

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES FRERES MANTOURI CONSTANTINE 1
FACULTE DES SCIENCES DE LA TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



N° d'ordre : 199/DS/2018
N° de série : 12/GM/2018

THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Construction Mécanique

Étude du comportement dynamique des composites stratifiés et sandwichs

PAR

RAHMANE Abdelhafid

Soutenu le 03 / 11 / 2018

Devant le jury :

Président :

Mr. BOUCHOUCHA Ali Prof. Université des Frères Mentouri, Constantine

Rapporteur :

Mr. BENMANSOUR Toufik Prof. Université des Frères Mentouri, Constantine

Examineurs :

Mr. BOUCHELAGHEM Abdelaziz Prof. Université BADJI Mokhtar, Annaba

Mr. LAOUAR Lakhdar Prof. Université BADJI Mokhtar, Annaba

Dédicaces

*À mes parents ;
À ma petite famille ;
À mes sœurs et mes frères.*

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier vivement, le Professeur **BENMANSOUR Toufik** directeur de thèse pour son soutien qu'il n'a cessé de m'apporter, sa disponibilité et ses précieux conseils qui ont permis de mener à bien ce travail.

Je remercie ensuite tout particulièrement le Professeur **BOUCHOUCHA Ali** d'avoir accepté d'être président du jury de ma thèse.

Je voudrais remercier également les Professeurs **LAOUAR Lakhdar** et **BOUCHELAGHEM Abdelaziz**, professeurs à l'université BADJI Mokhtar, Annaba, pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en acceptant de l'examiner.

Enfin, je remercie tous les membres de ma famille pour leur soutien.

Publications et communications internationales

Publication

- 1) **RAHMANE Abdelhafid**, BENMANSOUR Toufik, BOUAKBA Mustafa, MEDDOUR Ikhlas. Factors influencing the effect of attached mass on dynamic behavior of laminate composite plates using Taguchi technique. J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng – Springer. 40:66. <https://doi.org/10.1007/s40430-018-0987-x>. (2018).

Conférence internationale

- 2) **RAHMANE Abdelhafid**, BENMANSOUR Toufik, Numerical and experimental investigation of dynamic behavior of laminate composite under flexural vibration, The Third International Conference on FRACTURE MECHANICS "Engineering Applied Fracture Mechanics and Environment" Chlef 27-30 November 2016. Algeria.
- 3) **RAHMANE Abdelhafid**, BENMANSOUR Toufik ,ISSASFA Brahim .Evaluation of the dynamic properties of composite laminate under flexural vibration. The first International Conference on Shell, plates and Beams. University of Bologna, Sept 09-11, 2015. ISSN 2421-2822/ ISBN 978-88-7488-886-3/ DOI: 101565/978-88-748-888-3.

ملخص

أخذ استخدام المواد المركبة حالياً، مكاناً كبيراً في جميع مجالات الصناعات المدنية و العسكرية وكذلك الفضائية على وجه الخصوص ، فغالباً ما تستخدم إلى جانب هذه المواد وتكون متعلقة بها بعض التركيبات الملحقة ذات ملحق واحد أو أكثر ، مثل الأنواع المختلفة من أجهزة الاستشعار. فتؤثر هذه الكتل على الاستجابات الديناميكية للهياكل الرئيسية في مختلف التطبيقات الهندسية، لذلك تتناول هذه الرسالة تأثير الكتلة المرفقة على الخواص الديناميكية للصفائح المركبة وألواح الساندويتش ، تحت تأثير الاهتزاز الانحنائي. استعملت في هذا العمل الشروط الحدية الثابتة من جهة و الحرة من مختلف الجهات الأخرى. علاوة على ذلك، لقد تم دراسة تأثير الكتلة المرفقة على الترددات الطبيعية للمادة المركبة من خلال عدة عوامل مختلفة باستخدام طريقة طاقشي. أخذنا في الاعتبار العوامل التالية: وزن الكتلة المرفقة ، ومواقع الكتلة المرفقة بالنسبة للشروط الحدي الثابت ، تموضع الطبقات للصفحة المركبة، وعدد هذه الطبقات

بالإضافة إلى ذلك ، فإن آثار الكتلة المرفقة على الترددات الطبيعية للألواح الساندويتش قد تم دراستها وفقاً لعدة عوامل ، وهذه العوامل هي مواقع الكتلة المرفقة ، والخصائص الميكانيكية لللب ونسب سمك اللب / سمك اللوحة، ونسب الأطوال الأساسية للوحة / عرض اللوحة. اعتمدت الدراسة في هذا الجزء على نموذج حساب باستخدام طريقة العناصر المحدودة. تشير نتائج هذه الدراسة إلى أن الخصائص الديناميكية للألواح المركبة والساندويتش حساسة للكتلة المرفقة ، حيث وجد أن الترددات الطبيعية تتناسب عكسياً مع وزن الكتلة مهما كانت العوامل المدروسة وهذا إذا كان موقع الكتل المرفقة واقعة في منطقة بعيدة عن الخطوط العقدية للاهتزازات الحرة. تم اكتشاف أن مواقع الكتلة المرفقة بالنسبة للحد الثابت و عن الخطوط العقدية للاهتزازات الحرة هي أهم العوامل التي تؤثر على الترددات الطبيعية.

كلمات البحث: الصفائح المركبة - لوحة الساندويتش - كتلة مرفقة - طبقات - تسلسلات متعاقبة - طريقة تاجوشي - تردد طبيعي

Résumé

Actuellement, l'utilisation des matériaux composites prend une grande place dans les constructions mécaniques, industrielles, civiles, militaires, sport et aérospatiales. En particulier, des structures composites avec un ou plusieurs attachements, tels que différents types de capteurs, sont souvent rencontrées dans les applications d'ingénierie. Ces masses attachées affectent les réponses dynamiques des structures principales. En conséquence, l'objectif de la présente thèse est d'étudier les effets de la masse attachée sur le comportement dynamique de composites stratifiés et sandwich, ayant les conditions aux limites encastrée-libre-libre-libre. En outre, les facteurs influençant l'effet de la masse attachée sur les fréquences propres de la plaque stratifié ont été étudiés en utilisant la méthode de Taguchi. Les facteurs considérés sont : le poids de la masse attachée, l'emplacement de la masse attachés à partir du bord encastré, les séquences d'empilement et les nombres de couches. Ainsi, les facteurs influençant les effets de la masse attachée sur les fréquences propres de la plaque sandwich ont été étudiés. Ces facteurs sont les positions de la masse attachée, les caractéristiques mécaniques des âmes, les rapports d'épaisseur d'âme/épaisseur de la plaque (h_c/h), et les rapports longueur / largeur de la plaque (a/b). L'étude menée sur les plaques sandwich est basée sur un modèle de calcul par l'utilisation de la méthode des éléments finis. Les résultats trouvés indiquent que les caractéristiques dynamiques des composites stratifiés et sandwichs sont sensibles à la masse attachée, ainsi, les fréquences propres sont inversement proportionnelles au poids de la masse attachée. L'analyse par la méthode de Taguchi indique que la distance d'emplacement de la masse attachée à partir du bord encastré de la plaque stratifiée est le facteur le plus affectant les fréquences propres, lorsque son emplacement est situé sur la zone des lignes anti-nodales du mode vibratoire.

Mots clés : Stratifié composite ; Plaque sandwich ; Masse attachée ; Couches ; Séquences d'empilement ; Méthode de Taguchi ; Fréquence propre.

Abstract

Nowadays, the use of composite materials has taken a large place in civilian industries as well as in military and aerospace industries. In particular, composite structures with one or more attachments, such as different types of sensors, are often encountered in engineering applications. These attached masses affect the dynamic responses of the main structures. Therefore, the present thesis addresses the effect of attached mass on dynamic properties of composite laminate and sandwich plates, under flexural vibration, for clamped-free-free-free boundary conditions. Furthermore, factors influencing the effect of attached mass on the natural frequencies of laminate composite are studied using the Taguchi method. The considered factor parameters are: attached mass weight, attached mass locations from the clamped edge, staking sequences, and number of layers. In addition, the effects of the attached mass on the natural frequencies of sandwich plate according to several factors, these factors are the positions of the attached mass, the mechanical characteristics of the core, the ratios of thickness of core/ thickness the plate (h_c / h), and the length / width ratios of the plate (a / b). So, the study carried out is based on a model of calculation by the use of the finite element method. The results of this study indicate that the dynamic characteristics of the laminate composite and sandwich plates are sensitive to the attached mass, where the natural frequencies are found to be inversely proportional to the mass weight. The results were found that the locations of the attached mass are the most important factors affecting the natural frequencies of laminate plate, where the location of the masses fell into the antinodes area of vibration.

Keywords: Laminate composite; Sandwich plate; Attached mass; Layers; Staking sequences; Taguchi method; Natural frequency.

Table des matières

Dédicace.....	1
Remerciement.....	2
Publications et communications internationales.....	3
Résumé.....	4
Table des matières.....	10
Liste des figures.....	13
Liste des tableaux.....	14
Nomenclature.....	15
Introduction générale.....	17

Chapitre I

Généralités sur les matériaux composites

1.1 Introduction.....	21
1.2 Classification des composites.....	22
1.2.1 Classification effectuée par rapport au constituant de la matrice.....	22
1.2.2 Classification selon la forme de renforcement.....	22
1.2.3 Les composites laminaires.....	24
1.2.3.1 Composite stratifié	24
1.2.3.2 Composite sandwich	24
1.3 Constituants de matériaux composites.....	25
1.3.1. La matrice.....	25
1.3.1.1 Résines époxyde.....	26
1.3.1.2 Résines polyester.....	26
1.3.1.3 Matrices en résine des phénoliques.....	26
1.3.1.4 Matrices en résines Polyamides.....	27
1.3.1.5 Matrices métalliques	27
1.3.1.6 Matrices en céramique.....	27
1.3.1.7 Matrices en carbone	27
1.3.2 Les renforts	28
1.3.2.1 Fibres de carbone et de graphite.....	28
1.3.2.2 Fibre d'Aramide.....	29
1.3.2.3 Fibres de verre.....	29
1.3.2.4 Les fibres de bore.....	30
1.3.2.5 Fibre de silice (ou de quartz).....	31
1.3.2.6 Fibres de polyéthylène de haut module.....	31
1.3.2.7 Les fibres naturelles	31
1.3.3 Les Âmes.....	32
1.3.3.1 Les mousses	32
1.3.3.2 Le bois	33
1.3.3.3 Le nid d'abeilles.....	33
1.3.4 Les peaux.....	34
1.3.5 Adhésifs.....	34
1.4 Domaines d'application des composites	34
1.4.1.2 Applications de composites renforcés en fibres de carbone.....	34
1.4.1 Applications de composites à matrice polymère.....	34

1.4.1.1 Applications de composites renforcés en fibres de verre.....	35
1.4.1.3 Applications de composites renforcés en fibres de bore.....	36
1.4.1.4 Applications de composites renforcés en fibres d'aramide.....	36
1.4.2 Applications de composites renforcés en matrice métallique.....	36
1.4.3 Applications de composite renforcés en matrice de carbone.....	37
1.4.4 Applications de composite renforcés en matrice de céramique.....	37
1.5 Conclusion.....	39

Chapitre II

Vibration des matériaux composites multicouche

2.1 Introduction.....	41
2.2 Comportement dynamique des stratifiés composites	41
2.3 Comportements dynamiques des composites stratifiés et sandwichs en présence de masses ajoutées	45
2.4 Analyse modale expérimentale.....	47
2.4.1 Fréquences de résonance.....	47
2.4.2 L'amortissement.....	47
2.5 Motivation et objectif de la présente étude.....	49

Chapitre III

Évolution des théories pour la modélisation des composites multicouches

3.1 Introduction.....	53
3.2 Modèles tridimensionnels (3D).....	53
3.3 Modèles de plaques bidimensionnelles (2D).....	53
3.3.1 Théorie classique de plaques stratifiées.....	54
3.3.1.1 Champ de contraintes et de déformations.....	56
3.3.1.2 Équation du mouvement.....	61
3.3.2 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre.....	63
3.3.2.1 Champ de contraintes et de déformations.....	63
3.3.2.2 Équation du mouvement.....	66
3.3.3 Théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur	67
3.4 Expression de conditions aux limites.....	68
3.4.1 Appui simple.....	69
3.4.2 Encastrement	70
3.4.3 Condition du bord libre.....	70
3.5 Conclusion.....	71

Chapitre IV

Comportement vibratoire des composites stratifiés

4.1 Introduction.....	73
4.2 Stratifiés composites avec masse attachée	73
4.3 Analyse par la méthode des éléments finis.....	75
4.4 Analyse expérimentale	79
4.4.1 Dispositif expérimental.....	79
4.4.2 Matériaux et essais.....	81

4.5 Évaluations du comportement dynamique de plaques composites sans masse attachée.....	82
4.5.1 Fréquence propre des stratifiés composites.....	82
4.5.2 Amortissement des stratifiés composites.....	84
4.5.3 Déformées propres des stratifiés composites.....	85
4.6 Évaluations du comportement dynamique des plaques composites avec masse attachée.....	86
4.7 Les facteurs influençant l'effet de la masse attachée par la méthode de Taguchi.....	90
4.7.1 Le rapport « ratio signal / bruit ».....	90
4.7.2 Application de la méthode Taguchi.....	91
4.7.3 Analyse et évaluation des résultats expérimentaux à l'aide du modèle Taguchi.....	94
4.7.3.1 Analyse du rapport signal - bruit (S / N).....	94
4.8 Méthode d'analyse de la variance (ANOVA).....	100
4.9 Conclusion.....	103

Chapitre V

Analyse par éléments finis du comportement dynamique des composites sandwichs

5.1 Introduction.....	107
5.2 Modélisation par éléments finis.....	107
5.3 Plaques étudiées.....	108
5.4 Précision des résultats.....	110
5.4.1 Fréquence propre non-dimensionnelle sans masse attachée.....	110
5.4.2 Effet de la masse attachée sur les fréquences propres non-dimensionnelles.....	111
5.5 Comportement dynamique en vibration libre de plaque composite sandwich.....	113
5.5.1 Influence des caractéristiques des âmes sur les fréquences propres non-dimensionnelles avec et sans masse attachée.....	113
5.5.2 Effet des emplacements de la masse attachée sur le comportement dynamique de la plaque sandwich.....	117
5.5.3 Effet du rapport d'épaisseur d'âme / épaisseur de la plaque (hc/h) sur le comportement dynamique de la plaque sandwich avec et sans masse attachée.....	121
5.5.4 Effet du rapport de longueur/ largeur de la plaque (a/b) sur le comportement dynamique de la plaque sandwich avec et sans masse attachée.....	124
5.6 Conclusion.....	129
Conclusion générale	132
Références.....	137
Annexe A.....	146
Annexe B.....	147
Annexe C.....	149

Liste des figures

- Figure 1.1 Structure d'un matériau composite
- Figure 1.2 Classification des composite selon la forme des renforts
- Figure 1.3 Structure stratifiée composite
- Figure.1.4 Structure Sandwich
- Figure.1.5 Classification de matériaux composites
- Figure 1.6 Fibres de Graphite (a) et Fibre de Carbone (b)
- Figure.1.7 Fibres d'aramide
- Figure 1.8 Fibre de verre
- Figure 1.9 Fibre naturelle de Cactus
- Figure 1.10 Mousse en PVC
- Figure 1.11 bois de Balsa
- Figure 1.12 Âme en nid à abeille de Kevlar
- Figure 1.13 Domaines d'applications de matériaux composites :(a) Aéronautique ; (b) Ingénierie ; (c) Génie civile ; (d) Sport ; (e) Automobile et transport.
- Figure 2.1 Exemple de réponse dynamique d'une structure composite
- Figure.2.2 Réponse temporelle.
- Figure 2.3 Une résonance avec largeur de bande à $-3dB$
- Figure 3.1 Modélisation schématique d'une stratifiée par le modèle monocouche et Layerwise
- Figure 3.2 Système de coordonnées et numérotation des couches utilisées pour une plaque stratifié
- Figure 3.3 Géométries déformées et non-déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Kirchhoff
- Figure 3.4 Géométries déformées et non déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Reissner-Mindlin
- Figure 3.5 Géométries non déformées et déformées d'une plaque selon les trois théories CLPT, FSDT et HSDT
- Figure 3.6 Élément de frontière de la plaque et repère associé
- Figure 3.7 Schématisation d'un appui simple
- Figure 3.8 Représentation d'un encastrement

- Figure 3.9 Variation du moment de torsion le long d'un bord libre
- Figure 4.1 La géométrie de l'élément coque SHELL 281
- Figure 4.2 Model d'éléments finis d'un stratifié composite avec chargement de masse attachée
- Figure 4.3 Dispositif expérimental
- Figure 4.4 Les quatre emplacements de la masse attachée sur le stratifié composite
- Figure 4.5 Exemple de réponse en fréquence d'une plaque stratifié Carbone-époxyde, encastrée-libre-libre-libre
- Figure 4.6 Déformées propres de la plaque composite ayant $[\pm 20]_2s$
- Figure 4.7 Influence de la masse attachée sur la fréquence propre pour le premier mode de vibration pour la plaque $[\pm 20]_2s$
- Figure 4.8 Influence de la masse attachée sur la fréquence propre pour le deuxième mode de vibration pour la plaque $[\pm 20]_2s$
- Figure 4.9 Influence de la masse attachée sur la fréquence propre pour le troisième mode de vibration pour la plaque $[\pm 20]_2s$
- Figure 4.10 Déformée propre du premier mode de vibration en plaque ayant $[\pm 20]_2s$ avec masse attachée 25 g (M/6)
- Figure 4.11 Déformée propre du deuxième mode de vibration en plaque ayant $[\pm 20]_2s$ avec masse attachée 25 g (M/6).
- Figure 4.12 Déformée propre du troisième mode de vibration en plaque ayant $[\pm 20]_2s$ avec masse attachée /25 g (M/6)
- Figure 4.13 Les effets principaux basés sur le rapport signal/bruit pour Δf_1
- Figure 4.14 Les effets principaux basés sur les valeurs moyennes pour Δf_1
- Figure 4.15 Les effets principaux basés sur le rapport signal/bruit pour Δf_2
- Figure 4.16 Les effets principaux basés sur les valeurs moyennes pour Δf_2
- Figure 4.17 Les effets principaux basés sur le rapport signal/bruit pour Δf_3
- Figure 4.18 Les effets principaux basés sur les valeurs moyennes pour Δf_3
- Figure 5.1 Géométrie de la plaque sandwich
- Figure 5.2 La géométrie de l'élément coque SOLID 185
- Figure 5.3 Modes propres de la plaque simplement appuyée, (a) modes sans masse attachée, (b) modes avec masse attachée.
- Figure 5.4 Mode propre (1,1) de la plaque sandwich encastrée-libre-libre-libre (ELLL), (a) mode sans masse attachée, (b) mode avec masse attachée.

Figure 5.5 Mode propre (1,2) de la plaque sandwich encastree-libre-libre-libre (ELLL), (a) mode sans masse attachee, (b) mode avec masse attachee.

Figure 5.6 Mode propre (2,1) de la plaque sandwich encastree-libre-libre-libre (ELLL), (a) mode sans masse attachee, (b) mode avec masse attachee.

Figure 5.7 Variation relative des frequences propres non-dimensionnelles avec et sans masse attachee, $a/b = 1$, $a/h = 10$ et $hc/h = 0.88$

Figure 5.8 Frequences propres non-dimensionnelles de plaque sandwich pour differents rapports d'epaisseur d'ame/ epaisseur de la plaque (hc/h). Ames en mousse PVC de type HEREX C70.130.

Figure 5.9 Variation relative entre frequences propres non-dimensionnels avec et masse attachee pour differents rapports d'epaisseur d'ame/ epaisseur de la plaque (hc / h)

Figure 5.10 Frequences propres non-dimensionnelles de plaque sandwich pour differents rapports longueur / largeur de la plaque (a / b)

Figure 5.11 Variation relative entre frequences propres non-dimensionnelles avec et sans masse attachee pour differents rapports longueur / largeur de la plaque (a / b)

Figure B.1 Modes propres de la plaque sandwich (ELLL), avec masse attachee a l'emplacement P1

Figure B.2 Modes propres de la plaque sandwich (ELLL), avec masse attachee a l'emplacement P2

Figure B.3 Modes propres de la plaque sandwich (ELLL), avec masse attachee a l'emplacement P3

Figure B.4 Modes propres de la plaque sandwich (ELLL), avec masse attachee a l'emplacement P4

Figure B.5 Modes propres de la plaque sandwich (ELLL), avec masse attachee a l'emplacement P5

Figure B.6 Modes propres de la plaque sandwich (ELLL), avec masse attachee a l'emplacement P6

Figure B.7 Modes propres de la plaque sandwich (ELLL), avec masse attachee a l'emplacement P7

Figure B.8 Modes propres de la plaque sandwich (ELLL), avec masse attachee a l'emplacement

Liste des tableaux

Tableau 4.1 Propriété mécanique de carbone/époxyde (IM7/8552)

Tableau 4.2 Comparaison entre les fréquences propres expérimentales et numériques pour les stratifiés ayant 8 couches ($n = 2$)

Tableau 4.3 Comparaison entre les fréquences propres expérimentales et numériques pour les stratifiés ayant 16 couches ($n = 4$)

Tableau 4.4 Comparaison entre les fréquences propres expérimentales et numériques pour les stratifiés ayant 24 couches ($n = 6$)

Tableau 4.5 Comparaison entre les fréquences propres expérimentales et numériques pour les stratifiés ayant 32 couches ($n = 8$)

Tableau 4.6 Variations d'amortissement modal en fonction des séquences d'empilements

Tableau 4.7 Les niveaux de facteurs

Tableau 4.8 Matrice orthogonale L16 de Taguchi

Tableau 4.9 Fréquences propres expérimentales et numériques des plaques selon les différents facteurs

Tableau 4.10 Résultats expérimentale de la dispersion

Tableau 4.11 Les valeurs du rapport S/N pour chaque essai

Tableau 4.12 Les réponses S / N pour les variations relatives des fréquences propres (Δf_1)

Tableau 4.13 Les réponses S / N pour les variations relatives des fréquences propres (Δf_2)

Tableau 4.14 Les réponses S / N pour les variations relatives des fréquences propres (Δf_3)

Tableau 4.15 Résultats d'analyse par la méthode de la variance (ANOVA) pour Δf_1

Tableau 5.1 Propriétés mécaniques du verre /polyester

Tableau 5.2 Propriétés mécaniques des âmes en mousse PVC

Tableau 5.3 Fréquences propres non-dimensionnelles de la plaque $[0^\circ / 90^\circ / 0^\circ / \hat{A}me / 0^\circ / 90^\circ / 0^\circ]$ simplement appuyée avec, $a/b = 1$, $a/h = 10$, $hc/h = 0.88$

Tableau 5.4 Fréquences propres non-dimensionnelles de la plaque $[45^\circ/- 45^\circ/45^\circ/\hat{A}me /- 45^\circ/45^\circ/- 45^\circ]$ simplement appuyée avec, $a/b = 1$, $a/h = 10$ et $hc/h = 0.88$

Tableau 5.5. Fréquences propres non-dimensionnelles de la plaque sandwich simplement appuyée avec masse attachée au centre de peau supérieure, $a/b = 1$, $a/h = 10$, $hc/h = 0.88$

Tableau 5.6 Fréquences propres non-dimensionnelles du mode (1,1) en fonction de différentes âmes avec et sans masse attachée

Tableau 5.7 Fréquences propres non-dimensionnelles de mode (1,2) en fonction de différente âmes avec et sans masse attachée

Tableau 5.8 Fréquences propres non-dimensionnelles de mode (2,1) en fonction de différente âmes avec et sans masse attachée

Tableau 5.9 Fréquences propres non-dimensionnelles (F_0) de la plaque sandwich encastrée-libre-libre-libre (ELLL), sans masse attachée ; $a/b = 1$, $a/h = 10$ et $hc/h = 0.88$; âme de type HEREX C70-130

Tableau 5.10 Fréquences propres non-dimensionnelles (F_p) de la plaque sandwich encastrée-libre-libre-libre (ELLL) avec masse attachée, $a/b = 1$, $a/h = 10$ et $hc/h = 0.88$

Tableau 5.11 Fréquences propres non-dimensionnelles de la plaque sandwich encastrée-libre-libre-libre (ELLL) pour différents rapports épaisseur d'âme/ épaisseur de la plaque (hc / h) sans masse attachée

Tableau 5.12 Fréquences propres non-dimensionnelles de la plaque sandwich encastrée-libre-libre-libre (ELLL), pour différents rapports épaisseur d'âme/ épaisseur de la plaque (hc / h) avec masse attachée

Tableau 5.13 Fréquences propres non-dimensionnelles calculées pour différents rapports longueur / largeur (a / b) de la plaque encastrée-libre-libre-libre (ELLL), sans masse attachée. Âmes en mousse PVC de type HEREX C70.130.

Tableau 5.14 Fréquences propres non-dimensionnelles calculées pour différents rapports longueur / largeur (a / b) de la plaque encastrée-libre-libre-libre (ELLL) avec masse attachée

Tableau A.1 Influence de la masse attachée sur la fréquence propre pour le premier mode de vibration pour la plaque $[\pm 20]_2s$

Tableau A.2 Influence de la masse attachée sur la fréquence propre pour le deuxième mode de vibration pour la plaque $[\pm 20]_2s$

Tableau A.3 Influence de la masse attachée sur la fréquence propre pour le troisième mode de vibration pour la plaque $[\pm 20]_2s$

Tableau C.1 Caractéristiques mécaniques de monofilaments aramides

Tableau C.2 Caractéristiques des fibres de carbone, comparées à celles des fibres de verre

Tableau C.3 Caractéristiques mécaniques des fibres de bore, bore-carbure de bore et carbure de silicium

Nomenclature

δ	Le décrément logarithmique
ζ	L'amortissement modal
ρ_0	La densité du matériau
γ_{xz}, γ_{yz}	Les déformations de cisaillement transversales
$\varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}$	Les contraintes de cisaillement transversales
$k(x, y)$	Matrice des courbures
u, v, w	Les composantes du vecteur déplacement en un point M.
ν	Coefficient de Poisson
G	Module de cisaillement
E	Module élastique
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$	Contraintes en membranes
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$	Déformations en membranes
φ_x et φ_y	Les rotations de la normale autour des axes x, et y.
Q_{ij}	La matrice de rigidité
C_{ij}	Les coefficients de rigidité
A_{ij}	Les coefficients de rigidité en membrane
B_{ij}	Les coefficients de couplage membrane-flexion
D_{ij}	Les coefficients de rigidité en flexion
$\bar{\Omega}_0$	Le domaine total du stratifié
S_t	La surface supérieure
S_b	La surface inférieure
$\bar{\Gamma}$	Le bord du stratifié
U	L'énergie potentielle virtuelle de la déformation
V	Le travail virtuel
K	L'énergie cinétique virtuelle
δu_n	Les déplacements virtuels suivant la direction normale
δv_s	Les déplacements virtuels suivant la direction tangentielle
q_b	La force distribuée à la face supérieure
q_t	La force distribuée à la face inférieure
I_0	Le moment d'inertie normal

I_1	Le moment d'inertie normal-rotationnel
I_2	Le moment d'inertie rotationnel
$N_{xx}, N_{xy} (N_n, N_{nt})$	Les résultantes en membrane
$\gamma_{xx}, \gamma_{yy}, \gamma_{xy} (\varphi_n)$	Les résultantes en cisaillement
$M_{xx}, M_{xy} (M_n, M_{nt})$	Les moments de flexion et de torsion respectivement
E_c	L'énergie cinétique maximale
U_d	L'énergie de déformation
u_0, v_0, w_0	Les composantes de déplacements dans le plan moyen
ρ	La masse par unité de surface de la plaque
ω	La fréquence propre du stratifié composite
N_i	Les fonctions de forme dépendent le nœud i
η	Les coordonnées propres locales d'un élément
$u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$	Les déplacements en termes de valeurs nodales
$[M]$	La matrice de la masse structurale
$[K]$	La matrice de rigidité structurelle
$\{w\}$	Le vecteur de déplacement nodal
$\{\ddot{w}\}$	Le vecteur d'accélération nodale ;
\bar{y}	Moyenne arithmétique des valeurs mesurées
s	Écart-type des valeurs mesurées
n	Nombre de mesures effectuées
SS_T	La somme totale des écarts quadratiques
μ_i	Le rapport moyen de S/N pour le $i^{\text{ème}}$ test
SS_P	La somme des écarts quadratiques dus à chaque paramètre de processus
SS_e	La somme d'erreur quadratique
D_T	Le total de degrés de liberté
V_p	La variance du paramètre testé
R	Le pourcentage de la contribution pour chaque paramètre
V_e	La moyenne de l'erreur quadratique
S_p	La somme corrigée des carrés
I	Moment quadratique d'inertie
ψ_x, ψ_y	Les termes du second ordre

Introduction générale

La recherche de performances technique des matériaux spécifiques au besoin technologique a motivé les concepteurs pour rechercher des solutions scientifiques pouvant relever les défis imposés par les problèmes rencontrés en régime statiques et dynamiques. Pour cela, ils ont développé des matériaux renforcés à hétérogénéité particulières appelées matériaux composites. La croissance rapide d'applications des matériaux composites au cours de ces dernières années a fait naître beaucoup d'optimisme. Donc, les structures composites occupent actuellement une place considérable dans tous les secteurs industriels tels que, l'industrie aéronautique et aérospatiale, le transport terrestre et maritime, les articles et matériel de sport. Dans le domaine militaire, les constructions composites ont évolué comme l'une des composantes structurelles de base pour les composants porteurs d'hélicoptères et d'avions avancés. Dans ce contexte, on peut dire que la solution composite attire de plus en plus l'attention des opérateurs économique et industriel par le fait qu'elle permet de réaliser une bonne conception des structures porteuse caractérisée par une robustesse alliées à une légèreté économique, permettant ainsi d'augmenter la charge utile de service tout en réalisant une économie de carburant.

Le comportement dynamique est un paramètre important qui doit être pris en compte lors de la conception de structures. Dans ce contexte, la détermination des paramètres modaux, tels que, les fréquences propres et les modes de résonance, ainsi les amortissements modaux associés, permettent de localiser les problèmes liés aux vibrations aux différents types de chargement dynamique et de vérifier les solutions apportées par les méthodes de calcul approchées pour le contrôle de ces problèmes.

Plusieurs attachements aux structures composites sont souvent rencontrés dans les applications d'ingénierie. Telle que l'industrie l'aérospatiale, aéronautique et plus récemment dans les industries du transport. Ces pièces jointes affectent les réponses dynamiques des structures principales. Malgré ça, nombreux travaux ont été développés pour évaluer le comportement dynamique des composites stratifié et sandwich. Néanmoins, les effets de la masse attachée sur le comportement dynamique des composites dans les littératures sont très limités. Donc, l'objectif du présent travail est de remplir cette lacune par l'étude des effets de la masse attachée aux composites stratifiés et sandwich, en utilisant des approches expérimentales et numériques par la méthode des éléments finis. En conséquence, le présent

travail est consacré à l'étude vibratoire des matériaux composites sandwichs, constitués d'une âme en PVC et deux peaux en stratifié verre/polyester et des stratifiés en carbone/époxyde en présence et en absence de la masse attachée. La thèse est divisée en cinq chapitres :

Le chapitre 1 présente des généralités sur les matériaux composites et leurs classifications. Cette classification est menée à partir d'arrangement des composites en deux grandes familles :

1. Classification effectuée selon la nature de la matrice.
2. Classification selon la forme du renfort.

De plus les différentes constitutions de composites ont été exposées, elles que, les matrices, les différents types de renforts et les diverses âmes pour les matériaux sandwichs. Enfin la dernière partie du chapitre I a été consacrée à la description les domaines d'application de composites en général.

Le chapitre II présente une discussion des travaux de recherches dans le domaine du comportement vibratoire des composites. L'analyse modale expérimentale a été exposée aussi, en détail. Le but et la portée de la présente étude ont été également décrits dans ce même chapitre.

Le chapitre III est consacré à l'acquisition des connaissances théoriques nécessaires pour étudier notre problématique. Dans un premier temps, nous avons présenté quelques notions sur les approches et les théories qui servent à analyser le comportement dynamique des structures composites multicouches stratifiés et sandwichs. Ainsi, le chapitre expose les formulations énergétiques nécessaires pour l'analyse et le calcul par la méthode des éléments finis.

Le chapitre IV représente une investigation expérimentale des effets de la masse attachée sur le comportement dynamique des stratifiés en fonction de quatre facteurs, respectivement, les positions de la masse attachée, le nombre de couches, les rapports de poids de la masse attachée par rapport la masse de la plaque stratifié, et les séquences d'empilements. En outre, le chapitre représente une modélisation par la méthode des éléments finis (FEM) à l'aide d'un code de calcul utilisant le logiciel ANSYS. Pendant l'investigation, quatre facteurs influençant l'effet de la masse attachée sur les fréquences propres ont été étudiés à l'aide de la

méthode *Taguchi*. Cette méthode a été utilisée pour identifier les facteurs d'influence notable sur les modes de vibration.

Le chapitre V consacré à l'étude des effets de la masse attachée sur le comportement dynamique des structures sandwichs. L'analyse du comportement vibratoire de la plaque sandwich est abordée numériquement utilisant le code de calcul ANSYS, en tenant en compte en plus des effets d'emplacement de la masse attachée sur les fréquences propres, un élargissement de l'étude paramétrique qui tient compte de plusieurs facteurs notamment, les caractéristiques mécaniques de plusieurs types d'âmes, les rapports d'épaisseur d'âme/épaisseur de la plaque (h_c/h), et les rapports longueur / largeur de la plaque (a/b).

Chapitre I

Généralités sur les matériaux composites

Chapitre I

Généralités sur les matériaux composites

1.1 Introduction

Les matériaux composites sont des matériaux modernes, créent un intérêt progressif de la part de nombreux secteurs industriels, et leurs utilisations deviennent de plus en plus répondues. Un matériau composite est un assemblage d'au moins deux composants non miscibles de structure différente et dont les propriétés individuelles se combinent et se complètent pour donner des performances globales améliorées. L'un des grands avantages des composites est que les propriétés sont ajustables en fonction des paramètres de conception, tels que la nature des fibres, la disposition des plis, la nature de la matrice, l'orientation et l'architecture des fibres. Le matériau composite peut prendre des géométries complexes et avoir de grandes dimensions ou des formes variées qui s'adapte aux besoins de la conception des modèles technologique facilement intégrable pour remplir leurs rôles en tant qu'élément principale de résistance aux chocs et vibration, ou peuvent constituer des éléments secondaires qui interviennent en tant qu'isolant acoustique ou conducteur thermique et électrique, en se distinguant par leurs propriétés physiques diverses. On peut citer à titre indicatif, l'avantage apporté par un des paramètres physique tel que le coefficient de dilatation thermique spécifique, qui peut être optimisé pour l'absorption d'énergie dans le cas des éléments en coque mince des réacteurs de fusée subissant des chocs thermiques élevés ou le cas des structures d'avions supersonique qui peuvent développer de grand déplacement sous l'effet des gradients de température élevées. Les différents types de matériaux composites sont définis en fonction de la nature de matrice qui peut être de type organique, métallique ou céramique, et les renforts peuvent également être de natures très différentes comme par exemple le carbone et le verre pour inorganiques et les aramides (Kevlar) pour ceux organiques. Donc, on peut considérer que la matrice est la phase continue de matériau composite et le renfort est la phase discontinue (figure 1.1).

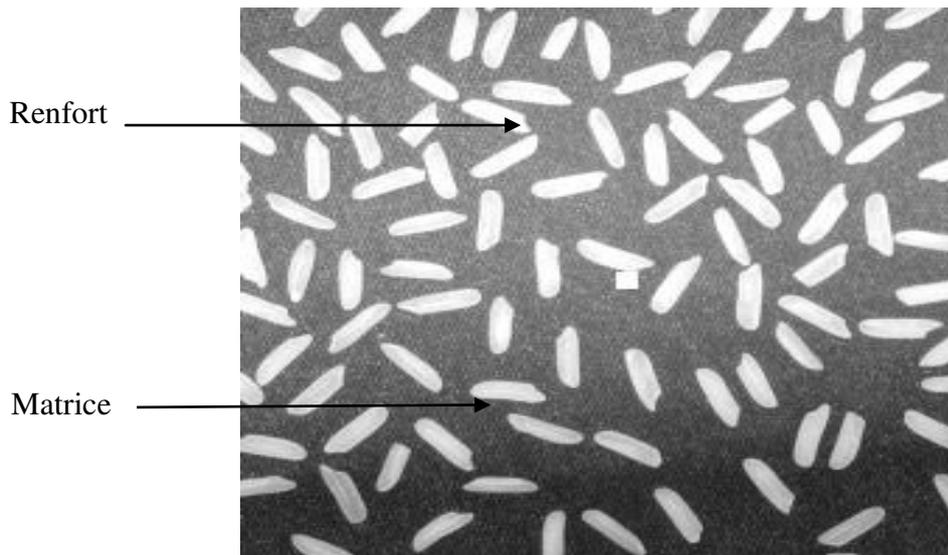


Figure 1.1 Structure d'un matériau composite

1.2 Classification des composites

1.2.1 Classification effectuée par rapport au constituant de la matrice

Les principales classes des composites comprennent les composites à matrice polymère (PMC), les composites à matrice métallique (MMC), les composites à matrice céramique (CCM) et les composites à matrices de carbone (CMC).

Le terme composite à matrice organique (OMC) est généralement présent les deux classes de composites, à savoir les composites à matrice polymérique (PMC) et les composites à matrice de carbone (CMC).

1.2.2 Classification selon la forme de renforcement

Les principales classes des composites comprennent, les composites renforcés par des fibres (continues et discontinues), les composites laminaires et les composites à particules (figure 1.2).

