

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
INSTITUT DE GENIE CIVIL

N^o d'ordre :
Série :

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de **Magister**

En Génie Civil

ANALYSE DE LA REPONSE DYNAMIQUE
DES PLAQUES ORTHOTROPES PAR LA METHODE DES
ELEMENTS FINIS

Option : Matériaux et durabilité des constructions

Présenté par :

GOUDJIL FAYÇAL

Soutenu le : / / 2004

Devant le jury :

Président : Mr. A. BOUMKIK PROF. Université Mentouri Constantine

Examineurs:

Mr. H. HOUARI PROF. Université Mentouri Constantine

Mr. N. GUETTECHE C.C. Université Mentouri Constantine

Rapporteur : Mr. M. NAIMI M.C. Université Mentouri Constantine

ANNEE UNIVERSITAIRE 2003/2004

REMERCIEMENTS

Je dédie ce travail à l'âme de mon père, que dieu l'accueille dans son vaste paradis.

Monsieur le professeur BOUMKIK Ahmed m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury. Je tiens à lui exprimer ma plus profonde gratitude.

Que Monsieur NAIMI Mohamed, qui a accepté d'assurer la direction de ce mémoire, trouve ici tous mes remerciements. Son dévouement et ces encouragements furent pour moi un soutien très précieux.

Qu'il me soit aussi permis de remercier très chaleureusement Monsieur le Professeur HOUARI Hacène et Monsieur le docteur GUETTECHE Nouredine qui m'ont fait l'honneur de participer au jury.

Je tiens également à exprimer ma profonde reconnaissance à M SEMAÏ Professeur à l'université Mentouri de Constantine pour sa courtoisie, son aide et sa serviabilité.

Mes remerciements à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation.

Enfin, je tiens à exprimer toute ma gratitude à ma très chère maman, ma sœur et mes frères, et qu'ils trouvent ici l'expression de mon affection.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I : INTRODUCTION

1.1 : Problématique.....	1
1.2 : Recherches précédentes.....	2
1.3 : But de la recherche	3

CHAPITRE II : CINEMATIQUE DES PLAQUES ORTHOTROPES

2.1. Théories des plaques en flexion :	5
2.1.1. Définition d'une plaque :	5
2.1.2. Hypothèses :	5
2.2. Conventions de signe pour déplacements et rotations :	7
2.3. Relations cinématiques :	7
2.3.1. Champ de déplacements :	7
2.3.2. Champ de déformations :	8
2.4. Relations contraintes-déformations :	10
2.5. Relations efforts résultants-déformations :	11
2.6. Formulation en statique linéaire:	12
2.6.1. Principe des travaux virtuels :	12
2.6.2. Principe de la méthode des éléments finis en statique :	13
2.6.2.1. Discrétisation spatiale:	13
2.6.2.2. Formulation élémentaire :	14
2.6.2.3. Formulation globale :	15
2.6.3. Elément finis avec cisaillement transversal :	16
2.6.3.1. Discrétisation du champ de déplacements :	16
2.6.3.2. Discrétisation du champ de déformations :	18
2.6.3.3. Matrice de rigidité :	19
2.6.3.4. Vecteur charge équivalent :	19

CHAPITRE III : ELEMENTS FINIS DES PLAQUES EN DYNAMIQUE

3.1. Introduction :22

3.2. Formulation des équations de mouvement :22

 3.2.1. Matrice de masse élémentaires :23

3.3. Méthodes de résolution des systèmes du second ordre :24

 3.3.1. Méthode de superposition modale :25

 3.3.2. Méthode de résolution directe :25

 3.3.2.1. Méthode de Newmark : 25

CHAPITRE IV : METHODE ANALYTIQUE

4.1 : Plaque soumise à des forces d'impulsion28

 4.1.1 : Description du model de calcul.....28

 4.1.2 : Charges impulsives.....29

4.2 : Méthode analytique pour la détermination de la réponse dynamique d'une plaque isotrope sous charges verticales appliquées sur la surface.....31

 4.2.1 : Application des équations de Lagrange31

 4.2.2 : Calcul du FDF_134

4.3 : Méthode analytique pour la détermination de la réponse dynamique d'une plaque orthotrope sous charges verticales de surface38

 4.3.1 : Application des équations de Lagrange38

 4.3.2 : Système équivalent.....41

CHAPITRE V : CODES DE CALCUL

5.1 : Introduction.....43

5.2 : Mise en œuvre du programme M.E.F.....43

 5.2.1 : Programme principal.....43

 5.2.2. Structure du fichier de donnée45

 a) Données géométriques45

 b) Données matérielles45

 c) Données Charge (Déplacements)46

 d) Données (différents Paramètres) :46

5.3 : Mise en œuvre du programme analytique :	46
5.3.1 : Programme principal	47
5.3.2 : Structure du fichier de donnée.....	48
a) Données géométriques	48
b) Données matérielles	48
c) Données Charge (Déplacements)	48
d) Données (différents Paramètres)	49
CHAPITRE VI : TESTS ET VALIDATION	
6.1 : Validation des modèles proposés :	50
6.2 : Premier Cas d'étude :	50
6.3 : Deuxième Cas d'étude :	54
6.4 : Validation des résultats par la M.E.F. pour une plaque orthotrope :	57
6.5 : Etude paramétrique :	59
6.5.1 : Cas de charge 1 : Charge impulsive constante.	60
6.5.1.1 : <i>Plaque isotrope mince</i> :	60
6.5.1.2 : <i>plaque isotrope épaisse</i> :	61
6.5.1.3 : <i>plaque orthotrope mince</i> :	61
6.5.1.4 : <i>plaque orthotrope épaisse</i> :	62
6.5.2 : Cas de charge 2 : Charge impulsive constante avec accroissement fini.....	63
6.5.2.1 : <i>Plaque isotrope mince</i> :	63
6.5.2.2 : <i>plaque isotrope épaisse</i> :	63
6.5.2.3 : <i>plaque orthotrope mince</i> :	64
6.5.2.4 : <i>plaque orthotrope épaisse</i> :	64
6.5.3 : Cas de charge 3 : Charge triangulaire	65
6.5.3.1 : <i>Plaque isotrope mince</i> :	65
6.5.3.2 : <i>plaque isotrope épaisse</i> :	65
6.5.3.3 : <i>plaque orthotrope mince</i> :	66
6.5.3.4 : <i>plaque orthotrope épaisse</i> :	66
6.5.4 : Cas de charge 4 : Charge triangulaire avec pic.....	67
6.5.4.1 : <i>Plaque isotrope mince</i> :	67
6.5.4.2 : <i>plaque isotrope épaisse</i> :	67
6.5.4.3 : <i>plaque orthotrope mince</i> :	68
6.5.4.4 : <i>plaque orthotrope épaisse</i> :	68

LISTE DES FIGURES

CHAPITRE II

Figure 2.1 : Portion d'une Plaque.....	5
Figure 2.2 : Conventions générales.....	7
Figure 2.3 : Rotations b_x et b_y	8
Figure 2.4 : Efforts de flexion : M_x , M_y , M_{xy} et de cisaillement : Q_x , Q_y	11
Figure 2.5 Discrétisation spatiale.	13
Figure 2.6 : élément isoparamétrique de plaque avec cisaillement transversal	17
Figure 2.7 : Intégration de Gauss (2×2) pour le quadrilatère.....	21

CHAPITRE III

Figure 3.1 : Schéma de Newmark.....	26
-------------------------------------	----

CHAPITRE IV

Figure.4.1 : Modèle de définition d'une plaque en flexion.....	28
Figure.4.2 : Différents cas de chargements impulsives.....	30
Figure 4.3 : Variation de la pression due à une explosion.....	31
Figure 4.4 : Modèle de plaque.....	32
Figure 4.5 : Système équivalent à un degré de liberté.....	41

CHAPITRE V

Figure 5.1 : Structure du code de calcul DYNAMICPLATE.....	44
Figure 5.2 : Structure du code de calcul ANALYTIC.....	47

CHAPITRE VI

Figure 6.1 : a) Maillage (élément à 4 nœuds (8x8)), et **b)** conditions aux appuis (Simplement Appuyée) de la plaque rectangulaire.....51

Figure 6.2 : Réponse dynamique d’une plaque isotrope sous charge constante par la M.E.F.....52

Figure 6.3 : Réponse dynamique d’une plaque isotrope sous charge constante par la méthode énergétique.53

Figure 6.4 : Comparaison et validation. Cas d’une plaque isotrope sous charge constante.....57

Figure 6.5 : Comparaison et validation. Cas d’une plaque orthotrope sous charge constante.....58

Figure 6.6 : a) Maillage (élément à 4 nœuds (8x8)), et **b)** conditions aux appuis (Simplement Appuyée) de la plaque carrée.....59

Figure 6.7 : Réponse dynamique d’une plaque isotrope mince sous charge impulsive constante.....60

Figure 6.8 : Réponse dynamique d’une plaque isotrope épaisse sous charge impulsive constante.61

Figure 6.9 : Réponse dynamique d’une plaque orthotrope mince sous charge impulsive constante.61

Figure 6.10 : Réponse dynamique d’une plaque orthotrope épaisse sous charge impulsive constante.62

Figure 6.11 : Réponse dynamique d’une plaque isotrope mince sous charge impulsive constante avec accroissement fini.....63

Figure 6.12 : Réponse dynamique d’une plaque isotrope épaisse sous charge impulsive constante avec accroissement fini.63

Figure 6.13 : Réponse dynamique d’une plaque orthotrope mince sous charge impulsive constante avec accroissement fini.....64

Figure 6.14 : Réponse dynamique d’une plaque orthotrope épaisse sous charge impulsive constante avec accroissement fini.....64

Figure 6.15 : Réponse dynamique d’une plaque isotrope mince sous charge impulsive triangulaire.65

Figure 6.16: Réponse dynamique d’une plaque isotrope épaisse sous charge impulsive triangulaire.65

Figure 6.17 : Réponse dynamique d'une plaque orthotrope mince sous charge impulsive triangulaire.66

Figure 6.18 : Réponse dynamique d'une plaque orthotrope épaisse sous charge impulsive triangulaire.66

Figure 6.19 : Réponse dynamique d'une plaque isotrope mince sous charge impulsive triangulaire avec pic.....67

Figure 6.20 : Réponse dynamique d'une plaque isotrope épaisse sous charge impulsive triangulaire avec pic.67

Figure 6.21 : Réponse dynamique d'une plaque orthotrope mince sous charge impulsive triangulaire avec pic.68

Figure 6.22 : Réponse dynamique d'une plaque orthotrope épaisse sous charge impulsive triangulaire avec pic.....68

LISTE DES TABLEAUX

CHAPITRE III

Tableau 3.1 : Algorithme de solution pas à pas.....27

CHAPITRE IV

Tableau.4.1 : Expressions de la charge impulsive $F(t)$ et du facteur dynamique de la force FDF_1 Pour : **a)** Charge impulsive constante et **b)** Charge impulsive constante avec accroissement fini.....36

Tableau.4.2 : Expressions de la charge impulsive $F(t)$ et du facteur dynamique de la force FDF_1 Pour : **c)** Charge impulsive triangulaire et **d)** Charge impulsive triangulaire avec pic.....37

CHAPITRE VI

Tableau 6.1 : Caractéristiques physiques de la plaque orthotrope.....51

Tableau 6.2 : Résultats et estimation de la différence, obtenues par les deux formulations.....53

Tableau 6.3 : les amplitudes maximales de la réponse de la plaque orthotrope obtenues par les deux formulations.....55

NOTATIONS

ABREVIATIONS :

d.d.l : degré de liberté.

MEF : Méthode des éléments finis.

MRG : Matrice de rigidité globale.

ELEM : Élément.

NGP : Nombre de points de Gauss dans une direction.

SYMBOLES :

$[x]$, x : matrice.

$\{x\}$: vecteur.

$\langle x \rangle$: Matrice ligne.

$[x]^T$, x^T : transposé de la matrice x .

$[x]^{-1}$, x^{-1} : inverse de la matrice x .

$\det(x)$: déterminant de la matrice x .

dx : différentielle ou incrément.

δx : Variation.

∂ : Symbole de la dérivée partielle.

NOTATIONS :

Seules les notations les plus importantes sont reprises :

$[A]$: matrice qui relie le vecteur déformations au vecteur déplacements.

$[B]$: matrice qui relie le vecteur déformations au vecteur déplacements nodaux.

$[D]$, D : matrice d'élasticité.

D_{pl} : matrice élastoplastique.

E : module de Young.

ν : coefficient de poisson

$F(t)$: fonction de charge.

$\{f_s\}$: vecteur forces surfaciques.

$\{f_v\}$: vecteur forces volumiques.
a : la longueur de la plaque.
b : la largeur de la plaque.
[J] : la matrice jacobienne.
 I_1, j_2, j_3 : les invariants de contraintes.
S, t, θ : autre formulation des invariants des contraintes.
 $\sigma_m, \bar{\sigma}, \theta$: autre formulation des invariants des contraintes.
[K], K : matrice de rigidité globale.
[KM] : matrice de rigidité élémentaire.
[N] : matrice des fonctions de forme.
 $\langle N \rangle$: Matrice ligne des fonctions de forme.
N : nombre des nœuds par élément.
 $\{R\}$: vecteur des charges nodales global.
 $\{f^e\}$: vecteur des charges nodales d'un élément.
 $\{\delta\}$: Vecteur global de tous les variables nodales
 $\{\delta^i\}$: vecteur global des incréments des déplacements nodaux.
 $\{u\}$: vecteur déplacements d'un point quelconque de l'élément.
 $\{u^e\}$: vecteur des déplacements nodaux d'un élément.
u, v : déplacements suivant les axes du repère.
 ζ, η : coordonnées locales.
 w_i, w_j : coefficients de poids.
 $d\varepsilon$: incrément de déformations totale
 $d\varepsilon^e$: incrément de déformations élastiques
 $d\varepsilon^p$: incrément de déformations plastiques.
 $d\lambda$: multiplicateur de plasticité.
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: contraintes principales.
 Δt : pas du temps.
 \mathcal{E}_{vp} : vecteur de vitesse des déformations viscoplastiques.
 $\Delta\varepsilon$: incrément de déformations plastiques.
 $\Delta\varepsilon^{VP}$: incrément de déformations viscoplastiques.

INTRODUCTION

I. PROBLEMATIQUE :

Pour estimer le comportement d'une plaque sous l'effet d'une charge impulsive il est souvent nécessaire de connaître l'état final de la structure .Cet état permet le dimensionnement de la plaque par l'ingénieur concepteur .Cependant, la connaissance détaillée de l'histoire du déplacement-temps ne représente pas la condition principale pour un concepteur .pour établir les principes d'analyse analytique la plaque est représentée par un modèle simplifiée équivalent à un système à un degré de liberté .

Cette modélisation est suivie par le lien entre la durée totale de la charge impulsive et la période naturelle de vibration de la plaque .par conséquent, la structure complexe est approchée par une représentation à un degré de liberté avec masse concentrée .L'équation du mouvement ainsi obtenue peut être résolue analytiquement ou numériquement.

Le but principal de l'utilisation de cette approche est de proposer un modèle de déplacement simplifié qui permet d'évaluer les moments de flexion et les contraintes de la plaque sous l'effet de charges impulsives.

Dans le but d'investiguer le comportement de la plaque sous l'effet des charges transitoires la méthode des éléments finis est appliquée .Cette approche numérique permet d'analyser la plaque en domaine temporel .L'intégration des équations dynamiques globales du mouvement est obtenue par la méthode d'intégration directe de Newmark- β .Les résultats des analyses par cette méthode permettent d'évaluer la réponse dynamique de la plaque .En plus, ces résultats peuvent servir pour la comparaison et la validation des résultats du modèle analytique proposé.

Le principal objectif dans la conception des plaques sous l'effet des charges impulsives (charges explosives) est de fournir une ductilité suffisante pour permettre à l'élément de fléchir d'une quantité permise .La structure de la plaque doit être initialement conçue pour satisfaire au critère de déformation plastique en flexion .Le mode de déformation évite la ruine prématurée de la plaque sous l'effet d'autres types de charges par exemple : cisaillement...etc.

II. RECHERCHES PRECEDENTES :

Les travaux de recherche de Huang [15] et de Haxton & Haywood [13], ont été consacrés à la résolution des équations dynamiques des structures submergés pour estimer la réponse dynamique et la dispersion d'impulsion de la structure sous l'effet d'explosion. Dans le but de modéliser les structures sous l'effet d'explosion par les méthodes numériques, Huang [15] a employé la technique d'élément de frontière en conjonction avec la méthodes des éléments finis pour la réponse structurale.

Les codes de calcul d'utilisation générale tels que **VAST** (linéaire) et **ADINA** (nonlinéaire) sont très populaires. **VAST** est un code utilisé pour le calcul de vibration et de résistance qui peuvent être utilisés pour prévoir la réponse linéaire de la structure. En revanche **ADINA** est principalement adressé aux problèmes complexes d'analyse non linéaire qui peuvent impliquer la déformation appréciable du matériau et le comportement géométrique non linéaire [14].

Liang et al [17], ont utilisé la méthode des éléments finis pour étudier deux cas, qui incluent une plaque carrée entièrement encadrée et une coque sphérique soumise à l'explosion et au chargement de choc. L'étude a concerné le comportement non linéaire des deux structures pour les grandes déformations élasto-plastiques. L'étude a été obtenue par la méthode des éléments finis en dynamique transitoire sous l'effet des charges explosives.

Gupta et al [12], ont modélisé une plaque rectangulaire par un système à un degré de liberté pour conduire une analyse élasto-dynamique de la plaque sous l'effet d'une explosive.

La fonction déplacement de la plaque choisie est sous forme de série trigonométrique satisfaisant les conditions aux limites pour le cas des appuis simples. La formulation a conduit à développer la solution exacte pour les déplacements, les vitesses et les accélérations de la plaque. La solution de la réponse dynamique a été comparée avec celle du code **ADINA**.

Chen et al ont [4], développé une méthode semi-analytique de bandes finie pour l'analyse de la réponse de non-linéarité géométrique de plaques rectangulaires composites stratifiées sous l'effet de chargement dynamique. Les plaques sont simplement appuyées et leurs propriétés sont évaluées en se basant sur la théorie des plaques à déformations de premier ordre. La solution du problème non-linéaire dynamique est obtenue par l'utilisation du schéma d'intégration de Newmark pas à pas en association la méthode d'itération de Newton-Raphson.

Dans un travail de recherche récent, Chen et Dawe [4] ont considéré la réponse linéaire transitoire de laminas rectangulaires au chargement normal à l'aide de la méthode semi analytique des bandes finis en conjonction avec une procédure de superposition modale. L'approche de la référence [4] est limitée au comportement de petites déformations sous l'effet de chargements de faibles amplitudes.

Le cas de vibration des plaques pour les grandes amplitudes a été un sujet de recherche pendant plusieurs années. Plusieurs ont publié des travaux concernant l'évaluation de la réponse en vibration libres des plaques pour les grands déplacements. Chu et Hermann [6] ont conduit une investigation analytique dans le but d'analyser les plaques isotropes pour la vibration libre non linéaire. Des études similaires sur les plaques orthotropes sont données par les références [19], [8]. Ganapathi et al [10], ont conduit une étude en vibration libre pour les grands déplacements des plaques orthotropes en utilisant des éléments finis quadrilatères basés sur la continuité C^0 de cisaillement. Les équations différentielles non linéaires sont résolues en utilisant une technique d'itération directe. Les résultats d'analyses conduites sur des plaques isotropes et orthotropes à conditions aux limites simplement appuyés indiquent l'effet de rigidification (Hardening) du comportement est augmenté pour le cas de plaques épaisses et des plaques orthotropes.

III. BUT DE LA RECHERCHE :

Le but de cette recherche est l'analyse des plaques isotrope et orthotropes minces et épaisses par la méthodes des éléments finis.

Pour une étude comparative, un modèle analytique simplifié a été proposé dont les résultats ont été validés par la méthode des éléments finis.

