

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de

DOCTORAT D'ETAT

En Génie Mécanique

ANALYSE ELASTOPLASTIQUE DES CONTRAINTES DANS LES TUBES CYLINDRIQUES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Option : **Construction Mécanique**

Par :

Mme LABED Zohra née MANSOUR

Date de Soutenance : 22 / 12 / 07 au sein du Département de Génie Mécanique à 9 H

Devant le jury:

Président	A.BOUCHOUCHA	Professeur	Université Mentouri .Constantine
Rapporteur	B.NECIB	Professeur	Université Mentouri .Constantine
Examineurs	S.MEZIANI	Professeur	Université Mentouri .Constantine
	K.CHAOUI	Professeur	Université Badji Mokhtar .Annaba
	H.ZEDIRA	M.C	Centre Universitaire Khenchela

Le public est cordialement invité à la
soutenance.

Dédicaces

A la mémoire de ma très chère mère qui m'a beaucoup donné.

A la mémoire de mes grands-parents.

A mon père pour son soutien moral et son sacrifice le long de ma formation.

A mon frère et mes sœurs.

A mes enfants.

A mon époux.

Je dédie cette thèse.

Remerciements

Les travaux de recherche présentés dans cette thèse ont été effectués au Laboratoire de Mécanique, Département de Génie Mécanique, Faculté des Sciences de l'Ingénieur de l'Université Mentouri Constantine.

J'adresse en premier lieu mes remerciements à Monsieur Brahim NECIB, Professeur à l'Université Mentouri Constantine et Directeur du Laboratoire de Mécanique, pour m'avoir encadrée dans cette thèse, pour le soutien sans cesse qu'il a bien voulu m'accorder tout au long de la thèse. Je le remercie vivement pour la façon dont il a su me mettre en confiance, pour ses encouragements, ses remarques constructives, et pour ses aptitudes pédagogiques dont lui en a fait preuve. Je le remercie également de son aide importante au moment de la rédaction de cette thèse.

Je suis très honorée que Monsieur Ali BOUCHOUCHA, Professeur à l'Université Mentouri Constantine, ait accepté de présider le jury cette thèse. Qu'il trouve ici mon entière reconnaissance.

Je voudrais ensuite remercier Monsieur Salim MEZIANI, Professeur à l'Université Mentouri Constantine, qui a accepté d'être membre de ce jury. Je lui exprime toute ma reconnaissance pour le temps et l'intérêt qu'il a accordé à ce travail.

J'adresse également mes sincères remerciements à Monsieur Kamel CHAOUI, Professeur à l'Université Badji Mokhtar Annaba, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en me faisant l'honneur d'être examinateur de cette thèse, malgré son agenda très chargé.

Je tiens aussi à remercier Monsieur Hamma ZEDIRA, Maître de conférence au Centre Universitaire de Khenchela, qui a accordé beaucoup d'intérêt à mes travaux en acceptant d'être membre de ce jury.

Enfin, je ne saurais oublier tous mes collègues enseignants du Département de Génie Mécanique, Université Mentouri Constantine pour leur soutien et leur encouragement ; qu'ils trouvent ici mes vifs remerciements.

Sommaire

Introduction	1
Chapitre I :Analyse élastique d'un tube cylindrique	3
I Analyse élastique des corps isotropes.....	3
I.1 Introduction.....	3
I.2 Equation de l'équilibre	4
I.3 Tenseur de déformation.....	6
I.4 Tenseur de contraintes.....	6
I.5 Loi générale de Hooke.....	7
I.5.1 Etat de contraintes planes.....	9
II.5.1.1 Définition	9
I. 6 Equation d'équilibre en coordonnées polaires.....	10
I.7 Analyse élastique du tube cylindrique sous pression	14
II.7.1 Relation entre contraintes et déformations.....	15
Chapitre II : Analyse elasto-plastique d'un tube cylindrique	19
II Analyse elasto-plastique du corps isotropes.....	19
II.1 Introduction	19
II.2 Analyse élasto-plastique d'un tube cylindrique sous pression interne	19
II.2.1 Idéalisations.....	19
II.2.1 Détermination de la limite élastique.....	20
II.3 Détermination des contraintes radiale et circonférentielle.....	22
II.4 Discussion.....	27
Chapitre III : Analyse du tube cylindrique complètement plastifié	28
III Formulation des lois d'écoulement.....	28
III.1 Critères de plasticité.....	28
III.1.1 Critère de Tresca.....	29
III.1.2 Critère de Von Mises.....	29
III.1.3 Critère de charge et décharge	31
III.2 Plastification totale du cylindre.....	31
III.3 Contraintes résiduelles.....	34
III.3.1 Introduction.....	34
III.3.2 Définition.....	35
III.3.3 Méthodes de détermination des contraintes résiduelles	36
III.3.3.1 Généralités.....	36
III.4 Cas particulier : Etude élasto-plastique d'une sphère sous pression interne.....	39
III.4.1 Analyse élastique de la sphère	39
III.4.1.1 Transformation des déplacements.....	40
III.4.1.2 Transformation des contraintes.....	40
III.4.1.3 Détermination des contraintes	40
III.4.2. Analyse élasto-plastique de la sphère sous pression interne	42
III.4.2.1 Détermination des contraintes	42
III.4.3 Analyse des déformations de la sphère totalement plastifiée.....	45

III.4.4 Contraintes résiduelles.....	46
III.5 Discussion.....	48
Chapitre IV: Analyse élastique d'un tube cylindrique sous pression interne par la Méthode des Eléments Finis.....	49
IV.1 Introduction.....	49
IV.2 Les différentes formulations de la méthode des éléments finis.....	50
IV.3 Maillage d'une structure.....	51
IV.4 Fonction de déformé.....	54
IV.5 La méthode des éléments finis dans la théorie d'élasticité.....	55
IV.5.1 Champ de déplacement.....	55
IV.5.2 Déformations.....	55
IV.5.3 Contraintes	56
IV.5.4 Minimisation de l'énergie potentielle totale	57
IV.5.5 Propriétés de la matrice de rigidité globale.....	60
IV.6 La méthode des éléments finis dans la théorie de transfert de chaleur.....	60
IV.6.1 Champ de température.....	60
IV.6.2 Gradient de température.....	61
IV.6.3 Minimisation de la fonctionnelle.....	62
IV.7 Méthodes de résolution des systèmes linéaires.....	63
IV.8 Les corps de révolution (axisymétrique).....	64
IV.9 Application de la méthode des éléments finis dans les problèmes axisymétriques d'élasticité	65
IV.9.1: Calcul de la matrice de rigidité élémentaire $[K]_e$	72
IV.9.2 Calcul des charges nodales.....	76
IV.10 Application de la méthode des éléments finis dans les problèmes axisymétriques de transfert de chaleur	78
IV.10.1 Calcul de la matrice de conductivité élémentaire $[P]_e$	82
IV.10.2 Calcul des charges thermiques.....	82
IV.11 Programmation	83
V.11.1 Introduction.....	83
IV.11.2 Présentation du programme MEFMEC	84
IV.11.3 Validation du programme	89
Conclusion	95
Bibliographie.....	96
Annexe 1 : Résultats Tube cylindrique soumis à une pression interne.....	99
Annexe 2 : Programme VALIDE pour M.E.F.....	103

Nomenclature

ds	: Incrément de contrainte.
t	: Contrainte de cisaillement.
e	: Déformation normale.
de^p	: Incrément de déformation plastique.
de^e	: Incrément de déformation élastique.
g	: Contrainte critique.
S_e	: Contrainte élastique
S_{ij}	: Tenseur des contraintes
S_I, S_{II}, S_{III}	: Contraintes principales
e_{ij}	: Tenseur de déformation
u, v, w	: Déplacements dans la direction x, y, z.
r	: Cordonnée cylindrique
q	: Cordonnée cylindrique
f	: Cordonnée sphérique
d_{ij}	: Symbole de Kronecker
T	: Température
P	: Pression
E	: Module d'élasticité longitudinale ou module d'young
G	: Module de cisaillement ou module d'élasticité transversal
n	: Coefficient de poisson
l	: Coefficient de Lamé
m	: Coefficient de Lamé
f	: Fonction d'Airy,
I_1, I_2, I_3	: Invariants du tenseur de contrainte (Linéaire, quadratique et cubique)
p	: Pression appliquée dans le cylindre.
q	: Pression à l'interface élasto-plastique.
a	: Rayon intérieur du cylindre.
b	: Rayon extérieur du cylindre.
c	: Rayon de plasticité,
$f(S_{ij})$: Fonction du potentiel plastique.

Introduction

La résistance d'un matériau est une propriété composée qui ne peut être mesurée par un simple test ou définie par une simple formule. Cela vient du fait que la résistance est en réalité une évaluation de la charge, force ou impact à laquelle un objet est susceptible de résister tout en restant capable d'accomplir la tâche pour laquelle il a été conçu. Il existe de nombreuses façons de dépasser ce stade; en le cassant ou en le pliant trop ou en l'écrasant. Il nous est possible d'élucider ces caractéristiques en terme de structure, car il existe seulement trois possibilités pour un solide de réagir à une force. Ce sont la déformation élastique, plastique et la rupture. La déformation élastique est comme un ressort dans la mesure où le matériau a sa forme et sa taille initiale dès que la force n'est plus appliquée. La déformation plastique, en revanche, est permanente ; un morceau de mastic ne reprend pas sa forme originale lorsque vous arrêtez de le malaxer. La rupture évidemment, correspond à la séparation des pièces disjointes. Un solide ne réagit pas nécessairement d'une seule façon à une force. Si un solide est soumis à une force d'intensité croissante, il peut tout d'abord se déformer de façon élastique, puis plastique et finalement se casser.

Le dimensionnement des tubes cylindriques soumis à des changements de pressions internes reste toujours un axe de recherche important dans le domaine de la mécanique et même de la biomécanique. En effet, l'augmentation de la pression à l'intérieur de ces corps peut provoquer d'importante déformation où le domaine des fissurations peut facilement apparaître d'où le risque de leur endommagement et de leur destruction.

Dans certaines situations, il est impossible de considérer toutes les contraintes qui agissent dans une structure comme appartenant au domaine élastique. Des contraintes supérieures à la limite d'écoulement du matériau peuvent se produire lorsqu'une structure est soumise à des sollicitations comme accidentelles ou exceptionnelles (pression interne). La structure doit alors résister sans s'effondrer, mais peut subir des déformations permanentes. Par ailleurs et dans le domaine de la biomécanique, une petite variation de pression, hors de la limite élastique peut provoquer la fissuration d'un vaisseau sanguin ; d'où l'immobilisation du corps concerné.

La méthode des éléments finis, bien connue aujourd'hui, est la méthode la plus utilisée actuellement, son champ d'application ne cesse de s'élargir. Le succès de la méthode réside principalement dans sa formulation: elle réunit les principes les plus forts de la méthode des

différences finies et ceux de la méthode des équations intégrales, respectivement la discrétisation du domaine d'intégration et le principe de construction de l'approximation et sa formulation. La méthode fournit un modèle qui représente aussi fidèlement que possible le phénomène physique dans sa réalité. Elle ne cesse de se développer et de s'étendre de plus en plus à des domaines qui étaient jusque là du ressorts des méthodes expérimentales.

Dans cette thèse, notre travail consiste à connaître la distribution des contraintes à travers l'épaisseur d'un tube cylindrique épais en matériau homogène, tout en faisant varier la pression interne (p). En premier lieu pour déterminer ses limites élastiques puis pour pouvoir vérifier que la zone plastique se développe à partir de la face interne et enfin pour déterminer une relation entre le rayon de la zone plastique (c) et la variation de cette pression. L'intérêt primordial de ce travail est de déterminer la pression limite à la rupture par déformation excessive du corps, qui peut mettre à l'épreuve la structure de ce dernier avec d'autres, telles que les soudures d'où l'apparition des contraintes résiduelles.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté les équations qui nous permettent de déterminer la distribution des contraintes radiales et circonférentielles dans le domaine élastique d'un tube cylindrique soumis à une pression interne.

Dans le second chapitre, notre étude s'est étendue au développement des équations à la contrainte limite, dans la phase élasto-plastique pour pouvoir suivre et comprendre le comportement de la structure sous l'effet de la variation de la pression interne à laquelle est soumise notre structure.

Pour bien analyser le comportement de la structure sous l'effet d'une pression excessive, à fin de pouvoir connaître la limite de la structure à s'adapter dans ces conditions de travail.

Au chapitre quatre l'étude de la plastification totale du tube cylindrique est représentée, ainsi que le cas particulier d'une sphère. L'étude de la sphère est employée pour faire la comparaison avec les résultats obtenus pour l'analyse du comportement du tube cylindrique soumis à une pression interne.

Dans le dernier chapitre, nous avons étudié les structures tubulaires sous l'effet de la pression interne par la méthode des éléments finis.

En dernier une analyse des résultats est commentée afin de faire une conclusion sur toute l'étude réalisée.

Chapitre I

Analyse élastique d'un tube cylindrique

I ANALYSE ELASTIQUE DES CORPS ISOTROPES

I.1 Introduction

Un matériau à un comportement élastique lorsque, après avoir subi une déformation sous l'action de sollicitations, il reprend instantanément sa forme initiale dès que celles-ci cessent. Si, en outre, il y a proportionnalité entre les forces et les déformations, le matériau est réputé avoir un comportement élastique. C'est à ce type de matériau que nous nous intéresserons particulièrement, car il s'applique à la plupart des matériaux en ingénierie. On utilise les relations tirées de la loi de Hooke pour décrire le comportement élastique [1,2].

La théorie des contraintes et la théorie des déformations sont nécessaires pour un développement théorique du comportement physique des corps d'une façon générale et des corps solides élastiques plus particulièrement. Pour ce faire, on doit considérer la notion de loi de comportement qui lie respectivement la notion mécanique qui est la contrainte à celle géométrique qui est la déformation. C'est dans ce contexte, qu'on a pensé qu'il est plutôt utile d'aborder ce chapitre qui trouvera des liens directs avec tous les chapitres qui suivront.

Un corps solide est constamment soumis à des forces gravitationnelles, et s'il est en équilibre, il est supporté par d'autres forces. On sait d'après les équations d'équilibre que l'application de contraintes à l'intérieur de ce corps, c'est ce qu'on appelle étude statique. De plus les corps solides ne sont pas absolument rigides. Par l'application de forces il peut y avoir changement dans la forme et la taille du corps. Lorsque ces changements sont considérables, le corps ne reprend pas sa taille et sa forme originale après que les forces qui provoquent ces changements cessent d'agir. D'un autre côté, si ces changements ne sont pas importants, le corps peut reprendre sa taille et sa forme initiales. On dit dans ce cas que le corps est élastique.

Ces changements de forme et de taille traduisent la théorie des déformations et représentent l'étude cinématique. Dans la théorie de l'élasticité, en plus de l'hypothèse de l'élasticité, le matériau est supposé continu, homogène et isotrope.

Un corps est homogène si les propriétés physiques sont les mêmes en tout point du corps, c'est-à-dire quelles sont indépendantes de la position du point. Si ces propriétés sont les mêmes dans toutes les directions le corps est dit isotrope. En plus de ceci on suppose que les composantes de déplacements (u, v, w) permettent au corps de passer d'un état initial à un état final de déformation sont suffisamment petites pour rester dans la théorie des petites déformations.

I.2 Equation de l'équilibre

On considère l'équilibre d'un élément infinitésimal de longueur dx, dy, dz, représenté sur la figure 1.1 avec les contraintes agissant sur ces faces. Les contraintes sont indiquées en direction positive, et les petits changements de contrainte se produisant sur une distance dx ou dy ou dz (N.B les directions x, y et z correspondent aux directions 1, 2, et 3). La contrainte normale sur la face arrière de l'élément (normale à l'axe des x) est notée S_x et sur la face avant, elle est notée :

$$S_x + \frac{\partial S_x}{\partial x} dx$$

Nous devons également tenir compte d'une force à distance passant par le centre d'inertie de l'élément et de composantes X, Y, Z par unité de volume. L'équation exprimant l'équilibre des forces dans la direction x est :

$$-S_x dydz + (S_x + \frac{\partial S_x}{\partial x} dx) dydz - t_{yx} dx dz + (t_{yx} + \frac{\partial t_{yx}}{\partial y} dy) dx dz - t_{zx} dx dy + (t_{zx} + \frac{\partial t_{zx}}{\partial z} dz) + X dx dy dz = 0$$

Comme le volume dx dy dz de l'élément n'est pas nul, nous pouvons diviser par ce terme et obtenir :

$$\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial t_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

D'une façon similaire on aura les équations d'équilibre suivant les axes y et z :

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial s_z}{\partial z} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + Z &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Pour que l'équilibre existe, il faut que ces trois équations soient satisfaites en tous points du corps.

Ecrivons l'équation de l'équilibre des moments autour d'un axe parallèle à l'axe des x et passant par le centre de face avant de l'élément. On obtient :

$$-t_{yz} dx dz \frac{dy}{2} - (t_{yz} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} dy) dx dz \frac{dy}{2} + t_{zy} dx dy \frac{dz}{2} + (t_{zy} + \frac{\partial t_{zy}}{\partial z} dz) dx dy \frac{dz}{2} = 0$$

En négligeant les termes contenant les produits de quatre différentielles, comme étant petits par rapport à ceux contenant les produits de trois différentielles, on obtient :

$$t_{yz} = t_{zy}$$

De la même manière, on peut obtenir deux autres relations:

$$t_{xy} = t_{yx} \quad \text{et} \quad t_{xz} = t_{zx}$$

Le nombre de symboles pour les contraintes de cisaillement est ainsi réduit de six à trois. Donc, pour décrire les contraintes agissant sur les plans de coordonnées passant par un point, les six quantités $s_x, s_y, s_z, t_{xy}, t_{yz}$ et t_{xz} suffisent.

Ces équations sont appelées équations d'équilibre et doivent être satisfaites en tout point du corps.

I.3 Tenseur de déformation [3,4]

Désignons par \vec{u} le vecteur déplacement, alors le tenseur de déformations est donné par :

$$\forall i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j)$$

Où e représente le tenseur des déformations. Le tenseur de déformation est symétrique car ($e_{ij} = e_{ji}$).

Parfois, on notera aussi

$$e_{ij}(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j) \tag{1.2}$$

Pour traduire le fait que e dépend du champ de déplacement \vec{u} .

On dira qu'on est en présence d'une petite déformation si et seulement si toutes les dérivées partielles sont petites devant l'unité.

Ou bien on écrit : $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad |\partial_i u_j| \ll 1$

I.4 Tenseur de contraintes

On Peut maintenant interpréter le tenseur de contraintes. On considère une particule parallélépipédique infinitésimale de centre M, dont les facettes sont dirigées par les axes $x_i, 1 \leq i \leq 3$, (voir figure 1.1).

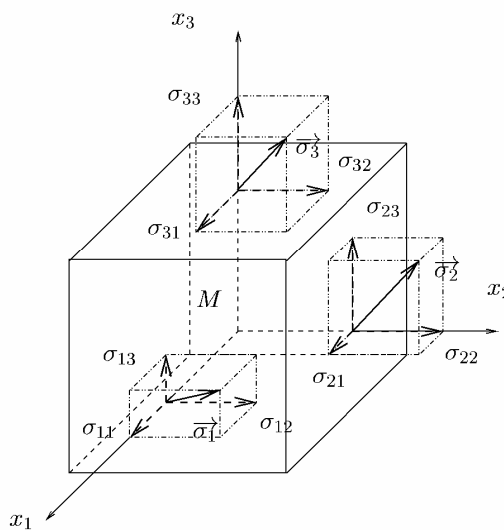


Figure 1.1 Interprétation du tenseur des contraintes

Soient \vec{s}_i , ($1 \leq i \leq 3$) les vecteurs contraintes sur les facettes de normales extérieures \vec{e}_i , ($1 \leq i \leq 3$). Alors les composantes des contraintes sont définies par :

$$s_{ij} = \vec{s}_i \cdot \vec{e}_j, \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$$

Le tenseur des contraintes est symétrique (i. e, $s_{ij} = s_{ji}$). Chacun des coefficients s_{ij} du tenseur des contraintes ne dépend que du point où l'on se place et du repère.

I.5 Loi générale de Hooke

C'est grâce à la propriété élastique des corps qu'on a pu relier la déformation à la contrainte. Si un petit élément est soumis aux trois contraintes normales s_x, s_y, s_z les composantes de déformations sont déduites directement en appliquant le principe de superposition.

Dans ce cas on aura :

$$\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$$

$$s_{ij} = l e_{ij} d_{ij} + 2m e_{ij} \tag{1.3}$$

d_{ij} Défini l'indice de Kronecker

$$\forall i, j \in N, d_{ij} = 1 \text{ si } i = j \text{ et } d_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$$

Si on explique l'équation (1.2), on a, par exemple

$$s_{11} = l(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2m e_{11}$$

$$s_{22} = (l + 2m)e_{11} + e_{22} + e_{33}$$

$$s_{12} = 2m e_{12}$$

On note parfois l'équation (1.2) sous forme matricielle dans R (on utilise alors la symétrie des tenseurs de contrainte et de déformation).

$S = A E$ ou les vecteurs S et E de R^6 , et la matrice A de $M_6(R)$ sont définis par:

$$E = (e_{11} \quad e_{22} \quad e_{33} \quad e_{12} \quad e_{23} \quad e_{13}), \quad S = (s_{11} \quad s_{22} \quad s_{33} \quad s_{12} \quad s_{23} \quad s_{13})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1+2m & l & l & 0 & 0 & 0 \\ l & 1+2m & l & 0 & 0 & 0 \\ l & l & 1+2m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2m \end{pmatrix}$$

La loi de Hooke peut aussi s'inverser sous la forme

$$\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$$

$$e_{ij} = \frac{1+n}{E} s_{ij} - \frac{n}{E} s_{ll} d_{ij} \quad (1.4)$$

Où l'on définit n est le coefficient de poisson et E le module d'Young, à partir des coefficients de Lamé l et m , par

$$n = \frac{l}{2(l+m)}, \quad E = \frac{m(3l+2m)}{l+m}$$

On utilise aussi le coefficient G , appelé module de Coulomb et défini par

$$G = \frac{E}{2(1+n)} \quad (1.5)$$

Il existe les relations suivantes entre ces coefficients

$$l = \frac{nE}{(1-2n)(1+n)}, \quad m = \frac{E}{2(1+n)}$$

Si maintenant le petit élément est soumis aux trois contraintes normales s_x , s_y et s_z les composantes de déformation sont déduites directement en appliquant le principe de superposition (cas de petites déformations).

