

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE  
ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE MENTOURI-CONSTANTINE  
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE**

**N° d'ordre  
Série**

**THESE EN CO-TUTELLE**

**Université de Reims Champagne-Ardenne (France)**

**Présentée pour obtenir le grade de Docteur  
EN GENIE MECANIQUE**

**Spécialité  
Construction**

**Intitulée**

---

**CONTRIBUTION A LA MODELISATION DES  
INTERACTIONS FLUIDES-STRUCTURES**

---

**PAR**

**Rassim BELAKROUM**

**Soutenue le : 14/04/2011**

**Devant le Jury**

<b>Président: Z. NEMOUCHI</b>	<b>Professeur, Université Mentouri - Constantine</b>
<b>Rapporteurs: M. KADJA</b>	<b>Professeur, Université Mentouri - Constantine</b>
<b>T. H. MAI</b>	<b>Professeur, Université de Reims – France</b>
<b>Examineurs: G. POLIDORI</b>	<b>Professeur, Université de Reims – France</b>
<b>C. ABID</b>	<b>M.C.-HDR, Université de Marseille – France</b>
<b>K. ZIDANI</b>	<b>M.C., Université Hadj Lakhdar - Batna</b>

*Si chaque découverte entraîne plus de questions qu'elle n'en résout, la part d'inconnu s'accroît à mesure que nos connaissances augmentent.*

*Pierre Vathomme*

*A mes très chers parents*

*A ma femme et mes petits*

*A mes frères et sœurs*

# Remerciements

*Je tiens à exprimer ma reconnaissance et toute ma gratitude envers mon directeur de thèse, Monsieur **Mahfoud KADJA** Professeur à l'Université de Constantine qui a dirigé ma thèse avec enthousiasme. La confiance qu'il m'a donnée, son soutien et son implication m'ont permis de mener ce travail dans les meilleures conditions. Que son apport inestimable soit ici remercié.*

*Je voudrais également exprimer ma gratitude envers mon encadreur de thèse en France, Monsieur **Ton Hoang MAI** Professeur à l'université de Reims pour ses précieux conseils, ses encouragements et de m'avoir donné la chance de profiter de sa remarquable compétence, sa rigueur et sa grande expérience.*

*Je suis très honoré que Monsieur **Zoubir NAMOUCHI**, Professeur à l'Université de Constantine ait accepté de juger ce travail et aussi, d'être président du jury.*

*Je souhaite, en outre, présenter de vifs remerciements au Professeur **Guillaume POLIDORI** de l'Université de Reims (France), à Madame **Chérifa ABID** Maître de conférences-HDR, à l'université de Marseille (France) et à Monsieur **Kamel ZIDANI** Maître de conférences à l'Université de Batna pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce modeste travail, en acceptant de rapporter ma thèse et de faire partie du jury.*

*J'exprime mes chaleureux remerciements au Docteur **Kamel ZIBOUCHE** du Centre Scientifique et Technique du Bâtiment (France) qui m'a aidé et soutenu au cours de ce travail en me consacrant beaucoup de son temps et aussi pour ses précieux conseils en matière des logiciels libres.*

*Des remerciements très spéciaux à l'ensemble de l'équipe du laboratoire de thermomécanique de l'université de Reims pour leur gentillesse et la sympathie qu'ils ont témoignée envers ma personne au cours de mon séjour en France.*

# Sommaire

<i>REMERCIEMENTS</i> .....	
<b>SOMMAIRE</b> .....	
<b>INTRODUCTION GENERALE</b> .....	<b>1</b>
<b>1. PROBLEME DE BASE ET ETAT DE L'ART</b> .....	<b>6</b>
1.1. Problème de base de la modélisation des interactions fluides structures .....	6
1.2. Mécanisme de base du couplage dynamique des interactions fluides-structures.....	7
1.2.1. Traitement simplifié.....	8
1.2.2. Traitement détaillé .....	10
1.3. Caractérisation mathématique des écoulements en milieux déformables.....	12
1.3.1. Méthodes de description de la cinématique d'un milieu continu .....	12
1.3.2. Equations de conservation en formulation ALE.....	14
1.3.3. Formulation ALE en Mécanique des fluides.....	17
1.4. Couplage en interactions fluides structures .....	19
1.5. Conclusion du chapitre .....	20
<b>2. DESCRIPTION DU DOMAINE FLUIDE</b> .....	<b>21</b>
2.1. Concepts de base de la méthode des éléments finis .....	21
2.2. Procédure générale d'une analyse par éléments finis .....	24
2.3. La méthode des résidus pondérés.....	25
2.3.1. Collocation par points.....	26
2.3.2. Collocation par sous-domaines.....	26
2.3.3. Méthode des moindres carrés.....	26
2.3.4. Méthode de Galerkin : .....	27
2.4. Problème de Stokes généralisé et la formulation mixte en éléments finis .....	27
2.4.1. Formulation forte.....	27
2.4.2. Formulation faible.....	27
2.4.3. Discrétisation en deux dimensions .....	28
2.5. La condition LBB ou inf-sup .....	32
2.6. Formulation d'élément finis pour les problèmes de convection diffusion.....	33
2.6.1. Analyse de stabilité (cas unidimensionnel).....	34
2.6.2. Stabilisation de la méthode en deux et trois dimensions.....	37
2.6.3. Techniques de stabilisation.....	38
2.6.3.1. La méthode SUPG (Stream-Upwind Petrov-Galerkin).....	38
2.6.3.2. La méthode GLS (Galerkin/Least Squares) .....	39
2.6.3.3. Les paramètres de stabilisation .....	39
2.7. Les équations de Navier-Stokes et formulations d'éléments finis stabilisés.....	40
2.7.1. Formulation faible (Galerkin standard).....	40
2.7.2. Discrétisation spatiale en deux dimensions.....	41
2.7.3. Discrétisation temporelle .....	42
2.7.4. Méthodes d'éléments finis stabilisées appliquées aux équations de Navier-Stokes.....	43
2.7.4.1. Formulation SUPG (Stream-Upwind/Petrov-Galerkin) .....	43
2.7.4.2. Formulation Galerkin Least-Squares .....	44
2.7.4.3. Paramètres de stabilisation .....	44
2.8. Les écoulements turbulents .....	45
2.8.1. Le Modèle de Smagorinsky .....	46
2.8.2. Le traitement près des parois .....	47

2.9. Expérimentations numériques .....	48
2.9.1. Formulation mathématique.....	48
2.9.2. La méthode numérique .....	49
2.9.3. Simulation Numérique du phénomène d'éclatement tourbillonnaire dans la zone de sillage d'un obstacle de section circulaire .....	50
2.9.3.1 Résultats et discussions .....	51
2.9.3.1.1 Domaine de calcul.....	51
2.9.3.1.2. Illustration du caractère périodique et instationnaire de l'écoulement autour d'un cylindre.....	52
2.9.4 Etude numérique des compteurs à effet vortex.....	55
2.9.4.1. Résultats numériques .....	56
2.9.5. Simulation numérique des chargements dynamiques subis par les grandes bâtisses à sections rectangulaires .....	61
2.9.5.1. Prédiction numérique de l'influence du coefficient latéral de l'obstacle .....	63
2.9.5.2. Prédiction numérique de l'effet de l'angle d'attaque.....	65
2.10. Conclusion du chapitre .....	70

### **3. TRAITEMENT NUMERIQUE DES ECOULEMENTS DE FLUIDES EN DOMAINES DEFORMABLES..... 71**

3.1. Introduction.....	71
3.2. Discrétisation des équations de Navier-Stokes en formulation ALE.....	72
3.3. Les schémas numériques et la loi de conservation géométrique discrète DGCL .....	73
3.4. Techniques de remaillage du domaine de calcul.....	74
3.4.1. Formulation pseudo-élastique.....	75
3.4.1.1. Coefficient de Poisson.....	75
3.4.1.2. Rigidité de l'élément pseudo-élastique .....	75
3.4.2. Techniques de calcul au niveau élémentaire par la méthode des éléments finis.....	78
3.4.2.1 Principe des coordonnées intrinsèques .....	79
3.4.2.2. Les éléments isoparamétriques .....	80
3.4.2.2. Méthode d'intégration numérique (formule de quadrature de Gauss) .....	81
3.4.2.2. Séquence de l'opération de calcul de la matrice de rigidité élémentaire.....	81
3.5. Expérimentations numériques .....	82
3.5.1. Description du domaine fluide .....	82
3.5.1.1. Modèle mathématique .....	82
3.5.1.2. Mouvement du maillage .....	83
3.5.2 Méthode numérique.....	84
3.5.2.1. Discrétisation par éléments finis.....	84
3.5.2.2 Résolution du problème couplé non linéaire.....	85
3.5.3. Simulation numérique par éléments finis des ballottements d'un réservoir partiellement rempli de liquide .....	86
3.5.3.1. Condition cinématique à la surface libre .....	88
3.5.3.2. Résultats et discussions.....	89
3.5.2. Investigation numérique sur les techniques de réduction passives des ballottements dans les réservoirs rectangulaires partiellement remplis de liquide .....	96
3.5.2.1. Condition cinématique à la surface libre .....	97
3.5.2.2. Investigations numériques.....	97
3.6. Conclusion du chapitre .....	105

### **4. PROBLEME COUPLÉ EN INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE ET ALGORITHME DE COUPLAGE..... 106**

4.1. Introduction.....	106
4.2. Classification des méthodes de résolution des problèmes couplés fluides-structures.....	107
4.2.1. Méthode de couplage dans un sens ou bien deux .....	107
4.2.2. Méthode explicite ou implicite .....	107
4.2.3. Méthode partitionnée ou monolithique.....	108

4.3. Algorithmes ou procédures de couplage.....	109
4.4. Comportement aéroélastique d'un pont sous l'effet de vents .....	112
4.4.1. Description du domaine solide .....	114
4.4.2. Conditions de couplage fluide-structure .....	115
4.4.3. Méthode numérique.....	115
4.4.3.1 Discrétisation par la méthode des éléments finis .....	116
4.4.3.2. Résolution du problème couplé nonlinéaire.....	117
4.4.4. Investigations numériques.....	118
4.5. Conclusion du chapitre .....	123
<b>CONCLUSION GENERALE .....</b>	<b>124</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>	<b>127</b>
<b>LISTE DES FIGURES .....</b>	<b>134</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX.....</b>	<b>136</b>
<b>RESUME .....</b>	<b>.....</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>.....</b>
<b>ملخص.....</b>	<b>.....</b>

# **Introduction générale**



# Introduction générale

L'interaction fluide-structure est un sujet de recherche en plein essor. Les problèmes abordés dans ce domaine sont très présents dans les applications industrielles impliquant en même temps deux sous domaines, fluide et structure. On s'intéresse aux vibrations des structures solides en présence de fluides. En pratique, on est confronté à ce genre de problème à titre d'exemple dans les situations suivantes:

- Réservoirs partiellement remplis de liquide subissant l'effet de ballonnement de la surface libre du liquide, Réponse vibratoire des structures sous sollicitations hydrodynamiques ;
- Ponts suspendus, gratte-ciel et câbles vibrants sous l'effet de vent ;
- Le flottement des ailes d'avion, la dynamique des gonflements des airbags ;
- Dans le domaine du nucléaire, la rupture des générateurs de vapeur par vibrations induites par l'écoulement d'eau ;
- En biomécanique, la déformation des vaisseaux sanguins sous l'effet du rythme cardiaque.

Avant l'avènement du calcul scientifique, les interactions fluides structures étaient étudiées exclusivement de manière expérimentale. Ces méthodes sont très coûteuses à mettre en œuvre en plus dans les cas de tests destructifs, plusieurs maquettes doivent être utilisées.

En matière de modélisation, initialement les modèles utilisés se limitaient à de simples modèles analytiques. Dans ce cas, à titre d'exemple, on se proposait pour l'étude des problèmes d'instabilité aéroélectrique des profils d'ailes d'avion une approximation du champ de charge aérodynamique. La simulation numérique des interactions fluides structures est devenue possible principalement, grâce aux progrès et à l'accroissement des performances des calculateurs et aux avancées considérables réalisées dans deux branches de recherche qu'on considérait distinctes qui sont : la mécanique des fluides et la dynamique des structures.

Afin de simuler numériquement un problème de couplage fluide-structure, nous devons intégrer simultanément les équations d'évolution du fluide et de la structure. Vient ensuite, la partie couplage où l'interaction doit permettre la traduction des échanges des efforts, et de la cinématique du système global. Les méthodes d'analyse des interactions fluides structures peuvent être classées en quatre principales catégories :

- Dans certains cas, une approche quasi statique donne des résultats satisfaisants. Dans ce cas, c'est seulement l'équilibre du chargement stationnaire entre le fluide et le domaine solide qui présente un intérêt.
- Une autre approche repose essentiellement sur des modèles linéarisés ou partiellement linéarisés du couplage fluide-structure. Dans ce cas, les fluctuations de la pression aux frontières mobiles sont considérées comme étant une force d'inertie qui agit comme une masse ajoutée fixée au système, et se déplaçant solidairement avec lui. En présence d'un fluide visqueux, un amortissement dû à la viscosité s'ajoute à l'amortissement propre de la structure.
- La méthode à sens unique (one way method) : Dans ce cas de figure, on utilise la solution aux frontières du domaine fluide comme conditions aux limites du sous domaine solide. Cette approche peut être utilisée dans les cas où on juge que les déplacements du solide donc des frontières fluides sont minimales, et n'affectent pas le champ d'écoulement.
- Dans certains cas, les déformations du sous domaine solide induites par les forces dues à l'écoulement du fluide deviennent assez importantes. La structure solide oscille à l'intérieur ou autour du fluide. Par conséquent, la structure de l'écoulement du fluide est affectée. Il est impossible de décrire correctement à la fois l'écoulement du fluide et le mouvement de la structure sans considérer la non-linéarité de l'interaction entre structure et fluide. Le problème doit être traité comme un problème à frontières mobiles, en tenant en compte les échanges énergétiques qui ont lieu à travers l'interface fluide structure. Dans ce cas, à la fois pour le fluide et pour la structure les deux modèles comprennent des termes transitoires. Cette catégorie de méthodes est probablement l'une des plus complexes et nécessitant d'importants moyens de calcul. Par contre, elle présente une approche prometteuse vue la puissance et la précision des techniques numériques mises en jeu.

Même si en matière de modélisation mathématique, les deux milieux solide et fluide proviennent de la même source, qui est la mécanique des milieux continus ; il y a une difficulté particulière propre aux problèmes d'interaction fluide structure, qui réside dans l'inadéquation des méthodes de description des deux sous domaines. Pour le solide, on utilise une description Lagrangienne, par contre dans le sous-domaine fluide la représentation Eulérienne est mieux adaptée. A cause des inconvénients des descriptions purement Lagrangienne et Eulérienne, une nouvelle technique a été développée. Cette dernière combine

les points forts des deux autres approches classiques. Cette technique est nommée description arbitrairement Lagrangienne Eulérienne (Arbitrary Lagrangian-Eulerian ALE).

Dans la Méthode ALE, les nœuds du domaine de calcul peuvent se déplacer avec les points matériels comme dans une description purement Lagrangienne, ou bien être fixes de façon Eulérienne, et aussi être animés d'un mouvement arbitraire spécifié. A cause de cette liberté à déplacer le maillage offerte par la méthode ALE, les problèmes des distorsions excessives du milieu continu peuvent être résolus en préservant les limites claires aux interfaces typiquement comme cela est fait dans une configuration Lagrangienne. Les algorithmes de calcul basés sur la méthode ALE sont particulièrement adaptés à l'étude des écoulements de fluides dans les domaines déformables ou présentant des frontières mobiles. Avec le degré de liberté additionnel par rapport aux deux autres approches Eulérienne et Lagrangienne, la méthode ALE permet un certain degré de facilité par rapport aux problèmes rencontrés dans les descriptions classiques. En se ramenant à un domaine qui suit le mouvement de l'interface, sans être attaché aux particules fluides, cette modélisation permet de combiner les avantages du Lagrangien (traitement des mouvements de l'interface) et de l'Eulérien (traitement de la convection).

La plus grande influence de la formulation ALE dans les problèmes d'écoulement de fluide, réside dans la prise en compte du mouvement du maillage. La vitesse convective remplace la vitesse des particules fluides qui apparaît dans le terme convectif dans la formulation Eulérienne standard. Nous notons aussi, que le déplacement du maillage augmente ou diminue l'effet convectif. Dans un écoulement où la convection domine, l'utilisation d'une méthode de stabilisation numérique est impérative afin de prévoir les problèmes d'instabilités liées au schéma de discrétisation du terme convectif.

Lors de la mise en œuvre de la formulation ALE, et à cause d'un problème d'instabilité, une autre contrainte s'ajoute sur les choix possibles du schéma numérique utilisé pour résoudre les équations de l'écoulement du fluide et l'algorithme construit pour le calcul des déplacements et vitesses des nœuds du maillage. En sélectionnant la méthode d'intégration des équations du fluide, il est désiré de choisir une méthode qui préserve la solution triviale d'un champ d'écoulement uniforme (dans l'absence de conditions aux limites, un champ d'écoulement uniforme est toujours solution des équations de Naviers-Stokes). Il a été démontré que cela est proprement vérifié seulement quand le schéma numérique choisi satisfait une certaine condition nommée loi de conservation géométrique (Geometric Conservation Law –GCL–).

Si nous considérons que le système global défini par l'union des deux sous-domaines fluides et solides constitue un système fermé, nous devons vérifier qu'à chaque instant  $t$ , le bilan des échanges d'énergie entre les deux sous-systèmes doit être nul. Donc, dans une procédure de calcul, nous devons nous assurer à chaque pas de temps que la réaction de la structure solide est égale à l'action des particules fluides en écoulement. Pour un écoulement de fluide visqueux, toutes les composantes du champ de déplacements du fluide et du solide doivent s'égaliser à l'interface.

En interaction fluides structures, plusieurs stratégies de couplage sont possibles, on peut citer :

- Procédure partitionnée totalement explicite : Dans ce cas, les domaines fluides et solides sont formulés d'une manière indépendante et l'échange entre les deux solveurs des deux sous domaines est réalisé alternativement à chaque instant au niveau des conditions aux limites. L'avantage de cette méthode réside surtout dans sa flexibilité et la possibilité de coupler des codes de calcul déjà existants. Toutefois, le point faible de la présente méthode et ses propriétés de stabilité qui ne sont pas bonnes.
- Procédure de couplage implicite : pour cette méthode les deux sous domaines fluides et structures sont formulés d'une manière plus compatible et les termes de couplage sont introduits directement dans le système global des équations à résoudre. Cela permet d'améliorer la stabilité de l'approche numérique.
- Procédure de calcul monolithique : Cette procédure de couplage permet la résolution de toutes les inconnues du problème traité simultanément aux mêmes instants. La procédure numérique a de très bonnes propriétés de stabilité et l'assurance de la convergence est optimale.

Les buts principaux recherchés de la présente thèse visent au développement et à l'expertise d'une méthodologie de simulation numérique des problèmes d'interactions fluides structures. Afin de cerner d'une manière progressive le problème étudié, on a organisé la présente thèse en quatre chapitres :

- 1 Problème de base et état de l'art: Dans ce chapitre, on présente la problématique de base du problème abordé et on souligne les aspects importants et spécifiques au traitement numérique des problèmes des interactions fluides et structures.
- 2 Description du domaine fluide : Cette partie est consacrée à la présentation de la méthode des éléments finis stabilisée utilisée dans le domaine, de la simulation des écoulements de fluides. Ainsi qu'un aperçu sur la modélisation des écoulements turbulents

particulièrement la méthode LES, qu'on a exploitée. On expose aussi les résultats de trois investigations numériques menées:

- Étude du phénomène d'éclatement tourbillonnaire dans la zone de sillage d'un obstacle de section circulaire.
- Simulation numérique du comportement des débitmètres à effet vortex.
- Analyse numérique de l'effet de vent sur les grandes bâtisses à sections rectangulaires.

3 Traitement numérique des écoulements de fluides en domaines déformables : On présente la discrétisation par la méthode des éléments finis des équations de Navier Stokes en description Arbitrairement Lagrangienne Eulérienne (ALE). On discute les problèmes de stabilité et la loi de conservation géométrique. Deux études numériques sont exposées :

- Simulation numérique par éléments finis des ballottements d'un réservoir partiellement rempli de liquide.
- Investigation numérique sur la réduction des ballottements dans les réservoirs rectangulaires partiellement remplis de liquide.

4 Problème couplé et algorithmes de couplage : Dans cette partie, on expose les algorithmes de couplage existants en interaction fluides structures, ainsi qu'une étude réalisée qui concerne la simulation des vibrations d'un pont sous l'effet de vents.

# **Chapitre 1: Problème de base et état de l'art**

# 1. Problème de base et état de l'art

On abordera en ce qui suit, en premier lieu, les interactions fluides structures d'un point de vue phénoménal. On discutera aussi les différents modèles existants dans la littérature et on s'attardera surtout sur la caractérisation mathématique des écoulements de fluides en milieux déformables. On soulignera ainsi l'importance de ladite loi de conservation géométrique GLC et son effet significatif sur la stabilité des procédures de calculs numériques des écoulements en milieux déformables. A la fin, on expliquera les conditions de couplage en interaction fluides structures qui garantissent la stabilité des calculs et vérifient la conservation de l'énergie mécanique à l'interface entre les deux sous domaines fluide et solide.

## 1.1. Problème de base de la modélisation des interactions fluides structures

L'écoulement du fluide engendre des forces sur les frontières du solide l'obligeant à se déplacer. Ce mouvement va simultanément influencer les conditions de l'écoulement. Les structures solides sont généralement en contact avec au moins un fluide. Par conséquent, les mouvements fluide et solide ne sont pas indépendants les uns des autres, mais couplés par un certain nombre de conditions cinématiques et dynamiques. Le fluide et la structure, considérés comme un tout, se comportent ainsi comme un système dynamique couplé.

Les études expérimentales dans le domaine des interactions fluides structures peuvent s'avérer très difficiles à mettre en œuvre, afin d'obtenir des résultats précis et informatifs. Cela est dû à la nature complexe du phénomène ainsi qu'aux échelles en temps et en espace sur lesquelles les instabilités apparaissent. Pour ces raisons, les études théoriques sont devenues favorisées à l'étude de ces systèmes dynamiques. Au début, des études théoriques utilisaient des modèles simplifiés en faisant des présuppositions soit du chargement dû au fluide sur le solide, soit sur le mouvement de la structure. D'autres approches consistent à ramener le problème couplé sous certaines hypothèses simplificatrices à un système partiellement ou totalement linéarisé. Malheureusement, toutes ces méthodes avaient un véritable défaut qui est la possibilité de masquer la dynamique critique du système.

Avec l'avènement des moyens informatiques et l'accroissement des capacités de calcul ces dernières années, d'autres approches avec une plus grande rigueur ont vu le jour. Ces dernières reposent sur des modèles mathématiques plus complexes, par contre, permettant une simulation plus précise et donnant accès à l'approfondissement et la compréhension de la dynamique du véritable système couplé.

## 1.2. Mécanisme de base du couplage dynamique des interactions fluides-structures

Considérons un corps solide submergé dans un fluide, comme le montre la figure 1.1

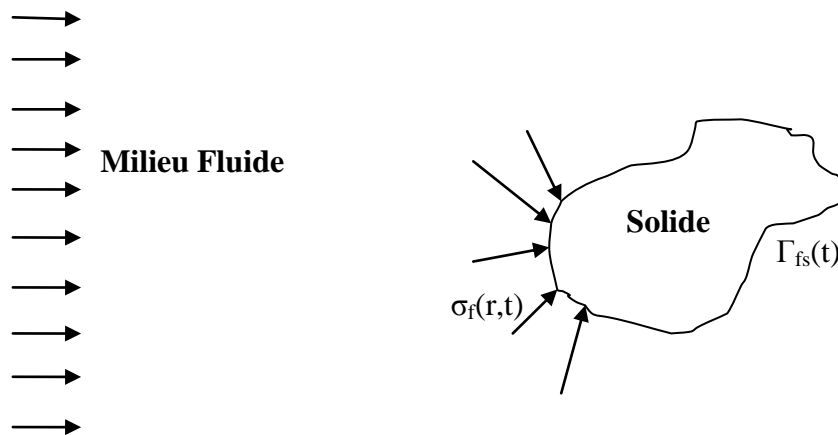


Figure 1.1 : Représentation d'un corps solide dans un écoulement de fluide

Contrairement à l'état statique, les deux sous domaines fluides et structures sont fortement couplées à l'état dynamique. Le couplage en interaction fluide structure est basé sur les mécanismes dynamiques d'interactions suivants:

- 1 Le mouvement du domaine solide (champ de déplacement  $X_s(r,t)$ ) induit le changement des frontières du domaine fluide (déplacement à l'interface  $\Gamma_{fs}(t)$ ) et par conséquent le changement de l'écoulement du domaine fluide  $X_f(r,t)$  qui est supposé rester en contact solidaire avec le solide sur toute l'interface de contact solide fluide.
- 2 A mesure que le fluide s'écoule, un champ de contrainte apparaît ( $\sigma_f(r,t)$ ) qui charge le solide en imposant des forces à l'interface. En conséquence, le mouvement du solide est modifié.



Bien entendu, un tel mécanisme de rétroaction peut être inversé à partir du mouvement du fluide au lieu de celui du solide.

Le couplage fluide structure peut être modélisé mathématiquement en se basant sur les équations du mouvement du corps solide (rigide ou déformable), du fluide (compressible ou incompressible) et complété par des conditions appropriées à l'interface fluide structure qui sont connus sous conditions de frontières mouillées. Ces dernières sont traduites par les deux conditions suivantes :

- 1 A l'interface, les particules fluides et solides ont le même mouvement, car le fluide adhère parfaitement au solide.
- 2 On doit vérifier qu'il y a un équilibre dynamique local au niveau de l'interface. Cela implique que les champs de contraintes des particules fluides et solides à l'interface sont égaux.

Quand il s'agit d'un problème d'interaction fluide structure la procédure de modélisation, consiste à suivre les étapes suivantes :

- Identification et caractérisation du phénomène physique étudié.
- Choix de la méthode d'évaluation.

Il existe deux approches différentes en ce qui concerne l'identification des mécanismes régissant le phénomène étudié. Ces approches sont basées sur deux philosophies opposées. Dans la première, le problème qui se pose est de simplifier autant que possible et les conclusions établies reposent sur une analyse de base du problème simplifié. Dans la seconde approche, c'est exactement le contraire qui se fait, le problème est modélisé aussi précisément que possible. Le modèle qui en résulte sera normalement plus précis et beaucoup plus complexe. Le choix de la méthode qu'on devrait adopter dépend de l'importance du problème et de la précision recherchée. Ainsi avant le choix du modèle mathématique, il est nécessaire de classer le problème étudié suivant son importance.

### 1.2.1. Traitement simplifié

Afin de simplifier le problème de manière adéquate, les fondements du phénomène physique doivent être assimilés dans la mesure du possible. Le manque de compréhension peut conduire à de mauvais résultats, qui peuvent être même en contradiction avec la réalité. De toute évidence, cela pourrait conduire à d'éventuels problèmes et par conséquent à des conclusions erronées.

Simplifier un problème, implique en général, l'extraction que de la complexité essentielle du phénomène. Notez cependant, que sans une bonne compréhension du phénomène physique, une modélisation mathématique ne peut conduire qu'à des résultats erronés et par conséquent, est vouée à l'échec. Afin d'exécuter correctement une évaluation simplifiée, il est extrêmement important de fonder nos analyses sur les connaissances actuelles du phénomène en question. En outre, il est important de distinguer les aspects spécifiques aux problèmes qui peuvent être analysés théoriquement ou numériquement de ceux qui ne peuvent pas l'être.

Dans cette catégorie d'approche, on peut citer la méthode de transpiration [1]. C'est les ingénieurs aéronauticiens qui ont été les premiers à utiliser cette technique, qui n'exige pas l'utilisation de grilles de maillage mobiles ni l'adaptation profonde des solveurs fluides et qui permet de prendre en considération l'impact de la dynamique de la structure sur l'écoulement du fluide par le moyen d'une simple manipulation des conditions aux limites sur l'interface considérée comme fixe [2]. Cette méthode n'est valable que dans le cadre de petits déplacements et permet de ramener le problème réel à un problème d'écoulement de fluide sur un domaine fixe en formulation Eulérienne.

Dans de nombreux problèmes, on peut se baser sur la théorie des vibrations afin de décrire le mouvement du fluide et de la structure. On considère dans ce cas que le mouvement de la structure à des petites perturbations et des fluctuations de pression du fluide autour d'un état d'équilibre [3, 4]. Il suffit d'utiliser une modélisation linéaire du comportement du fluide – où les termes convectifs et la viscosité sont négligés-. Un fluide linéaire est facilement manipulé par la méthode des éléments finis. Une grande simplification est introduite par l'utilisation d'un fluide incompressible. Dans ce cas, par l'utilisation de la méthode des éléments finis pour l'approche de l'interaction d'une structure et d'un fluide linéaire, résulte une formulation linéaire pour les deux systèmes. Le problème peut donc être résolu par la mise en œuvre de méthodes standards [5]. Dans le cas où la compressibilité du fluide ne peut être négligée, une méthode d'approximation peut être utilisée, qui consiste principalement en une seconde matrice de masse ajoutée. Les matrices de masse ajoutée ne sont pas bandées, par conséquent le coût des calculs augmente considérablement [6].

Ces dernières années, une nouvelle piste s'avérant très prometteuse en matière de simulation numérique en interaction fluide-structure commence à prendre de l'ampleur. Les méthodes utilisées dans ce sens reposent sur le principe de la réduction de l'ordre du modèle ROM (Reduced Order Modelling). Cette procédure consiste à remplacer le modèle continu initial par un système à un ordre plus bas par la projection des équations de base sur un système à

plus petit nombre de modes ou d'inconnues. On construit un modèle d'ordre réduit ROM afin de réduire la taille du modèle et les coûts des calculs et d'obtenir de bonnes simulations [7]. Il est très important, de noter qu'on a introduit cette catégorie de méthodes parmi les méthodes dites simplifiées juste par ce qu'elle repose sur le principe qui consiste en quelque sorte à retravailler les équations de base initiales en vue d'obtenir une formulation du problème à très peu d'inconnues. Le nombre d'inconnues devra être très faible devant le nombre d'inconnues du système d'équations obtenu par une discrétisation classique (éléments finis, différences finies, volumes finis, méthode spectrales, etc...). La condition étant que ce système réduit conserve approximativement les informations jugées importantes dans le modèle continu à une précision fixée [8].

Plusieurs travaux ont vu le jour, et ayant comme but principal le développement de modèles mécaniques réduits décrivant les problèmes d'interactions fluide-structure. A titre d'exemple, on cite la contribution de Benaroya et Gabbai [9] en matière de modélisation des effets des vortex sur les structures et en particulier les stations off-shore. Il y a aussi les résultats présentés par Liberge et Hamdouni [10], qui ont utilisé la méthode de décomposition orthogonale POD (Proper Orthogonal Decomposition) pour la projection des équations de Navier Stokes et l'étude du comportement dynamique d'un cylindre à section circulaire pouvant vibrer verticalement sous l'effet d'un écoulement de fluide incompressible.

### 1.2.2. Traitement détaillé

Cette procédure est indispensable lorsque le problème abordé est très important, ou si l'on ne dispose pas de connaissances antérieures qui permettent de l'évaluer. La complexité de la modélisation mathématique des problèmes d'interactions fluides structures est due au besoin particulier à une description mixte des deux sous-domaines fluide et solide. Pour la partie solide le point de vue naturel c'est la description Lagrangienne, tandis que pour le fluide c'est la description Eulérienne qui est la mieux adaptée. Dans le cas de leur combinaison, une sorte de description hybride -généralement appelée description Arbitraire Lagrange-Euler où ALE- doit être utilisée. Cela est à l'origine d'une non-linéarité supplémentaire dans les équations qui en résultent [11].

Une approche numérique rigoureuse des problèmes d'interaction fluide-structure exige une modélisation numérique et des outils de simulation fiables. Des techniques robustes et efficaces sont essentielles à l'étude détaillée de tels phénomènes. Dans leurs contributions Legay et al. [12] ont proposé une méthode basée sur une description Eulérienne pour le fluide

et Lagrangienne pour la structure (Eulerian-Lagrangian). Contrairement à la formulation ALE, dans ce cas le traitement du fluide n'engage pas un mouvement du maillage afin de traquer le mouvement de l'interface fluide-structure. L'unique particularité de l'approche proposée réside dans la description de l'interface fluide solide par la technique dite de niveau fixe (level set method). Zhang et Gay [13] se sont basés sur les mêmes formulations des sous domaines, mais ils ont utilisé la méthode des frontières immergées (Immersed boundary) afin de déterminer la position de l'interface fluide-structure dans le temps et de résoudre ainsi le problème en sa globalité. Gestenberger et Wall [14] ont présenté une méthode de résolution basée aussi sur une grille de maillage fixe qui peut être appliquée à la plupart des interactions des structures et des fluides incompressibles. Cette approche est basée sur la stratégie des éléments finis enrichis XFEM (eXtended Finite Element Method) [15, 16]. Le domaine fluide Eulerien et le solide Lagrangien sont partitionnés et couplés itérativement en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange [17]. Cette approche permet la simulation de l'interaction de fluide et de structures minces ou volumineuses présentant de grandes déformations.

Récemment, une nouvelle méthode de simulation pour résoudre les problèmes de couplage fluide-structure a été développée par Sugiyama et al. [18]. Dans cette approche, toutes les équations de base sont résolues numériquement sur une grille fixe en utilisant un schéma des différences finies et la méthode de volume de fluide VOF (Volume Of Fluid) [19], qui a été largement utilisée pour les simulations des écoulements polyphasiques. L'évolution temporelle de la déformation du solide est décrite dans un cadre Eulerien en mettant à jour à chaque pas de temps le tenseur de déformation de Cauchy-Green. Cette dernière approche traite les interactions fluides-structures impliquant des matériaux flexibles hyperélastiques.

Les approches les plus précises sont celles basées sur une formulation ALE ou bien celles utilisant un domaine spatio-temporel déformé DSD/ST (Deforming-Spatial-Domain/Space-Time) [20, 21]. Ces approches sont désignées comme étant des méthodes avec des capacités à traquer les interfaces de manière rigoureuse. A l'interface fluide-structure, les nœuds du maillage sont partagés entre les deux sous domaines et donc satisfont automatiquement la condition de continuité cinématique. Comme l'écoulement est résolu sur la totalité du domaine fluide déformé, l'interaction dynamique peut être correctement réalisée à travers des procédures itératives adaptées. Une fois, la méthode de remaillage est bien établie, des problèmes de différentes natures en matière d'interaction fluide-structure peuvent être abordés de manière satisfaisante et pouvant réaliser des prévisions précises. Toutefois, l'ensemble du

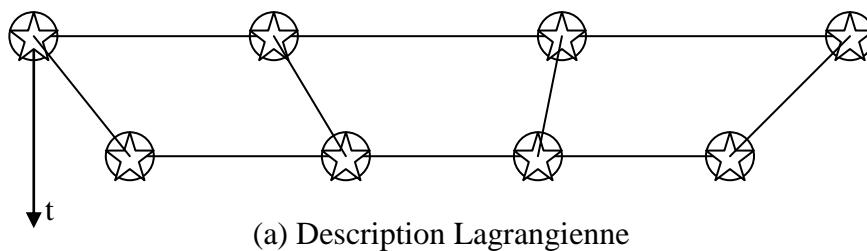
domaine de calcul doit être remaillé à chaque pas de temps quand l'objet solide se déplace ou bien se déforme, ce qui est coûteux en matière de calcul.

### 1.3. Caractérisation mathématique des écoulements en milieux déformables

Dans le but de faire le point sur la méthode utilisée dans ce travail pour la description de l'écoulement de fluide en domaine déformable. Nous allons présenter en premier lieu, les méthodes classiques relativement plus connues en matière de description de la cinématique des milieux continus. Vérifier les points forts et les points faibles de chaque technique et mettre en évidence les capacités intéressantes de la méthode utilisée. Nous établirons aussi les équations de conservation et nous discuterons les spécificités et contraintes propres au traitement d'un écoulement en milieu à frontière mobile.

#### 1.3.1. Méthodes de description de la cinématique d'un milieu continu

Quand un milieu continu et en mouvement, ses grandeurs caractéristiques (température, vitesse, Tenseur de contrainte, ....) vont évoluer dans le temps. On peut décrire cette évolution soit en traquant les particules dans leur mouvement ou bien en observant l'évolution à des endroits fixes. Si on suit les particules de matière dans leurs mouvements, par conséquent, on exprimera les grandeurs caractéristiques comme fonctions de la particule identifiée par ses coordonnées et le temps. Cette méthode est nommée description matérielle ou Lagrangienne. Par contre, en observant les changements à des endroits fixes, on exprime les grandeurs caractéristiques comme des fonctions de point fixe et du temps. Cette description est connue sous le nom de description spatiale ou Eulérienne [22].



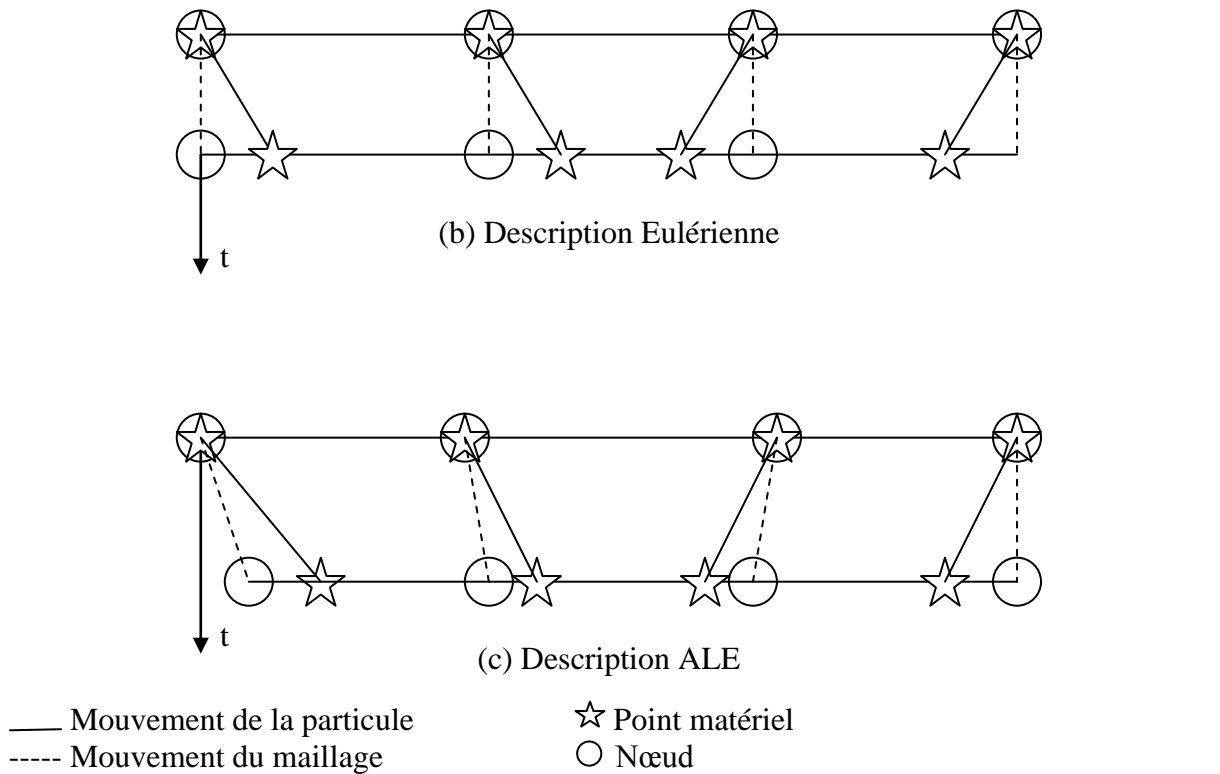


Figure 1.2 : Exemple unidimensionnel des descriptions Lagrangienne, Eulerienne et ALE

Par rapport au point de vue Lagrangien dans un algorithme de calcul, chaque nœud du maillage suit le point matériel durant son mouvement (voir figure 1.2.a). Cette méthode est employée principalement en mécanique des structures. Les applications classiques de cette méthode dans les problèmes à grande déformation sont la simulation des crashes tests des véhicules ainsi que la modélisation des opérations de mise en forme des matériaux. L'utilisation d'une description Lagrangienne permet de traquer facilement le mouvement des surfaces libres et les interfaces entre les différents matériaux. Son point faible c'est l'inhabilité à suivre les grandes déformations du domaine de calcul sans avoir recours à de fréquentes opérations de remaillage.

La méthode Eulérienne est largement utilisée en mécanique des fluides. Dans ce cas de figure, comme le représente la figure 1.2.b, le milieu continu est en mouvement par rapport au maillage. Cette formulation facilite le traitement des grandes déformations dans les mouvements des fluides et elle est indispensable pour la simulation des écoulements turbulents. Son handicap c'est la difficulté à traquer les surfaces libres et l'interaction entre différents milieux.

A cause des inconvénients des descriptions purement Lagrangienne et Eulérienne une nouvelle technique a été développée. Cette dernière combine les points forts des deux autres approches classiques. Cette technique est nommée, description arbitrairement Lagrangienne Eulérienne (Arbitrary Lagrangian-Eulerian ALE).

En se ramenant à un domaine qui suit le mouvement de l'interface, sans être attaché aux particules fluides, cette modélisation permet de combiner les avantages du Lagrangien (traitement des mouvements de l'interface) et de l'Eulérien (traitement de la convection) [23]. Dans la Méthode ALE, les nœuds du domaine de calcul peuvent se déplacer avec les points matériels comme dans une description purement Lagrangienne, ou bien, être fixes de façon Eulérienne, et aussi comme c'est suggéré sur la figure 1.2.c être animés d'un mouvement arbitraire spécifié. A cause de cette liberté à déplacer le maillage offerte par la méthode ALE, les problèmes des distorsions excessives du milieu continu peuvent être résolus en préservant les limites claires aux interfaces typiquement comme cela est fait dans une configuration Lagrangienne. Les algorithmes de calcul basés sur la méthode ALE sont particulièrement adaptés à l'étude des écoulements de fluides dans les domaines déformables ou présentant des frontières mobiles. Avec le degré de liberté additionnel par rapport aux deux autres approches Eulérienne et Lagrangienne, la méthode ALE permet un certain degré de facilité dans les problèmes rencontrés dans les descriptions classiques.

Le concept de l'approche Arbitrairement Lagrangienne Eulérienne (ALE) a été introduit la première fois pour la méthode des différences finies. Après, la méthode a été étendue à la méthode des éléments finis par plusieurs spécialistes. Cette approche est basée sur le mouvement arbitraire du référentiel (ou le mouvement du maillage) comme un système de coordonnées en addition aux deux domaines matérielle et spatial. Avec l'introduction de ce nouveau référentielle, ensemble avec une méthode de remaillage, l'écoulement dans des domaines déformables peut être simulé efficacement.

### 1.3.2. Equations de conservation en formulation ALE

Nous établirons dans cette partie les équations de conservation de masse et de quantité de mouvement en formulation ALE en vue de leur utilisation pour l'étude des problèmes des ballottements dans les réservoirs partiellement remplis de liquide et des vibrations des structures induites par les écoulements de fluides.

La forme différentielle en configuration ALE des équations de Navier-Stokes est déterminée à partir des équations correspondantes en configuration Eulérienne couramment utilisées en mécanique des fluides.

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t}\bigg|_x + U \cdot \nabla\rho = -\rho \nabla \cdot U \quad 1.2.a$$

$$\rho \frac{dU}{dt} = \rho \left( \frac{\partial U}{\partial t}\bigg|_x + (U \cdot \nabla)U \right) = \nabla \cdot \sigma + \rho b \quad 1.2.b$$

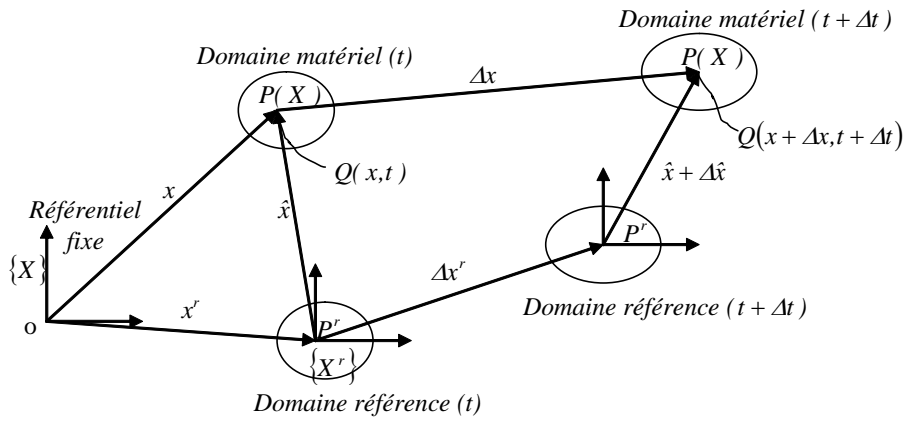


Figure 1.3 : Représentation des domaines matériel, spatial et référentiel

En nous référant à la figure 1.3, nous considérons un domaine matériel et un autre référentiel à l'instant  $t$ . Nous introduisons un système de coordonnées, de manière que la particule matérielle sera définie par les coordonnées Lagrangiennes  $\{X\}$ . La particule matérielle notée  $P$  se déplace avec une vitesse  $U$ . En plus, nous supposons que le point  $P^r$  positionné à  $X^r$  dans le domaine référentiel à l'instant  $t$  se déplace avec une vitesse arbitraire  $\hat{U}$ , à laquelle nous rapportant un autre système de coordonnées  $\{X^r\}$ . La position spatiale du même point matérielle  $P$  à l'instant  $t$  peut être exprimée par rapport au système fixe par  $x = x_i e_i$  et dans le repère mobile par  $\hat{x} = \hat{x}_i \hat{e}_i$ .