Ce travail est organisé en six chapitres :

Le premier chapitre présente une introduction générale qui inclut la définition du problème suivie par les travaux de recherches précédents. Ce chapitre est terminé par le but et le plan de travail de la thèse.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons la théorie générale des plaques orthotropes de Reissner-Mindlin, en exposant une généralité sur le principe du travail virtuel, la formulation détaillée de l'élément quadrilatère isoparamétrique Q4, incluant les effets de cisaillement transversal. En outre, sont exposés les calculs de la matrice de rigidité, et du vecteur charge équivalent du à une pression uniforme.

Le chapitre trois est consacré à la présentation de la méthode des éléments finis en dynamique linéaire. A partir du principe de Hamilton nous formulons l'équation

différentielle du second ordre .Ce chapitre est terminé par la présentation de la méthode pour la résolution des équations différentielles du second ordre (méthode d'intégration directe de Newmark- β).

Le chapitre quatre introduit les méthodes de résolution des problèmes dynamiques

L'une des contributions de ce travail est présentée au chapitre quatre et concerne la modification d'un code de calcul numérique existant basé sur la méthode des éléments finis, Aussi, la mise en œuvre d'un code de calcul **ANALYTIC**, basé sur la méthode analytique sus-indiquée en utilisant le langage de programmation **FORTRAN** .Cette contribution se situe à l'introduction de plusieurs paramètres (E_1 , E_2 , G_{12} etc....), définissant l'orthotropie du probable matériau traité par le code **DYNAMICPLATE**, et également par le code mis en œuvre **ANALYTIC**, à l'incorporation de la charge d'explosion et en faisant varier l'épaisseur de la plaque.

Les structures des deux codes, **DYNAMICPLATE**, et **ANALYTIC** sont schématisés par deux algorithmes, avec les significations des variables qui prennent leurs valeurs dans les fichiers de données des codes, ceci est fait l'objet du cinquième chapitre.

Au chapitre six, les résultats des analyses de plusieurs cas de plaques isotropes et orthotropes sous l'effet de différents chargements dynamiques sont présentés. Ces analyses ont été obtenues après un test de validation, et la modification d'un code de calcul existant en formulant le problème par une méthode analytique et en introduisant la possibilité de matériaux orthotropes.

Afin de vérifier l'application du programme proposé, plusieurs exemples ont été illustrés en prenant en considération l'effet de l'épaisseur , l'effet du type de charge, l'effet de la variation du pas de temps et l'effet des conditions aux limites. La comparaison avec des résultats figurant dans la littérature de rapport par le code de calcul modifié, pour le cas d'un élément quadrilatère à quatre nœuds indique la performance du code de calcul modifié, ainsi, que celui élaboré.

CHAPITRE II : CINEMATIQUE DES PLAQUES ORTHOTROPES ET FORMULATION PAR LA M.E.F.

Ce chapitre est consacré à la présentation des théories des plaques, dans le cas des petits déplacements, et plus spécialement aux éléments de plaques orthotropes en flexion.

2.1. Théories des plaques en flexion :

2.1.1. Définition d'une plaque :

Une plaque est un solide élastique dont une dimension selon l'épaisseur, est petite en comparaison des deux autres, et qui généralement comporte un plan de symétrie au milieu de l'épaisseur que nous appellerons surface moyenne. Par convention, cette surface sera le plan (x-y), l'axe (o-z) correspond à l'axe transversal selon l'épaisseur.

Une plaque peut être constituée d'un matériau homogène, ou être obtenue par l'empilement de différentes couches de matériaux orthotropes.

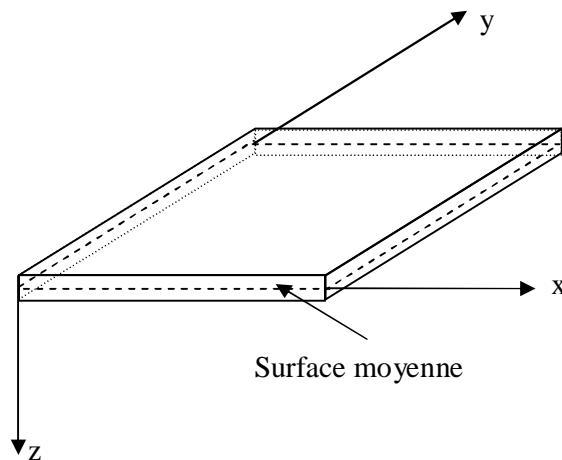


Figure 2.1 : Portion d'une Plaque

2.1.2. Hypothèses :

La théorie des plaques repose sur les hypothèses suivantes :

H.1 : Les contraintes normales s_{zz} sont négligeables par rapport aux autres composantes de contraintes : $s_{zz} = 0$.

H.2 : Les pentes de la surface moyenne après déformation, sont supposées petites par rapport à l'unité (Petite déflexion du plan moyen).

H.3 : Les points situés sur une normale à la surface moyenne avant déformation, restent sur cette normale au cours de la déformation ; ceci revient à négliger l'effet de cisaillement transversal. On a dans ce cas : $e_{xz} = e_{yz} = 0$.

Les hypothèses H.1 et H.3 correspondent dans le cas bidimensionnel aux hypothèses classiques de la résistance des matériaux avec conservation des sections droites, elles correspondent aussi à la définition d'un état plan de contrainte.

La théorie des plaques correspondante dans laquelle on néglige les effets de cisaillement transversal est due à Kirchoff (cas des plaques minces).

La théorie des plaques qui permettent la prise en compte du cisaillement transversal est connue sous le nom de Reissner-Mindlin, dans ce cas, il faut prendre en compte les déformations de cisaillement transversal et alors les fibres normales à la surface moyenne avant déformation ne le restent pas au cours de la déformation.

Pour les plaques homogènes isotropes, la validité de la théorie des plaques retenue dépend des caractéristiques géométriques.

On admet généralement les hypothèses de Mindlin si : $4 \leq L/h \leq 20$

et celles de Kirchoff si : $L/h > 20$

Où :

L : est une longueur caractéristique dans le plan (x-y).

h : est l'épaisseur de la plaque.

L/h : est le facteur d'élancement de la plaque.

Pour les plaques orthotropes et composites, le rôle des déformations de cisaillement transversal dépend non seulement des caractéristiques géométriques (l'élancement L/h), mais également des caractéristiques mécaniques représentées par le rapport E/KG.

Où :

E : module caractéristique intervenant dans la flexion.

G : module de cisaillement transversal (CT).

K : facteur de correction de cisaillement transversal.

La théorie de Kirchoff (théorie classique des plaques minces), peut être interprétée comme un cas particulier de la théorie de Reissner-Mindlin, ainsi un bon modèle élément fini basé sur la théorie de Reissner-Mindlin devra donner des résultats en accord avec la théorie de Kirchoff si l'influence du cisaillement transversal est faible.

2.2. Conventions de signe pour déplacements et rotations :

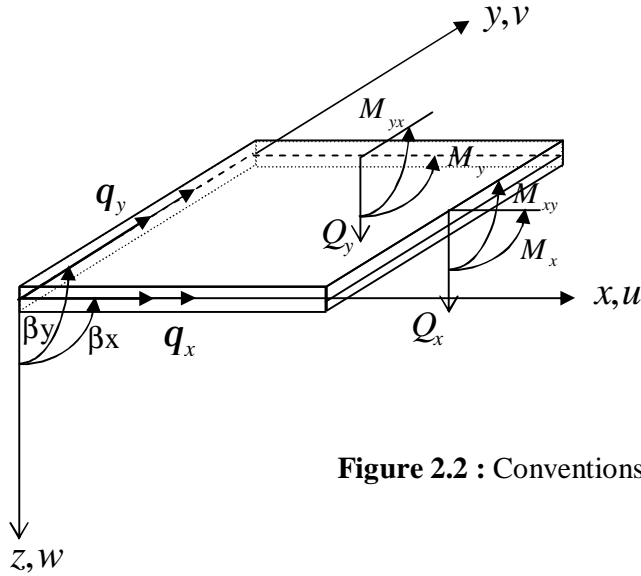


Figure 2.2 : Conventions générales

Soient les déplacements dans le plan u et v , le déplacement transversal w et les rotations b_x et b_y , ou q_x et q_y ; on a évidemment :

$$b_x = q_y \quad b_y = -q_x \quad (2.1)$$

b_x et b_y : les rotations de la normale à la surface moyenne dans les plans $(x-z)$ et $(y-z)$ respectivement.

2.3. Relations cinématiques :

2.3.1. Champ de déplacements :

Dans la théorie de Reissner-Mindlin (prise en compte du cisaillement transversal), on se donne un modèle de déplacements basé sur trois variables indépendants : le déplacement transversal $w(x, y)$ et les deux rotations $b_x(x, y)$ et $b_y(x, y)$.

Le champ des déplacements s'exprime alors en fonction de ces trois variables par la relation suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= z b_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= z b_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.3.2. Champ de déformations :

L'état de déformation en coordonnées cartésiennes est défini par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 e_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
 e_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
 2e_{xy} &= g_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
 2e_{xz} &= g_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\
 2e_{yz} &= g_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Après substitution des déplacements dans (2.3), nous obtenons les composantes du tenseur de déformations en fonction des trois degrés de liberté w, b_x, b_y :

$$\begin{aligned}
 e_x &= z \frac{\partial b_x}{\partial x} \\
 e_y &= z \frac{\partial b_y}{\partial y} \\
 g_{xy} &= z \left(\frac{\partial b_x}{\partial y} + \frac{\partial b_y}{\partial x} \right) \\
 g_{xz} &= b_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\
 g_{yz} &= b_y + \frac{\partial w}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Le tenseur de déformation peut être décomposé en deux parties, l'une indépendante de z traduisant les déformations de cisaillement notée $\{e_c\}$ ou $\{g\}$, et l'autre partie $\{e_f\}$ dépendante de z représente les déformations de flexion :

$$\{e\} = \{ \{e_f\}^T, \{e_c\}^T \}^T = \{ z\{c\}^T, \{g\}^T \}^T \tag{2.5}$$

$$\{e_f\} = \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ g_{xy} \end{Bmatrix} = z\{c\} \qquad \{e_c\} = \{g\} = \begin{Bmatrix} g_{xz} \\ g_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ b_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{2.6}$$

Avec :

$$\{c\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial b_x}{\partial x} \\ \frac{\partial b_y}{\partial y} \\ \frac{\partial b_x}{\partial y} + \frac{\partial b_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

$\{c\}$: Le vecteur des variations de courbure.

D'où on peut écrire :

$$\{\bar{e}\} = \{ \{c\}^T, \{g\}^T \}^T \quad (2.8)$$

2.4. Relations contraintes-déformations :

Nous considérons les relations linéaires entre les contraintes et les déformations (loi de Hooke généralisée). Pour les matériaux orthotropes, la relation liant les contraintes aux déformations s'écrit :

$$\{s\} = [C]\{e\} \quad (2.9)$$

Telle que :

$[C]$: matrice de constantes élastiques.

Lorsque le cisaillement transversal est pris en considération, le vecteur de contraintes peut être décomposé en une contribution de cisaillement $\{s_c\}$, et une contribution de flexion $\{s_f\}$:

$$\begin{Bmatrix} \{s_f\} \\ \{s_c\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [C_f] & [0] \\ [0] & [C_c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{e_f\} \\ \{g\} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\{s_f\} = \{s_{xx}, s_{yy}, s_{xy}\}^T \quad \{s_c\} = \{s_{xz}, s_{yz}\}^T \quad (2.11)$$

Avec :

$$[C_f] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad [C_c] = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - n_{21}n_{12}}$$

$$Q_{12} = \frac{n_{12}E_2}{1 - n_{21}n_{12}}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{22} &= \frac{E_2}{1-n_{21}n_{12}} & Q_{66} &= G_{12} \\
 Q_{44} &= G_{13} & Q_{55} &= G_{23}
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

Tels que :

E_1 : Module de Young dans la direction (x).

E_2 : Module de Young dans la direction (y).

n_{12}, n_{21} : Coefficients de poisson.

G_{12}, G_{13}, G_{23} : Modules de cisaillement.

2.5. Relations efforts résultants-déformations :

Pour la conception et le calcul des éléments de la mécanique, il est souvent intéressant de connaître les efforts de résistance des matériaux.

Les moments résultants de flexion sont :

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} z \{s_{xx}, s_{yy}, s_{xy}\}^T dz = [D_f] \{c\}
 \tag{2.14}$$

Les efforts tranchants sont :

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \{s_{xz}, s_{yz}\}^T dz = [D_c] \{g\}
 \tag{2.15}$$

Avec :

h : L'épaisseur de la plaque.

$$[D_f] = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-n_{21}n_{12}} & \frac{E_2 n_{12}}{1-n_{21}n_{12}} & 0 \\ \frac{E_2 n_{12}}{1-n_{21}n_{12}} & \frac{E_2}{1-n_{21}n_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}; \quad [D_c] = hk \begin{bmatrix} G_{13} & 0 \\ 0 & G_{23} \end{bmatrix}
 \tag{2.16}$$

k : Coefficient de correction de cisaillement transversal.

$[D_f]$: Matrice de rigidité à la flexion.

2.6. Formulation en statique linéaire :

On aboutit, dans le cas de la formulation en statique et élasticité linéaire, au système d'équations :

$$[K]\{q\} = \{F\} \quad (2.17)$$

$[K]$: représente la matrice de rigidité de la structure.

$\{q\}$: Vecteur de déplacements nodaux.

$\{F\}$: Vecteur chargement extérieur.

Le théorème qui conduit à la relation (2.17), dans le cas d'une approche de type « déplacement », est celui des travaux virtuels.

2.6.1. Principe des travaux virtuels :

Soit un corps solide en équilibre sous l'action de forces de : volume f_i^V , de surface f_i^S , et des forces concentrées. Considérons un champ de déplacement virtuel δu_i cinématiquement admissible.

Le théorème des travaux virtuels exprime le bilan des travaux virtuels interne et externe, lorsque le corps est en équilibre :

$$\int_V \mathbf{s}_{ij} \mathbf{de}_{ij} dV = \int_V f_i^V du_i dV + \int_S f_i^S du_i dS + Q_i du_i \quad (2.18)$$

V : est le volume du corps ;

S : la surface extérieure du corps où les forces surfaciques sont appliquées ;

f_i^V : Forces volumiques ;

f_i^S : Forces surfaciques appliquées à la surface extérieure S du corps ;

Q_i : Forces concentrées ;

\mathbf{s}_{ij} : Tenseur des contraintes ;

\mathbf{e}_{ij} : Tenseur des déformations infinitésimales.

Sous forme matricielle, nous avons :

$$\int_V \langle \mathbf{de} \rangle \{ \mathbf{s} \} dV = \int_V \langle \mathbf{du} \rangle \{ f_V \} dV + \int_S \langle \mathbf{du} \rangle \{ f_S \} dS + \sum_i \langle du_i \rangle \{ Q_i \} \quad (2.19)$$

$\langle \mathbf{e} \rangle$: Vecteur des déformations, transposé ;

$\{S\}$: Vecteur des contraintes ;

$\langle u \rangle$: Vecteur des déplacement, transposé ;

$\{f_v\}$: Vecteur des forces volumiques ;

$\{f_s\}$: Vecteur des forces surfaciques ;

$\{Q_i\}$: Vecteur des forces concentrées.

On peut introduire la fonctionnelle énergie potentielle totale V , et le principe du travail virtuel s'écrit :

$$dU = dW$$

Où :

$$dV = d(U - W) = 0 \quad (2.20)$$

Avec :

V : Énergie potentielle totale.

U : Énergie de déformation.

W : Travail des forces appliquées.

2.6.2. Principe de la méthode des éléments finis en statique :

La méthode des éléments finis de type déplacement permet de ramener les problèmes de milieux continus à des problèmes discrets.

En statique, nous considérons successivement :

- La discrétisation du domaine en éléments finis.
- La formulation au niveau de l'élément.
- La formulation globale après assemblage.

2.6.2.1. Discrétisation spatiale:

La phase de discrétisation, consiste à découper la structure (domaine continu V), en sous-domaines V^e , de forme géométrique simple que l'on appelle « éléments finis », interconnectés en des points remarquables appelés « nœuds ». Dans chaque élément, on définit une approximation des déplacements en fonction des déplacements aux nœuds, soit :

$$\{u(x, y, z)\}^e = [N(x, y, z)]^e \{q\}^e \quad (2.21)$$

Avec :

$\{u\}^e$: Vecteur des déplacements en un point M de l'élément e .

$[N(x, y, z)]^e$: Matrice d'interpolation pour l'élément e .

$\{q\}^e$: Vecteur des déplacements aux nœuds de l'élément e.

2.6.2.2. Formulation élémentaire :

La formulation au niveau de l'élément, consiste à rechercher pour chaque élément des expressions matricielles d'énergie de déformation et du travail des forces appliquées en fonction des déplacements aux nœuds. Ceci nécessite le calcul des matrices de rigidité et le vecteur des forces équivalentes.

L'expression de l'énergie potentielle totale en fonction des déplacements aux nœuds de l'élément, est :

$$V^e = U^e - W^e = \frac{1}{2} \{q\}^{eT} [K]^e \{q\}^e - \frac{1}{2} \{q\}^{eT} \{F\}^e \quad (2.22)$$

Avec :

$$[K]^e = \int_{V^e} [b]^T [C] [b] dV \quad (2.23)$$

$$\{F\}^e = \int_{V^e} [N]^T \{f_v\} dV + \int_{S^e} [N]^T \{f_s\} dS \quad (2.24)$$

On rappelle que l'on a :

$$\{s\} = [C] \{e\} \quad (2.25)$$

$$\{e\} = [D] \{U\} = [b] \{q\} \quad (2.26)$$

et que : $\{f_v\}$ et $\{f_s\}$ sont respectivement les vecteurs des forces de volume et de surface.

$[D]$: Matrice d'opérateurs différentiels.

$[b]$: Matrice d'interpolation des déformations.

2.6.2.3. Formulation globale :

La formulation globale du problème, consiste à rechercher pour la structure complète l'expression matricielle d'énergie de déformation, et du travail des forces appliquées en fonction des déplacements en tous les nœuds de la structure. Ceci nécessite l'assemblage des caractéristiques élémentaires : matrice de rigidité, vecteurs forces équivalentes, pour tous les éléments.

L'énergie potentielle totale de la structure peut être obtenue par sommation des énergies potentielles totales élémentaires, soit :

$$V = \sum_{\text{éléments}} V^e = \sum_{\text{éléments}} \left\{ \frac{1}{2} \{q\}^e{}^T [K]^e \{q\}^e - \frac{1}{2} \{q\}^e{}^T \{F\}^e \right\} \quad (2.27)$$

Soit $\{q\}^V$ le vecteur ligne des déplacements aux nœuds de la structure, soit pour une structure à m nœuds :

$$\{q\}^V = \{q^T \mathbf{K} q_i^T \mathbf{K} q_m^T\} \quad (2.28)$$

Avec :

$\{q_i\}$: Sous-vecteur des déplacements au nœud i.

On peut définir pour chaque élément une relation matricielle permettant d'établir une correspondance entre les déplacements aux nœuds de l'élément $\{q\}^e$ et les déplacements aux nœuds de la structure $\{q\}$, soit :

$$\begin{aligned} \{q\}^e &= [\mathbf{B}]^e \{q\} \\ (n_e \times 1) &= (n_e \times N) \cdot (N \times 1) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Avec :

$[\mathbf{B}]^e$: Matrice de localisation de l'élément.

n_e : nombre de degré de liberté de l'élément.

N : nombre de degré de liberté de la structure.

Chaque relation (2.29) permet de repérer ou de localiser les d.d.l. de chaque élément dans l'ensemble des D.D.L. de la structure.