Pour un matériau élastique (de constantes E et n), les relations entre les contraintes et les déformations donnent pour le plan rq

Dans ce cas on aura :

$$\begin{aligned}
 e_x &= \frac{1}{E}(s_x - n(s_y + s_z)), & g_{xy} &= \frac{t_{xy}}{G} \\
 e_y &= \frac{1}{E}(s_y - n(s_z + s_x)), & g_{yz} &= \frac{t_{yz}}{G} \\
 e_z &= \frac{1}{E}(s_z - n(s_y + s_x)), & g_{zx} &= \frac{t_{zx}}{G}
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Il s'agit des relations entre déformations et déplacements.

$$\begin{aligned}
 e_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & g_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\
 e_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & g_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\
 e_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & g_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Les relations déformations et contraintes en coordonnées cartésiennes sont données par les équations suivantes.

$$\begin{aligned}
 e_x &= \frac{1}{E}(s_x - n(s_y + s_z)), & g_{xy} &= \frac{t_{xy}}{G} \\
 e_y &= \frac{1}{E}(s_y - n(s_z + s_x)), & g_{yz} &= \frac{t_{yz}}{G} \\
 e_z &= \frac{1}{E}(s_z - n(s_y + s_x)), & g_{zx} &= \frac{t_{zx}}{G}
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

I.5.1 Etat de contraintes planes

I.5.1.1 Définition

Un champ de contraintes s_{ij} est plan, (parallèlement au plan (x et y) si et seulement si s_{ij} ne dépend que de x et y et si le tenseur $[S]$ s'écrit

$$[s] = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 \\ s_{21} & s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, on peut montrer la proposition suivante, pour un état de contraintes planes et si le matériau est élastique linéaire isotrope, alors on a :

$$e_{13} = 0, \quad e_{23} = 0 \quad \text{et} \quad e_{33} = \frac{l}{l+2m}(e_{11} + e_{22})$$

$$\forall a, b \in \{1, 2\}, \quad s_{ab} = l^*(e_{11} + e_{22})d_{ab} + 2me_{ab} \quad (1.9)$$

Où l et m désignent les coefficients de Lamé du matériau élastique linéaire et

$$l^* = \frac{2l(l+m)}{l+2m} \quad (1.10)$$

Par analogie avec la loi de Hooke tridimensionnel (1.2), (1.9) apparaît comme la loi de Hooke bidimensionnelle suivante

$$\forall a, b \in \{1, 2\}, \quad s_{ab} = l^* e_{gg} d_{ab} + 2m e_{ab} \quad (1.11)$$

Alors pour un état plan de déformation les équations (1.7) dont la composante est en relation avec la troisième direction deviennent :

$$e_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad g_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad g_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (1.12)$$

I. 6 Equation d'équilibre en coordonnées polaires

En général, dans des structures à section circulaire il est plus commode d'utiliser les coordonnées cylindriques r, θ, z . En coordonnées polaires la position d'un point est définie

généralement par sa distance à l'origine ou rayon (r) et par l'angle (θ) que fait avec l'un des axes du repère cartésien

(figure 1.2)

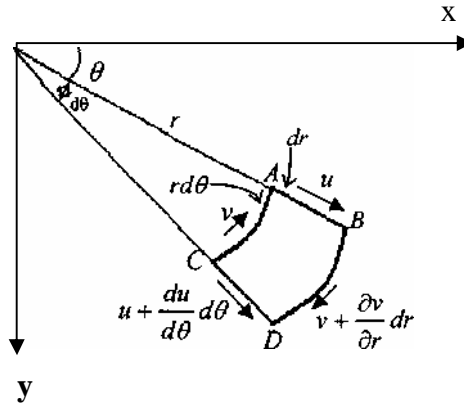


Figure 1.2 Relation entre les coordonnées cartésiennes et polaires

I.6.1 Définition des coordonnées polaires

On remarque que les coordonnées polaires et cartésiennes sont reliées par les équations :

$$\begin{aligned}
 r^2 &= x^2 + y^2 & \text{ou} & & x &= r \cos q & z &= z \\
 q &= \text{Arctg} \frac{y}{x} & & & y &= r \sin q & &
 \end{aligned}
 \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{2x}{2\sqrt{(x^2 + y^2)}} = \frac{x}{r} = \cos q \\
 \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{2y}{2\sqrt{(x^2 + y^2)}} = \frac{y}{r} = \sin q \\
 \frac{\partial q}{\partial x} &= -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin q}{r}
 \end{aligned}
 \tag{1.14}$$

Les dérivées par rapport à x et y dans le système cartésien peuvent être transformer en fonction de r et θ comme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} = \cos q \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin q}{r} \frac{\partial}{\partial q} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y} = \sin q \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos q}{r} \frac{\partial}{\partial q} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Considérons les composantes des vecteurs déplacements au point P (figure 1.2) ou u_r et u_q sont les composantes du vecteur déplacement dans la direction radiale et tangentielle. Les composantes du vecteur déplacement par rapport au système cartésien on a :

$$\begin{aligned} u_x &= u_r \cos q - u_q \sin q \\ u_y &= u_r \sin q + u_q \cos q \\ u_z &= u_z \end{aligned} \quad (1.16)$$

Si on utilise la règle de transformation des systèmes de coordonnées ; on peut trouver les élongations dans le système de coordonnée cylindriques c-à-d.

$$e'_{ij} = b_{im} b_{jn} e_{mn}$$

$$[e'_{ij}] = \begin{bmatrix} e_{rr} & e_{rq} & e_{rz} \\ e_{qr} & e_{qq} & e_{qz} \\ e_{zr} & e_{zq} & e_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

La matrice de transformation :

$$[b_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos q & \sin q & 0 \\ -\sin q & \cos q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

On trouve :

$$\begin{aligned} e'_{11} &= e_{rr} = b_{im} b_{in} e_{mn} = b_{11} b_{1n} e_{1n} + b_{12} b_{1n} e_{2n} + b_{13} b_{1n} e_{3n} \\ &= b_{11} b_{11} e_{11} + b_{11} b_{12} e_{12} + b_{11} b_{12} e_{12} + b_{12} b_{11} e_{21} + b_{12} b_{12} e_{22} + b_{12} b_{13} e_{13} + b_{13} b_{11} e_{31} + b_{13} b_{12} e_{32} + b_{13} b_{13} e_{33} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e'_{11} &= e_{rr} = e_{xx} \cos^2 q + e_{yy} \sin^2 q + e_{xy} \sin^2 q \\
 e'_{22} &= e_{qq} = e_{xx} \sin^2 q + e_{yy} \cos^2 q - e_{xy} \sin^2 q \\
 e_{rq} &= (e_{yy} - e_{xx}) \cos q \sin q + e_{xy} (\cos^2 q - \sin^2 q) \\
 e_{zr} &= e_{zx} \cos q + e_{zy} \sin q \\
 e_{zq} &= -e_{zx} \sin q + e_{zy} \cos q \\
 e_{zz} &= e_{zz}
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

Sachant que:

$$\begin{aligned}
 e_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\
 e_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right); \quad e_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right); \quad e_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 e_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} (u_r \cos q - u_q \sin q) = \left(\cos q \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin q}{r} \frac{\partial}{\partial q} \right) (u_r \cos q - u_q \sin q) \\
 e_{xx} &= \cos^2 q \frac{\partial u_r}{\partial r} - \cos q \sin q \left(\frac{\partial u_q}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial q} - \frac{u_q}{r} \right) + \sin^2 q \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_q}{\partial r} \right) \\
 e_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (u_r \sin q + u_q \cos q) = \sin^2 q \frac{\partial u_r}{\partial r} + \cos^2 q \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_q}{\partial q} \right) + \cos q \sin q \left(\frac{\partial u_q}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial q} - \frac{u_q}{r} \right) \\
 e_{xy} &= \frac{1}{2} \sin^2 q \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_q}{\partial q} - \frac{u_r}{r} \right) + \frac{1}{2} \cos^2 q \left(\frac{\partial u_q}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial q} - \frac{u_q}{r} \right)
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Remplaçons l'équation (1.20) dans l'équation (1.19) on trouve :

$$\begin{aligned}
 e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\
 e_{qq} &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_q}{\partial q}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_{rq} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial q} + \frac{\partial u_q}{\partial r} - \frac{u_q}{r} \right) \\
 e_{zq} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial q} + \frac{\partial u_q}{\partial z} \right) \\
 e_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

De la même façon ; les composantes des contraintes dans le système de coordonnées est donné par :

$$[s'_{ij}] = \begin{bmatrix} s_{rr} & s_{rq} & s_{rz} \\ s_{qr} & s_{qq} & s_{qz} \\ s_{zr} & s_{zq} & s_{zz} \end{bmatrix}$$

Utilisant la règle de transformation ($s'_{ij} = B_{im} B_{jn} s_{in}$) on trouve :

$$\begin{aligned}
 s_{rr} &= s_{xx} \cos^2 q + s_{yy} \sin^2 q + s_{xy} \sin 2q \\
 s_{qq} &= s_{xx} \sin^2 q + s_{yy} \cos^2 q - s_{xy} \sin 2q \\
 s_{zz} &= s_{zz}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\
 e_{qq} &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_q}{\partial q} \\
 e_{rq} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial q} + \frac{\partial u_q}{\partial r} - \frac{u_q}{r} \right) \\
 e_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
 e_{zq} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial q} + \frac{\partial u_q}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

1.7 Analyse élastique du tube cylindrique sous pression

En plus de la formulation élastique, les matériaux sont supposés parfaitement plastiques ou à écrouissage linéaire cinématique [5,6].

Une solution analytique pour le champ de contraintes, déformations et déplacement dans un tube cylindrique sous pression interne à paroi épaisse d'un matériau élastique parfaitement plastique est présentée.

Le corps considéré est un tube cylindrique axisymétrique en acier (Figure 1.3) ayant les données techniques suivantes :

La contrainte limite élastique : $p_{lim} = 100MPa$

Le module d'Young : $E = 70000MPa$

Le coefficient de poisson : $n = 0.3$

Les rayons du cylindre sont : $R_1 = a$ et $R_2 = b$

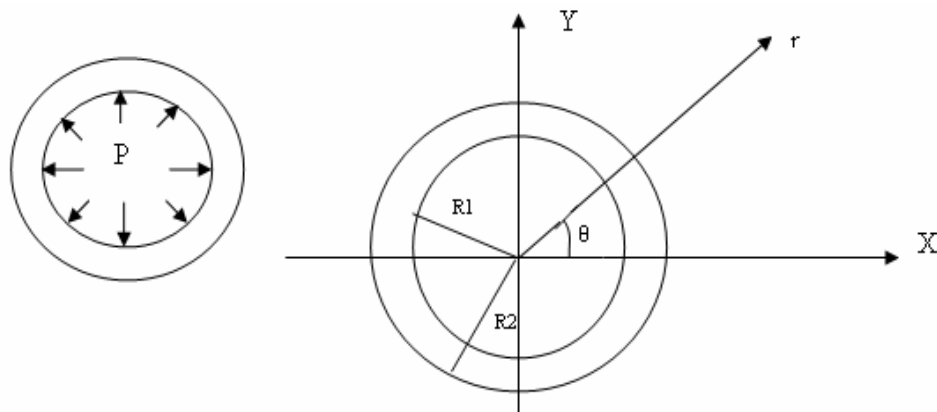


Figure 1.3 Tube Cylindrique soumis à une pression interne

I.7.1 Relation entre contraintes et déformations

L'analyse des corps de révolutions axisymétriques est similaire à celle des contraintes et déformations planes. Dans la notation usuelle, les contraintes sont désignées par:

S_{rr} , $S_{\theta\theta}$, $S_{r\theta}$, et les déformations correspondantes sont : e_{rr} , $e_{\theta\theta}$, $e_{r\theta}$

Les équations d'équilibre dans les coordonnées polaires sont données par :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_{rq}}{\partial q} + \frac{\partial s_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (s_r - s_q) + F_r &= 0 \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial s_q}{\partial q} + \frac{\partial s_{rq}}{\partial r} + \frac{\partial s_{qz}}{\partial z} + \frac{2s_{rq}}{r} + F_q &= 0 \\
 \frac{\partial s_z}{\partial z} + \frac{\partial s_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_{qz}}{\partial q} + \frac{1}{r} s_{rz} + F_z &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1.23}$$

Dans le cas de distribution symétrique des contraintes autour d'un axe perpendiculaire au plan de la section, les composantes de contraintes ne dépendent plus de la variable q et la contrainte tangentielle t_{rq} s'annulera

Pour un matériau élastique (de constantes E et n), les relations entre les contraintes et les déformations donnent pour le plan rq

$$\begin{aligned}
 e_{rr} &= \frac{1}{2E} (s_{rr} - n(s_{rr} + s_{qq})) \\
 e_{qq} &= \frac{1}{2E} (s_{qq} - n(s_{rr} + s_{qq})) \\
 e_{rq} &= \frac{1}{2E} s_{rq}
 \end{aligned}
 \tag{1.24}$$

Dans notre cas, l'analyse élastique est très importante puisque l'étude élasto-plastique nécessite la connaissance des contraintes circonférentielles et radiales lors de la sollicitation élastique du cylindre [7,8]. Dans ce contexte, la méthode utilisée pour résoudre ce problème est basée sur l'introduction de la fonction d'Airy (f) qui satisfait les conditions d'équilibre et de compatibilité ($\nabla^4 = 0$) en utilisant les coordonnées polaires (r, θ) à une position longitudinale (Z) constante tout en négligeant les forces de masse de ce corps. Pour les corps axisymétriques, la fonction d'Airy en coordonnée polaire est exprimée seulement en fonction de (r) et elle est donnée par :

$$f(r) = Ar^2 \log r + Br^2 + C \log r + D
 \tag{1.25}$$

Où A, B, C et D sont des constantes qui seront déterminées utilisant les conditions aux limites des contraintes sur le Tube. En fait, les contraintes radiale, circonférentielle et de cisaillement sont exprimées à une position (r, θ) et en fonction de f par :

$$\begin{aligned}
 S_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \\
 S_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \\
 S_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)
 \end{aligned}
 \tag{1.26}$$

En utilisant les conditions aux limites, quand $r = a$ où $S_{rr} = -p$ et quand $r = b$ où $S_{rr} = 0$; on obtient comme résultats :

$$\begin{aligned}
 S_{rr} &= \frac{a^2 p}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \\
 S_{\theta\theta} &= \frac{a^2 p}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \\
 S_{r\theta} &= \frac{2pa^2 n}{b^2 - a^2}
 \end{aligned}
 \tag{1.27}$$

Dans la phase élastique le matériau du tube cylindrique obéit à la loi de l'élasticité linéaire et les contraintes radiales et circonférentielles en fonction du rapport (r/a) est présenté sur la figure 1.4, où S_0 est la pression interne appliquée (p). En effet il est clair de notifier que ces contraintes sont maximales sur la paroi interne du cylindre ($r = a$) dû à l'application de la pression interne. Par contre quand r tend vers b c'est - à - dire ($r/a = 2$) la contrainte radiale s'annule, tandis que $S_{\theta\theta} = 0.05S_0$. Ce qui explique le fait que lorsque le tube est mince ($b/a \approx 1$) la contrainte radiale sur la face (a) reste importante au voisinage S_0 , et si cette dernière est proche à la limite élastique, un risque de la fissuration du tube cylindrique serait très probable (cas de vaisseaux sanguins).

Sur la figure 1.5 on a reporté la distribution des déformations radiale et circonférentielle du tube cylindrique soumis à une pression interne. On constate que la déformation circonférentielle est plus élevée à la paroi interne, alors que la déformation radiale est presque négligeable. D'après l'allure de ces deux figures on peut dire que le niveau, soit des contraintes circonférentielles ou des déformations est élevé à la paroi interne du tube cylindrique. Ce qui veut dire que si la pression atteint la valeur de la limite élastique, alors il y a risque d'endommagements du tube cylindrique.

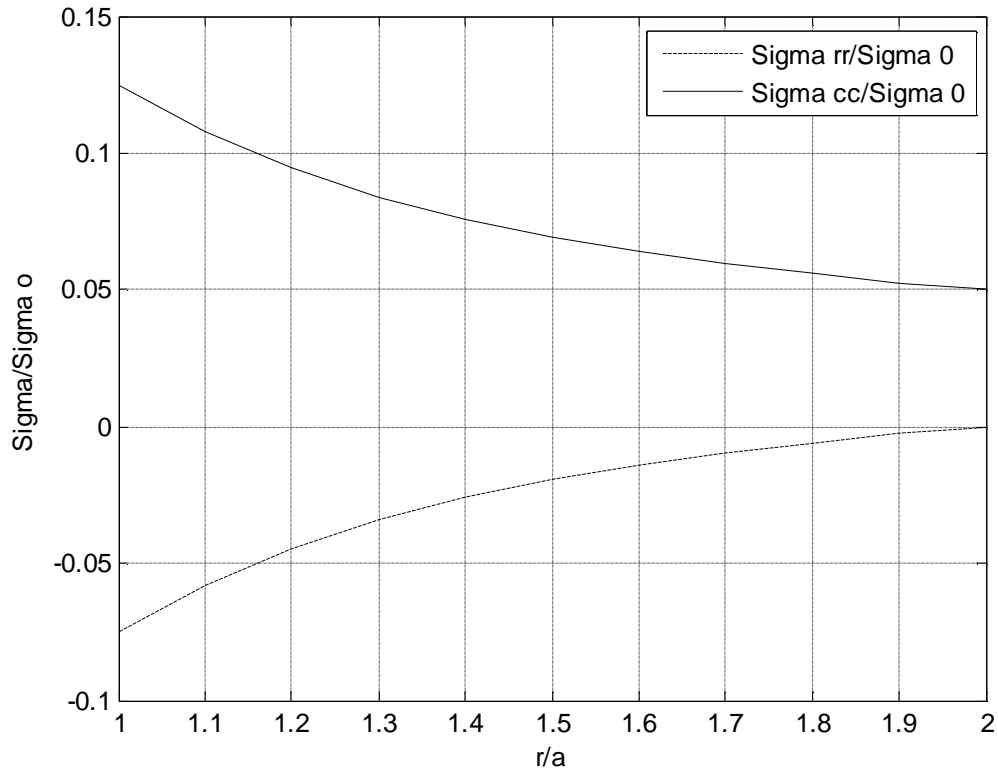


Figure 1.4 Distribution des contraintes radiales et circonférentielles

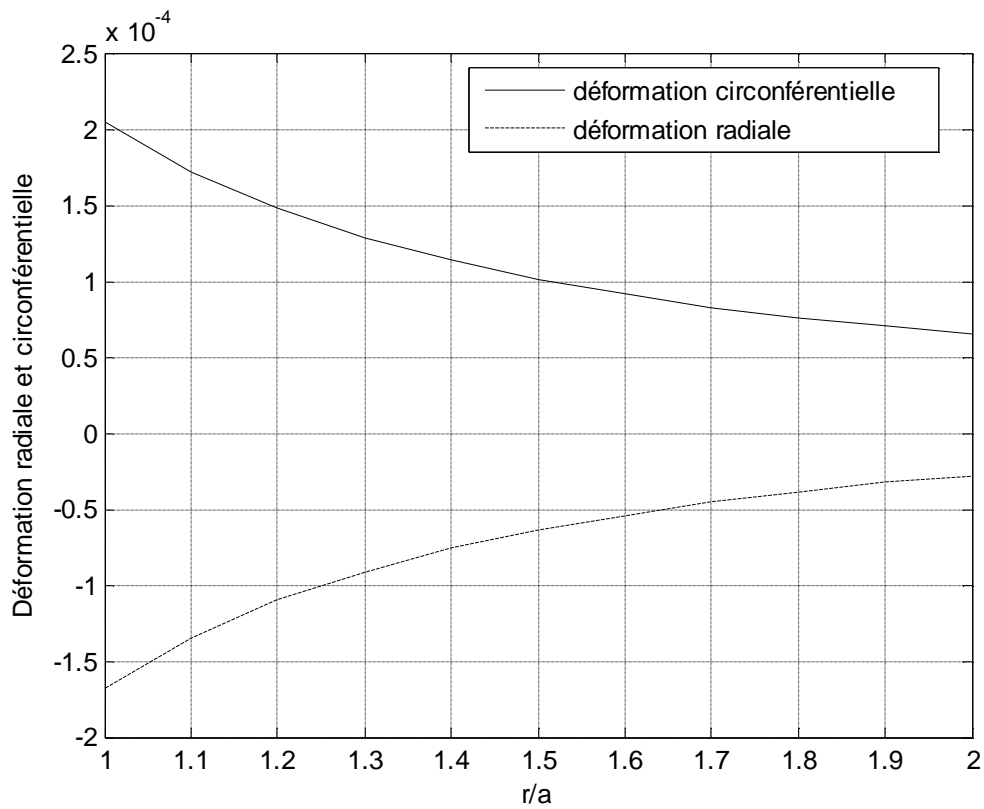


Figure 1.5 Distribution des déformations radiales et circonférentielles

Chapitre II

Analyse élasto-plastique d'un tube cylindrique

II ANALYSE ELASTO-PLASTIQUE D'UN CORPS ISOTROPE

II.1 Introduction

L'étude élasto-plastique est fondée sur un critère faisant intervenir les invariants du tenseur des contraintes généralisées. Le processus d'intégration numérique à travers l'épaisseur est évité tout en tenant compte de l'apparition progressive de la plasticité. Le calcul élasto-plastique de l'accroissement de contraintes fait par une approche intégrale permet d'éviter dans certains cas le processus d'approximation successives.

II.2 Analyse élasto-plastique d'un tube cylindrique sous pression interne

II.2.1 Idéalisations

A l'intérieur du domaine élastique, l'état de contrainte et de déformation en un point donné ne dépend que de l'état final, c'est-à-dire ne dépend pas du chemin parcouru à partir de l'état initial: il existe une relation biunivoque entre la contrainte et la déformation, donnée par la loi de Hooke. Lorsqu'on atteint la frontière de l'élasticité et lorsqu'on la dépasse, deux cas déduits du comportement plastique peuvent se produire [9,10] :

- Le matériau est parfaitement plastique : la contrainte n'évolue pas avec la déformation et la surface d'écoulement reste inchangée. La limite d'écoulement nécessaire pour poursuivre la déformation est indépendante de la déformation plastique déjà réalisée et est égale à la limite d'élasticité du matériau.

- Le matériau est plastique écrouissable : La contrainte augmente avec la déformation, le matériau se consolide et la surface d'écoulement évolue. La limite d'écoulement dépend du chemin plastique parcouru. Les critères ou fonctions qui sont utilisés avec la considération de

leur limite de validité, et qui feront ressortir les plus courants étant donné leur correspondance aux réalités physiques sont le critère de Von Mises et le critère de Tresca.

II.2.2 Détermination de la limite élastique

La limite d'écoulement s_0 constitue la caractéristique essentielle dans le cas de l'analyse limite. Par conséquent le modèle de base utilisé est celui de la courbe élastique –parfaitement plastique. Dans ce cas, nous supposons que la déformation qui correspond à un point d'écoulement de valeur s_0 croît vers l'infini. Par l'analyse limite d'une structure, nous cherchons à déterminer la valeur de la charge limite qui entraîne un effondrement de la structure, c'est-à-dire une déformation inaccessible. En outre, la charge d'effondrement (qui correspond à une déformation infinie, ou excessive) est sensiblement supérieure à la charge maximale permise dans les limites du comportement élastique [11,12].

Pour les corps cylindriques épais, soumis uniquement à des contraintes internes radiales, la théorie de l'état plan de contrainte est appliquée ; et les équations d'équilibre en coordonnées cylindriques sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_{rq}}{\partial q} + \frac{\partial s_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (s_r - s_q) + F_r &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial s_q}{\partial q} + \frac{\partial s_{rq}}{\partial r} + \frac{\partial s_{qz}}{\partial z} + \frac{2s_{rq}}{r} + F_q &= 0 \\ \frac{\partial s_z}{\partial z} + \frac{\partial s_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_{qz}}{\partial q} + \frac{1}{r} s_{rz} + F_z &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dans le cas axisymétrique et en négligeant les forces de masses $\overset{\cdot}{F}$, la première équation d'équilibre devient :

$$\frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (s_r - s_q) = 0 \tag{2.2}$$

Pour déterminer la pression critique dans le cylindre on applique le critère de Tresca, comme critère de la limite élastique [13] qui stipule que : $s_q \geq s_z \geq s_r$

Avec : $s_q - s_r = s_0 > 0$

En substituant chaque contrainte par sa valeur respective on obtient :

$$s_q - s_r = \frac{2p \left(\frac{b^2}{r^2} \right)}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right)} = s_0 \quad (2.3)$$

La variation croissante de la pression à l'intérieure du cylindre nous permet de constater le premier point de plasticité où $r = a$ lorsque la pression p atteint sa valeur limite d'élasticité p_{lim} . A partir de cette valeur, une zone de plasticité totale de rayon (c) se développe en fonction de l'augmentation de la pression interne dans le cylindre d'où l'apparition d'une zone plastique et une autre zone élastique (figure2.1).

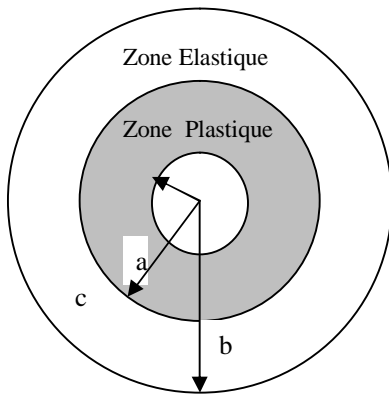


Figure 2.1 : Progression de la zone plastique à partir de la surface intérieure

La pression limite d'élasticité sur la face $r=a$ est donc :

$$s_0 = p_{\text{lim}} \frac{2b^2}{b^2 - a^2}$$

D'où :

$$p_{\text{lim}} = \frac{s_0}{2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \quad (2.4)$$

Lorsque la pression interne p croit au-delà de la valeur limite d'élasticité p_{lim} où le premier point plastique est apparu sur la face intérieure du cylindre, il est normal de supposer qu'une

zone plastique se développe à partir de cette face, et occupe un volume de rayon r compris entre $(a$ et $c)$, c'est-à-dire : $(a \leq r \leq c)$, où c est en fonction de la pression appliquée (p).

Tandis que la zone décrite par: $(c \leq r \leq b)$ reste parfaitement élastique.