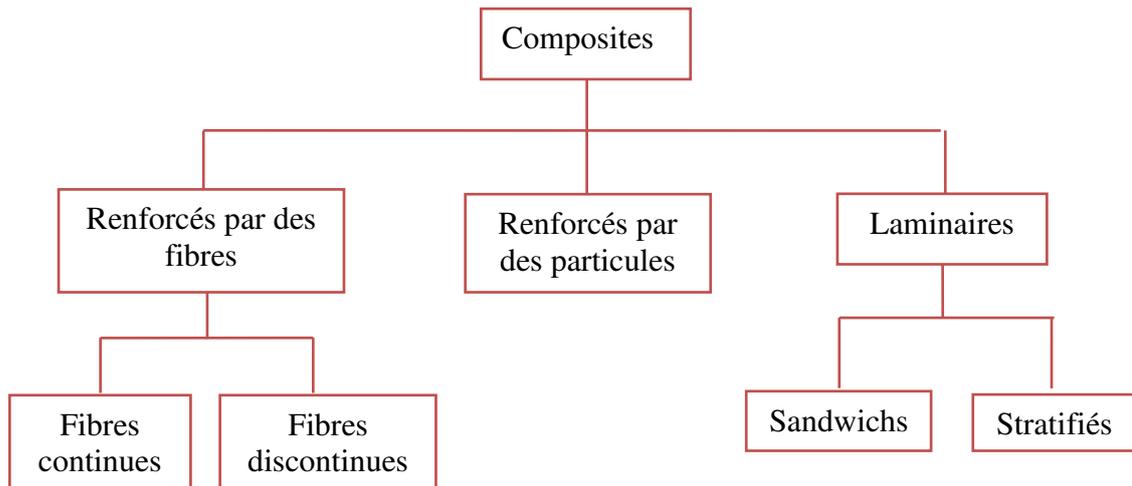


Figure 1.2 Classification de matériaux composites

Les composites renforcés par des fibres sont composés par des fibres imprégnées dans la matrice. Tous ces renforts fibreux sont inclus dans une matrice qui répartit les forces entre eux et les protège contre l'agression externe. Les renforts en fibres peuvent être orientés dans des directions spéciales ou disposés de manière aléatoire. En outre, les renforts peuvent avoir plusieurs géométries et peuvent être réalisées dans de nombreux matériaux.

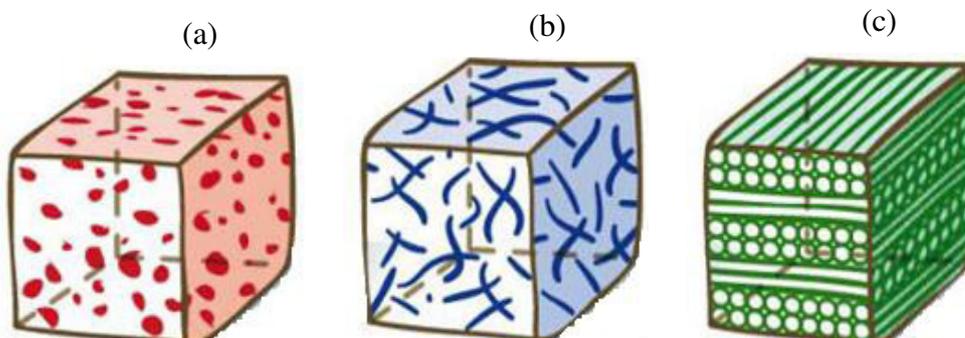


Figure 1.3 Classification des composite selon la forme des renforts

On peut distinguer trois grands types de composites classés, selon la nature de la forme des renforts, tels que :

- (a) composites renforcées par des petits particules ;
- (b) composites à fibres courtes (c.-à-d de longueur faible devant les dimensions de la pièce ;

- (c) composites à fibres longues (c.-à-d longueur comparable aux dimensions de la pièce).

1.2.3 Les composites laminaires

Les composites laminaires sont composées par des couches maintenues ensemble par une matrice. On peut citer, les structures composites stratifiés et les sandwiches.

1.2.3.1 Composite stratifié

Ils sont constitués d'un ou plusieurs renforts (sous forme de fibres longues et courtes et / ou des grains) ayant de bonnes propriétés mécaniques notamment en traction, disposés dans une matrice généralement en résine. Le rôle principal de la matrice est de transmettre les efforts mécaniques au renfort (résistance à la compression ou à la flexion). Elle permet de donner la forme souhaitée au produit réalisé. Elle assure aussi, la protection du renfort contre les différentes conditions environnementales (figure 1.4). Les différents types de matériaux composites stratifiés sont définis en fonction de la nature de la matrice qui peut être de type polymère, métallique, carbonique ou céramique.

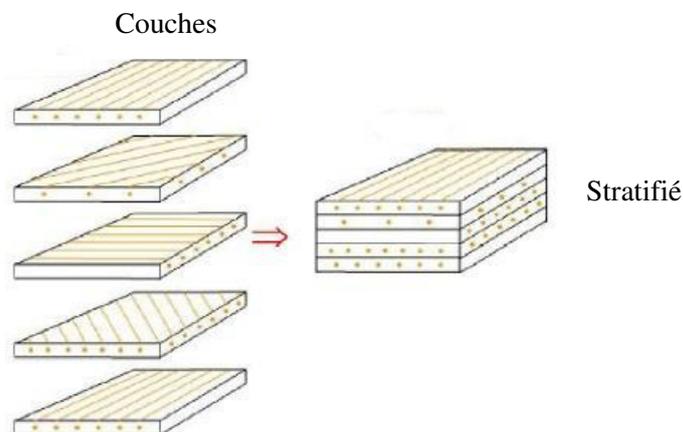


Figure 1.4 Structure composite stratifié

1.2.3.2 Composite sandwich

Les sandwichs sont des matériaux constitués en deux feuilles ou plaques (peaux) de faible épaisseur et de grande rigidité collées au droit des extrémités supérieures et inférieures d'un matériau de faible masse volumique (l'âme). Le rôle essentiel de l'âme du sandwich est la

transmission par cisaillement les actions mécaniques en interactions avec les deux peaux extérieures (figure 1.5). Le matériau sandwich est un excellent isolant thermique et acoustique. En même temps les sandwichs se distinguent par une robustesse à la flexion alliée à une légèreté économique.

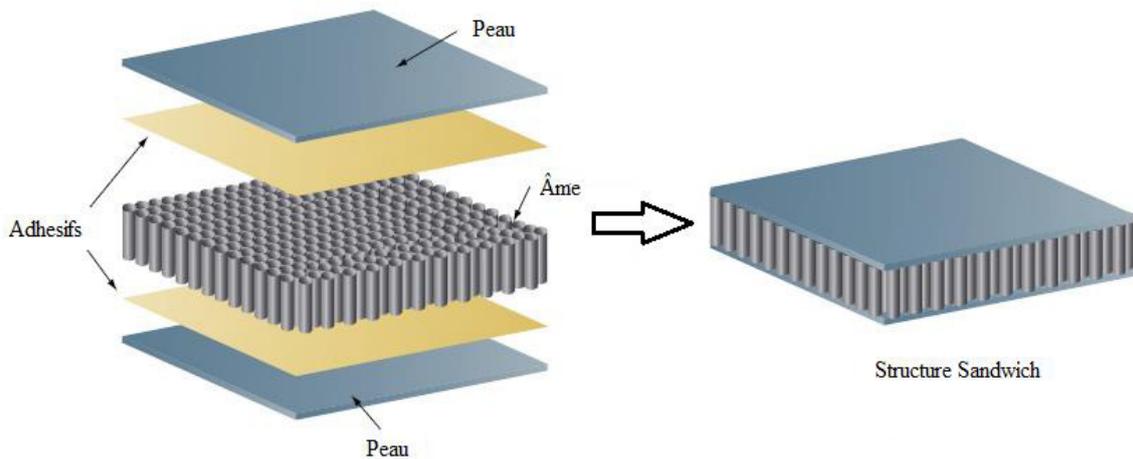


Figure 1.5 Structure sandwich [1]

1.3 Constituants de matériaux composites

1.3.1. La matrice

Le rôle principal de la matrice dans le matériau composite est de servir d'enrobage tout en assurant le collage entre les fibres, afin d'optimiser le transfert de contraintes mécaniques appliquées.

La matrice permet de donner la forme requise aux matériaux et offre quelques avantages en faveur de la tenue chimique de la structure. Le choix des matrices diffère selon, le domaine d'application des composites. Il existe plusieurs types de matrice tels que les polymères (Résines), parmi lesquelles les polyesters, les vinylesters et les époxydes. La composition chimique et les propriétés physiques de la résine, affectent la fabrication et les propriétés finales des matériaux composites. Ainsi, les variations dans la composition, l'état physique ou la morphologie d'une résine ainsi que la présence d'impuretés peuvent affecter les performances du matériau composite et leur durabilité à long terme.

1.3.1.1 Résines époxyde

Le terme époxyde est une description générale de la famille de polymères qui sont basés sur les molécules qui contiennent des groupes époxyde. Un groupe époxyde est une structure, qui contient à l'échelle atomique un cycle composé par un atome d'oxygène et deux atomes de carbone. Les époxydes sont des résines thermodurcissables polymérisables contenant un ou plusieurs groupes époxydes durcis-sables. Les époxydes sont largement utilisés dans les résines pour les pré-imprégnés et les adhésifs structuraux.

Les avantages des époxydes sont leur grande résistance, le module élevé, l'excellente adhérence, la faible rétraction, la bonne résistance chimique et leur facilité de traitement. Les principaux inconvénients sont la fragilité et la réduction des propriétés en présence d'humidité. Le coût de la résine est également plus élevé que celui des polyesters.

1.3.1.2 Résines polyester

Le terme résine de polyester thermodurcissable est un terme général utilisé pour la résine de polyester ortho-phtalique ou d'iso-phtalique. Les résines de polyester sont relativement peu coûteuses et utilisées pour les applications de traitement rapides à faible coût. La combinaison des polyesters avec certaines charges peut présenter une résistance à la rupture sous l'effet de l'arc électrique. Les résines de polyester iso- phtalique présentent une stabilité thermique et dimensionnelle et une résistance au fluage plus élevée. En général, les avantages principaux des structures composites à matrice de résine polyester renforcées par des fibres, sont son faible coût et sa capacité à être traité rapidement. Les composites fibres /polyesters peuvent être fabriquées par de nombreuses méthodes, tels que, l'empilement humide, le moulage sous presse (sous vide), le moulage par injection, l'enroulement filamentaire, la pultrusion et l'autoclavage.

1.3.1.3 Matrices en résine des phénoliques

Les phénoliques, en général, durcissent par voie de condensation avec dégazage de l'eau. La matrice résultante est caractérisée par sa résistance chimique et thermique, et par sa dureté, ainsi que par ses produits à faible dégagement de fumée et de toxicité. Ces résines ont des viscosités et poids moléculaires plus élevées. Par conséquent, elles sont

optimales pour la fabrication de structures composites de formes exceptionnelles et de courbures complexes.

1.3.1.4 Matrices en résines Polyamides

La famille de résines polyamides comprend un nombre varié de polymères qui contiennent une structure hétérocyclique aromatique. Les composites à matrice de polyamide se caractérisent par leur excellente performance dans les environnements à haute température, par leur résistance thermique, leur stabilité à l'oxydation, ainsi que leur faible coefficient de dilatation thermique. Les principales applications des polyamides apparaissent dans les structures à moteur chaud, ainsi que, les industries aérospatiales.

1.3.1.5 Matrices métalliques

Les métaux sont utilisés essentiellement pour les composites à matrice métalliques (MMC). Les métaux sont généralement des alliages traditionnels, qui ont été développés pour être utilisés dans certains types de composites. Les principaux matériaux de matrice métallique sont les alliages d'aluminium, les alliages de titane ainsi que, les alliages de fer. D'autres métaux utilisés comme matériaux de matrice, y compris le cuivre le plomb, le magnésium, le cobalt, l'argent et les superalliages. Les propriétés mécaniques des métaux dans les composites dépendent du processus de fabrication [2].

1.3.1.6 Matrice en céramique

Les céramiques utilisées comme matrices sont le carbure de silicium, l'alumine, le nitrure de silicium et divers ciments. Les propriétés mécaniques des céramiques, sont encore plus sensibles au processus de fabrication que celles des métaux. La détermination de la résistance en traction et en flexion des céramiques est difficile, en raison de leurs natures fragiles. La résistance à la flexion dépend également de la taille de l'échantillon qui est généralement beaucoup plus élevée que celle d'un spécimen de traction de même taille [3].

1.3.1.7 Matrices en carbone

Les formes des matrices de carbone résultant de divers processus de fabrication de carbone-carbone tendent à être des matériaux fragiles et plutôt faibles. Les conductivités

thermiques de ces matrices varient de très faible à élever, selon les processus de fabrication. Comme pour les céramiques, les propriétés mécaniques de carbone sont difficiles à mesurer.

1.3.2 Les renforts

1.3.2.1 Fibres de carbone et de graphite

Les fibres de carbone et de graphite sont basées sur les réseaux de couches de graphène (hexagonal) présent dans le carbone. Si les couches de graphène ou les plans s'empilent dans un ordre tridimensionnel, le matériau est défini comme un graphite. Habituellement, un traitement prolongé du temps et de la température est nécessaire pour former cet ordre, rendant les fibres de graphite plus coûteuses [4].

Le carbone et le graphite ont une capacité importante en tant que fibres de renforcement, avec une grande flexibilité pour les propriétés qui peuvent être fournies. Les caractéristiques principales des composites en fibres de carbone et de graphite imprégnées dans la matrice de polymères sont la rigidité et la résistance mécanique élevées (voir l'annexe C, tableau C.2). En outre, les fibres de carbone et de graphite peuvent conserver leurs caractéristiques mécaniques dans des conditions hostiles, telles que, les températures élevées, l'exposition aux solvants et fluides courants et aux environnements humide. Pour être utilisé comme partie d'un matériau de structure primaire, il doit également être disponible en tant que fibre continue [5].

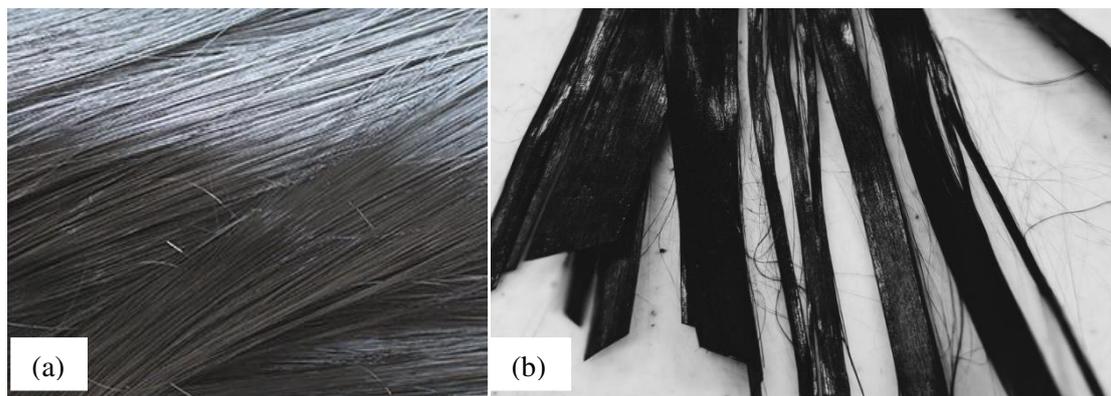


Figure 1.6 Fibres de Graphite (a), fibre de Carbone (b) [6]

Les fibres de carbone et de graphite sont caractérisées par, l'excellente propriété mécanique (traction et compression), la bonne conductibilité électrique et thermique. Pour cela, les fibres de carbone et de graphite sont les plus utilisées dans les applications de hautes performances.

1.3.2.2 Fibre d'Aramide

Au début des années 1970, *DuPont Company* a introduit l'aramide (Kevlar), une fibre organique avec un module de traction spécifique et une résistance élevée. C'est la première fibre organique à être utilisée comme renfort dans les structures composites. Aujourd'hui, cette fibre est utilisée dans diverses pièces structurelles, tels que, la balistique, les pneus, les cordes, les câbles, les vêtements de protection. Les fibres d'aramide, sont des polymères polyamides aromatiques, caractérisées par une stabilité thermique élevée et des propriétés diélectriques. En outre, les fibres d'aramide présentent une faible densité, une haute résistance à la traction et des caractéristiques exceptionnelles de rigidité (voir l'annexe C, tableau C.1).



Figure 1.7 Fibres d'aramide

1.3.2.3 Fibres de verre

Le verre en tant que matériau structurel a été introduit au début du XVIIe siècle et a été largement utilisé au cours du XXe siècle, avec l'apparition du matériau fondu qui est filé ou fileté par des filaments continus.

Les avantages des fibres de verre sont remarquables : grâce à leur coût de fibre réduit, pour leurs utilités dans certaines applications d'armement, leur résistance à la corrosion chimique ou galvanique, leurs propriétés électriques et enfin leur disponibilité sous forme de nombreux produits très variés. Le coefficient de dilatation thermique et les propriétés mécaniques par rapport aux composites renforcés par des fibres de carbone peuvent être considérés comme des inconvénients distincts



Figure 1.8 Fibre de verre

Les composite en fibre de verre présente un inconvénient en ce qui concerne les propriétés en traction par rapport aux composites renforcés en fibres d'aramide. Concernant, les avantages de composite renforcés par des fibres de verre sont apparié à la bonne tenue au cisaillement et à la compression finale avec en plus leurs bonnes capacités à l'absorption de l'humidité (voir l'annexe C, tableau C.2). Les applications des produits de composite en fibre de verre sont multiples, telles que, les dispositifs de filtration, l'isolation thermique et électrique, les réservoirs de pression, les produits structuraux pour les véhicules automobiles et de nombreux usages s'appliquent en produits militaires et aérospatiaux.

1.3.2.4 Les fibres de bore

La fibre de bore élémentaire est formée par une réaction sur un fil de tungstène chaud qui est étiré en continu à travers un réacteur contenant BCl_3 et H_3 . Le substrat de fil de tungstène réagit pour former du borure de tungstène dans le noyau. La structure cristalline du bore déposé est considérée comme amorphe en raison de sa petite taille. Le bore est disponible

sous forme de fibre cylindrique en deux diamètres nominaux, de 0,10 et 0,16 mm, avec une densité de 2,57 et 2,49 g / cm³ respectivement.

Le module de traction et la résistance de la fibre de bore sont entre 40 GPa et 3600 MPa. La conductivité thermique et la dilatation thermique sont faibles (voir l'annexe C, tableau C.3). Le coût des fibres de bore est plus élevé que les fibres de carbone.

Les fibres de bore sont trouvées presque exclusivement sous la forme de pré-impregnés en filament dans la matrice époxyde, et utilisée pour des applications aérospatiales exigeant la haute résistance et / ou la rigidité ainsi, pour le renforcement sélectif dans les articles de sport. L'utilisation la plus notable de cette fibre est les sections stabilisatrices des avions militaires F-14 et F-15.

1.3.2.5 Fibre de silice (ou de quartz)

Les fibres de silice sont produites comme le verre, par fusion, et sont utilisées essentiellement en raison de ses hautes tenues chimiques et thermiques dans les tuyères pour les moteurs de la fusée (tableau C.3).

1.3.2.6 Fibres de polyéthylène de haut module

Les fibres de polyéthylène de haut module présentent une très bonne résistance à la traction mais une mauvaise mouillabilité. Pour des structures peu sollicitées, on peut encore utiliser des fibres synthétiques courantes de polyamide ou polyester.

1.3.2.7 Les fibres naturelles

Les fibres naturelles peuvent être extraites de matériaux fibreux d'origine animale ou végétale, les plus utilisées sont les fibres de Coton, Lin, Sisal, Cactus ... etc. Les fibres naturelles possèdent des propriétés de type isotrope transverse et peuvent atteindre celles des fibres de verre. Cependant, ces fibres ont mauvaise compatibilité fibre-matrice.



Figure 1.9 Fibre naturelle de Cactus

1.3.3 Les Âmes

Le rôle principal de l'âme dans le matériau sandwich est de résister les forces de cisaillement pendant les sollicitations mécaniques. Parmi, les âmes les plus utilisées sont le nid d'abeilles, le bois et le mousse PVC.

1.3.3.1 Les mousses : sont les plus fréquemment utilisées. Les mousses sont fabriquées à partir de polychlorure de vinyle, polystyrène, polyuréthane et d'autres polymères synthétiques.



Figure 1.10 Mousse en PVC

Les propriétés mécaniques des âmes sont bonnes, elles sont thermo-formables et permettent de formées des pièces de formes complexes. L'adhérence de l'âme avec les résines est bonne et son absorption d'eau est faible. Néanmoins les mousses présentes l'inconvénient qui consiste en leur faible résistance à l'impact (figure 1.10).

1.3.3.2 Le bois : il est utilisé pour sa très bonne résistance à la compression et son isolation thermique. Le balsa est le plus utilisé comme matériau de l'âme (figure 1.11).



Figure 1.11 bois de Balsa

1.3.3.3 Le nid d'abeilles : l'âme en nid d'abeilles, est un matériau souple, généralement constitué de mailles hexagonales.

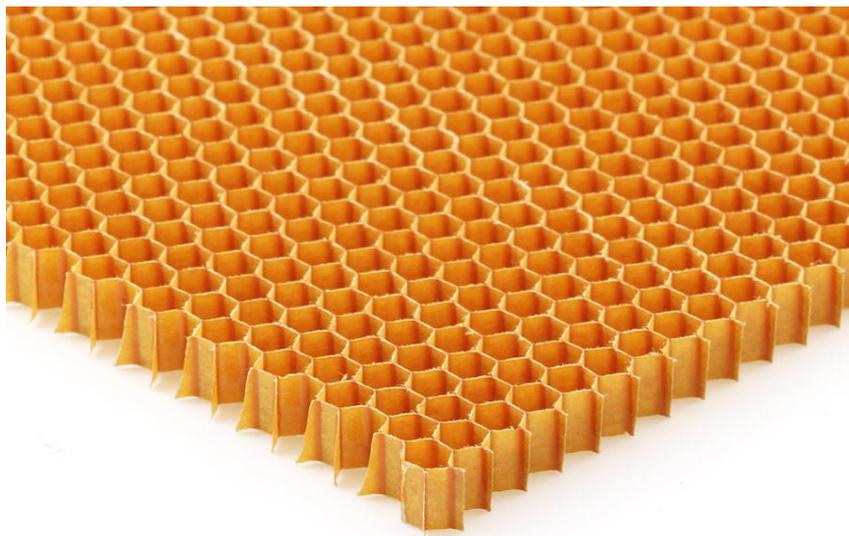


Figure 1.12 Âme en nid à abeille de Kevlar

Le nid d'abeilles est réalisé à partir de différents matériaux (Aluminium, Kevlar ...etc.). La Nida est une structure anisotrope, ses propriétés varient selon le sens transversal et longitudinal des tailles de mailles (alvéoles). Les types les plus courants sont le Nomex et le Korex qui sont fabriqués en Kevlar.

1.3.4 Les peaux

Les peaux des sandwichs sont généralement constituées de fibres (mât ou tissu) enrobées d'une matrice à base de résine. Les principales qualités recherchées des peaux sont le module d'élasticité élevé, la grande résistance à la compression et la haute résistance à la traction. On peut aussi ajouter le besoin de propriétés physique et chimique permettant entre autre, une bonne résistance à la corrosion.

1.3.5 Adhésifs

L'assemblage des peaux et l'âme est réalisé par collage par des adhésifs, qui sont généralement des résines comme par exemple les polyesters, les époxydes...etc. Le rôle des adhésifs est de transférer les sollicitations mécaniques entre les peaux et les âmes et de protéger les fibres contre l'agressivité de l'environnement extérieur.

1.4 Domaines d'application des composites

1.4.1 Applications de composites à matrice polymère

Les renforts en fibres les plus utilisés en composites à matrice polymère sont le verre et le carbone, suivis par l'aramide et le bore.

1.4.1.1 Applications de composites renforcés en fibres de verre

Les composites en fibres de verre sont essentiellement appliqués dans de nombreuses structures en aérospatiale et en défense sous leurs formes de fonctions diverses, en incluant les boîtiers de moteurs de fusées à combustible solide, les lanceurs roquettes, les revêtements de carénages d'avions, les pales de rotor d'hélicoptère, les bateaux de patrouille, les navires de chasseurs de mines, ainsi, les armures balistiques. Les applications de composite à fibre de verre sont utilisées aussi dans d'autres secteurs industriels tels que :

- 1) Les cabines de camions et remorques, les pôles de ligne de transmission, les réservoirs d'air comprimé du pompier ;
- 2) Les navires et les bateaux ;
- 3) Les équipements de l'industrie chimique telle que les réservoirs et les tuyaux, les équipements de traitement de l'eau ;
- 4) Les composants de construction, les ponts, barres d'armature en béton, ainsi, les formes concrètes ;
- 5) Les équipements de chirurgie endoscopique ;
- 6) Les produits d'isolation électrique et les pales d'éoliennes ;
- 7) Les équipements de production du pétrole et du gaz, ainsi, les réservoirs du gaz naturel comprimé.

Les applications du GFRP comprennent aussi, les bateaux ; les équipements sportifs ; les planeurs, les cabines de douche et baignoires, les composants automobiles tels que les carrosseries et les véhicules récréatifs.

1.4.1.2 Applications de composites renforcés en fibres de carbone

Les composites en fibres de carbone sont appliqués en nombreuses structures d'aérospatiales et de défense comprennent les structures d'aéronefs militaires et commerciales, les structures de véhicules aériens sans pilote (UAV), les pales de ventilateur de turbine à gaz d'aéronef, les structures d'engins spatiaux, les antennes satellites et les navires militaire. Les applications industrielles de composites renforcés en fibre de carbone conçoivent aussi :

- 1) Les réservoirs de gaz naturel comprimé et d'hydrogène, les réservoirs de carburant, réservoirs d'air comprimé pour pompiers ;
- 2) Les équipements de production du pétrole et du gaz naturel ;
- 3) Les pales d'éoliennes et les équipements de rayons X;
- 4) Les robots et autres composants de machines, tels que les rouleaux, les volants de stockage d'énergie, les antennes, les centrifugeuses d'uranium ;
- 5) Les structures de train ;
- 6) Pour la réparation et le renforcement de structures en génie civil.

Les applications de CFRP sont utilisées en équipements de sport tels que les clubs de golf, les planches à neige, les skis, les bicyclettes, les raquettes de tennis et aussi en écouteurs, meubles, les étuis d'ordinateurs portables, les composants automobiles, tels que les composants structurels et les arbres d'entraînement. Un véhicule électrique BMW i3 fabriqué en composites à fibre de carbone est prévu pour la production en série. Ceci est une étape importante pour l'application des composites.

1.4.1.3 Applications de composites renforcés en fibres de bore

Les composites à base de polymère renforcés en fibres de bore (BFRP) sont utilisés presque exclusivement dans les applications aérospatiales et défense. La première application de composite bore/époxyde a été trouvée dans les stabilisateurs du F-14. Les composites renforcés par des fibres de bore avec la matrice de polymère (BFRP) ont été également, utilisés dans plusieurs de type d'avions de combat et drones.

1.4.1.4 Applications de composites renforcés en fibres d'aramide

Les applications de composites à base de polymère renforcés en fibres d'aramide (AFRP) comprennent les armures balistiques, telles que les casques, les bouteilles sous pression d'avions commerciaux, les anneaux de confinement de moteurs d'aéronefs, les freins et autres pièces de friction, la réparation et le renforcement de structures de génie civil, les bateaux de patrouille et de services, les canots et les yachts de luxe [7].

1.4.2 Applications de composites renforcés en matrice métallique

Les matériaux commerciaux composites en matrice métallique le plus remarquable utilisant des fibres continues d'alumine à matrice d'aluminium, qui est utilisé dans les lignes de transmission. Les composites renforcés en fibres céramiques discontinues est utilisé aussi, pour l'améliorer d'alésage des cylindres et pour réduire l'usure pour les pistons de moteurs automobiles et camions. Ainsi, le titane renforcé de particules de borure de titane a été utilisé aussi, pour la fabrication des soupapes de moteur à combustion interne. L'aluminium renforcé par des particules de carbure de silicium a été utilisé pour un nombre limité d'applications structurelles aérospatiales, commerciales et optiques et il est devenu un matériau de base dans les applications électroniques et photoniques. Les applications de composites à matrice métallique sont appariées aussi, dans les industries aérospatiales et défenses telles que, les

portes d'accès de remplacement de carburant au F-16 et les ailettes ventrales, les manchons des pales du rotor d'hélicoptère. Les applications d'équipement sportif comprennent des pièces structurales et mécaniques pour bicyclettes, les bâtons de golf et les bâtons de baseball. D'autres applications comprennent les systèmes optiques et les composants mécaniques d'automobiles de course de haute performance [8].

1.4.3 Applications de composite renforcés en matrice de carbone

Le type le plus important de composite à matrice de carbone est le carbone-carbone. Les composites carbone-carbone sont bien établis dans les applications aérospatiales, défense et commerciale. Les freins d'avion en carbone-carbone sont largement utilisés, qui permettent des gains de poids significatifs par rapport à l'acier. Il existe aussi d'importantes applications industrielles de composites carbone-carbone, y compris des équipements de fabrication de verre.

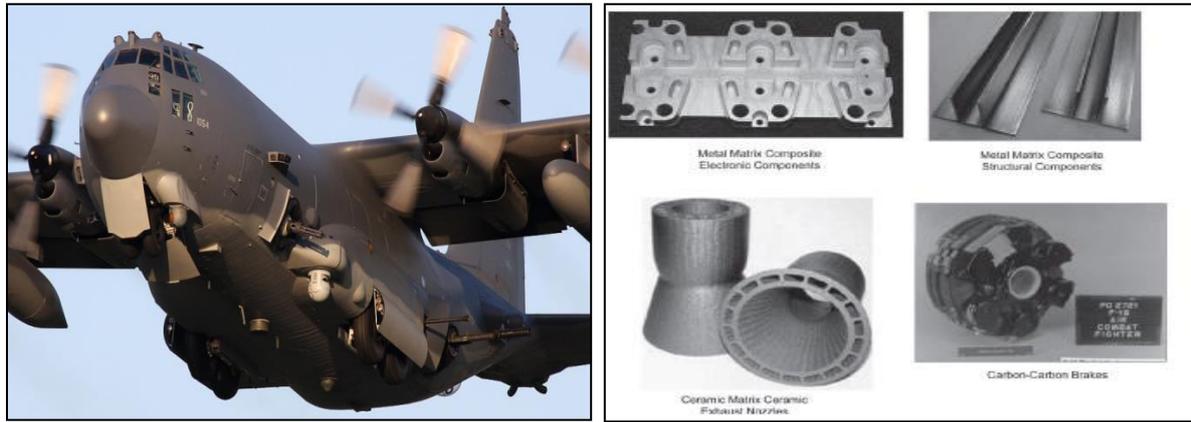
Le carbone-carbone est également utilisé pour la fabrication des freins et les embrayages des voitures de course et des motocyclettes.

1.4.4 Applications de composite renforcés en matrice de céramique

Les matrices de carbure de silicium renforcées en fibre de carbure de silicium (SiC / SiC et C / SiC, respectivement) ont été utilisées dans les volets de moteurs d'avions militaires, où elles fournissent une réduction significative du poids total.

L'utilisation de composites à matrice céramique économise le poids de composants allant jusqu'à 60% par rapport aux autres alliages, et les économies de carburant prévues sont de 15%.

L'alumine renforcée à la truffe de carbure de silicium (oxyde d'aluminium) est largement utilisée dans les outils de coupe. Ainsi que, l'alumine renforcée de particules de carbure de silicium a été utilisée aussi, pour fabriquer les pièces des pompes à boues abrasives [8].



(a) Aéronautique

(b) Secteur industriels



(c) Génie civil



(d) Équipements de sport

(e) Automobile et transport [7]

Figure 1.13 Domaines d'applications de matériaux composites

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous donnons un aperçu général sur les matériaux composites. Nous considérons ci-dessus les propriétés des renforts, les matériaux constituant les matrices, les différents types de composites et leurs applications courantes. Nous constatons que les composites sont des matériaux importants qui sont maintenant largement utilisés, non seulement dans l'industrie aérospatiale, mais également dans un grand nombre croissant d'applications d'ingénierie mécanique commerciales, telles que les moteurs à combustion interne, les composants de machines, pour le gestion thermique et l'emballage électronique, les structures d'automobile, les composants mécaniques, tels que les freins, les arbres d'entraînement, les volants d'inertie, les réservoirs et les récipients sous pression.

À l'avenir, les composites seront fabriqués encore plus selon, un processus de conception intégré résultant de la construction optimale en fonction de paramètres tels que la forme, la masse, la résistance, la rigidité, la durabilité, les coûts, ...etc. Les outils de conception de composites doivent pouvoir montrer aux clients l'influence de différentes conceptions sur chacun de ces paramètres.

Chapitre II

Vibration des matériaux composites multicouche

Chapitre II

Vibration des matériaux composites multicouche

2.1 Introduction

L'étude vibratoire est importante pour prédire le comportement des structures sous chargements dynamique. Les changements de mesure dans les caractéristiques vibratoires peuvent être utilisés pour détecter, localiser et quantifier les endommagements dans les structures composites. L'analyse modale peut être utilisée comme une technique non destructive pour l'évaluation de la rigidité des structures. Ainsi, l'analyse modale est également nécessaire pour éviter la résonance des structures sous chargement dynamique.

Plusieurs études des chercheurs dans le domaine lié à la vibration des composites, fait l'objet d'un examen critique afin de fournir des informations de base sur les problèmes à prendre en compte dans les travaux de recherche et de souligner l'importance et la convenance de la présente étude. La plupart d'entre eux se limitent à des résultats théoriques en adoptant diverses méthodes de calcul. En outre, les études expérimentales de vibration et l'analyse modale des plaques composites sont moins nombreuses dans les travaux de littératures.

2.2 Comportement dynamique des stratifiés composites

Le comportement mécanique des stratifiés composites a été étudiée en détail pendant de nombreuses années. L'étude du comportement vibratoire des structures composites avec différentes techniques d'estimation ont été utilisées dans plusieurs recherches, afin de calculer les fréquences de résonance et les facteurs d'amortissement pour les premiers modes de vibrations en différentes conditions aux limites et de chargements. Dans ce contexte, Adams et Bacon (1973) [9] ont mis au point un modèle théorique pour la prédiction de l'amortissement sous l'effet de l'orientation des fibres ainsi que, la géométrie des échantillons des stratifiés. Le modèle développe une tendance d'amortissement dans lequel la dissipation d'énergie peut être décrite comme des dissipations d'énergétique séparables associées aux composants de contrainte individuelle. Les résultats obtenus montrent que le cisaillement est le facteur principal qui donne un amortissement élevé. Cawley et Adams (1978) [10] ont

étudié les modes propres des plaques carrées d'aluminium et des composites avec différentes séquences d'empilements (orientations de couches) ayant les conditions aux limites libre-libre. Les auteurs ont utilisé dans son travail les deux approches théorique et expérimentale. Crawley (1979) [11] a utilisé la méthode expérimentale pour la détermination des fréquences propres et les déformées modales des plaques et coques de composites graphite/époxyde et composite hybrides graphite/époxyde-aluminium. L'auteur a utilisé un excitateur électromagnétique pour la réalisation des essais. Les résultats obtenus ont été comparés avec ceux obtenus par la méthode des éléments finis. Lin et al. (1984) [12] ont utilisé le zoom-FFT, qui a basé sur la technique de test transitoire, afin de déterminer les fréquences propres et les coefficients d'amortissement spécifique de composite à matrice polymère renforcée en fibres de carbone (CFRP) et de composite à matrice polymère renforcée en fibres de verre (GFRP). Les résultats obtenus sont comparés par les valeurs obtenues à l'aide du logiciel de calcul basé sur la méthode des éléments finis. Chai (1994) [13] a présenté une méthode approximative basée sur l'approche de Rayleigh-Ritz, pour déterminer les fréquences propres des stratifiés composites en vibration libre, en fonction de différentes orientations de couches et conditions aux limites.

Maiti et Sinha (1996) [14] ont utilisé la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur pour développer un modèle des éléments finis (FEM), étudier la vibration libre en flexion et la réponse vibratoire aux chocs dans les plaques composites stratifiés épaisses. Chen et Chou (1999) [15] ont mis au point une méthode d'analyse élastodynamique unidirectionnelle (1D) pour l'analyse vibratoire des composites symétriques tissés. Harras et al. (2002) [16] ont exposé un modèle théorique basé sur le principe de l'analyse spectrale d'Hamilton pour étudier la vibration libre non linéaire de composite à matrice polymère renforcée par des fibres de verre (CFRP) et de poutres hybrides en matériaux composites. L'effet de la non-linéarité de la vibration sur les fréquences de résonance, la déformée du mode fondamental et les schémas de contrainte de flexion associés aux grandes amplitudes ont été étudiés.

Les vibrations libres de plaques composites stratifiées carrées ayant des couches croisées pour différentes conditions aux limites ont été investiguées par Aydogdu et Timarci (2003) [17]. Les auteurs ont utilisé la méthode de Ritz pour la détermination des fréquences propres. Les résultats numériques obtenus pour différents rapports longueur-épaisseur des plaques et

différents arrangements de matériaux ont été représentés et comparés avec les travaux scientifiques disponibles dans la littérature. Ferreira et al. (2005) [18] ont introduit des études analytiques de vibration libres des plaques composites stratifiés par l'utilisation de la théorie de déformations en cisaillement du premier ordre (FSDT). Les fréquences propres ont été calculées pour différentes plaques et comparées avec certains résultats disponibles dans la littérature. Berthelot (2006) [19] a modélisé le taux d'amortissement des composites stratifiés par l'utilisation de la méthode de Ritz. Les résultats obtenus ont été montrés que le modèle permet d'évaluer les coefficients d'amortissement de matériaux stratifiés composites unidirectionnels. Tsai et Chang (2009) [20] ont développé un modèle analytique bidimensionnel pour caractériser les facteurs d'amortissement. Les résultats obtenus sont comparés par des valeurs obtenues expérimentalement et avec les travaux de Ni et Adams [21], et Adams et Maheri [22].