En utilisant les relations (2.27) et (2.29), on peut écrire :

$$V = \sum_{\text{éléments}} \left\{ \frac{1}{2} \{q\}^V{}^T [\mathbf{B}]^e{}^T [K]^e [\mathbf{B}]^e \{q\} - \frac{1}{2} \{q\}^V{}^T [\mathbf{B}]^e \{F\}^e \right\} \quad (2.30)$$

D'où :

$$V = \frac{1}{2} \{q\}^V{}^T [K] \{q\} - \frac{1}{2} \{q\}^V{}^T \{F\} \quad (2.31)$$

Avec :

$$[K] = \sum_{\text{éléments}} [\mathbf{B}]^e{}^T [K]^e [\mathbf{B}]^e \quad (2.32)$$

$$\{F\} = \sum_{\text{éléments}} [\mathbf{B}]^e{}^T \{F\}^e \quad (2.33)$$

$[K]$: Matrice de rigidité de la structure.

$\{F\}$: Vecteur des forces équivalentes.

Dans le cas de forces ponctuelles appliquées aux nœuds de la structure (vecteur $\{P\}$), l'expression de $\{F\}$ devient :

$$\{F\} = \{P\} + \sum_{\text{éléments}} [\mathbf{B}]^e \{F\}^e \quad (2.34)$$

Ces expressions permettent d'obtenir par application directe du principe des travaux virtuels, le système des équations d'équilibre des nœuds. En effet, on a :

$$dU = dW$$

$$d\{q\}^T [K] \{q\} = d\{q\}^T \{F\} \quad (2.35)$$

D'où :

$$[K] \{q\} = \{F\} \quad (2.36)$$

2.6.3. Élément finis avec cisaillement transversal :

La prise en compte du cisaillement transversal modifie largement les principes d'élaboration des éléments de plaque. En effet, leur formulation est basée sur l'approximation de trois champs indépendants : le déplacement transversal et les deux rotations. Par ailleurs, leur conformité ne requiert que la continuité C^0 de w , b_x , et b_y .

2.6.3.1. Discrétisation du champ de déplacements :

Nous considérons des éléments de type quadrilatère auxquels nous appliquons la formulation isoparamétrique .

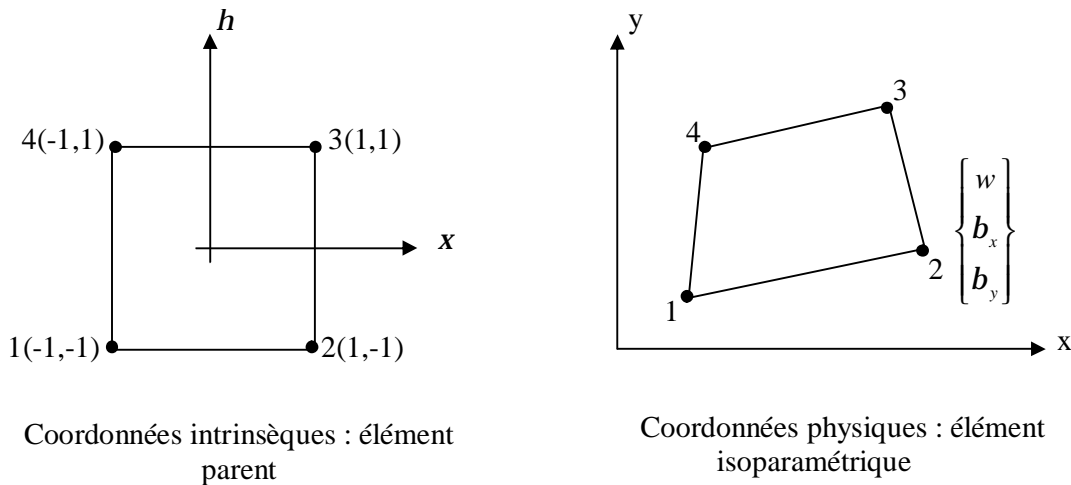


Figure 2.3 : élément isoparamétrique de plaque avec cisaillement transversal.

Pour tout élément isoparamétrique quadrilatéral à quatre nœuds nous avons les approximations suivantes :

$$x = N^T(x, h) X$$

$$y = N^T(x, h) Y$$

$$w = N^T(x, h) W \quad (2.37)$$

$$b_x = N^T(x, h) b'_x$$

$$b_y = N^T(x, h) b'_y$$

Ou :

$$w = \sum_{i=1}^{n_e} N_i w_i$$

$$b_x = \sum_{i=1}^{n_e} N_i b_{xi} \quad (2.38)$$

$$b_y = \sum_{i=1}^{n_e} N_i b_{yi}$$

n_e : indique le nombre de nœuds par élément.

Les fonctions d'interpolation utilisées sont les fonctions d'interpolation habituelles des quadrilatères isoparamétriques.

Dans le cas du quadrilatère linéaire, on a :

$$N^T = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \quad (2.39)$$

Avec :
$$N_i(x, h) = \frac{1}{4}(1 + x x_i)(1 + h h_i) \quad (2.40)$$

x_i ou h_i : prenant les valeurs (+1) ou (-1) suivant le nœud considéré.

$$W = \left\{ \begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{matrix} \right\} \quad b_x = \left\{ \begin{matrix} b_{x1} \\ b_{x2} \\ b_{x3} \\ b_{x4} \end{matrix} \right\} \quad b_y = \left\{ \begin{matrix} b_{y1} \\ b_{y2} \\ b_{y3} \\ b_{y4} \end{matrix} \right\} \quad (2.41)$$

$$X = \left\{ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \right\} \quad Y = \left\{ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix} \right\}$$

2.6.3.2. Discrétisation du champ de déformations :

Par substitution de (2.37), dans les relations de déformations (2-6) et (2-7), on obtient les matrices d'interpolation des déformations de flexion et de cisaillement :

$$\{c\} = \{\bar{e}_f\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial b_x}{\partial x} \\ \frac{\partial b_y}{\partial y} \\ \frac{\partial b_x}{\partial y} + \frac{\partial b_y}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N^T}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N^T}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N^T}{\partial y} & \frac{\partial N^T}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W \\ b_x \\ b_y \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

$$\{e_c\} = \{g\} = \begin{Bmatrix} b_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ b_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^T}{\partial x} & N^T & 0 \\ \frac{\partial N^T}{\partial y} & 0 & N^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W \\ \hat{b}_x \\ \hat{b}_y \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

Soit :

$$\{c\} = \{\bar{e}_f\} = [\bar{b}_f] \{q\} \quad \{g\} = [b_g] \{q\} \quad (2.44)$$

Où :

$$[\bar{b}_f] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N^T}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N^T}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N^T}{\partial y} & \frac{\partial N^T}{\partial x} \end{bmatrix} \quad [b_g] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^T}{\partial x} & N^T & 0 \\ \frac{\partial N^T}{\partial y} & 0 & N^T \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

2.6.3.3. Matrice de rigidité :

L'expression de l'énergie de déformation permet de calculer la matrice de rigidité, soit :

$$U = U_F + U_C$$

$$U = \frac{1}{2} \int_{V^e} \{e_f\}^T \{s_f\} dV + \frac{1}{2} \int_{V^e} \{g\}^T \{s_c\} dV \quad (2.46)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_{S^e} \{c\}^T [D_f] \{c\} dx dy + \frac{1}{2} \int_{S^e} \{g\}^T [D_c] \{g\} dx dy \quad (2.47)$$

Après substitution des expressions de déformations (2.44) dans l'énergie de déformation, nous obtenons :

$$U = U_F + U_C = \frac{1}{2} \{q\}^T \int_{S^e} [\bar{b}_f]^T [D_f] [\bar{b}_f] dx dy \{q\} + \frac{1}{2} \{q\}^T \int_{S^e} [b_g]^T [D_c] [b_g] dx dy \{q\} \quad (2.48)$$

D'où :

$$[K] = [K_f] + [K_c] = \int_{S^e} [\bar{b}_f]^T [D_f] [\bar{b}_f] dS + \int_{S^e} [b_g]^T [D_c] [b_g] dS \quad (2.49)$$

$$[K] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [\bar{b}_f]^T [D_f] [\bar{b}_f] \det[J] dx dh + \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [b_g]^T [D_c] [b_g] \det[J] dx dh \quad (2.50)$$

$[J]$: est la matrice Jacobienne de la transformation géométrique.

La matrice jacobienne $[J(x, h)]$ est :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial X} \\ \frac{\partial x}{\partial h} & \frac{\partial y}{\partial h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^T}{\partial X} X & \frac{\partial N^T}{\partial X} Y \\ \frac{\partial N^T}{\partial h} X & \frac{\partial N^T}{\partial h} Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \right\} = [j] \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \right\} \quad [j] = [J]^{-1} \quad (2.52)$$

$$[j] = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Les déformations $\{\chi\}$ et $\{\gamma\}$ sont définies en fonction des variables nodales :

$$\{c\} = [\bar{b}_f] \{q\} \quad \{g\} = [b_g] \{q\}$$

avec :

$$[\bar{b}_f] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^T}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^T}{\partial y} \\ \frac{\partial N^T}{\partial y} & \frac{\partial N^T}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \frac{\partial N^T}{\partial x} = j_{11} \frac{\partial N^T}{\partial X} + j_{12} \frac{\partial N^T}{\partial h} \quad (2.54)$$

$$[b_g] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^T}{\partial x} & N^T & 0 \\ \frac{\partial N^T}{\partial y} & 0 & N^T \end{bmatrix} \quad \frac{\partial N^T}{\partial y} = j_{21} \frac{\partial N^T}{\partial X} + j_{22} \frac{\partial N^T}{\partial h} \quad (2.55)$$

La matrice de rigidité $[K]$ est obtenue par intégration numérique de (2.50) de type Gauss.

L'intégrale peut être évaluée en utilisant la formule :

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(x,h) dx dh = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r W_i W_j f(x_i, h_j) \quad (2.56)$$

Où :

x_i, h_j : sont les coordonnées des points d'intégration.

W_i, W_j : sont les coefficients de pondérations (ou poids) correspondants.

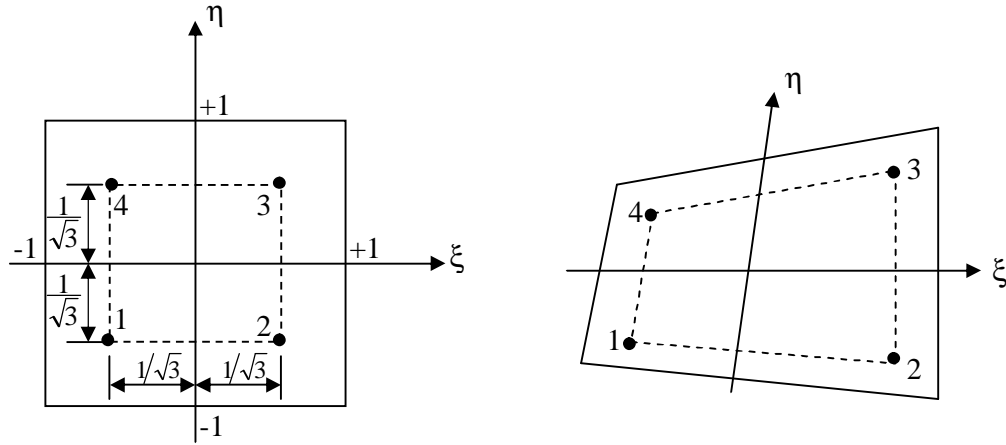


Figure 2.4 : Intégration de Gauss (2x2) pour le quadrilatère.

2.6.3.4. Vecteur charge équivalent :

L'expression matricielle du travail virtuel dû au chargement de surface et volume s'écrit :

$$dW = \int_V \langle du \rangle \{f_v\} dV + \int_S \langle du \rangle \{f_s\} dS = \{dq\}^e \{F\}^e \quad (2.57)$$

Nous avons : $\{du\}^e = [N]^e \{dq\}^e \quad (2.58)$

$$dW = \langle dq \rangle^e \int_V [N]^e \{f_v\} dV + \langle dq \rangle^e \int_S [N]^e \{f_s\} dS = \langle dq \rangle^e \{F\}^e \quad (2.59)$$

D'où :

$$\{F\}^e = \int_V [N]^e \{f_v\} dV + \int_S [N]^e \{f_s\} dS \quad (2.60)$$

Pour une charge uniforme répartie f_z suivant z, le vecteur des charges équivalentes associées aux variables W, a la forme habituelle :

$$[F]^e = \int_S \langle N \rangle^e f_z dS \quad (2.61)$$

Chapitre III : ELEMENT FINIS DE PLAQUE EN DYNAMIQUE

3.1. Introduction :

Lorsqu'une structure est soumise à un chargement qui varie avec le temps, il est raisonnable d'admettre que sa réponse varie aussi avec le temps. Dans ce cas, une *analyse dynamique* doit être menée. Si cependant, la fréquence du chargement est basse comparée avec la fréquence naturelle de la structure, alors la réponse donnée par l'analyse statique sous la charge instantanée peut suffire. Cette hypothèse est normalement appliquée quand la fréquence est moins qu'un tiers de la fréquence naturelle la plus basse.

Si la charge appliquée varie rapidement, donc une variété de techniques de solution peut être employée en tenant en compte l'effet de l'inertie et des effets de la *masse* et de l'*amortissement*.

3.2. Méthodes d'analyse dynamique :

La majorité des analyses dynamiques résoudra l'équation (3.13), qui donne la réponse temporelle de chaque point nodal dans la structure par inclusion des forces d'inertie et des forces d'amortissement dans l'équation. Les forces d'inertie sont le produit de la masse par l'accélération et les forces d'amortissement sont le produit du coefficient d'amortissement par la vitesse. L'équation générale de mouvement est donc :

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{F(t)\} \quad (3.13)$$

Où, en forme matricielle :

$[M]$ Représente la matrice de masse de la structure,

$\{\ddot{q}\}$ Le vecteur d'accélération nodale,

$[C]$ La matrice d'amortissement de la structure,

$\{\dot{q}\}$ Le vecteur de vitesse nodale,

$[K]$ La matrice de rigidité de la structure,

$\{q\}$ Le vecteur de déplacement nodale et

$\{F(t)\}$ Est le Vecteur de la charge nodale appliquée.

Cette équation est une série d'équations différentielles en forme matricielle pour la réponse dynamique d'une structure modélisée avec un nombre fini de degrés de liberté.

Cependant, la solution de cette série d'équations prises avec incrémentation du temps nécessite des milliers de solutions statiques pour obtenir une réponse temporelle complète de la structure.

Cela peut être impraticable pour n'importe quel cycle de durée importante. Donc, il est important d'examiner la réponse vibrationnelle pour quelques excitations spécifiques.

Les trois types les plus communs d'analyses sont :

- Analyse MODALE.
- Analyse de LA REPONSE FREQUENTIELLE HARMONIQUE.
- Analyse DYNAMIQUE TRANSITOIRE.

3.2.1. Analyse Modale :

Dans beaucoup d'applications d'ingénierie, les fréquences naturelles de vibration sont d'intérêt. C'est Probablement le type d'analyse dynamique le plus commun et est mentionné comme une « *Analyse aux valeurs propres* ». En plus des fréquences, les formes modales de vibration qui apparaissent avec les fréquences naturelles sont aussi d'intérêt. Ils représentent « *la réponse de vibration libre sans amortissement* » de La structure causée par une perturbation initiale de la position d'équilibre statique. Cette solution dérive de l'équation générale en annulant l'amortissement et les termes de la force appliquée.

3.2.2. Analyse de la réponse fréquentielle :

Ce type d'analyse est intéressant, lorsque la réponse en état stable d'une structure à l'excitation d'une force harmonique pour une fréquence donnée est exigée. La réponse peut être nécessaire pour une série de fréquences.

Dans une analyse de la réponse fréquentielle, la fréquence de la réponse à une excitation harmonique est aussi harmonique et se produit à la même fréquence.

Dans l'analyse de la réponse fréquentielle, l'amortissement peut souvent être ignoré puisque la plupart des structures sont légèrement amortis et cela simplifie la solution. Cela permet de calculer toutes les fréquences sauf les fréquences naturelles. Si une fréquence naturelle est utilisée comme une excitation, et aucun amortissement n'est considéré, la solution échoue en raison de problèmes numériques. Cependant, ce n'est pas un problème puisque les fréquences naturelles sont normalement adéquates.

3.2.3. Analyse de la réponse transitoire :

Si la fonction d'excitation n'est pas harmonique, mais une fonction arbitrairement dépendante du temps, alors une « *Analyse de la réponse transitoire* » doit être utilisée.

Dans cela, l'équation générale de mouvement est résolue mais, dans ce cas, l'échelle de temps du chargement est telle que les effets d'*amortissement* ou d'*inertie* sont importants.

Ce type d'analyse est employé pour déterminer les déplacements, déformations et contraintes qui varient avec le temps, dans une structure soumise à une charge transitoire.

Il y a deux approches de base pour l'analyse transitoire.

La première approche est connue sous le nom de la méthode « *Superposition modale* » qui admet que la réponse de la structure peut être représentée par les fréquences inférieures naturelles de la structure. Donc la réponse complète, est l'addition des fractions correctes des formes modales des fréquences les plus basses. Mathématiquement, cela implique une transformation de l'équation à partir de coordonnées des déplacements nodaux en une série de coordonnées modales. Cela aboutit à beaucoup moins d'équations, mais des résultats d'une solution approximative étant obtenue.

La deuxième approche implique la résolution des systèmes d'équations par *intégration directe* qui implique la totalité des systèmes d'équations et exigent beaucoup de pas de temps avec une solution complète dans chaque pas de temps.

Cependant, cela a prouvé d'être suffisamment adéquat pour les problèmes dynamiques les plus structurels.

3.3. Analyse dynamique par intégration numérique :

L'approche la plus générale pour résoudre la réponse dynamique des systèmes structurels est l'intégration numérique directe des équations dynamiques d'équilibre. Cela implique la tentative de satisfaire l'équilibre dynamique à des points discrets dans le temps, après que la solution ait été définie au temps zéro. La plupart des méthodes emploient des Intervalles de temps égaux à $\Delta t, 2\Delta, 3\Delta, \dots, n\Delta$.

Cependant, toutes les approches peuvent fondamentalement être classifiées comme méthodes d'intégration explicites ou bien implicites.

- Les méthodes explicites n'impliquent pas la solution d'une série d'équations linéaires à chaque pas de temps. Essentiellement, ces méthodes emploient l'équation différentielle au temps "t" pour prévoir une solution au temps "t+ Δt ". Pour les structures les plus réelles, qui contiennent des éléments rigides, un très petit pas de temps est exigé

pour obtenir une solution stable. Donc, toutes les méthodes explicites sont conditionnellement stables vis-à-vis de la taille du pas de temps.

- Les méthodes implicites essaient de satisfaire l'équation différentielle au temps "t" après que la solution au temps " Δt " ait été trouvée. Ces méthodes exigent la solution d'une série d'équations linéaires en chaque pas de temps ; cependant, de plus grands pas de temps peuvent être employés. Les méthodes implicites peuvent être conditionnellement ou inconditionnellement stables.

Plusieurs méthodes à pas multiples précises et d'ordre plus élevé, ont été développées pour la solution numérique d'équations différentielles, mais en se basant sur un grand nombre d'expériences, seulement les méthodes implicites à un pas et inconditionnellement stables doivent être utilisées pour l'analyse dynamique des Structures à un seul pas.

3.4. Principe et description de la méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis est essentiellement une méthode d'approximation d'une fonction inconnue sur un domaine continu par l'utilisation de fonctions généralement polynomiales, sur un ensemble de sous-domaines compatibles avec entre eux et représentant au mieux le milieu d'origine. Principalement, cette technique d'approximation est utilisée pour transformer les équations aux dérivées partielles en un système d'équations algébriques.

L'analyse par la méthode des éléments finis comporte les étapes suivantes :

- La première consiste en la discrétisation d'un domaine donné en une collection d'éléments finis présélectionnés.

On commence d'abord par la construction d'un maillage qui approxime au mieux le domaine considéré, les nœuds et les élément. Les éléments sont ensuite numérotés en considérant leurs propriétés géométriques (coordonnées, dimensions, ...).