Autrement dit, quand : $r = c$, la contrainte normale sera : $s_{rr} = s_c = -q$

qui est la pression radiale critique de frontière. De cela on peut écrire que :

$$q = \frac{s_0}{2} \left(1 - \frac{c^2}{b^2} \right) \tag{2.5}$$

II.3 Détermination des contraintes radiale et circonférentielle [14,15]

Utilisant le critère de Tresca à l'équation (2.1) :

$$\frac{ds_{rr}}{dr} = \frac{s_0}{r}$$

On trouve : $s_{rr} = s_0 \ln r + cte$

En appliquant les conditions aux limites pour $(r = a)$ où $s_{rr} = -p$, on aura :

$$s_{rr} = s_0 \ln \frac{r}{a} - p$$

En conséquence et à l'état critique quand $r = c$ on a :

$$s_{rr} = s_0 \ln \frac{c}{a} - p = s_c \tag{2.6}$$

Dans la zone élastique (figure 3.1) et quand $r = c$ et employant l'équation (2.4), s_0 devient :

$$s_0 = -s_c \frac{2b^2}{b^2 - c^2} \tag{2.7}$$

En éliminant s_c des équations (2.5) et (2.6) où clairement on a une continuité de pression à $r = c$, on aura :

$$\frac{p}{s_0} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(c/a)^2}{(b/a)^2} \right) + \ln \frac{c}{a}$$

Autrement dit :

$$\frac{p}{s_0} = \ln \frac{c}{a} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c^2}{b^2} \right) \quad (2.8)$$

Par ailleurs, la distribution des contraintes radiale et circonférentielle à n'importe quelle position (r) et pour différentes valeurs de (c) sont données par :

$$s_{rr} = s_0 \left[\ln \frac{r/a}{c/a} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(c/a)^2}{(b/a)^2} \right) \right] \quad (2.9)$$

$$s_{\theta\theta} = s_0 \left[\ln \frac{r/a}{c/a} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{(c/a)^2}{(b/a)^2} \right) \right]$$

Dont leur allure respective est représentée sur la figure 2.2, la figure 2.3, la figure 2.4 et la figure 2.5, en fonction du rapport (r/a). Tandis que l'expression (2.8) nous permet de constater l'étendue de la zone de plasticité à n'importe quelle position du cylindre (c) en fonction de la variation de la pression interne (p).

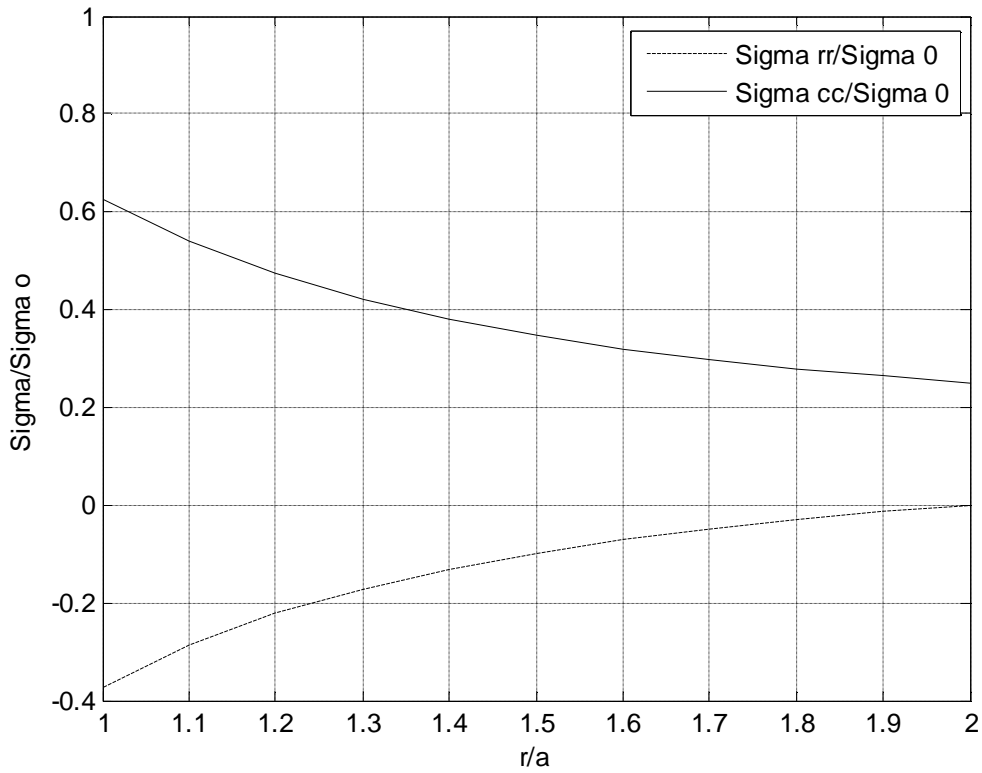


Figure 2.2 : Distribution des contraintes radiales et circonférentielles pour $c/a=1$.

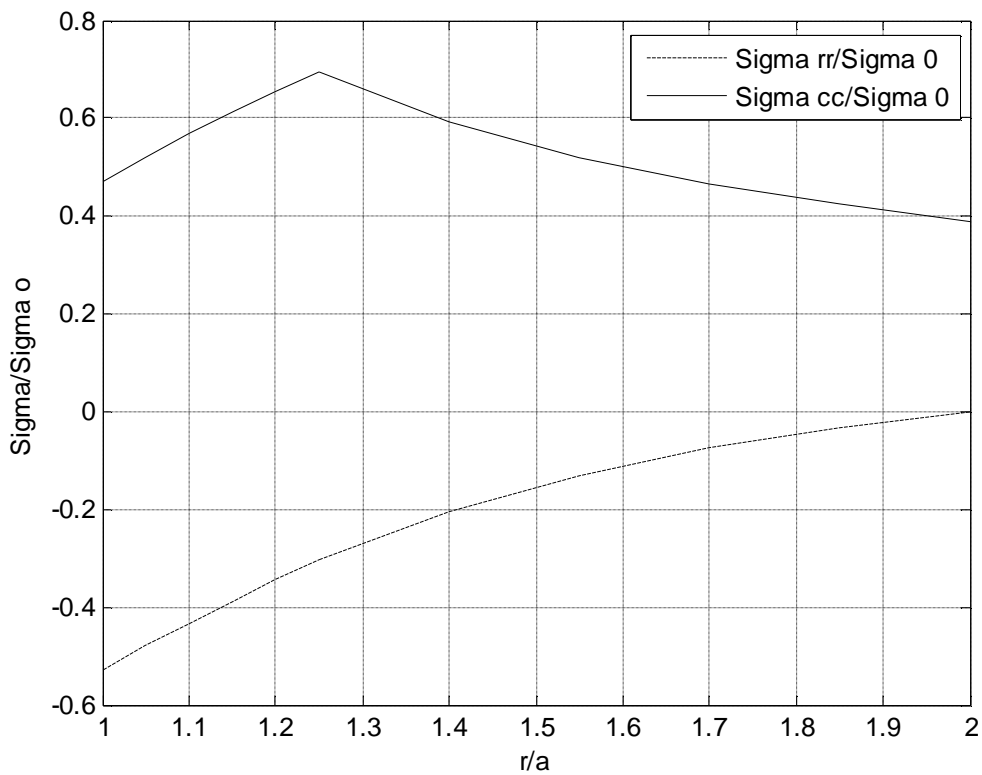


Figure 2.3 : Distribution des contraintes radiales et circonférentielles pour $c/a=1.25$

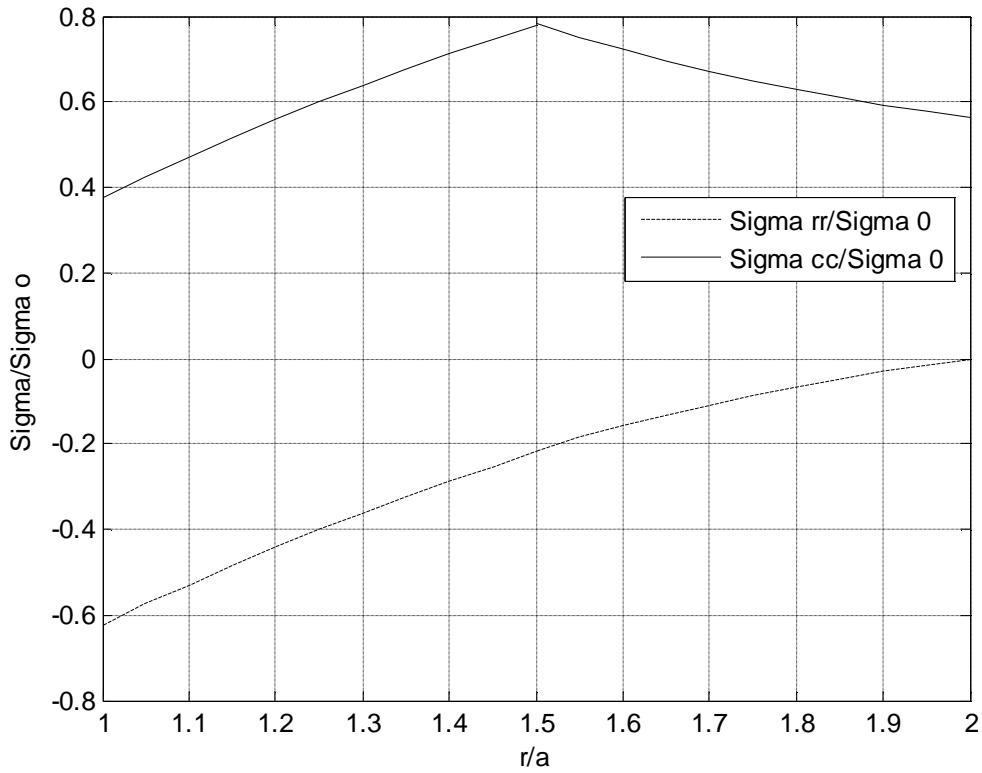


Figure 2.4 : Distribution des contraintes radiales et circonférentielles pour $c/a=1.5$

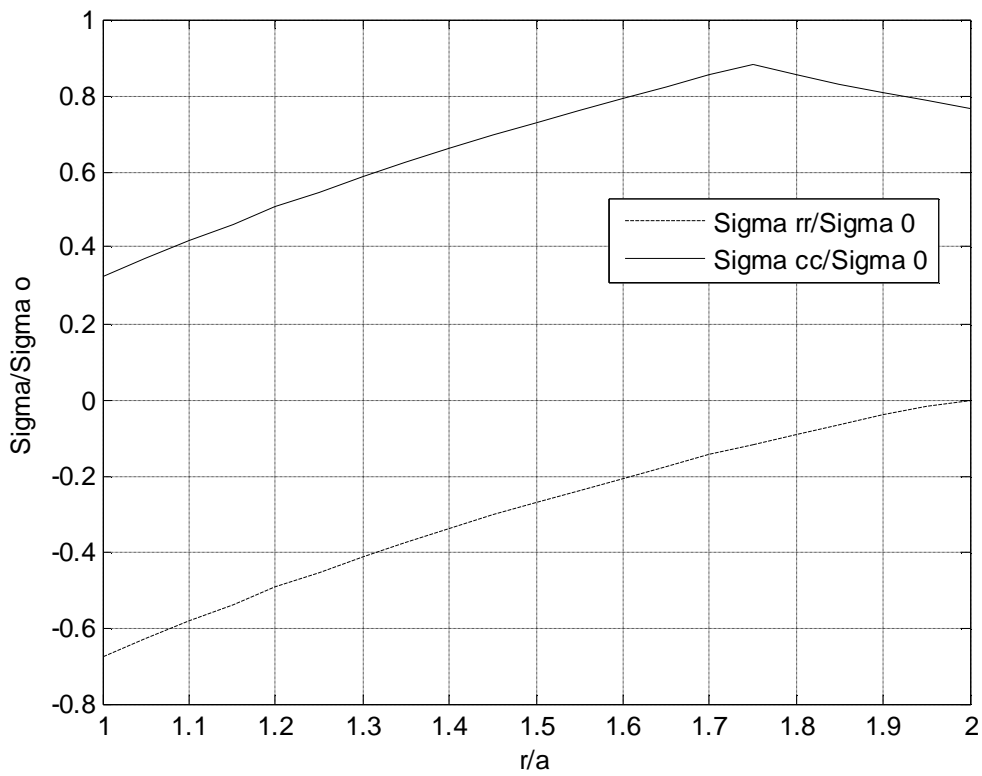


Figure 2.5. : Distribution des contraintes radiales et circonférentielles pour $c/a=1.75$

Dans la phase élasto-plastique, on constate une propagation de la zone plastique de rayon (r) au fur et à mesure que la pression interne augmente au delà de la limite élastique (figure 2.1) ; par contre quand ($r \geq c$), la zone est élastique. On constate que dans la zone plastique les contraintes circonférentielle et radiale augmentent progressivement jusqu'à atteindre les rapports de ($c/a = 1$) puis décroissent dans la zone élastique et tendent vers les valeurs décrites ultérieurement pour $r/a=2$ où $s_{rr} = 0$ et $s_{\theta\theta} = 0.2s_0$.

Par ailleurs, un résumé des résultats est représenté sur la figure 2.6 pour plusieurs valeurs de (c/a) où on remarque que le niveau des contraintes circonférentielles augmente en fonction de l'élargissement du rayon de plasticité c , surtout quand ($c=b$) d'où la présence d'une différence de pression ce qui explique la présence des contraintes résiduelles.

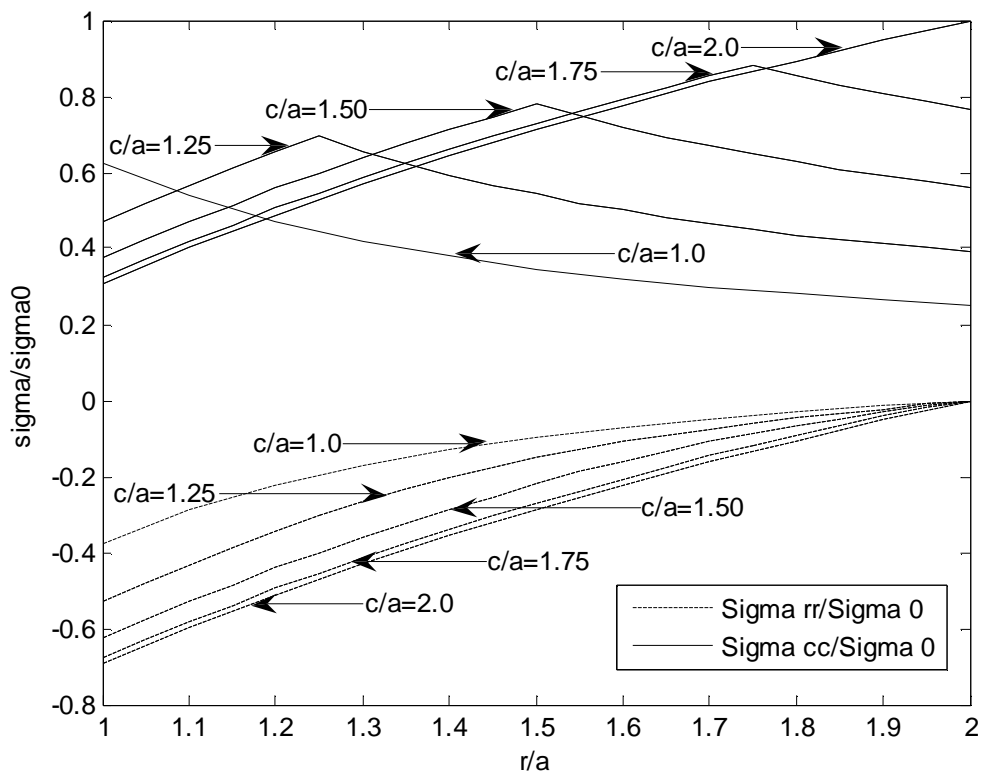


Figure 2.6 : Distribution des contraintes radiales et circonférentielles Globale.

II.4 Discussion

L'étude élasto-plastique est fondée sur un critère faisant intervenir la limite élastique pour pouvoir déterminer l'avancée de la zone plastique du tube cylindrique à travers l'épaisseur. Lorsque le niveau des contraintes est élevé, le comportement du tube cylindrique ne peut plus être élaboré traduisant ainsi correctement le comportement du matériau. La figure 2.6 résume la progression de la zone plastique à partir de la face interne du tube cylindrique soumis à une variation de pression. Dans le cas où la pression atteint la limite d'élasticité, alors le risque de l'apparition des fissures est probable.

Chapitre III

Analyse du tube cylindrique complètement plastifié

III FORMULATION DES LOIS D'ÉCOULEMENT.

Un matériau a un comportement plastique lorsqu'il se déforme d'une façon permanente, c'est-à-dire s'il conserve une partie de sa déformation même après le retrait des sollicitations. La plupart des matériaux d'ingénierie se comportent de façon plastique au-delà d'une certaine limite de déformation.

Nous allons maintenant nous attacher à décrire les lois d'écoulement. La plasticité est un phénomène irréversible, dépendant du trajet de chargement. Aussi, les lois d'écoulement plastique sont exprimées sous une forme incrémentale [16,17].

III.1 Critères de plasticité

Lors d'un essai de traction ou de compression unidimensionnel, la limite d'élasticité est définie comme étant la contrainte pour laquelle apparaissent les premières déformations plastiques. En deçà de cette limite, toutes les déformations générées pendant le chargement de l'éprouvette peuvent être recouvrées. Cette définition du domaine élastique pour un essai uni-axial doit être généralisée dans le cas d'un chargement complexe. Cette généralisation tridimensionnelle est appelée critère de plasticité. Elle permet de définir, dans l'espace des contraintes, la région pour laquelle le matériau aura un comportement élastique. Nous nous bornerons ici à la définition des deux critères isotropes les plus utilisés pour les métaux, les critères de Von Mises et de Tresca.

L'expression S_0 de ces critères dépend a priori de toutes les composantes du tenseur de contraintes ainsi que de la limite d'élasticité S_e . Cependant, quelques remarques préliminaires vont nous permettre de donner une forme générale des critères isotropes. Tout d'abord, en raison de l'isotropie et donc de l'invariance par rapport aux repères seuls les trois invariants du tenseur des contraintes peuvent entrer en compte. De plus, en raison de l'incompressibilité

plastique par rapport à la contrainte hydrostatique, seuls les invariants j_2 et j_3 du déviateur des contraintes \mathbf{s}' , peuvent intervenir. Nous obtenons ainsi l'expression générale des critères isotropes.

$$f(j_2, j_3, \mathbf{s}_e) = 0$$

Avec

$$j_2 = \frac{3}{2} (\mathbf{s}'_{ij} \mathbf{s}'_{ij})^{\frac{1}{2}} \quad j_3 = \frac{9}{2} (\mathbf{s}'_{ij} \mathbf{s}'_{jk} \mathbf{s}'_{kl})^{\frac{1}{3}} \quad (3.1.a)$$

III.1.1 Critère de Tresca.

Le critère de Tresca relie le seuil de plasticité à la contrainte de Tresca, qui est la contrainte tangentielle maximale. En égalant la contrainte tangentielle maximale d'un état de contrainte quelconque avec celle d'une traction uni axiale correspondant à l'obtention de la limite élastique, on aboutit à l'expression du critère de Tresca :

$$f = \frac{1}{2} \sup(|s_i - s_j|) - \frac{1}{2} s_0 = 0 \quad (3.1.b)$$

III.1.2 Critère de Von Mises

Le critère de Von Mises a été en considérant que le seuil de plasticité est lié à l'énergie élastique de cisaillement, que nous noterons w_d , qui est une fonction du produit tensoriel contracté sur deux indices du déviateur du tenseur des contraintes.

$$W_d = \frac{1}{4m} \mathbf{s}' : \mathbf{s}' \quad \mathbf{s}' = \frac{1}{4m} \mathbf{s}'_{ij} \mathbf{s}'_{ij} = \frac{1}{6m} j_2 (\mathbf{s}')^2 \quad (3.2)$$

Lorsque la limite d'élasticité s_e est atteinte au cours d'un essai de traction pure, l'état de contrainte est simple et l'énergie élastique de cisaillement s'en déduit :

$$s = \begin{bmatrix} s_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad s' = s - \frac{1}{3} \text{tr}(s)I \quad W_d = \frac{1}{4m} s' : s' = \frac{1}{6m} s_e^2 \quad (3.3)$$

En égalant l'énergie élastique de cisaillement d'un état de contrainte quelconque avec celle d'une traction uni axiale correspondant à l'obtention de la limite élastique, on aboutit à l'expression du critère de Von Mises.

$$f = s_{eq} - s_e = j_2(s) - s_0 = 0 \quad (3.4)$$

Ainsi, l'état de contrainte tel que $s_{eq} = s_e$ est équivalent au sens de Von Mises à l'état unidimensionnel, l'expression développée de ce critère dans l'espace des contraintes est :

$$\left(\frac{1}{2} \left[(s_{11} - s_{22})^2 + (s_{22} - s_{33})^2 + (s_{33} - s_{11})^2 + 6(s_{12}^2 + s_{23}^2 + s_{13}^2) \right]^{\frac{1}{2}} - s_e \right) = 0 \quad (3.5)$$

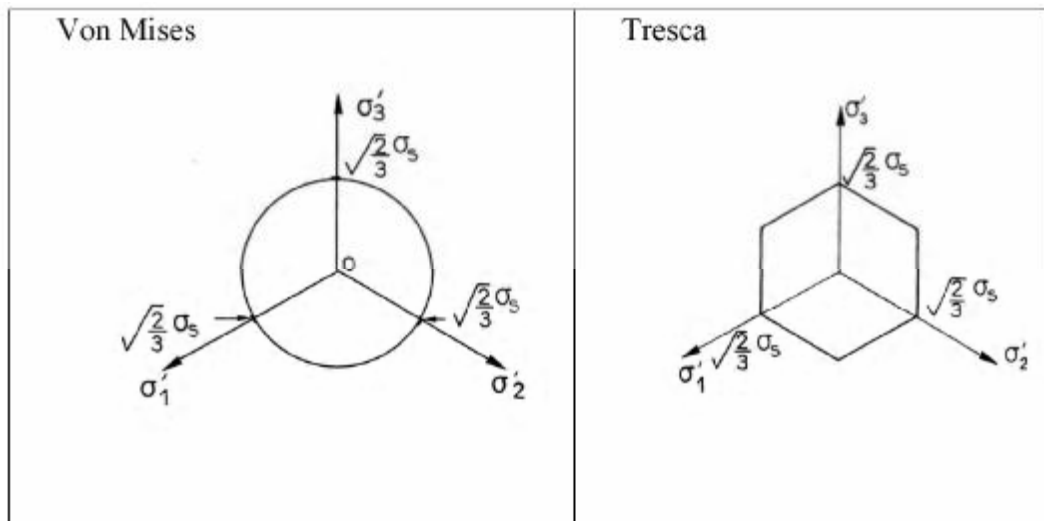


Figure 3.1 Représentation des critères dans l'espace des contraintes déviateur

De plus les deux critères sont très proches et permettent tous deux de bien décrire le comportement des métaux.

III.1.3 Critère de charge et décharge

Nous appellerons surface de charge la surface décrite par le critère de plasticité à l'état écroui du matériau. Pour qu'il y est écoulement plastique, il est nécessaire de réunir deux conditions :

- Le point représentatif de l'état de contrainte est situé sur la surface de charge (la limite d'élasticité doit être atteinte) : $f(\mathbf{s}, V_k) = 0$. Sachant que V_k représente les variables d'états représentatives de l'histoire passée.

- Le point représentatif de l'état de contrainte reste sur la surface de charge, condition de consistance qui assure que le point $(\mathbf{s} + d\mathbf{s})$ soit lui aussi sur la surface de charge (l'état de contrainte ne revient pas à l'intérieur du domaine élastique) : $df(\mathbf{s}, V_k) = 0$

Pour résumer :	$f < 0$	comportement élastique
	$f = 0$ et $df < 0$	décharge élastique
	$f = 0$ et $df = 0$	écoulement plastique

III.2 Plastification totale du cylindre [18, 19, 20].

La plastification totale du cylindre est fonction de l'expansion radiale de la zone parfaitement plastique qui est contrôlée par la déformation élastique de la zone élastique qui l'entoure complètement où les déformations et les contraintes sont donnés respectivement par :

$$\begin{aligned}
 e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\
 e_{qq} &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_q}{\partial r} \\
 e_{rq} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial q} + \frac{\partial u_q}{\partial r} - \frac{u_q}{r} \right)
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
 s_{rr} &= \frac{E}{(1+n)(1-2n)}((1-n)e_{rr} + 2ne_{rr}) \\
 s_{qq} &= \frac{E}{(1+n)(1-2n)}(e_{qq} + ne_{rr})
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

Où u_r et u_q sont les déplacements radial et circonférentiel du cylindre. Et sachant que la déformation élastique se fait seulement radialement suivant la composante (r), donc :

$$e_{rr} = \frac{du_r}{dr} \text{ et } e_{qq} = \frac{u_r}{r}$$

Pour un petit élément du cylindre de dimension dr et dq où ($c \leq r \leq b$), les forces d'équilibre de contrainte stipulent que :

$$\frac{ds_{rr}}{dr} = \frac{2(s_{qq} - s_{rr})}{r}$$

En remplaçant on aura :

$$\frac{d^2u_r}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_r}{dr} = \frac{2u_r}{r^2}$$

Après intégration et application des conditions aux limites, le déplacement radial du cylindre sera :

$$u_r = \frac{3c^2qr}{2E(b^2 - c^2)} \tag{3.8}$$

Substituant q par sa valeur et pour $r = b$ ce déplacement s'exprime en fonction du rayon c comme :

$$\frac{u_r}{b} = \frac{3}{4} \frac{s_0}{E} \left(\frac{c}{b} \right)^2 \tag{3.9}$$

Remplaçons l'équation (3.8) dans l'équation (3.9), pour obtenir une relation entre la pression appliquée p et l'élargissement radial du cylindre (u_r) :

$$\frac{2p}{s_0} = 1 - \frac{4}{3} \frac{E}{s_0} \frac{u_r}{b} + \ln \left(\frac{4}{3} \frac{E}{s_0} \frac{u_r}{b} \right) + 2 \ln \frac{b}{a} \quad (3.10)$$

Qui est appliquée dans la zone $a \leq c \leq b$, autrement dit :

$$\frac{a^2}{b^2} \leq \frac{4}{3} \frac{E}{s_0} \frac{u_r}{b} \leq 1 \quad (3.11)$$

Ce qui explique que quand le cylindre est dans le domaine élastique l'équation (3.10) peut s'écrire de la forme suivante :

$$\frac{2p}{s_0} = \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) \left(\frac{4}{3} \frac{E}{s_0} \frac{u_r}{b} \right) \quad (3.12)$$

Par contre lorsqu'il est complètement plastifié et quand $c = b$ l'équation (3.10) devient :

$$p_c = s_0 \ln \frac{b}{a} \quad (3.13)$$

Cette équation représente la pression qui cause la plastification complète du cylindre et sa représentation est schématisée sur la figure 3.2.

