



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIC ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE



MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITE CONSTANTINE I

جامعة عين شمس 1

Faculté des Sciences de la Technologie
Département : Génie Civil

الهيئة العامة للتعليم والتقنية
قسم الهندسة المدنية

N° d'ordre :

Série :

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du
Diplôme de Magister en Génie Civil

Option

SOL

Présenté par: CHAIB Sihem
Thème

Comportement vibratoire d'une structure rail sur appuis élastiques

Président : Pr. BELOUAR Abd Elghani

Rapporteur : Pr. LASSOUED Rachid

Examineur : Pr. CHABIL Hocine

Examineur : Pr. DJEBBAR Nabil

Soutenue en Octobre 2014



*« I Was To Work On Rolling Noise; I Should Be Able To Solve
The Rolling Noise Problem In Six Months Or A Year.
It Wasn't Nearly 20 Years Later That This Could Be Fulfilled,
Although Even Now Rolling Noise Is Not Completely "Solved". »*

“David Thompson”.

Remerciements

Je remercie, en premier lieu, mon dieu qui a bien voulu me donner la force pour effectuer le présent travail.

Je remercie mes chers parents pour leurs soutiens, leurs patiences et de leur encouragement.

*J'exprime toute ma profonde reconnaissance à notre dynamique professeur **R.Lassoued** mon directeur de thèse, Un remerciement particulier et sincère pour tous ces efforts fournis, ces orientation et ces Précieux conseils et surtout pour sa patience.*

Mes plus vifs remerciement vont également D.Kourta Amel pour être compétente de transmettre ces aides et sont support...

Je remercie également P.Samai pour ces conseil précieuses et son support moral.

Sans oublier tous les enseignants du département de génie civil.

Je remercie également le président de jury P.Belouar et les membres de jury P.H.Chabil et le P.N.Djebbar, de nous avoir honorés d'accepter avec grande sympathie de siéger parmi notre jury.

Aujourd'hui, ici rassemblés auprès des jurys, Nous prions dieu que cette soutenance Fera signe de persévérance Et que nous serions enchantés Par notre travail honoré.

Dédicaces

Un grand merci à mes parent et surtout, et rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être.

A mes frères et sœurs, et je cite en particulier AZZA, DJOZEPH et NESRINE.

A mes amis Wahiba, Soulef, et Nazim.

à tous mes collègues du Magistère promotion 2011-2014.

Ainsi qu'à tous mes collègues au département de génie-civil.

Résumé

Malgré de nombreux essais technologiques le train et les divers formes sous lesquelles il se présente 'TGV, corail, train....'est aperçu comme une source multiple de problème environnementaux : pollution, bruit, vibration..., la simulation du comportement ferroviaire est devenue incontournable à cause de coût et des difficultés des essais expérimentaux.

Après une description de la voie ferrée et ces différents constituants, en spécifiant leurs rôles mécaniques, et une synthèse sur les travaux réalisés sur la modélisation du comportement dynamique des poutres rail lors du passage d'un train ; le comportement de la poutre rail modélisée en poutre d'Euler-Bernoulli est analysé, Concernant le sol, il est représenté par le modèle de Winkler, en premier lieu La méthode de l'intégrale de transformée de Fourier est utilisée pour résoudre le problème. Le retour inverse permet de déterminer donc la réponse dynamique dans le domaine spatio-temporelle. Ce passage est réalisé en évaluant l'intégrale basée sur le théorème des résidus de Cauchy. Une analyse paramétrique est menée par rapport à l'amortissement critique ainsi qu'aux vitesses critiques. Une discussion est réalisée pour les résultats obtenues sous environnement MAPLE et MATLAB.

La deuxième technique d'analyse est la superposition des modes propres, une longueur de transfert est déterminée de cas de vibration statique. La réponse de la structure couplée au sol est obtenue en résolvant analytiquement l'équation différentielle du quatrième ordre régissant le mouvement. La résolution est obtenue en utilisant la méthode de superposition modale et l'intégrale de convolution. Les résultats obtenus ont fait l'objet d'une analyse paramétrique.

Mots clés : *poutre Euler, modèle de Winkler, superposition modale, intégrale de convolution, transformé de Fourier, transformé de Fourier inverse, théorème des résidus de Cauchy.*

ABSTRACT

Despite numerous technological booms train and the various forms in which it occurs ' TGV , coral, train 'Realized as a multiple source of environmental problems: pollution, noise, vibration ... the simulation of rail behavior has become essential because of the cost and difficulties of the experiments.

After a description of the railway and the various components , specifying their mechanical roles, and a summary of the work done on modeling the dynamic behavior of beams rail when a train passes ; the behavior of the beam rail modeled Euler-Bernoulli beam is analyzed Regarding the soil, it is represented by the Winkler model , first method of the integral Fourier transform is used to solve the problem. The traceback can therefore determine the dynamic response in the spatio- temporal domain. This passage is achieved by evaluating the integral based on the Cauchy residue theorem. A parametric analysis is conducted with respect to the critical damping and the critical speeds. A discussion is made to the results obtained in MAPLE and MATLAB environment.

The second analysis technique is the superposition of the natural modes; a transfer length is determined statically case vibration. The response of the structure coupled to ground is obtained by solving analytically the differential equation of the fourth order governing the movement. The resolution is obtained using the method and the modal superposition convolution integral . The results obtained have been subject to parametric analysis .

Keywords : *Euler beam, Winkler model, modal superposition, convolution integral, Fourier transform, inverse Fourier transform, Cauchy residue theorem.*

TABLE DES MATIERES :

المقدمة.....	I
RESUME.....	II
ABSTRACT	III
Table des Matière.....	IV
Liste des figures	V
Liste des tableaux.....	VI
<i>LISTE DES SYMBOLES ET NOTATIONS</i>	
<i>INTRODUCTION GENERALE.....</i>	<i>1</i>
<i>CHAP. I. LES CONSTITUANTS DE LA VOIE FERREE.....</i>	<i>3</i>
I.1. Introduction	3
I.2. Description et rôles de la structure de la voie.....	3
I.2.1. La voie	4
I.2.2. Le rail.....	4
I.2.3. Les traverses.....	6
I.2.4. Systèmes d’attaches.....	7
I.2.5. Le ballast	8
I.2.6. Les semelles.....	9
I.2.7. structure d’assise.....	9
I.2.8. La pose de la voie.....	10
I.2.9. La conicité.....	12
I.3. Source de chargement	13
I.4. Charges exercées sur le rail	14
I.5. Les défauts de la voie	15
I.6. Entretien du rail.....	16
I.7. Modélisation des éléments de la voie ferrée.....	17
I.7.1. Le modèle de véhicule	18

I.7.2. Le rail.....	18
1.7.3. La semelle.....	18
I.7.4. La traverse.....	19
I.7.5 Le ballast.....	19
I.7.6. Les sous-couches et le sol.....	19
I.7.7. Développement d'un modèle numérique de l'interaction sol-voie....	19
I.8. Conclusion.....	20
CHAP.II. L'ETAT DE L'ART.....	22
II.1. Introduction.....	22
II.2. Travaux réalisées.....	22
II.3. Structure sur des supports élastiques-model de Winkler.....	34
II.4. Poutre Euler-Bernoulli.....	35
II.5. Evaluation pour la détermination du module de réaction du sol.....	36
II.5.1. Différentes expressions du module de réaction du sol.....	36
II.5.2. Essais expérimentales pour avoir le module de réaction du sol.....	37
II.6. Conclusion.....	39
CHAP. III. MODELE ANALYTIQUE DE FRYBA.....	40
III.1. Introduction.....	40
III.2. Hypothèse du problème.....	40
III.3. L'équation de mouvement.....	41
III.4. Méthode de résolution.....	41
III.4.1 Pôles de la fonction des variables complexes.....	43
III.4.2 Solutions.....	44
III.5. Analyse et validation numériques des différents cas de vibration.....	46
III.5.1 Cas statique $\alpha = 0$	46

III.5.2 Cas non amorti $\beta = 0$	48
III.5.3 Faible amortissement $\beta \ll 1$	53
III.5.4 Amortissement critique $\beta = \beta_{cr}$	58
III.5.5 Amortissement sup-critique $\beta > \beta_{cr}$	62
III.5.6. Déflexion et moment fléchissant et la force de cisaillement au point d'application de la charge	65
III.6. Analyse paramétrique et discussion des résultats	66
III.6.1. Effet de la vitesse de l'excitation	68
III.6.2. Effet de paramètres physiques du sol sur la réponse de la poutre... 76	
III.6.2.1. Effet de la variation du module de réaction	76
III.6.2.2. l'influence de la nature du sol sur la réponse dynamique.....	77
III.6.2.3. Comparaison entre les différentes recherches sur le module de réaction :	79
III.6.3. Effet de la rigidité flexionnelle du rail.....	81
III.7. Conclusion.....	83
<i>CHAP. IV. MODELE ANALYTIQUE AVEC LONGUEUR ELASTIQUE</i>	
IV.1. Introduction	84
IV.2 Mécanique de génération de vibration	84
IV.2.1 Excitation quasi-statique.....	84
IV.2.2 Excitation dynamique	84
IV.3 Hypothèse du problème	85
IV.4 Equations du mouvement	85
IV.4.1 Déplacement statique	86
VI.4 .2 Réponse dynamique.....	92
IV.4.2.1. Vibration libre.....	95
IV.4.2.2. Vibration forcée.....	98

IV.4.2.2.1 Intervalle de temps : $0 \leq t \leq 2L/v$	98
IV.4.2.2.2 Intervalle de temps : $t \geq \frac{2L}{v} = t_0$	100
IV.5. Analyses et discussions des résultats.....	101
IV.5.1. L'effet de la vitesse de la source mobile.....	101
IV.5.2. Effet de la rigidité du sol.....	102
IV.5.3. Effet de l'amortissement.....	102
IV.6. Conclusion.....	102
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVE	103

REFERENCES

ANNEXES

LISTE DES FIGURES

I. LES CONSTITUANTS DE LA VOIE FERREE

Fig. I.1. Profil d'une voie ferrée ballastée.....	3
Fig. I.2. Les composantes de la voie ferrée.....	4
Fig. I.3. Rail à patin et différents types de rail	5
Fig. I.4. . Rails. De gauche à droite, type UIC 60, type Vignole, type Broca ou à gorge, type double champignon symétrique, et asymétrique.....	5
Fig. I.5. Rail Vignole, Rail à double champignon, Rail à gorge (type « Broca »).....	6
Fig.I.6. Traverse mono- et traverse bi-bloc en béton	7
Fig. I.7. Système d'attache	8
Fig. I.8. Des grains de ballast.....	8
Fig. I.9. Principe de pose sur appui continu.....	11
Fig. I.10. Principe de pose sur blochets.....	11
Fig. I.11. Principe de pose sur selles.....	12
Fig. I.12. Les défauts de la roue.....	16
Fig. I.13. Modélisation des éléments de la voie ferrée.....	17
Fig. I.14. Description de la méthodologie adoptée dans la modélisation du système véhicule/voie/sol.....	20

II. ETAT DE L'ART

Fig.II.1 : principe d'un essai de plaque	36
Fig.II.2 : Exemple d'un abaque présentant la relation entre le module et l'indice k_v CBR	38

III. MODELE ANALYTIQUE DE FRYBA

Fig. III.1. Poutre sur des supports élastique sous une action mobile.....	40
Fig. III.2. Les pôles de \mathbf{A}_j dans le plan de \mathbf{q} complexe.....	43
Fig. III.3. Déplacement dans le cas statique.....	47
Fig. III.4. Moment de flexion cas statique	47
Fig. III.5. Effort tranchant cas statique.....	48

Fig. III.6. Déplacement de la poutre $\beta = 0$ et $\alpha < 1$	49
Fig. III.7. Moment de flexion de la poutre $\beta = 0$ et $\alpha < 1$	50
Fig. III.8. Effort tranchant de la poutre $\beta = 0$ et $\alpha < 1$	50
Fig. III.9. Déplacement de la poutre $\alpha > 1; \beta = 0$	52
Fig. III.10. Moment de flexion $\alpha > 1; \beta = 0$	52
Fig. III.11. Effort tranchant $\alpha > 1; \beta = 0$	53
Fig. III.12. Déplacement de la poutre $\alpha < 1 ; \beta \ll 1$	55
Fig. III.13. Moment de flexion $\alpha < 1 ; \beta \ll 1$	55
Fig. III.14. Efforts tranchants $\alpha < 1 ; \beta \ll 1$	56
Fig. IV.15. Déplacement ; b. Moment de flexion $\alpha=1 ; \beta \ll 1$	56
Fig. III.16. Déplacement de la poutre $\alpha > 1 ; \beta \ll 0$	57
Fig. III.17. Moment de flexion $\alpha > 1 ; \beta \ll 0$	57
Fig. III.18. Efforts tranchants $\alpha > 1 ; \beta \ll 0$	58
Fig. III.19. Déplacement de la poutre $\beta = \beta cr; a. \alpha < 1; b. \alpha = 1; c. \alpha > 1$	60
Fig. III.20. Moment de flexion de la poutre $\beta = \beta cr; a. \alpha < 1; b. \alpha > 1$	61
Fig. III.21. Effort tranchant dans la poutre $\beta = \beta cr; a. \alpha < 1; b. \alpha = 1; c. \alpha > 1$	62
Fig. III.22. Déplacement de la poutre $\beta > \beta cr ; \alpha = 0.5; \alpha = 1; \alpha = 2$	63
Fig. III.23. Moments de flexions $\beta > \beta cr ; a. \alpha = 0.5; b. \alpha = 1; c. \alpha = 2$	64
Fig. III.24. Effort tranchant $\beta > \beta cr ; a. \alpha = 0.5; b. \alpha = 1; c. \alpha = 2$	65
Fig. III. 25. Les facteurs d'amplification dynamique de la réponse de la poutre par rapport au rapport de vitesse avec différents cas d'amortissement	66
Fig. III. 26. Les facteurs d'amplification dynamique moment fléchissant de la poutre par rapport au rapport de vitesse avec différents cas d'amortissement	66
Fig. III. 27. Les facteurs d'amplification dynamique de la réponse de la poutre par rapport au rapport de vitesse avec différents cas d'amortissement	65
Fig. III.28. Réponse de la poutre $\beta = 0 ; \alpha < 1$	69

Fig. III.29. Moment de flexion ; b. Efforts tranchants $\beta = 0 ; \alpha < 1$	69
Fig. III.30. Réponse de la poutre $\beta = 0$ et $\alpha > 1$	68
Fig. III.31. Moment de flexion ; b. Efforts tranchants $\beta = 0$ et $\alpha > 1$	70
Fig. III.32. Réponse de la poutre $\beta \ll 1 ; \alpha < 1$	71
Fig. III.33. Moment de flexion ; b. Efforts tranchants $\beta \ll 1 ; \alpha < 1$	71
Fig. III.34. Réponse de la poutre $\beta \ll 1 ; \alpha > 1$	72
Fig. III.35. Moment de flexion, b. Efforts tranchants de la poutre $\beta \ll 1 ; \alpha > 1$	72
Fig. III.36. Réponse de la poutre $\beta = \beta_{cr} ; \alpha \leq 1$ et $\alpha > 1$	73
Fig. III.37. Moment de flexion Efforts tranchants $\beta = \beta_{cr}$ et $\alpha \leq 1$	74
Fig. III.38. Moment de flexion Efforts tranchants $\beta = \beta_{cr} ; \alpha > 1$	75
Fig. III.39 Réponse de la poutre $\beta > \beta_{cr} . \alpha \leq 1 ; \alpha > 1$	75
Fig. III.40. Effet de la variation du module de réaction sur la réponse $\beta = 0$	76
Fig. III.41. Effet de la variation du module de réaction sur la réponse $\beta \ll 1 ; \alpha \leq 1$ et $\alpha > 1$.76	
Fig. III.42. Effet de la variation du module de réaction sur la réponse $\beta = \beta_{cr} \alpha \leq 1$ et $\alpha > 1$.77	
Fig. III.43. Effet de la variation du module de réaction sur la réponse $\beta > \beta_{cr} ; \alpha \leq 1$ et $\alpha > 1$.77	
Fig.III.44. L'influence de la nature du sol sur la réponse $\beta = 0 ; \alpha \leq 1 \alpha > 1$	78
Fig.III.45. L'influence de la nature du sol sur la réponse $\beta \ll 1 ; \alpha \leq 1$ et $\alpha > 1$	78
Fig.III.46. L'influence de la nature du sol sur la réponse $\beta = \beta_{cr} ; \alpha \leq 1$ et $\alpha > 1$	79
Fig.III.47. L'influence de la nature du sol sur la réponse $\beta > \beta_{cr} ; \alpha \leq 1$ et $\alpha > 1$	79
Fig. III.48. Représentation des recherches de Biot et Vesic sur K_v	81
Fig. III.49. Effet des caractéristiques physiques du rail. $\beta = 0 ; \alpha \leq 1 \alpha > 1$	81
Fig. III.50. Effet des caractéristiques physiques du rail $\beta \ll 0 ; \alpha \leq 1 \alpha > 1$	82
Fig. III.51. Effet des caractéristiques physiques du rail $\beta = \beta_{cr} ; \alpha \leq 1 \alpha > 1$	82
Fig. III.52. Effet des caractéristiques physiques du rail $\beta > \beta_{cr} ; \alpha \leq 1 \alpha > 1$	82

IV.MODELE ANALYTIQUE BASE SUR LA LONGUEUR ELASTIQUE

Fig. IV.1. illustration du mécanisme de génération de vibration.....	85
--	----

Fig. IV.2 . Poutre sur des supports élastique sous une action mobile	85
Fig. IV.3 . poutre sur des fondations élastiques (modèle de Winkler)	86
Fig. IV.4 . Moment et efforts tranchants sur un élément de la poutre.....	87
Fig. IV.5 . La déflexion statique sur un demi de la poutre.....	90
Fig. IV.6. La déflexion statique de la poutre.....	91
Fig. IV.7 . Le Moment de la poutre infinie en régime statique.....	92
Fig. IV.8 . Les efforts tranchants de la poutre infinie en régime statique	92
Fig. IV.9 . Poutre de longueur élastique sur des supports de Winkler	93
Fig. IV.10 . Les cas possible de vibration sous une charge mobile	94
Fig. IV.11. Effet de la vitesse de la charge mobile le modèle de Fryba et le modèle analytique avec longueur élastique	102
Fig. IV.12 Effet de la rigidité du sol : le modèle de Fryba et le modèle analytique avec longueur élastique.....	102
Fig. IV.13. Effet de l'amortissement: le modèle de Fryba et le modèle analytique avec longueur élastique.....	103

LISTE DES TABLAUX

Tab. II.1. Modèles semi-empiriques pour le calcul du module de réaction du sol	37
Tab. III.1. paramètres physique du rail.....	68

LISTE DES SYMBOLES ET NOTAIIONS

LETTRES LATINS	SGNIFICATION
A	La section de poutre de la poutre
A_n, B_n	Coefficients
B_0	Largeur de référence de la fondation
c	Coefficient d'amortissement
t	Cordonnée temporelle
x	Cordonnée spatiale
E	Module d'Young de la poutre

I	Moment d'inertie de la section transversale du rail
m_r	Masse par unité de longueur du rail
P	Amplitude de la force mobile
EI	Rigidité en flexion
$u(x, t)$	Déflexion de la poutre
$V(x)$	Effort tranchant vertical
$M(x)$	Moment de flexion vertical du rail
$p(x)$	Réaction unitaire élastique du sol
T_n	Fonction temporelle
L	Longueur de la poutre
v	Vitesse de la charge
i	Nombre imaginaire $\sqrt{-1}$
DDL	Degré de liberté
D	Diamètre de la plaque (essai de plaque)
E_{PM}	Module Pression métrique ou module de Ménard
Z	Profondeur de la déformation (essai de plaque)
E_{plaque}	Module du sol (essai de plaque)

LETTRES GRECQUES	SGNIFICATION
α	Nombre d'ondes
k_v	Module de la fondation
β	Rapport d'amortissement
δ	Fonction delta de Dirac
μ	Coefficient de poisson
λ	Nombre d'ondes
ρ	Densité de la poutre
ν_s	Coefficient de poisson du sol

ρ	Densité de la poutre
ν	Coefficient de poisson de la poutre
Φ_n	Fonction des modes propres
\square	Rapport de vitesse (chapitre III)
ω_n	Pulsation propre du système vibratoire
Ω	Pulsation de la charge
ω_d	Pseudo pulsation ou pulsation amortie
α	Coefficient rhéologique ou de structure

<i>SYMBOLES MATHÉMATIQUES</i>	<i>SGNIFICATION</i>
Σ	Sommation
d	Dérivé
∂	Dérivé partiel
π	3.1416
n, m	Nombre des modes
∞	Infinie

Abréviations

<u>L.R.S</u>	Longs Rails Soudés
<u>U.I.C</u>	Union internationale de chemin de fer
<u>CBR</u>	Californian bearing Ratio
<u>FEM</u>	Méthode des Eléments Finis
<u>BEM</u>	Méthode des Eléments de frontières
<u>P.B.T</u>	Plate bearing test
<u>LGV</u>	Les lignes à grande vitesse
<u>TGV</u>	Train à grand vitesse
<u>RDM</u>	Résistance des matériaux.
<u>RVB</u>	Renouvellement Voie Ballast

RCE

Rolling contact fatigue

Durant les années récentes, les transports ferroviaires, aussi bien pour les voyageurs que pour les marchandises, ont connu de grandes avancées caractérisées par la vitesse de plus en plus élevée et le poids des véhicules. Beaucoup de recherches ont été réalisées afin d'améliorer les caractéristiques physiques des voies pour pouvoir supporter des vitesses de véhicules qui sont de plus en plus élevées,

Les études théoriques et expérimentaux montrent que la vibration induite par le trafic ferroviaire provoque des effets considérables sur l'environnement, ce phénomène se traduit par la propagation d'onde, celle-ci crée sous des charges statiques dues aux poids propres, et des charges dynamiques dues essentiellement aux imperfections du rail et de la roue, la vibration de la structure ainsi que du véhicule. Ces efforts dépendent beaucoup de la vitesse de train et la nature de l'appui, sous certaines vitesses de passage des trains, les ondes se propageant dans la couche de ballast et peuvent conduire à la ruine complète de la voie.

La dynamique de structures ferroviaires soumises au mouvement des trains peut engendrer différents types de problèmes : le problème d'interaction, dynamique véhicule-structure, le problème dynamique des voies et de l'infrastructure en interaction avec le sol, le problème de propagation d'ondes dû au passage des véhicules et ses influences sur les bâtiments, etc.

La motivation initiale de notre travail, est de comprendre les phénomènes physiques de vibration qui apparaissent dans les voies ballastées et les différents phénomènes qu'engendre cette vibration dans la structure de la voie ou dans le substratum. D'autres phénomènes peuvent être analysés tel que le bruit dans l'optique d'évaluer les seuils de nuisances. Et en approfondissant le présent travail.

Notre mémoire est structurée de quatre chapitres, une introduction générale et une conclusion générale.

Une description générale de la voie ferrée est présentée ainsi que les différents constituants de cette dernière tout en spécifiant leurs rôles mécaniques. Une synthèse globale des différents modèles d'analyse est présentée au sein du premier chapitre.

Le deuxième chapitre fait l'objet d'une synthèse sur les travaux réalisés sur la modélisation du comportement dynamique des poutres rail lors du passage d'un train.

Le troisième chapitre traite du modèle analytique de **Fryba** [22]. La poutre infinie est idéalisée par le modèle d'Euler Bernoulli. La méthode de l'intégrale de transformée de Fourier est utilisée pour résoudre le problème. Le retour inverse permet de déterminer donc la réponse dynamique dans le domaine spatio-temporelle. Ce passage est réalisé en évaluant l'intégrale basée sur le théorème des résidus de Cauchy. Une analyse paramétrique est menée par rapport à l'amortissement critique ainsi qu'aux vitesses critiques. Une discussion est réalisée pour les résultats obtenues sous environnement **MAPLE** et **MATLAB**.

Dans le quatrième nous définissons la longueur élastique déterminée à partir du cas de chargement quasi-statique de la poutre rail infinie. Cette longueur est une fonction du couplage de la poutre rail ainsi que de la rigidité du sol. Cette longueur élastique, nous permet le passage de la poutre rail infinie vers un modèle de poutre finie idéalisée par le modèle d'Euler Bernoulli, ayant la dimension de cette longueur de transfert. Concernant le sol, il est représenté par le modèle de Winkler. La réponse de la structure couplée au sol est obtenue en résolvant analytiquement l'équation différentielle du quatrième ordre régissant le mouvement. La résolution est obtenue en utilisant la méthode de superposition modale et l'intégrale de convolution. Les résultats obtenus ont fait l'objet d'une analyse paramétrique.

Nous clôturons notre travail de ce mémoire de Magistère par une conclusion synthétisant les résultats les plus pertinents. Nous proposons des perspectives concernant la continuité de ce travail.

CHAPITRE I

Les constitutions de la voie ferrée ballastée

I. LES CONSTITUANTS DE LA VOIE FERREE

I.1. INTRODUCTION

Depuis les premières lignes de chemin de fer, la structure des voies ferrées de même que les moyens de locomotion ont bien évolué. Les différents composants des voies ferrées sont venus les uns après les autres au gré des tentatives empiriques.

Actuellement, les voies ferrées sont de deux grands types : les voies ferrées sur dalles, et les voies ferrées ballastées, ce chapitre présente une description des constituants de la voie ferrée ballastée : rail, ballast, traverses, semelles, système d'attaches et la couche d'assis; le rôle structurelle que joue chaque composant, ainsi que leurs model les plus utilisés dans la littérature.

I.2. Description et rôles de la structure de la voie

Les caractéristiques de la voie répondent à des exigences géométriques et mécaniques qui assurent une qualité continue et homogène sur le réseau des lignes ferroviaires. Pour permettre une circulation commerciale à une vitesse de l'ordre de 300 km/h, les éléments constitutifs de la voie nécessitent des conditions très strictes de fabrication et de mise en œuvre.

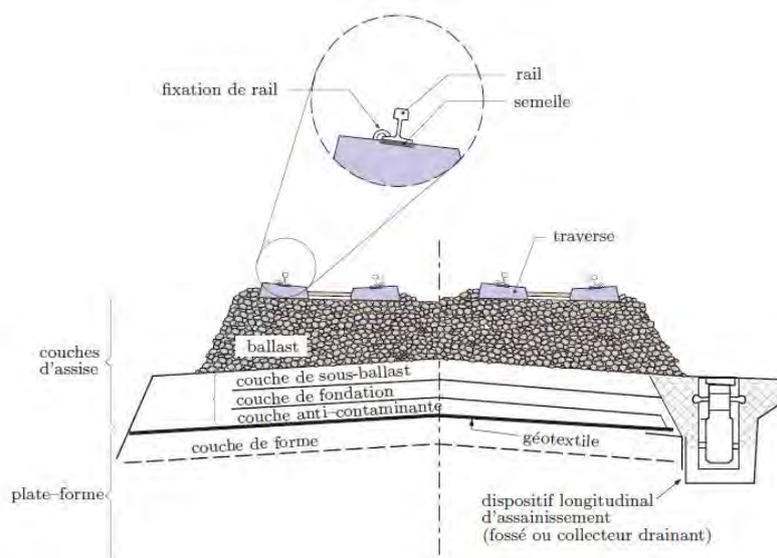


Fig. I.1. Profil d'une voie ferrée ballastée [31]

Nous trouvons successivement sur cette structure : le ballast, les traverses, des semelles absorbantes et les rails (Fig. I.1).

I.2.1. La voie ferrée

Désigne l'ensemble des constituants assurant la circulation des trains et supportant les efforts transversaux, longitudinaux et verticaux ; elles sont banalisées dès lors que la circulation s'effectue dans les deux sens, elle repose sur une structure d'assise, appelée plate-forme (Fig. I.2).

La grande vitesse nécessite la maîtrise de la stabilité du matériel roulant, ce qui implique une très grande qualité des infrastructures.

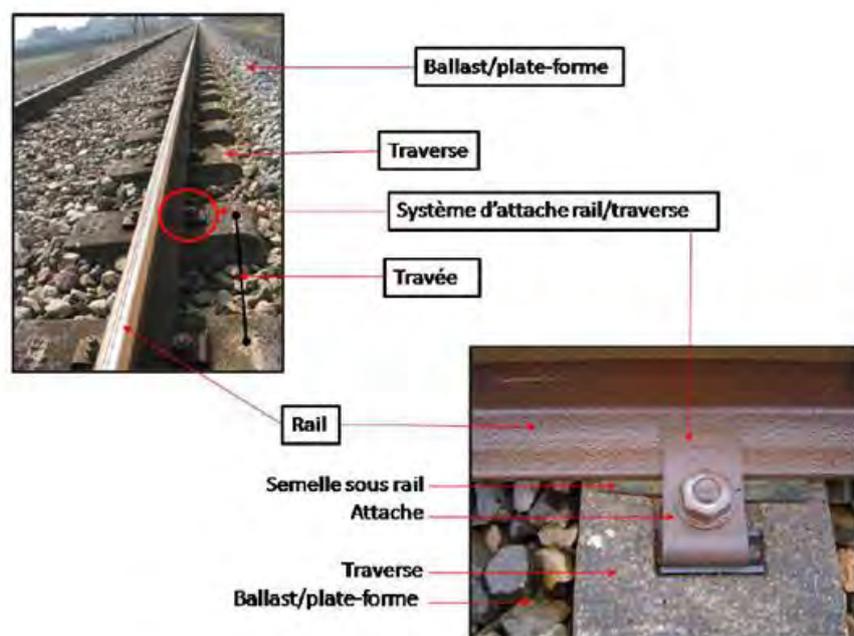


Fig. I.2. Les composantes de la voie ferrée [30]

I.2.2. Le rail

Un **rail** est une barre d'acier profilée. Deux files parallèles de rails mis bout à bout forment une voie ferrée.

Le rail reste l'élément de base de la sécurité du chemin de fer : toute rupture, même si elle est détectée, reste un facteur de danger et surtout l'irrégularité dans la marche des trains.

Les critères de qualité du rail portent sur la droiture des rails, la dureté de l'acier (paramètre influant sur la résistance à la fatigue), et la répartition des contraintes dans les différentes parties du rail.

Le rôle primordial du rail est de diriger le train, et de transmettre la charge de l'essieu, de la traverse chargée aux traverses voisines.

La géométrie de la section du rail (Fig. I.3) est justifiée par une bonne répartition des contraintes dans les différentes parties du rail.

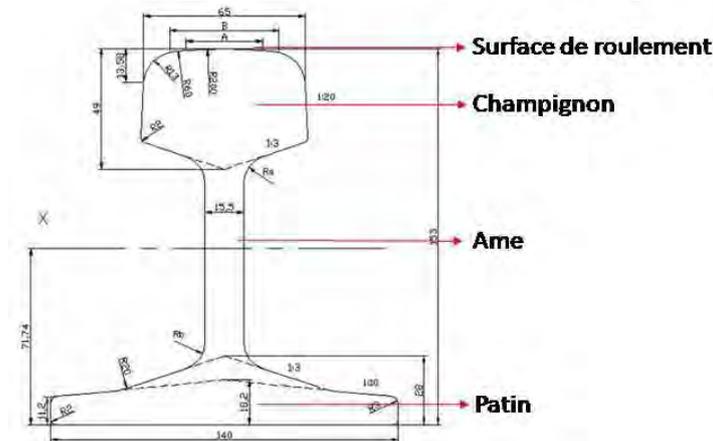


Fig. I.3. Rail à patin et différents types de rail [30]

Le rail moderne est généralement du type « Vignole » fig. I.3 ; dans une section transversale, on distingue :

- **Patin** qui s'appuie sur la traverse, et transmet les efforts aux blochets en diffusant légèrement la charge, sa surface assure un bon ancrage du rail sur le bloche.
- **Champignon** qui constitue le chemin de roulement, il assure le contact roue-rail.
- **âme**, filet vertical qui relie le champignon au patin, l'épaisseur de l'âme est déterminée de manière à résister aux efforts tranchants

Sur les lignes importantes, la masse linéique standard du rail est de 60 kg/m.

La forme du rail à patin est convenable pour supporter les contraintes produites par la flexion du rail sous l'action d'une charge, autrement dit cette forme donne un rail avec une inertie élevée.

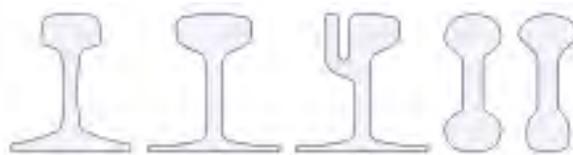


Fig. I.4. Rails. De gauche à droite, type UIC 60, type Vignole, type Broca ou à gorge, type double champignon symétrique, et asymétrique

Le rail à « double champignon symétrique » fig. I.4 et fig. I.5 avait été conçu pour permettre de retourner le rail usé et donc doubler sa durée de vie.

Il a été conçu initialement pour faire tourner le rail usé et donc doubler la durée de vie mais vite a été abandonné.

Son principal défaut étant que, lorsque le rail a été retourné, il est déjà abîmé (poinçonnement dus à l'écrasement au niveau des berceaux) les rails gorge sont utilisés pour les voies encastrées dans les chaussées routières, notamment pour les installations industrielles et ligne tramway. L'écartement est de 1,435m.

Des rails type « double champignon asymétrique » fig. I.4 ont également été employés : un seul côté, de plus forte section, était utilisé pour le roulement.

La simplification apportée par la fixation du rail type Vignole a amené à l'abandon de ce système.



Fig. I.5. Rail Vignole, Rail à double champignon, Rail à gorge (type « Broca »).

Des rails à gorge (type « Broca ») fig. I.4 et fig. I.5 sont utilisés pour les voies encastrées dans des chaussées routières, notamment pour les installations industrielles et les lignes de tramway.

La caractéristique essentielle d'un rail, en dehors de sa forme et de sa nature, est son poids au mètre linéaire, Ce paramètre joue un grand rôle en augmentant l'inertie verticale du rail.

L'U.I.C a standardisé deux profils : 54 et 60 *kg* par mètre linéaire selon le tonnage du trafic. A la pose ils sont légèrement inclinés vers l'intérieure de la voie.

I.2.3. Les traverses

Un autre élément constructif de la voie est tout aussi important .La transmission des efforts entre le rail et le ballast se fait par des traverses qui jouent un triple rôle [03]:

- transmission des charges du rail au ballast.
- maintien de l'écartement des deux files de rails.
- maintien de l'inclinaison du rail Vignole.

Les forces exercées sur la traverse sont celles transmises par le rail et la réaction du ballast qui dépend de la condition d'appui entre la traverse et les grains de ballast.

La première traverse utilisée était en bois, après, elle a été remplacée par l'acier puis le béton armé pour des raisons de coût, de performances et de durée de vie.

D'un point de vue structurel, nous distinguons deux types de traverses fig. I.6 : mono-bloc et bi-blocs.

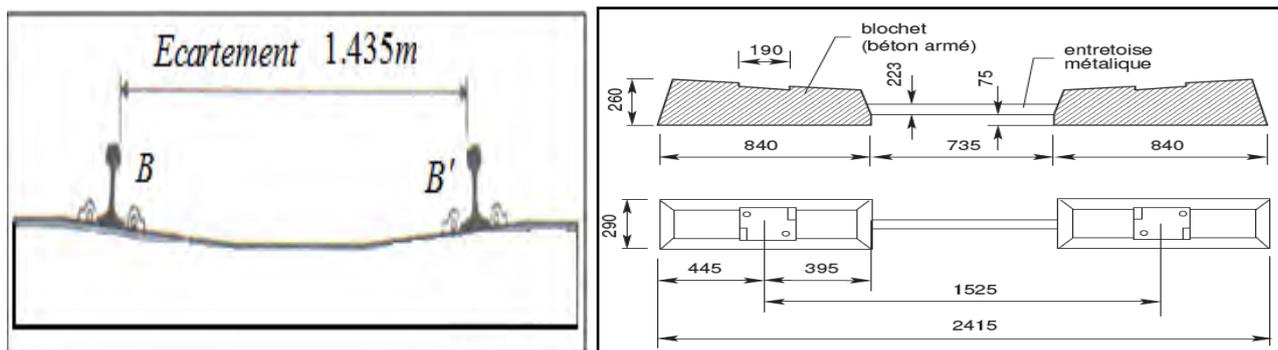


Fig. I.6. Traverse mono- bloc et traverse bi-bloc en béton [03].

La traverse actuelle est constituée de 2 blochets en béton armé (bi-blocs) reliés par une entretoise en acier qui travaille normalement en traction.

La masse et la rigidité du blochet joue un rôle très important. Pour assurer la stabilité de la voie. La distance (entraxe) entre deux traverses consécutives est 0.6 m.

I.2.4. Systèmes d'attaches

Afin de maintenir les rails sur les traverses, des systèmes d'attaches sont utilisés variant suivant le type de traverses, type de rail et mode de pose de la voie (rails long soudé et des barres normales) mais aussi en fonction de l'historique propre de chaque exploitant ferroviaire.

Les attaches dites élastiques sont de plus en plus utilisées offrant ainsi un élément flexible entre le rail et la traverse appelé semelle ; dont le rôle est d'amortir une part des efforts transmis et de permettre le débattement du rail sans endommager la traverse.

Les systèmes d'attache de rail sont les points faibles de la voie ferrée qui se déforment dans le temps, constituent des défauts géométriques qu'il convient d'entretenir et de corriger pour :

- Assurer la sécurité des circulations en évitant le déraillement.
- Garantir la durée de vie du matériel de voie.
- Eviter l'usure prématurée des organes de roulement et suspendus des véhicules.
- Maintenir l'espacement des interventions lourdes d'entretien.
- Limiter les nuisances sonores.
- Assurer le confort des voyageurs et la sauvegarde du fret transporté.

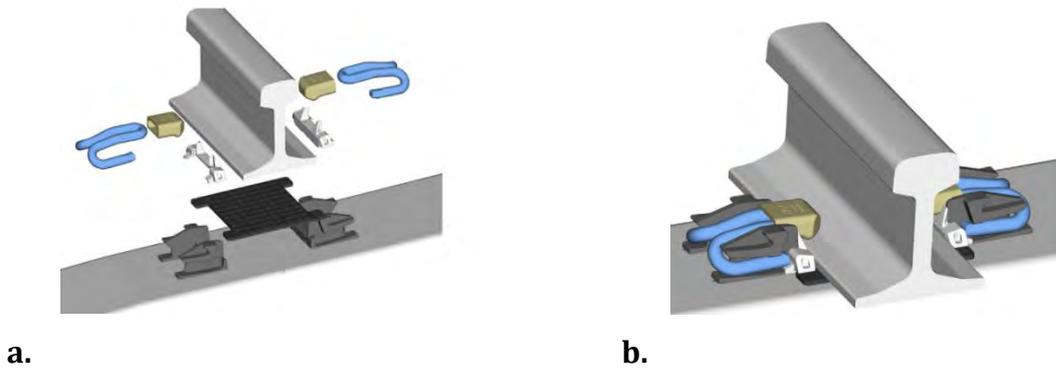


Fig. I.7. Système d'attache [17]

I.2.5. Le ballast



Fig. I.8. Des grains de ballast [13].

Premier élément de l'assise : c'est un granulat $(d-D) = (25-50)$ mm provenant du concassage de roches extraites dans des carrières de pierres dures (granite, diorite,

rhyolite, quartzite, grès). Il constitue un élément support de la voie et fait partie de la superstructure.

Sa couche doit être compactée, lors de la mise en place de la voie, afin d'améliorer la stabilité du ballast, Il est disposé en couches sous et autour des traverses avec une épaisseur de la couche de ballast est de 30 cm environ sous les traverses.

Les rôles du ballast sont les suivantes :

- Transmission et répartition des efforts,
- Absorption des vibrations mécaniques et acoustiques,
- Ancrage latéral (circulation en courbe) et longitudinal de la voie (accélération, freinage),
- Drainage des eaux pluviales,
- Maintenance et mise en place aisées de la voie.

La qualité du ballast est définie dans la norme européenne "NF EN 13450", il doit répondre aux critères suivants :

- Une granulométrie et une propreté qui assure un bon drainage,
- Une angularité pour la résistance au cisaillement,
- Une insensibilité à l'eau et au gel,
- Une homogénéité de la forme des grains, en évitant les formes allongées ou aplaties,
- Une bonne résistance mécanique pour résister aux efforts.