- Dans la deuxième étape, on commence par construire la forme variationnelle de l'équation différentielle de l'élément de référence, et on pose la variable u comme étant la combinaison linéaire qui s'écrit sous la forme :

$$q = \sum_{i=1}^n q_i y_i$$

Avec :

q_i : Paramètre à déterminer.

y_i : Fonction d'approximation

On substitue q dans la forme variationnelle, on arrive à une équation de la forme :

$$[K^{(e)}] \{q^{(e)}\} = \{F^{(e)}\}$$

Où :

$[K^{(e)}]$: Est la matrice de rigidité de l'élément

$\{q^{(e)}\}$: Le vecteur déplacement élémentaire

$\{F^{(e)}\}$: Le vecteur force élémentaire

Les fonctions d'approximation y_i sont alors et les éléments de matrices calculés.

- L'assemblage des équations de tous les éléments pour l'obtention des équations globales du problème se fait au cours de la troisième étape où l'on considère la relation entre les degrés de liberté locaux et globaux tout en considérant la connexion entre éléments en ramenant toujours les nœuds de l'élément à un repère global.
- La quatrième étape sert à imposer les conditions aux limites du problème, cela consiste à identifier les degrés de liberté spécifiés primitifs ou secondaires selon le problème considéré.
- Dans la cinquième et avant dernière étape, le système d'équations est résolu, et les variables primaires déterminées.
- Quant au gradient de la solution et d'autres quantités, ils pourront être calculés au cours d'une sixième et dernière étape à partir des variables primaires déterminées précédemment.

3.5. Méthode d'intégration directe de Newmark [22]:

Après discrétisation par éléments finis nous avons obtenu un système stationnaire, sa résolution numérique est obtenue en utilisant un schéma de discrétisation temporelle. Parmi une grande variété de schémas existant pour la résolution de ce type de système, celui de Newmark qui donne les meilleures approximations.

La méthode de Newmark, est une méthode implicite, qui permette de construire la solution à l'instant $t+\Delta t$ à partir des vecteurs connus $\{q_t\}$, $\{\dot{q}_t\}$, $\{\ddot{q}_t\}$. Elle utilise les hypothèses suivantes :

$$\{\ddot{q}_{t+\Delta t}\} = \{\ddot{q}_t\} + [(1-a)\{\ddot{q}_t\} + a\{\ddot{q}_{t+\Delta t}\}]\Delta t \quad (3.14)$$

$$\{q_{t+\Delta t}\} = \{q_t\} + \{q_t\}\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2}-a\right)\{\ddot{q}_t\} + a\{\ddot{q}_{t+\Delta t}\}\right]\Delta t^2 \quad (3.15)$$

Où : a et b sont des paramètres qui sont déterminés pour obtenir l'exactitude et la stabilité du schéma d'intégration.

En fait, le paramètre b contrôle la variation de l'accélération pendant l'incrément de temps Δt . À l'instant $t=0$, les conditions initiales du problème sont utilisées comme valeurs initiales pour démarrer le processus de récurrences. Les paramètres a et b contrôlent la précision et la stabilité de la méthode. On choisit en général: $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{4}$ conformément à la proposition de Newmark pour un schéma inconditionnellement stable,

En plus des équations (3.14) et (3.15), pour la solution des déplacements, vitesses, et accélérations aux temps $t+\Delta t$, les équations de l'équilibre dynamique au temps $t+\Delta t$, sont aussi considérées :

$$[M]\{\ddot{q}_{t+\Delta t}\} + [C]\{\dot{q}_{t+\Delta t}\} + [K]\{q_{t+\Delta t}\} = \{F_{t+\Delta t}\} \quad (3.16)$$

En utilisant l'équation (3.14) et (3.15), on peut tirer des équations pour $\{\ddot{q}_{t+\Delta t}\}$ et $\{\dot{q}_{t+\Delta t}\}$, en fonction des déplacements inconnus $\{q_{t+\Delta t}\}$; après substitution de ces deux relations dans l'équation du mouvement au temps $(t+\Delta t)$ On obtient :

$$[\bar{K}]\{q_{t+\Delta t}\} = \{\bar{F}_{t+\Delta t}\} \quad (3.17)$$

Où :

$$[\bar{K}] = [K] + a_0[M] + a_1[C]$$

$$\{\bar{F}_{t+\Delta t}\} = \{F_{t+\Delta t}\} + [M][a_0\{q_t\} + a_2\{\dot{q}_t\} + a_3\{\ddot{q}_t\}] + [C][a_1\{q_t\} + a_4\{\dot{q}_t\} + a_5\{\ddot{q}_t\}]$$

Les constantes d'intégrations sont données par :

$$a_0 = \frac{1}{b\Delta t^2} \quad a_1 = \frac{a}{b\Delta t} \quad a_2 = \frac{1}{b\Delta t}$$

$$a_3 = \frac{1}{2b} - 1 \quad a_4 = \frac{a}{b} - 1 \quad a_5 = \left(\frac{a}{2b} - 1\right)\Delta t$$

L'équation (3.17) est en fait dans une forme statique. On vient de transformer la résolution d'un problème dynamique on une résolution d'un problème statique.

L'algorithme de résolution (méthode de Newmark) est représenté sur le **Tableau 3.1**:

Tableau 3.1 : Algorithme de solution pas à pas :

A. Calcul initial :

1. Former les matrices de: rigidité [K], de masse [M].
2. Initialiser : $\{q_0\}$, $\{\dot{q}_0\}$ et $\{\ddot{q}_0\}$.
3. Sélectionner le pas de temps Δt , les paramètres a, b , et calculer les constantes

d'intégrations :

$$a \geq 0.5 \quad b \geq 0.25(0.5 + a)^2$$

$$a_0 = \frac{1}{b \Delta t^2} \quad a_1 = \frac{a}{b \Delta t} \quad a_2 = \frac{1}{b \Delta t} \quad a_3 = \frac{1}{2b} - 1$$

4. Former la matrice de rigidité effective : $[\bar{K}] = [K] + a_0[M]$
5. Triangulariser la matrice $[\bar{K}]$: $[\bar{K}] = LDL^T$

B. Pour chaque pas de temps :

1. Calculer le chargement effectif au temps $t+\Delta t$:

$$\{\bar{F}_{t+\Delta t}\} = \{F_{t+\Delta t}\} + [M] [a_0 \{q_t\} + a_2 \{\dot{q}_t\} + a_3 \{\ddot{q}_t\}]$$

2. Résoudre en terme de déplacement au temps $t+\Delta t$: $LDL^T q_{t+\Delta t} = \bar{F}_{t+\Delta t}$

3. Calculer les accélérations et les vitesses au temps $t+\Delta t$:

$$\{\ddot{q}_{t+\Delta t}\} = a_0 (\{q_{t+\Delta t}\} - \{q_t\}) - a_2 \{\dot{q}_t\} - a_3 \{\ddot{q}_t\};$$

$$\{\dot{q}_{t+\Delta t}\} = \{\dot{q}_t\} + \Delta t (1-a) \{\ddot{q}_t\} + a \Delta t \{\ddot{q}_{t+\Delta t}\}$$

CHAPITRE IV : REPOSE DYNAMIQUE D'UNE PLAQUE PAR LA METHODE ANALYTIQUE

Ce chapitre est consacré à la présentation de la méthode analytique basée sur une formulation énergétique. Les équations du mouvement de la plaque sont obtenues par l'application des équations de Lagrange. Le traitement analytique concerne le cas des éléments de plaques isotropes ou orthotropes en flexion soumises à des charges impulsives de formes différentes.

4.1. Plaque soumise à des forces d'impulsion :

4.1.1. Description du model de calcul :

Pour déterminer la réponse de la plaque orthotrope sous l'effet de forces impulsives on considère le schéma suivant :

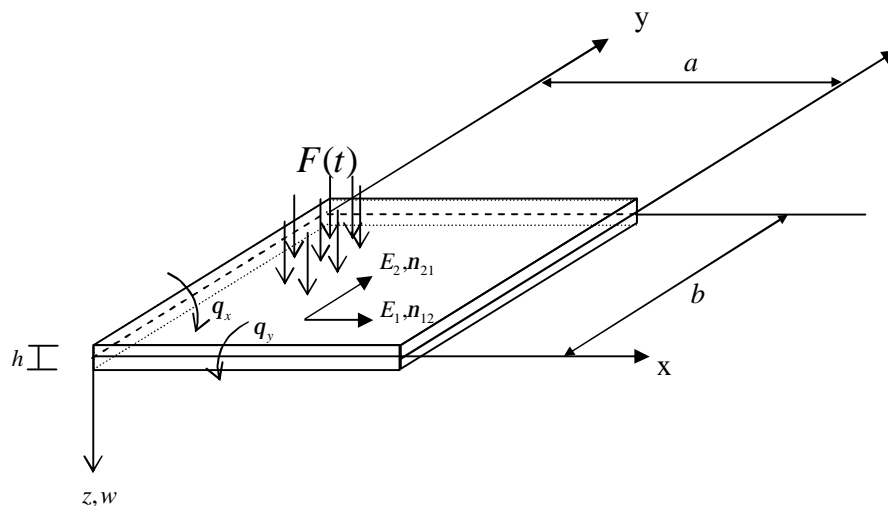


Figure.4.1 : Modèle de définition d'une plaque en flexion.

Où $F(t)$ est une force impulsive verticale appliquée sur la surface de la plaque à $+h/2$ (par rapport au plan moyen de la plaque).

Le but de la première étape de calcul est la détermination de la réponse de la plaque sous plusieurs types de charges impulsives. La réponse est obtenue pour chaque cas de charge séparément (voir **Figure 4.2**). Pour la réponse de la plaque on s'intéresse à la variation du déplacement verticale w de la plaque (au milieu) en fonction du temps t .

Le but de la deuxième étape de calcul concerne la détermination du *FDF* (facteur dynamique de la force). Le facteur *FDF* est défini (pour un système à un degré de liberté) comme étant le rapport de la déflexion dynamique pour un temps t et la déflexion qui peut être obtenue à partir du déplacement due à l'application de la charge statique.

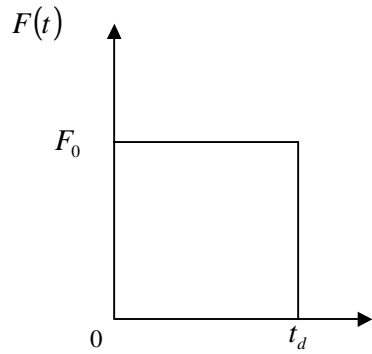
Le *FDF* peut être appliqué aux déflexions, forces de rappels et aux contraintes dans la structure, parce que toutes ces quantités sont proportionnelles. De ce fait le *FDF* permet d'obtenir le rapport des deux effets dynamique ou statique.

Si l'amortissement est introduit dans le système, le *FDF* correspond à la réponse permanente maximale est à déterminer en fonction de la variation de (td/T) , où td est le temps max. définissant le temps d'arrêt de la force impulsive (la durée de chargement), et T est la période naturelle de la plaque orthotrope. Donc il suffit de tracer des courbes en ordonnée le *FDF* et en abscisse (td/T) . Par exemple, si la fonction est donnée par $F(t) = F_0 \sin \Omega t$, il faut tracer la variation de $\frac{W_{ni}}{F_0} \left(\frac{m}{N} \right)$ en fonction de la fréquence d'excitation Ω (rad/s) par chaque mode de vibration définit par i , et n est le nœud où l'on calcul la déflexion.

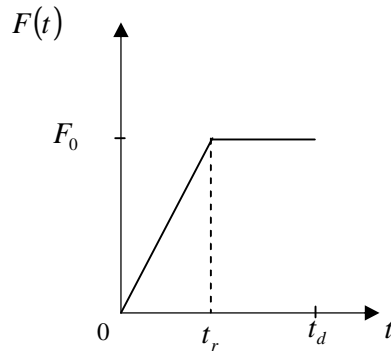
4.1.2. Charges impulsives :

Afin de déterminer l'effet des charges impulsives sur les structures, il est nécessaire d'obtenir le spectre de réponse de la plaque correspondant à chaque cas de charge.

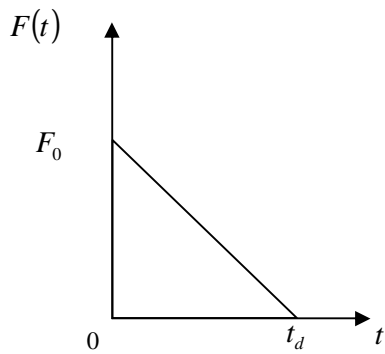
Les charges considérées dans cette études sont comme suit :



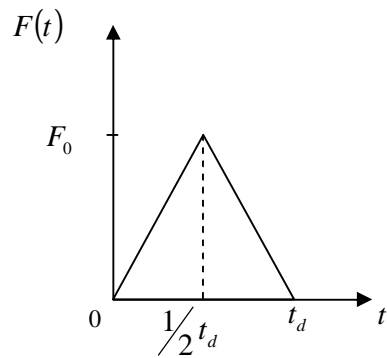
a) Charge constante.



b) Charge constante avec accroissement finie.



c) Charge triangulaire.



d) Charge triangulaire avec pic.

Figure.4.2 : Différents cas de chargements impulsives.

Les analyses dynamiques concernent les cas de plaques suivantes :

- § Plaque isotrope mince.
- § Plaque orthotrope mince.
- § Plaque isotrope épaisse.
- § Plaque orthotrope épaisse.

Pour le cas d'une surpression due à une explosion la variation de la pression est exprimée par la fonction suivante [20]:

$$P(t) = \bar{P} \left(1 - \frac{t-t_a}{t} \right) \left(1 - \frac{0.2728(t-t_a)}{t} \right) \left(1 - \left(\frac{0.2728(t-t_a)}{t} \right)^2 \right) \quad (4.1)$$

Où \bar{P}, t_a et t sont donnés par la **Figure 4.3**. Ci-dessous :

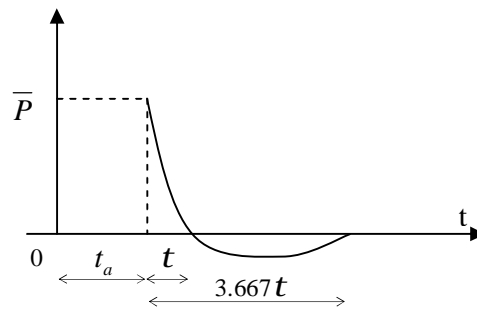


Figure 4.3 : Variation de la pression due à une explosion.

4.2. Méthode analytique pour la détermination de la réponse dynamique d'une Plaque isotrope sous charges verticales appliquées sur la surface :

4.2.1. Application des équations de Lagrange :

Soit une plaque rectangulaire isotrope de dimensions $a * b$ en plan, d'épaisseur h et de masse r par unité de surface. Les conditions aux limites de cette plaque sont des appuis simples. Cette plaque est soumise à une charge dynamique uniformément distribuée $q(t)$ **Figure (4.4).**

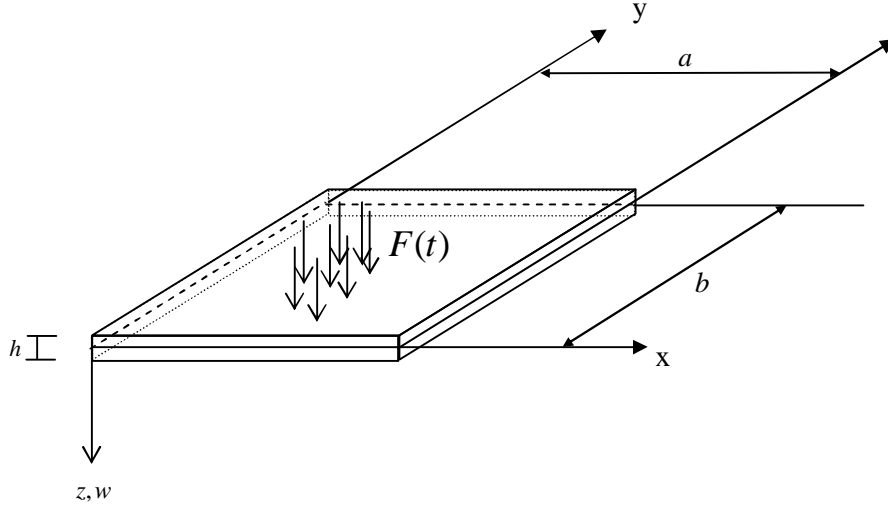


Figure 4.4. : Modèle de plaque

La forme fléchie de cette plaque est donnée par la fonction :

$$W(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^{(t)} \sin \frac{m\pi x}{a} * \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (4.2)$$

Où $A_{mn}^{(t)}$ Sont des ordonnées modales du centre de la plaque.

L'équation (4.2) doit satisfaire les conditions aux limites $x=0$, $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0$ et $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$

pour tous les côtés.

Il est à noter que chaque mode propre est défini par une combinaison possible des valeurs des entiers m et n .

Pour simplifier le problème prenons $m = n = 1$, alors la forme sera :

$$W(x, y) = A_1^{(t)} \sin \frac{\pi x}{a} * \sin \frac{\pi y}{b} \quad (4.3)$$

En utilisant le principe de Hamilton :

$$\int_{t_1}^{t_2} d(T - V) dt - \int_{t_1}^{t_2} dW = 0 \quad (4.4)$$

Et en appliquant le lagrangien $L = T - VS$, les équations de Lagrange sont obtenues :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{A}_1} \right) + \frac{\partial V}{\partial A_1} = \frac{\partial W_{ext}}{\partial A_1} \quad (4.5)$$

Les équations (4.5) permettent d'obtenir les équations modales du mouvement de la plaque.

L'énergie cinétique totale de la plaque est :

$$T = \frac{1}{2} r \int_0^b \int_0^a \left(\dot{A}_1 \sin \frac{p x}{a} \cdot \sin \frac{p y}{b} \right)^2 dx \cdot dy = \frac{1}{8} r \dot{A}_1^2 \cdot a \cdot b \quad (4.6)$$

En dérivant (4.6) par rapport à A_1 , puis par rapport au temps t nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{A}_1} \right) = \frac{1}{4} r \cdot a \cdot b \ddot{A}_1 \quad (4.7)$$

L'énergie de déformation totale de la plaque est [21]:

$$V = \frac{Eh^3}{24(1-n^2)} \int_0^b \int_0^a \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2n \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-n) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (4.8)$$

Où E : module d'élasticité.

h : Épaisseur.

n : Coefficient de poisson du matériau homogène.

En calculant les dérivées de $W(x, y)$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= -A_1 \cdot \frac{p^2}{a^2} \cdot \sin \frac{p x}{a} \cdot \sin \frac{p y}{b} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} &= -A_1 \cdot \frac{p^2}{b^2} \cdot \sin \frac{p x}{a} \cdot \sin \frac{p y}{b} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} &= -A_1 \cdot \frac{p^2}{ab} \cdot \cos \frac{p x}{a} \cdot \cos \frac{p y}{b} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Substituons (4.9) dans (4.8) et obtenons :

$$V = \frac{Eh^3 p^4 ab}{96(1-n^2)} \cdot A_1 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^2 \quad (4.10)$$

Le travail de la force extérieure est :

$$\begin{aligned} W_{ext} &= q(t) \cdot \int_0^b \int_0^a A_1 \cdot \sin \frac{p x}{a} \cdot \sin \frac{p y}{b} \partial x \partial y \\ &= q(t) \left(\frac{4ab}{p^2} \right) A_1 \end{aligned} \quad (4.11)$$

La dérivée de l'énergie de déformation V par rapport à A_1 est :

$$\frac{\partial V}{\partial A_1} = \frac{Eh^3 p^4 ab}{48(1-n^2)} \cdot A_1 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \quad (4.12)$$

Substituons les équations (4.7), (4.11) et (4.12) dans l'équation (4.5) et obtenons :

$$\ddot{A}_1 + \frac{Eh^3 p^4}{12(1-n^2)r} \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 A_1 = q(t) \left(\frac{16}{rp^2} \right) \quad (4.13)$$

Ici à partir de cette équation on définit la fréquence naturelle du premier mode de vibration de la plaque :

$$w_1 = p^2 \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \sqrt{\frac{Eh^3}{12(1-n^2)r}} \quad (4.14)$$

Et $T_1 = 2\pi/w_1$: la période propre de la plaque.