Nous considérons que le point matériel  $P$  et le système de coordonnées référentiel  $\{X^r\}$  se déplacent aux nouvelles positions  $x + \Delta x$  et  $x^r + \Delta x^r$ , respectivement avec les vitesses  $U$  et  $\hat{U}$  durant la période  $\Delta t$ . Ce qui nous donne les relations suivantes :

$$\hat{x} = x - x^r$$

$$\hat{x} + \Delta \hat{x} = (x + \Delta x) - (x^r + \Delta x^r)$$



On a aussi :  $\Delta x = U \cdot \Delta t$  et  $\Delta x^r = \hat{U} \cdot \Delta t$

D'où :  $\Delta \hat{x} = (U - \hat{U}) \cdot \Delta t$

Nous supposons la quantité  $Q(x, t)$  associée à la position  $x$  à l'instant  $t$ . On peut écrire par rapport au système  $\{X^r\}$  que :  $Q(x, t) = Q\{x(\hat{x}), t\} = \hat{Q}(\hat{x}, t)$ .

La particule en mouvement à laquelle est associée la quantité  $Q(x, t)$  à l'instant  $t$  et  $Q(x + \Delta x, t + \Delta t)$  à l'instant  $t + \Delta t$  à sa nouvelle position  $x + \Delta x$ .

La dérivée matérielle dite aussi totale  $DQ/Dt$  de la quantité transportée par rapport au système référentiel est définie comme suit :

$$\left. \frac{DQ}{Dt} \right|_{(x,t)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{Q}(\hat{x} + \Delta \hat{x}, t + \Delta t) - Q(\hat{x}, t)}{\Delta t} \quad 1.3$$

En utilisant le développement en série de Taylor d'une fonction à deux variables nous pourrions écrire :

$$\begin{aligned} \hat{Q}(\hat{x} + \Delta \hat{x}, t + \Delta t) = & \hat{Q}(\hat{x}, t) + \left. \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right|_{(\hat{x}, t)} \cdot (\Delta t) + \left. \frac{\partial^2 \hat{Q}}{\partial t^2} \right|_{(\hat{x}, t)} \cdot (\Delta t)^2 + \dots + \\ & + \left. \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \hat{x}} \right|_{(\hat{x}, t)} \cdot (\Delta \hat{x}) + \left. \frac{\partial^2 \hat{Q}}{\partial \hat{x}^2} \right|_{(\hat{x}, t)} \cdot (\Delta \hat{x})^2 + \dots \end{aligned} \quad 1.4$$

En substituant cette la relation 1.3 dans l'équation 1.4 nous obtenons :

$$\left. \frac{DQ}{Dt} \right|_{(x,t)} = \left. \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right|_{(\hat{x}, t)} + C \cdot \left. \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \hat{x}} \right|_{(\hat{x}, t)}$$

Où  $C = U - \hat{U}$

En comparant cette dernière relation avec la description Eulérienne standard nous remarquons que la seule différence se situe dans le terme convectif où apparaît la vitesse du référentiel mobile. Par conséquent, nous pourrions déduire facilement l'expression des équations de Navier-Stokes en configuration ALE qui est comme suit :

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\hat{x}} + C \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot U \quad 1.5.a$$

$$\rho \left( \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{\hat{x}} + (C \cdot \nabla) U \right) = \nabla \cdot \sigma + \rho b \quad 1.5.b$$

Il est important de noter que le mouvement arbitraire du domaine de calcul est reflété seulement dans les termes du côté gauche des équations 1.5. La similarité de ces équations avec les équations de Navier-Stokes en configuration Eulérienne a conduit quelques auteurs à nommer cette description, la méthode quasi-Eulérienne. A partir des relations reliant les différents référentiels mis en jeu dans la méthode ALE, nous remarquons, qu'en supposant que le référentiel mobile  $\{X^r\}$  se déplace avec les points matériels –cela implique que  $U = \hat{U}$  - nous nous retrouvons en description purement Lagrangienne. Par contre, en supposant que le référentiel est fixe ( $\hat{U} = 0$ ), nous obtenons la forme Eulérienne classique des équations de Navier-Stokes. Ce qui implique que les trois approches de description peuvent être effectivement combinées dans une seule analyse numérique, en fonction d'un contrôle approprié du mouvement du domaine de calcul (maillage) [24].

Les équations de Naviers-Stokes peuvent s'écrire aussi sous la forme intégrale suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \bigg|_{\hat{x}V_i} \int \rho dV + \int_{S_i} \rho.C.n dS = 0 \quad 1.6.a$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bigg|_{\hat{x}V_i} \int \rho.U dV + \int_{S_i} \rho.U.C.n dS = \int_{V_i} (\nabla.\sigma + \rho.b) dV \quad 1.6.b$$

### 1.3.3. Formulation ALE en Mécanique des fluides

Comme nous l'avons déjà vu, l'avantage de la méthode ALE réside dans la combinaison intelligente des deux méthodes classiques Lagrangienne et Eulérienne. Cependant, l'implémentation effective de la formulation ALE nécessite l'intégration d'une procédure de remaillage du domaine de calcul. Ce qui affecte à chaque nœud du maillage un déplacement et une vitesse à chaque pas de temps de la procédure de calcul. La méthode de remaillage à une grande influence sur le succès de la technique ALE. Nous pouvons identifier principalement deux stratégies de remaillage. D'un côté, le concept géométrique de la régularisation du maillage, qui peut être exploité afin de garder le domaine le plus régulier possible. De l'autre côté, nous avons les techniques d'adaptation de maillage, afin de concentrer les éléments dans une zone où le gradient est important.

La plus grande influence de la formulation ALE dans les problèmes d'écoulement de fluides, réside dans la prise en compte du mouvement du maillage. La vitesse convective  $C$  remplace la vitesse des particules fluides qui apparaît dans le terme convectif dans la formulation Eulérienne standard. Nous notons aussi que le déplacement du maillage augmente ou diminue

l'effet convectif. Dans un écoulement où la convection domine, l'utilisation d'une méthode de stabilisation numérique est impérative afin de prévoir les problèmes d'instabilités liés au schéma de discrétisation du terme convectif.

Lors de la mise en œuvre de la formulation ALE et à cause d'un problème d'instabilité, une autre contrainte s'ajoute sur les choix possibles du schéma numérique utilisé pour résoudre les équations de l'écoulement du fluide et l'algorithme construit pour le calcul des déplacements et des vitesses des nœuds du maillage. En sélectionnant la méthode d'intégration des équations du fluide, il est désiré de choisir une méthode qui préserve la solution triviale d'un champ d'écoulement uniforme (dans l'absence de conditions aux limites, un champ d'écoulement uniforme est toujours solution des équations de Naviers-Stokes). Il a été démontré que cela est proprement vérifié seulement quand le schéma numérique choisi satisfait une certaine condition nommée loi de conservation géométrique (Geometric Conservation Law –GCL-).

En considérant la forme intégrale de l'équation de conservation de masse et en supposant un champ uniforme de densité  $\rho$  et de vitesse  $U$ , nous obtenons l'équation qui suit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \bigg|_{\hat{x}_V} \int dV = \int_{S_i} \hat{U} \cdot n dS = 0 \quad 1.7$$

L'expression 1.7 n'est que la loi de conservation géométrique GCL. Nous remarquons que si la frontière extérieure du domaine fluide est fixe alors la condition GCL est vérifiée au niveau continu. Ce cas est souvent rencontré surtout quand on traite les problèmes d'une structure baignant dans un milieu fluide infini. Cependant, fixer les frontières extérieures du domaine de calcul n'assure la conservation géométrique qu'au niveau continu. Une discrétisation spatio-temporelle inappropriée peut violer cette loi et de ce fait la conservation d'énergie ne sera pas assurée et par conséquent, des instabilités numériques vont surgir.

En intégrant cette équation, entre  $t^n$  et  $t^{n+1}$  nous obtenons la forme discrète de la loi générale de conservation géométrique (Discret Geometric Conservation Law DGCL):

$$\Omega^{n+1} - \Omega^n = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left( \int_{S_i} \hat{U} \cdot n dS \right) dt \quad 1.8$$

Cette dernière expression traduit que le changement de volume entre les deux pas de temps  $t^n$  et  $t^{n+1}$  doit être égal au volume balayé par les frontières du domaine durant l'intervalle de temps  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ .

Il est à noter que la relation entre la loi de conservation géométrique discrète, la stabilité et la convergence dans une configuration ALE reste un domaine de contre verse dans les recherches en cours.

## 1.4. Couplage en interactions fluides structures

Si nous considérons que le système global défini par l'union des deux sous-domaines fluides et solides constitue un système fermé. Cela veut dire qu'à chaque instant  $t$ , le bilan des échanges d'énergie entre les deux sous-systèmes doit être nul. Donc, dans une procédure de calcul, nous devons nous assurer à chaque pas de temps, que la réaction de la structure solide est égale à l'action des particules fluides en écoulement. Pour un écoulement de fluide visqueux, toutes les composantes du champ de déplacements du fluide et du solide doivent s'égaliser à l'interface.

Comme il a été montré par [25], la diminution de la précision à travers le temps et l'instabilité des procédures des calculs partitionnées sont le résultat de la violation de la loi de conservation d'énergie à l'interface fluide-structure. Les échanges d'énergie mis en jeu lors du couplage des deux sous-domaines ont été considérés par plusieurs chercheurs [26]. Afin de vérifier la variation de l'énergie à l'interface, nous considérons en premier lieu, la variation induite par le calcul du domaine fluide à chaque pas de temps, que nous exprimons comme suit :

$$\Delta E_f^{n+1} = -{}^T F_f^{n+1} (X_m^{n+1} - X_m^n) \quad 1.9$$

Où  ${}^T F_f^{n+1}$  désigne l'effet de l'écoulement sur la structure solide calculé à l'instant  $t^{n+1}$ .  $X_m^{n+1}$  et  $X_m^n$  sont les déplacements aux frontières respectivement à  $t^{n+1}$  et  $t^n$ .

D'un autre côté, l'évolution de la structure solide est modélisée en utilisant l'équation classique de la dynamique des structures suivantes :

$$M_s \ddot{X}_s^n + C_s \dot{X}_s^n + K_s X_s^n = F_s^n \quad 1.10$$

$$M_s \ddot{X}_s^{n+1} + C_s \dot{X}_s^{n+1} + K_s X_s^{n+1} = F_s^{n+1} \quad 1.11$$

$$\dot{X}_s^{n+1} = \dot{X}_s^n + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{X}_s^{n+1} + \ddot{X}_s^n) \quad 1.12$$

$$X_s^{n+1} = X_s^n + \frac{\Delta t}{2} (\dot{X}_s^{n+1} + \dot{X}_s^n) \quad 1.13$$

Avec :

$$\dot{X}_s^{n+1/2} = \frac{\dot{X}_s^{n+1} + \dot{X}_s^n}{2} \text{ et } X_s^{n+1/2} = \frac{X_s^{n+1} + X_s^n}{2} \quad 1.14$$

$$\begin{aligned} \Delta E_s^{n+1} &= E_s^{n+1} - E_s^n = \frac{1}{2} {}^T (\dot{X}_s^{n+1} + \dot{X}_s^n) M_s (\dot{X}_s^{n+1} - \dot{X}_s^n) + \frac{1}{2} {}^T (X_s^{n+1} + X_s^n) M_s (X_s^{n+1} - X_s^n) \\ &= \Delta t {}^T \dot{X}_s^{n+1/2} (M_s \ddot{X}_s^{n+1/2} + K_s X_s^{n+1/2}) = \Delta t {}^T X_s^{n+1/2} (F_s^{l+n/2} - C_s \dot{X}_s^{n+1/2}) \end{aligned} \quad 1.15$$

Finalement nous aurons :

$$\Delta E_s^{n+1} = {}^T (X_s^{n+1} - X_s^n) \frac{F_s^n + F_s^{n+1}}{2} - \Delta t {}^T \dot{X}_s^{n+1/2} C_s \dot{X}_s^{n+1/2} \quad 1.16$$

La variation de l'énergie causée par le second membre de l'équation ci-dessous est induite par le terme de l'amortissement de la structure solide. Elle n'est pas prise en considération dans la variation de l'énergie générée par le couplage des deux sous-domaines dans un processus de calcul. Afin de réduire l'erreur dans le temps et vérifier la condition de conservation de l'énergie à l'interface, la relation suivante doit être satisfaite :

$$\Delta E_s^{n+1} = {}^T (X_s^{n+1} - X_s^n) \frac{F_s^n + F_s^{n+1}}{2} = - {}^T F_f^{n+1} (X_m^{n+1} - X_m^n) = \Delta E_f^{n+1} \quad 1.17$$

La relation ci-dessus représente une importance capitale en formulation des problèmes d'interaction fluide-structure. Cette dernière reflète le rôle important que joue la dynamique du maillage du domaine fluide dans la conservation d'énergie à l'interface fluide-structure.

Les valeurs  $X_s^n$  et  $F_f^n$  sont respectivement, le déplacement de la structure et l'effet du fluide à l'interface. Le déplacement du maillage  $X_m^n$  et l'effort  $F_s^n$  doivent être choisis de sorte à minimiser cette variation d'énergie.

## 1.5. Conclusion du chapitre

En utilisant une formulation de type ALE, les problèmes d'écoulement de fluide en milieu déformable peuvent être simulés de manière efficace. Lors de la mise en œuvre de la méthode ALE, il est impératif d'utiliser des schémas numériques satisfaisant la loi de conservation géométrique GCL. Pour le traitement efficace des problèmes des interactions fluides structures, il faut s'assurer de la conservation de l'énergie mécanique à l'interface entre les deux sous domaines.

## **Chapitre 2: Description du domaine fluide**

# 2. Description du domaine fluide

Après une brève présentation de la méthode des éléments finis, nous allons souligner les difficultés les plus importantes spécifiques de la simulation des écoulements de fluides incompressibles par la méthode des éléments finis. La première difficulté est liée au couplage des deux champs de pression et des vitesses. En utilisant une formulation mixte, le système algébrique du problème discrétisé par la méthode de Galerkin est gouverné par une matrice avec des valeurs nulles sur la diagonale. La solvabilité du système algébrique est sensible au choix judicieux des deux espaces d'éléments finis des pressions et des vitesses. Dans ce cas, ils doivent satisfaire une condition de compatibilité dite la condition LBB où bien condition inf-sup. Une autre difficulté est due à la présence du terme non linéaire lié à l'effet convectif. Cette difficulté s'accroît avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Dans ce cas, la formulation de Galerkin standard présente des instabilités numériques. Afin de remédier à ce problème, on doit utiliser une méthode de stabilisation (SUPG, GLS etc...).

Nous abordons aussi le traitement numérique des écoulements turbulents. Principalement, on s'intéresse à la méthode LES. Nous terminons par plusieurs investigations numériques qui nous permettent la validation et la vérification de l'approche numérique entreprise.

## 2.1. Concepts de base de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis offre à son utilisateur un formalisme mathématique permettant l'obtention d'une forme discrète ; et par conséquent la génération d'algorithme de calcul afin d'approximer les solutions des équations différentielles. Cette tâche peut être accomplie convenablement par un ordinateur [27].

Les origines mathématiques de la méthode des éléments finis reviennent au dernier siècle. Les méthodes d'approximation de la solution des équations différentielles utilisant les fonctions tests sont plus anciennes. La méthode de Rayleigh-Ritz à titre d'exemple utilise les fonctions tests (fonction d'interpolation) afin d'approximer les solutions des équations différentielles. L'inconvénient de cette méthode par rapport à la méthode des éléments finis est que les fonctions tests doivent être appliquées sur tout le domaine de calcul. C'est quand Courant [28]

a introduit le concept de fonction continue par partie en sous-domaine que la méthode des éléments finis a eu son réel départ.

Le terme des éléments finis a été la première fois employé pour l'analyse des structures. La méthode a été introduite par Turner et al. [29] pour l'étude de la rigidité et de la flexibilité des structures. Pratiquement dix Années plus tard, les chercheurs ont commencé à utiliser la méthode des éléments finis pour la résolution des équations gouvernant les problèmes des milieux continus. Cependant, ce n'est qu'à la fin du 20<sup>ème</sup> siècle que cette méthode a gagné sa popularité dans la résolution des problèmes des écoulements des fluides.

La discrétisation des problèmes continus a été abordée de manière différente par les mathématiciens et les ingénieurs. Les mathématiciens ont développé des techniques applicables directement aux équations différentielles gouvernant le problème en question. Comme la méthode des différences finies, la méthode des résidus pondérés, les méthodes d'approximation des extrémums des fonctionnelles, etc. les ingénieurs d'un autre côté, ont approché les problèmes de manière plus intuitive par la création d'une analogie entre les éléments réellement discrets et des parties finis d'un milieu continu. Il a été démontré que des résultats de précisions satisfaisantes sont obtenus par le remplacement des petites portions du milieu continu par un certain arrangement de simples barres élastiques [30].

Durant des années, une méthodologie standard pour l'analyse des systèmes discrets a été développée. A titre d'exemple, en élasticité, pour l'analyse des structures discrètes, on calcule en premier lieu la relation entre le chargement extérieur et les déplacements pour chaque élément de la structure. Après, on procède à l'assemblage de la totalité des éléments en s'appuyant sur le principe de l'équilibre local à chaque nœud. Finalement et après l'introduction des conditions aux limites, la résolution du système d'équations résultant conduit aux déplacements aux nœuds du système étudié en sa totalité.

En ce qui concerne la procédure de résolution d'un problème de milieu continu par éléments finis, cela se résume comme suit :

- Le milieu continu est divisé par des lignes ou des surfaces imaginaires à un nombre fini d'éléments.
- Les éléments sont considérés comme interconnectés à un nombre discret de points que l'on nomme les nœuds situés sur leurs frontières et occasionnellement à l'intérieur des éléments.



- Un ensemble de fonctions est choisi afin de définir de façon unique l'évolution du phénomène étudié à l'intérieur de chaque élément et sur ses frontières en fonction de ses paramètres nodales.
- La résolution du système complet considéré comme un assemblage de ses éléments suit précisément les mêmes étapes que celles suivies pour la résolution des systèmes discrets.

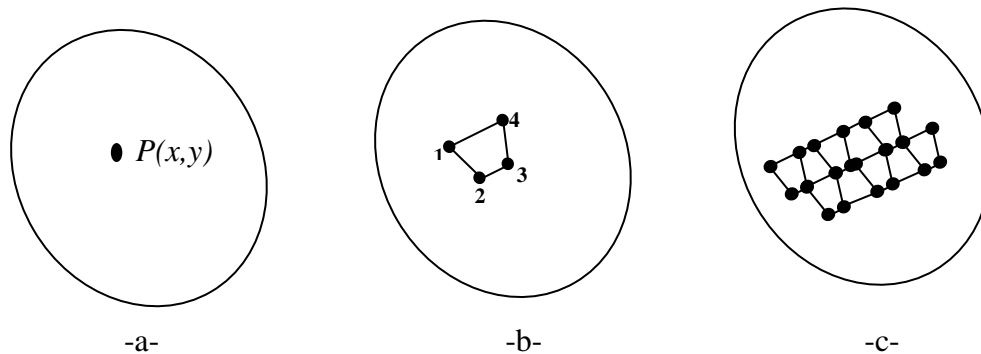


Figure 2.1: -a- Domaine matériel en deux dimensions. -b- Un élément quadrilatère dans un domaine matériel. -c- Maillage partiel du domaine matériel.

Soit la figure 2.1.a représentant un domaine matériel avec des propriétés physiques connues. On considère que le domaine est en deux dimensions et qu'un seul champ de variable  $\varphi(x, y)$  est à déterminer sachant que des équations différentielles connues doivent être vérifiées à chaque point  $P(x, y)$ . Sur la figure 2.1.b est représenté un élément quadrilatère entourant un sous-domaine de taille finie de l'ensemble du domaine d'intérêt. Les sommets de l'élément de forme quadrilatère sont numérotés pour indiquer que ces points sont des nœuds. Le nœud est un point spécifique où la valeur du champ de variable doit être calculée explicitement. Les nœuds extérieurs sont situés sur les frontières de l'élément et peuvent être utilisés pour connecter un élément à un élément voisin. Les valeurs du champ de variable aux nœuds sont utilisées afin d'approximer les valeurs du champ à d'autres points non nodaux par interpolation. Pour l'élément quadrilatère, le champ de variable à tout point de l'élément est approximé par la relation suivante :

$$\Phi(x, y) = N_1(x, y)\Phi_1 + N_2(x, y)\Phi_2 + N_3(x, y)\Phi_3 + N_4(x, y)\Phi_4 \quad 2.1$$

$N_1, N_2, N_3$  et  $N_4$  Sont les fonctions d'interpolation ou bien dite aussi fonctions de forme.

Dans la méthode des éléments finis, les valeurs nodales du champ de variable sont traitées comme étant des constantes inconnues qui sont à déterminer. Les fonctions d'interpolation sont souvent de forme polynomiale des variables indépendantes, devant satisfaire certaines conditions. Il est important de noter que les fonctions d'interpolation sont prédéterminées. Ces dernières décrivent la variation du champ de variable à l'intérieur de l'élément.

Comme le représente la figure 2.1.c, chaque élément est connecté au niveau de ses nœuds extérieurs à d'autres éléments. La méthode des éléments finis est formulée telle qu'à chaque connexion nodale, les valeurs du champ de variable sont les mêmes pour chaque élément connecté au nœud. Donc la continuité du champ de variable est assurée aux nœuds. De ce fait, la méthode des éléments finis assure la continuité entre les éléments ce qui évite l'obtention de résultats physiquement inacceptables. Par contre, la continuité du gradient du champ de variable n'est généralement pas vérifiée entre les éléments. Cependant, la magnitude de cette discontinuité des dérivées peut être utilisée afin d'augmenter la précision et d'assurer la stabilité de la méthode quand on augmente le nombre des éléments du maillage.

## 2.2. Procédure générale d'une analyse par éléments finis

Certaines étapes sont les mêmes pour tous les problèmes physiques abordés par la méthode des éléments finis. Ces étapes sont résumées comme suit :

### 1 Post préprocesseur

Dans cette phase on définit :

- La géométrie du domaine d'étude.
- Le type d'élément à utiliser.
- Les propriétés physiques du domaine.
- Le maillage du domaine de calcul.
- Les conditions aux limites.
- Les chargements extérieurs.

### 2 Résolution du problème

Durant cette phase, les codes de calcul basés sur la méthode des éléments finis assemblent les équations algébriques gouvernant le problème en question en une forme matricielle et calcule les valeurs inconnues du champ des variables dans le domaine d'étude.

### 3 Post processeur

Dans cette phase, on procède à l'analyse et à l'évaluation des résultats trouvés. Une large gamme de logiciels spécialisés est disponible afin de sortir, d'imprimer et de dessiner des résultats sélectionnés. Ce qui permet de donner un jugement sur la qualité des résultats trouvés.

## 2.3. La méthode des résidus pondérés

Cette méthode est une technique permettant de résoudre des problèmes aux frontières en utilisant des fonctions tests satisfaisant les conditions aux limites imposées et une formulation intégrale afin de minimiser l'erreur de l'approximation sur le domaine de calcul.

Dans ce qui suit, nous allons décrire les concepts de base de cette technique. Soit une équation différentielle de forme générale comme suit :

$$\mathcal{L}[\Phi] - r = 0 \tag{2.2}$$

$\mathcal{L}$  : est un opérateur différentiel

$\Phi$  : c'est le champ de la variable à calculer

$r$  : fonction de chargement

Pour que le problème soit mathématiquement bien posé, en plus de l'équation 2.2, La solution du problème doit satisfaire les conditions aux frontières. La méthode des résidus pondérés cherche une solution de la forme suivante :

$$\Phi^* = \sum_{i=1}^n C_i N_i \tag{2.3}$$

Où  $\Phi^*$  est une approximation de la solution exprimée comme étant le produit des inconnus  $C_i$  à déterminer et  $N_i$  les fonctions tests. Ces dernières doivent être des fonctions admissibles. Ce qui implique qu'elles soient continues sur le domaine d'intérêt et satisfait les conditions aux limites. En plus, les fonctions tests doivent traduire la physique du problème étudié. En substituant la solution approchée dans l'équation 2.2 un résidu « R » non-nul résulte :

$$\mathcal{L}[\Phi^*] - r = R \tag{2.4}$$

On note que le résidu est aussi fonction des paramètres inconnus  $C_i$ .

La méthode des résidus pondérés propose que les paramètres inconnus  $C_i$  soient évalués de sorte que :

$$\int W_i R dV = 0 \quad i = 1, n \tag{2.5}$$

$W_i$  Sont les fonctions poids ou de pondération.

On constate que l'équation 2.5 résulte en « n » équations algébriques qui peuvent se résoudre pour « n » valeur de  $C_i$ . L'équation 2.5 exprime que la somme (l'intégrale) de l'erreur résiduelle pondérée sur le domaine du problème est nulle. La solution proposée n'est exacte que sur les frontières, mais en général aux autres points intérieurs du domaine, l'erreur n'est pas nulle. Plusieurs variantes de la méthode des résidus pondérés existent. Selon le choix des fonctions de pondération  $W_i$ , l'équation 2.5 conduit à différentes méthodes de discrétisation [31]. On peut mentionner :

### 2.3.1. Collocation par points

Dans cette méthode, on considère que le résidu  $R$  s'annule à certaines positions du domaine de calcul. On obtient ainsi un système de « n » équations fonctions des inconnus  $C_i$ . Le choix des positions des points est arbitraire, mais souvent l'utilisateur de cette méthode doit se fier à son propre jugement afin d'utiliser les localisations les plus appropriées. En pratique, cette méthode est peu utilisée, car elle est difficile à mettre en œuvre dans une approximation par éléments finis.

### 2.3.2. Collocation par sous-domaines

Le domaine de calcul de la solution est divisé en n sous-domaine et l'intégrale du résidu sur chaque sous-domaine est considérée nulle. On obtient ainsi n équations fonctions des paramètres inconnus  $C_i$ .

### 2.3.3. Méthode des moindres carrés

Dans cette technique, l'intégration du carré du résidu est minimisée par rapport aux paramètres  $C_i$ .

$$\frac{\partial}{\partial C_i} \int R^2 dV \quad 1 = 1, \dots, n \quad 2.6$$

On obtient ainsi un système de « n » équations fonctions de  $C_i$ . Cette méthode est peu utilisée, car elle ne permet pas l'intégration par parties, et impose donc des conditions plus strictes sur l'approximation. Par contre, la méthode conduit à un système symétrique et défini-positif quel que soit l'erreur.

### 2.3.4. Méthode de Galerkin :

Dans la méthode des résides pondérés de Galerkin, les fonctions de pondération sont choisies identiques aux fonctions d'approximations. Cela implique que :

$$W_i = N_i \quad i = 1, n \quad 2.7$$

Donc, les paramètres inconnus sont déterminés via :

$$\int W_i R \, dV = \int N_i R \, dV = 0 \quad i = 1, n \quad 2.8$$

De cette façon résulte un système d'équations algébrique permettant d'évaluer les paramètres inconnus.

## 2.4. Problème de Stokes généralisé et la formulation mixte en éléments finis

### 2.4.1. Formulation forte

Pour les écoulements de fluide où les vitesses sont nettement faibles, le terme du transport convectif de quantité de mouvement dans les équations de Navier-Stokes peut être négligé comparé à l'effet du transport visqueux. Ce type d'écoulement est appelé écoulement de Stokes et on le rencontre fréquemment quand on a des fluides de viscosité élevée. En négligeant le terme d'inertie, la formulation forte du problème de Stokes stationnaire en termes de vitesse et de pression s'écrit comme suit:

$$-\mu \nabla^2 U + \nabla P = F_b \quad \text{dans } \Omega_f \quad 2.9.a$$

$$\nabla U = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \quad 2.9.b$$

$$U = U_D \quad \text{sur } \Gamma_D \quad 2.9.c$$

$$-Pn + \mu(n \cdot \nabla)U = t \quad \text{sur } \Gamma_N \quad 2.9.d$$

Où :  $U, \mu, P$  et  $F_b$  sont respectivement le vecteur du champ des vitesses, la viscosité dynamique du fluide, le champ de pression et le champ de force par unité de volume.

Dans ce cas  $t$  ne correspond pas à la valeur de la traction sur la frontière  $\Gamma_N$ . Le vecteur  $t$  est dit pseudo-traction [32].

### 2.4.2. Formulation faible

La formulation faible des équations de Stokes où même celle de Navier-Stokes nécessite l'introduction de classes de fonction pour les champs des vitesses et de pression. Pour le

champ des vitesses, on note l'espace des solutions teste par  $\Phi_U^h$ . Les fonctions d'approximation des vitesses doivent satisfaire a priori les conditions aux limites de type Dirichlet imposées sur la portion de la frontière  $\Gamma_D$ . L'espace test  $\Phi_U^h$  contenant les fonctions d'approximation des vitesses est donc donné comme suit :

$$\Phi_U^h := \{U \in H^1(\Omega_F^E) / U = U_D \text{ sur } \Gamma_D\} \quad 2.10$$

L'espace des fonctions de pondération des vitesses est noté  $\Phi^h$ . Les fonctions de cette classe ont les mêmes propriétés que celles de la classe  $\Phi_U^h$ . Seulement les fonctions de pondération doivent s'annuler sur la portion de la frontière  $\Gamma_D$  quand la vitesse est décrite. La classe  $\Phi^h$  est définie par :

$$\Phi^h := \{v \in H^1(\Omega_F^E) / v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\} \quad 2.11$$

Pour le champ de pression, on introduit aussi l'espace des fonctions noté  $\Phi_p$ . Comme on va le voir, la dérivée spéciale de la pression n'apparait pas dans la formulation faible des équations de Stokes et aussi de Navier-Stokes. De ce fait, les fonctions de cette classe doivent être deux fois intégrables.

$$\Phi_p := L^2 \quad 2.12$$

Par ce qu'il n'y a pas de conditions explicites aux frontières sur la pression. L'espace  $\Phi_p$  est le même pour les fonctions testes et celles de pondérations.

Par l'utilisation de la méthode des résidus pondérés et en appliquant le théorème de divergence au terme de gradient de pression et au terme du transport visqueux. La formulation faible de l'équation de Stokes s'énonce comme suit :

Trouver  $(U, P) \in \Phi_U^h \times \Phi_p$  tels que :

$$\int_{\Omega_f} \nabla w : \mu \nabla U \, d\Omega_f - \int_{\Omega_f} \nabla w \cdot P \, d\Omega_f + \int_{\Omega_f} q \cdot \nabla U \, d\Omega_f = \int_{\Omega_f} w \cdot F_b \, d\Omega_f + \int_{\Gamma_N} w \cdot t \, d\Gamma_N$$

$$\forall (w, q) \in \Phi^h \times \Phi_p \quad 2.13$$

### 2.4.3. Discrétisation en deux dimensions

Dans un système de coordonnées cartésiennes de deux dimensions, le système d'équations 2.9 s'écrit :

$$-\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial P}{\partial x} = F_{bx} \quad 2.14. a$$

$$-\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial P}{\partial y} = F_{by} \quad 2.14. b$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad 2.14. c$$

Le système d'équations 2.14 est composé de trois équations à trois inconnues, qui sont: les deux composantes de vitesses  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$  ainsi que le champ de pression  $P(x, y)$ . Dans ce cas, une formulation par éléments finis inclut trois variables nodales de la façon suivante:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{i=1}^m N_i(x, y) u_i = [N]\{u\} \\ v(x, y) &= \sum_{i=1}^m N_i(x, y) v_i = [N]\{v\} \\ P(x, y) &= \sum_{i=1}^m N_i^p(x, y) P_i = [N]\{P\} \end{aligned} \quad 2.15$$

Où  $N_i(x, y)$  et  $N_i^p(x, y)$  sont respectivement les fonctions d'interpolation des deux champs des vitesses et de la pression.

En appliquant la méthode de Galerkin au système 2.14, on trouve la forme intégrale suivante:

$$\begin{aligned} \int_{A^e} N_i \left( -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial P}{\partial x} - F_{bx} \right) dA &= 0 \\ \int_{A^e} N_i \left( -\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial P}{\partial y} - F_{by} \right) dA &= 0 \quad i = 1, m \\ \int_{A^e} N_i^p \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dA &= 0 \end{aligned} \quad 2.16$$

En premier lieu, on s'intéresse au terme contenant la dérivée spatiale seconde des composantes des vitesses qu'on peut traiter par intégration par partie comme suit:

$$\begin{aligned} - \int_{A^e} \mu N_i \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dA &= - \int_{A^e} \mu \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( N_i \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( N_i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dA \\ &+ \int_{A^e} \mu \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right] dA \quad i = 1, m \end{aligned} \quad 2.17$$

On appliquant le théorème de Green-Gauss on trouve que :

$$- \int_{A^e} \mu \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( N_i \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( N_i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dA = - \int_{S^e} \mu N_i \left( \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) dS \quad 2.18$$

Où  $S^e$  est la frontière de l'élément et  $(n_x, n_y)$  sont les composantes du vecteur normal au frontière. On trouve donc :

$$\begin{aligned} - \int_{A^e} \mu N_i \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dA &= - \int_{S^e} \mu N_i \left( \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) dS \\ &+ \int_{A^e} \mu \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right] dA \quad i = 1, m \end{aligned} \quad 2.19$$

Le premier terme de la partie droite de l'équation 2.19 représente un effort aux frontières de l'élément dû à l'effet de cisaillement. Ce terme s'annule au niveau de l'interface entre les éléments et ne doit être considéré que sur les frontières globales du problème étudié. Sous forme matricielle l'équation 2.19 devient :

$$\int_{A^e} \mu \left( \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) dA \{u\} = [K_{u\mu}] \{u\} \quad 2.20$$

$[K_{u\mu}]$  : Une portion de matrice globale reliant la composante de vitesse suivant l'axe des abscisses et l'effet de la viscosité.

De la même façon, on trouve pour la composante des vitesses suivant l'axe des ordonnées la relation suivante:

$$\int_{A^e} \mu \left( \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) dA \{v\} = [K_{v\mu}] \{v\} \quad 2.21$$

$[K_{v\mu}]$  : Une portion de matrice globale reliant la composante de vitesse  $v$  et l'effet de la viscosité.

Concernant le terme de gradient de pression suivant l'axe des abscisses, on trouve la forme matricielle suivante :

$$\int_{A^e} [N]^T \frac{\partial [N^p]}{\partial x} dA \{P\} = [K_{px}] \quad 2.22$$

Et de façon similaire on trouve suivant l'axe des ordonnées :

$$\int_{A^e} [N]^T \frac{\partial [N^p]}{\partial y} dA \{P\} = [K_{py}] \quad 2.23$$



La contribution nodale des efforts de volume est donnée par :

$$\{f_{bx}\} = \int_{A^e} [N]^T F_{bx} dA \quad 2.24. a$$

$$\{f_{by}\} = \int_{A^e} [N]^T F_{by} dA \quad 2.24. b$$

En combinant les équations 2.20, 2.21, 2.22, 2.23 et 2.24 résulte le système d'équations suivant:

$$[K_{u\mu}]\{u\} + [K_{px}]\{P\} = \{f_{bx}\} \quad 2.25. a$$

$$[K_{v\mu}]\{v\} + [K_{py}]\{P\} = \{f_{by}\} \quad 2.25. b$$

Finalement, l'équation de continuité discrétisée est exprimée sous forme matricielle comme suit :

$$\int_{A^e} [N^p]^T \frac{\partial [N]}{\partial x} dA \{u\} + \int_{A^e} [N^p]^T \frac{\partial [N]}{\partial y} dA \{v\} = [K_u]\{u\} + [K_v]\{v\} \quad 2.26$$

On remarque que, si les fonctions d'interpolation du champ des vitesses et de pression sont identiques donc :  $[N^p] = [N]$ .

Cela implique que :

$$[K_u] = [K_{px}] = \int_{A^e} [N]^T \frac{\partial [N]}{\partial x} dA \quad 2.27$$

$$[K_v] = [K_{py}] = \int_{A^e} [N]^T \frac{\partial [N]}{\partial y} dA \quad 2.28$$

La forme discrétisée de l'équation de Stokes en formulation mixte (vitesse et pression) peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} [K_{u\mu}] & [0] & [K_{px}] \\ [0] & [K_{v\mu}] & [K_{py}] \\ [K_u] & [K_v] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \\ \{P\} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_{bx}\} \\ \{f_{by}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \Rightarrow [K^e]\{\delta^e\} = \{f^e\} \quad 2.29$$

$[K^e]$  Représente la matrice de rigidité élémentaire. Il est important de noter que cette dernière n'est pas symétrique.

Le succès de la formulation mixte dépend du choix judicieux de l'interpolation de la pression et de la vitesse. Par ce que le gradient de pression n'apparaît pas dans la formulation faible, la

condition de continuité du champ de pression n'est pas nécessaire à l'interface entre les éléments. Par contre, elle est impérative pour le champ des vitesses.

Pour résoudre ce type de problème, on pensait qu'utiliser la même interpolation pour les vitesses et la pression avec le même nombre de nœuds est faisable. Cependant, des études [33] ont montré que de meilleurs résultats sont obtenus quand les composantes de vitesses sont approximées avec un plus grand nombre de nœuds que la pression.

Avec une sub-matrice nulle sur la diagonale de la matrice, il est nécessaire de savoir sous quelles conditions le système algébrique gouvernant le champ des vitesses et de pression est solvable.

## 2.5. La condition LBB ou inf-sup

Le choix des espaces discrets est d'une importance capitale. Si les deux champs des vitesses et des pressions sont compatibles, la matrice de rigidité résultante du système algébrique discret est non-singulière et par conséquent, la solution du problème étudié est unique. Si cela n'est pas le cas, une solution convergente du champ des vitesses peut être obtenue. Par contre, le champ des pressions ainsi calculé présentera des oscillations.

Dans leurs travaux Ladyzhenskaya, Babuski et Berziz ont démontré qu'il existe un critère restrictif sur les espaces d'approximation qui permet d'assurer la stabilité et l'unicité de la solution. Ce critère est appelé critère LBB (Ladyzhenskaya-Babuski-Berziz) ou inf-sup.

La condition de compatibilité ou condition LBB ou bien inf-sup s'énonce comme suit :

L'existence d'une formulation par éléments finis stable  $(U, P)$  approximant les deux champs des vitesses et des pressions du problème de Stokes stationnaire généralisé repose sur le choix des deux espaces  $\Phi_U^h$  et  $\Phi_P$ , de façon à vérifier la condition inf-sup suivante :

$$\inf_{q \in \Phi_P} \sup_{w \in \Phi_U^h} \frac{(q, \nabla \cdot w)}{\|q\|_0 \|w\|_1} \geq \alpha > 0 \quad 2.30$$

Où  $\alpha$  est indépendante de la taille du maillage.

Si la condition LBB est vérifiée, donc il existe une solution unique  $U \in \Phi_U^h$  et  $P \in \Phi_P$ .

Quelques combinaisons compatibles possibles sont représentées sur le tableau suivant :

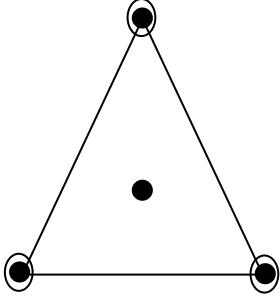
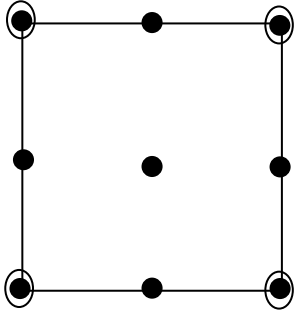
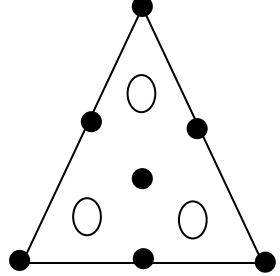
	<p>Elément Mini :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• L'interpolation des vitesses est linéaire plus bulle.</li> <li>• L'interpolation des pressions est linéaire continue.</li> </ul>
	<p>Elément de Taylor-Hood :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• L'interpolation des vitesses est continue biquadratique.</li> <li>• L'interpolation de la pression est continue bilinéaire.</li> </ul>
	<p>Elément de Crouzeix-Raviart :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• L'interpolation des vitesses est quadratique continue plus fonction bulle quadratique.</li> <li>• L'interpolation de la pression est linéaire discontinue.</li> </ul>
<p style="text-align: center;">○ Pression ● Vitesse</p>	

Tableau 2.1: Exemple de quelques éléments 2D stables

## 2.6. Formulation d'élément finis pour les problèmes de convection diffusion

Dans cette partie, en premier lieu, on voudrait souligner les limites de la méthode de Galerkin Standard pour le traitement des problèmes de transport à effet convectif dominant. Par la suite, on introduira d'autres méthodes permettant l'obtention des solutions présentant des degrés de précision et de stabilité satisfaisantes. Comme problème modèle, on considère l'équation de transport dans une dimension.

2.6.1. Analyse de stabilité (cas unidimensionnel)

La formulation forte du problème d'un transport convectif-diffusif en une dimension peut s'écrire comme suit :

$$U^* \frac{\partial U}{\partial x} - v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = S(x) \quad \text{dans } ]0, L[ \quad 2.31.a$$

$$U = 0 \quad \text{à } x = 0 \text{ et } x = L \quad 2.31.b$$

$S(x)$  et  $v$  Représente respectivement la source et la diffusivité.

La forme faible associée au problème étudié est donnée par :

$$\int_0^L W \cdot U^* \cdot \frac{\partial U}{\partial x} dx - \int_0^L W \cdot v \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} dx = \int_0^L S(x) dx \quad 2.32$$

Après intégration par partie du terme de diffusion, on obtient:

$$\int_0^L W \cdot U^* \cdot \frac{\partial U}{\partial x} dx - \int_0^L \frac{\partial W}{\partial x} \cdot v \cdot \frac{\partial U}{\partial x} dx = \int_0^L W \cdot S(x) dx \quad 2.33$$

En utilisant la méthode de Galerkin standard on trouve :

$$\int_0^L \sum_{i=2}^{n-1} \left( U^* N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) U_j dx = \int_0^L N_i S dx \quad 2.34$$

Le nombre « n » indique le nombre de nœuds.

On se propose à titre illustratif d'utiliser un élément linéaire à deux nœuds. Les fonctions de forme de ce dernier sont données par :

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad \& \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad 2.35$$

$\xi$  : c'est l'abscisse intrinsèque de l'élément et  $-1 < \xi < 1$ .

Donc, on peut écrire :

$$U(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)U_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)U_2 \quad 2.36.a$$

$$x(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)x_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)x_2 \quad 2.36.b$$

Pour un maillage uniforme de longueur « h » on a :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)d\xi \quad 2.37.a$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{2}{h} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \quad 2.37.b$$

On a aussi :  $S(\xi) = N_1(\xi) S_1 + N_2(\xi) S_2$

On trouve la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned} U^* \int_{L_e} \begin{pmatrix} N_1 \frac{\partial N_1}{\partial x} & N_1 \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ N_2 \frac{\partial N_1}{\partial x} & N_2 \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{pmatrix} dx + \nu \int_{L_e} \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix} dx \\ = \int_{L_e} \begin{pmatrix} N_1(N_1 S_1 + N_2 S_2) \\ N_2(N_1 S_1 + N_2 S_2) \end{pmatrix} dx \end{aligned} \quad 2.38$$

$$\Rightarrow \frac{U^*}{2} \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix} + \frac{\nu}{h} \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix} = \int_{L_e} \begin{pmatrix} N_1(N_1 S_1 + N_2 S_2) \\ N_2(N_1 S_1 + N_2 S_2) \end{pmatrix} dx \quad 2.39$$

Après Assemblage, on trouve que :

$$U^* \left( \frac{U_{i+1} + U_{i-1}}{2h} \right) - \nu \left( \frac{U_{i+1} + 2U_i + U_{i-1}}{h^2} \right) = \frac{1}{6} (S_{i-1} + 4S_i + S_{i+1}) \quad 2.40$$

L'équation discrétisée ci-dessus est la même qu'on trouverait en utilisant la méthode des différences finis centrées. Si on introduit le nombre de Péclet qui caractérise l'importance relative des effets convectif et diffusif.

$$P_e = \frac{U^* h}{2\nu} \quad 2.41$$

L'équation discrétisée s'écrit donc comme suit :

$$\frac{U^*}{2h} \left( \frac{P_e - 1}{P_e} U_{i+1} + \frac{2}{P_e} U_i - \frac{P_e + 1}{P_e} U_{i-1} \right) = \frac{1}{6} (S_{i-1} + 4S_i + S_{i+1}) \quad 2.42$$

On va poser un terme source uniforme afin d'éviter l'erreur de troncature produite par la discrétisation spatiale du terme source. L'erreur ainsi due à la méthode de discrétisation est attribuée dans ce cas à la forme discrétisée des termes convectifs et diffusifs. On prendra  $S = 1$  et  $L = 1$ .

D'autre part, la solution exacte du problème posé est donnée par :

$$U(x) = \frac{1}{U^*} \left( x - \frac{1 - e^{\gamma x}}{1 - e^\gamma} \right) \quad \text{où } \gamma = \frac{U^*}{\nu} \quad 2.43$$

La figure 2.2 représente les deux solutions exacte et approchée pour différentes valeurs du nombre de Peclet. On constate que la solution numérique perd ses bonnes propriétés quand le terme du transport convectif domine le terme de diffusion. Par conséquent, des oscillations apparaissent dans la solution.

