

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ CONSTANTINE I

FACULTÉ DES SCIENCES DE LA TECHNOLOGIE

Département de génie Climatique

N° d'ordre :

Série :

Thèse

Présentée pour obtenir le diplôme de
Docteur en Sciences
En génie climatique

***Etude de la convection bidiffusive dans un milieu poreux
anisotrope***

Présentée par :

SAFI Safia

Soutenu le : 4 / 7 / 2013.

Devant le jury composé de :

Président :	M. Djezzar Mahfoud	Prof.	Université Constantine I
Rapporteur :	M. BENISSAAD Smail	M.C.	Université Constantine I
Examineurs :	M. MAHRI Zine El-Abidine	Prof.	Université Constantine I
	M. BOUGRIOU Cherif	Prof.	Université Hadj Lakhdar – Batna
	M. ZIDANI Kamel	Prof.	Université Hadj Lakhdar – Batna

Dédicaces

A la mémoire de ma mère ;

A mon père

A mon mari Abdesselam,

A mes chers enfants ; Ihab, Amani, Malek et Mahdi

Remerciements

Ce travail de thèse, n'aurait pu être mené à bien sans l'aide des personnes à qui je voudrais adresser tout mon remerciement.

Tout d'abord, mes remerciements vont à mon encadreur de thèse, **Monsieur BENISSAAD Smail**, qui m'a proposé le sujet de thèse et qui m'a encadré tout au long de ces années. Au travers de nos discussions, il m'a apporté une compréhension plus approfondie des divers aspects du sujet. Je salue aussi la souplesse et l'ouverture de son esprit. Lui, qui a su me laisser une large marge de liberté pour mener à bien ce travail de recherche, qui n'aurait jamais pu aboutir sans lui. Ses conseils et sa disponibilité malgré ses lourdes tâches m'ont été précieux. Qu'il trouve ici l'expression de mes sincères gratitude.

Je tiens à exprimer ma sincère reconnaissance à Monsieur M. **DJEZZAR Mahfoud**, Professeur à l'Universités de Constantine 1, qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider le jury. Les membres de jury Messieurs **BOUGRIOU Cherif**, Professeur à l'Université Hadj Lakhdar de Batna ; **Mahri Zine Elabidine**, Professeur à l'Université Constantine 1 et **Zidani Kamel** Professeur à l'Université Hadj Lakhdar de Batna trouvent ici mes sincères gratitude d'avoir accepté de donner de leurs précieux temps pour lire et critiquer mon manuscrit.

Je n'oublierai pas les aides permanentes reçues de mon mari qui a été toujours de mes cotés. Ses soutiens m'ont permis de surmonter beaucoup d'entraves que j'ai rencontré le long de ma longue marche.

Je n'oublierai pas également tous ceux et celles qui m'ont aidé de près ou de loin à réaliser ce travail, notamment M. **BENNACER Rachid**, Professeur à l'Université Cachan, France, de leur dire Merci beaucoup.

Résumé

Le phénomène de la convection naturelle dans les milieux poreux anisotropes a été étudié par plusieurs auteurs vu son importance dans beaucoup d'applications industrielles.

La littérature montre que les études des transferts de chaleur et de masse induits par convection thermosolutale dans un milieu poreux anisotrope sont peu nombreuses comparativement à celles de la convection naturelle dans les milieux isotropes.

C'est dans ce contexte que notre présent travail s'inscrit. Il consiste à étudier le problème bidimensionnel de la convection naturelle thermosolutale au sein d'un milieu poreux anisotrope saturé par un fluide binaire, supposé incompressible, confiné dans une enceinte de forme rectangulaire horizontale. Les parois verticales de la cavité sont soumises à des températures et des concentrations constantes (Des conditions aux limites de type Dirichlet), alors que les parois horizontales sont maintenues imperméables et adiabatiques. L'écoulement convectif est régi par différents paramètres de contrôle, à savoir le nombre de Darcy, Da , le nombre de Rayleigh, Ra , le rapport des forces de volume, N , le nombre de Lewis, Le et le rapport de forme de la cavité, A .

Les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement, de l'énergie et de la concentration ont été déduites en tenant compte de l'approximation de Boussinesq. Le modèle mathématique retenu est celui de Darcy–Brinkman–Forchheimer. Un code numérique basé sur la méthode des volumes finis a été développé pour résoudre les équations de base en milieux poreux anisotropes saturés.

L'influence des paramètres telles que l'anisotropie en conductivité thermique et l'anisotropie en perméabilité, sur les transferts de chaleur, de masse et sur les structures d'écoulement a été analysée. Les résultats sont validés par comparaison avec des travaux antérieurs publiés dans la littérature. Une concordance satisfaisante a été observée.

L'étude paramétrique a concerné le rapport de forme de la cavité ; le nombre de Darcy qui caractérise la perméabilité du milieu ; le nombre de Rayleigh thermique qui caractérise l'écart de la température, le rapport des forces de volume et le nombre de Lewis qui

caractérise le rapport des diffusions thermique et solutale sur l'évolution de la structure de l'écoulement et sur le transfert de chaleur et de masse.

Il a été conclu que l'anisotropie thermique affecte sensiblement les transferts dans les différentes situations. La solution numérique indique que pour un rapport des forces de volume élevé, le transfert de masse reste le même quelque soit le rapport de conductivité. Le rapport des forces de volume n'a plus d'effet sur le transfert de chaleur.

L'étude de l'influence du taux d'anisotropie en perméabilité sur les transferts a permis d'identifier deux régimes d'écoulement. L'un pleinement convectif et l'autre modérément convectif.

La comparaison entre les modèles de Darcy et de Darcy-Brinkman-Forchheimer a également permis de mettre en évidence : l'identification de trois zones de transfert ; l'écoulement et le transfert de chaleur et de masse sont proportionnels avec le nombre de Darcy ; les transferts thermiques et massiques augmentent avec le nombre de Rayleigh ; l'apparition de deux cellules de convection secondaires à l'intérieur de l'écoulement principal pour les faibles valeurs du nombre de Rayleigh ; l'anisotropie en perméabilité entraîne une anisotropie thermique et inversement.

Mots clefs : Transfert de chaleur et masse, milieux poreux anisotropes, convection naturelle, modèle de Darcy-Brinkmann- Forchheimer, volumes finis.

Abstract

The phenomenon of the natural convection in porous anisotropic media has been studied by several authors because of its importance in many industrial applications.

The literature shows that the studies of heat and mass transfer induced by thermosolutal convection in an anisotropic porous medium are few compared to those of natural convection in isotropic media.

It is in this context that our present work is part. It is to study the two-dimensional problem of thermosolutal natural convection within an anisotropic porous medium saturated by a binary fluid, assumed to be incompressible, confined within a horizontal rectangular enclosure. The vertical walls of the cavity are subjected to constant temperatures and concentrations (boundary conditions of Dirichlet), while the horizontal walls are kept waterproof and adiabatic. The convective flow is governed by different control parameters, namely the Darcy number, the Rayleigh number, the ratio of volume forces, the Lewis number, and the aspect ratio of the cavity.

The conservation equations of mass, momentum, energy and concentration were derived taking into account the Boussinesq approximation. The mathematical model used is the Darcy-Brinkman-Forchheimer. A numerical code based on the finite volume method was developed to solve the basic equations in anisotropic saturated porous medium.

The influence of parameters such as the anisotropy in thermal conductivity and the anisotropy in permeability on the transfer of heat and mass and on the flow structures were analyzed. The results are validated by comparison with previous work reported in the literature. A satisfactory agreement was observed.

The parametric study involved the aspect ratio of the cavity, the Darcy number that characterizes the permeability of the medium, the thermal Rayleigh number, which characterizes the deviation of the temperature, the ratio of volume forces and the number of Lewis which characterizes the ratio of thermal and solutal diffusions on the evolution of flow structures and heat and mass transfer.

It was concluded that the thermal anisotropy affect significantly transfers in different situations. The numerical solution shows that for high volume forces, mass transfer is the

same regardless of the conductivity ratio. The ratio of volume forces has no effect on the heat transfer.

The study of the influence of anisotropy in permeability rate on transfers identified two flow regimes. A fully convective and the other moderately convective.

The comparison between Darcy model and Darcy-Brinkman-Forchheimer model has also allowed highlighting: Identification of three transfer zones; flow and heat and mass transfer are proportional to Darcy number; heat and mass transfer increase with Rayleigh number; the appearance of two secondary convection cells inside the main flow at low values of Rayleigh number; the anisotropy in permeability causes thermal anisotropy; the occurrence of two side convection cells within Master for low values of the Rayleigh number flow, and the permeability anisotropy leads to anisotropy and thermal and vice versa.

Keywords: Heat and mass transfer, anisotropic porous media, convection, model of Darcy-Brinkman-Forchheimer, finite volumes.

ملخص

إن ظاهرة الحمل الحراري الطبيعي في الوسائط النافذة و المتباينة الخواص (غير متجانسة الخواص anisotropes) قد تمت دراستها من قبل العديد من الباحثين نظرا لأهميته في العديد من التطبيقات الصناعية .

لقد بينت المقالات العلمية أن الدراسات الخاصة بتبادل الحرارة و المادة الناجم عن الحمل الحراري المادي (thermosolutal) في وسط نافذ و متباين الخواص هي قليلة مقارنة مع تلك الخاصة بالحمل الحراري الطبيعي في وسط متجانس الخواص (isotropes).

في هذا السياق يدخل بحثنا الحالي. فهو دراسة عديدة تخص الحمل الطبيعي ثنائي الانتشار داخل وسط نافذ غير متجانس الخصائص، مشبع بمائع ثنائي، يفترض أن يكون غير قابل للانضغاط ، منحصر في وعاء أفقي مستطيل. الجدران العموديان للوعاء خاضعان لحرارة وتركيز ثابتة(شروط الحدود من نوع Dirichlet)، بينما الجدارين الأفقيين فهما كاطمين وغير نافذين . يخضع سريان الحمل الحراري إلى عوامل تحكم و مراقبة مختلفة، وهي عدد دارسي، عدد رايلي ، نسبة القوى الحجمية، عدد لويس، ونسبة أبعاد أو شكل الوعاء.

تم استخدام معادلات حفظ الكتلة و كمية الحركة والطاقة و التركيز مع مراعاة تقرب بوسيناسك Boussinesq. النموذج الرياضي المعتمد هو نموذج دارسي-برينكمان- فورخايمر. و تم وضع برنامج رقمي يعتمد على طريقة الأحجام المتناهية في حل المعادلات الأساسية لوسط نافذ، مشبع وغير متجانس الخصائص.

إن تأثير العوامل مثل عدم تجانس الخصائص الحرارية و النفاذية على نقل الحرارة والكتلة وتشكل السريان قد تم تحليله. لقد تم التحقق من صحة النتائج عن طريق المقارنة مع الأعمال السابقة التي تم نشرها ولوحظ وجود اتفاق مرض.

لقد شملت الدراسة الوسائطية نسبة أبعاد شكل الوعاء، عدد دارسي الذي يميز نفاذية الوسط، عدد رايلي الحراري، والذي يميز الفرق في درجة الحرارة، نسبة القوى الحجمية، عدد لويس الذي يميز نسبة الانبعاث الحراري والكتلي على تطور شكل و تركيبة السريان و انتقال الحرارة والكتلة.

لقد تم استخلاص أن تباين الخصائص الحرارية تؤثر تأثيرا كبيرا على التبادلات في مختلف الحالات. و أظهر الحل العددي أن النسبة المرتفعة للقوى الحجمية لا تؤثر على التبادل الكتلي الذي لا يتغير بغض النظر عن نسبة الناقلية. إن قوى الحجم ليس له تأثير على التبادل الحراري.

كما سمحت دراسة تأثير نسبة تباين الخصائص النفاذية على التبادلات بتحديد نظامين للسريان. أحدهما حملا حراريا بشكل كامل والآخر حمل حراري بشكل معتدل.

لقد سمحت كذلك المقارنة بين نموذج دارسي و نموذج دارسي برينكمان- فورخايمر بتسليط الضوء على تحديد ثلاث مناطق تبادل، السريان و التبادل الحراري و الكتلي متناسبة مع عدد دارسي ، التبادلات الحرارية و الكتلية تزداد مع زيادة عدد رايلي، ظهور خليتين للحمل الحراري الثانوي ضمن السريان الرئيسي و ذلك بالنسبة لعدد رايلي منخفض القيم ، تباين خصائص النفاذية يؤدي إلى تباين الخصائص الحرارية و العكس صحيح.

الكلمات المفتاحية : انتقال الحرارة والكتلة، الوسط النافذ المتباين الخواص، الحمل الحراري الطبيعي ، نموذج دارسي- برينكمان- فورخايمر، الأحجام المتناهية.

Table des matières

Remerciements	3
Nomenclature	3
Introduction générale	6
Chapitre : 1 Généralités et revue bibliographique	8
1.1 Introduction	8
1.2. Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R.)	8
1.3. Définition du problème physique	10
1.4. Loi de Darcy généralisée	11
1.5. Formulation de Brinkman	12
1.6. Formulation de Forchheimer	12
1.7. Terme convectif	13
1.8. Synthèse des différents travaux sur les couches poreuses	14
1.8.1. Couches poreuses isotropes	14
1.8.2. Couches poreuses anisotropes	20
Chapitre : 2 Formulation mathématique du problème	25
2.1 Définition du problème	25
2.2. Hypothèses de calcul	25
2.3. Equations gouvernantes	27
2.4. Adimensionnalisation des équations gouvernantes	28
2.5. Conditions aux limites	30
Chapitre : 3 Résolution numérique	31
3.1. Introduction	31
3.2. Principe de la méthode des volumes finis	31
3.3. Discrétisation du domaine physique	32
3.4. Le maillage typique et le maillage décalé	33
3.5. Discrétisation des équations	35
3.5.1. Intégration de l'équation générale de transport	35
3.5.2. Schémas de discrétisation	37
3.6. Application de la méthode des volumes finis à notre problème	38
3.6 .1 Discrétisation des équations du mouvement	38
3.6.1.1. Equation du mouvement suivant X	38
3.6.1.2. Équation du mouvement en Y	39
3.6.1.3 Discrétisation de l'équation d'énergie	40
3.6.1.4 Discrétisation de l'équation de masse	41
3.6.2. Résolution des systèmes des équations de discrétisation U_{pu} et V_{pv}	42
3.6.2.1. Discrétisation de l'équation de continuité	42
3.6.2.2. Discrétisation de l'équation de la pression	44
3.6.3. Méthode de résolution	46
3.6.3.1. Algorithme SIMPLER	47
3.6.3.2. Critère de convergence	49
3.7. Influence du maillage sur les résultats	49
3.8. Validation du code numérique	50
3.8.1. Cas du régime de Darcy	50

3.8.2. Cas du régime de Darcy-Brinkman	51
--	----

Chapitre : 4 Convection naturelle thermosolutale dans une cavité poreuse anisotrope en conductivité thermique

4. 1. Introduction	52
4.2. Cas du milieu poreux avec anisotropie thermique	52
4.2.1. Structure de l'écoulement	53
4.2.2. Effet du nombre de Darcy sur le transfert de chaleur et de masse	54
4.2.3. Effet du nombre de Lewis sur le transfert de masse	55
4.2.4. Effet du nombre de Rayleigh thermique sur le transfert de chaleur et de masse	56
4.2.5. Effet du rapport des forces de volume sur le transfert de masse	58
4.3. Conclusion	58

Chapitre : 5 Convection naturelle thermosolutale dans une cavité poreuse anisotrope en perméabilité

5.1. Introduction	60
5.2. Validation du code numérique	60
5.3. Résultats et discussions	61
5.3.1. Effet de l'anisotropie en perméabilité sur les transferts	61
5.3.2. Effet du nombre de Darcy	65
5.3.2.1. Structure de l'écoulement	65
5.3.2.2. Transfert de chaleur et de masse	66
5.3.3. Effet du nombre de Rayleigh	68
5.3.3.1. Structure de l'écoulement	68
5.3.3.2. Transfert de chaleur et de masse	69
5.3.4. Effet du nombre de Lewis	70
5.3.4.1. Structure de l'écoulement	70
5.3.4.2. Transfert de masse	71
5.3.5. Effet des rapports des forces de volume N	72
5.3.5.1. Structure de l'écoulement	72
5.3.5.2. Transfert de chaleur et de masse	74
5.3.6. Effet du rapport de forme A	75
5.3.6.1. Structure de l'écoulement	75
5.3.6.2. Transfert de chaleur et de masse	76
5.3.7. Effet de l'anisotropie combinée	77
5.3.7.1. Structure de l'écoulement	77
5.3.7.2. Transfert de chaleur et de masse	78
5.4. Comparaisons entre les deux modèles de Darcy et Darcy-Brinkman-Forchheimer	80
5.5. Conclusion	81

Conclusion générale

Références bibliographiques

Nomenclature

\bar{A} : Rapport de forme de la cavité, $\bar{A} = L/H$

$A|P|$: Fonction du schéma numérique en fonction du nombre de Peclet

C : Concentration du soluté [kg m^{-3}]

C_f : Coefficient du terme de Forchheimer, $C_f = 0.56$

D : Diffusivité massique [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$]

D_a : Nombre de Darcy, $D_a = \frac{K_y}{H^2}$

g : Accélération gravitationnelle [m s^{-2}]

H : Hauteur de la cavité [m]

K_x, K_y : Perméabilités selon l'axe horizontal (vertical) [m^2]

K : Rapport des perméabilités, $K = \frac{K_x}{K_y}$

\bar{K} : Tenseur des perméabilités

L : Longueur de la cavité [m]

Le : Nombre de Lewis, $Le = \frac{\alpha}{D}$

N : Rapport des forces de volumes, $N = \beta_s \Delta C / \beta_T \Delta T$

Nu : Nombre de Nusselt

P : Pression

Pr : Nombre de Prandtl, $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$

R_a : Nombre de Rayleigh thermique, $R_a = \frac{g \beta_T \Delta T K_y H}{\alpha \nu}$

R_a^* : nombre de Rayleigh poreux thermique, $R_a^* = R_a \cdot D_a$

\bar{R}_K : Tenseur adimensionnel de l'anisotropie en perméabilité

\bar{R}_λ : Tenseur adimensionnel de l'anisotropie en conductivité thermique

S_ϕ : Terme source

Sh : Nombre de Sherwood

t : Temps [s]

T : Température dimensionnelle [K]

T_1 : Température de référence à $X = 0, Y = 0$

U : Composante adimensionnelle horizontale du vecteur vitesse

U' : Correction de la vitesse U

V : Composante adimensionnelle verticale du vecteur vitesse

V' : Correction de la vitesse V

\vec{V} : Vecteur vitesse

X : Coordonnée horizontale adimensionnelle

Y : Coordonnée verticale adimensionnelle

Symboles grecs

α : Diffusivité thermique du fluide [$m^2 s^{-1}$]

β_S : Coefficient d'expansion solutal [$m^3 Kg^{-1}$]

β_T : Coefficient d'expansion thermique [K^{-1}]

ρ : Masse volumique [$kg m^{-3}$]

σ : Rapport des capacités calorifiques, $\sigma = (\rho c)_m / (\rho c)_f$

μ : Viscosité dynamique du fluide [$kg m^{-1} s^{-1}$]

μ_{eff} : Viscosité équivalente dans le modèle de Brinkman [$kg m^2 s^{-1}$]

ϑ : Viscosité cinématique du fluide [$m^2 s^{-1}$]

φ : Porosité du milieu poreux, $\varphi = 0.8$

λ : Rapport des conductivités, $\frac{\lambda_x}{\lambda_y}$

λ_x, λ_y : Conductivité thermique selon l'axe horizontal (vertical) [$W m^{-1} K^{-1}$]

ΔT : Différence de température entre les parois verticales, $\Delta T = T_1 - T_2$

ΔC : Différence de concentration entre les parois verticales, $\Delta C = C_1 - C_2$

Θ : Température adimensionnelle, $\Theta = \frac{(T - T_0)}{\Delta T}$

Φ : Concentration adimensionnelle, $\Phi = \frac{(C - C_0)}{\Delta C}$

Γ : Coefficient de diffusion

ΔX : Distance dans la direction X entre deux noeuds consécutifs

ΔY : Distance dans la direction Y entre deux noeuds consécutifs

τ : Temps adimensionnel

Indices

eff: Effectif

f : Fluide

i: Indice d'un point du maillage suivant **X**

j: Indice d'un point du maillage suivant **Y**

max: Maximum

min : Minimum

p : Point au centre du volume fini

0: Etat de référence

Introduction générale

Le phénomène du transfert de chaleur et de masse par la convection naturelle, dans les espaces confinés ou semi-confinés, est généralement dû à la présence de gradients de température et de concentration. Ces gradients créent une distribution non uniforme de la masse volumique du mélange qui provoque à son tour un mouvement convectif sous l'effet de la gravité.

Si les forces de volume sont d'origine thermique, la convection naturelle est dite thermique, elle est thermosolutale si les effets thermiques et solutaux coexistent.

Le phénomène de La convection naturelle dans les milieux poreux anisotropes a une importance fondamentale, elle est fréquemment rencontrée dans la nature et dans certains secteurs industriels. L'anisotropie est en général la conséquence de l'axisymétrie géométrique des grains ou des fibres possédant une orientation préférentielle ou une asymétrie de la phase poreuse dans leur structure, et la transmissibilité du fluide saturant ne se fait pas de la même manière dans toutes les directions. De tels milieux sont souvent rencontrés dans de nombreux systèmes naturels ou industriels, comme par exemple les fibres de certains matériaux (composites, biologiques), les formations géologiques, etc. Ainsi si en un point donné du milieu poreux, une propriété comme la perméabilité ou la conductivité thermique changent selon la direction, le milieu est alors anisotrope relativement à cette propriété au point considéré. Dans la nature, l'anisotropie en perméabilité est observée dans les sols et les formations géologiques qui servent de réservoirs ou de nappes aquifères.

Dans ce travail, on se propose d'étudier la convection thermosolutale au sein d'une couche poreuse anisotrope confinée dans une cavité rectangulaire horizontale dont la matrice poreuse est saturée par un fluide binaire. Des conditions aux limites de type Dirichlet ont été imposées sur les parois verticales de la cavité.

La thèse comporte cinq chapitres, une introduction générale et une conclusion générale. Dans le premier chapitre, les caractéristiques des milieux poreux y sont définies. Une recherche bibliographique est également traitée.

Le deuxième chapitre est consacré à la formulation mathématique du problème où les équations gouvernantes, les hypothèses simplificatrices, et les conditions aux frontières associées sont présentées.

Le troisième chapitre est dédié à la modélisation numérique des volumes finis, la mise sous forme adimensionnelle des équations gouvernantes et l'établissement des conditions aux limites. La validation du code de calcul avec les travaux publiés sur une large gamme de paramètres est ensuite réalisée.

Dans le quatrième chapitre, on discute les résultats obtenus, en prenant en compte l'effet de l'anisotropie thermique sur la convection thermosolutale. Le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer, est adopté pour modéliser le milieu poreux. Les résultats numériques sont validés par comparaison avec des travaux antérieurs. Ensuite, nous examinons l'influence des paramètres de contrôle du problème sur l'évolution de la structure de l'écoulement et sur le transfert de chaleur et de masse.

Le cinquième chapitre porte sur les différents résultats obtenus dans le cas où l'anisotropie en perméabilité est prise en considération. Les commentaires, interprétations et analyse des divers résultats sont présentés à partir des distributions de certaines grandeurs physiques.

La conclusion générale est consacrée à la mise en évidence des différents points majeurs de cette étude ainsi que les perspectives envisagées à long terme qui peuvent faire l'objet d'autres recherches.

1. Généralités et revue bibliographique

1.1 Introduction

Plusieurs matériaux naturels ou artificiels sont poreux. Un matériau poreux est constitué d'une matrice solide qui comporte des vides distribués plus ou moins dans toute la masse de façon désordonnée et non-uniforme. Ces espaces vides, peuvent être interconnectés ou déconnectés. Un fluide peut s'écouler à travers un milieu poreux à condition que la plupart des espaces vides soient interconnectés. Dans le cas où les espaces vides sont remplis par la même phase (fluide ou gazeux), le milieu poreux est dit saturé par le fluide.

Un milieu poreux est caractérisé principalement par deux propriétés macroscopiques liées entre elles et qui sont la porosité et la perméabilité.

La perméabilité traduit la facilité avec laquelle le fluide s'écoule dans le milieu poreux sous l'effet d'un gradient de pression. La perméabilité dépend uniquement de la porosité et de la géométrie de la matrice solide. La non uniformité de la distribution des vides (pores) et leurs formes influent sur l'écoulement et le transfert de chaleur près des frontières (paroi solide ou surface libre).

La mesure de la perméabilité dans une direction donnée se fait par rapport à une surface perpendiculaire à l'écoulement du fluide. En général, les matériaux poreux possèdent une orientation préférentielle ou une asymétrie de la phase poreuse dans leur structure. D'où une transmissibilité du fluide saturant différente d'une direction à une autre.

1.2 Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R.)

La notion du volume élémentaire représentatif (V.E.R) consiste à associer à un point mathématique les propriétés d'un volume suffisamment représentatif pour définir ou mesurer les propriétés moyennes du milieu [1].

Dans la présentation continue d'un milieu poreux, les variables physiques décrivant le milieu, discontinues à l'échelle microscopique, sont remplacées par des fonctions continues

à l'échelle macroscopique. La valeur de chaque variable physique affectée à un point mathématique dans l'espace continu est obtenue en moyennant la propriété physique sur un volume élémentaire représentatif (VER).

La figure 1.1 illustre la taille intermédiaire du volume élémentaire représentatif (V.E.R) entre la taille du milieu poreux à l'échelle macroscopique L et à l'échelle des pores d [3].

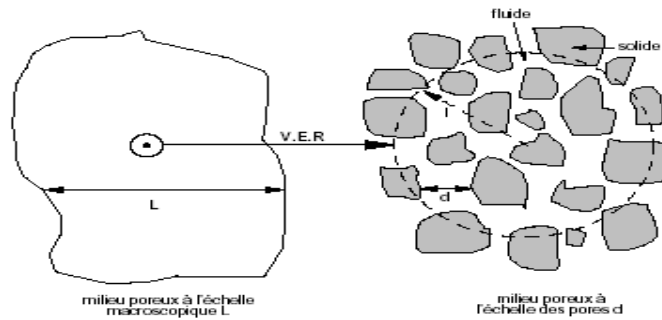
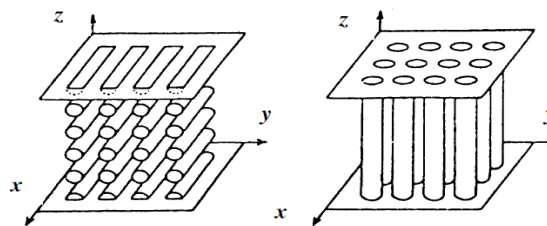


Figure 1.1 : Représentation schématique du volume élémentaire représentatif [3]

Un milieu poreux est composé d'une phase solide et d'une phase fluide et peut présenter une anisotropie locale due à l'orientation préférentielle des directions dominantes des pores délimitant la phase fluide ou de l'asymétrie géométrique des grains ou des fibres composant la matrice solide. Un milieu poreux localement hétérogène peut être considéré comme globalement homogène et anisotrope (figure 1.2) ou éventuellement isotrope (cas particulier).



(a)

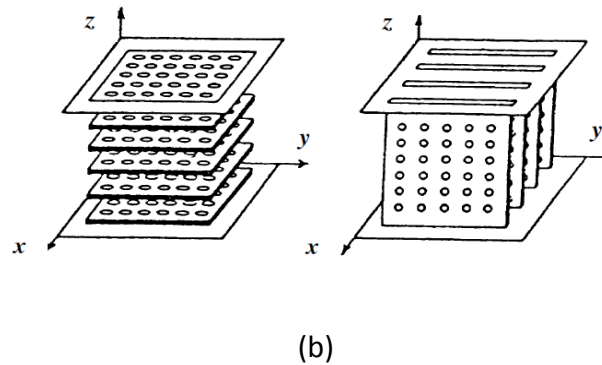


Figure 1.2 : Matériaux poreux globalement homogènes et anisotropes selon [4].

- a) Matériaux poreux composés de fibres parallèles disposées horizontalement ou verticalement.
 b) Matériaux poreux composés de plaque perforées parallèles disposées horizontalement ou verticalement.

1.3 Définition du problème physique

Le mode d'écoulement par convection naturelle dans les milieux poreux saturés ayant des pores interconnectés, est provoqué par un gradient de masse volumique du fluide saturant soumis au champ de pesanteur. Cette variation locale de la masse volumique du fluide peut avoir comme origine un gradient de température ou (et) un gradient de concentration dans le cas d'un fluide à plusieurs composants. Un autre type de transport convectif en milieux fluides ou poreux est la convection double diffusive ou thermosolutale qui se produit en présence de deux composants différents (par exemple la chaleur et la salinité).

La convection thermosolutale est coopérante si les forces de volume d'origine thermique et solutale agissent dans le même sens, dans le cas contraire elle est opposée.

Le phénomène de la convection thermosolutale est rencontré dans la nature. En effet, l'évaluation des transferts de masse et de chaleur permet d'utiliser au mieux le matériau et parer aux infiltrations et aux risques de contamination.

La plupart des études sur la convection doublement diffusive dans les milieux poreux se sont basées jusqu'à présent sur l'hypothèse restrictive de l'homogénéité et de l'isotropie de ces milieux.

1.4 Loi de Darcy généralisée

La dynamique des fluides homogènes dans, les milieux poreux, est décrite par la loi de Darcy établie en 1856 [5]. Cette loi, établie à partir d'écoulements unidirectionnels sur une colonne de sable, a mis en évidence la proportionnalité du gradient de pression appliquée et le débit d'eau traversant cette colonne. Depuis, les sciences hydrogéologiques sont basées sur la loi de Darcy même pour les écoulements multidirectionnels. Elle s'écrit :

$$\overline{\Delta P} = -\frac{\mu}{K} \overline{V} + \rho \overline{g} \quad (1.1)$$

Où

\overline{V} est la vitesse de filtration, ρ et μ sont respectivement la masse volumique et la viscosité dynamique du fluide, K la perméabilité du milieu poreux, $\overline{\Delta P}$ le gradient de pression appliqué et \overline{g} le vecteur de la gravitation.