Une usure est malheureusement rencontrée dans le ballaste, elle présente deux formes :

-Le tassement sous les traverses, ce qu'il provoque une déformation verticale de la voie. Il est alors nécessaire de réinjecter du ballast de faible granulométrie sous les traverses.

I.2.6. Les semelles

La semelle est une plaque élastique (en élastomère) de faible épaisseur qui est interposée entre la traverse et le rail. Elle assure, grâce à sa souplesse, la transmission et la répartition des charges rail/traverse sur les traverses voisines de la traverse chargée, elles protègent les traverses de l'usure et aux chocs, et joue aussi un rôle d'absorber des ondes vibratoires mécaniques et acoustiques.

I.2.7. structure d'assise

La couche de ballast repose sur une structure d'assise comprenant la sous-couche et la plate-forme.

- **La plate-forme**

Est la partie supérieure de l'ouvrage en terre supportant les couches d'assise ; la caractéristique essentielle de cet élément est sa capacité de portance. Son élasticité est relativement grande par rapport aux autres composants de la voie.

La qualité de la plate-forme dépend de deux paramètres : Nature du géotextile du sol, les conditions hydrogéologiques et hydrologiques locales.

- **La sous couche**

Elle se compose :

- D'une couche "sous-ballast" : graves propres (0-31.5mm)
- De la couche de fondation (facultative) : graves compactées.

Ses objectifs sont :

- Protection de la plate-forme contre l'action du poinçonnement par la couche de ballast,
- Protection de la plate-forme contre le gel,
- Répartition des charges transmises à la plate-forme.

1.2.8. La pose de la voie

De nombreux types de pose de voie ont été développés en particulier en milieu urbain, la plupart ayant évolué empiriquement.

Au niveau de la fixation du rail, nous pouvons distinguer la pose continue et la pose discontinue :

- **La pose continue [37]**

Le patin du rail repose en intégralité sur un matériau (sable, concassé, asphalte, polyuréthane ou autre matériau synthétique) qui transmet les efforts à la plate-forme (généralement en béton). L'écartement entre les rails est maintenu constant grâce à des entretoises régulièrement espacées.

Dans certains cas, le rail peut être noyé (pose en caniveau) dans une dalle en béton ménagée d'une "gouttière".

L'espace entre le rail et la gouttière est comblé par un matériau de remplissage comme de la résine par exemple.

Le maintien de la position des rails, et donc de l'écartement, est assuré par ce matériau, ce type de pose qui concerne plutôt les voies de tramway.

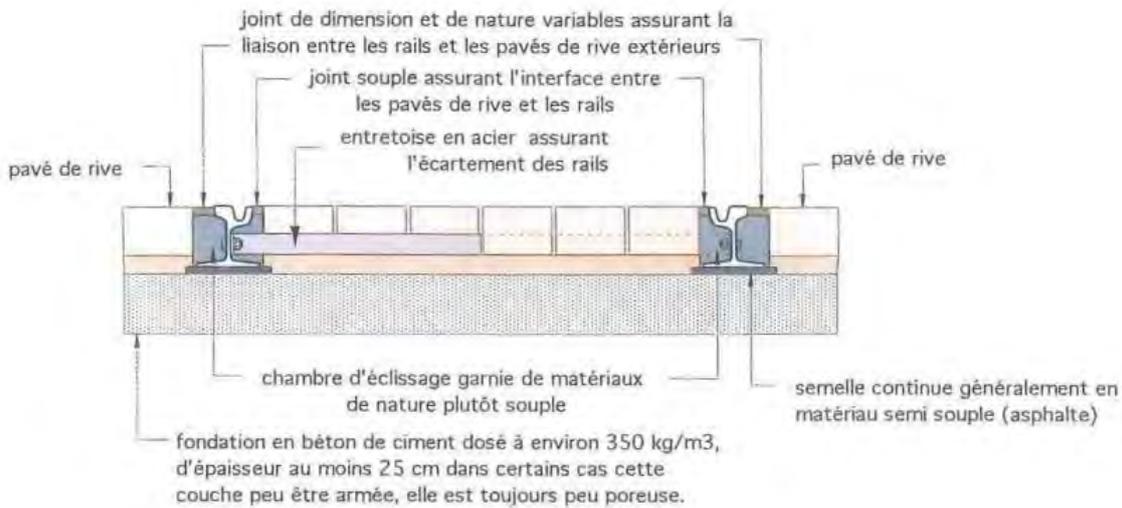


Fig. I.9. Principe de pose sur appui continu [37]

- **La pose discontinue [37]**

Le rail est sur des blochets à l'aide de fixations de natures très variées ; citons par exemple les attaches vissées, élastiques ou à ressort.

Un autre type de pose périodique est la pose sur selles.

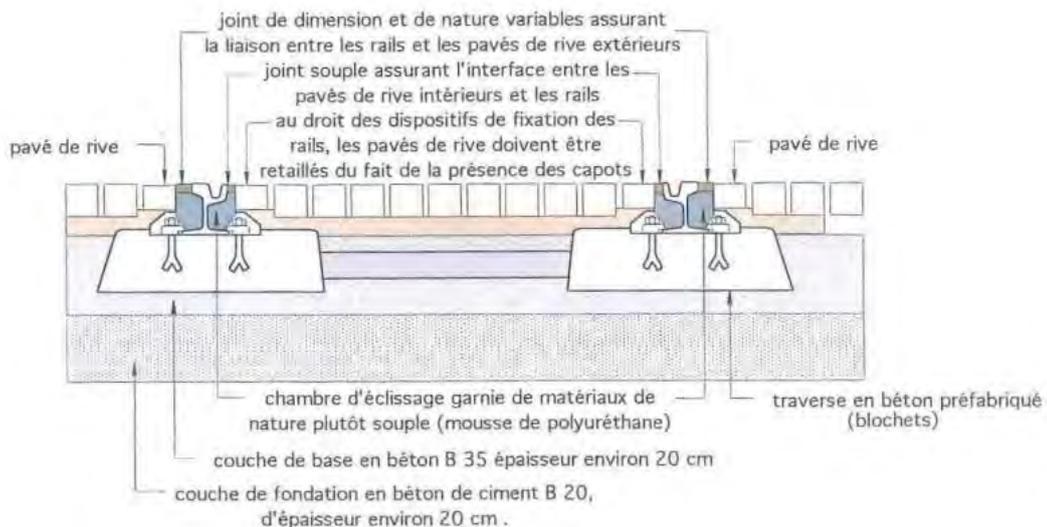


Fig. I.10. Principe de pose sur blochets [37]

Les traverses sont remplacées par des supports généralement métalliques équipés de fixations et Entre le rail et son support (traverse ou selle), nous pouvons intercaler une couche de matériau souple est les semelles. Caractérisée par sa raideur mécanique.

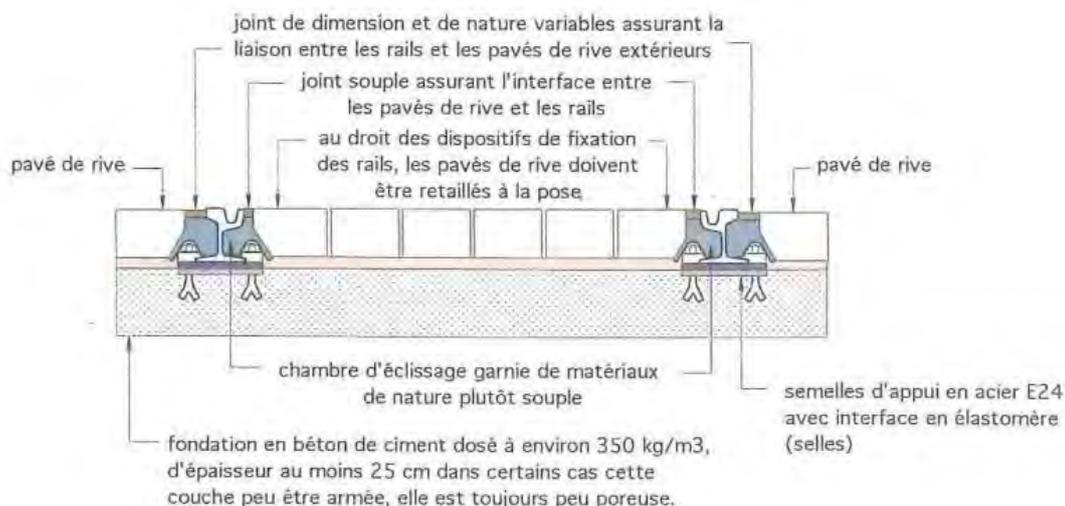


Fig. I.11. Principe de pose sur selles [37]

I.2.9. Conicité [45]

La conicité, c'est-à-dire l'angle (en radian) au contact roue-rail est propre à chaque couple « profil de roue / profil de rail » varie avec l'usure, c'est une inclinaison qui a pour avantage de favoriser le bon contact roue/rail et tire la meilleure partie de la structure de la traverse.

Elle est fonction de la position latérale de l'essieu dans la voie, donc de la roue relativement au rail, qui peut varier de typiquement ± 8 mm entre butées aux boudins. Elle est sensible à la pose du rail, à l'usure, et à l'écartement.

La conicité équivalente est la valeur de cette fonction pour un jeu dans la voie donné. Par exemple, {l'état neuf, pour un jeu de ± 3 à ± 5 mm elle est de} :

- 0,16 à 0,24 pour le couple S1002/rail au 1/40 ;
- 0,01 pour le couple S1002/rail au 1/20.

S'agissant d'une valeur locale de la fonction, elle est très sensible à la pose du rail. Une forte conicité caractérise un contact capable d'auto-orienter l'essieu, mais il risque de rendre le bogie et par voie de conséquence le véhicule instable. Ce phénomène est éliminé par des suspensions raides.

Les surfaces de contact entre roue et rail sont de l'ordre du cm² ; on les calcule à partir des courbures des profils, à l'aide de la théorie d'Hertz sur le contact élastique (1887).

Les pressions peuvent être très élevées, de l'ordre de 1000 MPa. Les efforts tangents se calculent par la théorie de Kalker (1967).

Les rails de tramway sont souvent posés à plat, et leurs roues sont parfois cylindriques.

Les virages sont si serrés sur les réseaux de tramways que l'on ne cherche pas toujours à utiliser l'effet bi-cône. On limite l'usure par le graissage des boudins et en ne chargeant pas trop les essieux.

En France, comme dans une majeure partie des pays, l'écartement des rails est généralement de 1,435 mètre (sauf voies industrielles spécifiques ou de tourisme où l'écartement peut varier beaucoup).

Pour augmenter l'effet bi-cône, on sur-écarter les voies de chemin de fer dans les courbes, sauf pour les tramways qui utilisent des rails à gorge ne permettant pas ce sur-écartement sous peine d'une usure anormale du flanc interne des roues.

I.3. Source de chargement [32]

Les vibrations générées par un tramway sont dues aux oscillations de la caisse du tram et de la masse non suspendue (bogies) qui sont elles même engendrées par le déplacement du matériel sur une voie irrégulière.

Leur transmission dans le rail s'effectue par l'intermédiaire de la roue qui peut recevoir ou non un matériau résilient afin de filtrer les composantes transmises. Si le tramway circule en site propre, alors, il se peut que la voie soit ballastée. Dans ce cas, la transmission des vibrations dans le sol intervient par l'intermédiaire du ballast qui filtre une fois de plus les basses fréquences.

Les vibrations générées par les systèmes ferrées de surface se propagent essentiellement sous forme d'onde de Rayleigh au delà de 20m après la source. A proximité de la source, ce sont les ondes de volume qui régissent la propagation. De plus, les vibrations émises par les tramways ont une plage de fréquence relativement élevée. Cela signifie que le sol n'a besoin d'être caractérisé que sur une faible profondeur puisque si l'on considère les ondes de volume, quelques longueurs d'onde sont comprises entre la source et le bâtiment, et les ondes de surface n'interagissent qu'avec les couches supérieures du sol.

L'importance de la prise en compte de la vitesse du tramway dans la modélisation de la propagation des vibrations est négligeable puisque la vitesse de circulation du matériel roulant est largement inférieure à la vitesse de propagation des ondes dans le sol.

I.4. Charges exercées sur le rail

Des différentes extensions sont appliquées sur la voie provenant du poids du véhicule à vitesse de déroulement, la rugosité du rail et des défauts de la roue, ils exercent sur la voie des efforts dans trois directions : longitudinale, verticale et transversale, ce sont les efforts verticaux et transversaux qui agissent de façon déterminante sur les éléments constitutifs de la voie.

En règle générale, la résistance de la voie aux efforts verticaux reste dans le domaine élastique. En revanche, la résistance de la voie aux efforts transversaux peut sortir rapidement du domaine élastique, ce qui entraîne des déplacements résiduels. Les efforts longitudinaux (accélération et freinage) sont peu importants.

L'ensemble des lignes de la SNCF supporte des masses à l'essieu de 22,5 tonnes et une charge répartie au mètre linéaire sur les ouvrages d'art de 8 tonnes par mètre. En effet, les réseaux, qui admettant de très lourdes charges (30 tonnes par exemple, comme aux Etats-Unis), vieillissent plus rapidement, et demandent une maintenance accrue. La durée de vie d'une voie est estimée à 15 ou 20 ans selon l'usage [27].

- **Les efforts longitudinaux**

Dus essentiellement aux accélérations et freinages, sont peu importants et ne posent d'éventuels problèmes que sur certains ouvrages d'art à fixation directe.

- **Les efforts verticaux**

Les efforts verticaux et transversaux, beaucoup plus importants, ils sont représentés par des charges statiques (poids propres des véhicules) et des surcharges dynamiques dues à l'interaction roue-rail. La charge statique est distribuée sur les essieux du véhicule.

En fonction des poids des rails et de l'espacement des traverses, l'U.I.C a classé les voies en trois catégories :

A : 16 t par essieu

B : 18 t par essieu

C : 20 t par essieu

Ces trois catégories sont elles-mêmes décomposées chacune en trois sous-groupes d'indice 2, 3,4, caractérisés par le rapport entre le poids total du véhicule et la longueur mesurée entre ses deux extrémités :

Sous-catégorie 2 : 6; 4 t/m

Sous-catégorie 3 : 7; 2 t/m

Sous-catégorie 4 : 8 t/m

La surcharge dynamique dépend fortement de la vitesse des véhicules et des défauts des roues et des rails.

I.5. Les défauts de la voie

Malgré la sévérité des critères destinés à assurer la qualité de l'armement et du ballast, l'état des voies n'atteint jamais une perfection absolue. Il existe toujours des irrégularités de nivellement, de tracé et d'écartement qui ne sont pas forcément préjudiciables à la stabilité de la voie et à la bonne tenue des véhicules.

Une irrégularité de voie devient un défaut lorsqu'elle [27] :

- provoque une diminution du confort dans le véhicule par augmentation des accélérations,
- donne naissance à des surcharges dynamiques qui entraînent une évolution du défaut et de sa proximité.

Les trois causes principales de la dégradation de la géométrie de la voie, c'est-à-dire de l'évolution des défauts, sont les suivantes :

- Le tassement aléatoire du ballast (provenant du ballast lui-même ou des variations de rigidité de la plate-forme),
- Le manque de rectitude des lignes,
- La variation des sollicitations dynamiques sur la voie.

Les trois causes évoquées ci-dessus se traduisent en termes de défauts. Nous pouvons distinguer les défauts de la plate-forme, des couches de matériau granulaire et ceux de l'armement.

Deux types de défauts [02] de la voie :

– Défauts locaux au contact roue-rail : Ces défauts sont représentés par l'existence de joints ou d'empreintes ou d'ondulations sur la surface du rail ou bien de modifications de la forme des roues.

– Défaut global de la voie : c'est le défaut vertical du profil de rail avec la longueur. Ce type de défaut cause des vibrations en basses fréquences.

Les efforts transversaux sont définis par les forces centrifuges, provenant de l'existence d'un rail en courbe, et les forces d'origine thermique dues au blocage de la dilatation du rail (dans le cas des rails soudés) ; ils sont moins importants que les efforts verticaux mais le ballast est beaucoup moins rigide dans la direction latérale.



Fig. I.12. Les défauts de la roue

I.6. Entretien du rail [45]

L'entretien de la voie ferrée est concentré sur le ballast et la rectitude d'alignement des rails. Cette dernière se vérifie sous charge, par exemple en France ils utilisent les voitures Mauzin.

Les déviations par bourrage du ballast peuvent être rectifiées, par changement des traverses ou des attaches si elles sont endommagées, ou encore par « Renouvellement Voie Ballast » (RVB) si la voie est jugée trop ancienne.

Le moyen principal de maintenance préventive en matière de voies est le meulage, qui permet d'éliminer les défauts de surface susceptibles de générer des fissures, comme par exemple la fatigue de contact (RCF ou rolling contact fatigue en anglais) ou l'usure ondulatoire. Chaque meulage enlève jusqu'à 1 mm d'épaisseur d'acier et redonne une forme appropriée au champignon.

La surveillance d'un réseau ferroviaire par ces méthodes est critique pour la sécurité mais aussi pour la maîtrise des coûts de maintenance.

Il existe des rails dits sans entretien, col-aminés à chaud avec une plaque inoxydable qui permet à la table de ne pas s'oxyder.

I.7. Modélisation des éléments de la voie ferrée

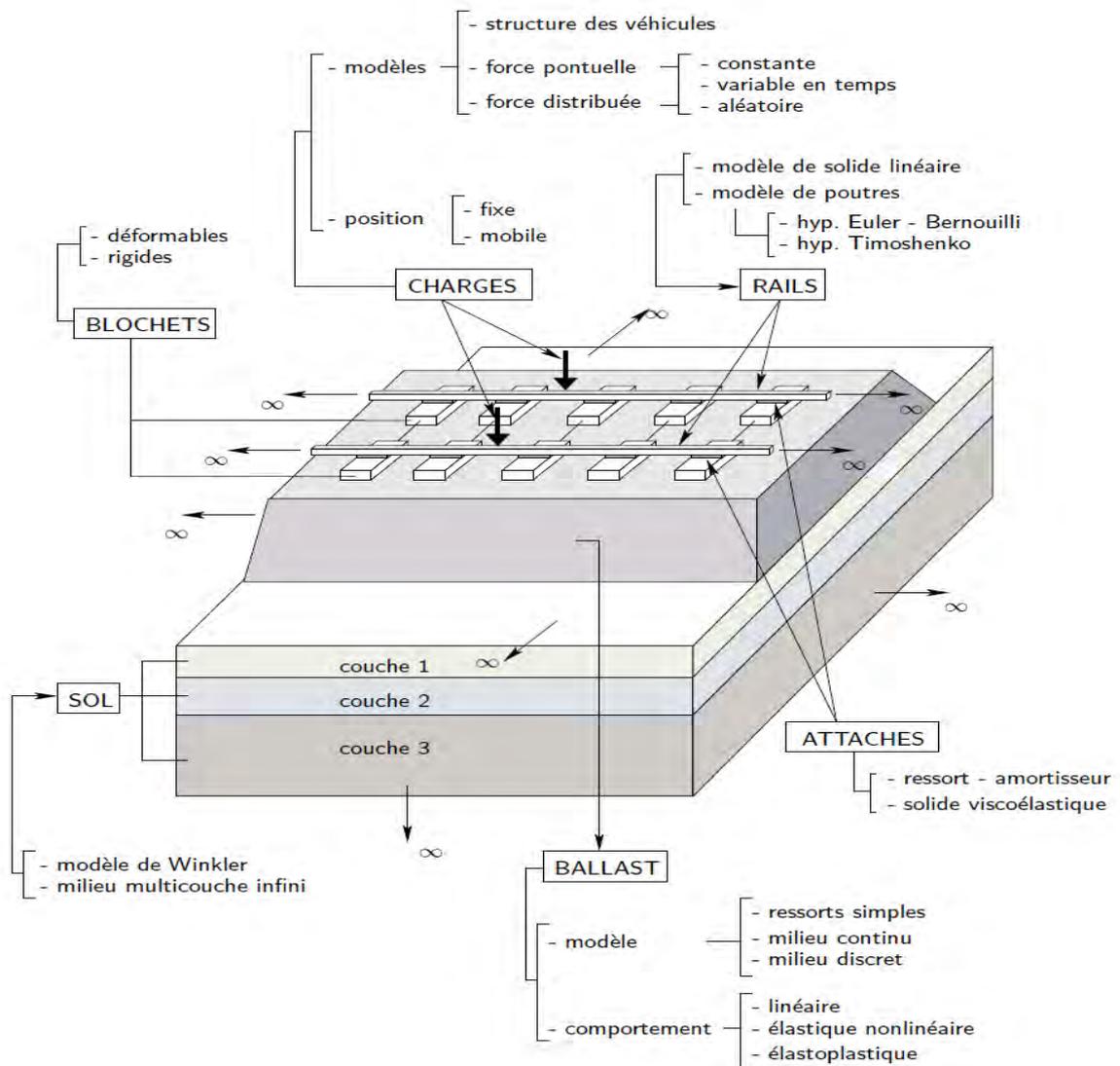


Fig. I.13. Modélisation des éléments de la voie ferrée [03]

La voie ferrée n'est qu'une partie du système ferroviaire, comprenant deux éléments étroitement liés: l'infrastructure et le véhicule.

Le comportement d'un élément ne peut être considéré comme indépendant des autres. Ainsi, toute modification d'un élément aura des effets immédiats ou sur le long terme - sur les autres.

Comme nous ne pouvons pas tester toutes les formes de structures de voies ferrées de manière expérimentale, nous considérons à une phase plus amont qui consiste à modéliser la voie ferrée.

1.7.1. Le modèle de véhicule [31]

La circulation d'un véhicule ferroviaire sur une voie entraîne des efforts statiques dus à son poids, et des surcharges dynamiques. Ces surcharges sont le résultat d'une interaction dynamique entre le véhicule et les défauts de voies.

La plupart des modèles qui traitent de la problématique vibratoire engendrée par le trafic réduisent le véhicule à l'état de charge mobile et parfois harmonique lorsque le caractère discret des traverses est négligé, ponctuel ou uniforme.

Un autre élément important lorsqu'on considère un TGV sur une voie ferrée est bien sûr la vitesse de circulation; Par conséquent notre modélisation sera dynamique.

Dans la modélisation dynamique des voies ferrées, les composants et leurs modèles proposés sont présentés comme suit :

1.7.2. Le rail

La modélisation de cet élément par une poutre permet de reconnaître les modes de vibration en basses et hautes fréquences. Deux modèles de poutre sont proposés dans la littérature :

- **Modèle de poutre d'Euler-Bernoulli**

La poutre est considérée une poutre mince, la section de la poutre reste toujours droite et perpendiculaire à la fibre moyenne de la poutre et l'effet de cisaillement est négligé.

- **Modèle de poutre de Timoshenko**

La section reste droite mais pas perpendiculaire à la fibre moyenne de la poutre et l'effet de cisaillement est pris en compte.

Dans le cas tridimensionnel, le rail peut être modélisé par des éléments massifs afin d'éviter la difficulté au niveau du couplage entre un milieu solide et un milieu curviligne.

1.7.3. La semelle

Les semelles sont souvent modélisées par des éléments viscoélastiques. Leurs masses peuvent être négligées.

Dans le cas unidimensionnel, nous pouvons les remplacer par des systèmes simples (ressort-amortisseur).

Leur capacité d'amortissement importante peut réduire considérablement les charges exercées sur les blochets surtout pour la partie en haute fréquence.

I.7.4. La traverse

La masse et la rigidité des blochets sont très importantes dans la modélisation parce qu'elles assurent la stabilité de la voie. Dans le cas (1D) ou (2D), les blochets sont modélisés soit par des masses ponctuelles soit par des corps rigides.

Dans le cas (3D) trois modèles sont présentés:

1. Poutre de Timoshenko.
2. Éléments massifs.
3. Deux corps rigides liés par une poutre.

I.7.5 Le ballast

C'est le composant dont les propriétés physiques sont les moins maîtrisées, de part sa forte non-linéarité, essentiellement due au vides entre la traverse et le ballast mais aussi entre le ballast lui-même.

Il est difficile d'imaginer un comportement linéaire du ballast et être modélisé d'une manière simple ; néanmoins il semble licite de donner une masse au ballast et de travailler ainsi avec un système de voie à trois couches.

Nous distinguons que ce matériau granulaire est non-linéaire dans le cas (1D), peut être modélisé par des systèmes simples (masse-ressort-amortisseur). Dans le cas (2D) et (3D), il est représenté soit par un modèle discret, soit par un modèle continu [27].

I.7.6. Les sous-couches et le sol

En général, elles sont modélisées par des modèles continus non-linéaires mais à cause de la non-linéarité du ballast qui est plus importante que celles des sous-couches et du sol, des modèles linéaires sont utilisés.

I.7.7. Développement d'un modèle numérique de l'interaction sol-voie [31]

Le survol bibliographique et l'analyse de l'interaction voie/sol nous montrons que l'utilisation de deux modèles, l'un pour véhicule et la voie, l'autre pour le sol, semble tout à fait intéressante et que la prise en compte d'une raideur de fondation reste licite et d'autant meilleure que la différence de rigidité entre le ballast et le sol significative. La méthodologie adoptée dans le cadre de ce travail est illustrée à la (Fig. I.13), deux phases y sont clairement décrites :

- **1^{ère} Phase:**

Etude dynamique du sous système véhicule/voie avec voie flexible en tenant compte également des imperfections de la surface de roulement. Simplifications dans le plan vertical du véhicule.

Permet de déterminer la déflexion du rail et de ce fait, les efforts induits à la surface du sol par l'intermédiaire de la réaction des traverses.

- **2^{ème} Phase:**

Permet, à partir des résultats de la première, de déterminer la réponse du sol suivant les efforts injectés par la voie, à travers le sous-système définissant l'interaction voie/sol.

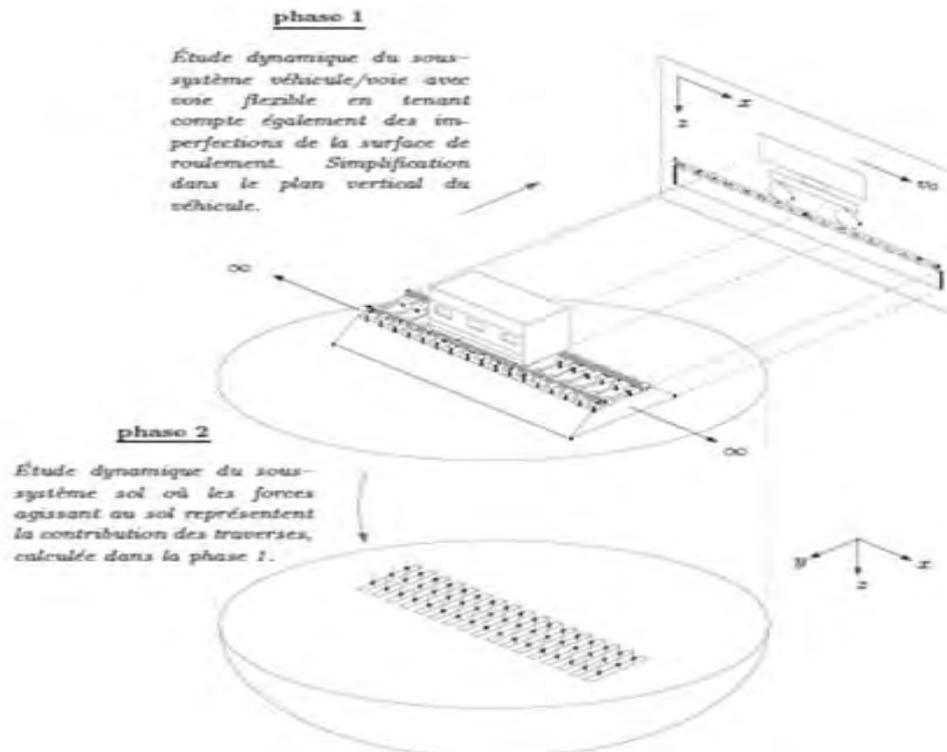


Fig. I.14. Description de la méthodologie adoptée dans la modélisation du système véhicule/voie/sol [31]

I.8. Conclusion

Le système de la voie ferrée ballastée est constitué de trois éléments interagissant entre eux: la superstructure, l'infrastructure et le matériel roulant. C'est une structure multicouche hétérogène, difficilement considéré homogène, du moins pour la couche de

ballast, à cause du faible nombre de grains dans le sens vertical, Le comportement d'un élément ne peut être considéré comme indépendant des autres. Ainsi, toute modification d'un élément aura des effets – immédiats ou sur le long terme - sur les autres [46]].

CHAPITRE II

Etat de l'art

II. Etat de l'art

II.1. Introduction

L'Analyse des vibrations générées par le trafic ferroviaire est le sujet de nombreux travaux de recherche, généralement en vue de valider ou d'améliorer une configuration véhicule/voie/sol existante. La plupart des études concernées se focalisent :

- soit sur le comportement véhicule/voie, notamment au niveau du contact roue/rail pour l'estimation de l'excitation due aux essieux (donnant naissance aux vibrations dans la voie) ;
- soit sur la propagation des vibrations dans la structure du sol.

D'autres travaux proposent des modélisations pour les deux aspects "excitation" et "propagation" mais avec une résolution découplée. Enfin, des études sont disponibles au sujet du comportement des sols (partie "propagation") soumis {une excitation s'approchant du cas ferroviaire.

Nous pouvons citer le cas des charges mobiles s'appliquant directement {la surface d'un sol, ou via un rail (modélisé par une poutre) reposant ou non sur une semelle élastique avec prise en compte des traverses, etc.

Néanmoins, durant ces dernières années, des travaux plus détaillés ont été réalisés, principalement dédiés {l'analyse des trains {grandes vitesses. En effet, ce type de véhicules induit des vibrations importantes, voire des déplacements de rails pouvant être préjudiciables à la tenue de la structure en fatigue

Nous signalons aussi que plusieurs travaux de recherche sur l'influence des caractéristiques de la voie ou aussi de la fondation (type d'appui) sur l'atténuation des ondes de vibration le long d'un rail ont été développées.

II.2. Travaux réalisées

Depuis la création des chemins de fers dans le 19^{ème} siècle jusqu'à nos jours, la voie ferrée a connue beaucoup d'études expérimentales et de modélisations approfondies, pour bien comprendre le comportement de chaque composant de la voie ainsi que de l'ensemble de la voie ferrée.

Lors du passage du train à des vitesses différentes, variant de la vitesse d'un tram jusqu'à la vitesse d'un TGV, sur des différents types de sol. Et la vision en profondeur de la propagation de la vibration dans un champ proche comme dans un champ propagative. Et aussi de prédire dès le stade de conception d'un véhicule, ou l'implantation d'une nouvelle voie ferrée, les efforts dynamiques que le véhicule est susceptible de transmettre au sol et les modes de propagation des ondes selon les paramètres mécaniques et physiques du site.

« **TIMOSHENKO** » le premier à résoudre le cas d'une charge constante déplaçant sur une poutre infini sur fondation élastique ; depuis l'année 1926, il s'est intéressé à considérer la poutre épaisse, et prend en compte l'effet de cisaillement sous des fréquences très élevées. La première solution stationnaire pour un cas stationnaire simple d'une poutre Bernoulli - Euler sur une fondation élastique, était bien obtenue par « **LUDWIG** » en (1938). Le cas d'une oscillation mobile était formulé et partiellement résolu par « **MATHEWS** » (1958). La première solution appropriée au problème de Mathews a été donnée par « **BOGACZ** » et « **KRYZYNSKI** » en (1986).

Parmi les études menées, quelques travaux peuvent être cités :

* **Nathalie Guerin (1996)**

Dans cette étude N.Guerin décrit le processus d'identification d'une loi de tassement du ballast et d'un modèle de dégradation réaliste des voies ballastées. Ces travaux expérimentaux réalisés au moyen d'un essai à échelle un tiers et des lois de similitude décrivent le passage des grandeurs associées au modèle réel à celle du modèle réduit basées sur la conservation du matériau ballast et la conservation des champs de contraintes au sein de l'éprouvette.

La simulation numérique vient compléter l'expérience en proposant un modèle pour calculer les efforts dynamiques exercés sur le rail, qui sont injectés dans un modèle quasi-statique de voie prenant en compte le comportement du ballast identifié expérimentalement. Pour Démontrer la possibilité de modéliser, de façon discrète, le comportement unilatéral du ballast, une analyse micromécanique du ballast est réalisée, en le considérant comme un assemblage de corps rigides, discrets et tridimensionnels en contact.

* **D.Thambiratnam (1996)**

Analyse dans un premier temps, les poutres finies sur appuis élastiques soumises à des charges mobiles, par la méthode des éléments finis, en considérant la rigidité du sol variable. Une extension de sa méthode pour les poutres rails infinies fut exposée en se

basant sur une longueur équivalente déterminée à partir d'une analyse statique. L'effet de la vitesse, la longueur de la poutre, ainsi que le facteur d'amplification dynamique sont aussi analysés.

- **Fryba (1999)**

L'auteur a étudié les vibrations des organes et des structures élastiques et inélastiques sous l'action du déplacement de charges pendant de nombreuses années, il est arrivé à la conclusion que le sujet a donc grandi dans la portée et l'importance pour Mérite un traitement complet :

Le but de son travail est d'analyser l'effet de la charge sur divers éléments de la structure et les médias de mécanismes d'ingénierie.

la méthodologie adoptée par l'auteur est d'exposer des formules théoriques analysé le problème en main, déduit en détail tout ce qui est nécessaire de la part de la mécanique, la dynamique, les vibrations et théories d'élasticité, l'analyse de la théorie équations différentielles et intégrales, fonctions de la variable complexe et intégrales des transformations.

- * **Vu Hieu Nguyen (2002)**

Analyse le comportement dynamique non-linéaire d'une structure infinie sous l'action d'une charge mobile à vitesse constante ; s'appuyant sur une approche semi-analytique basée sur un changement de variable puis une transformé de Fourier, le problème d'un demi-espace multicouche visco-élastique soumis à une charge ponctuelle mobile appliquée à sa surface libre est résolu.

Ainsi le problème dynamique non-linéaire soumis à une charge mobile est présenté par des modèles unidimensionnels, tridimensionnels et massive 3D, l'auteur utilise deux approches numériques par des éléments finis, afin d'obtenir la solution dans le régime permanent.

Une première approche de calcul dynamique transitoire dans le repère fixe, et la deuxième de calcul statique dans le repère mobile, qui demande un volume de calcul plus petit, ainsi qu'une technique d'introduire la condition aux limites à l'infini est aussi proposée en utilisant une couche absorbante.

- * **S.Haw Ju et H.Ta Lin (2004)**

L'auteur analyse la vibration du sol sous la vitesse du train au dessous et au dessus de la vitesse de Rayleigh du sol, est simulé est réalisé de la méthode des éléments finis 3D, deux schémas d'isolation de vibration où l'amélioration de l'étude qui incluse le sol autours de la voie ferrée ainsi que la dalle en béton construite entre le rail et le sol.

Les résultats numériques indiquent que la vibration croie considérablement et décroît lentement, lorsque la vitesse du train dépasse la vitesse de Rayleigh dans le sol.

La direction des ondes et les fréquences dominantes sont des fonctions simples de la vitesse du train, de vitesse de Rayleigh dans le sol et de la longueur du compartiment du train.

Quand la vitesse du train dépasse la vitesse de cisaillement, la magnitude de vibration est critique est n'est pas susceptible à la vitesse du train, pour réduire cette vibration, les deux schémas d'isolation examinée dans cette étude sont utiles pour les vitesses de du train supérieures de la vitesse de Rayleigh dans le sol, mais ne sont pas efficace pour les vitesses au dessous de la vitesse de Rayleigh dans le sol.

* **L. Ricci, V.H Nguyen, K.Sab, D.Duhamel et L.Scmitt (2005)**

En raison de petit nombre de grains du ballast dans la direction verticale de la couche de la voie ferrée, un modèle à deux couches discret / continu est proposé : la couche supérieure (le ballast) est modélisé en 3D-réseau discret de l'interaction grains, tandis que la sous-couche infinie est considéré un milieu élastique continu linéaire.

Le problème en question est le comportement dynamique de ce système, sous l'action d'une charge mobile à vitesse constante appliquée sur la libre surface de la couche de ballast, La réponse dynamique de ce système dans le régime stationnaire présente un intérêt.

Un réseau cubique modèle de la couche de ballast est proposé, et effectivement parmi les modèles les plus simples qui tiennent comptent de l'effet de Poisson, et le système d'équations à résoudre est présenté.

La méthode semi-analytiques pour chaque couche la transformé de Fourier dans les deux directions horizontales dans l'optique d'établir les équations dans le domaine des nombre d'onde.

Ces équations sont résolues par l'application des conditions aux limites, finalement la transformé de Fourier inverse est exécutée.

Une étude paramétrique concernant la rigidité de la sous-couche, la vitesse de charge et la taille de grain est menée. Une comparaison avec la modélisation du système continu est réalisée pour les charges mobiles réalistes.

Le modèle discret/continu de la voie ferrée ballastée en deux couches peut être étendu en multicouche général, et à noter aussi que la vitesse de charge du mouvement et la rigidité de sous-couche ont un effet significatif sur le déplacement et l'accélération verticaux dans la couche du ballast.

* **L. Andersen (2006)**

Présente une modélisation de la réponse à des charges mobiles par les méthodes des éléments finis et les éléments frontières, l'analyse décrit la propagation des ondes générées dans le sol, par éléments finis dans le domaine temporel y compris un ensemble particulier de conditions aux limites permettant le passage des ondes dans le système de coordonnées.

La modification de la fréquence et l'amortissement dépendant de coordonnées est décrite par la méthode des éléments frontières illustre l'effet du mouvement à « haute vitesse ». À la fin une procédure de couplage d'un élément fini locale par un modèle élément frontière d'un domaine ouvert est décrite.

* **P.M. Belotserkovsiy (2006)**

L'interaction entre les roues chargées et la voie ferrée est étudiée, les oscillations paramétriques verticales d'une ligne infinie a espacement de roues identiques et égaux, la charge est maintenue constante et le mouvement est uniforme sur la structure ferroviaire, sont calculés par la technique des série de **Fourier**.

La technique des séries de Fourier représente un calcul approprié l'approximation sauve-garde-temps de à la technique de la transformé de Fourier qui décrit les oscillations d'un seul mouvement de roue.

Deux schémas sont considérées, le premier schéma le chargement est supporté par chaque roue, dans le second contrairement les roues consécutives supportent un chargement direct de la même magnitude.

La périodicité due à l'espacement des traverses est prise en compte ou chaque période est segment de la voie entre deux traverses adjacentes.

L'étude souligne l'influence des oscillations de châssis de bogie sur la variation de la force de contact roue-rail sur la durée de traverse. Une charge statique appliquée au centre de châssis de bogie présente la carrosserie du véhicule.

La poutre rail est considérée du Timoshenko. Propriétés de la poutre, Interaction entre la voie et le mouvement de bogie à vitesse modérée sont discutés.

Dans un tel problème, on s'intéresse à l'amplitude maximale de vibration et les conditions dans lesquelles pussent survenir. Pour la solution classique, il peut être démontré que, dans certaines valeurs de la vitesse la résonance se produit. Dans ce cas, l'amplitude de vibration est une fonction linéaire du temps.

* **Nguyen Dinh Kien (2007)**

La réponse dynamique d'une poutre précontrainte de Timochenko entièrement ou partiellement reposante sur un à deux paramètre d'une fondation élastique de Winkler sous l'effet d'une charge harmonique mobile est étudié par la méthode des éléments finis.

Introduisez la déformation de cisaillement en prenant l'effet de la précontrainte et le support de la fondation sur un élément de poutre ; l'analyse dynamique est formulée dans le contexte de l'approche du champ uniforme. Utilisant l'élément formulé, la réponse dynamique des poutres ayant différentes conditions aux limites est calculée, appliquant l'intégration directe de la méthode Newmark.

L'auteur en Détaille Les effets de la précontrainte, la fondation, vitesse de déplacement et la fréquence d'excitation sur les caractéristiques dynamiques des poutres.

L'élément est initialement souligné par les forces axiales Q . A chaque nœud de l'élément deux degrés de liberté sont présentés, à savoir une translation latérale et une rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan (x, z) .

* **L.Auersch (2007)**

Pour un sol moue sous des vitesses du train grandes ou sol très moue sous des vitesses régulières la vitesse des ondes élastiques est proche de celle du sol. Dans ce cas la réponse de la poutre est analysé dans le domaine fréquentiel de nombre d'onde sous une large gamme de vitesse en varient d'autre paramètres de la voie de sol et de chargement.