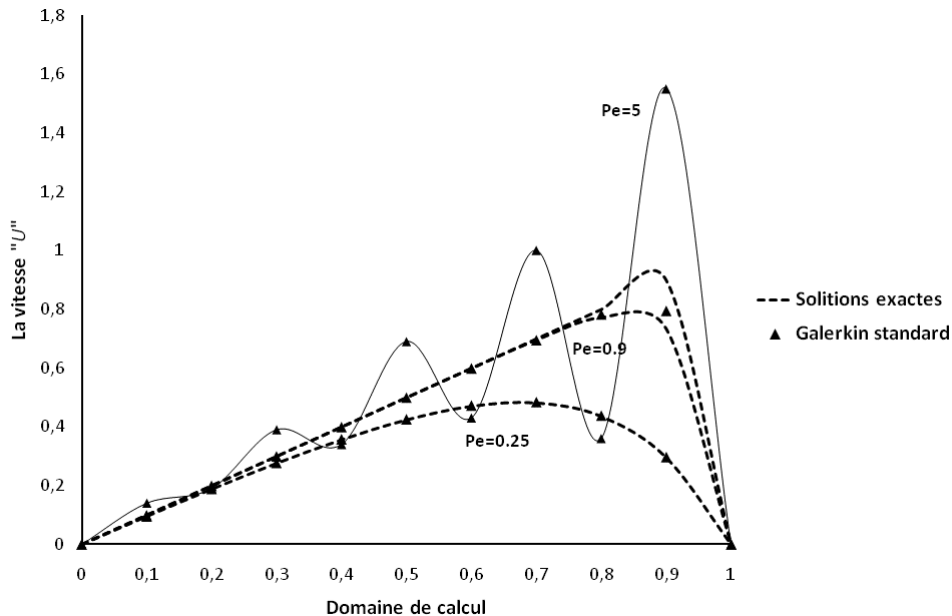


Figure 2.2 : Comparaison de la solution exacte et celle de Galerkin d'une équation convection-diffusion sur un domaine unidimensionnel de longueur  $L=1$  en utilisant un maillage uniforme de dix éléments.

La méthode de Galerkin standard présente un sérieux désavantage lorsque la convection domine. Pour cela, des modifications sont nécessaires afin d'assurer la stabilité de la méthode. Principalement, on pourrait remédier de deux manières à cette défaillance :

- Pour la discrétisation du terme convectif, on utilise un schéma de discrétisation décentré (upwind).
- Le rajout d'un terme de diffusion artificielle.

Ces deux méthodologies sont équivalentes et en d'autres termes une approximation décentrée induit une diffusion numérique et vice versa.

Afin de décentrer l'approximation, on utilise la méthode de pondération de Petrov-Galerkin où les fonctions de pondération sont prises différentes aux fonctions du champ d'approximation. On peut interpréter cela sous forme mathématique comme suit :

$$W_i = N_i + \alpha W_i^* \quad 2.44$$

Où  $\alpha$  est un paramètre de décentrement et  $W_i^*$  représente l'effet de décentrement. On remarque que si  $\alpha = 0$ , on retrouve la méthode d'approximation standard de Galerkin.

L'effet de la procédure de Petrov-Galerkin équivaut l'utilisation de la méthode de Galerkin standard en ajoutant un terme de diffusion artificielle. Cette dernière technique est plus facile à implémenter en comparaison avec la pondération de Petrov-Galerkin plus particulièrement en deux et trois dimensions.

### 2.6.2. Stabilisation de la méthode en deux et trois dimensions

Dans le cas multidimensionnel, la diffusion artificielle doit être anisotrope avec des coefficients non nuls que dans la direction de la résultante des vitesses. L'opérateur de diffusion artificielle doit avoir un effet seulement dans la direction de l'écoulement. Ce qui conduit au concept de la méthode SU (Stream-Upwind). L'opérateur de diffusion artificielle peut se mettre sous la forme :

$$\bar{\nu}_{ij} = \bar{\nu} \frac{U_i^* U_j^*}{\|U^*\|^2} \quad 2.45$$

$U_i^*$  et  $\bar{\nu}$  sont respectivement les composantes de la vitesse convective et le paramètre de diffusion artificielle.

On peut écrire la forme faible pour plusieurs dimensions comme suit :

$$\int_{\Omega} [W (U^* \nabla U) + \nabla W (\nu I + \bar{\nu}) \nabla U] d\Omega = 0 \quad 2.46$$

Où  $I$  est la matrice d'identité et  $\bar{\nu}$  un opérateur anisotrope de diffusion artificielle.

La forme faible peut s'écrire aussi:

$$\int_{\Omega} \left\{ \left[ W + \frac{\bar{\nu}}{\|U^*\|^2} (U^* \nabla U) \right] (U^* \nabla U) + \nu \nabla W \nabla U \right\} d\Omega = 0 \quad 2.47$$

On peut voir de l'équation, que la fonction de pondération modifiée affectant seulement le terme convectif est :

$$\bar{W} = W + \frac{\bar{\nu}}{\|U^*\|^2} (U^* \nabla U) \quad 2.48$$

Finalement, la méthode SU (Stream-Upwind) peut être interprétée comme étant la méthode de Galerkin Standard plus un terme supplémentaire. La perturbation ajoutée aux fonctions de pondération est discontinue au niveau des interfaces entre les éléments.

Quand la même méthode est appliquée à l'équation de transport, la forme faible associée à la méthode SU devient :

$$\int_{\Omega} \nabla W (v \nabla U) d\Omega + \int_{\Omega} W (U^* \nabla U) d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} \frac{\bar{v}}{\|U^*\|^2} (U^* \nabla W) (U^* \nabla U) d\Omega = \int_{\Omega} W S d\Omega + \int_{\Gamma_N} W h d\Gamma \quad 2.49$$

Il est très important de noter que pour des raisons de consistance, le terme source doit être discrétisé en utilisant les mêmes fonctions poids que le terme convectif.

### 2.6.3. Techniques de stabilisation

Afin de stabiliser le terme convectif de manière consistante (ce qui veut dire que la solution de l'équation différentielle est aussi solution de la forme faible), plusieurs techniques sont proposées. Ces dernières ont une structure semblable à l'équation 2.49. Un terme de stabilisation est ajouté à la formulation faible de Galerkin. Ce terme est fonction du résidu de l'équation différentielle afin de répondre aux enjeux de la consistance.

La forme générale de cette technique de stabilisation est :

$$\int_{\Omega} W (U^* \nabla U) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla W (v \nabla U) d\Omega + \sum_e \mathcal{P}(W) \tau R(U) d\Omega = \int_{\Omega} W S d\Omega + \int_{\Gamma_N} W h d\Gamma \quad 2.50. a$$

$$R(U) = U^* \nabla U - \nabla(v \nabla U) - S \quad 2.50. b$$

Où  $\mathcal{P}(W)$ ,  $\tau$  et  $R(U)$  sont respectivement un certain opérateur appliqué aux fonctions poids, un paramètre de stabilisation et le résidu de l'équation différentielle.

Dans cette famille de méthode, les techniques de stabilisation se distinguent par la définition de  $\mathcal{P}(W)$  et  $\tau$ .

#### 2.6.3.1. La méthode SUPG (Stream-Upwind Petrov-Galerkin)

Dans cette méthode, on définit  $\mathcal{P}(W)$  par :



$$\mathcal{P}(W) = U^* \nabla W \quad 2.51$$

La forme faible devient donc :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} W (U^* \nabla U) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla W (\nu \nabla U) d\Omega + \sum_e U^* \nabla W \tau R(U) d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} W S d\Omega + \int_{\Gamma_N} W h d\Gamma \end{aligned} \quad 2.52$$

Où le paramètre de stabilisation est défini par :

$$\tau = \frac{\bar{\nu}}{\|U^*\|^2} \quad 2.53$$

### 5.2.2. La méthode GLS (Galerkin/Least Squares)

La méthode GLS consiste à choisir l'opérateur  $\mathcal{P}(W)$  comme suit :

$$\mathcal{P}(W) = \mathcal{L}(W) = U^* \nabla W - \nabla(\nu \nabla W) \quad 2.54$$

Avec cette définition, la forme faible s'écrit :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} W (U^* \nabla U) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla W (\nu \nabla U) d\Omega + \sum_e \mathcal{L}(W) \tau [\mathcal{L}(U) - S] d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} W S d\Omega + \int_{\Gamma_N} W h d\Gamma \end{aligned} \quad 2.55$$

L'équation 2.55 peut s'écrire aussi sous la forme :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} W (U^* \nabla U) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla W (\nu \nabla U) d\Omega \\ & \quad + \sum_e (U^* \nabla W - \nabla(\nu \nabla W)) \tau (U^* \nabla U - \nabla(\nu \nabla U)) d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} W S d\Omega + \int_{\Gamma_N} W h d\Gamma + \sum_e (U^* \nabla W - \nabla(\nu \nabla W)) \tau S d\Omega \end{aligned} \quad 2.56$$

Il est très important de noter que le paramètre de stabilisation dans la méthode GLS est symétrique. Par contre, l'opérateur de stabilisation de la méthode SUPG ne satisfait pas la condition de symétrie. Cette dernière présente un avantage majeur pour l'établissement de la stabilité de la méthode de résolution.

### 5.2.3. Les paramètres de stabilisation

Le paramètre  $\tau$  joue un rôle important dans les techniques de stabilisation. On note que pour les cas pluridimensionnels,  $\tau$  devient une matrice des coefficients de stabilisation. Une

analyse d'erreur permet de déterminer la structure des paramètres de stabilisation comme fonction de la taille de l'élément  $h$ , la vitesse convective  $U^*$  et la diffusivité.

Codina [34] en utilisant une analyse algébrique a défini le paramètre de stabilisation comme suit :

$$\tau = \left( \frac{2U^*}{h} + \frac{4\nu}{h^2} \right)^{-1} = \frac{h}{2U^*} \left( 1 + \frac{1}{P_e} \right)^{-1} \quad 2.57$$

Par contre Shakib et al. [35] ont proposé l'expression suivante :

$$\tau = \left( \left( \frac{2U^*}{h} \right)^2 + 9 \left( \frac{4\nu}{h^2} \right)^2 \right)^{-1/2} = \frac{h}{2U^*} \left( 1 + \frac{9}{P_e^2} \right)^{-1/2} \quad 2.58$$

## 2.7. Les équations de Navier-Stokes et formulations d'éléments finis stabilisés

En considérant le cas d'un écoulement instationnaire d'un fluide Newtonien, visqueux et incompressible. Les équations, les conditions initiales et aux frontières gouvernant ce problème sont données par :

$$U_t + (U \cdot \nabla)U - \nu \nabla^2 U + \nabla p = f \quad \text{dans } \Omega_f \times ]0, T[ \quad 2.58.a$$

$$\nabla U = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \times ]0, T[ \quad 2.58.b$$

$$U = U_D \quad \text{sur } \Gamma_D \times ]0, T[ \quad 2.58.c$$

$$-pn + \nu(n \cdot \nabla)U = t \quad \text{sur } \Gamma_N \times ]0, T[ \quad 2.58.d$$

$$U(x, 0) = U_0(x) \quad \text{dans } \Omega_f \quad 2.58.e$$

Où  $U, p, f, \nu$  et  $\Omega_f$  sont respectivement la vitesse d'écoulement, la pression reliée à la densité du fluide, force de masse, la viscosité cinématique et le domaine fluide.

On note que le champ des vitesses initiales doit satisfaire la condition de continuité  $\nabla U_0 = 0$ .

### 2.7.1. Formulation faible (Galerkin standard)

La formulation faible est obtenue par la projection des équations 2.58 dans un espace de fonction de pondération  $W \in \Phi^h$  pour l'équation de la quantité de mouvement et  $q \in \Phi_p$  pour l'équation de continuité (condition d'incompressibilité). Le problème variationnel résultant est donc formulé comme suit :

Pour les conditions aux limites et aux frontières données, trouver  $U(x, t) \in \Phi_u^h \times ]0, T[$  et  $p(x, t) \in \Phi_p \times ]0, T[$ , tel que, pour tout  $(W, q) \in \Phi^h \times \Phi_p$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_f} w \cdot U_t d\Omega_f + \int_{\Omega_f} w \cdot (U \cdot \nabla) U d\Omega_f + \int_{\Omega_f} \nabla w : \nu \nabla U d\Omega_f - \int_{\Omega_f} \nabla w \cdot p d\Omega_f \\ = \int_{\Omega_f} w \cdot f d\Omega_f + \int_{\Omega_f} w \cdot t d\Gamma_N \end{aligned} \quad 2.59. a$$

$$\int_{\Omega_f} q \cdot \nabla U d\Omega_f = 0 \quad 2.59. b$$

Le système d'équations 2.59 est semi-discret, car il reste encore l'évolution dans le temps. Pour la discrétisation temporelle, des schémas de discrétisation de différence finis comme la famille  $\theta$  ( $\theta$  family) sont très bien adaptés. On note aussi qu'une méthode implicite est souhaitée afin de résoudre le système algébrique à chaque pas de temps.

### 2.7.2. Discrétisation spatiale en deux dimensions

Dans un système de coordonnées cartésiennes de deux dimensions, les équations de Navier-Stokes peuvent s'exprimer sous la forme suivante :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial P}{\partial x} = F_{bx} \quad 2.60. a$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial P}{\partial y} = F_{by} \quad 2.60. b$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad 2.60. c$$

Où :

$u$  et  $v$ : Sont les deux composantes des vitesses

$\rho$ : La masse volumique du fluide

$P$ : La pression

$\mu$ : La viscosité dynamique du fluide

$F_{bx}$  et  $F_{by}$ : Les composantes des forces par unité de volume

Dans cette partie, tout le développement élaboré dans la section traitant les écoulements de Stokes reste applicable. On doit ajouter seulement la contribution du terme de transport convectif à la forme discrétisée.

$$xx \Rightarrow \rho \int_{A^e} \left( [N]\{u\} \frac{\partial [N]}{\partial x} \{u\} + [N]\{v\} \frac{\partial [N]}{\partial Y} \{u\} \right) dA \quad 2.61.a$$

$$yy \Rightarrow \rho \int_{A^e} \left( [N]\{u\} \frac{\partial [N]}{\partial x} \{v\} + [N]\{v\} \frac{\partial [N]}{\partial Y} \{v\} \right) dA \quad 2.61.b$$

En raison du caractère non linéaire de la contribution des termes convectifs dans la forme vibrationnelle, une procédure de linéarisation est nécessaire. Numériquement on pourrait le réaliser par un algorithme de résolution itératif. On définit  $\{\bar{u}\}$  et  $\{\bar{v}\}$  les composantes des vitesses à l'itération non linéaire précédente. Ce qui conduit aux formes:

$$xx \Rightarrow \rho \int_{A^e} \left( [N]\{\bar{u}\} \frac{\partial [N]}{\partial x} \{u\} + [N]\{\bar{v}\} \frac{\partial [N]}{\partial Y} \{u\} \right) dA \quad 2.62.a$$

$$yy \Rightarrow \rho \int_{A^e} \left( [N]\{\bar{u}\} \frac{\partial [N]}{\partial x} \{v\} + [N]\{\bar{v}\} \frac{\partial [N]}{\partial Y} \{v\} \right) dA \quad 2.62.b$$

Sous une autre forme:

$$xx \Rightarrow \rho \int_{A^e} \left( [N]\{\bar{u}\} \frac{\partial [N]}{\partial x} + [N]\{\bar{v}\} \frac{\partial [N]}{\partial Y} \right) dA \{u\} = [K_{uu}]\{u\} \quad 2.63.a$$

$$yy \Rightarrow \rho \int_{A^e} \left( [N]\{\bar{u}\} \frac{\partial [N]}{\partial x} + [N]\{\bar{v}\} \frac{\partial [N]}{\partial Y} \right) dA \{v\} = [K_{vv}]\{v\} \quad 2.63.b$$

En rajoutant les contributions des termes du transport convectif à la matrice de rigidité, le système d'équations résultant gouvernant un écoulement stationnaire s'écrit :

$$\begin{bmatrix} [K_{u\mu}] + [K_{uu}] & [0] & [K_{px}] \\ [0] & [K_{v\mu}] + [K_{vv}] & [K_{py}] \\ [K_u] & [K_v] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \\ \{P\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{f_{bx}\} \\ \{f_{by}\} \\ \{0\} \end{bmatrix} \Rightarrow [K^e]\{\delta^e\} = \{f^e\} \quad 2.64$$

### 2.7.3. Discrétisation temporelle

La méthode des différences finies est largement utilisée pour la discrétisation temporelle des équations de transport convectif-diffusif. Elle consiste à calculer la valeur de la variable inconnue  $U^{n+1}$  à  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$  à partir de sa valeur  $U^n$  à l'instant  $t^n$ . Dans ce cas, cela est réalisé par une moyenne pondérée de  $U_t^{n+1}$  et  $U_t^n$  comme suit :

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{U(t^{n+1}) - U(t^n)}{\Delta t} = \theta U_t(t^{n+1}) + (1 - \theta) U_t(t^n) + \mathcal{O} \quad 2.65$$

Sachant que  $\theta$  est un paramètre variant dans l'intervalle  $[0,1]$ . Pour les valeurs de  $\theta < 1/2$  les schémas de discrétisation sont conditionnellement stable (si  $\theta = 0$ , on a la méthode d'Euler). Par contre quand  $\theta \geq 1/2$  les méthodes sont conditionnellement stables ( $\theta = 1$  on a la

méthode d'Euler décalée arrière (Euler-backward),  $\theta = 2/3$  c'est la méthode de Galerkin et pour  $\theta = 1/2$  c'est le schéma de Crank-Nicolson).

Le schéma de discrétisation temporelle  $\theta$  appliqué à l'équation de transport convectif-diffusif conduit à la forme:

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} + \theta[U^*\nabla - \nabla(v\nabla)]\Delta U = \theta S^{n+1} + (1 - \theta)S^n - [U^*\nabla - \nabla(v\nabla)]U^n \quad 2.66$$

Si  $\theta = 1$  (Euler Bakward), on aura donc :

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} + [U^*\nabla - \nabla(v\nabla)]U^{n+1} = S^{n+1} \quad 2.67$$

#### 2.7.4. Méthodes d'éléments finis stabilisées appliquées aux équations de Navier-Stokes

Comme on la déjà souligné, la formulation de Galerkin standard équivaut une approximation aux différences finies centrées du terme du transport convectif. Cela n'est pas optimal quand la convection domine la diffusion. Dans ce cas de figure, l'utilisation d'une formulation d'éléments finis stabilisée est indispensable.

##### 2.7.4.1. Formulation SUPG (Stream-Upwind/Petrov-Galerkin)

L'application de la formulation SUPG aux équations de Navier-Stokes conduit au problème fonctionnel suivant:

Trouver  $(U, P) \in \Phi_U^h \times \Phi_p$  tels que :

Pour les conditions aux limites et aux frontières données trouver  $U(x, t) \in \Phi_U^h(x) ]0, T[$  et  $p(x, t) \in \Phi_p(x) ]0, T[$ , tel que, pour tout  $(W, q) \in \Phi_U^h \times \Phi_p$  :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_f} w \cdot (U_t + (U \cdot \nabla)U) d\Omega_f + \int_{\Omega_f} \nabla w : v \nabla U d\Omega_f - \int_{\Omega_f} \nabla w \cdot p d\Omega_f \\ & + \sum_e \int_{\Omega_e} U \cdot \nabla w \cdot \tau \cdot (U_t + (U \cdot \nabla)U - v \nabla^2 U + \nabla p) d\Omega_e \\ & = \int_{\Omega_f} w \cdot f d\Omega_f + \int_{\Gamma_N} w \cdot t d\Gamma_N + \sum_e \int_{\Omega_e} U \cdot \nabla w \cdot \tau \cdot f d\Omega_e \end{aligned} \quad 2.68. a$$

$$\int_{\Omega_f} q \cdot \nabla U d\Omega_f = 0 \quad 2.68. b$$

$$\forall (w, q) \in \Phi^h \times \Phi_p$$

La méthode SUPG est d'un point de vue mathématique consistante. Cependant, la stabilité de la méthode dépend de la satisfaction de la condition LBB (Inf-Sup).

#### 2.7.4.2. Formulation Galerkin Least-Squares

La formulation GLS des équations de Navier-Stokes s'écrit comme suit:

Pour les conditions aux limites et aux frontières données, trouver  $U(x, t) \in \Phi_u^h \times ]0, T[$  et  $p(x, t) \in \Phi_p \times ]0, T[$ , tel que, pour tout  $(W, q) \in \Phi^h \times \Phi_p$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_f} w \cdot (U_t + (U \cdot \nabla)U) d\Omega_f + \int_{\Omega_f} \nabla w : \nu \nabla U d\Omega_f - \int_{\Omega_f} \nabla w \cdot p d\Omega_f \\ + \sum_e \int_{\Omega_e} ((U \cdot \nabla)w - \nu \nabla^2 w + \nabla q) \cdot \tau \cdot (U_t + (U \cdot \nabla)U - \nu \nabla^2 U \\ + \nabla p) d\Omega_e = \int_{\Omega_f} w \cdot f d\Omega_f + \int_{\Gamma_N} w \cdot t d\Gamma_N + \\ + \sum_e \int_{\Omega_e} ((U \cdot \nabla)w - \nu \nabla^2 w + \nabla q) \tau \cdot f d\Omega_e \end{aligned} \quad 2.69. a$$

$$\int_{\Omega_f} q \cdot \nabla U d\Omega_f = 0 \quad 2.69. b$$

$$\forall (w, q) \in \Phi^h \times \Phi_p$$

Contrairement à la formulation SUPG, la formulation GLS respecte la condition Inf-Sup pour toutes les combinaisons des fonctions d'approximations des vitesses et des pressions. Cela représente un avantage conséquent.

#### 2.7.5.3. Paramètres de stabilisation

Dans le cas des écoulements instationnaires et en utilisant pour la discrétisation temporelle une méthode de la famille  $\theta$ . Le paramètre de stabilisation est donné par :

$$\tau = \left[ \left( \frac{1}{\theta \Delta t} \right)^2 + \left( \frac{2 U_h}{h} \right)^2 + 9 \left( \frac{4 \nu}{h^2} \right) \right]^{-1/2} \quad 2.70$$

Et selon Codina [34] par :

$$\tau = \left[ \left( \frac{1}{\theta \Delta t} \right) + \left( \frac{2 U_h}{h} \right) + \left( \frac{4 \nu}{h^2} \right) \right]^{-1} \quad 2.71$$

Où :  $h$  est la taille locale de l'élément et  $U_h$  est la vitesse locale.

## 2.8. Les écoulements turbulents

Un grand challenge en CFD (Computational Fluid Dynamics) est la modélisation et la simulation des écoulements turbulents. À grande vitesse l'écoulement devient irrégulier [36], des oscillations et des vortex se distribuent dans la totalité du domaine fluide [30]. La résolution des équations de Navier-Stokes dans le cas des écoulements laminaires ne comprend pas de difficultés d'aspect fondamentales. Par contre, dans le cas des écoulements turbulents, cela présente des problèmes significatifs disputant les performances des supercalculateurs modernes. La simulation directe des écoulements turbulents en utilisant les équations de Naviers-Stokes (Direct Numerical Simulation – DNS —) n'est possible que dans les cas d'écoulement simple et pour des nombres de Reynolds ( $R_e$ ) modérés. Le nombre de points de maillage nécessaire pour une résolution spatiale efficace est de l'ordre de  $R_e^{9/4}$  [37]. Mais cela ne signifie pas que la DNS n'est pas utile, car cette dernière reste un moyen important pour l'étude est la compréhension de la structure de la turbulence. La DNS joue aussi un rôle très important dans le développement est la calibration de nouveaux modèles de turbulence.

Afin de réduire la complexité de la simulation et de baisser le coût des calculs. Une technique classique consiste à appliquer une procédure de Moyennation où bien de filtration aux équations de Navier-Stokes. Cette opération enlève l'effet des petites structures tourbillonnaires à grandes fréquences de la solution par rapport à celle originale des équations de Navier-Stokes (DSN). Les structures à grandes fréquences ne sont pas capturées par les calculs ; mais leurs effets sur les échelles résolues doivent être pris en considération par l'utilisation de modèles. Plusieurs méthodes utilisant les équations de Reynolds moyennées ou bien filtrées peuvent être employées:

- Simulation des équations moyennées de Reynolds RANS (Reynolds Averaged Numerical simulation) : L'aspect statistique de la méthode permet de capter l'évolution moyennée dans le temps de l'écoulement. Les grandeurs physiques de l'écoulement sont décomposées en la somme d'une partie moyenne et une autre fluctuante. En moyennant les équations de Navier-Stokes, on aboutit aux équations de Reynolds RANS où apparait de nouvelles inconnues qui sont les contraintes turbulentes dites aussi contraintes de Reynolds.

Dans cette catégorie, on peut citer les cinq principales classes de modèles suivantes:

- A Une équation.

- A plusieurs équations.
- Méthode algébrique.
- Zéro équation (Modèle de longueur de mélange).
- Fermeture du second ordre.

Les trois premières méthodes appartiennent aux modèles de fermeture du premier ordre. Ces derniers sont basés sur le principe de Boussinesq et dans certaines applications aussi une formulation non linéaire de la viscosité turbulente.

- Simulation des grandes échelles LES (Large-Eddy Simulation) : la méthode est basée principalement sur le fait que dans un écoulement turbulent le comportement de petites structures tourbillonnaires a un caractère plus universel que celui des grandes structures. C'est de cela, que vient l'idée de résoudre la contribution des échanges de quantité de mouvement et d'énergie des grandes échelles et de modéliser les effets des petites structures qui n'ont pas été résolu par le schéma numérique.

### 2.8.1. Le Modèle de Smagorinsky

Le modèle de Smagorinsky est basé sur l'hypothèse affirmant que les petites structures dissipent entièrement et instantanément l'énergie qu'elles reçoivent des grandes structures. Le modèle algébrique prend la forme suivante :

$$U_t + (U \cdot \nabla)U - \nabla((\nu + \nu_T)\nabla)U + \nabla p = f \quad \text{dans } \Omega_f \times ]0, T[ \quad 2.72. a$$

$$\nabla U = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \times ]0, T[ \quad 2.72. b$$

$$\nu_T = (C_s \Delta)^2 |\bar{S}| \quad 2.72. c$$

Où :  $|\bar{S}| = (2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij})^2$  avec  $\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$ .

$C_s$  : est la constante de Smagorinski égale à 0.18.

La largeur du filtre  $\Delta$  est souvent prise comme le double de la taille moyenne de la maille  $\Delta = 2 \cdot (\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3)^{1/3}$ .

Afin de prendre en compte la réduction du développement des petites structures proches des frontières solides, la valeur de la viscosité turbulente doit diminuer. Donc, le modèle Smagorinski est modifié d'après Van Driest [37] comme suit :

$$\nu_T = (C_s \Delta (1 - e^{-Z^+/25})^2 |\bar{S}| \quad 2.73$$

Où  $Z^+$  représente la distance adimensionnelle de la paroi.



Les coordonnées adimensionnelles aux frontières sont obtenues par :

$$(X^+, Y^+, Z^+) = \left( \frac{X U_\tau}{\nu}, \frac{Y U_\tau}{\nu}, \frac{Z U_\tau}{\nu} \right) \quad 2.74$$

$U_\tau$  et  $\nu$  : Sont respectivement la vitesse de friction et la viscosité cinématique du fluide.

### 2.8.2. Le traitement près des parois

La structure des écoulements de type couche limite ont certaines caractéristiques spécifiques qui appellent à un traitement spécial dans le cadre de la simulation à grande échelle. Dans ce cadre, il y a deux approches possibles [38]:

- Résolution directe [39]: Afin de pouvoir obtenir des résultats satisfaisants, on a qu'à utiliser un maillage suffisamment raffiné afin de pouvoir capter convenablement le comportement des particules fluides proches des parois. Des expérimentations numériques montrent que trois points du maillage doivent être dans la zone  $0 < Z^+ < 10$  (direction normale de la paroi). La résolution du maillage dans les deux autres directions  $\Delta x^+$  et  $\Delta y^+$  est un paramètre très important gouvernant la qualité de la solution :
  - $\Delta x^+ \leq 50, \Delta y^+ \leq 12$  : Haute résolution (de bonnes valeurs de la friction aux parois sont obtenues quand la méthode utilisée est nondissipative).
  - $\Delta x^+ \leq 100, \Delta y^+ \leq 30$  : Résolution moyenne.
  - $\Delta x^+ \geq 100, \Delta y^+ \geq 30$  : Basse résolution (d'importantes erreurs apparaissent).
- Modélisation de la dynamique de l'écoulement proche des parois : Le cout d'une résolution numérique d'un écoulement de fluide à grand nombre de Reynolds  $R_e > 10^6$  reste considérablement haut. La raison est le nombre important des nœuds de maillage nécessaire pour résoudre l'écoulement de manière adéquate proche des parois. Afin de réduire les coûts des calculs, il est possible de modéliser la couche limite en spécifiant une corrélation entre la vitesse des particules fluides et les contraintes aux parois.

## 2.9. Expérimentations numériques

Le but des expérimentations numériques menées dans ce chapitre est en premier lieu, la validation de la procédure numérique entreprise et en deuxième lieu, l'analyse de quelques cas intéressants d'écoulement autour d'obstacle.

### 2.9.1. Formulation mathématique

Dans ce qui suit, on a opté pour la modélisation de la turbulence à la méthode LES (Large Eddy Simulation) en utilisant le modèle de Smagorinsky [40, 41] qui relie la viscosité turbulente au gradient de vitesse moyenne par une longueur caractérisant les échelles et filtrant ainsi ces derniers.

Les équations de Reynolds pour un écoulement transitoire de fluide incompressible sont:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \cdot \nabla U - \nabla((\nu + \nu_T) \nabla)U + \nabla p = f \quad \text{dans } \Omega_f \quad 2.75$$

$$\nabla U = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \quad 2.76$$

Où  $U$ ,  $p$ ,  $f$ ,  $\nu_T$  et  $\Omega_f$  sont respectivement la vitesse d'écoulement, la pression, l'effort de volume, la viscosité cinématique turbulente et le domaine fluide.

La viscosité turbulente est calculée à l'aide de l'expression suivante :

$$\nu_T = C_s h^2 \left| \sum_{ij} (\nabla U + \nabla U^T) \right| \quad 2.77$$

$h$  C'est la taille d'une maille et  $C_s = 0,01$  est la constante de Smagorinsky.

L'effet mécanique provoqué par l'écoulement du fluide sur le corps solide est traduit par les trois composantes  $F_x$  et  $F_y$  agissantes dans le sens horizontal et vertical ainsi que le moment résultant  $M$ .

$$F = \int (-p + \nu (\nabla U + \nabla U^T)) n d\Gamma \quad 2.78.a$$

$$M = \int [-F_x(y - y_c) + F_y(x - x_c)] d\Gamma \quad 2.78.b$$

Où  $p, \nu, (x_c, y_c)$ ,  $\Gamma$  et  $n$  sont respectivement la pression rapportée à la masse volumique du fluide, la viscosité cinématique, les coordonnées du centre de rotation, le contour de l'obstacle et sa normale extérieure.

Les mesures adimensionnelles pour les forces qui en résultent sont les coefficients aérodynamiques de traînée, de portance et le moment.

$$C_x = \frac{2 F_x}{U_{inf}^2 D} \quad 2.79.a$$

$$C_y = \frac{2 F_y}{U_{inf}^2 D} \quad 2.79.b$$

$$C_m = \frac{2 M}{U_{inf}^2 D^2} \quad 2.79.c$$

Pour la mesure adimensionnelle de la fréquence des détachements tourbillonnaires, on utilise le nombre de Strouhal défini comme suit :

$$S_t = \frac{f_{st} D}{U_{inf}} \quad 2.80$$

Où  $f_{st}$ ,  $U_{inf}$  et  $D$  sont respectivement la fréquence des lâchés tourbillonnaire, la vitesse à l'entrée et la hauteur de la surface frontale à l'écoulement.

### 2.9.2. La méthode numérique

Les conditions aux limites ainsi que la configuration étudiée sont représentés sur la figure 2.3.

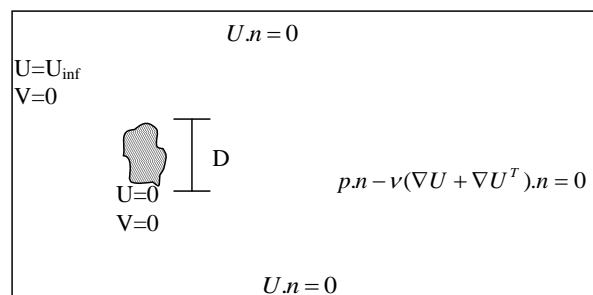


Figure 2.3 : Configuration étudiée et conditions aux limites

Du fait du caractère nonlinéaire du problème étudié, une linéarisation du système d'équations est requise afin de pouvoir résoudre numériquement l'écoulement. Le terme traduisant le transport convectif  $U \cdot \nabla U$  est linéarisé sous la forme  $U^n \cdot \nabla U^{n+1}$  ; où  $U^n$  et  $U^{n+1}$  sont successivement les vitesses à l'instant  $t^n$  et  $t^{n+1}$ .

Le terme de la dérivée par rapport au temps est approximé par :  $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}$ .

La discrétisation par éléments finis des équations régissant l'écoulement est réalisée en utilisant la formulation stabilisée de type GLS (Galerkin Least Squares). Cette formulation satisfait les conditions LBB (Ladyzhenskaya – Babuska – Brezzi). En outre, elle permet

l'utilisation d'éléments hybrides d'ordre d'interpolation égal pour la pression et la vitesse [42].

L'élément de base qu'on a utilisé est un élément mixte, de forme triangulaire P2/P1 et vérifiant la condition inf-sup dite aussi condition LBB [43, 44].

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_f} \left( \frac{U}{\Delta t} + U^k \nabla U \right) v \, d\Omega + \int_{\Omega_f} \nu_{effe} (\nabla U + \nabla^T U) : \nabla v \, d\Omega - \int_{\Omega_f} P \nabla v \, d\Omega + \\
 & \sum_e \int_{\Omega_f} \tau^{GLS} \left[ \left( \frac{U}{\Delta t} + U^k \nabla U \right) - \nu_{effe} \nabla (\nabla U + \nabla^T U) + \nabla P \right] \cdot [U^k \nabla v - \\
 & \nu_{effe} \nabla (\nabla v + \nabla^T v) + \nabla q] \, d\Omega = \int_{\Omega_f} \left( f + \frac{U^n}{\Delta t} \right) v \, d\Omega \\
 & + \sum_e \int_{\Omega_e} \tau^{GLS} \left( f + \frac{U^n}{\Delta t} \right) [U^k \nabla v - \nu_{effe} \nabla (\nabla v + \nabla^T v) + \nabla q] \, d\Omega \tag{2.81}
 \end{aligned}$$

$$\tau^{GLS} = \left[ \left( \frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left( \frac{2U_h}{h_e} \right)^2 + \left( \frac{4\nu_t}{h_e^2} \right)^2 \right]^{-1/2} \tag{2.82}$$

$h_e$  : La taille locale de l'élément ;  $\nu_{effe} = \nu + \nu_T$  : Viscosité cinématique effective ;

$U_h$  : La vitesse locale

### 2.9.3. Simulation Numérique du phénomène d'éclatement tourbillonnaire dans la zone de sillage d'un obstacle de section circulaire

Le but de cette étude est d'approcher numériquement le phénomène d'éclatement tourbillonnaire. En général dans la zone de sillage d'un obstacle placé dans un écoulement de fluide, on observe la formation de tourbillons en alternance. Ces lâchés tourbillonnaires se traduisent par un signal périodique de la pression et de la vitesse. Ce comportement des particules fluides, caractérisé par une destruction brusque des tourbillons et l'apparition d'autres et aussi connu sous le nom des lâchés de Von Karman.

Des simulations sont faites pour le cas test de l'écoulement de fluides autour d'un cylindre. Le solveur réalisé est basé sur la méthode des éléments finis en utilisant une formulation stabilisée dite GLS (Galerkin Least Squares). Pour la modélisation de la turbulence, on adopte la méthode LES (Large Eddy Simulation) en utilisant le modèle de Smagorinsky. Une attention particulière doit être apportée au pas de temps utilisé afin de pouvoir capter la plus basse fréquence des lâchés tourbillonnaires.

L'identification et l'étude des phénomènes hydro et aérodynamiques qui surgissent dans le sillage d'un obstacle restent un sujet d'intérêt dans divers domaines. L'écoulement perturbé par la présence d'un obstacle commence à se comporter d'une manière périodique à partir d'un très petit nombre de Reynolds. Des tourbillons libres entraînés par l'écoulement se forment continuellement à partir d'un filet fluide voisin de la surface du cylindre. Ces tourbillons sont arrangés de manière alternée et constituant une formation appelée *sillage tourbillonnaire de Von Karman*.

Ce comportement instationnaire à caractère périodique du fluide est dû au changement perpétuel et continu de la position du point de détachement de la couche limite sur la surface du cylindre [45].

Différentes techniques expérimentales ont été développées depuis plusieurs décennies pour étudier et caractériser le détachement tourbillonnaire périodique issu d'un cylindre. A titre d'exemple, on trouve dans la littérature les travaux [46, 47 et 48].

De nos jours, l'ingénieur est de plus en plus confronté à des problèmes pratiques où apparaît le phénomène d'éclatement tourbillonnaire. Pendant la phase de conception d'une structure subissant les effets de charges périodiques d'un fluide et afin de prévoir l'apparition de la résonance. On doit éviter que la fréquence propre du système mécanique libre coïncide avec la fréquence de base des charges. Afin de pouvoir calculer numériquement cette dernière. On utilise pour notre cas test, un solveur qu'on a développé par la mise en œuvre de la méthode des éléments finis [49]. Une fois les deux champs des vitesses et des pressions sont calculés. On intègre numériquement le signal temporel de la trainée.

### 2.9.3.1 Résultats et discussions

#### 2.9.3.1.1 Domaine de calcul

La configuration concernée par la présente étude apparaît sur la figure 2.4. Pour les frontières nord et sud du domaine de calcul, on introduit des conditions aux limites de symétrie.

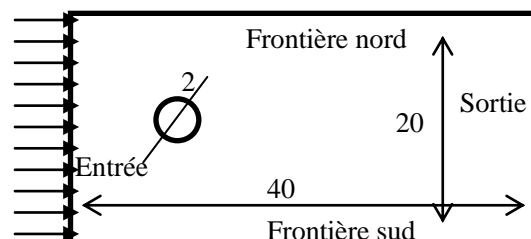


Figure 2.4 : Représentation de la configuration étudiée

La triangulation du domaine est réalisée à l'aide du générateur de maillage libre Gmsh<sup>1</sup>. Ce dernier est un outil qui permet la réalisation de maillages 2D et 3D.

Afin de bien capter les zones de recirculation derrière l'obstacle cylindrique, on a raffiné le maillage dans la zone où l'on a prédit d'importants gradients de vitesses et de pressions. Cela veut dire la zone de sillage.

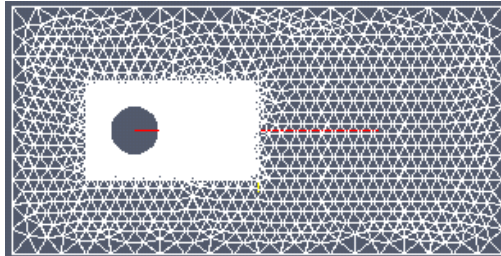


Figure 2.5 : Représentation du maillage (7516 éléments et 3851 nœuds)

### *2.9.3.1.2. Illustration du caractère périodique et instationnaire de l'écoulement autour d'un cylindre*

D'après la figure 2.6 (a, b, c, d, e, f, g et h), représentant l'évolution temporelle de l'écoulement autour d'un cylindre. On peut voir que l'écoulement reste symétrique pendant pratiquement les 14 premières secondes. Pendant cet intervalle de temps, les vortex qui surgissent derrière le cylindre grandissent au fur et à mesure jusqu'à atteindre une certaine taille critique où on constate un décollement de l'écoulement en aval du cylindre. Le développement de la région décollée continue et par la suite, des tourbillons libres entraînés par l'écoulement se forment continuellement à partir d'un filet fluide voisin de la surface du cylindre. Ces tourbillons sont arrangés de manière stable et alternée.

De l'évolution des zones de recirculation derrière l'obstacle, on remarque qu'à l'instant  $t=29$  seconde. Les particules entraînées dans le vortex inférieur s'écoulent à des vitesses plus importantes par rapport à celles capturées dans le vortex supérieur. La vitesse angulaire du vortex inférieur continue d'augmenter et à un certain moment, ce dernier se détache entièrement du cylindre. A partir de cet instant, c'est le vortex supérieur qui augmente de vitesse et par la suite il se détache à son tour. Le détachement des tourbillons continue à avoir lieu, d'une manière alternée et périodique dans le temps.

---

<sup>1</sup> <http://www.geuz.org/gmsh>

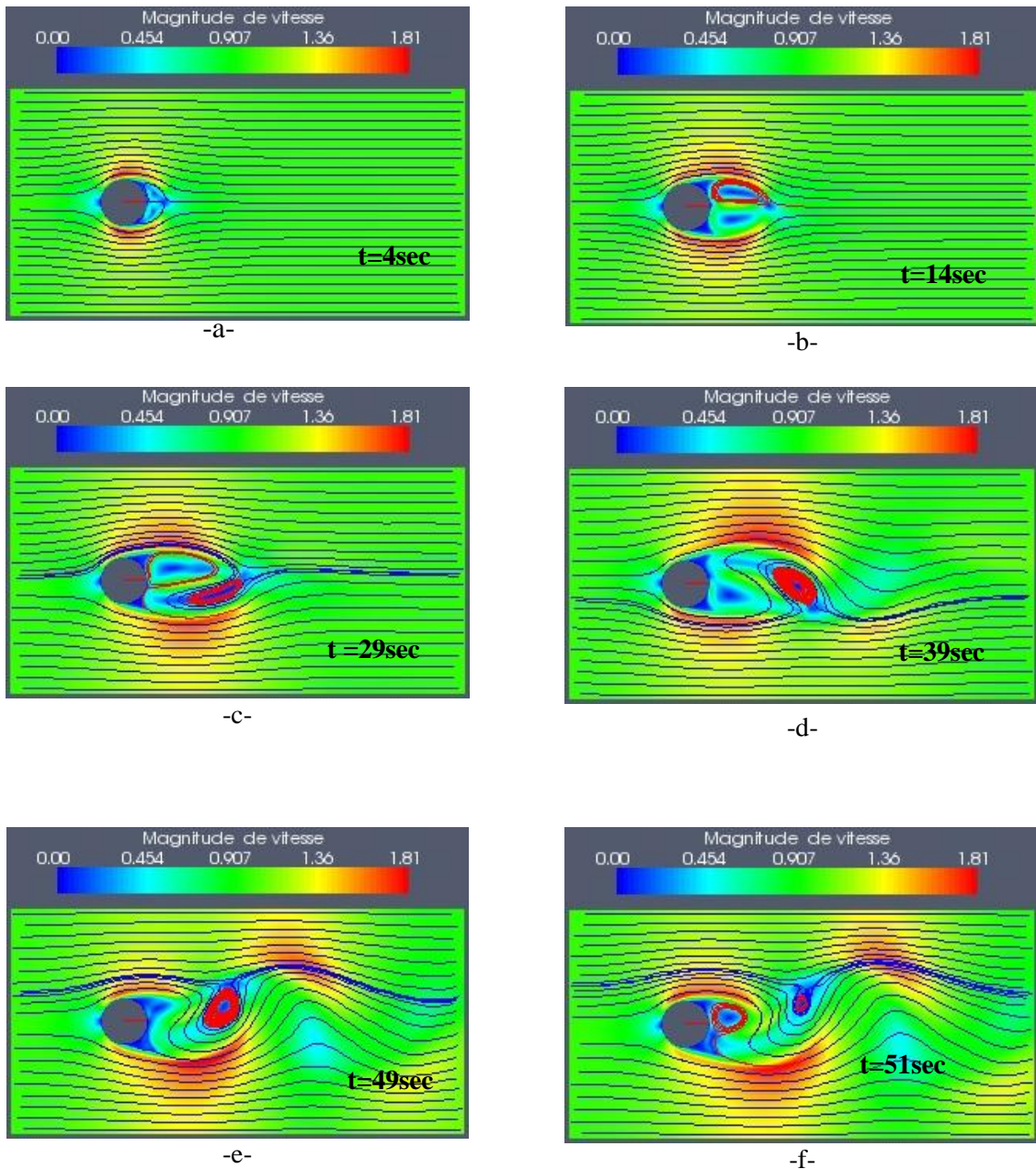


Figure 2.6 : Evolution temporelle de l'écoulement autour d'un cylindre pour  $Re= 800$

Le caractère périodique du phénomène étudié est montré d'une manière explicite sur la figure 2.7 (a, b, c, d, e et f). Cette dernière représente la variation temporelle de la pression dans un plan vertical et à une distance égale à 5 derrière le cylindre. On retrouve une distribution pratiquement identique de la pression à l'instant  $t=55\text{sec}$  et à  $t=88\text{sec}$ . La même allure est aussi constatée entre  $t=79\text{sec}$  et  $t=98\text{sec}$ .

Dans un écoulement de fluide réel, les deux champs de vitesse et de pression sont fortement couplés. Ce qui implique qu'il existe une perpétuelle interaction entre les deux champs. C'est



pour cela, et pour plus de précision dans la détermination des fréquences des lâchés de tourbillons, qu'on doit utiliser le signal temporel de la portance. Car pour l'évaluation de cette dernière, on combine entre le champ de pression et de vitesse comme il est montré dans l'expression 2.78.