Ferrandon [6] a généralisé la formule Darcy pour les milieux poreux anisotropes, en utilisant un tenseur de perméabilité K , du second ordre et symétrique ; d'où :

$$\overline{\Delta P} = -\mu \overline{K}^{-1} \overline{V} + \rho \overline{g} \quad (1.2)$$

Suite aux études réalisées plus tard, la loi de Darcy, s'est avérée insuffisante. Elle ne pouvait pas traduire l'influence de la nature du fluide sur l'écoulement, notamment près des parois. En effet, avec ce modèle, la condition de non glissement aux parois est retenue quel que soit le fluide considéré. En plus elle ne tenait pas compte non plus d'éventuels effets inertiels. Des corrections ont été alors apportées au modèle de Darcy pour remédier à ces insuffisances.

1.5 Formulation de Brinkman

Brinkman [7] a introduit dans la loi de Darcy, un terme équivalent au terme de dissipation visqueuse dans la loi de Stokes. Sa formule est donnée par :

$$\overline{\Delta P} = -\frac{\mu}{K} \overline{V} + \mu_{\text{eff}} \overline{\nabla^2 V} + \rho \overline{g} \quad (1.3)$$

Cette formule est connue sous le nom de la formulation de Darcy-Brinkman. Le premier terme de droite de l'équation (1.3) est le terme de Darcy et le deuxième est appelé le terme de Brinkman.

Cette formule (loi empirique) était justifiée, selon Brinkman, par le fait que, pour les faibles valeurs de la perméabilité K , l'équation (1.2) se transforme à la loi de Darcy, équation (1.1), Tandis que pour une perméabilité tend vers l'infini, on retrouve l'équation de Stokes. La difficulté dans l'utilisation de ce modèle réside dans l'évaluation de la viscosité équivalente du milieu μ_{eff} . En effet cette grandeur est fonction non seulement de la porosité du milieu mais aussi de sa géométrie. Brinkman a assimilé la viscosité équivalente du milieu à celle du fluide ($\mu_{\text{eff}} = \mu$).

1.6 Formulation de Forchheimer

Pour décrire un écoulement où les vitesses sont élevées et l'effet d'inertie non linéaire est important, l'équation de Darcy devient insuffisante. Ward [8] a apporté une correction au modèle de Darcy. Il a proposé la relation suivante :

$$\overline{\Delta P} = -\frac{\mu}{K} \overline{V} - b K^{-1/2} \rho_f |\overline{V}| \overline{V} + \rho \quad (1.4)$$

Le second terme de la partie droite de cette équation est le terme de Forchheimer, b étant une constante adimensionnelle.

Le régime de Darcy est dominant pour $R_{ep} \leq 1$. À partir d'un nombre de Reynolds du milieu poreux R_{ep} de l'ordre de 1 commence la transition du régime de Darcy vers le régime de Darcy-Forchheimer et pour des $R_{ep} \gg 1$, le régime de Forchheimer est dominant.

1.7 Terme convectif

Dans son étude sur la convection thermique dans un solide perméable, Wooding [9] a proposé une extension de l'équation de Darcy en introduisant un terme convectif par analogie avec les équations de Navier-Stokes.

$$\overline{\Delta P} = \frac{\rho}{\phi^2} (\vec{V} \cdot \vec{V}) \vec{V} = -\frac{\mu}{K} \vec{V} - \overline{\Delta P} + \rho \vec{g} \quad (1.5)$$

Le terme de gauche de cette équation est le terme de convection qui tient compte des effets inertiels quand les vitesses sont importantes. Cependant certains auteurs (Niield et Bejan [3]) précisent que la présence de ce terme est justifiable pour des milieux poreux fortement perméables ($\phi < 0.8$). Lauréat et Prasad [9] ont montré que le terme de convection ne tient pas compte des déviations de sources inertielles par rapport au terme de Darcy. Pour tenir compte des effets inertiels, ils optent alors pour le terme de Forchheimer.

Dans la suite de ce travail et compte tenu des gammes de paramètres choisis, nous retenons la formulation de Darcy–Brinkman–Forchheimer avec une viscosité effective égale à la viscosité du fluide. Le terme advectif est maintenu dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement parce que nous nous sommes intéressés aux transferts et aux écoulements convectifs dans des domaines qui peuvent être complètement ou partiellement saturés par un fluide.

1.8 Synthèse des différents travaux sur les couches poreuses

Le livre de Nield et Bejan [3] présente bien la synthèse des travaux disponibles sur les transferts de chaleurs et de masse par convection naturelle en milieu poreux.

La convection thermosolutale (ou doublement diffusive) a intéressé beaucoup de chercheurs ces dernières années, à cause de son intérêt dans la résolution de problèmes dans différents domaines industriels et en milieu naturel. Les premières études concernaient les couches poreuses soumises à des gradients de température et de concentrations verticaux. Plus récemment un intérêt particulier a été porté aux couches poreuses avec des températures et concentrations imposées sur les frontières verticales.

Une importante partie des études réalisées sur les couches poreuses, concerne les couches isotropes et les couches anisotropes.

1.8.1 Couches poreuses isotropes

Nield [11] est parmi les premiers à avoir étudié les couches poreuses isotropes horizontales soumises à des gradients opposés de température et de concentration. Le nombre de Rayleigh supercritique, marquant le seuil de l'apparition de la convection, a été prédit par cet auteur pour divers types de conditions limites. Il a été montré que des écoulements convectifs oscillants peuvent se déclencher à un nombre de Rayleigh bien inférieur au nombre de Rayleigh supercritique, lorsque le soluté joue le rôle d'un stabilisant et la chaleur le rôle d'un déstabilisant.

La question de la stabilité a intéressé plusieurs auteurs : Taunton et Lighfoot [12], Jang et Chang [13] et Poulikakos [14].

En utilisant la théorie de la stabilité linéaire, dans le cas d'une couche poreuse saturée par un fluide binaire, dont les parois horizontales maintenues à des températures et des concentrations constantes, Taunton et Lighfoot [12] ont observé trois régimes convectifs différents. Les nombres de Rayleigh critiques délimitant ces trois régimes ont été déterminés. Le premier régime, stable, est caractérisé par l'état de repos du fluide. Cet état peut être maintenu jusqu'à un nombre de Rayleigh critique surstable. Au delà de ce nombre débute le deuxième régime qui caractérise la convection oscillante. Le troisième régime caractérise la transition du régime oscillant vers le régime direct. Quant à la stabilité d'une

couche en double diffusion, elle a été étudiée par Poulikakos [14] qui, en modélisant l'écoulement par l'équation de Darcy-Brinkman qui tient compte du frottement dû au cisaillement, a déterminé les paramètres critiques du problème et les frontières entre les régimes de convections directs et surstables.

Jang et Chang [13] ont étudié numériquement l'instabilité de la convection dans un milieu adjacent à une paroi horizontale chauffée par le bas, pour différentes valeurs de nombres de Lewis et différents rapports de forces de volume. Ils ont montré que dans le cas de la convection thermosolutale coopérante, les transferts de chaleur et de masse sont plus élevés que dans le cas de la convection purement thermique, alors qu'un comportement inverse est observé dans le cas où les forces d'origine solutale s'opposent à l'écoulement. Ils ont conclu que le nombre de Rayleigh poreux thermique critique augmente avec la décroissance du nombre de Lewis.

Trevisan et Bejan [15] ont également examiné la convection double diffusive dans une cavité poreuse dont les parois verticales étaient maintenues à des températures et concentrations constantes. À l'aide du modèle de Darcy, les auteurs ont comparé leurs résultats à une analyse d'ordre de grandeur pour un rapport de poussée compris entre -5 et 3, le nombre de Lewis entre 0.1 et 10 et pour une Rayleigh poreux $Ra = 200$. Ils ont noté une disparition totale de l'écoulement convectif lorsque $N = -1$ et $Le = 1$. L'effet de pénétration du fluide devient plus important et modifie notablement le transfert de chaleur dans toute la cavité. L'analyse des ordres de grandeurs a permis d'établir différentes échelles pour le transfert de masse en fonction du nombre de Lewis.

Rosenberg et Spera [16] ont établi, quant à eux, des corrélations qui montrent la dépendance du nombre de Nusselt et du nombre de Sherwood avec le rapport des forces de volume d'origine thermique et solutale, du nombre de Rayleigh poreux thermique et du nombre de Lewis pour le cas du régime de Darcy et en régime permanent.

Amari et al. [17] ont utilisé le modèle de Darcy modifié et la loi d'un fluide en puissance pour étudier la convection naturelle au sein d'une cavité poreuse horizontale, saturée par un fluide non newtonien et soumis à des flux de chaleur horizontaux et verticaux. Ils ont montré que l'augmentation de l'indice de comportement ($n > 1$, c'est à dire pour un fluide dilatant) cause une forte réduction du transfert de chaleur. En effet, l'augmentation de la viscosité apparente freine, dans ce cas, d'une manière importante

l'écoulement du fluide. L'inverse se produit pour un indice de comportement $n < 1$ (c'est à dire fluide pour un pseudo-élastique). Dans leur étude sur le comportement de l'écoulement ainsi que les transferts dans la gamme des grands nombres de Rayleigh thermique Younsi et al. [18] ont observé, pour une valeur donnée du nombre de Lewis, une structure multicellulaire correspondant à la compétition entre la convection thermique et la convection solutale. À partir d'une certaine valeur du rapport des poussées N , la structure de l'écoulement devient monocellulaire indiquant que le régime de transfert est solutal pur. Le caractère transitoire des coefficients des transferts thermique est massique a été mis en évidence. Dans cette étude, le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer a été pris en compte. Le nombre de Lewis varie de 10 à 100, le nombre de Rayleigh de 10^6 à 10^7 et le rapport des forces de volume de 1 à 20.

Nithiarasu et al. [19] se sont intéressés à l'étude de la convection bidiffusive dans un milieu poreux saturé par un fluide binaire. Ils ont pris en compte dans leur étude, les termes d'inertie de Forchheimer et de Navier-Stokes ainsi que le terme visqueux de Brinkman. Ils ont montré l'apparition des écoulements secondaires pour un rapport des forces de volume N compris entre -1 et 0 dont l'amplitude augmente lorsque la perméabilité diminue. Ce phénomène est attribué, selon eux, aux rôles importants des effets inertiels, visqueux et des forces non linéaires à une perméabilité élevée. Il a été aussi montré que les effets de porosité du milieu poreux sur le taux de transfert thermique et massique deviennent plus importants lorsque la valeur du nombre de Darcy est élevée.

Le cas d'une cavité carrée remplie d'un milieu poreux avec des températures et concentrations constantes le long des parois verticales, et des flux de chaleur et de masse nuls sur les parois horizontales, a été étudié par Goyeau et al. [20]. Ces auteurs ont présenté l'influence du nombre de Darcy, du nombre de Rayleigh poreux thermique, du nombre de Lewis et du rapport des forces de volumes sur le transfert thermique et massique.

Mamou et Vasseur [21] ont analysé l'instabilité diffusive dans une couche rectangulaire dont les parois horizontales soumises à des flux de chaleur et de masse, en utilisant la théorie linéaire et non linéaire de perturbation et de l'approximation de l'écoulement parallèle. Leurs résultats montrent la possibilité de l'existence de quatre régimes différents (diffusive stable, convectif surstable, oscillant et direct); que la

convection peut apparaître à des nombres de Rayleigh au-dessous de la valeur supercritique ainsi que l'existence des solutions multiples dans le cas du régime surstable.

Mahidjiba et al. [22] ont étudié le début de la convection dans une couche horizontale bidimensionnelle saturée avec de l'eau froide. Ce début de convection est trouvé dépendant du rapport d'aspect de la cavité. Des nombres de Rayleigh critiques définissant le seuil de convection ont été établis en fonction de paramètre d'inversion γ ($\gamma = 2 \left(\frac{T_{\max} - T_1}{\Delta T} \right)$) dans le cas de la couche infinie. Une situation asymptotique est atteinte quand $\gamma \leq 1$. Lorsque $\gamma > 2$, les solutions atteignent asymptotiquement le cas classique d'un liquide avec une relation linéaire entre la température et la densité.

Les effets d'hétérogénéité hydrodynamique horizontale et verticale, thermique et solutal, sur le début de convection dans une couche saturée uniformément chauffée par le bas, ont été étudiés par Kuznestsov et Nield [23]. La théorie de la stabilité linéaire et le modèle de Brinkman ont été utilisés. La température et le flux de concentration sont imposés aux parois supérieures et inférieures. Les parois latérales verticales sont supposées isolées et imperméables. Il a été trouvé que l'effet de l'hétérogénéité sur la valeur critique du nombre de Rayleigh R_a est du deuxième ordre si les propriétés varient d'une manière linéaire. Les effets d'hétérogénéité horizontale et verticale sont alors comparables, une fois que le rapport d'aspect est pris en compte.

Alloui et al. [24] ont étudié la convection naturelle dans un milieu poreux saturé par un fluide binaire dans une cavité carrée en utilisant le modèle de Darcy avec l'approximation de Boussinesq. La partie supérieure de la paroi est refroidie à une température constante et la partie basse est isothermiquement chauffée, tandis que les parois verticales sont adiabatiques. Les particularités des deux écoulements de convection, monocellulaire et bicellulaire, sont décrites. L'existence d'un écoulement tricellulaire est possible.

Le cas de cavités poreuses verticales a fait aussi l'objet de plusieurs études. Weber [25] a utilisé la méthode de linéarisation d'Oseen pour résoudre les équations de type couche limite dans le cas où les murs verticaux sont soumis à température constante. Les résultats obtenus étaient légèrement différents des résultats expérimentaux. Une étude fondamentale de l'écoulement en couche limite a été réalisée par Bejan et Khair [26] pour une surface verticale noyée dans un milieu poreux saturé par un fluide. L'analyse d'échelle a

permis d'identifier quatre régimes possibles de convection selon les valeurs des forces de volume et le nombre de Lewis.

Sath et al. [27] ont examiné le transfert de chaleur par convection naturelle thermique dans une cavité rectangulaire partiellement occupée par une couche poreuse verticale. En utilisant le modèle de Darcy-Brinkman dans la couche poreuse et l'équation de Navier-Stokes dans le milieu fluide, les auteurs ont montré que le terme de Brinkman permet de satisfaire la condition d'un glissement aux parois solides et à l'interface et que le transfert thermique diminue fortement en présence de la couche poreuse. L'un des résultats essentiels auxquels ces auteurs ont abouti, est l'existence d'un minimum pour le nombre de Nusselt en fonction de l'épaisseur de la couche poreuse, lorsque la conductivité du milieu poreux est supérieure à celle du fluide. Le même problème a été traité par Beckermann et al. [28] qui ont combiné la formulation de Darcy-Brinkman-Forchheimer dans le milieu poreux et l'équation de Navier-Stokes dans le milieu fluide pour aboutir à une seule équation valable dans toute la cavité. L'une des observations des auteurs est que pour des nombres de Rayleigh poreux thermiques faibles, l'écoulement prend place essentiellement dans la couche fluide et que le transfert de chaleur dans le milieu poreux se fait essentiellement par conduction.

Lin et al. [29] ont examiné la double diffusion dans une cavité verticale soumise à des gradients horizontaux opposés de température et de concentration. Quand le rapport des forces de volume est voisin de l'unité, ces auteurs ont obtenu des écoulements convectifs oscillants. La convection naturelle due à des flux de chaleur et de masse imposés sur une couche poreuse verticale a été étudiée par Alavyoon [4] et Alavyoon et al. [30]. En se basant sur le concept de l'écoulement parallèle, ces auteurs ont développé des solutions analytiques concordants bien avec les simulations numériques, si on exclut le cas où les forces de volume sont égales et opposées.

Bian et al. [31] ont considéré le problème de la convection naturelle au sein d'une cavité poreuse verticale chauffée et refroidie isothermiquement par le côté et saturée par un fluide non newtonien. Le modèle de Darcy modifié a été utilisé pour caractériser le comportement non newtonien du fluide. Les équations de la couche limite ont été résolues analytiquement en introduisant une transformation similaire. La structure de l'écoulement, au centre de la cavité, a été déterminée en utilisant la forme intégrale de l'équation

d'énergie. Les résultats ont montré que le nombre de Nusselt moyen dépend du nombre de Rayleigh et de l'indice de comportement. L'influence de l'indice de comportement sur les champs de fonction de courant et de température a aussi été mise en évidence. En utilisant le même modèle, Bian et al. [32] ont également étudié l'effet de l'inclinaison de la cavité poreuse. Les résultats ont montré que le taux de transfert de chaleur atteint son maximum pour un angle d'inclinaison compris entre 90° et 180° . L'influence de l'inclinaison est d'autant plus importante que l'indice de comportement est faible.

Rastogi et Poulikakos [33] ont étudié la convection doublement diffusible sur une surface verticale encastrée dans un milieu poreux saturé par un fluide non newtonien. Les cas où la surface verticale est chauffée et salée selon une distribution de température et de concentration constante ou bien par des flux de chaleur et de masse, ont été considérés. Une analyse d'échelle a permis d'identifier plusieurs régimes d'écoulements liés au rapport des forces de volume et au nombre de Lewis. Une solution numérique a permis de mettre en évidence la dépendance des champs de fonction de courant, de température et de concentration de l'indice de comportement du fluide non newtonien.

La convection thermosolutale coopérante induite dans une cavité rectangulaire a été considérée par Bennacer [34]. Karimi-Fard et al. [35] ont décrit l'effet des termes de Forchheimer et de Brinkman sur l'écoulement convectif dans, une cavité poreuse carrée. Leur étude a montré comment la variation du nombre de Darcy et Lewis peut affecter l'écoulement au sein de l'enceinte poreuse. Des corrélations en termes des nombres de Nusselt et de Sherwood ont été proposées en fonction des différents paramètres de contrôle.

Mamou et al. [36] et Amahmid et al. [37] ont utilisé le modèle de Brinkman pour étudier la convection naturelle thermosolutale induite dans une couche poreuse verticale soumise à des flux de chaleur et de masse uniformes. Il a été trouvé que le nombre de Rayleigh thermique critique augmente lorsque Da augmente ou lorsque Le tend vers l'unité. De plus, il a été montré que l'augmentation de Da induit une diminution de l'intensité de l'écoulement et des transferts thermiques et massiques.

Bourich et al. [38] ont analysé la convection double diffusible dans une cavité poreuse carrée dont les parois horizontales sont chauffées à des températures constantes et des concentrations sont appliqués sur les parois verticales. Les auteurs ont démontré que pour

un certain nombre de rapports de forme, supérieur à un N critique, les solutions multiples disparaissent. Par contre une solution monocellulaire se maintient quand la convection est coopérante ($N > 0$) ou opposée ($N < 0$).

Une étude numérique du transfert de chaleur et de masse dans un cylindre rempli d'un milieu poreux réactif a été réalisée par Bousri et Bouhadef [39]. Leur analyse était basée sur le modèle de Darcy-Brinkman.

1.8.2 Couches poreuses anisotropes

La convection naturelle dans les milieux poreux anisotropes suscite une attention considérable par ses applications dans certains secteurs industriels et parce qu'elle se manifeste dans les écoulements souterrains. Une revue complète sur la convection naturelle dans les milieux poreux anisotropes est donnée dans le livre d'Ingham et Pop [40].

Selon Neale [41], l'anisotropie en perméabilité dans les milieux poreux a une plus forte incidence en pratique que celle en diffusivité thermique. Des investigations expérimentales et théoriques ont été menées par Castinel et Combarous [42] sur une couche horizontale anisotrope en perméabilité et limitée par des surfaces imperméables et isothermes. Ces auteurs ont trouvé un critère d'apparition de la convection naturelle en utilisant la méthode de stabilité linéaire. Ils ont déterminé le nombre de Rayleigh poreux thermique critique qui dépend des perméabilités horizontale et verticale. Leurs résultats ont été complétés par Epherre [43] et Tyvand [44] qui ont pris en considération l'anisotropie de la diffusivité thermique et de l'effet de la dispersion dans le cas d'un écoulement uniforme de base. Kvernold et Tyvand [45] ont développé une analyse basée sur la méthode de Galerkin pour l'étude de la convection supercritique stationnaire d'amplitude finie. Ils ont démontré que pour une couche bidimensionnelle horizontale infinie et anisotrope, le nombre de Nusselt et la région de stabilité engendrés par l'écoulement convectif dépendent des rapports d'anisotropie en perméabilité et en conductivité thermique. McKibbin et Tyvand [46] ont étudié la convection naturelle thermique dans des milieux poreux anisotropes multicouches. Dans le cas de couches horizontales alternées, en nombre élevé, le modèle converge vers le modèle d'un milieu globalement homogène et anisotrope. Par contre pour un nombre limité de couches, ce modèle d'anisotropie présente une discontinuité soudaine due à l'apparition

locale de convection pour un nombre de Rayleigh poreux thermique local sensiblement égal à 10^4 .

L'effet d'un gradient de température incliné par rapport à la verticale sur les instabilités dans un milieu poreux saturé anisotrope a été étudié par Parthiban et Patil [47]. Ils ont observé que le milieu poreux anisotrope horizontal est plus stable que le milieu isotrope horizontal. Le gain de stabilité dépend du nombre de Rayleigh poreux thermique horizontal et du rapport d'anisotropie. L'effet de l'inclinaison des axes principaux de la perméabilité a fait également l'objet des études réalisées par Degan et al. [48, 49, 50]. Ces auteurs ont démontré que la convection naturelle est fortement influencée par le rapport de perméabilité et l'angle d'inclinaison des axes principaux. Il a été aussi démontré qu'une perméabilité minimale dans la direction de la gravité, minimise le transfert de chaleur.

Mamou et al. [51] ont étudié le seuil de convection dans une cavité poreuse anisotrope chauffée par le bas et refroidie par le haut avec des flux de chaleur constants. Mahidjiba et al. [52] ont considéré un milieu poreux anisotrope dans lequel l'orientation des axes principaux est arbitraire. Cette étude s'intéressait à la stabilité linéaire et à la convection d'amplitude finie. Les résultats obtenus ont montré l'existence possible de deux types d'écoulement, naturel et antinaturel. Howle et Georgiadis [53] ont repris le problème de Rayleigh-Bénard dans un milieu poreux saturé anisotrope en diffusivité thermique. La dispersion hydrodynamique a été prise en compte dans le tenseur de conductivité thermique et le terme de Forchheimer est inclus dans l'équation du mouvement. Ils ont montré que le nombre de Nusselt moyen sur les parois décroît avec l'accroissement du rapport des conductivités thermiques effectives. Une autre étude portant sur la convection naturelle dans un espace annulaire a été réalisée par Aboubi et al. [54] qui n'ont pris en considération que l'anisotropie en perméabilité. La conductivité thermique était supposée isotrope. Des solutions analytiques et numériques pour les cas d'un milieu fluide et celui d'un milieu poreux ont été établies. Le nombre de Rayleigh critique caractérisant le seuil de la convection a été prédit. Les champs de vitesse et de température ainsi que le nombre de Nusselt ont été obtenus en utilisant la convection à amplitude finie.

Une étude sur le seuil de la convection dans une cavité confinée a été réalisée par Zhang et al. [55]. Les résultats obtenus par Mahidjiba et al. [52] et Zhang et al. [55], basés sur l'analyse de la stabilité linéaire, indiquent que le rapport de perméabilité et l'angle

d'inclinaison des axes principaux modifient considérablement le nombre de Rayleigh critique par rapport à celui obtenu dans un milieu de Darcy isotrope.

Mahidjiba [56] a étudié le problème de la convection naturelle pénétrante dans une couche inclinée rectangulaire, anisotrope et saturée par de l'eau froide. Les parois actives de la cavité (parois horizontales) sont soumises à des températures constantes. Les parois verticales sont supposées imperméables et adiabatiques. La loi de Darcy a été utilisée pour établir les équations du système. Il a été montré que les différents nombres de Rayleigh critiques marquant le seuil de convection ont été obtenus pour le cas où la densité du fluide est liée linéairement avec la température ainsi que pour le cas où elle prend la forme quadratique avec la température. L'effet de l'anisotropie sur le transfert de chaleur par convection naturelle thermique dans une cavité horizontale saturée par un fluide soumise à des gradients de température non uniforme a été étudié par Degan et Vasseur [57]. Les couches sont chauffées par le bas par un flux de chaleur constant. L'anisotropie hydrodynamique du milieu poreux est prise en considération. Les directions principales de la perméabilité sont orientées dans une direction oblique à la gravité. Les auteurs ont trouvé que le nombre de Rayleigh critique est proportionnel à la perméabilité verticale.

Chen et Lu [58] ont déterminé le critère de déclenchement de la convection naturelle doublement diffusive dans un milieu poreux anisotrope et non homogène dans lequel aucun mécanisme de solidification n'apparaît. La convection naturelle thermosolutale est due à des gradients de salinité et à la convection d'origine thermique dans la zone boueuse anisotrope en perméabilité. Le critère trouvé est obtenu à partir de la théorie de la stabilité linéaire. Malashetty [59] a étudié l'influence de l'anisotropie thermo-convective et du nombre de Prandtl sur le nombre de Rayleigh poreux thermique critique et la stabilité de l'écoulement convectif, en présence de l'effet Soret et Duffour dans les équations de conservation d'énergie et de l'espèce chimique.

Zheng et al. [60] ont utilisé le modèle de Darcy et l'approximation de Boussinesq pour étudier la convection naturelle dans un milieu poreux anisotrope saturé d'eau. Le milieu poreux saturé est contenu dans une cavité carrée. Les parois horizontales sont supposées adiabatiques. Ils ont montré que le nombre de Nusselt est maximum lorsque le nombre de Darcy est suffisamment large. Cette solution basée sur le modèle de Darcy–Brinkman approche celle du milieu fluide pur (en absence de l'effet d'inertie).

La convection naturelle dans un milieu poreux vertical anisotrope a fait l'objet de peu de travaux et concernant surtout la convection naturelle thermique pure. Ni et Beckermann. [61] ont effectué une étude sur le transfert de chaleur d'une couche poreuse verticale. Le milieu poreux était anisotrope en perméabilité et en conductivité thermique. Il a été démontré que le transfert de chaleur au sein de la cavité est proportionnel au rapport des perméabilités et inversement proportionnel au rapport des conductivités thermiques. Ces résultats ont été comparés à ceux obtenus par Walker et Homsy [62] et Shiralkar et al. [63]. Ce même problème a été repris par Kimura et al. [64] pour des nombres de Rayleigh poreux thermique faibles. Dans les deux travaux, l'effet des rapports d'anisotropie en perméabilité et en conductivité thermique sur les transferts de chaleur a été mis en évidence.

Chan et Lin [65] ont montré l'influence de l'anisotropie en perméabilité, de la diffusivité thermique du milieu poreux et de la conductivité des parois adjacentes à la cavité poreuse sur le nombre de Nusselt. Song et Viskanta [66] ont également réalisé une étude sur une cavité partiellement poreuse. Le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer anisotrope a été pris en compte. L'analyse de l'anisotropie en perméabilité sur le transfert thermique et les structures de l'écoulement a été illustrée. Dans l'étude de Degan [67], une analyse plus détaillée est présentée concernant l'influence de l'anisotropie en perméabilité et en conductivité thermique d'un milieu poreux sur les écoulements et les transferts de chaleur. Les composantes de la conductivité thermique sont selon les axes vertical et horizontal tandis que l'orientation des directions principales de l'anisotropie en perméabilité est variable.

Dans une étude plus générale, Bennacer et al. [68] ont considéré une cavité verticale soumise à des températures et des concentrations constantes sur les parois verticales. Ce milieu est globalement homogène et présente une anisotropie thermique. Les forces de volume induisant l'écoulement sont supposées coopérantes. Ils ont démontré que les propriétés anisotropiques du milieu poreux affectent considérablement les taux de transfert de la chaleur et de la masse dans la cavité.

Bera et Khalil [69] ont introduit des modifications au niveau des conditions aux frontières, en considérant des flux de chaleur et de masse sur les parois verticales. Ils ont observé qu'une petite rotation du tenseur de la perméabilité provoque un changement important dans l'intensité de l'écoulement et sur les profils de la température et de la

concentration. Dans leur étude, Pakdee et Rattanadecho [70], ont trouvé que le coefficient de transfert de chaleur, le nombre de Rayleigh et le nombre de Darcy influent considérablement les mécanismes de l'écoulement et de transfert de chaleur.

L'analyse des transferts de chaleur et de masse dus à la convection thermosolutale dans une cavité constituée d'un milieu poreux anisotrope et soumise à des gradients horizontaux de température et concentration se résument au travail de Yoo et Viskanta [71]. Ces auteurs ont étudié la solidification d'un mélange binaire à base d'une solution aqueuse de chlorure d'ammonium, contenu dans une cavité carrée. Le modèle de Darcy-Brinkman et la formulation enthalpique sont considérés pour analyser les transferts par convection dans la région pâteuse lors du changement de phase. L'anisotropie en perméabilité est incorporée dans le modèle. En comparaison avec des données expérimentales connues, le modèle semble capable de déterminer les caractéristiques fondamentales du mécanisme de solidification qui paraît être sensible aux effets de l'anisotropie hydraulique.

2. Formulation mathématique du problème

2.1 Définition du problème

Il s'agit d'étudier le problème bidimensionnel de la convection thermosolutale induite par les forces de volume d'origine thermique et solutale dans une couche poreuse anisotrope. La configuration de ce problème est constituée d'une cavité rectangulaire horizontale de longueur L et de hauteur H illustrée sur la figure (2.1). Le milieu poreux est saturé par un fluide binaire supposé incompressible. La cavité poreuse est rapportée à un système de coordonnées cartésiennes (OX, OY) . Les conditions aux limites imposées sont des écarts de température et de concentration constants et uniformes le long des parois verticales. Les parois horizontales sont supposées imperméables et adiabatiques. Le milieu poreux considéré dans le présent travail est anisotrope en perméabilité et en conductivité thermique.