Selon les résultats Il est réalisé qu'il y a une dépendance mineure sur la vitesse de la charge, mais une grande dépendance en raideur du sol, en théorie, et expérimental. Pour négliger l'effet de la vitesse Les voies ferrées peuvent inclure des éléments d'isolation gazeuse telle que des coussinets de rail, chaussures de lits et des tapis de ballast.

*** R. Bogacz (2008)**

L'auteur étudie plusieurs problèmes dynamiques stationnaires dans laquelle le mouvement est entraîné d'une charge répartie mobile sur une poutre appuyée sur des fondations de Winkler, les cas de chargement décrits par la fonction de Heaviside (ou sa superposition linéaire) d'une charge constante mobile répartie $F_0H(x - V_0t)$ et charge répartie harmonique $F_0\sin[k(x - V_0t)]$.

Analyse dans des différents cas de vitesses de chargement sur une poutre de Timoshenko et à vitesse sub-critique de chargement sur une poutre d'Euler -Bernoulli dans les deux cas les fondations sont supposé être de Winkler.

*** Guillaume Coquel (2008)**

Ces études sont basées sur la propagation du bruit d'origine ferroviaire dans les bâtiments. En prenant en compte les trois voies de propagation séparément : propagation dans le sol, propagation dans le bâti et rayonnement acoustique.

Utilisant les méthodes numériques (FEM-BEM), une méthode hybride basée sur la formulation intégrale et appelée méthode GRIM et méthode expérimentale. Une comparaison entre des mesures réalisées sur un site d'essais et un calcul 2D et 2,5D est donnée.

Ensuite étudier la transmission des vibrations du sol à des fondations de type semelles filantes, pour trois sols ayant des propriétés différentes et pour trois distances différentes entre le sol et la fondation.

*** Marc Maldonado (2008)**

A pris comme tentative de faire des mesures expérimentales qui permet d'analyser le comportement vibratoire des différents éléments de la voie notamment sur les essieux, le rail et le sol ; et des modèles numériques ont été proposés pour que les comparaisons entre les modèles et les mesures puissent être faites à différents niveaux (réponse du sol seul, réponse de la voie lors d'une excitation impulsionnelle, mesures au passage d'un tramway).

Les conditions de couplage voie/sol sont élaborées dans le cas particulier d'une dalle de béton appuyée sur le sol (ou isolée du sol à l'aide d'un matériau spécifique) qui peuvent avoir des mouvements de translation verticale et de rotation.

Finalement le modèle d'excitation multi source est revu pour se rapprocher du type de sollicitation effectivement dû au passage d'un tramway.

- **Georges Kouroussis (2009)**

Une méthodologie fiable est proposée d'être mise au point, dans le but de prédire les efforts dynamiques que le véhicule est susceptible de transmettre au sol, et d'en estimer l'impact sur l'environnement.

S'appuyant en premier lieu sur la théorie de système multi-corps une simulation du véhicule est proposée, les méthodes analytiques et semi-analytiques sont menées lors de l'analyse d'interaction voie-sol ainsi que l'emploi des méthodes numériques s'avère être une nécessité.

En deuxième phase l'analyse numérique du sol et la propagation de la vibration est intervenue par les techniques de modélisation : théorie des éléments frontières et des éléments finis, ainsi que les éléments semi-infinis afin de prendre en compte la nature non bornée du domaine.

La validation en analyse fréquentielle et temporelle pour vérifier les conditions d'utilisations a indiqué que l'analyse temporelle est plus réaliste face au phénomène transitoire.

- **David Thompson (2009)**

Son travail rassemble la recherche dans le domaine du bruit et aux vibrations ferroviaires, d'une manière qui offre une introduction cohérente sur le terrain.

Beaucoup des exemples de calculs sont basés sur ensembles de paramètres qui ont été choisis pour des fins d'illustration. Ils ne sont pas destinés à représenter un cas particulier, mais sont en quelque sorte «typique».

La gamme de fréquence d'intérêt est déterminée essentiellement par la fréquence audible gamme, nominalement 20 Hz à 20 kHz (en dehors de la section de vibration du sol, où une gamme inférieure est appropriée).

Comme l'oreille réagit au son logarithmique (un doublement de fréquence est un intervalle musical constant, une octave), des échelles logarithmiques sont largement utilisées pour l'axe des fréquences. Aussi pour des amplitudes, l'échelle des décibels est largement utilisée.

Fonctions de réponse en fréquence (FRF) sont le plus souvent présentées en termes de mobilité (vitesse / force). En commun avec beaucoup de pratique courante dans les

vibrations ce sont préféré ici sur l'impédance mécanique (ou rigidité dynamique ou la masse apparente).

L'amortissement est représenté en utilisant une hystérésis (facteur de perte constant) modèle plutôt qu'un modèle d'amortissement visqueux. Pour la roue, l'amortissement est si léger qu'il est peu différence d'amortissement modèle qui est utilisé.

Le texte traite des mécanismes de génération du son, des techniques de modélisation pour les moyens de contrôle et de représentation, en particulier ceux appliqués à la source.

L'auteur donne un ouvrés prolongée exemple de la façon de combiner différentes techniques, théoriques et expérimentales, en premier comprendre le problème assez profondément avant de proposer des solutions et des tests eux. Il tente de trouver un équilibre entre le traitement des exemples mathématique et pratique, entre l'exploration fondamentaux et de discuter l'application, entre le texte et images, entre équations et des explications physiques.

- **Pedro Alves Costa (2009)**

Les principaux objectifs de ce document sont l'évaluation de l'importance du comportement non - linéaire du sol sur la réponse de voie, et la validation d'une méthodologie qui comprend ces effets par l'intermédiaire d'une analyse linéaire équivalente proposée, une modélisation numériques basée sur le Procédé de 2.5D éléments fini / infini associée à une méthode itérative de façon à obtenir un accord entre les niveaux de déformation et les propriétés dynamiques des matériaux.

Dans cette formulation, seulement la moitié du domaine est discrétisée, prenant en compte les conditions de symétrie du problème, l'application de cette approche est confondue à une structure assumée avoir un développement infini et des propriétés invariantes suivant une seule direction.

Le système global des équations est défini après l'assemblage des matrices élémentaires de masse et rigidité.

- **Xiangzhong Bai (2009)**

La théorie des poutres d'Euler est appliquée pour construire le modèle mathématique sous une charge répartie mobile. Les fondations sont considérées élastiques et l'effet de l'amortissement est pris en compte.

Faisant usage de la méthode de séparation des variables et l'équation de Lagrange qui compte tenu de la force d'amortissement, les solutions homogène et général proviennent par des dérivés détail, à la fin une validation numérique des résultats est réalisée.

- **Z. Dimitroval et Fryba (2009)**

La Vibration transversale induite par une charge mobile le long d'une poutre infinie, reposante sur une section-judicieux d'une fondation visco-élastique homogène est analysée; spécialement la transition des ondes, qui se posent comme une charge ponctuelle traverse le milieu discontinu de fondation.

La solution est trouvée par l'analyse des modes propres normaux, exprimée sous la forme de somme infinie de modes orthogonaux multipliés par les coordonnées généralisées.

Afin de calculer les fréquences naturelles non amorties, et les modes correspondants, adoptant la méthode des éléments finies lors du calcul, la structure est séparée en éléments de structure homogène. Chaque discontinuité dans les paramètres IE, μ, k ou c , marque le début d'un nouvel élément structurel. Une discontinuité dans le coefficient d'amortissement c est évidemment immatériel pour les fréquences non amorties est aussi considérée. En outre, lorsque la masse de la charge est incluse, un autre nœud de structure est ajouté, Celui-ci varie sa position dans le temps. La masse de la charge est compris à l'endroit de la discontinuité comme un élément supplémentaire de masse concentrée.

La méthodologie adoptée permet de s'assurer que le déplacement maximal augmente sans heurts jusqu'à sa valeur finale. Par souci de simplicité, il est supposé que la force appliquée augmente linéairement.

- **Z. Dimotrovova (2009)**

Analyse la réponse dynamique transitoire d'une poutre sur une fondation à raideurs variables et soumise à une force mobile à vitesse constante. Le déplacement est calculé au milieu de la poutre finie. Une étude analytique est mise en œuvre par transformations intégrales finis incorporant modes propre de vibrations comparée à une étude numérique utilisant el logiciel de L'ANSYS.

- **Idowu.IA (2009)**

Analyse une théorie décrivant la réponse d'une poutre soumise à l'action des masses mobiles et des forces extérieures est prisent en considération. L'équation gouvernante est une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre.

La transformé de Fourier sinus fini est utilisée pour transformer l'équation aux dérivées partielles régissant dans les équations différentielles ordinaires du second ordre.

Les équations différentielles ordinaires sont résolues par la transformé de Laplace, Cette équation est résolue, en appliquant l'intégrale par partie, une série de solution est obtenue, l'équation admie une solution générale est une solution particulière, à la fin une formule de déplacement est obtenue.

Dans le cas d'une masse mobile le déplacement est obtenu de la même méthode de calcul est finalement tout les résultats sont comparées.

- **Z. Dimotrovova (2010)**

Les principales contributions de cet article comprennent : la supposition que la structure simplement appuyée est composée de deux zones sur une fondation a deux constantes de Winkler différentes soumise à une charge mobile, il existe une troisième zone intermédiaire de longueur fixe et la rigidité de la fondation adaptable. La rigidité de cette zone intermédiaire est optimisée par rapport au déplacement maximum d'une manière paramétrique.

Les équations régissant du problème sont résolus par l'analyse en mode propre. La solution est exprimée sous la forme d'une somme infinie de modes propres orthogonaux multiplié par les déplacements généralisés, les fréquences naturelles sont obtenues exploiter numériquement par le concept de matrice dynamique globale de rigidité. Les procédures sont programmées dans MAPLE.

- **A.Guettiche (2010)**

Analyse le comportement mécanique d'une structure ferroviaire en vue de déterminer la déflexion, la répartition des efforts sous le blochet ainsi que la plate forme ou dans une sous couche, est réalisé par deux approches semi-analytique (Winkler et sauvage). Ces modèles sont améliorés par l'intégration des raideurs en rotation des appuis (soit continues ou discrets) de la poutre infinie.

Le module K_v de la voie a été simulé sous environnement Plaxis, et intégré dans les modèles considérés.

Une simulation numérique sous environnement Plaxis de la structure rail ainsi que les différentes couches de la structure ferroviaire est aussi considérée.

Pour ce modèle plan, une modélisation d'un tronçon de la voie ferrée, en considérant un comportement élastique du ballast et du sol ainsi qu'un comportement élasto-plastique est présentée.

Une analyse paramétrique est réalisée afin de localiser les différents paramètres influents dans le comportement

- **M. Lacheheb (2010)**

Analyse le comportement dynamique d'une poutre infinie simulée en tant que poutre Euler ou poutre de Timoshenko appuyée sur un système caractérisé par : les traverses, les semelles, et le Ballast. Ce système d'appuis est espacé régulièrement et présente les mêmes caractéristiques mécaniques.

S'intéressant à la détermination analytique des ondes propres de vibrations « ondes de Bloch » et ce pour plusieurs systèmes mécanique d'appuis (appuis rigide, appuis massique...).

L'utilisation de la méthode d'intégration directe combinée aux conditions de continuité de la fonction solution du problème permet de déterminer la fonction de Green associée à l'équation différentielle régissant le comportement vibratoire du système rail.

- **J.F.Semlat (2011)**

Différents aspects des problèmes vibratoires sont abordés, un bilan des aspects réglementaires est d'abord proposé. En partant de données mesurées à proximité de voies ferroviaires, la caractérisation dynamique des sols en laboratoire est donc abordée (colonne résonante, essais en centrifugeuse).

Pour les applications réalistes, des simulations numériques utilisant les paramètres dynamiques déterminés sur site ou en laboratoire sont effectués (méthode des éléments finis (FEM), méthode des éléments de frontière (BEM)).

En concluant que La modélisation est un outil indispensable pour analyser les mesures sur site et généraliser les lois d'atténuation donnant les vitesses maximales en fonction de la distance pour différents types de sols.

Elles permettent également des comparaisons avec les expérimentations en conditions contrôlées pour différentes sources d'excitation (e.g. essais en fosse géotechnique) et sont particulièrement adaptées à l'analyse et l'optimisation de dispositifs d'isolation vibratoire.

- **Yi Wang (2011)**

L'objectif de ce travail est de développer un procédé numérique pour l'évaluation de la réponse dynamique de la poutre sur des fondations élastiques et soumise à l'action des charges mobiles sinusoïdales. La méthode des éléments finis et l'intégration de Newmark sont adoptées.

Intégrant aussi l'effet de la vitesse de chargement, la rigidité des appuis élastiques et l'amortissement visqueux dans le but de déterminer les effets de différents paramètres sur la réponse de la poutre Des exemples numériques sont donnés. La théorie de la poutre d'Euler-Bernoulli est utilisée pour avoir les matrices élémentaires de la masse et de la rigidité.

- **O. Chupin (2011)**

Analyse la réponse dynamique d'une structure ferroviaire sur la base d'une approche quasi-statique, ne nécessitant pas de discrétisation temporelle. Le système complet composé des rails, des traverses et de la structure est périodique dans la direction du roulement. Les dimensions spatiales de la structure sont supposées semi-infinies. La méthode proposée repose sur la décomposition de la distribution de contraintes à la surface de la structure en ondes de chargement se déplaçant à des vitesses différentes. L'auteur valide son travail par un exemple numérique.

- * **Md. Rajib Ul Alam Uzzal (2012)**

Analyse la réponse du rail modélisé en premier lieu en poutre Euler-Bernoulli et en poutre de Timoshenko, supporté par des fondations de modèle de Winkler et modèle de Pasternak à deux paramètres, l'effet de la source mobile est modélisé par une masse mobile (l'effet de l'inertie est considéré) et charge constante (négligeant l'inertie).

La solution de l'équation différentielle du quatrième ordre est obtenue par les deux techniques :

La méthode de la transformée de Fourier et la méthode de superposition des modes propres de la vibration, dans des conditions amortie et non amortie où la vitesse du charge mobile varie jusqu'à la vitesse critique. Une validation numérique est réalisée.

- **Hai Huang (2012)**

Les efforts considérés dans cette recherche sont pris pour étudier l'impact des modèles de charge générée par trains à grande vitesse. Un modèle de voie dynamique se compose de rail-traverse – ballast, " Sandwich " pour la structure supérieure, et un modèle de structure

de sol 3D finie est développé et utilisés pour obtenir des impulsions de chargement et des combinaisons d'impulsions introduites par différents modèles de trafic sur la partie supérieure de la couche de ballast .

Une image assistée par approche éléments discrets modélisation est ensuite utilisé pour simuler le tassement du ballast sous les impulsions de charge réelles et des combinaisons d'impulsions.

- **O. K. Ogunbamike (2012)**

La réponse dynamique d'une poutre de Timoshenko reposante sur une fondation élastique Winkler est étudiée, considérée excitée par une charge mobile. La technique de la solution implique l'utilisation de la transformée finie de Fourier et le système d'équations résultantes est réduit à des équations algébriques simples par l'intermédiaire de la transformée de Laplace.

Les solutions analytiques et numériques qui représentent que si les valeurs de modules élastiques de la Fondation augmentent, l'amplitude des vibrations transversales de la poutre diminue.

- **Vinicius Alves Fernandes (2013)**

Basée sur l'évaluation numérique de l'influence de la variabilité de la géométrie de la voie sur le chemin de fer. Une méthode probabiliste basé sur des essais de résistance au cône est mis en œuvre en bidimensionnelle dans un modèle d'éléments finis 2D avec un état de déformation plane modifié pour estimer la réponse de voie à sous charge.

La variabilité spatiale est prise en compte en considérant la résistance au cône de chaque couche de piste en tant que champs aléatoires indépendantes, chacune caractérisée par une fonction marginale de densité de probabilité obtenu à partir d'une description statistique de la mesure de données in situ et une fonction auto-corrélation théorique.

II.3. Poutre infinie sur des supports de Winkler

Afin de construire un outil de calcul rapide dédié à l'analyse de la vibration de la structure ferroviaire, le modèle le plus pratique est de considéré le sol par le model de Winkler, ce model permet d'appréhender avec un bon degré d'approximation les déformations et les contraintes d'une poutre ou d'une plaque posée sur un sol.

L'idée de Winkler est de substituer au sol une distribution continue de ressorts indépendants l'un à l'autre, ou appuis élastiques, pour lequel la réaction exercée par le sol en un point est directement proportionnelle au déplacement à ce point:

$$p = ky \quad (\text{II.1})$$

Loi d'interaction permet, pour les poutres sur sol élastiques, à une équation différentielle ordinaire aisément intégrable :

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} + ky = f(x) \quad (\text{II.2})$$

Ce problème est étudié premièrement par Timoshenko depuis l'année 1926.

Fryba [22] a présenté en détail un calcul analytique du problème d'une force constante se déplaçant sur une poutre d'Euler-Bernoulli infinie sur la fondation de Winkler pour toutes les possibilités de vitesses et de valeurs de viscosité.

Une vitesse critique à laquelle la résonance apparaît a été trouvée, elle dépend de la densité et de la rigidité en flexion de la poutre et aussi de la rigidité de la fondation. La vitesse critique augmente quand la rigidité de la fondation augmente.

II.4. Poutre Euler-Bernoulli

Le modèle Euler-Bernoulli des poutres, souvent appelé comme modèle classique, valable aux fréquences basses, il ne modélise le rail que dans le domaine de fréquences inférieures à 1 KHz. Dans le cadre de la théorie d'Euler-Bernoulli les sections planes restent planes et perpendiculaire à l'axe neutre.

Contrairement à la poutre Timoshenko la poutre Euler-Bernoulli néglige les déformations dues au cisaillement.

II.5. Evaluation pour la détermination du module de réaction du sol

Les propriétés physiques et mécaniques d'un sol, présentent toutes une certaine variabilité naturelle dont l'origine, vient de la complexité des processus géologiques naturels mis en jeu (érosion, transport, dépôt, compaction, transformation physicochimique), qui mènent à la constitution d'un sol.

Des différents modèles sont utilisés dans l'étude de l'interaction sol-structure. Le paramètre commun à ces modèles est le module de réaction du sol (k_v) qui dépend de

paramètres mécaniques du sol et des paramètres mécaniques et géométriques de la structure.

II.5.1. Différentes expressions du module de réaction du sol [32]

Ce module est calculé à partir des différents modèles semi-empiriques ; de nombreuses expressions existants dans la littérature parmi ces modèles nous pouvons citer les quatre modèles semi-empiriques de : **Biot, Vlassov, Vesic et Menard** retenus afin d'obtenir une valeur du module de réaction du sol k_s sont présentés dans le tableau (II.1).

- E_{PMT} : Module Pressiométrique ou module de Ménard,
- μ : Paramètre sans dimension,
- B_0 : Largeur de référence de la fondation,
- α : Coefficient rhéologique ou de structure,
- λ_c et λ_d : Facteurs de forme géométrique de la fondation.

Auteur	Modèle semi-empirique	Application
Biot (1937)	$k_s = \frac{0.95}{b} \cdot \left(\frac{12E_s b^3}{E_c h^3} \right)^{0.108} \cdot \frac{E_s}{1 - \nu_s^2}$	Poutres infinies reposant sur un sol élastique.
Vlassov (1960)	$k_s = \frac{E_s (1 - \nu_s)}{(1 + \nu_s)(1 - 2\nu_s)} \left(\frac{\mu}{2b} \right)$	Poutres et plaques reposant sur demi-espace élastique ($\mu=1$)
Vesic (1961)	$k_s = \frac{0.65}{b} \cdot \sqrt[12]{\frac{12E_s b^3}{E_c h^3}} \cdot \frac{E_s}{1 - \nu_s^2}$	Poutres infinies reposant sur un sol élastique.
Menard (Cassan 1978)	$\frac{1}{k_s} = \frac{b}{9 \cdot E_s} \cdot \lambda_c + \frac{2 \cdot B_0}{9 \cdot \alpha \cdot E_s} \cdot \left(\lambda_d \cdot \frac{b}{B_0} \right)^\alpha$	Poutres et plaques reposant sur un demi-espace élastique ($E_{PMT} = \alpha \cdot E_s$)

Tab. II.1. Modèles semi-empiriques pour le calcul du module de réaction du sol k_s [32]

Le calcul de k_s est fonction des paramètres de sol tels que le module du sol (E_s) et le coefficient de Poisson du sol (ν_s), de paramètres liés à la géométrie de la structure, la propriété mécanique et module d'Young du structure.

II.5.2. Essais expérimentaux pour avoir le module de réaction du sol

II.5.2.1. Essai à plaque

L'essai consiste à charger et décharger la surface du sol par une plaque rigide circulaire de (200 ou 750) cm² et enfoncée dans le sol par des vérins hydrauliques qui produisent un tassement uniforme en surface ou dans un forage (essai de fondation) ainsi à mesurer le tassement du sol situé à l'aplomb du centre de gravité de la plaque

rigide chargée, l'appareillage est monté sous un camion lesté.

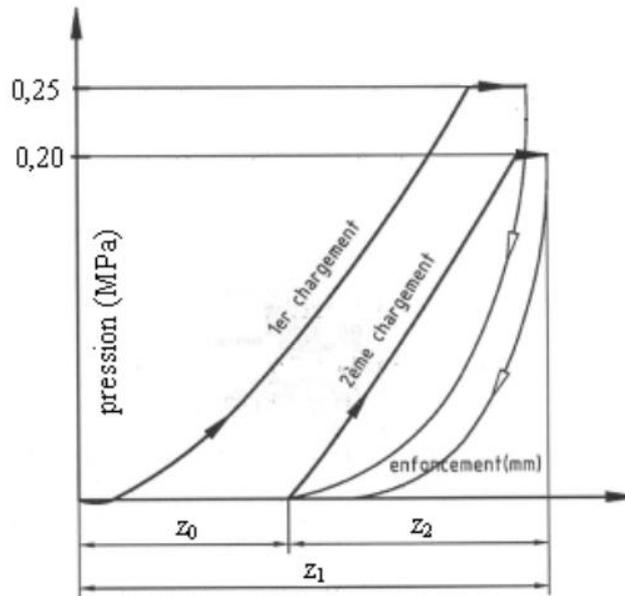


Fig. (II.1) : Principe d'un essai de plaque

Le module de déformation d'un essai de plaque se calcule selon la formule suivante :

$$E_{plaque} = \frac{\pi}{4} (1 - \nu^2) \frac{PD}{z_2} \tag{II.3}$$

II.5.2.2. Essais CBR

Cet essai créé par la 'californian Division of highways' est basé sur l'essai 'Californian bearing Ratio', il s'agit d'un essai mécanique de pénétration à vitesse constante, la résistance du sol au poinçonnement est mesurée et comparée à celle d'un macadam standard, essayé dans les mêmes conditions, l'indice CBR est le rapport de ces deux résistances.

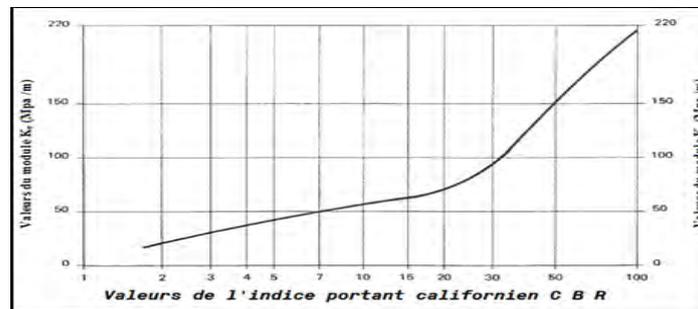


Fig. (II.2) : Exemple d'un abaque présentant la relation entre le module et l'indice k_v , CBR [13].

La valeur du module de réaction K_v s'en déduit au moyen des abaques empiriques (Fig. II.2)

II.5.2.3. Plate bearing test

Encore un autre essai de portance qu'il faut signaler est l'essai de «**plate bearing test**» (**P.B.T.**) qui est basé sur le même principe mais avec une plaque de 75 cm de diamètre.

Cet essai permet de déterminer le module de réaction K_v du sol nécessaire au dimensionnement des chaussées en béton. Ce module de réaction K_v est défini par le rapport de la pression P nécessaire pour obtenir un enfoncement D de 1,27 mm

$$k_v = \frac{p}{D} \quad (\text{II.4})$$

Donc Le module de la réaction de sol est le taux de la pression appliquée divisé par le mouvement correspondant de sol ou de roche.

II.6. Conclusion

Cette revue bibliographique nous permet de constater que la structure ferroviaire, est modélisée par une poutre Euler ou Timoshenko, sur des appuis continus élastiques ou périodiques, le modèle le plus utilisé pour les fondations élastiques continues est celui de Winkler, la réponse dynamique de la poutre sous l'influence d'une source mobile n'est pas concrétisée. Les plupart des solutions proposées sont dans le domaine fréquentiel. Des solutions du problème sont proposées par approches numériques. Notre objectif est d'établir des modèles analytiques décrivant la réponse dynamique de la structure ferroviaire par propagation d'onde.

CHAPITRE

III

Modèle analytique de Fryba

III. Modèle analytique de Fryba

III.1. Introduction

Nous présentons dans ce chapitre, la méthode de **Fryba [22]**, qui est représentée par une poutre d'Euler-Bernoulli de longueur infinie (L'auteur ne tient pas compte de la longueur élastique) reposante sur des supports continus (modèle de Winkler), la source mobile est idéalisée par une force constante qui se déplace le long de la poutre infinie à vitesse constante.

La méthode de l'intégrale de la transformée de Fourier est utilisée pour résoudre le problème. Le retour inverse permet de déterminer donc la réponse dynamique dans le domaine spatio-temporelle. Ce passage est réalisé en évaluant l'intégrale basée sur le théorème des résidus de Cauchy. Une analyse paramétrique est menée par rapport à l'amortissement critique ainsi qu'aux vitesses critiques. Une discussion est réalisée pour les résultats obtenues sous environnement MAPLE et MATLAB.

III.2. Hypothèse du problème

La théorie de la poutre d'Euler-Bernoulli est appliquée pour modéliser la structure rail, les caractéristiques mécanique sont le module de Young 'E' et le coefficient de poisson ' ν ', sa section 'A' ainsi que son inertie 'I' sont régité par les normes internationales 'UIC'. Les supports sont supposés être du modèle de Winkler, la source mobile simulant un convoi de train est représentée par une force ponctuelle dotée d'une vitesse constante (Fig. III.1).

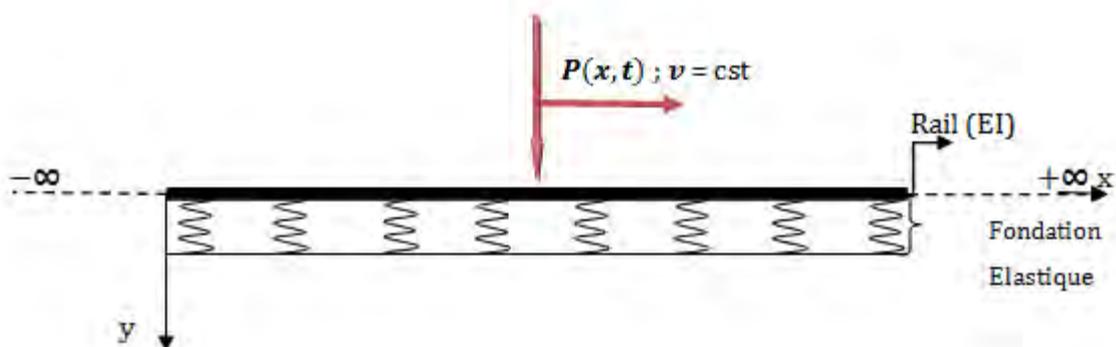


Fig. III.1. Poutre sur des supports élastique sous une action mobile

III.3. L'équation de mouvement

Le mouvement est régi par l'équation (III.1) :

$$EI \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + m_r \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + 2m_r \omega_n \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + k_v u(x,t) = P\delta(x - vt) \quad \text{(III.1)}$$

Avec :

- x Coordonnée spatiale,
- t Coordonnée temporelle,
- $u(x, t)$ Réponse de la poutre
- m_r Masse de la poutre ;
- v Vitesse de chargement,
- k_v Rigidité du sol ;
- ω_n Pulsation propre de mouvement,
- EI Rigidité flexionnelle de la poutre.
- P Charge d'amplitude constante
- δ Distribution de Dirac

III.4. Méthode de résolution

Dans les études des problèmes de charge mobile avec une vitesse constante, plusieurs auteurs telle que Fryba, préfèrent le passage à l'analyse dans un repère mobile qui est attaché à la position de la force. Ce fait est réalisé par un changement de variable. Si la charge se déplace suivant l'axe 'ox' avec une vitesse v constante, nous avons :

$$s = \lambda(x - vt) \quad \text{(III.2)}$$

Avec :

$$\lambda = \left(\frac{k_v}{4EI} \right)^{1/4} \quad \text{(III.3)}$$

La distribution de Dirac $\delta(s) = \frac{1}{\lambda} \delta(x)$ par rapport à la nouvelle variable : Où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda} \delta(x) \lambda dx = 1$$

Reformulant l'équation (III.1) en fonction de la nouvelle variable nous aurons l'équation différentielle suivante:

$$EI \frac{\partial^4 u(s)}{\partial s^4} + 4\alpha^2 \frac{\partial^2 u(s)}{\partial s^2} - 8\alpha\beta \frac{\partial u(s)}{\partial s} + 4u(s) = 8\delta(s) \quad \text{(III.4)}$$

Avec :

$$\bullet \quad \alpha = \frac{v}{v_{cr}} = \frac{v}{2\lambda} \left(\frac{m_r}{EI} \right)^{1/2} \quad \text{(III.5)}$$

$$\bullet \quad \beta = \left(\frac{m_r}{k_v} \right)^{1/2} \omega_n \quad \text{(III.6)}$$

$$\bullet \quad v_{cr} = 2\lambda \left(\frac{EI}{m_r} \right)^{1/2} \quad \text{(III.7)}$$

α : Effet de la vitesse

β : Effet de l'amortissement

v_{cr} : Vitesse critique

Les conditions aux limites appliquées à l'infini (lorsque $s \rightarrow \pm\infty$) :

$$u(s) \rightarrow 0, \frac{\partial u(s)}{\partial s} \rightarrow 0, \frac{\partial^2 u(s)}{\partial s^2} \rightarrow 0, \frac{\partial^3 u(s)}{\partial s^3} \rightarrow 0$$

(III.8)

□ En utilisant la transformation de Fourier : $U(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(s)e^{-iqs} ds$;

(III.9)

□ nous obtenons les solutions dans le domaine spatiaux-fréquentielle :

$$U(q) = \frac{8}{EI(q)^4 - 4\alpha^2(q)^2 - 8\alpha\beta(iq) + 4}$$

(III.10)

□ Avec ' q ' est la variable dans le plan complexe :

□ Nous tenons à signaler que pour obtenir la solution dans le domaine temporelle, il faut évaluer **la transformé de Fourier inverse** :

$$u(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(q)e^{isq} dq \quad \text{(III.11)}$$

Substituant $U(q)$ exprimée par l'intégrale de la **transformée de Fourier** équation (III.10)

$$u(s) = \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{isq}}{q^4 - 4q^2\alpha^2 - i8\alpha\beta q + 4} dq \tag{III.12}$$

Cette intégrale est réalisée en utilisant la méthode '**des résidus de Cauchy**' :

Le dénominateur de l'équation (III.12) est exprimé sous la forme :

$$Q(q) = q^4 - 4q^2\alpha^2 - i8\alpha\beta q + 4 = (q - A_1)(q - A_2)(q - A_3)(q - A_4) \tag{III.13}$$

La connaissance des pôles ' A_j ' de l'équation (III.12) permet l'évaluation de l'intégration le long de l'axe réel, Ces pôles représentent les solutions du dénominateur $Q(q)$: A_1, A_2, A_3, A_4 .

III.4.1. Pôles de la fonction des variables complexes

Les pôles de la fonction de la variable complexe dans l'intégrale de l'équation (III.12), supposés être de la forme complexe:

$$A_1 = a_1 + ib \quad A_2 = -a_1 + ib \quad A_3 = a_2 - ib \quad A_4 = -a_2 - ib \tag{III.14}$$

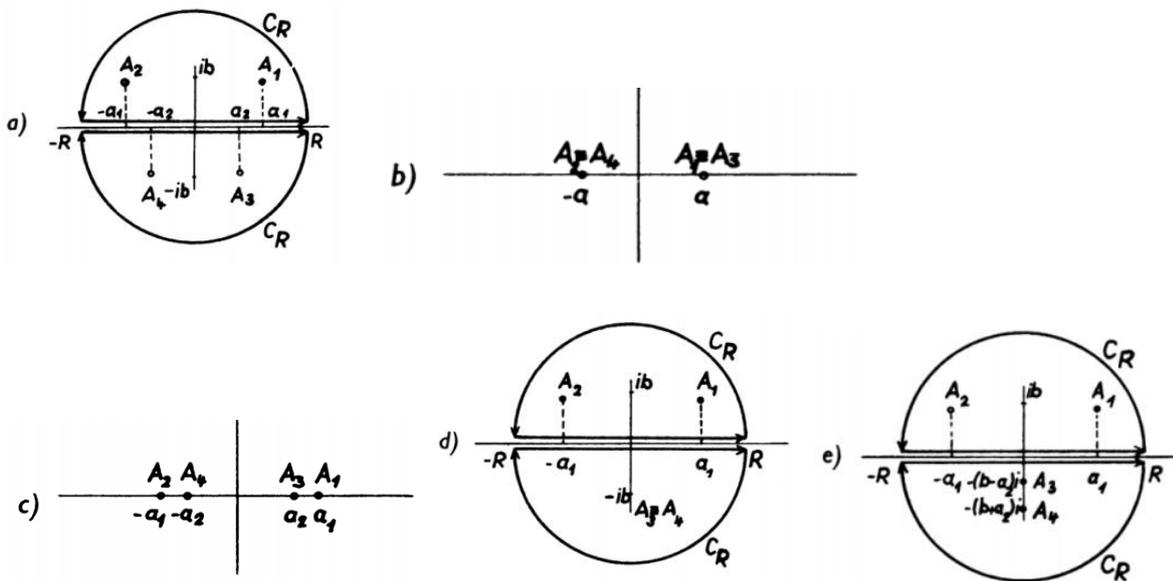


Fig. III.2. Les pôles de A_j dans le plan de q complexe

Ou a_1, a_2 et b les coordonnées des pôles, a_1, a_2 les parties réelles, et b la partie imaginaire du pôle, sont données fonction des paramètres α exprimant l'effet de la vitesse de la source mobile et ' β ' l'amortissement :

$$\begin{cases} a_1^2 = 2\alpha^2 + b^2 + 2\alpha\beta/b \\ a_2^2 = 2\alpha^2 + b^2 - 2\alpha\beta/b \end{cases} \quad \text{(III.15)}$$

$$b^6 + 2\alpha^2 b^4 + (\alpha^2 - 1)b^2 - \alpha^2 \beta^2 = 0 \quad \text{(III.16)}$$

Afin de ne pas perdre le sens des expressions (III.14) nous prendrons seulement la racine positive parmi les six racines de l'équation (III.16). En fait, conformément à la règle de Descartes l'équation (III.16) a toujours des racines positives à $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ [22], la résolution de cette équation est plus facile en la considérant une équation du troisième degré en b^2 .

III.4.2. Solutions

En utilisant le théorème des résidus, l'intégral (III.17) exprimée à la limite $\mp\infty$ fig. (III.2) est :

$$u(s) = \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(q) dq = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{res } F(q)|_{q=A_j} \quad \text{(III.17)}$$

□ Avec :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(q) dq = \oint \frac{e^{isq}}{Q(q)} dq$$

□ Alors :

$$\oint \frac{e^{isq}}{Q(q)} dq = \lim_{R \rightarrow \mp\infty} \left[\int_{-R}^{+R} \frac{e^{isq}}{Q(q)} dq + \int_{C_R} \frac{e^{isq}}{Q(q)} dq \right] = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{res } F(q)|_{q=A_j} \quad \text{(III.18)}$$

L'équation (III.18) représentant la solution de notre problème est composée de deux membres. L'analyse du seconde membre de l'intégral [ANNEXE B] montre que cette quantité tend vers zéro, donc la solution retenue :

$$\oint \frac{e^{isq}}{Q(q)} dq = \lim_{R \rightarrow \mp\infty} \left[\int_{-R}^{+R} \frac{e^{isq}}{Q(q)} dq \right] = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{res } F(q)|_{q=A_j} \quad \text{(III.19)}$$

Accordant au théorème de résidu de Cauchy, la méthode de comparaison ainsi qu'au théorème de Jordan [ANNEXE B] la réponse de la poutre, le moment de flexion et la force de cisaillement sont donnés dans le domaine spatio-fréquentielle:

- **Déplacement adimensionnel de la poutre**

$$u(s) = \frac{2}{a_1(D_1^2 + D_2^2)} e^{-bs} (D_1 \cos a_1 s + D_2 \sin a_2 s) \quad ; \quad s > 0 \quad \text{(III.20)}$$

$$u(s) = \frac{2}{a_2(D_3^2 + D_4^2)} e^{bs} (D_3 \cos a_2 s - D_2 \sin a_2 s) \quad ; \quad s < 0 \quad \text{(III.21)}$$

• **Moment de flexion adimensionnel de la poutre**

$$M(s) = \frac{1}{a_1(D_1^2 + D_2^2)} e^{-bs} [(a_1^2 D_1 + 2a_1 b D_2 - b^2 D_1) \cos a_1 s + (a_1^2 D_2 - 2a_1 b D_1 - b^2 D_2) \sin a_1 s] ;$$

$$s > 0 \quad \text{(III.22)}$$

$$M(s) = \frac{1}{a_2(D_3^2 + D_4^2)} e^{bs} [(a_2^2 D_3 + 2a_2 b D_4 - b^2 D_3) \cos a_2 s - (a_2^2 D_4 - 2a_2 b D_3 - b^2 D_4) \sin a_2 s] ;$$

$$s < 0 \quad \text{(III.23)}$$

• **Efforts tranchants adimensionnel dans la poutre**

$$T(s) = \frac{1}{4a_1(D_1^2 + D_2^2)} e^{-bs} [(a_1^3 D_2 - 3a_1^2 b D_1 - 3a_1 b^2 D_2 + b^3 D_1) \cos a_1 s - (a_1^3 D_1 + 3a_1^2 b D_2 -$$

$$3a_1 b^2 D_1 - b^3 D_2) \sin a_1 s \quad ; \quad s > 0 \quad \text{(III.24)}$$

$$T(s) = -\frac{1}{4a_2(D_3^2 + D_4^2)} e^{-bs} [(a_2^3 D_4 - 3a_2^2 b D_3 - 3a_2 b^2 D_4 + b^3 D_3) \cos a_2 s + (a_2^3 D_3 + 2a_2^2 b D_4 -$$

$$3a_2 b^2 D_3 - b^3 D_4) \sin a_2 s \quad ; \quad s < 0 \quad \text{(III.25)}$$

Les valeurs D_1, D_2, D_3 et D_4 sont fonctions des cordonnées des pôles dans l'objectif d'avoir une écriture simples des équations (III.18 jusqu'à III.25) :

$$D_1 = a_1 b;$$

$$D_2 = b^2 - \frac{1}{4}(a_1^2 - a_2^2) ;$$

$$D_3 = a_2 b;$$

$$D_4 = b^2 + \frac{1}{4}(a_1^2 - a_2^2) . \quad \text{(III.26)}$$

Après d'avoir déterminé les expressions analytiques de la réponse dynamique $u(s)$, le moment fléchissant $M(s)$ et l'effort tranchant $T(s)$, nous pouvons déduire le cas quasi-statique en utilisant l'équation (III.2), en annulant le deuxième terme,

La réponse de la poutre $u(x, t)$ de l'équation (III.1), le moment fléchissant et la force de cisaillement :

$$\begin{cases} u(x, t) = u_0 u(s) \\ M(x, t) = EI \frac{d^2 u(x, t)}{dx^2} = M_0 * M(s) \\ T(x, t) = EI \frac{d^3 u(x, t)}{dx^3} = T_0 * T(s) \end{cases} \quad \text{(III.27)}$$

Où :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{P}{8EI\lambda^3} = \frac{P\lambda}{2k} \\ M_0 = P/4\lambda \\ T_0 = P \end{cases} \quad \text{(III.28)}$$

u_0 , M_0 et T_0 la déflexion, le moment fléchissant, et l'effort tranchant maximaux dans le cas statique.