Xiang et Wang (2009) [23] ont analysé la vibration libre de plaques composites stratifiés symétriques par l'utilisation de la théorie trigonométrique et la fonction de base radiale multiquadratique inverse. Maheri (2010) [24] a utilisé des prédictions théoriques des réponses modales de plaques multicouches carrées, afin d'étudier les variations de l'amortissement modal pour différentes conditions aux limites. Khan et al. (2011) [25] ont étudié les caractéristiques d'amortissement des nanocomposites et les composites à matrice polymère renforcés par des fibres de carbone (CFRP) contenant des nanotubes de carbone en parois multiples (NTC). Les auteurs ont utilisé dans l'investigation des tests de vibratoires libres et forcés. Plusieurs paramètres de vibration ont été variés pour la détermination d'amortissements tels que les différentes amplitudes, les fréquences propres et les modes de vibration. Altunsaray et Bayer (2013) [26] ont examiné numériquement les effets de séquences d'empilement (orientations d'angles des couches) dans les composites carbone/époxyde. Des plaques minces rectangulaires pour différentes conditions aux limites ont été étudiées. Les résultats obtenus en flexion statique et en vibration libre ont été comparés avec ceux obtenus par la méthode des éléments finis à l'aide du logiciel ANSYS. Fazzolari et al (2013) [27] ont développé une méthode exacte pour évaluation de la rigidité dynamique en l'utilisant la théorie de la déformation en cisaillement d'ordre supérieur. Les auteurs ont examiné les effets de plusieurs paramètres significatifs tels que les rapports d'épaisseurs, les rapports d'orthotropes, le nombre de couches, les séquences d'empilements et les conditions aux limites sur les fréquences propres et les formes du mode vibratoire.

Mlyniec et al (2014) [28] ont étudié l'influence de l'épaisseur du stratifié, les séquences d'empilement et l'effet thermique sur le comportement dynamique des stratifiés carbone/époxyde. Les résultats obtenus montrent que l'interface fibre-matrice et les propriétés de la matrice affectent l'amortissement modal.

Plusieurs études d'analyse vibratoire des structures sandwichs sous divers arrangements et conditions aux limites sont présentées dans la littérature. En conséquence, le premier travail consacré à la détermination des fréquences propres des plaques sandwich par la méthode expérimentale est présenté par Raville et Ueng [29] en 1967. L'étude montre que les résultats obtenus expérimentalement sont semblables avec ceux obtenus théoriquement. Une nouvelle approche analytique de vibration libre pour l'optimisation de séquences d'empilement au niveau de peaux pour les plaques sandwichs est présentée par Much et Zuchara (1998) [30], les résultats du modèle proposé, ont été comparés avec les résultats obtenus par l'utilisation du logiciel VISAI FEM. Le comportement dynamique de plaques sandwichs délaminiées partiellement à l'interface peau/âme est étudié par Vyacheslav et al (2010) [31]. L'étude est basée sur l'influence de la taille et l'emplacement et les types de délaminage afin de déterminer les paramètres modaux des plaques sandwich endommagées pour différentes conditions aux limites. Les résultats de l'analyse dynamique montrent que les conditions aux limites et le mode de délaminage sont les paramètres les plus affectant le comportement dynamique des plaques sandwichs. Kheirikhah et al. (2015) [32] ont étudié les caractéristiques vibratoires libres des plaques sandwichs ondulées ayant deux peaux composées en deux couches et l'âme en mousse. Les effets de divers facteurs tels que, la forme de l'ondulation, les conditions aux limites, la stratification composite et les rapports d'épaisseurs de la structure sur le comportement dynamique sont estimés par la méthode des éléments finis à l'aide du logiciel de calcul ANSYS. La comparaison des résultats numériques obtenus avec les valeurs disponibles dans les littératures démontre la précision du modèle proposé. LI Hua-dong et al. (2015) [33] ont analysé les vibrations libres de plaques sandwichs cylindriques et rectangulaires ayant des peaux isotropes et l'âme graduée fonctionnellement. Les effets de la distribution des propriétés mécaniques de l'âme graduée fonctionnellement, les rapports des épaisseurs et les rapports du rayon/longueurs sont également examinés. Une nouvelle formulation traitable de la théorie de poutre en zigzag est utilisée pour étudier la vibration libre des poutres sandwich ayant une âme souple par Khdeir et Aldraihem (2016) [34] L'analyse et les solutions présentées sont vérifiées par la comparaison avec les résultats

obtenus expérimentalement, analytiquement et par les résultats numériques disponibles dans les littératures. Les résultats obtenus montrent que les solutions analytiques des fréquences propres peuvent être utilisées comme repères pour les solutions approchées telles que Rayleigh-Ritz, les méthodes des éléments finis et d'autres méthodes numériques. J.S Moita et al. (2017) [35] ont développé un modèle des éléments finis pour l'analyse vibratoire des structures FGM (Functionally Graded Material), et les structures sandwichs avec amortissements passifs, composé par une âme viscoélastique souple entre les couches de FGM.

La performance vibratoire des poutres sandwichs avec des âmes hybrides en nid d'abeilles a été étudiée par Zhi-jia Zhang et al. (2017) [36]. La méthode d'homogénéisation a été utilisée pour obtenir la rigidité macroscopique équivalente des âmes en nid d'abeilles. Les auteures ont utilisé la méthode des éléments finis et les techniques d'analyse modale pour prédire les caractéristiques de la vibration de ces âmes. Keivan Torabi et al. (2017)[37] ont analysé la vibration libre en flexion et le battement supersonique pour les plaques trapézoïdales composées en deux peaux isotropes homogènes et d'âme orthotrope en nid d'abeilles. Les fréquences propres et les déformées propres des modes sont obtenues numériquement. Le battement et l'effet de divers paramètres sur le comportement vibratoire de la plaque sont étudiés. La vibration libre des plaques sandwich ayant une âme en treillis composite est étudiée par J. E. Chen et al. (2017) [38]. Les fréquences propres des plaques sandwichs sont calculées par l'utilisation de la théorie classique du stratifié, la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre, la théorie classique de déformation en cisaillement du troisième ordre de Reddy, et la théorie de Zig-Zag.

2.3 Comportements dynamiques des composites stratifiés et sandwichs en présence de masses ajoutées

Dans nombreuses applications d'ingénierie des sous-structures sont ajoutées aux structures principales, qu'elles sont fabriquées en matériaux composites pour plusieurs applications industrielles. En outre, les masses attachées affectent le comportement mécanique de ces structures notamment, le comportement vibratoire [39-41]. Donc, la détermination des propriétés de vibrations des plaques composites dans diverses conditions de chargements en présence masse attachée prend une importance importante.

Les recherches basées sur le comportement vibratoire des matériaux composites et des plaques isotropes sous l'effet des masses attachées concentrées et distribuées à des localités différents sous divers séquences d'empilements et conditions aux limites sont très limitées dans la littérature . Dans ce contexte, la vibration libre de la plaque stratifiée composite antisymétrique simplement supportée avec une masse attachée a été présentée par Alibeigloo et Kari (2009) [42]. Le problème est résolu en servant la théorie de déformation en cisaillement du troisième ordre. Les résultats obtenus montrent que les fréquences propres dépendent de la valeur de la masse attachée. Malekzadeh et Sayyidmousavi (2009) [43] ont utilisé la méthode des éléments finis (MEF) à l'aide du logiciel ANSYS, pour analyser la vibration libre des plaques sandwichs rectangulaires ayant des âmes flexibles, avec et sans masse attachée. La masse attachée est distribuée sur 20% de la surface de la peau supérieure. Les résultats montrent que la masse attachée réduit les fréquences de la plaque sandwich. S.M.R. Khalili et al (2011). [44] ont étudié les vibrations libres de coque composite ayant des couches croisées, sans et avec masse attachée régulièrement distribuée sur la surface de la plaque, en fonction de différents rapports tels que, l'épaisseur de coques et l'épaisseur des masses attachées. La masse attachée est distribuée sur 20% de la surface de la peau supérieure. Les auteurs utilisent la théorie de déformation d'ordre supérieur. Les résultats montrent que la masse attachée réduit les fréquences de la plaque sandwich. Un corps rigide attaché aux centres des stratifiés composites cylindriques épais ont été étudiés en vibration libre par Hosseini-Hashemi et al. (2012) [45]. Les résultats obtenus confirment que l'étude est en excellent accord avec celles de la modélisation 3-D par la méthode des éléments finis (FEM).

L'étude expérimentale et la simulation numérique du comportement vibratoire libre d'un cylindre en matériau composite en treillis-âme renforcé par des fibres de carbone avec masse attachée (LSC) sont réalisées pour différentes conditions aux limites par Y. Han et al (2015). [46]. Les résultats trouvés, prouvent que les masses attachées affectent les modes de vibration et réduisent les fréquences propres. Metin Aydogdu et Seckin Filiz (2016) [47] ont utilisé la méthode de Ritz pour étudier la vibration de plaques composites stratifiés symétriques avec masse attachée. Les effets de divers facteurs sur les fréquences tels que l'orientation des fibres, le nombre de couches et la position de la masse attachée ont été étudiés.

2.4 Analyse modale expérimentale

L'analyse modale expérimentale permet de décrire une structure en terme de caractéristiques vibratoires propres (fréquences propres, d'amortissement modal et de déformés propres) et de déterminer tous les paramètres modaux suffisants pour formuler un modèle dynamique réel. La détermination des paramètres modaux d'un système mécanique se réalise à travers de l'analyse de la fonction de transfert appelée fonction de réponse fréquentielle. Ainsi que, à partir d'une simple fonction de réponse fréquentielle. On peut observer des faiblesses structurelles dynamiques et visualiser les déformées propres associées [48, 49].

2.4.1 Fréquences de résonance

La résonance est un phénomène qui se produit lorsqu'un système oscillant est excité par un signal périodique dont la fréquence est égale à une fréquence propre du système. En chaque mode de vibration correspond à une fréquence de résonance l'énergie absorbée par le système est maximale. La réponse dynamique peut être réduite à un ensemble de modes discrets (figure 2.1).

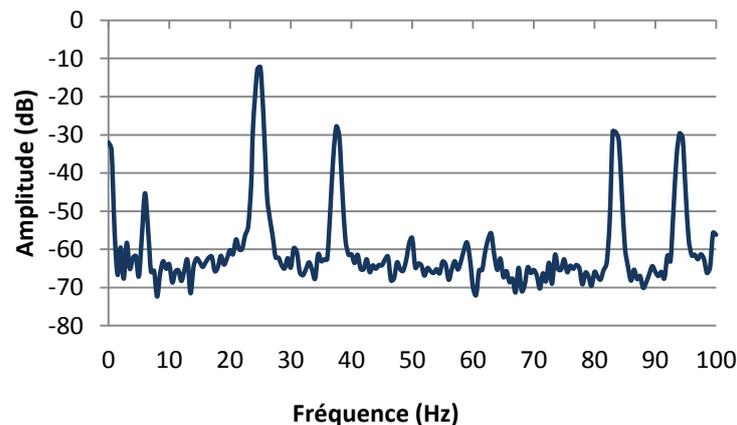


Figure 2.1 Exemple de réponse dynamique d'une structure composite

2.4.2 L'amortissement

La réponse vibratoire avec excitation, nécessite de décrire les caractéristiques de l'amortissement mécanique. On peut définir l'amortissement comme la capacité d'un matériau

à absorber les vibrations par friction et à convertir l'énergie mécanique absorbée en chaleur. Mais en réalité, les vibrations des matériaux sont amorties plus vite que ce qui peut s'expliquer par la perte d'énergie due aux frottements externes. Il est possible de prendre en compte le comportement viscoélastique d'un matériau. L'amortissement visqueux est un paramètre proportionnel à la fréquence. L'amortissement structural dépend de la nature du matériau, il est dû aux frictions internes du matériau. Donc, comme la dissipation d'énergie dépend du système mécanique, il est difficile de définir un modèle qui représente précisément cet amortissement.

Il est possible d'introduire les coefficients d'amortissements modaux pendant le calcul de la réponse dynamique de structure auprès les études utilisant l'analyse modale de vibration réelle.

Il existe de nombreuses méthodes pour mesurer l'amortissement. Cependant, il peut être évalué à partir de la réponse temporelle et fréquentielle de la structure.

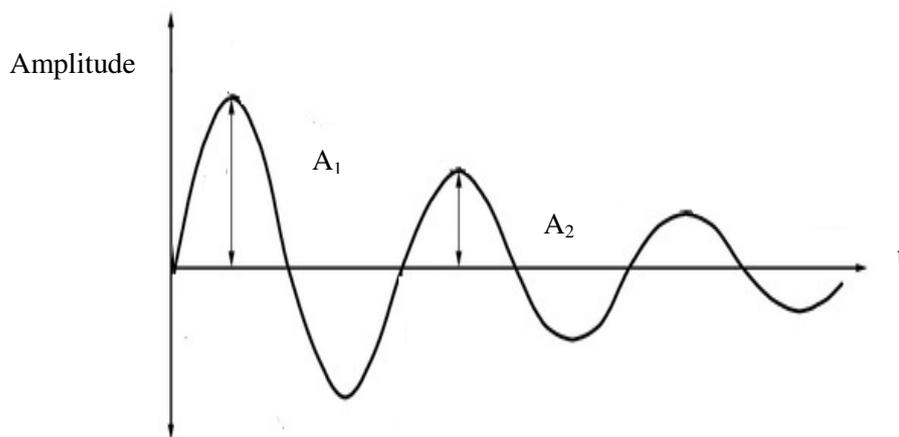


Figure.2.2 Réponse temporelle

Un système à 1 degré de liberté, soumis à une force impulsionnelle à $t = 0$, donnera une réponse de déplacement illustrée sur la figure 2.2. La mesure de l'amortissement (ζ) est réalisée sur le décrétement logarithmique (δ) qui est défini par l'équation [50] :

$$\delta = \ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right) \approx 2\pi\zeta \quad (2.1)$$

L'identification de l'amortissement à partir de la réponse fréquentielle (figure 2.3) peut être faite par la méthode de la largeur de la bande à -3dB suivant l'équation :

$$\xi = \frac{f_2 - f_1}{2f_0} \quad (2.2)$$

Une fois la pulsation de résonance f_0 déterminée, par son maximum amplitude A_{max} , nous recherchons les pulsations f_1 et f_2 pour lesquelles les amplitudes du module de la réponse en fréquence (FRF) sont égales à $A_{max}/\sqrt{2}$.

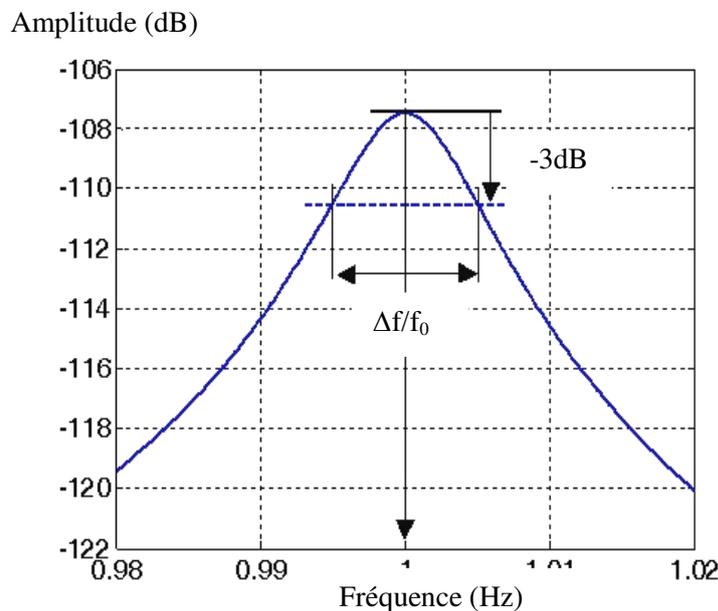


Figure 2.3 Une résonance avec largeur de la bande à -3dB

$\Delta f = f_2 - f_1$ est appelée bande passante à -3 dB (ou largeur de bande à -3 dB).

2.5 Motivation et objectif de la présente étude

Aujourd'hui, les applications et les développements de composites stratifiés et sandwichs dans tous les domaines de l'ingénierie se déroulent à un rythme plus rapide. En outre, plusieurs résultats d'études et d'innovations au cours des dernières décennies sont basés sur les composites. Ainsi, les matériaux composites sont développés pour avoir de meilleures propriétés mécaniques que celles obtenues par les matériaux métalliques. Parmi, les

caractéristiques qui peuvent être recherchées pour avoir une meilleure stabilité mécanique, on trouve le comportement dynamique vibratoire.

Nombreuses applications d'ingénierie telles que les systèmes d'aviations et de satellites, des sous-structures (masse attachée) sont ajoutées aux structures principales, ces structures sont fabriquées généralement, en matériaux composites. Les masses attachées aux composites affectent la réponse dynamique principale de ces structures. On effectue, il est important de comprendre les propriétés de vibration des plaques composites dans diverses conditions de chargements en présence de la masse attachée, de manière à pouvoir être utilisé en toute sécurité. Dans ce contexte, nos travaux de recherche sont consacrés à l'étude du comportement dynamique des plaques composites stratifiées et sandwichs en présence et aussi, en absence de masse attachée. Les résultats numériques basés sur la méthode des éléments finis (FEM) des stratifiés composites sont comparés avec les résultats obtenus expérimentalement en fonction de différents chargements.

Les résultats obtenus par le modèle présenté par la méthode des éléments finis (FEM) pour les plaques sandwichs sont comparés aussi, avec les valeurs calculées analytiquement et par autres méthodes des éléments finis (FEM), trouvés dans la littérature. Donc, la présente étude peut être subdivisée en deux parties comme ci-dessous.

La première partie du travail a été consacrée à l'étude des effets de différents facteurs sur le comportement dynamique des stratifiés. Ces facteurs sont :

- les positions de la masse attachée (P1, P2, P3 et P4) ;
- le nombre de couches (8, 16, 24 et 32) ;
- les rapports du poids de masse attachés ($M/6$, $M/3$, $M/2$ et $2M/3$, où M est d'environ 150 g et représentent le poids de la plaque contient 8 couches) ;
- les séquences d'empilement ($[\pm 20]_{ns}$, $[\pm 40]_{ns}$, $[\pm 60]_{ns}$, $[\pm 80]_{ns}$).

La méthode de *Taguchi* est utilisée pour définir les différents niveaux de facteurs optimaux, afin de minimiser les effets de la masse attachée sur le comportement vibratoire des plaques stratifiées composites. En d'autres termes, grâce à la méthode TAGUCHI on a observé une présélection des choix optimaux en déduisant respectivement suivant le numéro modal choisit.

La deuxième partie présente une investigation sur les effets de la masse attachée aux composites sandwichs sur les fréquences propres en fonction de plusieurs facteurs. Ces facteurs sont :

Les positions de la masse attachée : L'analyse est effectuée pour différentes positions de masse attachée ($P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ et P_8). Les masses sont posées au milieu de la direction (y) et espacées par 12.5 mm suivant la direction (x).

Les caractéristiques mécaniques des âmes : L'analyse est effectuée pour trois modes de vibration, pour différents types d'âmes (HEREX C70.40, HEREX C70.55, HEREX C70.75, HEREX C70.90 et HEREX C70.130) ayant des caractéristiques mécaniques différentes.

Les rapports d'épaisseur d'âme/épaisseur de la plaque (h_c/h) : L'analyse est effectuée pour différents rapports d'épaisseur d'âme/épaisseur de la plaque ($h_c / h = 0,52 ; 0,58 ; 0,52 ; 0,64 ; 0,7 ; 0,76 ; 0,82$ et $0,88$).

Les rapports longueur / largeur de la plaque (a/b) : L'étude a été faite pour différents rapports de longueur/ largeur de la plaque ($a/ b = 1 ; 1,25 ; 1,5 ; 1,75 ; 2 ; 2,25$ et $2,5$).

Les plaques sandwich étudiées soumises à une masse attachée au son centre, égale 50 gramme.

Chapitre III
Évolution des théories pour la modélisation des composites multicouches

Chapitre III

Évolution des théories pour la modélisation des composites multicouches

3.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à l'acquisition des connaissances théoriques nécessaires pour comprendre notre travail de recherche théorique. Dans un premier temps, on présente quelques notions sur les approches et les théories servant à analyser le comportement des structures composites multicouches stratifiés et sandwichs. Dans ce contexte, il est nécessaire de présenter les formulations énergétiques pour introduire les méthodes de calcul approché. En outre, les approches de formulations directes ne sont pas suffisantes pour le cas de calcul en composites. Donc, les différentes approches théoriques sont améliorées pour prévoir les réponses statiques et dynamiques, des structures en divers chargements et conditions aux limites. Selon, lesquelles on peut classer quelques modèles théoriques, tels que, les modèles tridimensionnels (3D) et les modèles bidimensionnels (2D).

3.2 Modèles tridimensionnels (3D)

L'approche tridimensionnelle intéresse à donner des résultats plus précis, utilisés particulièrement comme référence. La méthode de calcul 3D nécessite un coût cher en terme de temps de calcul et en capacité de mémoire de stockage de la base de données nécessaires qui est plus importante que celle dans l'analyse par la méthode bi-dimensionnelle (2D) [51-53]. De plus, les conditions aux limites et plusieurs géométries sont difficiles à obtenir dans la majorité des cas par l'approche tridimensionnelle 3D.

3.3 Modèles de plaques bidimensionnelles (2D)

L'utilisation de modèles bidimensionnels (2D) à ce jour est préférable dans la plupart des applications liées à l'analyse des structures multicouches. En fait, ces méthodes sont plus efficaces que les modèles de calculs 3D en termes de simplicité observée dans la modélisation et les efforts de calcul fournis. Parmi ces modèles, on distingue deux familles peuvent être utilisées (Figure.3.1) :

- approche monocouche équivalente (ESL) ;
- approche par-couche (LW).

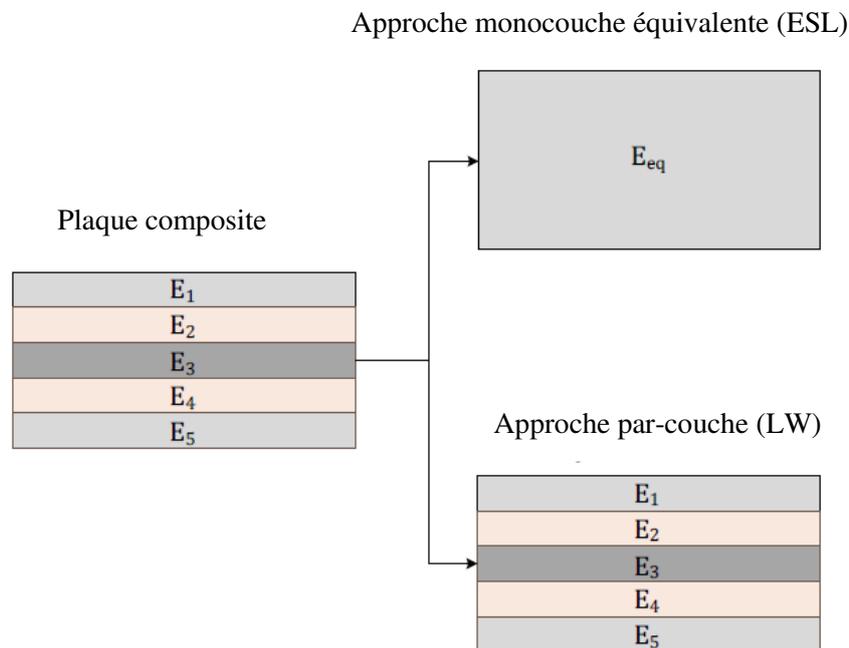


Figure 3.1 Modélisation schématique d'un stratifié par le modèle monocouche et Layer-Wise

L'approche monocouche équivalente, est la plus choisie par les chercheurs, dans cette approche la plaque multicouche orthotrope est étudiée comme une seule couche isotrope équivalente par l'utilisation de la technique d'homogénéisation [54-57]. Les théories du modèle monocouche équivalent fournissent une description précise de la réponse globale du stratifié. Les principaux avantages de ces modèles (ESL) sont leur simplicité et leur coût de calcul qui est moins cher, dû au petit nombre de variables dépendantes.

On peut distinguer trois théories bien connues, pour cette approche à savoir :

- Théorie classique des plaques stratifiées (CLPT) ;
- Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) ;
- Théorie d'ordres supérieurs (HSDT).

3.3.1 Théorie classique des plaques stratifiées

La théorie classique de plaque est la plus simple parmi les autres théories. Elle est introduite par Kirchhoff [58] en 1850, puis elle a été améliorée par Love [59]. L'application de cette théorie est valable uniquement pour les coques et les plaques minces. L'hypothèse

principale de la théorie CLPT est que les lignes normales au plan médian de déformation restent droites et perpendiculaires à la surface moyenne après la déformation (Figure 3.3). Cette hypothèse implique la négligence des déformations dues au cisaillement transverse, ainsi les déformations et les contraintes normales.

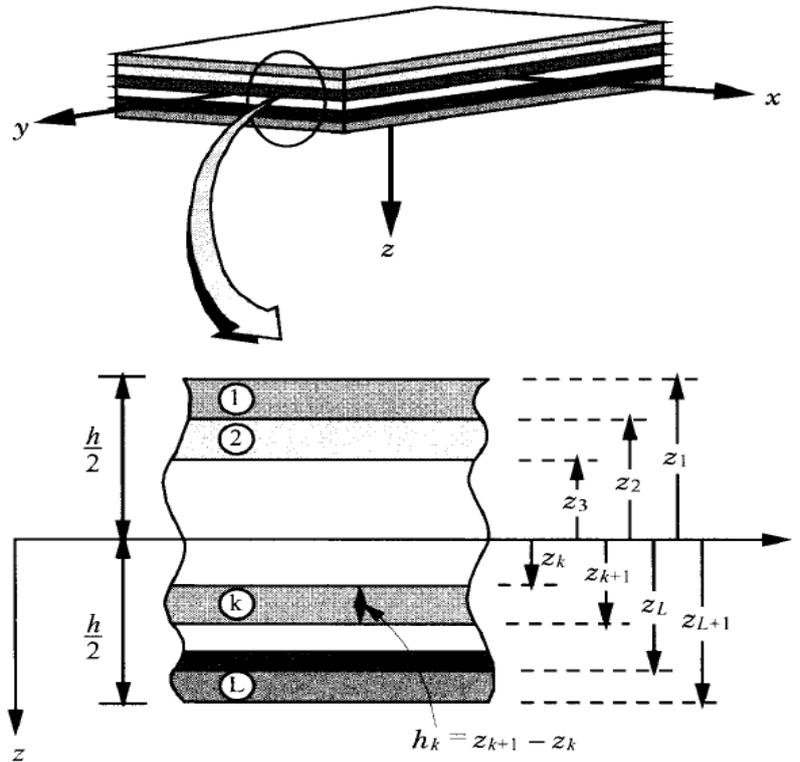


Figure 3.2 Système de coordonnées et numérotation des couches utilisées pour une plaque stratifiée [60]

Les déplacements pendant cette théorie peuvent s'écrire d'une manière linéaire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Où u_0, v_0 et w_0 sont les composantes de déplacements dans le plan moyen.

$w_{,x}$ et $w_{,y}$ sont les rotations dues à la flexion (sans cisaillement) dans les deux directions x et y .

Les hypothèses impliquent que le déplacement transversal est indépendant de la coordonnée transversale (ou épaisseur) et que la déformation transversale normale ϵ_{zz} est nulle et les déformations de cisaillement transversales $\epsilon_{xz} = 0, \epsilon_{yz} = 0$ sont nulles.

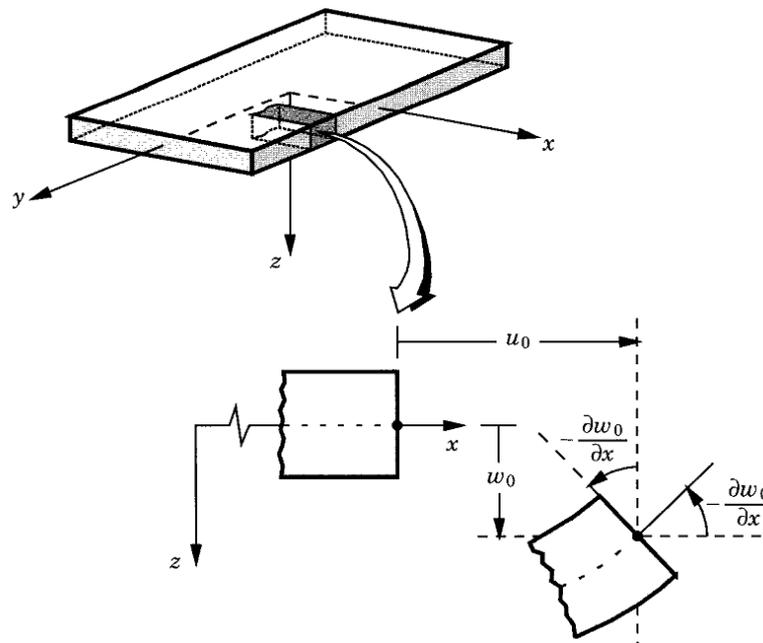


Figure 3.3 Géométries déformées et non-déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Kirchhoff [60]

3.3.1.1 Champ de contraintes et de déformations

La théorie classique des stratifiés stipule que le champ des déformations se déduit du champ des déplacements pour une approximation du premier ordre.

Pour les petites déformations et les rotations modérées, les relations contrainte-déplacement prennent la forme (3.2) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Où :

u, v, w sont les composantes du vecteur déplacement en un point M .

u_0, v_0, w_0 sont les composantes du point M dans le plan $(0, x, y)$.

Cette théorie fait l'hypothèse de négliger le cisaillement transverse dans le matériau c'est à dire :

$$\gamma_{xz} = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_{yz} = 0$$

$$\varphi_x(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$\varphi_y(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (3.3)$$

En négligeant le cisaillement transverse dans (3.2) et on déduit le nouveau champ de déformations comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \varepsilon_{zz} = 0 \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{xz} = 0 \\ \gamma_{yz} = 0 \end{array} \right. \quad (3.4)$$

On tout point M , le tenseur des déformations s'écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

La matrice de déformations se réduit en trois composantes non nulles, peut être considérée comme la superposition des *déformations en membrane* (dépendant uniquement des déplacements (u_0, v_0)) et des déformations en flexion-torsion (dépendant des angles de rotation de la déformée du plan moyen (ϕ_x et ϕ_y) et de la cote z du point M). Le champ des déformations (3.4) s'écrit alors :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \varepsilon_m(M) + \varepsilon_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \varepsilon^f_{xx} \\ \varepsilon^f_{yy} \\ \gamma^f_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Généralement, les déformations en flexion-torsion s'expriment par la relation :

$$\varepsilon_f(M) = z k(x, y) \cdot$$

Avec

$$k(x, y) = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Où la matrice $k(x, y)$ est appelée *matrice des courbures*

On a donc :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Avec

$$k_x = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}(x, y) \quad k_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}(x, y) \quad k_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x}(x, y) \quad (3.9)$$

La théorie des stratifiés fait l'hypothèse suivante :

- σ_{zz} est négligeable dans le volume de la plaque par rapport aux autres composantes.
- L'état de contraintes $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ et de déformations $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}, \varepsilon_{zz}$ correspondant à l'état de contraintes planes.

Le tenseur de contraintes en un point M quelconque, est donc prend la forme :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Il se réduit aux seules contraintes en membranes : $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$.

Le champ de contraintes dans la couche K du stratifié, est donc le suivant :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = Q_{11}\varepsilon_{xx} + Q_{12}\varepsilon_{yy} + Q_{16}\gamma_{xy} \\ \sigma_{yy} = Q_{12}\varepsilon_{xx} + Q_{22}\varepsilon_{yy} + Q_{26}\gamma_{xy} \\ \sigma_{xy} = Q_{16}\varepsilon_{xx} + Q_{26}\varepsilon_{yy} + Q_{66}\gamma_{xy} \\ \sigma_{yz} = 0 \\ \sigma_{xz} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = Q_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \\ \sigma_{yz} = 0 \\ \sigma_{xz} = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Où Q_{ij} est la matrice de rigidité exprimée en dehors des axes principaux de la couche k , et ses coefficients Q_{ij} sont définis comme suit :

$$Q_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{j3}}{C_{33}} \quad (3.12)$$

Où les C_{ij} sont les coefficients de rigidité de la couche k en dehors des axes principaux

$$(\sigma = C\varepsilon).$$

D'après l'expression du champ de déformations (3.6), le champ de contraintes (3.9) s'écrit par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = Q_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + zQ_k \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Les résultantes de contraintes qui correspondent les déplacements généralisés ($u_0; v_0; w_0; \phi_x; \phi_y$) sont les suivantes :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Les équations introduisent les coefficients de rigidité en membrane A_{ij} , les coefficients de rigidité en flexion D_{ij} , et les coefficients de couplage membrane-flexion B_{ij} de la plaque.

Ces coefficients dépendent de la structure du stratifié et s'expriment sous la forme :

$$A_{ij} = \sum_{K=1}^n (Q'_{ij})_K e_k \quad (3.16)$$

$$B_{ij} = \sum_{K=1}^n (Q'_{ij})_K e_k z_K \quad (3.17)$$

$$D_{ij} = \sum_{K=1}^n (Q'_{ij})_K (e_k z_K^2 + \frac{e_K^3}{12}) \quad (3.18)$$

3.3.1.2 Équation du mouvement

Le domaine total $\bar{\Omega}_0$ du stratifié est le produit tensoriel de $\Omega_0 \times (-h/2, h/2)$. La limite de $\bar{\Omega}_0$ se compose de la surface supérieure S_t ($z = -h/2$) et de la surface inférieure S_b ($z = h/2$), et du bord $\bar{\Gamma} = \Gamma(-h/2, h/2)$ du stratifié (figure 3.2).

Par l'application du principe de travail virtuel [60]:

$$\int_0^t (\partial U + \partial V - \partial K) dt = 0 \quad (3.19)$$

Où U est l'énergie potentielle virtuelle de la déformation, V est le travail virtuel effectué par des forces appliquées et K l'énergie cinétique virtuelle sont donnés par :

$$\begin{aligned} \partial U &= \int_{\Omega_0} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dz dx dy \\ \partial V &= - \int_{\Omega_0} (q_b(x, y) \delta w_0(x, y, \frac{h}{2}) + q_t(x, y) \delta w_0(x, y, -\frac{h}{2})) dx dy \\ &\quad - \int_{\Gamma_\sigma} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{nm} \delta u_n + \sigma_{ns} \delta u_s + \sigma_{nz} \delta u_z) dz ds \\ \partial K &= \int_{\Omega_0} \int_{-h/2}^{h/2} \rho_0 (u \delta u + v \delta v + w \delta w) dz dx dy \end{aligned} \quad (3.20)$$

Où δu_n et δv_s , ont les déplacements virtuels suivant les directions normale et tangentielle respectivement, sur la frontière Γ (voir Figure 3.2), ρ_0 est la densité du matériau, q_b est la force distribuée à la face supérieure ($z = h / 2$) du stratifié, q_t est la force distribuée à la face inférieure ($z = -h / 2$) du stratifié, $(\sigma_{nn}, \sigma_{ns}, \sigma_{nz})$ sont les composantes de contraintes spécifiées sur la frontière Γ .

Les équations d'Euler-Lagrange de la théorie sont obtenues en mettant séparément les coefficients de δu_0 , δv_0 et δw_0 , de l'équation. (3.20) à zéro.

Par la substitution des équations. (3.6) et (3.1) dans l'équation. (3.19) et par intégration par parties, les équations dynamiques sont obtenues comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} &= I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q + N(w_0) = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)$$

Où

$$N(w_0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \quad (3.22)$$

$$\begin{Bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} \rho_0 dz \quad (3.23)$$

I_0 , I_1 et I_2 sont les moments d'inertie normal, normale-rotationnel et rotationnel respectivement.

3.3.2 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peut être considérée comme une amélioration par rapport à la théorie classique de plaques stratifiée (CLPT). Cette théorie est basée essentiellement sur l'hypothèse de Reissner-Mindlin [61, 62], où les lignes normales du plan moyen de déformation restent droites mais pas forcément perpendiculaires à la surface moyenne après déformation (à cause de l'effet du cisaillement transverse), (Figure.3.4). Ils ont également supposé que la contrainte de cisaillement σ_z soit négligeable (l'hypothèse de déformation plane).

Le champ de déplacement de la théorie du premier ordre s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \tag{3.24}$$

ϕ_x et ϕ_y sont les rotations de la normale autour des axes x , et y , respectivement.

3.3.2.1 Champ de contraintes et de déformations

Nous remarquons que les composantes de déplacements du plan (u , v) varient linéairement suivant l'axe z , tandis que la composante de déplacement transversal (w) est constante. Cela va conduire à un état de contrainte et déformation de cisaillement transversal constant sur toute l'épaisseur de la plaque.

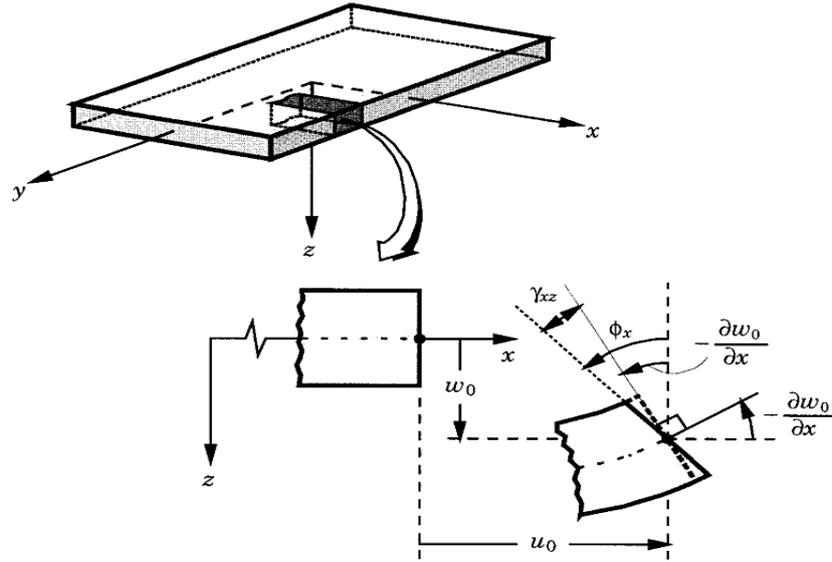


Figure 3.4 Géométries déformées et non déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Reissner-Mindlin [60]

En substituant les termes de l'expression (3.24) dans l'équation (3.2) on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\
 \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\
 \varepsilon_{zz} = 0 \\
 \gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\
 \gamma_{xz} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\
 \gamma_{yz} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y
 \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Où ϕ_x et ϕ_y sont les rotations de la normale transversale autour des axes y et x.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \phi_x = \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} \\
 \phi_y = \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0}
 \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Où les déformations $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy})$ sont linéaires dans l'épaisseur, tandis que les déformations de cisaillement transversales $(\gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ sont constantes à travers l'épaisseur du stratifié suivant la théorie des plaques stratifiées.