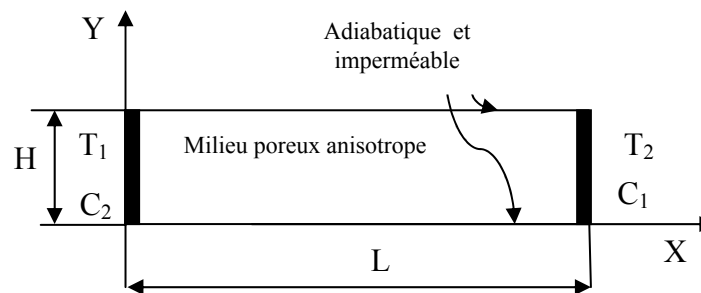


Figure 2.1 : Représentation du modèle physique

2.2 Hypothèses de calcul

Comme dans la majorité des études portant sur la convection naturelle, quelques approximations sont considérées afin d'obtenir une formulation simple du modèle mathématique. Nous nous limitons donc aux hypothèses couramment retenues dans les études de la convection naturelle qui sont les suivantes :

- La matrice du milieu poreux est indéformable et en équilibre thermodynamique avec le fluide.
- L'écoulement du fluide au sein de la cavité est laminaire et bidimensionnel.
- Le fluide dans la cavité étudiée est considéré newtonien et incompressible.

- Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable ainsi que Les effets de Soret et Dufour.
- Les écarts de température et de concentration imposés ne modifient pas les propriétés thermophysiques du fluide qui restent constantes à l'exception de la masse volumique dans les forces de volume (approximation d'Oberbeck-Boussinesq). La masse volumique varie ainsi linéairement avec la température et la concentration:

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta_T(T - T_0) - \beta_S(C - C_0)] \quad (2.1)$$

Où ρ_0 est la densité à la température et la concentration de référence, β_T est le coefficient d'expansion volumique thermique et β_S le coefficient d'expansion volumique solutale exprimés ci-dessous :

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{P,C} \quad \text{et} \quad \beta_S = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_{P,T} \quad (2.2)$$

- L'anisotropie en conductivité thermique et l'anisotropie en perméabilité du milieu poreux sont prises en considération.
- La diffusion de matière dans la matrice solide est négligée.

Les équations de Navier-Stokes à l'échelle du pore restent valables mais leur résolution est impossible vu la complexité géométrique du milieu poreux. Ces considérations imposent l'utilisation de la méthode d'homogénéisation dite "méthode des prises de moyennes".

La méthode des prises de moyennes a été développée par Whitaker [72]. Elle permet de donner des explications théoriques aux formulations empiriques de Darcy, Darcy-Brinkman et Darcy-Brinkman-Forchheimer. La formulation de Darcy-Brinkman-Forchheimer dans un milieu poreux saturé anisotrope en perméabilité et en conductivité thermique est celle retenue dans le présent travail.

Compte tenu des hypothèses simplificatrices énoncées précédemment, les équations classiques de conservation sont les suivantes.

2.3 Equations gouvernantes

- Conservation de masse

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.3)$$

- Conservation de la quantité de mouvement

$$\rho_f \left[\frac{1}{\varphi} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{\varphi^2} (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] = -\vec{\nabla} P - \mu \frac{\vec{\nabla}}{\bar{K}} - \frac{C_f}{\bar{K}^{1/2}} |\vec{V}| \vec{V} + \mu_{\text{eff}} \nabla^2 \vec{V} + \rho_f \vec{g} \quad (2.4)$$

- Conservation d'énergie

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T = \vec{\nabla} \cdot (\bar{\lambda} \vec{\nabla} T) \quad (2.5)$$

- Conservation de l'espèce chimique

$$\varphi \frac{\partial C}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} C = \vec{\nabla} \cdot (D \vec{\nabla} C) \quad (2.6)$$

La vitesse \vec{V} est la vitesse de Darcy ou vitesse de filtration ; les grandeurs P, T et C , sont, respectivement, les grandeurs moyennées de la pression, de la température et de la concentration ; φ est la porosité du milieu poreux ; ρ la masse volumique du fluide et g représente l'accélération gravitationnelle ; μ et μ_{eff} sont respectivement la viscosité dynamique du fluide et la viscosité équivalente dans le modèle de Brinkman ; $\sigma = \frac{(\rho c)_m}{(\rho c)_f}$ est le rapport des chaleurs spécifiques du milieu équivalent et du fluide ; D est la diffusivité massique ; le tenseur de perméabilité et le tenseur de la diffusivité thermique équivalente

sont :

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_y \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix}$$

$K_x(\lambda_x)$ et $K_y(\lambda_y)$ sont les perméabilités (conductivités thermiques équivalentes) du milieu selon les directions horizontale et verticale.

2.4 Adimensionnalisation des équations gouvernantes

L'adimensionnalisation ou normalisation permet de spécifier les conditions d'écoulement avec un nombre restreint de paramètres et facilite les comparaisons entre les résultats numériques, analytiques et expérimentaux. La dimension H de la cavité a été choisie comme longueur caractéristique de référence. Ainsi, nous avons introduit les variables adimensionnelles suivantes :

$$(X, Y) = \left(\frac{x}{H}, \frac{y}{H} \right)$$

La diffusivité thermique est utilisée pour l'adimensionnalisation des vitesses :

$$(U, V) = \left(\frac{u}{\frac{\alpha}{H}}, \frac{v}{\frac{\alpha}{H}} \right), \quad P = \frac{(p-p_0)H^2}{\rho_f \alpha^2}, \quad t' = \frac{t \alpha}{H^2}$$

Nous nous sommes basés sur l'écart de température et de concentration appliquées entre les parois verticales pour adimensionner la température et la concentration ; les grandeurs adimensionnées correspondantes s'écrivent respectivement :

$$\Theta = \frac{(T-T_0)}{\Delta T} \quad \text{avec} \quad \Delta T = (T_{\max} - T_{\min})$$

$$\Phi = \frac{(C-C_0)}{\Delta C} \quad \text{avec} \quad \Delta C = (C_{\max} - C_{\min})$$

En introduisant ces définitions dans les équations gouvernantes (2-3), (2-6) on obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{\varphi} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{\varphi^2} (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\vec{\nabla} P - \frac{P_r}{D_a} \bar{R}_K^{-1} \vec{V} - \frac{C_r}{\sqrt{D_a}} \bar{R}_K^{-1/2} |\vec{V}| \vec{V} + \frac{P_r}{\varphi} \nabla^2 \vec{V} + P_r \text{Ra} (\Theta + N\Phi) \vec{k} \quad (2.8)$$

$$\sigma \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \Theta = \frac{1}{P_r} \vec{\nabla} \cdot (\bar{R}_\lambda^{-1} \vec{\nabla} \Theta) \quad (2.9)$$

$$\varphi \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \Phi = \frac{1}{L_e} \vec{\nabla}^2 \Phi \quad (2.10)$$

La mise sous forme adimensionnée des équations de conservation fait apparaître des nombres sans dimensions caractéristiques du problème. Ces paramètres, outre le rapport de forme de la cavité ($A = \frac{H}{L}$) sont au nombre de cinq :

- Le nombre de Darcy : $Da = \frac{K_y}{H^2}$;
- Le nombre de Prandtl : $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$;
- Le nombre de Rayleigh thermique : $Ra = \frac{\rho \beta_T \Delta T K_y H}{\mu \nu}$;
- Le nombre de Lewis : $Le = \frac{c_p}{D}$;
- Le rapport de poussée : $N = \frac{\beta_S \Delta C}{\beta_T \Delta T}$;
- Rapport des perméabilités : $K = \frac{K_x}{K_y}$

Les anisotropies en perméabilité et conductivité thermique sont exprimées respectivement par les tenseurs adimensionnés du second ordre:

$$\bar{\bar{R}}_K^{-1} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \bar{\bar{R}}_\lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Avec :
$$K = \frac{K_x}{K_y} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{\lambda_x}{\lambda_y}$$

Dans la présente étude nous nous intéressons essentiellement au calcul du taux de transfert de chaleur transporté par convection et au celui du transfert de masse au sein du fluide sur les parois verticales, qui sont exprimés à travers les nombres de Nusselt et de Sherwood. Ces flux sont exprimés par des grandeurs adimensionnés par rapport à des flux de références diffusifs ($\lambda_y \frac{\Delta T}{H}$) pour la chaleur et ($D \frac{\Delta C}{H}$) pour la masse.

Les valeurs moyennes de ces deux nombres adimensionnels peuvent être évaluées par :

$$Nu = \lambda \int_0^1 \left(\frac{\partial \Theta}{\partial X} \right)_{X=0} dY \quad (2.11)$$

$$Sh = \int_0^1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)_{X=0} dY \quad (2.12)$$

2.5 Conditions aux limites

La configuration physique étudiée (Figure 2.1) est une cavité poreuse soumise à des conditions aux limites sur les frontières verticales du type Dirichlet en température et en concentration, tandis que les parois horizontales sont maintenues adiabatiques et imperméables.

On considère qu'à $t = 0$, les conditions initiales sur toutes les parois s'écrivent :

- $U = V = 0$
- $T = C = 0$

Les conditions hydrodynamiques sur toutes les parois de la cavité sont les suivantes :

- $X = 0 : U = V = 0$
- $Y = 0 : U = V = 0$

Les conditions aux frontières thermiques et massiques adimensionnelles s'expriment par (tableau 2.1) :

Tableau 2.1 : Conditions aux limites thermiques et massiques adimensionnelles

Condition	Température	Concentration
Paroi S	$\frac{\partial T}{\partial Y} = 0$	$\frac{\partial C}{\partial Y} = 0$
Paroi N	$\frac{\partial T}{\partial Y} = 0$	$\frac{\partial C}{\partial Y} = 0$
Paroi W	$T = 1$	$C = 0$
Paroi E	$T = 0$	$C = 1$

3. Résolution numérique

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode numérique utilisée pour résoudre les équations gouvernantes de la convection thermosolutale dans le cas de la cavité poreuse exposée dans le chapitre précédent. La méthode proposée est basée sur la technique des volumes finis (Patankar [73]), qui utilise la formulation des équations en variables primitives (vitesse–pression). Son principe est de fractionner le domaine physique en un nombre de volumes finis et ensuite d'intégrer les équations de conservation dans chaque volume.

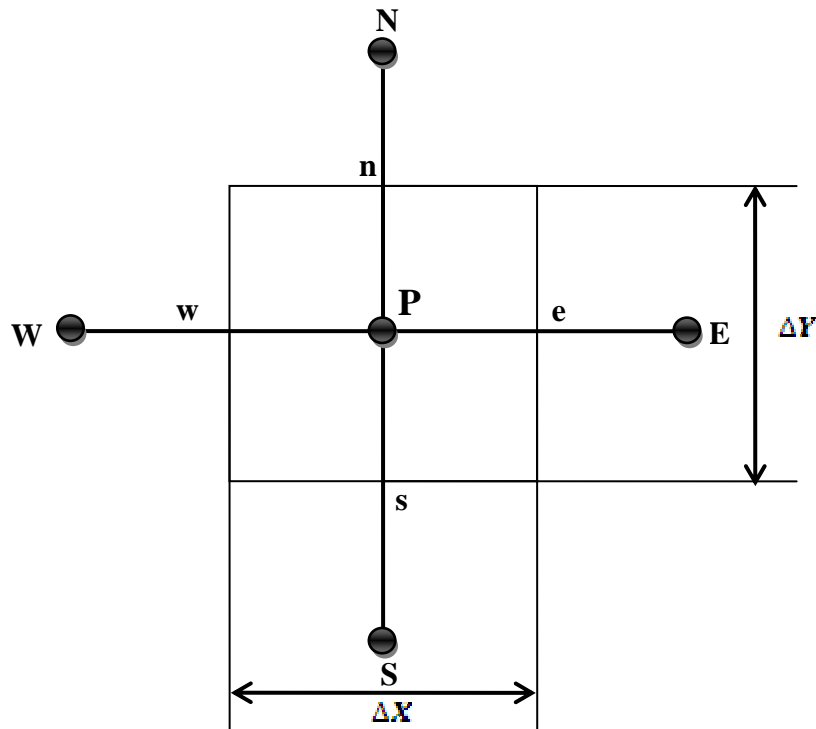


Figure 3.1 : Volume fini typique

3.2 Principe de la méthode des volumes finis

Les équations de conservation du système (2-7)-(2-10) sont de la forme :

$$A_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{V}) \phi = \vec{V} \cdot (\Gamma_{\phi} \vec{V} \phi) + S_{\phi} \quad (3.1)$$

$\frac{\partial \phi}{\partial t}$: La variation temporelle ;

$(\vec{V} \cdot \vec{V}) \phi$: Le terme de transport ou terme de convection ;

$(\Gamma_{\phi} \nabla \phi)$: Le terme de diffusion ;

ϕ : La variable en question ;

Γ_{ϕ} : Le coefficient de diffusion ;

S_{ϕ} : Le terme source volumique ;

Pour trouver l'expression proposée à chacune des équations il suffit de remplacer ϕ, Γ, S_{ϕ} comme indiqué le tableau (3.1).

Tableau 3.1 : Identification des termes dans les équations de conservation.

Équation	ϕ	A_{ϕ}	Γ	S_{ϕ}
Continuité	1	0	0	0
Quantité de mouvement suivant X	U	$\frac{1}{\varphi}$	$\frac{P_r}{\varphi}$	$-\frac{\partial P}{\partial X} - \frac{P_r}{K Da} U - \frac{C_f}{\sqrt{K Da}} \sqrt{U^2 + V^2} U$
Quantité de mouvement suivant Y	V	$\frac{1}{\varphi}$	$\frac{P_r}{\varphi}$	$-\frac{\partial P}{\partial Y} - \frac{P_r}{Da} V - \frac{C_f}{\sqrt{Da}} \sqrt{U^2 + V^2} V + P_r Ra(\Theta + NO)$
Énergie	Θ	σ	$\frac{\bar{R}_{\lambda}^{-1}}{P_r}$	0
Concentration	Φ	φ	$\frac{1}{Le}$	0

3.3 Discrétisation du domaine physique

Le domaine physique est subdivisé en un certain nombre de volumes finis. Dans les centres de ces volumes sont placés les points intérieurs du maillage et les points limites sont centrés aux faces limites. (figure 3.2). Dans les nœuds de ce maillage seront stockées les valeurs des quantités scalaires (la pression, la température et la concentration...). On considère que les points sur les limites, gauche et droite, du domaine de calcul sont centrés dans des volumes finis ayant des dimensions horizontales nulles. Aussi, les points sur les limites, inférieure et supérieure, du domaine de calcul sont centrés dans des volumes avec des dimensions verticales nulles. Le centre d'un volume fini typique est dénommé P. Chaque volume fini à l'intérieur du domaine de calcul est adjacent à quatre volumes finis voisins. Les centres des volumes finis voisins à l'est, à l'ouest, au nord et au sud du volume fini typique sont noté E, W, N et S, respectivement. Les positions des faces séparant le volume fini

typique de ses voisins, à l'est, à l'ouest, au nord et au sud, sont notées e, w, n et s, respectivement.

Les dimensions horizontales et verticales des volumes finis sont représentées sur la figure 3.2.

La détermination de toutes les dimensions des volumes finis, toutes les distances entre les points centrés dans ces volumes, les coordonnées de ces points et les coordonnées des faces des volumes finis, complètent les spécifications géométriques du maillage qui sont nécessaires pour la discrétisation des équations différentielles dans les volumes finis et pour la représentation graphique des résultats.

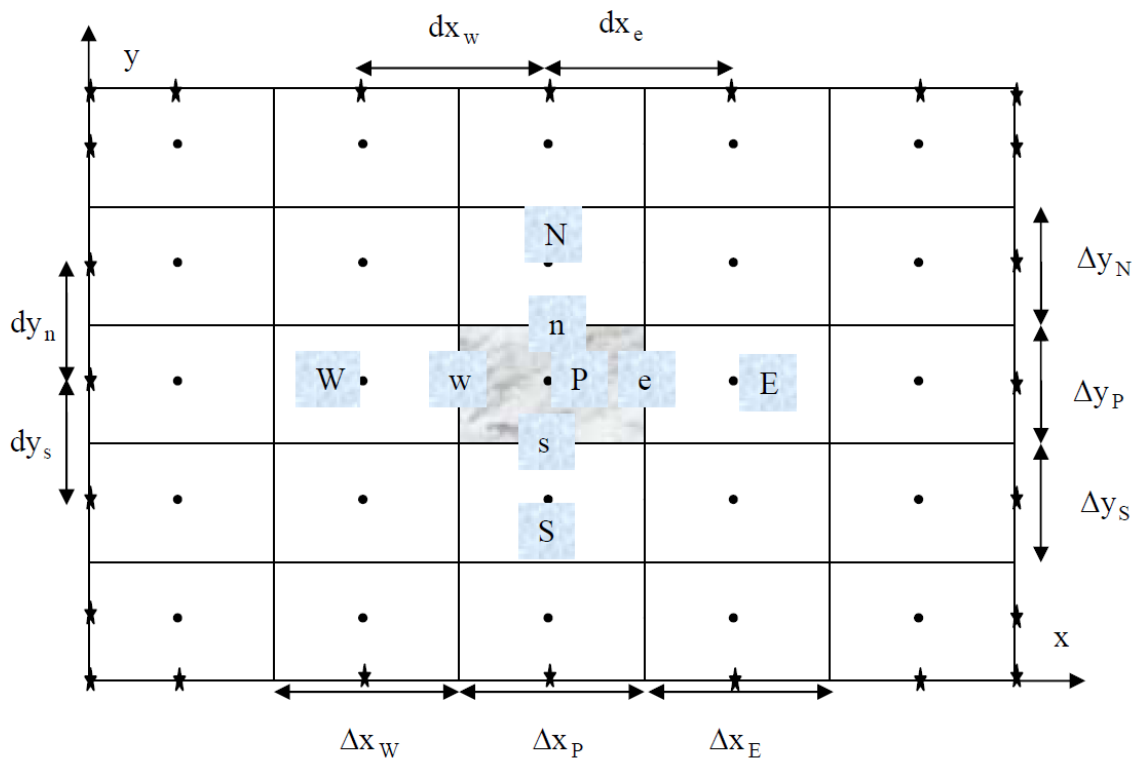


Figure 3.2 : Exemple d'un maillage uniforme suivant X et suivant Y

3.4 Le maillage typique et le maillage décalé

Le maillage typique décrit sera utilisé pour le calcul des champs de pression, de température et de concentration. Cependant pour les variables dépendantes vectorielles (les composantes du vecteur de vitesse) il est nécessaire d'utiliser des maillages décalés. Ce type de maillage permet de stocker les composantes de la vitesse sur les faces des volumes de

contrôle. Le décalage du maillage améliore la représentation locale de certaines intégrales de discrétisation.

Nous avons choisi de décaler le maillage typique dans la direction positive des axes. Ainsi le maillage de la composante horizontale de la vitesse est décalé à droite par rapport au maillage typique ; et le maillage de la composante verticale de la vitesse est décalé vers le haut par rapport au maillage typique. Le résultat de ces décalages est l'emplacement des composantes horizontales des vitesses aux milieux des faces verticales des volumes finis typiques ; et l'emplacement des composantes verticales des vitesses aux milieux des faces horizontales des volumes finis typiques. Cette configuration est représentée sur la figure 3.3.

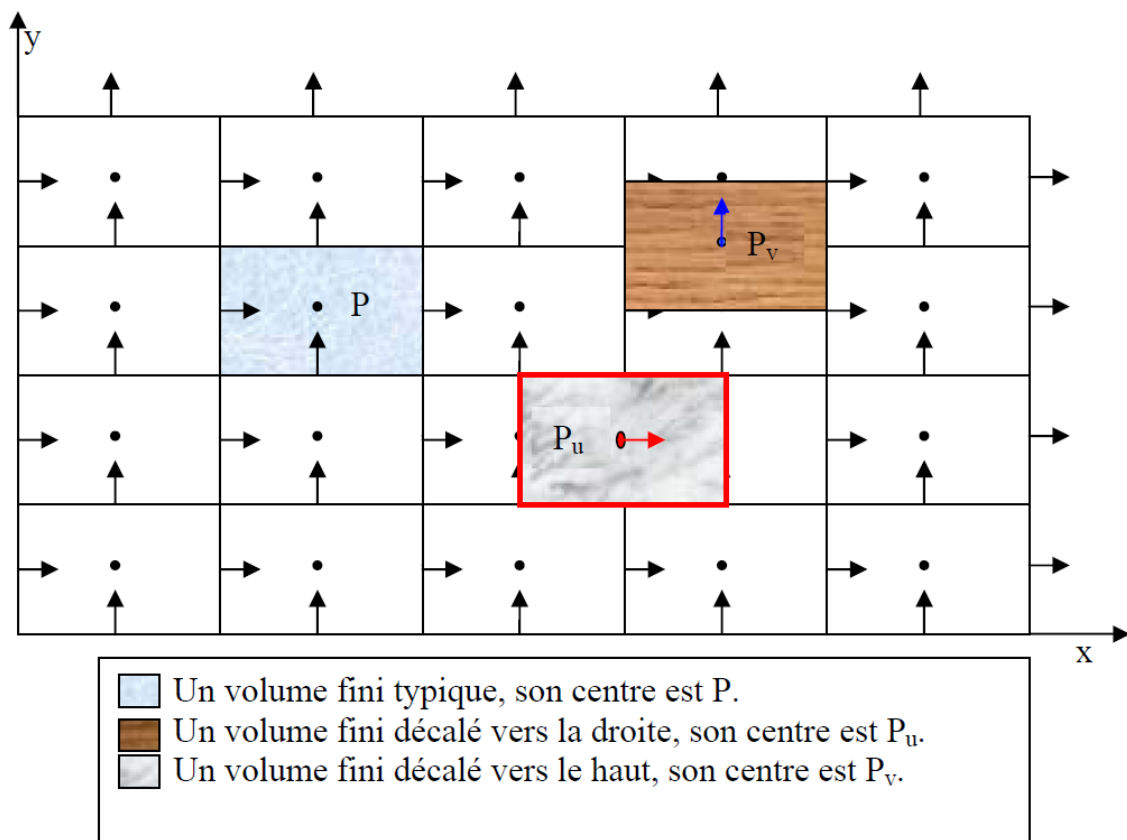


Figure 3.3 : Schématisation des maillages typique et maillages décalés.

3.5 Discrétisation des équations

3.5.1 Intégration de l'équation générale de transport

On intègre l'équation générale de transport sur un volume de contrôle et en fonction du temps, on trouve alors :

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} \int_w \int_s \frac{\partial \phi}{\partial t} dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_w \int_s \frac{\partial}{\partial x} (U\phi) dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_w \int_s \frac{\partial}{\partial y} (V\phi) dx dy dt \\ &= \int_t^{t+\Delta t} \int_w \int_s \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_w \int_s \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_w \int_s S_\phi dx dy dt \quad (3.2) \end{aligned}$$

L'intégration des différents termes s'effectue comme suit :

- **Terme de la variation temporelle :**

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w \int_s \frac{\partial \phi}{\partial t} dx dy dt = (\phi_p^1 - \phi_p^0) \Delta x \Delta y \quad (3.2.a)$$

ϕ_p^0 et ϕ_p^1 étant les valeurs de ϕ au point F aux temps t et $(t + \Delta t)$.

- Termes de transport convectif :

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} \int_w \int_s \frac{\partial}{\partial x} (U\phi) dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_w \int_s \frac{\partial}{\partial y} (V\phi) dx dy dt = [(U\phi)_e - (U\phi)_w] \Delta y \Delta t + \\ & [(V\phi)_n - (V\phi)_s] \Delta x \Delta t \quad (3.2.b) \end{aligned}$$

- **Termes de transport diffusif**

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} \int_w \int_s \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_w \int_s \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy dt = \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] \Delta y \Delta t \\ & + \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right] \Delta x \Delta t \quad (3.2.c) \end{aligned}$$

- **Terme source :**

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w \int_s^n S_\phi \, dx \, dy \, dt = \overline{S_\phi} \Delta x \Delta y \Delta t \quad (3.2. d)$$

$\overline{S_\phi}$ est évalué au centre du volume de contrôle.

Après intégration et la division par Δt l'équation générale de transport devient :

$$\frac{(\phi_p^1 - \phi_p^0)}{\Delta t} \Delta x \Delta y + [(U\phi)_e - (U\phi)_w] \Delta y + [(V\phi)_n \Delta x - (\rho V\phi)_s] \Delta x = \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] \Delta y + \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right] \Delta x + \overline{S_\phi} \Delta x \Delta y \quad (3.3)$$

Avec :

$$\begin{cases} \phi_e = \frac{\phi_E + \phi_F}{2}, & \phi_w = \frac{\phi_F + \phi_W}{2} \\ \phi_n = \frac{\phi_N + \phi_F}{2}, & \phi_s = \frac{\phi_F + \phi_S}{2} \end{cases} \quad (3.3.a)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e = \frac{\phi_E - \phi_F}{(dx)_e}, & \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w = \frac{\phi_W - \phi_F}{(dx)_w} \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n = \frac{\phi_N - \phi_F}{(dy)_n}, & \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s = \frac{\phi_N - \phi_F}{(dy)_s} \end{cases} \quad (3.3.b)$$

En remplaçant ces expressions (3.3.a) et (3.3.b) dans l'équation (3.3) et après réarrangement on obtient l'équation algébrique suivante :

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + B \quad (3.4)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_P^0 \quad (3.4.a)$$

$$A_P^0 = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (3.4.b)$$

Le terme source :

$$B = \overline{S_\phi} \Delta x \Delta y + A_P^0 \phi_P^0 \quad (3.4.c)$$

Où : A_P^0 est le coefficient de la variable au temps t

ϕ_P^0 est la valeur de ϕ calculé au temps t

- **Les flux convectifs sont :**

$$\begin{cases} F_e = U_e \Delta y, & F_w = U_w \Delta y \\ F_n = U_n \Delta x, & F_s = U_s \Delta x \end{cases} \quad (3.4.d)$$

- Les flux diffusifs sont :

$$\begin{cases} D_e = \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\partial x)_e}, & D_w = \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\partial x)_w} \\ D_n = \frac{\Gamma_n \Delta y}{(\partial y)_n}, & D_s = \frac{\Gamma_s \Delta y}{(\partial y)_s} \end{cases} \quad (3.4.f)$$

- Les nombres de Peclet sont :

$$\begin{cases} P_e = \frac{F_e}{D_e}, & P_w = \frac{F_w}{D_w} \\ P_n = \frac{F_n}{D_n}, & P_s = \frac{F_s}{D_s} \end{cases} \quad (3.4.f)$$

$$\begin{cases} A_e = D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ A_w = D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \\ A_n = D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ A_s = D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0) \end{cases} \quad (3.4.g)$$

3.5.2 Schémas de discrétisation

Dans l'équation (3.4.g), $A|P_e|$ est une fonction caractérisant le schéma de discrétisation. Pour que le schéma choisi assure la réalité physique du phénomène et la conservation des quantités physiques. Les coefficients a_e , a_w , a_n et a_s doivent être tous positifs [73] d'où la fonction d'interpolation $A|P_e|$ doit être positive. Il est à noter que la précision de la solution dépend aussi du schéma choisi. Patankar [73] a cité les cinq schémas suivants.

Tableau 3.2 : les schémas des discrétisations.

