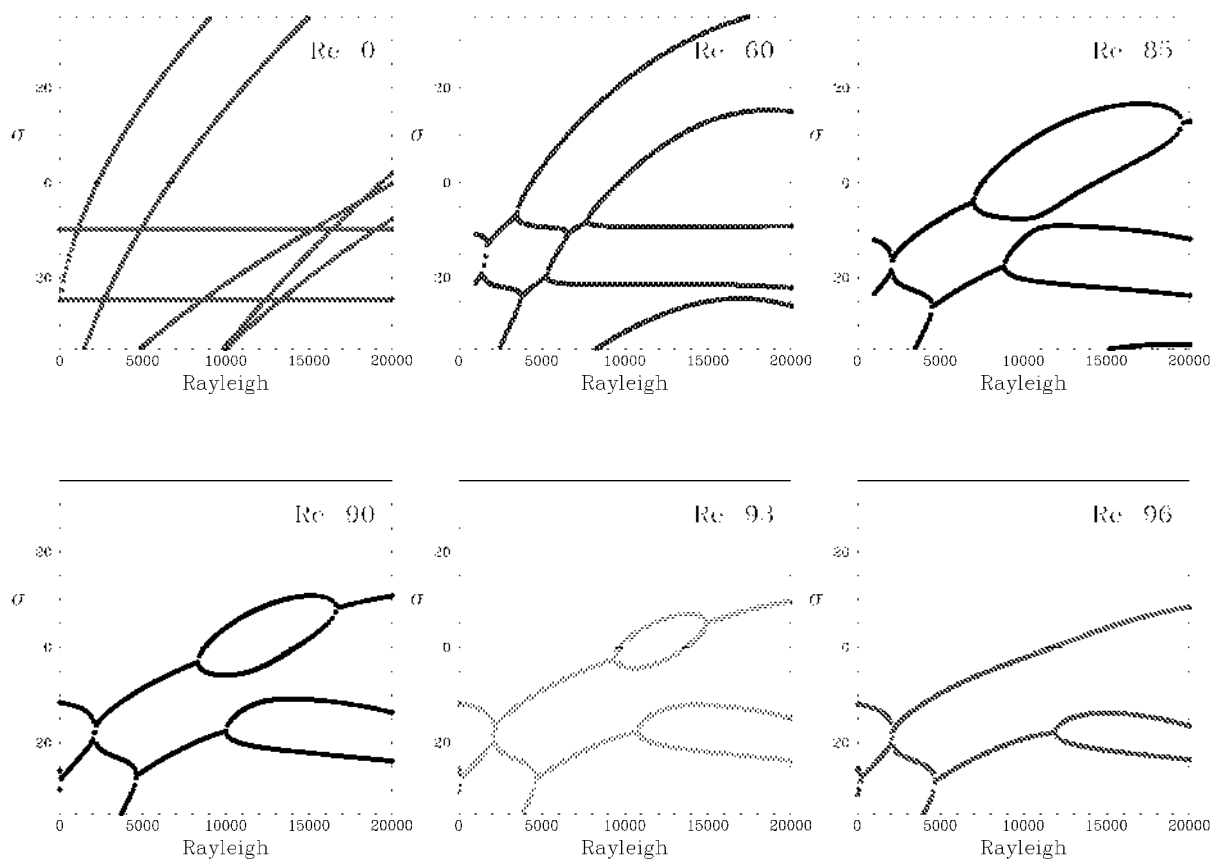


FIGURE A.1 – Partie réelle σ de principales valeurs propres en fonction de Ra pour six valeurs de Re . Passages à zéro

sembles : ceux du problème thermique de la convection (submatrice gauche supérieur) et ceux du problème azimutal (bon submatrice inférieur). Les valeurs propres convectives, thermiques et azimutales croisent transversalement parce que (20) n'a aucune limite diagonale et parce que les valeurs propres dans chacun de ces sous-problèmes, chacun lié à une structure spatiale différente, ne croise pas un autre.

Ce comportement ressemble que celui observé près du point de Takens-Bogdanov qui se produit dans le fluide binaire ou la convection thermosolutal. Dans le cas de binary/thermosolutal, la paire de vecteurs propres qui agissent l'un sur l'autre ont différentes origines : un peut être regardé comme résultant principalement de la convection thermique et de l'autre de la convection solutal (). Dans Rayleigh Bénard/von Kàrmàn le cas étudié ici, les vecteurs propres qui deviennent complexes tous les deux résultent de la convection thermique ; la différence entre eux est leur structure spatiale, représentée sur la figure.