La déflexion statique modale est définie par [7] :

$$A_{1sr} = \frac{q(t)}{w_1^2} \left(\frac{16}{rp^2} \right) \quad (4.15)$$

La réponse modale est :

$$A_1(t) = A_{1st} \cdot (FDF)_1 \quad (4.16)$$

Pour connaître le $(FDF)_1$, il suffit de connaître la charge impulsive.

Finalement, la déflexion est obtenue en substituant l'équation (4.16) dans (4.3) :

$$W(x, y, t) = A_{1st} \cdot (FDF)_1 \cdot \sin \frac{p x}{a} \cdot \sin \frac{p y}{b} \quad (4.17)$$

4.2.2. Calcul du FDF_1 :

Pour déterminer les expressions de $(FDF)_1$, le cas de la charge constante illustré dans la **Figure (4.2.a)** est considéré comme exemple.

La forme du $(FDF)_1$ pour ce cas de charge en supposant que le système est initialement au repos, est donné par :

$$(FDF)_1 = \begin{cases} 1 - \cos w_1 t, & 0 \leq t \leq t_d \\ \cos w_1 (t - t_d) - \cos w_1 t, & t > t_d \end{cases}$$

On peut donc tracer la variation de $(FDF)_1$ en fonction de t ainsi que la variation de $(FDF)_{\max}$ en fonction du rapport t_d/T (en faisant varier t_d).

Pour l'ensemble des cas de charges impulsives étudiées, le **Tableau 4.1.** Et le **Tableau 4.2.** En résumé les expressions de $(FDF)_1$:

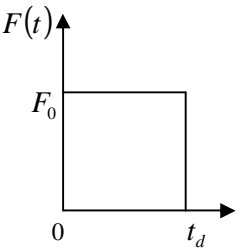
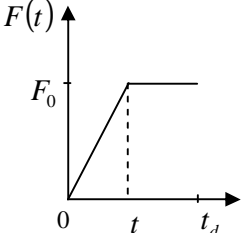
Cas de charge	$F(t)$	FDF_1
 <p>a)</p>	$F_0 \quad ; 0 \leq t \leq t_d$ $0 \quad ; t \geq t_d$	$1 - \cos w_1 t \quad ; 0 \leq t \leq t_d$ $\cos w_1 (t - t_d) - \cos w_1 t \quad ; t \geq t_d$
 <p>b)</p>	$F_0 \cdot \frac{t}{t_r} \quad ; 0 \leq t \leq t_r$ $F_0 \quad ; t_r \leq t \leq t_d$ $0 \quad ; t \geq t_d$	$\frac{1}{t_r} \left(t - \frac{\sin w_1 t}{w_1} \right) \quad ; 0 \leq t \leq t_r$ $1 + \frac{(\sin w_1 (t - t_r) - \sin w_1 t)}{w_1 t_r} \quad ; t_r \leq t \leq t_d$ $1 \quad ; t_d \leq t$

Tableau 4.1 : Expressions de la charge impulsive $F(t)$ et du facteur dynamique de la force FDF_1 pour : **a)** Charge impulsive constante et **b)** Charge impulsive constante avec accroissement fini.

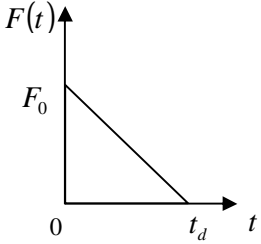
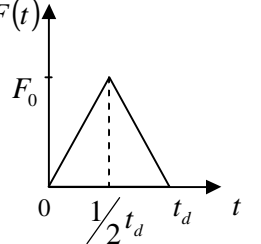
 <p style="text-align: center;">c)</p>	$F_0 \cdot \left(1 - \frac{t}{t_d}\right); 0 \leq t \leq t_d$ $0 \quad ; t \geq t_d$	$\left(1 - \cos w_1 t + \frac{\sin w_1 t}{w_1 t_d} - \frac{t}{t_d}\right) \quad ; 0 \leq t \leq t_d$ $\frac{1}{w_1 t_d} [\sin w_1 t_d - \sin w_1 (t - t_d)] - \cos w_1 t \quad ; t \geq t_d$
 <p style="text-align: center;">d)</p>	$2F_0 \cdot \frac{t}{t_d} \quad ; 0 \leq t \leq \frac{1}{2} t_d$ $2F_0 \left(1 - \frac{t}{t_d}\right) \quad ; \frac{1}{2} t_d \leq t \leq t_d$ $0 \quad ; t \geq t_d$	$\frac{2}{t_d} \left(t - \frac{\sin w_1 t}{w_1}\right) \quad ; 0 \leq t \leq \frac{1}{2} t_d$ $\frac{2}{t_d} \left\{t_d - t + \frac{1}{w_1} \left[2 \sin w_1 \left(t - \frac{t_d}{2}\right) - \sin w_1 t\right]\right\} \quad ; \frac{1}{2} t_d \leq t \leq t_d$ $\frac{2}{w_1 t_d} [2 \sin w_1 (t - t_d) - \sin w_1 t - \sin w_1 (t - t_d)] \quad ; t \geq t_d$

Tableau 4.2 : Expressions de la charge impulsive $F(t)$ et du facteur dynamique de la force FDF_1 pour : **c)** Charge impulsive triangulaire et **d)** Charge impulsive triangulaire avec pic.

Pour le cas de la charge d'explosion **Figure (4.3.)**, donnée par l'équation (4.1), l'équation du mouvement de la plaque (4.13) est écrite tout d'abord sous la forme suivante :

$$\ddot{A}_1 + w_1^2 A_1 = m_1 q_1(t) \quad (4.18)$$

Où w_1 est définie par l'équation (4.14) et $m_1 = \frac{16}{rp^2}$.

La fonction $P(t)$ est maintenant substituée dans l'équation (4.18) pour obtenir :

$$\ddot{A}_1 + w_1^2 A_1 = m_1 \bar{P} \cdot \left(1 - \frac{t-t_a}{t}\right) \cdot \left(1 - \frac{0.2728(t-t_a)}{t}\right) \cdot \left(1 - \left(\frac{0.2728(t-t_a)}{t}\right)^2\right) \quad (4.19)$$

Posons $k_1 = m_1 \bar{P}$, $k_2 = \frac{m_1 \bar{P}}{t}$, $k_3 = \frac{0.2728}{t}$

L'équation (4.19) peut être écrite sous la forme :

$$\ddot{A}_1 + w_1^2 A_1 = [k_1 - k_2(t-t_a)] \cdot [1 - k_3(t-t_a)] \cdot [1 - k_3^2(t-t_a)^2] \quad (4.20)$$

L'équation (4.20) est la forme finale de l'équation du mouvement de la plaque chargée par une fonction impulsive représentée par une onde d'explosion.

La méthode de résolution de l'équation du mouvement (4.20) de la plaque sous l'effet d'une charge impulsive d'explosion et obtenue à partir de l'intégrale de Duhamel qui permet de définir la déflexion de la plaque $A_1(t)$ comme suite :

$$A_1(t) = \frac{1}{m w_1^2} \int_0^t F(t) \sin w_1(t-t) dt$$

Où m est la masse de la plaque $= \frac{rp^2}{16}$

4.3. Méthode analytique pour la détermination de la réponse dynamique d'une plaque orthotrope sous charges verticales de surface :

4.3.1. Application des équations de Lagrange :

L'application des équations de Lagrange nécessite la connaissance de la déflexion de la plaque afin de pouvoir exprimer les énergies cinétiques et potentielles.

La forme flèche de la plaque orthotrope est choisie de façon à satisfaire les conditions aux limites.

Le model de fonction pouvant satisfaire les conditions géométriques d'une plaque orthotrope rectangulaire simplement appuyée (**Figure 4.1.**) est donné par l'équation (4.2)

De ce fait, cette fonction est prêt à être substituée dans les équations de Lagrange (4.5), et cela une fois les expressions des énergies cinétique et potentielle sont obtenues en fonction des ordonnées modales $A_{mn}(t)$.

La plaque est supposée orthotrope, homogène et élastique d'épaisseur uniforme. L'énergie de déformation en flexion de la plaque orthotrope est donnée par l'expression [21] :

$$V = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4D_{xy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (4.21)$$

Où :

- $D_x = \frac{E_x h^3}{12}$ est la rigidité de flexion par rapport à y.
- $D_y = \frac{E_y h^3}{12}$ est la rigidité de flexion par rapport a x.
- $D_{xy} = \frac{G_{xy} h^3}{12}$ est la rigidité de torsion.
- $D_1 = n_{21} D_x = n_{12} D_y$ le coefficient de poisson réduit.
- E_x est le module d'élasticité suivant x.
- E_y est le module d'élasticité suivant y.
- G_{xy} est le module de cisaillement.
- n_{12} et n_{21} sont les coefficient de poisson suivant les deux directions.

L'énergie cinétique totale de la plaque est donnée par l'équation (4.6).

La substitution des équations (4.9) dans (4.21) donne :

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left\{ D_x \cdot \left[A_1 \frac{p^2}{a^2} \cdot \sin \frac{p x}{a} \cdot \sin \frac{p^4}{4} \right]^2 + D_y \cdot \left[A_1 \frac{p^2}{b^2} \cdot \sin \frac{p x}{a} \cdot \sin \frac{p^4}{b} \right]^2 \right. \\
 &\quad \left. + 2D_1 \cdot A_1^2 \frac{p^4}{a^2 b^2} \cdot \left(\sin \frac{p}{a} x \cdot \sin \frac{p}{b} y \right)^2 + 4D_{xy} \cdot \left[A_1 \frac{p^2}{ab} \cdot \cos \frac{p x}{a} \cdot \cos \frac{p y}{b} \right]^2 \right\} dx dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left\{ \left(\frac{D_x}{a^4} + \frac{D_y}{b^4} + \frac{2D_1}{a^2 b^2} \right) \cdot A_1^2 p^4 \cdot \sin^2 \frac{p}{a} x \cdot \sin^2 \frac{p}{b} y \right. \\
 &\quad \left. + 4D_{xy} \cdot A_1^2 \frac{p^4}{a^2 b^2} \cos^2 \frac{p x}{a} \cos^2 \frac{p y}{b} \right\} dx dy \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{D_x}{a^4} + \frac{D_y}{b^4} + \frac{2D_1}{a^2 b^2} \right) A_1^2 p^4 \cdot \int_0^b \int_0^a \sin^2 \frac{p}{a} x \cdot \sin^2 \frac{p}{b} y \, dx dy \\
 &\quad + 2D_{xy} \cdot A_1^2 \frac{p^4}{a^2 b^2} \int_0^b \int_0^a \cos^2 \frac{p x}{a} \cos^2 \frac{p y}{b} \, dx dy
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$V = \frac{A_1^2}{8} \cdot \left[\left(\frac{D_x}{a^4} + \frac{D_y}{b^4} + \frac{2D_1}{a^2 b^2} \right) \cdot ab + \frac{4D_{xy}}{ab} \right] \tag{4.23}$$

Le travail des forces extérieures est donné par l'équations (4.11) calculons la dérivée de l'énergie de déformation V de la plaque par rapport à A_1 :

$$\frac{\partial V}{\partial A_1} = A_1 \frac{p^4}{4} \cdot \left[\left(\frac{D_x}{a^4} + \frac{D_y}{b^4} + \frac{2D_1}{a^2 b^2} \right) \cdot ab + \frac{4D_{xy}}{ab} \right] \tag{4.24}$$

Substituons les équations (4.7), (4.11) et (4.24) dans l'équation (4.5) et obtenons :

$$\frac{16}{r ab} \cdot \left[\left(\frac{D_x}{a^4} + \frac{D_y}{b^4} + \frac{2D_1}{a^2 b^2} \right) ab + \frac{4D_{xy}}{ab} \right] A_1 = q(t) \left(\frac{16}{r p^2} \right) \tag{4.25}$$

Où, pour, la fréquence naturelle du premier mode de vibration

$$w_1 = p^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{r a b} \cdot \left[\left(\frac{D_x}{a^4} + \frac{D_y}{b^4} + \frac{2D_1}{a^2 b^2} \right) a b + \frac{4D_{xy}}{a b} \right]} \quad (4.26)$$

La déflexion statique modale est défini par :

$$A_{1, st} = \frac{q(t)}{w_1^2} \cdot \left(\frac{16}{r p^2} \right) \quad (4.27)$$

La réponse modale est définie par l'équation (4.16).

4.3.2. Système équivalent :

La représentation mathématique de la forme de la plaque donnée par la fonction $w(x, y, t)$, Equation (4.2), doit satisfaire les conditions aux limites liées au déplacement.

Cette fonction a permis la formulation de l'équation du mouvement de la plaque à travers les équations de Lagrange .Cette analyse à conduit à l'obtention de l'équation dynamique du mouvement de la plaque, Equation (4.3), pour le cas $m = n = 1$.La solution de cette équation décrit le mouvement de la plaque comme structure complexe approchée par un système équivalent à un degré de liberté, **Figure 4.5**.

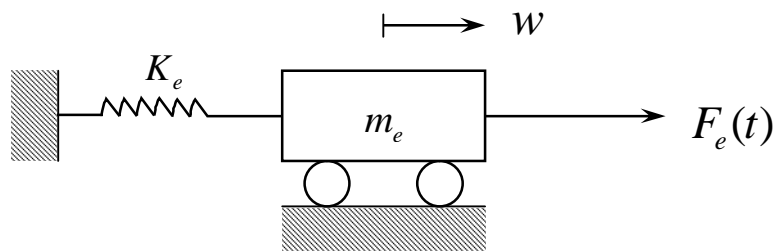


Figure 4.5 : Système équivalent à un degré de liberté.

Où :

$F_e(t)$ La force équivalente sur la plaque.

m_e La masse équivalente de la plaque définie par $\frac{r \cdot p^2}{16}$.

K_e La raideur équivalente de la plaque définie par :

$$K_e = \frac{p^6}{192} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \frac{Eh^3}{(1-\nu^2)} \quad \text{Pour la plaque isotrope.}$$

$$K_e = \frac{p^6}{16ab} \left[\left(\frac{D_x}{a^4} + \frac{D_y}{b^4} + \frac{2D_1}{a^2b^2} \right) ab + 4 \frac{D_{xy}}{ab} \right] \quad \text{Pour la plaque orthotrope.}$$

CHAPITRE V : CODES DE CALCULS

5.1. Introduction :

Au chapitre précédent, les formulations théoriques concernant deux méthodes différentes ont été développées. Le code de calcul basé sur la méthode des éléments finis pour les plaques orthotropes sous l'effet dynamique des charges impulsives, en tenant compte de l'effet du cisaillement transversal a été modifié en introduisant un chargement arbitraire. Comme cas particulier, les formes des charges prises en compte (**Tableaux 4.1 ; 4.2**) sont transitoires. Ce code de calcul prend en considération trois degrés de liberté primaires (w, b_x, b_y) par nœud de l'élément plaque.

Le programme contient des éléments quadrilatères isoparamétriques à quatre, huit et neuf nœuds. Les matrices et les vecteurs élémentaires sont déterminées à partir de la sous-routine STIFF, et les contraintes aux deux faces ($z = \pm h/2$) de la plaque peuvent être calculées à partir de la sous-routine STRESS.

La méthode analytique basée sur le principe énergétique des équations de Lagrange (**Section 4.2.1**) a été programmée en langage Fortran. Le deuxième code de calcul développé tient en compte les caractéristiques géométriques et les propriétés physiques de la plaque orthotrope. Ce code inclut quatre types de charges impulsives. Le calcul de la réponse dynamique est effectué par le facteur dynamique de la charge obtenu à partir de l'intégrale de Duhamel pour les cas de charges considérés. Le calcul de la solution réponse et l'impression des résultats concernant le seul degré de liberté donné par la flèche verticale de la plaque. Il est à noter qu'à partir des résultats des deux méthodes, le calcul permet l'estimation de la fréquence fondamentale de la plaque.

5.2. Mise en œuvre du programme MEF :

Le programme général basé sur la MEF comporte trois parties principales :

- § Un préprocesseur.
- § Un processeur.
- § Un postprocesseur.

5.2.1. Programme principal :

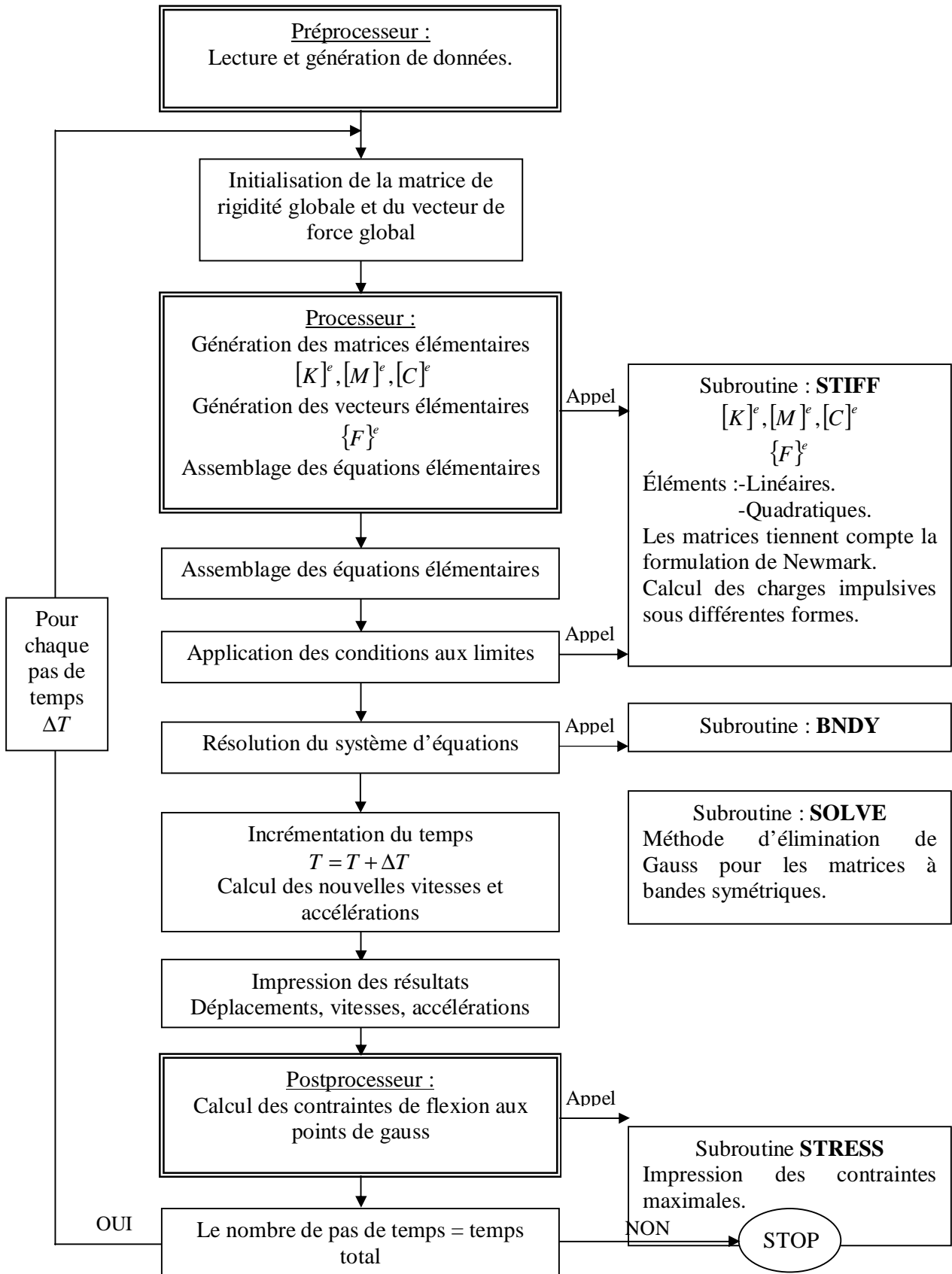


Figure 5.1 : Structure du code de calcul **DYNAMICPLATE**

5.2.2. Structure du fichier de donnée :

a) Données géométriques :

Les données de la structure :

IEL :	Type d'élément :
	1 Elément quadrilatère à 4 nœuds.
	2 Elément quadrilatère à 8 nœuds.
NPE :	Nombre de points par élément :
	4 Elément quadrilatère à 4 nœuds.
	8 Elément quadrilatère à 8 nœuds.
	9 Elément quadrilatère à 9 nœuds.
IMESH :	Indicateur de génération du maillage :
	1 Génération automatique.
	$\neq 1$ Lecture de connectivité pour chaque élément et coordonnées nodales.
NTIME :	Nombre de pas de temps total.
NSTEP :	Temps correspondant à l'arrêt de la charge.
NEM :	Nombre d'éléments dans le maillage.
NNM :	Nombre de nœuds dans le maillage.
NOD (I, J) :	Matrice de connectivité.
X (I), Y (I) :	Vecteurs des coordonnées nodales.
N_x :	Nombre de subdivisions suivant x.
N_y :	Nombre de subdivisions suivant y.

b) Données matérielles :

E₁ :	Module de Young suivant la direction 1(ou x).
E₂ :	Module de Young suivant la direction 2(ou y).
G₁₂, G₁₃, G₂₃ :	Modules de Cisaillement.
ANU₁₂ :	Coefficient de Poisson.
RHO :	Densité.
T :	Epaisseur.

c) **Données Charge (Déplacements) :**

INDFUNCT:	Indicateur du type de chargement. < 0 Charge triangulaire. 0 Charge constante avec accroissement fini. 1 Charge triangulaire avec pic. 4 Charge constante. 6 Charge d'explosion.
P₀ :	Intensité de la charge impulsive.
NBDY:	Nombre de degré de liberté fixes.
IBDY (I):	Vecteur des déplacements globaux spécifiés.
VBDY (I):	Vecteur des valeurs des déplacements dans IBDY .
NBSF:	Nombre total des forces non nulles spécifiés.
IBSF:	Vecteur des forces globales non nulles spécifiés.
VBSF:	Vecteur des valeurs des forces spécifiées dans
IBSF.	

d) **Données (différents Paramètres) :**

DT:	Le pas de temps.
ALFA:	Paramètre de Newmark qui permet la stabilité de l'algorithme.
ALFA1:	Paramètre pour le calcul de l'amortissement.
BETA1:	Paramètre pour le calcul de l'amortissement.