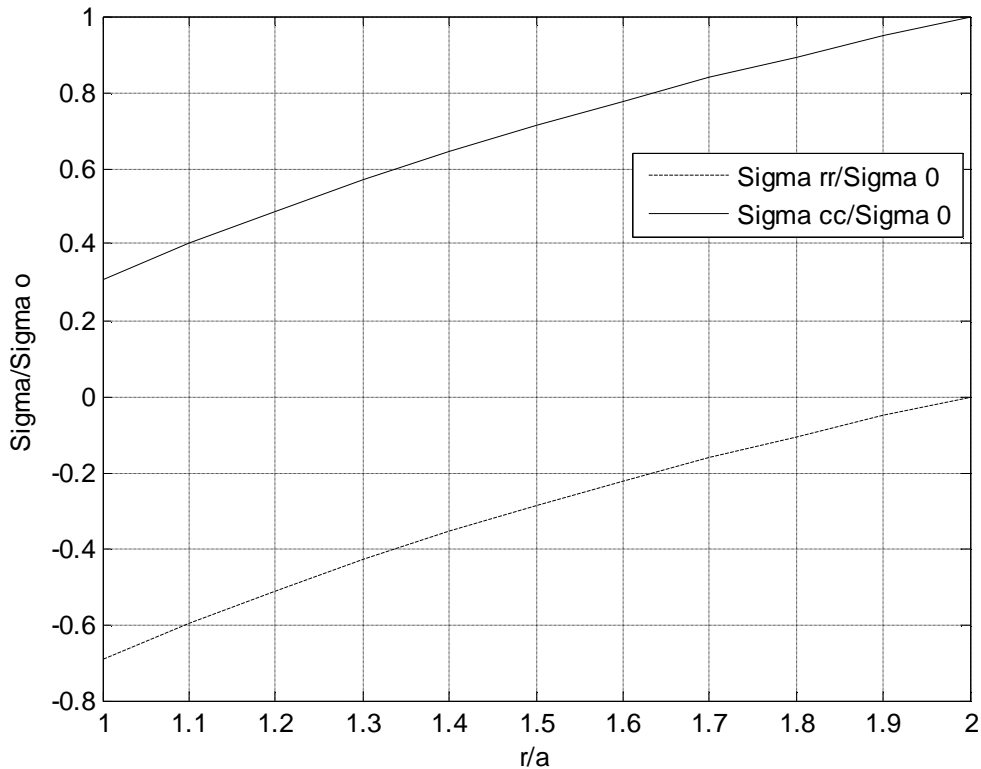


Figure 3.2 Plastification complète du tube cylindrique

III.3 Contraintes résiduelles

III.3.1 Introduction

Les contraintes résiduelles sont des contraintes à l'intérieur de nombreuses pièces mécaniques en l'absence de charges extérieures appliquées. Elles sont produites lors de l'élaboration des matériaux utilisés ou lors de la mise en forme, de l'usinage, de l'assemblage ou des traitements thermiques de ces pièces. Leurs valeurs peuvent être très élevées, de l'ordre de la contrainte d'écoulement. Elles peuvent provoquer la corrosion, la fissuration ou la rupture des pièces de leur seul fait ou en s'ajoutant aux contraintes mécaniques ou thermiques appliquées. Les résultats d'une étude [21] qui attribue à la corrosion sous contraintes près du quart de toutes les ruptures recensées par la compagnie 'Du pont' dans une enquête et les contraintes résiduelles jouent un rôle très important dans ces ruptures. La détermination des contraintes résiduelles revêt donc une très grande importance dans l'industrie, car elle permet de connaître la contrainte résultante totale existant dans une pièce, donc le coefficient de sécurité réel et les risques de rupture de la pièce

La mesure des contraintes résiduelles est toujours délicate et difficile et on doit parfois comparer les résultats obtenus par des méthodes différentes. Les méthodes utilisées pour la mesure des contraintes résiduelles sont très nombreuses, mais une technique particulière est souvent mieux adaptée à une certaine géométrie de pièce, ou à un champ donné de contraintes résiduelles [22 ,23].

Les contraintes résiduelles sont la cause principale de la corrosion et la fissuration des tubes d'échangeurs de chaleur et des tubes de force des réacteurs nucléaires. Ces contraintes sont produites lors de la fabrication des tubes ou lors de leur installation dans les plaques à tubes des échangeurs de chaleur. Dans l'industrie nucléaire en particulier, les conséquences de la fissuration des tubes sont très coûteuses et provoquent la perte d'eau lourde et l'arrêt des centrales pendant de longues périodes en raison des problèmes de contamination. Cela explique que de nombreuses études sur les contraintes résiduelles et la corrosion aient été menées dans ce secteur.

Comme le fait remarquer plusieurs auteurs [24], il n'existe pas de méthode permettant de mesurer de façon simple et précise, la distribution des contraintes résiduelles dans un tel tube

La connaissance des contraintes résiduelles introduites dans une structure par les divers procédés de fabrication peut revêtir une grande importance pour certaines applications ne serait-ce que pour définir le gradient de contraintes réel dans une pièce. Des modèles théoriques de prévision ont été développés [25], qui font intervenir les causes de l'apparition de ces contraintes, quelles soient de nature mécanique, thermique ou structurale. Compte tenu de la complexité du problème, ces modèles nécessitent la prise en compte d'un certain nombre d'hypothèses simplificatrices qu'il s'avère nécessaire de tester. Pour cela on a pu calculer la distribution des contraintes résiduelles à travers l'épaisseur du cylindre soumis à une pression interne, du à l'effet d'un liquide incompressible.

III.3.2 Définition

Les contraintes qui existent dans une pièce en service sont dues, à des charges mécaniques ou à des gradient thermiques. Une autre catégorie de contraintes, appelées contraintes résiduelles, sont créées dans les éléments d'une structure ou d'une machine par le procédé de fabrication. Ces contraintes existent sans qu'aucune charge extérieure ne soit appliquée. Les contraintes

résiduelles ne donnent aucun signe de leur présence mais elles peuvent causer des fissures inattendues dans les composantes en service.

La compréhension de la nature des contraintes résiduelles et de leur influence sur le comportement des pièces mécaniques est nécessaire si l'on veut éviter des problèmes dus à l'endommagement prématuré de ces pièces et à améliorer ainsi la performance du produit.

Une contrainte résiduelle de tension peut contribuer à la formation et à la propagation de fissures dans une composante et ainsi à en diminuer la durée de vie. Dans certains cas si elle est de niveau élevé, la contrainte résiduelle de tension peut causer une rupture au moment de l'application d'une charge relativement faible et même, dans certains cas, sans application de charge.

La contrainte résiduelle de compression, par contre, peut améliorer de façon importante la résistance à la fissuration. C'est pourquoi plusieurs méthodes ont été développées pour introduire des contraintes résiduelles de compression dans les couches superficielles des composantes métalliques. Citons, par exemple, les techniques de grenailage et de roulage.

III.3.3 Méthodes de détermination des contraintes résiduelles

III.3.3.1 Généralités

Les contraintes résiduelles, en s'ajoutant aux contraintes mécaniques ou thermiques appliquées, peuvent provoquer la rupture des pièces. Ces ruptures se produisent souvent sur des pièces vitales et ont alors des conséquences catastrophiques et coûteuses. Les contraintes sont généralement calculées à partir de l'évaluation des forces appliquées et de certaines hypothèses sur la géométrie des pièces et sur la distribution des contraintes. Elles sont aussi déduites des déformations des corps, à partir des relations 'déformations contraintes' des lois de comportement du matériau. Les déformations sont mesurées entre un état initial, sans charge appliquée, et un état final où les charges sont appliquées. Le cas des contraintes résiduelles est différent puisque ces contraintes, intrinsèques à la pièce, existent sans charge extérieure appliquée. Le corps, sous leur action, est en équilibre.

Le principe général des méthodes dites mécaniques de détermination des contraintes résiduelles est de provoquer un relâchement total ou partiel de ces contraintes, donc une déformation de la pièce, par un procédé d'usinage. L'état d'équilibre initial du corps se trouve

modifié par l'usinage et le corps se déforme pour atteindre un nouvel état d'équilibre. Les déformations sont enregistrées pendant l'usinage et les contraintes résiduelles correspondantes sont calculées à partir des relations déformations contraintes appropriées. Ces méthodes sont dites destructives puisque la pièce doit être usinée à des degrés divers.

Certaines méthodes enfin, dites théoriques, évaluent les contraintes résiduelles à partir de la succession des déformations subies par la pièce, en considérant des lois de comportement données (élasticité, plasticité, écrouissage, etc...). Ces méthodes utilisent très souvent la technique des éléments finis.

Les méthodes de détermination des contraintes résiduelles, fort nombreuses, peuvent être classées de quatre façons :

- 1) En fonction du principe de base de la méthode.
- 2) En fonction du type des contraintes résiduelles mesurées (macro géométriques ou micro géométriques).
- 3) En fonction de la distribution des contraintes résiduelles dans la pièces (uniforme ou non).
- 4) En fonction de leur effet destructif sur la pièce.

En réalité, sans qu'aucune pression soit appliquée, ces types de contraintes peuvent exister et sont réparties à l'intérieur de la structure et leur présence peut être bénéfique ou néfaste. Dans notre cas, ces contraintes résiduelles sont engendrées dans le cylindre quand on le charge à une pression p au-delà du domaine élastique, puis on le décharge; en conséquence[26] on obtient un champs de contraintes résiduelles radiales et circonférentielles pour la zone plastique $c \leq r \leq b$.

Contraintes résiduelles dans la zone plastique :

$$s_{rr} = -p \left[1 + \frac{1}{(b/a)^2 - 1} \left(1 - \frac{(b/a)^2}{(r/a)^2} \right) \right] + s_0 \ln \frac{r}{a} \quad (3.14)$$

$$s_{\theta\theta} = -p \left[1 + \frac{1}{(b/a)^2 - 1} \left(1 + \frac{(b/a)^2}{(r/a)^2} \right) \right] + s_0 \left(1 + \ln \frac{r}{a} \right)$$

On fait croître la pression appliquée en $r = a$ depuis zéro jusqu'à $p_i = -S_{rr}(a)$, si p_i croît au-delà de la valeur $c(\frac{1-a^2}{b^2})$, apparaissent dans la zone plastique ($a < r < x$) des déformations initiales (plastiques), dont le calcul est classique .

$$p_i = 2c \log\left(\frac{x}{a}\right) + c\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) \tag{3.15}$$

$$Ee^0 = 2(1-n^2)c \left[\left(\frac{x^2}{r^2} - 1\right)(e_q \otimes e_q - e_r \otimes e_r) \right] \text{ pour } a < r < x \tag{3.16}$$

$$Ee^0 = 0 \text{ pour } x < r < b$$

Il est facile de vérifier que e^0 est, dans le domaine $a < r < x$, le champ de déformation de déplacement :

$$Ex^0 = 2(1-n^2) \left[\left(r + \frac{x^2}{r}\right)e_r - 2rqe_q \right] \tag{3.17}$$

On décharge alors la structure ; la décharge est élastique si $\text{Log}(b/a) < 2/3$.

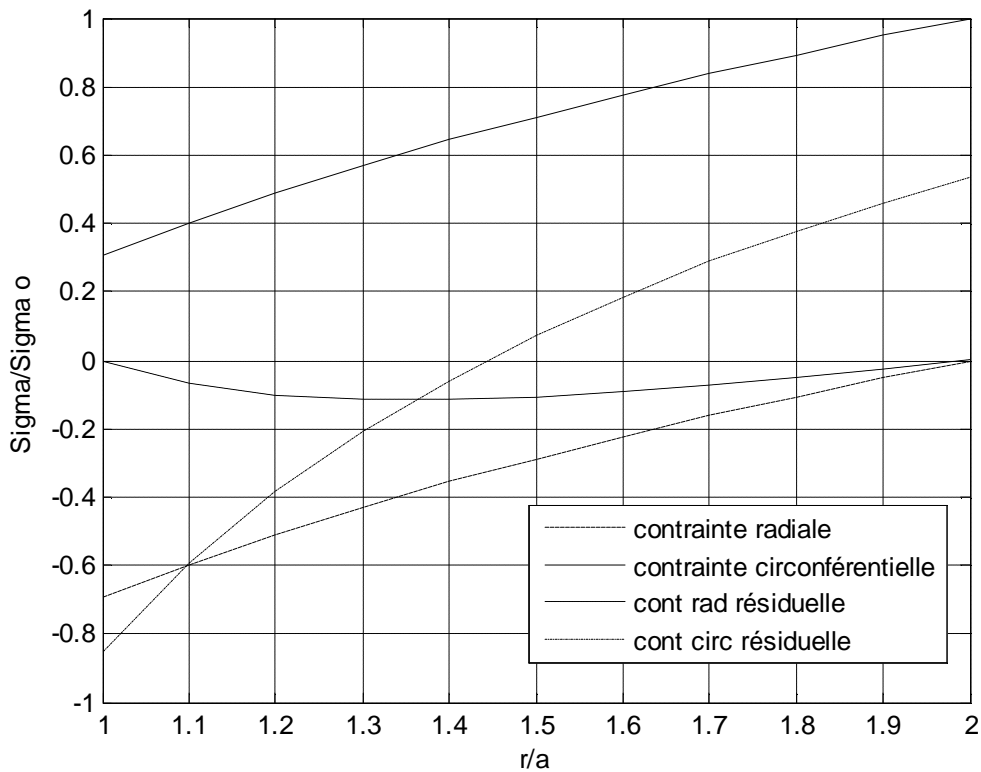


Figure 3.3 Distribution des contraintes parfaitement plastiques et des contraintes résiduelles à travers l'épaisseur du tube cylindrique

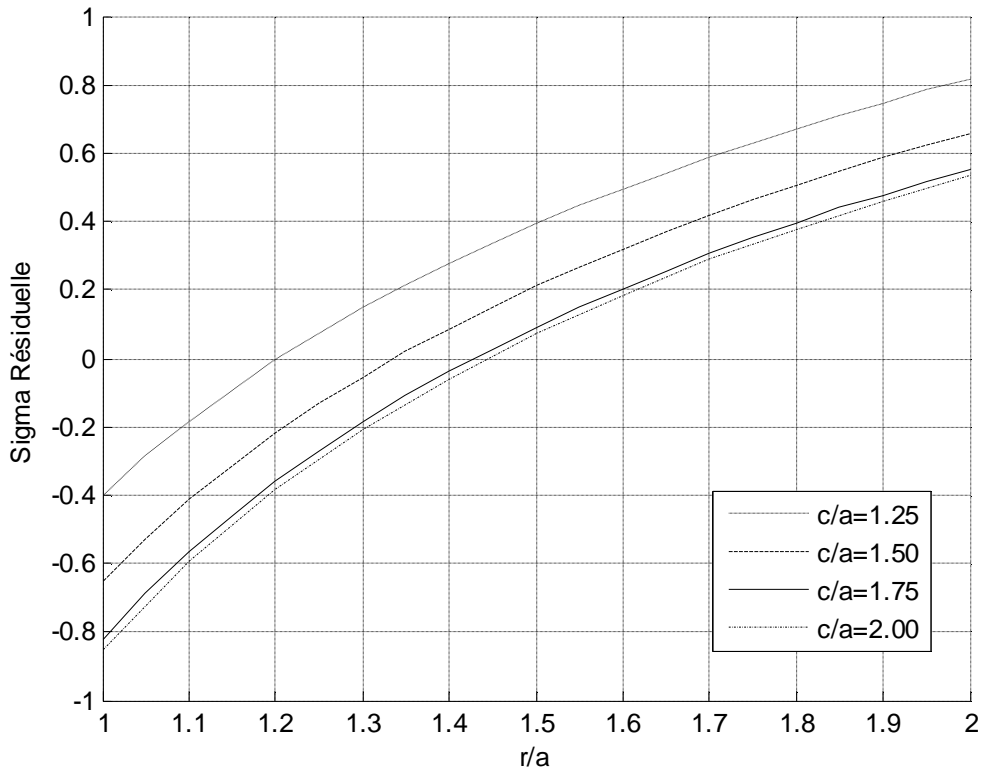


Figure 3.4 Contraintes résiduelles du tube cylindrique plastifié

III.4 Cas particulier : Etude élasto-plastique d'une sphère sous pression interne [27]

III.4.1 Analyse élastique de la sphère

Le corps étudié est à symétrie sphérique, les conditions aux limites possèdent aussi la symétrie sphérique (figure 3.5). On est donc amené à chercher une solution dans un système à coordonnées sphériques r, θ, Φ .

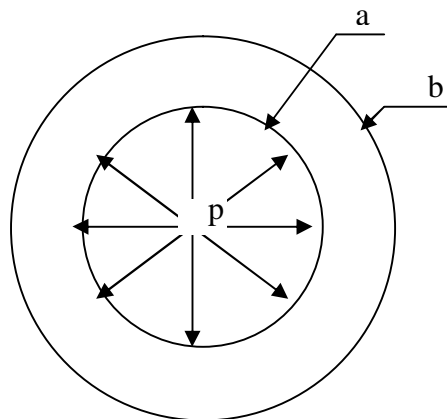


Figure 3.5 Sphère soumise à une pression interne

III.4.1.1 Transformation des déplacements

$$u_R = u_r \sin f + u_z \cos f$$

$$u_f = u_r \cos f - u_z \sin f$$

$$u_q = u_f$$

III.4.1.2 Transformation des contraintes

$$S_R = S_r \sin^2 f + S_z \cos^2 f + 2t_{rz} \sin f \cos f$$

$$S_q = S_r \cos^2 f + S_z \sin^2 f - 2t_{rz} \sin f \cos f$$

$$S_q = S_f$$

$$t_{Rf} = (S_r - S_z) \sin f \cos f - t_{rz} (\sin^2 f - \cos^2 f)$$

$$t_{fq} = t_{rq} \cos f - t_{qz} \sin f$$

$$t_{qR} = t_{rq} \sin f + t_{qz} \cos f$$

Puisqu' on a une symétrie sphérique alors les conditions suivantes sont prises en considération avec les équations suivantes.

$$g_1(r) = S_{qq} = S_{ff}$$

$$g_2(r) = e_{qq} = e_{ff}$$

$$S_{rq} = S_{rf} = 0$$

$$e_{rq} = e_{rf} = 0$$

III.4.1.3 Détermination des contraintes

Les équations d'équilibre se réduisent à :

$$\frac{dS_{rr}}{dr} = \frac{2}{r}(S_{qq} - S_{rr}) \tag{3.18}$$

Les déformations élastiques ont la forme suivante :

$$e_{rr} = \frac{s_{rr} - 2ns_{qq}}{E}$$

$$e_{qq} = \frac{s_{qq} - n(s_{rr} + s_{qq})}{E}$$

Les déformations élastiques ont la forme suivante :

$$e_{rr} = \frac{s_{rr} - 2ns_{qq}}{E}$$

$$e_{qq} = \frac{s_{qq} - n(s_{rr} + s_{qq})}{E}$$
(3.19)

En remplaçant les déformations par leur expression nous obtenons :

$$s_{qq} = \frac{E}{(1+n)(1-2n)}(e_{qq} + ne_{rr})$$

$$s_{rr} = \frac{E}{(1+n)(1-2n)}(1-n)e_{rr} + 2ne_{qq}$$
(3.20)

Substituant ces deux dernières expressions dans l'équation d'équilibre (3.18), sachant que :

$$e_{rr} = \frac{du_r}{dr} \quad \text{et} \quad e_{qq} = \frac{u}{r}$$
(3.21)

Où u_r est le déplacement radial d'un point à un rayon r , il s'en suit que :

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{2}{r^2} u_r = 0$$

La solution de cette équation est :

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r^2}$$
(3.22)

Où C_1 et C_2 sont des constantes d'intégration qui s'obtiennent à partir des conditions aux limites. En remplaçant la valeur de u_r dans les équations précédentes, pour $r = a$ $s_{rr} = -p$

et pour $r = b$ $s_{rr} = 0$, on obtient finalement, les équations des contraintes et du déplacement.

$$\begin{aligned}
 s_{qq} = s_{ff} &= \frac{pa^3}{b^3 - a^3} \left(\frac{b^3}{2r^3} + 1 \right) \\
 s_{rr} &= -\frac{pa^3}{b^3 - a^3} \left(\frac{b^3}{r^3} - 1 \right)
 \end{aligned}
 \tag{3.23}$$

$$u_r = \frac{a^3}{b^3 - a^3} \left((1 - 2n)r + (1 + n) \frac{b^3}{2r^2} \right) \frac{p}{E}$$

D'après les formules précédentes on a :

$$s_{rr} - s_{qq} = -\frac{3}{2} p \frac{a^3}{b^3 - a^3} \frac{b^3}{r^3}
 \tag{3.24}$$

On applique le critère de Von-Mises comme critère de plasticité on aura : $s_{rr} - s_{qq} = -s_0$

Le premier point de plasticité apparaît donc en $r = a$ et lorsque P atteint la valeur P_e , limite d'élasticité de la sphère sous pression .

$$P_e = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{a^3}{b^3} \right) s_0
 \tag{3.25}$$

III.4.2. Analyse élasto-plastique de la sphère sous pression interne

Si la pression interne P dans la sphère augmente au-delà de la valeur P_e , comme le premier point plastique est apparu sur la face interne de la sphère, le développement de la zone plastique qui occupe le volume $a < r < c$ ou c est défini par une fonction de pression P .

III.4.2.1 Détermination des contraintes

La contrainte normale sur cette face est alors égale à la limite d'élasticité, de la sphère de rayon intérieur c et de rayon extérieure b, soumise à une pression interne :

$$s_{rr}(c) = -\frac{2}{3} \left(1 - \frac{c^3}{b^3}\right) s_0 \quad (3.26)$$

-Zone élastique :

Si on remplace a par c et P par l'équation (3.26) dans les équations (3.23), alors les contraintes dans la zone élastique auront la forme suivante :

$$s_{rr} = -\frac{2c^3}{3b^3} \left(\frac{b^3}{r^3} - 1\right) s_0$$

$$s_{\theta\theta} = \frac{2c^3}{3b^3} \left(1 + \frac{b^3}{2r^3}\right) s_0 \quad (3.27)$$

-Zone plastique :

Pour déterminer les contraintes dans la zone plastique, utilisons l'équation d'équilibre ainsi que le critère de plasticité.

$$\frac{ds_{rr}}{dr} + \frac{2}{r}(s_r - s_{\theta\theta}) = 0$$

$s_{rr} - s_{\theta\theta} = -s_0$, on obtient :

$$s_{rr} = 2 \ln(r) s_0 + c$$

Avec c la constante d'intégration qu'on détermine pour $s_{rr}(c)$.

$$s_{rr} = -\frac{2}{3} s_0 \left(1 + 3 \ln\left(\frac{c}{r}\right) - \frac{c^3}{b^3}\right)$$

$$s_{\theta\theta} = \frac{2}{3} s_0 \left(\frac{1}{2} - 3 \ln\left(\frac{c}{r}\right) + \frac{c^3}{b^3}\right) \quad (3.28)$$

La distribution des contraintes circonférentielles à travers l'épaisseur est représentée sur la figure (3.6) pour différentes valeurs du rapport (c/b). On constate, que ces contraintes dépendent du paramètre c d'où leur évolution en fonction de la pression P. On remarque que les contraintes circonférentielles sont maximales, de plus le niveau de ces contraintes est élevé juste à la paroi interne [28].