Dans le cas de binary/thermosolutal, les croisements transversaux subissent deux destins différents, selon le signe du paramètre de séparation S , qui décrit si l'acte thermique et solutal de convection de concert ou dans l'opposition. Pour le positif S , les courbes de valeur propre séparent dans deux hyperboles, dans ce qui s'appelle les croisements évités, et restent vraies. Pour le négatif S , les valeurs propres s'associent aux paires de conjugué de complexe, comme sur le schéma 14. Ces deux cas peuvent être compris en termes de matrice, dont les limites au loin-diagonales sont du même signe si S est positif et des signes opposés si S est négatif. Ici, nous n'avons pas essayé une telle analyse, mais nous pouvons conclure que les matrices au loin-diagonales être dans un certain sens des signes opposés, puisque l'accouplement qu'ils causent entre le convecteur et les vecteurs propres azimutaux de vitesse mène aux valeurs propres complexes. L'accouplement entre les vecteurs propres convecteurs et purement thermiques doit également être de ce type. Dans [46], un calcul du signe des limites d'accouplement est présenté pour le cas de binary/thermosolutal, impliquant la projection sur les vecteurs propres des submatrices diagonaux.

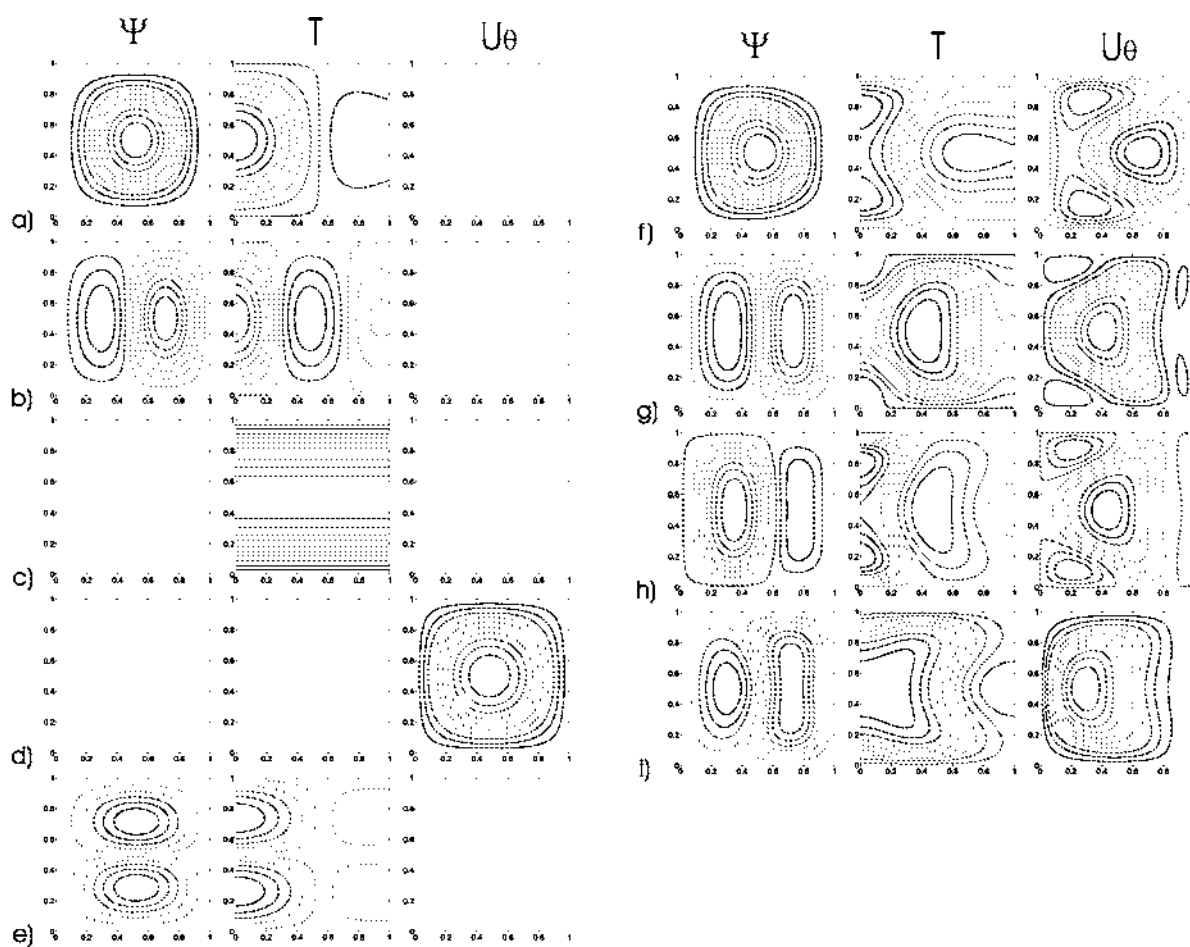


FIGURE A.2 - .