Donc, les termes de l'équation (3.25) peuvent avoir la forme suivante :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \varepsilon_m(M) + \varepsilon_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{yz} \\ \gamma^0_{xz} \\ \gamma^0_{xy} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \varepsilon^f_{xx} \\ \varepsilon^f_{yy} \\ \gamma^f_{yz} \\ \gamma^f_{xz} \\ \gamma^f_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Les résultantes de contraintes qui correspondent les déplacements généralisés $(u_0; v_0; w_0; \phi_x; \phi_y)$ sont les suivantes :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

φ_x et φ_y sont les résultantes de forces de cisaillement.

Pour corriger le décalage entre la répartition des contraintes de cisaillement transversales réelles (3D) et celles supposées dans la théorie du premier ordre, les chercheurs ont été ajoutés aux calculs des paramètres appelés facteurs de correction CT (FC), notés K . Ces facteurs sont introduits comme des paramètres dans les relations constitutives entre les forces de cisaillement transversal et les déformations de cisaillement transversal.

Les facteurs de correction pour les composites stratifiés et sandwichs dépendent essentiellement des propriétés mécaniques du matériau (module d'Young, coefficient de poisson,...etc.), les formes et les orientations des fibres ainsi que, la géométrie du stratifié, le nombre de couches et les conditions aux limites ce qui rend ces facteurs difficiles à déterminer.

3.3.2.2 Équation du mouvement

Par l'application du principe de déplacement virtuel [60] :

$$\int_0^t (\partial U + \partial V - \partial K) dt = 0 \quad (3.31)$$

Où ∂U est l'énergie potentielle virtuelle de déformation, ∂V est le travail virtuel effectué par les forces appliquées et ∂K l'énergie cinétique virtuelle.

$$\delta U = \int_{\Omega_0} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}(\delta \varepsilon_{xx}^0 + z \delta \varepsilon_{xx}^f) + \sigma_{yy}(\delta \varepsilon_{yy}^0 + z \delta \varepsilon_{yy}^f) + \sigma_{xy}(\delta \gamma_{xy}^0 + z \delta \gamma_{xy}^f) + \sigma_{xz}(\delta \gamma_{xz}^0 + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz}^0)) dz ds$$

$$\delta V = - \int_{\Omega_0} [(q_b + q_t) \delta w_0] dx dy - \int_{\Gamma_{\sigma}} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{nn}(\delta u_n + z \delta \phi_s) + \sigma_{ns}(\delta u_s + z \delta \phi_s) + \sigma_{nz} \delta w_0) dz ds$$

$$\delta K = \int_{\Omega_0} \int_{-h/2}^{h/2} \rho_0 [(\dot{u}_0 + z\dot{\phi}_x)(\delta\dot{u}_0 + z\delta\dot{\phi}_x) + (\dot{v}_0 + z\delta\dot{\phi}_y)(\delta\dot{v}_0 + z\delta\dot{\phi}_y)w\delta w] + \dot{w}_0\delta\dot{w}_0] dz dx dy \quad (3.32)$$

Par la substitution des équations (3.24) et (3.25) dans l'équation (3.32) et par intégration par parties, les équations dynamiques sont obtenues comme suit :

$$\begin{aligned} \partial u_0 : \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \\ \partial v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} &= I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \\ \partial w_0 : \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N(w_0) + q &= I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \\ \delta \phi_x : \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= I_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \\ \delta \phi_y : \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y &= I_2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.33)$$

1.3.3 Théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur

Les théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT), ont été proposées par nombreux travaux de chercheurs [63-66]. Pour obtenir une meilleure présentation de déformations et de contraintes en cisaillement, ces théories sont basées sur la variation non-linéaire du champ de déplacement (Figure 3.5). En outre, les théories des déformations en cisaillement d'ordre supérieur prendre en compte le gauchissement éventuel de la section droite de la plaque lors de la déformation.

Le champ du déplacement considéré est :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) + \frac{z^2}{2}\psi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) + \frac{z^2}{2}\psi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) + z\phi_z(x, y) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Où ψ_x, ψ_y , sont les termes du second ordre.

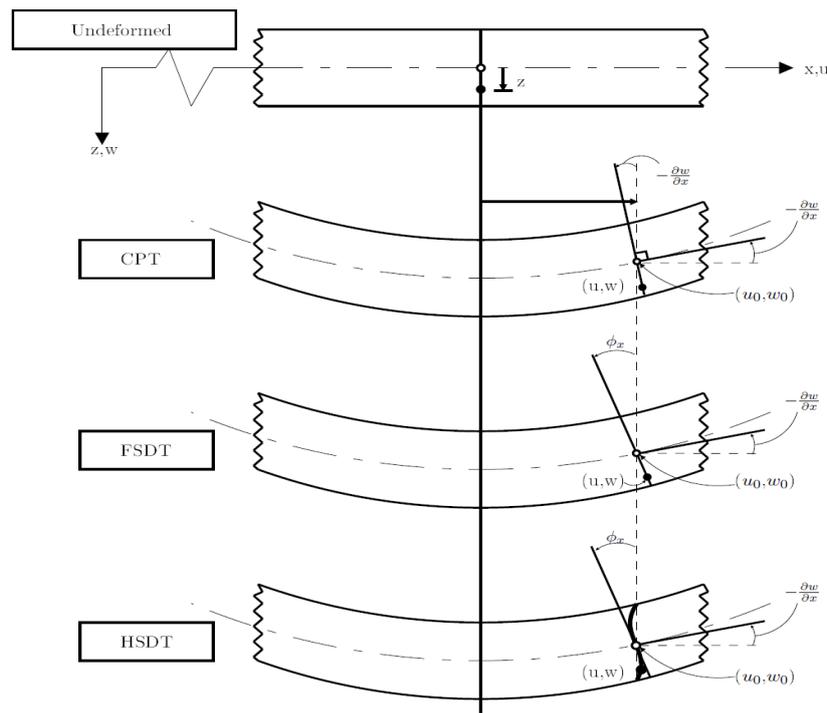


Figure 3.5 Géométries non déformées et déformées d'une plaque selon les trois théories CLPT, FSDT et HSDT [67]

3.4 Expression de conditions aux limites

Les conditions imposées aux frontières d'une structure permettent d'aboutir à des solutions uniques des équations du mouvement (3.21) et (3.33).

La figure (3.6) représente un élément de frontière repéré au point $P(x, y, 0)$ par le système d'axes \vec{n} normale extérieure, \vec{i} la tangente dans le plan moyen $\vec{k} = \vec{z}$.

La déformée au point P du stratifié est caractérisée par le déplacement de ce point exprimé dans la base $(\vec{n}, \vec{i}, \vec{k})$ par ses composantes $u_{0n}(x, y), v_{0n}(x, y), w_{0n}(x, y)$ et par la déformée définie comme suit : $\frac{\partial w_0}{\partial n}$.

Les efforts exercés au point P sont les résultantes en membrane N_n, N_{nt} , et en cisaillement Q_n , les moments de flexion et de torsion sont M_n et M_{nt} respectivement.

Les conditions imposées portent sur l'une des grandeurs de chacune des paires suivantes [69] :

$$u_{0n}, N_n \quad u_{0t}, N_t \quad \frac{\partial w_0}{\partial n}, M_n \quad w_0, \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} + Q_n \quad (3.35)$$

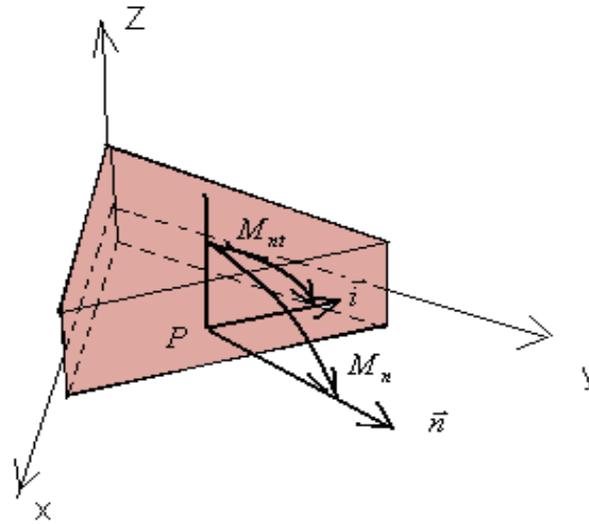


Figure 3.6 Élément de frontière de la plaque et repère associé.

3.4.1 Appui simple

La figure 3.7 représente la condition d'appui simple, est donnée par :

$$w_0 = 0 \quad M_n = 0 \quad N_{0n} = 0 \quad N_{nt} = 0 \quad (3.36)$$

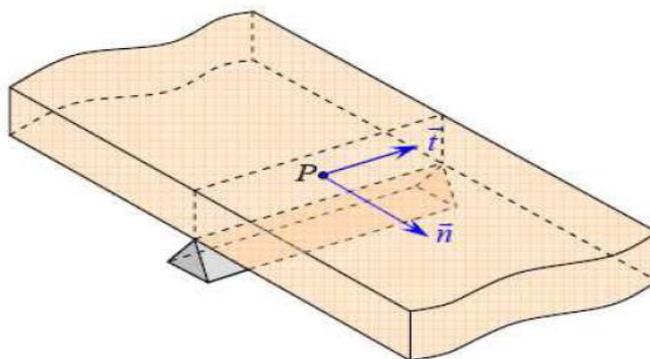


Figure 3.7 Schématisation d'un appui simple

3.4.2 Encastrement

On considère pour la figure 3.8 la condition de bord encasté peut être s'exprimer par :

$$w_0 = 0 \quad \frac{\partial w_0}{\partial n} = 0, \quad u_{0n} = 0, \quad u_{0t} = 0 \quad (3.37)$$

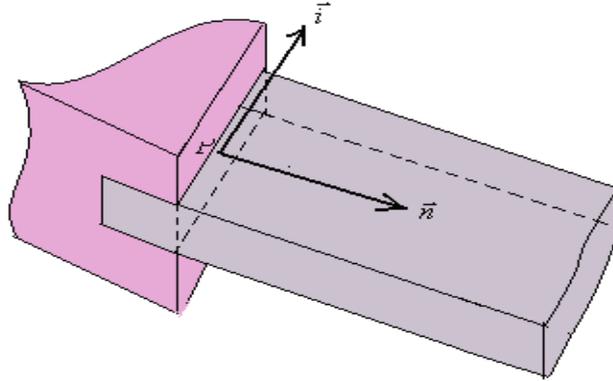


Figure 3.8 Représentation d'un encastrement

3.4.3 Condition du bord libre

Un bord libre est caractérisé par la nullité de tous les efforts et les moments :

$$N_n = N_{nt} = Q_n = M_n = M_{nt} \frac{\partial w_0}{\partial n} = 0 \quad (3.38)$$

L'équilibre des moments de torsion sur un bord libre (figure 3.9) s'exprime sous la forme :

$$-M_{nt} + M_{nt} + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} dt + Q_n dt = 0 \quad (3.39)$$

Où $Q_n dt$ est le moment résultant dû à l'effort de cisaillement. La résultante de cisaillement est donc reliée au moment de torsion par :

$$\frac{\partial M_{nt}}{\partial t} + Q_n = 0 \quad (3.40)$$

La condition de frontière de Kirchhoff exprime la contribution du moment de torsion sur le bord. Les conditions de bord dans ce cas sont:

$$N_n = 0 \quad N_{nt} = 0 \quad M_n = 0 \quad \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} + Q_n = 0 \quad (3.41)$$

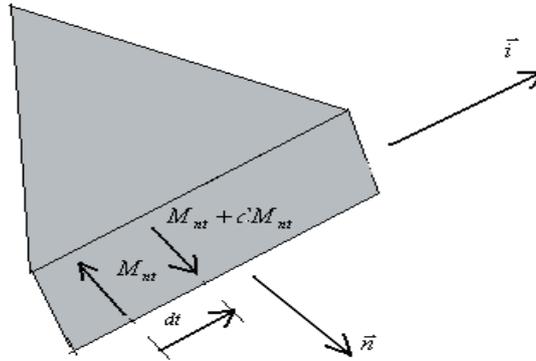


Figure 3.9 Variation du moment de torsion le long d'un bord libre

Par exemple, l'encastrement s'écrit pour les bords parallèles à la direction y par :

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

(3.42)

Et pour les bords parallèles à la direction de x l'encastrement s'écrit par :

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

3.5 Conclusion

Ce chapitre est dédié à l'acquisition des connaissances théoriques nécessaires pour comprendre la méthode de calcul proposée par la méthode des éléments finis en quatrième et cinquième chapitres du présent travail. Dans un premier temps, nous avons présenté quelques notions sur les approches et les théories servant à analyser le comportement des structures composites stratifiées et sandwichs. Le chapitre présente aussi, les formulations théoriques du comportement mécanique des structures composites basées sur les approches théoriques fondamentales trouvées dans la littérature.

Chapitre IV

Comportement vibratoire des composites stratifiés

Chapitre IV

Comportement vibratoire des composites stratifiés

4.1 Introduction

L'utilisation de plaques stratifiées composites anisotropes en tant qu'éléments structurels ont été largement augmentés de manière immense et significative au cours des cinq dernières décennies. En raison de leur rigidité et résistance élevée par rapport aux matériaux métalliques traditionnels. En conséquence, l'étude de leur comportement dynamique en différents chargements et conditions aux limites doit être clairement expliquée. Donc, le but du présent travail est d'étudier l'effet de la masse attachée sur les caractéristiques dynamiques des stratifiées composites en fonction de différents facteurs, tels que, les positions de la masse attachée, le nombre de couches, les rapports de poids de la masse attachée et les séquences d'empilements.

L'hypothèse principale de la théorie classique des stratifiés introduite dans le troisième chapitre, est que les lignes normales au plan moyen de déformation restent droites et perpendiculaires à la surface moyenne après la déformation (Figure.3.2). Cette hypothèse implique la négligence des déformations et les contraintes normales, ainsi les déformations dues au cisaillement transverse. Cependant, des déformations de cisaillement non négligeables se produisent pour les plaques épaisses et modérément épaisses. Alors, la théorie classique des stratifiés donne des résultats imprécis pour les plaques stratifiées. Donc, il est évident que les déformations transversales de cisaillement doivent être prises en compte dans l'analyse. Donc notre travail de calculs par la méthode des éléments finis, pour la détermination du comportement vibratoire des stratifiés composites est basée sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT).

4.2 Stratifiés composites avec masse attachée

La masse attachée à la plaque composite est supposée être une masse ponctuelle. Donc, on suppose que cette masse n'affecte pas la flexion de la plaque stratifiée composite [47].

Dans le cas d'une plaque rectangulaire constituée d'un matériau stratifié symétrique, l'énergie de déformation s'exprime [70], pour une flexion pure, suivant l'expression :

$$\begin{aligned}
U_d = & \frac{1}{2} \iint \left[A_{11} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{22} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 \right. \\
& + 2 \left(A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \\
& + A_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 \left. \right] dxdy + \frac{1}{2} \iint \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 \right. \\
& + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 4 \left(D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\
& \left. \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dxdy
\end{aligned} \tag{4.1}$$

L'énergie cinétique maximale de la plaque composite est donnée par [70] :

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint \rho \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right] dxdydz \tag{4.2}$$

L'énergie cinétique maximale de la plaque composite, ayant une masse attachée, est donnée par l'équation suivante :

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint \rho \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right] dxdydz + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i w_0^2(x_p, y_p) \tag{4.3}$$

Où :

ρ est la masse par unité de surface de la plaque.

M_i est la masse de la particule attachée,

(x_p, y_p) est la position, et n_i est le nombre de particules attachées à la plaque composite [47].

Les déplacements de la plaque en vibration libre, sont supposés comme :

$$\begin{aligned} u_0(x, y, t) &= u_0(x, y)e^{j\omega t} \\ v_0(x, y, t) &= v_0(x, y)e^{j\omega t} \\ w_0(x, y, t) &= w_0(x, y)e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Où ω est la fréquence propre du stratifié composite

Pour les conditions aux limites géométriques, le bord libre est caractérisé par la nullité de tous les efforts et les moments.

$$N_{xx} = N_{xy} = M_{xx} = M_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \quad (4.5)$$

Le bord encasté, est peut être donné par :

$$w_0 = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \quad (4.6)$$

4.3 Analyse par la méthode des éléments finis

L'idée fondamentale de la méthode des éléments finis est la discrétisation du milieu continu en sous domaines, consiste à mailler la structure en un certain nombre d'éléments finis, de géométrie simple et de construire une approximation nodale par sous domaine. Ainsi, l'assemblage et le calcul des matrices élémentaires correspondant à la forme intégrale du problème.

Finalement, la résolution du système d'équations appropriées le problème étudié en divers conditions aux limites.

Donc, pour notre étude, un élément en huit nœuds a été utilisé pour l'analyse vibratoire de plaques composites par la méthode des éléments finis.

On exprime les déplacements en termes de valeurs nodales par l'utilisation des fonctions de forme, qu'ils sont donnés par [71,72] :

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{i=1}^8 N_i u_i, & v &= \sum_{i=1}^8 N_i v_i, & w &= \sum_{i=1}^8 N_i w_i \\
\theta_x &= \sum_{i=1}^8 N_i \theta_{xi}, & \theta_y &= \sum_{i=1}^8 N_i \theta_{yi}, & \theta_z &= \sum_{i=1}^8 N_i \theta_{zi}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

N_i sont les fonctions de forme dépend le nœud i .

Ces fonctions sont définies comme suit :

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1) \quad \text{Pour } i = 1, 2, 3 \text{ et } 4. \tag{4.9}$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i) \quad \text{Pour } i = 5 \text{ et } 7. \tag{4.10}$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi\xi_i)(1 - \eta^2) \quad \text{Pour } i = 6 \text{ et } 8. \tag{4.11}$$

ξ, η sont les coordonnées propres locales d'un élément.

La méthode des éléments finis aboutit à une équation de mouvement matricielle globale à plusieurs degrés de liberté :

$$[M]\{\ddot{w}\}_i + [C]\{\dot{w}\}_i + [K]\{w\}_i = \{\varphi\}_i \tag{4.12}$$

Où :

$[M]$ est la matrice de la masse structurale ;

$[K]$ est la matrice de rigidité structurale ;

$\{\ddot{w}\}$ est le vecteur d'accélération nodale ;

$\{w\}$ est le vecteur de déplacement nodal.

$$\{w\} = \{W\}e^{j\omega t} \tag{4.13}$$

$\{W\}$ est le mode de vibration et ω est sa fréquence propre.

Pour la détermination des fréquences et des modes propres, on élimine la considération des matrices $[C]$ et $[\varphi]$, et nous devons résoudre l'équation suivante :

$$[M]\{\ddot{w}\}_i + [K]\{w\}_i = 0 \quad (4.14)$$

Par la substitution de (4.13) dans (4.14) on trouve l'équation (4.15) :

$$[[K] - [M]\omega^2]\{W\} = 0 \quad (4.15)$$

Pour, $W = 0$, signifie que le mouvement est nul.

Quand $W \neq 0$, alors cette équation peut avoir une solution, si le déterminant est égal à 0 :

$$[[K] - [M]\omega^2] = 0 \quad (4.16)$$

Les racines de cette équation sont les fréquences propres ω_i

Nous obtenons les modes propres associés en substituant chaque ω_i , de nouveau dans l'équation de mouvement, et on résout $\{w\}_i$.

Donc, les solutions recherchées pour cette équation, pour le cas de vibrations libres, sont de types harmoniques :

$$w = X(A\cos\omega t + B\sin\omega t) \quad (4.17)$$

Où X est un vecteur d'ordre n , et ω est la pulsation des vibrations harmoniques. Les constantes A et B sont déterminées à partir des conditions initiales à $t = 0$.

Compte tenu de l'expression (4.15), l'équation (4.17) associée aux vibrations libres de la structure devient :

$$[K]\{w\}_r - \omega_r^2 [M]\{w\}_r = 0 \quad (4.18)$$

L'orthogonalité des vecteurs modaux conduit à :

$$\{w\}_i^t [M] \{w\}_j = \begin{cases} 1 & \text{Si } i = j \\ 0 & \text{Si } i \neq j \end{cases} \quad (4.19)$$

Les valeurs propres du système sont ensuite données suivant la relation :

$$0 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \dots \leq \omega_n^2 \quad (4.20)$$

Le calcul de structures par éléments finis par le logiciel ANSYS a été basé sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre [73].

Le type d'élément utilisé pour la plaque stratifié composite, est SHELL281. L'élément est employé pour analyser les structures de coques minces à modérément épaisses. SHELL281 est caractérisé par huit nœuds avec six degrés de liberté au chaque nœud : trois translations suivant les axes x, y et z et trois rotations autour les axes x, y et z. (figure 4.1).

L'élément de masse ponctuelle attachée à la plaque est soumis à l'élément 3D mass 21. Cet élément est caractérisé par six degrés de liberté, les translations dans les directions nodales x, y et z et les rotations autour des axes nodales x, y et z.

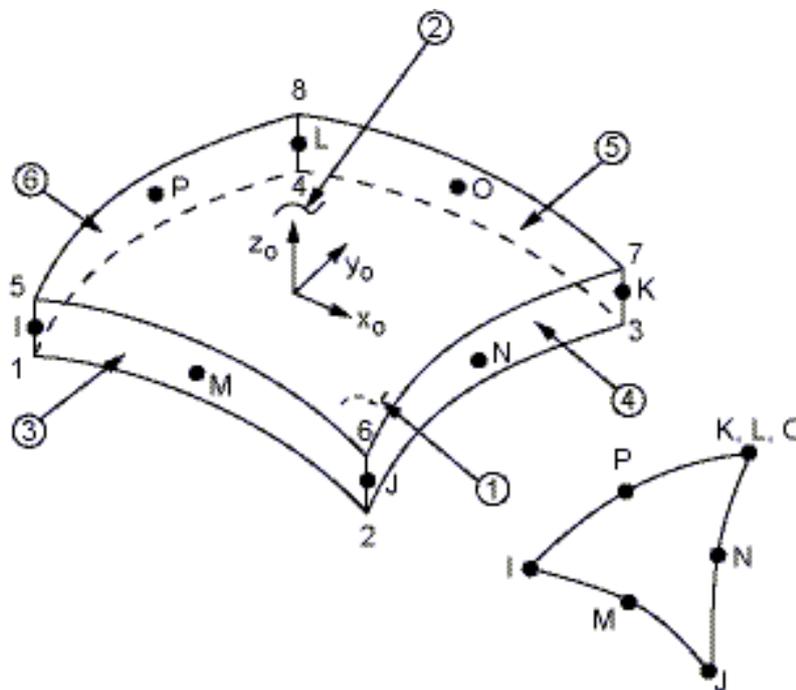


Figure 4.1 La géométrie de l'élément coque SHELL 281 [73]

La figure 4.2 indique le modèle d'éléments finis utilisé pour étudier l'effet de la masse attachée sur la plaque stratifié composite.

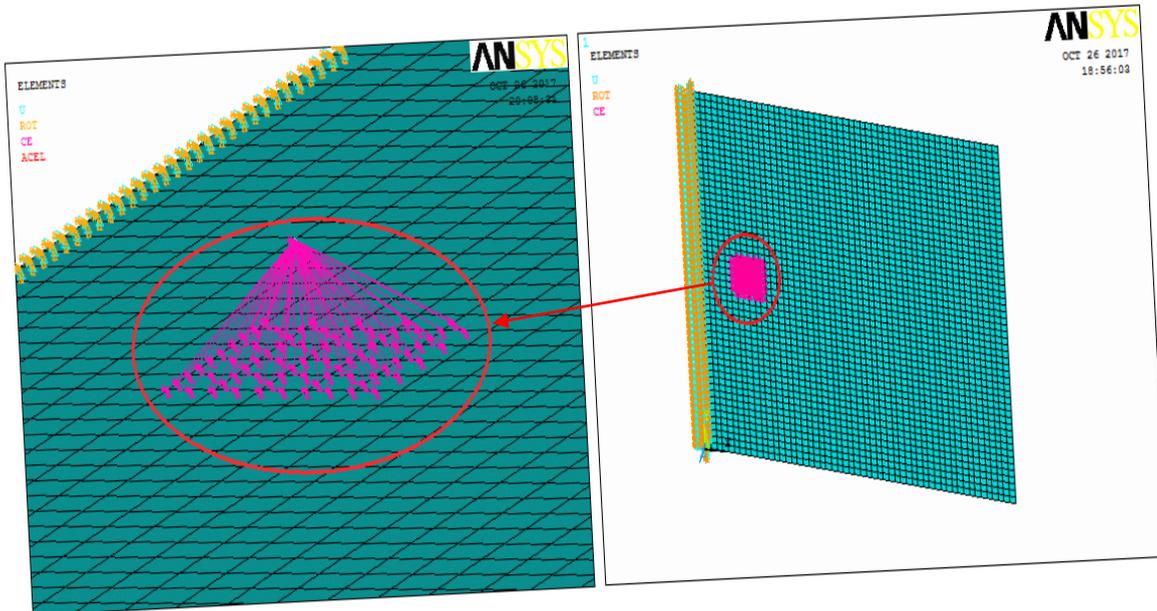


Figure 4.2 Modèle d'éléments finis d'un stratifié composite avec chargement de masse attachée

4.4 Analyse expérimentale

L'utilisation de l'analyse modale expérimentale permet une meilleure performance dans la détermination des caractéristiques mécanique dynamique des structures composites grâce à la disponibilité des moyens d'analyses dynamiques rapides et non destructives.

4.4.1 Dispositif expérimental

La mesure de la réponse est obtenue par l'utilisation d'analyseur de vibration type B&K équipée par un accéléromètre de faible masse.

La structure est excitée à l'aide d'un marteau d'impact de type 8002, équipé par un capteur de force de sensibilité 0.98 pc/N.

La réponse est détectée à l'aide d'accéléromètre de faible masse attaché par une cire spéciale assure l'adhésion entre le capteur et la surface de la plaque.

Le schéma du dispositif expérimental est indiqué sur la figure 4.3.

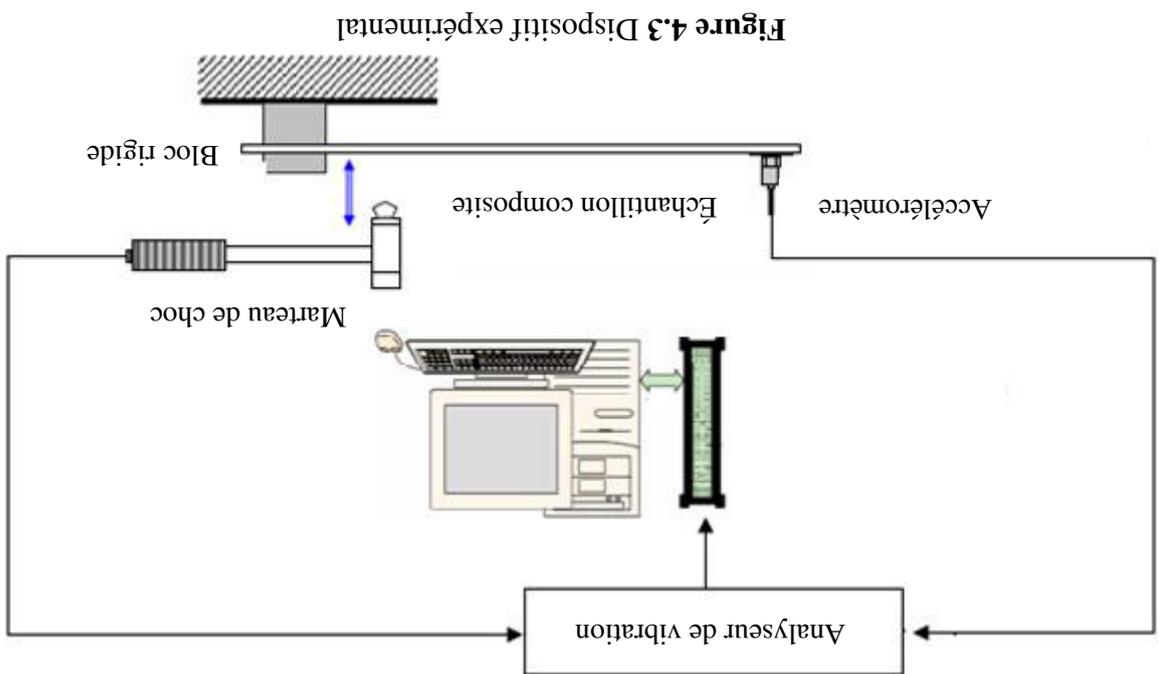


Figure 4.3 Dispositif expérimental

La figure 4.4 représente la plaque stratifiée composite ayant quatre emplacements de masse attachée.

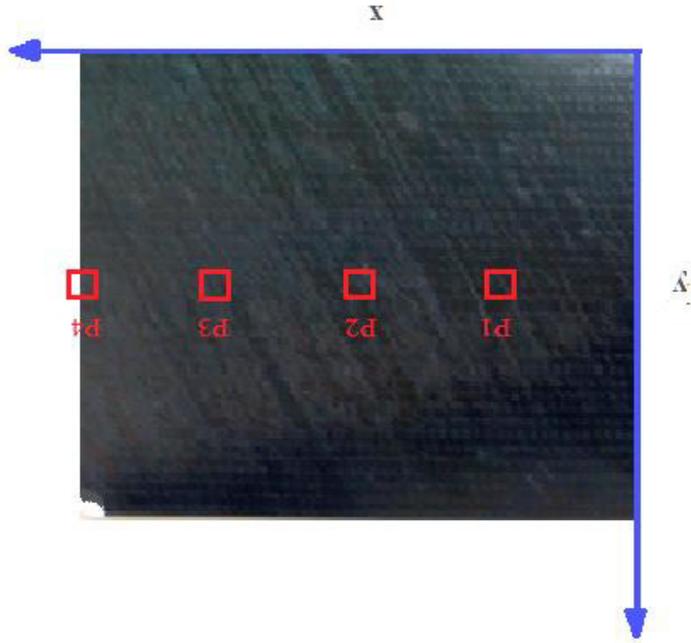


Figure 4.4 Les quatre emplacements de la masse attachée sur le stratifié composite

Les points de mesure doivent être choisis de telle sorte que ni le point de réponse, ni le point d'impact ne soient sur un nœud de vibration.

L'excitation par marteau de choc près d'encastrement présente l'avantage d'être une gamme importante de modes soit excitée sans risque de se situer sur une ligne nodale de vibration.

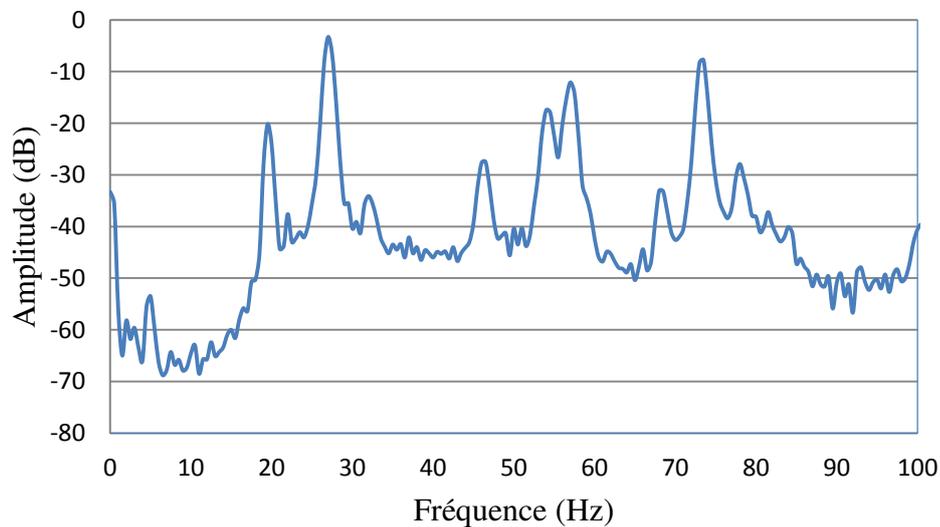


Figure 4.5 Exemple de réponse en fréquence d'une plaque stratifiée Carbone-époxyde, encastrée-libre-libre-libre

Un exemple de la réponse en fréquence de vibration libre est représenté sur la figure 4.5. Cette réponse fait apparaître les pics correspondant aux fréquences propres de vibration.

La forme spectrale de la réponse vibratoire est déterminée en fonction de la nature de l'objet qui sert d'impact et en fonction de la masse et la raideur de la structure. L'amplitude sous l'impact par marteau de choc est appariée à la fréquence nulle (fréquence de chargement). La sollicitation d'un marteau de choc est une action de très courte durée donc de nature impulsive.

4.4.2 Matériaux et essais

L'étude expérimentale a été réalisée sur des plaques symétriques carrées en fibre de carbone et résine époxyde (carbone/époxyde). Les dimensions des éprouvettes sont : $a = 300$ mm (dans la direction x), $b = 300$ mm (dans la direction y). Les échantillons de plaques sont constitués d'un nombre de couches différentes et de même épaisseurs. L'épaisseur de chaque couche est d'environ 0,125 mm et les propriétés mécaniques de chaque pli sont illustrées sur le tableau 4.1.

Les masses attachées sont posées au milieu de la direction (y) et espacées de 75 mm dans la direction (x). Les séquences d'empilements utilisés sont $[\pm 20]$ ns, $[\pm 40]$ ns, $[\pm 60]$ ns, $[\pm 80]$ ns, où $n = 2$, $n = 4$, $n = 6$ et $n = 8$ pour 8, 16, 24 et 32 couches symétriques respectivement. L'excitation des stratifiés composites est menée en vibration libre, pour la configuration des conditions limites encastrée-libre-libre-libre (ELLL).

Tableau 4.1 Propriété mécanique de carbone/époxyde (IM7/8552) [74]

Module de Young (GPa)		Module de cisaillement (GPa)		Coefficient de Poisson	
E_{11}	E_{22}, E_{33}	G_{12}, G_{13}	G_{23}	ν_{12}, ν_{13}	ν_{32}
164.87	9.81	4.8	3.2	0.31	0.52

4.5 Évaluations du comportement dynamique de plaques composites sans masse attachée

4.5.1 Fréquence propre des stratifiés composites

Les fréquences propres ont été déterminées expérimentalement à l'aide du logiciel *ME Scope VES*. Le logiciel a été utilisé pour construire une plaque modèle et analyser son comportement dynamique (fréquences propres et coefficients d'amortissement modal).

Le traitement des résultats par *ME Scope VES* permet de changer la bande de fréquences pour localiser et estimer correctement les propriétés dynamiques du modèle étudié. Des fonctions d'interpolation sont utilisées pour identifier les fréquences modales non apparentes et améliorer ainsi, la précision de résultats expérimentaux obtenus.

Les tableaux 4.2, 4.3, 4.4 et 4.5 représentent la comparaison entre les résultats obtenus par la méthode des éléments finis (MEF) et ceux obtenus expérimentalement pour différentes séquences d'empilement ($[\pm 20]$ ns, $[\pm 40]$ ns, $[\pm 60]$ ns, $[\pm 80]$ ns) et pour divers nombres de couches (8, 16, 24 et 32) et cela sans aucune masse attachée.

En général, on voit qu'une bonne concordance existe entre les valeurs expérimentales et celles obtenues par la méthode des éléments finis.

Tableau 4.2 Comparaison entre les fréquences propres expérimentales et numériques pour les stratifiés ayant 8 couches (n = 2)

Mode (n,m)	[±20] _{2s}			[±40] _{2s}			[±60] _{2s}			[±80] _{2s}		
	f ₀ (Hz)	f ₀ (Hz)	Diff	f ₀ (Hz)	f ₀ (Hz)	Diff	f ₀ (Hz)	f ₀ (Hz)	Diff	f ₀ (Hz)	f ₀ (Hz)	Diff
	Exp	FEM	%									
(1,1)	5,1	4,7723	6,4	8,05	7,6977	4,3	13,4	13,165	2	17,6	17,482	2,5
(1,2)	21,6	21,556	0,2	31,8	31,280	1,7	32,1	31,638	1,4	25	24,252	3
(2,1)	29,7	29,461	0,8	44,8	44,813	0,2	68,2	64,035	6,2	48,1	46,584	3,2
(2,2)	67,7	69,011	1,9	87,8	86,675	1,3	87,8	85,365	2,8	93,2	92,563	0,7
(3,1)	80,5	82,602	2,6	103,2	101,84	1,3	114,8	109,80	4,4	112,6	109,74	2,6

Tableau 4.3 Comparaison entre les fréquences propres expérimentales et numériques pour les stratifiés ayant 16 couches (n = 4)

Mode (n,m)	[±20] _{4s}			[±40] _{4s}			[±60] _{4s}			[±80] _{4s}		
	f ₀ (Hz)	f ₀ (Hz)	Diff	f ₀ (Hz)	f ₀ (Hz)	Diff	f ₀ (Hz)	f ₀ (Hz)	Diff	f ₀ (Hz)	f ₀ (Hz)	Diff
	Exp	FEM	%									
(1,1)	9,7	9,5597	1,01	15,6	15,568	0,05	27,2	26,699	1,9	35,3	35,208	0,33
(1,2)	44,2	44,197	0,1	65,2	64,115	1,07	65,5	64,648	1,14	48,9	48,827	0,05
(2,1)	59,6	58,993	1,05	91,8	90,322	1,7	130,9	129,74	0,9	95,2	93,688	1,6
(2,2)	142,9	141,90	0,7	180,7	178,56	1,2	173,9	173,04	0,5	188,4	185,60	1,5
(3,1)	198,6	195,48	1,6	209,3	206,83	1,2	225,3	222,62	1,2	223,6	220,15	1,55

Tableau 4.4 Comparaison entre les fréquences propres expérimentales et numériques pour les stratifiés ayant 24 couches (n = 6)

Mode (n,m)	[±20] _{6s}			[±40] _{6s}			[±60] _{6s}			[±80] _{6s}		
	f ₀ (Hz)	f ₀ (Hz)	Diff	f ₀ (Hz)	f ₀ (Hz)	Diff	f ₀ (Hz)	f ₀ (Hz)	Diff	f ₀ (Hz)	f ₀ (Hz)	Diff
	Exp	FEM	%	Exp	FEM	%	EXP	FEM	%	Exp	FEM	%
(1,1)	14,5	14,336	1,26	23,4	23,342	0,17	41,1	40,087	2,40	52,9	52,856	0,13
(1,2)	66,7	66,421	0,4	96,3	96,212	0,1	97,3	97,022	0,31	74,1	73,230	1,2
(2,1)	89,4	88,443	1,08	135,9	135,18	0,52	195,5	194,04	0,78	141,7	140,41	0,9
(2,2)	213,8	213,26	0,27	269,5	268,10	0,50	261	259,50	0,6	281,4	278,05	1,2
(3,1)	250,6	247,96	1,05	310,8	309,339	0,483	334,3	332,7	0,48	333,3	329,50	1,15

Tableau 4.5 Comparaison entre les fréquences propres expérimentales et numériques pour les stratifiés ayant 32 couches (n = 8)

Mode (n,m)	[±20] _{8s}			[±40] _{8s}			[±60] _{8s}			[±80] _{8s}		
	f ₀ (Hz)	f ₀ (Hz)	Diff	f ₀ (Hz)	f ₀ (Hz)	Diff	f ₀ (Hz)	f ₀ (Hz)	Diff	f ₀ (Hz)	f ₀ (Hz)	Diff
	Exp	FEM	%									
(1,1)	19,7	19,105	3,2	31	31,056	0,05	54,4	53,400	1,83	70,6	70,459	0,2
(1,2)	89,1	88,433	0,8	127,9	127,88	0,01	129,9	129,02	0,7	98,2	97,509	0,7
(2,1)	116,8	117,82	0,9	182,5	179,57	1,6	258,3	257,27	0,4	187	186,83	1
(2,2)	284,3	283,75	0,2	357,3	356,25	0,3	346,4	345,05	0,4	371,7	369,91	0,5
(3,1)	332,4	330,03	0,7	410,2	410,09	0,4	442	440,68	0,3	438	437,61	0,1

Les différences sont probablement dues aux imperfections géométriques de la plaque qui n'ont pas été prises en compte dans le modèle numérique. En conséquence, l'effet de désalignements dans l'orientation des couches, les variations uniformes dans l'épaisseur de chaque couche, et la masse d'accéléromètre peuvent avoir une influence sur la précision de valeurs des fréquences propres mesurées. La difficulté de réaliser expérimentalement un encastrement parfait sur les bords des plaques étudiées, influence aussi les paramètres modaux. Donc, ces paramètres d'erreur affectent la rigidité et par conséquent le comportement dynamique des plaques composites.