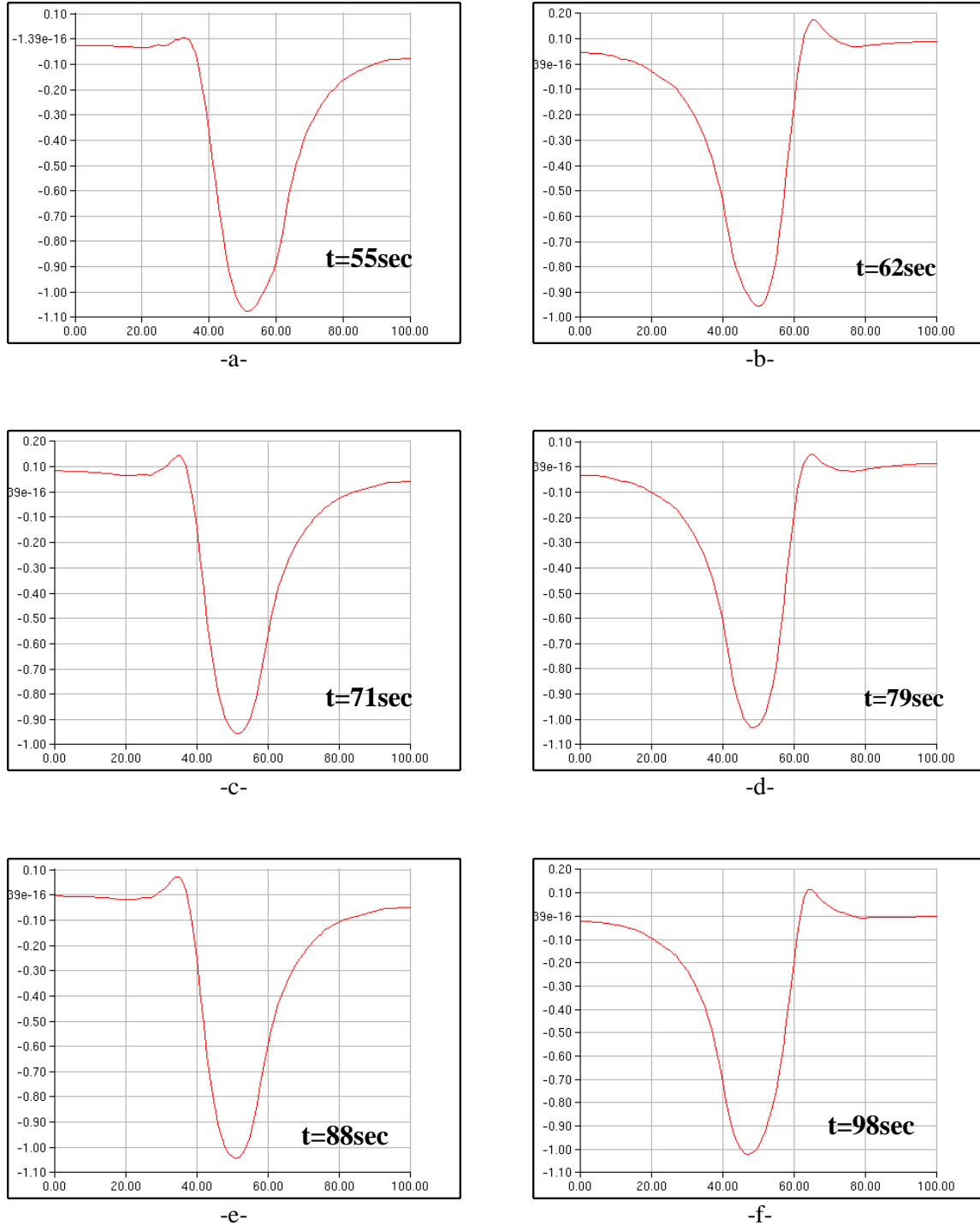


Figure 2.7 : Variation temporelle de la pression dans un plan vertical à une distance égale 5 derrière le cylindre (en abscisse la largeur adimensionnelle et en ordonnée la pression en [Pa])



### 2.9.4 Etude numérique des compteurs à effet vortex

Le principe de fonctionnement d'un compteur à effet vortex est basé sur un phénomène naturel dit de Von Karman. Dans la zone de sillage d'un obstacle placé dans un écoulement de fluide, on observe la formation de tourbillons en alternance. Ces lâchés tourbillonnaires se traduisent par un signal périodique de la pression et de la vitesse. Si la forme de l'obstacle est appropriée, on constate qu'il existe une relation linéaire entre la fréquence des vortex et la vitesse d'écoulement. Pour un compteur à effet vortex le cas optimal serait de concevoir une configuration où cette linéarité reliant la fréquence au débit est vérifiée pour différents fluides et une large gamme de régimes d'écoulement. Cette linéarité est sensible principalement à la forme de l'obstacle (bluff body) et aux variations du nombre de Reynolds [45].

L'idée de concevoir un débitmètre à effet vortex a été proposée la première fois par Roshkol [2], qui a étudié le détachement tourbillonnaire dans la zone de sillage d'un cylindre à section circulaire. Pour cette forme d'obstacle (bluff body), l'évolution temporelle de la formation des vortex dans la zone de sillage est très sensible aux changements de régime d'écoulement. Dans le cas d'obstacles à angle vif (sharp edges), le point de détachement critique est stable pour une large gamme de nombres de Reynolds. C'est pour cette raison que les obstacles à angle vif (sharp edges) ont été adoptés pour la génération des vortex au lieu d'un cylindre de section circulaire [45].

Les dimensions de l'obstacle sont aussi importantes, car il est préférable qu'il soit suffisamment grand afin de générer d'importante fluctuation dans la zone de sillage. Par contre le désavantage de large dimension est l'encombrement des conduites causant ainsi d'immenses pertes de charges. Des recherches récentes ont étudié les débitmètres à effet vortex utilisant des obstacles de plus en plus petit ou on utilise pour la détection du détachement tourbillonnaire la technique d'ultrason qui a montré une très grande sensibilité à la détection des vortex [50].

Afin d'améliorer l'aspect répétitif et périodique du détachement des vortex pour des régimes d'écoulement turbulents, dans leur expérimentation Bently et al. [51], ont introduit un second obstacle en série avec le premier. Le caractère périodique des détachements de vortex n'est renforcé que dans le cas de certaines formes d'obstacle, c'est dans cette optique que d'autres investigations expérimentale [52] et numérique [53] ont eu lieu afin de définir l'architecture optimale des débitmètres à effet vortex.

Ce travail, présente une étude comparative de plusieurs formes d'obstacles de section rectangulaire, prismatique, triangulaire et forme de la lettre T. les performances des

débitmètres utilisant chaque type d'obstacle sont vérifiées pour différent nombre de Reynolds. Pour chaque configuration, on calcule numériquement l'évolution temporelle de la portance. Par la suite et en utilisant la transformée de Fourier rapide (FFT) on détermine pour chaque nombre de Reynolds la fréquence de base dominant l'éclatement tourbillonnaire.

### 2.9.4.1. Résultats numériques

Dans le but de valider la présente approche numérique, on a choisi de confronter nos résultats principalement à ceux publiés par Okajima [54], Sohankar [55] et Vickery [56] concernant l'écoulement autour d'un cylindre à section carré.

2.9.4.1.1. Analyse de l'écoulement autour d'un cylindre de section carré:

A l'instant  $t=25\text{sec}$  et pour un nombre de Reynolds égal à  $10^3$  les lignes de courant sont tracées sur la figure 2.8. Les oscillations observées de ces dernières dans la zone de sillage de l'obstacle, traduisent le détachement des vortex qui continue à avoir lieu d'une manière perpétuelle et alternée dans le temps. La périodicité des lâchés de Von Karman est traduite aussi par l'évolution temporelle des coefficients aérodynamiques représentés sur la figure 2.9.

A partir des valeurs simulées du coefficient de la portance, et par l'utilisation de la transformée de Fourier rapide (FFT), on déduit la fréquence de base dominant le phénomène d'éclatement tourbillonnaire. Sur la figure 2.10 sont représentés deux spectres de la portance correspondant à  $Re=10^3$  et  $Re=10^4$ .

Du tableau 2.2, on peut voir que les valeurs simulées du nombre de Strouhal sont sous-estimées d'environ 5% par apport aux valeurs expérimentales présentées par Okajima [54],

La figure 2.11 représentant la variation du nombre de Strouhal et le coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds. Cette dernière traduit une bonne concordance des valeurs simulées par apport à d'autres expérimentales et numériques.



Figure 2.8: Représentation des lignes de courant pour  $Re=10^3$  et à  $t=25\text{sec}$ .

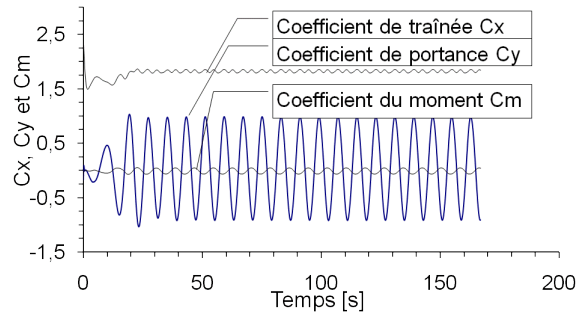


Figure 2.9 : Evolution des coefficients de traînée, de portance et du moment pour  $Re=10^3$ .

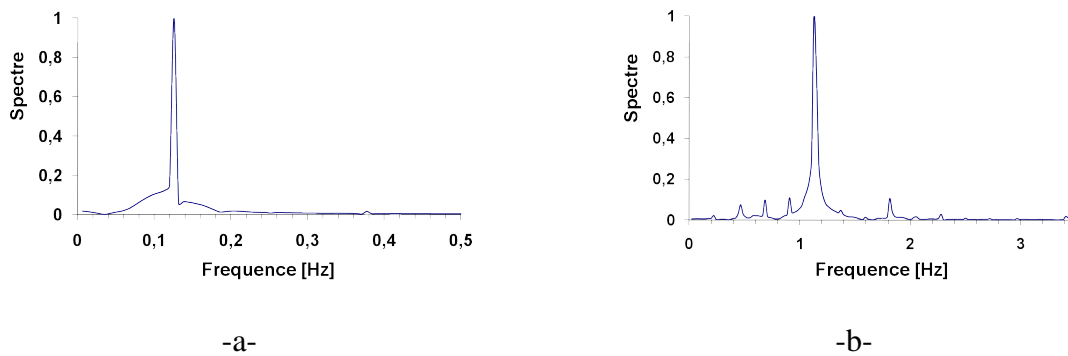
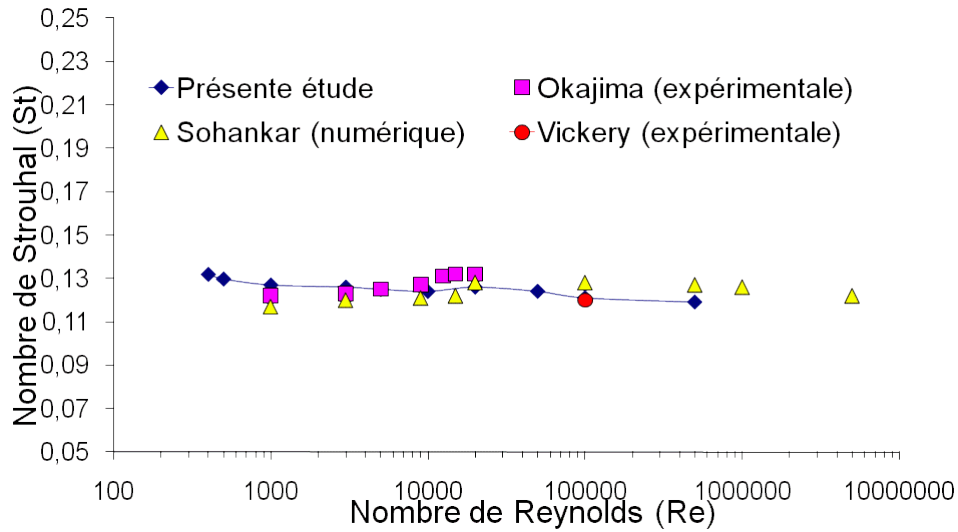


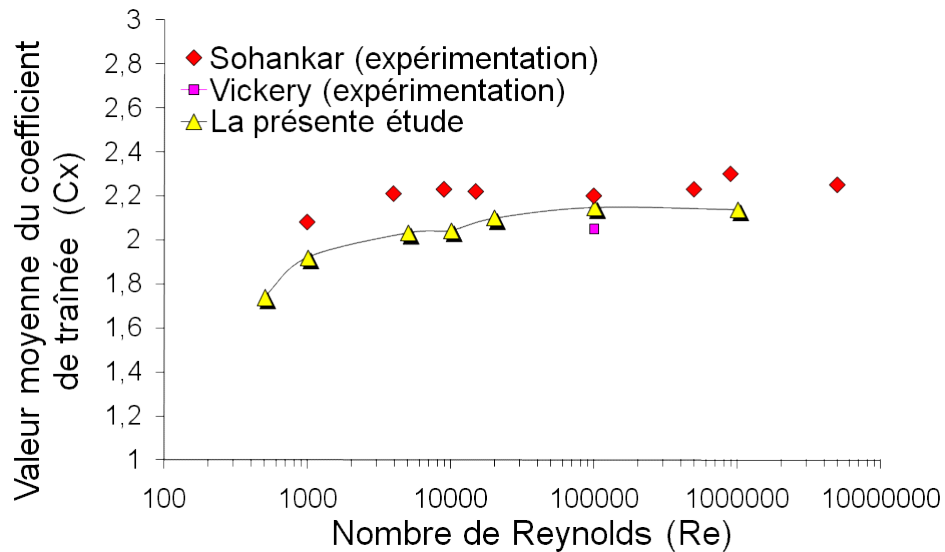
Figure 2.10 : -a- ( $Re=10^3$ ) Représentation du spectre correspondant au coefficient de portance  $C_y$  -b- ( $Re=10^4$ ) Représentation du spectre correspondant au coefficient de portance  $C_y$ .

Re	Nombre de Strouhal (Valeurs de reference de Yih-Jena et Wen-Hann (2004))			
	Présente étude	Yih-jena (2004) (numérique) 0.04	Yih-jena (2004) (numérique) 0.01	Okajima (1982) (expérimentale)
100	<b>0.130</b>	0.139	0.144	0.135-0.140
200	<b>0.135</b>	0.148	0.152	0.140-0.148
250	<b>0.137</b>	0.148	0.151	0.140-0.148
300	<b>0.143</b>	0.147	0.149	0.139-0.140
400	<b>0.132</b>	0.144	0.138	0.130-0.135

Tableau 2.2 : Comparaison des nombres de Strouhal simulés avec d'autres de la littérature (section carrée)



-a-



-b-

Figure 2.11 : Le nombre de Strouhal ( $St$ ) et la moyenne du coefficient de la traînée ( $C_x$ ) en fonction du nombre de Reynolds, Comparés avec des résultats publiés expérimentaux (Okajima, 1982; Vickery, 1966) et numérique (Sohankar, 2006).

9.4.1.2. Prédiction numérique du Nombre de Strouhal pour différentes formes d'obstacle (bluff body)

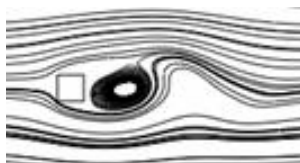
Les formes d'obstacles qu'on se propose d'analyser numériquement sont représentées sur la figure 2.12 et sont de forme rectangulaire, triangulaire et en forme de la lettre T [57].

L'évolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds est représentée sur la figure 2.13. Pour chaque forme d'obstacle (bluff body) le nombre de Strouhal évolue de manière différente. Pour des valeurs  $Re > 10^3$  le nombre de Strouhal est presque constant. Ceci adhère parfaitement avec les résultats présentés par Volker et al. [20] ainsi que Jan et al. [53]. Par conséquent, la fréquence des lâchés tourbillonnaires est proportionnelle à la vitesse d'écoulement.

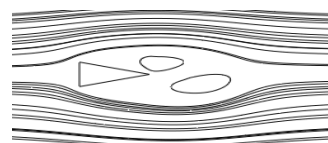
La connaissance du nombre de Strouhal de référence pour chaque type d'obstacle (bluff body) est impérative pour la conception des compteurs à effet vortex. Les valeurs simulées du nombre de Strouhal adhèrent parfaitement à celles publiées par Volker et al. [50] Ce dernier propose les valeurs de références suivantes :

- Section triangulaire (première disposition)  $S_t = 0,1$
- Section triangulaire (deuxième disposition)  $S_t = 0,24$
- Section de forme en T (première disposition)  $S_t = 0,2$
- Section de forme en T (deuxième disposition)  $S_t = 0,12$

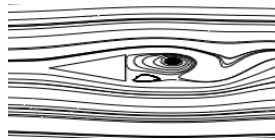
La constance du nombre de Strouhal à grands Reynolds est assurée pour la totalité des formes d'obstacles utilisées. Par contre aux bas régimes d'écoulement, le comportement est sensiblement différent d'une forme à une autre. La forme optimale souhaitée dans le contexte de débitmètre à effet vortex est celle qui perturbe le moins possible le nombre de Strouhal de sa valeur de référence. Pour cela et d'après la figure 2.13 on remarque que la forme carrée et la forme en T (première disposition) toutes les deux sont les plus adaptées.



-a- Section carrée



-b- Section triangulaire  
Première disposition



-c- Section triangulaire deuxième disposition



-d- Forme en T première disposition



-e- Forme en T Deuxième disposition

Figure 2.12 : Représentation des différentes formes d'obstacles étudiés - a- Section carrée -b- Section triangulaire première disposition -c- Section triangulaire deuxième disposition -d- Forme en T première disposition -e- Forme en T deuxième disposition.

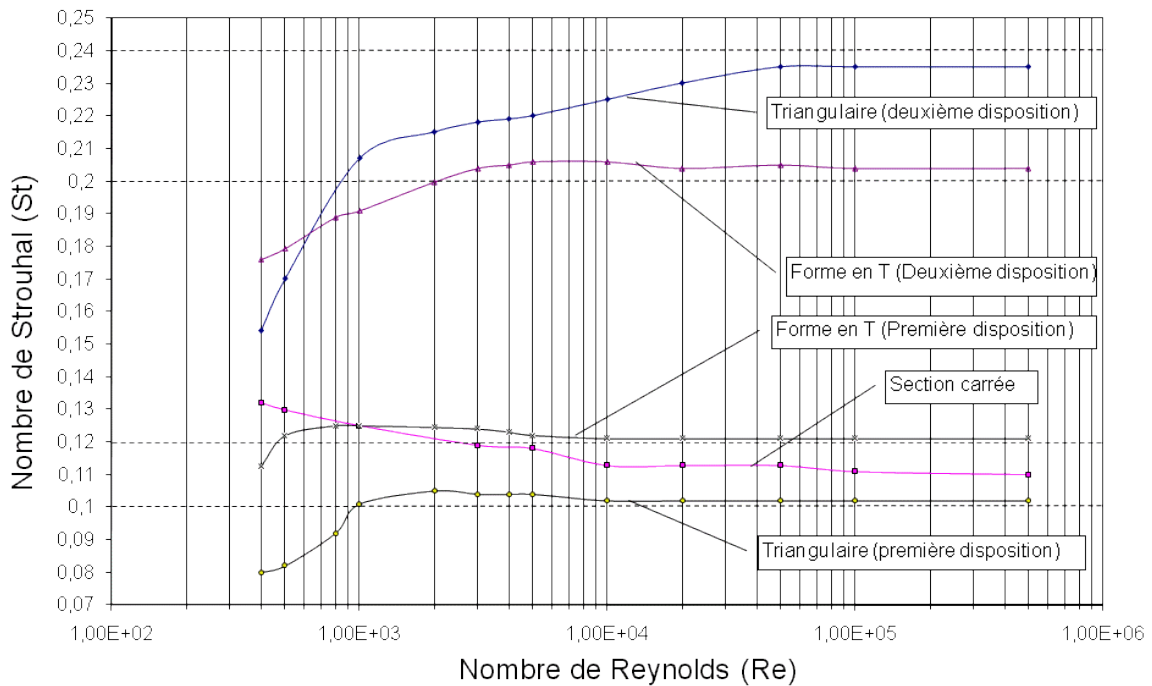


Figure 2.13 : Variation du nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds

Il est aussi souhaitable que le signal des lâchés tourbillonnaires obtenu soit le moins pollué possible. Il est connu que le processus soit plus ou moins aléatoire en fonction de la géométrie étudiée ainsi que du régime d'écoulement.

Afin de mieux comprendre le phénomène, on a tracé les sections de Poincaré représentées sur la 2.14. On peut déduire de cette représentation que pour une valeur du nombre de Reynolds de  $10^3$ , le signal de la portance est moins pollué dans le cas d'un obstacle de section carrée.

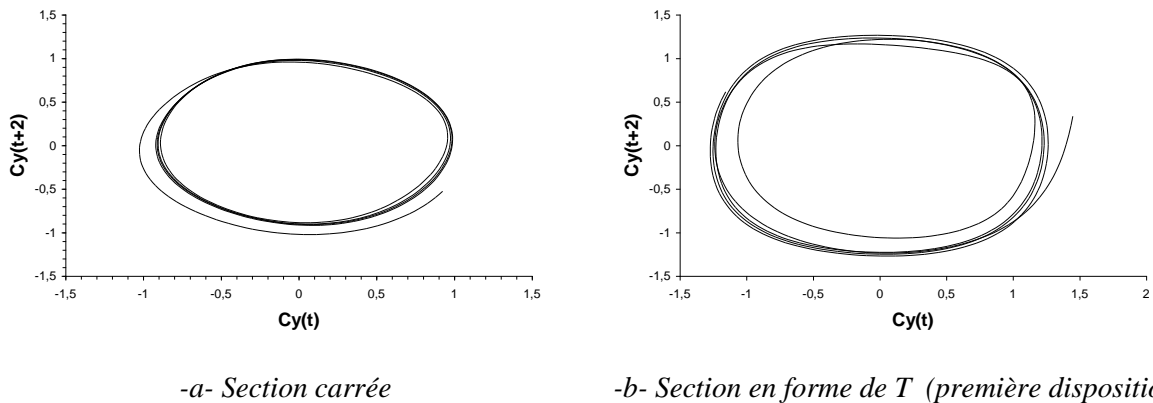


Figure 2.14 : Représentation des sections de Poincaré pour  $Re=10^3$ .

### 2.9.5. Simulation numérique des chargements dynamiques subis par les grandes bâtisses à sections rectangulaires

De nos jours, l'étude du comportement d'une structure subissant des efforts hydro ou aérodynamiques fait partie intégrante des tâches allouées à l'ingénieur. Dans la pratique, de tels problèmes sont rencontrés dans différentes branches de l'industrie ; à titre d'exemple: l'industrie automobile, aéronautique, maritime, Génie civil, etc.

En génie civil et dans la construction des grandes bâtisses, l'évaluation des charges de vent est exigée pour vérifier la résistance des composants de la construction et du revêtement. Depuis quelques années, les méthodes proposées par les chercheurs dans ce domaine ne cessent d'être mises à jour. Les institutions de normalisation mondiale sont ainsi obligées à chaque fois de revoir les normes qui sont en vigueur [58].

Les lâchés tourbillonnaires se traduisent par un signal périodique de la pression et de la vitesse. Le caractère transitoire des charges que subit la structure solide est donc à l'origine de son mouvement. En plus de l'aspect instationnaire des éclatements tourbillonnaires, s'ajoute

l'effet indéterministe induit par la turbulence. D'où la nécessité d'entreprendre une approche probabilistique.

Sous l'effet de vent, un bâtiment oscille suivant les deux directions parallèle et perpendiculaire à l'écoulement ainsi qu'en mode de torsion. Les réponses de torsion induites peuvent devenir la partie principale de toutes les réponses pour les points périphériques d'un tel bâtiment. D'après S. Liang et al [59], un vent soufflant cause des vibrations de torsion importantes dans les trois cas de figure suivants: les dimensions des faces sont importantes, la forme de la section du bâtiment est asymétrique et si la plus basse fréquence naturelle en torsion s'approche de la plus basse fréquence naturelle en translation.

L'effet de vent doit être pris en considération lors de la phase de conception des grandes bâtisses. Le mécanisme des charges dues au vent et agissantes sur un bâtiment est très complexe. De nombreux travaux ont traité ce problème. En premier lieu, il y a les investigations expérimentales à échelle réelle. Dans cette catégorie on peut citer le travail de Q.S. Li et al [60]. En adoptant une approche analytique Bo Liang et al [61] ont étudié l'effet de torsion d'un écoulement de vent dans le domaine temporel. Ils ont estimé que les vibrations transversales sont causées par les fluctuations dans la couche limite et la zone de sillage. Alors que celles de torsion, sont dues au déséquilibre dans la distribution instantanée de pression sur la surface du bâtiment. Junji et al [62] ont proposé une méthode d'analyse spectrale et une autre temporelle afin d'estimer la réponse d'un bâtiment. Un modèle aéro-élastique pour les vibrations des bâtiments en torsion a été proposé par Y.L. Xu et al [63]. En soufflerie Ning Lina et al [64] ont étudié l'influence de la variation de la section transversale d'un bâtiment sur le chargement aérodynamique. L'effet du rapport latéral, le rapport d'aspect ainsi que l'angle d'attaque ont été investis par Kawai [65].

Motiver par le degré de maturité qu'ont atteint les méthodes numériques en général et celles utilisées dans le domaine de la CFD (Computational Fluid Dynamics) en particulier. On a entrepris dans le présent travail [66], une approche purement numérique en se basant sur la méthode des éléments finis stabilisés. Après résolution numérique de l'écoulement bidimensionnel et instationnaire autour de l'obstacle de section transversale de forme rectangulaire, on intègre numériquement les différentes composantes du chargement aérodynamique. A partir de l'évolution temporelle discrète de ces dernières, et par l'utilisation de la transformée de Fourier rapide (Fast Fourier Transformation), on trace les spectres correspondants à chacune des composantes.



Dans le but de définir les proportions des dimensions optimales d'une section de forme rectangulaire d'un point de vue aérodynamique, on a simulé l'écoulement autour d'obstacles de sections rectangulaires avec différents coefficients latéraux. Une fois les proportions de dimensions optimales sont approchées, et afin de caractériser les charges aérodynamiques de cas réels donc le vent pouvant souffler de n'importe quelle direction. On a entrepris une autre étude paramétrique se basant sur la variation de l'angle d'incidence du courant de fluide par rapport à l'axe de symétrie de l'obstacle. On a prédit ainsi l'évolution du nombre de Strouhal et des composantes des charges aérodynamiques en fonction de l'angle d'attaque.

Afin de réduire les vibrations d'un bâtiment, il est très important d'éviter l'apparition de la résonance. Ce phénomène est caractérisé principalement par l'amplification catastrophique de la réponse du système mécanique. Connaissant le domaine d'évolution des fréquences dominantes du chargement aérodynamique, on pourra ainsi déterminer les plages des fréquences dangereuses.

### 2.9.5.1. Prédiction numérique de l'influence du coefficient latéral de l'obstacle

L'analyse de l'effet des écoulements de fluide sur des obstacles de sections rectangulaires avec différents rapports latéraux ( $B/D$  voir figure 2.15), nous a conduits à déterminer les proportions de dimensions d'une section de forme rectangulaire optimale.

La figure 2.16.a représente la variation du nombre de Strouhal en fonction du rapport latéral ( $B/D$ ). Une concordance satisfaisante est observée entre les résultats de la présente étude et ceux publiés par Okajima [54].

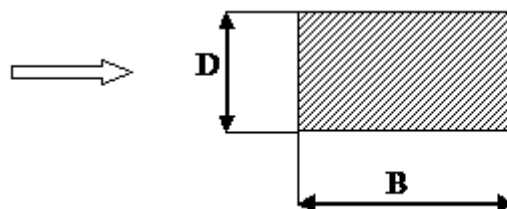


Figure 2.15 : Représentation d'une section carrée

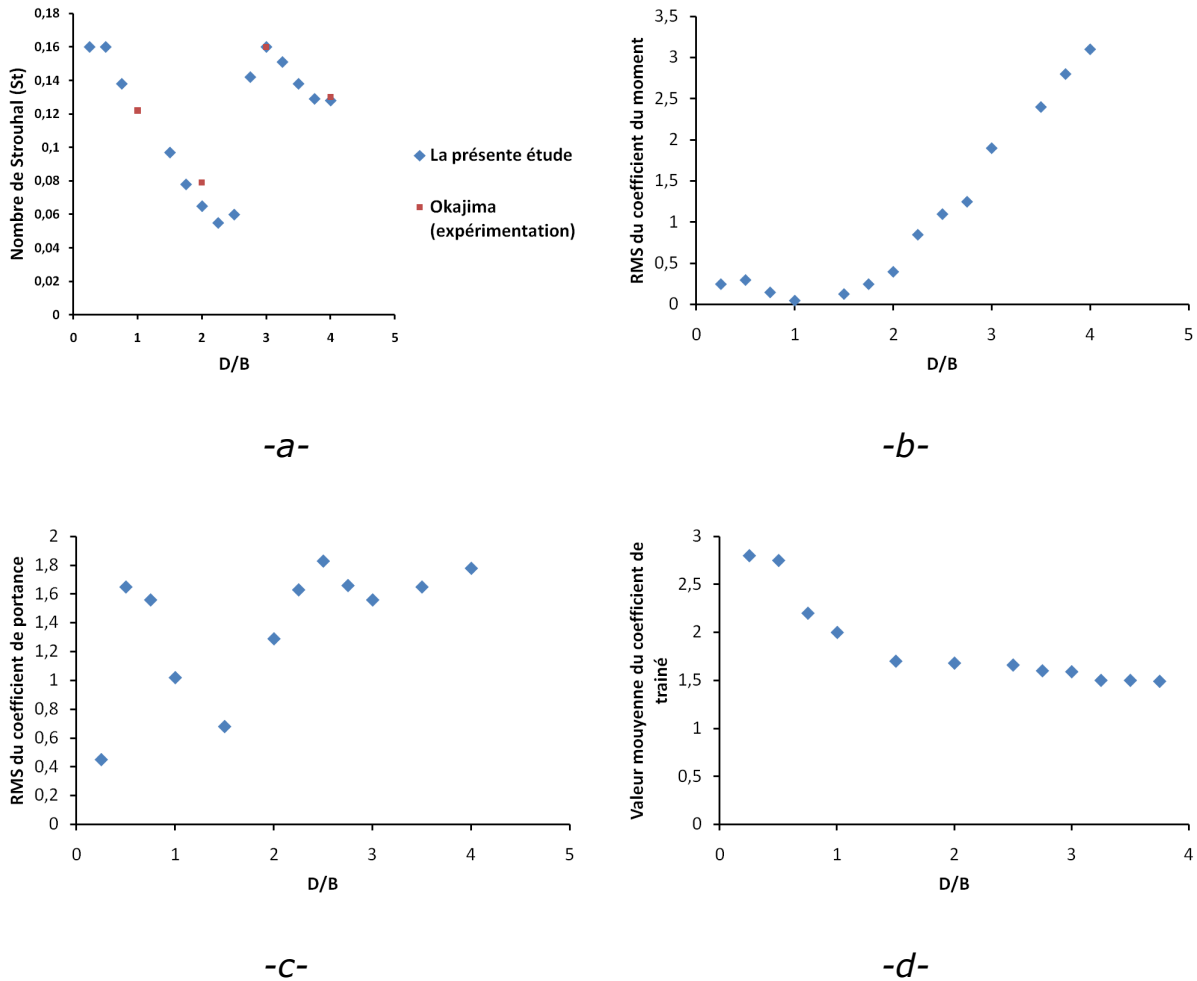


Figure 2.16 : Le nombre de Strouhal ( $St$ ), RMS du coefficient du moment ( $C_m$ ), RMS du coefficient de portance ( $C_y$ ) et la valeur moyenne du coefficient de traînée ( $C_x$ ) en fonction du coefficient latéral

Pour des valeurs du rapport latéral inférieur à 0.5, le nombre de Strouhal reste relativement constant. Dans l'intervalle  $0.5 < B/D < 2.2$ , on constate une évolution décroissante du nombre de Strouhal. La valeur maximale est de 0.16 alors que le minimum est de 0.05. A partir de cette dernière valeur, le nombre de Strouhal est fortement augmenté puis atteint un maximum à l'ordre de 0.16, ceci pour  $B/D=3$ . Ce changement brusque du nombre de Strouhal a été aussi nettement observé par Okijima [54] dans ses expérimentations. Pour des valeurs du rapport latéral variant de 3 à 4, on observe une évolution décroissante du nombre de Strouhal.

Les figures 2.16.b, c et d représentent l'évolution en fonction de différents rapports latéraux de certaines grandeurs statistiques caractérisant les trois composantes des charges dues à l'écoulement de fluide et que subit un obstacle de forme rectangulaire. Les figures 2.16.b et c représentent respectivement l'évolution du RMS du coefficient de portance ( $C_y$ ) et le RMS du

coefficient du moment ( $C_m$ ). Cependant, la figure 2.16.d retrace l'évolution de la valeur moyenne du coefficient de traînée ( $C_x$ ).

D'après la figure 2.16.d, on remarque qu'à partir d'un rapport latéral  $B/D=0.5$  l'évolution de la valeur moyenne du coefficient de traînée décroît jusqu'à atteindre une valeur asymptotique lorsque  $1.5 < B/D < 4$ . Cette évolution décroissante est due principalement comme le montre la figure 2.17 à l'apparition des zones de recirculations sur les deux génératrices supérieures et inférieures de l'obstacle. Ces tourbillons contrarotatifs ont une contribution négative dans la valeur de la traînée.

D'après les figures 2.16.b, c et d, on peut déduire que les charges que subit l'obstacle sont minimales quand le rapport latéral ( $B/D$ ) se rapproche de 1.5. Sachant que dans le cas d'une application réelle dans le domaine du bâtiment, un vent pouvant souffler aussi suivant la direction transversale. Par rapport à cette nouvelle direction le rapport latéral de l'obstacle est de  $1/1.5=0.66$ . Par conséquent, on remarque que dans ces conditions, les charges induites par l'écoulement sont nettement plus importantes.

En considérant les deux directions axiale et transversale, nous pourrions déduire que la section qui subit les charges les moins importantes est celle qui a un rapport latéral égal à 1. En d'autres termes, la section carrée est la forme de section optimale.

### 2.9.5.2. Prédiction numérique de l'effet de l'angle d'attaque

En variant l'angle d'attaque du courant d'air (voir figure 2.18), le champ des chargements aérodynamiques que subit un obstacle de section carrée varie à son tour.

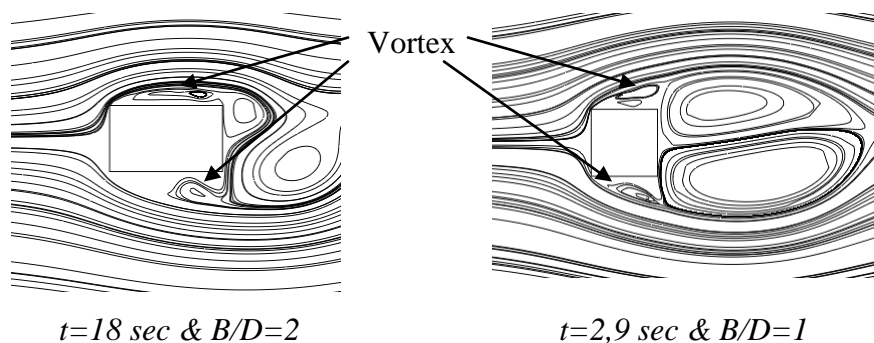


Figure 2.17 : Les lignes de courant simulées d'un écoulement autour d'un rectangle (seulement la partie central du domaine fluide est représentée)

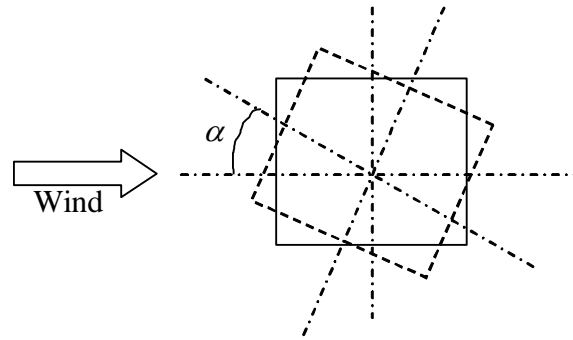
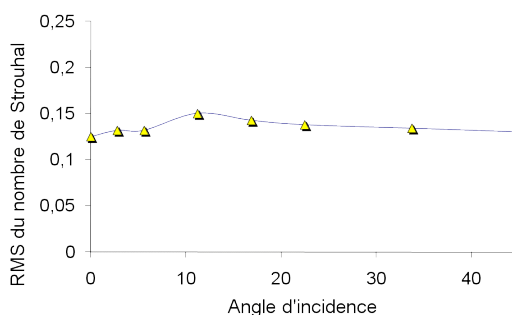


Figure 2.18: Section carrée orientée suivant différents angles d'attaque

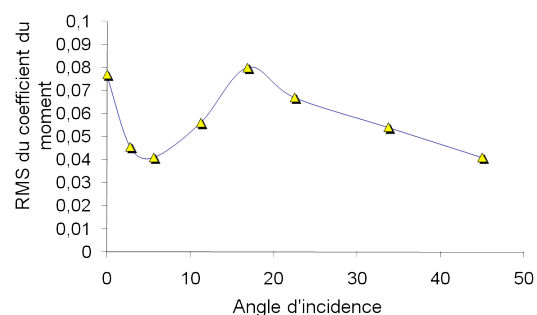
La figure 2.19.a représente la variation du nombre de Strouhal en fonction de l'angle d'attaque. On constate que quand ce dernier varie entre  $0^\circ$  et  $45^\circ$ , le nombre de Strouhal change légèrement de valeur dans l'intervalle  $0.125 < S_t < 0.15$ .

Les figures 2.19.b, c d représentent respectivement la variation en fonction de l'angle d'attaque du RMS du coefficient de portance, le RMS du coefficient de moment et la valeur moyenne du coefficient de traînée. Les valeurs maximales du RMS du coefficient de portance sont observées pour les angles  $0^\circ$  et  $33.5^\circ$ . Pour celles du RMS du coefficient du moment elles coïncident avec les angles  $0^\circ$  et  $17^\circ$ . Cependant la valeur maximale des valeurs moyennes du coefficient de traînée coïncide avec un angle d'attaque de  $45^\circ$ .

Pour différent angle d'attaque et par l'utilisation des transformés de Fourier rapide, on a tracé les spectres de puissance des trois composantes du chargement aérodynamique (portance, traînée et le moment). A partir de cette analyse fréquentielle, on a la possibilité de déterminer les fréquences dominantes dites aussi de base des trois composantes :



-a-



-b-

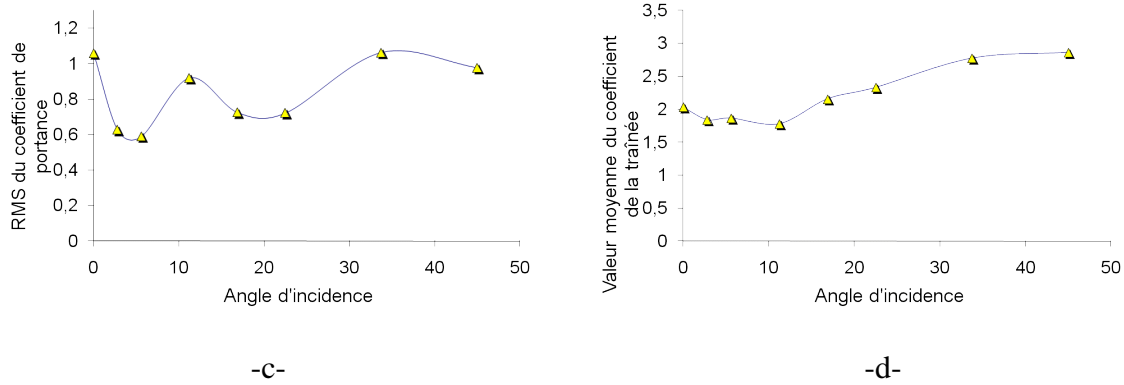
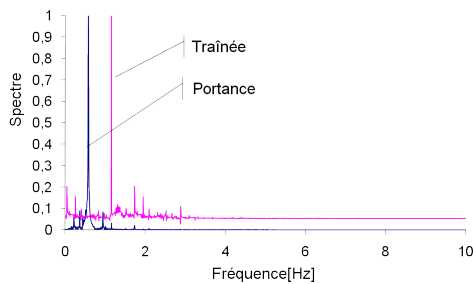


Figure 2.19: Nombre de Strouhal ( $S_t$ ), RMS du coefficient du moment, RMS du coefficient de portance et la valeur moyenne du coefficient de traînée en fonction de l'angle d'attaque.

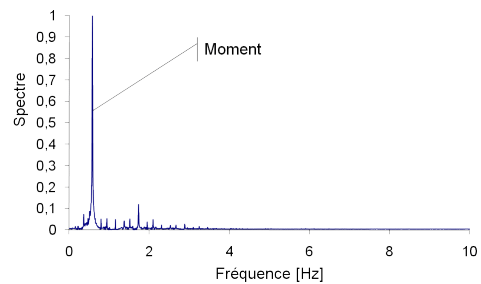
De la figure 2.20, on peut déduire:

- Angle d'attaque  $0^\circ$  (voir figure 2.20.a & b):
  - La fréquence de base de la portance coïncide avec celle du moment.
  - La fréquence dominante de la traînée représente environ le double de la fréquence fondamentale de la portance.
- Angle d'attaque  $5.625^\circ$  (voir figure 2.20.c & d) :
  - Les fréquences de base des trois composantes sont identiques.
  - Un deuxième pic paraît sur le spectre de la traînée qui correspond à la deuxième fréquence fondamentale.
- Angle d'attaque  $11.25^\circ$  (voir figure 2.20 e & f):
  - Sur le spectre de la portance, on observe une seule fréquence dominante.
  - Les signaux de la traînée et du moment comprennent deux fréquences fondamentales superposées.
  - La fréquence de base de la portance coïncide avec la première fréquence fondamentale de la traînée et du moment.
- Angle d'attaque  $22.5^\circ$  (voir figure 2.20.g & h):
  - Une seule fréquence fondamentale pour la portance.
  - La traînée et le moment ont deux fréquences fondamentales superposées.

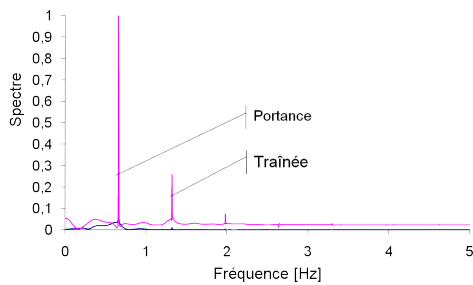
- Pour le moment la contribution du deuxième mode, donc la deuxième fréquence fondamentale est de plus en plus importante comme la montre la figure 2.20.h.
- Angle d'attaque  $45^\circ$  (voir figure 2.20. i & j):
  - Les signaux de la portance et du moment ont la même fréquence de base.
  - La fréquence de base de la traînée représente le double de la fréquence fondamentale de la portance et du moment.



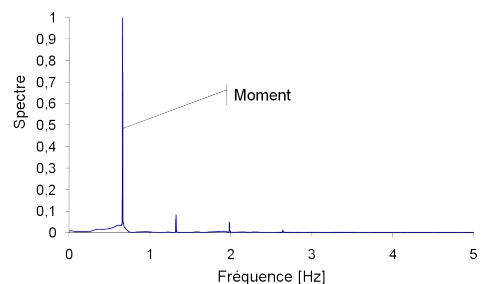
-a-



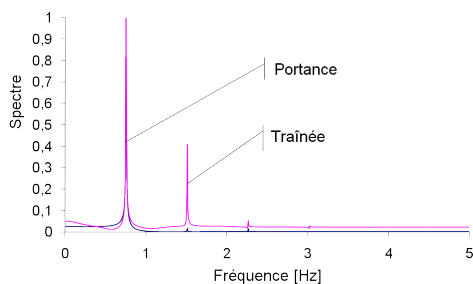
-b-



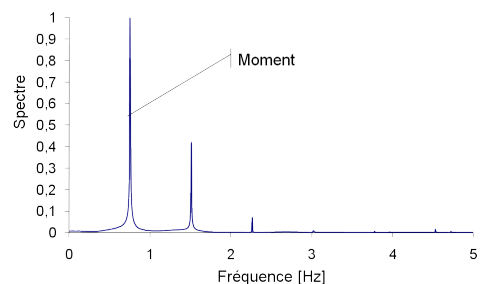
-c-



-d-



-e-



-f-

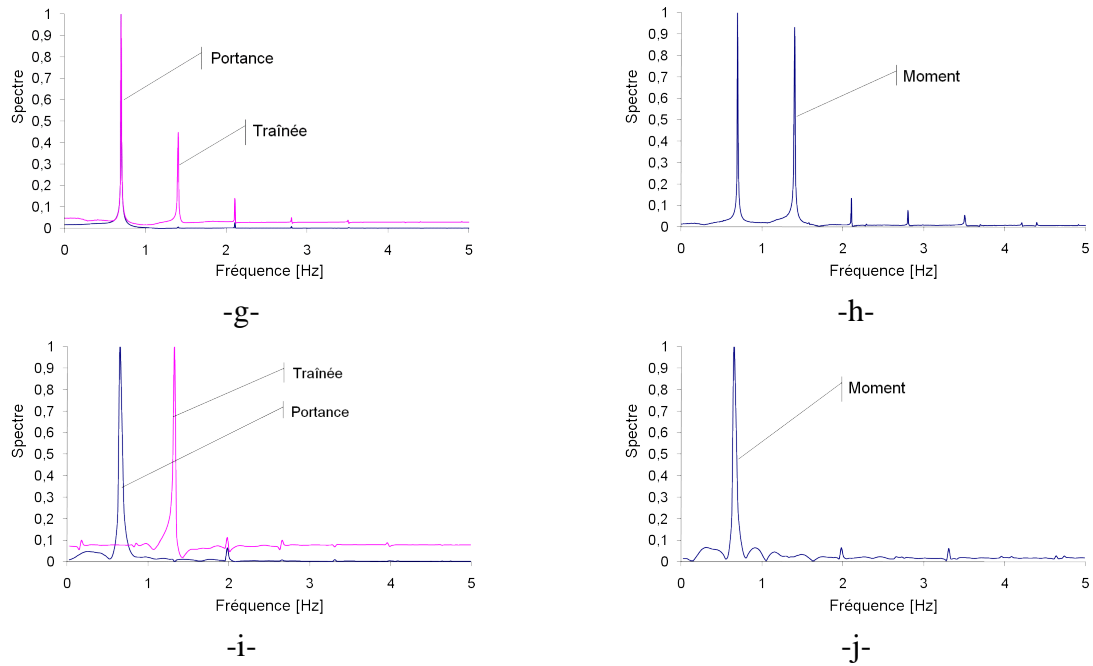


Figure 2.20 : Représentation des spectres correspondants au moment, portance et traînée pour des angles d'attaque différents

### 2.9.5.3. Utilité pratique des résultats obtenus

A la recherche de plus en plus de sécurité et de confort dans nos constructions, à la phase de conception, l'ingénieur doit impérativement prévoir par avance le comportement aérodynamique des bâtisses.

Par la présente approche numérique, on a pu vérifier que dans l'ensemble des sections de formes rectangulaires, la forme de la section qui subit le plus faible chargement dû à un écoulement de fluide est carrée.