Pour $r = a$, $s_{rr} = -p$

$$P = \frac{2}{3} s_0 \left(1 + 3 \ln\left(\frac{c}{a}\right) - \frac{c^3}{b^3} \right) \tag{3.29}$$

Puisque la zone plastique se développe à partir de la face interne de la sphère, alors le rayon (c) croît constamment avec la pression P. Lorsque P atteint la pression limite P_e , le rayon extérieur b est alors atteint, d'où :

$$P_p = 2s_0 \ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{3.30}$$

P_p représente la pression limite conduisant à la rupture.

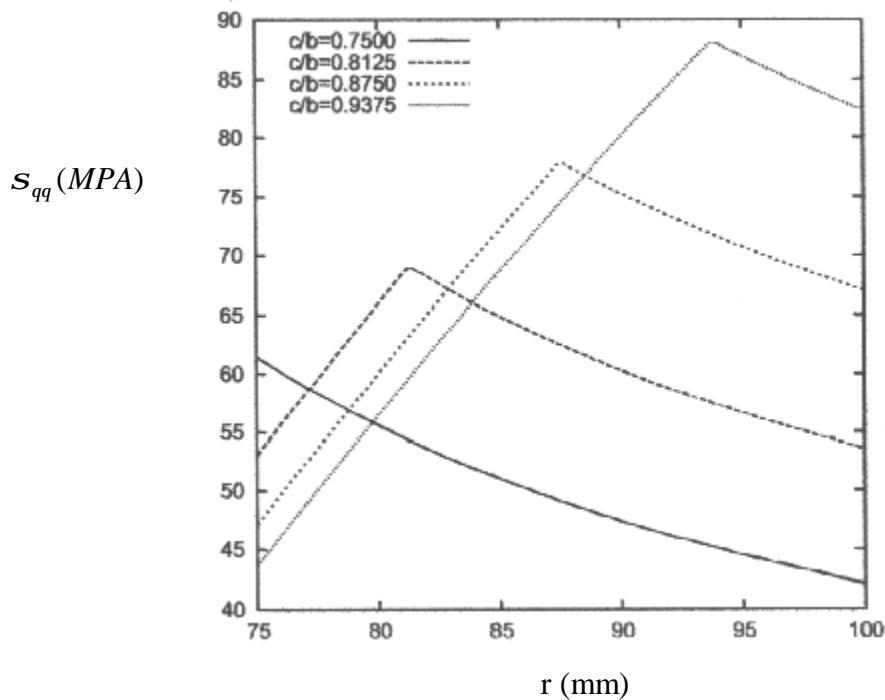


Figure 3.6 Distribution des Contraintes circonférentielles

Une mise en évidence de l'avancée de la zone plastique a été donnée suivant la figure 3.7 qui nous permet de déduire que la zone plastique se développe à partir de la face interne. Donc la pression P est une fonction du rayon de plasticité (c).

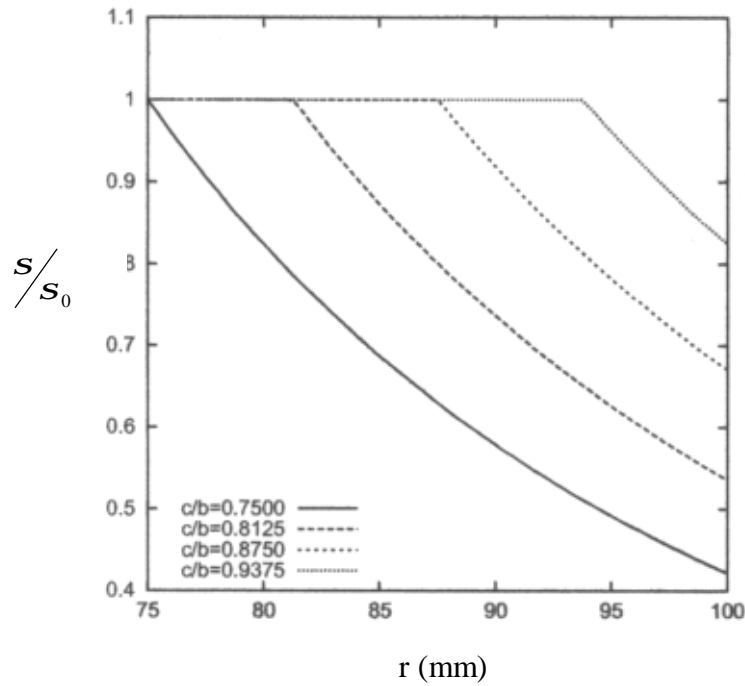


Figure 3.7 : Progression de la zone plastique

III.4.3 Analyse des déformations de la sphère totalement plastifiée

Puisque la déformation plastique ne produit pas de variation de volume du matériau, alors elle ne sera due qu'à la partie élastique de la déformation.

$$\frac{du_r}{dr} + 2\frac{u_r}{r} = -\frac{2(1-2n)}{E} \left(3\ln\left(\frac{c}{r}\right) - \frac{c^3}{b^3} \right) S_0$$

$$u_r = \frac{c}{r^2} - \frac{2(1-2n)}{E} r \left(\ln\left(\frac{c}{r}\right) + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{c^3}{b^3}\right) \right) S_0$$

Puisque le déplacement est continu à la surface pour $r = c$, donc le déplacement radial dans la zone plastique a l'expression suivante :

$$u_r = r \frac{S_0}{E} \left[(1-n) \frac{c^3}{r^3} - \frac{2}{3} (1-2n) \left(1 + 3 \ln \left(\frac{c}{r} \right) - \frac{c^3}{b^3} \right) \right] \quad (3.31)$$

On obtient alors les déformations plastiques calculées par différence entre les déformations totales et les déformations élastiques.

$$e_{rr} = \frac{2}{E} (1-n) \left(1 - \frac{c^3}{r^3} \right) S_0 \quad e_{\theta\theta} = -\frac{S_0}{E} \left[(1-n) \left(1 - \frac{c^3}{r^3} \right) \right] \quad (3.32)$$

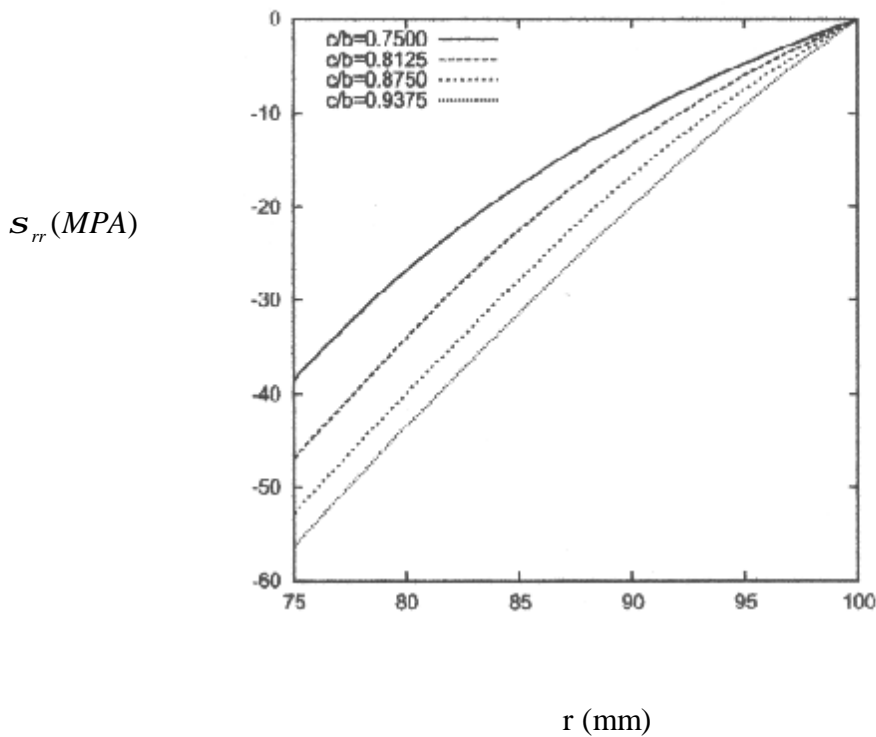


Figure 3.8 Plastification complète de la sphère

III.4.4 Contraintes résiduelles

Dans notre cas les contraintes résiduelles sont engendrées dans la sphère qu'on a déjà chargée à une pression P_m au-delà du domaine élastique, puis déchargé. On obtient un champ de contraintes résiduelles pour une zone plastique $a < r < c$. Puisque l'étude est théorique on a bien voulu vérifier l'application du critère de chargement et déchargement déjà analysé pour le tube cylindrique qui est soumis à une pression interne.

-Zone plastique

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= -\frac{2}{3}S_0 \left(1 + 3\ln\left(\frac{c}{r}\right) - \frac{c^3}{b^3} \right) + \frac{a^3}{b^3 - a^3} \left(\frac{b^3}{r^3} - 1 \right) P_m \\
 \sigma_{\theta\theta} &= \frac{2}{3}S_0 \left(\frac{1}{2} - 3\ln\left(\frac{c}{r}\right) + \frac{c^3}{b^3} \right) - \frac{a^3}{b^3 - a^3} \left(\frac{b^3}{2r^3} + 1 \right) P_m
 \end{aligned}
 \tag{3.33}$$

La figure 3.9 représente la distribution des contraintes résiduelles après décharge en faisant la comparaison avec la contrainte de Von Mises. On constate que le niveau de contrainte résiduelle est inférieur à celui de la contrainte de Von Mises surtout à la paroi interne de la sphère.

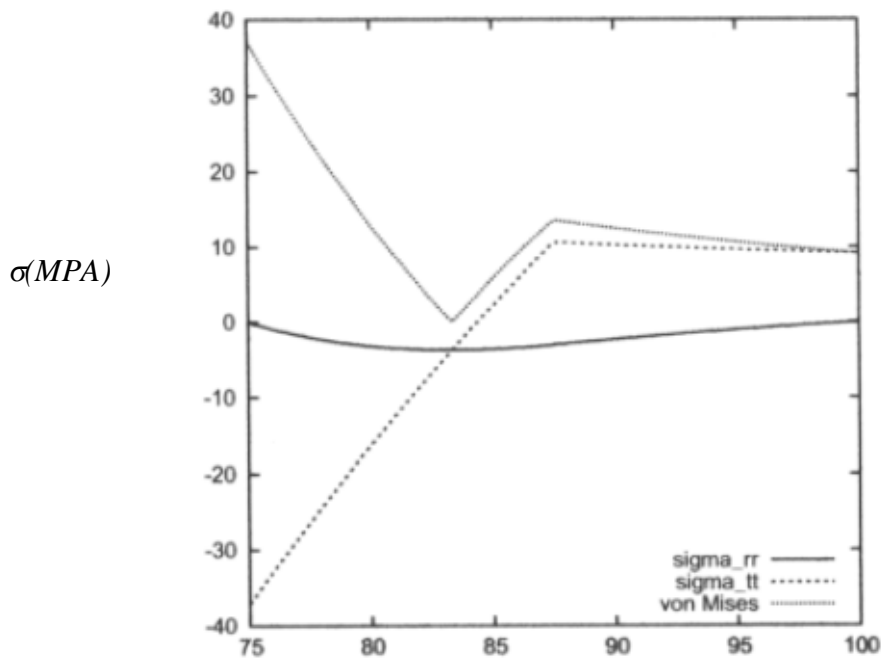


Figure 3.9 Contraintes résiduelles après décharge

On peut conclure que soit l'étude du comportement du tube cylindrique ou de la sphère qui sont soumis à des pressions internes, nous ont permis de déduire que l'effet de la variation de la pression à l'intérieur du cylindre ou de la sphère est néfaste. Si on ne prend pas en considération le niveau des contraintes résiduelles surtout à la paroi externe lorsque $r=b$ qui est élevé et en plus la contrainte résiduelle est de tension, ce qui risque de détériorer complètement la structure.

La contrainte résiduelle en surface est de signe contraire à la contrainte engendrée par le chargement initial (figure 3.3) du point de vue pratique, cet état de choses peut être bénéfique, car un chargement ultérieur entraînera une contrainte de surface nette dont la valeur pourra ne pas dépasser celle de la contrainte d'écoulement. Dans l'industrie, le contrôle des contraintes résiduelles est effectué très sérieusement ; bien souvent, les pièces sont traitées thermiquement en vue de réduire le niveau de ces contraintes résiduelles. Mentionnons enfin qu'une des causes les plus courantes de l'apparition de contraintes résiduelles est le soudage, notamment à cause des forts gradients thermiques qui surviennent dans les pièces assemblées par ce procédé.

III.5 Discussion

Sachant que les contraintes résiduelles sont dans la plupart des cas néfastes pour n'importe quelle types de structures, donc il est évident de bien évaluer leur niveau à fin d'éviter tout endommagement ou détérioration, c'est ce qui nous a emmené à faire cette étude.

Puisque notre analyse nous a permis de conclure que la variation de la pression à l'intérieur du tube cylindrique est fonction du rayon de plasticité (c), alors le risque de l'évolution d'une fissure est évident, d'où la détérioration du tube cylindrique. La figure 3.4 nous montre la variation des contraintes résiduelles à travers l'épaisseur du cylindrique (à partir de la surface interne), passant de la contrainte de compression à la contrainte de tension.

Sur la figure 3.8 est représenté le profil des contraintes dans l'épaisseur pour différents niveaux de pression. Dans le cas où il n'y a pas de plastification après décharge il s'agit alors d'un régime de fonctionnement ordinaire. Si au contraire il y a plastification, des déformations plastiques cycliques vont se produire avec un phénomène de fatigue plastique qui conduira à la ruine et la destruction de la structure du cylindre. Donc il serait plus important de connaître le niveau des contraintes résiduelles, pour pouvoir éviter la rupture du tube cylindrique avant même d'atteindre sa limite élastique.

Chapitre IV

Analyse élastique d'un tube cylindrique sous pression interne par la Méthode des Elément Finis

IV.1 Introduction

Le calcul numérique permet à l'ingénieur d'effectuer des simulations numériques de phénomènes physiques. Le calcul occupe une place stratégique avec la CAO et les autres technologies de simulation (essais) dans le développement d'un produit complexe qui touche à différents domaines de la physique. Cela concerne les industries automobiles, navales, aéronautiques, ferroviaires, mais aussi les industries lourdes: centrales électriques, plates formes pétrolières, et le génie civil.

Le calcul est indispensable lorsque l'on cherche à obtenir une solution optimisée pour réduire les coûts et les délais de fabrication. Grâce au calcul, même simplifié, l'ingénieur peut tester plusieurs configurations pour optimiser le comportement d'un modèle à une prestation donnée. Cela évite de multiplier les prototypes et les essais tests réels, les supports physiques ne servent plus à chercher une solution, ils permettent de la valider.

Le calcul s'applique aussi dans les domaines du « process ». Les procédés de fabrication tels que l'emboutissage, l'usinage grande vitesse, les dépôts de peinture, l'assemblage de tôlerie, la mise en forme des plastiques, peuvent être modélisés par éléments finis.

Enfin le calcul de conception dans les bureaux d'études, c'est sans doute le plus répandu car grâce aux outils de calcul simplifié dont disposent les logiciels de CAO modernes, la simulation numérique fait partie des outils de conception pour obtenir un comportement défini à priori qui détermine le dimensionnement, donc le dessin, des pièces mécaniques.

La méthode des éléments finis est de toutes les méthodes de discrétisation la plus utilisée car :

- A) elle peut traiter des problèmes de géométrie complexe.
- B) elle couvre de nombreux domaines de la physique.

C) les moyens informatiques actuels (puissance des calculateurs, outils de visualisation) la rende facile de mise en oeuvre.

La méthode des éléments finis occupe une place méritée dans la pratique de calcul moderne, l'ampleur de son application est assez large, notamment dans la conception des moteurs. Elle implique la formation et la résolution des systèmes d'Equations aux Dérivées Partielles (E.D.P) qui régissent les problèmes physiques. Les avantages qui lui sont propre résident dans l'aisance avec laquelle on peut automatiser la formulation de ces équations, et dans son aptitude à représenter des structures et des chargements extrêmement complexes[29,30,31].

La méthode peut être formulée à partir des considérations énergétiques ou variationnelles, donc plusieurs problèmes de la physique mathématique qui permettent ces formulations peuvent être résolus à l'aide de la méthode des éléments finis, et avec cela la solution comprendra dans tous les cas les opérations fonctionnelles identiques, parmi ces problèmes on cite : l'analyse des structures, transmission de chaleur, écoulements des fluides, ondes électromagnétiques.

L'idée générale de la méthode consiste en l'idéalisation d'un milieu continu par un ensemble des éléments finis qui sont interliés par des lignes nodales, et qui coopèrent aux noeuds - (voir figure 4.1).

On définit à l'intérieur de chaque élément une fonction d'approximation, appelée "fonction d'interpolation ou de forme" exprimée en fonction des inconnus aux noeuds, et ces variables nodales définissent le comportement de l'élément et par conséquent le groupement ou assemblage définit approximativement le comportement global de la structure.

IV.2 Les différentes formulations de la méthode des éléments finis

Pour traiter un problème de mécanique de structure par la méthode des éléments finis, il existe plusieurs sortes de formulations d'éléments finis :

ü Formulation Déplacement :

Elle a pour principe la minimisation de l'énergie potentielle totale du système en fonction du champ des déplacements. Cette formulation suppose que les conditions de compatibilité des déplacements sont satisfaites, ce qui conduit aux équations d'équilibre puis à leurs résolutions en tenant compte des conditions aux limites afin de déterminer les déplacements nodaux (solutions uniques),

ü Formulation Contrainte :

Dans laquelle on utilise le principe de la stationnarité de l'énergie complémentaire (elle atteint un maximum), on définit un champ de contrainte de façon à assurer l'équilibre, puis poser les équations de compatibilité des déplacements et les résoudre pour obtenir les (forces ou les contraintes)

ü Formulation Mixte :

Appelée aussi déplacement force, c'est un mélange des deux formulations précédentes, dans ce cas on utilise le principe de l'énergie stationnaire de REISSNER, cette formulation trouve sa puissance au concept d'élément fini hybride utilisé dans la modélisation des problèmes de plaque et coque etc..

Dans le présent travail, le champ inconnu, est celui de déplacement (formulation déplacement), vu sa simplicité de mise en oeuvre, et qu'elle est la plus utilisée et la plus facile à comprendre des méthodes de calcul en élasticité.

IV.3 Maillage d'une structure

Une structure quelconque[32] est subdivisée en un certain nombre d'éléments de telle manière que la réunion de tous les éléments recouvre le plus exactement possible la structure, chaque élément est limité par des lignes nodales. Le point de rencontre de plusieurs lignes est appelé "noeud physique", certains noeuds appelés noeuds de discrétisation, peuvent être ajoutés pour des raisons de définition géométrique, afin de préciser la position d'une ligne nodale (figure 4.1).

Les types d'éléments utilisés [33, 34, 35, 36,37,] pour la subdivision de la structure dépendent de la géométrie de la structure et du degré de la précision demandé, ils peuvent être uni, bi, ou tridimensionnel (figure 4.2).

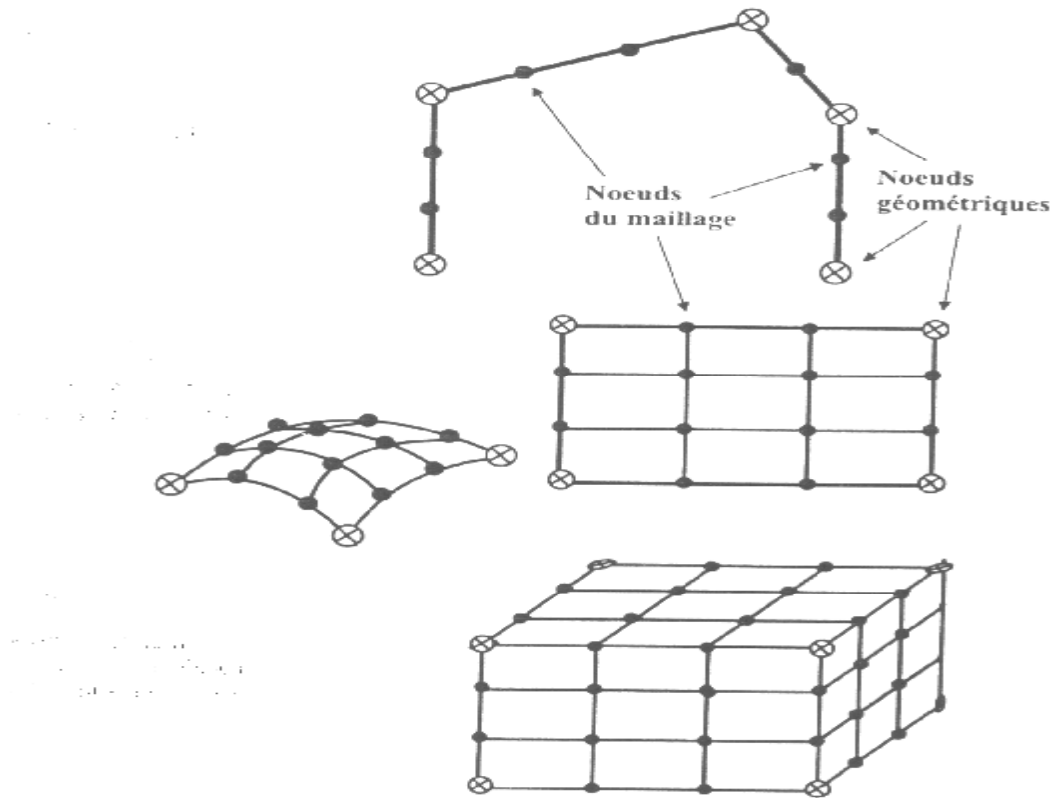
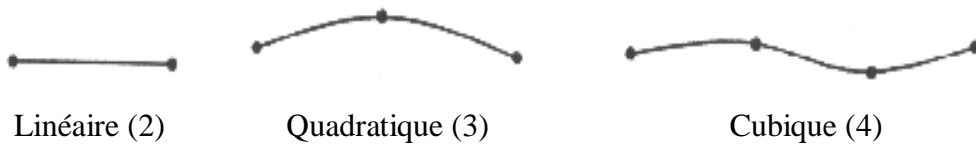


Figure 4.1 : Discretisation géométrique

§ Eléments à une dimension



§ Eléments à deux dimensions : Ce sont des triangles ou quadrilatérales dont les cotés sont des courbes polynomiales du 1^{er}, 2^e ou 3^e degré.

- Eléments triangulaires :



Linéaire (3)



Quadratique (4)

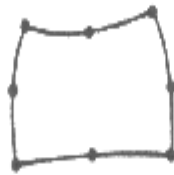


Cubique (9)

- Eléments quadrilatéraux :



Linéaire (4)



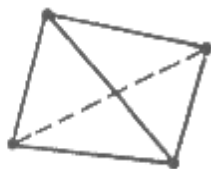
Quadratique (8)



Cubique (12)

§ Eléments à trois dimensions : ce sont des tétraèdres, hexaèdres ou prismes dont les faces sont des surfaces polynomiales du 1^{er}, 2^e ou 3^e degré.

-Eléments tétraèdres



Linéaire (4)

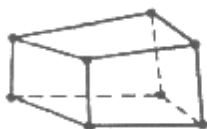


Quadratique (10)



Cubique (16)

-Eléments hexaédriques



Linéaire (8)



Quadratique (20)



Cubique (32)

-Éléments prismatiques

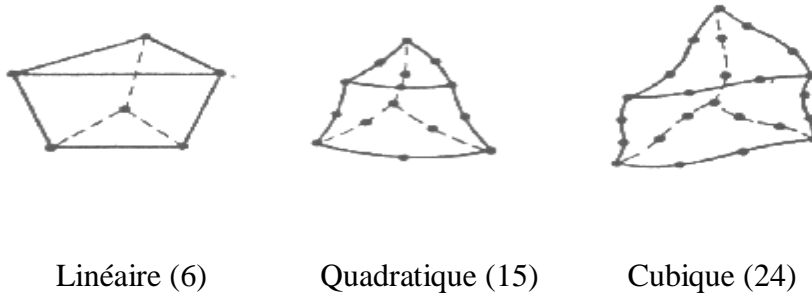


Figure 4.2 : Formes d'éléments classiques

IV.4 Fonction de déformé

La fonction de déformée définit le déplacement à l'intérieur de l'élément en fonction des déplacements nodaux, elle doit être :

- § continue à l'intérieur de l'élément.
- § continue à l'interface entre deux éléments.
- § telle que l'on ne trouve pas de déformation dans l'élément.

Lorsque les déplacements des noeuds résultent d'une translation ou d'une rotation de l'ensemble d'élément (déplacement d'un corps rigide), ce qui implique, que le terme constant est obligatoire.

- § aussi qu'on puisse trouver éventuellement un champ de déformation constant sur l'élément, l'existence d'un terme linéaire est indispensable.

Si ces conditions sur la fonction de déformée sont vérifiées, l'élément est dit "conforme", et nous obtiendrons la convergence vers le bon résultat.