4.5.2 Amortissement des stratifiés composites

Les coefficients d'amortissement sont déterminés expérimentalement à l'aide du logiciel d'analyse modale *ME Scope VES* selon, chaque pic de résonance. Les valeurs du rapport d'amortissement pour les trois premiers modes de vibration sont illustrées sur le tableau 4.6.

Les résultats obtenus montrent que le taux d'amortissement augmente proportionnellement avec l'accroissement des orientations des fibres et atteint les valeurs maximales pour le cas de l'orientation des couches du type [± 40]_{2s}. Ensuite, on observe un retour décroissant des valeurs des coefficients d'amortissement qui diminuent en fonction de l'augmentation des séquences d'empilement à partir de la séquence du type [± 50]_{2s} et en montant vers les orientations supérieures.

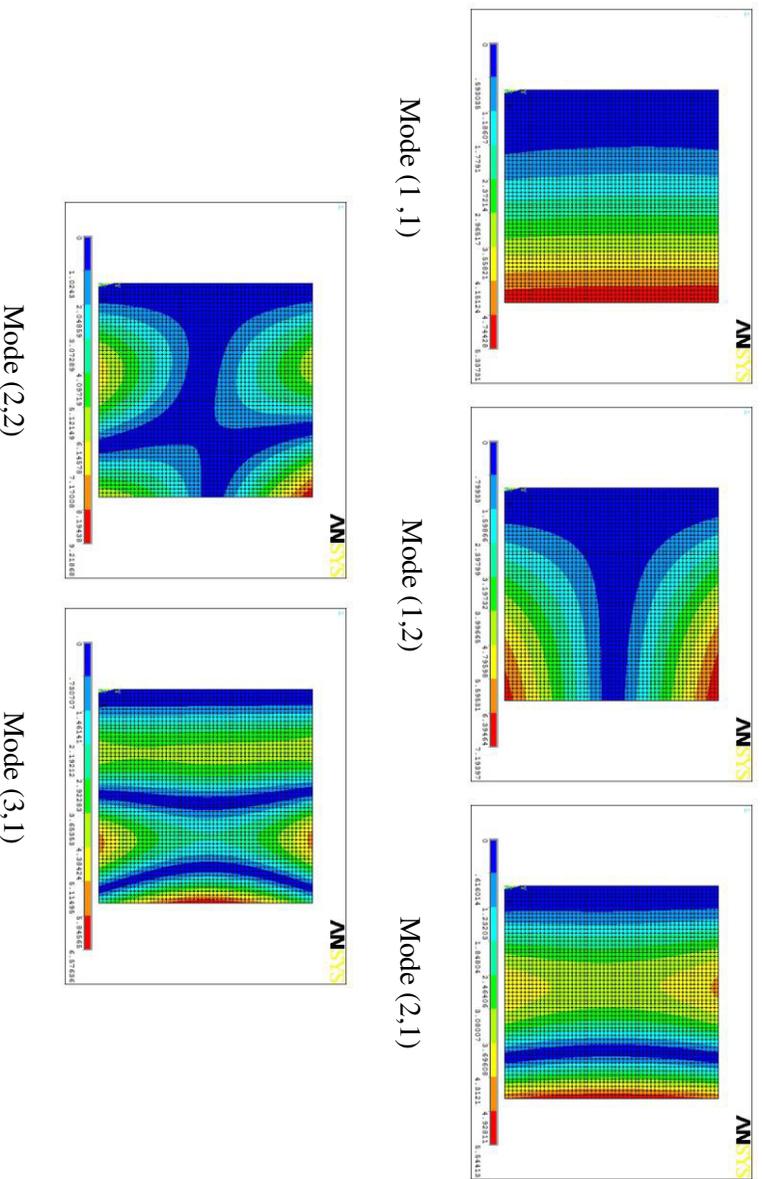
Tableau 4.6 Variations d'amortissement modal en fonction des séquences d'empilements

Modes	Coefficient d'amortissement (%)					
	[±20] _{2s}	[±30] _{2s}	[±40] _{2s}	[±50] _{2s}	[±60] _{2s}	[±70] _{2s}
Mode (1,1)	3,6	6,0	8,5	6,7	6,1	5,6
Mode (1,2)	2,93	3,5	6,9	4,3	3,9	3,5
Mode (2,1)	1,71	3,0	5,1	3,9	3,4	2,8

Les valeurs des coefficients d'amortissement du premier mode sont supérieures à celles des deuxièmes et troisièmes modes. Cela est dû aux faits que, la rigidité en flexion pour le premier mode de vibration devient inférieure à celle du deuxième et troisième mode de vibration et par conséquent, génère une capacité plus élevée à la dissipation d'énergie qui s'exprime par des taux d'amortissement plus élevé.

4.5.3 Déformées propres des stratifiés composites

La figure 4.6 introduite un exemple des déformées propres obtenus par la méthode des éléments finis pour la plaque composite ayant la séquence d'empilement [±20]_{2s}.

**Figure 4.6** Déformées propres de la plaque composite ayant [±20]_{2s}

4.6 Évaluations du comportement dynamique des plaques composites avec masse attachée

Le but de ce travail est d'identifier l'effet de la masse attachée sur les fréquences propres et les déformées propres de la plaque étudiée. Les mêmes propriétés des échantillons précédents (plaques de références) en paragraphe 4.4 sont adoptées.

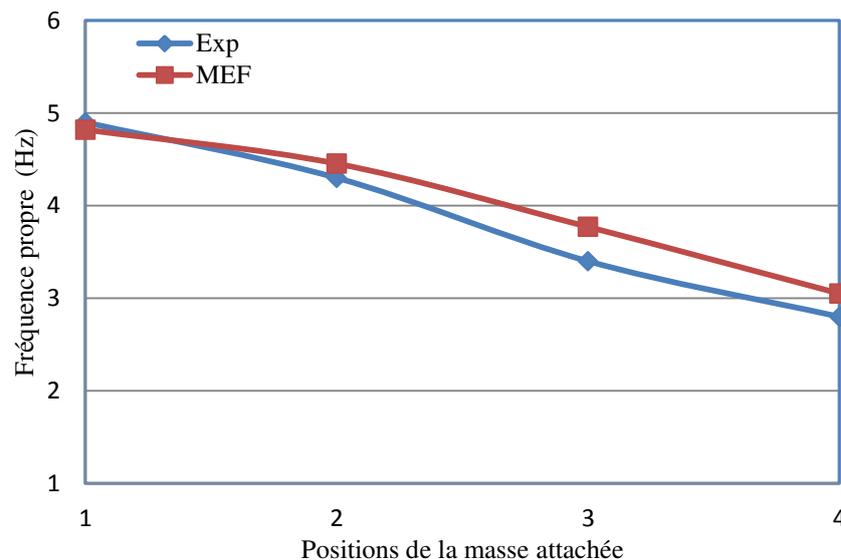


Figure 4.7 Influence de la masse attachée sur la fréquence propre pour le premier mode de vibration pour la plaque $[\pm 20]_2s$

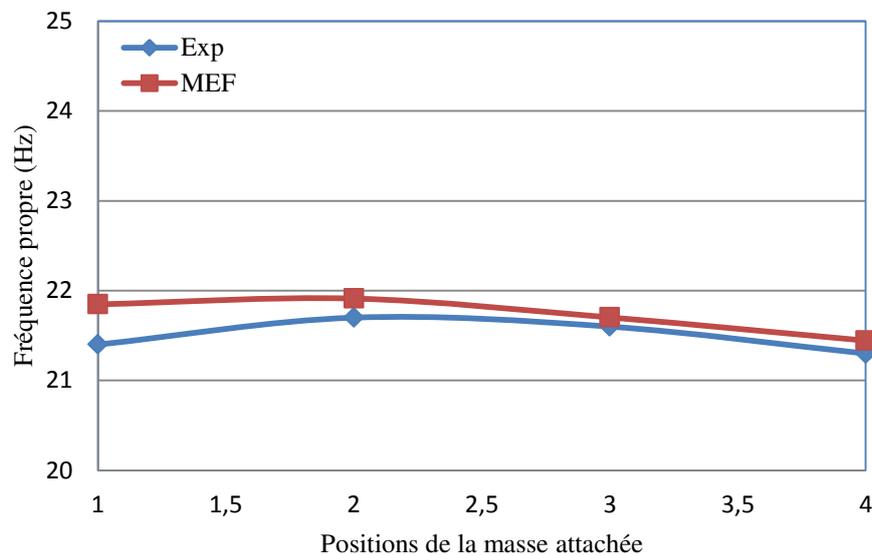


Figure 4.8 Influence de la masse attachée sur la fréquence propre pour le deuxième mode de vibration pour la plaque $[\pm 20]_2s$

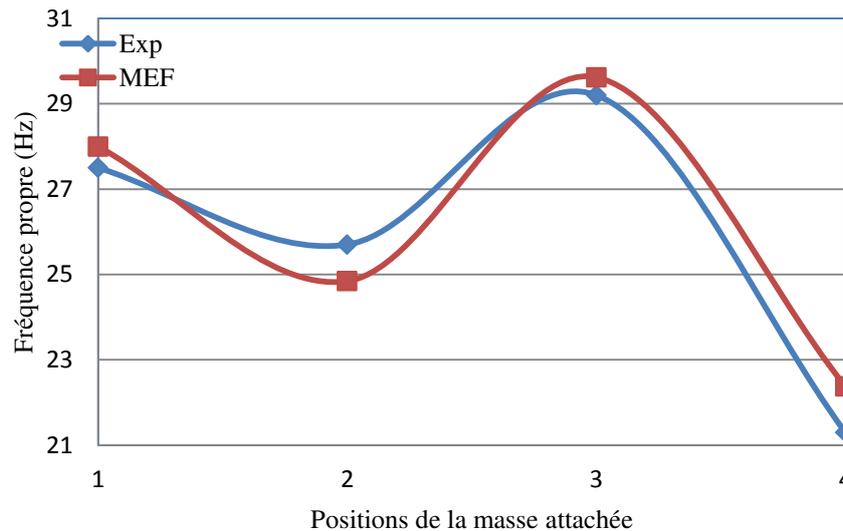


Figure 4.9 Influence de la masse attachée sur la fréquence propre pour le troisième mode de vibration pour la plaque $[\pm 20]_2s$

Pour mettre en évidence l'influence de la masse attachée sur les valeurs des fréquences propres et des déformées propres, on observe pour chaque séquence modale la représentation graphique, exprimant la variation des fréquences propres en fonction de la position relative de la masse ajoutée et attachée sur la plaque caractérisée par la séquence d'empilement $[\pm 20]_2s$ figures 4.7 à 4.9. On voit que les courbes de fréquences obtenues par la méthode numérique (MEF) sont plus conservatrice par rapport à celles de la méthode expérimentale figure 4.7. Cet état de fait est contraire par rapport au cas de la plaque sans masse tableau 4.2 où les valeurs des fréquences numériques sont plus conservatrice. Ceci montre la bonne qualité des résultats expérimentaux et justifie en même temps l'importance de la méthode expérimentale dans le cas de la présence de masse supplémentaire localisée en un lieu de la plaque en mouvement vibratoire. On fait cependant aussi remarque que pour notre cas avec des essais utilisant des masses de faible grandeurs, on observe pour chaque cas d'essai correspondant à une position spécifique de la masse $P_{i=1,2,3,4}$, l'analyse comparative des réponses fait montrer une faible dispersion. Le troisième essai où la position de la masse est localisée au point P3 à 225mm par rapport à l'appui d'encastrement se distingue par une dispersion maximum de 10,9 %. On peut finalement déduire que dans le cas de la présence de masse de grandeur supérieure les écarts seront plus prononcés et la méthode expérimentale devient alors indispensable car on obtient une meilleure qualité pour les fréquences fondamentales qui se démarque par rapport à celles obtenues par la méthode numérique (MEF) et donc s'approche beaucoup plus du seuil exact d'un point de vue comparatif (Annexe A).

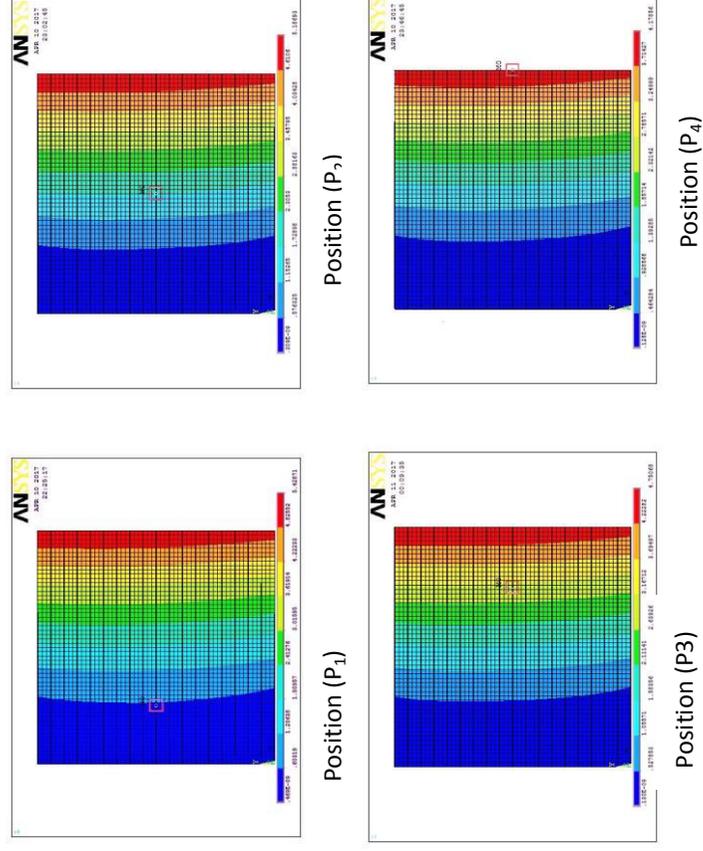


Figure 4.10 Déformée propre du premier mode de vibration en plaque ayant $[\pm 20]_2$ s avec masse attachée 25 g (M/6)

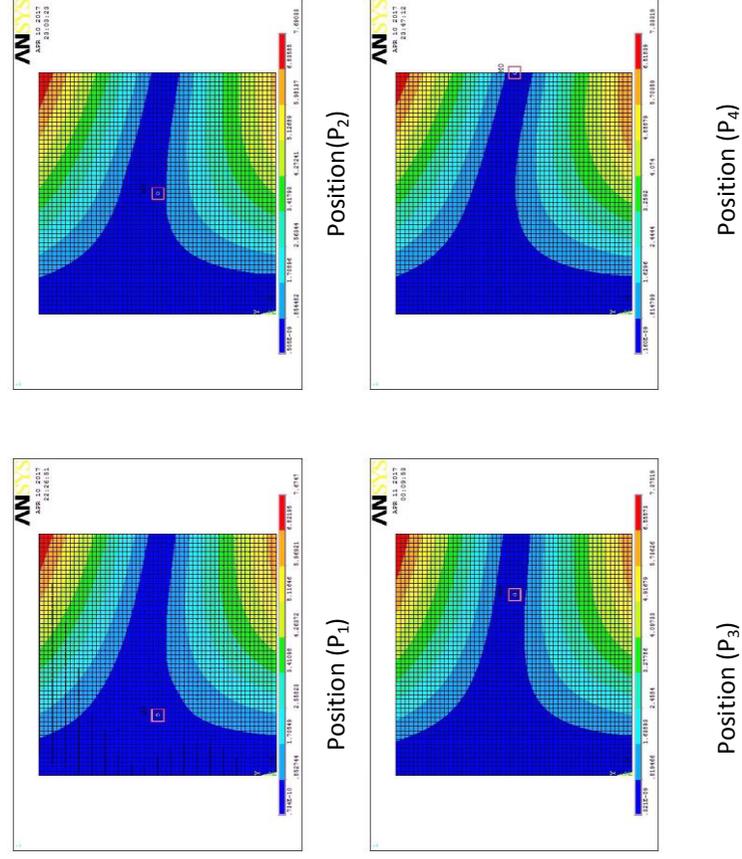


Figure 4.11 Déformée propre du deuxième mode de vibration en plaque ayant $[\pm 20]_2$ s avec masse attachée 25 g (M/6)

Maintenant si on se s'intéresse au comportement vibratoire de la plaque sous l'influence proprement dite de la masse ajoutée, supposée attachée suivant les positions $P_{i=1,2,3,4}$, on observe que l'allure de la courbe des fréquences va en décroissance au fur et à mesure que l'on s'éloigne du bord d'encastrement et en allant vers le point du bord libre figure 4.7. On remarque aussi que le seuil de la fréquence associée à la masse attachée près du bord d'encastrement P_1 s'identifie par rapport à celle du cas de la plaque sans masse attachée ($f_p=4,8\text{Hz}$) \approx ($f_0=5,1\text{ Hz}$) figure 4.7 et tableau 4.2. Cela s'explique par l'insensibilité de la plaque à l'effet de la masse rapprochée près du bord d'encastrement à (position P_1) figure 4.10.

Si on s'intéresse aux séquences modales des modes supérieures (2^{ème} mode et 3^{ème} mode) la comparaison entre les résultats obtenus avec et sans masse attachée, montre une faible différence fréquentielle au droit du point à la position P_3 qui se situe dans la zone nodale pour le 3^{ème} mode figure 4.9. Le 2^{ème} mode (figure 4.8) affiche pour toute les positions de la masse attachée $P_{i=1,2,3,4}$ une évolution presque constante du niveau des seuils de fréquences qui s'explique par le faite de leurs positions relative qui s'inscrive dans les zones nodales à faible amplitude vibratoire (figure 4.11 et 4.12).

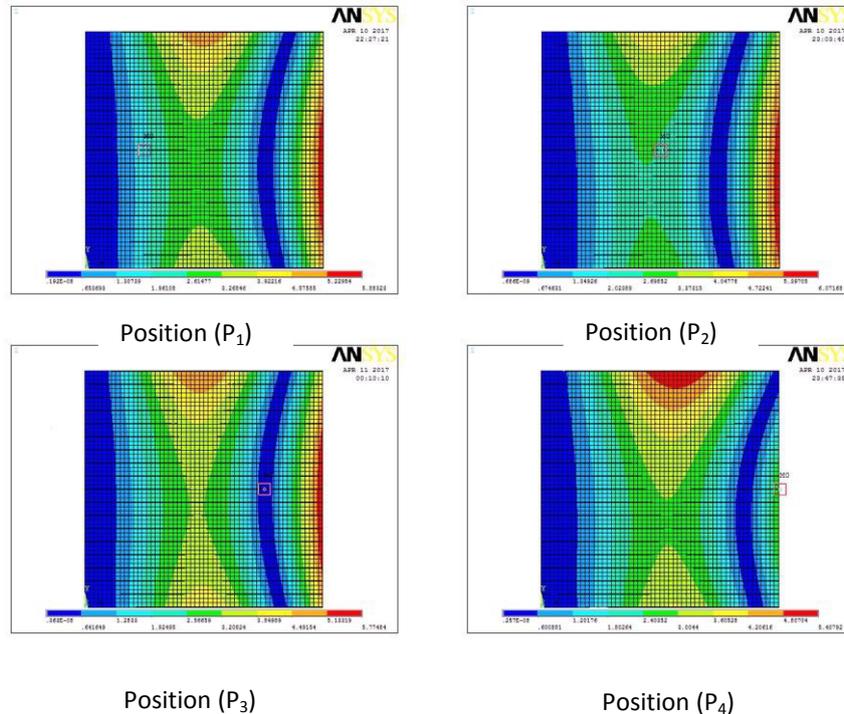


Figure 4.12 Déformée propre du troisième mode de vibration en plaque ayant $[\pm 20]_2s$ avec masse attachée /25 g ($M/6$)

4.7 Les facteurs influençant l'effet de la masse attachée par la méthode de *Taguchi*

Les procédures de conception expérimentales sont très complexes et difficiles à utiliser, surtout si, ces procédures sont accompagnées d'un grand nombre de facteurs d'influence et de conditions à prendre en compte. La méthode de *Taguchi* vient pour enrichir les méthodes de plan d'expériences en apportant un champ de possibilité varié permettant le traitement de plusieurs types d'expérience en tenant compte des combinaisons nécessaire et déterminantes des facteurs d'influence. Le but de la méthode est de simplifier le protocole expérimental sans porter préjudice à la qualité des résultats, et afin de mettre en évidence les effets des facteurs d'influence du comportement sur la réponse. Donc, l'utilisation de la méthode de *Taguchi* est efficace pour réduire les procédures et les nombres d'essais, tout en conservant une bonne précision alliée à une réduction économique du cout de réalisation. En effet, l'avantage qui distingue cette méthode est de réduire le temps nécessaire à la réalisation expérimental tout en permettant l'identification rapide des facteurs d'influence importants déterminant, qui caractérise fidèlement le comportement intrinsèque de la structure. Ceci permet, d'économiser les efforts et les coûts engendrés pendant l'expérimentation [75,76].

4.7.1 Le rapport « ratio signal / bruit »

Les méthodes classiques font intervenir pour chaque essai la valeur moyenne des différentes mesures faites, mais cependant, ne tiennent pas en compte l'effet de la dispersion des mesures. De ce fait, la supériorité de la méthode *Taguchi*, est apparente en se distinguant par la prise en compte de l'objectif recherché (le signal), ainsi que l'effet de la dispersion de cette valeur (le bruit) grâce à l'utilisation d'un indicateur de performance nommé le rapport «signal / bruit ». Cet indicateur se calcule suivant la nature de l'expérience étudiée [77] :

Ratio signal / bruit dans le cas d'un critère ciblé

Avec des valeurs mesurées toutes positives :

$$\frac{S}{N}(dB) = 10 \log \left[\left\{ \frac{\bar{y}}{s} \right\}^2 - \frac{1}{n} \right] \quad (4.21)$$

Avec des valeurs mesurées positives et négatives

$$\frac{S}{N} (dB) = -10 \log(s^2) \quad (4.22)$$

Ratio signal / bruit dans le cas d'un critère à minimiser

$$\frac{S}{N} (dB) = -10 \log(s^2 + (\bar{y})^2) \quad (4.23)$$

Ratio signal / bruit dans le cas d'un critère à maximiser

$$\frac{S}{N} (dB) = 10 \log[(\bar{y})^2] - 10 \log \left[1 + 3 \left(\frac{s}{\bar{y}} \right)^2 \right] \quad (4.24)$$

\bar{y} = moyenne arithmétique des valeurs mesurées

s = écart-type des valeurs mesurées

n = nombre de mesures effectuées

Dans tous les cas, on retiendra que la performance est d'autant plus grande que le rapport signal / bruit est élevé [77].

4.7.2 Application de la méthode Taguchi

Dans ce travail, on prend en compte quatre paramètres d'influence suivant quatre niveaux d'empilement (Tableau 4.7). La matrice orthogonale $L_{16} (4^4)$ standard (Tableau 4.8) a été utilisée pour optimiser les facteurs influençant l'effet de la masse attachée sur les fréquences propres des plaques stratifiés composites.

Le plan d'expériences indique que seuls 16 essais avec différentes combinaisons de niveaux des facteurs doivent être menés. Cependant, sans l'utilisation de la méthode *Taguchi*, 4^4 ou 256 des essais seraient nécessaires pour apprendre les facteurs influençant les fréquences propres de vibration. Ces facteurs sont les positions de la masse attachée (P1, P2, P3 et P4), le nombre de couches (8, 16, 24 et 32), les rapports de poids de la masse attachée ($M / 6$, $M / 3$, $M / 2$ et $2 M / 3$), où M est d'environ 150 g et représente le poids de la plaque composite contient 8 couches ($n = 2$), et les séquences d'empilement ($[\pm 20]_{ns}$, $[\pm 40]_{ns}$, $[\pm 60]_{ns}$, $[\pm 80]_{ns}$) (Tableau 4.7).

Le logiciel *Minitab* a été utilisé pour les différents calculs et pour la détermination de l'influence des facteurs étudiés. Ainsi que, l'interaction entre les paramètres des facteurs précédents est négligeable, dans la présente étude.

Tableau 4.7 Les niveaux de facteurs

Facteurs	Symbole	Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3	Niveau 4
Séquences d'empilement	A	$[\pm 20]_{ns}$	$[\pm 40]_{ns}$	$[\pm 60]_{ns}$	$[\pm 80]_{ns}$
Positions de la masse attachée	B	P1	P2	P3	P4
Poids de la masse attachée	C	M/6	M/3	M/2	2M/3
Nombres de couches	D	8	16	24	32

L'objectif de cette partie de recherche était de minimiser l'effet de la masse attachée sur les fréquences propres des plaques stratifiés composites, afin, d'optimiser le poids massique, l'emplacement de la masse, le nombre de couches et les séquences d'empilement.

Le plus bas est le mieux ou l'optimum est au minimum, c'est la caractéristique de meilleure qualité qui a été utilisée comme indiqué dans l'équation. (4.23).

Tableau 4.8 Matrice orthogonale L_{16} de Taguchi

Tests	Facteurs			
	A (Séquences d'empilement)	B (Positions de la masse attachée)	C (Poids de la masse attachée)	D (Nombres de couches)
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	1	4	4	4
5	2	1	2	3
6	2	2	1	4
7	2	3	4	1
8	2	4	3	2
9	3	1	3	4
10	3	2	4	3
11	3	3	1	2
12	3	4	2	1
13	4	1	4	2
14	4	2	3	1
15	4	3	2	4
16	4	4	1	3

Pour analyser l'effet de la masse attachée sur les fréquences propres de la plaque stratifiées composites, la variation relative de la fréquence propre (4.25) des trois premiers modes de vibration en flexion sont calculées (voir le tableau 4.10) par l'utilisation de l'équation suivante :

$$\Delta f = \left(\frac{f_0 - f_p}{f_0} \right) \cdot 100 \quad (4.25)$$

Où,

f_0 : fréquences propres des stratifiés sans masse attachée (Tableaux 4.2 à 4.5).

f_p : fréquences propres des stratifiés avec masse attachée mesurées pour différents paramètres de facteurs (voir le tableau 4.9).

Tableau 4.9 Fréquences propres expérimentales et numériques des plaques selon les différents facteurs

Test	Facteurs				Mode 1 (1,1)		Mode 2 (1,2)		Mode 3 (2,1)	
	A	B	C	D	f_p (Hz)	f_p (Hz)	f_p (Hz)	f_p (Hz)	f_p (Hz)	f_p (Hz)
					Exp	FEM	Exp	FEM	Exp	FEM
1	[±20] _{ns}	P1	M/6	8	4,9	4,8210	21,4	21,848	27,5	27,998
2	[±20] _{ns}	P2	M/3	16	9,1	9,2103	44	44,362	53,6	52,439
3	[±20] _{ns}	P3	M/2	24	12,6	12,564	66,6	66,405	86,2	88,046
4	[±20] _{ns}	P4	2M/3	32	15,1	14,565	88,9	88,185	93,8	95,544
5	[±40] _{ns}	P1	M/3	24	23,3	23,404	95,5	96,558	133,2	132,24
6	[±40] _{ns}	P2	M/6	32	30,6	30,796	127,9	128,14	175	176,24
7	[±40] _{ns}	P3	2M/3	8	4,8	5,1490	31,1	31,042	43,2	44,330
8	[±40] _{ns}	P4	M/2	16	10,3	10,572	65,1	63,811	67,4	66,429
9	[±60] _{ns}	P1	M/2	32	53,5	53,333	129,8	129,24	257,5	257,12
10	[±60] _{ns}	P2	2M/3	24	38,2	38,003	96,7	97,121	181,1	182,71
11	[±60] _{ns}	P3	M/6	16	24,9	24,825	65	64,788	123,7	122,73
12	[±60] _{ns}	P4	M/3	8	7,5	8,2420	30,9	31,394	41,9	43,446
13	[±80] _{ns}	P1	2M/3	16	35	34,999	48,6	48,933	93,2	91,841
14	[±80] _{ns}	P2	M/2	8	15,3	15,519	24,4	24,259	40	38,839
15	[±80] _{ns}	P3	M/3	32	65,6	65,451	97,6	97,805	169	171,82
16	[±80] _{ns}	P4	M /6	24	46,8	47,306	73,9	73,254	125,1	126,02

La comparaison concernant la qualité des résultats entre les fréquences propres obtenues sous l'effet de la masse attachée avec celles de la méthode des éléments finis et/ou expérimentale, montre une bonne concordance.

Tableau 4.10 Résultats expérimentale de la dispersion

Test	Facteurs				Modes vibratoires		
	A	B	C	D	Mode1	Mode 2	Mode 3
					(1,1)	(1,2)	(2,1)
Δf_1 %	Δf_2 %	Δf_3 %					
1	$[\pm 20]_{ns}$	P1	M/6	8	2,9	0,9	7,4
2	$[\pm 20]_{ns}$	P2	M/3	16	4,6	0,5	10,06
3	$[\pm 20]_{ns}$	P3	M/2	24	12,6	0,1	3,6
4	$[\pm 20]_{ns}$	P4	2M/3	32	22,04	0,2	19,7
5	$[\pm 40]_{ns}$	P1	M/3	24	1,3	0,8	1,98
6	$[\pm 40]_{ns}$	P2	M/6	32	1,03	0,01	4,1
7	$[\pm 40]_{ns}$	P3	2M/3	8	40,7	2	3,6
8	$[\pm 40]_{ns}$	P4	M/2	16	33,6	0,1	26,6
9	$[\pm 60]_{ns}$	P1	M/2	32	1,6	0,07	0,3
10	$[\pm 60]_{ns}$	P2	2M/3	24	7,07	0,6	7,3
11	$[\pm 60]_{ns}$	P3	M/6	16	8,3	0,7	5,5
12	$[\pm 60]_{ns}$	P4	M/3	8	44,06	3,7	38,5
13	$[\pm 80]_{ns}$	P1	2M/3	16	0,83	0,6	2,1
14	$[\pm 80]_{ns}$	P2	M/2	8	13,2	2,4	16,84
15	$[\pm 80]_{ns}$	P3	M/3	32	7,1	0,6	9,6
16	$[\pm 80]_{ns}$	P4	M/6	24	11,45	0,3	11,7

4.7.3 Analyse et évaluation des résultats expérimentaux à l'aide du modèle Taguchi

4.7.3.1 Analyse du rapport signal - bruit (S / N)

L'équation (lower is the better) a été utilisée pour le calcul du rapport S / N. Le tableau 4.11 montre les valeurs des rapports S / N pour chaque essai. Donc, l'analyse de l'effet de chaque facteur sur les valeurs des Δf_1 , Δf_2 et Δf_3 a été effectuée et l'influence de chaque facteur sont illustrés sur les tableaux 4.12 - 4.14.

Tableau 4.11 Les valeurs du rapport S/N pour chaque essai

Test	Mode 1	Mode 2	Mode 3
	S/N Ratio for Δf_1 (%)	S/N Ratio for Δf_2 (%)	S/N Ratio for Δf_3 (%)
1	-9,2480	0,915	-17,385
2	-13,2552	6,021	-20,052
3	-22,0074	20	-11,126
4	-26,8642	13,979	-25,889
5	-2,2789	1,938	-5,933
6	-0,2567	40	-12,255
7	-32,1919	-6,021	-11,126
8	-30,5268	20	-28,497
9	-8,2995	23,099	10,457
10	-16,9884	4,437	-17,266
11	-18,3816	3,0987	-14,807
12	-32,8809	-11,3647	-31,709
13	1,6184	4,437	-6,444
14	-22,4115	-7,6047	-24,526
15	-17,0252	4,437	-19,645
16	-21,1761	10,4577	-21,363

Tableau 4.12 Les réponses S / N pour les variations relatives des fréquences propres (Δf_1)

Niveaux	Facteurs contrôlés			
	A	B	C	D
1	-17,844	-4,552	-12,27	-24,18
2	-16,314	-13,23	-16,36	-15,17
3	-19,138	-22,40	-20,81	-15,61
4	-14,749	-27,86	-18,61	-13,11
Delta	4,389	23,31	8,546	11,072
Rank	4	1	3	2

Les valeurs en gras indiquent les niveaux optimaux de facteurs de contrôle

Tableau 4.13 Les réponses S / N pour les variations relatives des fréquences propres (Δf_2)

Niveaux	Facteurs contrôlés			
	A	B	C	D
1	10,228	7,5971	13,617	-6,018
2	13,979	10,713	0,257	8,388
3	4,817	5,3786	13,87	9,208
4	2,932	8,2682	4,208	20,378
Delta	11,047	5,3347	13,615	26,397
Rank	3	4	2	1

Les valeurs en gras indiquent les niveaux optimaux de facteurs de contrôle

Tableau 4.14 Les réponses S / N pour les variations relatives des fréquences propres (Δf_3)

Niveaux	Facteurs contrôlés			
	A	B	C	D
1	-18,61	-4,826	-16,45	-21,18
2	-14,45	-18,52	-19,33	-17,45
3	-13,33	-14,17	-13,42	-13,22
4	-17,99	-26,86	-15,18	-11,83
Delta	5,282	22,039	5,912	9,353
Rank	3	2	4	1

Les valeurs en gras indiquent les niveaux optimaux de facteurs de contrôle

Les Tableaux 4.12 à 4.14 montrent les niveaux optimaux de facteurs de contrôle pour les variations optimales de fréquences propres pour les trois modes de vibration. Les valeurs du niveau des facteurs de contrôle sont présentées sur les graphes illustrés sur les figures 4.13 à 4.18. Les valeurs les plus élevées du rapport S / N représentent les meilleurs niveaux de facteurs de contrôle A, B, C et D.