Bibliographie

- J Abshagen, J M Lopez, F Marques, et G Pfister. Symmetry breaking via global bifurcations of modulated rotating waves in hydrodynamics. *Physical Review Letters*, 94 : 074501, 2005a.
- J Abshagen, J M Lopez, F Marques, et G Pfister. Mode competition of rotating waves in reflection-symmetric taylor- couette flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 540 :269–299, 2005b.
- M Afrid et A Zebib. Oscillatory three-dimensional convection in rectangular cavities and enclosures. *Physics of Fluids*, A 2 :1318–1327, 1990.
- A Andronov et E Leontovich. Some cases of the dependence of the limit cycles upon parameters. *Uchen Zap Gork Univ*, 6 :3–24, 1939.
- V Arnold. Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations. *Springer*, 1982.
- D Barkley et L S Tuckerman. Traveling waves in axisymmetric convection : the role of sidewall conductivity. *Physica D*, 37 :288–294, 1989.
- M Battira et R Bessaih. Three-dimensional natural convection in the horizontal bridgman configuration under various wall electrical conductivity and magnetic field. *Numerical Heat Transfer*, 55 :58–76, 2009.
- R P Behringer. Rayleigh-bénard convection and turbulence in liquid helium. *Review Modern Phys*, 57 :657–687, 1985.
-

- R P Behringer, H Gao, et J N. Shaumeyer time dependence in rayleigh-bénard convection with a variable cylindrical geometry. *Physical Review Letters*, 50 :1199–1202, 1983.
- F Belin, J Maurer, P Tabeling, et H Willaime. Observation of worms in fully developed turbulence. *Journal Phys II France*, 6 :573–583, 1996.
- H Benhadid et D Henry. Numerical study of convection in the horizontal bridgman configuration under the action of a constant magnetic field, part 2, three-dimensional flow. *Journal of Fluid Mech*, 333 :75–83, 1997.
- P Berge, Y Pomeau, et C Vidal. *L'ordre dans le chaos*. Herman, 1984 edition.
- M Berhanu, R Monchaux, S Fauve, N Mordant, F Pétrélis, A Chiffaudel, F Daviaud, B Dubrulle, C Gasquet, L Marié, F Ravelet, M Bourgoïn, Ph Odier, M Moulin, J-F Pinton, et R Volk. Magnetic field reversals in an experimental turbulent dynamo. *Europhys Letters*, 77 :59001, 2007.
- R Bessaih, A boukahri, et P Marty. Magnetohydrodynamics stability of a rotating flow with heat transfer. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 36 : 893–901, 2009.
- H M Blackburn et J M Lopez. Symmetry breaking of the flow in a cylinder driven by a rotating end wall. *Physics of Fluids*, 12 :2698–2701, 2000.
- L Bordja, L S Tuckerman, et R Bessaih. Effet de la convection thermique sur un écoulement de von kármán dans un cylindre en contra-rotation. *International Conference on Energetics and Pollution*, Constantine :147–153, 2007.
- L Bordja, E Serre, R Bessaih, et P Bontoux. Effet d'un champ magnétique externe sur un écoulement de von kármán chauffé par le bas. *Congrès Français de Mécanique*, page 101, 2009a.
- L Bordja, L S Tuckerman, L M Witkowski, M C Navarro, et R Bessaih. Oscillation dans la convection de rayleigh Bénard en cavité cylindrique. *Congrès Français de Mécanique*, page 108, 2009b.
-