Schémas	Expressions de $A(P)$
Centré	$1 - 0.5 P $
Upwind	1
Hybride	$\max\{0, (1 - 0.5 P)\}$
Loi de puissance	$\max\{0, (1 - 0.5 P)^2\}$
Exponentiel	$ P / [\exp(P) - 1]$

Dans ce travail, nous avons employé le schéma hybride, qui exige moins de temps de calcul et permet de fournir une meilleure stabilité de la solution numérique et des résultats proches de la solution exacte

3.6 Application de la méthode des volumes finis à notre problème

Il est à rappeler que les équations qui régissent le mouvement dans notre cas sont :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \tag{3.5}$$

$$\left[\frac{1}{\varphi} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{\varphi^2} (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] = -\vec{\nabla} P - \frac{P_r}{D_a} \bar{R}_K^{-1} \vec{V} - \frac{C_f}{\sqrt{D_a}} \bar{R}_K^{-1/2} |\vec{V}| \vec{V} + \frac{P_r}{\varphi} \nabla^2 \vec{V} + P_r Ra (\Theta + N\Phi) \vec{k} \tag{3.6}$$

$$\sigma \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \Theta = \frac{1}{P_r} \vec{\nabla} \cdot (\bar{R}_\lambda^{-1} \vec{\nabla} \Theta) \tag{3.7}$$

$$\varphi \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \Phi = \frac{1}{L_e} \vec{\nabla}^2 \Phi \tag{3-8}$$

3.6.1 Discrétisation des équations du mouvement

3.6.1.1 Equation du mouvement suivant X

L'intégration de l'équation du mouvement dans la direction X à travers le volume de contrôle décalé vers la droite, figure 3.4. et après arrangement donne des équations algébriques sous la forme suivante :

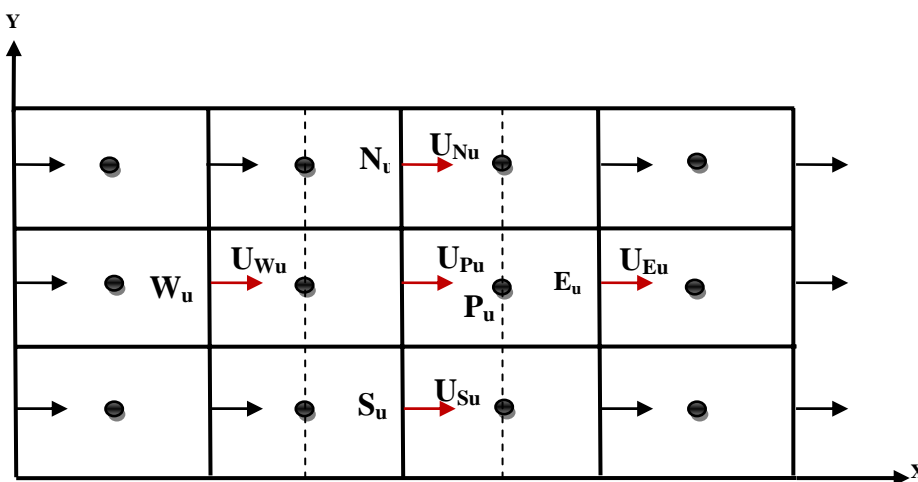


Figure 3.4: Maillage Décalé suivant X : le volume fini est décalé vers la droite du volume fini typique.

$$A_P U_{Pu} = A_E U_{Eu} + A_W U_{Wu} + A_N U_{Nu} + A_S U_{Su} + S_u \quad (3.9)$$

Avec :

$$\begin{cases} A_E = -\frac{F_e}{2} + D_e = -\frac{1}{\varphi^2} \left(\frac{U_{Pu}^0 + U_{Eu}^0}{2} \right) \Delta Y_P + \frac{Pr}{\varphi} \frac{\Delta Y_P}{\Delta X_E} \\ A_W = \frac{F_W}{2} + D_w = \frac{1}{2} \frac{1}{\varphi^2} \left(\frac{U_{Pu}^0 + U_{Wu}^0}{2} \right) \Delta Y_P + \frac{Pr}{\varphi} \frac{\Delta Y_P}{\Delta X_W} \\ A_N = -\frac{F_n}{2} + D_n = -\frac{1}{2} \frac{1}{\varphi^2} \left(\frac{V_{Ee}^0 + V_{Pp}^0}{2} \right) dX_e + \frac{Pr}{\varphi} \frac{dX_e}{dY_n} \\ A_S = \frac{F_s}{2} + D_s = \frac{1}{2} \frac{1}{\varphi^2} \left(\frac{V_{Ss}^0 + V_{Pp}^0}{2} \right) dX_e + \frac{Pr}{\varphi} \frac{dX_s}{dY_s} \end{cases} \quad (3.9.a)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{Pr}{K Da} dX_s \Delta Y_P + \frac{1}{\varphi} \frac{dX_e \Delta Y_P}{\Delta t} \quad (3.9.b)$$

Avec F_e, F_W, F_n et F_s et D_e, D_w, D_n et D_s représentent respectivement, les débits massiques à travers les faces du volume de contrôle et les coefficients de diffusion. S_u est un groupement qui contient le terme source :

$$S_u = (P_P - P_E) \Delta Y_P + U_{Pu}^0 \frac{1}{\varphi} \frac{dX_e \Delta Y_P}{\Delta t} - \frac{C_f}{\sqrt{K Da}} U_{Pu}^0 \sqrt{U_{Pu}^0{}^2 + V_{Pu}^0{}^2} dX_e \Delta Y_P \quad (3.9.c)$$

3.6.1.2 Équation du mouvement en Y

En utilisant les mêmes démarches d'intégration qu'en X, la discrétisation de l'équation du mouvement dans la direction X figure (3.5) est obtenue comme suit :

$$A_P V_{Pv} = A_E V_{Ev} + A_W V_{Wv} + A_N V_{Nv} + A_S V_{Sv} + S_v \quad (3.10)$$

Les coefficients A_E, A_W, A_N, A_S sont définis comme suit :

$$\begin{cases} A_E = -\frac{F_e}{2} + D_e = -\frac{1}{2} \frac{1}{\varphi^2} \left(\frac{U_{Nn}^0 + U_{Pp}^0}{2} \right) dY_n + \frac{Pr}{\varphi} \frac{dY_n}{dX_e} \\ A_W = \frac{F_W}{2} + D_w = \frac{1}{2} \frac{1}{\varphi^2} \left(\frac{U_{Wn}^0 + U_{Wp}^0}{2} \right) dY_n + \frac{Pr}{\varphi} \frac{dY_n}{dX_w} \\ A_N = -\frac{F_n}{2} + D_n = -\frac{1}{2} \frac{1}{\varphi^2} \left(\frac{V_{Nv}^0 + V_{Pv}^0}{2} \right) \Delta X_P + \frac{Pr}{\varphi} \frac{\Delta X_P}{\Delta Y_N} \\ A_S = \frac{F_s}{2} + D_s = \frac{1}{2} \frac{1}{\varphi^2} \left(\frac{V_{Pv}^0 + V_{Sv}^0}{2} \right) \Delta X_P + \frac{Pr}{\varphi} \frac{\Delta X_P}{\Delta Y_S} \end{cases} \quad (3.10.a)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{Pr}{Da} \Delta X_P dY_n + \frac{1}{\phi} \frac{\Delta X_P dY_n}{\Delta t} \quad (3.10.b)$$

Le terme source S_v :

$$S_v = (P_P - P_N) dY_n + V_{Pv}^0 \frac{1}{\phi} \frac{\Delta X_P dY_n}{\Delta t} - \frac{C_f}{\sqrt{Da}} V_{Pv}^0 \sqrt{U_{Pv}^0{}^2 + V_{Pv}^0{}^2} \Delta X_P dY_n + PrRa \left[\left(\frac{\theta_N + \theta_P}{2} \right) + N \left(\frac{\theta_N + \theta_P}{2} \right) \right] \Delta X_P dY_n \quad (3.10.c)$$

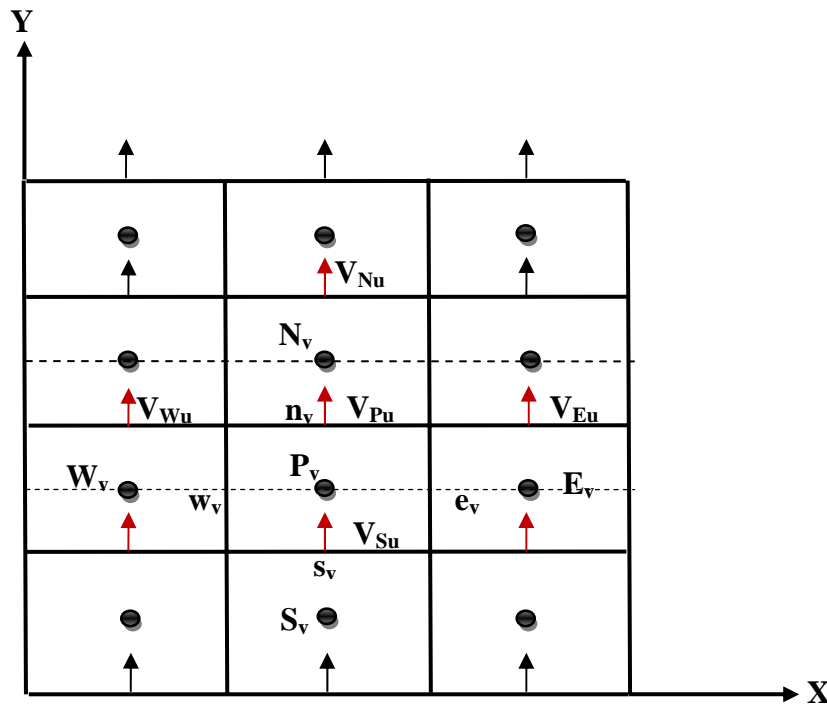


Figure 3.5 : Maillage décalé suivant Y ; le volume fini est décalé vers le haut

3.6.1.3 Discrétisation de l'équation d'énergie

L'intégration de l'équation de l'énergie est faite dans le volume de contrôle correspondant aux nœuds principaux, figure 3.1.

Après intégration et arrangement des termes, l'équation de l'énergie discrétisée s'écrit comme :

$$A_P \theta_P = A_E \theta_E + A_W \theta_W + A_N \theta_N + A_S \theta_S + S_t \quad (3.11)$$

Les flux diffusifs et les débits volumiques prennent la forme :

$$\begin{cases} A_E = -\frac{F_e}{2} + D_e = -\frac{1}{2} U_e^0 \Delta Y_P + \lambda \frac{1}{Pr} \frac{\Delta X_P}{dX_e} \\ A_W = \frac{F_w}{2} + D_w = \frac{1}{2} U_w^0 \Delta Y_P + \lambda \frac{1}{Pr} \frac{\Delta X_P}{dX_w} \\ A_N = -\frac{F_n}{2} + D_n = -\frac{1}{2} V_n^0 \Delta X_P + \frac{1}{Pr} \frac{\Delta X_P}{dY_n} \\ A_S = \frac{F_s}{2} + D_s = \frac{1}{2} V_s^0 \Delta X_P + \frac{1}{Pr} \frac{\Delta X_P}{dY_s} \end{cases} \quad (3.11.a)$$

$$A_N A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{\Delta X_P \Delta Y_P}{\Delta t} \quad (3.11.b)$$

Le terme source S_t :

$$S_t = T_P^0 \frac{\Delta X_P \Delta Y_P}{\Delta t} \quad (3.11.c)$$

3.6.1.4 Discrétisation de l'équation de masse

L'intégration de l'équation du soluté est faite dans le volume de contrôle correspondant aux nœuds principaux, figure 3.1.

L'intégration de l'équation de masse donne une équation sous la forme algébrique suivante :

$$A_P \Phi_P = A_E \Phi_E + A_W \Phi_W + A_N \Phi_N + A_S \Phi_S + S_c \quad (3.12)$$

Les coefficients A_E, A_W, A_N, A_S sont définis comme suit :

$$\begin{cases} A_E = -\frac{F_e}{2} + D_e = -\frac{1}{2} \frac{1}{\varphi} U_e^0 \Delta Y_P + \frac{1}{Le} \frac{\Delta Y_P}{dX_e} \\ A_W = \frac{F_w}{2} + D_w = \frac{1}{2} \frac{1}{\varphi} U_w^0 \Delta Y_P + \frac{1}{Le} \frac{\Delta Y_P}{dX_w} \\ A_N = -\frac{F_n}{2} + D_n = -\frac{1}{2} V_n^0 \Delta X_P + \frac{1}{Le} \frac{\Delta X_P}{dY_n} \\ A_S = -\frac{F_s}{2} + D_s = \frac{1}{2} \frac{1}{\varphi} V_s^0 \Delta X_P + \frac{1}{Le} \frac{\Delta X_P}{dY_s} \end{cases} \quad (3.12.a)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{\Delta X_P \Delta Y_P}{\Delta t} \quad (3.12.b)$$

Le terme source S_c :

$$S_c = C_P^0 \frac{\Delta X_P \Delta Y_P}{\Delta t} \quad (3.12.c)$$

3.6.2 Résolution des systèmes des équations de vitesse

Pour résoudre les systèmes d'équations de discrétisation, il est nécessaire de connaître les valeurs de la pression aux points du maillage typique, apparaissantes dans les sources des équations de discrétisation citées. Et donc, il nous faut une équation de discrétisation de la pression à chaque point intérieur du maillage typique. Pour cela, on utilise l'équation de continuité discrétisée aux nœuds du maillage typique.

3.6.2.1. Discrétisation de l'équation de continuité

$$\int_w^e \int_s^n \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) dx dy = 0 \quad (3.13)$$

$$(U_e - U_w) \Delta Y_P + (V_n - V_s) \Delta X_P = 0 \quad (3.14)$$

Nous avons déjà obtenu l'équation de discrétisation de U_{Pu}

$$A_P U_{Pu} = A_E U_{Eu} + A_W U_{Wu} + A_N U_{Nu} + A_S U_{Su} + S_u \quad (3.15)$$

L'équation de discrétisation peut être réécrite sous la forme :

$$A_P U_{Pu} = A_E U_{Eu} + A_W U_{Wu} + A_N U_{Nu} + A_S U_{Su} + B_u + (P_P - P_E) \Delta Y_P \quad (3.16)$$

Avec :

B_u : Le terme source dans le système algébrique.

$$B_u = \frac{1}{\phi} U_{Pu}^0 \frac{dX_e \Delta Y_P}{\Delta t} - \frac{C_f}{\sqrt{K Da}} \sqrt{U_{Pu}^0{}^2 + V_{Pu}^0{}^2} \cdot U_{Pu}^0 dX_e \Delta Y_P \quad (3.17)$$

$$S_u = B_u + (P_P - P_E) \Delta Y_P \quad (3.18)$$

On remarque que la position P_u du maillage décalé est confondue avec la position (e) du maillage typique donc : $U_{Pu} = U_e$

$$A_P U_e = A_E U_{Eu} + A_W U_{Wu} + A_N U_{Nu} + A_S U_{Su} + B_u + (P_P - P_E) \Delta Y_P \quad (3.19)$$

$$\begin{cases} U_e = \hat{U}_e + d_e (P_P - P_E); & d_e = \frac{\Delta Y_P}{A_P} \\ U_w = \hat{U}_w + d_w (P_W - P_P); & d_w = \frac{\Delta Y_P}{A_P} \end{cases} \quad (3.20)$$

Avec :

$$\hat{U}_e = \frac{A_E U_{Eu} + A_W U_{Wu} + A_N U_{Nu} + A_S U_{Su} + B_u}{A_P} \quad (3.21)$$

\hat{U}_e est le pseudo- vitesses suivant X .

Nous avons aussi obtenu l'équation de discrétisation de V_{Pu} :

$$A_P V_{Pv} = A_E V_{Ev} + A_W V_{Wv} + A_N V_{Nv} + A_S V_{Sv} + S_v \quad (3.22)$$

L'équation de discrétisation est réécrite sous la forme:

$$A_P V_{Pv} = A_E V_{Ev} + A_W V_{Wv} + A_N V_{Nv} + A_S V_{Sv} + B_v + (P_P - P_N) \Delta X_P \quad (3.23)$$

Avec :

B_v : Le terme source dans le système algébrique.

$$B_v + \frac{1}{\varphi} V_{Pv}^0 \frac{\Lambda_{X_P} dy_n}{\Delta t} - \frac{C_f}{\sqrt{Da}} V_{Pv}^0 \sqrt{U_{Pv}^0{}^2 + V_{Pv}^0{}^2} \Delta X_P dY_n + Pr Ra \left[\left(\frac{\Theta_N + \Theta_P}{2} \right) + N \left(\frac{\Theta_N + \Theta_P}{2} \right) \right] \Delta X_P dY_n \quad (3.24)$$

$$S_v = B_v + (P_P - P_N) \Delta X_P \quad (3.25)$$

L'équation de discrétisation est réécrite sous la forme:

$$A_P V_{Pv} = A_E V_{Ev} + A_W V_{Wv} + A_N V_{Nv} + A_S V_{Sv} + B_v + (P_P - P_N) \Delta X_P \quad (3.26)$$

Aussi on remarque que la position P_v du maillage décalé vers le haut est confondue avec la position n du maillage typique. Et donc on peut écrire :

$$A_P V_n = A_E V_{Ev} + A_W V_{Wv} + A_N V_{Nv} + A_S V_{Sv} + B_v + (P_P - P_N) \Delta X_P \quad (3.27)$$

Avec :

$$\begin{cases} V_n = \hat{V}_n + d_n (P_P - P_N) ; d_n = \frac{\Delta X_P}{A_P} \\ V_s = \hat{V}_s + d_s (P_S - P_P) ; d_s = \frac{\Delta X_P}{A_P} \end{cases} \quad (3.28)$$

$$\hat{V}_n = \frac{A_E V_{Ev} + A_W V_{Wv} + A_N V_{Nv} + A_S V_{Sv} + B_v}{A_P} \quad (3.29)$$

\hat{V}_n est le pseudo- vitesses suivant Y .

On remplace les vitesses (U_e, U_w, V_n, V_s) par leur expression dans l'équation (3.14) on obtient la forme algébrique suivante :

$$[\hat{U}_e + d_e(P_p - P_E)]\Delta Y_p - [\hat{U}_w + d_w(P_W - P_p)]\Delta Y_p + [\hat{V}_n + d_n(P_p - P_N)]\Delta X_p - [\hat{V}_s + d_s(P_S - P_p)]\Delta X_p = 0 \quad (3.30)$$

3.6.2.2. Discrétisation de l'équation de la pression

L'équation (3.27) est réécrite sous la forme d'une équation de discrétisation de la pression:

$$A_p P_p = A_E P_E + A_W P_W + A_N P_N + A_S P_S + S_p \quad (3.31)$$

Avec :

$$\begin{cases} A_E = d_e \Delta Y_p ; & A_W = d_w \Delta Y_p \\ A_N = d_n \Delta X_p ; & A_S = d_s \Delta X_p \end{cases} \quad (3.31.a)$$

$$A_p = A_E + A_W + A_N + A_S \quad (3.31.b)$$

$$S_p = (\hat{U}_e - \hat{U}_w)\Delta Y_p + (\hat{V}_n - \hat{V}_s)\Delta X_p = 0 \quad (3.32.c)$$

A chaque point intérieur du maillage typique on a une équation algébrique de discrétisation de pression. La solution de l'ensemble de ces équations de discrétisation donne la pression aux points du maillage typique. Néanmoins, la solution du système d'équations de discrétisation de la pression nécessite la connaissance des pseudo-vitesses présentes dans les sources des équations citées qui sont fonctions des vitesses voisinant le point considéré. Pour résoudre les équations de discrétisation des vitesses il faut avoir la valeur de la pression (qui n'est pas connue) et pour résoudre l'équation de discrétisation de la pression il faut avoir les vitesses (qui ne sont pas connues). Ce couplage des équations nécessite une solution simultanée et itérative. La solution commence par des estimations qui doivent être corrigées.

On définit les variables correctes comme des sommes des variables estimées plus des corrections:

$$P = P^* + P'$$

$$U = U^* + U'$$

$$V = V^* + V'$$

- U, V et P sont les valeurs exactes.
- U^*, V^* et P^* sont les valeurs estimées.
- U', V' et P' sont les valeurs des corrections.

D'où on peut écrire :

$$A_P U_{Pu}^* = A_E U_{Eu}^* + A_W U_{Wu}^* + A_N U_{Nu}^* + A_S U_{Su}^* + B_u + (P_P^* - P_E^*) \Delta Y_P \quad (3.13)$$

$$A_P V_{Pv}^* = A_E V_{Ev}^* + A_W V_{Wv}^* + A_N V_{Nv}^* + A_S V_{Sv}^* + B_v + (P_P^* - P_N^*) \Delta X_P \quad (3.34)$$

Ces équations montrent qu'avec une estimation de la pression on peut obtenir une estimation des vitesses.

Les équations de discrétisation des corrections sont:

$$A_P U'_{Pu} = A_E U'_{Eu} + A_W U'_{Wu} + A_N U'_{Nu} + A_S U'_{Su} + B_u + (P'_P - P'_E) \Delta Y_P \quad (3.35)$$

$$A_P V'_{Pv} = A_E V'_{Ev} + A_W V'_{Wv} + A_N V'_{Nv} + A_S V'_{Sv} + B_v + (P'_P - P'_N) \Delta X_P \quad (3.36)$$

On constate que les corrections des vitesses à un point sont fonctions des corrections de la pression et des corrections des vitesses aux points voisins. Donc si on a la correction de la pression on peut résoudre les systèmes d'équations des corrections des vitesses pour obtenir ces dernières. On peut donc redéfinir les corrections des vitesses seulement en fonction de la correction de la pression comme suit :

$$\begin{cases} A_P U'_{Pu} = (P'_P - P'_E) \Delta Y_P \\ A_P V'_{Pv} = (P'_P - P'_N) \Delta X_P \end{cases} \quad (3.37)$$

Avec ces définitions, si on a la correction de la pression, on calcule directement les corrections des vitesses.

Alors on peut écrire :

$$\begin{cases} U_e = U_e^* + U'_e = U_e^* + d_e(P'_P - P'_E) \\ U_w = U_w^* + U'_w = U_w^* + d_w(P'_W - P'_P) \\ V_n = V_n^* + V'_n = V_n^* + d_n(P'_P - P'_N) \\ V_s = V_s^* + V'_s = V_s^* + d_s(P'_S - P'_P) \end{cases} \quad (3.38)$$

On utilise ces quatre définitions dans l'équation de discrétisation de continuité :

$$(U_e - U_w)\Delta Y_P + (V_n - V_s)\Delta X_P = 0 \quad (3.39)$$

Et on obtient :

$$[U_e^* + d_e(P'_P - P'_E)]\Delta Y_P - [U_w^* + d_w(P'_W - P'_P)]\Delta Y_P + [V_n^* + d_n(P'_P - P'_N)]\Delta X_P - [V_s^* + d_s(P'_S - P'_P)]\Delta X_P = 0 \quad (3.40)$$

Cette équation est réécrite sous la forme d'une équation de discrétisation de la correction de la pression :

$$A_P p'_p = A_E p'_E + A_W p'_W + A_N p'_N + A_S p'_S + s'_p \quad (3.41)$$

Avec :

$$\begin{cases} A_E = d_e \Delta Y_P; A_W = d_w \Delta Y_P \\ A_N = d_n \Delta X_P; A_S = d_s \Delta X_P \end{cases} \quad (3.41.a)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S \quad (3.41.b)$$

$$s'_p = (U_e^* - U_w^*) \Delta Y_P + (V_n^* - V_s^*) \Delta X_P = 0 \quad (3.41.c)$$

Donc l'équation de discrétisation de la correction de la pression est similaire à celle de l'équation de la pression, la différence réside dans la source s'_p qui contient les estimations des vitesses alors que la source s_p , contient les pseudo-vitesses.

3.6.3 Méthode de résolution

Les méthodes de résolution des systèmes d'équations algébriques peuvent être directes ou itératives. Le plus souvent on utilise les méthodes itératives surtout pour les problèmes non linéaires. Pour notre cas, nous utilisons la méthode de solution par balayage,

utilisons la méthode de solution par balayage, (dite ligne by ligne (L B L)) expliquée par S.V.Patankar, avec l'algorithme de Thomas, qui est appelé aussi TDMA (Tri Diagonal Matrix Algorithm) [73] .

3.6.3.1 Algorithme SIMPLER

Pour résoudre l'ensemble des systèmes d'équations discrétisées et déterminer la distribution des vitesses, de la pression, de la température et de la concentration en chaque point du domaine; et aussi déduire les nombres de Nusselt et Sherwood, on suit l'algorithme SIMPLER [73]. L'algorithme SIMPLER consiste à résoudre les équations de pression et de correction de pression pour corriger les vitesses. Les opérations séquentielles pour cet algorithme sont les suivantes (figure 3.6).

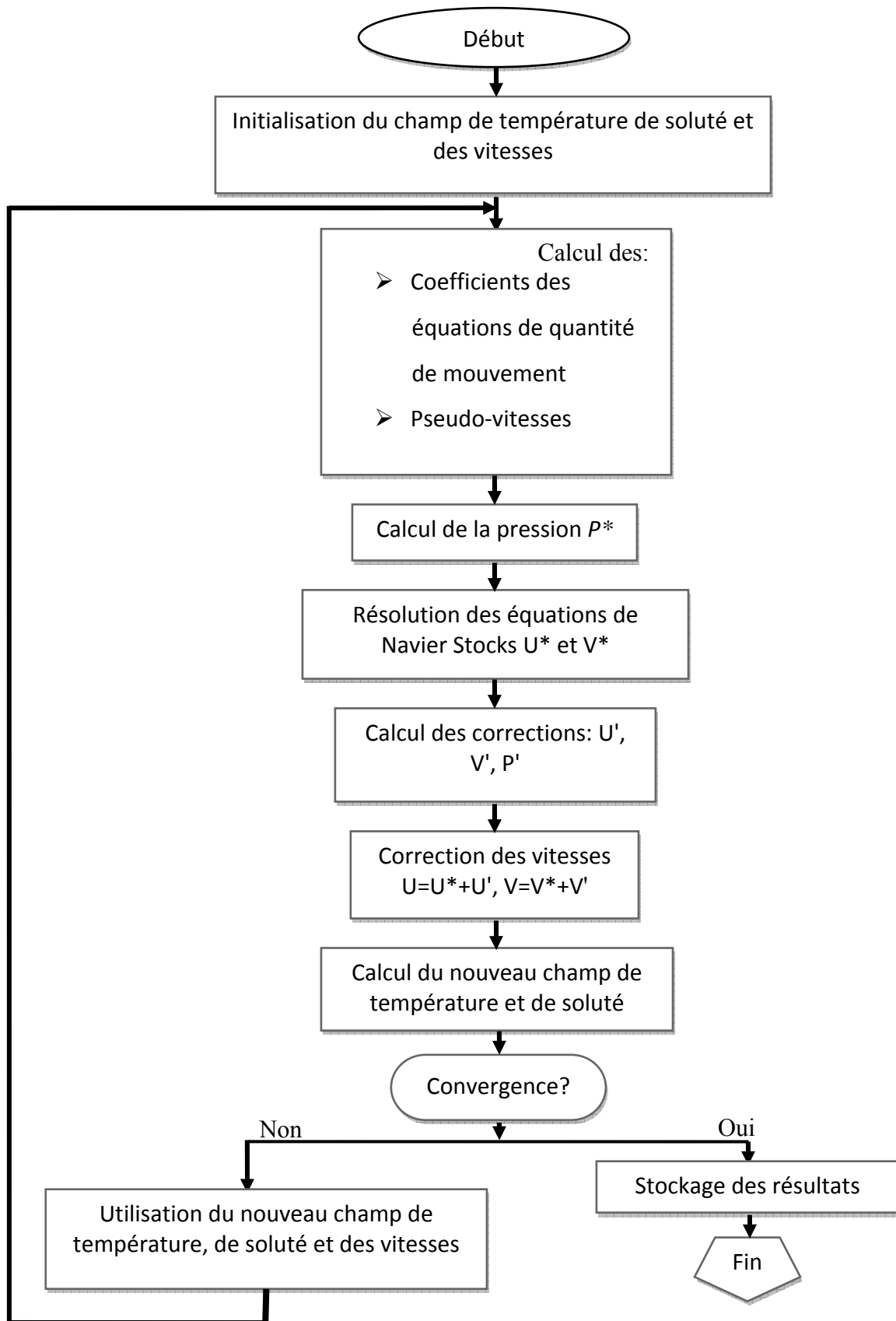


Figure 3.6. Organigramme général de résolution (SIMPLER).

3.6.3.2 Critère de convergence

La convergence vers le régime permanent est vérifiée lorsque le bilan global de la chaleur et de la matière soit satisfait, c'est à dire lorsque les différences de températures et de concentration sont inférieures à un critère de convergence $\epsilon \leq 10^{-6}$.

3.7 Influence du maillage sur les résultats

Le choix du maillage dépend des valeurs des paramètres de contrôle. Nous avons utilisé différents maillages irréguliers resserrés près des parois où les forts gradients sont rencontrés.

Les résultats présentés sur le tableau 3.3, montrent que l'influence du maillage devient négligeable à partir d'un maillage de 112×58 pour un rapport de forme $A = 4$.

Les résultats pour les milieux poreux isotropes sont exposés dans la suite de ce chapitre tandis que les validations dans le cas d'un milieu poreux anisotrope en conductivité thermique et en perméabilité sont reportées aux chapitres 4 et 5.

Tableau 3.3: Influence de la taille du maillage sur le transfert de chaleur

N	MAILLAGE	\overline{Nu}	\overline{Sh}	$ U_{max} $	$ V_{max} $
1	42-28	5.079636E-01	8.647891	33.372790	31.321620
2	62-38	5.080373E-01	10.415410	33.900280	29.935130
3	82-48	5.052916E-01	10.540780	33.800440	29.455160
4	112-58	5.017754E-01	9.948516	33.506980	30.323600
5	132-68	5.004455E-01	9.722909	33.399210	29.935990
6	162-78	4.992082E-01	9.481555	33.220100	30.524820

La figure 3.7 représente les différents profils de la vitesse horizontale au milieu de l'enceinte ($X = 2$) pour différents maillages. Ces résultats montrent que le maillage 132×68 est suffisant pour assurer une bonne résolution du problème étudié. Donc tous les cas présentés dans cette étude sont obtenus avec ce maillage raffiné de 132×68 .

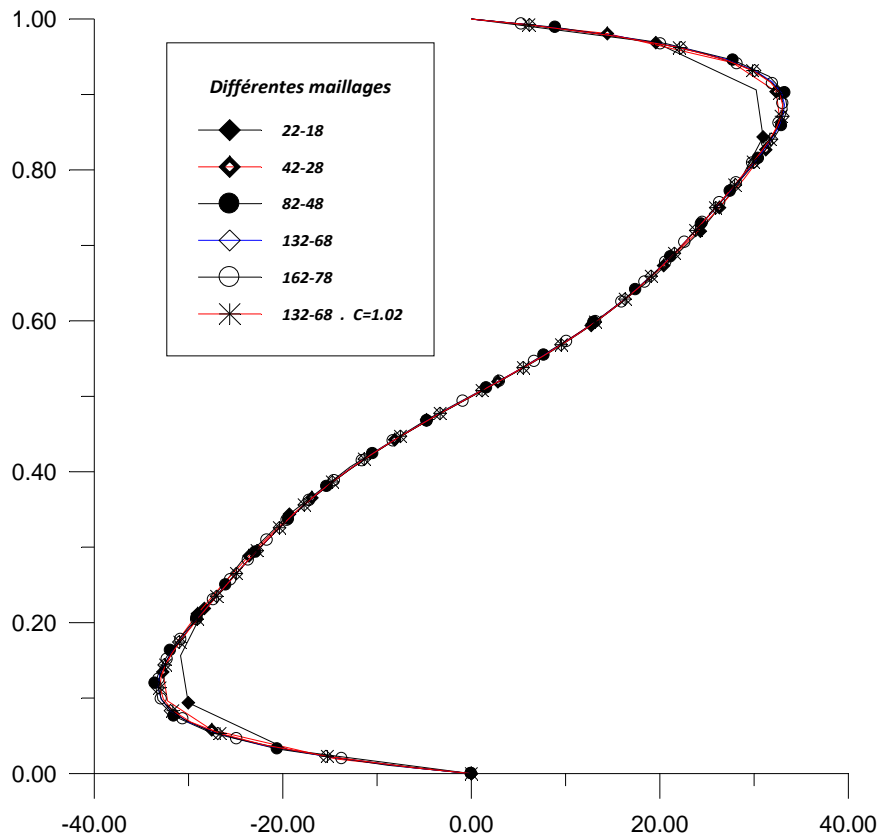


Figure 3.7 : Profils de la vitesse horizontale U à $X=2$ pour différents maillages.