Nous avons noté que α est représentatif de l'effet de la vitesse de la source mobile, et β représente l'effet de l'amortissement, notre analyse sera menée par rapport à ces deux coefficients :

III.5. Analyse et Validation numérique des différent cas de vibration

III.5.1. Cas statique $\alpha = 0$

Pour une poutre infinie soumise à une charge statique P, en prenant en compte que la valeur du paramètre présentant l'effet de la vitesse est nul ($\alpha = 0$) . L'évaluation des équations (III.15) et (III.16) :

$$a_1 = a_2 = b = 1$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (III.26) nous aurons :

$$D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = 1$$

Les expressions du déplacement, du moment fléchissant et de l'effort tranchant sont exprimées par :

$$u(s) = e^{-|s|}(\cos(s) + \sin|s|)$$

$$M(s) = e^{-|s|}(\cos(s) - \sin|s|)$$

$$T(s) = -\text{sign}(s) * 1/2e^{-|s|} \cos(\tilde{\omega}s) \tag{III.29}$$

Nous notons que dans le cas statique la variable 's' est égale à 'λx', les équations (III.29), nous permettent d'évaluer le déplacement, le moment de flexion et l'effort tranchant en considérant les paramètres suivants de la poutre ainsi que du support et de la charge : EI=200*10⁷Nm² ; K=0.2*10⁸N/m² ; Q=20*10⁴N :

• **Le Déplacement**

$$u(x) = \frac{P}{8EI\lambda^3} e^{-|\lambda x|} (\cos(\lambda x) + \sin|\lambda x|) = \frac{P\lambda}{2k} e^{-|\lambda x|} (\cos(\lambda x) + \sin|\lambda x|) \tag{III.30}$$

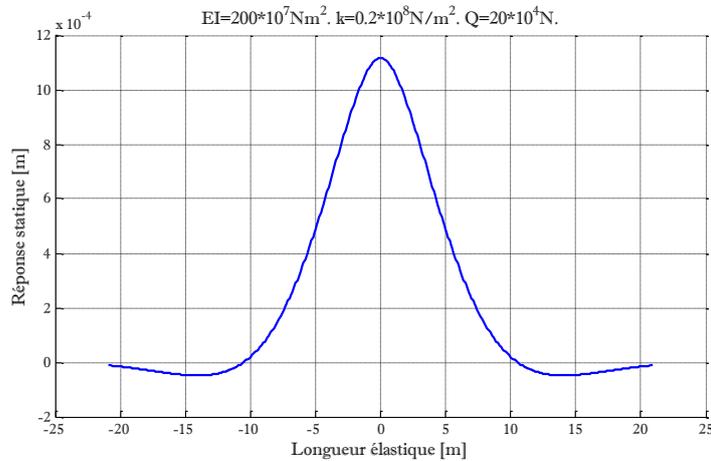


Fig. III.3. Déplacement de la poutre

✚ **Le moment de flexion**

$$M(x) = P/4\lambda e^{-|\lambda x|} (\cos(\lambda x) - \sin|\lambda x|) \tag{III.31}$$

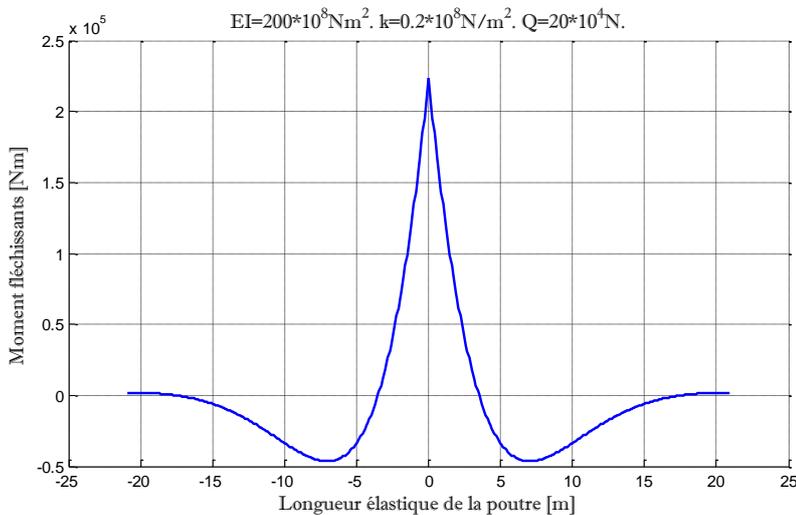


Fig. III.4. Moment de flexion cas statique

✚ Effort tranchant

$$T(x) = -P \operatorname{sign}(\lambda x) * 1/2 e^{-|\lambda x|} \cos(\lambda x) \tag{III.32}$$

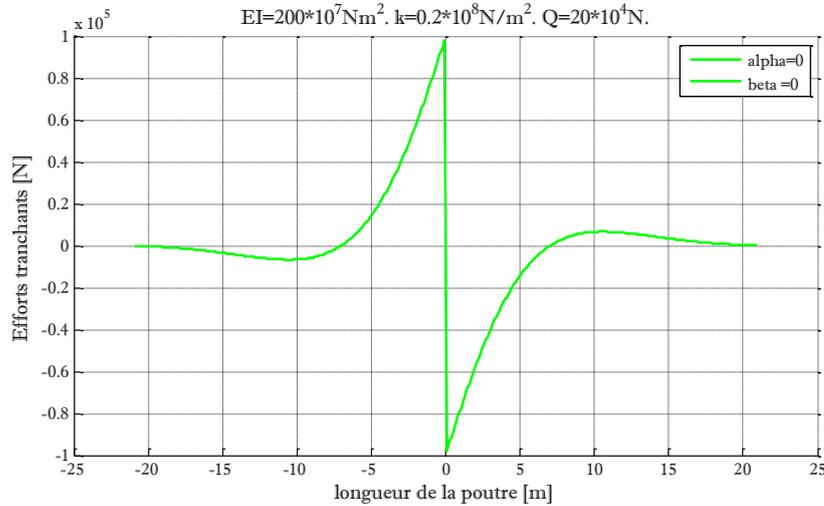


Fig. III.5. Effort tranchant cas statique

Nous pouvons constater que le déplacement maximal se situe sous le point d’application de la charge. Un effet de soulèvement est constaté avec une diminution du déplacement plus nous nous éloignons de la charge, les mêmes remarques sont faites pour le moment fléchissant.

Concernant l’effort tranchant le point d’application de la charge est montré sur la figure (III.5) ($2 \times 10^5 \text{ N}$) et tend vers zéro en s’éloignant de ce point.

III.5.2. Cas non amorti $\beta = 0$

Nous allons mener une analyse par rapport à deux paramètres influant dans le comportement de la structure. Ces paramètres sont l’amortissement et le coefficient α le rapport entre la vitesse de la charge simulant le véhicule et la vitesse critique définie au niveau de [l’ANNEXE C].

Cette analyse permet de définir les domaines qui sont fonctions de l’évaluation de la vitesse par rapport à la vitesse critique.

Dans un premier temps, nous allons considérer que l’amortissement est nul, nous distinguons trois cas de vibration vis-à-vis la vitesse de l’excitation :

- **1^{er} cas $\beta = 0$ et $\alpha < 1$**

En considérant la vitesse de la charge est inférieure de la vitesse de propagation d’onde dans sol, dans ce cas les coordonnées :

$$b = (1 - \alpha^2)^{1/2} ; a_{1,2} \approx [1 + \alpha^2]^{1/2} \tag{III.33}$$

Le déplacement, moment de flexion et efforts tranchants sont donnée fonction de la variable adimensionnelle en valeur absolue:

$$u(s) = \frac{1}{ab} e^{-b|s|} (a \cos(as) + b \sin(a|s|))$$

$$M(s) = \frac{1}{ab} e^{-b|s|} (a \cos(as) - b \sin(a|s|))$$

$$T(s) = -\frac{1}{2ab} e^{-b|s|} (\text{sign}(s) * ab \cos(as) + \alpha^2 \sin(as)) \tag{III.34}$$

Nous remplaçons s par sa valeur $\lambda(x - ct)$ dans l'équation (III.34), nous plotons la réponse dynamique de la poutre (fig. III.6) sous une charge mobile, dont la vitesse est 50% de la vitesse critique au point 'x=0', ainsi que le moment fléchissant (fig.III.7) et la force de cisaillement (fig. III.8).

✚ Le déplacement

$$u(x, t) = u_0 * u(s) = \frac{P\lambda}{2k} * \frac{1}{ab} e^{-b|\lambda(x-ct)|} (\cos(a\lambda(x-ct)) + b \sin(a|\lambda(x-ct)|)) \tag{III.35}$$

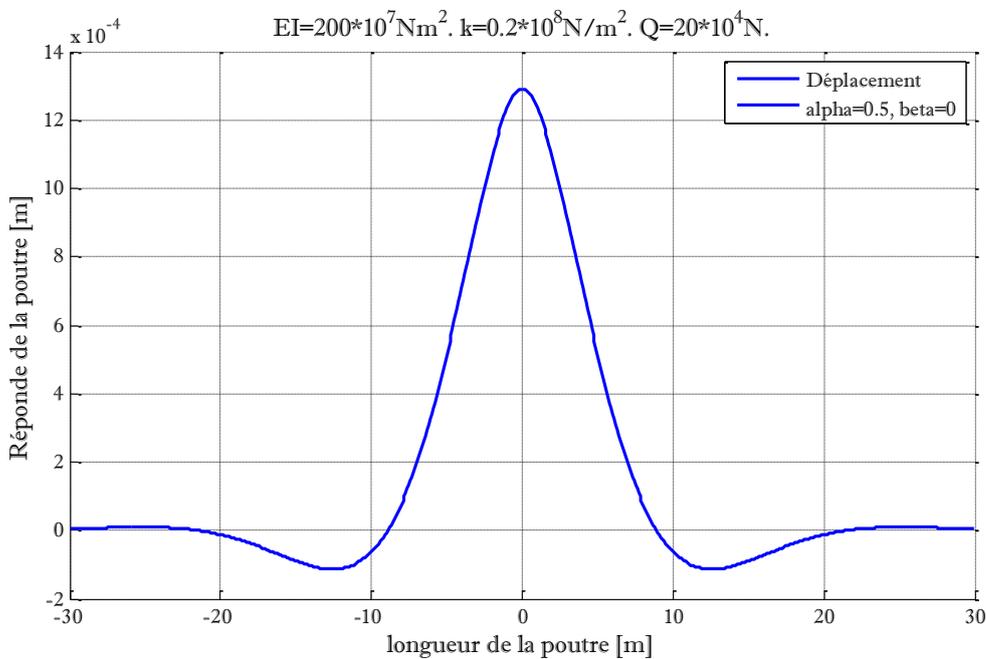


Fig. III.6. Déplacement de la poutre $\beta = 0$ et $\alpha < 1$

• **Moment de flexion :**

$$M(x, t) = M_0 * M(s) = \frac{P}{4\lambda} * \frac{1}{ab} e^{-b|\lambda(x-ct)|} (a \cos(a\lambda(x-ct)) - b \sin(a\lambda(x-ct))) \quad \text{(III.36)}$$

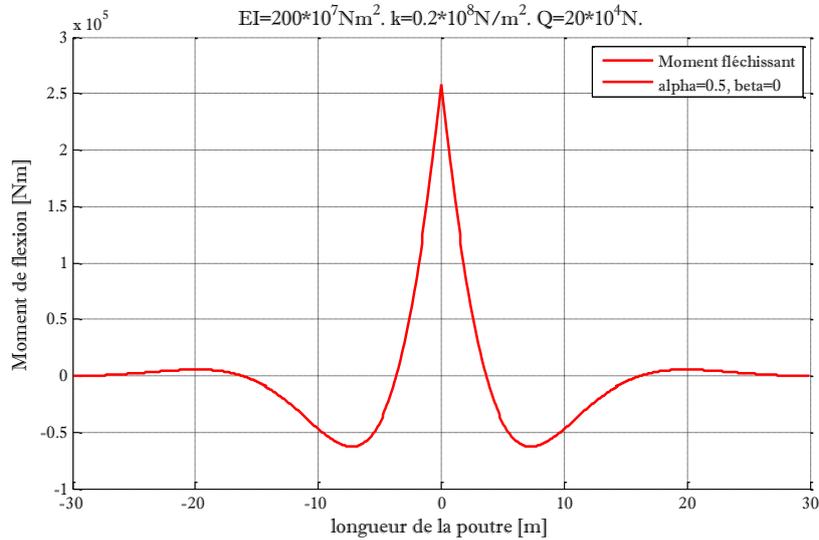


Fig. III.7. Moment de flexion de la poutre $\beta = 0$ et $\alpha < 1$

✚ **Effort tranchant :**

$$T(x, t) = T_0 * T(s) = -\frac{P}{2ab} e^{-b|\lambda(x-ct)|} (\text{sign}(\lambda(x-ct)) * ab \cos(a\lambda(x-ct)) + \alpha^2 \sin(a\lambda(x-ct))) \quad \text{(III.37)}$$

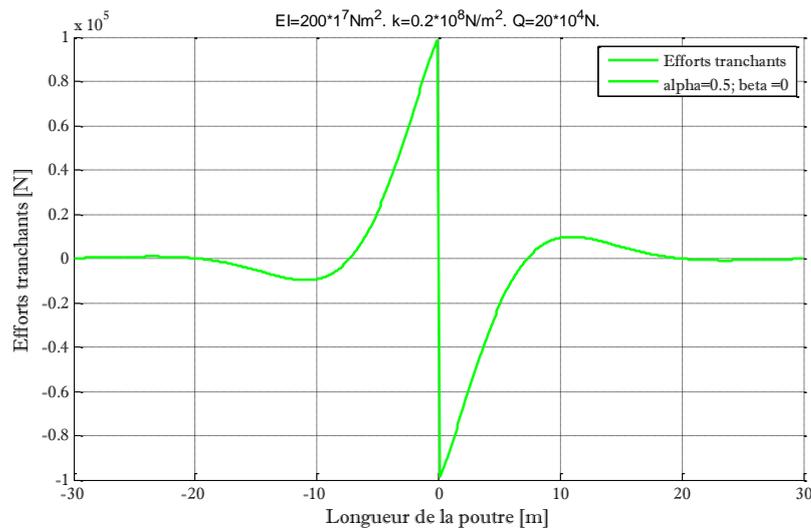


Fig. III.8. Effort tranchant de la poutre $\beta = 0$ et $\alpha < 1$

• 2^{ème} cas $\beta = 0$ et $\alpha = 1$

Lorsque la vitesse de chargement est égale à la vitesse critique du sol $\alpha=1$, à cette vitesse de chargement la poutre perdra stabilité:

$$b = i\sqrt{2}; a_1^2 = a_2^2 = 0; D_1 = D_3 = 0; D_2 = D_4 = -2; \quad \text{(III.38)}$$

Dans ce cas d'analyse, la vitesse atteindra sa valeur critique, la solution n'est pas définie, nous pouvons supposer que cette vitesse de déplacement de charge, la poutre perdra sa stabilité.

• 3^{ème} cas $\beta = 0$ et $\alpha > 1$

Pour aborder ce cas d'analyse nous déterminons les coefficients adimensionnels et nous déterminons les expressions analytiques du $u(s)$, $M(s)$ et $T(s)$ avant et après l'application de la source mobile ($s > 0$ et $s < 0$):

$$b = 0; a_{1,2} = \{2[\alpha^2 \pm (\alpha^4 - 1)^{1/2}]\}^{1/2} = (\alpha^2 + 1)^{1/2} \pm (\alpha^2 - 1)^{1/2} \quad \text{(III.39)}$$

Le déplacement fonction de la variable adimensionnel est

- $u(s) = -\frac{2}{a_1(\alpha^4-1)^{1/2}} \sin(a_1 s) \quad ; \text{ Pour } s > 0$
- $u(s) = -\frac{2}{a_2(\alpha^4-1)^{1/2}} \sin(a_2 s) \quad ; \text{ Pour } s < 0$

Ainsi que le moment de flexion

- $M(s) = -\frac{a_1}{(\alpha^4-1)^{1/2}} \sin(a_1 s) \quad ; \text{ Pour } s > 0$
- $M(s) = -\frac{a_2}{(\alpha^4-1)^{1/2}} \sin(a_2 s) \quad ; \text{ Pour } s < 0$

Et effort tranchant :

- $T(s) = -\frac{a_1^2}{4(\alpha^4-1)^{1/2}} \cos(a_1 s) \quad ; \text{ Pour } s > 0$
- $T(s) = -\frac{a_2^2}{4(\alpha^4-1)^{1/2}} \cos(a_2 s) \quad ; \text{ Pour } s < 0$ (III.40)

La réponse de la poutre est donnée pour les deux domaines précités avant et après la source mobile:

- $u(x, t) = -\frac{2}{a_1(\alpha^4-1)^{1/2}} \sin(a_1(\lambda(x - ct)))$; Pour $s > 0$
- $u(x, t) = -\frac{2}{a_2(\alpha^4-1)^{1/2}} \sin(a_2(\lambda(x - ct)))$; Pour $s < 0$

(III.41)

La déflexion significative se produit derrière la charge (fig. III.9), alors que le moment de flexion (fig. III.10) et de la force de cisaillement (fig.III.11) sont plus élevés avant la charge et la longueur d'onde arrière est plus élevée que l'onde de déviation avant.

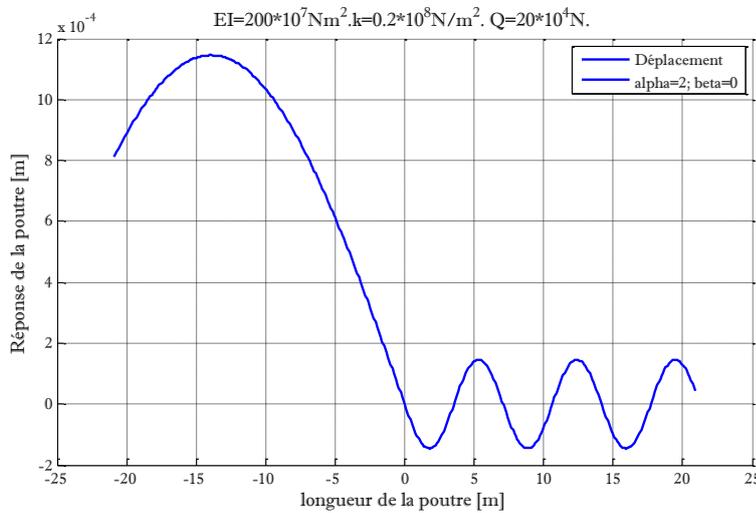


Fig. III.9. Déplacement de la poutre $\alpha > 1; \beta = 0$

Le moment de flexion :

- $M(x, t) = -\frac{a_1}{(\alpha^4-1)^{1/2}} \sin(a_1(\lambda(x - ct)))$; Pour $s > 0$
- $M(x, t) = -\frac{a_2}{(\alpha^4-1)^{1/2}} \sin(a_2(\lambda(x - ct)))$; Pour $s < 0$

(III.42)

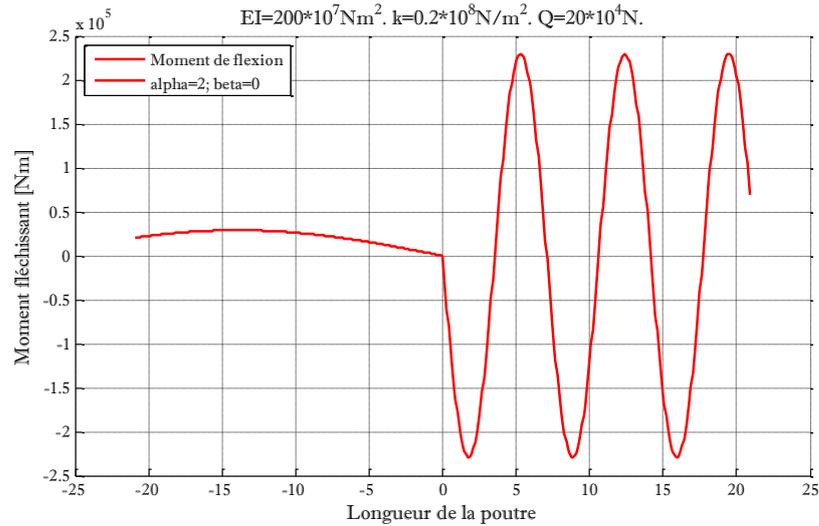


Fig. III.10. Moment de flexion $\alpha > 1; \beta = 0$

Effort tranchant :

- $T(x, t) = -\frac{a_1^2}{4(\alpha^4 - 1)^{1/2}} \cos(a_1(\lambda(x - ct)))$; Pour $s > 0$
 - $T(x, t) = -\frac{a_2^2}{4(\alpha^4 - 1)^{1/2}} \cos(a_2(\lambda(x - ct)))$; Pour $s < 0$
- (III.43)

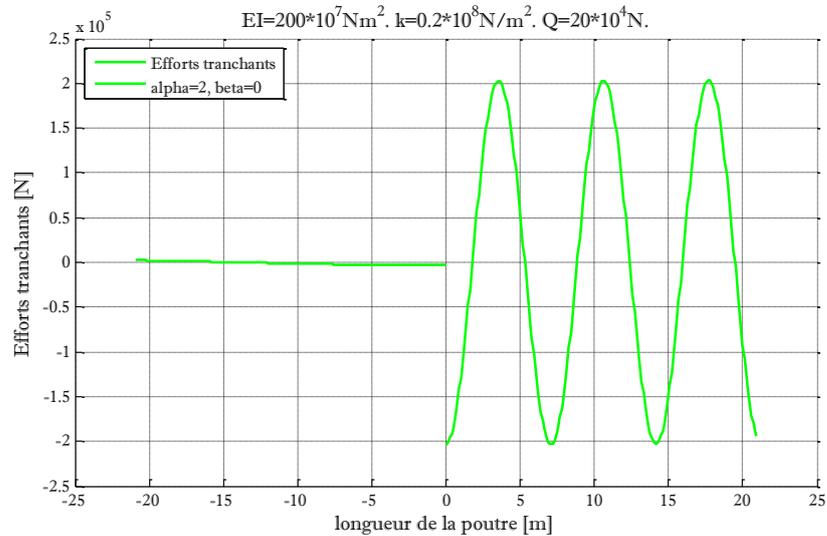


Fig. III.11. Effort tranchant $\alpha > 1; \beta = 0$

III.5.3. Faible amortissement $\beta \ll 1$

Comme le système de la voie vibre à un faible amortissement, la solution est prise selon les équations de (III.20) à (III.25), les paramètres adimensionnels a_1 ; a_2 et b des équations (III.15) et (III.16), les fonctions D_1 ; D_2 ; D_3 ; D_4 sont tirés des équations (III.26); la réponse de la poutre dans ce cas :

- Si $s > 0$

$$u(x, t) = u_0 * u(s) = \frac{P\lambda}{2k} * \frac{2}{a_1(D_1^2 + D_2^2)} e^{-b(\lambda(x-ct))} (D_1 \cos a_1(\lambda(x-ct)) + D_2 \sin a_2(\lambda(x-ct)))$$

- Si $s < 0$

$$u(x, t) = \frac{P\lambda}{2k} * \frac{2}{a_2(D_3^2 + D_4^2)} e^{b(\lambda(x-ct))} (D_3 \cos a_2(\lambda(x-ct)) - D_2 \sin a_2(\lambda(x-ct))) \quad \text{(III.44)}$$

Le moment de flexion de la poutre est :

- Si $s > 0$

$$M(x, t) = M_0 * M(s) = \frac{P}{4\lambda} * \frac{1}{a_1(D_1^2 + D_2^2)} e^{-b(\lambda(x-ct))} [(a_1^2 D_1 + 2a_1 b D_2 - b^2 D_1) \cos a_1(\lambda(x-ct)) + a_1 2 D_2 - 2a_1 b D_1 - b^2 D_2 \sin a_1(\lambda(x-ct))]$$

- Si $s < 0$

$$M(x, t) = M_0 * M(s) = \frac{P}{4\lambda} * \frac{1}{a_2(D_3^2 + D_4^2)} e^{b(\lambda(x-ct))} [(a_2^2 D_3 + 2a_2 b D_4 - b^2 D_3) \cos a_2(\lambda(x-ct)) - a_2 2 D_4 - 2a_2 b D_3 - b^2 D_4 \sin a_2(\lambda(x-ct))] ; \quad \text{(III.45)}$$

Ainsi que l'effort tranchant :

- Si $s > 0$

$$T(x, t) = T_0 * T(s) = P * \frac{1}{4a_1(D_1^2 + D_2^2)} e^{-b(\lambda(x-ct))} [(a_1^3 D_2 - 3a_1^2 b D_1 - 3a_1 b^2 D_2 + b^3 D_1) \cos a_1(\lambda(x-ct)) - a_1 3 D_1 + 3a_1 2 b D_2 - 3a_1 b^2 D_1 - b^3 D_2 \sin a_1(\lambda(x-ct))]$$

- Si $s < 0$

$$T(x, t) = -P * \frac{1}{4a_2(D_3^2 + D_4^2)} e^{-b(\lambda(x-ct))} [(a_2^3 D_4 - 3a_2^2 b D_3 - 3a_2 b^2 D_4 + b^2 D_3) \cos a_2(\lambda(x-ct)) + a_2 3 D_3 + 2a_2 2 b D_4 - 3a_2 b^2 D_3 - b^2 D_4 \sin a_2(\lambda(x-ct))] \quad \text{(III.46)}$$

Selon le rapport de la vitesse de la source mobile à la vitesse de propagation d'une onde dans le sol, Ce cas de mouvement peut comprendre trois cas différents :

- 1^{er} cas $\beta \ll 1$ et $\alpha < 1$

Dans ces conditions de vibration les cordonnés des pôles sont :

$$b = (\alpha^2 - 1)^{1/2} ; a_{1,2} \approx \left[\alpha^2 + 1 \pm \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha^2)^{1/2}} \right]^{1/2} \tag{III.47}$$

Nous distinguons Les mêmes constatations que dans le cas statique pour la réponse fig.(III.12), moment de flexion fig.(III.13) et l'effort tranchant fig. (III.14), de point de vue de l'allure (la nature) de l'onde.

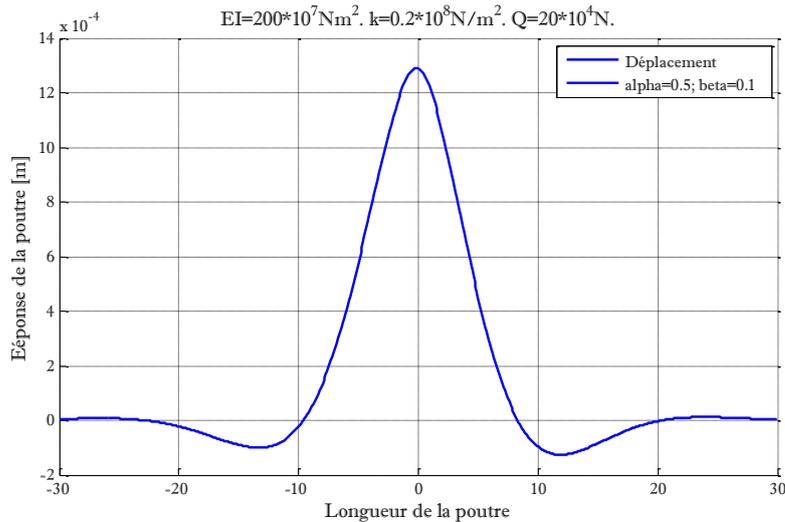


Fig. III.12. Déplacement de la poutre $\alpha < 1 ; \beta \ll 1$

Ainsi le moment fléchissant et la force de cisaillement :

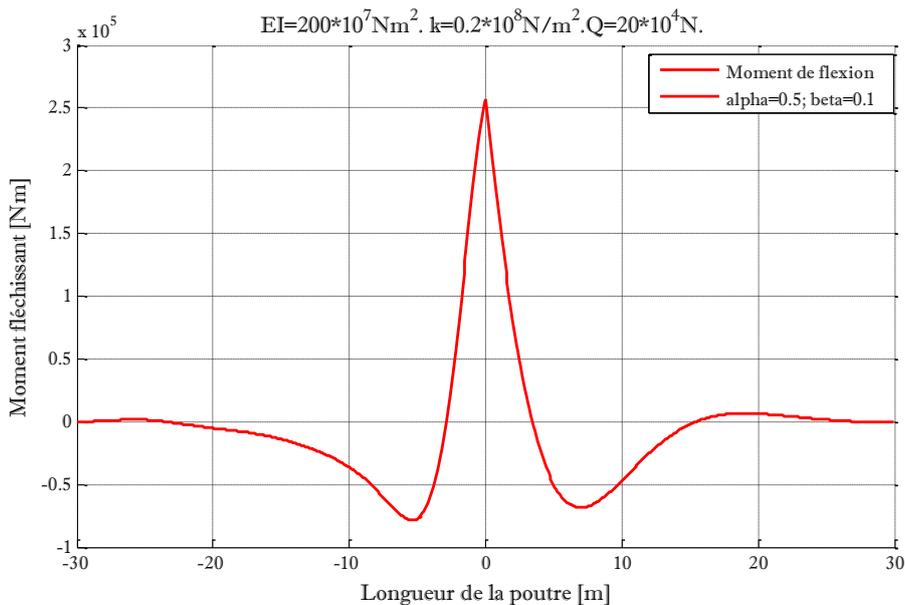


Fig. III.13. Moment de flexion $\alpha < 1 ; \beta \ll 1$

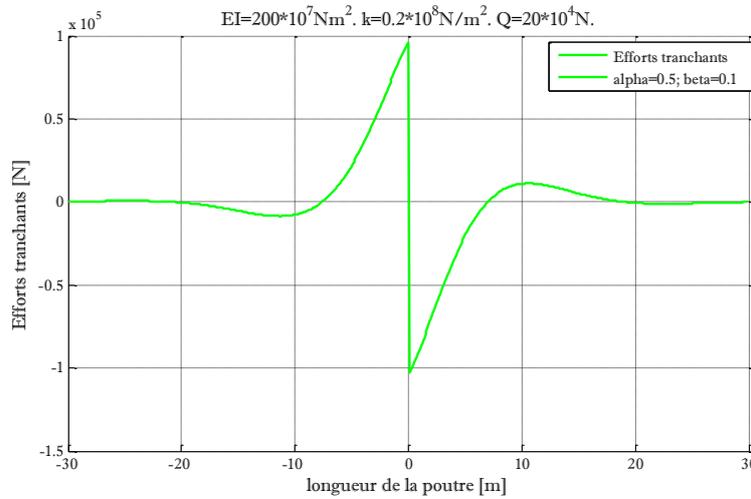


Fig. III.14. Effort tranchant $\alpha < 1 ; \beta \ll 1$

- 2ème cas $\beta \ll 1$ et $\alpha = 1$

$$b = 2^{-1/4} \beta^{1/2} ; a = a_1 = a_2 = 2^{1/2} (1 + 2^{-3/4} \beta^{1/2}) \tag{III.48}$$

L'amplitude maximale de la réponse ainsi que du moment fléchissant (fig.III.15. a. b) sont au point d'application de la charge avec un effet de soulèvement de la poutre important.

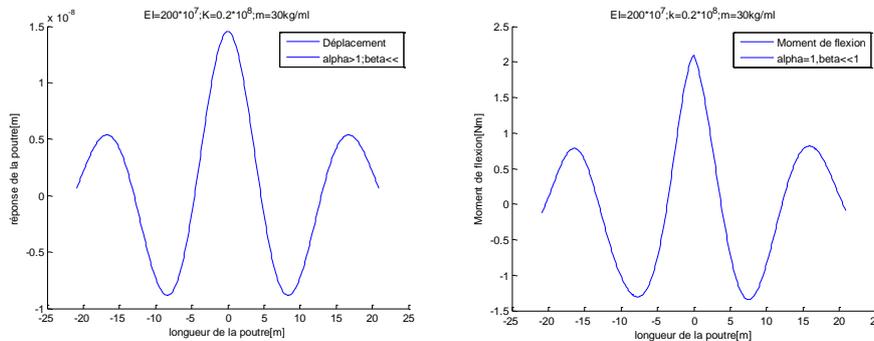


Fig. III.15. a. Déplacement ; b. Moment de flexion $\alpha=1 ; \beta \ll 1$

- 3ème cas $\beta \ll 1$ et $\alpha > 1$ ($\alpha = 2$)

Les paramètres adimensionnels sont :

$$b \approx \frac{\alpha \beta}{(\alpha^4 - 1)^{1/2}} ; a_{1,2} \approx (\alpha^2 + 1)^{1/2} \pm (\alpha^2 - 1)^{1/2} \tag{III.49}$$

La réponse de la poutre ainsi que le moment de flexion et les efforts tranchants sont présentés respectivement dans les figures (III.16), (III.17) et (III.18) :

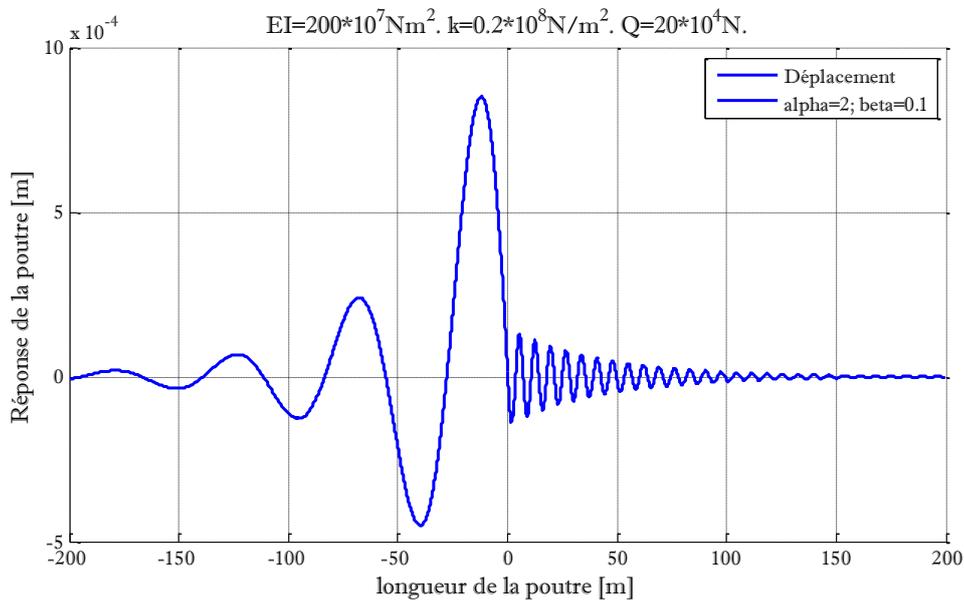


Fig. III.16. Déplacement de la poutre $\alpha > 1$; $\beta \ll 0$

La réponse est plus significative derrière la charge (fig.III.16) ce qui est aussi réalisé par Nguyen [3], la réponse de la poutre est moins atténuée sous des vitesses sup-critique, la réponse de la poutre s’amortie est ne devient négligeable qu’après une distance de 200m, nous pouvons dire que c’est une distance importante de propagation de la vibration.

Alors que le moment de flexion (Fig.III.17) et de la force de cisaillement (fig.III.18) sont plus élevés devant la charge.

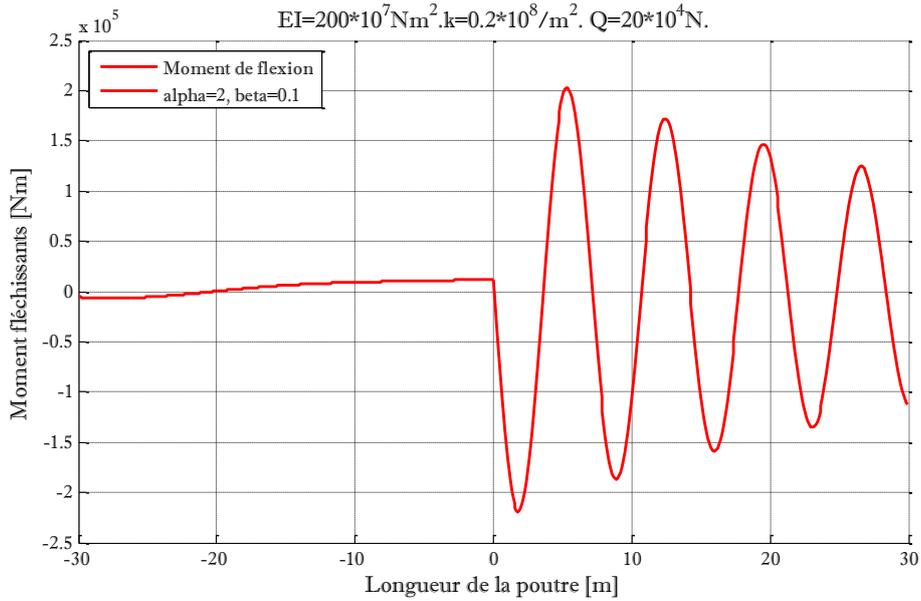


Fig. III.17. Moment de flexion $\alpha > 1 ; \beta \ll 0$

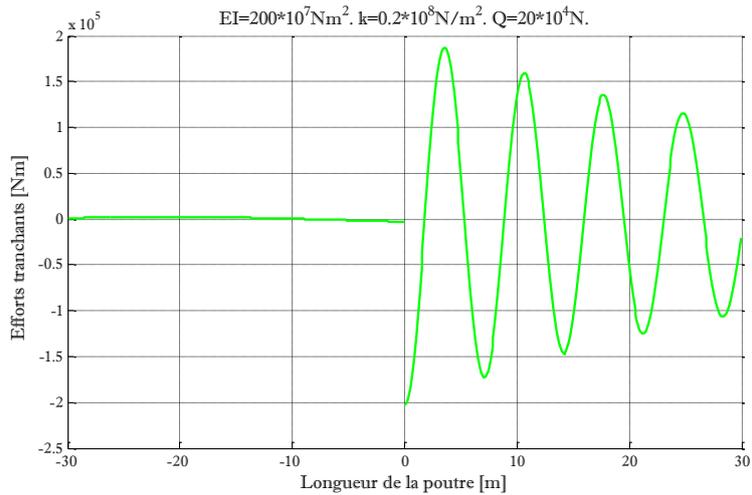


Fig. III.18. Effort tranchant $\alpha > 1 ; \beta \ll 0$

III.5.4. Amortissement critique $\beta = \beta_{cr}$

Dans le cas de l'amortissement critique les coordonnées des pôles ' A_j ' sont dans le cas de la **fig. (III.1.d)**

- Pour $s > 0$ l'intégrale est dans le demi-cercle supérieur, les solutions sont données suivant les équations (III.20 à III.25) (III.15 et III.16) et (III.24),

Pour $s < 0$ le demi-cercle ' C_R ' passe autour des le double pôle ' $A_3 \equiv A_4$ ', Ainsi que les solutions : déplacement, moment de flexion et force de cisaillement fonction de la variable adimensionnel 's' sont :

$$u(s) = \frac{2}{\alpha^4+3} e^{bs} [b - (\alpha^4 + 3)^{1/2} s] ;$$

$$M(s) = \frac{b}{\alpha^4+3} e^{bs} [b^2 - 2(\alpha^4 + 3)^{1/2} - b(\alpha^4 + 3)^{1/2} s] ;$$

$$T(s) = \frac{b^2}{4(\alpha^4+3)} e^{bs} [b^2 - 3(\alpha^4 + 3)^{1/2} - b(\alpha^4 + 3)^{1/2} s]. \quad \text{(III.50)}$$

- les valeurs des paramètres adimensionnels dans ce cas:

$$b^2 = \frac{2}{3} [-\alpha^2 + (\alpha^4 + 3)^{1/2}] ; a_1^2 = \frac{4}{3} [2\alpha^2 + (\alpha^4 + 3)^{1/2}] ; a_2 = 0 \quad \text{(III.51)}$$

Déplacement, moment de flexion et effort tranchant sont obtenus en remplaçant la variable 's' par sa valeur :

✚ Si $s > 0$

- $u(x, t) = u_0 * u(s) = \frac{P\lambda}{2k} * \frac{2}{a_1(D_1^2+D_2^2)} e^{-b(\lambda(x-ct))} (D_1 \cos a_1\lambda(x-ct) + D_2 \sin a_2\lambda(x-ct))$
- $M(x, t) = \frac{P}{4\lambda} * \frac{1}{a_1(D_1^2+D_2^2)} e^{-b\lambda(x-ct)} [(a_1^2 D_1 + 2a_1 b D_2 - b^2 D_1) \cos a_1\lambda(x-ct) + a_1 2 D_2 - 2a_1 b D_1 - b 2 D_2 \sin a_1 \lambda x - ct]$
- $T(x, t) = T_0 * T(s) = P * \frac{1}{4a_1(D_1^2+D_2^2)} e^{-b\lambda(x-ct)} [(a_1^3 D_2 - 3a_1^2 b D_1 - 3a_1 b^2 D_2 + b 3 D_1 \cos a_1 \lambda x - ct - a_1 3 D_1 + 3a_1 2 b D_2 - 3a_1 b 2 D_1 - b 3 D_2 \sin a_1 \lambda x - ct] \quad \text{(III.52)}$

✚ Si $s < 0$

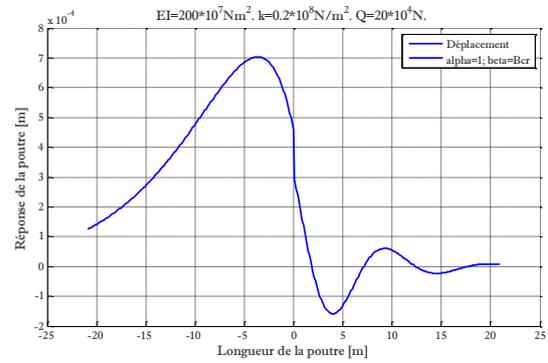
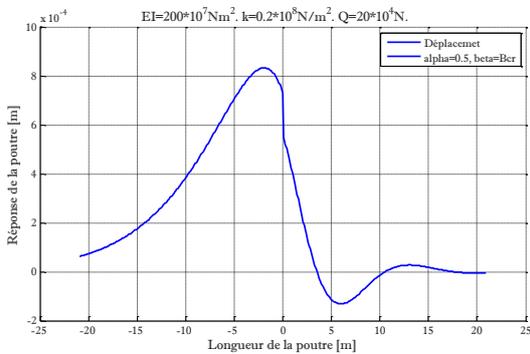
- $u(x, t) = u_0 * u(s) = \frac{P\lambda}{2k} * \frac{2}{\alpha^4+3} e^{b\lambda(x-ct)} [b - (\alpha^4 + 3)^{1/2} \lambda(x-ct)]$
- $M(x, t) = M_0 * M(s) = \frac{P}{4\lambda} * \frac{b}{\alpha^4+3} e^{b\lambda(x-ct)} [b^2 - 2(\alpha^4 + 3)^{1/2} - b(\alpha^4 + 3)^{1/2} \lambda(x-ct)] ;$
- $T(x, t) = T_0 * T(s) = -P * \frac{b^2}{4(\alpha^4+3)} e^{b\lambda(x-ct)} [b^2 - 3(\alpha^4 + 3)^{1/2} - b(\alpha^4 + 3)^{1/2} \lambda(x-ct)]. \quad \text{(III.54)}$

l'analyse est réalisée pour des cas différents de vitesse de l'excitation comparée à la vitesse critique, nous distinguons aussi trois cas : pour $\alpha < 1$, $\alpha = 1$ et $\alpha > 1$.