- L Bordja, L S Tuckerman, L M Witkowski, M C Navarro, D Barkley, et R Bessaih. Influence of counter-rotating von kàrmàn flow on cylindrical rayleigh-bénard convection. *Physical Review E*, 81 :036322, 2010.
- K Boronska et L S Tuckerman. Standing and travelling waves in cylindrical rayleigh-bénard convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 559 :279–298, 2006.
- P Boronski et L S Tuckerman. Poloidal - toroidal decomposition in a finite cylinder ii. discretization, regularization and validation. *Journal of Computational Physics*, 227 : 1544–1566, 2007.
- S Bottin. *Structures cohérentes et transition vers la turbulence par intermittence spatio-temporelle dans l'écoulement de Couette plan*. Thèse de doctorat, Université Paris XI Orsay, 1998.
- M Bourgoin, L Marié, F Pétrélis, C Gasquet, A Guigon, P Odier, et J F Pinton. Magneto-hydrodynamics measurements in the von kàrmàn sodium experiment. *Physics of Fluids*, 14 :3046–3058, 2002.
- M Bourgoin, P Odier, et J F Pinton. An iterative study of time independent induction effects in magnetohydrodynamics. *Physics of Fluids*, 16 :2529–2547, 2004.
- J C Buell et I Catton. The effect of wall conduction on the stability of a fluid in a right circular cylinder heated from below. *Journal of Heat Transfer*, 105 :255, 1983.
- O Cadot, S Douady, et Y Couder. Characterization of the low-pressure filaments in a three-dimensional turbulent shear flow. *Physics of Fluids*, 7 :630–646, 1995.
- S Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Oxford University Press, 1961.
- G S Charlson et R L Sani. Thermoconvective instability in a bounded cylindrical fluid layer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 13 :1479–1496, 1970.
- G S Charlson et R L Sani. On thermoconvective instability in a bounded cylindrical uid layer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 14 :2157–2160, 1971.
-

- R M Clever et F H Busse. Three-dimensional convection in a horizontal fluid layer subjected to a constant shear. *Journal of Fluid Mechanics*, 234 :511–527, 1992.
- O Czarny, E Serre, P Bontoux, et R M Lueptow. Identification of complex flows in taylor-couette counter-rotating cavities. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics*, 329 :727–733, 2001.
- O Daube et J N Sorensen. Simulation numérique de l'écoulement périodique axisymétrique dans une cavité cylindrique. *C R Acad Sci Paris*, 308 :463–469, 1989.
- M P Escudier. Observation of the flow produced in a cylindrical container by a rotating end wall. *Experiments in fluids*, 2 :189–196, 1984.
- M Berhanu F Ravelet, R Monchaux, S Aumaitre, A Chiffaudel, F Daviaud, B Dubrulle, M Bourgoin, P Odier, N Plihon, J F Pinton, R Volk, S Fauve, N Mordant, et F Petrelis. Chaotic dynamos generated by a turbulent flow of liquid sodium. *Physical Review Letters*, 101 :074502, 2008.
- C B Forest, R A Bayliss, R D Kendrick, M D Nornberg, R O'Connell, et E J Spence. Magnetohydrodynamics. 38 :107, 2002.
- Robert W. Fox et Alan T. McDonald. *Introduction to fluid mechanics*. John Wiley and Sons, Inc, 1994.
- K S Gage et W H Reid. The stability of thermally stratified plane poiseuille flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 33 :21–32, 1968.
- A Gailitis, O Lielausis, S Dement'ev, E Platacis, A Ciferons, G Gerbeth, T Gundrum, F Stefani, A Christen, H Hänel, et G Will. Detection of a flow induced magnetic field eigenmode in the riga dynamo facility. *Physical Review Letters*, 84 :4365–4368, 2000.
- A Gailitis, O Lielausis, E Platacis, G Gerbeth, et F Stefani. Colloquium : Laboratory experiments on hydromagnetic dynamos. *Rev Mod Phys*, 74 :973–990, 2002.
-