3.8 Validation du code numérique

Pour valider notre travail, nos résultats ont été confrontés à ceux disponibles dans la littérature dans le cas de la convection thermique en milieu poreux isotrope.

3.8.1 Cas du régime de Darcy

Nos résultats ont été comparés aux travaux de Lauriat et Prasad [74], de Trevesion et Bejan [15], Nithiarasu et al. [19] et Younsi et al. [18] pour différents nombres de Rayleigh poreux thermiques et un rapport de forme $A=1$; les résultats sont résumés dans le tableau (3.4) et montrent une très bonne concordance avec ceux trouvés dans la littérature.

Tableau 3.4: Comparaison du nombre de Nusselt dans le cas du régime de Darcy, en convection thermique ($Da = 10^{-7}$, $A=1$, $Pr = 0.71$, $N=0$)

$Ra^* = Ra_s$ Da	Lauriat et Prasad [74]	Trevesion et Bejan [15]	Nithiarasu et al. [19]	Younsi et al. [18]	Présent travail
10	1.07	/	1.08	1.06	1.078
50	/	2.02	1.958	1.936	1.976
100	3.09	3.27	3.02	2.98	3.089
500	/	/	8.38	8.32	8.69
1000	13.41	18.38	12.514	12.32	12.7

3.8.2 Cas du régime de Darcy-Brinkman

Dans ce cas de figure aussi, nos résultats ont été comparés avec ceux de Lauriat et al. [10] et Bennacer et al. [75] dans le tableau (3.5). Pour des nombres de Rayleigh poreux thermiques élevés et une large gamme du nombre de Darcy, la comparaison des simulations numériques montre un très bon accord des nombres de Nusselt moyens ; l'erreur relative reste inférieure à 3%.

Tableau 3.5: Comparaison du nombre de Nusselt dans le cas du régime de Darcy-Brinkman en convection thermique ($A = 1$, $Pr = 0.71$)

Différentes travaux	Da	Nu					
		10^{-8}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}
Présent travail	$Ra^* = 500$	8.83	8.81	8.63	7.61	5.46	3.26
Bennacer et al. [75]		8.80	8.68	8.37	7.30	5.38	3.26
Lauriat et al. [10]		8.84	8.72	8.41	7.35	5.42	3.30
Présent travail	$Ra^* = 10^3$	13.09	-	12.73	-	-	4.19
Bennacer et al. [75]		13.48	-	12.26	-	-	4.18
Lauriat et al. [10]		13.41	-	12.42	-	-	4.26

4. Convection naturelle thermosolutale dans une cavité poreuse anisotrope en conductivité thermique

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions l'effet de l'anisotropie thermique sur les transferts de masse et de chaleur induits par convection naturelle thermosolutale dans un milieu poreux saturé. Les résultats obtenus dans cette étude, pour plusieurs paramètres, ont été comparés à ceux disponibles dans la littérature. Les paramètres pris en considération sont le rapport de forme de la cavité A , le nombre de Darcy Da qui caractérise la perméabilité du milieu, le nombre de Rayleigh Ra thermique qui caractérise l'écart de la température, le rapport des forces de volume N et le nombre de Lewis Le qui caractérise le rapport des diffusions thermique et solutale.

4.2 Cas du milieu poreux avec anisotropie thermique.

Les paramètres adoptés pour l'étude de la convection doublement diffusive dans un milieu poreux anisotrope en conductivité thermique sont : un rapport de forme A égale à 4 ; l'air a été considéré comme fluide saturant du milieu poreux ($Pr = 0.71$) ; le milieu est considéré isotrope en perméabilité ($K = 1$) ; le nombre de Rayleigh poreux thermique R_a varie de 10^2 à 10^4 ; le nombre de Darcy Da varie de 10^{-7} à 10^{-2} et le rapport des forces de volume N de 0 à 30. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 4.1. Ils ont été comparés à ceux de Ni et Beckermann [61] et Bennacer et al. [75] en convection thermique pure dans le cas de l'écoulement de Darcy ($Da = 10^{-7}$). Il est clair que ces résultats sont sensiblement identiques. L'erreur relative sur le nombre de Nusselt est inférieure à 3%, par conséquent nos résultats peuvent être considérés très satisfaisants.

Tableau 4.1 : Comparaison du nombre de Nusselt pour différents rapports de conductivité λ : ($Da=10^{-7}$, $A=1$, $N=0$ et $R_a=10^3$)

$\lambda = \lambda_y / \lambda_x$	10^{-3}	10^{-1}	1	10	10^2	10^3
Ni et Beckermann [61]	14.18	14.15	13.41	9.56	4.88	2.45
Bennacer et al. [75]	14.20	14.21	13.48	9.57	4.83	2.15
Présent travail	13.83	13.79	13.09	9.41	4.77	2.00

4.2.1 Structure de l'écoulement

Les isocontours des lignes de courant, de température et de concentration pour les différentes valeurs du rapport de conductivité λ sont illustrés sur la figure 4.1.

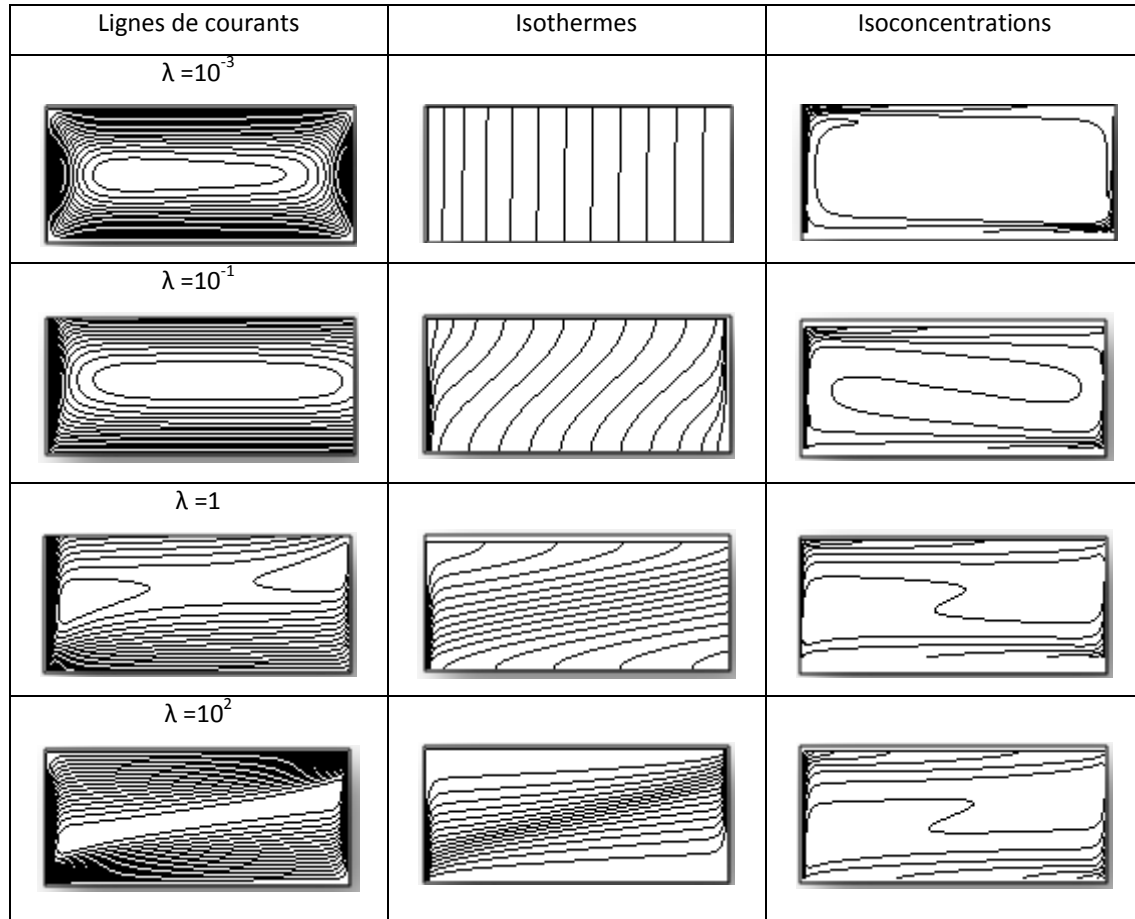


Figure 4.1 : Carte d'isovaleurs pour différentes valeurs de λ :
 $A=4$, $Da=10^{-7}$, $N=0$, $Ra=10^3$ et $Le=10$.

Le nombre de Darcy est fixé à ($Da=10^{-7}$), $Ra = 10^3$, $Le = 10$ et $N = 0$. A partir de cette figure, on constate, pour $\lambda=10^{-3}$, l'apparition d'un écoulement unicellulaire tournant dans le sens horaire, gouverné principalement par les forces de volume thermiques, la température est stratifiée dans la direction verticale. En augmentant λ les températures suivent une répartition linéaire échelonnée dans la direction horizontale, les concentrations sont des lignes largement déformées et concentrés aux deux parois actives. Pour une valeur de $\lambda = 1$ (milieu isotrope) on constate la naissance de deux cellules thermique et solutale. L'accroissement de l'épaisseur de la couche limite thermique et hydrodynamique avec λ conduit à une situation où les couches limites de part et d'autre de la cavité (sur les parois

verticales) n'ont plus suffisamment d'espace pour se développer et l'hypothèse de couche limite n'est plus vérifiée.

4.2.2 Effet du nombre de Darcy sur le transfert de chaleur et de masse

Les figures 4.2 et 4.3 montrent l'effet de l'anisotropie thermique λ sur le transfert de chaleur et de masse pour différentes valeurs du nombre de Darcy Da , variant de 10^{-7} à 10^{-2} avec $Le = 10$, $N = 0$ et $Pr = 0,71$. Les solutions convectives, montrées sur la figure 4.2 ne peuvent être obtenues que pour $\lambda = 10^{-2}$. Les taux de transfert thermique, Nu , et massique, Sh , sont aussi plus élevés pour le cas de $Da=10^{-7}$. Les taux de transferts thermique et massique atteignent un maximum pour $\lambda > 10$. Il convient de noter que le transfert thermique Nu peut être inférieur à 1 (cas de faible λ), conséquence du choix du flux diffusif de référence basé sur λy et non sur λx . Lorsque λ augmente, un accroissement monotone du transfert de masse et de chaleur, représenté par le nombre de Nusselt (Nu) et de Sherwood (Sh), est constaté. On peut également noter que Le nombre de Sherwood Sh augmente de façon monotone, spécialement pour un nombre de Darcy faible. Cependant, les transferts de chaleur restent constants et ne sont pas influencés par les rapports λ faibles.

A partir des courbes présentées sur les figures 4.2 et 4.3, on constate, en général, trois régimes dans l'évolution du transfert de chaleur et de masse avec le rapport de conductivité λ . Un régime diffusif, un régime intermédiaire, dans lequel les nombres de Nu et Sh augmentent avec λ , et un régime convectif, correspondant respectivement aux faibles, intermédiaires et fortes valeurs de λ . Cette évolution de Sh et Nu est expliquée par le fait qu'une augmentation de λ peut être interprétée comme une augmentation de la conductivité horizontale λx . L'inverse est également vrai lorsque la valeur de λ est très faible. Ces résultats ont également été confirmés par Bennacer et al. [75].

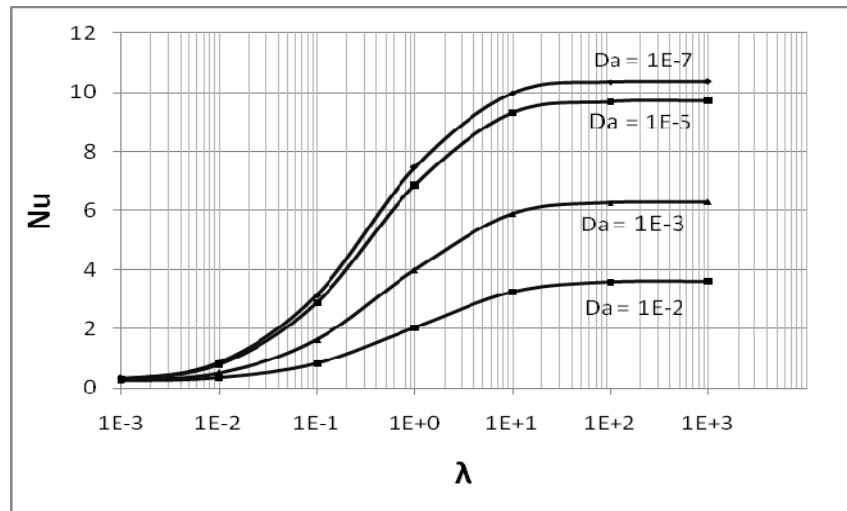


Figure 4.2 : Influence de l'anisotropie thermique sur le nombre de Nusselt pour différentes valeurs du nombre de Darcy Da : $Le = 10$, $N = 0$, $Pr = 0.71$ et $A = 4$.

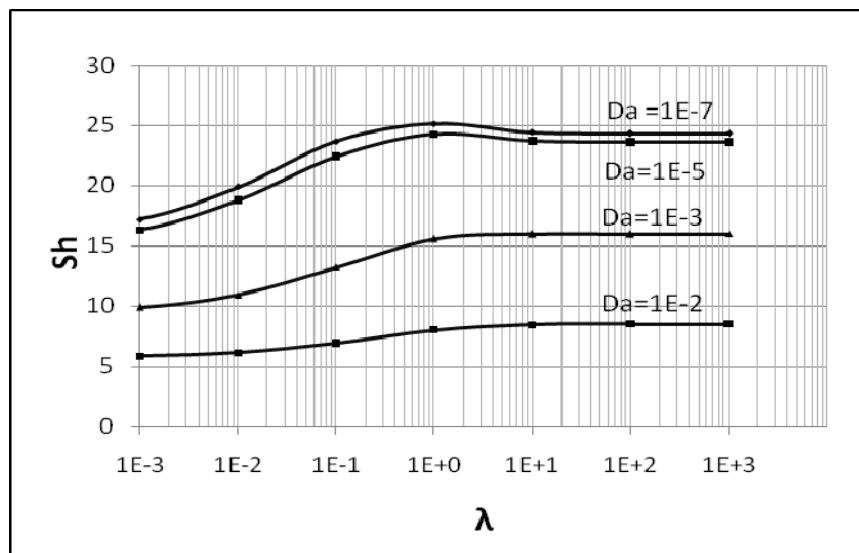


Figure 4.3 : Influence de l'anisotropie thermique sur le nombre de Sherwood pour différentes valeurs du nombre de Darcy Da : $Le = 10$, $N = 0$, $Pr = 0.71$ et $A = 4$.

4.2.3 Effet du nombre de Lewis sur le transfert de masse

La figure 4.4 montre les courbes de l'évolution du nombre de Sherwood, qui caractérisent le transfert massique, en fonction de l'anisotropie thermique λ . Le nombre de Lewis Le est pris égal à 10, 5 et 1 successivement. Le nombre de Darcy Da est maintenu constant et égal à 10^{-7} .

Trois régimes différents sont également observés. Ils sont semblables à ceux discutés précédemment dans les figures 4.2 et 4.3. Pour un taux d'anisotropie faible (10^{-3} à 1), l'accroissement des transferts de masse semble être linéaire jusqu'à ce qu'elle atteigne une

valeur critique au-delà de laquelle le nombre de Sherwood diminue légèrement puis reste constant. Les transferts sont donc plus élevés et tendent vers une valeur limite constante qui est d'autant plus élevée que le nombre de Lewis augmente.

Il est également constaté que pour une valeur donnée de λ , le transfert de masse augmente avec le nombre de Lewis. Cela est dû à une augmentation de Le qui correspond à une diminution de la diffusivité massique. La réduction de l'épaisseur de la couche limite solutale conduit à un plus grand nombre de Sherwood. Les transferts de matière sont plus sensibles à l'écoulement à cause du nombre de $Le = 10$.

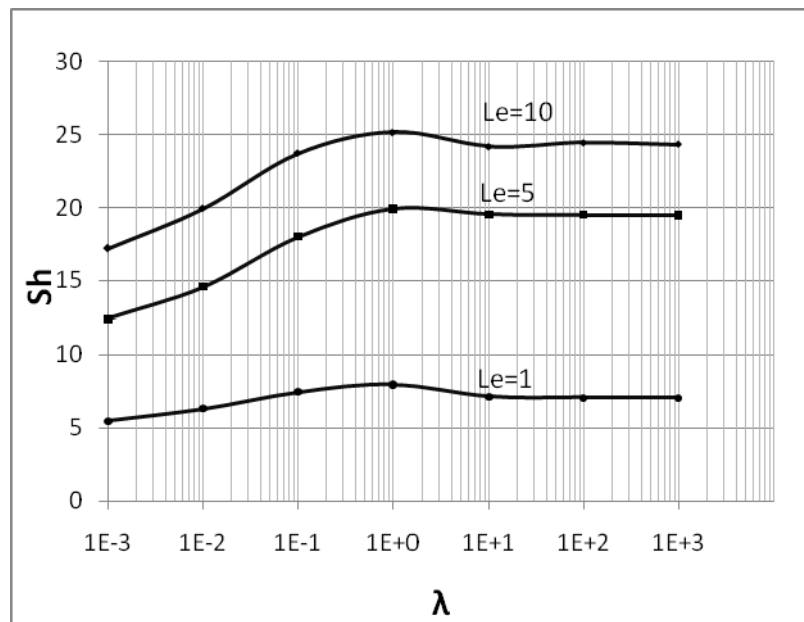


Figure 4.4 : Influence de l'anisotropie thermique sur le nombre de Sherwood pour différentes valeurs du nombre de Lewis Le : $Da = 10^{-7}$, $N = 0$, $Pr = 0.71$ et $A = 4$.

4.2.4 Effet du nombre de Rayleigh poreux thermique sur le transfert de chaleur et de masse

L'effet du nombre de Rayleigh Ra sur le transfert de chaleur est présenté sur la figure 4.5, pour différents taux d'anisotropie thermique λ . On constate que le nombre de Nusselt est une fonction croissante de Ra . Pour $Ra = 10^4$ une augmentation du nombre de Nusselt au début, suivie d'une tendance vers une valeur constante est observée. Les courbes sont assez semblables pour les plages relativement importantes du rapport de conductivité thermique. Ces corrélations sont observées pour prédire avec précision les trois régimes différents discutés auparavant. Les limites entre ces régimes dépendent de la valeur de Rayleigh. On voit sur la figure 3.5 que, pour $Ra = 10^2$, le deuxième régime devient visible à partir de $\lambda \geq 1$. Toutefois, pour $Ra = 10^3$ et $Ra = 10^4$, il devient visible respectivement pour $\lambda \geq 10^{-2}$ et $\lambda \geq 10^{-3}$.

Les résultats du transfert de masse en fonction de λ pour différents taux d'anisotropie sont illustrés sur la figure 4.6. On remarque que pour une valeur donnée du rapport de conductivité λ et une grande valeur du nombre de Rayleigh ($Ra=10^4$), le transfert de masse reste constant pour les faibles et forts taux d'anisotropie thermique. La pente du Transfert est d'autant plus faible que Ra diminue.

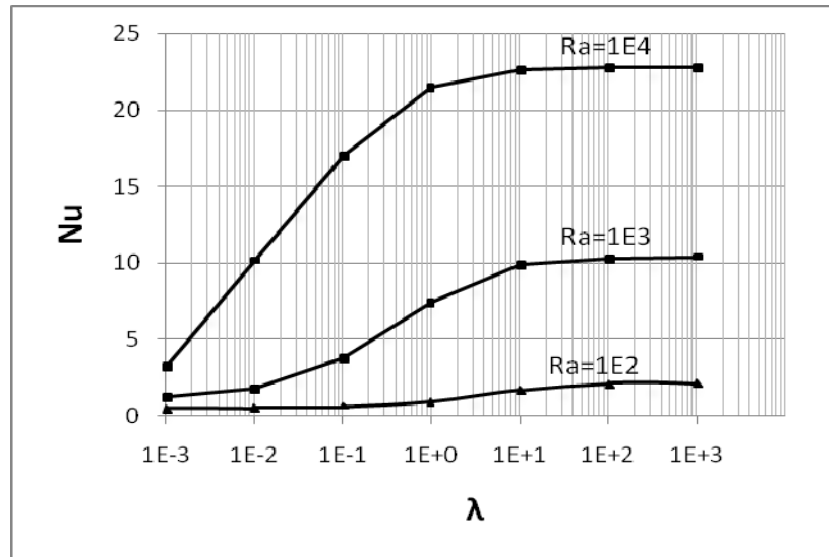


Figure 4.5 : Influence de l'anisotropie thermique sur le nombre de Nusselt pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh Ra : $Da = 10^{-7}$, $N = 0$, $Pr = 0.71$ et $A=4$.

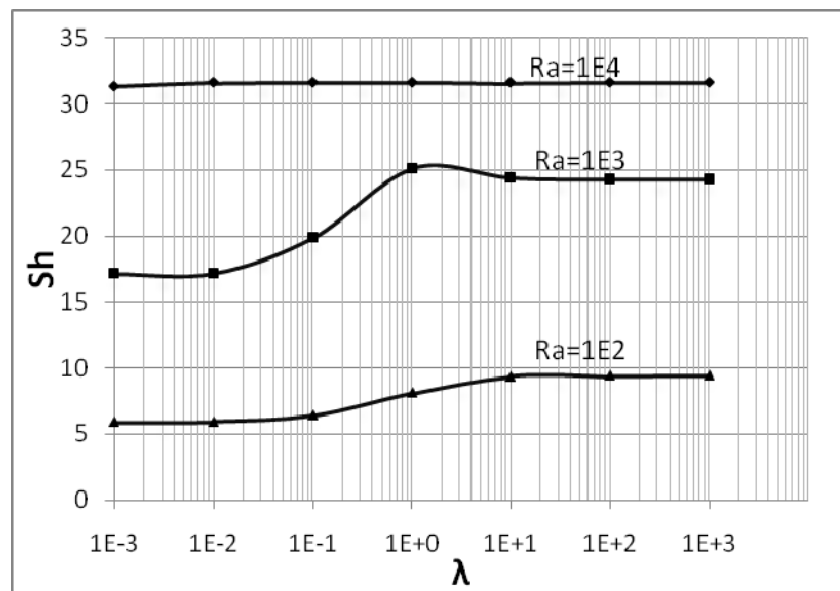


Figure 4.6 : Influence de l'anisotropie thermique sur le nombre de Sherwood pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh Ra : $Da = 10^{-7}$, $N = 0$, $Pr = 0.71$ et $A=4$.

4.2.5 Effet du rapport des forces de volume sur le transfert de masse

L'anisotropie qui nous intéresse jusqu'à présent est en conductivité thermique avec les forces de volume essentiellement d'origine thermique.

La figure (4-7) présente la variation du nombre de Sherwood Sh en fonction de la force de volume N pour différentes valeurs de λ . Il apparaît clairement que pour des valeurs de N inférieur à 10 (les forces de volume solutale sont la source de l'écoulement) l'effet du taux d'anisotropie sur le transfert de masse est très faible et devient négligeable au-delà de cette valeur. Le flux est principalement dû à des forces de volume d'origine solutale dans l'équation du mouvement. Ces résultats confirment bien ceux présentés par Bennacer et al [75].

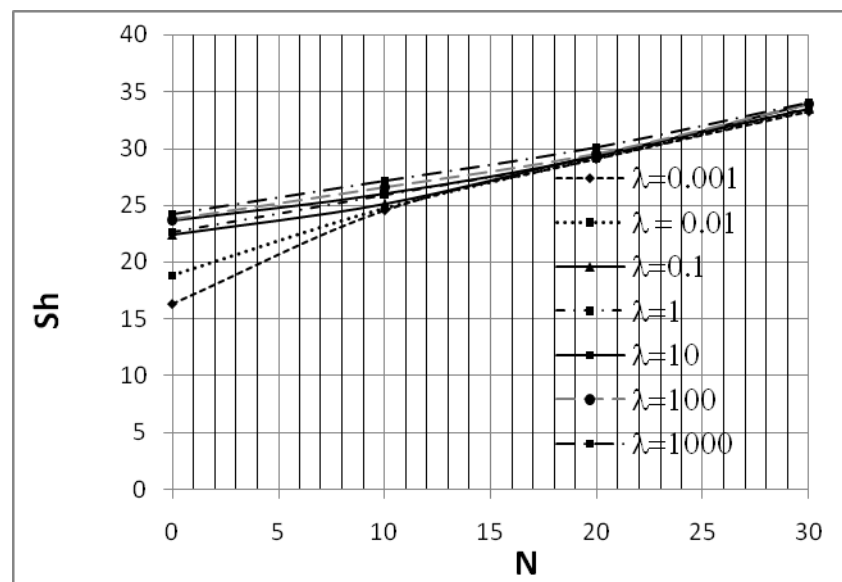


Figure 4.7 : Influence de la force de volume N sur le nombre de Sherwood pour différentes valeurs du rapport de conductivité λ : $Le=10$, $Da=10^{-7}$, $Pr=0.71$ et $A=4$.

4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié numériquement la contribution de l'anisotropie thermique sur la convection thermosolutale dans une couche rectangulaire horizontale poreuse, saturée par un fluide binaire. L'influence du nombre de Darcy, du nombre de Rayleigh, du nombre de Lewis et du rapport des forces de volume a été établie et discutée. Il a été conclu que : L'effet de l'anisotropie thermique affecte sensiblement les transferts dans les différentes situations ; la diminution du nombre de Darcy donne lieu à une augmentation du transfert de chaleur et de masse. Pour un nombre de Rayleigh donné, le

transfert de chaleur atteint une valeur asymptotique constant quelque soit λ et le transfert de masse reste constant pour un nombre de Rayleigh élevé. La solution numérique indique que pour un rapport des forces de volume N élevé, le transfert de masse reste le même quelque soit le rapport de conductivité λ . Le rapport des forces de volume N n'a plus d'effet sur le transfert de chaleur car ce sont les forces de volume solutales qui sont à l'origine de l'écoulement.

L'ensemble de ces résultats a fait l'objet de plusieurs communications et d'une publication internationale [76].

5. Convection naturelle thermosolutale dans une cavité poreuse anisotrope en perméabilité

5.1 Introduction

Dans cette partie, nous nous sommes intéressés au transfert de chaleur et de masse induit par convection thermosolutale dans une cavité poreuse horizontale anisotrope en perméabilité. Il s'agit d'étudier l'influence des paramètres de contrôle sur l'écoulement et les mécanismes de transferts de chaleur et de masse. Les parois verticales de l'ensemble du domaine sont soumises à des températures et de concentrations constantes. Les différents paramètres caractéristiques du mouvement du fluide binaire et des phénomènes de transfert de chaleur et de masse dans un milieu poreux sont le rapport de forme de la cavité A , le nombre de Darcy Da qui caractérise la perméabilité du milieu, le nombre de Rayleigh R_a thermique qui caractérise l'écart de la température, le rapport des forces de poussée N , le nombre de Lewis Le qui caractérise le rapport des diffusions thermique et solutale et en fin le nombre de Prandtl Pr caractérisant la nature du fluide.

Dans ce chapitre on s'est limité à un rapport de forme de la cavité $A = 4$, le fluide saturant le domaine poreux est l'air ($Pr = 0.71$).

Dans certains milieux poreux la variation de la perméabilité est très élevée et le rapport de perméabilité peut être supérieur à 100, (c'est le cas des roches sédimentaires Davis [77] ou celui des matériaux fibreux Neal [41]). Une large gamme du rapport des perméabilités K est donc considérée et ce dernier varie de 10^{-4} à 10^3 , le nombre de Lewis Le de 1 à 10, le nombre de Rayleigh poreux thermique Ra varie de 10^2 à 10^4 , le rapport des forces de volume N de 0 à 30. Afin de comprendre les mécanismes fondamentaux que l'anisotropie en perméabilité engendre sur le transfert de chaleur et de masse, nous avons supposé la cavité poreuse thermiquement isotrope ($\lambda = 1$).

5.2 Validation du code numérique

Afin de vérifier l'exactitude des résultats obtenus dans le présent travail, une comparaison de ces résultats avec ceux de Ni et Beckermann [61] et Bennacer et al. [68]

pour une cavité poreuse rectangulaire horizontale, a été faite. Cette comparaison basée sur les nombres de Nusselt est illustrée dans le tableau 5.1. Nous nous sommes placés dans les mêmes conditions que ces auteurs et nous avons adopté les mêmes paramètres. Il ressort du tableau 5.1 une concordance satisfaisante. Les différences observées entre les résultats étant inférieures à environ 1.5%.

Tableau 5.1 : Comparaison du nombre de Nusselt pour différents taux d'anisotropie en perméabilité (K) pour : $Da=10^{-7}$, $A=1$, $Ra=10^3$ et $N=0$

$K = K_y/K_x$	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}
Bennacer et al. [68]	1.00	1.29	4.17	13.48	37.56	80.62
Ni et Beckermann [61]	1.01	1.30	4.17	13.41	37.37	80.34
Présent travail	1.04	1.26	4.19	13.09	37.31	80.33

5.3

Résult

ats et discussions

5.3.1 Effet de l'anisotropie en perméabilité sur les transferts

La figure 5.1 illustre la variation du transfert thermique et massique en fonction de l'anisotropie en perméabilité. Les paramètres utilisés sont $Ra=10^4$, $A=4$ et $Da=10^{-7}$. A partir de cette figure on peut distinguer trois zones :

Pour des valeurs faibles des taux d'anisotropie ($K \leq 10^{-2}$), les transferts de chaleur et de masse sont faibles et le nombre de Nusselt et de Sherwood demeurent pratiquement constants. Cet affaiblissement des transferts est dû à l'affaiblissement de l'écoulement avec la décroissance de K . Pour des valeurs de K supérieures à 1, les transferts thermique et massique sont plus importants et indépendants du taux d'anisotropie. Ces valeurs correspondent à un écoulement en couche limite. L'accroissement de la perméabilité horizontale par le biais de K favorise de plus en plus l'écoulement dans l'ensemble de la cavité jusqu'à ce que l'écoulement devienne indépendant de K . Pour des rapports de perméabilité intermédiaire ($10^{-2} \leq k \leq 1$), on constate une forte augmentation des nombres de Nusselt et de Sherwood.