L'amortissement critique est obtenu de la formule :

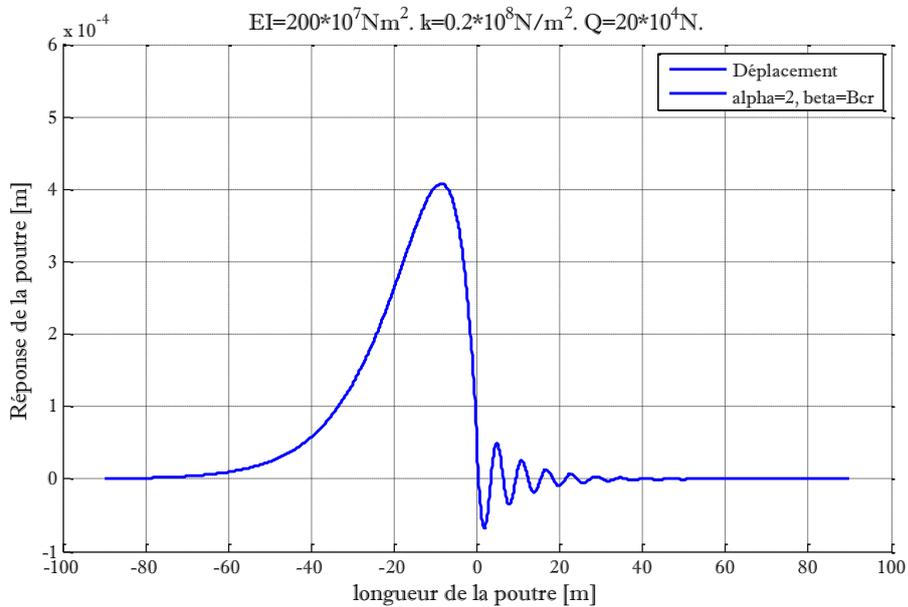
$$\beta_{cr} = \left(\frac{2}{3^3}\right)^{1/2} [-\alpha^2 + (\alpha^4 + 3)^{1/2}]^{1/2} \left[2\alpha + \frac{1}{\alpha}(\alpha^4 + 3)^{1/2}\right] \quad \text{(III.53)}$$

Lors des conditions de vibrations avec amortissement critique ($\beta = \beta_{cr}$), qui est fonction du rapport de la vitesse de la source mobile à la vitesse critique ; nous prenons une valeur de $\beta_{cr} = 1.5$, $\beta_{cr} = 1.088$ et $\beta_{cr} = 1.01$ calculés suivant le cas de la vitesse de la charge, la réponse de la poutre dans les trois cas de vitesse de l'excitation :



a. $V=0.5V_{cr}$

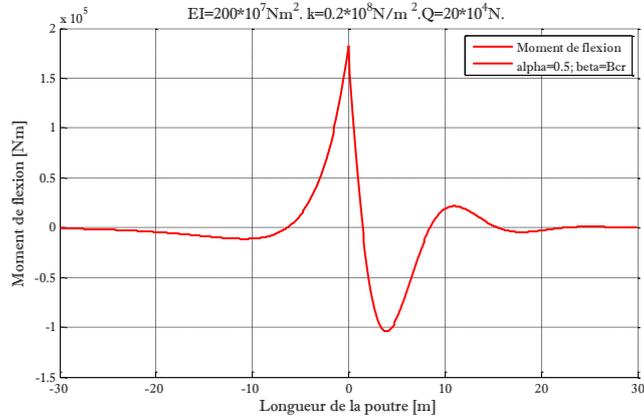
b. $V=V_{cr}$



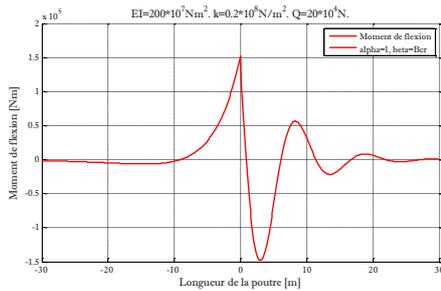
c. $V > V_{cr}$ ($2V_{cr}$)

Fig. III.19. Déplacement de la poutre $\beta = \beta_{cr}$ a. $\alpha < 1$; b. $\alpha = 1$; c. $\alpha > 1$

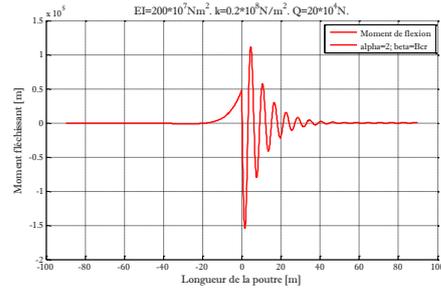
Nous constatons de la (fig.III.19) une diminution de l'amplitude de la réponse de la poutre avec l'augmentation de la vitesse de la charge mobile, l'atténuation de l'onde devant la charge se réalise avant l'atténuation de l'onde derrière la charge.



a. $V=0.5V_{cr}$



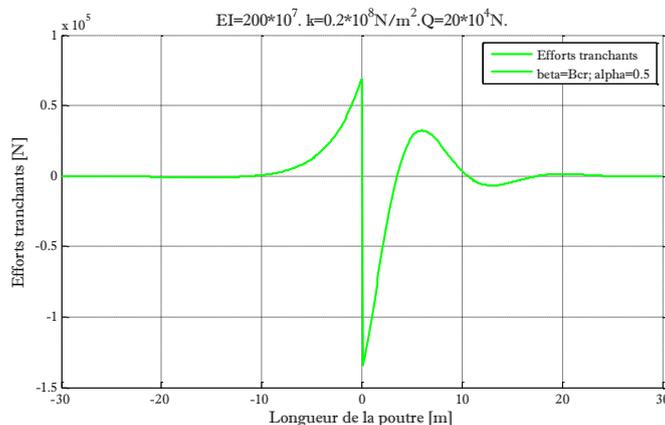
b. $V=V_{cr}$



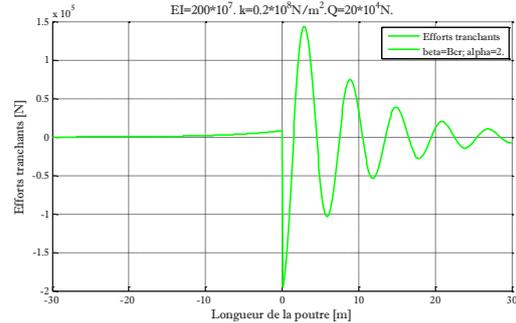
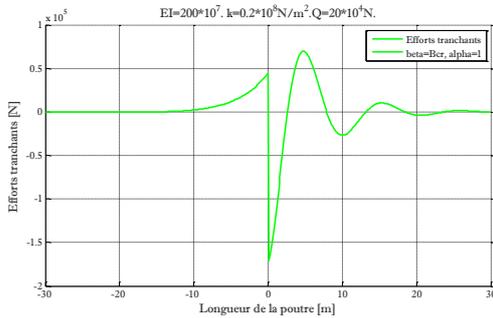
c. $V > V_{cr}$

Fig. III.20. Moment de flexion de la poutre $\beta = \beta_{cr}$; a. $\alpha < 1$; b. $\alpha = 1$; c. $\alpha > 1$

Les moments de flexion (fig.III.20) et efforts tranchants (fig.III.21) de la structure après la charge diminue avec l'augmentation de la vitesse, alors qu'avant chargement nous constatons une augmentation de l'amplitude, et du soulèvement de la poutre,



a. $V=0.5V_{cr}$



b. $V=V_{cr}$

c. $V>V_{cr}$

Fig. III.21. Effort tranchant dans la poutre $\beta = \beta_{cr}$; a. $\alpha < 1$; b. $\alpha = 1$; c. $\alpha > 1$

III.5.5. Amortissement sup-critique $\beta > \beta_{cr}$

Dans le cas où l'amortissement est supérieur de l'amortissement critique, pour $s > 0$ les équations du déplacement, le moment de flexion et l'effort tranchant sont les même dans les équations (III.20) (III.22) (III.24) 0; et si $s < 0$ les équations du déplacement, le moment fléchissant et la force de cisaillement :

- $u(s) = \frac{1}{a_2(D_4^2 - D_3^2)} [(D_3 + D_4)e^{(b-a_2)s} - (D_4 - D_3)e^{(b+a_2)s}]$
- $M(s) = -\frac{1}{2a_2(D_4^2 - D_3^2)} [(D_3 + D_4)(b - a_2)^2 e^{(b-a_2)s} - (b + a_2)^2(D_4 - D_3)e^{(b+a_2)s}]$
- $T(s) = -\frac{1}{8a_2(D_4^2 - D_3^2)} [(D_3 + D_4)(b - a_2)^3 e^{(b-a_2)s} - (b + a_2)^3(D_4 - D_3)e^{(b+a_2)s}]$.

(III.55)

Les coordonnées du pôle sont les suivants :

$$D_1 = a_1 b; D_2 = b^2 - 1/4(a_1^2 + a_2^2); D_3 = a_2 b; D_4 = b^2 + 1/4(a_1^2 + a_2^2) \quad (III.56)$$

La réponse, ainsi que le moment fléchissant et l'effort tranchant de la poutre sont donnés selon les deux intervalles de 's' par rapport à l'origine du repère qui est le point d'application de la charge:

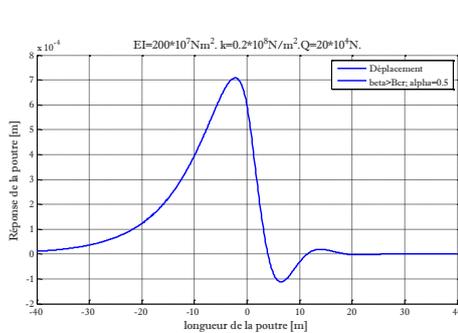
✚ Si $s > 0$

- $u(x, t) = u_0 * u(s) = \frac{P\lambda}{2k} * \frac{2}{a_1(D_1^2 + D_2^2)} e^{-b(\lambda(x-ct))} (D_1 \cos a_1 \lambda(x - ct) + D_2 \sin a_2 \lambda(x - ct))$
- $M(x, t) = M_0 * M(s) = \frac{P}{4\lambda} * \frac{1}{a_1(D_1^2 + D_2^2)} e^{-b\lambda(x-ct)} [(a_1^2 D_1 + 2a_1 b D_2 - b^2 D_1) \cos a_1 \lambda(x - ct) + a_1^2 D_2 - 2a_1 b D_1 - b^2 D_2] \sin a_1 \lambda(x - ct)$
- $T(x, t) = T_0 * T(s) = P * \frac{1}{4a_1(D_1^2 + D_2^2)} e^{-b\lambda(x-ct)} [(a_1^3 D_2 - 3a_1^2 b D_1 - 3a_1 b^2 D_2 + b^3 D_1) \cos a_1 \lambda(x - ct) - a_1^3 D_1 + 3a_1^2 b D_2 - 3a_1 b^2 D_1 - b^3 D_2] \sin a_1 \lambda(x - ct)$ (III.57)

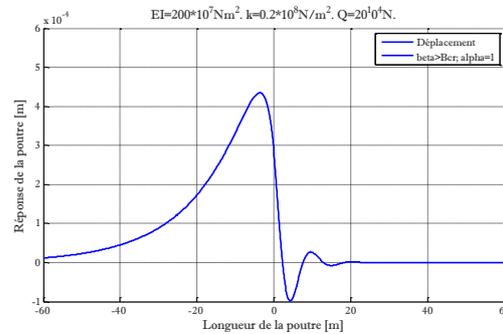
✚ Si $s < 0$

- $u(x, t) = u_0 * u(s) = \frac{P\lambda}{2k} * \frac{1}{a_2(D_4^2 - D_3^2)} [(D_3 + D_4) e^{(b-a_2)\lambda(x-ct)} - (D_4 - D_3) e^{(b+a_2)\lambda(x-ct)}] ;$
- $M(s) = M_0 * M(s) = -\frac{P}{4\lambda} * \frac{1}{2a_2(D_4^2 - D_3^2)} [(D_3 + D_4)(b - a_2)^2 e^{(b-a_2)\lambda(x-ct)} - (b + a_2)^2 (D_4 - D_3) e^{(b+a_2)\lambda(x-ct)}]$
- $T(s) = T_0 * T(s) = -P * \frac{1}{8a_2(D_4^2 - D_3^2)} [(D_3 + D_4)(b - a_2)^3 e^{(b-a_2)\lambda(x-ct)} - (b + a_2)^3 (D_4 - D_3) e^{(b+a_2)\lambda(x-ct)}].$ (III.58)

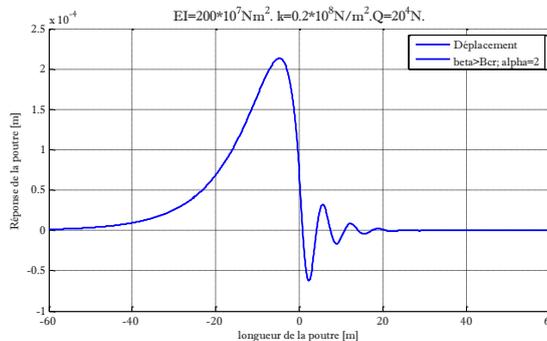
Les réponses de la poutre sont présentés dans les cas de $\alpha = 0.5 \dots 1 \dots 2 :$



a. $V = 0.5Vcr$



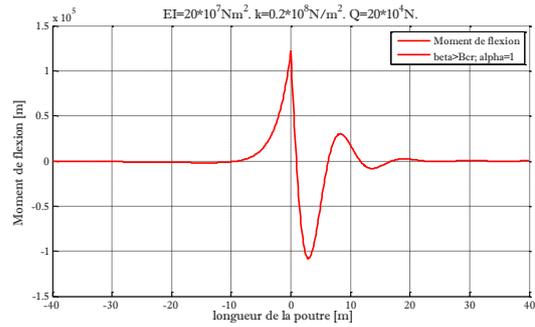
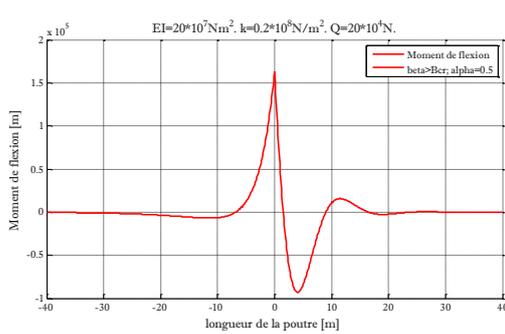
b. $V = Vcr$



c. $V=2V_{cr}$

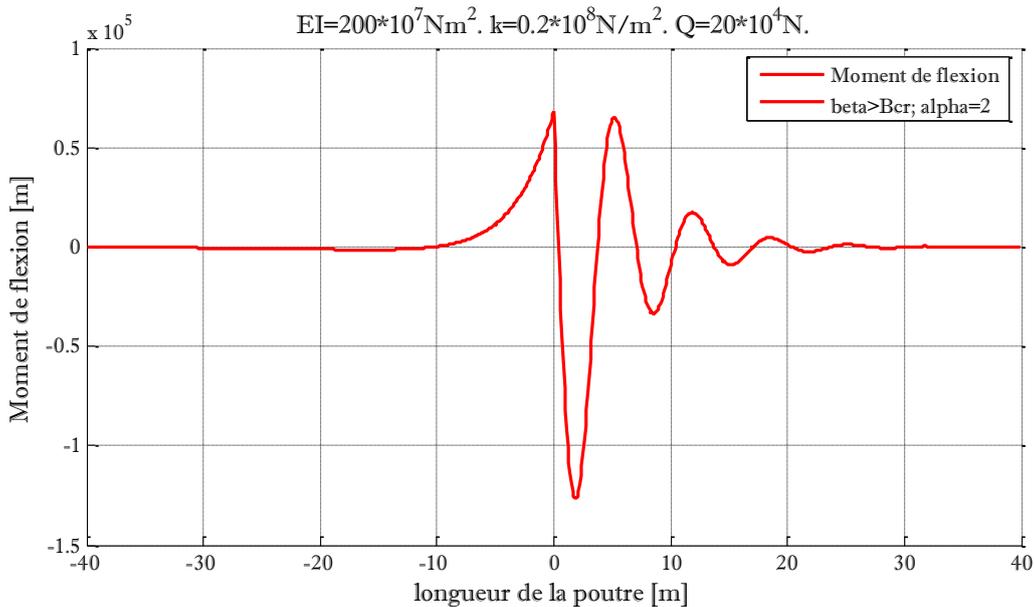
Fig. III.22. Réponse de la poutre $\beta > \beta_{cr}$; a. $\alpha = 0.5$; b. $\alpha = 1$; c. $\alpha = 2$

Nous distinguons une diminution de l'amplitude lors de l'augmentation de l'effet la vitesse. L'amplitude maximale est déviée en l'arrière de l'origine, elle n'est plus au point d'application de la charge.



a. $V=0.5V_{cr}$

b. $V=V_{cr}$

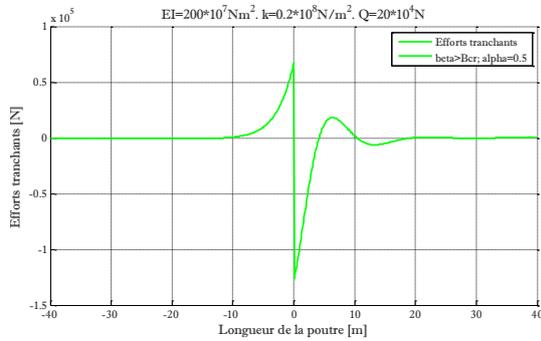


c. $V=2V_{cr}$

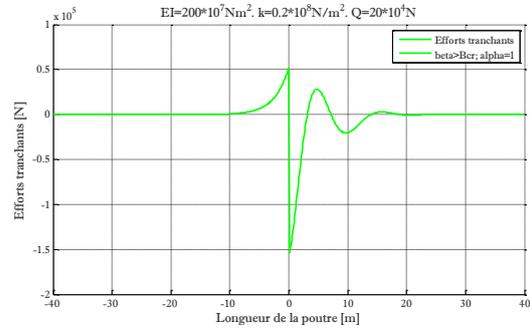
Fig. III.23. Moment de flexion $\beta > \beta_{cr}$; a. $\alpha = 0.5$; b. $\alpha = 1$; c. $\alpha = 2$

Nous distinguons de la fig. III.23, une diminution de l'amplitude maximale du Moment de flexion après le charge et une augmentation de l'amplitude devant la charge, avec une

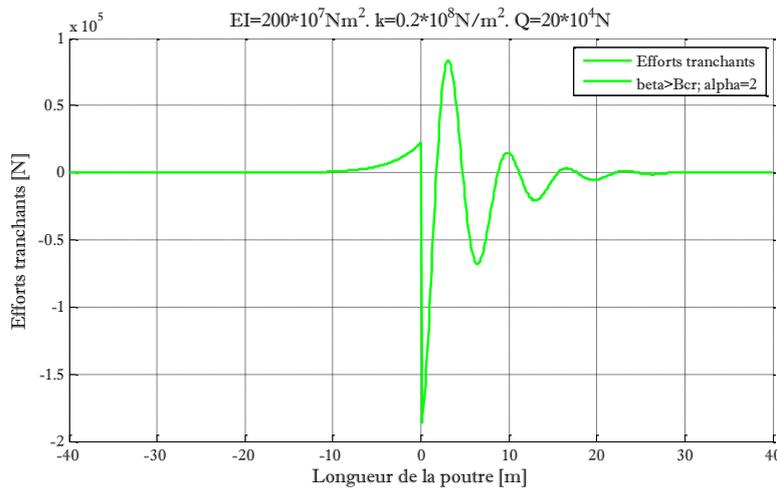
augmentation du soulèvement de la poutre, les mêmes constatations concerne la force de cisaillement figure III.24.



a. $V=0.5V_{cr}$



b. $V=V_{cr}$



c. $V=2V_{cr}$

Fig. III.24. Effort tranchant $\beta > \beta_{cr}$; a. $\alpha = 0.5$; b. $\alpha = 1$; c. $\alpha = 2$

III.5.6. Déflexion moment fléchissant et la force de cisaillement au point d'application de la charge

Dans les cas de vibration dans des conditions non amortie, nous constatons que plus la vitesse est élevée plus l'amplitude de la réponse (fig.III.25), et du moment fléchissant augmente (fig.III.26), jusqu'à que la vitesse atteigne la vitesse critique, l'amplitude accroit et tend vers l'infinie, c'est le cas résonnant, au-delà de cette vitesse l'amplitude tend vers

zéro, nous pensons qu'il serait adéquat pour ce domaine d'analyse d'adopter une théorie plus adapter ,car physiquement l'amplitude ne tend pas vers zéro.

Alors qu'à faible amortissement, l'amplitude de la réponse augmente sous l'effet de l'accroissement de la vitesse de la source mobile, jusqu'à ce que la vitesse devienne critique où l'amplitude atteint une valeur maximale. Après cette vitesse nous constatons que à un effet inverse, plus elle augmente l'amplitude diminue, les mêmes observations sont faites pour le moment fléchissant.

Dans les cas d'amortissement critique ou sub-critique l'amplitude maximum de la réponse dynamique est constatée pour le cas statique où la vitesse de la charge est nulle. En augmentant la vitesse l'amplitude diminue.

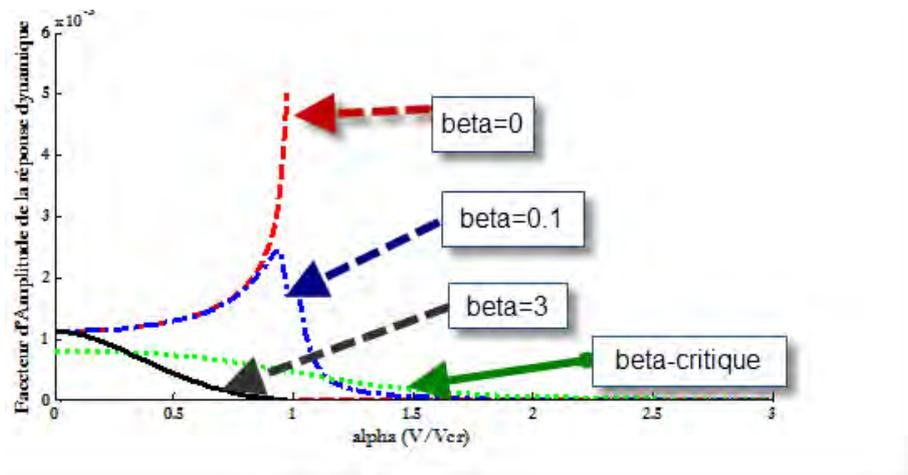


Fig. III. 25. Les facteurs d'amplification dynamique de la réponse de la poutre par rapport au rapport de vitesse avec différents cas d'amortissement

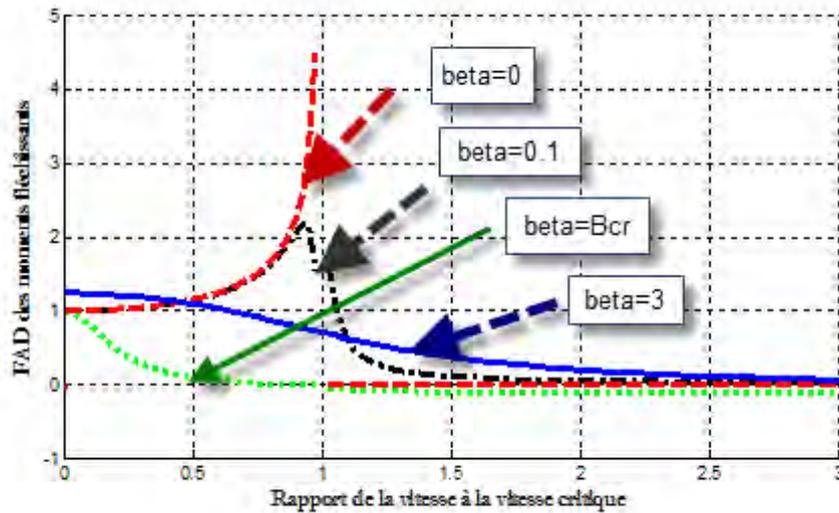


Fig. III.26. Les facteurs d'amplification dynamique du moment fléchissant par rapport au rapport de vitesse avec différents cas d'amortissement

L'analyse de la variation de l'amplitude de la force de cisaillement est montré (Fig.III.27), nous distinguons une résonance qui a apparait quand la vitesse de la charge mobile a atteint la vitesse critique Dans les conditions non amorties.

Dans le cas de vibration à faible amortissement, nous distinguons la diminution de l'amplitude avec l'accroissance de la vitesse de la charge jusqu'à qu'elle arrive à une valeur minimale quand la vitesse a atteint la vitesse critique, dans ce cas l'amplitude augmente légèrement, Lorsque l'amortissement est critique, plus la vitesse croit plus l'amplitude de la force de cisaillement diminue.

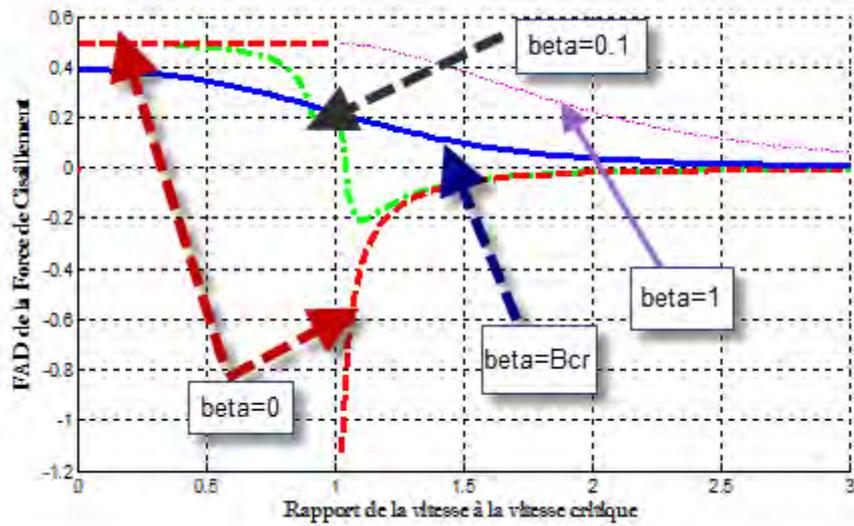


Fig. III.27. Les facteurs d'amplification dynamique du de l'effort tranchant par rapport au rapport de vitesse avec différents cas d'amortissement

III.6. Analyse paramétrique et discussion des résultats

Les pluparts des exemples présentés dans cette section illustre l'analyse précédente d'une structure rail dont les caractéristiques sont données dans le Tab. (III.1).

Les paramètres physiques de la poutre-rail :

Avec :

$$E = 2 \times 10^8 \text{ KN} / \text{m}^2$$

$$I = 30.55 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Les paramètres physiques du rail		
hauteur	172	mm
Patin	150	mm
Boudin	72	mm

Masse linéique théorique	60,21	kg/m
Moment d'inertie Ix	3055	cm⁴
Module d'inertie Ix/v	335,53	cm³
section	76,86	cm²
Masse volumique	7870	kg/m³

Tab. III.1. Paramètres physique du rail [13]

III.6.1. Effet de la vitesse de la source mobile

Cas non amorti $\beta = 0$

- 1^{er} cas $\beta = 0$ et $\alpha < 1$

La réponse dynamique de la poutre sur appuis élastique (fig.III.28) permet de montrer que l'évolution de cette réponse est une fonction de l'évolution de la vitesse. La même constatation est faite pour le moment ainsi que l'effort tranchant (fig.III.29).

Nous constatons un effet de soulèvement non loin de la position de la charge, qui obéit à la croissance ou décroissance de la vitesse fonction de la vitesse de propagation d'onde dans le sol.

L'amplitude de l'onde démunie en s'éloignant de la source mobile jusqu'à quelle s'annule.

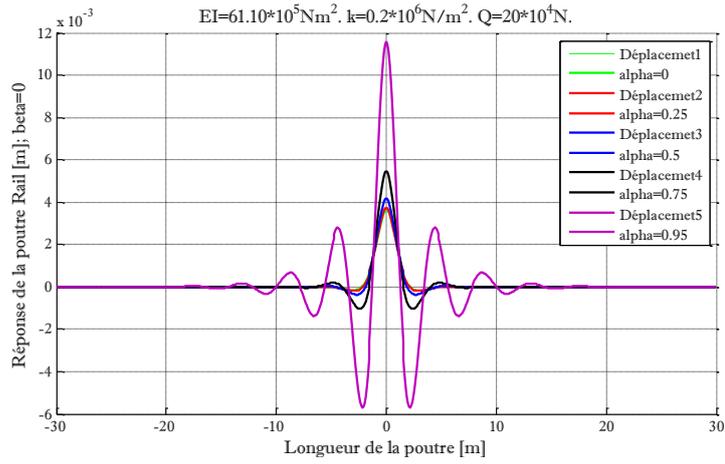
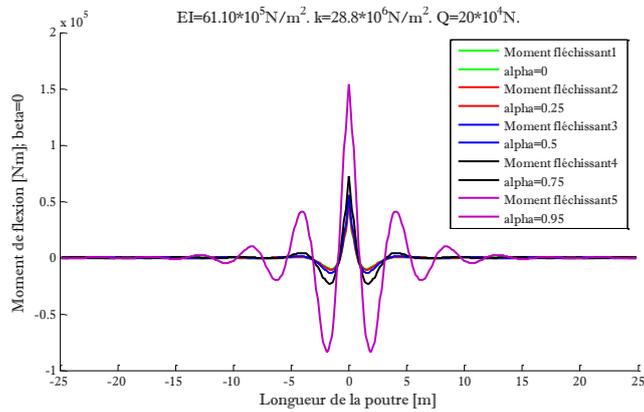
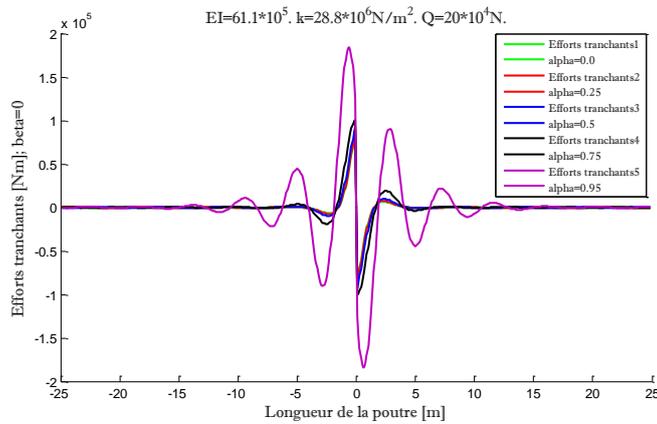


Fig. III.28. Réponse de la poutre $\beta = 0 ; \alpha < 1$



a. Moment fléchissant



b. Effort tranchant

Fig. III.29. a. Moment de flexion ; b. Effort tranchant $\beta = 0 ; \alpha < 1$

- 2^{ème} cas $\beta = 0$ et $\alpha > 1$

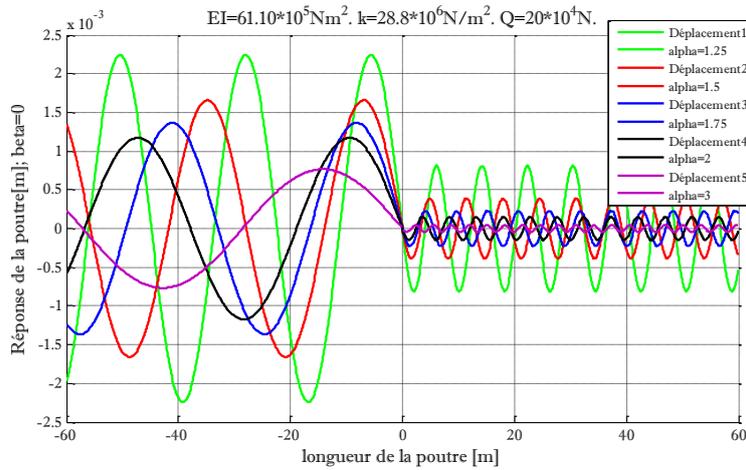


Fig. III.30. Réponse de la poutre $\beta = 0$ et $\alpha > 1$

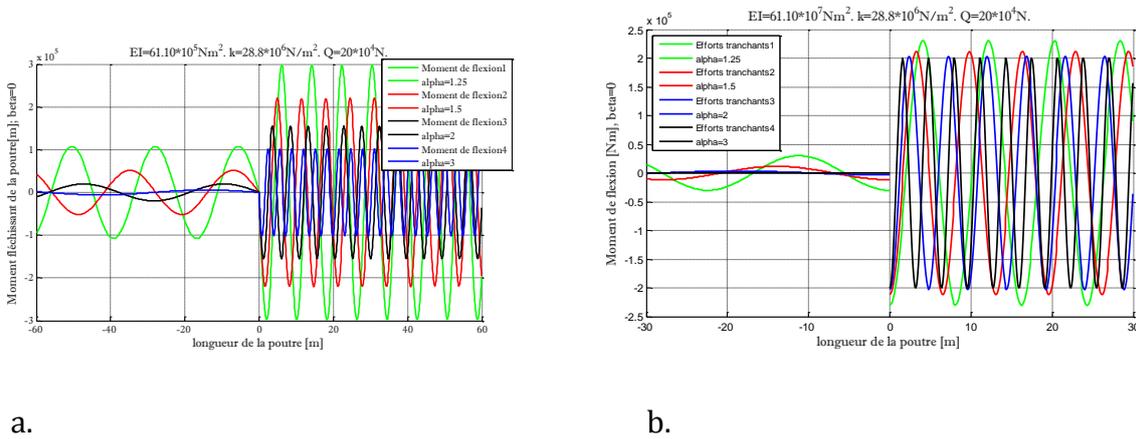


Fig. III.31. a. Moment de flexion ; b. Efforts tranchants $\beta = 0$ et $\alpha > 1$

Les fig.III.30 illustre la réponse du rail, le moment fléchissant et efforts tranchants sont présentés par la fig.III.31 sous un intervalle de la vitesse du déplacement de l'excitation supérieure de la vitesse de propagation d'onde dans le sol.

Pour ce cas d'analyse (fig.III.30) nous observons que l'onde après la charge se propage avec la même amplitude. Avant la charge, nous observons que l'amplitude maximale est légèrement décalé par rapport au point d'application de la source mobile.

La longueur de l'onde augmente avec l'augmentation de la vitesse accompagnée d'une diminution de l'amplitude, et elle est s'annule au point d'application de la charge.

Les amplitudes après le point de l'excitation sont plus grandes que les amplitudes avant le chargement.

Le moment de flexion et l'effort tranchant ont des amplitudes plus grandes avant la charge, plus la vitesse augmente nous constatons une diminution des amplitudes ainsi que de la longueur d'onde (fig.III.31.a.b).

✚ Faible amortissement

Le système vibre sous l'effet d'un faible amortissement à une vitesse inférieure de la sous critique de la propagation de l'onde dans le sol, dans les cas d'analyse :

- 1^{er} cas $\beta \ll 1$ et $\alpha < 1$

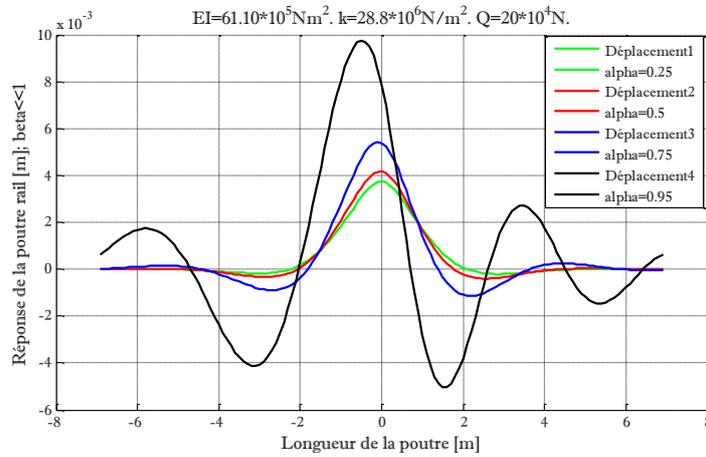
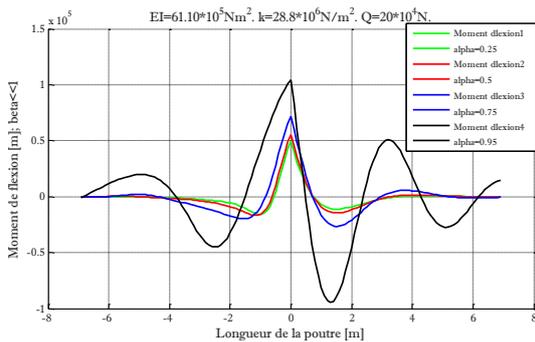
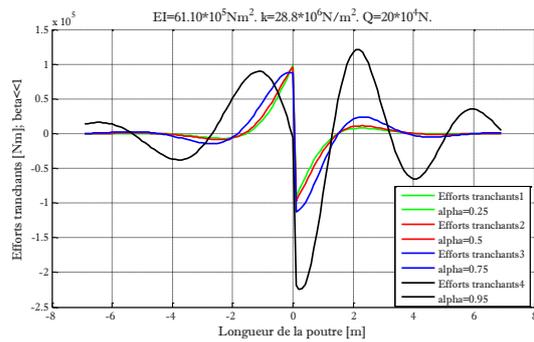


Fig. III.32. Réponse de la poutre $\beta \ll 1; \alpha < 1$



a.



b.