IV.5 La méthode des éléments finis dans la théorie d'élasticité [37, 38,39]

Dans le cas où on est en présence de deux sollicitations mécanique et thermique, Alors, il serait raisonnable d'éclaircir tout d'abord la thèse principale de la méthode et sa terminologie sur les problèmes d'élasticité et ensuite de propager formellement par analogie les idées de la M.E.F sur les problèmes de transfert de chaleur.

IV.5.1 Champ de déplacement

Dans le cas général le champ de déplacement admissible pour un élément fini quelconque est supposé sous la forme d'un polynôme complet et qui peut être exprimé de la façon suivante :

$$\{U(x)\} = [f(x)]\{a\} \quad (4.1)$$

Où : $\{U(x)\}$: Champ de déplacement dans l'élément.

$[f(x)]$: Fonction polynomiale de déplacement, qui définit le déplacement en chaque point de l'élément.

$\{a\}$: Vecteur de coefficients inconnus de la fonction polynomiale.

(x) : Position d'un point dans l'espace

IV.5.2 Déformations

Une fois les déplacements sont connus en tout point intérieur à l'élément, on peut calculer les déformations, qui seront toujours obtenues par l'utilisation de l'équation suivante :

$$2e_{ii} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \quad (4.2)$$

Ou sous la forme matricielle :

$$\{e(x)\} = [D(.)]\{U(x)\}$$

Avec

$\{e(x)\}$: Vecteur des déformations de l'élément, qui se compose des composants du tenseur des déformations.

$[D(\cdot)]$: Opérateur différentiel

En remplaçant l'équation (4.1) dans l'équation (4.2) on obtient :

$$\{e(x)\} = [Y(x)]\{a\} \quad (4.3)$$

Avec :

$$[Y(x)] = [D(\cdot)][f(x)]$$

IV.5.3 Contraintes

Pour un matériau isotrope et homogène la loi généralisée de HOOKE pour un élément s'exprime :

$$\{s(x)\} = [H]\{e(x)\} \quad (4.4)$$

Où

$\{s(x)\}$: Vecteur des contraintes dans l'élément

$[H]$: Matrice de rigidité.

Maintenant on exprime le vecteur de coefficients inconnus $\{a\}$ de la fonction polynomiale en fonction des déplacements nodaux $[q]$ de l'élément :

$$\{q\}_e = [f_0]\{a\}$$

Donc

$$\{a\} = [f_0]^{-1}\{q\}_e \quad (4.5)$$

En tenant compte de l'équation (4.5), on peut obtenir les déplacements, les déformations ainsi que les contraintes dans l'élément en fonction des déplacements nodaux : Et les expressions (4.1), (4.3) et (4.4) deviennent :

$$\{U(x)\} = [j(x)][f_0]^{-1}\{q\}_e \quad (4.6)$$

$$\{e(x)\} = [y(x)][f_0]^{-1}\{q\}_e \quad (4.7)$$

$$\{s(x)\} = [H][y(x)][f_0]^{-1}\{q\}_e \quad (4.8)$$

On note que $[f(x)]^{-1}[f_0]$ représente la fonction de déformée.

IV.5.4 Minimisation de l'énergie potentielle totale

Dans le cas des problèmes de mécanique de structure et des corps en équilibre statique, les équations d'équilibres peuvent être déduites du principe de minimisation de l'énergie potentielle totale du système (p) .

$$d(p) = d(U + W) = 0$$

Où

U - L'énergie de déformation du système.

W — Le travail des forces extérieures.

L'équation précédente signifie que, pour que l'équilibre soit réalisé, il faut que l'énergie potentielle totale reste stationnaire et aussi minimale lors des petites variations des déplacements admissibles.

Dans la théorie d'élasticité et en présence des déformations thermiques :

$$p = \frac{1}{2} \sum_e^{NTEL} \int_{V_e} \{e(x)\} \{s(x)\} dV - \sum_e^{NTEL} \int_{V_e} \{U(x)\} \{I(x)\} dV - \sum_e^{NTEL} \int_{S_e} \{U(x)\} \{P(x)\} dS - \frac{aE}{1-2n} \sum_e^{NTEL} \int_{V_e} T e dV \quad (4.9)$$

V_e : Volume de l'élément,

S_e : Surface de l'élément qui est sous l'action des charges extérieures.

$I(x)$: Vecteur des forces volumiques de l'élément.

$P(x)$: Vecteur des forces superficielles de l'élément.

T : Variation de température dans l'élément.

E : Module de Young,

n : Coefficient de poisson.

a : Coefficient de dilatation thermique.

$$e = \sum e_{ii} ;$$

\sum_e^{NTEL} : Sommation sur tous les éléments

En remplaçant les expressions de (4.6), (4.7) et (4.8) dans (4.9) on obtient l'énergie potentielle totale d'un corps idéalisé par des éléments finis.

$$p = \frac{1}{2} \{q\} [k] \{q\} - \{q\} \{F\} \quad (4.10)$$

Avec :

$\{q\}$: Vecteur de déplacements des noeuds de tout le corps idéalisé, le trait veut dire la transposé de la matrice

$[k]$: Matrice de rigidité de tout le corps .

$\{F\}$: Vecteur des forces extérieures, appliquées aux noeuds de tout le corps.

La matrice de rigidité globale $[k]$, ainsi que le vecteur des forces extérieures $\{F\}$ de tout le corps résultent de l'assemblage par l'addition matricielle, des matrices de rigidités

élémentaires $[k]_e$ et des vecteurs des forces élémentaires $\{F\}_e$ en localisant les positions des DDL de ces dernières .

Après les transformations matricielles on aboutit à :

$$[k]_e = ([f_0]^{-1}) \int_{V_e} [y(x)] [H] [y(x)] dV [f_0]^{-1}$$

et $\{F\}_e = \{F_i\}_e + \{F_p\}_e + \{F_t\}_e$ (4.11)

$\{F_i\}_e; \{F_p\}_e$ et $\{F_t\}_e$ représentent les vecteurs des forces nodales de l'élément, qui sont équivalents successivement à l'action des forces volumiques $\{I(x)\}$, de la charge répartie de pression $\{P(x)\}$ et du champ reparti de température T .

Avec :

$$\{F_i\}_e = ([f_0]^{-1}) \int_{V_e} [f(x)] \{I(x)\} dV$$
 (4.12)

$$\{F_p\}_e = ([f_0]^{-1}) \int_{S_e} [f(x)] \{P(x)\} dS$$
 (4.13)

$$\{F_t\}_e = ([f_0]^{-1}) \int_{V_e} [y(x)] [H] \{d\} a T dV$$
 (4.14)

Où $\{d\}$ Symbole de Kronecker sous forme d'un vecteur.

Finalement les contraintes dans un élément en présence des déformations dues à la variation de la température sont données par la formule suivante :

$$\{s(x)\} = [H] (\{e\} - a T \{d\})$$
 (4.15)

En égalisant à zéro la première variation de la fonctionnelle de l'énergie potentielle totale (4.10) nous obtenons les équations d'équilibre du corps idéalisé par des éléments finis, qui se présentent sous forme d'un système d'équations linéaires par rapport aux déplacements inconnus des noeuds .

$$[k]\{q\} = \{F\} \quad (4.16)$$

IV.5.5 Propriétés de la matrice de rigidité globale

- Matrice carrée.
- Symétrique $k_{ij} = k_{ji}$
- Définie positive ($\text{Det} > 0$).
- Termes diagonaux non nuls.
- Devient singulière dans un mouvement d'un corps rigide, le nombre de singularités dans $[k]$ est déterminé en calculant les valeurs propres de celle-ci et la résolution ne sera possible qu'après l'introduction des conditions aux limites.

IV.6 La méthode des éléments finis dans la théorie de transfert de chaleur

La première étape dans un calcul des contraintes thermiques dans un corps par la méthode des éléments finis, est de déterminer la distribution de la température à l'intérieur de ce corps [40, 41, 42].

Donc les inconnues de bases dans les problèmes de transfert thermique sont les températures nodales similaires aux déplacements dans le cas d'analyse des contraintes mécaniques.

IV.6.1 Champ de température:

Le champ de température pour un élément fini d'une forme arbitraire, comme dans le cas du problème d'élasticité, est supposé sous forme d'un polynôme complet :

$$T(x) = [N(x)]\{a\} \quad (4.17)$$

Avec :

$T(x)$: Champ de température dans l'élément.

$[N(x)]$: Fonction polynomiale d'approximation

$\{a\}$: Vecteur de coefficients inconnus de la fonction polynomiale.

IV.6.2 Gradient de température.

Le vecteur de gradient de température sous forme opérationnelle s'écrit

$$\text{grad } T(x) = [L(.)]T(x) \quad (4.18)$$

$[L(.)]$: Opérateur différentiel.

En remplaçant dans l'équation (4.18) l'expression pour $T(x)$ de l'équation (4.17) On obtient :

$$\text{grad } T(x) = [A(x)]\{a\} \quad (4.19)$$

Avec :

$[A(x)]$: Résultat de l'action de l'opérateur $[L(.)]$ sur la matrice $[N(x)]$, c'est-à-dire :

$$[A(x)] = [L(.)][N(x)]$$

Introduisons le vecteur des températures nodales $\{q\}$ de l'élément.

$$\{q\}_e = [N_0]\{a\}$$

$$\text{Soit } \{a\} = [N_0]^{-1} \{q\}_e \quad (4.20)$$

En remplaçant (4.20) dans les expressions (4.17) et (4.19) nous obtenons :

$$T(x) = [N(x)][N_0]^{-1}\{q\}_e \quad (4.21)$$

$$\text{grad } T(x) = [A(x)][N_0]^{-1} \{q\}_e \quad (4.22)$$

IV.6.3 Minimisation de la fonctionnelle

Après application du premier principe de la thermodynamique (principe de conservation d'énergie) on déduit les équations d'équilibre thermique d'un corps idéalisé par des éléments finis, dont l'échange de chaleur se fait selon les conditions aux limites du :

§ Deuxième genre pour chaque point de la surface du corps on donne la densité du flux thermique "q"

§ Troisième genre : l'échange de chaleur entre le milieu et le corps se fait selon la loi de NEWTON-RIEHLMAN d'après laquelle. $q_h = h(T_f - T_p)$

Afin de déterminer la distribution de température dans un corps, nous utilisons la fonctionnelle des problèmes linéaires de conduction de chaleur qui aura l'air après des transformations par la M.E.F dans le cas de régime stationnaire et en absence d'une source interne :

$$J = \frac{1}{2} \sum_e^{NTEL} \int_{V_e} I (\text{grad } T(x))^2 dV - \sum_e^{NTEL} \int_{S_h} h \left(T_f - \frac{1}{2} T(x) \right) h T(x) dS + \sum_e^{NTEL} \int_{S_q} q T(x) dS \quad (4.23)$$

Avec :

V_e : Volume de l'élément.

I : Conductivité thermique.

T_f : Température du milieu.

h : Coefficient de l'échange thermique sur la surface S_q

q : Courant de la chaleur normal à la surface S_q .

En substituant $T(x)$ et $\text{grad } T(x)$ par leurs expressions (4.21) et (4.22) dans la fonctionnelle (4.23) on obtient :

$$J = \frac{1}{2} \{q\}' [P] \{q\} - \{q\}' \{Q\} \quad (4.24)$$

$\{q\}$: Vecteur des températures nodales globales. .

$[P]$: Matrice de conductivité globale.

$\{Q\}$: Vecteur des charges thermiques (flux thermiques) sur tout le corps.

La matrice de conductivité globale $[P]$, ainsi que le vecteur des charges thermiques $\{Q\}$ de tout le corps idéalisé s'obtiennent de l'assemblage par addition matricielle des matrices de conductivités élémentaires $[P]_e$ et des vecteurs des charges thermiques élémentaires $\{Q\}_e$ en respectant les positions de DDL de ces dernières dans $[P]$ et $\{Q\}$.

Dans les transformations qu'on a fait pour obtenir (4.24) on a posé :

$$[P]_e = [P_c]_e + [P_h]_e \quad ; \quad \{Q\}_e = \{Q_h\}_e + \{Q_q\}_e$$

$[P_c]_e$: Matrice de conductivité élémentaire.

$[P_h]_e$: Matrice de convection élémentaire.

Avec :

$$[P_c]_e = \left([N_0]^{-1} \right)^T \int_{V_e} I [A(x)] [A(x)] dV [N_0]^{-1} \quad (4.25)$$

$$[P_h]_e = \left([N_0]^{-1} \right)^T \int_{S_h} h [N(x)] [N(x)] dV [N_0]^{-1} \quad (4.26)$$

$$\{Q_h\}_e = \left([N_0]^{-1} \right)^T \int_{S_h} h T_f [N(x)] dS \quad (4.27)$$

$$\{Q_q\}_e = - \left([N_0]^{-1} \right)^T \int_{S_q} q [N(x)] dS \quad (4.28)$$

En égalisant à zéro la première variation de la fonctionnelle (4.24), nous obtenons les équations d'équilibre du corps idéalisé par les éléments finis, qui se représentent sous forme d'un système d'équations algébriques linéaires par rapport aux températures des noeuds inconnues.

$$[P]\{q\} = \{Q\} \quad (4.29)$$

IV.7 Méthodes de résolution des systèmes linéaires

Les méthodes de résolution des systèmes linéaires peuvent être classées en deux catégories :

Ø Méthodes itératives :

- (i) Méthode de Gauss -Seidel.
- (ii) Méthode de relaxation.

Ces méthodes conduisent à la résolution par une succession d'améliorations d'une solution approchée.

Ø Méthodes directes :

- (i) Méthode d'élimination de Gauss.
- (ii) Méthode de factorisation de Cholesky

Ces méthodes ont en commun une excellente fiabilité, elles permettent en particulier la détection des singularités (Gauss : terme de la diagonale nul ; Cholesky: terme de la diagonale nul ou négatif).

Actuellement, on utilise dans la majorité des programmes les méthodes directes, car elles nécessitent en général beaucoup moins d'opérations que les méthodes itératives.

La méthode de Cholesky à été choisie pour la résolution des systèmes d'équations d'équilibre déterminés auparavant.

IV.8 Les corps de révolution (axisymétrique)[43]

Les solides à symétrie axiale peuvent être modélisés par des éléments finis de révolution, chaque élément consiste en un anneau solide dont la section transversale dépend de l'élément particulier choisi (rectangulaire, triangulaire ou quadrilatère).

Cependant à cause de sa simplicité et de sa souplesse d'utilisation, c'est le triangle de révolution qui à été choisi en effet il admet la forme linéaire de la fonction de déplacement.

La figure (4.3) montre une section transversale d'un élément fini à symétrie axiale de type triangulaire à trois noeuds circulaires (TRIAX-3).

L'obtention de la matrice de rigidité se fait de la même manière que pour le triangle d'élasticité plane, la grande différence réside dans le nombre de composantes des contraintes ; on inclue une de plus :la contrainte tangentielle.

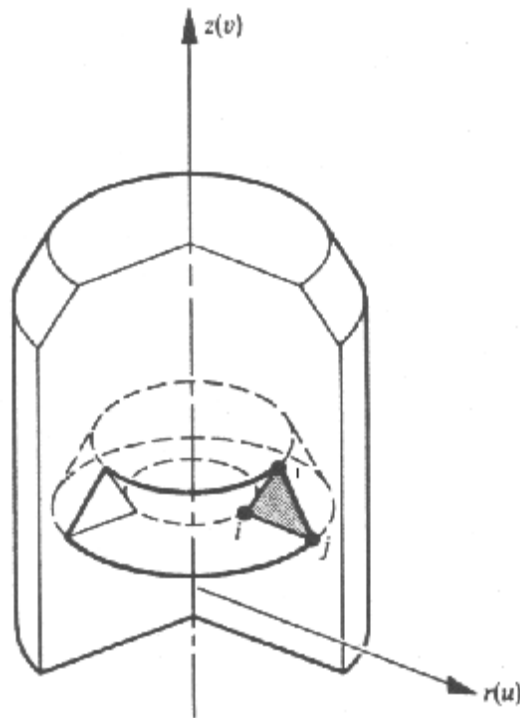


Figure 4.3 : Solide à symétrie axiale

IV.9 Application de la méthode des éléments finis dans les problèmes axisymétriques d'élasticité [44, 45, 46,47]

▼ Etape N°1 :

Choix d'un système de coordonnées convenable et numérotation des noeuds :

On utilise les coordonnées cylindriques, et les noeuds sont numérotés 1,2 et 3 dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, le point de départ est arbitraire (voir figure 4.4). Les vecteurs de déplacements et des forces s'écrivent :

$$\{U_1\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{F_1\} = \begin{Bmatrix} F_{r1} \\ F_{z1} \end{Bmatrix}$$

Où

F_r et u : sont dans la direction radiale, et F_z et v dans la direction axiale.

Les vecteurs de déplacements et des forces complets pour l'élément s'écrivent :

$$\{q\}_e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{F\}_e = \begin{Bmatrix} F_{r1} \\ F_{r2} \\ F_{r3} \\ F_{z1} \\ F_{z2} \\ F_{z3} \end{Bmatrix}$$

Chacun de ces vecteurs contient six termes, donc la matrice de rigidité de l'élément $[k]_e$ est carrée d'ordre 6.

$$\{F\}_e = [k]_e \{q\}_e \tag{I}$$

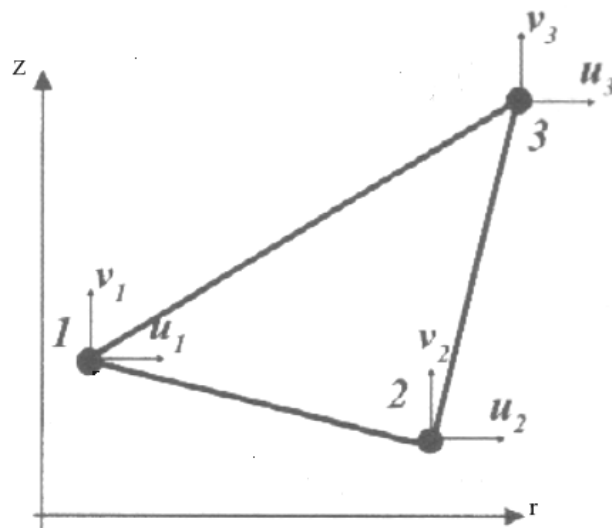


Figure 4.4 : Systèmes de coordonnées et numérotation des nœuds pour l'éléments de solide à symétrie axiale

▼ Etape N°2 :

On choisit une fonction de déplacement $\{f(r, z)\}$ qui définit le déplacement $\{U(r, z)\}$ en chaque point de l'élément :

Pour un solide à symétrie axiale, le déplacement de chaque point peut être obtenu en considérant un déplacement radial u et un déplacement axial v car il n'y a pas de déplacement dans la direction tangentielle. Cet élément à six degrés de liberté, on doit donc prendre six coefficients inconnus (a_1, a_2, \dots, a_6) dans le polynôme représentant le mode de déplacement permis la représentation la plus simple est donnée par les deux polynômes linéaires :

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2(r - r_1) + a_3(z - z_1) \\ v &= a_4 + a_5(r - r_1) + a_6(z - z_1) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Puisqu'ils sont à la fois linéaires en r et en z , la continuité des déplacements est assurée le long de l'interface entre deux éléments adjacents. Donc en correspondance avec la formule (4.1) on peut écrire :

$$\{U(r, z)\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r - r_1 & z - z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r - r_1 & z - z_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

Ou plus brièvement.

$$\{U(r, z)\} = [f(r, z)]\{a\} \quad (II)$$

▼ Etape N°3:

On exprime l'état des déplacements $\{U(r, z)\}$ dans l'élément en fonction des déplacements nodaux $\{q\}_e$:

Cette étape s'accomplit en remplaçant par leurs valeurs les coordonnées nodales dans l'équation (II) et en résolvant en $\{a\}$.

Au noeud 1.

$$\{q_1\} = \{U(r_1, z_1)\} = [f(r_1, z_1)] \cdot \{a\}$$

Avec l'équation (4.30) cela donne :

$$\{q_1\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{a\}$$

Et de même aux noeuds 2 et 3

$$\{q_2\} = \begin{bmatrix} 1 & r_2 - r_1 & z_2 - z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_2 - r_1 & z_2 - z_1 \end{bmatrix} \{a\}$$

$$\{q_3\} = \begin{bmatrix} 1 & r_3 - r_1 & z_3 - z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_3 - r_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix} \{a\}$$

On peut combiner toutes ces matrices pour l'élément afin d'obtenir la matrice globale $[f_0]$:

$$\{q\}_e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r_2 - r_1 & z_2 - z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r_3 - r_1 & z_3 - z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_2 - r_1 & z_2 - z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_3 - r_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

Qui peut se résumer par :

$$\{q\}_e = [f_0] \{a\}$$

Les coefficients inconnus sont maintenant déterminés à partir de l'équation (4.32) en inversant la matrice $[f_0]$ pour conduire à :

$$\{a\}_e = [f_0]^{-1} \{q\}_e$$

En utilisant l'équation (II), on peut déterminer les déplacements $\{U(r, z)\}$ en chaque point de l'élément en fonction des déplacements nodaux $\{q\}_e$

$$\{U(r, z)\} = [f(r, z)] \{a\}$$

$$\{U(r, z)\} = [f(r, z)][f_0]^{-1} \{q\}_e \quad \text{(III)}$$

▼ Etape N°4 :

On relie les déformations $\{e(r, z)\}$ en chaque point de l'élément aux déplacements $\{U(r, z)\}$ et donc aux déplacements nodaux $\{q\}_e$:

En utilisant la théorie d'élasticité, les quatre composantes des déformations pour un corps axisymétriques sont :

$$\{e(r, z)\} = \begin{Bmatrix} e_r \\ e_q \\ e_z \\ e_{r,z} \end{Bmatrix}$$

Où

e_r (Radiale) ; e_q (Tangentielle) ; e_z (Axiale) : sont les déformations directes.

$e_{r,z}$: La déformation de cisaillement.

On obtient de même les relations suivantes entre les déformations e et les déplacements U et V .

$$e_r = \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$e_q = \frac{U}{r}$$

$$e_z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$e_{rz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial r}$$

Sous une forme matricielle la formule (4.31), le vecteur des déformations dans l'élément devient :

$$\begin{Bmatrix} e_r \\ e_q \\ e_z \\ e_{r,z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & r-r_1 & z-z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r-r_1 & z-z_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

Ou simplement :

$$\{e(r, z)\} = [y(r, z)] \{a\}$$

Avec :

$$[y(r, z)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{r-r_1}{r} & \frac{z-z_1}{z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

En utilisant l'expression de $\{a\}$ de (4.5) :

$$\{e(r, z)\} = [y(r, z)] [f_0]^{-1} \{q\}_e \quad (IV)$$

▼ Etape N°5 :

On relie les contraintes internes $\{s(r, z)\}$ aux déformations $\{e(r, z)\}$ et aux déplacements nodaux :

Les composantes des contraintes pour un solide axisymétrique sont :

$$\{s(r, z)\} = \begin{Bmatrix} s_r \\ s_q \\ s_z \\ s_{rz} \end{Bmatrix}$$

Où :

s_r (Radiale) ; s_q (Tangentielle) ; s_z (Axiale) : Sont les contraintes directes

s_{rz} : Est la contrainte de cisaillement.

La théorie d'élasticité indique que les déformations sont reliées aux contraintes comme suit :

$$e_r = \frac{s_r}{E} - \nu \frac{s_q}{E} - \nu \frac{s_z}{E}$$

$$e_q = -\nu \frac{s_r}{E} + \frac{s_q}{E} - \nu \frac{s_z}{E}$$

$$e_z = -\nu \frac{s_r}{E} - \nu \frac{s_q}{E} + \frac{s_z}{E}$$

$$e_{rz} = \frac{s_{rz}}{G}$$

Où :

E : Est le module de YOUNG d'élasticité longitudinale.

G : Est le de COULOMB d'élasticité transversale.

n : Est le coefficient de POISSON.

En notant que $E = 2G(1+n)$, On peut écrire le vecteur des contraintes en fonction des déformations :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_r \\ \mathbf{s}_q \\ \mathbf{s}_z \\ \mathbf{s}_{rz} \end{Bmatrix} = I \begin{bmatrix} \frac{1-n}{n} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1-n}{n} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1-n}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-n}{n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_q \\ \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_{rz} \end{Bmatrix}$$

Avec :

$$I = \frac{En}{(1+n)(1-2n)}$$

Ou plus simplement :

$$\{\mathbf{s}(r, z)\} = [H]\{\mathbf{e}(r, z)\}$$

Ou :

$[H]$: Est la matrice d'élasticité dans ce cas particulier.