L'anisotropie en perméabilité met donc en évidence trois régimes de transferts, un écoulement diffusif pur pour les faibles valeurs de K et deux types d'écoulement convectif : pour K modéré, un écoulement qui s'intensifie de plus en plus avec l'accroissement de K et

pour K supérieur à 1 un autre régime complètement couche limite, indépendant de K . On peut constater aussi sur la même figure pour une valeur de K donné, le transfert de matière est plus élevé que le transfert de chaleur. En effet, vu que le nombre de Lewis (Le) est égale à 10, la couche limite solutale est plus fine que la couche limite thermique. Ceci est aussi à l'origine de l'obtention d'un transfert de masse diffusif pour des valeurs de K plus faibles que dans le cas du transfert de chaleur.

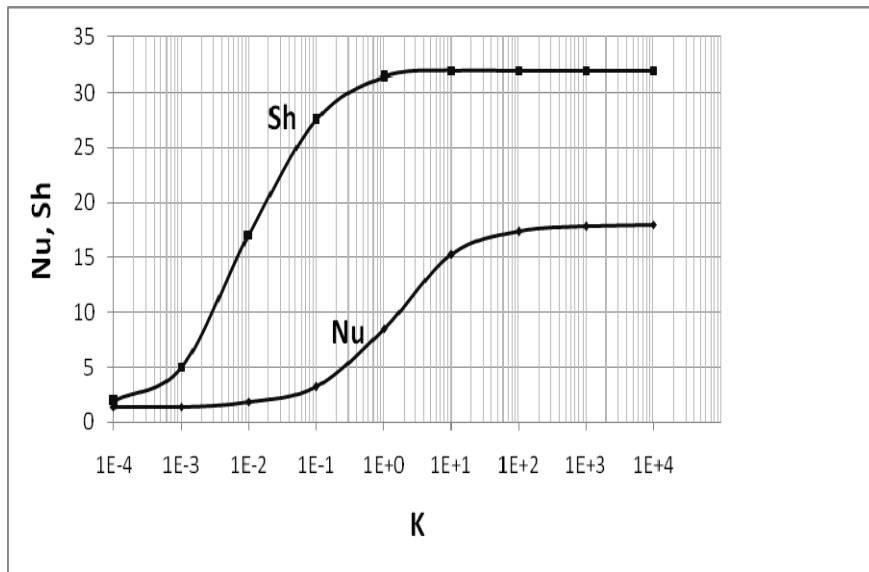


Figure 5.1 : Le transfert de chaleur et de masse pour différents valeurs d'anisotropie en perméabilité K : $A=4$, $Le=10$, $N=0$, $Ra=10^3$ et $Da=10^{-7}$.

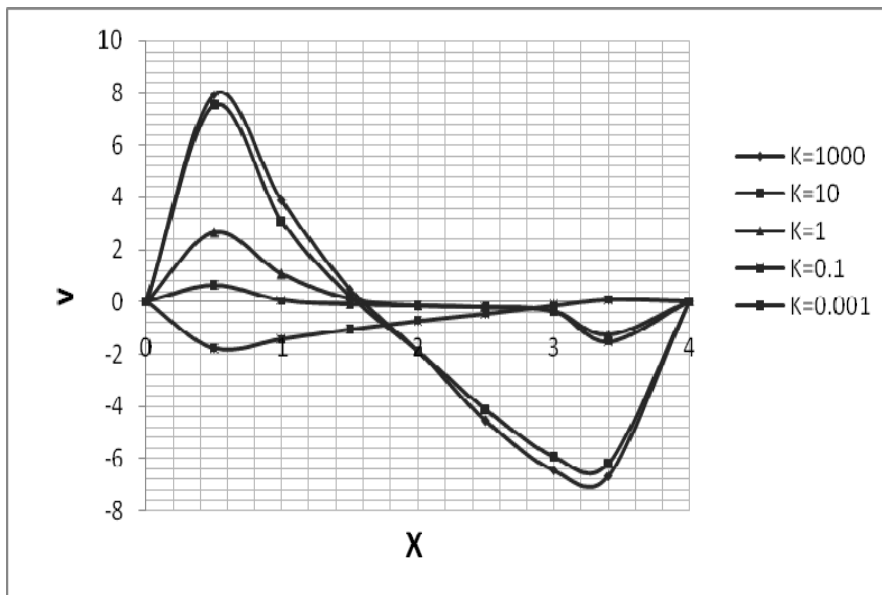


Figure 5.2 : Profil de la composante verticale de la vitesse dans le plan médian horizontal de la cavité pour différents K : $A=4$, $Da=10^{-7}$, $Ra=10^3$, $N=0$ et $Le=10$.

La figure 5.2 illustre l'évolution du profil de la composante verticale de la vitesse sur le plan médian horizontal de la cavité, pour différentes valeurs de l'anisotropie en perméabilité K . Les autres paramètres sont maintenus constants ($A=4$, $Ra=10^3$, $Le=10$ et $N=0$). Les profils de vitesse sont caractérisés par un maximum de vitesse près de la paroi verticale synonyme d'un régime de Darcy ($Da=10^{-7}$). On remarque aussi que l'augmentation du taux d'anisotropie entraîne une augmentation de la composante de la vitesse et le profil de vitesse est quasiment le même pour les valeurs élevées de K . Pour les faibles taux d'anisotropie K la vitesse demeure nulle quel que soit X , ce qui démontre bien que les transferts se font essentiellement par diffusion dans cette zone. Le gradient de vitesse de plus en plus élevé correspond à des couches limites thermique et solutale de plus en plus fines. L'augmentation de la perméabilité horizontale K_x n'a alors plus d'effet sur le profil des vitesses, ce qui justifie la tendance des transferts vers des valeurs constantes indépendantes de K .

La figure 5.3 montre les isocontours des lignes de température, de concentration et des lignes de courants pour différents K et pour un nombre de Darcy fixe $Da=10^{-7}$, $Le = 10$ et $N=0$. Il est constaté que pour des valeurs de K comprises entre 10^2 et 10 l'écoulement à l'intérieur de la cavité se compose d'un écoulement parallèle au centre de la cavité ce qui explique que la fonction de courant devient constante. La perméabilité dans la direction horizontale est tellement forte qu'il y'a peu de résistance à l'écoulement dans le sens horizontal ; ainsi l'écoulement résulte essentiellement de la résistance verticale qui est fixe et contenue dans Da .

Les champs d'isothermes pour $K=10^2$ sont linéaire dans la direction y , la convection n'ayant qu'un très léger effet sur eux. Tandis que Les champs de concentration sont bien stratifiés le long de la paroi. Pour $K=1$ on note la naissance de deux cellules de convection occupant deux angles opposés de la cavité. Les isothermes sont stratifiés dans la direction y de la paroi, alors que les isoconcentrations restent plus concentrées près des parois actives. Pour les faibles valeurs de l'anisotropie en perméabilité K ($K=10^{-1}$), l'écoulement dans la direction horizontale est facilité et se produit donc une intensification de l'écoulement le long des parois verticales.

La couche limite hydrodynamique prend place sur les parois verticales gauche et droite. Par contre les champs de température ont une forme de 'S'. Dans le cas de K très faible ($K=10^{-2}$), d'après les lignes de champs, une résistance significative à l'écoulement apparaît dans la direction horizontale. Ceci est dû à la perméabilité verticale qui est plus grande que la perméabilité horizontale. L'écoulement est freiné horizontalement, ce qui engendre une faible épaisseur d'écoulement vertical qui se répartit sur presque l'ensemble de la cavité. Les champs de température sont presque parfaitement linéaires dans la direction y . Le gradient de température est constant et l'écoulement est parallèle au cœur de la géométrie alors que les isoconcentrations sont linéairement stratifiées dans la direction verticale.

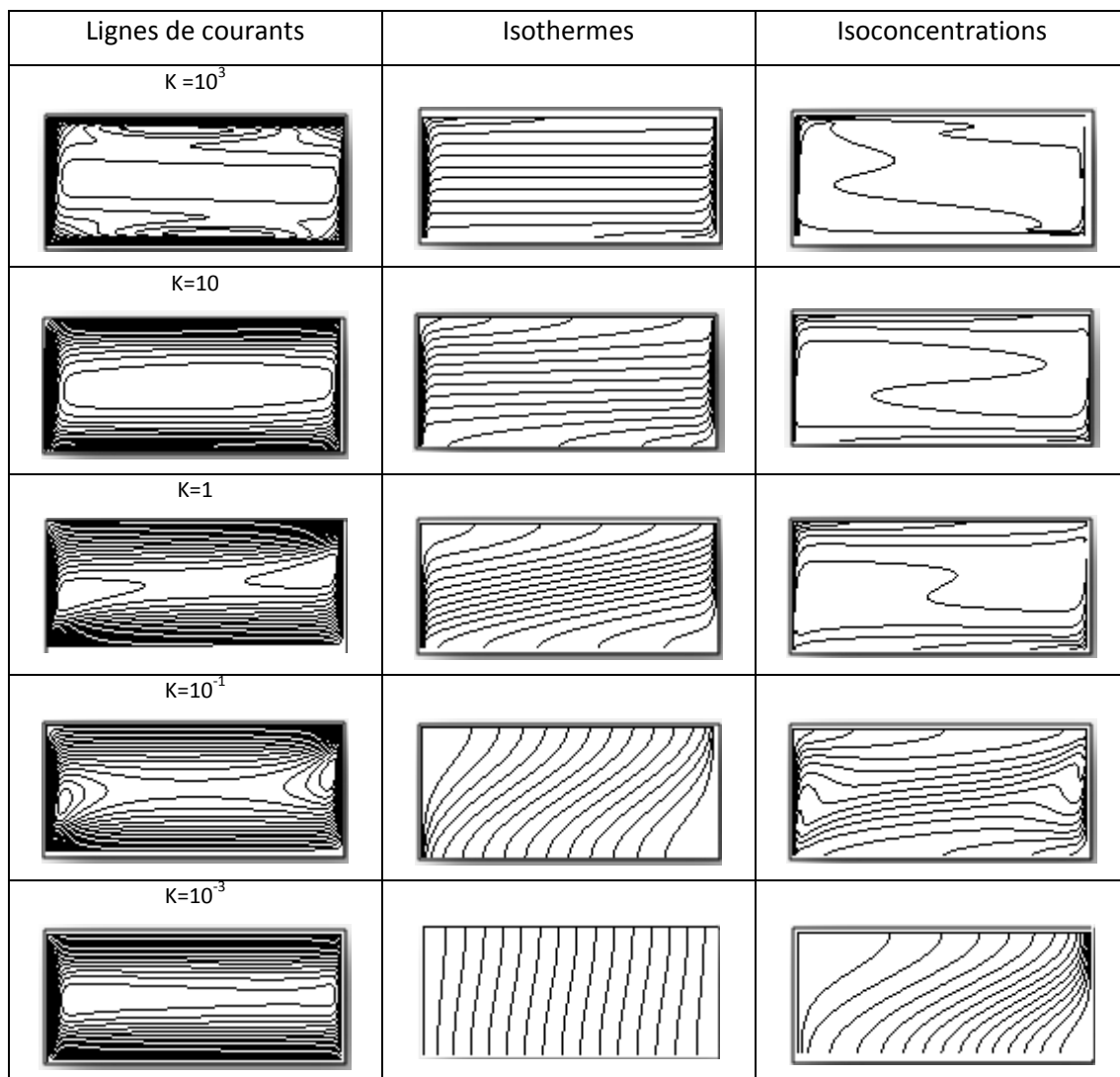
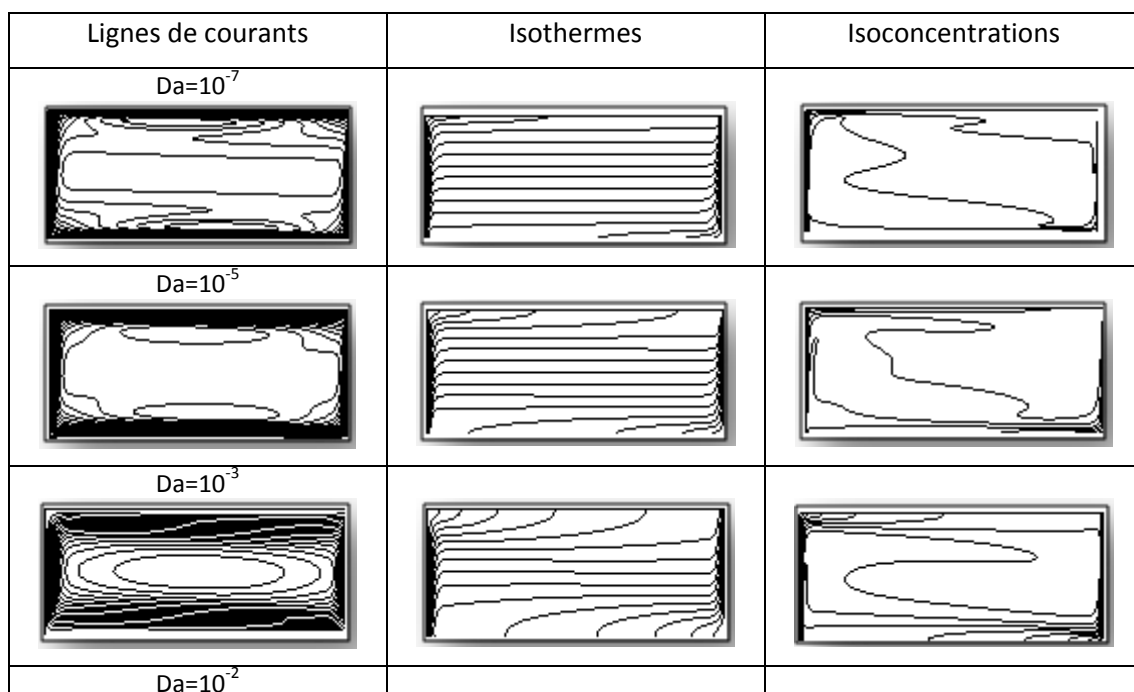


Figure 5.3 : Carte d'isovaleurs en fonction de K : $A=4$, $N=0$, $Da=10^{-7}$, $Le=10$ et $Ra=10^3$.

5.3.2 Effet du nombre de Darcy

5.3.2.1 Structure de l'écoulement

La figure 5.4 illustre l'évolution de la carte des isovalues (lignes de courant, isothermes et isoconcentrations) pour différentes valeurs du nombre de Darcy. Les autres paramètres sont maintenus constants ($A=4$, $Ra=10^3$, $Pr = 0.71$, $Le=10$, $K=10^3$ et $N=0$). Pour un faible nombre de Darcy $Da = 10^{-7}$, les lignes de courant montrent que l'écoulement dans la couche poreuse est pratiquement inexistant. D'un autre côté la dominance des effets thermiques engendrent une cellule de convection dans la région centrale de la cavité. Cette structure change pour un nombre de Darcy ($Da=10^{-5}$) où il y'a eu l'apparition de deux cellules secondaires, de faible intensité situées au voisinage des parois horizontales de la cavité, due aux effets solutaux. L'obtention de cette solution est difficile car elle est a proximité de la zone d'écoulement oscillatoire. Les isothermes sont bien stratifiés dans la direction y et les isoconcentrations sont très concentrés près des parois actives de la cavité. Pour des perméabilités élevées ($Da=10^{-3}$ et 10^{-2}) les différentes couches limites hydrodynamiques, thermiques et solutales, deviennent plus épaisses. La structure d'écoulement demeure presque la même il est monocellulaires et occupe l'ensemble de la cavité.



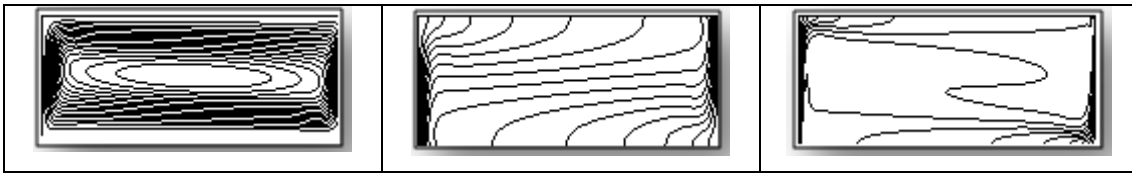
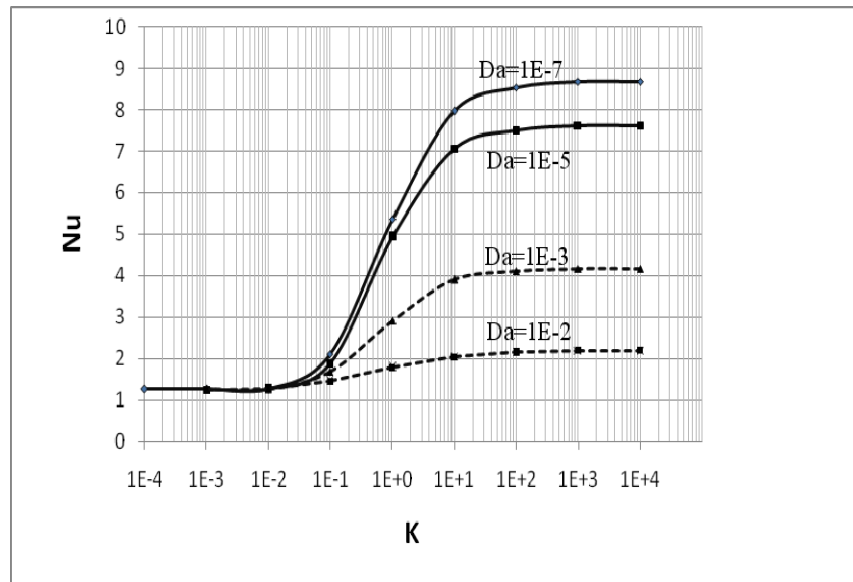


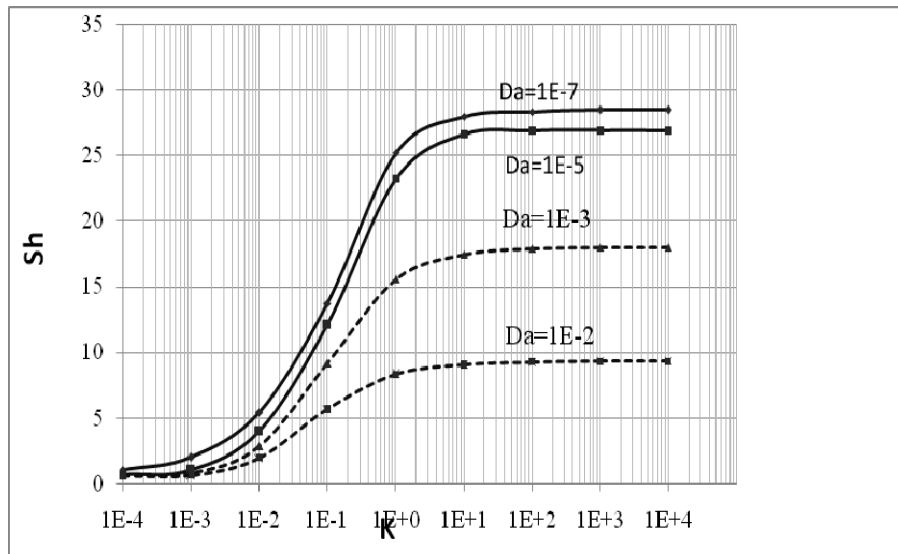
Figure 5.4 : Cartes d'isovaleurs en fonction du nombre de Darcy Da :
 $A = 4$, $Ra = 10^3$, $N = 0$, $Le = 10$ et $K = 10^3$.

5.3.2.2 Transfert de chaleur et de masse

Les effets du nombre de Darcy sur le taux de transfert de chaleur et de masse sont illustrés sur les figures 5.5a et 5.5b pour $N = 0$ et $A = 4$. Le nombre de Rayleigh poreux thermique est maintenu constant à 10^3 . L'augmentation du nombre de Darcy favorise la contribution des forces visqueuses contenues dans le terme visqueux de Brinkman de l'équation de quantité de mouvement qui s'opposent aux forces de volume. L'écoulement dans le milieu poreux est donc de plus en plus freiné quand Da augmente, provoquant la décroissance des transferts.



(a)



(b)

Figure 5.5 : Evolution du transfert de chaleur et de masse en fonction du nombre de Darcy pour : $A=4$, $Pr =0.71$, $Le=10$, $N=0$ et $Ra =10^3$.

Il est visible sur cette figure que l'anisotropie en perméabilité présente un effet considérable sur les transferts. Pour de faibles valeurs des taux d'anisotropie K ($K < 10^{-2}$), les transferts s'affaiblissent et tendent vers des transferts diffusifs. Cet affaiblissement s'explique par le fait que lorsque le taux d'anisotropie diminue (décroit) implique une chute de la perméabilité horizontale K_x , alors que la perméabilité verticale (K_y reste constante et contenue dans le terme de Darcy Da). Physiquement, la diminution de la perméabilité horizontale empêche le développement de l'écoulement horizontal entraînant du même coup la diminution de l'écoulement vertical ce qui traduit l'équation de continuité. Pour les forts taux d'anisotropie ($K \geq 1$), les transferts sont plus importants et tendent vers des valeurs limites maximales constantes et indépendantes de K . Vu l'atténuation de l'écoulement avec Da , la pente des transferts dans le cas du régime intermédiaire est d'autant plus faible que le nombre de Darcy augmente et ainsi le régime convectif en couche limite est atteint pour des K plus faibles. On peut noter aussi que le transfert de masse atteint une valeur asymptotique maximum plus rapidement que le transfert de chaleur. Ceci, est une conséquence directe du nombre de Lewis ($Le=10$) sur le transfert de masse.

5.3.3 Effet du nombre de Rayleigh

5.3.3.1 Structure de l'écoulement

Le nombre de Rayleigh poreux thermique est la combinaison du Rayleigh fluide thermique et le nombre de Darcy. Le nombre de Rayleigh joue un rôle primordial dans le processus de la thermogravitation, puisqu'il intervient directement dans le couplage des phénomènes des convections et thermodiffusion décrit dans le chapitre 2.

La figure 5-6 montre l'effet du nombre de Rayleigh poreux sur la fonction de courant, les isothermes et les isoconcentrations. En régime thermique dominant ($N=0$) l'écoulement est dans le sens des aiguilles d'une montre. Cette étude a été effectuée pour trois valeurs des nombres de Rayleigh ($Ra=10^2$, $Ra=10^3$ et $Ra=10^4$) et Pour une valeur fixe de K ($K=10^3$). On remarque un changement de comportement du régime de l'écoulement. Pour une faible valeur du nombre de Rayleigh ($Ra=10^2$), les lignes de courant de la solution dominée par les effets thermique sont concentrés au voisinage des parois. On constate l'apparition de deux cellules de convection secondaires à l'intérieur de l'écoulement principal, alors que les isothermes et les isoconcentrations sont stratifiées dans la direction verticale. On note aussi que ces résultats on été obtenus pour un rapport de forme $A = 4$ pour lequel l'écoulement n'est pas totalement parallèle.

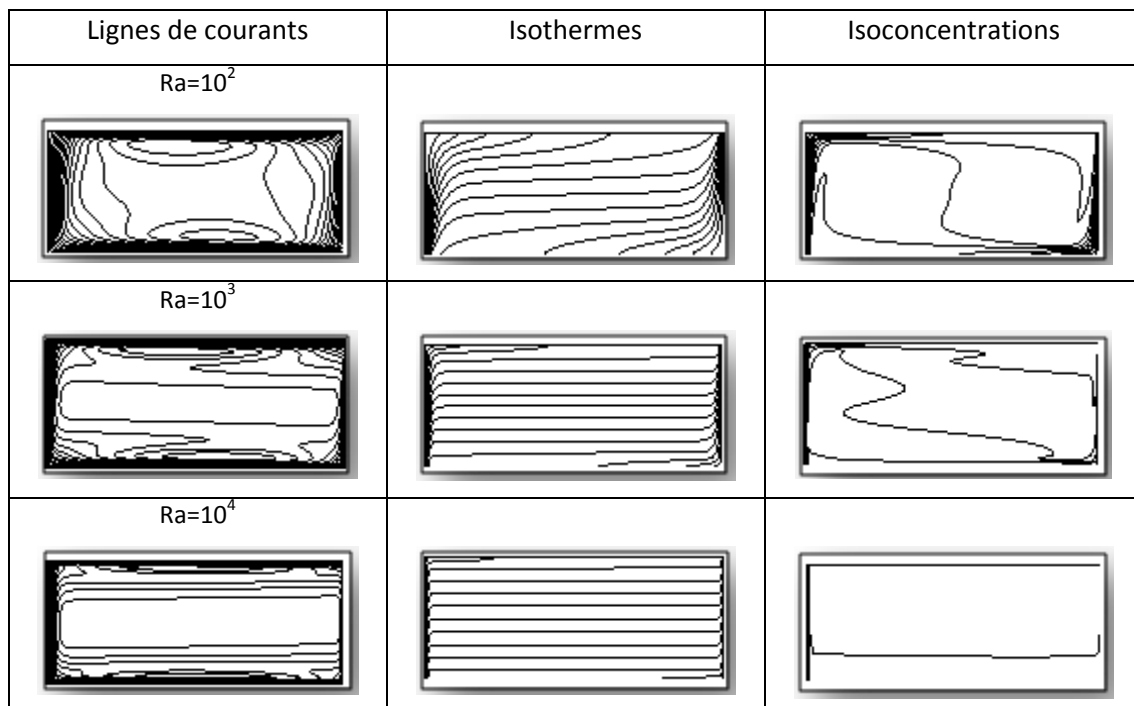
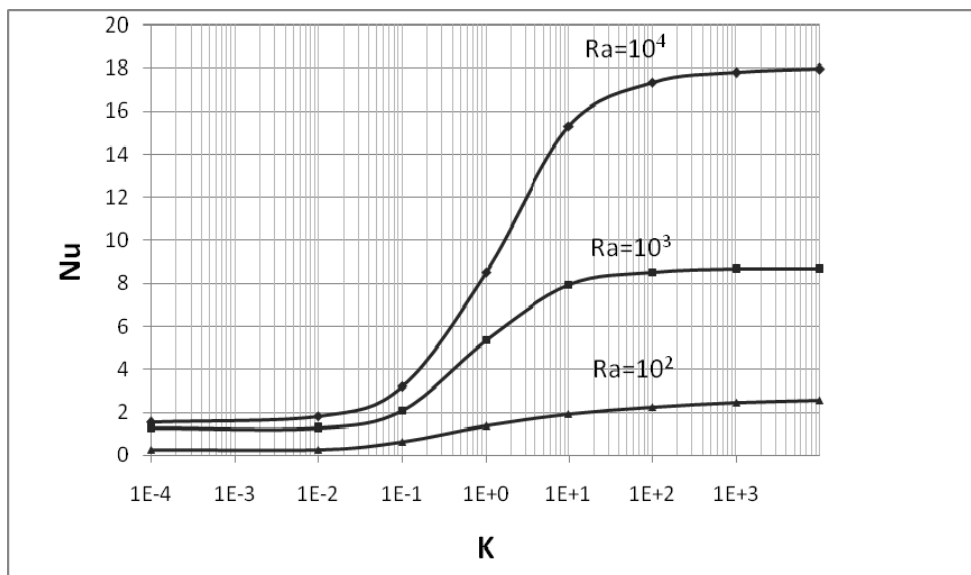


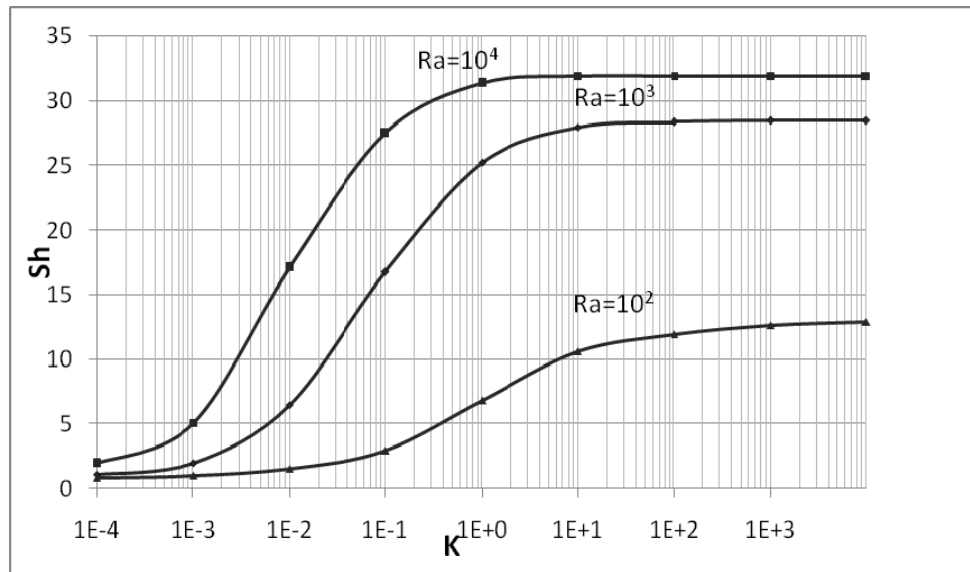
Figure 5.6 : Cartes d'isovaleurs en fonction du nombre de Rayleigh Ra :
 $A = 4$, $Da = 10^7$, $N = 0$, $Le = 10$ et $K = 10^3$.