5.3.Mise en œuvre du programme analytique :

Le code de calcul est basé sur la méthode analytique dont les équations du mouvement de la plaque sont obtenues par les équations de Lagrange .Le programme comprend les parties suivantes :

- § Un préprocesseur.
- § Un processeur.

5.3.1 Programme principal :

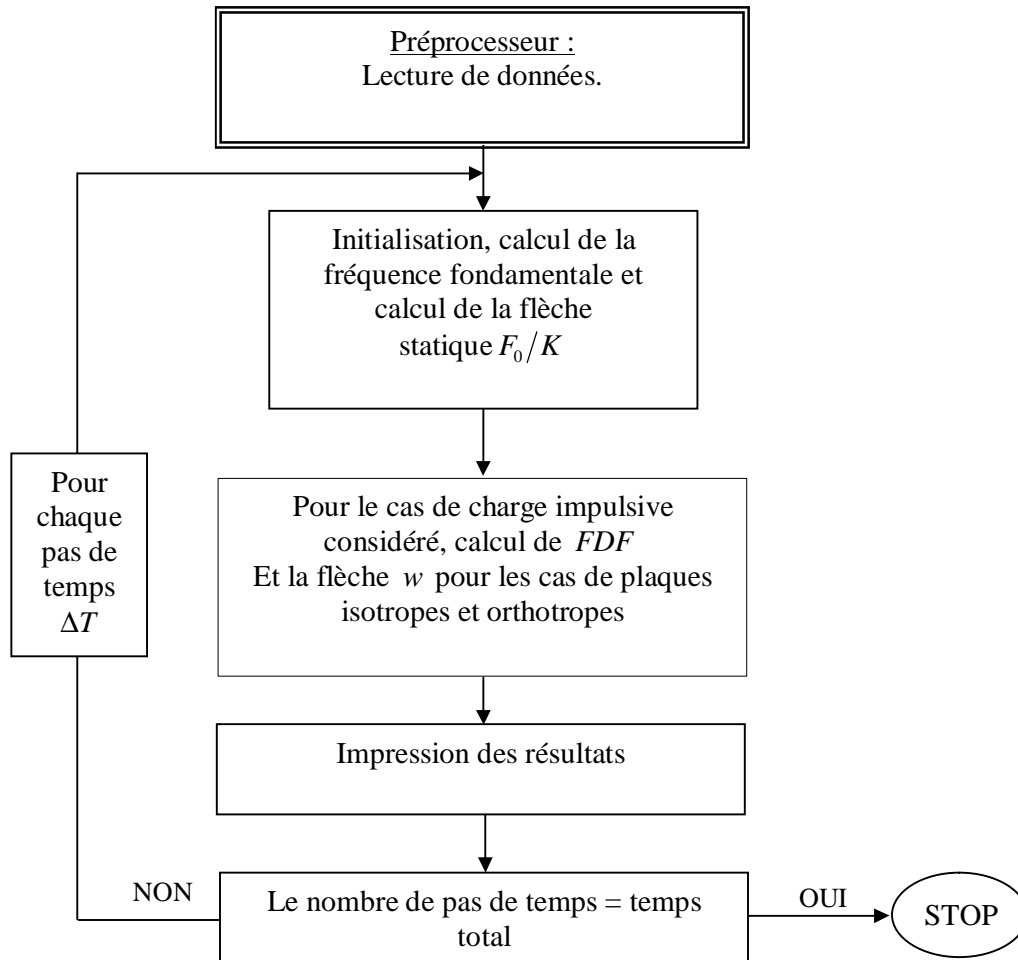


Figure 5.2 : Structure du code de calcul ANALYTIC

5.3.2 Structure du fichier de donnée :

a) Données géométriques :

Les données de la structure :

AA:	Dimension de la plaque suivant x.
BB:	Dimension de la plaque suivant y.
NTIME :	Nombre de pas de temps total.
NSTEP :	Temps correspondant à l'arrêt de la charge.

b) Données matérielles :

EYOUNG :	Module de Young suivant la direction 1(ou x).
EYOUNG2:	Module de Young suivant la direction 2(ou y).
G₁₂, G₁₃, G₂₃:	Modules de Cisaillement.
ENU12:	Coefficient de Poisson.
RHO:	Densité.
HTHICK:	Epaisseur.

c) Données Charge (Déplacements) :

NCASE:	Indicateur du type (cas) de chargement. <ol style="list-style-type: none">1 Charge triangulaire.2 Charge constante avec accroissement fini.3 Charge triangulaire avec pic.4 Charge constante.6 Charge d'explosion.
FZERO :	Intensité de la charge impulsive.
XCOORD :	Coordonnée suivant x, du point où l'on veut avoir les déplacements.
YCOORD :	Coordonnée suivant y, du point où l'on veut avoir les déplacements.
NN :	Nombre de points où sont définies les valeurs de la charge d'explosion.

d) Données (différents Paramètres) :

DELTAT :	Le pas de temps.
TD:	Durée du chargement impulsive.
TR:	Paramètre définissant la demie durée de chargement.
N :	Nombre des pas de temps.

CHAPITRE VI : TESTS ET VALIDATIONS

Dans le but de valider les modèles proposés et de donner plus de fiabilité à la démarche élaborée dans les deux codes de calcul développés, une série de tests numériques a été conduite en se basant sur des analyses paramétriques et comparatives pour l'estimation de la réponse dynamique des plaques isotropes et orthotropes. Ces résultats ont révélé la fiabilité des deux modèles pour la prédiction de la réponse.

6.1 : Validation des modèles proposés :

6.1.1 : Premier Cas d'étude :

Ce premier cas concerne l'analyse de la réponse dynamique d'une plaque isotrope mince simplement appuyée sur tous les côtés et soumise à une charge impulsive constante d'intensité F_0 . Cette plaque est analysée par les deux modèles proposés. Le premier modèle est basé sur une formulation analytique et le deuxième modèle est basé sur une formulation par la M.E.F.

Plaque 1 :

Données :

$$a = 0.45 \text{ m} ; b = 0.3 \text{ m} ; h = 2.114 \text{ mm} ; r = 1630 \text{ Kg/m}^3 .$$

$$E_1 = 131 \text{ GN/m}^2 ,$$

$$E_2 = 131 \text{ GN/m}^2 ,$$

$$G_{12} = 47.46 \text{ GN/m}^2 ,$$

$$n_{12} = 0.38. \quad \text{Matériau : graphite/époxy laminé.}$$

Conditions aux limites :

Plaque rectangulaire simplement appuyée.

$$w = b_x = 0 \quad \text{Le long de : } AB \text{ et } DC.$$

$$w = b_y = 0 \quad \text{le long de : } AD \text{ et } BC.$$

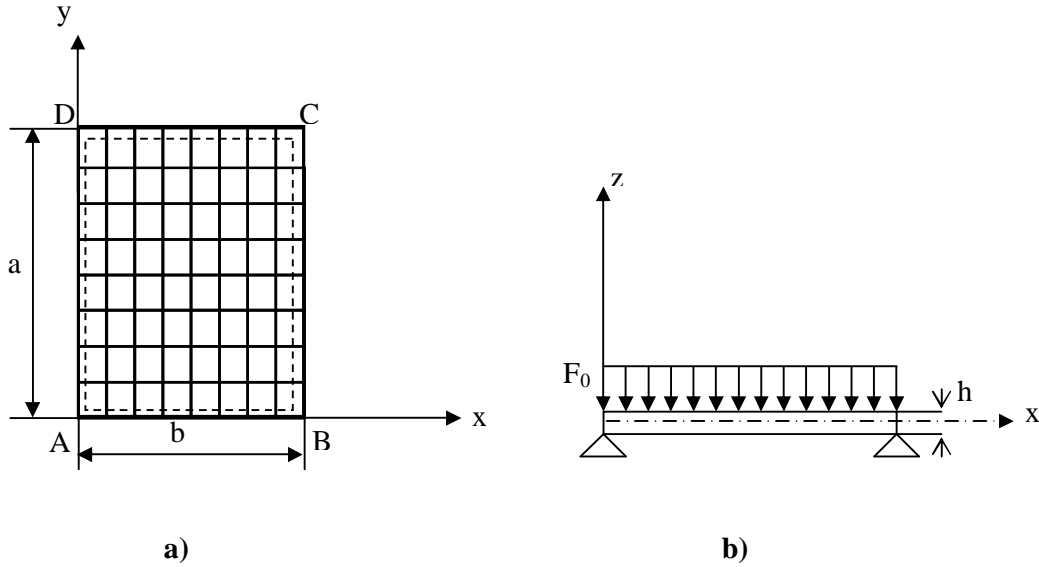


Figure 6.1 : a) Maillage (élément à 4 nœuds (8x8)), et b) conditions aux appuis (Simply Supported) de la plaque rectangulaire.

L'analyse a été conduite en considérant la plaque comme isotrope et soumise à l'effet d'une charge impulsive constante $F(t)$ d'intensité maximale $F_0 = 10^4 \text{ N/m}^2$ [23] (Figure.4.2.a). La plaque est supposée au repos (sans conditions initiales) au moment de l'application de la charge F_0 répartie sur toute sa surface. Les conditions aux limites de la plaque correspondent aux appuis simples sur toute sa périphérie. Les caractéristiques physiques utilisées sont résumées dans le **Tableau 6.1**.

Tableau 6.1 : Caractéristiques physiques de la plaque isotrope.

Dimensions, m			Caractéristiques physiques					Charge N/m^2
a	b	h	E_1 N/m^2	E_2 N/m^2	G_{12} N/m^2	ν_{12}	Densité Kg/m^3	
0.45	0.30	$2.114 \cdot 10^{-3}$	$131 \cdot 10^9$	$131 \cdot 10^9$	$47.46 \cdot 10^9$	0.38	1630	10^4

La réponse dynamique de cette plaque a été évaluée par deux formulations différentes. La première formulation basée sur la M.E.F., dont l'intégration des équations dynamiques du mouvement a été obtenue par la méthode de Newmark- β . Le pas de temps a été choisi minutieusement après avoir calculé la fréquence fondamentale de la plaque. La valeur du pas de temps choisie est $\Delta t = 0,0025 \text{ sec}$. avec une durée maximale de chargement $t_d = 0,025 \text{ sec}$.

La deuxième formulation est basée sur une méthode énergétique ou méthode de Lagrange (voir section 4.2.1.). Cette méthode a permis l'estimation de la fréquence fondamentale de la plaque directement de l'équation différentielle du mouvement. La solution de cette équation a été obtenue par l'intégrale de Duhamel pour une charge impulsive donnée $F(t)$. Le facteur dynamique de la charge FDF ainsi obtenu a permis l'évaluation de la solution pour un temps total t . Le code de calcul « **ANALYTIC** », programmé pour prendre en compte plusieurs cas de charges impulsives (**Chap. 5**), a été appliqué pour calculer le FDF.

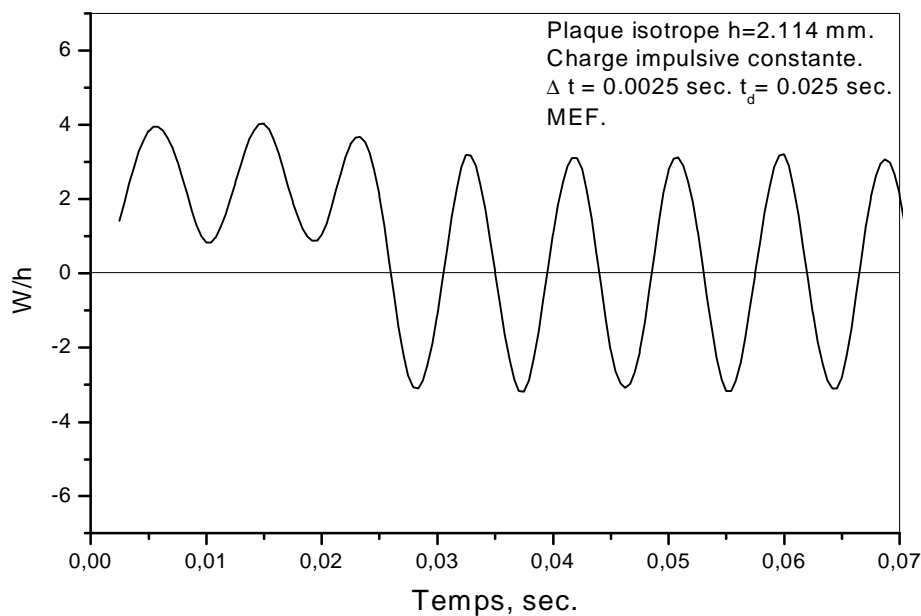


Figure 6.2 : Réponse dynamique d'une plaque isotrope sous charge constante par la M.E.F.

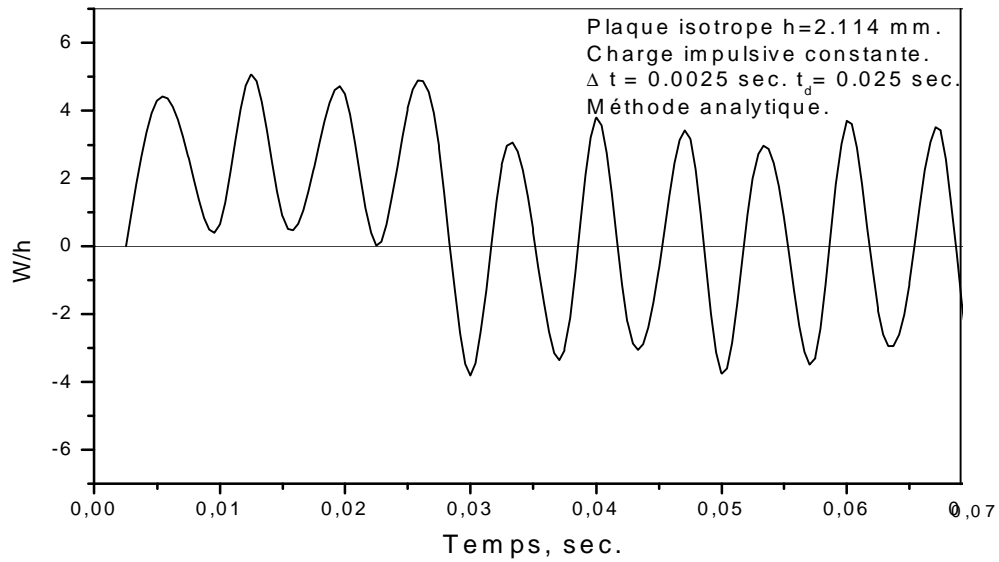


Figure 6.3 : Réponse dynamique d’une plaque isotrope sous charge constante par la méthode analytique.

Pour la plaque considérée, la réponse est obtenue par les deux méthodes citées ci-dessus. Les résultats des rapports w_{\max}/h , où w_{\max} est l’amplitude de la réponse (flèche) maximale et h est l’épaisseur de la plaque (**Tableau 6.2.**).

Tableau 6.2 : Résultats et estimation de la différence, obtenues par les deux formulations.

Formulation	W/h Au moment du chargement	Différence %	W/h Après chargement	Différence %
M.E.F.	21.05	2.52	3.12	3.7
Méthode analytique	21.595		3.24	

Cette méthode a permis de comparer les résultats obtenus par les deux formulations afin de valider les deux modèles.

D'après le **Tableau 6.2**. La différence des résultats pour les deux modèles est de l'ordre de 2.52 % pour le cas correspondant au moment de l'application de la charge, et de 3.7 % après arrêt de la charge. Cette différence est appréciable et signifie la bonne concordance entre les deux méthodes malgré l'approximation faite pour le choix du nombre d'éléments finis pris égal à un maillage de 8x8 d'où un total de 64 éléments .

Il est ainsi à souligner que pour la deuxième formulation (énergétique), le choix de la fonction déplacement dépend des conditions aux limites et que le nombre de termes de la série (un seul terme est considéré) est aussi d'une grande importance. Le fait de choisir un seul terme de la série trigonométrique influe énormément sur les résultats numériques.

6.3 : Deuxième Cas d'étude :

Plaque 2 :

Données :

$$a = 0.45 \text{ m} ; b = 0.3 \text{ m} ; h = 2.114 \text{ mm} ; r = 1630 \text{ Kg/m}^3.$$

$$E_1 = 131 \text{ GN/m}^2,$$

$$E_2 = 13.03 \text{ GN/m}^2,$$

$$G_{12} = 6.41 \text{ GN/m}^2,$$

$$n_{12} = 0.38.$$

Matériau : graphite/époxy laminé.

Conditions aux limites :

Plaque rectangulaire simplement appuyée.

$$w = b_x = 0 \quad \text{Le long de : } AB \text{ et } DC.$$

$$w = b_y = 0 \quad \text{le long de : } AD \text{ et } BC.$$

La même plaque [23], **Figure 6.1.**, est maintenant analysée par les deux méthodes citées ci-dessus avec les caractéristiques d'une plaque orthotrope (voir **Tableau 6.3.**)

Tableau 6.3 : Caractéristiques physiques de la plaque orthotrope.

Dimensions m			Caractéristiques physiques					Charge N/m ²
a	b	h	E ₁ N/m ²	E ₂ N/m ²	G ₁₂ N/m ²	ν ₁₂	Densité Kg/m ²	
0.45	0.30	2.114 10 ⁻³	131.10 ⁹	13.0310 ⁹	6.4110 ⁹	0.38	1630	10 ⁴

Puisque les performances des deux formulations ont été démontrées ci-dessus pour le cas isotrope, une attention particulière est concentrée à la détermination des caractéristiques vibratoires de la plaque orthotrope du matériau graphite/époxy laminé. Pour cet exemple, la plaque est subdivisée en un maillage particulier de 64 (8x8) éléments finis.