En raison de la nature périodique du chargement aérodynamique, on doit aussi prévoir l'apparition du phénomène de résonance. En d'autres termes, on doit éviter que les fréquences de vibrations naturelles de la construction ne coïncident ou ne s'approchent des fréquences fondamentales du chargement dû à l'écoulement de fluide.

En variant l'angle d'attaque et d'après l'analyse fréquentielle entreprise, on a constaté que pour le régime d'écoulement considéré, la fréquence de la portance  $f_{st}$  varie dans l'intervalle  $[f_{st}^1, f_{st}^2]$ , où  $f_{st}^1 = \left(\frac{0.125}{D}\right)U_{inf}$  et  $f_{st}^2 = \left(\frac{0.15}{D}\right)U_{inf}$ , alors que les fréquences fondamentales de la traînée et du moment prennent pour certaines valeurs d'angles la même valeur  $f_{st}$  et pour d'autres le double ( $2f_{st}$ ).

Ce qui implique qu'en variant l'angle d'attaque, les fréquences fondamentales de la trainée et du moment varient dans l'intervalle  $[f_{st}^1, 2f_{st}^2]$ .

### 2.10. Conclusion du chapitre

Après une présentation de la méthode des éléments finis et principalement celles dites stabilisées utilisées dans le domaine de la simulation des écoulements des fluides. On a expertisé la technique GLS (Galerkin/Least Squares) couplée à la méthode LES (Large-Eddy Simulation) pour la prédiction des écoulements dans différentes configurations. Dans ce chapitre, les applications concernées par la présente étude sont :

- Simulation numérique du phénomène d'éclatement tourbillonnaire dans la zone de sillage d'un obstacle de section circulaire.
- Etude numérique des compteurs à effet vortex.
- Simulation numérique des chargements dynamiques subis par les grandes bâtisses à sections rectangulaires.

Les résultats de nos calculs numériques, ont été jugés satisfaisants en comparaison avec d'autres trouvés dans la littérature. Lors de nos investigations, des résultats d'aspect fondamental ainsi que d'autres ayant un caractère plus pratique et d'application ont été discutés.



**Chapitre 3:      **Traitement numérique  
des écoulements de  
fluides en domaines  
déformables****

# 3. Traitement numérique des écoulements de fluides en domaines déformables

## 3.1. Introduction

On va se concentrer dans ce chapitre sur le problème de la simulation des écoulements de fluides en milieu déformable. Ce sujet est d'actualité et présente un intérêt particulier pour les chercheurs travaillant sur des problèmes d'interactions fluides structures. Comme on l'a déjà exposé au chapitre 1, lorsqu'on voudrait aborder les problèmes des écoulements à frontières mobiles, l'une des formulations bien adaptées à ce genre de configuration est la description Arbitrairement Lagrangienne Eulérienne ALE des équations de Navier-Stokes. La mise en œuvre de cette formulation impose l'introduction d'un maillage mobile traquant aux frontières le domaine matériel. Pour cela une procédure de remaillage ou bien de déplacement de la grille est à prévoir. Les tests numériques effectués au chapitre 2 ont permis d'apprécier les bonnes qualités en matière de stabilité et de précision de la méthode GLS (Galerkin Least-Square). Une difficulté particulière aux traitements des problèmes à maillage mobile consiste au choix d'un schéma d'intégration dans le temps vérifiant la loi de conservation géométrique. Dans ce chapitre, on a fait le choix d'aborder les problèmes de ballotements dans les réservoirs partiellement remplis de liquides. En plus du domaine de calcul mobile et évoluant dans le temps, s'ajoute un autre aspect spécifique à l'étude des réservoirs qui est le traitement de la surface libre. Pour cela des techniques propres à ce sujet seront abordées au fur et à mesure. Dans nos expérimentations numériques, on a aussi abordé un sujet d'intérêt fondamental et pratique qui est la réduction des ballotements dans les réservoirs. Afin de réduire le mouvement de ballotement principalement à la résonance, nous avons investi trois techniques d'amortissement passif -l'utilisation des séparateurs horizontaux, d'un séparateur vertical ou bien l'introduction d'un séparateur vertical juste à surface libre-.

L'efficacité et l'effet amortissant signifiant de l'utilisation d'un obstacle, juste à la surface libre, sur les amplitudes de la réponse vibratoire des réservoirs d'un côté, et la réduction des

charges hydrodynamiques (couples de basculement) de l'autre sont nettement mis en évidence.

### 3.2. Discrétisation des équations de Navier-Stokes en formulation ALE

L'expression des équations de Navier-Stokes en configuration ALE est comme suit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\hat{x}} + C \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot U \quad 3.1.a$$

$$\rho \left( \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{\hat{x}} + (C \cdot \nabla) U \right) = \nabla \cdot \sigma + \rho b \quad 3.1.b$$

$$C = U - U_m \quad 3.1.c$$

La vitesse convective  $C$  est la différence entre la vitesse des particules fluides  $U$  et la vitesse du maillage  $U_m$ .

En considérant que le fluide est incompressible, en utilisant la loi de comportement d'un fluide Newtonien et la formulation GLS, la formulation faible des équations de Navier-Stokes en configuration ALE s'écrit comme suit:

Pour les conditions aux limites et aux frontières données trouver  $U(x, t) \in \Phi_u^h x]0, T[$  et  $p(x, t) \in \Phi_p x]0, T[$ , tel que, pour tout  $(w, q) \in \Phi^h x \Phi_p$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_f} w \cdot (U_t + (C \cdot \nabla) U) d\Omega_f + \int_{\Omega_f} \nabla w : \nu \nabla U d\Omega_f - \int_{\Omega_f} \nabla w \cdot p d\Omega_f \\ + \sum_e \int_{\Omega_e} ((C \cdot \nabla) w - \nu \nabla^2 w + \nabla q) \cdot \tau \cdot (U_t + (C \cdot \nabla) U - \nu \nabla^2 U \\ + \nabla p) d\Omega_e = \int_{\Omega_f} w \cdot f d\Omega_f + \int_{\Gamma_N} w \cdot t d\Gamma_N + \\ + \sum_e \int_{\Omega_e} ((C \cdot \nabla) w - \nu \nabla^2 w + \nabla q) \tau \cdot f d\Omega_e \end{aligned} \quad 3.2.a$$

$$\int_{\Omega_f} q \cdot \nabla U d\Omega_f = 0 \quad 3.2.b$$

### 3.3. Les schémas numériques et la loi de conservation géométrique discrète DGCL

Comme on peut le constater sur les équations 3.1 et la forme faible 3.2, le mouvement du maillage mobile est couplé aux équations de Navier-Stokes en formulation ALE par le biais du terme du transport convectif. La vitesse du transport convectif dans une formulation Eulérienne  $U$  est remplacée par  $C = U - U_m$ .

La discrétisation en espace temporel impose le calcul des vitesses des nœuds du maillage à chaque pas de temps. En présence d'un maillage mobile, il est nécessaire de vérifier que l'algorithme de calcul et les schémas d'intégrations numériques utilisés, ne sont pas à l'origine de perturbations pouvant affecter l'écoulement [25]. Pour que la méthode numérique utilisée au traitement des problèmes à maillage déformable soit d'un point de vue mathématique consistante, elle doit prédire d'une manière exacte un écoulement uniforme. Ce qui veut dire qu'en absence de toutes autres conditions aux limites, un champ de vitesse constant est solution des équations de Navier-Stokes. Dans [67 et 68], il est démontré que cette condition est satisfaite seulement quand la méthode numérique choisie, pour résoudre le problème d'écoulement de fluide et la procédure de calcul utilisée pour la mise à jour du maillage dynamique satisfont la loi de conservation géométrique discrète DGCL.

En pratique, par fois on peut violer la loi de conservation géométrique GCL si un assez petit pas de temps est utilisé. Farhat et Lesoinne [25] n'adhèrent pas à cet avis pour les deux raisons suivantes:

- Réduire le pas de temps, peut augmenter considérablement le coût déjà élevé de la simulation d'un écoulement instationnaire.
- Pour un problème donné, l'estimation a priori du pas de temps maximal, pour lequel un schéma numérique peut violer la GCL et continue de produire une solution acceptable, n'est pas une tâche facile.

Il est évident que pour le traitement des problèmes à maillage déformable, l'une des plus grandes difficultés réside dans le choix d'un schéma d'intégration en temps et en espace qui vérifie la condition GCL.

Afin de comparer trois schémas d'intégration en temps utilisés pour le calcul des vitesses de déformation du maillage, Zibouche [41] a entrepris des tests numériques. Ces expérimentations numériques ont conclu que le schéma du point milieu (Euler-modifier) ne

perturbe pas un écoulement régulier. Donc ce schéma d'un point de vue satisfaction de la loi de conservation géométrique est bien adapté.

Le schéma du point milieu propose de calculer la vitesse des nœuds du maillage comme suit :

$$\bullet \quad U_m^{n+1/2} = \frac{x_m^{n+1} - x_m^n}{\Delta t} \quad 3.3.a$$

$$\bullet \quad U_m^{n+1} = 2 U_m^{n+1/2} - U_m^n \quad 3.3.b$$

### 3.4. Techniques de remaillage du domaine de calcul

Les maillages dynamiques sont couramment utilisés pour résoudre les problèmes d'écoulements de fluides en domaines à frontière mobiles. La mise à jour dans le temps du maillage est un problème qu'on rencontre souvent en interaction fluide structure surtout quand le solide subit de grands déplacements. La philosophie de la formulation ALE pour résoudre les problèmes d'écoulement, est de déplacer la grille de calcul, en utilisant l'écoulement comme guide afin d'améliorer l'efficacité et la précision des simulations [69]. Différentes stratégies de déplacement de maillage ont été proposées ces dernières années, la plupart ayant attiré aux interactions fluides structures. Une méthode très populaire pour créer un maillage dynamique, consiste à considérer la grille de maillage du domaine fluide comme une pseudo-structure pouvant être discrète ou continue avec des propriétés fictives (masse, amortissement et rigidité). Le comportement d'une telle pseudo-structure est gouverné par les équations semi-discrètes de l'équilibre dynamique :

$$M \ddot{X} + D \dot{X} + K X = 0 \quad 3.4$$

$M, D$  et  $K$  sont respectivement les matrices fictives de masse, d'amortissement et de rigidité et  $X$  c'est le vecteur de déplacements.

En considérant  $M = 0$  et  $D = 0$ , les équations régissant le mouvement du maillage deviennent :

$$K X = 0 \quad 3.5$$

La pseudo-structure peut être considérée comme un réseau de ressorts linéaires fictifs. Cette solution devient très peu fiable quand le maillage subit de grands déplacements et/ou déformations. Pour cela Frahat et al. [70] ont proposé le contrôle du mouvement arbitraire du maillage par l'addition de ressorts de torsion. De tels ressorts peuvent être conçus de façon à interdire l'interpénétration des triangles voisins.

Le maillage peut être aussi considéré comme un pseudo-corps élastique subissant des déplacements imposés sur ses frontières en mouvement. Les propriétés élastiques de chaque élément sont choisies de façon à assurer une distorsion minimale de chaque élément durant le mouvement du maillage [71].

### 3.4.1. Formulation pseudo-élastique

Plusieurs alternatives sont possibles pour prévoir les propriétés élastiques fictives. On peut citer:

#### 3.4.1.1. Coefficient de Poisson

Dans le cas d'un corps typiquement élastique, le coefficient de Poisson est positif. Pour ces matériaux, la compression dans une direction produit une elongation dans les deux autres directions perpendiculaires et vice versa. Cependant, ce genre de comportement a un effet négatif sur la géométrie de l'élément. Dans ce cas, l'elongation dans une direction et le raccourcissement dans les deux autres conduit à la dégradation de la qualité de l'élément. Ce qui est proposé pour le système pseudo-élastique n'a pas de signification physique. Par conséquent, les propriétés peuvent être choisies uniquement pour conserver la géométrie de l'élément. C'est pour cette raison qu'il est proposé d'utiliser un coefficient de Poisson négatif. Il est à noter que cette approche a un certain désavantage dans la préservation du volume de l'élément. Il est apparent qu'un coefficient de Poisson négatif cause une importante contraction des éléments sous compression et un allongement excessif sous tension.

#### 3.4.1.2. Rigidité de l'élément pseudo-élastique

Il est possible de distribuer la déformation de la grille de maillage de manière plus uniforme en attribuant des propriétés plus rigides aux éléments à proximité des frontières mobiles. La différence entre les méthodes existantes réside uniquement dans la technique de distribution de la rigidité qui se rapporte généralement à la géométrie des éléments pour les méthodes à une seule étape et leurs déformations dans le cas des techniques à deux étapes.

##### a. Technique à une étape

La matrice de rigidité des éléments du système pseudo-élastique peut être exprimée sous la forme suivante:

$$K_e = \int_{\Omega} B^T D B |J^e| \tau^e d\Omega \quad 3.6$$

Où  $B$  est la matrice des dérivées des fonctions de forme,  $D$  la matrice constitutive  $|J^e|$  le Jacobien de l'élément et  $\tau^e$  le facteur de rigidité élémentaire pour un maillage mobile.

Comme méthode typique dans la catégorie des méthodes à une seule étape, Mesaud [72] a introduit un schéma basé sur la taille des éléments, qui consiste à calculer  $\tau^e$  de la façon suivante :

$$\tau^e = 1 + \frac{|J|_{max} - |J|_{min}}{|J^e|} \quad 3.7$$

Où  $|J|_{max}$  et  $|J|_{min}$  sont les Jacobien maximum et minimum parmi tous les éléments du domaine de calcul. La méthode essentiellement augmente la rigidité des petits éléments afin d'éviter leur déformation excessive lors des grands déplacements.

### b. Technique en deux étapes

Dans cette catégorie de technique, le déplacement du maillage est effectué en deux phases. Dans la première le pseudo-système est assimilé à un modèle de structure caractérisée par un matériau homogène et isotrope avec un certain module de Young. Le problème fictif ainsi défini sera résolu en imposant des déplacements au nœud du maillage correspondant au mouvement des frontières mobiles. Le champ des déformations calculé dans la première étape est utilisé en deuxième afin d'évaluer un nouveau module de Young différent pour chaque élément du maillage. Le nouveau système sera résolu une deuxième fois. Les résultats obtenus du traitement de la deuxième pseudo-structure, conduisent en principe à des déplacements corrects des nœuds du maillage et assurent des distorsions minimales et quasi-uniformes des éléments. Dans cette catégorie de méthodes Chiandussi et al. [71] ont proposé plusieurs schémas basés sur différentes mesures de la déformation des éléments. Il a été démontré que ces schémas ont pratiquement les mêmes performances [73].

#### *b.1. Sélection des propriétés de la pseudo-structure basée sur le champ des déformations*

Si on considère une barre unidimensionnelle. Dans le domaine élastique, les contraintes sont liées aux déformations par la loi de Hooke.

$$\sigma = \bar{E} \varepsilon \quad 3.8$$

Si un champ de déformation constant est demandé le long de la barre avec une certaine distribution des contraintes  $\sigma$ . Il est nécessaire de permettre au module de Young de changer de manière continue sur la longueur de la barre. La relation entre la contrainte et le champ constant des déformations  $\bar{\varepsilon}$  est :

$$\sigma = E \bar{\varepsilon} \quad 3.9$$

En supposant le même champ de contrainte pour les deux cas, il est possible d'utiliser les deux expressions 3.8 et 3.9 pour calculer les valeurs du module de Young attribuées à chaque point le long de la barre.

$$E = \frac{\bar{E}}{\bar{\varepsilon}} \varepsilon \quad 3.10$$

L'équation 3.10 permet l'obtention d'une solution avec le même champ de contrainte original, mais avec un champ de déformation constant. Les modules de Young sont proportionnels aux déformations et le coefficient de proportionnalité est défini comme étant le rapport du module de Young  $\bar{E}$  utilisé dans la première analyse et le champ de déformation constant donné  $\bar{\varepsilon}$ . Le module de Young initial  $\bar{E}$  peut-être choisi égal à l'unité. Dans ce cas le coefficient de proportionnalité est simplement l'inverse du champ des déformations constant demandé.

En éléments finis, l'expression 3.10 permet l'obtention de nouvelles valeurs du module de Young pour chaque élément. En utilisant ces nouvelles valeurs, une deuxième analyse par éléments finis fournirait un champ de déformation constant. Le même concept peut être développé en deux et trois dimensions.

Pour un matériau homogène et isotrope avec un module de Young  $\bar{E}$ , les contraintes principales peuvent être calculées en termes de déformations principales comme suit:

$$\sigma_i = \frac{\bar{E}(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \varepsilon_i + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_j + \varepsilon_k) \right] \quad 3.11$$

Où  $i, j, k = 1 - 3$  et  $i \neq j \neq k$

Si le champ de déformation est constant :

$$\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_2 = \bar{\varepsilon}_3 = \bar{\varepsilon} \quad 3.12$$

Le matériau est orthotrope et les contraintes sont données par:

$$\sigma_i = \frac{E_i}{(1-2\nu)} \bar{\varepsilon} \quad i = 1 - 3 \quad 3.13$$

Si le même champ de contrainte est demandé dans les deux cas, on aura :

$$E_i = \frac{\bar{E}(1-\nu)}{\bar{\varepsilon}(1+\nu)} \left[ \varepsilon_i + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_j + \varepsilon_k) \right] \quad 3.14$$

Où  $i, j, k = 1 - 3$  et  $i \neq j \neq k$

Si le coefficient de poisson est considéré comme nul, l'expression 3.14 peut se simplifier comme suit :

$$E_i = \frac{\bar{E}}{\bar{\varepsilon}} \varepsilon_i \quad i = 1 - 3 \quad 3.15$$



Le module de Young dans chaque direction dépend seulement sur la déformation principale correspondante. Une autre méthode d'approximation qui est aussi possible consiste à attribuer à chaque élément la valeur moyenne de l'expression 3.14 comme module de Young.

$$E = \frac{\bar{E}}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_3}{3}} \quad 3.16$$

Il est aussi possible d'utiliser l'expression suivante basée sur la valeur moyenne quadratique des contraintes:

$$E = \frac{\bar{E}}{\bar{\varepsilon}^2} \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}{3} \quad 3.17$$

*b.2. Sélection des propriétés de la pseudo-structure basée sur la densité de l'énergie de déformation*

La densité de l'énergie de déformation de chaque élément après la première analyse en fonction des contraintes et des déformations principales peut-être calculée par:

$$Energ = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) \quad 3.18$$

En substituant l'équation 3.14 dans 3.18, il est possible d'exprimer l'énergie de déformation de  $\bar{E}$  et le champ des déformations principales. Pour obtenir une nouvelle solution avec une densité de déformation constante, nouveau module de Young attribué à chaque élément pour la deuxième étape de l'analyse peut être calculé par :

$$E = \frac{\bar{E} (1-\nu)}{2(1-2\nu)(1+\nu)} \left[ (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) + \frac{2\nu}{1-\nu} (\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1) \right] \quad 3.19$$

*b.3. Sélection des propriétés de la pseudo-structure basée sur la densité de l'énergie de distorsion*

La densité de l'énergie de distorsion de chaque élément après la première phase analyse peut être calculée par :

$$Energ_d = \frac{\bar{E}}{12(1+\nu)} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2] \quad 3.20$$

Dans cette stratégie, le nouveau module de Young de chaque élément du maillage utilisé pour la deuxième étape de l'analyse est proportionnel à l'énergie de distorsion.

$$E = \frac{\bar{E}}{12(1+\nu)} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2] \quad 3.21$$

*3.4.2. Techniques de calcul au niveau élémentaire par la méthode des éléments finis*

Pour effectuer le calcul d'une structure quelconque par la méthode des éléments finis, on doit évaluer des formes intégrales simples, doubles et triples suivant les dimensions du problème

abordé. Comme exemple illustratif, on va considérer le problème d'évaluation numérique de l'intégrale suivant :

$$K_e = \int_{\Omega_e} B^T D B d\Omega \quad 3.22$$

Qui n'est que la matrice de rigidité élémentaire d'une structure linéairement élastique.

### 3.4.2.1 Principe des coordonnées intrinsèques

Les coordonnées intrinsèques (ou coordonnées naturelles) permettent de définir une transformation du domaine physique réel en un domaine géométrique simple sans dimensions dans lequel on peut construire plus aisément les fonctions d'interpolation [74].

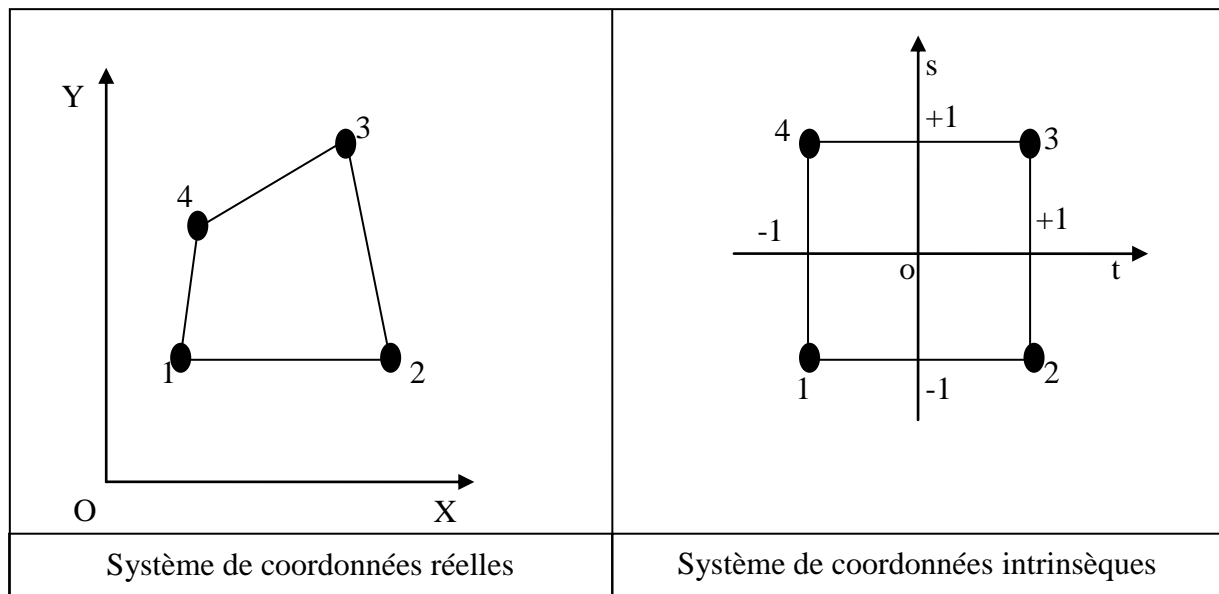


Figure 3.1. Principe des coordonnées intrinsèques

La relation entre le système de coordonnées intrinsèques et physiques s'écrit :

$$\begin{cases} X = \sum_{i=1}^4 N_i(t, s) X_i \\ Y = \sum_{i=1}^4 N_i(t, s) Y_i \end{cases} \quad 3.23$$

$N_i(t, s)$  : Sont les fonctions d'interpolation géométrique.

$$\begin{cases} N_1(t, s) = \frac{1}{4} (1 - t)(1 - s) \\ N_2(t, s) = \frac{1}{4} (1 + t)(1 - s) \\ N_3(t, s) = \frac{1}{4} (1 + t)(1 + s) \\ N_4(t, s) = \frac{1}{4} (1 - t)(1 + s) \end{cases} \quad 3.24$$

3.4.2.2. Les éléments isoparamétriques

Un élément fini est dit isoparamétrique quand il est basé sur des interpolations identiques pour sa géométrie et son champ de déplacement.

De la relation d'un élément isoparamétrique, on peut écrire que :

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{Bmatrix} \quad 3.25$$

$$\begin{Bmatrix} u_X \\ u_Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{X1} \\ u_{X2} \\ u_{X3} \\ u_{X4} \\ u_{Y1} \\ u_{Y2} \\ u_{Y3} \\ u_{Y4} \end{Bmatrix} \quad 3.26$$

Nous avons la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial t} & \frac{\partial Y}{\partial t} \\ \frac{\partial X}{\partial s} & \frac{\partial Y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \end{Bmatrix} \quad 3.27$$

$$J(\text{Jacobien}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial t} & \frac{\partial Y}{\partial t} \\ \frac{\partial X}{\partial s} & \frac{\partial Y}{\partial s} \end{bmatrix} \quad 3.28$$

En utilisant la relation d'interpolation géométrique, on trouve :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial t} & \frac{\partial N_2}{\partial t} & \frac{\partial N_3}{\partial t} & \frac{\partial N_4}{\partial t} \\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \frac{\partial N_3}{\partial s} & \frac{\partial N_4}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \\ X_3 & Y_3 \\ X_4 & Y_4 \end{bmatrix} \quad 3.29$$

Si la transformation géométrique est unique, le Jacobien est singulier et on peut écrire :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} \quad 3.30$$

Pour la détermination de la matrice de rigidité élémentaire, on utilise la relation [75]:

$$K_e = \int_{\Omega_e} B^T D B \, d\Omega = \int_{\Omega_e} B^T D B \, \det(J) \, ds \, dt \quad 3.31$$

Dans une procédure de calcul par éléments finis, il est plus pratique d'utiliser une méthode d'intégration numérique afin de déterminer les éléments de la matrice de rigidité élémentaire.

### 3.4.2.2. Méthode d'intégration numérique (formule de quadrature de Gauss)

L'intégration exacte des coefficients des matrices de rigidité élémentaires pouvait se révéler compliquée, une méthode numérique (intégration numérique) dans ce cas est indispensable. En éléments finis on utilise souvent la formule de quadrature de Gauss [76]. Le principe de base de cette méthode d'intégration numérique se résume comme suit :

- On approche la fonction à intégrer par un polynôme d'un certain ordre « n » qui caractérise l'ordre de précision de l'intégration numérique.
- Dans cette méthode d'intégration, au lieu de fixer a priori les positions des points d'interpolation polynomiale, on les considère comme inconnues qui doivent être déterminées afin d'obtenir la meilleure précision possible. Nous pouvons ainsi accroître la précision obtenue pour un nombre donné de point d'intégration.

L'expression de l'intégral s'écrit sous la forme :

$$I = \int_{-1}^{+1} f(t) dt = \sum_i^n W_i f(t_i) \quad 3.32$$

Où  $W_i$  sont les coefficients de pondération de la méthode de Gauss et  $t_i$  la position des points d'intégration.

Il est important de noter que dans la méthode d'intégration de Gauss, avec « n » points d'intégrations, on pourrait définir un polynôme de degré « 2n-1 » et l'intégrer exactement.

Pour un problème d'intégration bidimensionnelle, on écrit :

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(t, s) dt ds = \int_{-1}^{+1} [\sum_{i=1}^n f(t_i, s) W_i] ds$$
$$I = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_i W_j f(t_i, s_j) \quad 3.33$$

### 3.4.2.2. Séquence de l'opération de calcul de la matrice de rigidité élémentaire

Les séquences de l'opération de calcul se résument dans les étapes suivantes [77]:

- 1 Trouver le point d'intégration de Gauss et le coefficient de pondération correspondant.
- 2 Former les fonctions d'interpolation et leurs dérivées dans le système de coordonnées locales pour le point de Gauss déjà trouvé.

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix}$$

$$[J_*] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial t} & \frac{\partial N_2}{\partial t} & \frac{\partial N_3}{\partial t} & \frac{\partial N_4}{\partial t} \\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \frac{\partial N_3}{\partial s} & \frac{\partial N_4}{\partial s} \end{bmatrix}$$

- 3 Faire une transformation des dérivées du système de coordonnées locales au système physique.
- 4 Formation de la matrice (déformation-déplacement)  $[B]$  :
 
$$[B] = [A][N]$$
- 5 Multiplier la matrice  $[B]$  par la matrice  $[D]$  qui représente la relation contraintes-déformations  $[DB] = [D][B]$ .
- 6 Transposer la matrice  $[B]$  pour obtenir  $[BT]$ .
- 7 Multiplier  $[BT]$  par  $[DB]$ , on obtient ainsi  $[BTDB]$ .
- 8 Ajouter cette contribution à la matrice de rigidité élémentaire.
- 9 Refaire les mêmes étapes de calcul depuis l'étape 1, pour le nombre d'intégrations qui est donné préalablement.

### 3.5. Expérimentations numériques

Par le biais de ces expérimentations numériques, on voudrait en premier lieu tester et expertiser les capacités de la méthodologie présentée dans ce chapitre, en matière de traitement numérique des écoulements en milieu déformable. Par l'occasion, on s'intéresse aux problèmes de vibrations dans les réservoirs partiellement remplis de liquide.

#### 3.5.1. Description du domaine fluide

##### 3.5.1.1. Modèle mathématique

Afin d'éviter la complexité du traitement des conditions aux limites dans le cas des frontières mobiles, nous considérons un référentiel se déplaçant avec le réservoir.

La formulation arbitrairement Lagrangienne Eulérienne (ALE acronyme Arbitrary Lagrangian Eulerian) est bien adaptée pour la modélisation mathématique des problèmes présentant une surface libre. Pour un fluide Newtonien et incompressible, les équations de Navier Stokes en configuration ALE se présentent comme suit [78]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C \cdot \nabla U - \nu \nabla (\nabla U + \nabla U^T) + \nabla p = f \quad \text{dans } \Omega_f(t) \quad 3.33.a$$

$$\nabla U = 0 \quad \text{dans } \Omega_f(t) \quad 3.33.b$$

Où  $U$ ,  $p$ ,  $f$ ,  $\nu$  et  $\Omega_f(t)$  sont respectivement la vitesse d'écoulement, la pression liée à la densité du fluide, forces de masse, viscosité cinématique et le domaine fluide.

$$C = U - U_m \quad 3.33.c$$

La vitesse convective  $C$  est la différence entre la vitesse des particules  $U$  et la vitesse du maillage  $U_m$ .

Afin de formuler un problème mathématiquement bien posé, on doit compléter les équations de Navier Stokes avec les conditions aux limites et initiales.

Les conditions aux limites types, consistent à imposer une valeur  $U_D$  à la vitesse sur une portion des frontières notée  $\Gamma_D$ .

$$U = U_D \quad \text{sur } \Gamma_D(t) \quad 3.33.d$$

Et une condition de traction sur la partie de la frontière complémentaire  $\Gamma_h$  :

$$\left[ pI - \mu(\nabla U + \nabla U^T) \right] n = h \quad \text{sur } \Gamma_h(t) \quad 3.33.e$$

Où  $p$ ,  $\mu$  et  $n$  sont respectivement la pression, la viscosité dynamique et la normale extérieure de la frontière.

En plus du système d'équations 3.33 ci-dessus, nous avons besoin de définir les équations régissant le mouvement du maillage.

#### 3.5.1.2. Mouvement du maillage

Dans le cas d'une configuration ALE, il est nécessaire de définir le mouvement du maillage. Ce dernier est considéré comme étant un domaine pseudo-élastique avec un module de Young arbitraire et un coefficient de Poisson nul [41]. Les déplacements aux nœuds des éléments sont obtenus par la résolution du système élasto-statique suivant:

$$K_m X_m = 0 \quad \text{dans } \Omega_m \quad 3.34.a$$

$$X_m = X_0 \quad \text{sur } \Gamma^{\text{libre}} \quad 3.34.b$$

La matrice de rigidité élémentaire du système pseudo-élastique est exprimée comme suit [13] :

$$K_m = \sum_e \int_{\Omega_e} B^T D B |J|^e \tau_m^e d\Omega \quad 3.35$$

Où  $B$  est la matrice dérivée des fonctions de forme,  $D$  la matrice constitutive,  $|J|^e$  le Jacobien de l'élément et  $\tau_m^e$  le facteur de rigidité élémentaire pour un maillage mobile.

Pour le calcul du facteur  $\tau_m^e$ , on utilise le schéma proposé par A. Masud [72], qui est basé sur la taille de l'élément.

$$\tau_m^e = 1 + \frac{|J_{\max}| - |J_{\min}|}{|J|^e} \quad 3.36$$

Où  $|J|_{\max}$  et  $|J|_{\min}$  sont respectivement le Jacobien maximum et minimum parmi les éléments du maillage. La méthode consiste essentiellement à augmenter la rigidité des petits éléments afin d'empêcher leurs distorsions.

### 3.5.2 Méthode numérique

#### 3.5.2.1. Discrétisation par éléments finis

A cause de la nature nonlinéaire du problème étudié, la linéarisation du système d'équations 3.33 est nécessaire afin de pouvoir numériquement résoudre les équations gouvernant l'écoulement. Le terme traduisant le transport convectif  $U \cdot \nabla U$  est linéarisé par  $U_k \cdot \nabla U_{k+1}$  avec la méthode de substitution successive connue pour ses bonnes propriétés de convergence concernant les équations de Navier Stokes.

Le terme de dérivée temporelle est discrétisé en utilisant le schéma d'Euler décalé arrière:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|^{n+1} = \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \quad 3.37$$

Où  $U^n$  et  $U^{n+1}$  sont successivement les vitesses à l'instant  $t_n$  et  $t_{n+1}$ .

La forme discrète des équations gouvernant l'écoulement est réalisée par l'utilisation de la méthode des éléments finis basée sur une formulation stabilisée dite de Galerkin moindre carrée (GLS acronyme Galerkin Least Square) [44]. Cette formulation satisfait les conditions LBB (Ladyzhenskaya - Babuska - Brezzi) et permet l'utilisation des éléments hybrides avec un ordre d'interpolation de la pression et de la vitesse égal [79].

La forme faible des équations de Navier Stokes s'écrit: pour  $f$ ,  $U_D$  et des conditions de traction aux frontières  $h$ ; trouver le champ de vitesse  $U \in \Phi_u^h$  et le champ de pression  $P \in \Phi_p$ , tels que pour toutes fonctions  $(v, q) \in (\Phi^h \times \Phi_p)$ .

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_f} \left( \frac{\mathbf{U}}{\Delta t} + (\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_m) \nabla \mathbf{U} \right) \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega_f} \mathbf{v} (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T) : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Omega_f} \mathbf{P} \nabla \mathbf{v} \, d\Omega + \\
 & \sum_e \int_{\Omega_e} \tau^{\text{GLS}} \left[ \left( \frac{\mathbf{U}}{\Delta t} + (\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_m) \nabla \mathbf{U} \right) - \mathbf{v} \nabla (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T) + \nabla \mathbf{P} \right] \cdot [(\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_m) \nabla \mathbf{v} - \\
 & \mathbf{v} \nabla (\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v}) + \nabla \mathbf{q}] \, d\Omega = \int_{\Omega_f} \left( \mathbf{f} + \frac{\mathbf{U}^n}{\Delta t} \right) \mathbf{v} \, d\Omega + \\
 & + \sum_e \int_{\Omega_e} \tau^{\text{GLS}} \left( \mathbf{f} + \frac{\mathbf{U}^n}{\Delta t} \right) [(\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_m) \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla (\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v}) + \nabla \mathbf{q}] \, d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{h} \mathbf{v} \, d\Gamma \quad 3.38.a
 \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_f} \nabla \mathbf{U} \mathbf{q} \, d\Omega = 0 \quad 3.38.b$$

$$\Phi_U^h := \{ \mathbf{U} \in H^1(\Omega_F^E) / \mathbf{U} = \mathbf{U}_D \text{ on } \Gamma_D \} ; \Phi^h := \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega_F^E) / \mathbf{v} = 0 \text{ on } \Gamma_D \} \text{ et } \Phi_p := L^2$$

Pour des besoins de clarté  $\mathbf{U}_{k+1}^{n+1}$  est notée  $\mathbf{U}$ . Nous avons aussi défini  $\mathbf{U}^n$  comme étant la vitesse au pas de temps précédent  $t^n$  et  $\mathbf{U}_k$  la vitesse à l'itération nonlinéaire précédente.

Le paramètre de stabilisation de la formulation GLS est défini comme suit [32]:

$$\tau^{\text{GLS}} = \left[ \left( \frac{1}{\Delta t} \right)^2 + \left( \frac{2 \mathbf{U}_h}{h_e} \right)^2 + 9 \left( \frac{4 \mathbf{v}}{h_e^2} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad 3.39$$

$h_e$  : Taille locale de l'élément

$\mathbf{U}_h$  : Vitesse local

### 3.5.2.2 Résolution du problème couplé nonlinéaire

Les systèmes d'équations 3.33 et 3.34 forment un problème nonlinéaire fortement couplé. Ce dernier peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(\mathbf{U}, \mathbf{P}) = \mathbf{F}((\mathbf{U}, \mathbf{P}); (\mathbf{X}_m, \mathbf{U}_m)) \quad \text{Sous-problème fluide} \quad 3.40.a$$

$$(\mathbf{X}_m, \mathbf{U}_m) = \mathbf{M}((\mathbf{X}_m, \mathbf{U}_m); (\mathbf{X}_0, \mathbf{U}_0)) \quad \text{Mise à jour du maillage} \quad 3.40.b$$

Où  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{F}$  définissent respectivement le sous-domaine pseudo-élastique décrivant le mouvement du maillage et le sous domaine fluide.

Aussi,  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{X}_m$ ,  $\mathbf{U}_m$ ,  $\mathbf{X}_0$  et  $\mathbf{U}_0$  sont respectivement la vitesse des particules fluides, la pression, le déplacement du maillage, la vitesse du maillage, le déplacement et la vitesse du maillage à la surface libre.



Pour résoudre le problème nonlinéaire couplé 3.41, nous avons utilisé des itérations Gauss-Seidel par bloc (BGS) qui consistent à sous-itérer entre les deux sous-problèmes comme suit :

$$\mathbf{X}_{m,k+1}^{n+1} = \mathbf{M}^*(\mathbf{X}_m^n, \mathbf{X}_{0,k}^{n+1}) \quad 3.41.a$$

$$\mathbf{U}_{m,k+1}^{n+1} = \frac{\mathbf{X}_{m,k+1}^{n+1} - \mathbf{X}_m^n}{\Delta t} \quad 3.41.b$$

$$(\mathbf{U}_{k+1}^{n+1}, \mathbf{P}_{k+1}^{n+1}) = \mathbf{F}^*((\mathbf{U}_k^{n+1}, \mathbf{P}_k^{n+1}), \mathbf{U}_{m,k+1}^{n+1}) \quad 3.41.c$$

$$\mathbf{X}_{0,k+1}^{n+1} = \mathbf{X}_0^n + \mathbf{U}_{0,k+1}^{n+1} \Delta t \quad 3.41.d$$

Comme variable de contrôle, nous avons choisi le déplacement à la surface libre. Cela implique, que si la différence entre deux déplacements successifs à la surface libre est inférieure à une référence, les itérations nonlinéaire sont arrêtées et on incrémente d'un pas de temps  $\Delta t$ . Afin de résoudre les systèmes d'équations linéarisés, nous utilisons le solveur BiCGStab (Stabilized Bi-Conjugate Gradient method).

### 3.5.3. Simulation numérique par éléments finis des ballottements d'un réservoir partiellement rempli de liquide

Sous l'influence de charges extérieures, on observe dans un réservoir partiellement rempli de liquide, l'apparition de fluctuations à la surface libre. L'amplitude de ce mouvement appelé aussi ballottement dépend en général de l'excitation extérieure, du niveau et des propriétés physiques du liquide ainsi que de la géométrie du réservoir. Ce mouvement des particules fluides à la surface libre reflète le mouvement du domaine fluide en sa globalité.

A la phase de conception d'un réservoir, la prévention de sa stabilité et sa résistance sont des préoccupations d'importance capitale. Le ballottement de liquide est associé à diverses applications pratiques et problèmes d'ingénierie, tels que : le comportement des réservoirs de stockage de liquides sur les ponts des navires, le mouvement du combustible liquide dans les avions en vol, la réponse sous l'effet de tremblements de terre des grands réservoirs de stockage de liquide, etc.

Le mouvement de la surface libre cause d'importantes charges sur la structure solide si la période du mouvement du réservoir est proche de la période naturelle du fluide dans le réservoir [80]. Le ballottement du liquide peut être une cause directe à des instabilités inacceptables et même la rupture fatale du système entier [81].

Le problème en question peut être formulé d'un point de vue physico-mathématique à différents niveaux de complexité. En premier lieu, le problème peut être abordé en considérant que le fluide est non-visqueux, incompressible et que l'écoulement est irrotationnel de façon qu'il existe un potentiel de vitesse satisfaisant l'équation de Laplace [3]. Dans ce cas, à la surface libre, en général, on spécifie des conditions dynamiques et cinématiques linéarisées [82]. En se basant sur cette formulation et la théorie des ondes linéaires, Youn-sun Choun et al. [83] ont analysé les caractéristiques des ballottements dans un réservoir rectangulaire avec une structure submergée au fond. T. Nakayama et al. [84] ont abordé le problème de ballottement par la méthode des éléments de frontière, en considérant l'effet amortissant de la viscosité du fluide par le rajout d'un artifice dit le terme d'amortissement de Rayleigh à la condition à la surface libre. Par la méthode des éléments finis J. R. Cho et al. [81] ont analysé les caractéristiques de résonance d'un réservoir comprenant des séparateurs horizontaux.

D'autres chercheurs voulant approcher de plus en plus le cas réel, ont choisi d'aborder le problème de ballottement de réservoir, en traitant directement les équations de Navier-Stokes. Bang-Fuh Chen et al. [85] ont présenté une méthode se basant sur les différences finies indépendantes du temps (time-independent finite-difference method) pour analyser le ballottement des réservoirs. J.R. Cho et al. [81] ont analysé par la méthode des éléments finis le comportement vibratoire des réservoirs comprenant des séparateurs, en utilisant une formulation Arbitrairement Eulerienne Lagrangienne (ALE Arbitrary Lagrangian-Eulerian). Récemment, Wall et al. [86] ont traité le problème d'interaction fluide-structure, en présence d'une surface libre, par la méthode des éléments finis et les équations de Navier-Stokes en formulation ALE. Dans cette dernière étude, les auteurs ont proposé le traitement de la région fluide proche de la surface libre comme étant une partie distincte et de résoudre le problème par une procédure partitionnée fortement couplée.

Dans le présent travail [87], nous avons entrepris la discrétisation des équations de Navier Stokes en configuration ALE par le biais de la méthode des éléments finis stabilisés dite Galerkin moindre carré (GLS). Une technique se basant sur une approche pseudo-élastique est utilisée pour déformer le maillage non-structuré à chaque pas de temps et cela afin de traquer le mouvement des particules fluides à la surface libre. Pour résoudre le problème non-linéaire en sa globalité, nous avons utilisé une méthode partitionnée totalement implicite en utilisant des itérations de Gauss-Seidel par bloc (BGS).

En se rapprochant des conditions de résonance d'un réservoir, et même si l'amplitude de l'excitation extérieure est très faible, une amplification catastrophique des amplitudes des ballotements est observée. En souci de contribuer à la caractérisation de la réponse vibratoire des réservoirs partiellement remplis de liquide, nous avons réalisé les investigations numériques suivantes :

- Une analyse fréquentielle des ballotements dans un réservoir de forme rectangulaire soumis à une excitation horizontale et sinusoïdale à sa base.
- L'étude de l'influence de la hauteur relative de la colonne du liquide.
- La détermination de l'influence de l'inclinaison des parois latérales.

Une attention particulière est donnée à l'influence des différents paramètres considérés sur les valeurs des fréquences fondamentales, des élévations relatives maximales, de la largeur de bande de résonance ainsi qu'à la topographie de la surface libre.

### 3.5.3.1. Condition cinématique à la surface libre

A la surface libre, les composantes normales des vitesses du maillage et des particules fluides doivent être égales. Cela se traduit par l'expression suivante :

$$U_0 \cdot \mathbf{n} = U_m \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma^{\text{libre}} \quad 3.42$$

Les deux approches standards utilisées pour l'introduction de cette condition sont l'approche Lagrangienne locale et la méthode de fonction d'élévation ou de hauteur. Dans une configuration Lagrangienne locale, les nœuds du maillage sont attachés aux particules fluides. Par conséquent, nous avons à la surface libre la condition :

$$U_0 - U_m = 0 \quad \text{sur } \Gamma^{\text{libre}} \quad 3.43$$

La vitesse du maillage est utilisée par la suite pour incrémenter sa position :

$$\mathbf{X}_m^{n+1} = \mathbf{X}_m^n + \mathbf{U}_m^n \Delta t \quad \text{sur } \Gamma^{\text{libre}} \quad 3.44$$

La facilité d'implémentation et son applicabilité pour des géométries complexes sont les points forts de cette approche. Néanmoins, la présence d'importantes vitesses tangentielles à la surface libre, comme dans le cas de canaux ouverts, engendre d'importantes distorsions dans les éléments du maillage ce qui affecte considérablement les résultats. Afin de surmonter les inconvénients de l'approche Lagrangienne, l'utilisation de la méthode des fonctions d'élévations [86] est une alternative très fréquente. Cependant, cette dernière méthode présente un déficit lors de l'étude des problèmes à frontières inclinées. C'est pour cette raison, que nous avons adopté dans la présente étude, une approche Lagrangienne locale.

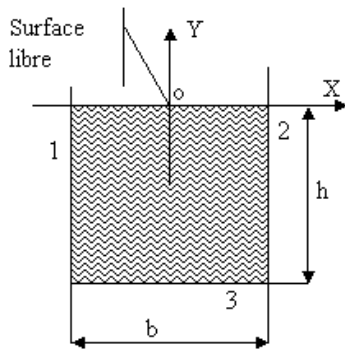
3.5.3.2. Résultats et discussions

Afin de valider la présente approche numérique, nous avons choisi de comparer nos résultats en premier lieu à ceux publiés par Chen et al. [85] et Nakayama et al. [84] concernant le mouvement d'un liquide dans un réservoir rectangulaire subissant l'effet d'une excitation harmonique horizontale. L'élément de base qui a été sélectionné est un élément de Lagrange P1/P1, mixte et de forme triangulaire.