- G Gauthier, P Gondret, et M Rabaud. Axisymmetric propagating vortices in the flow between a stationary and a rotating disk enclosed by a cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 386 :105–126, 1999.
- G Gauthier, P Gondret, F Moisy, et M Rabaud. Instabilities of the flow between co and counter-rotating disks. *Journal of Fluid Mechanics*, 473 :1–21, 2002.
- A Yu Gelfgat, P Z Bar-Yoseph, et A Solan. Steady states and oscillatory instability of swirling flow in a cylinder with rotating top and bottom. *Journal of Crystal Growth*, 8 :2614–2625, 1996.
- Y A Gelfgat, P Z Bar-Yoseph, et A Solan. Effect of axial magnetic field on three-dimensional instability of natural convection in a vertical bridgman growth configuration. *Journal of Crystal Growth*, 230 :63–72, 2001a.
- Y A Gelfgat, PZ Bar-Yoseph, et A Solan. Three-dimensional instability of axisymmetric flow in a rotating lid-cylinder enclosure. *Journal of Fluid Mechanics*, 438 :363–377, 2001b.
- P Glendinning. *Stability, instability and chaos : an introduction to the theory of nonlinear differential equations*. Cambridge university press, 1996.
- J Guckenheimer. Multiple bifurcation problems for chemical reactions. *Physica D*, 20 :1–20, 1986.
- G R Hardin et R L Sani. Buoyancy-driven instability in a vertical cylinder : binary fluids with soret effect. part ii : weakly non-linear solutions. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 17 :755–786, 1993.
- G R Hardin, R L Sani, D Henry, et B Roux. Buoyancy-driven instability in a vertical cylinder : binary fluids with soret effect. part i : general theory and stationary stability results. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 10 :79–117, 1990.
- Y Kamotani, F B Weng, S Ostrach, et J Platt. Oscillatory natural convection of a liquid metal in circular cylinders. *Journal of Heat Transfer*, 116 :627–632, 1994.
-

- Y Kuznetsov. Elements of applied bifurcation theory. *Springer*, 1998.
- R Labbé, J F Pinton, et S Fauve. Power fluctuations in turbulent swirling flows. *Journal Phys II France*, 6 :1099–1110, 1996.
- V Lepiller, A Goharzadeh, A Prigent, et I Mutabazi. Weak temperature gradient effect on the stability of the circular couette flow. *Eur Physics Journal*, 61 :445–455, 2008.
- J Lopez. Axisymmetric vortex breakdown : Part 1. confined swirling flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 221 :533–552, 1990.
- J M Lopez. Flow between a stationary and a rotating disk shrouded by a corotating cylinder. *Physics of Fluids*, 8 :2605–2613, 1996.
- J M Lopez, F Marques, et J Sanchez. Oscillatory modes in an enclosed swirling flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 359 :49–79, 1998.
- J M Lopez, F Marques, et J Sanchez. Oscillatory modes in an enclosed swirling flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 439 :109–129, 2001.
- J M Lopez, J E Hart, F Marques, S Kittelman, et J Shen. Instability and mode interactions in a differentially-driven rotating cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 462 :383–409, 2002.
- J M Lopez, A Rubio, et F Marques. Travelling circular waves in axisymmetric rotating convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 569 :331–348, 2006.
- P Manneville. *Structures dissipatives Chaos et Turbulence*. Commissariat à l’Energie Atomique, Gif-sur-Yvette, 1991.
- P Manneville et J M Piquemal. Zigzag instability and axisymmetric rolls in rayleigh-bénard convection : the effect of curvature. *Physical Review A*, 28 :1774–1790, 1983.
- F Marques et J M Lopez. Precessing vortex breakdown mode in an enclosed cylinder flow. *Physics of Fluids*, 13 :1679–1682, 2001.
-

- F Marques, J M Lopez, et J Shen. Mode interactions in an enclosed swirling flow : A double hopf bifurcation between azimuthal wavenumbers 0 and 2. *Journal of Fluid Mechanics*, 455 :263–281, 2002.
- J Lopez F Marques et J Shen. An efficient spectral-projection method for the navier-stokes equations in cylindrical geometries - three-dimensional cases. *Journal of Computational Physics*, 176 :384–401, 2002.
- L Martin-Witkowski. *Ecoulements engendrés par un champ magnétique tournant en géométrie cylindrique*. Thèse de doctorat Sciences de l'Ingénieur, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1987.
- F Moisy, T Pasutto, et M Rabaud. Instability patterns between counterrotating disks. *European Geosciences Union*, page 1Ü8, 2003.
- R Moreau. *Magnétohydrodynamique*. Kluwer, 1990.
- H W Muller92, M Lucke, et M Kamps. Transversal convection patterns in horizontal shear flow. *Physical Review A*, 45 :3714–3726, 1992.
- M C Navarro, L Martin Witkowski, L S Tuckerman, et P Le Quéré. Building a reduced model for non-linear dynamics in rayleigh-bénard convection with counter-rotating disks. *Physical Review E*, 81 :036323, 2010.
- G Neumann. Three-dimensional numerical simulation of buoyancy-driven convection in vertical cylinders heated from below. *Journal of Fluid Mechanics*, 214 :559–578, 1990.
- X Nicolas. Bibliographical review on the Poiseuille-Rayleigh-Bénard flows : the mixed convection flows in horizontal rectangular ducts heated from below. *International Journal of Thermal Science*, 41 :961–1016, 2002.
- C Nore, M Tartar et O Daube, et L S Tuckerman. Survey of instability threshords of flow between exactly counter-rotating disks. *Journal of Fluid Mechanics*, 511 :45 65, 2004.
- P Odier, J F Pinton, et S Fauve. Advection of a magnetic field by a turbulent swirling flow. *Physical Review E*, 58 :7397–7401, 1998.
-