5.3.3.2 Transfert de chaleur et de masse

Les figures 5.7a et 5.7b illustrent l'évolution des nombres de Nusselt et de Sherwood respectivement en fonction de l'anisotropie en perméabilité K , pour une perméabilité verticale fixée ($Da = 10^{-7}$) et pour des nombres de Rayleigh poreux thermiques variables ($Ra = 10^2, 10^3$ et 10^4) et en conservant les mêmes paramètres ($A = 4, Pr = 0.71, Le = 10, N = 0$). Les transferts sont plus importants avec l'accroissement de Ra quelle que soit le taux d'anisotropie, vu que les forces de volume qui sont à l'origine de l'écoulement sont de plus en plus intenses. Pour $K > 10^{-3}$ et $Ra = 10^4$ Le nombre de Sherwood augmente considérablement au début et tend par la suite vers une valeur constante. Pour le transfert de chaleur on a un transfert diffusif pour des faibles K , un régime convectif en couche limite pour des taux d'anisotropie en perméabilité $K = 10$ et un régime intermédiaire au cours duquel les transferts augmentent avec l'accroissement de K . Ces différents régimes sont retrouvés pour les différents Ra . On peut noter que le transfert de masse atteint une valeur asymptotique maximum plus rapidement que le transfert de chaleur. Ceci, est une conséquence directe du nombre de Lewis ($Le = 10$) sur le transfert de masse.



(a)



(b)

Figure 5.7 : Effet du nombre de Rayleigh Poreux thermique R sur les transferts pour : $A=4$, $Da=10^{-7}$, $N=0$ et $Le=10$.

5.3.4 Effet du nombre de Lewis

5.3.4.1 Structure de l'écoulement

Les effets du nombre de Lewis Le sur l'intensité de la fonction de courant, les isothermes et les isoconcentrations sont illustrés sur la figure 5.8, pour : $Ra=10^3$, $N=0$, $Da=10^{-7}$ et $K=10^3$. Les résultats numériques obtenus pour $Le=10$ montrent que le structure d'écoulement ne change pas. Les effets thermiques engendrent une grande cellule de convection occupant une grande partie de la cavité tournant dans le sens horaire. Les profils de température et de concentration montrent une stratification dans la direction verticale. En effet pour $Le=1$ le profil du champ de concentration est identique au profil du champ de température à cause des conditions aux limites imposés, sur les parois verticales de la cavité qui sont identiques $\left(\frac{\partial T}{\partial Y} = \frac{\partial C}{\partial Y} = 0\right)$.

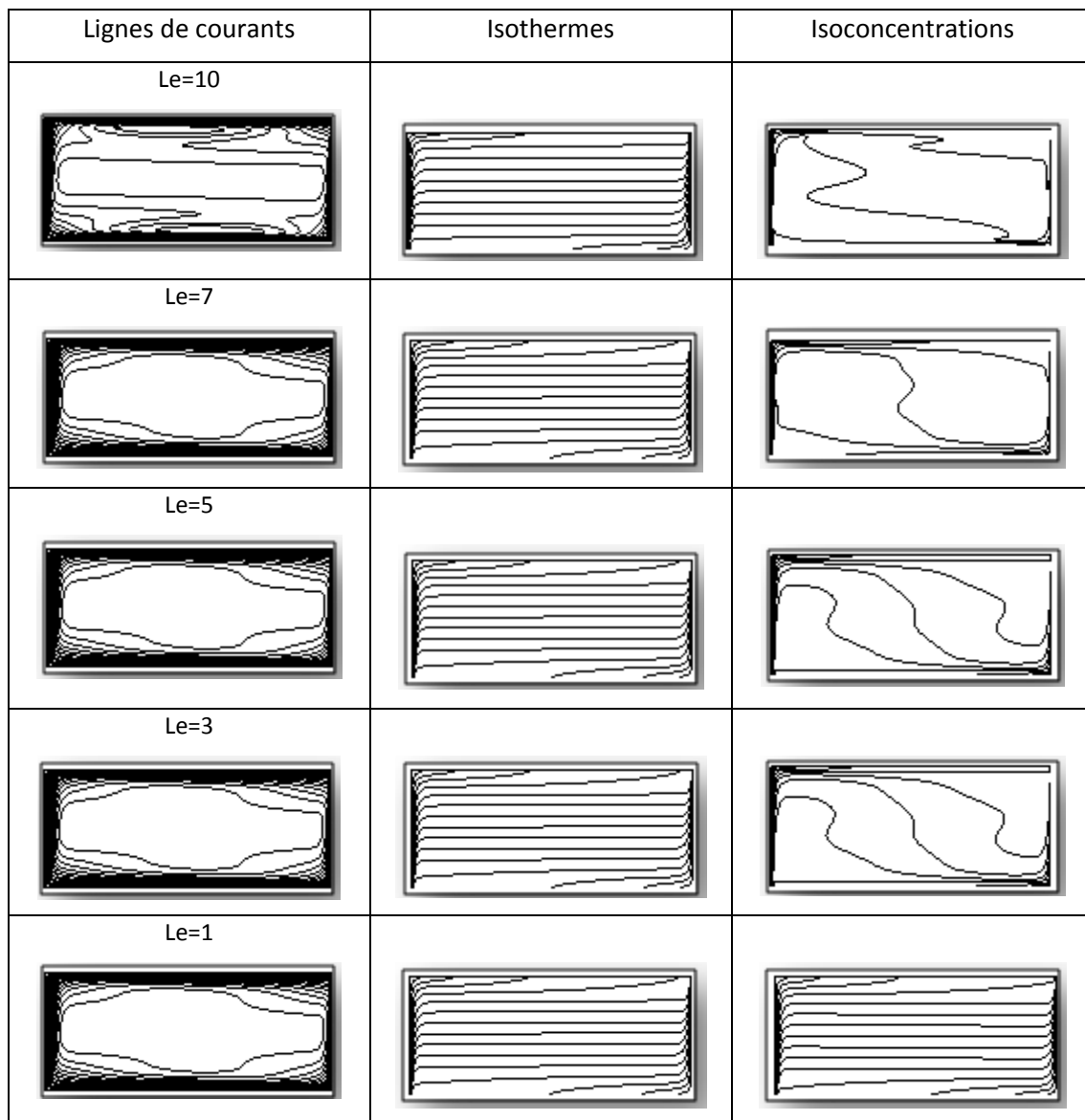


Figure 5.8 : Cartes d'isovaleurs en fonction du nombre de Lewis Le : $A = 4$, $Ra=10^3$, $N = 0$, $Da= 10^{-7}$ et $K= 10^3$.

5.3.4.2 Transfert de masse

Afin d'étudier l'influence du nombre de Lewis sur la structure d'écoulement et le transfert de masse dans le cas de l'écoulement de Darcy ($Da=10^{-7}$), nous avons choisie une gamme de valeurs du nombre de Lewis entre 1 et 10. Nous présentons les résultats obtenus, avec prise en compte de l'anisotropie en perméabilité pour cinq nombre de Lewis, figure 5.9. Le nombre de Rayleigh poreux thermique est maintenu constant ($Ra = 10^3$), $N = 0$, $A = 4$. Pour des taux d'anisotropie (K) suffisamment faible, les transferts de masse se fait pratiquement par diffusion notamment pour les nombres de Lewis élevés. Au fur et à mesure que Le le nombre de Lewis (Le) augmente, Le nombre de Sherwood (Sh) augmente considérablement.

Le nombre de Lewis caractérise l'efficacité du transport de chaleur par rapport au transport de matière. Une augmentation de ce dernier dans l'équation de conservation de masse, entraîne une couche limite solutale de plus en plus fine et par conséquent un transfert de masse de plus en plus élevé.

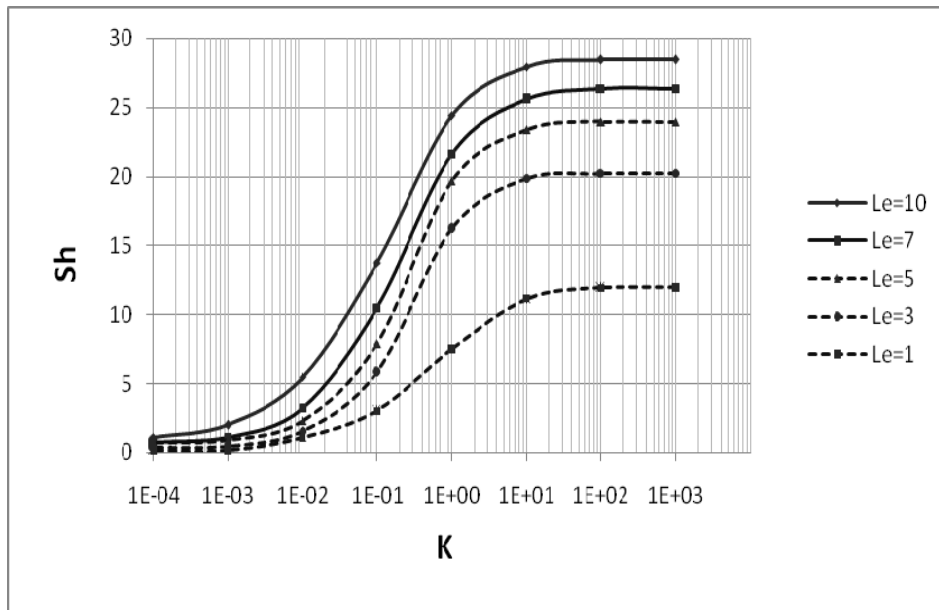


Figure 5.9 : Evolution du transfert de masse en fonction du nombre de Lewis pour : $A=4$, $Ra=10^3$, $N=0$ et $Da=10^{-7}$.

5.3.5 Effet des rapports des forces de volume N

5.3.5.1 Structure de l'écoulement

Dans cette partie du travail, nous nous sommes placés dans le cas d'un écoulement convectif où la contribution des forces de volume dues à la concentration vient s'ajouter à celle des forces de volume due à la température. C'est la convection doublement diffusive avec un rapport des forces de volume $N > 0$ (convection thermosolutale coopérante). Nous avons choisi un rapport des forces de volume ($N=1, 5, 10, 20$), avec $A=4$, $Le=10$, $Da=10^{-7}$ et un taux d'anisotropie $K=10^3$.

Les isocontours des lignes de courant, de température et de concentration pour les différentes valeurs de N sont représentés sur la figure 5.10. Pour $N=1$, on remarque une cellule qui occupe la majorité de la cavité. On variant les forces de volume N de 5 à 10 les forces thermiques deviennent négligeables par rapport aux forces solutaux. Les structures

d'écoulement sont identiques. Les lignes de courant indiquent que l'écoulement est intensif. On constate l'apparition d'une petite cellule principale au milieu de la paroi pour $N=20$. Une stratification de la température et de la concentration près des parois active de la cavité a été établie avec un écoulement confiné près des parois, qui est dus aux forces thermique au cœur de la cavité.

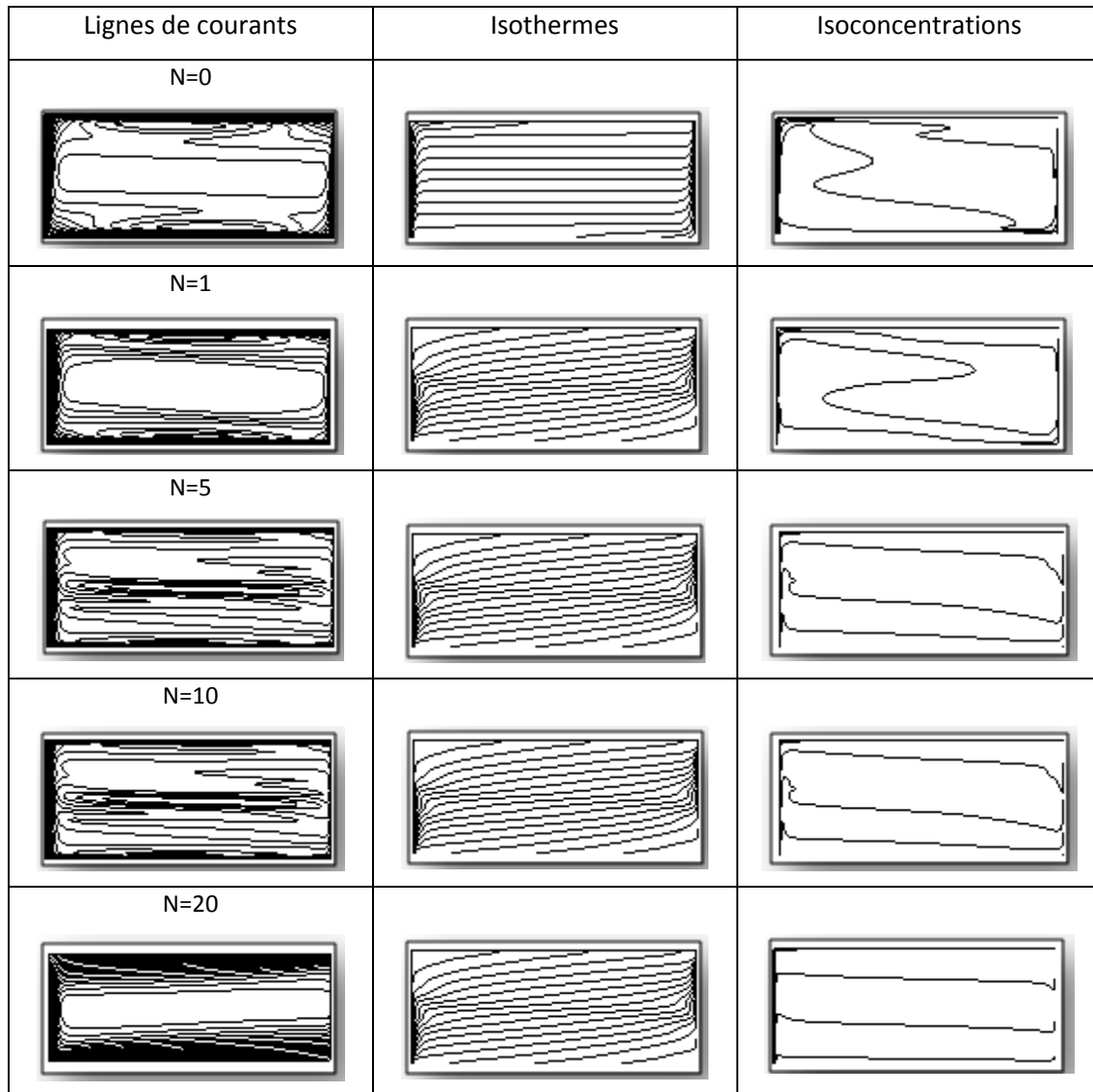
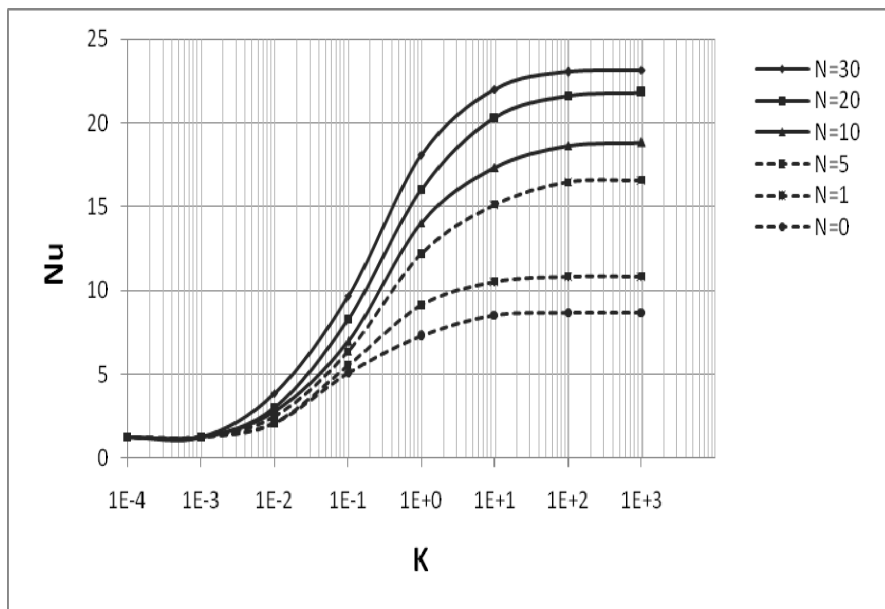


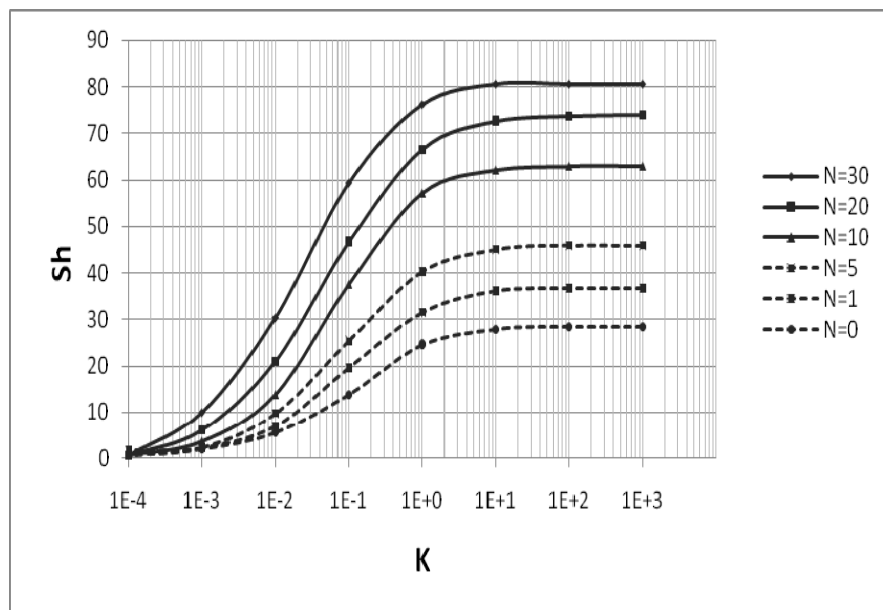
Figure 5.10 : Cartes d'isovaleurs en fonction des forces de volume N : $A = 4$, $Da = 10^{-7}$, $Le = 10$, $K = 10^3$
et $Ra = 10^3$.

5.3.5.2 Transfert de chaleur et de masse

Dans cette partie l'effet des forces de volume d'origine solutale sur les transferts de chaleur et de masse dans un milieu poreux saturé anisotrope en perméabilité a été étudié. Le rapport des forces volumique N a été varié entre 0 et 20 et l'anisotropie en perméabilité K de 10^{-4} à 10^3 . Comme cela était déjà précisé, la perméabilité horizontale (K_x) est maintenue constante alors que la perméabilité verticale varie. L'évolution du transfert de chaleur et de masse respectivement est présenté sur les figures 5.11a et 5.11b en maintenant le nombre de Rayleigh thermique constant $Ra=10^3$ et $A=4$. Les figures montrent que le transfert de chaleur et de masse croit avec N . En augmentant le taux d'anisotropie (K), il s'avère que les nombres de Nusselt et de Sherwood tendent vers une valeur asymptotique qui est fonction de N , ce qui est en bon accord avec les résultats donnés dans la littérature. Ceci est dû à l'accroissement des forces de volume dans l'équation de quantité de mouvement. On peut noter que le transfert de masse atteint une valeur asymptotique maximum plus rapidement que le transfert de chaleur. Ceci, est une conséquence directe du nombre de Lewis ($Le=10$) sur le transfert de masse.



(a)



(b)

Figure 5.11 : Effet du rapport des forces volume sur les transferts dans un milieu poreux anisotrope en perméabilité pour : $A=4$, $Da=10^{-7}$, $N=0$, $Le=10$ et $Ra=10^3$.

5.3.6 Effet du rapport de forme A

5.3.6.1 Structure de l'écoulement

La figure 5.12, illustre les isothermes, isoconcentrations et les lignes de la fonction de courant, pour un taux d'anisotropie fixe $K=10^3$, pour trois rapports de forme $A=1$, $A=2$ et $A=4$ et pour $Ra=10^3$ et $Da=10^{-7}$. Cette figure montre que l'écoulement est bien parallèle dans la partie centrale de la cavité considérée pour les faibles valeurs de A. Pour $A=4$ les effets thermiques engendrent une grande cellule de convection dans la région centrale de la cavité. Les effets solutaux, quant à eux, donnent naissance à deux petites cellules de convection à côté des parois horizontales tournant dans le sens horaire alors que les isothermes et les isoconcentrations sont stratifiées dans la direction verticale. On peut noter aussi que pour des valeurs plus grandes de A, les régimes multicellulaires stables sont presque impossibles à atteindre.

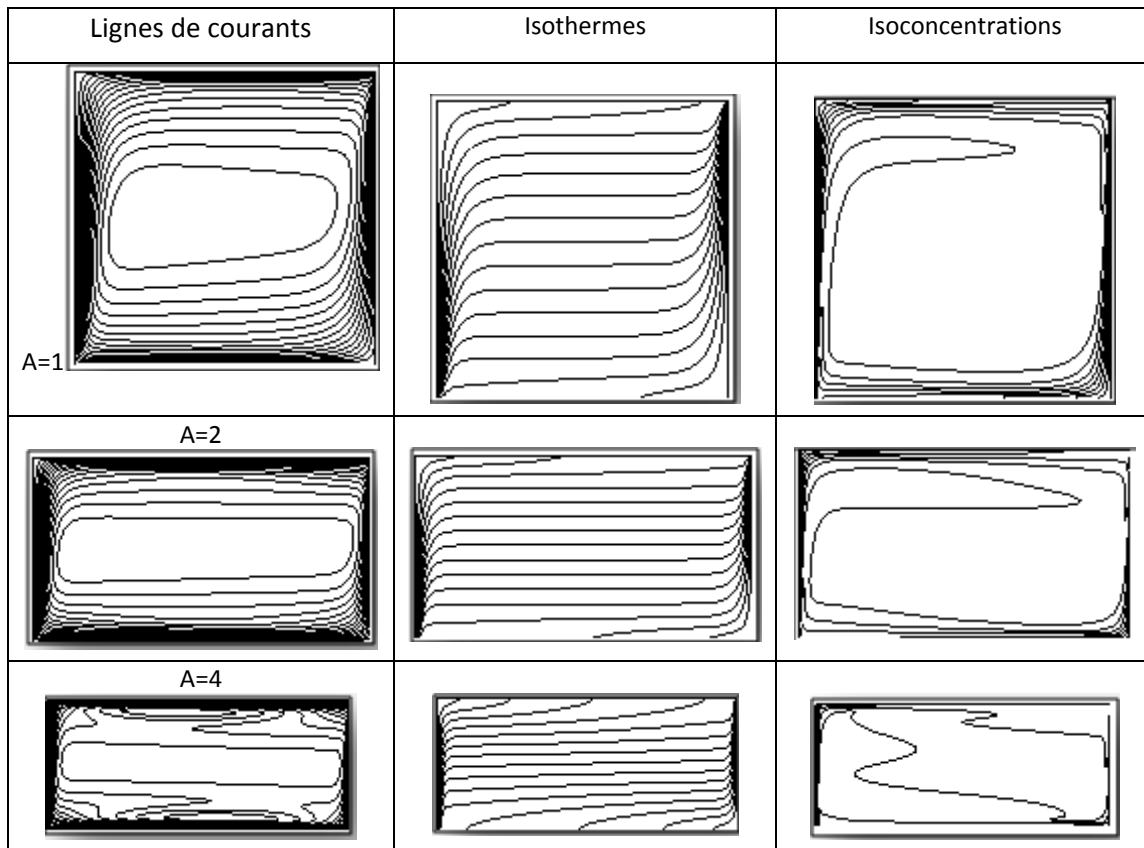
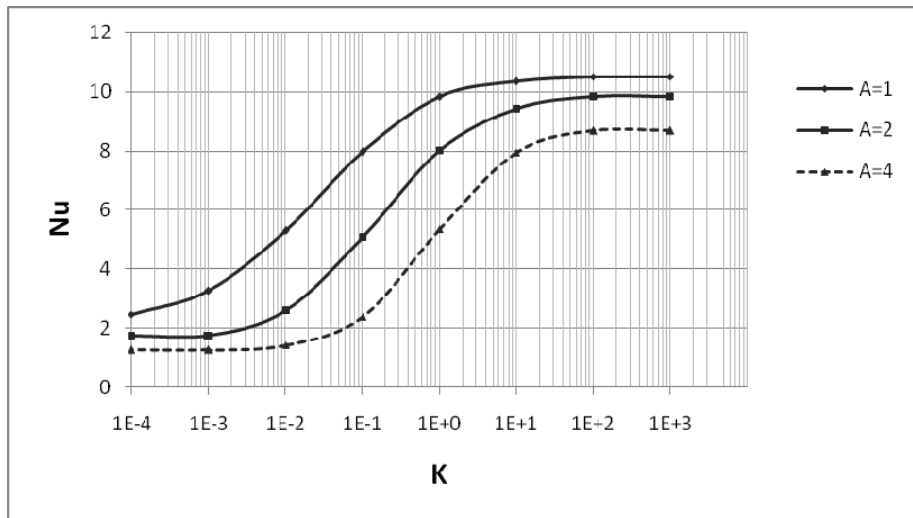


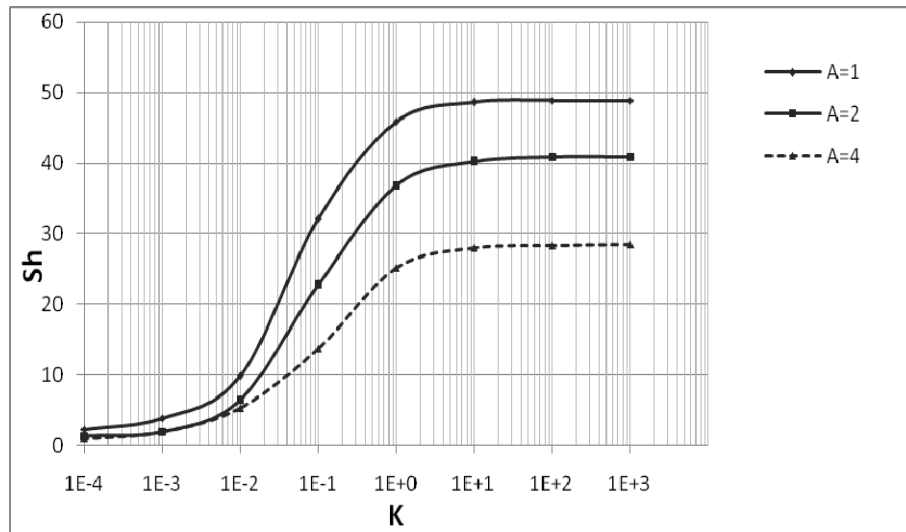
Figure 5.12 : Cartes d'isovaleurs en fonction du rapport de forme A :
 $Le = 10$, $Ra = 10^3$, $N = 0$, $Da = 10^{-7}$ et $K = 10^3$.

5.3.6.2 Transfert de chaleur et de masse

L'effet du rapport de forme A sur le transfert de chaleur et de masse, est illustré sur les figures 4.13a et 4.13b pour différentes valeurs d'anisotropie en perméabilité K , comprises entre 10^{-3} et 10^3 , avec $Ra=10^3$, $Le=10$ et $N=0$. En augmentant le rapport de perméabilité K , il s'avère que les nombres de Nusselt et de Sherwood tendent vers une valeur asymptotique, fonction de rapport de forme A . Pour un taux d'anisotropie fixe, les transferts de chaleur et de masse diminuent avec l'augmentation de A puisque la longueur des parois active diminue. On remarque aussi que le transfert de masse augmente rapidement comparativement au transfert de chaleur.



(a)



(b)

Figure 5.13 : Effet du rapport de forme sur le transfert de chaleur et de masse pour : $Da=10^{-7}$, $N = 0$, $Le = 10$ et $Ra = 10^3$.

5.3.7 Effet de l'anisotropie combinée

5.3.7.1 Structure de l'écoulement

La figure 5.14 présente les lignes de courant, les isothermes et les isoconcentrations pour des différentes valeurs du taux d'anisotropie en perméabilité K avec une valeur fixe de l'anisotropie thermique λ . On constate que les isovaleurs obtenus pour $K=10^3$ et 10 sont pratiquement identiques, l'écoulement est parallèle au centre de la cavité alors que pour le cas $K = 10^{-3}$, l'écoulement est très faible, ceci à cause de la faible perméabilité horizontale

qui est aussi à l'origine de l'apparition de l'écoulement monocellulaire et fait chuter les transferts. Les isothermes sont de moins en moins déformées. Pour les faibles valeurs de K les isothermes se déforment de nouveau au centre de la cavité.