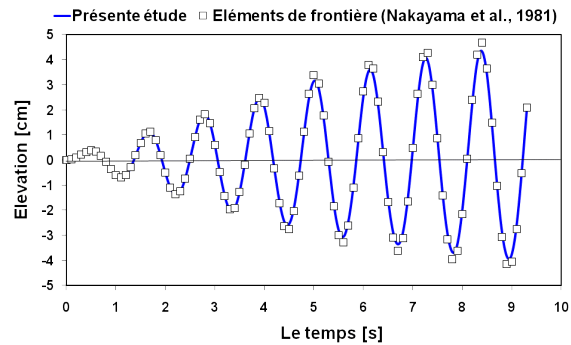
3.5.3.2.1. Analyse des ballotements de la surface libre d'un réservoir rectangulaire

a. Résultats préliminaires

La configuration étudiée est représentée sur la figure 3.2.a. Concernant le sous-domaine fluide nous imposons la condition  $U \cdot n = 0$  aux frontières 1,2 et 3. A la surface libre, l'effet de la tension superficielle est négligé et la condition s'écrit :  $-\text{PI} + \mu(\nabla U + \nabla U^T) \cdot n = P_0 \cdot I$ . Pour le sous-domaine pseudo-élastique (maillage), aux frontières 1 et 2, la condition est  $X_m \cdot n = 0$ , à la frontière 3,  $X_m = 0$  et à la surface libre  $U_m \cdot n = U_0 \cdot n$ .



-a-



-b-

Figure 3.2 : Comparaison de l'élévation de la surface libre au point  $X=+b/2$  -a- Réservoir de liquide en deux dimensions ( $h=0.6m$  et  $b=0.9m$ ) -b- Evolution temporelle de l'élévation de la surface libre au point d'abscisse  $X=+b/2$ .

La figure 3.2.b représente l'évolution temporelle de l'élévation de la surface libre au point d'abscisse  $X = +b/2$ . Le réservoir est sujet à une accélération harmonique horizontale forcée définie par l'expression ci-dessous.

$$\ddot{X} = -X_0 \omega^2 \sin \omega t \tag{3.45}$$

Et les paramètres sont choisis comme suit :  $X_0 = 0.002$  m et  $\omega = 5.5$ [rad/sec].

L'effet de cette excitation harmonique se traduit dans la formulation par le terme de force de masse comme suit :  $f_x = \ddot{X}$  et  $f_y = -g$  où  $g$  représente l'accélération terrestre.

Nakayama et al. [84] dans leur approche numérique basée sur la méthode des éléments de frontière ont supposé que l'écoulement est irrotationnel, que le fluide est incompressible et non visqueux. Ils ont introduit l'effet amortissant dû à la viscosité du fluide à travers une condition imposée à la surface libre au moyen d'un terme dit l'amortissement de Rayleigh. Les résultats du présent travail dans leurs globalités sont en bonne concordance avec ceux publiés par Nakayama et al. [84]. Néanmoins, on estime que les légers décalages observés sont dus à l'influence de la viscosité du fluide (Le fluide considéré est l'eau, de viscosité dynamique  $1.8 \cdot 10^{-3}$  Pa.s et de masse volumique  $1000 \text{ kg/m}^3$ ).

Il est à noter que pour le reste des calculs numériques entrepris, l'amplitude de l'excitation harmonique est prise  $X_0 = 0.00186 \text{ m}$ .

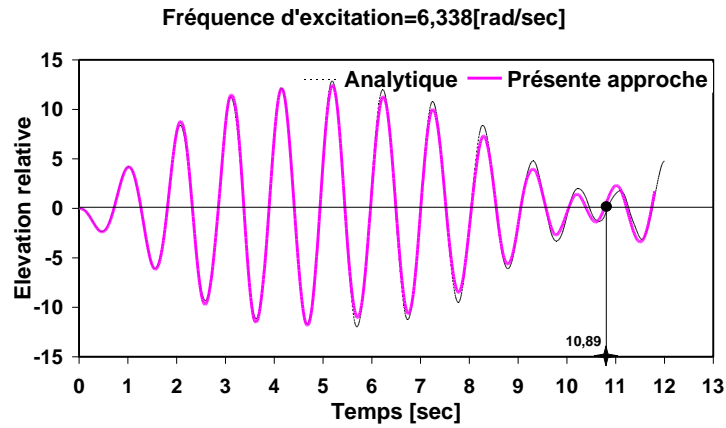
La figure 3.3 montre le déplacement vertical du point à la paroi gauche de la surface libre pour deux fréquences d'excitation différentes. La solution analytique proposée dans [85] est aussi représentée sur la même figure. L'accord entre les résultats des deux approches est jugé satisfaisant. Les fréquences fondamentales  $\omega_n$  sont calculées par l'expression [85]:  $\omega_n^2 = g k_n \tanh k_n h$  où  $k_n = (2n + 1)\pi/b$ . Sous des fréquences d'excitations proches de la fréquence de résonance un phénomène de battement apparaît. La fréquence de l'enveloppe de l'amplitude de l'onde est  $\Delta\omega = |\omega_1 - \omega|$  et sa période est de  $T = 2\pi/\Delta\omega$ .

Nous avons la première fréquence de résonance du système étudié  $\omega_1 = 5.762$  rad/sec. Pour une fréquence d'excitation  $\omega = 6.338$  rad/sec (voir figure 3.3.a) donc  $\omega/\omega_1 = 1.1$ , la période de l'enveloppe est  $T = 10.89$  sec. Alors que pour une fréquence d'excitation  $\omega = 5.7$  rad/sec (voir figure 3.3.b) donc  $\omega/\omega_1 = 0.98$ , les amplitudes de l'onde de ballonnement de la surface libre deviennent plus importantes et la période de l'enveloppe est  $T = 101.2$  sec.

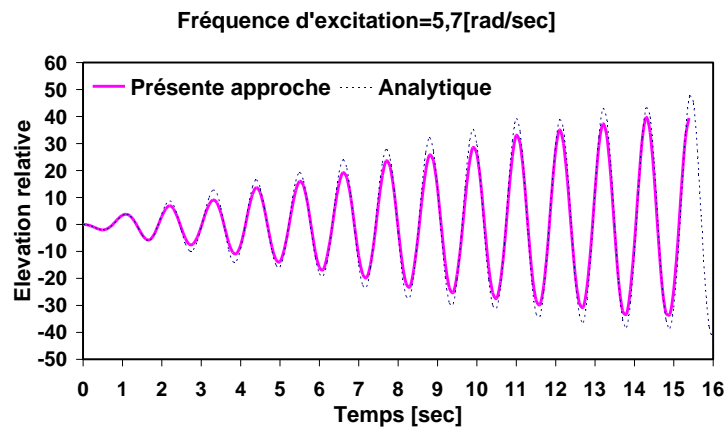
#### *b. Influence de la fréquence d'excitation*

La fréquence d'excitation a un effet significatif sur le comportement vibratoire de la surface libre. Comme le montre la figure 3.4, la variation de la fréquence influe nettement sur la topologie de la surface libre ainsi que sur les amplitudes des élévations de cette dernière. Pour  $\omega = 3$  rad/sec (figure 3.4.a), on constate que le bloc fluide en mouvement à l'intérieur du réservoir se déplace en bloc et que la forme de la surface libre reste relativement régulière. On distingue aussi pour la même fréquence, un point caractéristique se situant exactement au

milieu géométrique de la surface libre où l'élévation reste nulle. Les élévations extrémales sont enregistrées aux points d'abscisse  $X = \pm b/2$  en contact avec les deux parois latérales du réservoir.



-a-



-b-

Figure 3.3 : Comparaison de l'élévation de la surface libre au point  $X=-b/2$   
- a-  $\omega/\omega_1=1.1$  - b-  $\omega/\omega_1=0.98$

Pour  $\omega=15$ rad/sec (figure 3.4.b), la surface libre est de plus en plus perturbée. Cependant, le point se situant au milieu de la surface libre reste toujours verticalement immobile. On constate aussi la formation à la surface libre de points où les élévations sont de plus en plus réduites, que nous nommons nœuds. Pour la même fréquence d'excitation, on remarque que les élévations extrémales ne sont plus observées aux points de la surface libre en contact avec les parois latérales du réservoir.

De telles investigations peuvent s'avérer en pratique très utiles. À titre d'exemple afin de définir a priori la position optimale d'installation d'un système de détection de niveau. Dans ce cas de figure, il est très important de prédire les positions sur la surface libre où l'on enregistre les élévations maximales lors d'excitations extérieures.

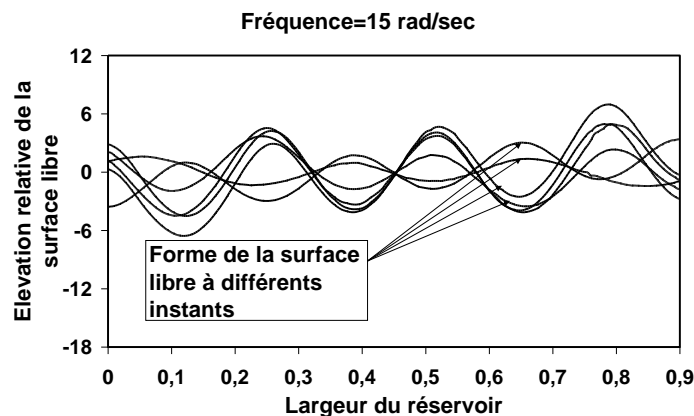
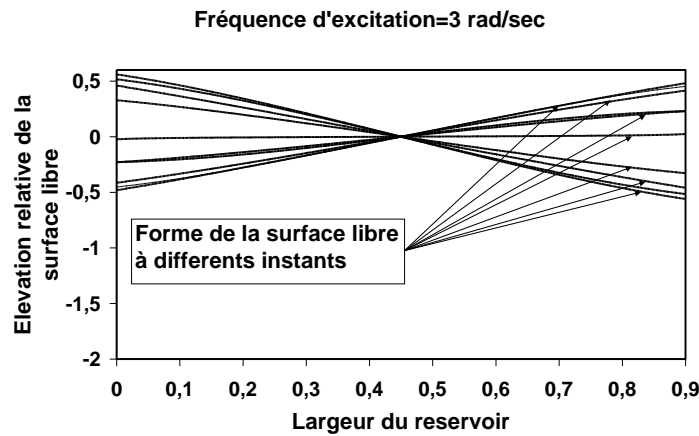


Figure 3.4 : Evolution temporelle de l'élévation à la surface libre

Comme le montre la figure 3.5, La variation de la fréquence influe nettement sur l'amplitude des élévations de cette dernière. Les amplitudes extrémales des ballottements à la surface libre sont enregistrées lorsqu'on se rapproche de la fréquence de résonance  $\omega_1 = 5.782$  rad/s calculée analytiquement [85]. D'autres pics dans les valeurs des amplitudes sont remarqués autour des trois autres fréquences fondamentales des vibrations du bloque fluide  $\omega_2 = 10.132$  rad/s,  $\omega_3 = 13.081$  rad/s et  $\omega_4 = 15.478$  rad/s.

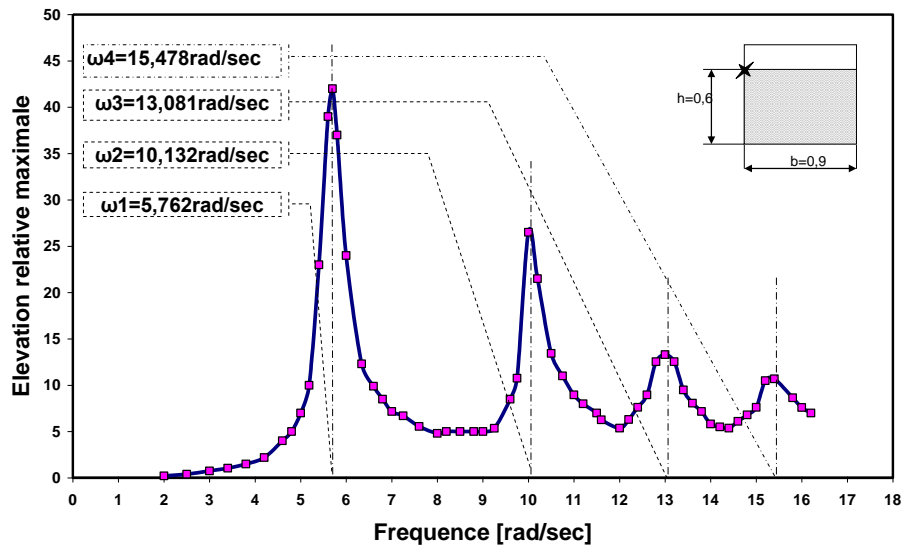


Figure 3.5 : Réponse fréquentielle de l'élévation relative maximale à la surface libre au point d'abscisse  $X=-b/2$ .

Pour un problème similaire le nombre de Reynolds a été défini d'après [83] par :  $R_e = \bar{U}_o h/\nu$  où  $\bar{U}_o$  la vitesse maximale de l'excitation extérieure est calculée par l'expression  $\bar{U}_o = \bar{X}_o \omega$ .

La plus grande valeur du nombre de Reynolds est enregistrée pour  $\omega = 16.5 \text{ rad/sec}$  qui est  $Re=1584$ . Cela vérifie que l'hypothèse d'un écoulement laminaire est toujours satisfaite.

*c. Influence de la hauteur relative de la colonne du liquide [h/b]*

Dans cette partie de notre investigation numérique, nous nous intéressons à l'effet de la hauteur relative de la colonne du liquide sur le comportement vibratoire des réservoirs. La figure 3.6 représente la réponse fréquentielle de la surface libre à  $X=-b/2$  pour différentes hauteurs relatives de la colonne d'eau. L'élévation extrême à la première fréquence fondamentale augmente proportionnellement à la hauteur relative de la colonne du liquide.

Mais cette dépendance s'atténue quand  $H/L$  s'approche de l'unité. Cela est dû au fait que c'est seulement les parties supérieures de la colonne d'eau qui contribuent dans le mouvement de ballotement de la surface libre. Pour les autres fréquences de résonance, le mouvement de la surface libre est peu sensible aux changements de la hauteur de la colonne du liquide.



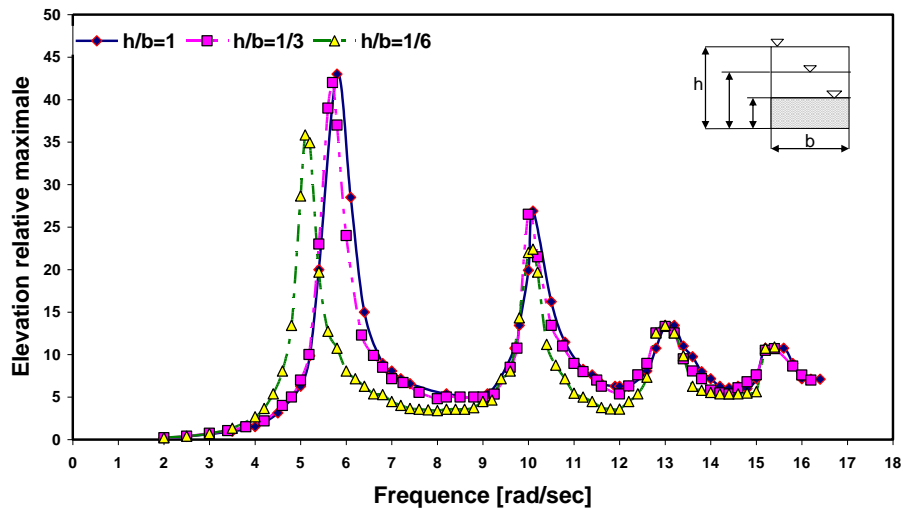


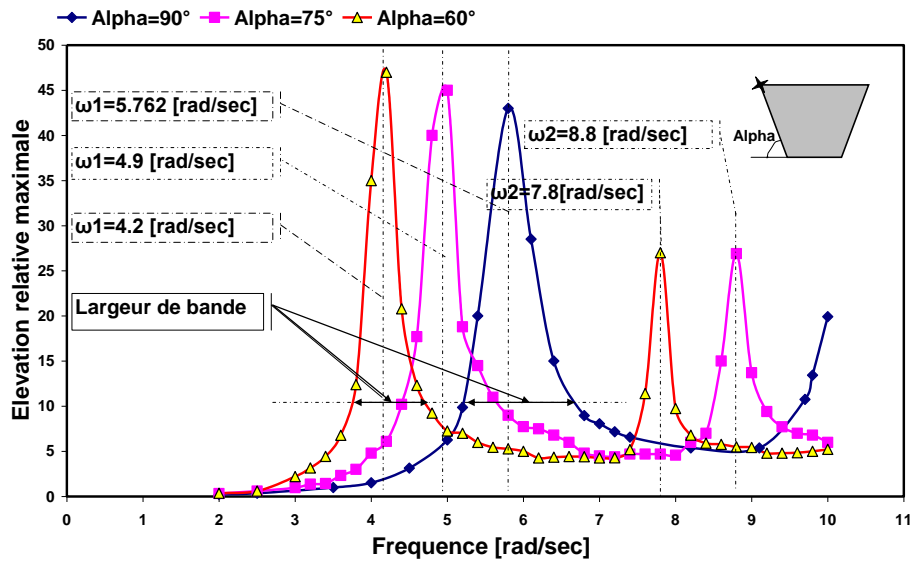
Figure 3.6 : Réponse fréquentielle de l'élévation relative maximale à la surface libre au point d'abscisse  $X=-b/2$  pour différentes hauteurs relatives de la colonne du liquide.

### 3.5.3.3 Influence de l'inclinaison des parois latérales

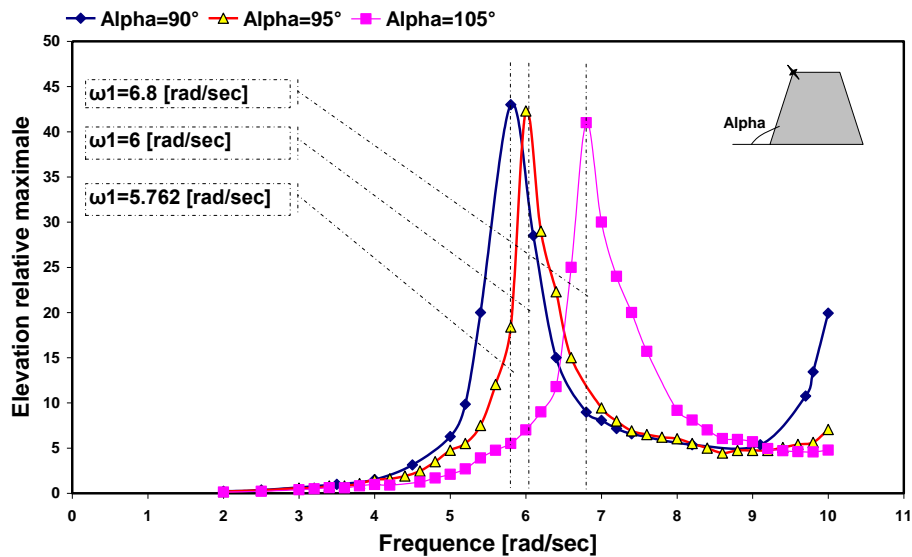
Nos investigations concernant l'effet de la variation de l'angle d'inclinaison des parois latérales sont résumées sur la figure 3.7.

En variant l'angle d'inclinaison, nous modifions la géométrie du domaine fluide et par conséquent la réponse vibratoire du réservoir est affectée.

D'après cette figure, il est nettement mis en évidence la sensibilité de la réponse fréquentielle de la surface libre aux changements d'inclinaison des parois du réservoir. D'après les résultats de la présente étude, la première fréquence fondamentale du système mécanique étudié évolue de la manière suivante : Pour un angle de  $60^\circ$  la fréquence  $\omega_1=4.2\text{rad/sec}$ , pour  $75^\circ$  la fréquence  $\omega_1=4.9\text{rad/sec}$ , pour un réservoir rectangulaire nous avons  $\omega_1=5.762\text{rad/sec}$ , pour un angle de  $95^\circ$  la fréquence  $\omega_1=6\text{rad/sec}$  et pour  $105^\circ$  la première fréquence de résonance est  $\omega_1=6.8\text{rad/sec}$ . Par conséquent, nous pouvons déduire que la première fréquence fondamentale évolue proportionnellement à l'angle d'inclinaison.



-a-



-b-

Figure 3.7 : Réponse fréquentielle de l'élévation relative maximale de la surface libre au point d'abscisse  $X=-b/2$  pour différents angles d'inclinaison des parois latérales.

Il est aussi observé que l'élévation maximale diminue en augmentant l'angle d'inclinaison des parois latérales. Cette atténuation des élévations à la surface libre est due au fait qu'en augmentant l'angle d'inclinaison nous diminuons la quantité de liquide dans les couches supérieures du bloc fluide qui ont la plus grande contribution sur le ballonnement de la surface libre.

Si nous définissons la largeur de bande comme étant la largeur du domaine de fréquences correspondant à des élévations relatives maximales supérieures à 10. On constate que la largeur de bande évolue proportionnellement à l'angle d'inclinaison quand ce dernier varie dans l'intervalle  $[60^\circ, 90^\circ]$ . Par contre, la largeur de bande est très peu sensible pour des angles variant dans l'intervalle  $[90^\circ, 105^\circ]$ .

### 3.5.2. Investigation numérique sur les techniques de réduction passives des ballottements dans les réservoirs rectangulaires partiellement remplis de liquide

Afin de réduire les effets nuisibles des ballottements sur les réservoirs, un nombre d'artifices passifs a été introduit par les concepteurs dans la construction des réservoirs. Les séparateurs classiques qui partitionnent le réservoir en plusieurs zones séparées ont été largement utilisés dans l'industrie à cause de leur aspect pratique et la facilité à les installer dans la structure du réservoir. Dans cette catégorie, les effets de plusieurs paramètres de conception doivent être déterminés. Dans leur article Choun et Yun [83] ont traité l'effet d'une structure submergée sur les ballottements des réservoirs de forme rectangulaire. Ils ont conclu que l'introduction d'une structure submergée a tendance à diminuer les amplitudes des ballottements, la pression hydrodynamique et l'effet de cisaillement à la base. Par contre, cela a une tendance à augmenter le moment de basculement. Ils ont aussi observé qu'en augmentant la hauteur de la structure submergée, l'amplitude des ballottements décroît. Cho et Lee [24] ont présenté les résultats numériques d'une analyse paramétrique concernant l'influence de l'introduction de séparateurs horizontaux déformables sur le comportement vibratoire des réservoirs de formes cylindriques. Dans un autre travail Cho et al. [81] ont publié les résultats d'une analyse de résonance d'un réservoir 2-D muni de séparateurs horizontaux. Par rapport aux résultats de cette analyse, il a été conclu que l'effet amortissant de l'utilisation de séparateurs horizontaux est significatif.

Nous nous intéressons dans ce travail particulièrement à l'effet de l'introduction d'un séparateur ou obstacle verticalement juste à la surface libre. Afin de mettre en évidence l'impact intéressant de cette technique en matière de réduction de ballottement, nous avons entrepris une analyse comparative. Les deux autres configurations étudiées concernent l'influence des séparateurs verticaux et horizontaux.

Dans le présent travail [88], nous avons entrepris la discrétisation des équations de Navier Stokes en configuration ALE par le biais de la méthode des éléments finis stabilisée dite Galerkin moindre carré (GLS). Une technique se basant sur une approche pseudo-élastique est utilisée pour déformer le maillage non-structuré à chaque pas de temps et cela afin de traquer le mouvement des particules fluides à la surface libre. Pour résoudre le problème non-linéaire en sa globalité, nous avons utilisé une méthode partitionnée totalement implicite, en utilisant des itérations de Gauss-Seidel par bloc (BGS).

En souci de contribuer à la caractérisation de l'effet amortissant des séparateurs sur la réponse vibratoire des réservoirs partiellement remplis de liquide, nous avons réalisé les investigations numériques suivantes :

- Une analyse fréquentielle des ballottements dans un réservoir de forme rectangulaire soumis à une excitation horizontale et sinusoïdale à sa base.
- L'étude de l'influence des séparateurs horizontaux.
- La détermination de l'influence d'un séparateur vertical.
- L'étude de l'effet de l'introduction d'un séparateur vertical juste à la surface libre.

Une attention particulière est donnée à l'influence des différents paramètres considérés sur les valeurs des fréquences fondamentales, des élévations relatives maximales et des couples de basculement à la résonance.

### *3.5.2.1. Condition cinématique à la surface libre*

Afin de surmonter les inconvénients de l'approche Lagrangienne, l'utilisation de la méthode des fonctions d'élévations [89, 44] est une alternative très fréquente. Cette dernière méthode consiste à résoudre l'équation hyperbolique suivante :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + U_0 \cdot \nabla \eta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{Free}(t) \quad 3.46$$

Où  $\eta(t, x, y)$  définit la localisation des nœuds du maillage à la surface libre et  $U_0$  la vitesse des particules fluides.

### *3.5.2.2. Investigations numériques*

Dans cette partie, nous avons choisi de comparer nos résultats en premier lieu à ceux publiés par Hayama et al. [90] concernant le mouvement d'un liquide dans un réservoir rectangulaire subissant l'effet d'une excitation harmonique horizontale. Dans une deuxième partie nous nous sommes intéressés à l'effet amortissant des séparateurs dans les trois configurations

étudiées d'un point de vue fondamental. En dernier lieu, nous avons entrepris une étude comparative.

### a. Résultats préliminaires

Dans la figure 3.8, on peut observer la relation entre l'amplitude adimensionnelle de l'élévation à la surface libre et la fréquence relative. Les présents résultats numériques sont en bon accord avec les données expérimentales publiées par Hayama et al. [90]. Quand la fréquence d'excitation varie, on peut observer le phénomène de saut. Cependant, il y a une différence entre la valeur de l'altitude maximale calculée et celle enregistrée expérimentalement. Cela est dû à la précision de la méthode numérique qui diminue à cause des déformations excessives du domaine de calcul en raison de la détérioration de la qualité du maillage.

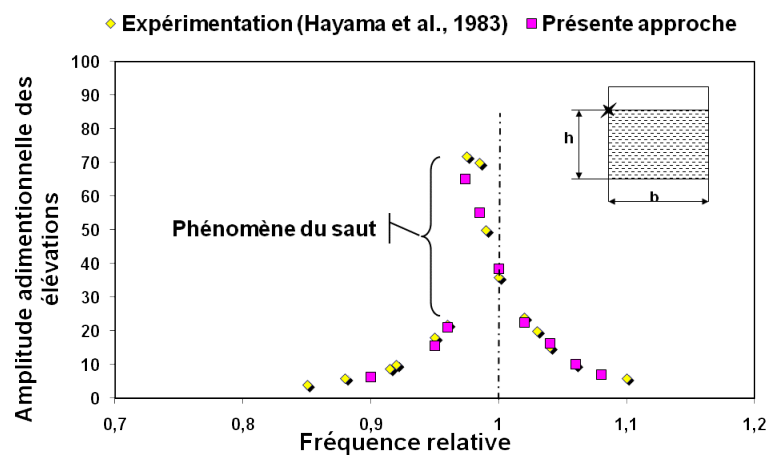


Figure 3.8: Réponse à la résonance de la surface libre ( $X^*_0/b=0.0025m$ ,  $b=0.8$  and  $h/b=0.6$ ).

### b. Les effets de l'introduction des séparateurs:

Le principe de base des techniques d'amortissement passives des ballottements dans les réservoirs, consiste à concevoir une géométrie capable de dissiper l'énergie cinétique du mouvement global par le freinage de l'écoulement des particules fluides dans plusieurs petits sub-domaines. Dans ce qui suit, nous allons explorer les capacités d'amortissement des trois configurations représentées sur les figures 3.9, 3.11 et 3.13.

#### b.1. Utilisation de deux séparateurs horizontaux

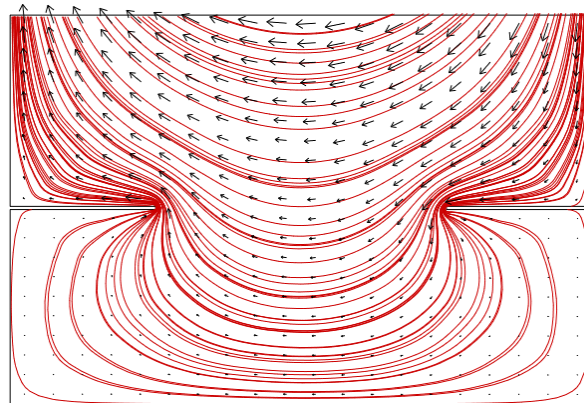
Comme le montre la figure 3.9, représentant les lignes de courant et les vecteurs des vitesses à deux instants différents à  $t=2s$  et  $t=22.05s$ . En utilisant des séparateurs horizontaux, nous

divisons l'ensemble du bloc fluide en deux parties supérieure et inférieure. Il est indiqué sur la figure 3.10, représentant l'évolution temporelle de l'élévation à la surface libre que:

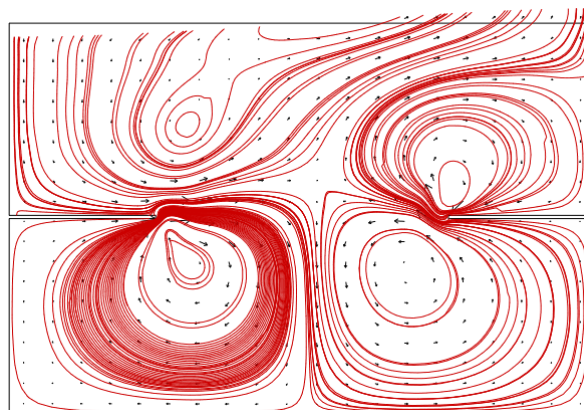
l'instant  $t=2s$  correspond à la phase de développement de la vague de ballottement et qu'à  $t=22.05s$ , nous constatons que le niveau des élévations à la surface libre est en baisse et a atteint un niveau minimal.

Lors de la phase de développement de la vague de ballottement, nous constatons sur la figure 3.9.a que la partie supérieure du bloc fluide a capté la majeure partie de l'énergie cinétique fournie au système par l'excitation à la base du réservoir.

Par contre à  $t=22.05s$ , nous observons sur la figure 3.9.b, la formation d'importantes structures tourbillonnaires se situant principalement à la partie inférieure du réservoir. Ces vortex entraînent les particules fluides dans un mouvement rotatif et dissipatif ce qui provoque l'atténuation de la vague à la surface libre.



(a)  $t= 2s$



(b)  $t= 22.05s$

Figure 3.9 : Les lignes de courant à deux instants différents (réservoir avec deux séparateurs horizontaux et une fréquence=5.2rad/s).

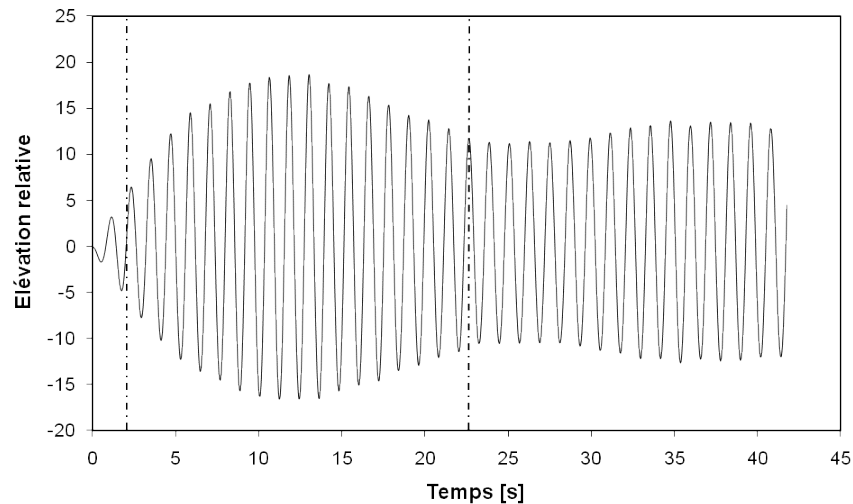


Figure 3.10: Evolution des élévations au point à la paroi gauche (réservoir avec deux séparateurs horizontaux et une fréquence=5.2rad/s)

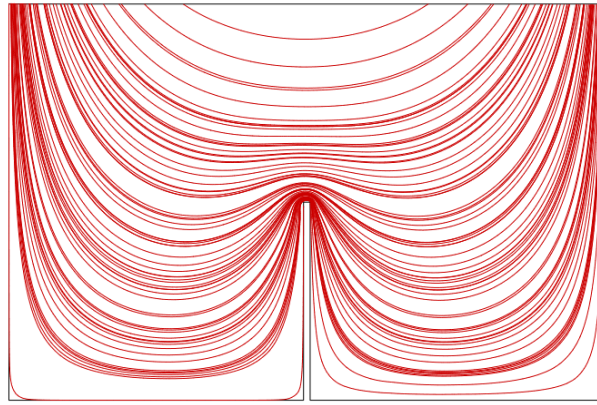
### b.2. Utilisation d'un séparateur vertical

En ce qui concerne la deuxième technique étudiée, le séparateur vertical divise le réservoir pratiquement en un côté à gauche et un autre à droite. Les figures 3.11.a et 3.11.b représentent l'évolution des lignes de courant à deux instants différents. Au cours de la première phase de développement et d'accroissement de la vague à la surface libre. Nous observons que les lignes de courant sont régulières et que l'écoulement en sa globalité est bien structuré. A l'instant  $t=25s$ , on remarque l'apparition d'une grande structure tourbillonnaire qui s'est formée sur l'un des deux côtés du réservoir. Ce tourbillon dissipera une partie de l'énergie cinétique communiquée au système et empêchera ainsi la vague de ballotement de continuer son accroissement. La figure 3.12 représente l'évolution temporelle de l'élévation relative à la surface libre au point gauche de la paroi.

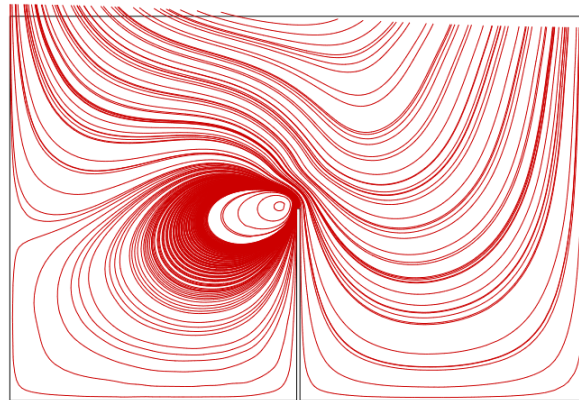
### b.3. Utilisation d'un séparateur perpendiculaire à la surface libre:

La troisième technique proposée consiste à introduire un élément séparateur perpendiculaire à la surface libre. La figure 3.13.a représente les lignes d'isocontours de vitesse à l'instant  $t=2s$  correspondant à la phase de développement de la vague de ballotement comme c'est indiqué sur la figure 3.14. La vitesse des particules fluides juste autour de l'obstacle augmente d'une manière significative ce qui provoque l'aspiration des particules du voisinage, qui vont venir se percuter contre le séparateur en dissipant une partie de leurs énergies cinétiques. A titre d'exemple à l'instant  $t=28s$  (figure 3.13.b), ce phénomène va atténuer les ballotements à la surface libre.





(a)  $t=2s$



(b)  $t=25s$

Figure 3.11: Les lignes de courant à deux instants différents (réservoir avec un séparateur vertical et une fréquence=5.2rad/s).

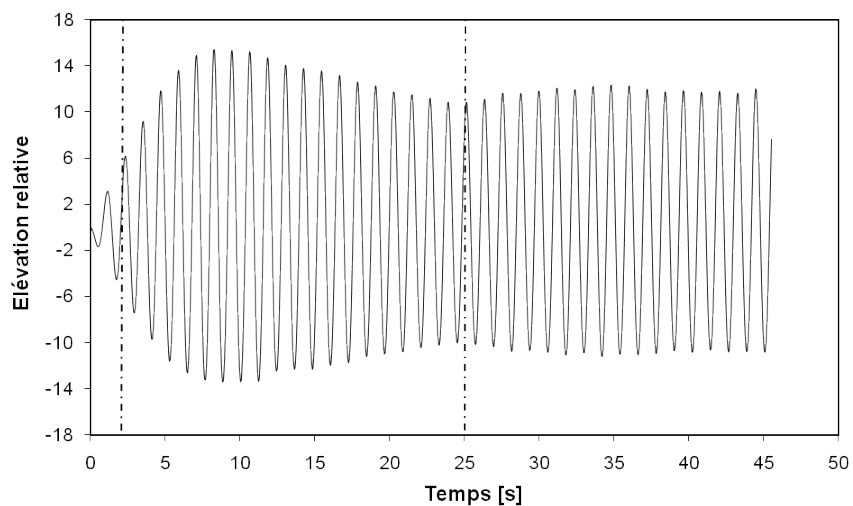
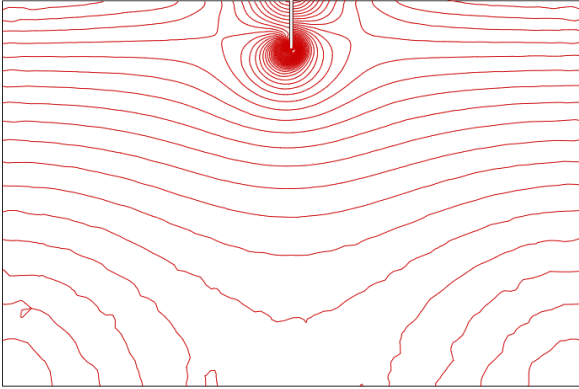
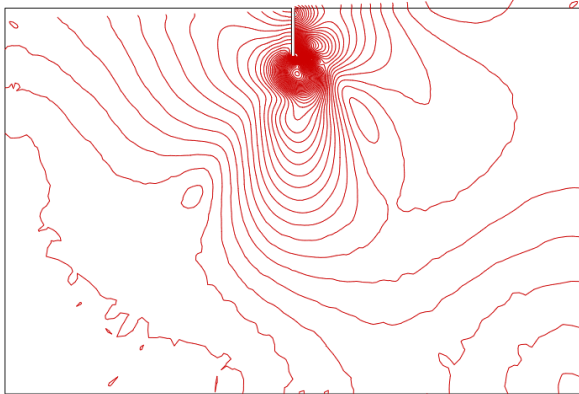


Figure 3.12: Evolution des élévations au point à la paroi gauche (réservoir avec un séparateur vertical et une fréquence=5.2rad/s)





(a) t=2s



(b) t=28 s

Figure 3.13: Les contours de vitesses à deux instants différents (réservoir avec un séparateur vertical à la surface libre et une fréquence=5.2rad/s).

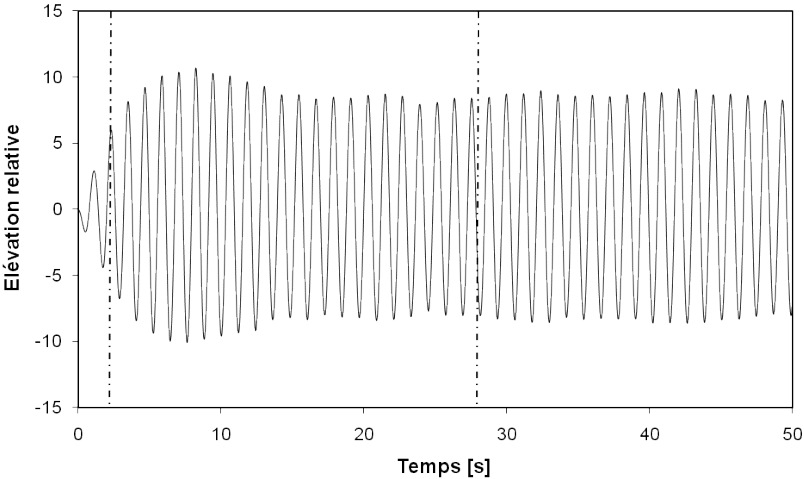


Figure 3.14 : Evolution des élévations au point à la paroi gauche (réservoir avec un séparateur vertical à la surface libre et une fréquence=5.2rad/s)

### C. Analyse comparative

Afin de pouvoir juger l'efficacité des trois techniques d'amortissement passives abordées dans ce travail, nous avons tracé la figure 3.15. Cette dernière représente la réponse fréquentielle de la surface libre à la paroi gauche. Nous constatons que l'introduction d'un élément séparateur dans les trois configurations étudiées a provoqué la diminution de la première fréquence de résonance qui est devenue égale à 5.4rad/s. Par contre, la deuxième fréquence fondamentale n'est affectée que par l'introduction d'un séparateur vertical juste à la surface libre. Dans ce dernier cas, la valeur de la fréquence  $\omega_2$  est devenue 9.5rad/s.

L'effet amortissant est traduit par les diminutions observées dans les élévations relatives maximales surtout proches des fréquences fondamentales. Les pourcentages d'atténuations des élévations maximales pour chaque technique par rapport au cas référence d'un réservoir sans séparateurs sont résumés sur le tableau 3.1. Le cas du réservoir avec un séparateur vertical à la surface libre a un plus grand effet amortissant pour les deux fréquences fondamentales malgré les dimensions réduites du séparateur utilisé par rapport aux deux autres configurations étudiées.

Il est important aussi de noter que l'effet amortissant d'un séparateur vertical est plus important que lorsqu'on utilise des séparateurs horizontaux aux environs de la première fréquence de résonance. Par contre, c'est l'inverse en nous rapprochons de la deuxième fréquence fondamentale.

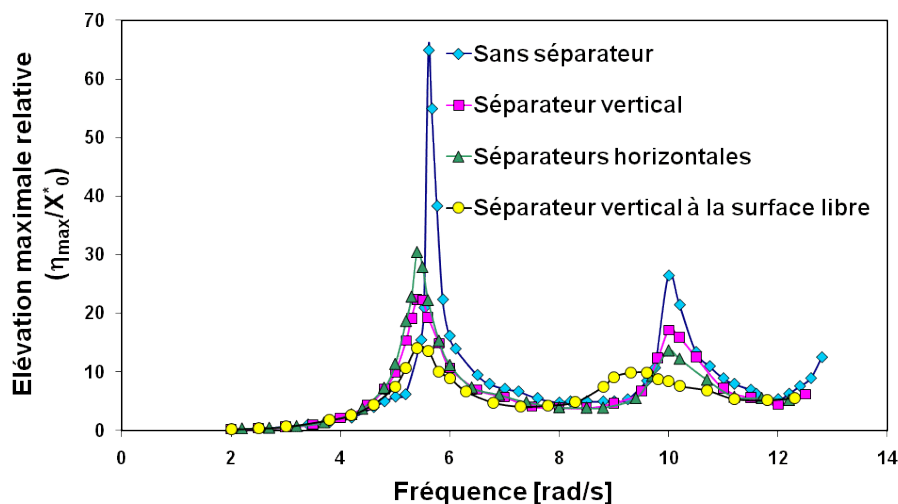


Figure 3.15 : Réponse fréquentielle des élévations de la surface libre à la paroi gauche du réservoir pour différentes techniques passives de réduction des ballottements

	1 <sup>st</sup> frequency	2 <sup>nd</sup> frequency
Séparateurs verticaux	53.05%	49.23%
Séparateur vertical	65.53%	36.63%
Séparateur vertical à la surface libre	78.31%	63.49%

Tableau 3.1 : Pourcentage d’atténuation des élévations maximales

L’effet amortissant est nettement mis en évidence sur la figure 3.16 représentant l’évolution temporelle des élévations de la surface libre à la paroi gauche pour la première fréquence de résonance.

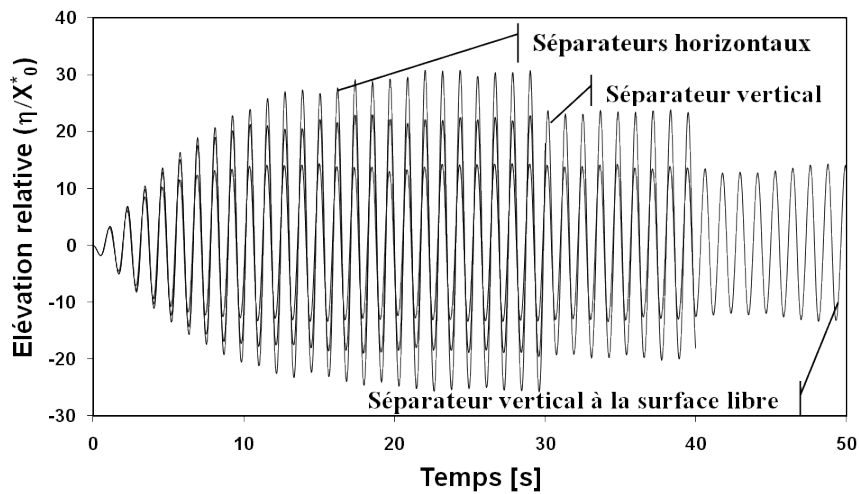


Figure 3.16: Evolution temporelle des élévations de la surface libre à la paroi gauche pour une fréquence d’excitation  $\omega = 5.4 \text{ rad/s}$

L’importance des ballottements à la surface libre reflète le mouvement de la masse du fluide en sa globalité et par conséquent les charges hydrodynamiques que subissent les parois solides du réservoir. De ce fait il est évident que les plus grandes charges prennent naissance à la résonance. La figure 3.17 représente l’évolution temporelle du couple de basculement à la première fréquence de résonance  $\omega = 5.4 \text{ rad/s}$ . Les amplitudes des couples de basculement produits lors de l’introduction des séparateurs horizontaux ou un séparateur vertical sont pratiquement les mêmes. Cela se confirme aussi par les valeurs RMS (Root Mean Square) du couple de basculement qui sont : Pour la première technique 31.9N.m et la deuxième 30.34N.m. Cependant, concernant la troisième technique étudiée, comme le montre la figure 14 et le confirme la valeur du RMS du couple de basculement calculé qui est 18.24N.m ; l’effet hydrodynamique sur les parois solides est moins important comparé aux deux autres techniques.