L'étude en vibration libre a été conduite pour le cas d'une plaque orthotrope mince en utilisant la solution analytique proposée et par un modèle d'éléments finis prenant en compte l'effet du cisaillement transversal dont la formulation est basée sur l'hypothèse de Reissner-Mindlin .

Le code de calcul basé sur la M.E.F. [26] a été modifié pour inclure plusieurs formes de charges impulsives (d'explosion).

La formulation analytique a permis d'obtenir la fréquence fondamentale ($m=n=1$) de la plaque orthotrope estimée à $\omega_1 = 510.82$ rad/s. et une période fondamentale $T_1 = 0.0123$ s. En revanche, la M.E.F. a été conduite pour la même plaque en supposant que la vibration est transitoire sous l'effet d'une impulsion constante $F_0 = 10^4$ N/m². Pendant ce chargement la plaque a été soumise à une pression constante distribuée sur la surface $z = +h/2$. La réponse temporelle au centre de la plaque à partir des deux formulations, M.E.F. et Méthode analytique est indiquée sur la **Figure 6.4**. Le **Tableau 6.4.**, présente les amplitudes maximales de la réponse de la plaque orthotrope obtenues par les deux formulations.

Tableau 6.4 : Les amplitudes maximales de la réponse de la plaque orthotrope obtenues par les deux formulations.

Fréquence rad/s	Méthode	W_{\max} / h Au moment du chargement	Différence % Sur W_{\max} / h	W_{\max} / h Après chargement	Différence % sur W_{\max} / h	Période T, sec	Différence % sur T
359.04	MEF	25.95	36.9	19.45	40	0.0175	29.7
510.82	Méthode Analytique	16.381		11.67		0.0123	

Le pas de temps choisis pour les deux analyses $\Delta t = 0.00156$ s., avec une durée totale de chargement $t_d = 0.0312$ s. Les périodes propres correspondants aux résultats sont aussi représentés dans le **Tableau 6.4**. Indiquant une différence de 29.7 %. Il en est de même pour le cas du rapport W_{\max} / h comme indiqué dans le **Tableau 6.4**. La différence de ces résultats montre l'erreur que peut induire l'utilisation du modèle analytique proposé pour les plaques orthotropes. Cette divergence des résultats est due au choix de la fonction déplacement du modèle analytique. Ce choix dont la fonction contient un seul terme de la série trigonométrique fait que la déformée de la plaque orthotrope soit forcée à obéir à cette variation, ce qui a conduit à une solution « rigide » avec un degré de liberté donné par l'amplitude de la flèche verticale $A_1(t)$. Dans cette approximation les degrés de liberté de rotation ne sont pas pris en compte. En revanche, la M.E.F. prend en compte trois degrés de liberté pour chaque nœud du maillage, ce qui conduit à une solution plus « flexible » par rapport à celle de la méthode analytique. « La rigidité » de la solution analytique s'explique par les résultats des fréquences calculées par les deux méthodes, **Tableau 6.4**. La fréquence obtenue par la méthode analytique dépasse de 29,7 % celle obtenue par la M.E.F., indiquant une plaque plus rigide du point de vue caractéristiques géométriques (modèle déplacement) et non pas des caractéristiques physiques de la plaque. Cette rigidité est le résultat d'un blocage des degrés de liberté de rotation.

Afin d'obtenir une solution analytique adéquate pour les plaques orthotropes, il est nécessaire d'imposer un modèle raffiné de déplacement sous forme de séries entières ou trigonométriques pouvant satisfaire les conditions aux limites avec possibilité de modélisation des trois degrés de liberté notamment la flèche verticale w suivant la direction de l'axe Z et les deux rotations q_x et q_y .

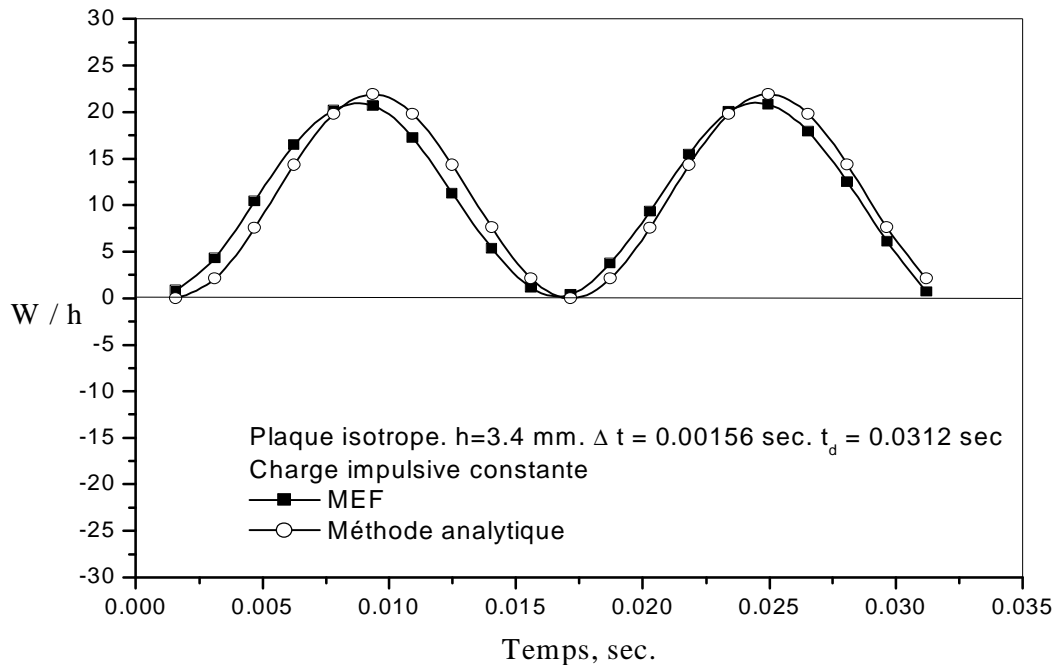


Figure 6.4 : Comparaison et validation. Cas d'une plaque isotrope sous charge constante.

6.4 : Validation des résultats par la M.E.F. pour une plaque orthotrope :

La plaque mince considérée dans cette section analysée par Chen et al [4] dont les propriétés du matériau sont tirées à partir des travaux de recherche de Reddy [26] [4] est soumise à une charge d'explosion constante d'intensité $F_0 = 0,1\text{N/mm}^2$.

Les caractéristiques géométriques et physiques de la plaque sont comme suit :

$$a = b = 0.25 \text{ m ;}$$

$$h = 5 \text{ mm ;}$$

$$r = 800 \text{ Kg/m}^3 ;$$

$$E_1 = 525000 \text{ N/mm}^2 ;$$

$$E_2 = 21000 \text{ N/mm}^2 ;$$

$$G_{12} = G_{21} = G_{23} = 10500 \text{ N/mm}^2 ;$$

$$n_{12} = 0.25.$$

Matériau : graphite/époxy laminé.

Les résultats sont fournis par la formulation par la M.E.F. proposée par un maillage de 8x8 sur toute la plaque. Les calculs faits correspondent à un pas de temps de $10 \mu\text{s}$, une durée totale de chargement $t_d = 8 \mu\text{s}$. et un nombre total de pas de temps égal à 200. La prédiction de la réponse dynamique de la plaque sous la charge impulsive constante est représentée par la **Figure 6.5**. Ces résultats sont comparés à ceux de la référence [5] afin de valider la formulation par la M.E.F. Cette figure montre la bonne concordance des résultats. Par cet exemple de calcul la validation de la formulation proposée par la MEF, pour les plaques orthotropes sous charges impulsives, est validée.

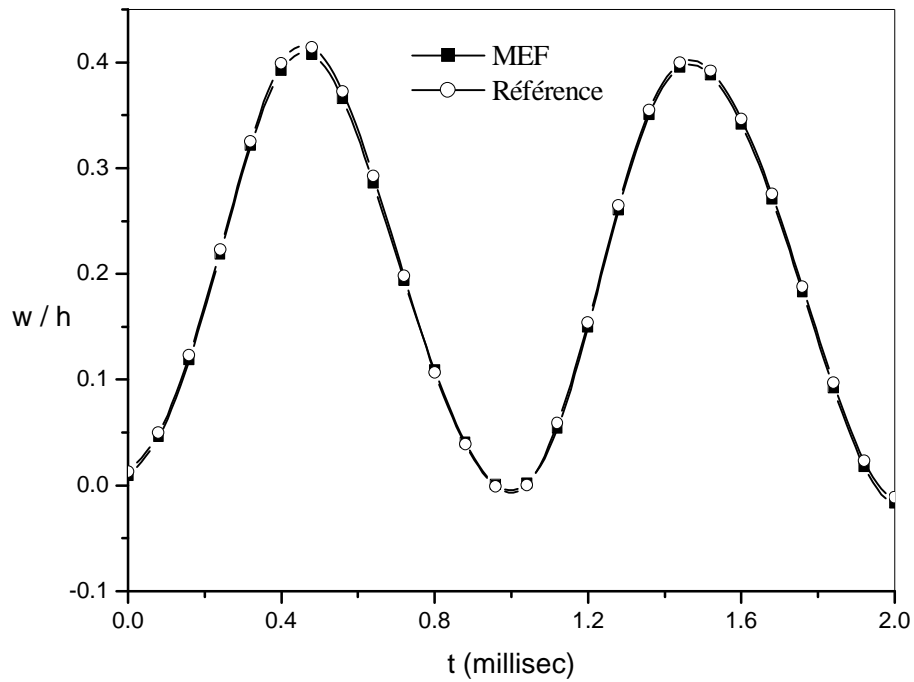


Figure 6.5 : Comparaison et validation. Cas d'une plaque orthotrope sous charge constante.

6.5 : Etude paramétrique :

La plaque représentée par la **Figure 6.6** est analysée maintenant par la M.E.F., sous l'effet de quatre types de chargement.

D'après les résultats obtenus ci-après pour les plaques isotropes et orthotropes, les remarques suivantes sont énumérées :

- L'effet de la durée de chargement influe sur le rapport w_{\max}/h de la réponse dynamique de la plaque, et ceci indépendamment des propriétés du matériau de la plaque et du type de chargement.
- Il a été observé que l'effet de l'épaisseur sur la réponse de la plaque isotrope épaisse est tel que la solution épouse la forme de la fonction charge (**Figures : 6.8 ; 6.12 ; 6.16 ; 6.20**) au cours du chargement.
- Les propriétés du matériau ont la même influence que l'épaisseur. L'hypothèse du modèle représenté par un matériau orthotrope fait que le système soit moins rigide. Les flèches obtenues pour la même plaque orthotrope sous une charge impulsive constante avec accroissement fini (**Figure 6.13**) est de l'ordre de 0.25 pour une durée de chargement $t_d = 0.01$ sec. Pour la même plaque mince avec le même chargement (**Figure 6.11**), le rapport w_{\max}/h est de l'ordre de 0.13, ceci indique que le passage de l'isotropie à l'orthotropie du matériau augmente le rapport w_{\max}/h d'environ deux fois, ceci est dû à la flexibilité engendrée par l'orthotropie du matériau de la plaque. Par conséquent, la représentation d'une plaque orthotrope par une plaque isotrope ne justifie pas le calcul de la résistance.

Caractéristiques de la plaque :

Les caractéristiques géométriques et physiques de la plaque analysée [5] sont les suivantes :

$$a = b = 0.25 \text{ m} ;$$

$h = 5 \text{ mm}$ (plaque mince); $h = 50 \text{ mm}$ (plaque épaisse);

$$r = 800 \text{ Kg/m}^3 ;$$

$$E_1 = 525000 \text{ N/mm}^2 ;$$

$E_2 = 525000 \text{ N/mm}^2$ (plaque isotrope); $E_2 = 21000 \text{ N/mm}^2$, (plaque orthotrope);

$G_{12} = 210000 \text{ N/mm}^2$ (plaque isotrope); $G_{12} = G_{21} = G_{23} = 10500 \text{ N/mm}^2$, (plaque orthotrope);

$n_{12} = 0.25$. Matériau : graphite/époxy laminé.

$$F_0 = 0,1 \text{ N/mm}^2 ,$$

Conditions aux limites :

Plaque carrée simplement appuyée.

$w = b_x = 0$ Le long de : AB et DC.

$w = b_y = 0$ le long de : AD et BC.

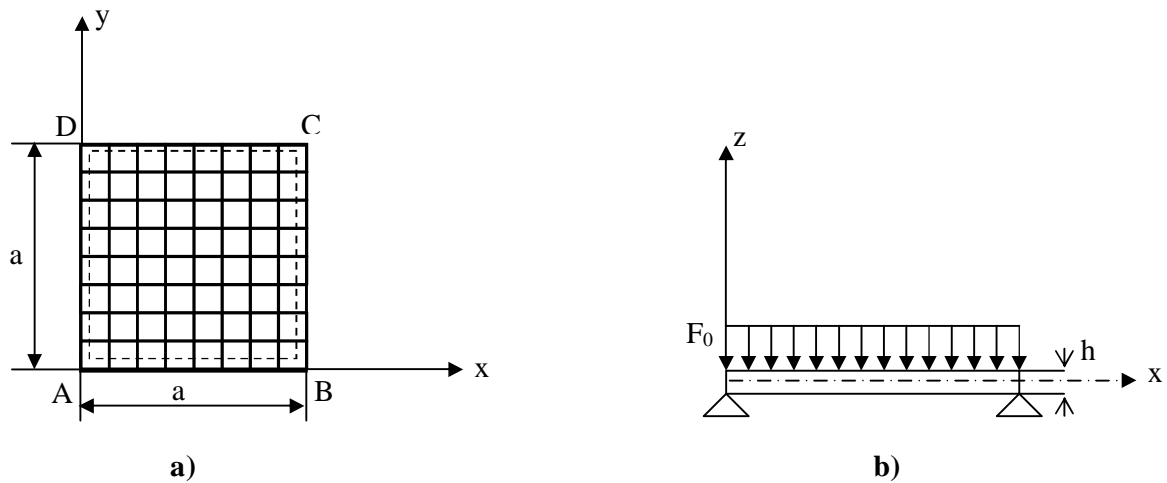


Figure 6.6 : a) Maillage (élément à 4 nœuds (8x8)), et b) conditions aux appuis (Simply Appuyée) de la plaque carrée.

6.5.1 : Cas de charge 1 :

Charge impulsive constante. (Figure.4.2.a)

6.5.1.1 : Plaque isotrope mince :

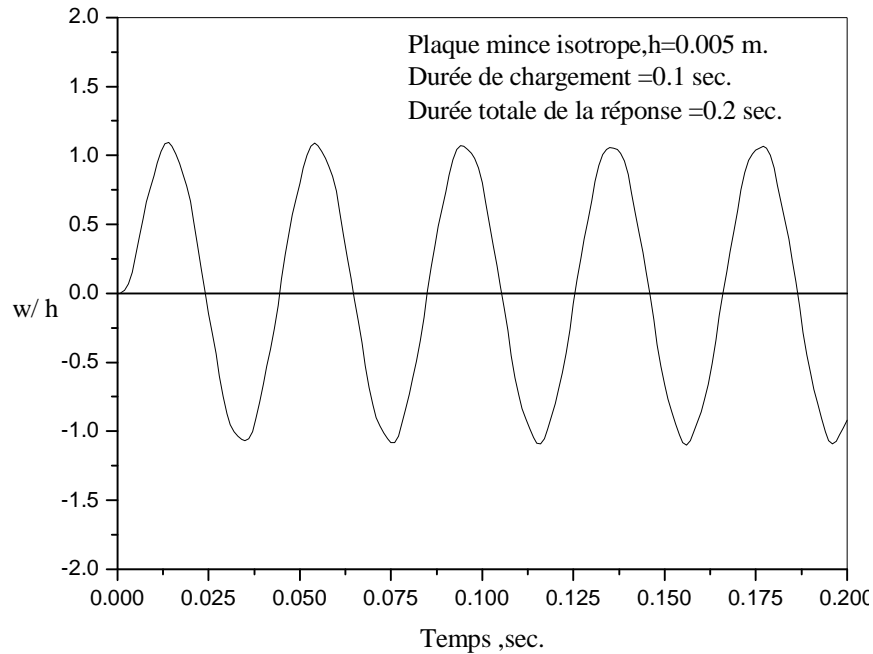


Figure 6.7: Réponse dynamique d'une plaque isotrope mince sous charge impulsive constante.

Après application de la charge constante (**Figure.4.2.a.**), la réponse dynamique de la plaque est présentée par la **Figure 6.7**. Ces résultats montrent que le rapport W_{\max} / h atteint la valeur de 1,0885 au cours du chargement. Les résultats correspondent à une durée maximale de chargement $t_d = 0,1$ sec. et un pourcentage d'amortissement $\xi = 0$ %. La réponse transitoire après arrêt du chargement dont le rapport W_{\max} / h atteint la valeur de 1.0653. Ce résultat montre que la différence entre les deux phases de la réponse est insignifiante, indiquant ainsi l'effet de la flexibilité de la plaque isotrope mince sur l'amplitude de vibration.

6.5.1.2 : plaque isotrope épaisse :

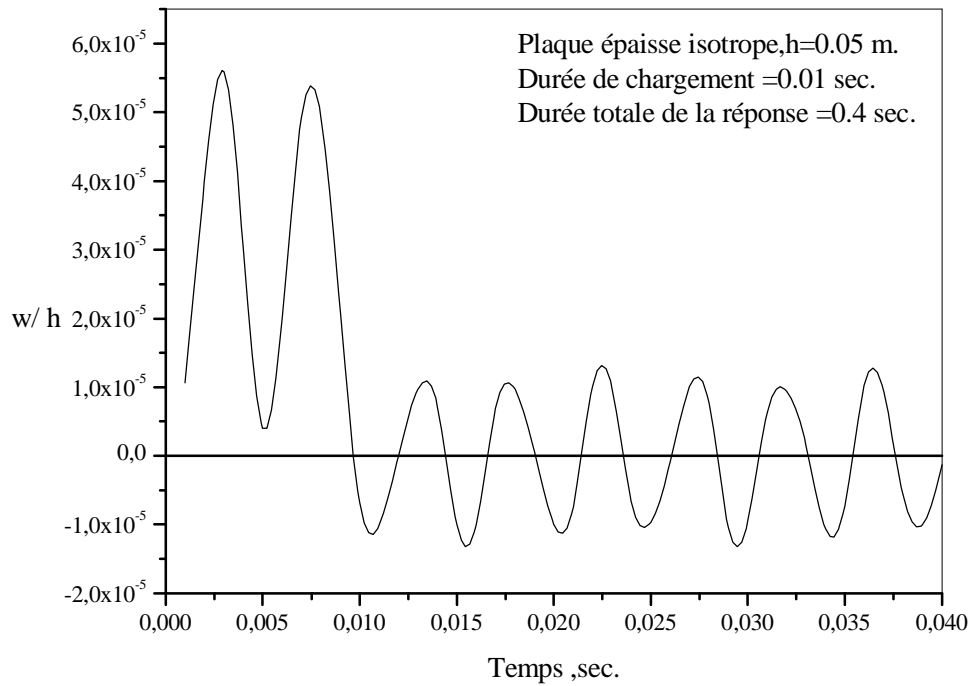


Figure 6.8: Réponse dynamique d'une plaque isotrope épaisse sous charge impulsive constante.