- S V Patankar. Numerical heat transfer and fluid flow. *Hemisphere Publishing*, 1980.
- Y Ponomarenko. Theory of the hydromagnetic generator. *Journal of Appl Mech Tech Phys*, 14 :775, 1973.
- F Pétrélis, S Fauve, E Dormy, et J-P Valet. Simple mechanism for reversals of earth's magnetic field. *Physical Review Letters*, 102 :144503, 2009.
- G O Roberts. Dynamo action of fluid motions with two-dimensional periodicity. *Philos Trans R Soc Lond, A(271)* :441–454, 1972.
- A Rubio, J M Lopez, et F Marques. Modulated rotating convection : radially travelling concentric rolls. *Journal of Fluid Mechanics*, 608 :357–378, 2008.
- L Schouveiler, F Le Gal, et M P Chauve. Stability of a traveling roll system in a rotating disk flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 10 :2695–2697, 1998.
- L Schouveiler, F Le Gal, et M P Chauve. Instabilities of the flow between a rotating and a stationary disk. *Journal of Fluid Mechanics*, 443 :329–350, 2001.
- E Serre, E Crespo del Arco, et P Bontoux. Flow between a stationary and a rotating disk shrouded by a corotating cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 434 :65–100, 2001.
- J H Siggers. Dynamics of targets in low-prandtl number convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 475 :357–375, 2003.
- F Sotiropoulos et Y Ventikos. Transition from bubble-type vortex breakdown to columnar vortex in a confined swirling flow. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 19 :446–458, 1998.
- A Spohn, M Mory, et E J Hopfinger. Experiments on vortex breakdown in a confined flow generated by a rotating disk. *Journal of Fluid Mechanics*, 370 :73–99, 1998.
- F Stefani et G Gerbeth. Asymmetric polarity reversals, bimodal field distribution and coherence resonance in a spherically symmetric mean-field dynamo model. *Physical Review Letters*, 94 :184506, 2005.
-

-
- J L Stevens, J M Lopez, et B J Cantwell. Oscillatory flow states in an enclosed cylinder with a rotating endwall. *Journal of Fluid Mechanics*, 389 :101–118, 1999.
- R Stieglitz et U Muller. Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo. *Physics of Fluids*, 13 :561, 2001.
- D Sweet, E Ott, J M Finn, T M Antonsen, et D P Lathrop. Blowout bifurcations and the onset of magnetic activity in turbulent dynamos. *Physical Review E*, 63 :066211–1, 2001.
- R Touihri, H Benhadid, et D Henry. On the onset of convective instabilities in cylinder cavities heated from below. i. pure thermal case. *Physics of Fluids*, 11 :2078, 1999.
- L S Tuckerman. Thermosolutal and binary fluid convection as a 2×2 matrix problem. *Physica D*, 156 :325–363, 2001.
- L S Tuckerman et D Barkley. Global bifurcation to travelling waves in axisymmetric convection. *Physical Review Letters*, 61 :408–411, 1988.
- L S Tuckerman, K Boronska, L Bordja, L M Witkowski, et M C Navarro. Bifurcation phenomena in cylindrical convection. *Bulletin of the American Physical Society*, 53 : 288, 2008.
- L S Tuckerman, L M Witkowski, L Bordja, M C Navarro, et D Barkley. Influence sur la convection rayleigh-bénard de l'écoulement de von kàrmàn : une bifurcation sniper. *Journée de Dynamique des Fluides sur le Plateau*, 6 Novembre, 2009.
- R Verzicco et R Camussi. Transitional regimes of low-prandlt thermal convection in a cylindrical cell. *Physics of Fluids*, 9 :1287–1295, 1997.
- C Wagner, R Friedrich, et R Narayanan . An iterative study of time independent induction effects in magnetohydrodynamics. *Physics of Fluids*, 6 :1425–1433, 1994.
- M Wanschura, H C Kuhlmann, et H J Rath. Three-dimensional instability of axisymmetric buoyant convection in cylinders heated from below. *Journal of Fluid Mechanics*, 326 : 399–415, 1996.
-