Fig. III.33. a. Moment de flexion ; b. Effort tranchant $\beta \ll 1; \alpha < 1$

La réponse du rail (fig.III.32) ainsi que le moment fléchissant et l'effort tranchant (fig.III.33), ont un comportement similaire au cas de vibration sans amortissement avec une légère diminution dans les amplitudes.

• 2^{ème} cas $\beta \ll 1$ et $\alpha > 1$

Nous constatons une atténuation de l'onde (fig.III.34), Ainsi nous constatons aussi Avant la charge, l'amplitude maximale est légèrement décalé par rapport au point d'application de la source mobile, avec l'augmentation de la vitesse nous distinguons une diminution de l'amplitude, et elle est s'annule au point d'application de la charge.

Les amplitudes après le point de l'excitation sont plus grandes que les amplitudes avant le chargement. :

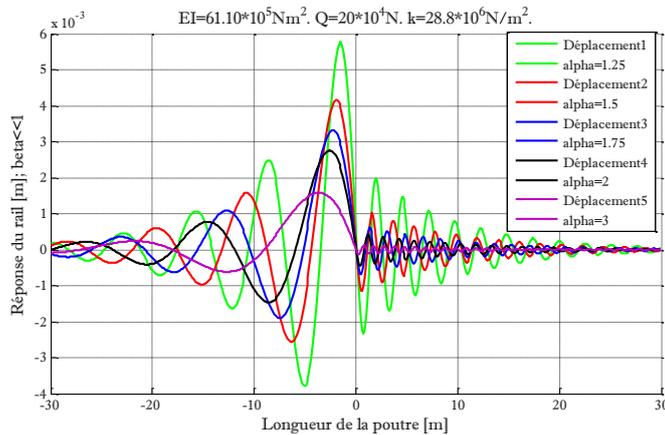
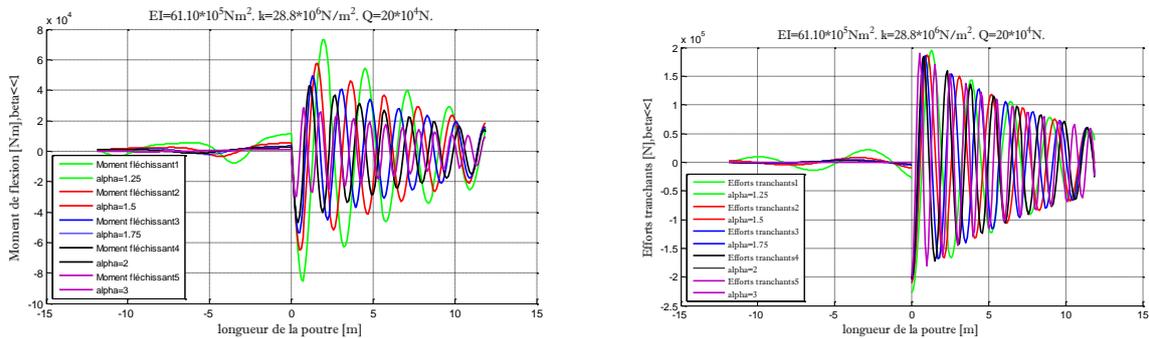


Fig. III.34. Réponse de la poutre $\beta \ll 1$; $\alpha > 1$



a.

b.

Fig. III.35. a. Moment de flexion, b. Effort tranchant de la poutre $\beta \ll 1$; $\alpha > 1$

Le moment de flexion et l'effort tranchant ont des amplitudes plus grandes avant la charge, (fig.III.35).

Amortissement critique $\beta = \beta_{cr}$

- 1^{er} cas $\beta = \beta_{cr}$ et $\alpha \leq 1$

Dans ce cas d'analyse fig.III.36, nous observons que la réponse dynamique maximal est légèrement excentrée par rapport au point zéro et quelle est inversement proportionnelle à la croissance de la vitesse. Les amplitudes diminuent avec l'augmentation de la vitesse de la charge.

L'amplitude des ondes après la charge ont tendance à s'amortir. Concernant celles générées avant la charge, elles s'atténuent en fonction de l'éloignement de la position de la charge, l'effet de soulèvement est constaté et présente une configuration dissymétrique (longueur d'ondes différentes).

Dans le cas où les vitesses supérieures de la vitesse critique, nous observons une amplification de l'onde fig.III.36 générée par la source mobile avant cette dernière. Les valeurs maximales sont proportionnelles avec l'augmentation de la vitesse.

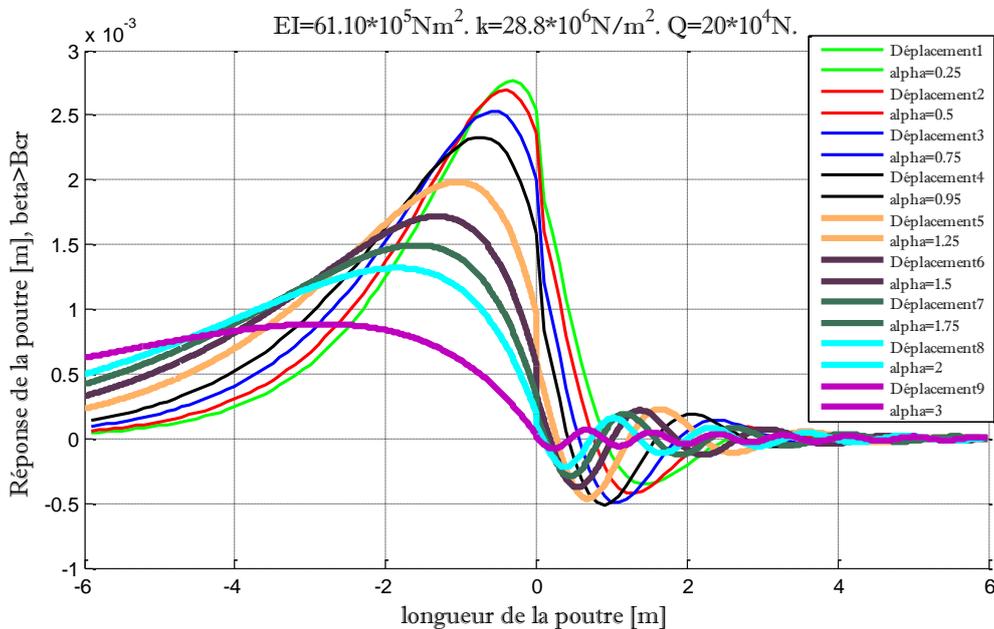


Fig. III.36. Réponse de la poutre $\beta = \beta_{cr}$; $\alpha \leq 1$ et $\alpha > 1$

Nous notons que les maxima de la réponse dynamique fonctions des différentes vitesses sont excentrés par rapport au point d'application de la charge. En ce point nous observons que toutes réponses s'annulent.

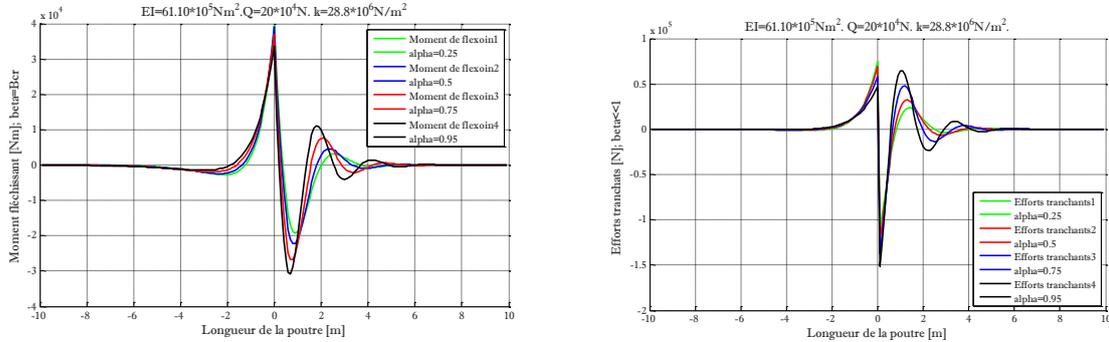


Fig. III.37. Moment de flexion Efforts tranchants $\beta = \beta_{cr}$ et $\alpha \leq 1$

Concernant la variation du moment fléchissant Fig.III.37 nous observons qu'il tend vers zéro avant la charge.

Après la source mobile une variation ondulatoire est constatée. Pour l'effort tranchant les observations sont similaires.

La distribution du moment de flexion le long de la poutre peut être analysée selon deux régions avant et après la source mobile. Pour des petites vitesses avant le chargement, nous constatons que le moment fléchissant est maximal.

Après le chargement, nous observons une distribution ondulatoire, qui est inversé après le premier pic positif.

Une étude plus approfondie concernant l'amortissement et la vitesse permettront d'avoir des informations physique.

La fig. III.38 montre la variation de l'effort tranchant dont les constatations sont identiques à ceux du moment fléchissant.

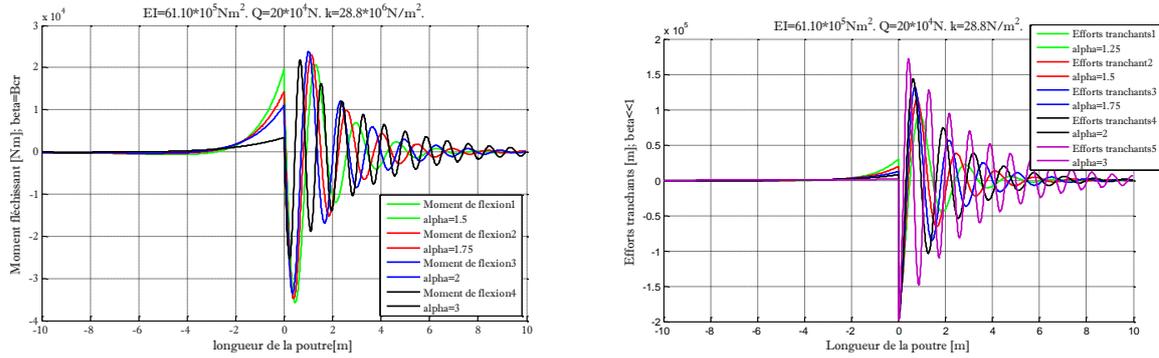


Fig. III.38 a. Moment de flexion ; b. Effort tranchant $\beta = \beta_{cr}$; $\alpha > 1$

Cas d'Amortissement sup-critique $\beta > \beta_{cr}$

- cas $\beta > \beta_{cr}$; $\alpha \leq 1$ et $\alpha > 1$

Dans ce cas, nous distinguons les mêmes constatations concernant la réponse de la poutre avec un effet d'amortissement critique fig.III.34, l'augmentation de la vitesse de l'excitation ramène à une diminution des amplitudes et à une augmentation de la longueur d'onde.

Dans ce cas, nous distinguons les mêmes constatations concernant la réponse de la poutre avec un effet d'amortissement critique fig.III.34, l'augmentation de la vitesse de l'excitation ramène à une diminution des amplitudes et à une augmentation de la longueur d'onde.

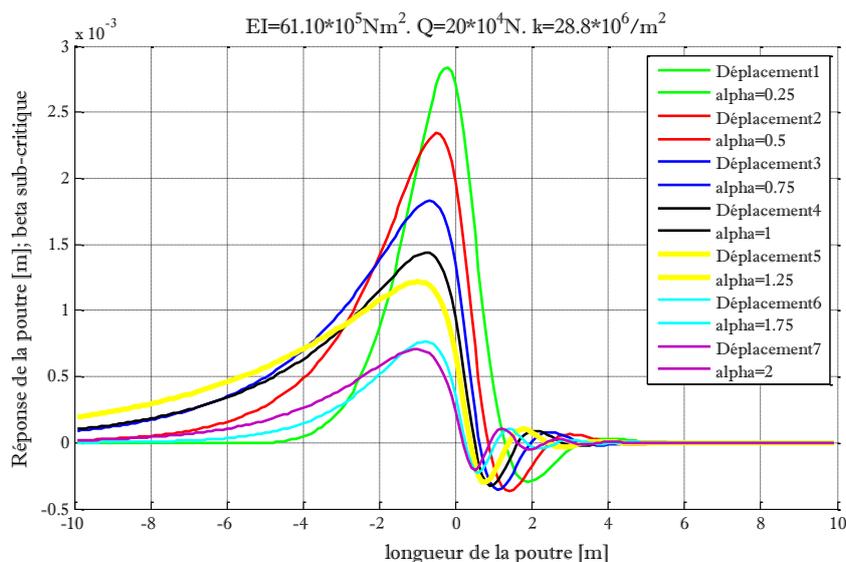


Fig. III.39. Réponse de la poutre $\beta > \beta_{cr}$. $\alpha \leq 1$; $\alpha > 1$

III.6.2. Effet des paramètres physiques du sol

III.6.2.1. Effet de la variation du module de réaction

Il est nécessaire de faire une variation du module de réaction de sol K_v pour voir la sensibilité de la déformation de la fondation à ce paramètre.

Les (fig. III.40), (III.41), (III.42) et (III.43) présentent la réponse du rail sous l'effet de la variation de la rigidité du sol dans les différents environnements d'amortissement et de la vitesse de la source mobile.

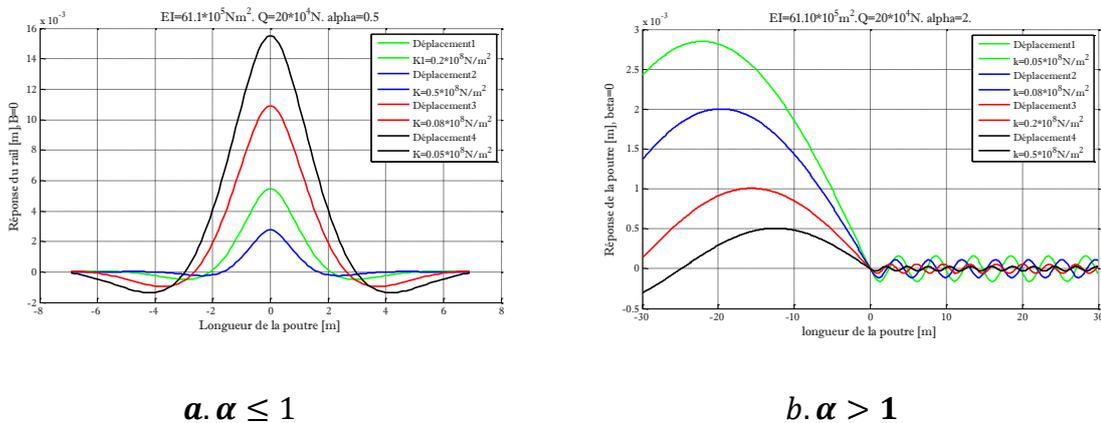


Fig. III.40. Effet de la variation du module de réaction sur la réponse $\beta = 0$

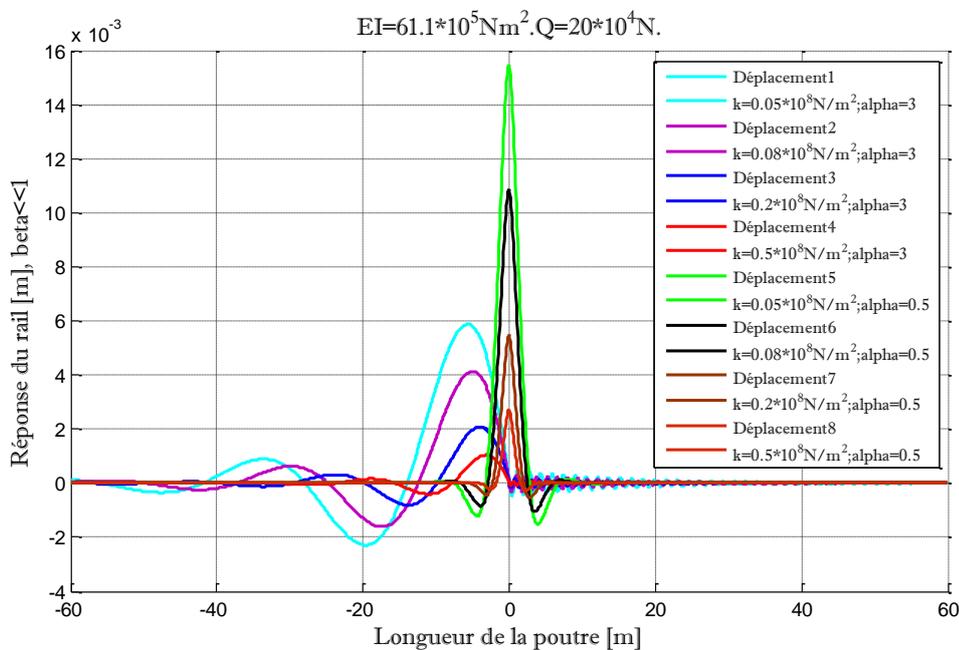


Fig. III.41. Effet de la variation du module de réaction $\beta \ll 1; \alpha \leq 1 \text{ et } \alpha > 1$

Nous distinguons que l'influence de la valeur du K_v sur l'allure des réponses de la poutre est peu marquée, une diminution de l'amplitude de la réponse de la poutre, résultant de

L'augmentation dans le module de rigidité du sol dans tout les cas analysés, la réponse de la voie est plus important lorsque le sol est le moins rigide.

Dans chaque cas, Le maximum de l'amplitude de la réponse est évalué au même point, ainsi elles s'annulent au même point aussi.

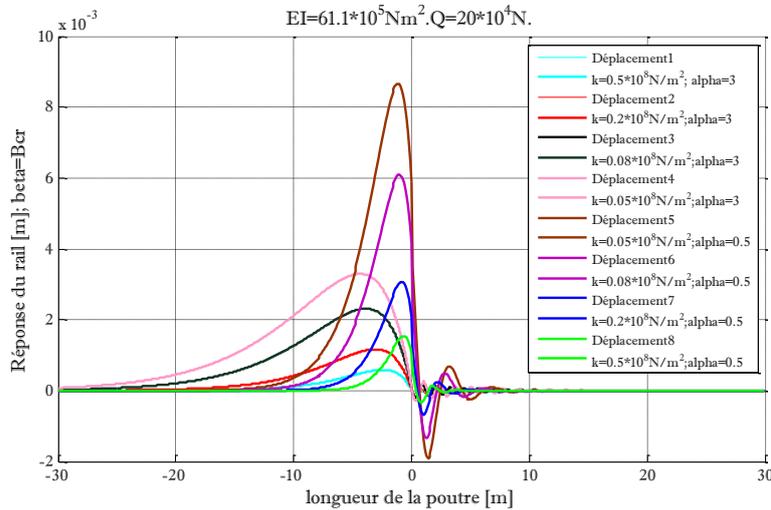


Fig. III.42. Effet de la variation du module de réaction $\beta = \beta_{cr}$ $\alpha \leq 1$ et $\alpha > 1$

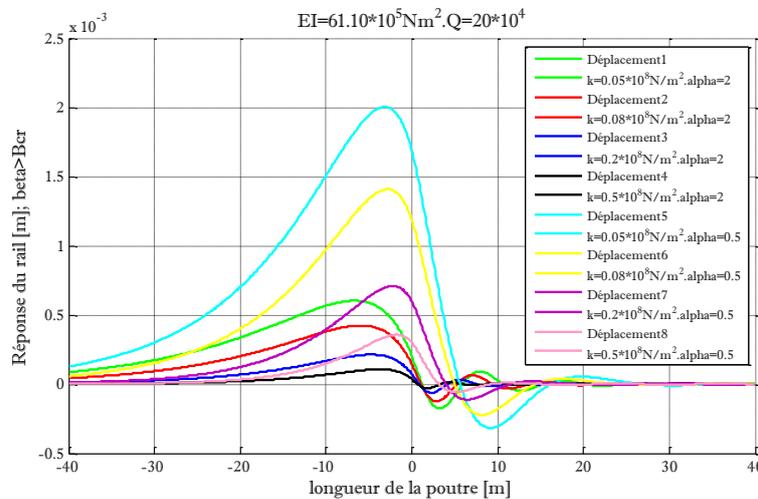


Fig. III.43. Effet de la variation du module de réaction $\beta > \beta_{cr}$; $\alpha \leq 1$ et $\alpha > 1$

III.6.2.2. l'influence de la nature du sol sur la réponse dynamique

Un sol est principalement caractérisé par le module d'élasticité E_s , prenons ces types de sol : **Sable** $0.3 \cdot 10^8$ et **Argile/sable** : $0.03 \cdot 10^8$; **Gravier** : $1.5 \cdot 10^8$,

Les réponses du rail dans les différents cas de vibration sont illustrées dans les figures (fig.III.44), (fig.III.45), (fig.III.46) et (fig.III.47) nous constatant que le tassement le plus important est pour le sol dont les caractéristique mécanique sont les plus faible (argile).

La réponse dynamique du rail sur un gravier s'atténue en premier lieu, nous pouvons dire que le Gravier a joué un rôle important dans l'amortissement des ondes vibratoire du rail.

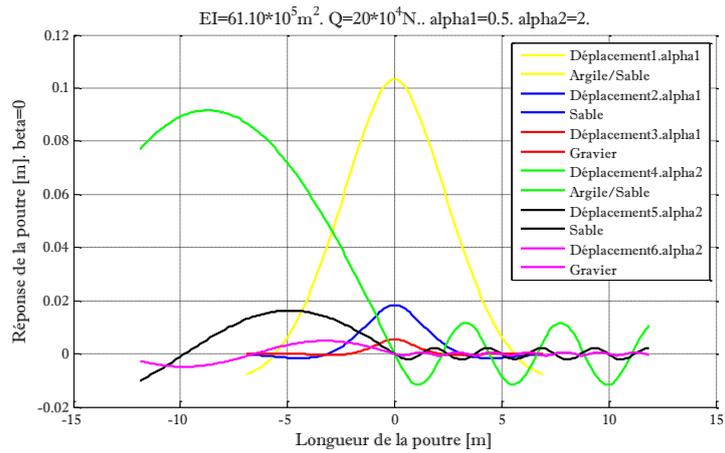


Fig.III.44. L'influence de la nature du sol sur la réponse $\beta = 0; \alpha \leq 1 \quad \alpha > 1$

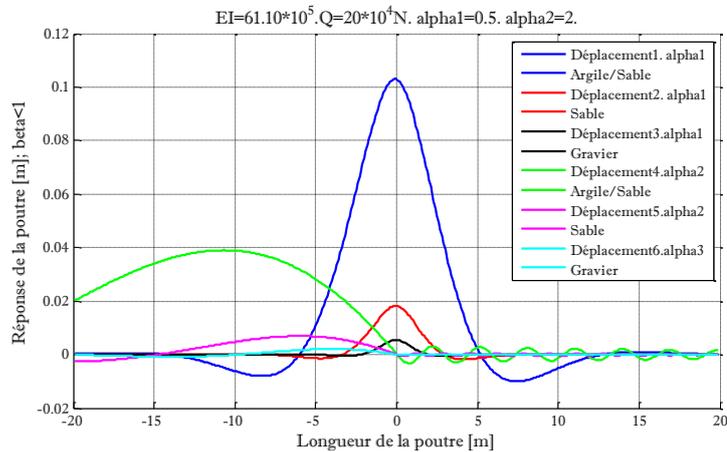


Fig.III.45. L'influence de la nature du sol sur la réponse $\beta \ll 1; \alpha \leq 1 \text{ et } \alpha > 1$

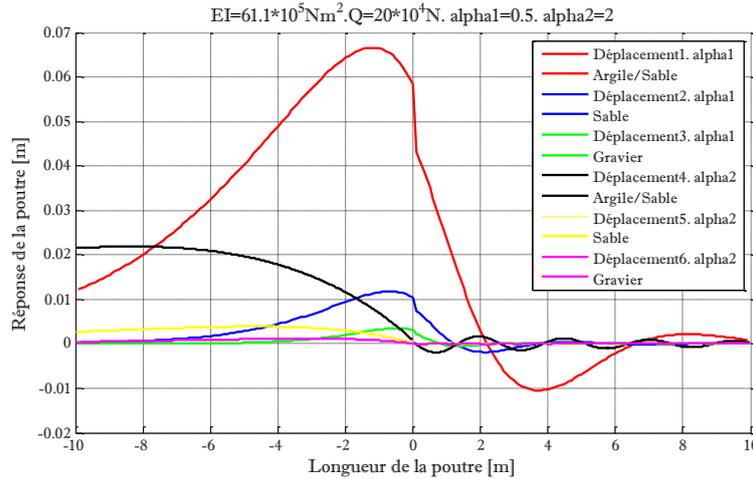


Fig.III.46. L'influence de la nature du sol sur la réponse $\beta = \beta_{cr}$; $\alpha \leq 1$ et $\alpha > 1$

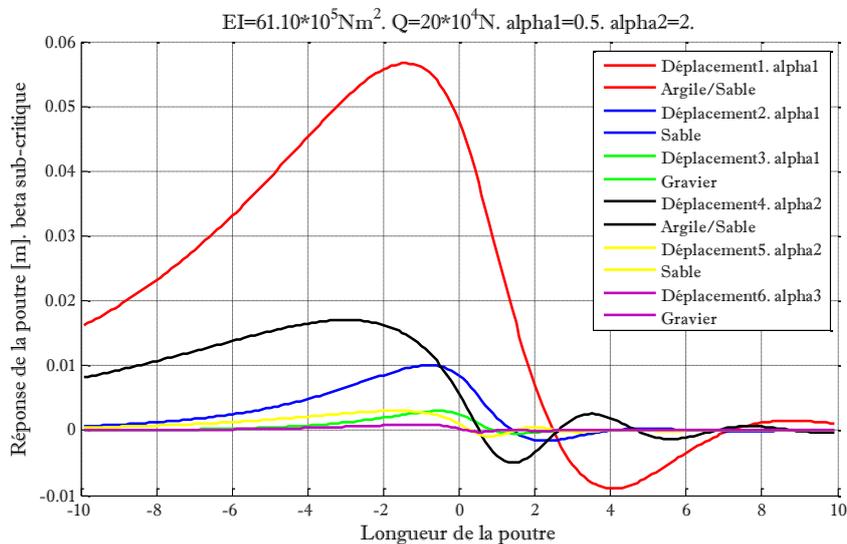


Fig.III.47. L'influence de la nature du sol sur la réponse $\beta > \beta_{cr}$; $\alpha \leq 1$ et $\alpha > 1$

III.6.2.3. Comparaison entre les différentes recherches sur le module de réaction :

Nous rappelons que l'insuffisance dans le modèle de Winkler est la détermination du module K_v , pour cela nous proposons l'intégration du module K_v selon les différentes propositions (TAB II.2) dans l'équation différentielle afin de déterminer la déflexion.

Les valeurs physiques sont évaluées pour module d'élasticité E_s du sol :

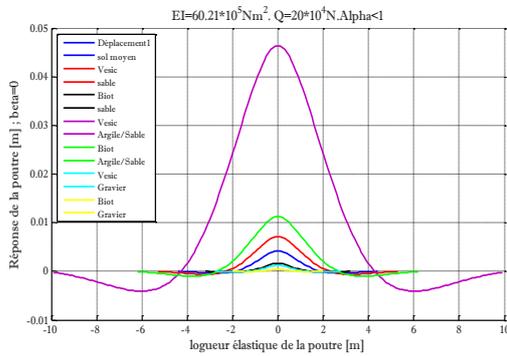
Sable : $0.3 \cdot 10^8$;

Argile/sable : $0.03 \cdot 10^8$;

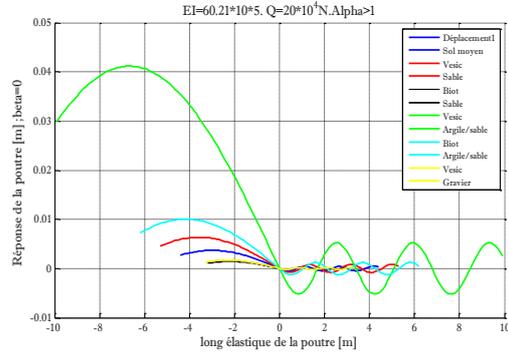
Gravier : $1.5 \cdot 10^8$

Sol moyen $k_v = 28.8 \text{ Mpa}$

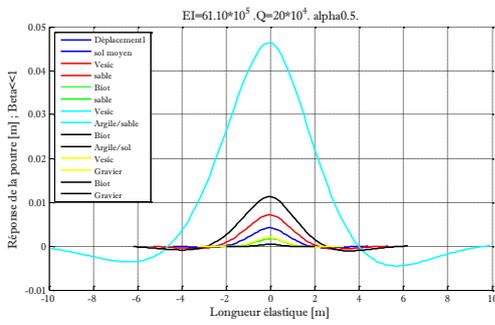
La poutre est de longueur infinie, alors nous exprimons sous forme de graphique (Fig. III.45), les courbes de déflexion selon les approches de Biot et Vesic de Kv.



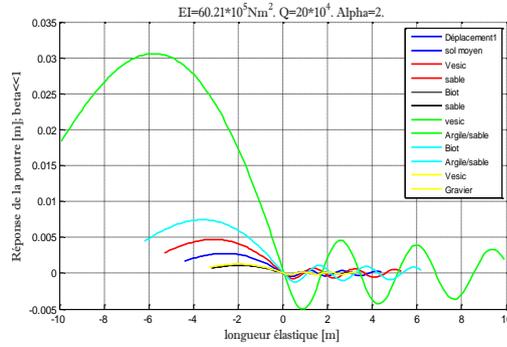
a. $\beta = 0 . \alpha \leq 1$



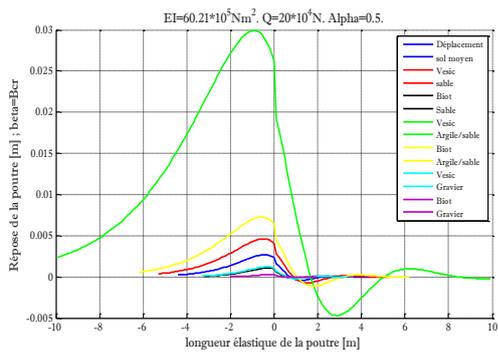
b. $\beta = 0 . \alpha > 1$



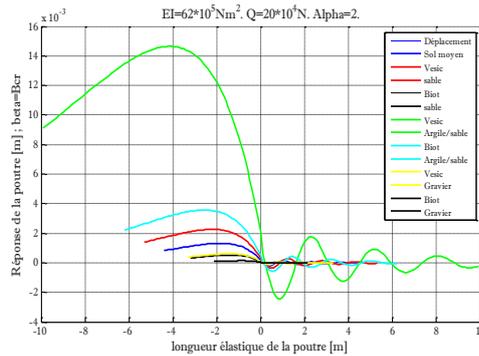
c. $\beta \ll 1 . \alpha \leq 1$



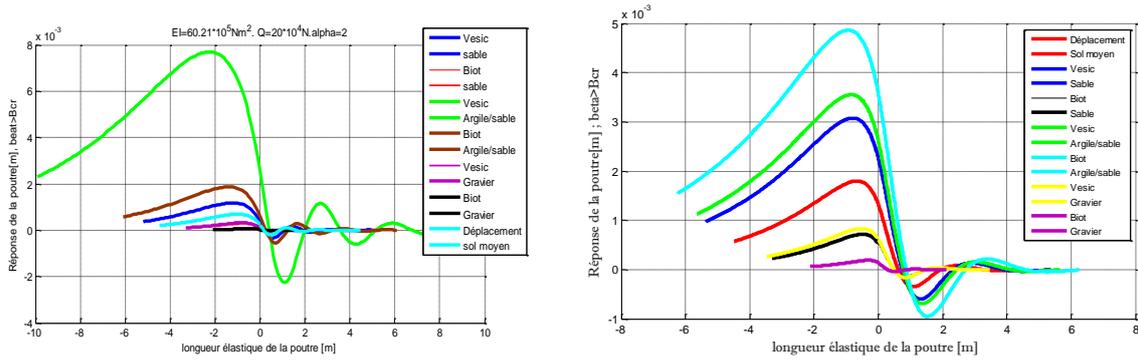
d. $\beta \ll 1 . \alpha \leq 1$



e. $\beta = \beta_{cr} . \alpha \leq 1$



f. $\beta = \beta_{cr} \alpha > 1$



g. $\beta > \beta_{cr}; \alpha > 1$

h. $\beta > \beta_{cr}; \alpha \leq 1$

Fig. III.48. Représentation des recherches de Biot et Vesic sur K_v

Les réponses dynamiques de la poutre sont trop sensibles à la variation de ce paramètre, Dans le sol argileux, la différence entre les déformations obtenues selon les approches de Biot et Vesic de K_v sont très importante.

III.6.3. Effet des caractéristiques physiques du rail

Les caractéristiques mécaniques du rail non pas d'influence sur l'allure de la réponse dynamique, mais cet effet apparié sur l'amplitude, plus les caractéristiques mécanique du rail augmente nous distinguons une diminution de l'amplitude de la réponse.

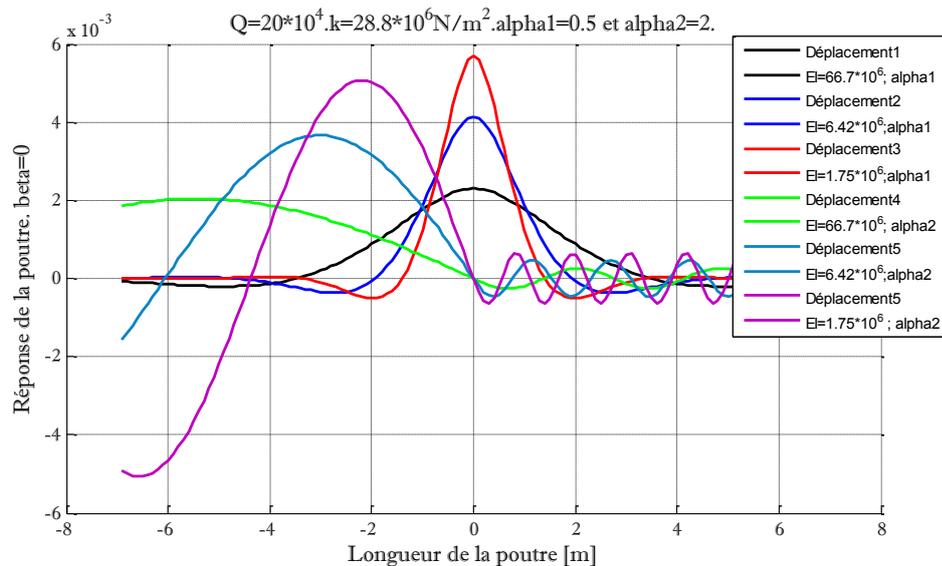


Fig.III.49. Effet des caractéristiques physiques du rail. $\beta = 0; \alpha \leq 1 \quad \alpha > 1$

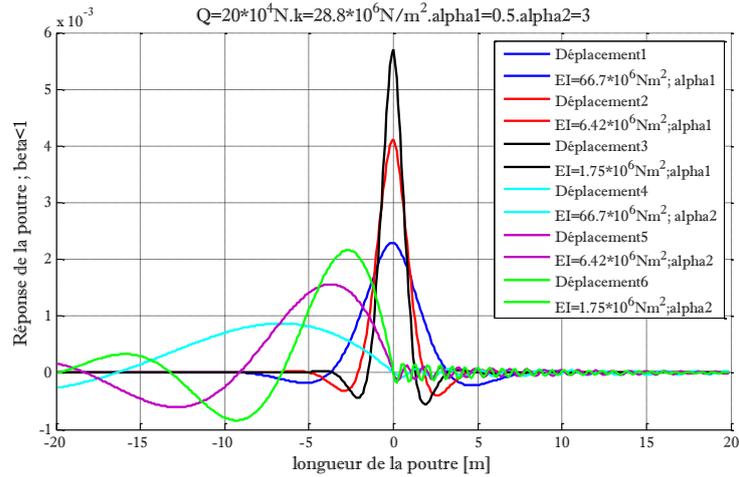


Fig.III.50. L'Effet des caractéristiques physiques du rail. $\beta \ll 0; \alpha \leq 1 \quad \alpha > 1$

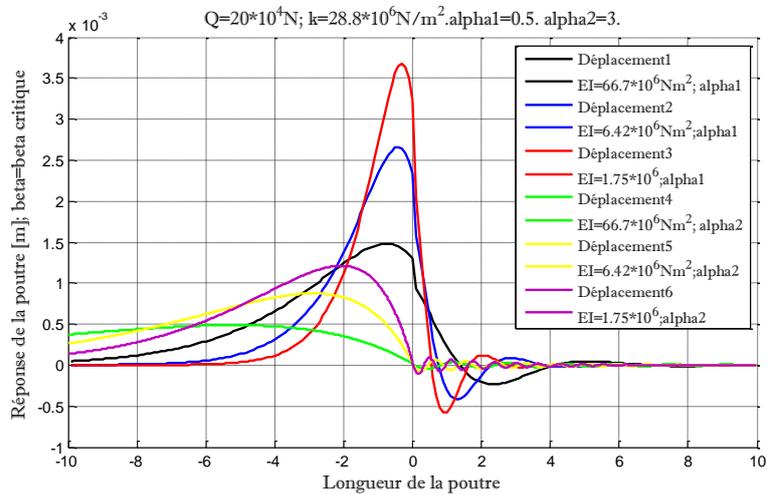


Fig.III.51. L'Effet des caractéristiques physiques du rail. $\beta = \beta_{cr}; \alpha \leq 1 \quad \alpha > 1$

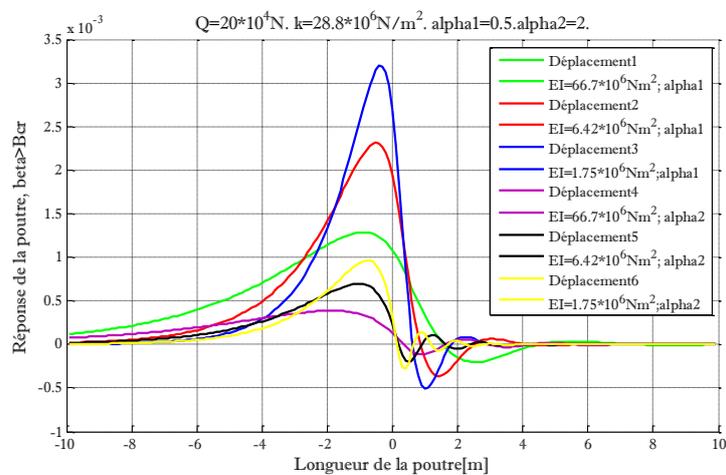


Fig.III.52. L'Effet des caractéristiques physiques du rail. $\beta > \beta_{cr}; \alpha \leq 1 \quad \alpha > 1$

III.7. Conclusion

La réponse dynamique d'une poutre d'Euler- Bernoulli de longueur infini appuyée sur des fondations de Winkler soumise à une charge en mouvement est étudiée. La méthode de la transformée de Fourier est employée pour trouver la solution analytique de l'équation différentielle partielle du quatrième ordre. Les calculs numériques sont réalisés pour analyser le déplacement, moment de flexion et les efforts tranchants de la poutre.

Cette étude montre que pour des vitesses de l'excitation mobile inférieur à la vitesse de propagation d'onde dans le sol, la déviation dynamique et les réponses de moment de flexion de la poutre sont symétriques par rapport à l'emplacement du déplacement. La déformation maximale, le pic du moment de flexion est sous le point d'application de la charge. En cas de très faibles vitesses, la réponse de la poutre augmente légèrement avec l'augmentation de la vitesse, et les réponses, moment fléchissant ainsi que les forces de cisaillement se rapprocher de celles du cas statique que la vitesse est diminuée.

En outre pour des vitesses supercritiques de la charge, la déflection significative se produit derrière la charge alors que le moment de flexion et de la force de cisaillement sont plus élevés avant la charge.

Les valeurs maximales des ondes avant et arrière l'excitation, diminuent avec l'augmentation de l'effet d'amortissement. La longueur d'onde des ondes arrière sont toujours plus élevée que les ondes de déviation avant.

Une analyse est également effectuée pour étudier l'effet de différents paramètres tels que la rigidité de la fondation, la déflection maximale et le moment de flexion de la poutre augmente de manière significative avec le réduit module de cisaillement et la rigidité de la fondation pour une vitesse constante. Le modèle répond à la physique du problème en effet nous constatant que le tassement le plus important est pour le sol dont les caractéristique mécanique sont les plus faible.

La convergence de toutes les courbes après une certaine distance, l'influence du module d'élasticité devient négligeable.