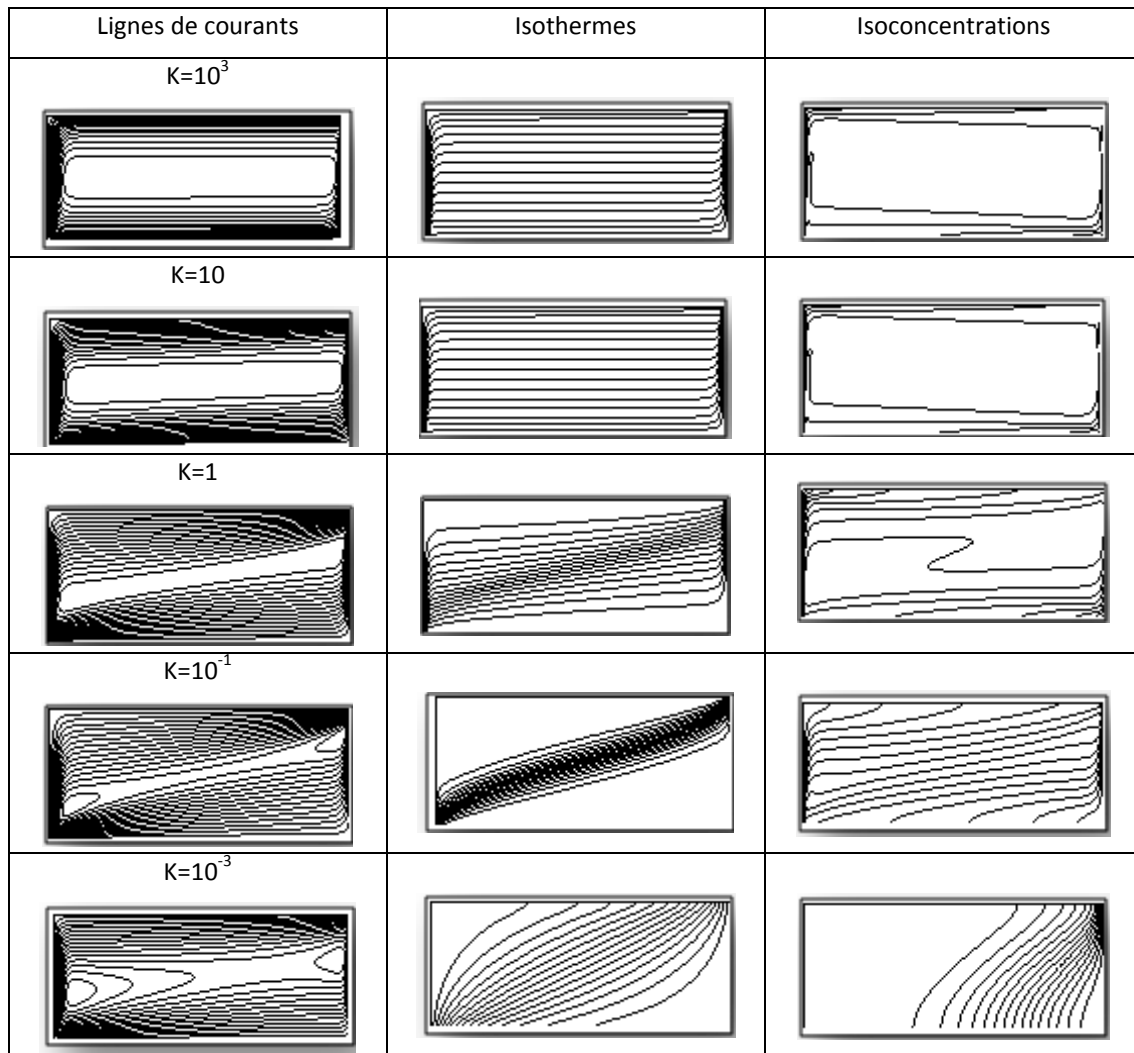
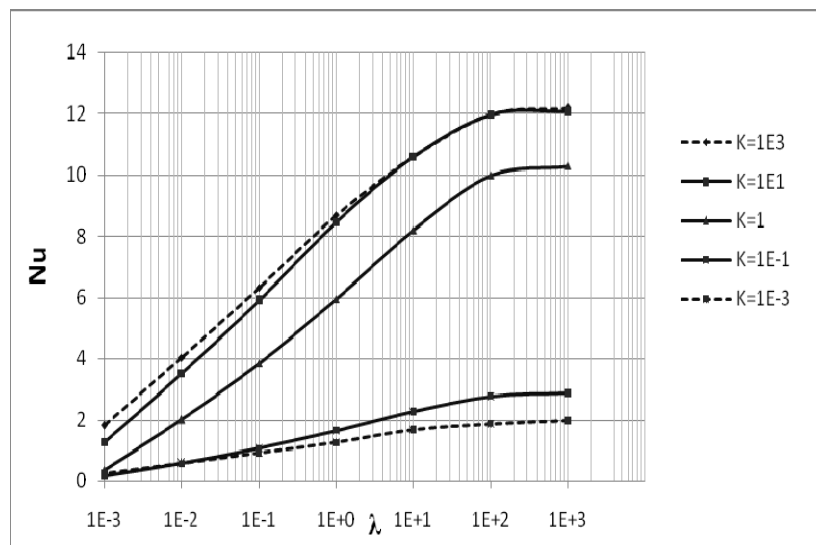


Figure 5.14 : Carte d'isovaleurs pour différents rapports de perméabilité K pour :
 $Da=10^{-7}$, $Le=10^2$, $Ra=10^3$, $N=0$, $Le=10$

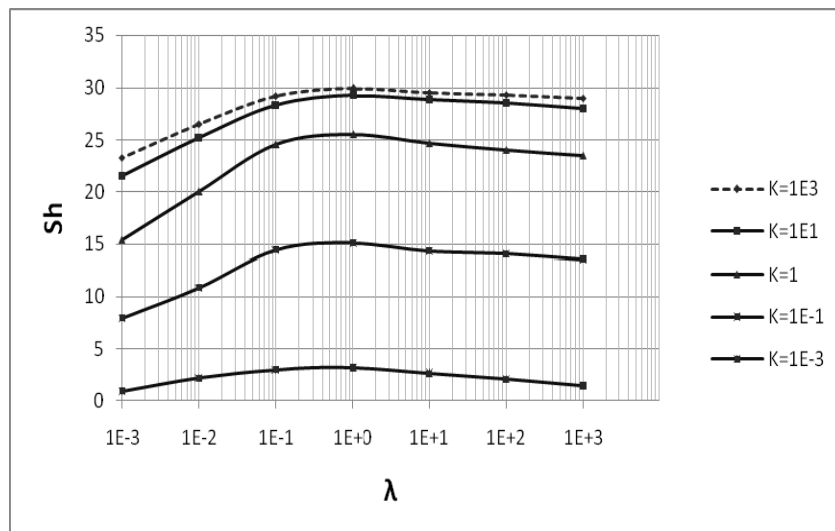
5.3.7.2 Transfert de chaleur et de masse

Jusqu'à présent, nous avons étudié l'influence de l'anisotropie thermique et en perméabilité chacune séparément afin de comprendre l'aspect fondamental des phénomènes et de leurs effets sur les transferts de chaleur et de masse. Dans la dernière partie de ce chapitre nous nous sommes intéressés à varier la perméabilité et la conductivité thermique pour avoir une meilleure compréhension de la complexité du couplage. La figure

5.15 représente l'évolution des transferts de chaleur et de masse respectivement avec le taux d'anisotropie en conductivité λ , pour différentes valeurs du rapport d'anisotropie en perméabilité K . Les transferts sont plus importants avec l'accroissement de K jusqu'à une valeur maximale pour $K = 10^3$. Les nombres de Nusselt et de Sherwood illustrent une tendance presque unique, où on remarque une augmentation de Nu et Sh Pour les faibles valeurs de λ , puis une tendance asymptotique (constante) est également obtenue pour des valeurs de λ supérieur à 1. Après cette analyse on peut dire en générale qu'une anisotropie en perméabilité entraîne une anisotropie thermique et inversement.



(a)



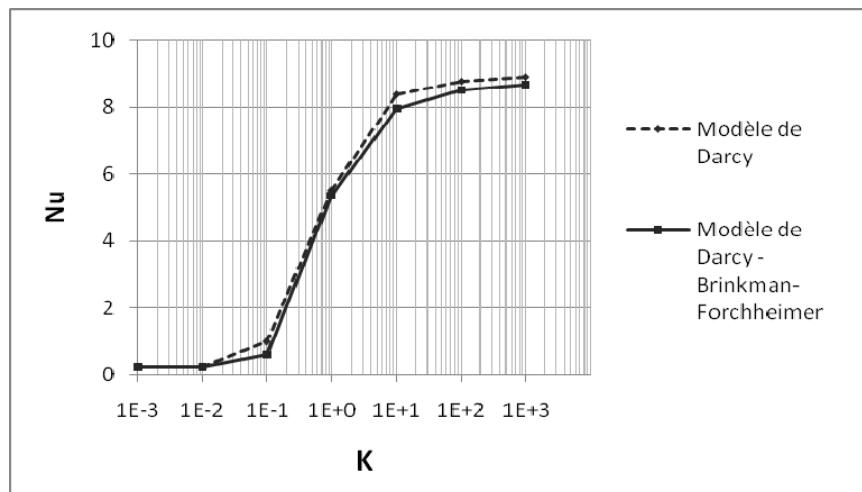
(b)

Figure 5.15 : Evolution du transfert de chaleur et de masse en fonction de l'anisotropie thermique pour différents rapports de perméabilité K : $Da = 10^{-7}$, $Ra = 10^3$, $N = 0$, $Le = 10$ et $A = 4$.

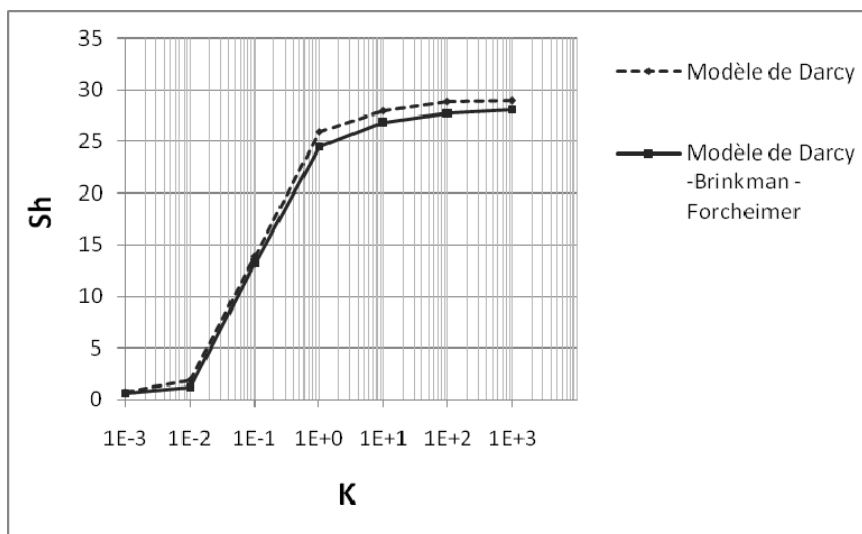
5.4 Comparaisons entre les deux modèles de Darcy et Darcy-Brinkman-Forchheimer

Les figures 5.16a et 5.16b illustrent les variations des nombres de Nusselt et du Sherwood en fonction du taux d'anisotropie en perméabilité pour les deux modèles. On constate une superposition presque parfaite des deux modèles à cause du nombre de Darcy qui est relativement faible $Da=10^{-7}$. Cette valeur de Darcy rend les termes de Forchheimer et de Brinkman moins importants dans les équations du mouvement.

On conclut donc que le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer peut être approximé par le modèle de Darcy. Ce résultat est conforme avec les travaux de Nield et Bejan [3].



(a)



(b)

Figure 5.16 : Evolution du transfert de chaleur et de masse avec l'anisotropie en perméabilité pour les deux modèles ($A=4$, $Da=10^{-7}$, $Ra=10^3$, $Le=10$).

5.5 Conclusion

Le phénomène de la convection thermosolutale avec la prise en compte de l'effet de l'anisotropie en perméabilité K indépendamment de l'anisotropie thermique, dans une cavité horizontale remplie par un fluide binaire a été étudié. Le domaine est soumis à des températures et des concentrations constantes sur les parois verticales. L'influence du taux d'anisotropie en perméabilité sur les transferts a été également étudiée. Cette étude a permis d'identifier deux régimes d'écoulement. L'un pleinement convectif indépendant de K et l'autre modérément convective fonction de K .

Dans un premier temps nos résultats ont été validés par rapport aux travaux réalisés par d'autres auteurs dans le cas d'un milieu anisotrope en perméabilité. Ces résultats sont en accord avec ceux obtenus par ces auteurs. L'influence des paramètres tels que les nombres de Darcy, de Rayleigh, de Lewis et le rapport des forces de volume, sur la structure d'écoulement, le transfert de chaleur caractérisé par le nombre de Nusselt, Nu et le transfert de masse caractérisé par le nombre de Sherwood, Sh a été discutée.

Pour les faibles valeurs de K , les solutions obtenues sont diffusives et pour des valeurs élevées de K , la solution est convective indépendante de l'anisotropie en perméabilité. Dans le cas de la variation de la perméabilité et la conductivité thermique, on peut dire qu'une anisotropie thermique provoque une anisotropie en perméabilité et inversement.

Conclusion générale

Il est montré dans la littérature que les transferts de chaleur et de masse induits par convection thermique dans un milieu poreux anisotrope sont peu comparativement à ceux concernant les travaux sur la convection naturelle dans les milieux isotropes.

Dans ce contexte, l'étude des transferts de chaleur et de masse par convection naturelle dans une cavité rectangulaire horizontale poreuse et anisotrope, saturée par un fluide binaire a fait l'objet de la présente thèse.

Les conditions aux limites verticales de type Dirichlet (température et concentration constantes) ont été considérées. Les parois horizontales sont maintenues imperméables et adiabatiques. Le modèle de Darcy-Brinkman- Forchheimer et l'approximation de Boussinesq ont été utilisés pour établir les équations gouvernantes du système. Une méthode numérique basée sur l'approche des volumes de contrôle a été adoptée. Le code de calcul a été validé en se basant sur les résultats disponibles dans la littérature.

Une étude paramétrique a été conduite. L'effet de l'anisotropie en conductivité thermique sur le transfert de chaleur et de masse a été étudié. Les résultats obtenus ont été confrontés pour une large gamme de paramètres gouvernant le problème (tel que : Le nombre de Darcy, Da , le nombre de Rayleigh thermique, Ra , le nombre de Lewis, Le , et le rapport des forces de volume, N). L'augmentation du nombre de Darcy donne lieu à une diminution du transfert de chaleur et de masse. Dans le cas où les forces de volume d'origine thermique dominantes, Nu dépend du nombre de Rayleigh thermique, alors que le nombre de Sherwood Sh dépend des nombres de Rayleigh et de Lewis. Il a été constaté que lorsque la convection est d'origine solutale et les forces de volume sont de l'ordre de 20, le transfert de masse devient indépendant de l'anisotropie thermique. Ces résultats sont comparables à ceux obtenus par d'autres auteurs.

Enfin, la convection thermosolutale dans un milieu poreux anisotrope en perméabilité a été traitée. Les effets des paramètres de contrôle sur la structure de l'écoulement et le transfert de chaleur et de masse ont été étudiés. Une comparaison entre le modèle de Darcy

et de Darcy-Brinkman-Forchheimer a également eu lieu. Les résultats suivants ont pu être mis en évidence.

- Identification de trois zones de transfert. Un écoulement diffusif pur pour les faibles rapports de perméabilité K et deux types d'écoulement convectif pour K modéré.
- Quand le nombre de Darcy augmente l'intensité de l'écoulement augmente ainsi que le transfert de chaleur et de masse.
- Les transferts thermiques et massiques augmentent avec le nombre de Rayleigh. Cet accroissement est d'autant plus important que l'anisotropie en perméabilité augmente.
- Apparition de deux cellules de convection secondaires à l'intérieur de l'écoulement principal pour les faibles valeurs du nombre de Rayleigh.
- L'effet combiné de l'anisotropie thermique et l'anisotropie en perméabilité dans un milieu poreux a montré, qu'en général, une anisotropie en perméabilité entraîne une anisotropie thermique et inversement.

En perspective, il sera également nécessaire de compléter le présent travail par l'étude de transfert de chaleur et de masse avec changement de phase dans des cavités contenant des couches poreuses anisotropes dans le cas 3D d'un écoulement de Darcy - Brinkman. Des études expérimentales complémentaires seront très intéressantes pour une validation approfondie de la modélisation proposée. Enfin, il sera question d'implémentation du modèle dans un code de calcul en vue d'application aux problèmes pratiques.

Références bibliographiques

- [1] Bear J., *Hydraulics of Groundwater*. McGraw-Hill Series in Water Resources and Environmental Engineering, New York, 1979.
- [2] Marsily G., *Hydrogéologie Quantitative*. Paris, New York, Milan, Mexico, Rio de Janeiro, Masson, 1981.
- [3] Nield D. A., Bejan A., *Convection in Porous Media*. Springer, New York, 1999.
- [4] Alavyoon F., On natural convection in vertical porous enclosures due to prescribed fluxes of heat and mass at the vertical boundaries. *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 36, pp. 2479-2498, 1993.
- [5] Darcy H., *Les fontaines publiques de la ville de Dijon.*, Paris, Victor Dalmont, 1856.
- [6] Ferrandon J., *Mécanique des terrains perméables*, La Houille Blanche, Grenoble, n°4/1954, n° 1,2,3/1955.
- [7] Brinkman H.C., A calculation of viscous force exerted by a flowing fluid on dense swarm of particles. , *Applied Sciences Research, A₁*, pp. 27-34, 1947.
- [8] Ward J. C., Turbulent flow in porous media., *J. Hyd. Div. ASCE*, Vol. 90, pp. 1-12, 1964
- [9] Wooding R. A., Steady state free thermal convection of liquid in a saturated permeable medium, *J. Fluid Mech.*, Vol. 2, pp. 273-285, 1957.
- [10] Lauriat G., Prasad V., Natural convection in vertical porous cavity: Numerical study for Brinkman – extended Darcy formulation, *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 109, pp. 688-696, 1987.
- [11] Nield D. A., Onset of Thermohaline Convection in Porous Medium, *Water Resources Research*, 4, pp. 553-560, 1968.
- [12] Taunton J., Lightfoot E. N., Thermohaline Instability and Salt Fingers in Porous Medium., *Phys. Fluids*, 15, pp.748-753, 1972.
- [13] Jang J. Y., Chang W. J., The flow and the vortex instability of horizontal natural convection in porous medium resulting from combined heat and mass buoyancy effects., *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 31, pp. 769-777, 1988.
- [14] Poulidakos D., Double Diffusive Convection in a Horizontal Sparcely Packed Porous Layer, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 13, pp. 587-598, 1986.
- [15] Trevisan O.,V., Bejan A., Natural Convection with Combined Heat and Mass Transfer Buoyancy Effects in a Porous Medium. , *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 28, pp.1597-1611, 1985.
- [16] Rosenberg N. D., Spera F. J., Thermohaline Convection in a Porous Medium Heated from Below, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 35, pp. 1261-1273, 1992.
- [17] Amari B., Vasseur P., Bilgen E., Natural Convection of Non Newtonian Fluids in a Horizontal Porous Layer., *Wärme-und Stoffübertragung*, vol. 29, pp. 185-193, 1994.
- [18] Younsi R., Harkati A., Kalache D., Numerical simulation of double diffusive natural convection in porous cavity: Opposing flow, *Arabian J. for Sc. and Eng.* , Vol. 26(2b), pp. 145-155, 2002.
- [19] Nithiarasu P., Seetharamu K. N., Sundararajan T., Double – diffusive natural convection in an enclosure filled with fluid saturated porous medium: A generalized Non – Darcy Approach., *Num. Heat Transfer*, Vol. A (30), pp. 413-426, 1996.

- [20] Goyeau B., Songbe J. P., Gobin D., Numerical study of double – diffusive natural convection in a porous cavity using the Darcy – Brinkman formulation., *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 39(7), pp. 1363-1378 ,1996.
- [21] Mamou M., Vasseur P., Thermosolutal Bifurcation Phenomena in a Porous Enclosure Subject to Vertical Temperature and Concentration Gradients., *J. Fluid Mechanics*, 395 ,pp. 61–87, 1999.
- [22] Mahidjiba A., Robillard L., Vasseur P., Onset of penetrative convection of cold water in a porous layer under mixed boundary conditions, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 49, pp. 2820-2828, 2006.
- [23] Kuznestov A. V., Nield D. A., The effects of combined horizontal and vertical heterogeneity on the onset of convection in porous medium: double diffusive case. *Transp Porous Med*, vol. 72, pp. 157-170, 2008.
- [24] Alloui Z., Dufau L., Beji H., Vasseur P., Multiple steady states in a porous enclosure partially heated and fully salted from below., *Int. J. of Therm. Sci.* vol. 48, pp. 521–534, 2009.
- [25] Weber J. E., The boundary Layer Regime for Convection in a Vertical porous Layer. , *Int. J. Heat Mass Transfer*, 18, pp.569–573, 1974.
- [26] Bejan A., Khair K. R., Heat and mass transfer by natural convection in porous medium., *Int. J. Heat Mass Transfer*, 28, pp. 909-918, 1985.
- [27] Sathe S. B., Tong T. W., Measurements of natural convection in partially porous rectangular enclosures of aspect ratio 5., *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, Vol. 15, pp. 203-212 , 1988.
- [28] Beckermann C. Viskanta R., Ramadhyani S., Natural convection in vertical enclosures containing simultaneously fluid and porous layers., *J. Fluid Mech.*, Vol. 186, pp. 257-281, 1988.
- [29] Lin T. F., Chang W. R., Unsteady Double Diffusive Convection With Opposed Buoyancy Forces in a Vertical Enclosure., *ASME, HTD*, 198 .pp. 83-90, 1992.
- [30] Alavyoon F., Masuda Y. et Kimura S., On natural convection in vertical porous enclosures due to opposing fluxes of heat and mass at the vertical walls., *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 37, pp. 195-206, 1994.
- [31] Bian W., Vasseur P., Bilgen E., Boundary-Layer Analysis for Natural Convection in a Vertical Porous Layer Filled with a Non Newtonian Fluid., *International Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 15, No. 5, pp. 384-391, 1994,
- [32] Bian W., Vasseur P., Bilgen E., Natural Convection of Non Newtonian Fluid in an Inclined Porous Layer., *Chemical Engineering Communication*, vol. 129, pp. 79-97,1994.
- [33] Rastogi S. K., Poulikakos D., Double Diffusion from a Vertical Surface in a Porous Region Saturated with a Non Newtonian fluid, *Inter. Jour. Heat and Mass Transfer*, vol. 38, No. 5, pp. 935-946, 1995.
- [34] Bennacer R., Gobain D., Cooperating Thermosolutale Convection in Enclosure –I. Scale Analyses and Mass Transfer, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 39, pp. 2671-2681, 1996.
- [35] Karimi-Fard M., Charrier-Mojtabi M.C., Vafai K., Non-Darcian Effects on Double-Diffusive Convection within a Porous Medium., *Num. Heat Transfer, A* 31,pp. 837–852, 1997.
- [36] Mamou M., Hasnaoui M., Amahmid A., Vasseur P., Stability Analysis of Double Diffusive Convection in a Vertical Brinkman Porous Enclosure., *Int. Comm. Heat and Mass Transfer*, 25, 4, pp.491-500, 1998.
- [37] Amahmid A., Hasnaoui M., Vasseur P., Etude Analytique et Numérique de la Convection Naturelle dans une Couche Poreuse de Brinkman Doublement Diffusive. , *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 42, 15, pp. 2991-3005, 1999

- [38] Bourich M., Amahmid A., Hasnaoui M., Double Diffusive Convection in a Porous Enclosure Submitted to Cross Gradients of Temperature and Concentration , *Energy Conversion and Management*, V.45, 11/12, pp.1655-1670, 2004.
- [39] Bousri A., Bouhadek K., Etude numérique du transfert de chaleur et de masse dans un cylindre rempli d'un milieu poreux réactif., Eurotherm seminar N°81, Reactive Heat Transfer in Porous Media, école des mines d'Albi, France, June 4-6, 2007.
- [40] Ingham D. B., Pop I., *Transport Phenomena in Porous Media*. Pergamon, Elsevier, 1998.
- [41] Neal G., Degree of Anisotropy for Fluid Flow and Diffusion (Electrical Conduction) Through Anisotropic Porous media., *AIChE J.*, 23, pp. 56-62, 1977.
- [42] Castinel G., Combarous M., Critère d'apparition de la convection naturelle dans une couche poreuse anisotrope., *C. R. Acad. Sc. Paris, Série B*, 278, pp.701-704, 1974.
- [43] Epherre J. F., Critère d'application de la convection naturelle dans une couche poreuse anisotrope. *Rev. Gén. Thermique*, 168, pp. 949-950, 1975.
- [44] Tyvand P. A., Heat Dispersion Effet on Thermal Convection in Anisotropic Porous Media., *J. Hydrol.*, 34, pp. 335-342, 1977.
- [45] Kvernold O., Tyvand P. A., Nonlinear thermal convection in anisotropic porous media., *J. Fluid Mech.*, 90, pp. 609-624, 1979.
- [46] McKibbin R., Tyvand P. A., Anisotropic Modelling of Thermal Convection in Multilayered Porous Media., *J. Fluid Mechanics*, Vol. 118, pp.315-339, 1982.
- [47] Parthiban C., Patil P. R., Effect of Inclined Temperature Gradient on Thermal Instability in an Anisotropic Porous Medium. *Warme-und Stoffubertragung*, 29, pp. 63-69, 1993.
- [48] Degan G., Vasseur P., Bilgen E., Convective Heat Transfer in a Vertical Anisotropic Porous Layer., *Inter. Jour. Heat and Mass Transfer*, 38, No11, pp. 1975-1987, 1995.
- [49] Degan G., Vasseur P., Natural Convection in a Vertical Slot Filled an Anisotropic Porous Medium with Oblique Principal Axes., *Numerical Heat Transfer*, 30, pp.397-412, 1996.
- [50] Degan G., Vasseur P., The boundary-Layer Regime in a Vertical Porous Layer with Anisotropic Permeability and Boundary Effects., *Inter. J. Heat and Fluid Flow*, 18, No11, pp. 334-343, 1997.
- [51] Mamou M., Mahidjiba A., Vasseur P., Robillard L., Onset of Convection in an Anisotropic Porous Medium Heated From Below by a Constant Heat Flux., *Inter. Communication of Heat and Mass Transfer*, 25, N°6, pp. 799-808, 1998.
- [52] Mahidjiba A., Robillard L., Vasseur P., Mamou M., Onset of Convection in an Anisotropic Porous Layer of Finite Lateral Extent., *Inter. Communication Heat and Mass Transfer*, 27, N°3, pp. 333-342, 2000.
- [53] Howle L. E., Georgiadis' J. G., Natural convection in porous media with anisotropic dispersive thermal conductivity, *Intern. J. Heat and Mass Transfer* , 37, Issue 7, pp. 1081–1094, 1994.
- [54] Aboubi K., Robillard L., Bilgen E., Convection Heat Transfer in Horizontal Annulus Filled with an Anisotropic Porous Medium., *The Fourth ASME-JSME Thermal Engineering.*, 3, pp. 415-422, 1995.
- [55] Zhang X., Ngyen T. H., Kahawita R., Convective Flow and Heat Transfer in an Anisotropic Porous Layer with Principal Axes Non-Coincident with the Gravity Vector., *Fundamentals of Natural Convection ASME, HTD*, 264, pp. 79-86, 1993.
- [56] Mahidjiba A., Convection naturelle en milieu poreux anisotrope – effet du maximum de densité. Thèse de Doctorat, Université De Montréal. 2001.

- [57] Degan G., Vasseur P., Influence of anisotropy on convection in porous media with non uniform thermal gradient, *Inter. J. Heat and Mass Transfer* N°46, p.781–789, 2003.
- [58] Chen F., Lu J. W., Onset of salt-finger convection in an anisotropic and inhomogeneous porous media., *Int. J. Heat Mass Transfer*, 35, pp. 3451-3464, 1992.
- [59] Malashetty M. S., Anisotropic thermoconvective effects on the onset of double-diffusive convection in a porous medium, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 36, pp. 2397-2401, 1993.
- [60] Zheng W., Robillard L., Convection in a square cavity filled with an anisotropic porous medium saturated with water near 4°C., *Inter. J. of Heat and Mass Transfer* N°44, p.3463–3470, 2001.
- [61] Ni J., Beckermann C., Natural Convection in a Vertical Enclosure Filled With Anisotropic Porous Media, *Journal of Heat Transfer*, 113, pp. 1033-1037, 1991.
- [62] Walker K. L., Homsy G. M., Convection in a Porous Cavity., *Journal of Fluid Mechanics*, 87, pp. 449-474, 1978.
- [63] Shiralkar G. S., Haajizadeh M., Tien G. L., Numerical Study of High Rayleigh Number Convection in a Vertical Porous Enclosure., *Numerical Heat Transfer*, 6, pp.223-234, 1983.
- [64] Kimura S., Masuda Y., Kazuo Hayashi T., Natural convection in an anisotropic porous medium heated from the side (Effects of anisotropic properties of porous matrix), *Heat Transfer Japan* 22, pp. 139–153, 1993.
- [65] Chan W. J., Lin H. C., Natural convection in a finite wall rectangular cavity filled with an anisotropic porous medium, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 37, 303-312, 1994.
- [66] Song M., Viskanta R., Natural convection flow and heat transfer within a rectangular enclosure containing a vertical porous layer, *Int. J. Heat Mass Transfer*, V. 37(16), pp. 2425-2438, 1994.
- [67] Degan G., Vasseur P., Bilgen E., Convective heat transfer in a vertical anisotropic porous layer., *Int. J. Heat Mass Transfer*, 38, pp. 1975-1987, 1995.
- [68] Bennacer R., Tobbal A., Beji H., Vasseur P., Double Diffusive Convection in a Vertical Enclosure Filled with Anisotropic Porous Media, *Int. J. Thermal Sciences*, 40, 1, pp. 30-41, 2001.
- [69] Bera P., Khalili A., Double-Diffusive Natural Convection in an Anisotropic Porous Cavity with Opposing Buoyancy Forces: Multi-Solutions and Oscillations., *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 45, 15, pp.3205-3222, 2002.
- [70] Pakdee W., Rattanadecho P., Unsteady effects on natural convective heat transfer through porous media in cavity due to top surface partial convection, *Applied Thermal Engineering*, Elsevier Ltd, 26, pp. 2316–2326, 2006.
- [71] Yoo H., Viskanta R., Effect of Anisotropic Permeability on the Transport Process During Solidification of a Binary Mixture, *Inter. J. of Heat and Mass Transfer*, 35, No 10, pp. 2335-2346, 1992.
- [72] Whitaker S., Advances in theory of fluid motion in porous media, *Industrial and engineering chemistry*, vol. 12 (61), pp .15-26, 1969.
- [73] Patankar S. V., *Numerical heat transfer and fluid flow*, Hemisphere, New York, 1980.
- [74] Lauriat G., Prasad V., Non – Darcian effect on natural convection in a vertical porous enclosure, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 32(11), pp. 2135-2148, 1989.
- [75] Bennacer R., Tobbal A, Beji H., Convection naturelle Thermosolutale dans une Cavité Poreuse Anisotrope: Formulation de Darcy-Brinkman, *Rev. Energ. Ren.*, Vol. 5, pp. 1-21, 2002.
- [76] Safi S., Benissaad S., Heat and Mass Transfer in Anisotropic Poursous Media., *Advanced in Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 5 , pp.15-26, 2012.

[77] Davis S. N., Porosity and Permeability of natural Flow through porous media, New York, Academic Press, pp.53-89, 1969.