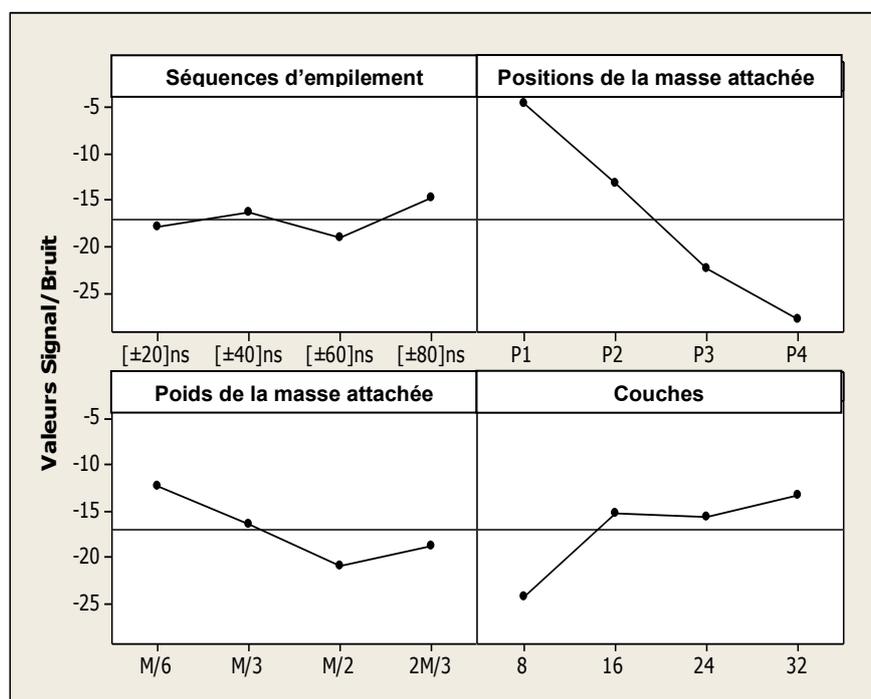


Figure 4.13 Les effets principaux basés sur le rapport signal/bruit pour Δf_1

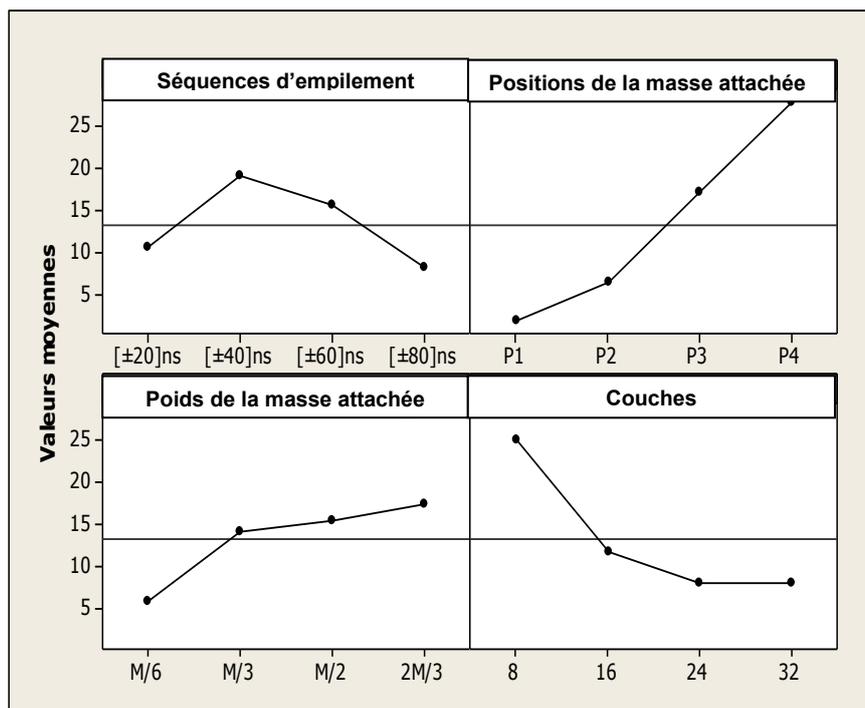


Figure 4.14 Les effets principaux basés sur les valeurs moyennes pour Δf_1

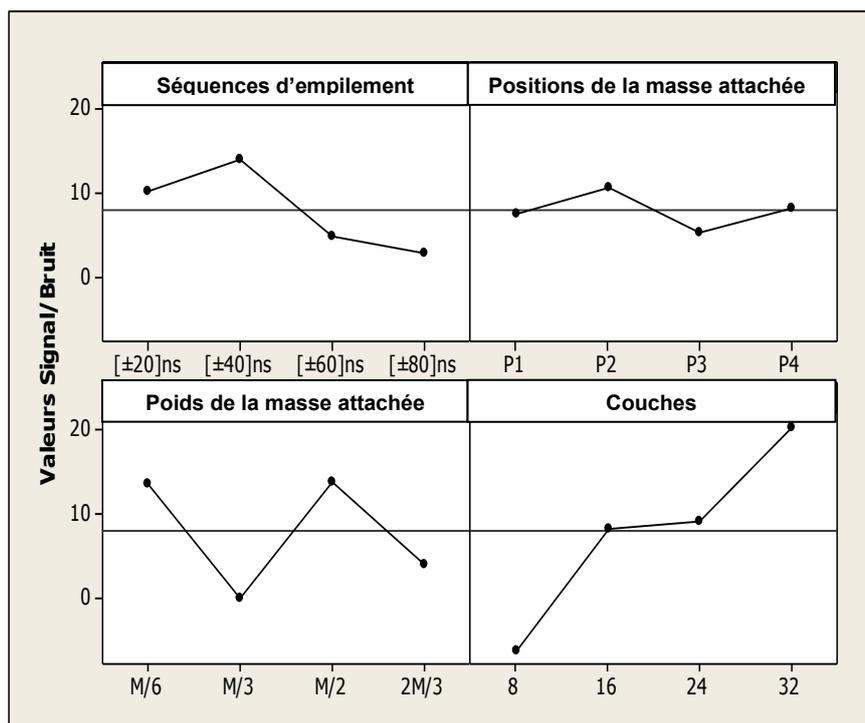


Figure 4.15 Les effets principaux basés sur le rapport signal/bruit pour Δf_2

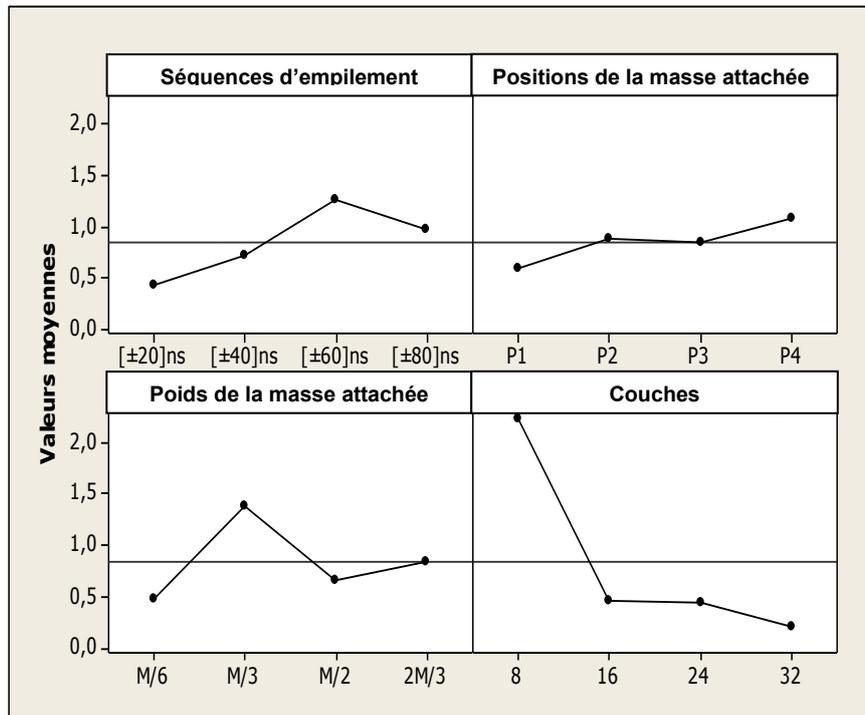


Figure 4.16 Les effets principaux basés sur les valeurs moyennes pour Δf_2

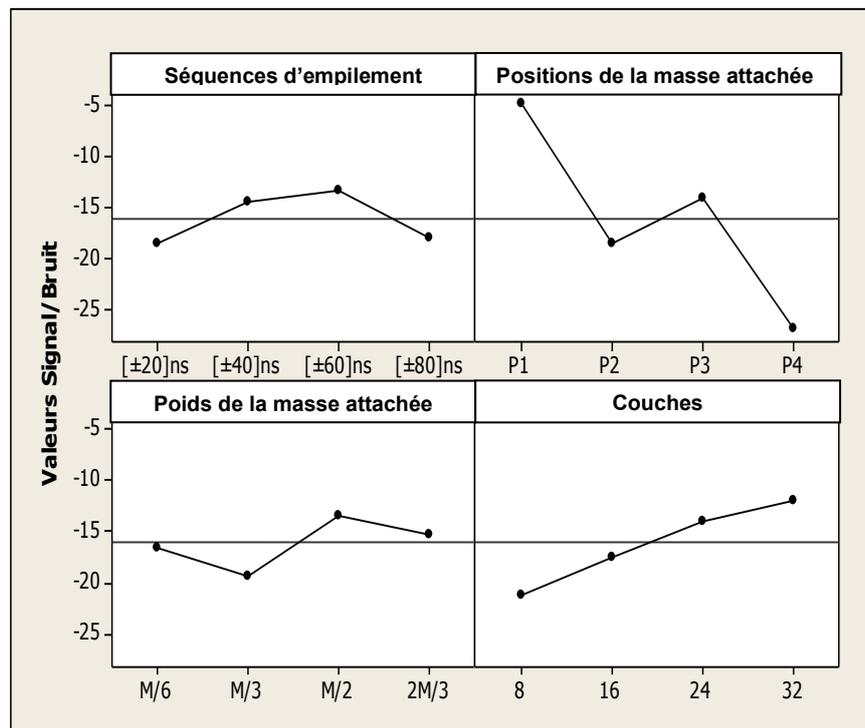


Figure 4.17 Les effets principaux basés sur le rapport signal/bruit pour Δf_3

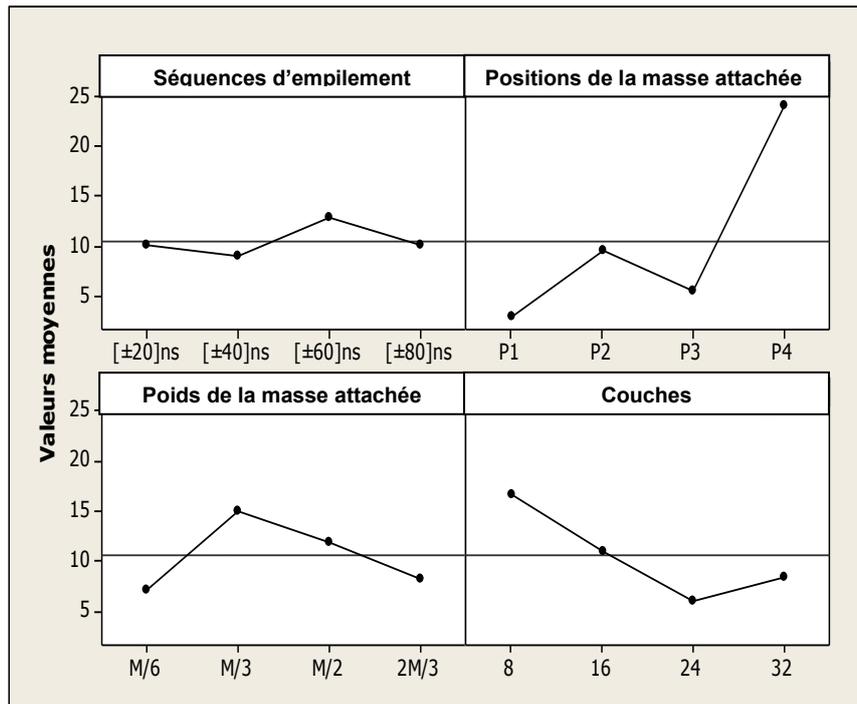


Figure 4.18 Les effets principaux basés sur les valeurs moyennes pour Δf_3

Les niveaux et les rapports S / N pour les facteurs qui donnent la meilleure valeur de Δf_1 correspondant au premier mode de vibration sont spécifiés comme suit : On sélectionne les cas d'intérêt optimum d'après ligne indiquées dans le tableau 4.12, notamment,

Le facteur d'influence de type A, niveau 4, S / N = - 14,749 ; le facteur B, niveau 1, S / N = - 4,552 ; le facteur C, niveau 1, S / N = - 12,266 ; et enfin le facteur D, niveau 4, S / N = - 13,111.

Les niveaux et les rapports S / N pour les facteurs qui donnent la meilleure valeur de Δf_2 correspondant au deuxième mode de vibration sont spécifiés comme suit : On sélectionne les cas d'intérêt optimum d'après ligne indiquées dans le tableau 4.13, notamment, Le facteur d'influence de type A, niveau 2, S / N = 13,979 ; le facteur B, niveau 2, S / N = 10,713 ; le facteur C, niveau 3, S/N = 13,873 ; et enfin le facteur D, niveau 4, S/N = 20,378.

Les niveaux et les rapports S / N pour les facteurs qui donnent la meilleure valeur de Δf_3 correspondant au troisième mode de vibration sont spécifiés comme suit : On sélectionne les cas d'intérêt optimum d'après ligne indiquées dans le tableau 4.14, notamment, Le facteur d'influence de type A, niveau 3, S / N = - 13,33 ; le facteur B, niveau 1, S / N = - 4,826 ; le facteur C, Niveau 3, S / N = - 13,42 ; et enfin le facteur D niveau 4, S / N = - 11, 83.

4.8 Méthode d'analyse de la variance (ANOVA)

Cette méthode nous permet d'identifier le meilleur choix optimal d'après les résultats de la présélection effectuée d'après la méthode d'analyse discutée précédemment de TAGUCHI.

L'objectif principal de l'utilisation de la méthode d'analyse de la variance (ANOVA) est d'étudier lequel des paramètres qui affecte de manière significative les fréquences propres de comportement vibratoire de la plaque composites. Ceci est obtenu en séparant la variabilité totale des rapports signal - bruit (rapports S / N) et en mesurant la somme des écarts quadratiques en fonction de la moyenne arithmétique totale du rapport S / N entre chacun des facteurs (16 tests) et en prenant en compte les erreurs associées. La somme totale des écarts quadratiques SS_T peut être calculée comme suit (4.26) :

$$SS_T = \sum_{i=1}^n (\mu_i - \bar{\mu})^2 \quad (4.26)$$

Où n est le nombre de tests et μ_i est le rapport moyen de S/N pour le $i^{\text{ème}}$ test [77].

La somme totale des écarts quadratiques SS_T est décomposée en deux sources : la somme des écarts quadratiques SS_P dus à chaque paramètre de processus et la somme de l'erreur quadratique SS_e .

$$SS_P = \sum_{j=1}^t \frac{(s\mu_j)^2}{t} - \frac{1}{n} [\sum_{i=1}^n \mu_i]^2 \quad (4.27)$$

Où p représente l'un des paramètres de l'expérience, j le numéro de niveau de ce paramètre p , t la répétition de chaque niveau du paramètre p , $s\mu_j$ est la somme du rapport S / N impliquant le paramètre p et le niveau j .

Le total de degrés de liberté est $D_T = n-1$, où les degrés de liberté du paramètre testé $D_p = t-1$.

La variance du paramètre testé est :

$$V_P = \frac{SS_P}{D_P} \quad (4.28)$$

La valeur F pour chaque paramètre de conception est le rapport de la moyenne des écarts carrés à la moyenne de l'erreur quadratique ($F_P = V_P / V_e$).

La somme corrigée des carrés S_p peut être calculée comme suit :

$$Sp = SS_p - D_p V_e \quad (4.29)$$

Le pourcentage de la contribution pour chaque paramètre peut être calculé comme suit :

$$R = \frac{\hat{s}_p}{SS_T} \quad (4.30)$$

Les résultats de l'ANOVA obtenus pour analyser la variation des fréquences propres des plaques composites avec et sans masse attachée sont présentés dans les tableaux 4.15- 4.17. Les tableaux donnent les résultats d'ANOVA des quatre facteurs de contrôle pour chaque niveau. La dernière colonne indique la valeur en pourcentage de chaque contribution factorielle. Cette analyse a été réalisée avec un niveau de confiance de 95%.

Tableau 4.15 Résultats d'analyse par la méthode de la variance (ANOVA) pour Δf_1

Source de variance	Degré de liberté (Dof)	Somme des écarts quadratiques	Moyen des écarts quadratiques	rapport F	Taux de contribution (%)
A	3	293,59	97,86	8,25	9,65
B	3	1605,07	535,02	45,11	52,79
C	3	316,96	105,65	8,91	10,42
D	3	788,76	262,92	22,17	25,94
Erreur	3	35,58	11,86		1,17
totale	15	3039,96			100

Tableau 4.16 Résultats d'analyse par la méthode de la variance (ANOVA) pour Δf_2

Source de variance	Degré de liberté (Dof)	Somme des écarts quadratiques	Moyen des écarts quadratiques	rapport F	Taux de contribution (%)
A	3	1,5422	0,5141	1,91	10,04
B	3	0,4707	0,1569	0,58	2,65
C	3	1,8982	0,6327	2,35	12,37
D	3	10,6301	3,5434	13,16	69,25
Erreur	3	0,8077	0,2692		5,25
totale	15	15,349			100

Tableau 4.17 Résultats d'analyse par la méthode de la variance (ANOVA) pour Δf_3

Source de variance	Degré de liberté (Dof)	Somme des écarts quadratiques	Moyen des écarts quadratiques	rappor F	Taux de contribution (%)
A	3	32,33	10,78	0,33	2,02
B	3	1071,27	375,09	10,99	67,01
C	3	155,19	51,73	1,59	9,7
D	3	242,42	80,81	2,49	15,16
Erreur	3	97,45	32,48		6,09
totale	15	1598,66			100

L'influence de la masse attachée sur le comportement vibratoire est appréciée d'après le facteur de contribution utilisé comme indicateur d'influence qui mesure le niveau de la sensibilité du comportement vibratoire.

Les taux de contributions en pourcentage des effets de chaque facteur (A, B, C et D) sur la variation des fréquences propres, d'après chaque séquence modale sont identifiés suivant les différents cas présentés aux tableaux 4.15- 4.17.

Pour le taux de contribution d'après le premier mode on trouve respectivement en correspondance avec les facteurs d'influence A, B, C, D, les valeurs 9,65, 52,79, 10,42 et 25,94%. Ainsi, le facteur le plus important qui affecte la fréquence propre du premier mode de vibration correspond à l'emplacement relatif de la masse attachée par rapport au bord encastré (facteur B, 52,79%).

Pour le taux de contribution d'après le deuxième mode on trouve respectivement en correspondance avec les facteurs d'influence A, B, C, D, les valeurs 10,04, 2,65, 12,37 et 69,25%. Ainsi, le facteur le plus important qui affecte la fréquence propre du premier mode de vibration correspond au nombre de couches (facteur C, 69,25%). Cela vient du fait que pour le deuxième mode la plaque présente un comportement rigide favorisant l'effet de l'épaisseur et du cisaillement et fait inscrire l'ensemble des lieux d'emplacements de la masse attachée au droit des zones nodales. Par conséquence, on peut déduire, que les fréquences sont dominées beaucoup par l'effet d'onde apportée par la forme modale qui favorise une plus grande sensibilité au cisaillement de l'ensemble de la plaque.

Pour le taux de contribution d'après le troisième mode on trouve respectivement en correspondance avec les facteurs d'influence A, B, C, D, les valeurs 2,02, 67,01, 9,7 et 15,16%, Ainsi, le facteur le plus important qui affecte la fréquence propre du premier mode

de vibration correspond à l'emplacement relatif de la masse attachée par rapport au bord encastré (facteur B, 67,01%). On fait remarquer avant de conclure que le pourcentage des erreurs est relativement faible avec respectivement 1,17, 5,25 et 6,09 %.

4.9 Conclusion

Ce travail présente les résultats de l'étude expérimentale, afin de déterminer les effets de la masse attachée sur le comportement dynamique des plaques stratifié composite en cas de vibration libre en flexion, avec les conditions aux limites encastrée-libre-libre-libre (ELLL). En outre, l'étude présente une modélisation par la méthode des éléments finis réalisée à l'aide du logiciel ANSYS et validée expérimentalement. Pendant l'investigation, quatre facteurs influençant l'effet de la masse attachée sur les fréquences propres ont été étudiés à l'aide de la méthode *Taguchi*. Cette méthode a été utilisée pour identifier les facteurs d'influence notable sur les modes de vibration.

Grâce aux résultats obtenus ci-dessus, les conclusions suivantes pourraient être tirées :

- Une étude préalable sur le comportement vibratoire libre des plaques caractérisée par les mêmes conditions limite (ELLL), et qui varient d'une part, en fonction de l'orientation des fibres avec quatre modèles de type $([\pm 20]_{ns}, [\pm 40]_{ns}, [\pm 60]_{ns}, [\pm 80]_{ns})$, et d'autre part, du nombre des séquences d'empilement [8, 16, 24, 32 couches]. On obtient ainsi 16 types de plaques sans la présence de masse attachées, utilisées comme base de comparaison et de référence par rapport à d'autres cas en présence de masses supplémentaire attachées. Deux méthodes d'investigation sont observées, notamment, la première expérimentale et la deuxième utilisant le code (MEF) ANSYS. Les réponses numériques pour les 16 modèles de plaque sans masse attachée, présente de faibles dispersions comparées à ceux obtenues d'après la méthode expérimentale. Cependant, on observe que les réponses numériques sont moins conservatives et par conséquent affiche en apparence une meilleure qualité de réponses. Cependant, on ne peut pas généraliser cette remarque pour le cas des plaques en vibration libre, avec la présence de masse attachées. Cette première étape est nécessaire seulement, afin de constituer la base de données référentielle pour servir d'étude à la sensibilité des plaques en vibration libre sous l'effet de la présence des masses attachées (Tableaux 4.2-4.5).

- Le modèle de référence de la plaque $[\pm 20]_{2s}$ avec 8 couches d'empilement est choisi pour la comparaison de cette même plaque mais en présence de la masse attachée, localisée suivant quatre positions différentes P1, P2, P3, et P4. On observe dans ce cas comme il a été indiqué précédemment que pour le cas du 3^{ème} mode avec la position de la masse attachée P3, ainsi que pour le cas du 2^{ème} mode et pour toutes les positions P1, P2, P3, et P4, on observe le même seuil pour les fréquences vibratoire de la plaque, aussi bien, avec et sans masse attachée. On peut donc traduire ce résultat par le fait que la plaque est moins sensible à l'effet de la masse attachée. D'autre part, on peut justifier cette situation par le fait de l'emplacement de la masse attachée qui s'inscrit dans la zone nodale caractérisée par de faible amplitude vibratoire. L'influence de l'emplacement de la masse devient appréciable, pour le cas du 1^{er} mode pour tous les points P1, P2, P3, et P4. Cette même influence apparait partiellement pour le cas du 3^{ème} mode et pour les emplacements P1, P2, et P4. On observe en générale une décroissance pour les fréquences vibratoire de la plaque, aussi bien, avec et sans masse attachée. Le seuil des fréquences inférieures est d'autant plus faible que l'on s'éloigne du bord encasté.
- En d'autres termes, grâce à la méthode TAGUCHI on a observé une présélection des choix optimaux en déduisant respectivement suivant le numéro modal choisit : que la valeur optimale de Δf_1 a été obtenue avec un poids de masse attachée à 25 g (M / 6) au point P₁ et à la séquence d'empilement symétrique $[\pm 80]_{ns}$ avec 32 couches soit la présélection caractérisée par la notation (A4 B1 C1 D4) . En outre, pour Δf_2 , la valeur optimale a été obtenue à l'emplacement P₂, avec des séquences d'empilement symétriques $[\pm 40]_{ns}$ et ensuite, pour 32 couches avec 75 g (M / 2) pour le poids de la masse attachée soit la présélection caractérisée par la notation (A2 B2 C3 D4). Finalement, pour la variation de la fréquence propre Δf_3 , la valeur optimale a été obtenue avec un poids de masse attachée, 75 g (M/2) au point P₁ et en séquence d'empilement symétrique $[\pm 60]_{ns}$ avec 32 couches soit la présélection caractérisée par la notation (A3 B1 C3 D4).
- Selon les résultats des analyses statistiques (ANOVA), il a été constaté que la position de la masse attachée mesurée à partir du bord encasté était le facteur le plus important affectant les fréquences propres, correspondant aux cas des deux modes vibratoire respectivement mode1, et 3. (Tableau 4.15 et Tableau 4.17).

- Selon les résultats des analyses statistiques (ANOVA), il a été constaté que pour le mode 2 la masse attachée suivant les différentes positions P1, P2, P3, et P4 s'inscrit dans la zone nodale caractérisée par son insensibilité au vibration en affichant beaucoup plus l'influence dominante du nombre d'empilement désigné par le symbole D et indiquant le pourcentage le plus élevé égale à 69,25% (Tableau 4.16)

Chapitre V
Analyse par éléments finis du comportement dynamique
des composites sandwichs

Chapitre V

Analyse par éléments finis du comportement dynamique des composites sandwichs

5.1 Introduction

Comme indiquée précédemment (chapitre I), les sandwichs sont des matériaux constitués de deux feuilles ou plaques (peaux) de faible épaisseur et de grande rigidité collées au droit des extrémités supérieures et inférieures d'un matériau de faible masse volumique (l'âme). Le rôle essentiel de l'âme du sandwich est la transmission par cisaillement des actions mécaniques en interactions avec les deux peaux extérieures (figure 1.4). Le matériau sandwich est un excellent isolant thermique, acoustique, et en même temps se distingue par une robustesse à la flexion alliée à une légèreté économique.

Plusieurs études sur les composites sandwichs sont réalisées pour améliorer les performances spécifiques au comportement mécanique, acoustique, et thermique. Dans ce contexte, l'étude présente se penche sur l'aspect au comportement mécanique. L'analyse du comportement vibratoire de la plaque sandwich est abordée numériquement utilisant le code de calcul ANSYS. L'objet de l'analyse est de reprendre les mêmes hypothèses concernant l'étude à la sensibilité vibratoire des plaques composites précédemment étudiées (chapitre IV), en tenant en compte en plus des effets d'emplacement de la masse attachée sur les fréquences propres, un élargissement de l'étude paramétrique qui tient compte de plusieurs facteurs notamment, les caractéristiques mécaniques de plusieurs types d'âmes, les rapports d'épaisseur d'âme/épaisseur de la plaque (h_c/h), et les rapports longueur / largeur de la plaque (a/b).

5. 2 Modélisation par éléments finis

La même analyse par la méthode des éléments finis du problème précédent en stratifiés composites qu'elles soient pour sandwich avec ou sans masse attachée (Section 4.4), ont été adoptées pour les deux peaux et l'âme est considérée comme un solide tridimensionnel.

5.3 Plaques étudiées

Les plaques sandwich étudiées ont des géométries rectangulaires, les peaux sont composées en deux stratifiés composites ayant un renfort en fibres unidirectionnel de verre et la matrice en résine polyesters et l'âme rigide en mousse PVC. La plaque est supposée avoir une longueur $a=100$ mm, largeur $b=100$ mm et une épaisseur totale $h=10$ mm comme le montre sur la figure 5.1.

Les peaux sont représentées en couches minces orthotropes, tandis que l'âme en mousse est considérée un matériau isotrope. L'orientation des fibres pour chaque couche de peaux est représentée par un angle θ . Cette orientation est mesurée à partir de l'axe x et lorsque les fibres sont parallèles à l'axe x , θ est égale à 0° , et lorsqu'elles sont parallèles à l'axe y , θ est égale à 90° .

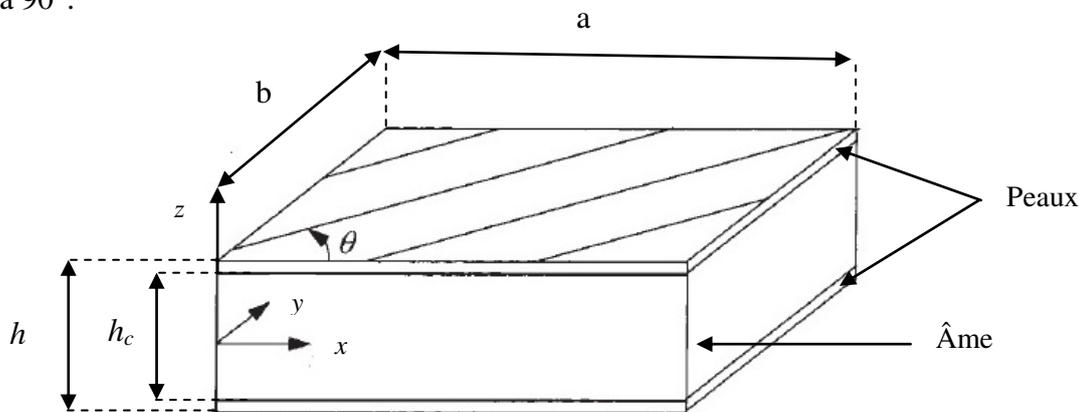


Figure 5.1 Géométrie de la plaque sandwich

Le calcul de structures par la méthode des éléments finis a été effectué en utilisant le code de calcul ANSYS. Le matériau sandwich est modélisé par trois structures orthotropes représentant les deux peaux et l'âme en mousse PVC.

Le type d'élément adopté pour les peaux est SHELL281, il a été utilisé pour analyser les structures de coque minces à modérément épaisses. L'élément a huit nœuds chaque un a six degrés de liberté : trois translations suivant les axes x , y et z et trois rotations autour les axes x , y et z .

L'élément SOLID185 est utilisé pour l'analyse de l'âme en mousse. Il est défini par huit nœuds ayant trois degrés de liberté en translations dans les directions nodales x , y et z (Figure 5.2). La masse attachée à la plaque est modélisée par l'utilisation de l'élément 3D mass 21.

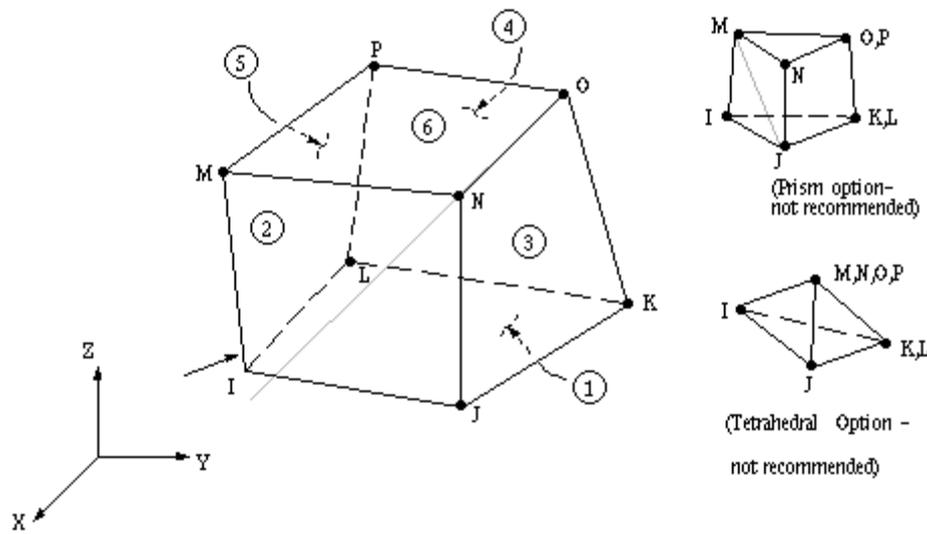


Figure 5.2 La géométrie de l'élément coque SOLID 185 [73]

La modélisation par la méthode des éléments finis est basée sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre pour les deux peaux ainsi, la modélisation de l'âme est basé sur la méthode 3D de structures solides [73].

Les propriétés mécaniques des peaux et les âmes en mousse PVC sont données dans les tableaux 5.1 et 5.2 respectivement.

Tableau 5.1 Propriétés mécaniques du verre /polyester [78]

Module de Young (GPa)		Module de cisaillement (GPa)		Coefficient de Poisson	Masse volumique Kg/m ³
E ₁₁	E ₂₂ , E ₃₃	G ₁₂ , G ₁₃	G ₂₃	ν_f	ρ_f
24,51	7,77	3,34	1,34	0,078	1800

Tableau 5.2 Propriétés mécaniques des âmes en mousse PVC [78]

Propriétés mécaniques	HEREX C70.40	HEREX C70.55	HEREX C70.75	HEREX C70.90	HEREX C70.130
E _c (MPa)	22,69	37,81	56,95	73,11	103,63
G _c (MPa)	14	22	30	38	50
ρ_c (kg/m ³)	40	55	75	90	130
ν_c	0.32	0.32	0.32	0.32	0.32

5.4 Précision des résultats

Le but de cette partie est de prouver la précision du modèle proposé par la comparaison entre les résultats obtenus avec ceux issus de modèles de calcul par éléments finis et analytique dans les autres références.

Les fréquences non-dimensionnelles sont obtenues par l'utilisation de l'équation suivante :

$$w = \omega(a^2 / h) \sqrt{(\rho_c / E_c)} \quad (5.1)$$

ω est la fréquence propre en Hertz.

5.4.1 Fréquence propre non-dimensionnelle sans masse attachée

Deux plaques sandwichs $[0^\circ / 90^\circ / 0^\circ / \hat{A}me / 0^\circ / 90^\circ / 0^\circ]$ et $[45^\circ / -45^\circ / 45^\circ / \hat{A}me / -45^\circ / 45^\circ / -45^\circ]$ symétrique et antisymétrique respectivement sont considérés. Les deux plaques sont possédants les mêmes peaux verre/polyester et l'âme en mousse PVC de type HEREX C70.130. Les tableaux 5.3 et 5.4 présentent les résultats de fréquences propres non-dimensionnelles pour les plaques sandwichs simplement appuyée sans présence de masse attachée.

Tableau 5.3 Fréquences propres non-dimensionnelles de la plaque $[0^\circ / 90^\circ / 0^\circ / \hat{A}me / 0^\circ / 90^\circ / 0^\circ]$ simplement appuyée avec, $a/b = 1$, $a/h = 10$, $h_c/h = 0.88$

Mode (m, n)	Le modèle présent	Analytique [79]	FEM [80]
(1,1)	14,565	14,74	15,04
(2,1)	23,180	26,83	28,10
(1,2)	24,906	27,53	29,20
(2,2)	34,911	35,60	37,76

Tableau 5.4 Fréquences propres non-dimensionnelles de la plaque $[45^\circ / -45^\circ / 45^\circ / \hat{A}me / -45^\circ / 45^\circ / -45^\circ]$ simplement appuyée avec, $a/b = 1$, $a/h = 10$ et $h_c/h = 0.88$

Mode (m, n)	Le modèle présent	Analytique [79]	FEM [80]
(1,1)	15,031	15,53	16,09
(2,1)	24,220	27,36	28,93
(1,2)	24,220	27,36	28,93
(2,2)	35,170	36,39	38,76

Les résultats indiquent que le modèle présent (code APDL) donne des résultats de fréquences propres similaires à celles des modèles présentés aux références [80] et [79]. La faible divergence trouvée est due essentiellement à la différence entre les approches de calcul théorique entre les modèles présentés. Dans ce contexte, les calculs de contraintes principalement en cisaillement présentés par Nayak et al [80] et Melekzadeh et al. [79] ont été soumis aux approches théoriques uniquement bidimensionnelles d'ordre supérieur. Cependant, le présent modèle a été basé sur l'approche théorique d'élasticité tridimensionnelle pour l'âme épaisse et par la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre pour les deux peaux minces.

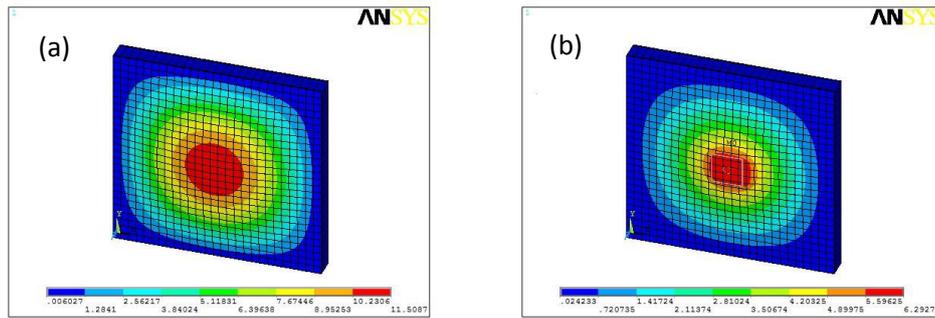
On voit que, les valeurs de fréquences obtenues par la méthode numérique proposée (MEF) sont plus conservative par rapport à celles des modèles présentés aux références [80] et [79]. Ceci montre la bonne qualité des résultats obtenus par notre modèle de calcul par éléments finis, et justifie en même temps l'importance de notre méthode de calcul (MEF) dans le cas de la plaque sandwichs en mouvement vibratoire.

5.4.2 Effet de la masse attachée sur les fréquences propres non-dimensionnelles

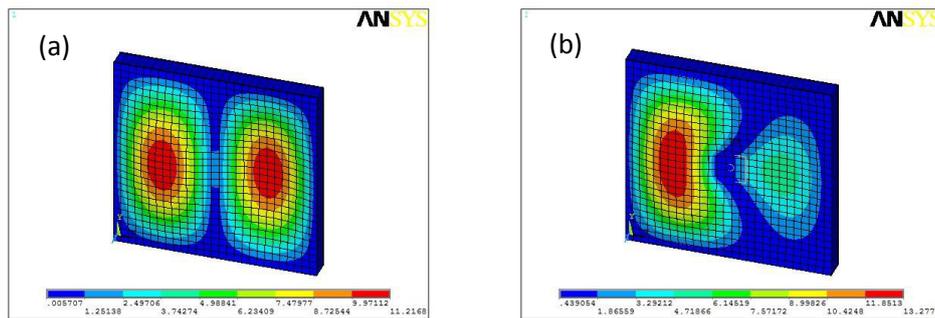
Un modèle des éléments finis de plaque sandwich avec masse attachée concentrée au centre de la plaque symétrique $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/\hat{A}me/0^\circ/90^\circ/0]$ ont été considérés. Les mêmes propriétés géométriques et mécaniques du problème précédent sont adoptées. Les quatre premières fréquences propres non-dimensionnelles de la plaque simplement appuyée avec masse attachée sont illustrées sur le tableau 5.5.

Tableau 5.5 Fréquences propres non-dimensionnelles de la plaque sandwich simplement appuyée avec masse attachée au centre de peau supérieure, $a/b = 1$, $a/h = 10$, $h_c/h = 0.88$

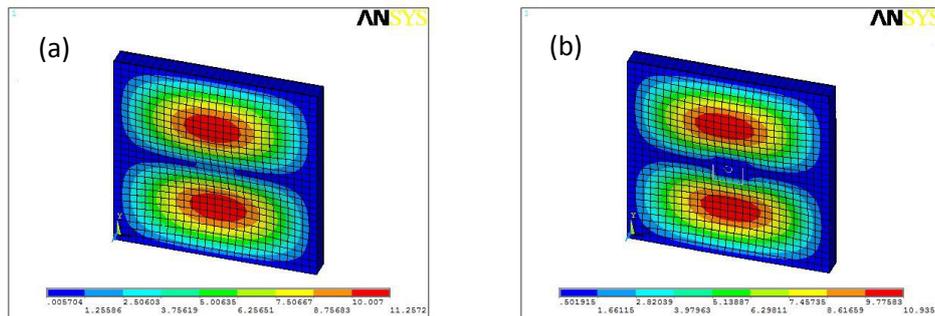
Mode (m, n)	Présent modèle	Melekzadeh et al.[43]
(1,1)	7,214	8,186
(2,1)	24,79	17,425
(1,2)	25,439	17,427
(2,2)	32,305	24,943



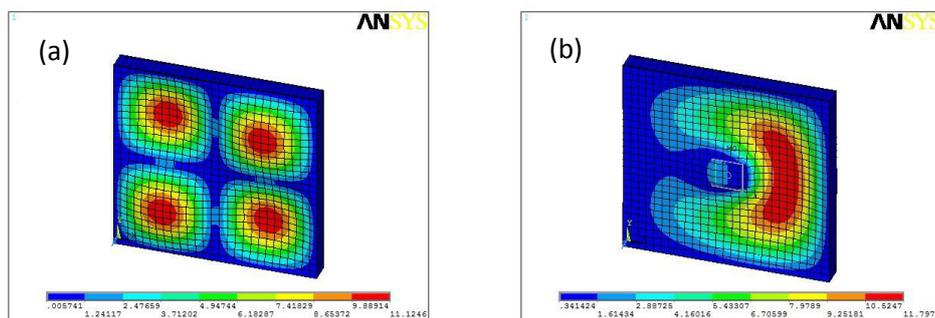
Mode (1,1)



Mode (2,1)



Mode (1,2)



Mode (2,2)

Figure 5.3 Modes propres de la plaque simplement appuyée, (a) modes sans masse attachée, (b) modes avec masse attachée.