CHAPITRE

IV

Modèle analytique basé sur la longueur élastique

IV. MODELE ANALYTIQUE BASE SUR LA LONGUEUR ELASTIQUE

IV.1. Introduction

Dans le présent chapitre, nous analysons la réponse dynamique du rail modélisé selon la théorie de la poutre d'Euler-Bernoulli, sous une charge mobile à amplitude constante, le support du rail est représenté le modèle de Winkler.

Nous décrivons la formulation de la solution analytique de l'équation différentielle gouvernante, par la méthode de superposition des modes propres, les solutions sont obtenues en vibration libre et en vibration forcée par une technique de séparation des variables, dans deux conditions : amortie et non amortie pour des vitesses variables.

IV.2. Mécanique de génération de vibration

La transmission des vibrations du sol induit par les chemins de fers peuvent être générés par plusieurs mécanismes d'excitation. Habituellement, une distinction entre les mécanismes d'excitation quasi- statiques et dynamiques est réalisée:

IV.2.1. Excitation quasi-statique

Causé par le déplacement de la charge sur le système voie/sol; dans laquelle la poutre est au repos par rapport au déplacement de système de coordonnées. Autrement dit le déplacement de la poutre ne dépend plus du temps, elle ne dépend que de la distance de l'origine des axes de coordonnées [22]. Cet effort excite le système {voie + véhicule} principalement dans les très basses fréquences (entre 1 et 10/15Hz (à des vitesses de 5km/h à 50km/h [27]), l'importance de l'excitation quasi-statique augmente lorsque la voie traverse les régions du sable et de sol souple, la vitesse du train peut atteindre la vitesse de phase du sol.

IV.2.2. Excitation dynamique

Les vibrations dynamiques sont causées par l'interaction de train -voie en raison de plusieurs mécanismes qui induisent l'accélération verticale sur la matériel roulant, lié principalement aux irrégularités des surfaces de contact de la roue et du rail, aussi appelées rugosités : quelques millimètres d'amplitude pour des longueurs d'onde de quelques centimètres à quelques mètres, selon la vitesse de passage du train. Cet effort excite le

système {voie + véhicule} pour des fréquences moyennes, entre 15Hz et 200Hz (à des vitesses au-delà de 100km/h [27]).

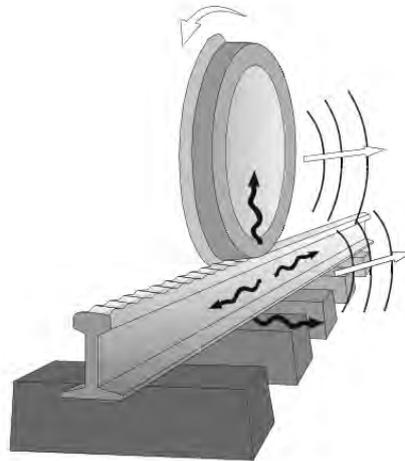


Fig. IV.1. Illustration du mécanisme de génération de vibration

IV.3. Hypothèse du problème

La structure idéalisant le rail est modélisée comme une poutre Euler-Bernoulli. Les caractéristiques mécaniques sont le module de Young 'E' et le coefficient de poisson ' ν '. Sa section 'A' ainsi que son inertie 'I' sont régies par les normes internationales 'UIC', la source mobile simulant un convoi de train est représentée par une force ponctuelle dotée d'une vitesse constante (fig. IV.2).

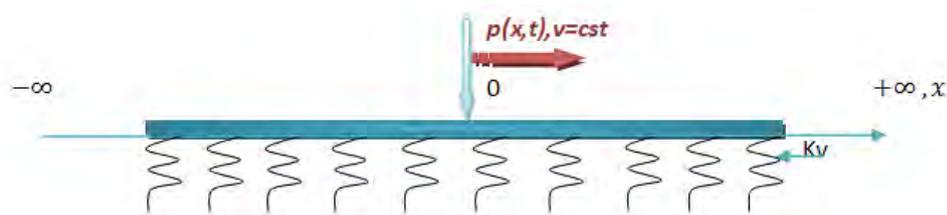


Fig. IV.2. Poutre sur des supports élastiques sous une charge mobile

IV.4. Equations du mouvement

Selon ces hypothèses les ondes transversales de vibrations de la poutre rail sont régies par l'équation différentielle du quatrième ordre suivante :

$$EI \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + m_r \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + k_v u(x,t) = P \cdot \delta(x - vt) \quad (\text{IV.1})$$

Où :

- x Coordonnée spatiale,
- t Coordonnée temporelle,
- $u(x,t)$ Réponse de la poutre
- E Module d'Young de la poutre,
- I Moment d'inertie de la section transversale du rail (EI est la rigidité en flexion),
- m_r Masse par unité de longueur de la poutre,
- c Coefficient d'amortissement,
- k_v Coefficient de fondation Winkler (raideur par unité de longueur de fondation)

- P Amplitude constante de la force mobile
- v Vitesse de déplacement de cette charge.
- δ La fonction delta de Dirac

IV.4.1. Déplacement statique

Soit une poutre infinie en état quasi-statique reposante sur des fondations élastiques de Winkler (fig. IV.3) :

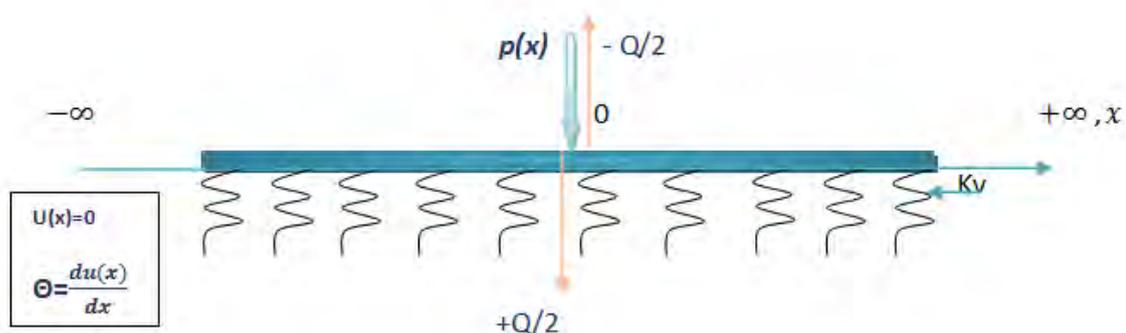


Fig. IV.3. Poutre Euler sous charge statique, support modèle de Winkler

La réaction de la fondation de Winkler par unité de longueur peut être représentée par une expression de la forme $k_v u$; La simple hypothèse suivant laquelle la réaction

continue de la fondation est proportionnelle à la déformation (expression mathématique relie le module de la voie k_v au déplacement du rail), dans laquelle :

- u La flèche du rail selon l'axe y au point x ,
- k_v Une constante habituellement appelée module de la fondation. Cette constante représente la réaction par unité de longueur lorsque la déformation est égale à l'unité.

Selon la théorie de poutre sur fondation de Winkler, nous considérons un élément différentiel (dx) fig. (IV.4) :

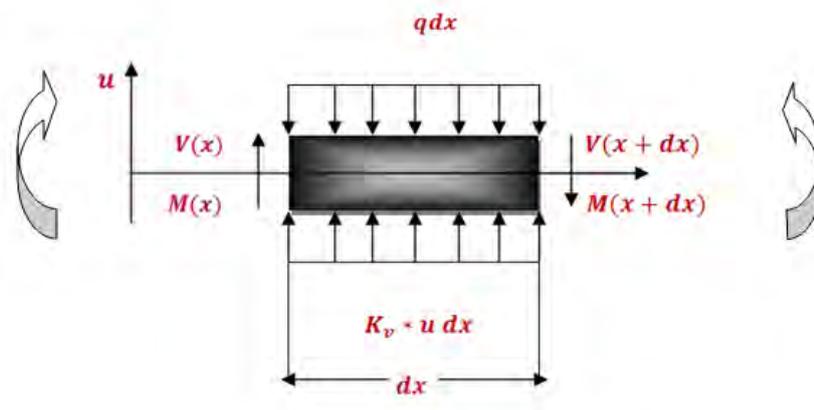


Fig. IV.4. Moment et efforts tranchants sur un élément de la poutre

Où :

- x Coordonnée spatiale,
- y Axe vertical (dans le sens du déplacement de la poutre)
- $M(x)$ Moment de flexion vertical du rail.
- $V(x)$ Effort tranchant vertical
- $p(x)$ Réaction unitaire élastique du sol
- k_v Module de la fondation.

À partir de La condition d'équilibre par rapport à l'axe vertical $\sum F_v = 0$:

$$V(x) - (V(x) + dV(x)) + K_v \cdot u(x)dx - qdx = 0 \quad (IV.2)$$

Après avoir réalisé les simplifications nécessaires nous obtenons :

$$\frac{dV(x)}{dx} = k_v u(x) - q \quad (IV.3)$$

Nous savons que $V(x) = \frac{dM(x)}{dx}$ cela permet d'écrire :

$$\frac{dV(x)}{dx} = \frac{d^2M(x)}{dx^2} = k_v * u(x) - q \quad (IV.4)$$

Nous introduisons ces résultats issus de l'RDM classique dans l'équation d'équilibre :

$$M(x) = EI \frac{d^2u(x)}{dx^2} \quad \text{dans l'équation (IV.4) nous avons}$$

$$EI \frac{d^4u(x)}{dx^4} = k_v * u(x) - q$$

$$\text{Ou encore : } EI \frac{\partial^4 u(x)}{\partial x^4} + k u(x) = q \quad (IV.5)$$

Dans la partie exempte de charge, la seule force exercée sur la poutre est la réaction continue d'intensité $u * k_v$, provenant des supports selon le modèle de Winkler; l'équation (IV.5) permet l'écriture de l'équation différentielle régissant le comportement statique de la poutre :

$$EI \frac{\partial^4 u(x)}{\partial x^4} + k u(x) = 0 \quad (IV.6)$$

Cette équation différentielle du quatrième ordre admet une solution de la forme:

$$u(x) = e^{\alpha x}(A \sin \alpha x + B \cos \alpha x) + e^{-\alpha x}(C \sin \alpha x + D \cos \alpha x) \quad (IV.7)$$

- Avec: $\alpha^4 = \left\{ \frac{k}{4EI} \right\}$

Le rapport des rigidités ' α ' comprend la rigidité en flexion de la poutre, ainsi que l'élasticité du support.

Nous pouvons admettre que la pente, le moment de flexion et efforts tranchants sont égale à zéro à n'importe quel instant lorsque la longueur de la poutre tend vers l'infinie [28].

Pour résoudre l'équation (IV.7), nous supposons pour origine des coordonnées du point d'application de la force ; selon les conditions à l'infini de la longueur de la poutre nous avons :

1- Lorsque $x \rightarrow +\infty$ le déplacement de la poutre $u(x) \rightarrow 0$ ce qui donne

$$\begin{aligned} (u(x))_{x \rightarrow \infty} &= (e^{\alpha x}(A \sin \alpha x + B \cos \alpha x) + e^{-\alpha x}(C \sin \alpha x + D \cos \alpha x))_{x \rightarrow \infty} = 0 \\ (e^{-\alpha x}(C \sin \alpha x + D \cos \alpha x))_{x \rightarrow \infty} &= 0 \\ (u(x))_{x \rightarrow \infty} &= (e^{\alpha x}(A \sin \alpha x + B \cos \alpha x))_{x \rightarrow \infty} = 0 \end{aligned}$$

Cette condition n'est valable que si $\{A = B = 0\}$; l'équation (IV.7) devient :

$$u(x) = e^{-\alpha x}(C \cos(\alpha x) + D \sin(\alpha x)) \quad (IV.8)$$

Les constantes d'intégration restantes C et D peuvent être déterminées à partir des conditions à l'origine ($x=0$) :

2- la tangente à la déformée doit être horizontale, c'est-à-dire :

$$\left\{ \theta = \frac{du(x)}{dx} = -\alpha e^{-\alpha x}(C \sin \alpha x + D \cos \alpha x) + e^{-\alpha x}(\alpha C \cos \alpha x - \alpha D \sin \alpha x) \right\} = 0$$

$$\alpha(C - D) = 0 \quad \longrightarrow \quad \{C = D = C_0\}$$

L'équation (IV.8) devient :

$$u(x) = C_0 e^{-\alpha x}(\cos(\alpha x) + \sin(\alpha x)) \quad (IV.9)$$

3- le problème étudié est axi-symétrique, nous pouvons déduire l'effet de l'effort tranchant sur la partie droite de la poutre est égale à $(-Q/2)$:

$$(V)_{x=0} = \left(\frac{dM}{dx}\right)_{x=0} = -EI \left(\frac{d^3 u(x,t)}{dx^3}\right)_{x=0} = \frac{-Q}{2}; \text{ De cette condition nous avons :}$$

$$C_0 = \frac{Q\alpha}{2k_v} \quad (IV.10)$$

Nous obtenons finalement l'équation représentative du déplacement :

$$u(x) = \frac{Q\alpha}{2k_v} e^{-\alpha x}(\cos(\alpha x) + \sin(\alpha x)) \quad (IV.11)$$

L'équation (IV.11) peut être écrite sous la forme :

- Déplacement

$$u(x) = \frac{Q}{8EI\alpha^3} e^{-\alpha x}(\sin \alpha x + \cos \alpha x) \quad (IV.12)$$

- Moment fléchissant

$$M(x) = EI \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = \frac{Q}{4a} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x) \quad (\text{IV.13})$$

- Efforts tranchants

$$V(x, t) = EI \frac{d^3 u(x, t)}{dx^3} = -\frac{Q}{2} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x) \quad (\text{IV.14})$$

✚ Analyse et discussions des résultats

Nous supposons que les paramètres mécaniques du sol et de la poutre sont les suivantes:

$EI=200 \cdot 10^7 \text{N} \cdot \text{m}^2$; $K=0.2 \cdot 10^8 \text{N}/\text{m}^2$, la déflexion statique montrée sur la fig. (IV.5) :

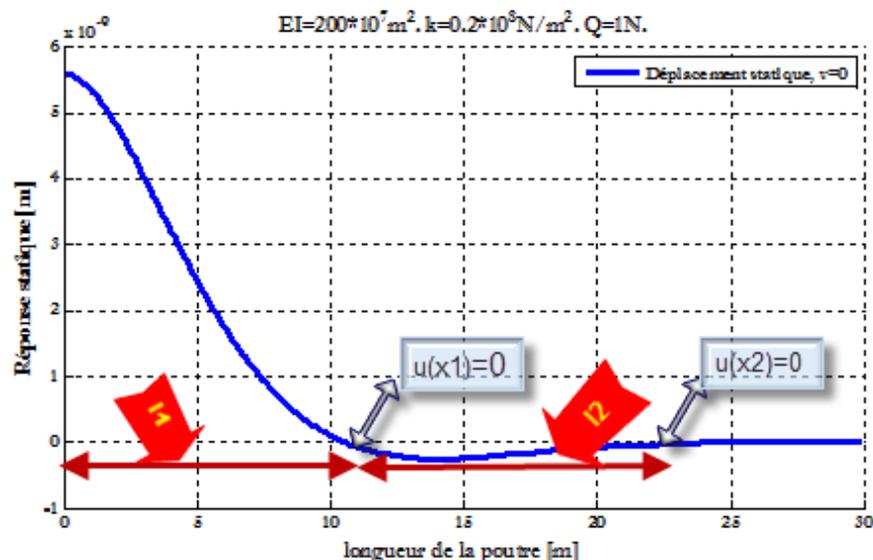


Fig. IV.5. La déflexion statique sur un demi de la poutre

La Fig. (IV.5), nous permet de remarquer qu'il y a deux valeurs de x_1 et x_2 successifs pour lesquelles $u(x_1) = u(x_2) = 0$; l'égalité suivante $l_1 \approx l_2$ est valable avec une précision satisfaisante.

La longueur $L=l_1+l_2=2l$ peut être déterminée, en faisant observer que la quantité l est la longueur à laquelle $u(l) = 0$, ce qui signifie: $\sin \alpha l + \cos \alpha l = 0$, nous pouvons écrire aussi :

$$(\sin \alpha l + \cos \alpha l)^2 = 0,$$

Ou encor :

$$\{\sin(\alpha l)^2 + \cos(\alpha l)^2 + 2 \sin \alpha l \cos \alpha l = 0\} \quad (IV.15)$$

Sachant que : $\sin(\alpha l)^2 + \cos(\alpha l)^2 = 1$ et $2 \sin(\alpha l) \cos \alpha l = \sin(2\alpha l)$

La résolution de l'équation (IV.15) nous donne : $(\sin(2\alpha l) = -1 = \sin(\frac{3\pi}{2}))$

Nous avons donc $2\alpha l = \frac{3\pi}{2}$, ainsi nous déterminons la longueur élastique ou longueur de transfert de l'énergie dont l'expression analytique est :

$$L = 2l = \frac{3\pi}{2\alpha} = \frac{3\pi}{2} * \sqrt[4]{\frac{4EI}{k}} \quad (IV.16)$$

Cette longueur élastique, permet le passage de la longueur infinie, vers une longueur finie (L=2l), qui sera prise en considération dans notre modèle Analytique.

- **Déplacement**

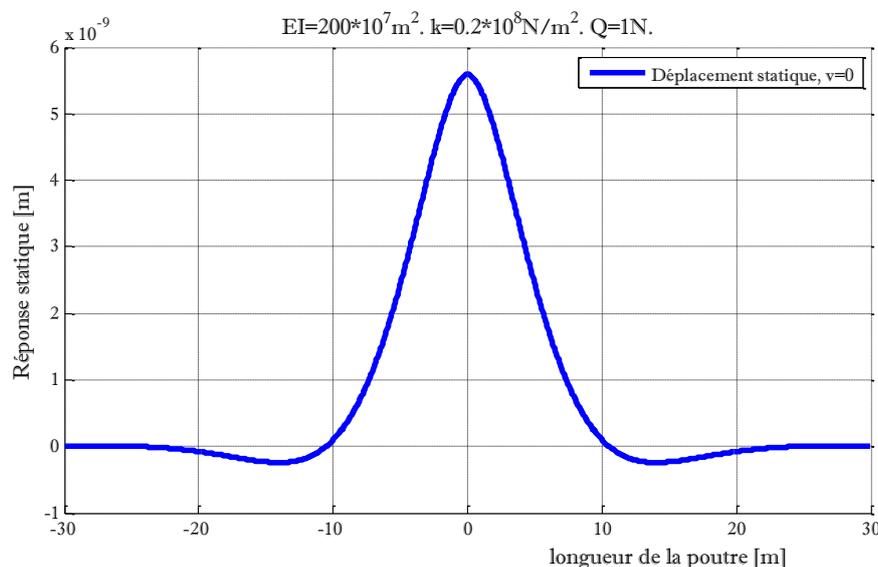


Fig. IV.6. La déflexion statique de la poutre

L'utilisation de l'équation (IV.13) permet de visualiser le moment de flexion fig. (IV.7), dont nous distinguons que Le pic est essentiellement dû à la formulation de l'équation qui est une dérivée seconde, alors que l'équation (IV.14) permet de visualiser l'effort tranchant, de la figure (IV.8) nous observons une discontinuité dans le tracé de l'effort tranchant causée par la discontinuité de la fonction elle même (dérivée du troisième degré) :

- **Moment fléchissant**

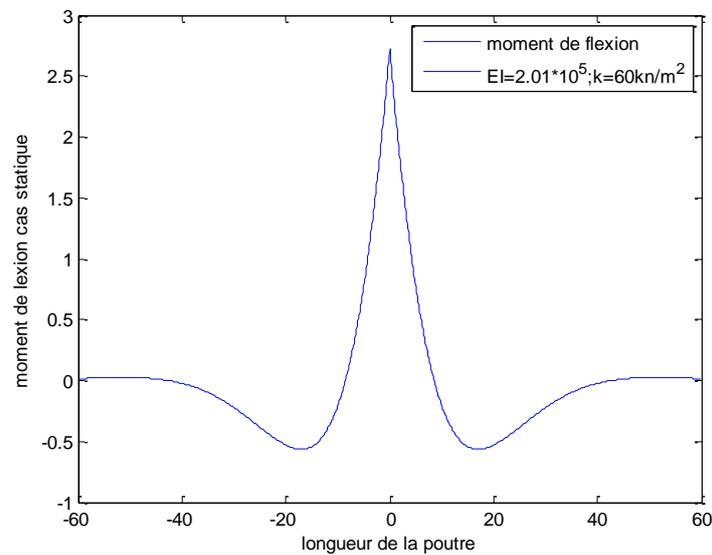


Fig. IV.7. Le Moment de la poutre infinie cas statique

- **Effort tranchant**

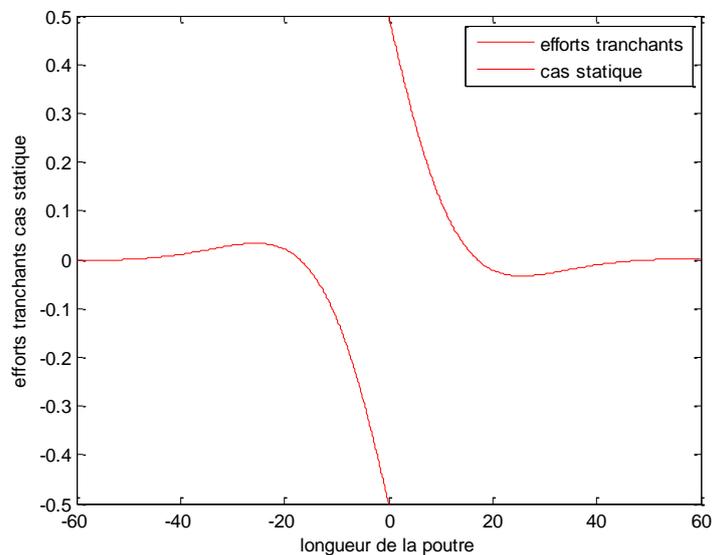


Fig. IV.8. L'effort tranchant de la poutre infinie cas statique

III.4 .2. Réponse dynamique

Supposant que la poutre rail est une poutre infinie, repose sur des supports modélisés par Winkler avec k_v constant le long de la fondation ; la charge $P(x, t)$ affecte à

chaque instant longueur élastique (finie) '2L' déterminée au préalable en régime statique, cette longueur est fonction des caractéristiques mécanique de la poutre ainsi que du sol.

Au temps 't' nous pouvons représenter notre modèle (fig. IV.9) :

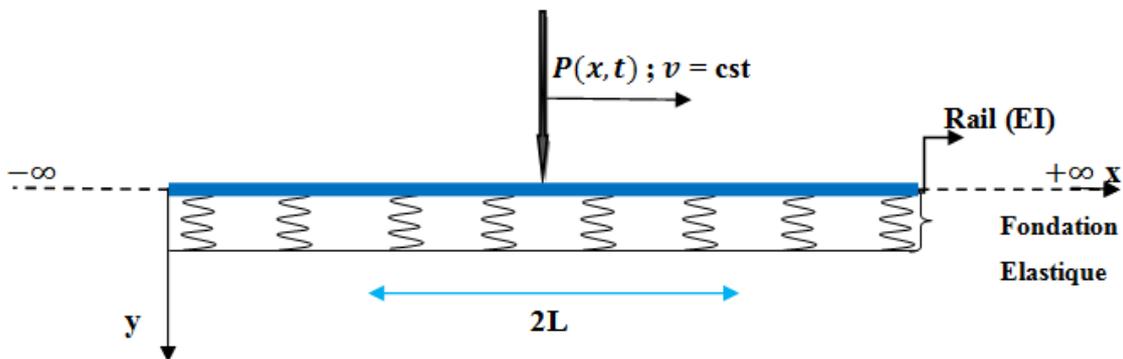
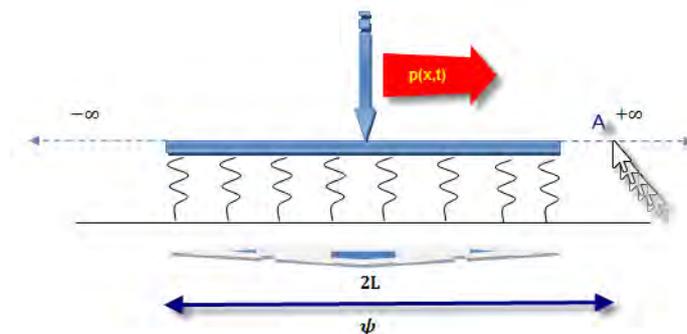


Fig. IV.9. Poutre de longueur élastique sur des supports de Winkler

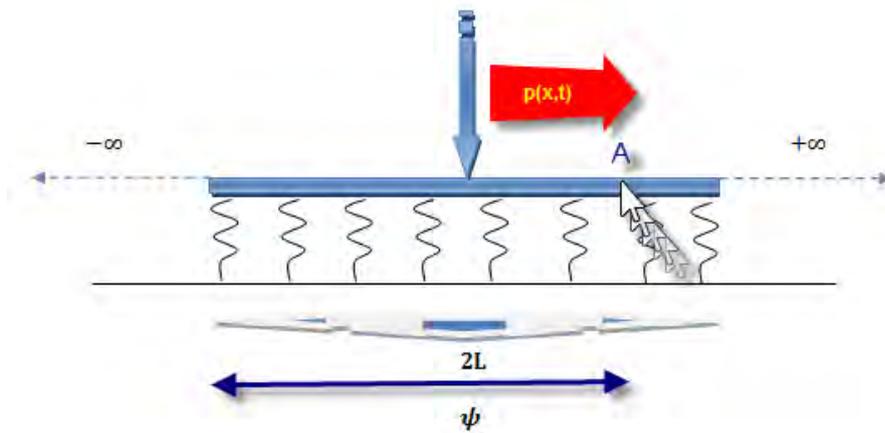
Une analyse du comportement dynamique peut être considérée selon différents cas, vis-à-vis de la longueur élastique, de la position de la charge mobile et du point 'A' analysé. Nous pouvons synthétiser cette analyse selon trois cas possible physiquement:

- 1^{er} cas $\psi > 2L$: le point A n'est pas affecté par la charge $P(x,t)$ $u_A = 0$;



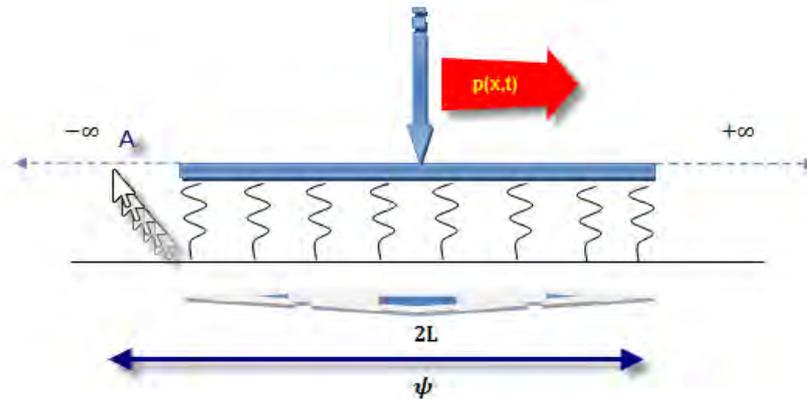
Cas. a. $\psi > 2L$

- 2^{ème} cas $\psi \leq 2L$: le point A est oscillé par la charge $p(x,t)$ et la déviation est $u_A \neq 0$;



Cas. b. $\psi \leq 2L$

- 3^{ème} Cas $\psi > 2L$: le point A continu à vibrer même s'il est en dehors de l'intervalle de l'effet de la charge mobile (la poutre vibre librement); $u_A \neq 0$



Cas. c. $\psi > 2L$

Fig. IV. 10. a, b, c. Les cas possible de vibration selon la position de la charge et le point considéré spatialement

IV.4.2.1. Vibration libre

Nous proposons l'étude de la poutre infinie sous charges mobiles reposante sur un sol élastique idéalisé par le modèle de Winkler, la poutre est idéalisée par une poutre Euler finie ayant comme longueur '2L' (longueur élastique), les caractéristiques mécaniques de la poutre sont E, et μ , respectivement module de Young et coefficient de Poisson.

L'équation régissant ce mouvement vibratoire est :

$$EI \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + c \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + m_r \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + k u(x,t) = 0 \quad (\text{IV.17})$$

Pour la résolution de cette équation différentielle, nous utilisons la méthode modale, cette méthode est basée sur l'analyse modale linéaire, qui consiste à exprimer la réponse dynamique de la poutre sous la forme de série de modes propres sommés.

L'analyse menée dans notre cas est dans le domaine linéaire, pour cela nous pouvons utiliser le principe de superposition des modes propres [11].

La solution de l'équation (IV.17) est :

$$\bullet \quad u(x,t) = \sum_n \Phi_n(x) q_n(t) \quad (\text{IV.18})$$

Nous substituons (IV.18) et ces dérivés en (IV.17) et en séparant les variables nous avons les deux équations différentielles :

$$\begin{cases} EI \frac{\partial^4 \Phi_n(x)}{\partial x^4} - (m_r \omega_n^2 - k) \Phi_n(x) = 0 \\ \frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} + \frac{c}{m_r} \frac{\partial q(t)}{\partial t} + \omega_n^2 q_n(t) = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.19 a, b})$$

En posant : $\mu^4 = \frac{m_r \omega_n^2 - k}{EI}$ (IV.20)

La résolution des deux équations différentielles ((IV.19 a et b), régissant les modes propres de vibration et les coordonnées généralisées est obtenue en considérant :

$$\bullet \quad \Phi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \text{la fonction des modes propres} \quad (\text{IV.21})$$

Comme solution de la poutre finie validant les conditions aux limites. Cette solution est substituée dans l'équation (IV.19 a), nous déterminons alors la pulsation propre du système :

$$\bullet \quad \omega_n = \sqrt{\frac{n^4 \pi^4 EI}{m_r l^4} + \frac{k}{m_r}} \quad \text{(IV.22)}$$

Avec : $n^4 \pi^4 EI / m_r l^4 = (\sqrt{n^4 \pi^4 EI / m_r l^4})^2$;

Où : $\sqrt{n^4 \pi^4 EI / m_r l^4}$ La fréquence propre d'une poutre sur appuis simple.

Pour la deuxième équation la solution (IV.19 b) est de la forme suivante :

$$q_n(t) = C e^{st} \quad \text{(IV.23)}$$

'C' Est une constante arbitraire, en injectant cette équation dans l'équation (IV.19b) nous déterminons la réponse pour cette structure en vibration libre amortie :

$$\bullet \quad q_n(t) = e^{-\beta t} (A_n \sin \omega_d t + B_n \cos \omega_d t) \quad \text{(IV.24)}$$

Les coefficients A_n et B_n sont calculés des conditions initiales à $t = 0$:

$$q(t=0) \quad \text{Et} \quad \frac{\partial q(t=0)}{\partial t} \quad \longrightarrow$$

$$\bullet \quad B_n = q(t=0) \quad \text{et} \quad A_n = \frac{\frac{\partial q(t=0)}{\partial t} + \beta B_n}{\omega_d} \quad \text{ou} \quad A_n = \frac{\frac{\partial q(t=0)}{\partial t} + \beta q_n(t=0)}{\omega_d} \quad \text{(IV.25)}$$

La réponse de la poutre infinie idéalisée par une poutre finie dotée d'une longueur élastique :

$$u(x, t) = \sum_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot e^{-\beta t} (A_n \sin \omega_d t + B_n \cos \omega_d t) \quad \text{(IV.26)}$$

$$u(x, t) = \sum_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot e^{-\beta t} \left(\frac{\frac{\partial q(t=0)}{\partial t} + \beta q_n(t=0)}{\omega_n} \sin \omega_d t + q(t=0) \cos \omega_d t \right); \quad \text{(IV.27)}$$

$$\bullet \quad \beta = \frac{c}{2 \cdot m_r} \quad \text{Rapport d'amortissement}$$

$$\bullet \quad \omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \beta^2} \quad \text{Pulsation amortie} \quad \text{(IV.28a, b)}$$

Le moment de flexion :

$$M(x, t) = EI \frac{d^2 u(x, t)}{dx^2} = -EI \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \sum_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\beta t} \left(\frac{\frac{\partial q(0)}{\partial t} + \beta q(t=0)_n}{\omega_n} \sin \omega_d t + q(t=0) \cos \omega_d t \right) \quad (IV.29)$$

Effort tranchant :

$$V(x, t) = EI \frac{d^3 u(x, t)}{dx^3} = -EI \left(\frac{n\pi}{l} \right)^3 \sum_n \cos \frac{n\pi x}{l} \cdot e^{-\beta t} \left(\frac{\frac{\partial q(0)}{\partial t} + \beta q(t=0)_n}{\omega_n} \sin \omega_d t + q(t=0) \cos \omega_d t \right) \quad (IV.30)$$

- **Vibration libre non amortie**

Dans le cas où la structure est en vibration libre non amortie, la réponse de la poutre :

$$u(x, t) = \sum_n \Phi_n(x) q_n(t) \quad (IV.31)$$

Où :

- $\Phi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$
- $q_n(t) = (A_n \sin \omega_d t + B_n \cos \omega_d t)$ (IV.32)

Avec :

- $\beta = 0$
- $\omega_n = \sqrt{\frac{n^4 \pi^4 EI}{ml^4} + \frac{k}{m}} ;$
- $\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \beta^2} = \omega_n$ (IV.33)

Les coefficients sont calculés des conditions initiales à t=0 :

- $q(t=0)$ Et $\frac{\partial q(t=0)}{\partial t}$ 

$$A_n = \frac{\frac{\partial q(t=0)}{\partial t}}{\omega_n} \text{ Et } B_n = q(t=0) \quad (IV.34)$$

La réponse de la poutre est:

$$u(x, t) = \sum_n \sin \frac{n\pi x}{l} (A_n \sin \omega_d t + B_n \cos \omega_d t)$$

$$u(x, t) = \sum_n \sin \frac{n\pi x}{l} \left(\frac{\partial q(t=0)}{\partial t} \sin \omega_d t + q(t=0) \cos \omega_d t \right)$$

(IV.35)

Moment de flexion et effort tranchant

$$M(x, t) = EI \frac{d^2 u(x, t)}{dx^2} = -EI \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \sum_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot e^{-\beta t} \left(\frac{\partial q(t=0)}{\partial t} \sin \omega_d t + q(t=0) \cos \omega_d t \right)$$

(IV.36)

$$V(x, t) = EI \frac{d^3 u(x, t)}{dx^3} = -EI \left(\frac{n\pi}{l} \right)^3 \sum_n \cos \frac{n\pi x}{l} \cdot e^{-\beta t} \left(\frac{\partial q(t=0)}{\partial t} \sin \omega_d t + q(t=0) \cos \omega_d t \right)$$

(IV.37)

IV.4.2.2 Vibration forcée

Lors de la vibration forcée du rail, deux intervalles de temps de vibration du point 'A' sont constatés :

IV.4.2.2.1 Intervalle de temps : $0 \leq t \leq 2L/v$

Considérons l'équation du mouvement (IV.1) dans l'intervalle $0 \leq t \leq 2L/v$, le point analysé est l'intérieur de cet intervalle :

$$EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + m_r \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + ku(x, t) = Q \cdot \delta(x - vt) \quad (IV.38)$$

Avec: $0 \leq x \leq 2L$

La solution de l'équation différentielle (IV.38) est de la forme :

$$u(x, t) = \sum_n \Phi_n(x) q_n(t) \quad (IV.39)$$

En substituant (IV.39) dans l'équation (IV.38) :

$$EI \sum_n \frac{\partial^4 \Phi_n(x)}{\partial x^4} q_n(t) + c \sum_n \Phi_n(x) \frac{\partial q_n(t)}{\partial t} + m_r \sum_n \Phi_n(x) \frac{\partial^2 q_n(t)}{\partial t^2} + k \sum_n \Phi_n(x) q_n(t) = Q \delta(x - vt) \quad (IV.40)$$

Nous avons deux équations différentes, l'équation représente les modes propres :

$$EI \frac{\partial^4 \Phi_n(x)}{\partial x^4} - (m_r \omega_n^2 - k) \Phi_n(x) = 0$$

Puisque $\Phi_n(x)$ satisfait à l'équation (IV.19 a) pour le cas de vibration libre, nous avons:

$$\Phi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Et une deuxième équation de la forme :

$$m_r \sum_n \omega_n^2 \Phi_n(x) q_n(t) + c \sum_n \Phi_n(x) \frac{\partial q(t)}{\partial t} + m_r \sum_n \Phi_n(x) \frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} = Q \delta(x - vt) \quad (\text{IV.41})$$

Où ' $q_n(t)$ ' est la fonction de temps qui à déterminer.

Il est utile d'utiliser la condition d'orthogonalité, en multipliant l'équation ci-dessus par Φ_m , et en intégrant le résultat de 0 à L, nous avons l'équation suivante:

$$\frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} + \frac{c}{m_r} \frac{\partial q(t)}{\partial t} + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{2Q}{m_r l} \Phi_m \quad (\text{IV.42})$$

Où:

- $\Phi_m = \sin \frac{m\pi x}{l}$

Sachant que $x = vt$, nous pouvons écrire alors $\Phi_m = \sin \frac{m\pi v}{l} t$ et:

- $\Phi_m = \sin \Omega_n t$, avec $\Omega_n = \frac{m\pi v}{l}$ Est la pulsation de l'excitation

La solution de l'équation (IV.42) est obtenue en utilisant l'intégrale de convolution, nous admettons comme hypothèse la charge et la réponse de la poutre sont en phase.

- **Intégrale de convolution (Duhamel)**

En théorie des vibrations, l'intégrale de Duhamel est une façon de calculer la réponse de systèmes linéaires des structures sous excitation dans le temps, il est sous la forme suivante :

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t \mathbf{p}(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau$$

L'application de cette intégrale est comme suite :

$$q_n(t) = \frac{2Q}{m_r l \omega_d} \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \sin \Omega \tau \sin \omega_d(t-\tau) d\tau \quad (IV.43)$$

Avec ω_n , β et ω_d ont été évalué précédemment en vibration libre équation (IV.25).

Après d'évaluer l'intégrale ci-dessus (équation (IV.43)) sous 'Maple' nous avons :

$$q_n(t) = \frac{2Q}{m_r l} \frac{1}{(\omega_d^2 + \beta^2)^2 + 2(\beta^2 - \omega_d^2)\Omega_n^2 + \Omega_n^4} \left\{ e^{-\beta t} \left[2\beta\Omega_n \cos \omega_d t + \frac{\Omega_n}{\omega_d} (\beta^2 + \Omega_n^2 - \omega_d^2) \sin \omega_d t \right] - \right. \\ \left. 2\beta\Omega_n \cos \Omega_n t + \beta^2 + \omega_d^2 - \Omega_n^2 \sin \Omega_n t \right\} \quad (IV.44)$$

La réponse sous l'effet de la charge mobile de la poutre de longueur élastique :

$$u(x, t) = \sum_n \sin \frac{n\pi x}{l} * \frac{2Q}{m_r l} \frac{1}{(\omega_d^2 + \beta^2)^2 + 2(\beta^2 - \omega_d^2)\Omega_n^2 + \Omega_n^4} \left\{ e^{-\beta t} \left[2\beta\Omega_n \cos \omega_d t + \frac{\Omega_n}{\omega_d} (\beta^2 + \Omega_n^2 - \right. \right. \\ \left. \left. \omega_d^2 \sin \omega_d t - 2\beta\Omega_n \cos \Omega_n t + \beta^2 + \omega_d^2 - \Omega_n^2 \sin \Omega_n t \right] \right\} \quad (IV.45)$$

Une fois la réponse est obtenue nous déterminons le moment de flexion :

$$M(x, t) = EI \frac{d^2 u(x, t)}{dx^2} = -EI \left(\frac{n\pi x}{l} \right)^2 u(x, t) \quad (IV.46)$$

Et l'équation de l'effort tranchant :

$$V(x, t) = EI \frac{d^3 u(x, t)}{dx^3} = -EI \left(\frac{n\pi x}{l} \right)^3 \sum_n \cos \frac{n\pi x}{l} \cdot q_n(t) \quad (IV.47)$$

- IV.4.2.2 Intervalle de temps : $t \geq \frac{2L}{v} = t_0$

Pour un temps $t \geq \frac{2L}{v}$, le point considéré est en vibration libre

$$u(x, t) = \sum_n e^{-\beta(t-t_0)} [A_n \sin \omega_d(t-t_0) + B_n \cos \omega_d(t-t_0)] \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (IV.48)$$

Où : $x \geq 2L$

Les constants A_n et B_n sont calculés à partir des conditions initiales à t_0 , nous estimons La déformation et la vitesse de déformation, données par les équations (IV.45) et (IV.48) doivent être égaux.

$$B_n = q_n(t_0)$$

$$A_n = \frac{\frac{\partial q(t_0)}{\partial t} + \beta q_n(t_0)}{\omega_n} \quad (\text{IV.49 a, b})$$

D'une manière similaire nous pouvons déterminer le moment de flexion et efforts tranchants en vibration libre :

- Moment de flexion

$$M(x, t) = EI \frac{d^2 u(x, t)}{dx^2} = -EI \left(\frac{n\pi x}{l} \right)^2 u(x, t) \quad (\text{IV.50})$$

- Efforts tranchants

$$V(x, t) = EI \frac{d^3 u(x, t)}{dx^3} = -EI \left(\frac{n\pi x}{l} \right)^3 \sum_n \cos \frac{n\pi x}{l} \cdot q_n(t) \quad (\text{IV.51})$$

IV.5. Analyse numérique et discussion des résultats

Dans l'optique d'illustrer les résultats numériques nous avons identifié les paramètres les plus influents sur la réponse dynamique de la poutre rail à savoir la vitesse de la charge mobile, l'amortissement ainsi que la rigidité du sol.