En utilisant l'expression de $\{\mathbf{e}(r, z)\}$ donnée par l'équation IV la relation entre contraintes et déplacements nodaux s'écrit :

$$\{\mathbf{s}(r, z)\} = [H][\mathbf{y}(r, z)][\mathbf{f}_0]^{-1}\{\mathbf{q}\}_e \quad (\text{V})$$

IV.9.1: Calcul de la matrice de rigidité élémentaire $[K]_e$:

Maintenant on a toutes les matrices nécessaires pour le calcul selon la formule (4.11) de la matrice de rigidité $[K]_e$ d'un élément TRIAX-3 .Dans cette formule l'intégrale est prise sur le volume de l'élément et pour un corps de révolution.

$$dV = 2p \, dr \, dz$$

D'où

$$[K]_e = ([f_0]^{-1}) \int_s [y(r,z)]^t [H] [y(r,z)] 2p \, r \, dr \, dz [f_0]^{-1}$$

On voit que la matrice $[y(r,z)]$ dépend des coordonnées r et z , on doit donc faire les multiplications matricielles indiquées par l'expression ci-dessus puis intégrer chaque terme par rapport à r et z pour obtenir $[K]_e$.

Pour supprimer ce très long procédé, on peut utiliser une simple approximation qui requiert le calcul de la matrice $[B]$ pour un point central de l'élément défini par les coordonnées $\begin{bmatrix} \bar{r} \\ \bar{z} \end{bmatrix}_e$

Où

$$\begin{bmatrix} \bar{r} \\ \bar{z} \end{bmatrix}_e = \begin{bmatrix} (r_1 + r_2 + r_3) \\ 3 \end{bmatrix}_e \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \bar{z} \\ \bar{z} \end{bmatrix}_e = \begin{bmatrix} (z_1 + z_2 + z_3) \\ 3 \end{bmatrix}_e$$

Cette approximation donne de meilleurs résultats que l'intégration exacte, une explication de ce fait réside dans la présence de termes logarithmiques dans la formule exacte. On y trouve des rapports r_i/r_m qui tendent donc vers 1 pour les éléments loin de l'axe :

Le calcul du logarithme est alors imprécis, aussi dans la matrice $[y(r,z)]$ on trouve des rapports r_i au dénominateur, qui tendent vers l'infini pour les éléments qui ont des noeuds sur l'axe de symétrie.

La matrice de rigidité devient alors simplement :

$$[K]_e = 2p ([f_0]^{-1}) \int_s [y(\bar{r}, \bar{z})]^t [H] [y(\bar{r}, \bar{z})] [f_0]^{-1} \, r \, \Delta \tag{4.35}$$

Où

Δ : Est l'aire du triangle.

Et la matrice $[y(r,z)]$ sera constante pour chaque élément.

D'après la formule (4.35) on remarque que pour obtenir $[K]_e$ de dimension (6*6) on doit multiplier cinq matrices de dimensions (6*6) chacune, mais cette opération sera très longue et ennuyeuse puisque cela se fait pour chaque élément, et nous savons aussi que les ordinateurs traitent lentement les variables indicées. Pour pallier cet inconvénient on doit faire des transformations pour aboutir à une expression finale et réduite pour la matrice $[K]_e$ et ainsi de libérer l'ordinateur des nombreuses multiplications des matrices parement remplies. Cette transformation décèle encore un avantage couvert; c'est que le calcul de $[K]_e$ de dimension (6*6) peut être mené à l'aide seulement de deux matrices de dimensions (3*3) et d'un vecteur de dimension (3*1).

L'expression (4.32) montre que la matrice $[f_0]$ possède la structure suivante :

$$[f_0] = \begin{bmatrix} [f_{11}] & 0 \\ 0 & [f_{11}] \end{bmatrix}$$

Evidemment la matrice inverse $[f_0]^{-1}$ aura la même structure et la formule suivante est juste :

$$[f_0]^{-1} = \begin{bmatrix} [f_{11}]^{-1} & 0 \\ 0 & [f_{11}]^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Avec :

$$[f_{11}]^{-1} = \begin{bmatrix} 2\Delta & 0 & 0 \\ z_2 - z_3 & z_3 - z_1 & z_1 - z_2 \\ r_3 - r_2 & r_1 - r_3 & r_2 - r_1 \end{bmatrix} \frac{1}{2\Delta} \quad (4.37)$$

Pour simplifier la notation on pose

$$[f_0]^{-1} = [B]$$

En effectuant des transformations sur le produit matriciel de l'expression (4.35) pour obtenir une expression déployée de la matrice de rigidité $[K]_e$ en fonction de deux matrices simples (3*3) et un vecteur (3*1) définis comme suit :

$$[B] = [f_{ii}]^{-1} \quad (4.38)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{1-n}{r^2 n} & \frac{1}{r} + \frac{1-n}{n} \frac{r-r_i}{r^2} & \frac{1-n}{n} \frac{z-z_i}{r^2} \\ \frac{1-n}{n} + 2 \frac{r-r_i}{r} + \frac{1-n}{n} \left(\frac{r-r_i}{r} \right)^2 & \frac{z-z_i}{r} \left(1 + \frac{1-n}{n} \frac{r-r_i}{r} \right) & \\ \text{symétrique} & \frac{1-n}{n} \left(\frac{z-z_i}{r} \right)^2 + \frac{1-2n}{2n} & \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Et

$$\{C\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \\ \frac{r-r_i}{r} \\ \frac{z-z_i}{r} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Et la matrice de rigidité élémentaire $[K]_e$ se compose des blocs rectangulaires de dimensions (3*3).

$$[K]_e = \begin{bmatrix} K_I & K_{II} \\ \text{symétrique} & K_{III} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Avec :

$$K_{Ii,j} = \left(\sum_{l,k=1}^3 B_{k,i} A_{k,l} B_{l,j} \right) l v_e$$

$$K_{IIi,j+3} = \left(\left(B_{3,i} B_{2,j} * \frac{1-2n}{2n} \right) + \sum_{k=1}^3 B_{k,i} C_k B_{3,j} \right) l v_e \quad (4.42)$$

$$K_{IIIi+3,j+3} = \left(\left(B_{2,i} B_{2,j} * \frac{1-2n}{2n} \right) + B_{3,i} B_{3,j} \frac{1-n}{n} \right) l v_e$$

$i,j=1,2,3$ et $n_e = 2pr\Delta$

IV.9.2 Calcul des charges nodales.

Sont de dimensions (6*1)

Ø Forces nodales dues aux déformations provoquées par la variation de températures :

Le vecteur des forces nodales de température $\{F_t\}$ d'un élément peut être composé de deux vecteurs de dimension (3*1)

$$\{F_t\}_e = \begin{Bmatrix} F_{tr} \\ F_{tz} \end{Bmatrix} \quad (4.43)$$

Où

$\{F_{tr}\}$: représente les projections radiales des forces nodales de température.

Et

$\{F_{tz}\}$: représente les projections axiales de celles-ci.

Alors d'après l'expression (4.14) et en tenant compte des transformations précédentes, on déduit les expressions des forces nodales de températures.

$$F_{tri} = \sum_{j=1}^3 B_{j,i} C_j * \frac{1+n}{n} a T l n_e \quad (4.44)$$

$$F_{tzi} = B_{3,i} * \frac{1+n}{n} a T l n_e$$

i=1, 2,3

Ø Forces d'inertie :

Le vecteur des forces nodales d'inertie dans l'élément se compose uniquement des composantes axiales.

$$\{F_I\}_e = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{Iz} \end{Bmatrix} \quad (4.45)$$

$$F_{Izi} = -\frac{1}{3} r n_e \ddot{Z} \quad i=1, 2,3$$

r : La masse volumique.

\ddot{Z} : L'accélération linéaire dans la direction axiale.

Ø Force de pression :

Dans ce cas pour pouvoir utiliser la Méthode des éléments finis il faut réduire les charges réparties de pression des gaz à des forces concentrées aux noeuds et qui leur sont statiquement équivalentes, mais la difficulté réside dans l'orientation correcte de ces forces nodales.

$$ar + bz + c = 0$$

L'équation de la droite de frontière (i j) soumise a une charge de pression uniformément distribuée P. et le vecteur des forces nodales dans l'élément devient :

$$\{F_P\}_e = \begin{Bmatrix} F_{pri} \\ F_{prj} \\ 0 \\ F_{pzi} \\ F_{pzj} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.46)$$

Les expressions de ces composantes sont :

$$F_{pri} = F_{prj} = -\frac{1}{2} f \frac{abs(a)}{\sqrt{a^2 + b^2}} sgm(-c/a) sgm(h/c) \quad (4.47)$$

$$F_{pzi} = F_{pzj} = -\frac{1}{2} f \frac{abs(b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} sgm(-c/a) sgm(h/c)$$

Où :

h : distance entre le point 1 et la droite (ij)

f : résultante de la charge P.

$$f = p (r_i + r_j) \sqrt{(r_i - r_j)^2 + (z_i - z_j)^2} * P$$

$$h = (a.r_i + b.z_i + c) / \sqrt{(a^2 + b^2)}$$

IV.10 Application de la méthode des éléments finis dans les problèmes axisymétriques de transfert de chaleur

▼ Etape N°1 :

Choix d'un système de coordonnées, et numérotation des noeuds :

C'est le même système de coordonnées et la même méthode de numérotation qui a été choisie dans le cas d'élasticité.

Et les vecteurs des charges thermiques et des températures complets pour l'élément s'écrivent :

$$\{Q\}_e = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}$$

Et

$$\{T\}_e = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}$$

Chacun de ces vecteurs contient trois termes, donc la matrice de conductivité de l'élément $[P]_e$ est carrée d'ordre 3.

$$\{Q\}_e = [P]_e \{q\}_e \tag{I}$$

▼ Etape N°2:

On choisit une fonction polynomiale $[N(r, z)]$ qui définit le champ de température $\{T(r, z)\}$ en chaque point de l'élément :

C'est la même que la fonction linéaire qui a été choisie auparavant, et comme l'élément à trois degrés de liberté donc on doit prendre trois coefficients inconnus a_1, a_2, a_3 dans la fonction.

Une représentation plus simple sera la suivante :

$$T(r, z) = [1 \quad r \quad z] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \tag{4.48}$$

Où

$$T(r, z) = [N(r, z)]\{\mathbf{a}\} \quad (\text{II})$$

Les températures nodales seront déterminées par :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & z_1 \\ 1 & r_2 & z_2 \\ 1 & r_3 & z_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{Bmatrix} \quad (4.49)$$

$$\{\mathbf{q}\}_e = [N_0]\{\mathbf{a}\} \quad (\text{III})$$

Avec

$$[N_0] = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & z_1 \\ 1 & r_2 & z_2 \\ 1 & r_3 & z_3 \end{bmatrix}$$

▼ Etape N°3 :

On exprime le champ de température $T(r, z)$ dans l'élément en fonction des températures nodales $\{\mathbf{q}\}_e$:

D'après (III) on peut obtenir l'expression suivante :

$$\{\mathbf{a}\} = [N_0]^{-1}\{\mathbf{q}\}_e$$

On remplace l'expression de $\{\mathbf{a}\}$ dans (II) pour obtenir le champ de température dans l'élément en fonction des températures nodales ;

$$T(r, z) = [N(r, z)] [N_0]^{-1} \{\mathbf{q}\}_e \quad (\text{IV})$$

Avec

$$[N_0]^{-1} = \begin{bmatrix} r_2 z_3 - r_3 z_2 & r_3 z_1 - r_1 z_3 & r_1 z_2 - r_2 z_1 \\ z_2 - z_3 & z_3 - z_1 & z_1 - z_2 \\ r_3 - r_2 & r_1 - r_3 & r_2 - r_1 \end{bmatrix} \frac{1}{2\Delta}$$

Pour simplifier les opérations on pose :

$$[N_0]^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = [B]$$

Donc l'expression (IV) devient :

$$T(r, z) = [a_1 + a_2 r + a_3 z \quad b_1 + b_2 r + b_3 z \quad c_1 + c_2 r + c_3 z] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} \quad (4.50)$$

▼ Etape N°4 :

On exprime le gradient de température dans l'élément en fonction des températures nodales :

La différentiation de l'expression (4.50) par rapport aux coordonnées donne le vecteur de gradients de température.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial r} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} \quad (4.51)$$

$$\text{Ou simplement } \text{grad } T(r, z) = [G] \{q\}_e \quad (V)$$

Avec :

$$[G] = [A] [N_0]^{-1}$$

$$[A] = [L(.)] [N(r, z)]$$

et

$[L(.)]$: Opérateur différentiel.

IV.10.1 Calcul de la matrice de conductivité élémentaire $[P]_e$

Maintenant on a toutes les matrices nécessaires pour calculer la matrice de conductivité donnée par l'intégrale de (4.25).

$$[P]_e = \int_{n_e} I \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} r dr dz \quad (4.52)$$

En prenant en considération que \underline{r} est constante dans les limites de l'élément, alors l'intégrale $\int r dr dz$ sera égale à $r_m * A_e$;

Où

r_m : Est le rayon du centre de poids de la section A_e de l'élément, et l'expression (4.52) prend une forme simple et commode pour la programmation;

$$P_{Ci,j} = (B_{2,i} B_{2,j} + B_{3,i} B_{3,j}) I r_m A_e \quad (4.53)$$

$i, j = 1, 2, 3$

IV.10.2 Calcul des charges thermiques

Les éléments de frontières sont évidemment les seuls concernés par le calcul de la matrice de convection et des charges thermiques.

Considérons un élément TRIAX-3 d'une section (i j l) dont (i j) représente une droite de la frontière (voir figure 4.3).

D'après l'expression (4.26) on calcul la matrice de convection considérée.

$$[P_h]_e = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} h r_m d$$

Avec

d : Longueur de la droite (i j)

r_m :- Rayon du centre de la droite (i j)

De la même façon et d'après les expressions (4.27) et (4.28) on calcul les charges thermiques nodales dues à l'échange de chaleur par convection $\{Q_h\}_e$ et au flux thermique normal $\{Q_q\}_e$ à la surface de l'élément.

$$\{Q_h\}_e = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{Bmatrix} h r_m d T_m$$

$$\{Q_q\}_e = - \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{Bmatrix} h r_m d$$

IV.11 Programmation

V.11.1 Introduction

La résolution d'un problème par la méthode des éléments finis nécessite la manipulation des matrices et vecteurs de grandes tailles (matrices de rigidité vecteurs chargements ... etc) ainsi que des différentes opérations numériques (assemblage, résolution...). Ceci rend l'utilisation de l'ordinateur essentielle à l'application de cette méthode.

Dans cette étude on présente que le programme appelés MEFMEC écrits en langage FORTRAN, qui met en oeuvre les techniques décrites au chapitre précédent concernant la sollicitation mécanique.

Le programme MEFMEC permet d'évaluer les déplacements nodaux et les déformations ainsi que les contraintes aux centres des éléments axisymétriques.

MEFMEC à été élaboré d'une manière structurée, il est constitué de plusieurs sous programmes où le passage des paramètres ne s'effectue pas lors de l'appel du sous-programme, mais par l'intermédiaire des blocs communs (COMMUN) étiquettes, ce qui facilite la programmation et la rend très souple car on ne sera pas contraint de chercher les paramètres qui doivent exister dans une subroutine ou dans une autre.

IV.11.2 Présentation du programme MEFMEC

LA STRUCTURE GENERALE DU PROGRAMME MEFMEC

Ø LECTURE ET ORGANISATION DES DONNEES

Lire est imprimé :

- § Les coordonnées des noeuds.
- § Les connectivités des éléments.
- § Les paramètres physiques.
- § Les conditions aux limites (déplacements imposés).
- § Les forces imposées.

Ø CONSTRUCTION DE LA MATRICE ET DU VECTEUR GLOBAUX $[K]$ et $\{F\}_e$

Pour chaque élément :

- § Extraire les informations liées à cet élément.
- § Construire la matrice et le vecteur élémentaires $[K]_e$ et $\{F\}_e$
- § Assembler $[K]_e$ et $\{F\}_e$ dans $[K]$ et $\{F\}$

Ü Résolution du système d'équations $[K]\{Q\} = \{F\}$

§ Prise en compte des conditions aux limites.

§ Décomposition de la matrice de rigidité globale $[K]$.

§ Calcul de la solution $\{Q\}$.

Ø IMPRESSION DES RESULTATS

§ Calcul des déformations et contraintes.

§ Impression des résultats.

Une description détaillée de ces différentes étapes est présentée.

✓ Etape N°1:

LECTURE ET ORGANISATION DES DONNEES :

Les données portent essentiellement sur les noeuds (coordonnées, conditions aux limites, chargements) et les éléments (numérotation, coefficients physiques du matériau).

La subroutine d'entrée des données doit transmettre aux autres subroutines les informations nécessaires à la résolution du problème, elle sert à lire à partir des fichiers, les données relatives à la géométrie, au matériau et au chargement.

PARAMETRES DEFINISSANT LA STRUCTURE :

Après l'établissement du maillage de la structure on doit introduire les paramètres constants suivants, qui définissent l'élément et la structure complète :

a) Paramètres géométriques :

NNOEL Nombre de noeuds par élément.

NDLEL Nombre de degrés de liberté par élément.

NDLND Nombre de degrés de liberté par noeud.

NTNO Nombre total de noeuds (de la structure idéalisée).

NTEL Nombre total d'éléments (de la structure idéalisée)

NTDL Nombre total de degrés de liberté.
NTDI Nombre total de déplacements imposés.
NTFÎ Nombre total des forces imposées.
LB Largeur de la bande = $[MAX(NODE(1) - NODE(2)) + 1] * NDLND$
IVEC Dimension de $[K]$ stockée sous une forme vectorielle.

b) Paramètres physiques :

Comme la structure à étudier est composée d'un seul matériau homogène, les paramètres physiques suivants doivent être entrés dès le début du programme.

YOUNG : Module d'élasticité longitudinal "E" .

POISS : Coefficient de poisson "n" .

Tout ces paramètres sont gères par la subroutine.

"DEFINITION" dans laquelle ils sont stockés dans des blocs "COMMUN" afin qu'ils puissent être exploités par d'autres sous-routines, ces blocs sont :

COMMON/ELEMENT/NNDEL, NDLEL

COMMON/PROBLEME/NTNO, NTEL, NTDL, NTDI, NTFI, LB, IVEC

COMMON/CYLINDRE/YOUNG, POISS

Lecture et impression des données.

C'est d'après le sous programme "LIRE" que s'effectue la lecture et l'impression des données géométriques et physiques.

Les données principales sont lues et imprimées à l'aide des sous routines suivantes :

DCOOR : Lecture et impression des coordonnées.

DICON : Lecture et impression des connections.

DDEPI : Lecture et impression des déplacements imposés.

DFORI : Lecture et impression des forces imposées.

▼ Etape N°2 :

CONSTRUCTION DE LA MATRICE ET DU VECTEUR GLOBAUX $[K]$ et $\{F\}$
ET RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS $[K]\{Q\} = \{F\}$:

Cette étape est la plus importante du programme, car dans laquelle on effectue toutes les opérations nécessaires pour aboutir à la solution finale du problème, elle est élaborée par le sous-programme "DEPLACEMENT", ces opérations sont les suivantes :

a) Calcul de la matrice de rigidité élémentaire.

Pour chaque élément de la structure la matrice de rigidité est calculée par la sous-routine "RigidEL" par un simple produit matriciel selon l'expression (4.42) après avoir bien sur évalué les matrices A, B et C au centre de poids de cet élément \bar{r} et \bar{z}

b) Calcul du vecteur élémentaire des forces.

Il s'agit de la force de pression qui ne concerne que les éléments de frontières.

c) Assemblage.

La phase d'assemblage consiste à. construire la matrice de rigidité globale $[K]$ et le vecteur de charge global $\{F\}$ de la structure complète à. partir des matrices de rigidité élémentaires $[k]_e$ et les vecteurs des forces élémentaires $\{F\}_e$ calculés précédemment. Le principe est basé sur le fait qu'à chaque noeud où des éléments sont reliés, la valeur du déplacement est la même.

L'opération d'assemblage des matrices de rigidité élémentaires est gérée par la sous-routine "ASSEMK", en ce qui concerne l'assemblage des vecteurs forces élémentaires, est effectué par la sous-routine "ASSEMF" . Parmi les méthodes de stockage de la matrice de rigidité globale, on a choisi la méthode de stockage vectoriel, car ce type de stockage a l'avantage de diminuer un grand nombre d'éléments, ce qui aussi améliore la convergence de la solution .

Prise en compte des conditions aux limites.

Sans application des conditions aux limites, la structure peut subir une translation ou une rotation sans se déformer, c'est un déplacement dit de "corps rigide" ou "déplacement d'ensemble".

Donc il est important de s'assurer que la structure contient des conditions d'appuis adéquates avant de procéder à la résolution, sous peine de rendre le problème insoluble.

En général, la structure s'appuie sur plusieurs noeuds pour lesquels certains déplacements sont interdits. Dans ce cas il est nécessaire d'enlever les lignes et les colonnes appropriées de la matrice de rigidité globale $[RIGID]$.

Il existe plusieurs méthodes pour mener cette opération :

I. METHODE DU TERME DIAGONAL DOMINANT

Multiplier les termes diagonaux de $[RIGID]$ correspondant aux déplacements fixes,

II. METHODE DU TERME UNITE SUR LA DIAGONALE :

Remplacer les termes diagonaux de $[RIGID]$ correspondant aux déplacements fixes par 1'UNITE et remplacer le reste des lignes et des colonnes correspondantes par des ZEROS.

III. METHODE DE SUPPRESSION DES EQUATIONS :

Elle consiste à restructurer la matrice $[RIGID]$ de manière à supprimer les équations correspondant aux degrés de liberté imposés

On a utilisé la première technique, car elle est très simple à mettre en oeuvre, elle sera gérée par la sous-routine LIMITE.

RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS :

La méthode de résolution utilisée dans notre programme est celle de CHOLESKY, elle s'applique aux matrices symétriques, définies positives.

Elle consiste à décomposer la matrice $[RIGID]$ en deux matrices triangulaires, cette opération est effectuée par la sous-routine "DECOM".

Après la décomposition de la matrice $[RIGID]$, en fait appel à la sous-routine "RESOL" qui résoudra les équations d'équilibre pour donner les déplacements nodaux de la structure complète $\{Q\}$.

▼ Etape N°3 :

IMPRESSION DES RESULTATS :

Après avoir calculé le vecteur de déplacements global, il reste à évaluer les déformations puis les contraintes au centre de chaque élément en fonction de ses déplacements nodaux en utilisant les sous-routines suivantes :

"DEFOR" Pour évaluer les déformations aux centres des éléments.

"CONTR" Pour évaluer les contraintes aux centres des éléments.

Impression des résultats :

C'est d'après les sous-routines "SORTIE" que s'effectue l'impression des résultats sur des fichiers préalablement définis:

"SORTIE1" imprime les déplacements nodaux.

"SORTIE2" imprime les déformations aux centres des éléments.

"SORTIE3" imprime les contraintes aux centres des éléments.

IV.11.3 Validation du programme

Pour valider le programme MEFMEC On donne un exemple d'utilisation, en considérant un tube cylindrique épais de rayon interne $R_1=a$, et externe $R_2=b$, soumis à une pression interne P_i (figure 4.5),

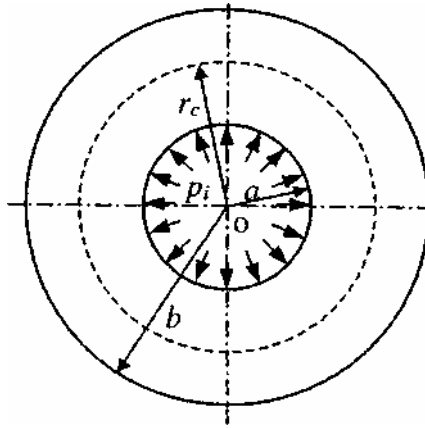


Figure 4.5 : Tube cylindrique soumis à une pression interne

On à utilisé trois modélisations par éléments finis (figure 4.6), l'introduction des données se fait par un programme spécial appelé "VALIDE" qui demande de l'utilisateur les données concernant la structure (voir l'annexe 2), après son exécution il imprime les résultats (les coordonnées, les paramètres physiques) sur un fichier, qui seront considérées des données d'entrée par MEFMEC

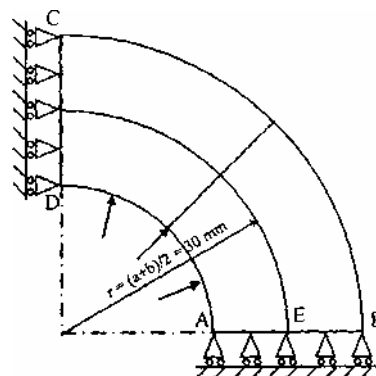


Figure 4.6 : Idéalisaton du tube cylindrique par éléments finis

Les figures (4.7) et (4-8) présentent les résultats pour les déplacements et les contraintes dans le tube cylindrique pour l'expression analytique et par éléments finis pour les diverses modélisations qui se trouvent dans les tableaux 4.1, 4.2, 4.3.

On note ici qu'on a pris seulement les premières valeurs des déplacements et des contraintes pour chaque modélisation car à partir de ces valeurs, les déplacements et les contraintes deviennent identiques pour une même position radiale.

Les graphiques montrent que même pour la plus grossière discrétisation, la différence avec es valeurs analytiques que ce soit pour les déplacements ou pour les contraintes radiales et circonférentielles est faible.