On voit que, pour notre cas de calculs par la méthode des éléments finis utilisant de masse attachée, pour le cas des valeurs correspondant au 1^{er} mode de vibration, l'analyse comparative des valeurs fait montrer une faible dispersion, pour les fréquences fondamentales qui se démarque par rapport à celles obtenues par la méthode numérique (MEF) présentée par Melekzadeh et al [43].

En outre, si on s'intéresse aux séquences modales des modes supérieures (2^{ème} mode, 3^{ème} mode et 4^{ème} mode) la comparaison entre les résultats obtenus avec et sans masse attachée, montre une grande différence fréquentielle, qui se démarque par rapport à celles obtenues par la méthode numérique (MEF) présentée par Melekzadeh et al [43]. Cela s'explique par l'effet de la forme d'action massique utilisée pour les deux modèles. Alors que, la masse attachée est distribuée sur 20% de la surface de la peau supérieure pour la plaque sandwich présenté en [43]. Cependant, la forme de la masse attachée est concentrée au centre de la plaque pour notre modèle de calcul (voir la figure 5.3).

Donc, Les résultats obtenus sont similaires pour les deux modèles, où l'emplacement de la masse attachée est trouvé au niveau de lignes anti-nodales de vibrations (mode (1,1) figure 5.3).

5.5 Comportement dynamique en vibration libre de plaque composite sandwich

Ce problème est traité par le même d'une plaque sandwich rectangulaire ayant deux peaux en stratifiés composite alternées (angle-ply)[0°/90°/0°/Âme/0°/90°/0], encastrée sur un bord et libres sur les autres cotés (ELLL) avec et sans masse attachée. Les mêmes propriétés du problème précédent aussi bien géométriques (tableaux 5.3) que mécaniques tableaux 5.1 et 5.2), ont été adoptées. Les plaques de référence sont constituée d'un matériau de faible masse volumique (âmes en mousse PVC de type HEREX C70.130) sur lequel sont collées des feuilles ou plaque (les peaux en verre/polyester).

5.5.1 Influence des caractéristiques des âmes sur les fréquences propres non-dimensionnelles avec et sans masse attachée

L'analyse est effectuée pour 5 types de plaques sandwichs, ayant différents types d'âmes (HEREX C70.40, HEREX C70.55, HEREX C70.75, HEREX C70.90 et HEREX C70.130).

Les caractéristiques mécaniques des différentes âmes ont été représentées sur le tableau 5.2. et la masse attachée au centre de la plaque est égale 50 grammes.

Les résultats obtenus des fréquences propres non-dimensionnelles des trois modes suivant : mode (1,1), mode (1,2) et le mode (2,1) sont représentés dans les tableaux 5.6-5.8 respectivement.

Tableau 5.6 Fréquences propres non-dimensionnelles du mode (1,1) en fonction de différentes âmes avec et sans masse attachée

Âme en mousse PVC	Fréquences propres non-dimensionnelles		
	Sans masse	Avec masse	Diff %
HEREX C70.40	3,138	1,78	43,2
HEREX C70.55	3,411	2,129	37,58
HEREX C70.75	3,536	2,254	36,25
HEREX C70.90	3,570	2,336	34,97
HEREX C70.130	3,528	2,445	30,67

Tableau 5.7 Fréquences propres non-dimensionnelles de mode (1,2) en fonction de différente âmes avec et sans masse attachée

Âme en mousse PVC	Fréquences propres non-dimensionnelles		
	Sans masse	Avec masse	Diff %
HEREX C70.40	5,062	4,963	1,9
HEREX C70.55	5,622	5,589	0,5
HEREX C70.75	5,899	5,791	1,8
HEREX C70.90	6,076	5,947	2,1
HEREX C70.130	6,115	6,031	1,3

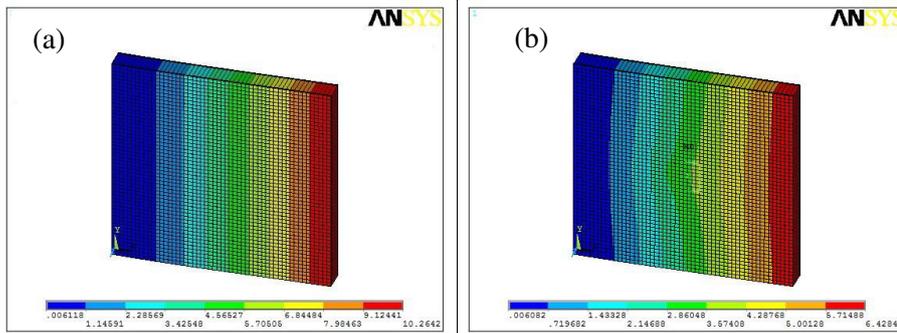
Tableau 5.8 Fréquences propres non-dimensionnelles de mode (2,1) en fonction de différente âmes avec et sans masse attachée

Âme en mousse PVC	Fréquences propres non-dimensionnelles		
	Sans masse	Avec masse	Diff %
HEREX C70.40	10,297	5,712	44,52
HEREX C70.55	11,899	7,165	39,78
HEREX C70.75	12,886	7,053	45,26
HEREX C70.90	13,593	7,287	46,3
HEREX C70.130	14,105	7,778	44,8

Les tableaux 5.6-5.8 montrent quelques aspects du comportement des plaques sandwich avec et sans présence de la masse attachée.

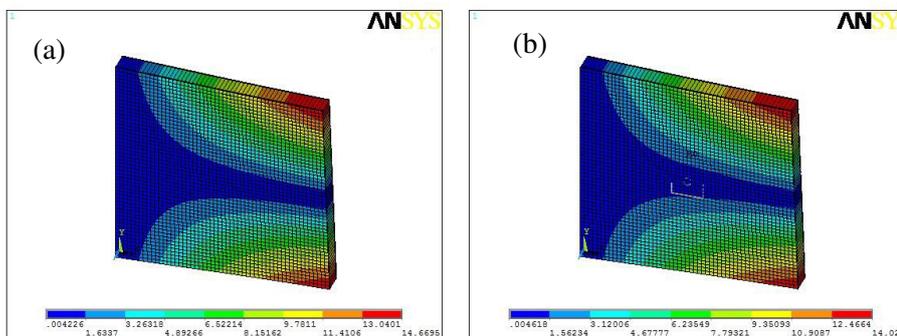
Le tableau 5.6 donne les fréquences propres du mode (1,1). On observe, indépendamment de la présence ou non de la masse attachée que le seuil des fréquences augmente pour les deux cas en rapport avec les propriétés mécaniques des âmes en mousse PVC. Cela peut s'expliquer par le fait de l'influence notamment du module de raideur (E_c) qui croit avec les différents type d'âme qui se distingue aussi par leurs masses volumiques croissante en passant de la plaque la moins raide (HEREX 7040) et en descendant vers la plus raide du type (HEREX 70.130). D'autre part, on observe l'influence de la masse attachée que l'on peut caractériser à partir de la comparaison des fréquences pour les deux cas de plaques avec et sans masse attachée. Pour chaque plaque caractérisée par son type d'âme on obtient la différence des deux seuils des fréquences afin d'évaluer la sensibilité de la masse attachée. On peut remarquer que la plaque (HEREX 70.130) présente la différence la plus faible (Diff % =30,67), comparer aux autres cas. On peut ainsi conclure que ce type de plaque est moins sensible à l'effet des masses attachée et présente donc de bonne performance vibratoire. D'un point de vue pratique, on peut déduire un facteur de préférence pour le choix des propriétés mécaniques des âmes en mousse PVC, en s'appuyant sur le critère qui recommande le type d'âme qui offre une plus faible sensibilité vibratoire en présence de la masse attachée.

Le tableau 5.7 donne les fréquences propres du mode (1,2). On peut observer la même tendance indépendamment de la présence ou non de la masse attachée que le seuil des fréquences, bien que relativement faible, augmente pour les deux cas en rapport avec les propriétés mécaniques des âmes en mousse PVC. Comme indiqué précédemment, cela vient du fait de l'influence notamment du module de raideur (E_c) qui croit avec les différents type d'âme qui en même temps, se distinguent aussi par leurs masses volumiques croissante en passant de la plaque la moins raide (HEREX 70.40) et en descendant vers la plus raide du type (HEREX 70.130). D'autre part, on observe la faible influence de la masse attachée ($(\text{Diff}\%)_{\max}=2.1$) que l'on peut évaluer à partir de la comparaison des fréquences pour les deux cas de plaques avec et sans masse attachée (HEREX C70.90). Ceci réduit l'importance de ce mode et peut s'expliquer du fait de la configuration apportée par la séquence modale. En effet, on peut observer que la masse attachée s'inscrit pour les différentes positions dans la zone nodale caractérisée par son comportement vibratoire neutre.



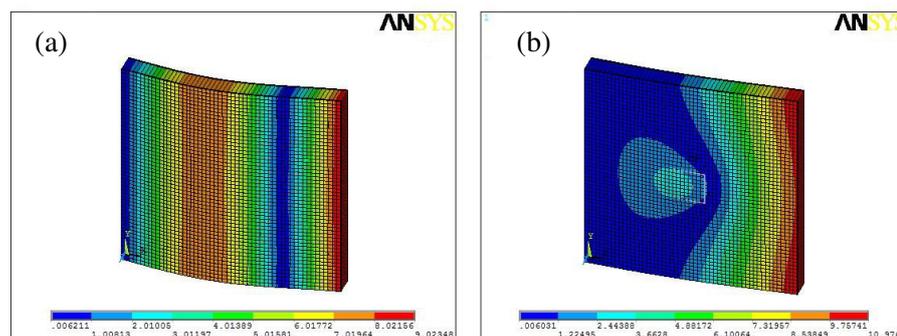
Mode (1,1)

Figure 5.4 Mode propre (1,1) de la plaque sandwich encastée-libre-libre-libre (ELLL), (a) mode sans masse attachée, (b) mode avec masse attachée.



Mode (1,2)

Figure 5.5 Mode propre (1,2) de la plaque sandwich encastée-libre-libre-libre (ELLL), (a) mode sans masse attachée, (b) mode avec masse attachée.



Mode (2,1)

Figure 5.6 Mode propre (2,1) de la plaque sandwich encastée-libre-libre-libre (ELLL), (a) mode sans masse attachée, (b) mode avec masse attachée.

Pour le cas du 3^{ème} mode (2,1) tableau 5.7, et pour toutes les densités des mousses (ρ_c) (HEREX C70.40, HEREX C70.55, HEREX C70.75, HEREX C70.90 et HEREX C70.130), le seuil des fréquences se démarque nettement par rapport au cas précédant du mode (1,2), en remarquant en général une augmentation du seuil des fréquences qui dépasse largement celui des deux modes précédents. On observe un seuil maximal pour les différences entre les fréquences vibratoires de la plaque, aussi bien, avec et sans masse attachée. On peut donc traduire ce résultat par le fait que la plaque est plus sensible à l'effet de la masse attachée. D'autre part, on peut justifier cette situation par le fait de l'emplacement de la masse attachée qui s'inscrit près de la zone du ventre du mode vibratoire (anti-nodale) caractérisé par de grande amplitude (figure 5.6). Bien que la plaque sans masse attachée présente des seuils de fréquences élevées, que l'on peut croire sans intérêt, cependant, la présence de la masse peut démarquer, l'importance de ce mode, en réduisant considérablement le seuil des fréquences et en activant ainsi un seuil vibratoire supplémentaire nuisible qui vient se cumuler au cas du premier mode (1,1).

5.5.2 Effet des emplacements de la masse attachée sur le comportement dynamique de la plaque sandwich (ELLL) caractérisée par les rapports géométriques ($a/b = 1$, $a/h = 10$ et $h_c/h = 0.88$).

Pour analyser l'effet des emplacements de la masse attachée ($P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ et P_8) sur les fréquences propres de la plaque sandwich, les masses sont posées au milieu de la direction (y) et espacées par 12.5 mm suivant la direction (x). La valeur de la masse attachée est égale 50 grammes pour chaque cas d'investigation. La variation relative de la fréquence propre (5.2) des trois premiers modes de vibration en flexion sont calculées (voir le figure 5.7) par l'utilisation de l'équation suivante :

$$\Delta F = \left(\frac{F_0 - F_P}{F_0} \right) \times 100 \quad (5.2)$$

f_0 : fréquences propres de la plaque sandwich sans masse attachée (Tableau 5.9).

f_P : fréquences propres de la plaque sandwich avec masse attachée calculées pour différents emplacements de masse attachée (voir le tableau 5.10).

Tableau 5.9 Fréquences propres non-dimensionnelles (F_0) de la plaque sandwich encadrée-libre-libre-libre (ELLL), sans masse attachée ; $a/b = 1$, $a/h = 10$ et $h_c/h = 0.88$; âme de type HEREX C70-130

Mode de vibration	Mode (1,1)	Mode (1,2)	Mode (2,1)
Fréquences propres non-dimensionnelles	3,528	6,115	14,105

Tableau 5.10 Fréquences propres non-dimensionnelles (F_p) de la plaque sandwich encadrée-libre-libre-libre (ELLL) avec masse attachée, $a/b = 1$, $a/h = 10$ et $h_c/h = 0.88$

Positions de la masse attachée n.(12,5/a) ; n=1,2,3,...,8 ; a=100 mm		Fréquences propres non-dimensionnelles (F_p)		
		Mode (1,1)	Mode (1,2)	Mode (2,1)
P ₁	0,125	3,613	6,191	7,415
P ₂	0,25	3,3	6,222	6,53
P ₃	0,375	3,258	6,021	6,135
P ₄	0,5	2,444	6,031	7,778
P ₅	0,625	2,099	5,942	8,981
P ₆	0,75	1,8	5,776	8,195
P ₇	0,875	1,553	5,610	7,577
P ₈	1	1,334	5,364	7,009

On observe, indépendamment de l'absence ou de la présence de la masse attachée on remarque pour le 1^{ère} mode (mode(1,1)) que le seuil des fréquences va en décroissance au fur et à mesure que l'on s'éloigne du bord d'encastrement et en allant vers le point du bord libre. Cette même influence apparaît partiellement pour le cas du 3^{ème} mode (mode(2,1)) et pour les emplacements P₁, P₂, et P₃ et atteint la valeur minimale en allant vers l'emplacement P₃, qui se situe près du ventre vibratoire. Ensuite, on observe un rehaussement anormal brusque des valeurs des fréquences qui augmentent en fonction des emplacements P₄ et P₅ et atteint la valeur maximale en allant vers l'emplacement P₅. On peut argumenter cette constatation par le fait qu'à partir du point P₄ on s'éloigne de la zone anti-nodale et que le point P₅ s'inscrit dans la zone proche-nodale, comme on peut le voir en se référant à la figure B.5 exposée à l'annexe B. Finalement, on voit un retour normal décroissant des valeurs des fréquences qui diminuent en fonction des emplacements P₆, P₇ et P₈.

Si on s'intéresse au 2^{ème} mode vibratoire mode(1,2), la comparaison entre les résultats des fréquences en fonction des emplacements de la masse attachée, montre une faible différence

fréquentielle pour les emplacements (P_1, P_2, P_3, P_4) cela peut se justifier d'une part par le fait de la présence d'une zone nodale qui couvre largement le lieux des points $P_{i=1,2,..4}$, et qui se distinguent d'autre part par leurs rapprochement de l'appui d'encastrement, comme on peut le voir dans la figure 5.5 et le tableau 5.10. On peut aussi observer un changement distingué par une décroissance amorcée à partir du point P_5 et qui continue de plus en plus en allant vers le bord libre. Cela s'explique clairement par la configuration modale qui affiche un rétrécissement de la zone nodale en faveur d'une zone anti-nodale de plus en plus dominante en allant vers le bord libre.

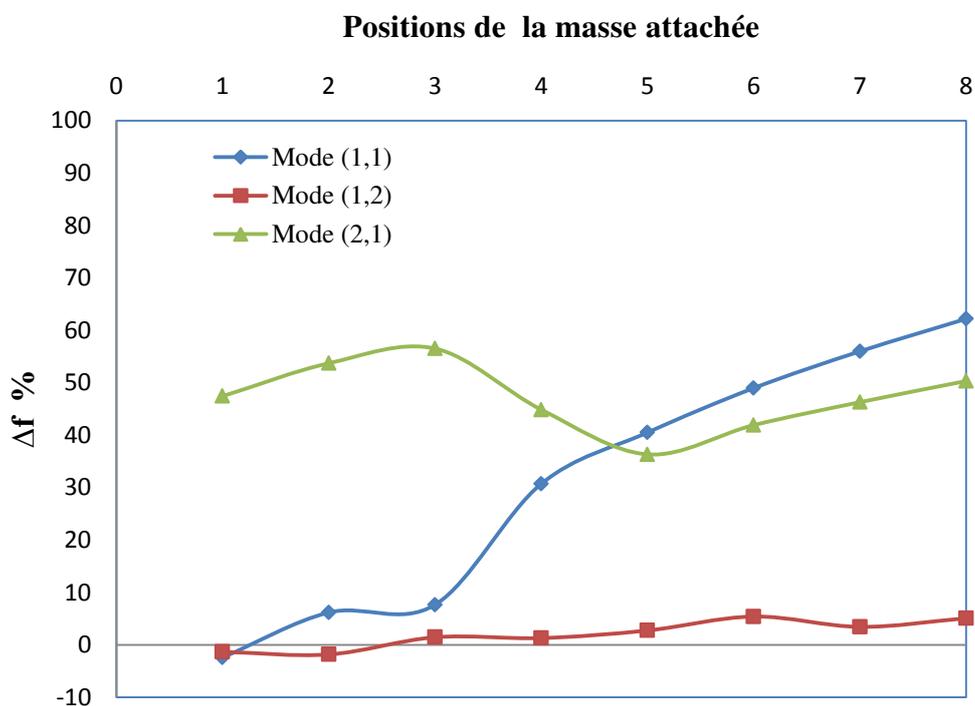


Figure 5.7 Variation relative des fréquences propres non-dimensionnelles avec et sans masse attachée, $a/b = 1$, $a/h = 10$ et $h_c/h = 0.88$

Pour mieux apprécier, l'influence de la masse attachée sur le comportement vibratoire de la plaque on fait appel à l'analyse comparative des fréquences vibratoire des deux model de plaques qui se distingue l'une par la présence de la masse attachée et l'autre plaque supposée de référence et considérée sans masse attachée. Pour effectuer l'analyse comparative, on utilise le paramètre de la variation des fréquences voir équation (5.2) relatif aux deux cas précités. Pour la discussion des résultats obtenus on observe en correspondance avec la séquence modale envisagée les remarques suivantes :

Séquence modale du premier Mode (1,1) :

La figure 5.7 montre une courbe de variation de la fréquence en fonction des lieux de position de la masse attachée qui évolue de façon croissante en partant de l'appui d'encastrement et en allant de plus en plus vers le bord libre. On peut observer deux zones de variation qui se distinguent, respectivement, l'une par de petite variation (faible sensibilité vibratoire), et la deuxième zone qui se manifeste à partir du point P_5 en allant vers le bord libre, caractérisée par de grande variation (haute sensibilité vibratoire).

Séquence modale du deuxième Mode (1,2) :

La figure 5.7 montre une courbe de variation de la fréquence en fonction des lieux de position de la masse attachée qui évolue en moyenne de façon constante en allant depuis l'appui d'encastrement et en se dirigeant vers le bord libre. Cela est clairement expliqué par le fait que la séquence modale est totalement dominée par la présence de la zone nodale ou s'inscrit l'ensemble des lieux potentiels de la masse attachée ($P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ et P_8).

Séquence modale du premier Mode (2,1) :

Comme pour le cas précédant du mode (1,1), on observe pour le 3^{ème} mode (2,1) une variation de la courbe des fréquences qui présente une évolution croissante pour les emplacements P_1, P_2 , et P_3 . On observe en générale une croissance pour les variations relatives des fréquences vibratoire de la plaque qui atteint progressivement la valeur maximale en allant vers l'emplacement P_3 . Cela se justifie par la configuration du mode (2,1) qui se distingue par la présence d'une zone ventrale au droit du point P_3 .

Ensuite, au-delà du point P_3 on observe un retour décroissant des valeurs de la courbe de variation des fréquences qui diminuent en fonction des emplacements P_4 et P_5 et atteint la valeur minimale en allant vers l'emplacement P_5 . Cela s'explique par la présence d'une interférence des deux zones respectivement, anti-nodale pour le lieu P_4 atténuée par un comportement proche-nodale pour le lieu P_5 (figure 5.7 et 5.6). Finalement, on voit un retour croissant des valeurs de variations relatives des fréquences qui augmentent en fonction des emplacements P_6, P_7 et P_8 .

Si on se penche maintenant sur l'ensemble des effets combinés suivant la contribution de chaque séquence modale, et en cumulant les effets des deux modes les plus importants notamment celui du mode fondamentale mode(1,1), ainsi que celui du mode (2,1), on peut

constater qu'à partir du point P₅ et en progressant vers les points P₆, P₇ et P₈, les deux modes font cumuler une variation importante ΔF , ce qui anime une forte sensibilité vibratoire au droit la zone près du bord libre.

5.5.3 Effet du rapport géométrique d'âme / épaisseur de la plaque (h_c/h) sur le comportement dynamique de la plaque sandwich avec et sans masse attachée

Dans cette partie, l'analyse est effectuée pour différents rapports d'âme/ épaisseur de la plaque ($h_c / h = 0,52 ; 0,58 ; 0,64 ; 0,7 ; 0,76 ; 0,82$ et $0,88$). La plaque sandwich, soumise à une masse attachée au centre de la peau supérieure de la plaque, est égale 50 gramme. Les mêmes propriétés géométriques et mécaniques du problème précédent ont été considérées (figure 5.1 et tableaux 5.1 et 5.2).

Les résultats non-dimensionnels, des fréquences propres obtenues sans masse attachée, sont représentés dans le tableau 5.11.

Tableau 5.11 Fréquences propres non-dimensionnelles de la plaque sandwich encastree-libre-libre-libre (ELLL) pour différents rapports épaisseur d'âme/ épaisseur de la plaque (h_c / h) sans masse attachée

h_c / h	Fréquences propres non-dimensionnelles (F_{01})		
	Mode (1,1)	Mode (1,2)	Mode (2,1)
0,52	2,944	4,845	10,197
0,58	3,036	4,993	10,542
0,64	3,14	5,172	10,988
0,7	3,256	5,382	11,547
0,76	3,375	5,622	12,241
0,82	3,483	5,882	13,096
0,88	3,528	6,115	14,105

Concernant toutes les séquences modales (1^{er}, 2^{ème} et 3^{ème} modes vibratoires), les résultats obtenus sans masse attachée montrent que les fréquences propres non-dimensionnelles de la plaque sandwich, sont d'autant plus grande que l'on augmente le rapport épaisseur

d'âme/ épaisseur de la plaque (h_c/h) et atteignent les valeurs maximales pour le cas du rapport (h_c/h)=0,88 (tableau 5.11 et figure 5.8). Cela s'explique par la sensibilité de la plaque à l'effet de l'épaisseur de l'âme (h_c) sur le renforcement de la rigidité de la plaque et par conséquent sur les fréquences propres obtenues.

La figure 5.9 représente la variation relative entre fréquences propres non-dimensionnelles des trois premiers modes de vibration, calculée à l'aide de l'équation suivante (5.3) :

$$\Delta F = \frac{F_{01} - F_{P1}}{F_{01}} \times 100 \quad (5.3)$$

Où, F_{01} : fréquences propres non-dimensionnelles calculées pour différents rapports épaisseur d'âme/ épaisseur de la plaque (h_c / h) sans masse attachée. (Tableau 5.11).

F_{P1} : fréquences propres non-dimensionnelles calculée pour différents rapports, épaisseur d'âme/ épaisseur de la plaque (h_c / h) en présence de la masse attachée au droit du centre de la plaque (tableau 5.12).

Tableau 5.12 Fréquences propres non-dimensionnelles de la plaque sandwich encastree-libre-libre-libre (ELLL), pour différents rapports épaisseur d'âme/ épaisseur de la plaque (h_c / h) avec masse attachée

Épaisseur d'âme/ épaisseur de la plaque (h_c/h)	Fréquences propres non-dimensionnelles(F_{P1})		
	Mode (1,1)	Mode (1,2)	Mode (2,1)
0,52	2,487	4,88	7,301
0,58	2,516	5,025	7,357
0,64	2,544	5,2	7,449
0,7	2,5711	5,401	7,57
0,76	2,581	5,629	7,719
0,82	2,5574	5,869	7,88
0,88	2,455	6,056	8,002

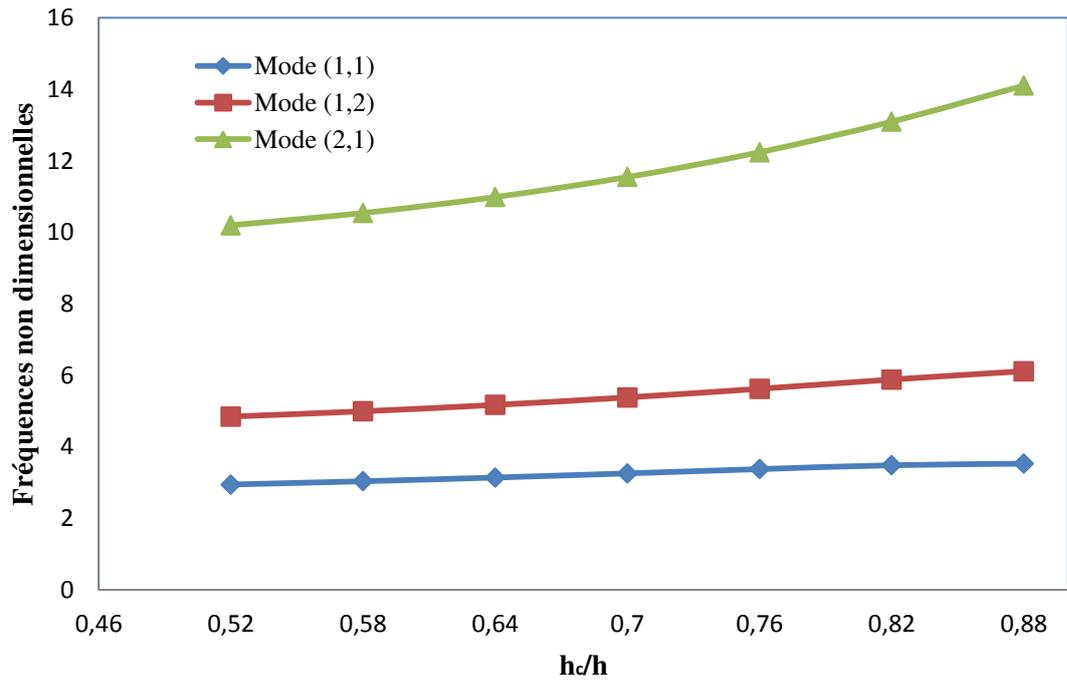


Figure 5.8 Fréquences propres non-dimensionnelles de plaque sandwich pour différents rapports d'épaisseur d'âme/ épaisseur de la plaque (h_c/h). Âmes en mousse PVC de type HEREX C70.130.

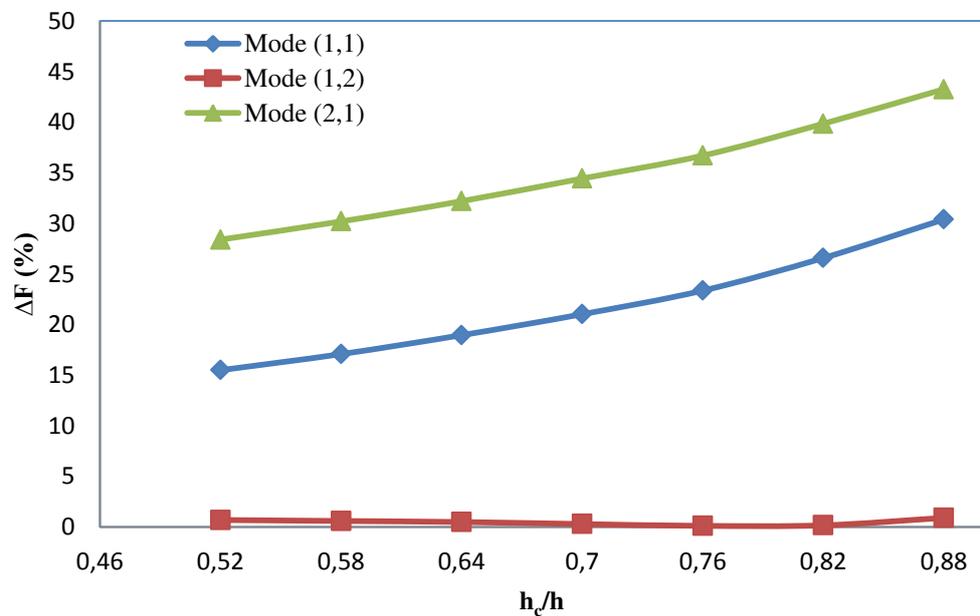


Figure 5.9 Variation relative entre fréquences propres non-dimensionnelles avec et masse attachée pour différents rapports d'épaisseur d'âme/ épaisseur de la plaque (h_c / h)

L'influence de l'épaisseur de l'âme de la plaque sandwich devient remarquable (figure 5.9), pour le cas du 1^{er} mode et pour tous les rapports d'épaisseur d'âme/ épaisseur de la plaque ($h_c / h = 0,52 ; 0,58 ; 0,52 ; 0,64 ; 0,7 ; 0,76 ; 0,82$ et $0,88$). Les résultats obtenus montrent aussi, que la variation des fréquences propres est d'autant plus grande que l'on augmente l'épaisseur de l'âme (h_c) et atteint la valeur maximale en allant vers l'épaisseur de l'âme égale 8,8 mm.

Cette même influence progressive apparaît aussi pour le cas du 3^{ème} mode et pour tous les rapports d'épaisseur d'âme/ épaisseur de la plaque ($h_c / h = 0,52 ; 0,58 ; 0,52 ; 0,64 ; 0,7 ; 0,76 ; 0,82$ et $0,88$). On remarque aussi que le seuil de la fréquence associée à la masse attachée par rapport à la plaque sans masse attachée (3^{ème} mode) montre une grande différence fréquentielle (figure 5.9). Cela s'explique par la sensibilité maximale de la plaque à l'effet de la masse qui se situe dans une zone proche du ventre affiché par la séquence du mode vibratoire (figure 5.6).

Le 2^{ème} mode affiche pour tous les rapports d'épaisseur d'âme/ épaisseur de la plaque ($h_c / h = 0,52 ; 0,58 ; 0,52 ; 0,64 ; 0,7 ; 0,76 ; 0,82$ et $0,88$) un très faible niveau de variation pour chaque cas, et d'autre part, une évolution constante du niveau des seuils de fréquences qui s'explique par le fait de la position centrale de la masse attachée qui s'inscrit dans des zones nodales à faible sensibilité vibratoire (figure 5.9 et 5.5).

5.5.4 Effet du rapport des dimensions de la plaque (longueur/ largeur : (a/b)) sur le comportement dynamique de la plaque sandwich avec et sans masse attachée

Dans cette partie, l'analyse est effectuée pour différents rapports de longueur/ largeur de la plaque ($a/ b = 1 ; 1,25 ; 1,5 ; 1,75 ; 2 ; 2,25$ et $2,5$). La plaque sandwich, soumise à une masse attachée au centre de la peau supérieure de la plaque, est égale 50 gramme.

Tableau 5.13 Fréquences propres non-dimensionnelles calculées pour différents rapports longueur / largeur (a /b) de la plaque encastrée-libre-libre-libre (ELLL), sans masse attachée. Âmes en mousse PVC de type HEREX C70.130.

Rapport (a/b)	Fréquences propres non-dimensionnelles		
	Mode (1,1)	Mode (1,2)	Mode (2,1)
1	3,52	6,11	14,1
1,25	2,371	4,817	10,37
1,5	1,69	3,96	7,956
1,75	1,267	3,36	6,28
2	0,982	2,915	5,073
2,25	0,782	2,573	4,177
2,5	0,637	2,301	3,491

Les mêmes propriétés géométriques et mécaniques du problème précédent ont été considérées (figure 5.1 et tableaux 5.1 et 5.2). Les résultats non-dimensionnels, des fréquences propres obtenues sans masse attachée, sont représentés sur le tableau 5.13.

Tableau 5.14 Fréquences propres non-dimensionnelles calculées pour différents rapports longueur / largeur (a /b) de la plaque encastrée-libre-libre-libre (ELLL) avec masse attachée

Rapport (a/b)	Fréquences propres non-dimensionnelles		
	Mode (1,1)	Mode (1,2)	Mode (2,1)
1	2,456	6,068	8,12
1,25	1,874	4,755	6,055
1,5	1,345	3,91	4,884
1,75	1,044	3,33	4,11
2	0,829	2,886	3,374
2,25	0,674	2,551	2,883
2,5	0,558	2,288	2,498

Concernant toutes les séquences modales (1^{er}, 2^{ème} et 3^{ème} modes vibratoires), les résultats obtenus sans et avec masse attachée montrent que les fréquences propres non-dimensionnelles de la plaque sandwich, diminuent en proportion avec l'accroissement du rapport

longueur / largeur de la plaque ($a/b \geq 1$), et atteint les valeurs minimales pour le cas du rapport ($a/b=2,5$) (tableau 5.13 , figure 5.10 ; tableau 5.14).

On peut expliquer cette décroissance en correspondance avec le fait connu concernant la raideur de la plaque soutenue par la rigidité des deux sens dans le cas de la plaque carrée, cependant, au fur et à mesure que le rapport des dimensions progresse vers les valeurs supérieures ($a/b = 1 ; 1,25 ; 1,5 ; 1,75 ; 2 ; 2,25$ et $2,5$), le sens porteur de la plaque devient essentiellement dominé par le petit sens caractérisé par un comportement poutre qui fait intervenir deux bords libre (ELLL \rightarrow LL). Ainsi, cette perte du soutien de la rigidité de la plaque se traduit par une diminution de la fréquence vibratoire et réduit ainsi au fur et à mesure le seuil fréquentiel des plaques dont l'augmentation du prolongement suivant le sens de la dimension en longueur « a » fait dominer plutôt le comportement « effet poutre » du petit sens.

Les variations relatives entre les fréquences propres non-dimensionnelles avec et sans masse attachée sont calculée à l'aide de l'équation suivante (5.4) :

$$\Delta F = \frac{F_{02} - F_{P2}}{F_{02}} \times 100 \quad (5.4)$$

Où, F_{02} : fréquences propres non-dimensionnelles calculées pour différents rapport largeur / longueur de la plaque (a/b) sans masse attachée. (Tableau 5.13).

F_{P2} : fréquences propres non-dimensionnelles calculée pour différents rapports longueur / largeur de la plaque (a/b) en présence d'une masse attachée au centre de la plaque sandwich (Tableau 5.14).

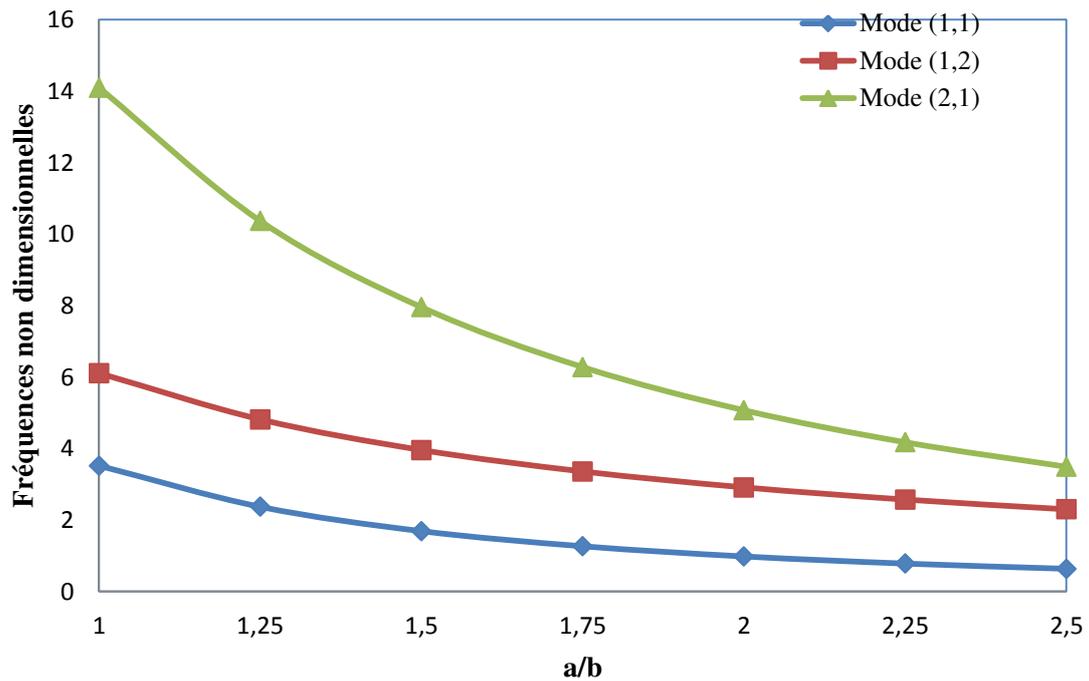


Figure 5.10 Fréquences propres non-dimensionnelles de plaque sandwich pour différents rapports longueur / largeur de la plaque (a/b)

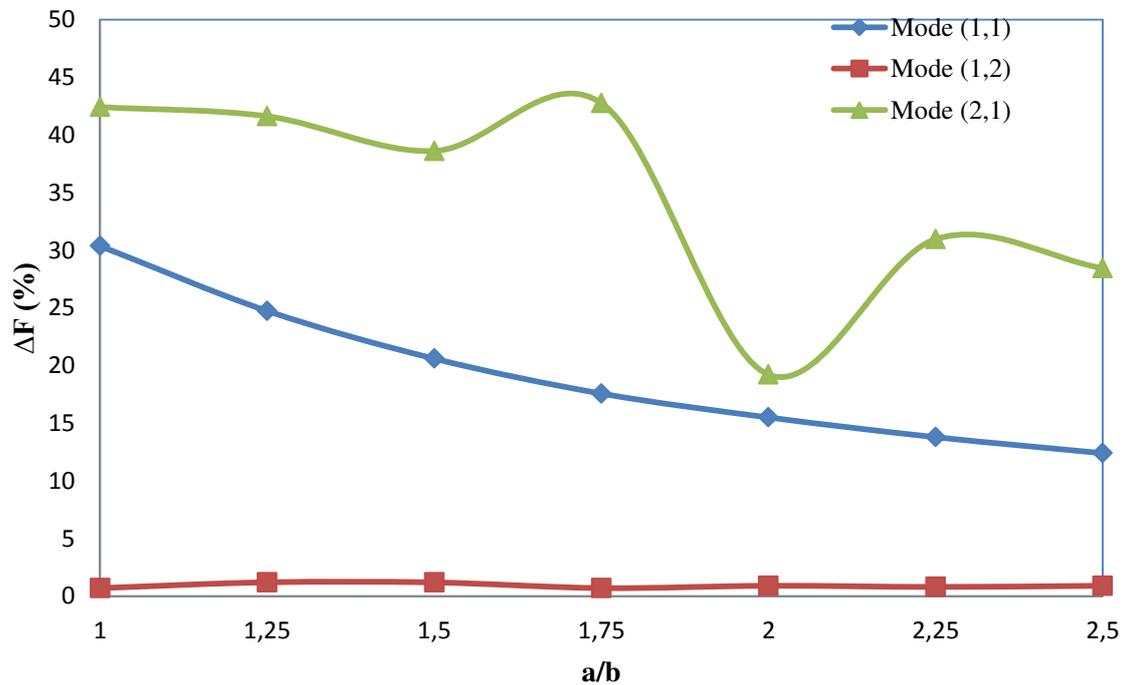


Figure 5.11 Variation relative entre fréquences propres non-dimensionnelles avec et sans masse attachée pour différents rapports longueur / largeur de la plaque (a/b)

L'influence de la masse attachée devient appréciable, pour le cas du 1^{er} mode et pour tous les rapports longueur / largeur de la plaque ($a/b = 1 ; 1,25 ; 1,5 ; 1,75 ; 2 ; 2,25$ et $2,5$). En effet les résultats obtenus montrent, que la variation relative des fréquences propres diminuent en fonction de l'accroissement du rapport (a/b) et atteint la valeur minimale tout en allant vers le rapport $a/b = 2,5$ (figure 5.11).