IV.5.1. L'effet de la vitesse de la source mobile

Nous montrons l'effet de la vitesse en fonction de la vitesse critique v_{cr} fig.11. Cette vitesse est obtenue lorsque la longueur d'onde devient infinie.

Fryba propose l'expression de vitesse critique (équation.52) d'une structure poutre sur

$$\text{des supports élastique } c_{cr} = 2 * \alpha \left(\frac{EI}{m} \right)^{1/2} \quad (\text{VI.52})$$

L'analyse comparative des résultats issue de notre modèle (poutre infinie translatée en poutre finie) fig. IV.11, donne des résultats similaire aux résultats de Fryba pour des rapports des vitesses jusqu'à 0.75, au-delà de cette valeur le modèle de Fryba donne une réponse plus amplifiée que le modèle que nous proposons. Nous constatons aussi un effet de soulèvement plus important dans les deux moitiés de la poutre concernant notre modèle.

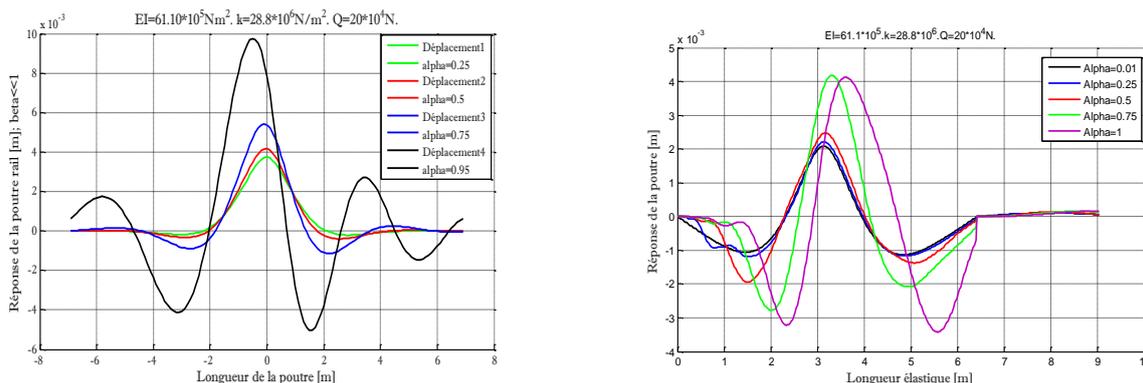


Fig .IV.11. L’effet du rapport de la vitesse par : le modèle de Fryba et le modèle analytique avec longueur élastique.

IV.5.2. L’effet de la rigidité du sol

La réponse de la poutre est fortement influencée par la rigidité du sol, ainsi trois types de rigidité du sol ont été retenus pour notre analyse.

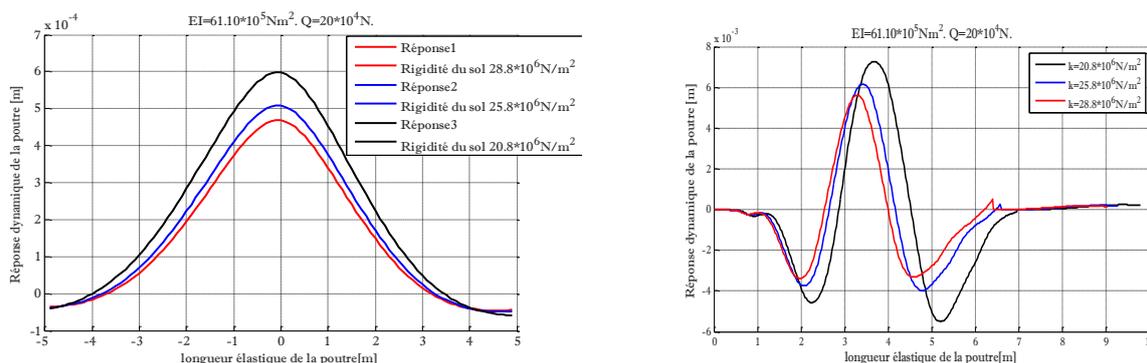


Fig.12. l’effet de la rigidité du sol : le modèle de Fryba et le modèle analytique avec longueur élastique.

Nous distinguons qu’une rigidité plus élevée génère une diminution de la réponse avec une translation de la position de l’amplitude maximale fig.12, ainsi qu’un effet de soulèvement du sol dans le modèle basé sur la longueur de transfert.

IV.5.3. L’effet de l’amortissement

L’analyse de la réponse de la poutre est effectuée vis-à-vis le rapport d’amortissement.

$$\beta = \left(\frac{m_r}{k_v}\right)^{1/2} \omega_n$$

Nous remarquons une similitude en matière d'amplitude de la réponse, entre le modèle basé sur la longueur élastique et le modèle de Fryba. Dans le modèle développé une évolution de la réponse dynamique fonction du facteur d'amortissement fig.IV.13 est remarquée. Le rapport d'amortissement n'a pas d'effet significatif sur la réponse dynamique de la poutre rail infinie.

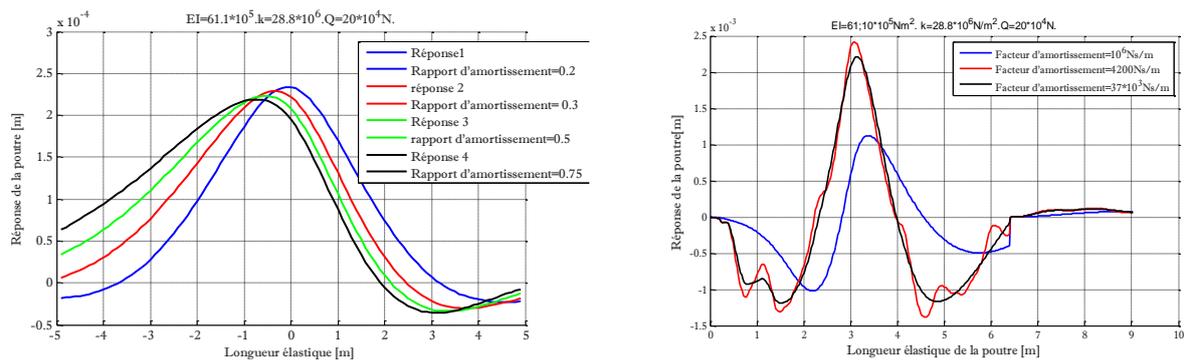


Fig.IV.13. L'effet de l'amortissement: le modèle de Fryba et le modèle analytique avec longueur élastique.

IV.6. Conclusion

La réponse dynamique d'une structure rail infini sur appuis élastiques sous l'influence d'une source mobile est déterminée dans cette étude, par un modèle simple et efficace basé sur la longueur de transfert ou élastique déterminée à partir de l'analyse statique. Cette longueur nous a permis de réaliser le passage d'une poutre infinie vers une poutre de longueur finie. La poutre rail infinie est modélisée par la poutre d'Euler en tant qu'élément finis, les supports de la poutre sont idéalisés par le modèle de Winkler. La source mobile est simulée dans ce cas par une force constante. La réponse de la poutre est déterminée par l'intégrale de convolution (Duhamel) et la méthode de superposition des modes propres de vibration, dans des conditions de chargement libre et forcées, amorties et non amortie. Une analyse des paramètres les plus influents sur la réponse dynamique telle que les vitesses du convoi, ainsi que la nature du sol est réalisée. Ce travail a été confronté au modèle de Fryba et les résultats sont satisfaisants.

En premier lieu une description des différents constituants de la voie ferrée, ainsi que leurs rôles dans le comportement de la structure, était nécessaire afin de pouvoir les simuler.

La théorie de la poutre d'Euler-Bernoulli est appliquée pour modéliser le rail, et les supports sont supposés être du modèle de Winkler.

Deux méthodes différentes d'analyse sont utilisées, le Modèle de fryba dans laquelle la longueur de la poutre est considérée infinie sans prendre en compte la longueur élastique, pour avoir la réponse de la poutre ainsi que le moment fléchissant et l'effort tranchant, l'intégrale de la transformée de Fourier et transformé de Fourier inverse est appliquée, en se basant sur le théorème des résidus de Cauchy. Une analyse paramétrique est réalisée suivant la vitesse de l'excitation et l'amortissement, ainsi que la rigidité des fondations et la rigidité du rail.

Cette étude montre que pour des vitesses de l'excitation mobile inférieure à la vitesse de propagation d'onde dans le sol, la déviation dynamique et les réponses de moment de flexion de la poutre sont symétriques par rapport à l'emplacement du déplacement. La déformation maximale et le pic du moment de flexion sont sous le point d'application de la charge. Dans les cas de faibles vitesses, la réponse de la poutre augmente légèrement avec l'augmentation de la vitesse, et les réponses, moment fléchissant ainsi que les forces de cisaillement se rapprocher de plus en plus de celles du cas statique que la vitesse est diminuée.

En outre pour des vitesses supercritiques de la charge, la déflexion significative se produit derrière la charge alors que le moment de flexion et de la force de cisaillement sont plus élevés avant la charge.

Les valeurs maximales des ondes avant et arrière l'excitation, diminuent avec l'augmentation de l'effet d'amortissement. La longueur d'onde arrière est toujours plus élevée que les ondes avant.

L'analyse effectuée pour étudier l'effet de différents paramètres tels que la rigidité de la fondation et la rigidité du rail, a montré que la déflexion maximale et le moment de flexion de la poutre augmente de manière significative avec la diminution du module de cisaillement et la rigidité de la fondation pour une vitesse constante, la même

constatation concernant la rigidité de la structure. En effet nous constatant que le tassement le plus important est pour le sol dont les caractéristique mécanique sont les plus faible.

La convergence de toutes les courbes après une certaine distance de la source mobile.

La deuxième méthode d'analyse utilisée est basée sur la détermination de la longueur élastique, à partir du cas de chargement quasi-statique de la poutre rail infinie. Cette longueur est une fonction du couplage de la poutre rail ainsi que de la rigidité du sol, qui nous permet le passage de la poutre rail infinie vers un modèle de poutre finie idéalisée par le modèle d'Euler Bernoulli, ayant la dimension de cette longueur de transfert.

Le sol est représenté par le modèle de Winkler. La réponse de la structure couplée au sol est obtenue en résolvant analytiquement l'équation différentielle du quatrième ordre régissant le mouvement. La résolution est obtenue en utilisant la méthode de superposition modale et l'intégrale de convolution. Les résultats obtenus ont fait l'objet d'une analyse numérique. Une analyse paramétrique est réalisée pour observer la réponse de la poutre sous l'effet de la rigidité du sol et la rigidité du rail ainsi que l'effet de la vitesse de l'excitation par apports à la vitesse de propagation d'onde dans le sol.

Ce mémoire pose plusieurs questions quant à la continuité du travail selon les perspectives suivantes :

- Modèle de la poutre de Timoshenko qui exécute tout les modes vibratoires,
- Analyse dynamique avec développement d'un modèle de comportement du ballast (étude tridimensionnelle par la théorie des contacts).
- Prendre en considération que la charge harmonique mécanique avec plusieurs degrés de liberté.
- L'excitation est une masse mobile simulant la roue.
- Sol stratifié avec analyse de la propagation d'onde à différentes interfaces.
- Idéaliser le contact roue force mobile par la théorie d'Hertz.
- Introduction des irrégularités de la poutre rail dans le modèle. Ces irrégularités. génèrent le phénomène de vibration en l'amplifiant.
- Introduction dans le modèle des effets transversaux.

ANNEXES

ANNEXE A

✚ La distribution de Dirac

La distribution de Dirac peut être exprimée comme la dérivée de la répartition de la fonction de Heaviside $H(x - x_0)$ qui est décrit ci-dessous

$$H(x - x_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq x_0 \\ 0 & \text{si } x < x_0 \end{cases}$$

Prenant la dérivée de la fonction de Heaviside, la distribution de Dirac peut être donnée comme suite :

$$\delta(x) = \frac{dH(x)}{dx}$$

C'est une fonction généralisée exprime la charge concentrée comme suit :

$$p(x, t) = \delta(x)P$$

La règle opérationnelle fondamentale est, pour mémoire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)$$

La fonction de Dirac $\delta(x)$ peut être considéré comme une unité à la force concentrée agissant au point $x = 0$.

En supposant $f(x) = 1 \forall x$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)dx = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_0 \\ 0 & \text{si } x \neq x_0 \end{cases}$$

Ce qui est illustré dans la fig. (A.1) :

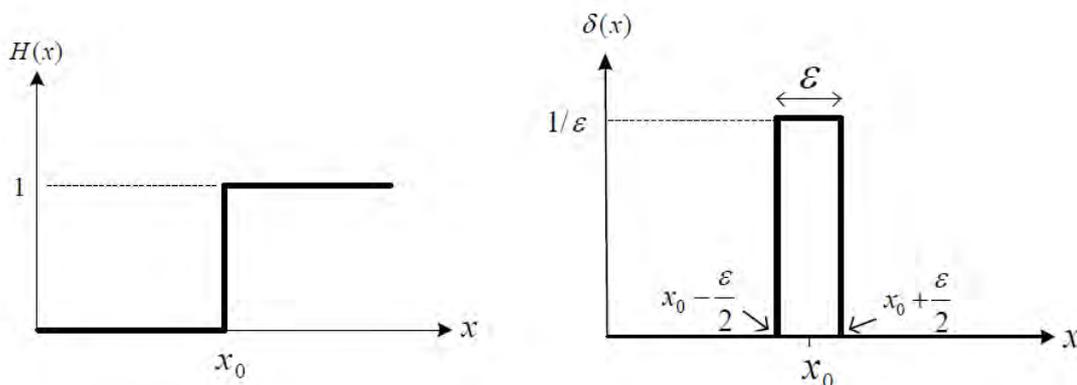


Fig. (A.1) : la fonction de Heaviside et la fonction de Dirac

ANNEXE B

B.1. L'intégrale de La transformation de Fourier

La transformation de Fourier \mathcal{F} associe à une fonction intégrable, définie sur l'ensemble des nombres réels ou celui des nombres complexes, une fonction appelée transformée de Fourier dont la variable indépendante peut s'interpréter en physique comme la fréquence ou pulsation.

Si f est une fonction intégrable sur \mathbb{R} , sa **transformée de Fourier** est la fonction $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ donnée par la formule :

$$\mathcal{F}(f) : \xi \mapsto \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

B.2. La transformée de Fourier inverse

Si la transformée de Fourier de f , notée \hat{f} , est elle-même une fonction intégrable, la formule dite de transformation de Fourier inverse, opération notée \mathcal{F}^{-1} , et appliquée à \hat{f} , permet (sous conditions appropriées) de retrouver f à partir des données fréquentielles :

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{+i\xi x} d\xi \quad \Leftrightarrow \quad \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

Cette opération de transformation de Fourier inverse a des propriétés analogues à la transformation directe, puisque seuls changent le coefficient multiplicatif et le $-i$ devenu i .

Dans le cas des définitions alternatives, la transformation de Fourier inverse devient :

- **Définition en fréquence :**

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{+i2\pi\nu t} d\nu \quad \Leftrightarrow \quad \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt.$$

- **Définition en pulsation :**

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{+i\omega t} d\omega \quad \Leftrightarrow \quad \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

B.2. Théorème des résidus

En analyse complexe est un outil puissant pour évaluer des intégrales curvilignes de fonctions holomorphes sur des courbes fermées; il peut aussi bien être utilisé pour calculer des intégrales de fonctions réelles ainsi que la somme de certaines séries.

✚ Théorème

Soient f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω contenant un compact régulier K , sauf en un nombre fini des points $z_1 \dots z_n$, alors :

$$\int_{\partial K} f(z) = 2i\pi \sum_{k=1}^n \text{res}(f, z_k)$$

- **B.2.1. Calcul pratique du résidu**
- **B.2.1.1. Cas d'un pôle simple**

La formule suivante est une généralisation d'une formule fréquemment utilisée pour le calcul des coefficients de la décomposition en simples d'une fraction rationnelle.

Si z_0 est un pôle simple de f , alors :

$$\text{res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

- **B.2.1.2. Cas d'un pôle multiple**

En supposant que ' z_0 ' est un pôle multiple d'ordre m ($m \geq 2$) de la fonction ' f '.

A partir du développement de Laurent de f , montrer que l'on peut écrire

$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$; ' g ' est une fonction holomorphe qui est en fait la somme d'une série entière.

En pratique :

- Faire un développement limité à l'ordre $(m-1)$ de $h^m f(z_0 + h)$, le résidu de f en z_0 étant alors le coefficient de h^{m-1} .
- Dériver $(m-1)$ fois la fonction $g : z \rightarrow (z - z_0)^m f(z)$; et c'est alors la valeur en z_0 :

$$\text{res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)) |_{z = z_0}$$

B.2.2. Application au calcul d'intégrales 'Intégrale de type $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx$ '

Dans cette expression, nous supposons que ' F ' est une fonction méromorphe, n'ayant pas de pôle réel (de sorte que $x \rightarrow F(x)$ est continue sur \mathbb{R}) et n'ayant qu'un nombre fini de pôles complexes.

Nous supposons de plus que l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx$ est convergente.

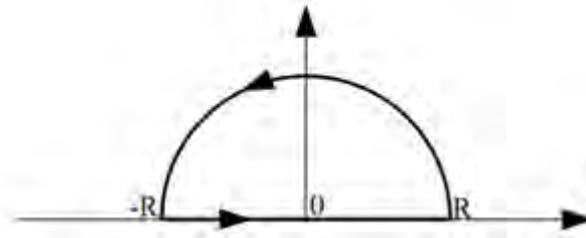


Fig. B.1. Contour d'intégration pour $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx$

Pour calculer 'I', nous intégrons la fonction 'F' complexe sur le bord ' $\widetilde{\gamma R}$ ' d'un demi-disc de centre 'O', de rayon 'R' (destiné a tendre vers $+\infty$), situé dans le demi-plan supérieur ou inférieur (au choix), comme le montre la figure B.1

Pour 'R' assez grand, la fonction 'F' n'a pas de pôle sur ' $\widetilde{\gamma R}$ ' et nous pouvons appliquer la formule des résidus :

Cette intégrale se décompose en l'intégrale de 'F' sur le demi-cercle ' γR ' et l'intégrale de 'F' sur le segment $[-R, +R]$.

$$\int_{\widetilde{\gamma R}} F(z)dz = \sum_{\text{pôle de } f} \text{res}(f, \text{pôle}).$$

Lorsque R tend vers $+\infty$, cette second intégrale tend vers l'intégrale cherchée, et il reste à prouver que la première intégrale tend vers '0' (lemme de majoration par exemple)

B.2.3. Application du théorème dans la méthode d'analyse de Fryba

Soit l'équation à dérivées partielles fonction de la variable adimensionnelle 's' (**chap.III**):

$$EI \frac{\partial^4 u(s)}{\partial s^4} + 4\alpha^2 \frac{\partial^2 u(s)}{\partial s^2} - 8\alpha\beta \frac{\partial u(s)}{\partial s} + 4u(s) = 8\delta(s) \quad \text{(B.1)}$$

Nous appliquons la technique de la transformées de Fourier pour avoir La solution de cette équation :

$$U(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(s)e^{-iqs} ds; \quad \text{(B.2)}$$

Où : '**q**' est la variable au plant complexe.

Introduisant l'intégrale de la **transformée de Fourier** dans l'équation différentielle **(B.1)** :

$$EI(iq)^4 U(q) + 4\alpha^2 (iq)^2 U(s) - 8\alpha\beta (iq)U(s) + 4U(s) = 8$$

Ou :

$$U(q) * (EI(q)^4 - 4\alpha^2(iq)^2 - 8\alpha\beta(iq) + 4) = 8$$

$$U(q) = \frac{8}{EI(q)^4 - 4\alpha^2(q)^2 - 8\alpha\beta(iq) + 4} \quad (\text{B.3})$$

Pour avoir la solution dans le domaine temporelle, nous effectuons **la transformé de Fourier inverse**:

$$u(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(q)e^{isq} dq \quad (\text{B.4})$$

Substituant $U(q)$ par sa valeur trouvée par l'intégrale de la **transformée de Fourier** dans l'équation **(B.4)** :

$$u(s) = \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{isq}}{q^4 - 4q^2\alpha^2 - i8\alpha\beta q + 4} dq \quad (\text{B.5})$$

- **Calcul des pôles de la variable complexe**

Les pôles de la fonction $u(s)$ sont déterminés par les racines du dénominateur $Q(q)$:

$$Q(q) = q^4 - 4q^2\alpha^2 - i8\alpha\beta q + 4 = (q - A_1)(q - A_2)(q - A_3)(q - A_4)$$

Nous supposons :

$$A_1 = a_1 + ib \quad A_2 = -a_1 + ib$$

$$A_3 = a_2 - ib \quad A_4 = -a_2 - ib \quad (\text{B.6})$$

Nous utilisons Maple pour la substitution des formules de ' **A_1, A_2, A_3 et A_4** ' dans l'équation de $Q(q)$ et avoir les solutions pour :

$$2b^2 - a_1^2 - a_2^2 = -4\alpha^2$$

$$2bi(a_2^2 - a_1^2) = -8\alpha\beta i$$

$$(a_1^2 + b^2)(a_2^2 + b^2) = 4$$

Nous avons les coordonnées des pôles :

$$a_1^2 = 2\alpha^2 + b^2 + 2\alpha\beta/b \quad (\text{B.7})$$

$$a_2^2 = 2\alpha^2 + b^2 - 2\alpha\beta/b \quad (\text{B.8})$$

$$b^6 + 2\alpha^2 b^4 + (\alpha^2 - 1)b^2 - \alpha^2 \beta^2 = 0 \quad (\text{B.9})$$

✚ Réalisation de l'intégrale de la transformée de Fourier

accordant au théorème de résidu de Cauchy, l'intégrale dans la direction des aiguilles d'une montre autour du cercle fermé, consistant les segments $[-R, +R]$, ainsi que pour le demi-cercle C_R à la limite $R = \pm\infty$ l'intégrale est (B.5) :

$$\oint \frac{e^{isq}}{Q(q)} dq = \lim_{R \rightarrow \pm\infty} \left[\int_{-R}^{+R} \frac{e^{isq}}{Q(q)} dq + \int_{C_R} \frac{e^{isq}}{Q(q)} dq \right] = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{res } F(q)|_{q=A_j} \quad (\text{B.10})$$

Où : C_R est le demi-cercle qui passe autour de tous les pôles dans le demi-plan et $\text{res}F(q)|_{q=A_j}$ est le résidu de la fonction $F(q)$ dans le pôle A_j ;

- **Théorème de comparaison**

Pour avoir la limite de l'intégral $\int_{C_R} \frac{e^{isq}}{Q(q)} dq$, L'application du théorème de comparaison est utilisé :

La variable complexe q peut être écrite $q = \xi + i\eta$

Où : le signe (+) pour le $s > 0$ (l'intégration dans le demi-cercle supérieur, et le signe (-) pour $s < 0$ (l'intégration dans le demi-cercle inférieur) :

$$\text{Pour } s > 0, |e^{isq}| = |e^{is(\xi+i\eta)}| = |e^{-s\eta+is\xi}| = e^{-s\eta} \leq 1; \eta > 0;$$

$$\text{Pour } s < 0, |e^{isq}| = |e^{-i(-s)q}| = |e^{-i(-s)(i\eta+\xi)}| = |e^{(-s)\eta-i(s)\xi}| = e^{(-s)\eta} \leq 1; \eta < 0;$$

$Q(q)$: Est un polynôme de 4ème degré, généralement de la forme : $Q(q) = q^n + a_1 q^{n-1} + \dots + a_n, n > 1$ c'est pourquoi $|Q(q)| \geq R^n$

$$F(q) = \left| \frac{e^{isq}}{Q(q)} \right| = \frac{|e^{isq}|}{|Q(q)|} \leq \frac{1}{R^n}$$

- **Théorème de Jordan :**

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_R} F(q) dq \right| \leq \frac{1}{R^n} \pi R = \frac{\pi}{R^{n-1}} = 0$$

Comme $\left[\int_{C_R} \frac{e^{isq}}{Q(q)} dq = 0 \right]$:

$$\int_{+\infty}^{-\infty} F(q) dq = \mp 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{res } F(q)|_{q=A_j}$$

Les solutions sont obtenues par la réalisation de l'intégrale :

$$u(s) = \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(q) dq$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(q) dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{isq}}{Q(q)} dq = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^R \frac{e^{isq}}{Q(q)} dq = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{res } F(q)|_{q=A_j}$$

Aves 'R' est rayon du demi-cercle C_R

- Le résidu de la fonction $F(q)$ pour un pôle A_j de premier degré est donné par la relation :

$$\text{res} F(q)|_{q=A_j} = (q - A_j) F(q)|_{q=A_j}$$

$$\text{res} F(q)|_{q=A_j} = \frac{e^{isA_2}}{(A_2 - A_1)(A_2 - A_3)(A_2 - A_4)}$$

- Pour un pôle de deuxième degré (racine double) par exemple: $Q(q) = (q - A_j)^2 (q - A_1)(q - A_3)$ le résidu est donné :

$$\text{res} F(q)|_{q=A_j} = \frac{e^{isA_j}}{(A_j - A_2)(A_j - A_2)} \left[i s - \frac{2A_j - A_1 - A_2}{(A_j - A_2)(A_j - A_2)} \right]$$

Exemple :

$$\text{res} F(q)|_{q=A_j} = \frac{e^{isA_2}}{(A_2 - A_1)(A_2 - A_3)(A_2 - A_4)}$$

$$\text{res} F(q)|_{q=A_j}$$

$$= \frac{e^{is(-a_1 + ib)}}{((-a_1 + ib) - (a_1 + ib))((-a_1 + ib) - (a_2 - ib))((-a_1 + ib) - (-a_2 - ib))}$$

ANNEXE C

C.1. Vitesse critique pour structure sous charge mobile

La vitesse critique est la vitesse pour laquelle les trains entre en résonance avec les ondes qui se propagent dans la structure ferroviaire, et donc produisent des vibrations excessives au sol.

C'est aussi la vitesse qui provoque des vibrations considérablement amplifiées que se soit pour les structures ou le sol.

La solution de l'équation Winkler peut également être utilisée pour calculer la vitesse critique v_{cr} qui est la vitesse à laquelle pour un cas non amortie, le modèle prédit une réponse infinie, ou la résonance ou la longueur de l'onde devienne infinie.

- **Vitesse critique pour poutre sur appuis simple**

D'après l'analyse de **fryba** concernant la vibration d'une poutre d'un seul travers sur appuis simple nous pouvons avoir une formule de la vitesse critique :

- la pulsation propre : $\omega_n = \sqrt{n^4 \pi^4 EI / ml^4}$ (C.3)

- la fréquence propre du système : $f_n = \frac{\omega_n}{2 * \pi} \longrightarrow f_n = \frac{n^2 \pi}{2 * l^2} * \left(\frac{EI}{m}\right)^{1/2}$ (C.4)

- Le rapport d'amortissement : $\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{c}{2l f_n}$ (C.5)

Avec : $\omega = \frac{\pi * c}{l}$

Après de substituer (V.4) en (V.5) et un nous avons obtenue la vitesse critique d'une poutre sur appuis simple :

$$c_{cr} = \frac{\pi}{n^2 * l} \left(\frac{EI}{m}\right)^{1/2} \quad (C.6)$$

Pour le premier mode n=1 nous pouvons avoir la vitesse critique maximum :

$$c_{cr} = \frac{\pi}{l} \left(\frac{EI}{m}\right)^{1/2} \quad (C.7)$$

- **Vitesse critique pour poutre sur appuis élastique**

La formule de Fryba d'une vitesse critique de la structure sur appuis élastique est :

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2 * \lambda} * \left(\frac{m}{EI}\right)^{1/2} \longrightarrow c_{cr} = 2 * \lambda \left(\frac{EI}{m}\right)^{1/2} \quad (C.8)$$

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{k_v}{4EI}} \quad (\text{C.9})$$

C.2. L'Amortissement critique

Amortissement strictement suffisant à un oscillateur déporté de sa position d'équilibre qu'il revienne au repos sans effectuer d'oscillation.

Bibliographie

[1] Thomas Gmûr ; Dynamique des structure « Analyse modale numérique », presses polytechniques et universitaires romandes, CH-1015 Lausanne, **1997**.

[2] Marc Maldonado; Vibrations dues au passage d'un tramway : Mesures expérimentales et simulations numériques. Thèse de doctorat diplôme délivré par l'école centrale de Nantes Spécialité : Génie Mécanique. Directeur de thèse : Donatien Le Houédec Laboratoire : Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique, École Centrale de Nantes N_ ED 0498-04, **2008**.

[3] Vu Hieu NGUYEN ; Comportement dynamique de structures non-linéaires soumises à des charges mobiles. L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES Spécialité : Structures et Matériaux, **2002**.

[4] FREDERIC ROSQUOËT ; PIEUX SOUS CHARGE LATÉRALE CYCLIQUE, Thèse de DOCTORAT Diplôme délivré conjointement par L'École Centrale de Nantes et l'Université de Nantes Spécialité : MECANIQUE DES SOLS, **2004**.

[5] Vitaly Voloshin **2010**; Moving load on elastic structures: passage through the wave speed barriers ; School of Information Systems, Computing and Mathematics Brunel University.

[6] Fahim Javid ; Vibration Suppression of Straight and Curved Beams Traversed by Moving Loads ; A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Applied Science in Mechanical

Engineering Faculty of Engineering and Applied Science University of Ontario Institute of Technology, **2011**.

[7] AD.Kerr, Pasternak, E. Winkler élastique et modèles de fondations visco-élastiques, Journal of Applied Mechanics, ASME, 31 (**1964**), 491-498.

[8] Y.YESILCE; Dynamic Analysis of Foundation Beams Subjected 10. Transverse Loading on Winkler Soil: D.P.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Sayı Mayıs **2006**.

[9] S. Parvanova, University of Architecture, Civil Engineering and Geodesy – Sofia, **2011**.

[10] K. Terzaghi, la mécanique théorique des sols, 14e éd., John Wiley & Sons, Inc., New York, **1966**.

[11] Gerardin,M, et Rixen,D ; application des vibrations , application à la dynamique des structures 2^{ème} edition ; Masson paris, **1996**.

[12] U .S Gubta; R.lal and Rutu Sagar ; Effect of elastic foundation on the axisymmetric vibrations of polar orthotropic Mindlin circular plate **1994**.

[13] Gettiche Abdelheq;Analyse du comportement mécanique dune structure ferroviaire ; Université de Jijel ; Faculté des sciences et de technologie ; Département de génie civil (École doctorale université de Skikda), **2010**.

[14] AFNOR. Granulats pour ballast de voies ferrées Août **2003**.

[15] Hamet. J.-F. Railway noise: Use of Timoshenko model in rail vibration studies. Acta Acustica, **1999**.

[16] M.E. Guellil a, M. Tahar Abbes b ; Dynamic Equilibrium Equations Need Not Be The Exact Free-Vibration Mode Shapes ; modélisation du comportement des plaque sur soles élastique par la méthode des éléments finies.

[17] Davide Thompson; Railway noise and vibration mechanisms , modelling and means of control **2009**. Elsevier Linacre House, Jordon Hill, Oxford OX2 8DP, UK. Radarweg 29, PO Box 211, 1000 AE Amsterdam, The Netherlands First edition **2009**.

[18] N. Rémy-Martin, D. Royer, N. Trappler ; Vibrations de flexion des poutres **2002**.

[19] M. R. Pfaffinger and J.Dual; Higher vibration modes in railway tracks at their cut-off frequencies .

[20] Emile YOUSSEF ; Etude Théorique et Expérimentale du flambement des pieux **1994**.

[21] Jean-claude pascal, Vibration et acoustique (2): école national supérieure d'ingénieur de Mans, université de Maine(ENSIM).

[22] L. Frýba **1999**, Infinite Beam on an Elastic Foundation Subjected to a moving Load (in Czech.), Aplikace matematiky, Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague, Czech Republic.

[23] Sylvain Drapier ; Dynamique des Solides et des Structures.

[24] O. Chupin, J.-M. Piau; Modélisation de la réponse dynamique d'une structure ferroviaire multicouche sous chargement roulant . a.Université Nantes-Angers-Le Mans, IFSTTAR, Centre de Nantes, Route de Bouaye, CS4, 44344 Bouguenais cedex, France.

[25] Vinicius Alves Fernandes; Fernando Lopez-Caballero ; a, Sofia Costa d'Aguiar **2013**; Probabilistic analysis of numerical simulated railway track global stiffness. Computers and Geotechnics 55 (2014) 267–276.

[26] A. Guerrero & E. Bongini | Colloque CIDB Vibrations dans les bâtiments **2011**.

[27] Nathalie Guerin; Approche expérimentale et numérique du comportement du ballast des voies ferrées; L'Ecole Nationale Des Ponts et Chaussées; Structures et Matériaux, **1996**.

[28] Timoshenko; résistance des matériaux, Tomell, DUNOD Paris 1968.

[29] M. Olsson; on the fundamental moving load problem : Division of Structural Mechanics, Lund University, Lund, Sweden, **1990**.

[30] Virginie.Delvavaud **2011**; modélisation temporelle de l'interaction sol-rail pour une application au bruit de roulement ferroviaire ; Thèse de doctorat de l'Ensta ParisTech Spécialité : Mécanique.

[31] Georges Kouroussis ; Modélisation des effets vibratoires du trafic ferroviaire sur l'environnement ; faculté potechnique de MONS Service de Mécanique Roiennelle, Dynamique et Vibrations ; Boulevard Dolez 31 IB-7000MONS Belgium, **2009**.

[32] Guillaume Coquel; Acoustique Propagation et réémission du bruit solidien ; Thèse présentée en vue de l'obtention du titre de DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE PARIS-EST Discipline : ACOUSTIQUE UNIVERSITE DE PARIS-EST - ECOLE DOCTORALE MODES, **2008**.

[33] D.Thambiratnam ; dynamic analysis of beams on an elastic foundation subjected the moving loads; Journal of Sound and Vibration 198(2) 149-169; School of Civil Engineering\ Queensland University of Technology\ G[P[O[Box 1323\Brisbane\ Queensland 3990\ Australia, **1996**.

[34] S.Haw Ju et H.Ta Lin ; Analysis of train-induced vibrations and vibration reduction schemes above and below critical Rayleigh speeds by finite element method. Department of Civil Engineering, National Cheng-Kung University, 1 Ta-Hsueh Road, Tainan 70101, Taiwan, ROC, **2004**.

[35] L. Ricci, V.H Nguyen, K.Sab, D.Duhamel et L.Scmitt. Computers and Structures 83 (2005) 2282–2292, **2005**.

[36] L. Andersen; S.R.K. Nielsen, S. Krenk **2006**; numerical methods for analysis of structure and ground vibration from moving loads. Computers and Structures 85 (2007) 43–58.

[37] Faur baldrik ; Caractérisation du rayonnement acoustique d'un rail à l'aide d'un réseau de microphones **2011**. THÈSE Pour obtenir le grade de DOCTEUR DE l'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE Spécialité : Signal, Image, Parole, Télécoms ; Thèse dirigée par Christine SERVIÈRE, co-encadrée par Olivier CHIELLO et Marie-Agnès PALLAS, thèse préparée au sein des Laboratoires Laboratoire Transports et Environnement de l'IFSTTAR et Grenoble Images Parole Signal Automatique (GIPSA-Lab), dans l'école doctorale Électronique Électrotechnique Automatique et Traitement du Signal, **2004**.

[38] Pedro. Alves. Costa;Influence of soil non linearity on the dynamic reponses of high speed rail way track. Faculty of Engineering of the University

of Porto, Rua Dr. Roberto Frias, 4200-465 Porto, Portugal
b Geo Risk & Vibration Scandinavia AB, Solna Torg 13, 3tr-17145 Solna, Sweden, **2009**.

[39] Dimitrova, J.N. Varandas; critical velocity of foundation stiffness: Application to high speed trains **2008**. UNIC, Department of Civil Engineering, New University of Lisbon, Monte da Caparica, Portugal.

[40] Dimitrova; A general procedure of the dynamic analysis of finite and infinite beams on a piece-wise homogenous foundation under moving loads. UNIC, Department of Civil Engineering, Faculdade de Ciências e Tecnologia, New University of Lisbon, Monte da Caparica, 2829-516 Caparica, Portugal, **2010**.

[41] Huajian Ouyang; moving load dynamic; A tutorial (with a brief overview) **2010**. School of engineering, University of Liverpool, The Quadrangle, Liverpool L69 3GH, UK.

[42] Semblat et al; Vibration induites dans les sols par le trafic ferroviaire expérimentation, modélisation et isolation ; Revue Française de Géotechnique, 134-135, pp.23-36, 2011 J-F Semblat et al.

[43] a. Hai Hang ; b. Steven Chrismer Discrete element modeling of ballast settlement under trains moving at “Critical Speeds”; a. Penn State University, Altoona, PA 16601, United States
b. Track Geometry and Roadbed Improvement, AMTRAK, United States.
journal homepage: www.elsevier.com/locate/conbuildmat, **2012**.

[44] Md. Rajib Ul Alam Uzzal; Analysis of a three-dimensional railway vehicle-track system and development of a smart wheelset; A thesis In the Department of Mechanical and Industrial Engineering Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy at Concordia University Montreal, Quebec, Canada, **2012**.

[45] Lecheheb Mostafa ; Modélisation analytique d'un rail sur appui continu : Analyse paramétrique ; Université Mentouri Constantine Faculté d'Ingénieur Département de Génie Civil, **2010**.

[46] Chiara Paerno ; Comportement du ballast sous l'action du bourrage et du trafic ferroviaire ; THÈSE de Docteurat NO 4697 ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE PRÉSENTÉE LE 4 JUIN À LA FACULTÉ ENVIRONNEMENT NATUREL, ARCHITECTURAL ET CONSTRUIT LABORATOIRE DES VOIES DE CIRCULATION PROGRAMME DOCTORAL EN STRUCTURES ; Suisse **2010**.

[47] O. K. Ogunbamike; Response of Timoshenko Beams on Winkler Foundation Subjected To Dynamic Load; INTERNATIONAL JOURNAL OF SCIENTIFIC & TECHNOLOGY RESEARCH VOLUME 1, ISSUE 8, SEPTEMBER 2012 ISSN 2277-8616, **2012**.

[48] P.M. Belotserkovskiy; Interaction between a railway track and uniformly moving tandem wheels; Department of Higher Mathematics, Moscow State University of Communications (MIIT), Obraztsov Street, 15, 127994 Moscow, Russia. Journal of Sound and Vibration 298 (**2006**) 855–876.

[49] L. Auersch **2007** ; The effect of critically moving loads on the vibrations of soft soils and isolated railway track; Federal Institute for Materials Research and Testing, D 12200 Berlin, Germany; Journal of Sound and Vibration 310 (2008) 587–607.

[50] Lei Shi (Corresponding author), Wen Liu & Chunyan Zhou (School of Sciences, Yanshan University; Qinhuangdao 066004, China); Xiangzhong Bai (School of Civil Engineering & Mechanics, Yanshan University Qinhuangdao

066004, China) **2009**; A Mathematic Model for Dynamic Transient Response of Electromagnetic Rail on Elastic Foundation; The project support by the National Nature Science Foundation of China under Grand NO.50875230.

[51] Roman Bogacz ; RESPONSE OF BEAM ON VISCO-ELASTIC FOUNDATION TO MOVING DISTRIBUTED LOAD. Cracow University of Technology and IPPT, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland; JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS 46, 4, pp. 763-775, Warsaw **2008**.