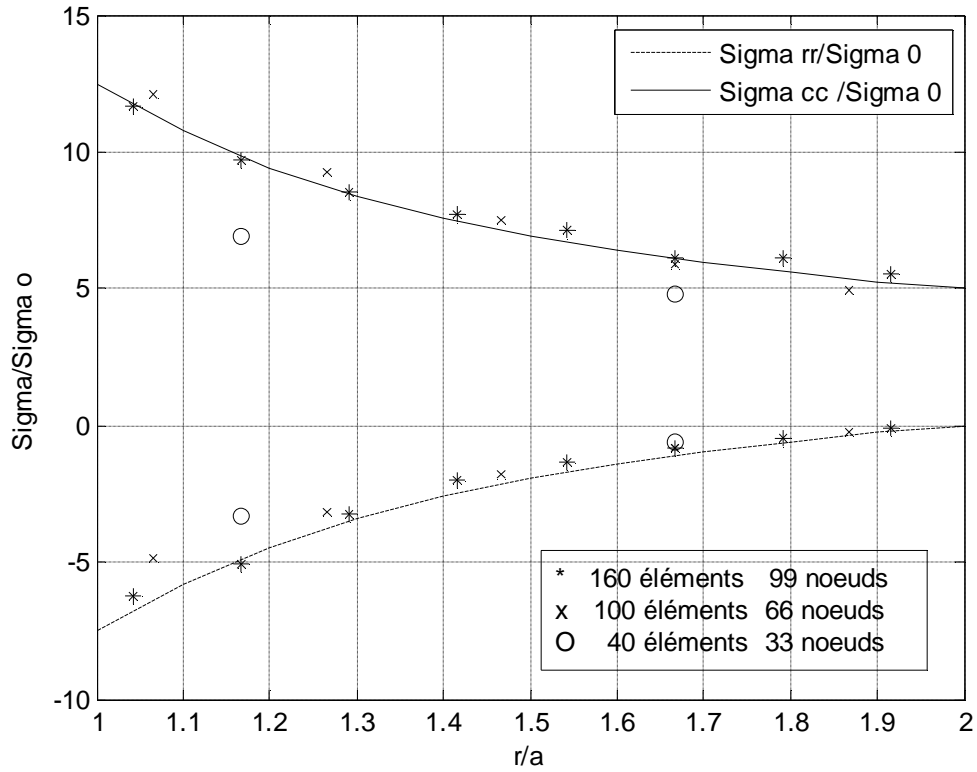


Figure 4.7 : Contraintes tangentielles et radiales dans le tube cylindrique

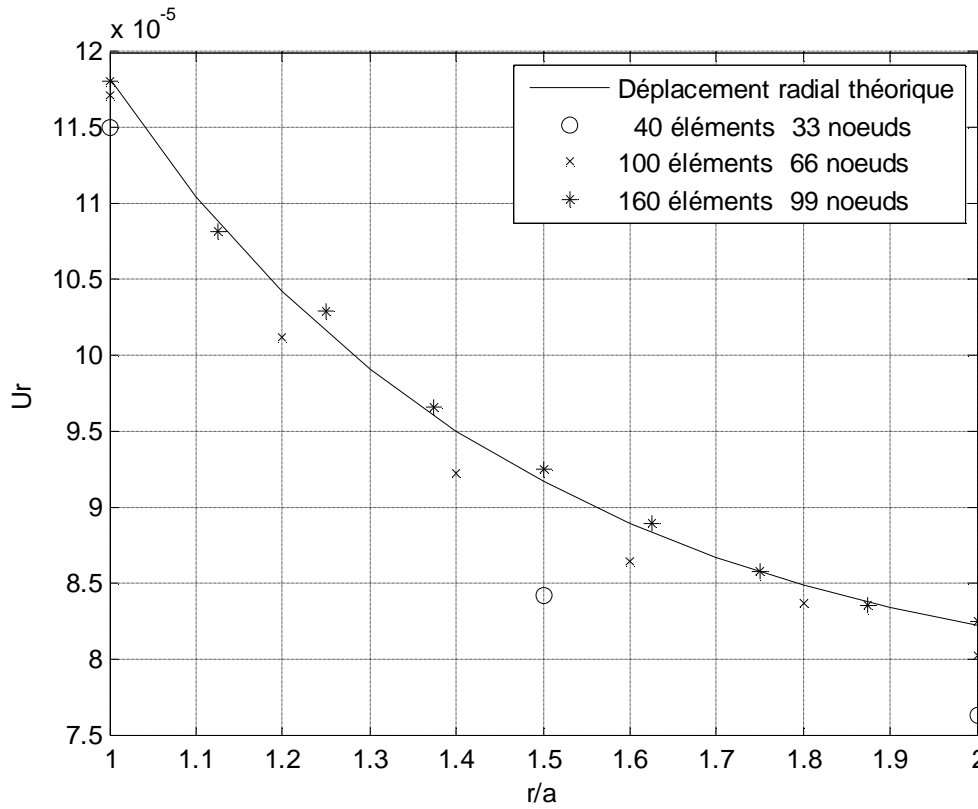


Figure 4.8 : Déplacement radial du tube cylindrique

Déplacements			
Nœuds	r/a	U_r	U_z
1	1,00000000	0,000115100	0,00000 E+00
2	1,50000000	0,000084320	0,00000 E+00
3	2.00000000	0,00007640	0,00000 E+00
Contraintes			
Élément	r/a	s_{rr}/s_0	$s_{\theta\theta}/s_0$
1	1,16667	-3,31480	6,90125
2	1,66667	-0,64165	4,80595

Tableau 4.1 : Résultats pour les déplacements et les contraintes dans le tube cylindrique pour le premier maillage

Déplacements			
Nœuds	r/a	U_r	U_z
1	1,000000000	0,000117139	0,00000 E+00
2	1,200000000	0,000101201	0,00000 E+00
3	1,400000000	0,000092243	0,00000 E+00
4	1,600000000	0,000086479	0,00000 E+00
5	1,800000000	0,000083759	0,00000 E+00
6	2,000000000	0,000080270	0,00000 E+00
Contraintes			
Élément	r/a	s_{rr}/s_0	$s_{\theta\theta}/s_0$
1	1,06667	-4,84909	12,1265
2	1,26667	-3,15214	9,22589
3	1,46667	-1,79584	7,51245
4	1,66667	-0,84018	5,91258
5	1,86667	-0,20614	4,93545

Tableau 4.2 : Résultats pour les déplacements et les contraintes dans le tube cylindrique pour le deuxième maillage

Déplacements			
Nœuds	r/a	U_r	U_z
1	1,00000	0,000118135	0,00000 E+00
2	1,125000	0,0001082541	0,00000 E+00
3	1,250000	0,000102898	0,00000 E+00
4	1,375000	0,000096587	0,00000 E+00
5	1,50000	0,0000926214	0,00000 E+00
6	1,625000	0,000088992	0,00000 E+00
7	1,750000	0,00008592	0,00000 E+00
8	1,875000	0,000083684	0,00000 E+00
9	2,00000	0,0000825468	0,00000 E+00
Contraintes			
Élément	r/a	s_{rr}/s_0	$s_{\theta\theta}/s_0$
1	1,04167	-5,26777	11,70487
2	1,16667	-5,96958	9,67898
3	1,29167	-2,91516	8,516753
4	1,41667	-1,99675	7,70697
5	1,54167	-1,36281	7,15987
6	1,66667	-0,86081	6,10987
7	1,79167	-0,446999	6,11256
8	1,91667	-0,13132	5,58106

Tableau 4.3 : Résultats pour les déplacements et les contraintes dans le tube cylindrique pour le troisième maillage

CONCLUSION

Dans cette thèse, des équations ont été développées dans le but d'étudier le comportement d'un cylindre sous l'effet de la variation d'une pression interne qui augmente régulièrement dans le tube. Une étude par éléments finis pour la phase élastique nous a permis d'obtenir une bonne corrélation avec la théorie. Alors que les résultats obtenus montrent que durant sa déformation, le cylindre passe par trois phases de déformation : élastique, élasto-plastique et parfaitement plastique. L'étude nous a permis de déterminer la distribution des contraintes circonférentielles et radiales à travers le tube cylindrique durant ses trois phases de déformation. Il a été noté que quand le cylindre est très mince son risque de fissuration est très probable si la pression interne est au voisinage de la limite élastique. Par contre quand il est épais, la zone élasto-plastique augmente en fonction de la pression interne jusqu'à atteindre son maximum et la plastification totale est atteinte. Il a été clair de notifier que les contraintes circonférentielles augmentent en fonction de l'élargissement du rayon de plasticité (c), ce qui entraîne l'apparition des contraintes résiduelles qui ont un effet néfaste sur la structure du cylindre ce qui peut provoquer l'apparition des fissurations ou même son éclatement. Il faut noter qu'il est important de connaître le niveau des contraintes résiduelles, pour pouvoir éviter la rupture du cylindre avant même d'atteindre sa limite élastique.

De même lors de l'étude d'un cas particulier d'une sphère creuse soumise à une pression interne, l'analyse des contraintes nous a permis de connaître la distribution des contraintes radiales et circonférentielles à travers la zone élasto-plastique et que ces contraintes dépendaient du rayon de plasticité c . Une mise en évidence de l'avancée de la zone plastique a été donnée et qui nous permet de déduire que la zone plastique se développe à partir de la face interne.

La pression limite élastique a été déterminée et on peut dire qu'au-delà d'une pression P_m supérieure à $2P_e$ (pression limite) des déformations plastiques peuvent apparaître, mais cela n'est possible que si la pression limite est elle-même supérieure à $2P_e$. Ceci fournit une condition géométrique sur la sphère ou les dimensions ne peuvent pas varier. Par ailleurs, il a été constaté qu'après décharge, les déformations plastiques n'ont pas été atteintes, ce qui nous permet de conclure que la structure interne de la sphère fonctionne dans un état élastique loin de la fissuration.

RESUME

Les corps cylindriques soumis à des pressions internes ont une grande application dans le domaine de la mécanique tel que : les conduites d'eau, les gazoducs, les oléoducs, les turboréacteurs et les fusées ; et même dans la biomécanique tels que les tubes minces et les vaisseaux sanguins. En effet, sous l'effet des changements des pressions internes ou des changements de température, ces corps peuvent subir d'importante déformation élasto-plastique où le domaine des fissurations peut facilement apparaître d'où leur risque à un endommagement important ou à leur destruction. Pour cela, la détermination des zones élasto-plastiques de ces corps joue un rôle très important pour éviter leur fissuration et leur rupture. Notre travail consiste en l'analyse des contraintes limites élastiques et la détermination des zones plastiques en fonction de l'épaisseur d'un tube cylindrique homogène soumis à des changements de pressions internes. La mise en œuvre des équations élasto-plastiques utilisant la théorie de Tresca et leur résolution par la méthode des éléments finis ont été considérées. Les contraintes radiales et circonférentielles à travers la zone élasto-plastique ont été déterminés et la fonction du potentiel plastique associée au critère de Von Mises nous a permis de déterminer l'allure des déformations élasto-plastiques en fonction de l'épaisseur de ce tube.

ABSTRACT

The cylindrical bodies have a great application in the field of mechanics such as: water or gas pipelines, tubes, turbojets and rockets as well as in biomechanics such as the thin tubes and blood vessels. In fact, under the effect of the internal stresses, pressures or temperature changes, these bodies can undergo significant elasto-plastic deformations where the field of crack propagations can easily appear where the risk of their damage and their destruction. In this purpose, the determination of the elasto-plastic zones of these bodies plays a very significant role to avoid their cracking and their damage. Our work consists on the ultimate elastic stress analysis and the determination of the plastic zones according to the thickness of a homogenous cylindrical tube subjected to internal pressure changes. The implementation of the elasto-plastic equations using the theory of Tresca and their resolution using the finite element method was considered. The radial and circumferential stresses through the elasto-plastic zone were found and the potential of the plastic function associated with Von Misses criterion allowed us to determine the elasto-plastic deformation forms in terms of the thickness of this tube.

ملخص

الأجسام الاسطوانية الراضخة لضغوطات داخلية لها تطبيقات كبيرة في ميدان الميكانيكا كأنابيب المياه و أنابيب الغازات و الزيوت و المحركات النفاثة العنيفة والصواريخ، وحتى في علم ميكانيكا الأحياء كالأنابيب الرقيقة والأوعية الدموية. في الواقع، فإن تحت تأثير تغير الضغوطات الداخلية أو تغيرات درجات الحرارة، هذه الأجسام يمكنها التعرض لتشوهات معتبرة ذات مرونة و ليونة حيث مجال انشقاقها يصبح سهلا و لاهرا مما يلاذى إلى خطورتها للتعرض لأضرار هامة أو حتى إلى تدميرها. لهذا فإن تحديد مناطق مرنة و ليونة هذه الأجسام تلعب دورا هاما جدا لتفادي تشققها و تدميرها. لذا فإن عملنا هذا يهتم بتحليل حدود الضغوطات المرنة و تحديد مناطق الليونة بدلالة سمك الأنبوب المتجانس و الراضخ لضغوطات داخلية معتبرة. فإن تنفيذ معدلات المرنة و الليونة مستعملين تحليل نظرية تريسك واستعمال طريقة العناصر المنتهية قد أخذت بعين الاعتبار. الضغوطات القطرية والتماسيه عبر منطق المرنة و الليونة قد تم تحديدها، وكذلك فإن دالة الجهد اللين بشراكة معيار فان ميسس قد سمح لنا تحديد مشية التشويوهات المرنة و الليونة بدلالة سمك هذا الأنبوب.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S.Timoshenko, J .N.Goodier , "Theory of Elasticity" McGraw Hill, New York 1982.
- [2] V. Rekatch, "Théorie de l'élasticité ", Edition Mir Moscou 1980.
- [3].S. Belkahla , "Cours d'élasticité - Plasticité". Publication de l'université Badji Mokhtar-Annaba.
- [4] G. Duvant, "Mécanique du Milieu continu" Masson, Paris 1990.
- [5] D.Dartus, "Problème d'élasticité" Cépaduès édition 1995.
- [6] D.François, A.Pineau, A.Zaoui "Elasticité et plasticité" Hermès 1995.
- [7] E. Yoffe,.. 1982 "Elastic stress fields caused by indenting brittle materials". Philos. Mag. A 46, 617-628.
- [8] R.W Little, " Elasticity". Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1973.
- [9] M.L Fares, "Principe physique du comportement mécanique des matériaux" 2004.
- [10] Coe JD, 1989 "Biomechanical evaluation of cervical spinal stabilization in human cadaveric model". Spine; 14:1122-31
- [11] G.Hassen et P.Debuhan , " Analyse élasto-plastique des ouvrages renforcés par inclusion rigides". 17^{ième} Congrès Français de mécanique 2005.
- [12] X.-L Gao, 1992. "An exact elasto-plastic solution for an open-ended thick-walled cylinder of a strain-hardening material ". Int. J. Près.Ves. Piping 52, 129-144.
- [13] X.-L Gao, 1994. "Finite déformation elasto-plastic solution for the pure bending problem of a wide plate of elastic linear-hardening material. Int. J. Solids Struct. 31, 1357-1376.
- [14] X.-L Gao, 1998. "A mathematical analysis of the elasto-plastic plane stress problem of a power- law material". IMA J. Appl. Math. 60.139-149.
- [15] X.-L Gao, 1999. "An exact elastoplastic solution for the plane wedge problem of an elastic linear-hardening material". Math. Mech. Solids 4, 289-306.
- [16] W.Johnson , P.B Mellor, "Engineering Plasticity" VNR London 1980.
- [17] A.Mendelson, "Plasticity Theory & Application" 1986.
- [18] C. Teodosiu & J. L. Raphanel & F. Sidoroff Revue : " Large Plastic Déformations ", 1993 Balkema, Rotterdam.

- [19] K.C Hwang, H. Jiang, Y. Huang, H Gao, , 2002. "A finite déformation theory of strain gradient plasticity". J. Mech. Priys Solids 50, 81-99.
- [20] X. Wei,, 1991. "An elasto-plastic analytical solution for a closed-end thick-walled cylinder of a strain hardening material. Petrochem. Equipment 20 (6), 37-40).
- [21] D.Nelson, 1986 " Finding the stress hidden in parts" Machine Design Volume 20 pp 125-131.
- [22] M. Rodenkovic, " Calcul des contraintes résiduelles d'origine thermomécanique" ATS, contraintes résiduelles, Juin 1981
- [23] A. Niku-Lari , J.Flavenot, " La mesure des contrainte résiduelles" Mécanique – Matériaux-Electricité Vol 35 1979 pp70-78.
- [24] R.H Mario, "Anomalies in measurement of residual stress by X – ray diffraction " proceeding of workshop on non destrutif evaluation of residual stress . San Antario, Texas 1975.
- [25] A.G.A. Parlane, " the determination of Residual stresses " A Review of contemporary measurement technique Welding Inst London 1977 .pp 63-78.
- [26] Z.Labed et B.Necib ," Analyse des contraintes elasto-plastiques dans un cylindre sous l'effet de la variation de la pression interne" Revue Sciences & Technologie B N° 25 Juin 2007 pp 65-70.
- [27] X.-L Gao., 2003. " Strain gradient plasticity solution for an internally pressurized thick-walled Spherical shell of an elastic-plastic material. Mech. Rcs. Commun. 30. 41 1-420.
- [28] Z.Labed et B.Necib, " Analyse des contraintes dans les corps sphériques" 8^{ème} Congrès de Mécanique FS EL JADIDA Maroc 17-20 Avril 2007 Proceeding pp 415-417.
- [29] U.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, "La méthode des éléments finis" Mc Graw-Hill 1991
- [30] B.Dhatt , G.Touzot, " Une présentation de la méthode des éléments finis" 1984.
- [31] J.F.Imbert, "Analyse des structures par éléments finis" 1990.
- [32] A. Chateauneuf , " comprendre les éléments finis " édition ellipses 2005
- [33] C.A. Brebia and J. Dominguez. "Boundary Eléments an Introductory course". witpress Computational -mechanics publications, U.K. 1992 reprinted 1989.
- [34] A. Becker, "The Boundary Element Method in engineering" a complete course.
- [35] M.Bonnet, "Equation Intégrales et Elément de Frontière". CNRS edition Eyrolles Paris. 1995.
- [36] A. M. Starfield, "Boundary element methods in solid mechanics". George Allen & Lnwin Ltd, 40 Muséum street london WCIA ILU.UK.

- [37] T.Y. Yang , " Finite element structural analysis " 1986 Prentice-Hall, Inc,Englewood-Cliffs .
- [38] C.R .Calladine, "Thin walled elastic shells analysed by Rayleigh method", Int.J. Solids Structures, 1977, p. 515.
- [39] R.W Clough, " The finite element method in plane stress analysis". Proceedings of 2nd ASCE conference on electronic computation. Pittsburgh, pa, September 8 and 9. 1960.
- [40] A.Leontiev, "Théorie des échanges de chaleur et de masse" Edition MIR 1979
- [41] B.Andre , De Vriendt "Introduction au rayonnement thermique".Gaétan Morin éditeur 1984
- [42]. G.N.White, "Difference equations for plane thermal elasticity". LAM-2745. Los Alamos Scientific Laborator, Los Alamos, N. Mex., 1968.
- [43] R.D.Cook , "Concepts and applications of finite élément analysis" 1987
- [44] A.C. Lock, "A curved cylindrical shell finite element", Int.J. Mech.ScL 1972, Vol. 14, p.125.
- [45] A.B. Sabir, , "A new class of finite element for plane elasticity problems. The computational aspects of finite elements", CAFEM7, 7th Int.Conf.Struct.Mech. In Reactor technology, Chicago, 1983.
- [46] H. Salhi,, "A strain based finite element for general plane elasticity in polar coordinates", Res.Mechanica 19 ppl-16. 1986.
- [47] A. Sabir, "Solution nodal routine in finite element for thin shells and curved members".2nd eds (D.G.Ashwel and R.H.Gallagher) John Wiley. New York (1976).

Annexe 1 Résultats

Ø Résultats de la phase élastique du tube cylindrique

Résultats de la distribution des contraintes radiales et circonférentielles Figure 1.4										
Zone Elastique										
s_{rr}/s_0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	0.0750	0.0576	0.0444	0.0342	0.0260	0.0194	0.0141	0.0059	0.0027	0.0000
r/a	1.0000	1.1000	1.2000	1.3000	1.4000	1.5000	1.6000	1.8000	1.9000	2.0000
$s_{\theta\theta}/s_0$	0.1250	0.1076	0.0944	0.0842	0.0760	0.0694	0.0641	0.0559	0.0527	0.0500

Ø Résultats de la phase Elasto-plastique du tube cylindrique pour c/a=1

Résultats de la distribution des contraintes radiales et circonférentielles Figure 2.2										
Zone Elastique										
s_{rr}/s_0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	0.375	0.2882	0.2222	0.1709	0.1301	0.0972	0.0703	0.0293	0.0135	0.000
r/a	1.000	1.1000	1.2000	1.3000	1.4000	1.5000	1.6000	1.8000	1.9000	2.000
$s_{\theta\theta}/s_0$	0.625	0.5382	0.4722	0.4209	0.3801	0.3472	0.3203	0.2793	0.2635	0.250

Ø Résultats de la phase Elasto-plastique du tube cylindrique pour $c/a=1.25$

Résultats de la distribution des contraintes radiales et circonférentielles Figure 2.3											
Zone Plastique							Zone Elastique				
s_{rr}/s_0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.0000
	0.5278	0.4790	0.4325	0.3881	0.3455	0.3047	0.2033	0.1299	0.0330		
r/a	1.0000	1.0500	1.1000	1.1500	1.2000	1.2500	1.4000	1.5500	1.8500	2.0000	
$s_{\theta\theta}/s_0$	0.4722	0.5210	0.5675	0.6119	0.6545	0.6953	0.5939	0.5205	0.4236	0.3906	

Ø Résultats de la phase Elasto-plastique du tube cylindrique pour $c/a=1.50$

Résultats de la distribution des contraintes radiales et circonférentielles Figure 2.4											
Zone Plastique							Zone Elastique				
s_{rr}/s_0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.0000
	0.6242	0.5289	0.4419	0.3619	0.2877	0.2188	0.1582	0.0660	0.0304		
r/a	1.0000	1.1000	1.2000	1.3000	1.4000	1.5000	1.6000	1.8000	1.9000	2.0000	
$s_{\theta\theta}/s_0$	0.3758	0.4711	0.5581	0.6381	0.7123	0.7814	0.7209	0.6286	0.5930	0.5626	

Ø Résultats de la phase Elasto-plastique du tube cylindrique pour $c/a=1.75$

Résultats de la distribution des contraintes radiales et circonférentielles Figure 2.5										
Zone Plastique						Zone Elastique				
s_{rr}/s_0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	0.6768	0.5370	0.4144	0.3052	0.2068	0.1172	0.0898	0.0414	0.0199	0.0000
r/a	1.0000	1.1500	1.3000	1.4500	1.6000	1.7500	1.8000	1.9000	1.9500	2.0000
$s_{\theta\theta}/s_0$	0.3232	0.4630	0.5856	0.6948	0.7932	0.8829	0.8555	0.8071	0.7856	0.7657

Ø Résultats de la phase Elasto-plastique du tube cylindrique pour $c/a=2$

Résultats de la distribution des contraintes radiales et circonférentielles Figure 3.2									
Zone Plastique									
s_{rr}/s_0	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	0.6931	0.5978	0.5108	0.4308	0.3567	0.2877	0.2231	0.1054	0.0000
r/a	1.0000	1.1000	1.2000	1.3000	1.4000	1.5000	1.6000	1.8000	2.0000
$s_{\theta\theta}/s_0$	0.3069	0.4022	0.4892	0.5692	0.6433	0.7123	0.7769	0.8946	1.0000

Ø Résultats des contraintes résiduelles du tube cylindrique plastifié

Résultats de la distribution des contraintes résiduelles circonférentielles pour $c/a = (1.25 ; 1.50 ; 1.75 ; 2.00)$ Figure 3.4									
Zone Plastique									
r/a	1.0000	1.1000	1.2000	1.4000	1.5000	1.7000	1.8000	1.9000	2.0000
s_{qq}/s_0	- 0.4000	- 0.1832	- 0.0038	- 0.2793	- 0.3944	- 0.5884	- 0.6717	- 0.7479	- 0.8181
s_{qq}/s_0	- 0.6539	- 0.4150	- 0.2189	- 0.0876	- 0.2110	- 0.4176	- 0.5056	- 0.5859	- 0.6595
s_{qq}/s_0	- 0.8205	- 0.5672	- 0.3601	- 0.0382	- 0.0906	- 0.3054	- 0.3966	- 0.4794	- 0.5553
s_{qq}/s_0	- 0.8483	- 0.5926	- 0.3836	- 0.0592	- 0.0706	- 0.2867	- 0.3784	- 0.4617	- 0.5380