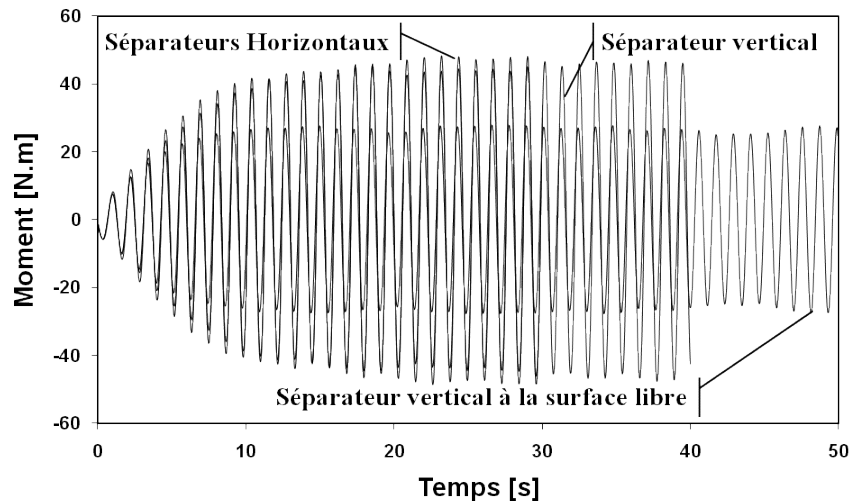


Figure 3.17 : Evolution temporelle du couple de basculement à la première fréquence de résonance  $\omega = 5.4\text{rad/s}$

### 3.6. Conclusion du chapitre

Les aspects particuliers relatifs au traitement numérique des écoulements des fluides en milieux déformables ont été abordés dans ce chapitre. Par l'utilisation d'une formulation ALE des équations de Navier-Stokes, une approche pseudoélastique pour le traitement du mouvement du maillage du domaine de calcul et une méthode de Gauss Seidel par bloc pour la résolution du problème couplé nonlinéaire, on a pu simuler le ballotement des réservoirs partiellement remplis de liquide. Les résultats trouvés ont fait l'objet de plusieurs validations. D'autres résultats qu'on a jugés intéressants ont été présentés et discutés en détail.

**Chapitre 4: Problème couplé en  
interaction fluide-  
structure et algorithme  
de couplage**

# 4. Problème couplé en interaction fluide-structure et algorithmes de couplage

## 4.1. Introduction

La condition cardinale que doit vérifier une procédure de calcul des phénomènes d'interactions fluides-structures, c'est le respect de la condition de conservation de l'énergie mécanique. Pour cela, les algorithmes de couplage violant cette condition sont à exclure ou bien à utiliser pour certaines applications ne demandant pas une grande précision. Les schémas de discrétisation temporelle utilisés pour les deux sous-domaines fluide et solide doivent être compatibles. Cela veut dire que les conditions de continuité cinématique et l'équilibre dynamique à l'interface fluide solide doivent être vérifiés à chaque pas de temps [91].

Il existe plusieurs stratégies et algorithmes de calcul pour la résolution des problèmes couplant dynamiquement deux milieux fluide et solide. Le choix de l'une d'entre elles dépend de la précision souhaitée et du degré de couplage existant entre les deux milieux fluide et structure. En pratique, l'utilisation des méthodes numériques pour la résolution des problèmes couplés résulte en un système d'équations algébriques non-linéaire. Ce dernier peut être résolu suivant une procédure monolithique ou partitionnée.

Dans cette partie, on expose en détail, les différents algorithmes de couplage existant en interaction fluides structures, ainsi qu'une étude pratique réalisée, concernant la simulation du comportement d'un corps rigide vibrant sous l'effet d'un écoulement de fluide. A cet effet, et en collaboration avec le Centre Scientifique et Technique du Bâtiment (Marne La Vallée, Paris, France), nous avons abordé le phénomène des instabilités aéro-élastique des ponts. On s'est intéressé à l'étude de stabilité d'un pont réel. Ce dernier est le pont à haubans SUCHARSKI sur la rivière MARTWA WISLA à Gdansk (Poland). Pour la validation du modèle numérique par l'expérience, on s'est intéressé au comportement vibratoire d'une maquette sectionnelle du tablier réel sous l'effet d'un vent soufflant uniforme.

## 4.2. Classification des méthodes de résolution des problèmes couplés fluides-structures

On pourrait s'appuyer essentiellement sur trois critères afin de classer les méthodes de résolution des problèmes d'interactions fluides-structures. Ces critères sont : le couplage en un sens ou bien dans les deux sens, d'après les schémas de discrétisation temporelle utilisés soit implicites ou explicites, et d'après le type de stratégie de résolution entreprise pour la résolution du problème couplé (partitionnée ou monolithique).

### 4.2.1. Méthode de couplage dans un sens ou bien deux

Dans certains cas d'interactions fluides-structures, les déformations du solide sont si faibles que leurs influences sur l'écoulement du fluide sont négligeables. Par conséquent, seules les charges du fluide sont appliquées sur la structure, et aucune itération entre le modèle fluide et le solide n'est nécessaire. En utilisant une procédure de couplage dans un seul sens (one way coupling), on suppose que la topologie de l'écoulement du fluide n'est pas affectée par le déplacement de la structure solide.

### 4.2.2. Méthode explicite ou implicite

Dans une procédure de calcul explicite, l'état du système à un instant donné est déterminé à partir seulement des informations sur son état à un pas de temps antérieur. Par contre, dans une méthode implicite, afin de réduire la nonlinéarité temporelle du système, on fait intervenir les données sur l'état actuel du système afin de déduire les informations sur son état au même moment. Il existe aussi des démarches numériques où on utilise des schémas hybrides dits aussi semi-explicite ou semi-implicite. Dans ce dernier cas, la formulation du problème en question est divisée par exemple en deux parties, l'une est traitée implicitement et l'autre explicitement.

Différents algorithmes de calcul ont été introduits dans le cas d'une formulation ALE allant de l'explicite à des algorithmes totalement implicites [92]. En interactions fluides-structures, lorsque l'algorithme de couplage itère à plusieurs reprises entre les deux sous-domaines dans chaque pas de temps jusqu'à la convergence, l'approche dans ce cas, est qualifiée d'implicite [91]. Ceci assure un couplage fort par rapport à un couplage purement explicite assurant le couplage une seule fois à chaque pas de temps [70]. On pourrait aussi appliquer des schémas

d'intégration hybrides ou mixés IMEX (Implicite/Explicite) pour la simulation des problèmes d'interactions [93].

### 4.2.3. Méthode partitionnée ou monolithique

La procédure la plus intuitive consiste en un couplage partitionné totalement explicite [70]. Ce qui signifie : que des solveurs déjà existants pourront servir séparément pour la résolution du domaine fluide et de la structure. En d'autres termes, chaque outil numérique est utilisé afin de résoudre ses propres équations sur un domaine distinct. Le couplage dans ce cas de figure est réalisé à chaque pas de temps par l'introduction des conditions aux limites. D'une autre façon, on peut dire que dans une stratégie de résolution partitionnée, les termes de couplage entre le fluide et la structure ne sont pas résolus dans un système entièrement couplé, mais ils sont donnés à titre de conditions aux limites. Dans le cas où l'échelle de temps dans le champ d'écoulement est plus petite que celle de la structure, une procédure de sous-itération peut être utilisée.

Dans certains cas d'interactions fortes, l'utilisation des procédures de résolution simultanées est conseillée afin d'assurer la stabilité et d'accélérer la convergence. Dans une procédure simultanée dite aussi monolithique [94, 95, 96] un seul système d'équations pour l'ensemble du problème couplé est formulé. Ce qui permet la résolution de toutes les inconnues du problème couplé simultanément aux mêmes instants. L'assurance de la convergence dans ce cas est optimisée. Toutefois, dans les procédures de résolution simultanées le pas de temps doit être le même pour tous les sous-systèmes, ce qui peut se révéler inefficace si différentes échelles de temps sont mises en jeu. En outre, la formulation du problème en un seul système d'équations peut conduire à des matrices males conditionnées y compris des éléments nuls sur la diagonale [97].

Dans la pratique, c'est une stratégie intermédiaire qui est la plus adoptée afin de combiner les avantages et d'éviter les inconvénients de ces deux approches partitionnée et monolithique [98]. Afin d'obtenir un fort couplage, un système prédicteur-correcteur est suggéré. Cela voudrait dire : que les conditions de couplage des deux sous-domaines fluides et structures sont communiquées à plusieurs reprises dans chaque pas de temps jusqu'à convergence. Dans ce cas, l'expérience montre une convergence plus rapide et de meilleures caractéristiques de stabilité au détriment d'efforts de programmation et de codage supplémentaires.

La figure 4.1 résume de façon simplifiée les points forts et faibles de chacune des approches.



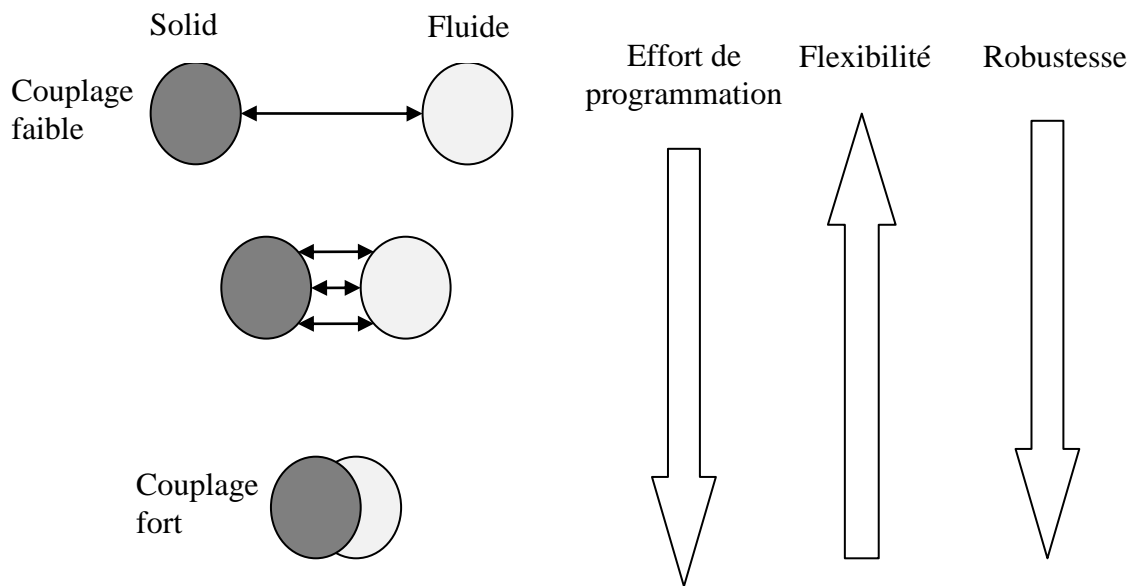


Figure 4.1 : Schématisation des stratégies de couplage

### 4.3. Algorithmes ou procédures de couplage

Un algorithme de couplage est nécessaire afin de prendre en compte l'interaction entre l'écoulement du fluide et le mouvement de la structure solide. Une stratégie simple et relativement facile à mettre en œuvre pour résoudre le problème non linéaire consiste à sous-itérer les sous-domaines en se basant sur la méthode du point fixe [99]. Malheureusement, ces méthodes sont coûteuses en matière de temps de calcul et la convergence est lente [100].

La méthode du point fixe est aussi appelée méthode de Gauss-Seidel par bloc, ce qui signifie que le problème d'écoulement et le problème structural sont résolus successivement, jusqu'à ce que le changement dans les résultats soit plus petit et vérifie le critère de convergence. La position de l'interface fluides-structures est souvent prise comme variable de contrôle du processus numérique.

La convergence des itérations de type point fixe peut être stabilisée par l'introduction d'une phase de relaxation [101, 102]. Une autre technique utilisée pour promouvoir la stabilité et accélérer la convergence des méthodes de point fixe, consiste en un algorithme modifié qui combine des itérations Gauss-Seidel par blocs avec une formulation de type transpiration [103]. Si l'interaction entre le fluide et la structure est faible, une seule itération de type point fixe peut suffire à chaque pas de temps. Ces algorithmes décalés ou faiblement couplés ne

font pas respecter l'équilibre sur l'interface fluide-structure dans un pas de temps. Par contre, ces derniers sont bien adaptés pour la simulation des phénomènes aéroélastiques avec des structures plutôt rigides [104].

Une autre méthode bien adaptée à la résolution des problèmes couplés est la méthode de Newton-Raphson par bloc BNR (Block Newton-Raphson). Cette dernière peut être utilisée aussi bien dans une procédure monolithique [105, 106] que partitionnée [107, 108]. Cette méthode, procède à la résolution des équations non linéaires de l'écoulement du fluide et du solide pour tous les variables dans l'ensemble du domaine physique avec la méthode de Newton-Raphson [109, 110], qui repose sur l'évaluation du Jacobien associé aux équations du système fluide-structure couplées [100].

Dans le domaine de la simulation des problèmes couplés, l'algorithme décalé le plus basique est représenté sur la figure 4.2. Cette dernière schématise le principe fondamental d'une approche partitionnée explicite baptisée procédure conventionnelle en série CSS (Conventional Serial Staggeed procedure). Cette procédure est très populaire dans le domaine de la simulation des problèmes d'aéroélasticité. Une version modifiée de l'algorithme CSS consiste à sous-itérer le sous-domaine fluide plusieurs fois dans un pas de temps. Par contre, le domaine solide est avancé en une seule étape. Sur la figure 4.3, il est représenté, qu'on a rajouté des sous itérations à la procédure de résolution de base CSS.

Comme le montre Farhat et Lasoiné [111], le désavantage de la procédure CSS est lié à une éventuelle défaillance en matière de stabilité numérique. Finalement, on se retrouve confronté à un problème de non-respect de la condition de continuité cinématique à l'interface.

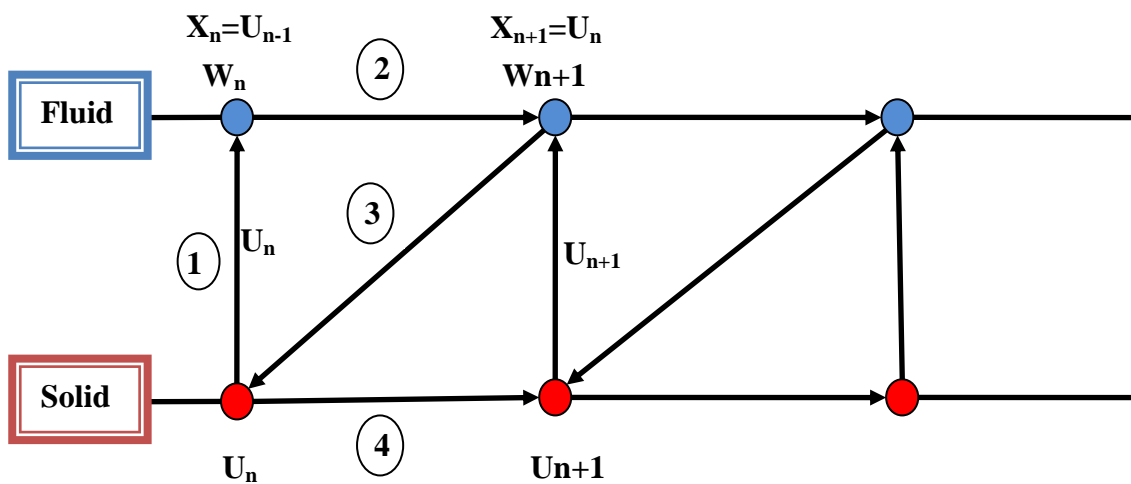


Figure 4.2 : Schématisation d'une procédure décalée conventionnelle CSS

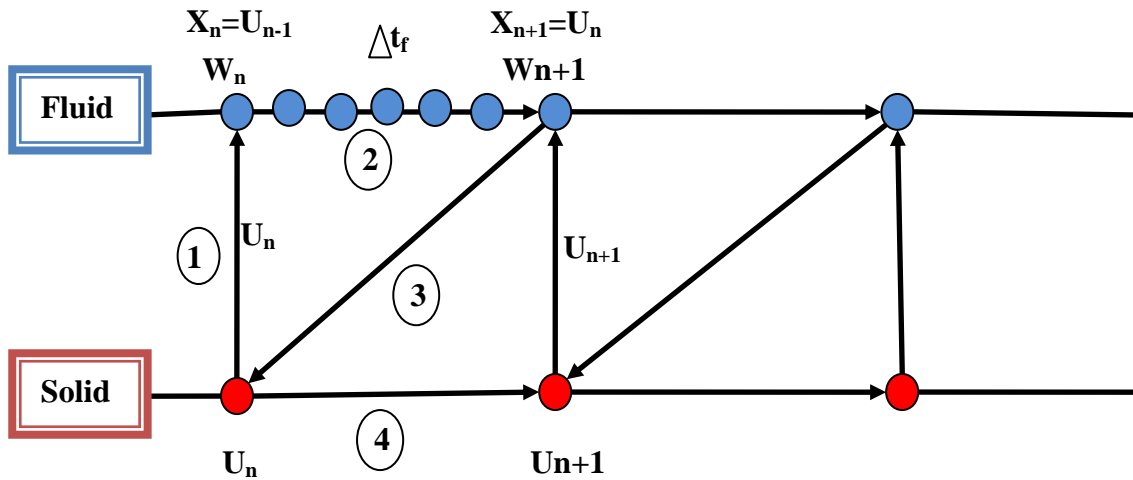


Figure 4.3 : Schématisation d'une procédure décalée conventionnelle avec sous-itération CSS-Subcyclin

Afin de contourner ce problème, Piperno [1] a proposé une procédure de résolution décalée ayant comme spécificité le dédoublement de l'interface fluide-structure. Cela veut dire que l'interface physique liée à la structure solide n'est pas la même considérée pour le domaine fluide. Dans cette méthode, chaque boucle de couplage est réduite à la résolution des équations du milieu fluide et ceux de la structure en plus d'une phase de prédiction explicite de la position de l'interface. Cette procédure n'est pas bien adaptée au traitement des problèmes fortement couplés ; car par le dédoublement de l'interface, on va contribuer à la violation de la dite loi de conservation de l'énergie.

Farhat et Lesoine [111] ont proposé une procédure améliorée appelée procédure décalée améliorée en série (Improved Staggered serial procedure) ISS. Comme indique la figure 4.4, on remarque que l'évolution de la structure est intégrée sur l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$  et celles du fluide et de la déformation de la grille de maillage le sont sur l'intervalle  $[t_{n-1/2}, t_{n+1/2}]$ . Ce schéma vérifie la loi de conservation géométrique et équivaut une résolution monolithique implicite [41]. En s'assurant de la conservation de l'énergie lors de la procédure numérique, on est certain de la stabilité et la précision des résultats. Il faut donc garder une démarche totalement implicite avec des méthodes itératives par bloc ou par une résolution monolithique.

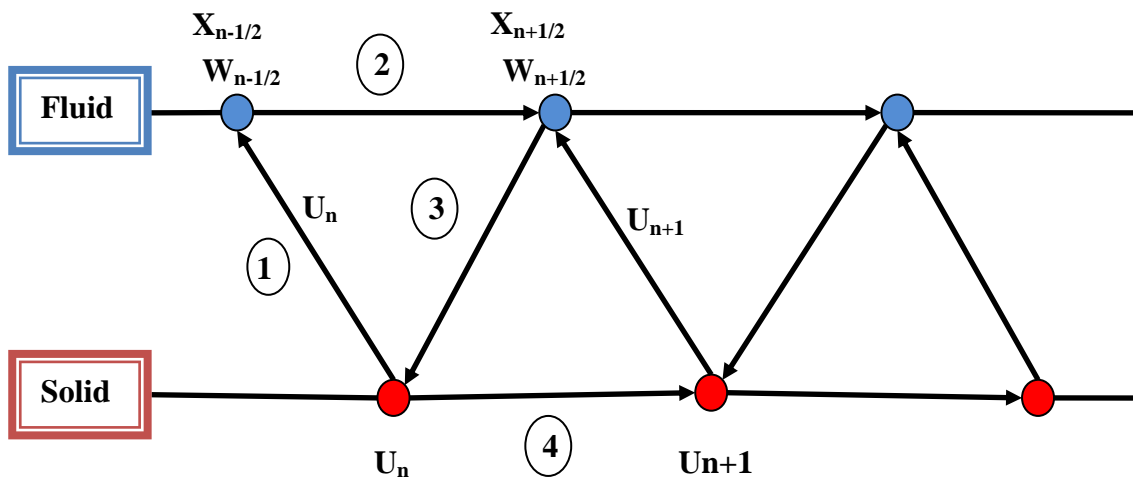


Figure 4.4 : schématisation d'une procédure décalée améliorée ISS

#### 4.4. Comportement aéroélastique d'un pont sous l'effet de vents

Le but de cette partie est la prédiction numériquement du comportement aéroélastique des ponts. On s'intéresse à l'approximation de l'interaction, en deux dimensions, d'un fluide visqueux incompressible et une section d'un pont vibrant. Dans cette étude, nous présentons un algorithme efficace visant à prédire le comportement dynamique couplé des structures subissant l'effet d'un vent soufflant en régime turbulent.

Afin de décrire mathématiquement l'écoulement du fluide dans le domaine de calcul déformé et à cause du déplacement de la section du pont, nous utilisons les équations de Navier-Stokes en formulation ALE. Le schéma numérique utilisé pour les simulations en régime instationnaire est mis en œuvre dans une forme satisfaisant la loi de conservation géométrique GCL. Pour la modélisation de la turbulence, nous adoptons la méthode de simulation des grandes échelles LES en utilisant le modèle de Smagorinsky. Le sous-système structure est modélisé comme un corps rigide soutenu par des ressorts. Le système non linéaire fortement couplé résultant est résolu par l'utilisation de la méthode des éléments finis et la méthode de Gauss-Seidel par bloc.

Les résultats obtenus pour différents nombres de Reynolds concernant l'écoulement autour de la section du pont et de la réponse aéroélastique de la structure solide montrent un bon accord avec des résultats expérimentaux et numériques disponibles.

De nos jours, l'étude du comportement d'une structure soumise à des chargements hydro ou aérodynamiques fait partie intégrante des tâches allouées à l'ingénieur. Dans la pratique, de tels problèmes sont rencontrés dans diverses branches de l'industrie, par exemple: l'industrie automobile, aérospatiale, navale, génie civil, etc....

En génie civil et en construction de grande bâtisse, l'évaluation des charges de vent est nécessaire pour vérifier la résistance des éléments constitutifs de la construction et du revêtement. Ces dernières années, les méthodes proposées par les scientifiques dans ce domaine sont constamment mises à jour. Les institutions de la normalisation mondiale sont donc obligées à chaque fois de revoir les normes qui sont en vigueur [58].

Sous l'effet de vent, les structures oscillent dans les deux directions parallèles et perpendiculaires à l'écoulement, et aussi suivant un mode de torsion. Le comportement dynamique du système devient instable, si le transfert d'énergie du champ d'écoulement à l'oscillateur structurel est plus élevé que la dissipation due à l'amortissement, en moyenne sur une période complète [112]. L'exemple le plus célèbre pour ces instabilités aéroélastiques, également appelé battement de pont, est l'échec du pont Tacoma Narrows en 1940.

D'importants travaux ont été entrepris en vue d'expertiser l'instabilité aéroélastique des structures élancées et des hauts bâtiments soumis à l'écoulement de vent. Des études expérimentales en grandeur réelle ont été entreprises par Li et al. [113]. En adoptant une approche analytique, Bo et al. [114] ont étudié l'effet de la torsion d'un écoulement de vent dans le domaine temporel. Ils ont estimé que les vibrations transversales sont causées par les fluctuations dans la couche limite et la zone de sillage. Alors que celles de la torsion, sont dues au déséquilibre dans la répartition de la pression instantanée sur la surface du bâtiment.

Katagiri et al. [115] ont proposé une méthode spectrale et une d'analyse temporelle pour l'estimation de la réponse d'un bâtiment. Un modèle aéro-élastique pour les vibrations de torsion des bâtiments a été proposé par Xu et al. [63]. Dans les souffleries, Ning et al. [116] ont étudié l'influence de la variation de la section transversale d'un bâtiment sur la charge aérodynamique. L'effet du coefficient d'aspect et de l'angle d'attaque a été étudié par Kawai [117].

Le développement important des modèles physiques et mathématiques ainsi que l'amélioration de la vitesse des ordinateurs et leurs capacités ont stimulé au cours de ces dernières années des progrès importants dans le traitement numérique des problèmes couplés en interactions fluide-structure. En génie civil, l'interaction fluide-structure présente de plus en plus un intérêt croissant, en particulier pour les effets du vent sur les structures élancées.

La réponse aéroélastique représentée par l'évolution du chargement dynamique et des niveaux de vibration a une grande influence sur la conception ainsi que sur le coût et la sécurité.

Dans certains cas, la déformation induite par les forces du vent devient nettement grande. La structure oscille dans le vent, donc des changements des frontières du domaine fluide selon le mouvement de la structure sont enregistrés. Il est impossible de décrire à la fois l'écoulement du vent et les mouvements de la structure sans tenir compte de l'interaction entre les deux [118]. Le problème doit être traité comme un problème de frontière en mouvement. Pour traiter ce problème, une formulation Arbitrairement Lagrangienne Eulérienne (ALE) et la méthode des éléments finis sont utilisées.

Il existe de nombreuses stratégies pour résoudre ce type de problèmes. Dans le présent travail [119], nous utilisons un algorithme efficace fondé sur une stratégie partitionnée fortement couplée. L'attention principale est portée à la comparaison des résultats de simulation numérique par apport aux données obtenues dans des expériences en soufflerie sur les vibrations de grande amplitude d'une section de pont dans un écoulement turbulent.

### 4.4.1. Description du domaine solide

Pour un corps rigide, le mouvement plan en deux dimensions, peut être décrit convenablement en termes de trois composantes, deux de déplacement et la troisième de rotation prévu au centre de gravité.  $X = (\xi, \eta, \theta)^T$ , où  $\xi$  et  $\eta$  sont les composantes de déplacements de translation suivant x et y et  $\theta$  désigne la composante de déplacement de rotation. Par conséquent, l'équation du mouvement peut être écrite comme suit:

$$\tilde{M} \ddot{X} + C \dot{X} + K X = F_p \quad \text{dans } \Omega_s(t) \quad 4.1$$

Où  $\tilde{M}$ ,  $C$  et  $K$  désignent respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité.  $F_p$

Désigne les efforts dus au fluide.

L'effet mécanique provoqué par l'écoulement du fluide sur le corps solide est constitué de trois composantes:  $F_x$  et  $F_y$  agissant dans des directions horizontale et verticale ainsi qu'un moment résultant  $M$ .

En Utilisant la méthode d'intégration de Newmark, le problème devient [120]:

$$\left[ \frac{I}{\alpha(\Delta t)^2} \tilde{M} + \frac{\beta}{\alpha \Delta t} C + K \right] X^{n+1} = F_p^{n+1} + \tilde{M} \left[ \frac{I}{\alpha(\Delta t)^2} X^n + \frac{I}{\alpha \Delta t} \dot{X}^n + \left( \frac{I}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{X}^n \right] + C \left[ \left( \frac{\beta}{\alpha \Delta t} X^n + \left( \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \dot{X}^n + \left( \frac{\beta}{\alpha} - 2 \right) \frac{\Delta t}{2} \ddot{X}^n \right) \right] \quad 4.2$$

$$\beta = 1/2 \text{ et } \alpha = 1/4.$$

#### 4.4.2. Conditions de couplage fluide-structure

Afin d'obtenir un modèle consistant du système fortement couplé en sa globalité, des conditions de couplage supplémentaires entre le fluide et la structure sont nécessaires. La formulation proposée est totalement implicite qui est basée sur la vitesse (la continuité cinématique) et la traction (continuité cinétique) à chaque pas de temps. Les conditions de couplage assurent la continuité géométrique, ainsi que la conservation de l'énergie mécanique à l'interface.

Pour le fluide, l'interface est considérée comme une frontière de type Dirichlet, où les valeurs des vitesses doivent être égales à la vitesse du maillage et la structure solide.

$$U = U_m \quad \text{sur } \Gamma_I(t) \quad 4.3$$

Une condition de type Neumann représentant l'effort de traction du fluide sur l'interface est définie comme suit:

$$F = \int \left( -P + \mu (\nabla U + \nabla U^T) \right) \eta \, d\Gamma \quad \text{sur } \Gamma_I(t) \quad 4.4.a$$

$$M = \int \left[ -F_x (y - y_c) + F_y (x - x_c) \right] d\Gamma \quad \text{sur } \Gamma_I(t) \quad 4.4.b$$

Où  $P, \mu, (x_c, y_c), \Gamma_I$  et  $\eta$  sont respectivement la pression, la viscosité du fluide, les coordonnées du centre de rotation, le contour du corps solide et sa normale extérieure.

#### 4.4.3. Méthode numérique

Dans le domaine fluide, pour l'intégration dans le temps, nous utilisons le schéma d'Euler implicite décalé en arrière. La forme discrète des équations régissant l'écoulement, est obtenue par la méthode des éléments finis en utilisant la formulation de type stabilisé GLS (Galerkin Least Square).

Après la discrétisation des équations régissant le problème de fluide-structure, nous obtenons un système d'équations constituant un problème nonlinéaire fortement couplé.

4.4.3.1 Discrétisation par la méthode des éléments finis

A cause de la nature nonlinéaire du problème étudié, la linéarisation du système d'équations est nécessaire, afin de pouvoir numériquement résoudre les équations gouvernant l'écoulement. Le terme traduisant le transport convectif  $U \cdot \nabla U$  est linéarisé par  $U_k \cdot \nabla U_{k+1}$  avec la méthode de substitution successive connue pour ses bonnes propriétés de convergence concernant les équations de Navier Stokes.

Le terme de dérivée temporelle est discrétisé en utilisant le schéma d'Euler décalé arrière:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|^{n+1} = \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \quad 4.5$$

Où  $U^n$  et  $U^{n+1}$  sont successivement les vitesses à l'instant  $t_n$  et  $t_{n+1}$ .

La forme discrète des équations gouvernant l'écoulement est réalisée par l'utilisation de la méthode des éléments finis basée sur une formulation stabilisée dite de Galerkin moindre carrée (GLS acronyme Galerkin Least Square) [44]. Cette formulation satisfait les conditions LBB (Ladyzhenskaya - Babuska - Brezzi) et permet l'utilisation des éléments hybrides avec un ordre d'interpolation de la pression et de la vitesse égal [79].

La forme faible des équations de Navier Stokes s'écrit: pour  $f$ ,  $U_D$  et des conditions de traction aux frontières  $h$ ; trouver le champ de vitesse  $U \in \Phi_u^h$  et le champ de pression  $P \in \Phi_p$ , tels que pour toutes fonctions  $(v, q) \in (\Phi^h \times \Phi_p)$ .

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_f} \left( \frac{U}{\Delta t} + (U_k - U_m) \nabla U \right) v \, d\Omega + \int_{\Omega_f} v_{\text{effe}} (\nabla U + \nabla U^T) : \nabla v \, d\Omega - \int_{\Omega_f} P \nabla v \, d\Omega + \\ & \sum_e \int_{\Omega_e} \tau^{\text{GLS}} \left[ \left( \frac{U}{\Delta t} + (U_k - U_m) \nabla U \right) - v_{\text{effe}} \nabla (\nabla U + \nabla U^T) + \nabla P \right] \cdot [(U_k - U_m) \nabla v - \\ & v_{\text{effe}} \nabla (\nabla v + \nabla^T v) + \nabla q] \, d\Omega = \int_{\Omega_f} \left( f + \frac{U^n}{\Delta t} \right) v \, d\Omega + \\ & + \sum_e \int_{\Omega_e} \tau^{\text{GLS}} \left( f + \frac{U^n}{\Delta t} \right) [(U_k - U_m) \nabla v - v_{\text{effe}} \nabla (\nabla v + \nabla^T v) + \nabla q] \, d\Omega + \int_{\Gamma_h} h v \, d\Gamma \end{aligned} \quad 4.6.a$$

$$\int_{\Omega_f} \nabla U q \, d\Omega = 0 \quad 4.6.b$$

$$\Phi_U^h := \{U \in H^1(\Omega_F^E) / U = U_D \text{ on } \Gamma_D\} ; \Phi^h := \{v \in H^1(\Omega_F^E) / v = 0 \text{ on } \Gamma_D\} \text{ et } \Phi_p := L^2$$



$\nu_{effe} = \nu + \nu_T$  : Viscosité cinématique effective

Pour des besoins de clarté  $U_{k+1}^{n+1}$  est notée  $U$ . Nous avons aussi défini  $U^n$  comme étant la vitesse au pas de temps précédent  $t^n$  et  $U_k$  la vitesse à l'itération nonlinéaire précédente.

Le paramètre de stabilisation de la formulation GLS est défini comme suit [44]:

$$\tau^{GLS} = \left[ \left( \frac{1}{\Delta t} \right)^2 + \left( \frac{2 U_h}{h_e} \right)^2 + 9 \left( \frac{4 \nu}{h_e^2} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad 4.7$$

$h_e$  : Taille locale de l'élément

$U_h$  : Vitesse local

#### 4.4.3.2. Résolution du problème couplé nonlinéaire

Les équations et les conditions aux frontières 4.6, 4.2 ainsi que les conditions de couplage 4.3 et 4.4 forment un système nonlinéaire fortement couplé. Ce problème peut être résolu comme suit :

$$(U, P) = F^* ((U, P); (X_m, U_m)) \quad \text{Sous-domaine fluide} \quad 4.8.a$$

$$(X_S, U_S) = S^* ((X_S, U_S); (U, P)) \quad \text{Sous-domaine solide} \quad 4.8.b$$

$$(X_m, U_m) = M^* ((X_m, U_m); (X_0, U_0)) \quad \text{Pseudo-structure (maillage déformable)} \quad 4.8.c$$

Où  $U, P, X_s, U_s, X_m, U_m, X_0$  et  $U_0$  sont définis comme la vitesse des particules fluides, la pression, le déplacement de la structure, la vitesse de la structure, déplacement du maillage, vitesses du maillage ainsi que le déplacement et la vitesse à l'interface fluide-structure.

Le problème 4.8 pourrait être résolu par une méthode de Gauss-Seidel par Bloc BGS. Qui consiste à sous itérer les trois sous-domaines définis dans le problème comme suit:

$$(U_{k+1}, P_{k+1}) = F^* ((U_k, P_k); (X_{m,k}, U_{m,k})) \quad 4.9.a$$

$$(X_{S,k+1}, U_{S,k+1}) = S^* ((X_{S,k}, U_{S,k}); (U_{k+1}, P_{k+1})) \quad 4.9.b$$

$$(X_{m,k+1}, U_{m,k+1}) = M^* ((X_{m,k}, U_{m,k}); (X_{0,k+1}, U_{0,k+1})) \quad 4.9.c$$

Le choix de la variable de contrôle est très important. Ici nous avons choisi le déplacement à l'interface. Cela signifie que si l'écart entre deux déplacements successifs de l'interface est inférieur à une tolérance fixée, les itérations sont stoppées.

A chaque itération nonlinéaire, les systèmes linéarisés résultants sont traités en utilisant le solveur BiCGStab (Stabilized Bi-Conjugate method for non-Symmetric matrices) pour le sous-domaine fluide et le solveur CG (Conjugate Gradient) pour la structure et la déformation du maillage.

### 4.4.4. Investigations numériques

Dans cette partie, on s'intéresse à l'étude de stabilité d'un pont réel. Ce dernier est le pont à haubans SUCHARSKI sur la rivière MARTWA WISLA à Gdansk (Poland). Pour la validation du modèle numérique par l'expérience, on va s'intéresser au comportement vibratoire d'une maquette sectionnelle du tablier réel sous l'effet d'un vent soufflant uniforme.

Les travaux d'expérimentations ont été réalisés dans la soufflerie atmosphérique NSA du CSTB, à Nantes, afin d'étudier la stabilité aérodynamique du tablier du pont à l'aide d'une maquette sectionnelle à l'échelle du 1/50ème.

Le même problème a été traité numériquement par Zibouche et al. [121]; où ils ont considéré que le domaine solide est déformable et que l'évolution temporelle de la structure solide décrite par une approche purement lagrangienne est définie par une équation nonlinéaire.

La structure solide est modélisée comme il est représenté sur la figure 4.5. Les rigidités en mode de flexion et de torsion sont simulées par l'effet de ressorts placés sur les deux bords de la maquette sectionnelle. D'autre part, l'amortissement structurel est remplacé par l'effet des deux amortisseurs.

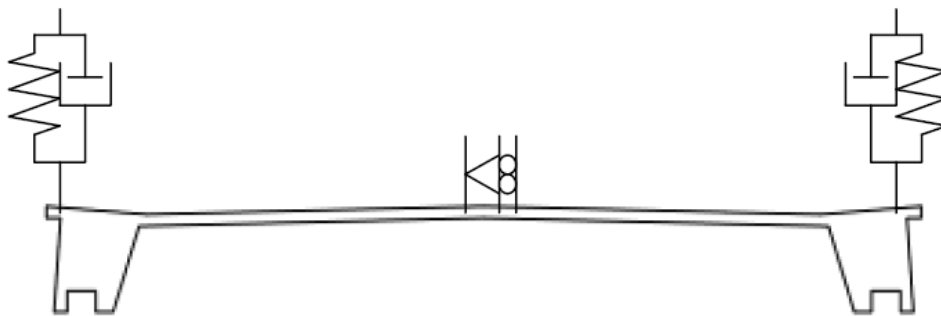


Figure 4.5 : La géométrie de la section du pont étudié

Les paramètres de calcul sont résumés dans le tableau 4.1.

Les données	Valeurs
Nombre d'éléments	34528 éléments
Type d'élément	Triangles P1/P1
Modélisation de la turbulence	Filtre de Smagorinsky
Viscosité du fluide	$1.82 \times 10^{-5}$
La masse de la structure	11.8[Kg]
Inertie de la structure	0.221[Kg.m <sup>2</sup> ]
Densité du fluide	1.18
Amortissement	0.64% de l'amortissement critique
Raideur des ressorts	5320[N/m]
Pas de temps	0.01

Tableau 4.1 : Paramètres du test numérique

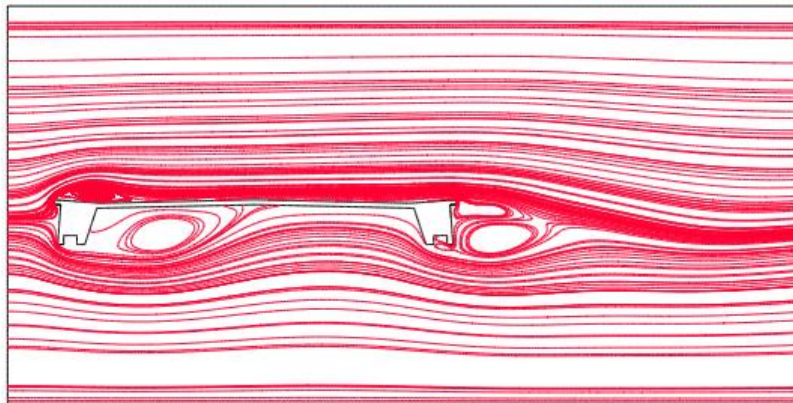
La figure 4.6 représente l'évolution temporelle des lignes de courant d'un écoulement d'air autour de la section du pont. Les oscillations observées dans le sillage de la maquette sectionnelle traduisent le phénomène de détachement qui continue à avoir lieu d'une manière perpétuelle et alternée dans le temps. Ce phénomène d'éclatement tourbillonnaire, se traduit par un signal périodique des champs de vitesse et de pression, et par conséquent les charges aérodynamiques vont varier de façon cyclique. Ces dernières vont exciter la structure solide en mode flexionnel et torsionnel.

Pratiquement, après 60 secondes du début de l'expérimentation, on observe que les amplitudes des vibrations de la structure croissent considérablement. Cet accroissement est traduit sur la figure 4.6 par le fait que les lignes de courant croisent les frontières de la section du pont.

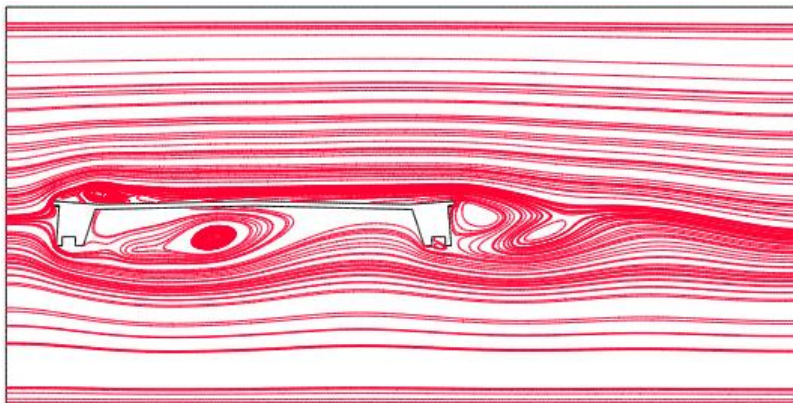
La Figure 4.7 montre une comparaison entre des résultats numériques et expérimentaux. Cette figure montre la relation entre l'écart-type des déplacements verticaux et la vitesse à l'entrée du domaine. Les données expérimentales ainsi que des résultats numériques ont une amplitude maximale, lorsque la vitesse est de 18m/s. Il est supposé que la fréquence naturelle de la structure solide et la fréquence d'éclatement des vortex sont égales quand la vitesse d'entrée approche 18m /s.

Pour le pic visible à 30m/s, il provient de l'excitation de la maquette sectionnelle sur un mode de tangage. Pour notre cas de figure, l'étude est en deux dimensions et le mode de tangage est impossible à reproduire.

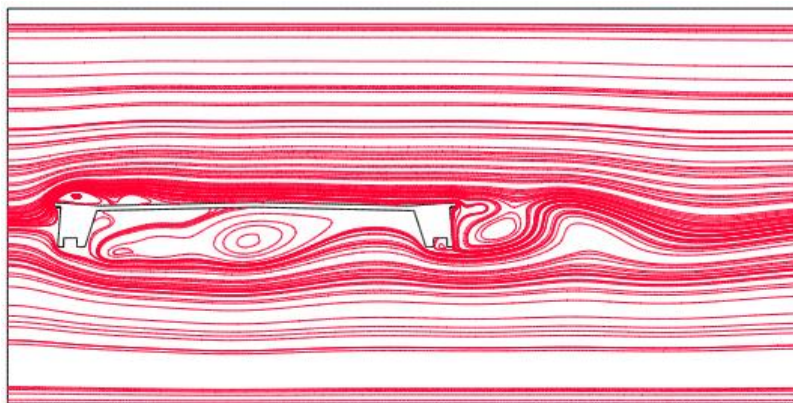
On remarque sur la figure 4.8 que les rotations de la section du tablier sont relativement sous-estimées d'après les résultats des simulations.