Cette même influence apparait partiellement pour le cas du 3^{ème} mode et pour les rapports $a/b = 1$, $a/b = 1,25$ et $a/b = 1,5$. On observe en générale une décroissance pour les variations relatives des fréquences vibratoire de la plaque, avec et sans masse attachée. Ensuite, on observe un retour croissant des valeurs des variations relatives des fréquences, qui atteint la valeur maximale en allant vers le rapport $a/b = 1,75$. On voit aussi, un retour décroissant des valeurs de variations relatives des fréquences, qui atteint la valeur minimale en allant vers le rapport $a/b = 2$. Finalement, on distingue une reprise croissante des valeurs de variations relatives des fréquences qui augmentent en relation avec les rapports $a/b = 2,25$ et $a/b = 2,5$ (figure 5.11).

Si on s'intéresse aux séquences modales des modes supérieures (2^{ème} mode et 3^{ème} mode) la comparaison concernant la variation des fréquences entre les résultats obtenus avec et sans masse attachée pour le 3^{ème} mode, montre une grande différence fréquentielle pour le rapport $a/b = 1,75$. Ceci peut s'expliquer par le fait de la position de la masse attachée qui se situe dans la zone anti-nodale caractérisée par un ventre vibratoire de grande amplitude. Cette comparaison montre aussi, décroissance vers un extrémum qui montre une faible différence fréquentielle au rapport $a/b = 2$ qui explique la présence d'une zone proche nodale (figure 5.11).

Le 2^{ème} mode affiche pour tous les rapports longueur / largeur de la plaque ($a/b = 1 ; 1,25 ; 1,5 ; 1,75 ; 2 ; 2,25$ et $2,5$) une évolution presque constante du niveau des seuils de fréquences qui s'explique par la nature géométrique de la séquence modale et par le faite de l'emplacement de la masse attachée qui vient s'inscrire dans des zones nodales à faible amplitude vibratoire (figure 5.11).

5.6 Conclusion

Ce travail présente les résultats de l'étude numérique par la méthode des éléments finis réalisée à l'aide du logiciel ANSYS, afin de déterminer les effets de la masse attachée sur le comportement dynamique des plaques sandwich en cas de vibration libre en flexion, avec les conditions aux limites encastrée-libre-libre-libre (ELLL). En outre, le choix des éléments de maillage utilisés dans la modélisation par la méthode des éléments finis sont appréciées à travers la comparaison entre les résultats obtenus avec ceux trouvés par d'autres modèles disponibles dans la littérature. L'objet de l'analyse est de reprendre les mêmes hypothèses concernant l'étude à la sensibilité vibratoire des plaques composites précédemment étudiées, en tenant en compte en plus des effets d'emplacement de la masse attachée sur les fréquences propres, un élargissement de l'étude paramétrique qui tient compte de plusieurs facteurs notamment, les caractéristiques mécaniques de plusieurs types d'âmes, les rapports d'épaisseur d'âme/épaisseur de la plaque (h_c/h), et les rapports longueur / largeur de la plaque (a/b).

Grâce aux résultats obtenus ci-dessus, les conclusions suivantes pourraient être tirées : Ce modèle est destiné pour l'analyse dynamique des plaques sandwichs symétriques et antisymétriques. La performance et la fiabilité du modèle proposé sont appréciées à travers la comparaison entre les résultats obtenus avec ceux trouvés par les modèles disponibles dans la littérature.

L'utilisation du modèle proposé pour étudier le comportement vibratoire de sandwichs, permet de tirer les conclusions suivantes :

Les résultats de calculs par éléments finis montrent que les propriétés mécaniques des l'âme en mousse ont une grande influence sur l'effet de la masse attachée pendant la vibration de la plaque sandwich. Cela peut s'expliquer par le fait de l'influence notamment du module de raideur (E_c) qui croit avec les différents type d'âme qui se distingue aussi par leurs masses volumiques croissante en passant de la plaque la moins raide (HEREX 70.40) et en descendant vers la plus raide du type (HEREX 70.130). On peut ainsi conclure que ce type de plaque (HEREX 70.130) est moins sensible à l'effet de masses attachée et présente donc de bonne performance vibratoire.

L'influence de l'emplacement de la masse devient appréciable, pour le cas du 1^{er} mode pour tous les emplacements ($P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ et P_8), les résultats obtenus montrent aussi, que la variation relative des fréquences propres est d'autant plus grande que l'on s'éloigne du bord encastéré et atteint la valeur maximale en allant vers l'emplacement du bord libre (P_8), figure 5.7 . Cela s'explique par l'insensibilité de la plaque sandwich à l'effet de la masse rapprochée près du bord d'encastrement et à la position P_1 .

Le 2^{ème} mode affiche pour toutes les positions de la masse attachée ($P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ et P_8) une évolution presque constante du niveau des seuils de fréquences qui s'explique par le faite de leurs positions relative qui s'inscrive dans les zones nodales à faible amplitude vibratoire (figure 5.7 et Annexe B).

Le rapport épaisseur d'âme/ épaisseur de la plaque (h_c / h) a une grande influence sur les fréquences propres de la plaque sandwich composite.

L'influence de la masse attachée sur les fréquences propres augmente proportionnellement avec l'augmentation du rapport épaisseur d'âme/ épaisseur de la plaque (h_c / h), lorsque l'emplacement de cette masse est situé dans la zone anti-nodale du mode vibration.

D'un point de vu pratique , il est souhaitable de choisir la courbe de variation qui correspond au premier mode fondamental mode (1,1) comme référence afin de constituer un critère de préférence qui permet d'établir ou de normaliser « une règle de bon conception » concernant les rapport de dimension privilégiés afin de réduire au mieux les nuisances vibratoire sous l'influence de la masse attachée . On remarque alors d'après la figue 5.11 une tendance décroissante de la courbe de variation des fréquences en relation avec les rapports de dimensions de la plaque ($a/ b = 1 ; 1,25 ; 1,5 ; 1,75 ; 2 ; 2,25$ et $2,5$).

Conclusion générale

Conclusion générale

Ce travail présente les résultats de l'étude expérimentale et numérique par la méthode des éléments finis réalisée à l'aide du logiciel ANSYS, afin de déterminer les effets de la masse attachée sur le comportement dynamique des plaques sandwich et stratifié composite en cas de vibration libre en flexion, avec les conditions aux limites encastree-libre-libre-libre (ELLL). Pendant l'investigation, quatre facteurs influençant l'effet de la masse attachée sur les fréquences propres ont été étudiés à l'aide de la méthode *Taguchi*. Cette méthode a été utilisée pour identifier les facteurs d'influence notable sur les modes de vibration. Le choix des éléments de maillage utilisés dans la modélisation par la méthode des éléments finis sont appréciées à travers la comparaison entre les résultats obtenus expérimentalement pour les stratifiés composites et avec ceux trouvés dans les modèles disponibles dans la littérature pour les plaques sandwich.

Grâce aux résultats obtenus ci-dessus (chapitre VI et V), les conclusions suivantes pourraient être tirées :

- On distingue en générale pour les plaques sans masse attachée, deux phénomènes de comportement vibratoire qui apparaissent partiellement ou totalement au sein d'une séquence modale quelconque. L'apparition de zone nodale se traduit par un comportement caractérisé par des hautes fréquences et donc une faible sensibilité vibratoire pour le model de plaque concerné. L'apparition de zone anti-nodale se traduit par un comportement caractérisé par des faible fréquences et donc une forte sensibilité vibratoire pour le model de plaque concerné. On peut alors conclure que le comportement vibratoire de la plaque est plus ou moins sensible suivant la configuration modale obtenue, ainsi que la tendance du spectre représentatif de la configuration des reliefs correspondant aux zones d'influence respectivement nodal et anti-nodale.
- Dans le cas de la présence de la masse attachée, on remarque que suivant le lieu de l'emplacement de cette masse attachée, la plaque en vibration affiche un degré de sensibilité plus ou moins faible. En effet, si l'emplacement de la masse attachée s'inscrit dans une zone nodale ou proche nodale, on observe que le seuil des fréquences vibratoire est élevé, ce qui se traduit par un comportement caractérisé

par de faible sensibilité vibratoire. Dans le cas contraire, ou la masse attachée s'inscrit dans une zone anti-nodale, le seuil des fréquences est relativement réduit à des valeurs inférieures, ce qui se caractérise par un comportement avec de grande période et donc une forte sensibilité vibratoire.

- d'un point de vue pratique, il est souhaitable de choisir la courbe de variation des fréquences vibratoire, qui correspond au premier mode fondamental mode (1,1), comme référence de base, vu son importance relative par rapport aux autres modes mode (1,2), mode (2,1) moins important. Ainsi, on établis un critère de choix pour les prévision avenir qu'il faut parfois souhaiter ou préconiser. Ceci permet d'établir ou de normaliser « une proposition de savoir faire » concernant les lieux privilégiés pour la position de la masse attachée, tout en garantissant un bon comportement loin des nuisances vibratoire, infligée par la présence d'objets supplémentaires, pour servir certain besoins technologique.
- Afin de minimiser l'effet de la masse attachée sur les fréquences propres des plaques stratifiés, grâce à la méthode de Taguchi, on a observé une présélection des choix optimaux en déduisant respectivement que la valeur optimale pour le mode (1,1) a été obtenue avec un poids de masse attachée à 25 g ($M / 6$) au point P_1 et à la séquence d'empilement symétrique $[\pm 80]_{ns}$ avec 32 couches, soit la présélection caractérisée par la notation (A4 B1 C1 D4) . En outre, pour le mode (1,2), la valeur optimale a été obtenue à l'emplacement P_2 , avec des séquences d'empilement symétriques $[\pm 40]_{ns}$ et ensuite, pour 32 couches avec 75 g ($M / 2$) pour le poids de la masse attachée soit la présélection caractérisée par la notation (A2 B2 C3 D4). Finalement, pour minimiser l'effet de la masse attachée sur la fréquence propre du mode (2,1), la valeur optimale a été obtenue avec un poids de masse attachée, 75 g ($M/2$) au point P_1 et en séquence d'empilement symétrique $[\pm 60]_{ns}$ avec 32 couches soit la présélection caractérisée par la notation (A3 B1 C3 D4).
- Selon les résultats des analyses statistiques (ANOVA), il a été constaté que la position de la masse attachée à la plaque stratifié mesurée à partir du bord encastré était le facteur le plus important affectant les fréquences propres, correspondant aux cas des deux modes vibratoire respectivement le mode(1,1), et le mode (2,1).
- Selon les résultats des analyses statistiques (ANOVA), il a été constaté que pour le mode (1,2) la masse attachée suivant les différentes positions s'inscrit dans la zone

nodale caractérisée par sa faible sensibilité à la vibration, par contre, en affichant beaucoup plus l'influence dominante du nombre d'empilement.

- Concernant, l'influence des types d'âmes, et indépendamment du cas de la plaque avec et sans masse attachée, le seuil des fréquences vibratoire augmente pour les sandwichs en rapport avec l'augmentation des propriétés mécaniques des âmes en mousse PVC, notamment du module de raideur (E_c) qui croit en proportion avec l'augmentation des masses volumiques. Ceci correspond au cas de la plaque la moins raide (flexible) pour les valeurs inférieures du module de raideur (E_c) et dans le cas contraire pour les valeurs élevés du module de raideur (E_c), la plaque gagne en rigidité et donc change pour s'identifier au type de comportement (rigide).
- Dans le cas de la plaque sandwich avec masse attachée, le seuil des fréquences augmente à des valeurs relativement grandes, en rapport avec les propriétés mécaniques des âmes en mousse PVC. On peut déduire que la plaque sandwich avec âme plus raide est moins sensible à l'effet des masses attachées et présente donc de bonne performance vibratoire.
- d'un point de vue pratique, on peut déduire un facteur de préférence pour le choix des propriétés mécaniques des âmes en mousse PVC, en s'appuyant sur le critère qui recommande le type d'âme qui offre une plus faible sensibilité vibratoire en présence de la masse attachée.
- Concernant, l'influence du rapport de dimension, les rapports de faible dimensions correspondent à des types de plaques qui sont soutenues par leurs rigidités dans les deux sens respectivement $L_x=a$ et $L_y=b$. La plaque de type carrée, dont le rapport de dimension est unitaire ($a/b=1$), montre un pic maximum de la variation ($\Delta F=30,37\%$). Ceci se traduit d'un point de vue pratique par le fait que la plaque carrée qui est caractérisée par le soutien de ces rigidités dans les deux sens, montre une grande sensibilité sous l'effet de la présence de la masse attachée. Réciproquement, on remarque, à l'opposé du cas de la plaque carrée et dans le cas extrême de la plaque rectangulaire, dont le rapport des dimensions est égale à $(a/b)=2,5$, on voit un pic minimum de la variation ($\Delta F=12,4\%$), qui devient, comme on peut le constater moins de la moitié de la valeur par rapport au cas précédent. Ceci se traduit d'un point de vue pratique par le fait que la plaque allongée que l'on sait d'après nos connaissances en structure, perd le soutien de la rigidité suivant le sens le plus grand et travail

essentiellement pendant son mouvement vibratoire suivant le petit sens de la plaque. On déduit alors de ces observations que les plaques rigides pour les rapports de dimensions élevés et qui s'approche du cas de la plaque carrée présente une forte sensibilité à l'effet de la masse attachée et de ce fait reste exposée potentiellement à des nuisances vibratoires.

- La règle de bonne conception peut être choisit en favorisant les model de plaques sandwich plutôt flexibles caractérisées par de grand rapport de dimension et épaisseur d'âme (h_c) réduite, afin de minimiser l'effet de la masse attachée et de s'éloigner ainsi des perturbations vibratoire nuisible.

Perspectives

Le travail qui a été présenté dans cette thèse peut être enrichi et développé encore plus.

Il serait très intéressant :

- d'étudier par la méthode expérimentale la sensibilité du cas des plaques sandwich sous l'influence de la masse attachée pour les différents facteurs observés précédemment.
- d'étudier lequel des paramètres qui affecte de manière significative les fréquences propres de comportement vibratoires de la plaque sandwich.
- d'étudier les effets de la masse attachée sur l'amortissement modal pour les composites stratifiés et sandwichs.

Références

Références

- [1] (2015) (http://avstop.com/ac/Aviation_Maintenance_Technician.AvStop Online Magazine
- [2] Zweben C (2002). Metal Matrix Composites, Ceramic Matrix Composites, Carbon Matrix Composites and Thermally Conductive Polymer Matrix Composites. Handbook of Plastics, Elastomers and Composites. New York
- [3] R. Warren Ed, (1992). Ceramic-Matrix Composites, Chapman and Hall, New York
- [4] Daniel B. Miracle and Steven L. Donaldson (2001) .Constituent Materials, Engineered Material Handbook ,Composites, ASM International, United States of America
- [5] Miles I, Rostami S (1992). Polymer matrix composites. Longmore Scientific and Technical. United States of America
- [6] Cycling Tips. Black magic. (2018). How carbon fibre bicycle frames are made. <https://cyclingtips.com/2018/01/how-carbon-fibre-bicycle-frames-are-made>
- [7]. Smith DL, Davidson KE, Thiebert LS (1996). Carbon-Carbon Composites (CCC): A Historical Perspective,” in Proceedings, 4, 1st International SAMPE Symposium, March 24-28, pp. 32-41
- [8] Zweben C, (2015). COMPOSITE MATERIALS. Myer Kutz (Editor-in-Chief), Handbook Mechanical Engineers, V 4 , CHAPTER 10, New York
- [9] Adams RD, Bacon DGC, (1973). Effect of fibre orientation and laminate geometry on the dynamic properties of CFRP. J Compos Mater, 7:4
- [10] Cawley, P. and Adams, R. D. (1978). The predicted and experimental natural modes of free-free CFRP plates. Journal of Composite Materials, 12, 336-347
- [11] Crawley, E. F. (1979). The Natural Modes of Graphite/Epoxy Cantilever Plates and Shells. Journal of Composite Materials, 13, 195-205

- [12] Lin, D.X., Ni R.G. and Adams R.D, (1984). Prediction and Measurement of vibrational damping parameters of Carbon and Glass Fibre-Reinforced Plastics Plates. *Journal of Composite Materials*, 18, 132
- [13] Chai, G. B. (1994). Free vibration of generally laminated composite plates with various edge support conditions, *Composite Structures*. 29, 249-258
- [14] Maiti, D. K. and Sinha, P. K. (1996). Bending, free vibration and impact response of thick laminated composite plates. *Computers and Structures*, 59, 115-129
- [15] Chen, B. and Chou, Tsu-Wei (1999). Free vibration analysis of orthogonal-woven fabric composites. *Journal of Composites: Part A*, 30, 285-297
- [16] Harras B, Benamar R, White R.G, (2002). Investigation of non-linear free vibrations of fully clamped symmetrically laminated carbon-fibre-reinforced PEEK (AS4/APC2) rectangular composite panels. *Composite Science and Technology*, 62, 719-727
- [17] Aydogdu, N. and Timarci, T. (2003). Vibration analysis of cross-ply laminated square plate with general boundary conditions. *Composite Science and Technology*, 63, 1061-1070
- [18] Ferreira, A. J. M., Roque, C. N. C. and Jorge, R. M. N. (2005). Free vibration analysis of symmetric laminated composite plates by FSDT and radial basis functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, 4265-4278
- [19] Berthelot JM, (2006). Damping analysis of laminated beams and plates using the Ritz method. *Composite Structure*, 74, 186-201
- [20] Tsai JL, Chang NR, (2009). 2-D analytical model for characterizing flexural damping responses of composite laminates. *Composite Structure*, 89, 443-447
- [21] Ni RG, Adams RD, (1984). The damping and dynamic moduli of symmetric laminated composite beams theoretical and experimental results. *J Composite Materials*, 18 (2), 10-21

- [22] Adams RD, Maheri MR, (1994). Dynamic flexural properties of anisotropic fibrous composite beams. *Composites Science and Technology*, 50(4), 497-514
- [23] Xiang, S, and Wang (2009). Free vibration analysis of symmetric laminated composite plates by trigonometric shear deformation theory and inverse multiquadric RBF. *Thin-Walled Structures*, 47, 304-310
- [24] Maheri MR (2010). The effect of layup and boundary conditions on the modal damping of FRP composite panels. *Journal of Composite Materials*, 45(13), 1411-1422
- [25] Khan SU, Chi YL, Naveed AS, Jang-Kyo K (2011). Vibration damping characteristics of carbon fiber-reinforced composites containing multi-walled carbon nanotubes. *Composites Science and Technology*, 71, 1486-1494
- [26] Erkin A, Ismail B, (2013). Deflection and free vibration of symmetrically laminated quasi-isotropic thin rectangular plates for different boundary conditions. *Ocean Engineering* 57, 197-222
- [27] Fazzolari FA, Boscolo M, Banerjee JR, (2013). An exact dynamic stiffness element using a higher order shear deformation theory for free vibration analysis of composite plate assemblies. *Composite Structure*, 96, 262-278
- [28] Mlyniec A, Korta J, Kudelski R, Uhl T, (2014). The influence of the laminate thickness, stacking sequence and thermal aging on the static and dynamic behavior of carbon/epoxy composites. *Composite Structure*, 118, 208-216
- [29] Raville ME, CES. Ueng, (1967). Determination of natural frequencies of vibration of a sandwich plate. *Experimental mechanics*, 490-493
- [30] Much A, Zuchara P, (1998). Sandwich plates-Free vibration and damping Analysis. *Mechanics of Composite Materials*, 34(2) 276-286

- [31] Burlayenko V N , Sadowski T, (2010). Influence of skin/core debonding on free vibration behavior of foam and honeycomb cored sandwich plates. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 45, 959- 968
- [32] Kheirikhah MM, Babaghasabha V, Naeimi Abkenari A, Khadem M, (2015). Free vibration analysis of corrugated face sheet composite sandwich plates. *J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.* DOI 10.1007/s40430-015-0306-8
- [33] Hua-dong LI, ZHU Xi, Zhi-yuan MEI, ZHANG Y, (2015). Free Vibration Analysis of Cylindrical and Rectangular Sandwich Panels with a Functionally Graded Core. *J Shanghai Jiaotong Univ. (Sci.)*, 20 (6), 735-742. DOI: 10.1007/s12204-015-1684-x
- [34] Khdeir AA, Aldraihem OJ, (2016). Free vibration of sandwich beams with soft core. *Composite Structures*, doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.comptstruct.07.045>
- [35] Moita JS, Araújo AL, Mota Soares CM, Mota Soares CA, (2017). Vibration analysis of functionally graded material sandwich structures with passive damping. *Composite Structures*, doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.04.045>
- [36] Zhang Z, Han B, Zhang Q-c, Jin F, (2017). Free vibration analysis of sandwich beams with honeycomb-corrugation hybrid cores. *Composite Structures*, doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.03.045>
- [37] Keivan Torabi, Hasan Afshari, Farhad H Aboutalebi (2017). Vibration and flutter analyses of cantilever trapezoidal honeycomb sandwich plates. *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 1-34, doi: 10.1177/1099636217728746
- [38] Chen JE, Zhang W, Sun M, Yao M H & Jun Liu (2017). Free vibration analysis of composite sandwich plates with different truss cores. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, doi: 10.1080/15376494.2017.1308594
- [39] Watkins RJ, Santillan S, Radice J, Barton O, (2010). Vibration response of an elastically point supported plate with attached masses. *Thin-Walled Structures*, 48, 519-527

- [40] Yu SD, (2009). Free and forced flexural vibration analysis of cantilever plates with attached point mass. *Journal of Sound and Vibration*, 321, 270-285
- [41] Kumar B, Ranjan V, (2014). The Effects of attached Discrete Patches and Point Masses on Eigen Values and Sound Radiation of a Rectangular Plate. *Inst Eng India Ser* 95(4), 359-366
- [42] Alibeigloo A, Kari M.R (2009). Force vibration analysis of antisymmetric laminated rectangular plates with distributed patch mass using third order shear deformation theory. *Thin-Walled Structure*, 47, 653-660
- [43] Malekzadeh K, Sayyidmousavi A (2010). Free vibration analysis of sandwich plates with a uniformly distributed attached mass flexible core and different boundary conditions. *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 12 (6), 709-732, [https://doi:10.1177/1099636209343383](https://doi.org/10.1177/1099636209343383)
- [44] Khalili SMR, Tafazoli S, Malekzadeh FK (2011). Free vibrations of laminated composite shells with uniformly distributed attached mass using higher order shell theory including stiffness effect. *Journal of Sound and Vibration*, 330, 6355-6371
- [45] Hosseini-Hashemi Sh, Rezaee V, Atashipour S.R, Girhammar U.A, (2012). Accurate free vibration analysis of thick laminated circular plates with attached rigid core. *Journal of Sound and Vibration*, 331, 5581-5596
- [46] Han Y, Wang P, Fan H, Sun F. Chen L, Fang D, (2015). Free vibration of CFRC lattice-core sandwich cylinder with attached mass. *Composites Science and Technology*.118, 226-235
- [47] Aydogdu M, Filiz S (2016). Vibration analysis of symmetric laminated composite plates with attached mass. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 23:2, 136-145, doi: 10.1080/15376494.2014.949919

- [48] DOSSING O, (1988). Essais Structurel Partie 1: Mesures de mobilité. Bruel & Kjaer, Danemark,.
- [49] Adams R D, Fox MAO, Flood RJL, Friend RJ, Hewitt RL (1969). The dynamic properties of unidirectional carbon and glass fiber reinforced plastics in torsion and flexure. *Journal of Composite Materials*. 3,594-603
- [50] Cugnoni J (2005). Identification par recalage modal et fréquentiel des propriétés constitutives de coques. Thèse de Doctorat. Université de Lausanne,.
- [51] Pagano JN (1969). Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. *Journal of composite materials*, 3 (3), 398-411
- [52] Pagano JN (1970). Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates. *Journal of composite materials*, 4(1), 20-34
- [53] Jones AT (1970). Exact natural frequencies for cross-ply laminates. *Journal of Composite materials*. 4 (4), 476-491
- [54] Lascoup B, Aboura Z, Khellil K, Benzeggagh M (2010). Homogenization of the core layer in stitched sandwich structures. *Composites Science and Technology*, 70 (2), 350-355
- [55] Lewiński T (1993). On recent developments in the homogenization theory of elastic plates and their application to optimal design: Part I. *Structural optimization*, 6 (1), 59-64
- [56] Rabczuk T, Rabczuk T, Kim JY, Samaniego E, Belytschko T (2004). Homogenization of sandwich structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61(7) ,1009-1027
- [57] Takano N, Zako M, Kikuchi ,(1995). Stress analysis of sandwich plate by the homogenization method. *Materials science research international*, 1 (2), 82-88

- [58] Kirchhoff G (1850). Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 40, 51-88
- [59] Love AEH (1934). *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge University Press.
- [60] Reddy JN (2003). *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC press, London
- [61] Reissner E (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. appl. Mech*, 12 (2) 69-77
- [62] Mindlin, RD (1951). Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *J. of Appl. Mech.*, 18, 31-38
- .
- [63] Nelson RB, Lorch DR(1974). A Refined Theory for Laminated Orthotropic Plates. *Journal of Applied Mechanics*, 41(1), 177-183
- [64] Krishna Murty A, Vellaichamy S (1987). On higher order shear deformation theory of laminated composite panels. *Composite Structures*, 8 (4), 247-270
- [65] Christensen Lo K R, Wu E (1977). A high-order theory of plate deformation-Part 1: Homogeneous plates. *Journal of Applied Mechanics*. 44(4), 663-668
- .
- [66] Christensen Lo K R, Wu E (1977). A high-order theory of plate deformation-Part 2: laminated plates. *Journal of Applied Mechanics*, 44(4), 669-676
- [67] Wang CM, Reddy JN, Lee, KH, (2000). *Shear Deformable Beams and Plates: Relationships with Classical Solutions*. Elsevier, Oxford, UK
- [68] Berthelot J-M (1992). *Matériaux composites : comportement mécanique et analyse des structures*. Vol. 3., Masson, Paris

- [69] Jones RM (1999) *Mechanics of Composite Materials*. Taylor & Francis, Philadelphia.
- [70] Berthelot JM (2007). *Mechanical behaviour of composite materials and structures*. ISMANS, Le Mans, France
- [71] Hervé Oudin, (2008). *Méthode des éléments finis*. Centrale Nantes.
- [72] Werner Soedel (2004). *Vibrations of Shells and Plates*, Third Edition, Dept. of Mechanical Engineering, Purdue University, West Lafayette, Indiana
- [73] Documentation for ANSYS (2010). *Element Reference Part I, Element Library*
- [74] Liljedahl CDM, Crocombe AD, Wahad MA, Ashcroft IA (2006). Damage modeling of adhesively bonded joints. *Int J Fract*, 141,147-161
- [75] Kivak T (2014). Optimization of surface roughness and flank wear using the Taguchi method in milling of Hadfield steel with PVD and CVD coated inserts. *Measurement*, 50, 19-26
- [76] Unal H, Ficici F, Mimaroglu A, Demirkol A, Kırdar A (2015). Prediction and optimization of tribological behavior of nylon composites using Taguchi analysis method. *J Braz Soc Mech Sci Eng*. <https://doi.org/10.1007/s40430-015-0398-1>
- [77] Nalbant M, Gokkaya H, Sur G (2007). Application of Taguchi method in the optimization of cutting parameters for surface roughness in turning. *Materials and Design*, 28, 1379-1385
- [78] Meunier M. Sheno RA (1999). Free Vibration Analysis of composite sandwich Plates. *J. Mech. Eng. Sci., Part C*, 213,715-727
- [79] Malekzadeh K, Khalili MR, Mittal RK (2005). Local and Global Damped Vibrations of Plates with a Viscoelastic Soft Flexible Core: An Improved High-order Approach. *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 7(5), 431-456

[80] Nayak AK, Moy SSJ, Sheno RA (2002). Free vibration analysis of composite sandwich plates based on Reddy's higher-order theory. *Composites : Part B*, 33, 505-519

Annexes

Annexe A

Tableau A.1 Influence de la masse attachée sur la fréquence propre pour le premier mode de vibration pour la plaque $[\pm 20]_2s$

Emplacement de la masse attachée	Fréquences propres expérimentales (Hz)	Fréquences propres numériques (Hz)	Dispersion (%)
P1	4,9	4,821	1,6
P2	4,3	4,4538	3,5
P3	3,4	3,7707	10,9
P4	2,8	3,0506	8,9

Tableau A.2 Influence de la masse attachée sur la fréquence propre pour le deuxième mode de vibration pour la plaque $[\pm 20]_2s$

Emplacement de la masse attachée	Fréquences propres expérimentales (Hz)	Fréquences propres numériques (Hz)	Dispersion (%)
P1	21,4	21,848	2,09
P2	21,7	21,912	0,9
P3	21,6	21,702	0,4
P4	21,3	21,444	0,6

Tableau A.3 Influence de la masse attachée sur la fréquence propre pour le troisième mode de vibration pour la plaque $[\pm 20]_2s$

Emplacement de la masse attachée	Fréquences propres expérimentales (Hz)	Fréquences propres numériques (Hz)	Dispersion (%)
P1	27,5	27,998	1,81
P2	25,7	24,843	3,33
P3	29,2	29,618	1,43
P4	21,3	22,38	5,07

Annexe B

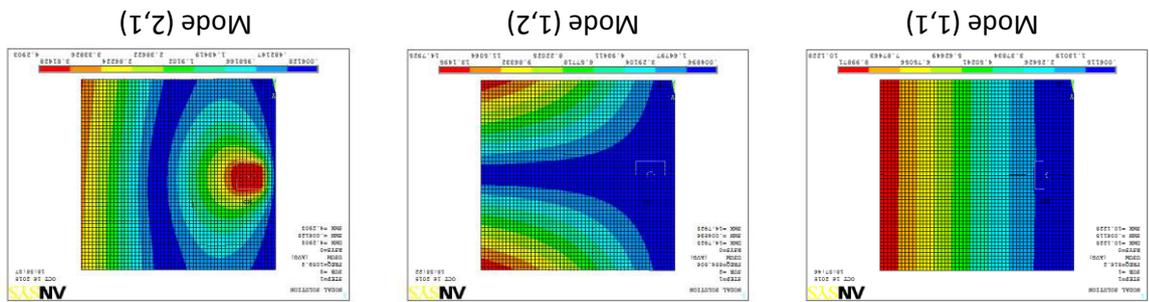


Figure B.1 Modes propres de la plaque sandwich (E/L/L), avec masse attachée à l'emplacement P₁

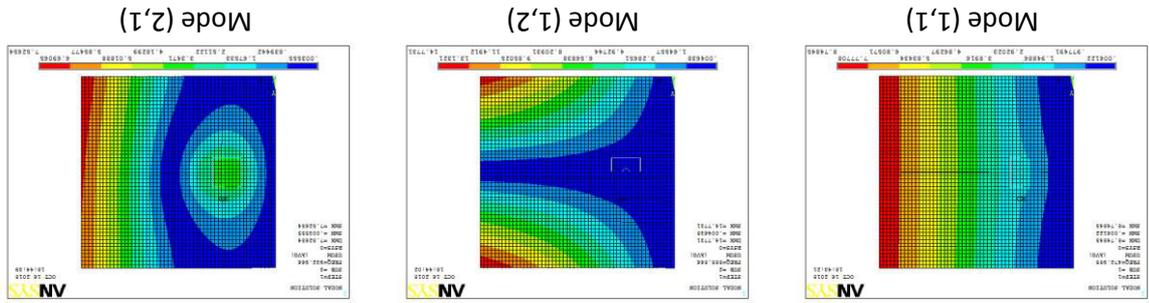


Figure B.2 Modes propres de la plaque sandwich (E/L/L), avec masse attachée à l'emplacement P₂

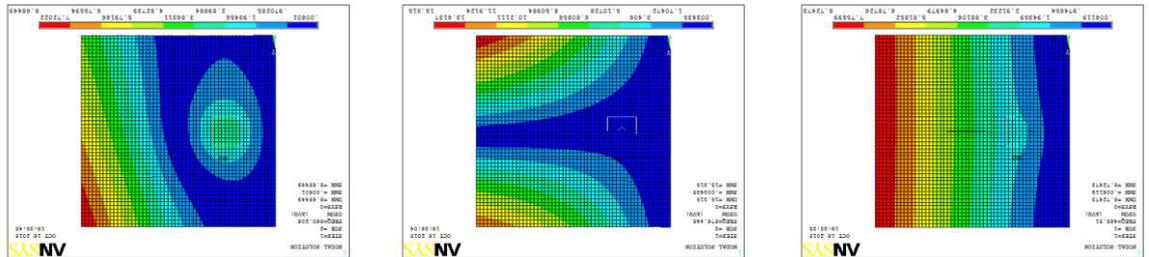


Figure B.3 Modes propres de la plaque sandwich (E/L/L), avec masse attachée à l'emplacement P₃

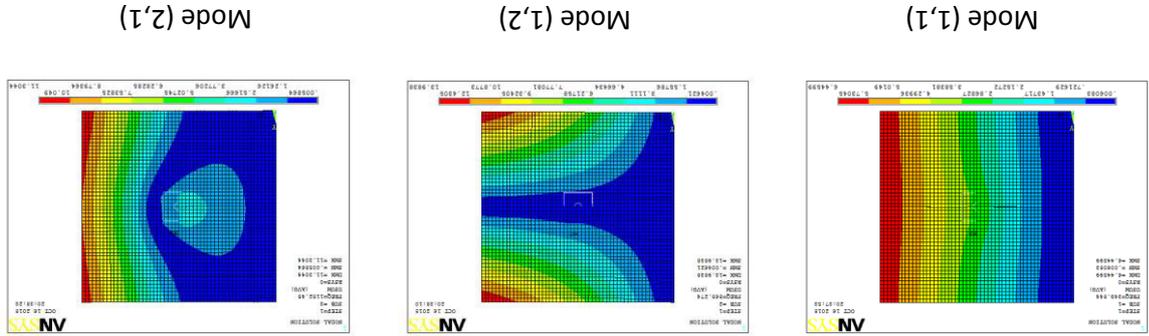


Figure B.4 Modes propres de la plaque sandwich (E/L/L), avec masse attachée à l'emplacement P₄

Annexe C

Tableau C.1 Caractéristiques mécaniques de monofilaments aramides

Caractéristiques	Kevlar 29	Kevlar 49	Kevlar 149	Twaron	Technora
Masse volumique ρ (kg/m ³)	1440	1450	1470	1440	1390
Diamètre (μm)	12	12	12	12	12
Module d'Young E_f (GPa)	60	120	160	60	90
Module spécifique E_f/ρ (MNm/kg)	42	83	110	40	65
Contrainte à la rupture σ_{fu} (MPa)	3000	3000	2400	2600	2800
Contrainte spécifique σ_{fu}/ρ (kNm/kg)	2080	2070	1630	1800	2010
Allongement à la rupture (%)	3,6	1,9	1,5	3	4

Tableau C.2 Caractéristiques des fibres de carbone, comparées à celles des fibres de verre

Caractéristiques	Verre	Carbone
Masse volumique ρ (kg/m ³)	2600	1750
Diamètre (μm)	10 à 20	5 à 7
Module d'Young E_f (GPa)	73	230
Module spécifique E_f/ρ (MNm/kg)	28	130
Contrainte à la rupture σ_{fu} (MPa)	3400	3000-4000

Tableau C.3 Caractéristiques mécaniques des fibres de bore, bore-carbure de bore et carbure de silicium

Caractéristiques	Bore	Bore+B ₄ C	SiC
Masse volumique ρ (kg/m ³)	2600	2600	3000
Diamètre (μm)	100-150	100-150	100-150
Module d'Young E_f (GPa)	430	430	410
Module spécifique E_f/ρ (MNm/kg)	165	165	140
Contrainte à la rupture σ_{fu} (MPa)	3822	4000	3900
Contrainte spécifique σ_{fu}/ρ (kNm/kg)	1460	1540	1300