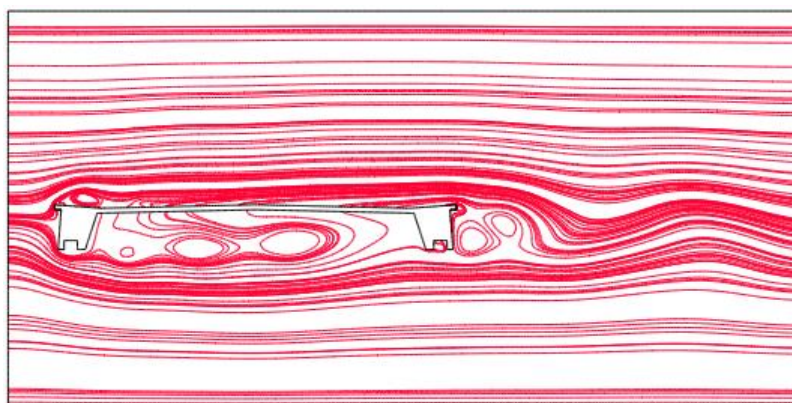
t=5s



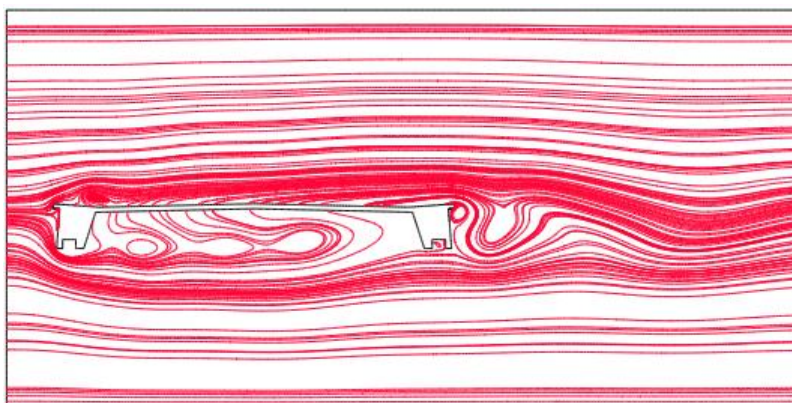
t=10s



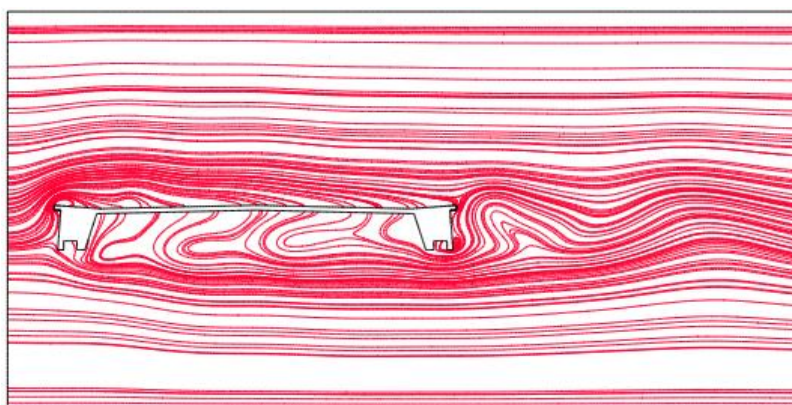
t=20s



t=60



t=100s



t=150s

Figure 4.6 : Evolution temporelle des lignes de courant autour de la section du pont pour une vitesse du vent égale 16m/s



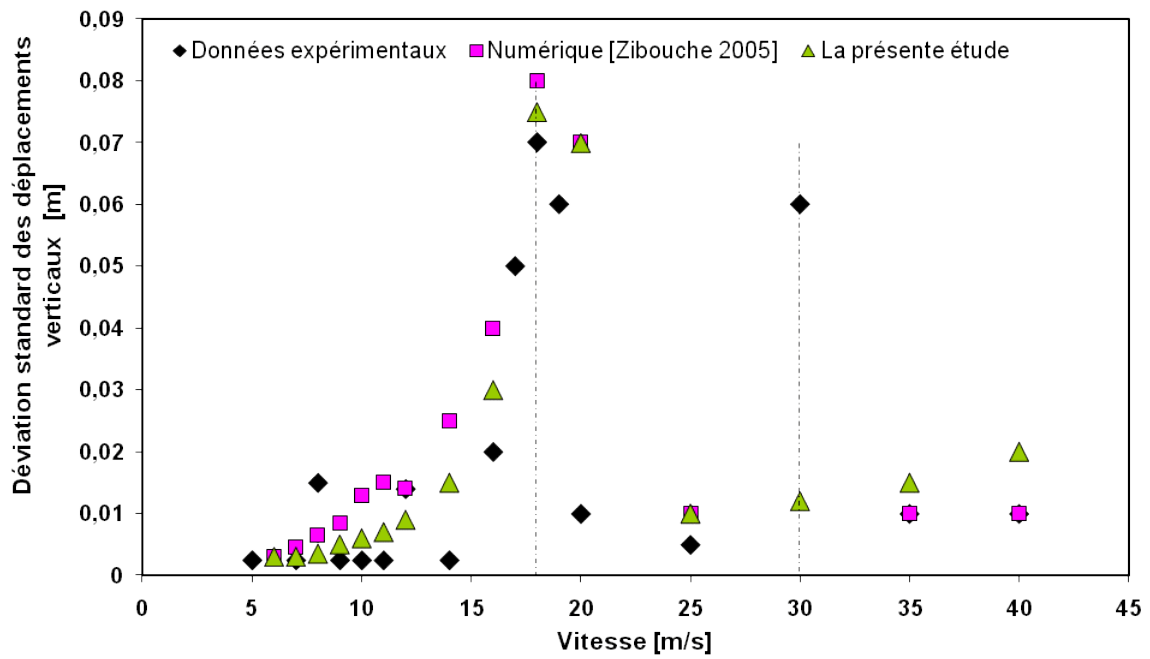


Figure 4.7 : Déviation standard des déplacements verticaux en fonction de la vitesse du vent

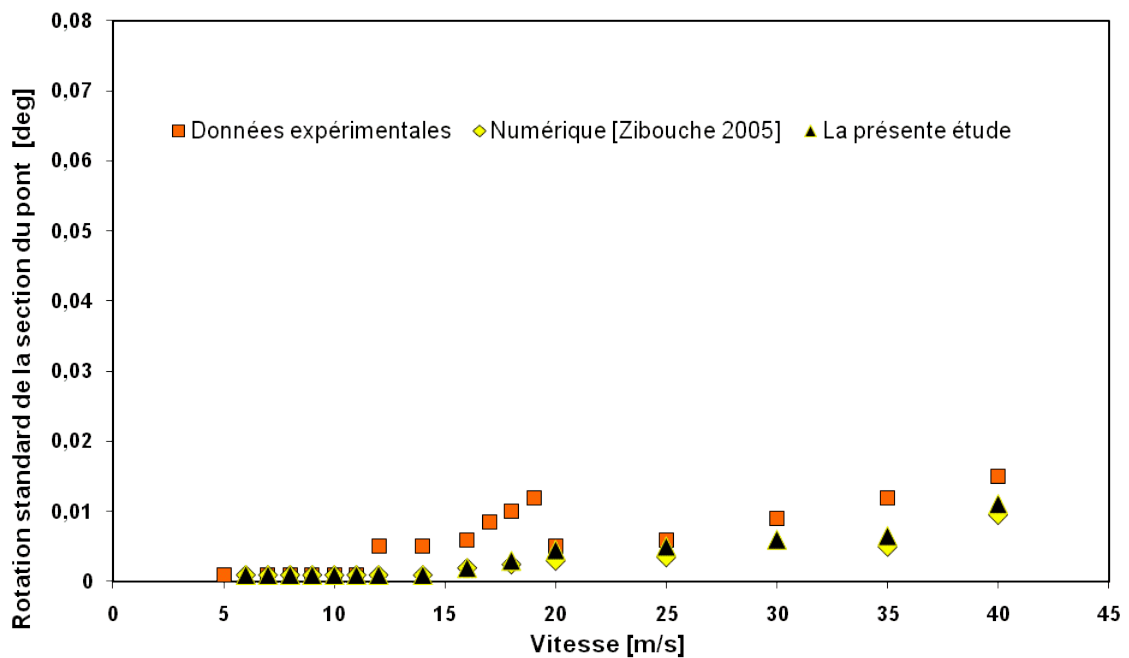


Figure 4.8 : Rotation standard de la section du pont en fonction de la vitesse du vent

## 4.5. Conclusion du chapitre

Après une présentation des différentes procédures de résolution numérique des problèmes d'interactions fluide-structure, on a entrepris l'étude d'un cas test qui concerne le comportement aéroélastique d'un pont à hauban. Pour cela, on a utilisé une approche partitionnée totalement implicite fortement couplée. Les résultats numériques obtenus par la méthode actuelle sont en raisonnable accord avec les résultats expérimentaux. Le test montre les potentialités de la simulation numérique en engineering à la phase de conception.

## **Conclusion générale**



# Conclusion générale

Ce qui caractérise le plus l'étude des phénomènes des interactions fluides-structures, c'est son aspect interdisciplinaire. Afin de pouvoir résoudre le problème en sa globalité, nous devons utiliser à la fois un modèle mathématique régissant l'écoulement du fluide et un autre traduisant l'évolution dans le temps et la réponse de la structure solide. Le véritable couplage des deux sous-domaines prend naissance à travers l'interface fluide-structure. C'est par cette dernière qu'auront lieu les échanges énergétiques entre les deux milieux mis en jeu.

Dans une procédure numérique de résolution des problèmes d'interactions fluides-structures, le couplage des deux sous-domaines est réalisé principalement par le biais des conditions de continuité cinématique et d'équilibre dynamique régnant à l'interface dite aussi frontière mouillée. Il est très important de vérifier les schémas de discrétisation utilisés dans les deux sous-domaines ainsi que l'algorithme utilisé d'un point de vue stabilité. Car un choix inapproprié pourrait conduire à des résultats erronés ou perturbés. Pour qu'une approche numérique soit mathématiquement stable, elle ne doit pas générer une variation d'origine non physique de l'énergie mécanique du système global (fluide et structure solide). La démarche à entreprendre doit assurer que la diminution de l'énergie cinétique du système global n'est due qu'à l'effet de la viscosité du fluide ou bien à l'amortissement structurel du corps solide s'il est pris en considération dans les calculs.

Dans cette thèse, avant d'aborder le vif du problème des interactions fluides-structures, nous avons présenté les modèles d'éléments finis spécifiques à la simulation des écoulements de fluides. L'implémentation de méthode stabilisée GLS (Galerkin Least-Squares) et la méthode LES pour le traitement de la turbulence a permis la réalisation de plusieurs expérimentations numériques. A travers les résultats obtenus, nous avons pu estimer les bonnes propriétés en matière de précision et de stabilité de l'approche utilisée surtout pour la simulation des écoulements de fluides autour d'obstacles. La démarche entretenue a fait preuve de grande capacité pour la capture numérique du phénomène d'éclatement tourbillonnaire dans la zone de sillage d'obstacle solide.

En deuxième phase, nous avons exposé les techniques numériques liées à la simulation des écoulements en milieux déformables. Pour cela, nous avons utilisé une formulation ALE (Arbitrairement Lagrangienne Eulérienne) des équations de Navier-Stokes. La particularité de cette formulation exige l'introduction à chaque pas de temps d'une étape de déplacement du maillage. Pour cela, nous avons choisi d'utiliser une démarche dite pseudo-élastique afin que la grille du maillage puisse traquer le domaine physique réel qui est dans ce cas en perpétuel mouvement. Les cas tests réalisés dans cette partie touchent l'étude du ballotement dans les réservoirs partiellement remplis de liquide. Plusieurs investigations ont été réalisées et des résultats intéressants ont été discutés. A titre d'exemple un résultat d'importance pratique a été prouvé qui concerne l'effet amortissant considérable de l'introduction d'un séparateur verticalement juste à la surface libre d'un réservoir. Dans cette catégorie de méthode, l'opération de remaillage peut engendrer dans certains cas où la déformation du domaine de calcul est excessive une dégradation de la qualité du maillage, ce qui affecte considérablement la précision des résultats et dans certains cas extrêmes la divergence du processus itératif. Par conséquent, cela impose certaines limitations.

Finalement, nous avons intégré les équations décrivant le comportement vibratoire d'un corps solide avec les équations de Navier-Stokes en configuration ALE. Ce qui nous a permis par une procédure partitionnée fortement couplée en adoptant la méthode de Gauss-Seidel par bloc la simulation des vibrations des corps rigides induits par les écoulements de fluides. Dans cette partie, nous nous sommes intéressés à l'étude de la stabilité d'un pont à haubans. Pour la validation du modèle numérique par l'expérience, nous avons examiné le comportement vibratoire d'une maquette sectionnelle du tablier réel sous l'effet d'un vent soufflant uniforme. Les résultats numériques obtenus par la méthode actuelle sont en raisonnable accord avec les résultats expérimentaux. Ce test permet de montrer le grand potentiel d'utilisation de la simulation numérique dans la conception des ouvrages.

Malgré les véritables progrès observés ces dernières années en matière de simulation numérique des interactions fluides-structures, nous pensons que dans ce domaine les choses ne viennent que de commencer. Avec l'accroissement accru des capacités des moyens de calcul, des problèmes de plus en plus complexes peuvent être traités, ce qui révélera d'autres secrets concernant la physique des interactions fluides-structures. D'autres méthodes qui s'annoncent déjà très propices pour le traitement des discontinuités trouveront sûrement un avenir dans ce domaine. A titre d'exemple, nous pouvons citer la méthode des éléments finis enrichis (XFEM). D'un autre côté, un couplage entre la formulation ALE et la méthode des

niveaux de volume de fluide pourrait présenter une alternative aux méthodes existantes traitant le problème d'interaction fluide structure élastique en présence d'une surface libre. Il est aussi nécessaire de noter que nous estimons qu'il est important d'expertiser l'effet d'une modélisation de la structure solide en considérant le caractère aléatoire des chargements dynamiques. Dans ce cas, le modèle mathématique du sous-domaine solide va faire partie de la théorie des vibrations aléatoires. Finalement, l'intégration de l'équation de l'énergie et la prise en compte des échanges thermiques entre les deux milieux fluides et solides révéleraient certainement d'autres secrets de la nature.

# **Bibliographie**

# Bibliographie

1. **S., Piperno.** *Simulation numérique des phénomènes d'interaction fluide-structure.* Thèse de 3ème cycle de l'école Nationale des Ponts et Chaussées, 1995.
2. **M. A., Fernandez Varela.** *Modèles Simplifiés d'Interaction Fluide-Structure.* Thèse de doctorat de l'Université Paris IX Dauphine, 2001.
3. **P-A., Hansson et G., Sandberg.** Dynamic finite element analysis of fluid-filled pipes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2001, Vol. 190, 3111-3120.
4. **R-J., Gilbert.** *Vibrations des structures -Interaction avec les fluides Sources d'excitation aléatoires-*. Paris : EYROLLES, 1998.
5. **H. C., Chen et R. L., Taylor.** Vibration analysis of fluid-solid systems using a finite element displacement formulation. *International Journal of Numerical Methods in Engineering.* 1990, Vol. 29, 683-698.
6. **W. C., Muller.** Simplified Analysis of Linear Fluid-Structure Interaction. *International Journal For Numerical Methods in Engineering.* 1981, Vol. 17, 113-121.
7. *POD-Galerkin method in fluid structure interaction.* **E., Liberge et A., Hamdouni.** Prague, 2008. Flow Induced Vibration, 97-101.
8. **A., Hamdouni, F., Chinesta et E., Liberge.** Réduction de modèle en interaction fluide-structure via la décomposition orthogonale aux valeurs propres. Souli M. et Sigit J-F. *Interaction fluide-structure.* Paris : Lavoisier, 2009.
9. **H., Benaroya et R. D., Gabbai.** Modelling vortex-induced fluid-structure interaction. *Phil. Trans. R. Soc.* 2008, Vol. A 366, 1231-1274.
10. **E., Liberge et A., Hamdouni.** Reduced order modelling method via proper orthogonal decomposition (POD) for flow around oscillating cylinder. *Journal of Fluids and Structures.* 2010, Vol. 26, 292-311.
11. **J., Hron et S., Turek.** A monolithic FEM/multigrid solver for ALE formulation of fluid structure interaction with application in biomechanics. Bungartz H. J et Schafer M. *Lecture Notes in Computational Science and Engineering.* Springer, 2006.
12. **A., Lagay, J., Chessa et T., Belytschko.** An Eulerian-Lagrangian method for fluid-structure interaction based on level sets. *Compt. Methods Appl. Engrg.* 2006, Vol. 195, 2070-2087.
13. **L. T., Zhang et M., Gay.** Immersed finite element method for fluid-structure interaction. *Journal of Fluids and Structures.* 2007, Vol. 23, 839-857.
14. **A., Gerstenberger et W. A., Wall.** An eXtended Finite Element Method/Lagrange multiplier based approach for fluid-structure interaction. *Compt. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2008, Vol. 197, 1699-1714.
15. **T., Belytschko et T., Balack.** Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 1999, Vol. 45 (5), 601-620.
16. **N., Moe's, J., Dolbow et T., Belytschko.** A finite element method for crack growth without remeshing. *Int. J. Methods Engrg.* 1999, Vol. 46 (1), 131-150.
17. **C., Benardi, Y., Maday et A. T., Petera.** A new conforming approach to domain decomposition: the mortar element method. *Nonlinear Partial Differ. Equations Appl.* 1994, Vol. 299, 13-51.
18. **K., Sugiyama, S., Ii, S. Takenchi, S., Takagi et Y., Matsumoto.** A full Eulerian finite difference approach for solving fluid-structure coupling problems. *Journal of computational physics.* 2011, Vol. 230, 596-627.

19. **C. W., Hirt et B. D., Nichols.** Volume of fluid method for dynamics of free boundaries. *J. Comput. Phys.* 1981, Vol. 39, 201-225.
20. **T. E., Tezduyar, M., Behr et J., Liou.** A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces -the Deforming-Spatial-Domain/Space-time procedure: I. the concept and preliminary numerical tests. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 1992, Vol. 94, 339-351.
21. **T. E., Tezduyar, M., Behr et S., Mittal.** A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces -the Deforming-Spatial-Domain-Time procedure: II. computations of free-surface flows, two-liquid flows, and flows with drifting cylinder. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 1992, Vol. 94, 353-371.
22. **W. M., Lai, D., Rubin et E., Krempl.** *Introduction to continuum mechanics.* Elsevier, 1993.
23. **M. A., Fernandez.** *Modèles simplifiés d'interaction fluide-structure.* Université Paris Dauphine, 2001.
24. **J. R., Cho et S. Y., Lee.** Dynamic analysis of baffled fuel-storage tanks using the ALE finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids.* 2003, Vol. 41, 185-208.
25. **C., Farhat et M., Lesoinne.** Two efficient staggered algorithms for serial and parallel solution of three-dimensional nonlinear transient aeroelastic problems. *Comput. Methods Appl. Engrg.* 2000, Vol. 182, 499-55.
26. **S., Piperno et C., Farhat.** Partitioned procedures for transient solution of coupled aeroelastic problems -Part II: energy transfer analysis and three-dimensional applications. *Comput. Methods Appl. Engrg.* 2001, Vol. 190, 3147-3170.
27. **S. C., Bernner et Ridgway scott, L.** *The Mathematical theory of Finite Element Methods, Third Edition.* Springer, 2008.
28. **R., Courant.** Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations. *Bulletin of the American Mathematical Society.* 1943, Vol. 49(1), pp. 1-23.
29. **M. J., Turner, R. W., Clough, H. C., Martin et L. J., Topp.** Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal of Aeronautical Society.* 1956, Vol. 23(9), pp. 805-824.
30. **O. C., Zienkiewicz, R. L., Taylor.** *The Finite Element Method, Fifth Edition, volume 3: Fluid Dynamics.* Butterworth-Heinemann, 2000.
31. **G. Dhatt et G. Touzot.** *Une présentation de la méthode des éléments finis, Deuxième édition.* Collection Universitaire de Compiègne, Maloine S. A., 1984.
32. **J., Donea, et A., Huerta.** *Finite Element Methods for Flow Problems.* John Wiley & Sons Ltd, 2003.
33. **A. J., Baker.** *Finite Element Computational Fluid Mechanics.* McGraw-Hill, 1983.
34. **R., Codina.** On stabilized finite element methods for linear systems of convection-diffusion-reaction equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2000, Vol. 188(1-3), pp. 61-62.
35. **F., Shakib et T.J.R., Hughes.** A new finite element formulation for computation fluid dynamics. IX. Fourier analysis of space-time Galerkin/least-squares algorithms. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 1991, Vol. 87 (1), 35-58.
36. **P. A., Durdin.** *Turbulence closure models for computational Fluid, Encyclopedia of Computational Mechanics.* John Wiley & Sons, 2004.
37. **J., Blazek.** *Computational Fluid Dynamics, Principales and Applications.* Elsevier, 2001.
38. **P., Sagaut.** *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows, third edition.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

39. **P., Sagaut.** Turbulence Direct Numerical Simulation and Large-Eddy Simulation. De Borst R., Hughes T. J. R. Stein E. *Encyclopedia of Computational Mechanics*. John Wiley & Sons, Ltd, 2004.
40. **G-S, Karamanos et G. E., Karniadakis.** A Spectral vanishing method for Large-Eddy Simulation. *Journal of Computational Physics*. 2000, Vol. 163, 22-50.
41. **K., Zibouche.** Thèse de Doctorat. *Simulation numérique des problème d'interactions fluide-structure appliqués au domaine du bâtiment et génie civil*. Université Paris 6 - Pierre et Marie Curie, le 15 décembre 2005.
42. **S. K., Hannani, M., Stanislas et P., Dupont.** Incompressible Navier-Stokes computations with SUPG and GLS formulations - A comparaison study. *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.* 1995, Vol. 124, 153-170.
43. **O., Pironneau.** *Méthode d'éléments finis pour les fluides*. Masson, 1998.
44. **J., Donea et A., Huerta.** *Finite Elements Methods for flow Problems*. wiley, 2003.
45. **S., Goujon-Durand.** Technical note linearity of the vortex meter as function of fluid viscosity. *Flow Meas. Instrum.* 1995, Vol. 6 (3), 235-238.
46. *Etude du sillage proche d'un cylindre circulaire à grand nombre de Reynolds par moyenne de phase et par POD*. **R., Perrin, M., Braza, E., Cid, S., Cazin, A., Barthet, A., Sevrain, C., Mockett et F., Thiele.** Toulouse : Congrès Francophone de Techniques Laser, 2006.
47. *Analyse d'un détachement tourbillonnaire par utilisation de la POD et de la PIV*. **M., Michard et T., Favelier.** Toulouse : Congrès Francophone de Techniques Laser, 2006.
48. **B. W., Van Oudheusden, F., Scarano, N. P. Van Hinsberg et D. W., Watt.** Phase-resolved characterization, of vortex shedding in the near wake of a square-section cylinder at incidence. *Exp. In Fluids*. 2005, Vol. 39, 86-98.
49. *Simulation numérique du phénomène d'eclatement tourbillonnaire dans la zone de sillage d'un obstacle de section circulaire*. **R., Belakroum, T. H., Mai, M., Kadja et K., Zibouche.** Constantine, Algérie : Dar El-Houda, First International Conference on Energetics and Pollution, 2007. 245-251.
50. **H., Volker et H., Windorfer.** Comparison of pressure and ultrasound measurements in vortex flow meter. *Mesurement*. 2003, Vol. 33, 121-133.
51. **J.P., Bently, R.A., Benson et Shanks, A.J.** The development of dual body vortex flowmeters. *Flow Measur Instrum.* 1996, Vol. 7 (2), 85-90.
52. **J., Peng, X., Fu et Y., Chen.** Flow measurement by a new type vortex flowmeter of dual triangulate bluff body. *Sensors and Actuators*. 2004, Vol. A 115, 53-59.
53. **Y-J., Jan et T. W-H., Sheu.** A numerical confirmation of the dual vortex flowmeter design. *Computers & fluids*. 2004, Vol. 33, 1157-1174.
54. **A., Okajima.** Strouhal numbers of rectangular cylinders. *J. Fluid Mech.* . 1982, Vol. 123, 379-398.
55. **A., Sohankar.** Flow over a bluff body from moderate to high Reynolds numbers using large eddy simulation. *Computers & Fluids*. 2006, Vol. 35, 1154-1168.
56. **B.J., Vickery.** Fluctuating lift and drag on along cylinder of square cross-section in turbulent stream. *J. Fluid Mech.* 1996, Vol. 25, 481-494.
57. *Numerical simulation of vortex flow meters*. **R., Belakroum, T. H., Mai, M., Kadja et K., Zibouche.** Prague, République Tchèque : s.n., 9th international conference on flow-induced vibrations 2008. 871-876.
58. **Y., Tamura, Y., Kawai, H., Uematsu, K. Marukawa, Y. Fujii et Tanniike.** Wind load and wind-induced response estimations in the recommendations for loads on buildings. *AIJ Engineering Structures*. 1996, Vol. 18 (6), 399-411.
59. **S., Liang, Q. S., Li, S., Liu, L., Zhang et M., Gu.** Torsional dynamic wind loads on rectangular tall buildings. *Engineering Structures*. 2004, Vol. 26 (1), 129-137.



60. **Q. S, Li, K., Yang, C. K., Wong et A. P., Jeary.** Full scale measurements of wind effects on tall buildings. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 1998, Vol. 74-76, 741-750.
61. **B., Liang, Y, Tamura et S., Suganuma.** Simulation of Wind-Induced effects on tall buildings. *Computers and Structures*. 1997, Vol. 63 (3), 601-606.
62. **K., Junji, T., Ohkuma et H., Marukawa.** Analytical method for coupled across-wind and torsional wind responses with motion-induced wind forces. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 2002, Vol. 90 (12-15), 1795-1805.
63. **Y. L., Xu, K.C.S., Kwork et B., Samali.** Torsion response and vibration suppression of wind-excited buildings. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 1992, Vol. 43 (1-3), 1997-2008.
64. **L., Ning, C., Letchford, Y., Tamura, B., Liang et O. Nakamura.** Characteristics of wind forces acting on tall buildings. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 2005, Vol. 93 (3), 217-242.
65. **H., Kawai.** Effects of angle of attack on vortex induced vibration and galloping of tall buildings in smooth and turbulent boundary layer flows. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 1995, Vol. 54-55, 125-132.
66. **R., Belakroum, T. H., Mai, M., Kadja et K., Zibouche.** Numerical simulation of dynamic wind loads on rectangular tall buildings. *Inter. Rev of Mechanical Engineering*. 2008, Vol. 2(6), 942-950.
67. **B., Koobus et C., Farhat.** Second-order time-accurate and geometrically conservative implicit schemes for flow computations unstructured dynamic meshes. *Compt. Methods Appl. Engrg.* 1999, Vol. 170, 103-129.
68. **M., Lesoinne et C., Farhat.** Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes and their impact on aeroelastic computations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 1996, Vol. 134, 71-90.
69. **P., Knupp, M. G., Margolin et M., Shashkov.** Reference Jacobian Optimization-Based Rezone Strategies for Arbitrary Lagrangian Eulerian Methods. *Journal of Computational Physics*. 2002, Vol. 176, 93-128.
70. **C., Farhat, C., Degand, B., Koobus et M. Lesoinne.** Torsional springs for two-dimensional unstructured fluid meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 1998, Vol. 163, 231-245.
71. **G., Chiandussi, G., Bugada et E., Onate.** A simple method for automatic update of element meshes. *Commun. Numer. Meth. Engrg.* 2000, Vol. 16, 1-19.
72. **A., Masud.** *A space-time finite element method for fluid-structure interaction*. Ph. D. Dissertation, Stanford University, 1993.
73. **Z., Xu et M., Accorsi.** Finite element update methods for fluid-structure interaction simulations. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2000, Vol.40 (9-10), 1259-1269.
74. **J. -F., Imbert.** *Analyse des Structures par éléments finis*. Ecole Nationale de l'Aéronautique et de l'Espace, 3eme Edition 1992.
75. **N., Piskounov.** *Calcul Différentiel et Integral*. Edition Mir, 1980.
76. **B., Garnahan, H. A., Luther et J. O., Wilkes.** *Applied Numerical Methods*. University of Michigan.
77. **I. M., Smith et H. A., Griffiths.** *Programming Finite Element Method*. University of Manchester U. K., Second Edition 1988.
78. **J., Donea, A., Huerta, J.-P. Ponthot, A. Radriguez-Ferran.** Arbitrary Lagrangian-Eulerian Methods. *Encyclopedia of computational mechanics, Volume 1: Fundamentals*. John Wiley & Sons, 2004.



79. **L.P., Franca, S. L., Frey et J. T. R., Hughes.** Stabilized finite element methods: I. Application to advective-diffusive model. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 1992, Vol. 95 (2), 253-276.
80. **H., Akyildiz et E, Unal.** Experimental investigation of pressure distribution on rectangular tank due to the liquid sloshing. *Ocean Engineering.* 2005, Vol. 32, 1503-1516.
81. **J. R., Cho, H. W., Lee et S. Y., Ha.** Finite element analysis of resonant sloshing response in 2D beffled tank. *Journal of Sound and Vibration.* 2005, Vol. 288, 829-845.
82. **S., Babu et S. K., Bhattachayya.** Finite element analysis of fluid-structure interaction effect on liquid retaining structures due to sloshing. *Computers & Structures.* 1996, Vol. 56 (6), 1165-1171.
83. **Y. S., Choun et C-B., Yun.** Sloshing characteristics in rectangular tanks with submerged block. *Computers & Structures.* 1996, Vol. 61 (3), 401-413.
84. **T., Nakayama et Washizu.** The boundary element method applied to the analysis of two-dimensional nonlinear sloshing problems. *International Journal for Numerical methods in engineering.* 1981, Vol. 17, 1631-1646.
85. **B. F., Chen et R., Nokes.** Time-dependent finite difference analysis of fully non linear and viscous fluid sloshing in rectangular tank. *Journal of Computational Physics.* 2005, Vol. 209, 47-81.
86. **W. A., Wall, S., Genkinger et E., Ramm.** A strong partitioned approach for fluid-structure interaction with free surfaces. *Computers & fluids.* 2007, Vol. 36, 169-183.
87. **R., Belakroum, T. H., Mai, M., Kadja et V., Pavel.** Simulation Numérique pas éléments finis des ballottements d'un réservoir partiellement rempli de liquide. *Bulletin of Inst. Poly. DIN IASI.* 2008, Vol. VIII, 35-48.
88. **R., Belakroum, M., Kadja, T. H., Mai et C., Maalouf.** An efficient passive technique for reducing sloshing in rectangular tanks partially filled with liquid. *Mechanics Research Communications.* 2010, Vol. 37, 341-346.
89. **M., Souli et J. P., Zolesio.** Arbitrary Lagrangian-Eulerian and free surface methods in fluid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 2001, Vol. 191, 451-466.
90. **S., Hayama, K., Aruga et T., Watanabe.** Nonlinear responses of sloshing in rectangular tanks: 1st report nonlinear responses of free-surface elevation. *Bulletin of Jpan Society of Mechanical Engineers.* 1983, Vol. 26 (219), 1641-1648.
91. **S., Pirerno, C., Farhat et B., Larrouturou.** Partitionned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems. Part I: Model problem, theory and two-dimensional application. *Computational Methods for Applied Mechanical Engineering.* 1995, Vol. 124, 79-112.
92. **N., Filipovic, et al.** An implicit algorithm within the arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation for fluid solving incompressible fluid flow with large boundary motions. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2006, Vol. 195, 6347-6361.
93. *Implicit and Explicit Higher Order Time Integration Schemes for Fluid-Structure Interaction Schemes for Fluid-Structure Interaction Computations.* **A. V., Zuijlen et H., Bijil.** Krakow, Poland : Springer, Computational Science ICCS 2004. 604-611.
94. **J., Hron et S., Turek.** A monolithic FEM/multigrid solver for an ALE formulation of fluid-structure interaction with applications in biomechanics. [auteur du livre] Bungartz H. J. et Schafer M. *Fluid Structure Interaction Modelling Simulation Optimisation, Lectures notes in computational science and engineering.* Berlin : Springer, 2006.
95. **B., Hubner, E., Walhorn et D., Dinkler.** A monolithic approach to fluid-structure interaction using space-time finite elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2004, Vol. 193, 2087-2104.

96. **D., Ishihara et S., Yoshimura.** A monolithic approach for interaction of incompressible viscous fluid and an elastic body based on fluid pressure Poisson equation. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2005, Vol. 64, 167-203.
97. **G.P., Guruswamy.** A review of numerical fluids/structures interface methods for computations using high-fidelity equations. *Comput. Struct.* 2002, Vol. 80, 31-41.
98. **M., Souli et J-F, Sigrist.** *Interaction fluide-structure.* Lavoisier, 2009.
99. **M., Cervera, R., Codina et M., Galindo.** On the computational efficiency and implementation of block-iterative algorithms for nonlinear coupled problems. *Engrg. Comput.* 1996, Vol. 13 (6), 4-30.
100. **M. A., Fernandez et M., Moubachir.** A Newton method using exact Jacobians for solving fluid-structure coupling. *Computers and structures.* 2005, Vol. 83, 127-142.
101. **P., Le Tallec et J., Mouro.** Fluid structure interaction with large structure displacements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2001, Vol. 194 (24-25), 3039-3067.
102. **U., Kuttler et W., Wall.** Fixed-point fluid-structure interaction solvers with dynamic relaxation. *Comput. Mech.* 2008, Vol. 43 (1), 61-72.
103. **S., Deparis, M. A., Huerta, L. Formaggia et F., Nobile .** Modified fixed point algorithm in fluid-structure interaction . *C. R. Mecanique.* 2003, Vol. 331 (2003), 525-530.
104. **J., Degroote, R., Haelterman, S., Annerel et P. Bruggeman.** Performance of partitioned procedures in fluid-structure interaction. *Computer and structures.* 2010, Vol. 88, 446-457.
105. **M., Heil.** An efficient solver for the fully coupled solution of large displacement fluid-structure interaction problems. *Comput. Method Appl. Mech. Eng.* 2004, Vol. 193, 1-23.
106. **Kj., Bathe et H., Zhang.** Finite element developments for large fluid flows with structural interactions. *Int. J. Numer. Method Eng.* 2004, Vol. 60, 213-232.
107. **H., Matthies et J., Steindrof.** Partitioned strong coupling algorithms for fluid-structure interaction. *Comput. Struct.* 2003, Vol. 81, 805-812.
108. **H., Matthies, R., Niekamp et J., Steindrof.** Algorithms for strong coupling procedures . *Comput. Method Appl. Mech. Eng.* 2006, Vol. 195, 2028-2049.
109. **M. A., Fernandez et M., Moubachir.** An exact Block-Newton algorithm for solving fluid-structure interaction problems. *C. R Acad. Sci. Paris Ser.* 2003, Vol. I 336, 681-686.
110. **O., Ghattas et X, Li.** A variational finite elements method for stationary non linear fluid-structure interaction. *Journal of Comp. Physics.* 1995, Vol. 121, 347-356.
111. **C., Farhat et M., Lesoinne.** Two efficient staggered algorithms for serial parallel solution of three nonlinear transient aeroelastic problems. *Compt. Methods Appl. Mech Engrg.* 2000, Vol. 182, 499-515.
112. **B., Hubner, E., Walhorn et D., Dinkler.** Numerical Investigations to Bridge Aeroelasticity. *Fifth World Congress on Computational Mechanics, Vienna.* 2002, Vol. on CD.
113. **Q. S., Li, A. P, Jeary et C. K, Wong.** Full scale measurements of wind effects on tall buildings . *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics.* 1998, Vol. 74-76, 741-750.
114. **L., Bo., Y, Tamura et S., Suganuma.** Simulation of Wind-Induced Lateral-Torsional Motion of Tall Buildings. *Computers & Structures.* 1997, Vol. 63 (3), 601-606.
115. **J., Katagiri, T., Ohkuma et H., Marukawa.** Analytical method for coupled across-wind and torsional wind responses with motion-induced wind forces. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics.* 2002, Vol. 90 (12-15), 22-50.
116. **L., Ning, C., Letchford, Y., Tamura, B., Liang et O. Nakamura.** Characteristics of wind forces acting on tall buildings. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics.* 2005, Vol. 93 (3), 271-242.

117. **H., Kawai.** Effects of angle of attack on vortex induced vibration and galloping of tall buildings in smooth and turbulent boundary layer flows. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 1995, Vol. 54-55, 125-132.
118. **A., Anju, A., Maruoka et M., Kawahara.** 2-D Fluid-Structure interaction problems by an arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method. *Int. J. Computational Fluid Dynamics*. Vol. 8, 1-9.
119. *Aeroelastic behavior of bridges subjected to wind flows.* **R., Belakroum, T. H., Mai, M. Kadja et K., Zibouche.** Hammamet, Tunisie : Begell House, International Symposium on Convective Heat and Mass Transfer in Sustainable Energy, 2009.
120. **S., Rao.** *Mechanical Vibrations (Third Edition)*. Addison-Wesley, 1995.
121. *Fluid-structure interaction problems in civil engineering: Application to bridges subjected to turbulent wind flows.* **K., Zibouche, J. m., Dupuy et G., Mounajed.** Barcelona : Computational Methods for Coupled Problems and Engineering, 2005. On CD.

# Liste des figures

Figure 1.1 : Représentation d'un corps solide dans un écoulement de fluide .....	7
Figure 2.1: -a- Domaine matériel en deux dimensions. -b- Un élément quadrilatère dans un domaine matériel. -c- Maillage partiel du domaine matériel. ....	23
Figure 2.2 : Comparaison de la solution exacte et celle de Galerkin d'une équation convection-diffusion sur un domaine unidimensionnel de longueur $L=1$ en utilisant un maillage uniforme de dix éléments. ....	36
Figure 2.3 : Configuration étudiée et conditions aux limites .....	49
Figure 2.4 : Représentation de la configuration étudiée.....	51
Figure 2.5 : Représentation du maillage (7516 éléments et 3851 nœuds) .....	52
Figure 2.6 : Evolution temporelle de l'écoulement autour d'un cylindre pour $Re= 800$ .....	53
Figure 2.7 : Variation temporelle de la pression dans un plan vertical à une distance égale 5 derrière le cylindre (en abscisse la largeur adimensionnelle et en ordonnée la pression en [Pa]).....	54
Figure 2.8: Représentation des lignes de courant pour $Re=10^3$ et à $t=25sec$ . ....	56
Figure 2.9 : Evolution des coefficients de traînée, de portance et du moment pour $Re=10^3$ ...	57
Figure 2.10 : -a- ( $Re=10^3$ ) Représentation du spectre correspondant au coefficient de portance $C_x$ -b- ( $Re=10^4$ ) Représentation du spectre correspondant au coefficient de portance $C_x$ . ....	57
Figure 2.11 : Le nombre de Strouhal ( $S_t$ ) et la moyenne du coefficient de la traînée ( $C_x$ ) en fonction du nombre de Reynolds, Comparés avec des résultats publiés expérimentaux (Okijama, 1982; Vikery, 1966) et numérique (Sohankar, 2006).....	58
Figure 2.12 : Représentation des différentes formes d'obstacles étudiés -a- Section carrée -b- Section triangulaire première disposition -c- Section triangulaire deuxième disposition -d- Forme en T première disposition -e- Forme en T deuxième disposition. ....	60
Figure 2.13 : Variation du nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds .....	60
Figure 2.14 : Représentation des sections de Poincaré pour $Re=10^3$ .....	61
Figure 2.15 : Représentation d'une section carrée .....	63
Figure 2.16 : Le nombre de Strouhal ( $St$ ), RMS du coefficient du moment ( $C_m$ ), RMS du coefficient de portance ( $C_y$ ) et la valeur moyenne du coefficient de traînée ( $C_x$ ) en fonction du coefficient latéral.....	64
Figure 2.17 : Les lignes de courant simulées d'un écoulement autour d'un rectangle (seulement la partie central du domaine fluide est représentée) .....	65
Figure 2.18: Section carrée orientée suivant différents angles d'attaque.....	66
Figure 2.19: Nombre de Strouhal ( $S_t$ ), RMS du coefficient du moment, RMS du coefficient de portance et la valeur moyenne du coefficient de traînée en fonction de l'angle d'attaque. ....	67
Figure 2.20 : Représentation des spectres correspondants au moment, portance et traînée pour des angles d'attaque différents .....	69
Figure 3.1. Principe des coordonnées intrinsèques .....	79
Figure 3.2 : Comparaison de l'élévation de la surface libre au point $X=+b/2$ -a- Réservoir de liquide en deux dimensions ( $h=0.6m$ et $b=0.9m$ ) -b- Evolution temporelle de l'élévation de la surface libre au point d'abscisse $X=+b/2$ . ....	89
Figure 3.3 : Comparaison de l'élévation de la surface libre au point $X=-b/2$ - a- $\omega/\omega_1=1.1$ - b- $\omega/\omega_1=0.98$ .....	91
Figure 3.4 : Evolution temporelle de l'élévation à la surface libre .....	92

Figure 3.5 : Réponse fréquentielle de l'élévation relative maximale à la surface libre au point d'abscisse $X=-b/2$ .....	93
Figure 3.6 : Réponse fréquentielle de l'élévation relative maximale à la surface libre au point d'abscisse $X=-b/2$ pour différentes hauteurs relatives de la colonne du liquide.....	94
Figure 3.7 : Réponse fréquentielle de l'élévation relative maximale de la surface libre au point d'abscisse $X=-b/2$ pour différents angles d'inclinaison des parois latérales.....	95
Figure 3.8: Réponse à la résonance de la surface libre ( $X^*_0/b=0.0025m$ , $b=0.8$ and $h/b=0.6$ ).98	
Figure 3.9 : Les lignes de courant à deux instants différents (réservoir avec deux séparateurs horizontaux et une fréquence= $5.2rad/s$ )......	99
Figure 3.10: Evolution des élévations au point à la paroi gauche (réservoir avec deux séparateurs horizontaux et une fréquence= $5.2rad/s$ ).....	100
Figure 3.11: Les lignes de courant à deux instants différents (réservoir avec un séparateur vertical et une fréquence= $5.2rad/s$ ). .....	101
Figure 3.12: Evolution des élévations au point à la paroi gauche (réservoir avec un séparateur vertical et une fréquence= $5.2rad/s$ ).....	101
Figure 3.13: Les contours de vitesses à deux instants différents (réservoir avec un séparateur vertical à la surface libre et une fréquence= $5.2rad/s$ ).....	102
Figure 3.14 : Evolution des élévations au point à la paroi gauche (réservoir avec un séparateur vertical à la surface libre et une fréquence= $5.2rad/s$ ).....	102
Figure 3.15 : Réponse fréquentielle des élévations de la surface libre à la paroi gauche du réservoir pour différentes techniques passives de réduction des ballottements.....	103
Figure 3.16: Evolution temporelle des élévations de la surface libre à la paroi gauche pour une fréquence d'excitation $\omega =5.4rad/s$ .....	104
Figure 3.17 : Evolution temporelle du couple de basculement à la première fréquence de résonance $\omega =5.4rad/s$ .....	105
Figure 4.1 : Schématisation des stratégies de coulage .....	109
Figure 4.2 : Schématisation d'une procédure décalée conventionnelle CSS .....	110
Figure 4.3 : Schématisation d'une procédure décalée conventionnelle avec sous-itération CSS-Subcyclin.....	111
Figure 4.4 : schématisation d'une procédure décalée améliorée ISS.....	112
Figure 4.5 : La géométrie de la section du pont étudié .....	118
Figure 4.6 : Evolution temporelle des lignes de courant autour de la section du pont pour une vitesse du vent égale $16m/s$ .....	121
Figure 4.7 : Déviation standard des déplacements verticaux en fonction de la vitesse du vent .....	122
Figure 4.8 : Rotation standard de la section du pont en fonction de la vitesse du vent .....	122

# Liste des tableaux

Tableau 2.1: Exemple de quelques éléments 2D stables.....	33
Tableau 2.2 : Comparaison des nombres de Strouhal simulés avec d'autres de la littérature (section carrée) .....	57
Tableau 3.1 : Pourcentage d'atténuation des élévations maximales .....	104
Tableau 4.1 : Paramètres du test numérique .....	119

# Résumé

## *Contribution à la modélisation des interactions fluides-structures*

Les buts principaux recherchés de la présente thèse visent au développement et à l'expertise d'une méthodologie de simulation numérique des problèmes d'interactions fluides-structures. Afin de cerner progressivement le problème étudié, nous nous sommes intéressés en premier lieu à la simulation numérique des écoulements autour d'obstacles solides, plus particulièrement au phénomène d'éclatements tourbillonnaires dans la zone de sillage d'obstacles de différentes formes. Nous avons utilisé la méthode des éléments finis en adoptant la technique de stabilisation GLS (Galerkin Least-Square). Pour le traitement de la turbulence, nous avons opté pour la méthode LES (Large-Eddy Simulation) en utilisant le filtre de Smagorinsky. En deuxième phase, nous nous sommes intéressés aux écoulements en milieux déformables. Nous avons entrepris la formulation ALE (Arbitrairement Lagrangienne Eulérienne) en considérant un maillage déformable. Pour la mise à jour de la grille du maillage dynamique, nous avons utilisé une approche pseudo-élastique. Afin d'expertiser la méthodologie mise en œuvre, nous avons choisi d'aborder le problème des ballottements à la surface libre de réservoirs partiellement remplis de liquide. En dernière partie, nous nous sommes intéressés au comportement vibratoire d'un corps solide sous l'effet d'un écoulement de fluide. Par l'utilisation d'un algorithme de couplage totalement implicite basé sur la méthode de Gauss-Seidel par Bloc, nous avons abordé le phénomène des instabilités aéroélastiques des ponts à haubans. Pour la validation du modèle numérique traitant les interactions fluides-structures par les données expérimentales, nous nous sommes intéressés au comportement vibratoire d'une maquette sectionnelle d'un tablier de pont réel sous l'effet d'un vent soufflant uniforme.

**Mots clés :** Interactions fluides-structures, éclatements tourbillonnaires, éléments finis stabilisés, filtre de Smagorinsky, formulation arbitrairement Lagrangienne Eulérienne, maillage déformable, approche pseudo-élastique, ballottement, algorithme de couplage, méthode de Gauss-Seidel par bloc, Instabilité.

# Abstract

## *Contribution to the modeling of fluid-structure interaction*

The main goals sought by this thesis target the development and expertise of a methodology for numerical simulation of fluid-structure interactions problems. In order to identify the studied problem progressively, we are interested primarily in numerical simulation of flows around bluff bodies, especially the phenomenon of vortex shedding in the wake zone of a bluff body of different shapes. We used the finite element method by adopting the stabilized GLS (Galerkin Least-Square) technique. For the treatment of turbulence, we opted the LES (Large-Eddy Simulation) method using the Smagorinsky filter. In the second phase, we were interested in flows in deformable media. We undertook the ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) formulation by considering a deformable mesh. To update the grid of the dynamic mesh, we used a pseudo-elastic approach. To appraise the implemented methodology, we decided to approach the problem of sloshing at the free surface of a tank partially filled with liquid. In the final part, we were interested in vibration behavior of a solid body under the effect of fluid flow. By using a fully implicit coupling algorithm based on a relaxed Block Gauss-Seidel method, we studied the phenomenon of aeroelastic instability of cable-stayed bridges. To validate the numerical model treating fluid-structure interactions by experimental data, we investigated the vibration behavior of a real deck sectional model under the effect of a uniform wind.

**Key words:** Fluid-structure interaction, vortex shedding, stabilized finite element, arbitrary Lagrangian Eulerian formulation, deformable mesh, pseudo-elastic approach, sloshing, coupling algorithm, instability.



# ملخص

## مساهمة في وضع نماذج لتفاعلات السوائل والهياكل الصلبة

الأهداف الرئيسية لهذه الأطروحة هي تطوير واختبار منهجية للمحاكاة العددية المتعلقة بالتفاعل الديناميكي للسوائل والهياكل الصلبة.

للتحديد التدريجي والجيد للمسألة المدروسة، ركزنا اهتمامنا في المقام الأول في المحاكاة العددية لتدفقات الموانع حول العقبات الصلبة ولاسيما ظاهرة الانهيار الدوامي في أعقاب الأجسام الصلبة من أشكال مختلفة، لهذا الصدد استخدمنا طريقة العناصر المنتهية من خلال اعتماد الأسلوب المستقر GLS ولمعالجة السيلانات المضطربة، اخترنا أسلوب LES باستخدام مصفاة سماقور يسكي .

في المرحلة الثانية، ركزنا اهتمامنا حول الدراسة العددية لتدفقات السوائل في الأوساط القابلة للتشوه. تبيننا صياغة ALE (صياغة لاغرانج أولار عشوائية) من خلال اعتماد شبكة إحدائيات متحركة وقابلة للتشوه. للتحديث المستمر لشبكة الإحدائيات الديناميكية انتهجنا مقاربة شبه مرنة. لتقييم المنهجية المستخدمة، اخترنا المقاربة العددية لظاهرة الاهتزازات في الخزانات المملوءة جزئياً بالسوائل.

في الجزء الأخير، تطرقنا إلى دراسة السلوك الاهتزازي لجسم صلب تحت تأثير تدفقات الموانع. باستخدام خوارزم اقتران ضمنى على أساس طريقة غوس سايدل، بحثنا في ظاهرة عدم الاستقرار الهوائي المرني للجسور المعلقة بالكوابل. للتحقق من صحة النموذج العددي المستعمل لمعالجة التفاعل الديناميكي للسوائل والهياكل الصلبة من خلال التجربة، استعملنا نتائج دراسة تجريبية للسلوك الاهتزازي لنموذج للمقطع العرضي لجسر معلق تحت تأثير الرياح المستقرة السرعة.

**الكلمات المفتاحية :** التفاعلات الديناميكية للسوائل والهياكل الصلبة، الانهيار الدوامي، العناصر المنتهية المستقرة، صياغة لاغرانج أولار عشوائية، شبكة احداثيات ديناميكية، مقاربة شبه مرنة، الاهتزازات، خوارزم الاقتران، عدم الاستقرار.