6.5.1.3 : plaque orthotrope mince :

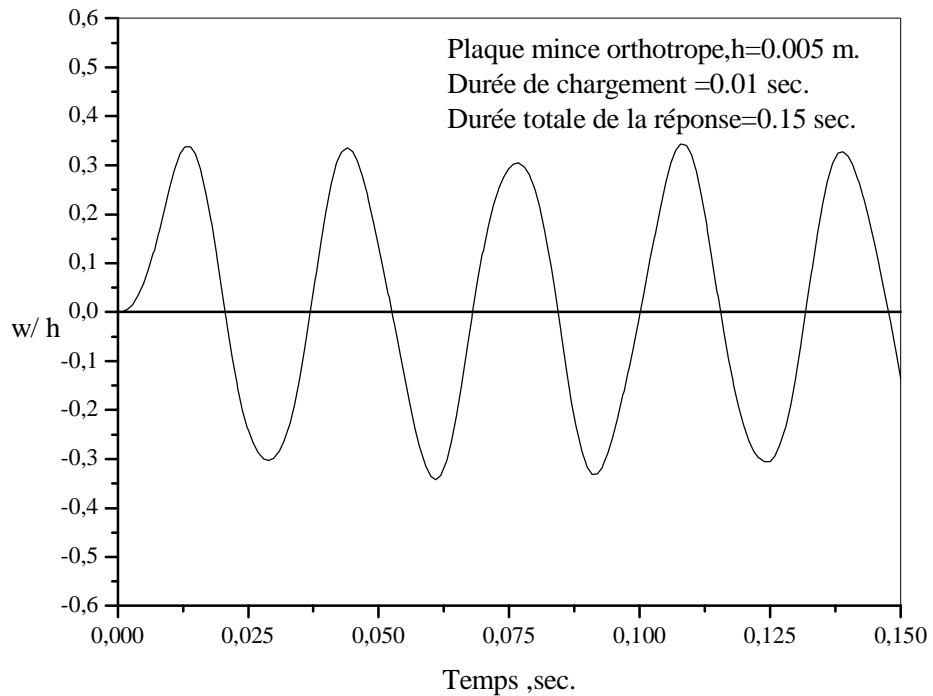


Figure 6.9: Réponse dynamique d'une plaque orthotrope mince sous charge impulsive constante.

6.5.1.4 : plaque orthotrope épaisse :

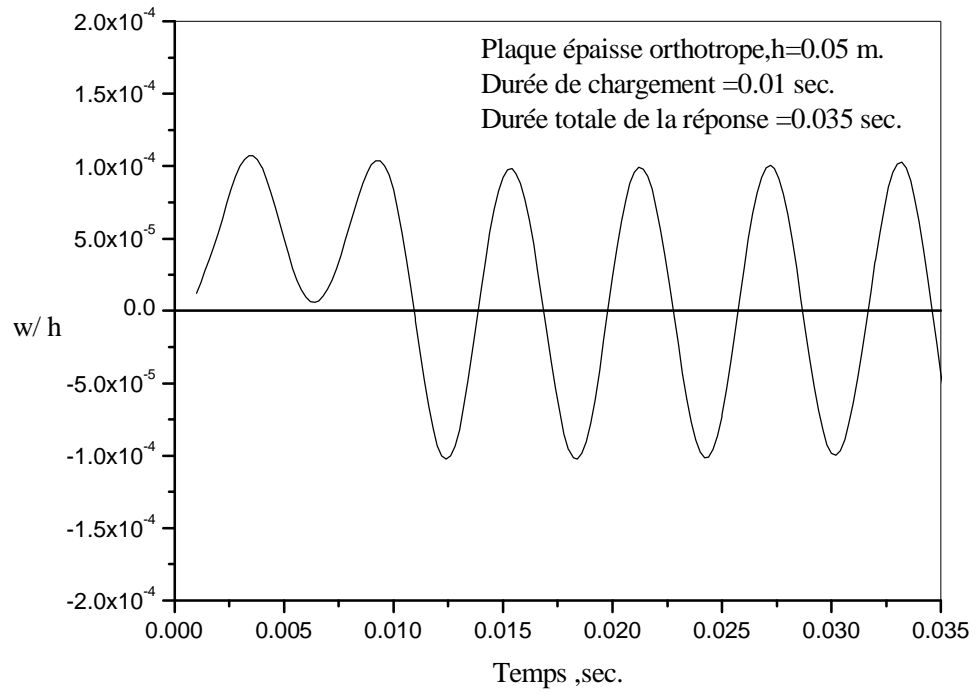


Figure 6.10: Réponse dynamique d'une plaque orthotrope épaisse sous charge impulsive constante.

6.5.2. Cas de charge 2 :

Charge constante avec accroissement fini. (Figure.4.2.b)

6.5.2.1 : Plaque isotrope mince :

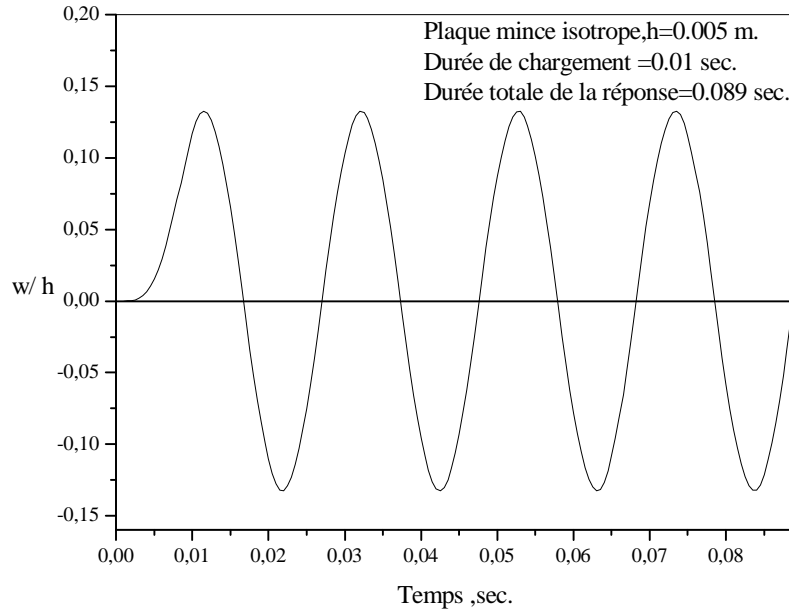


Figure 6.11: Réponse dynamique d'une plaque isotrope mince sous charge impulsive constante avec accroissement fini.

6.5.2.2 : plaque isotrope épaisse :

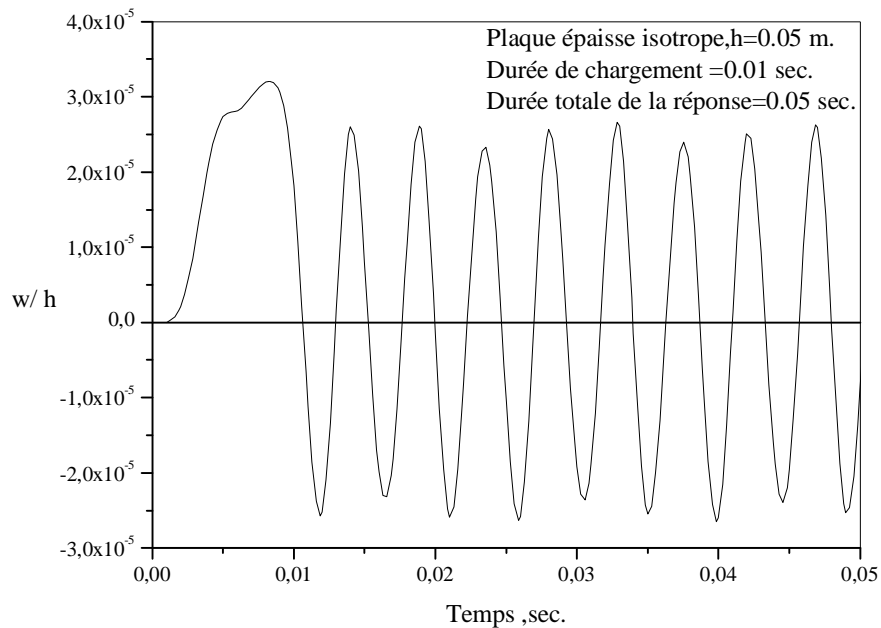


Figure 6.12: Réponse dynamique d'une plaque isotrope épaisse sous charge impulsive constante avec accroissement fini.

6.5.2.3 : plaque orthotrope mince :

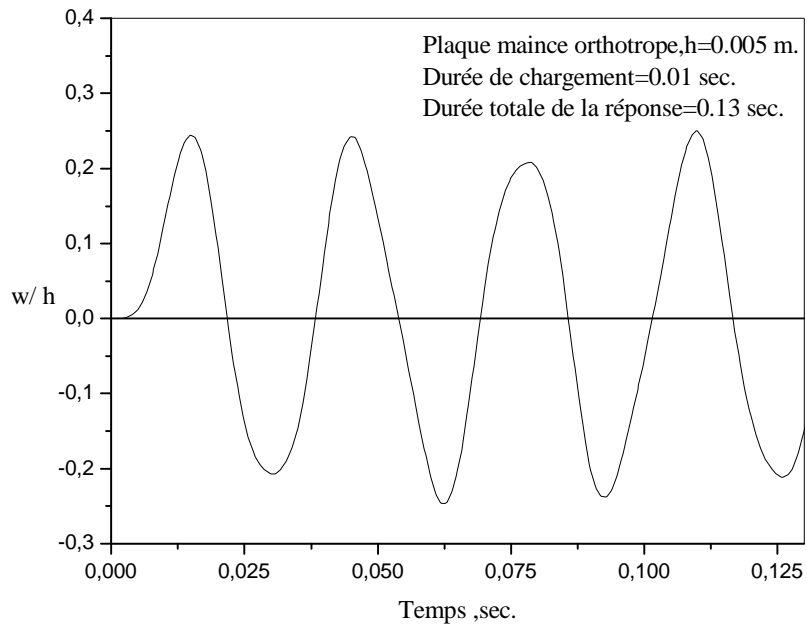


Figure 6.13: Réponse dynamique d'une plaque orthotrope mince sous charge impulsive constante avec accroissement fini.

6.5.2.4 : plaque orthotrope épaisse :

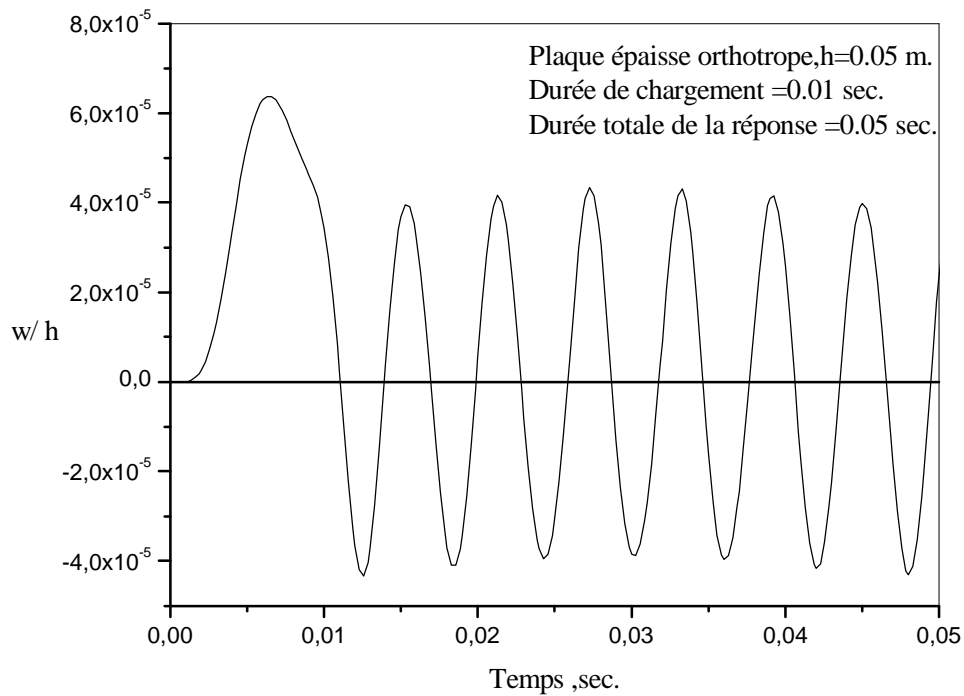


Figure 6.14: Réponse dynamique d'une plaque orthotrope épaisse sous charge impulsive constante avec accroissement fini.

6.5.3. Cas de charge 3 :

Charge triangulaire. (Figure.4.2.c)

6.5.3.1 : Plaque isotrope mince :

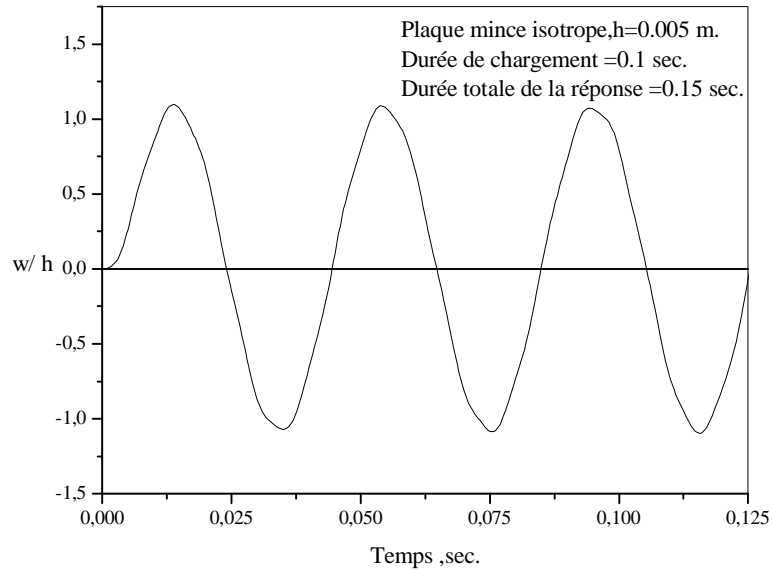


Figure 6.15: Réponse dynamique d'une plaque isotrope mince sous charge impulsive triangulaire.

6.5.3.2 : plaque isotrope épaisse :

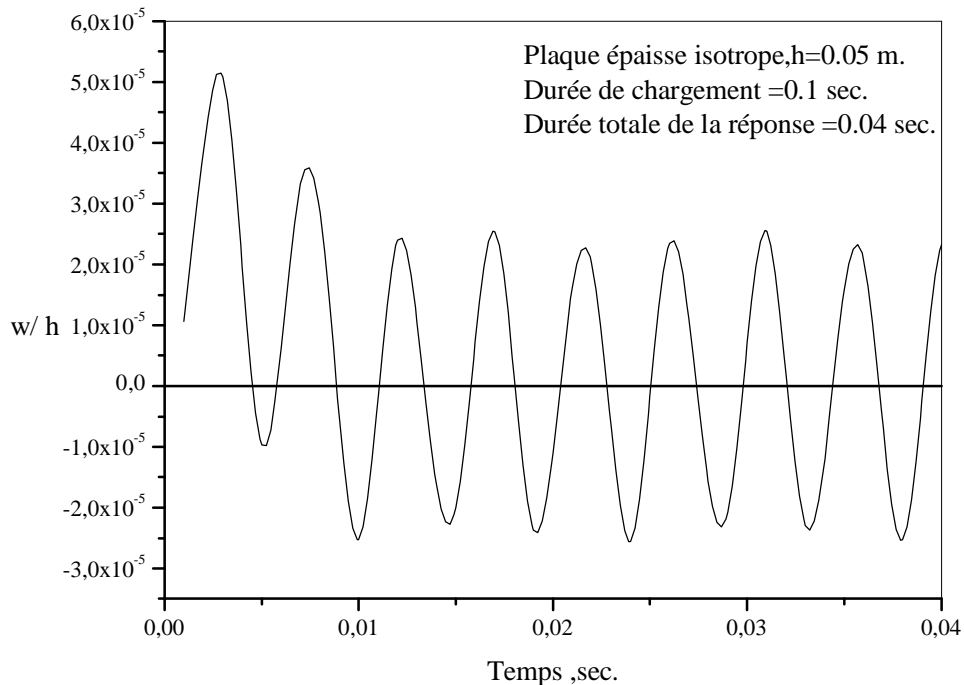


Figure 6.16: Réponse dynamique d'une plaque isotrope épaisse sous charge impulsive triangulaire.

6.5.3.3 : plaque orthotrope mince :

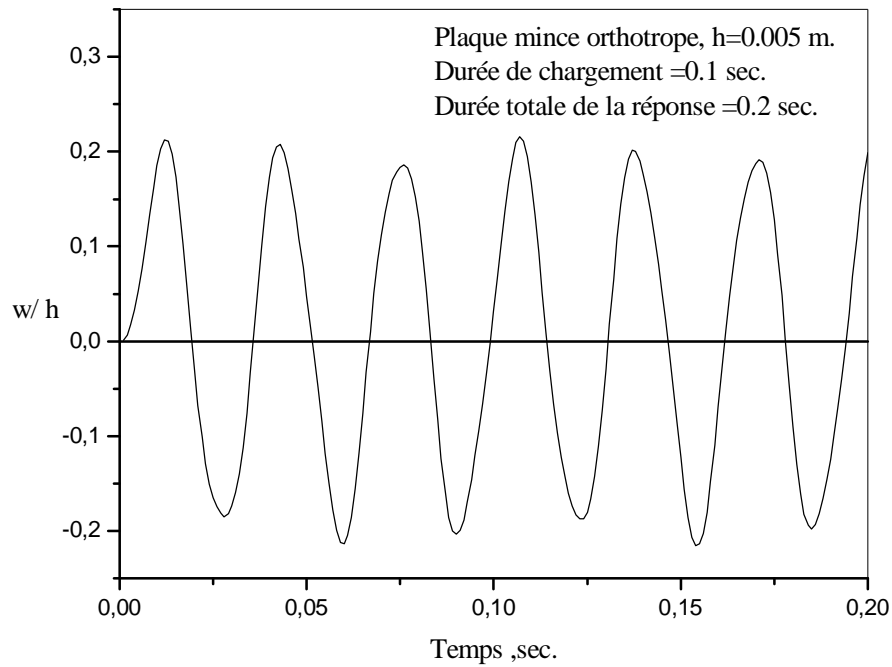


Figure 6.17: Réponse dynamique d'une plaque orthotrope mince sous charge impulsive triangulaire.

6.5.3.4 : plaque orthotrope épaisse :

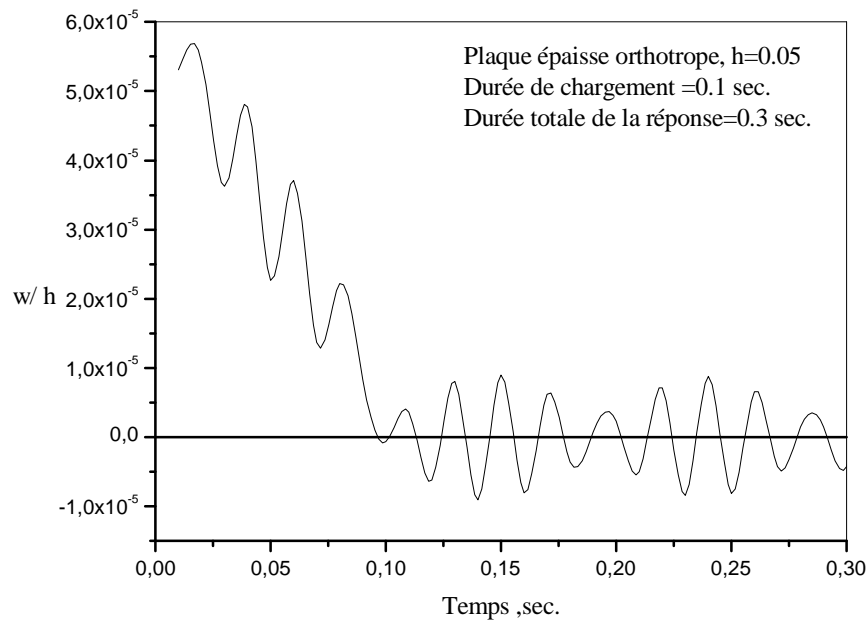


Figure 6.18: Réponse dynamique d'une plaque orthotrope épaisse sous charge impulsive triangulaire.

6.5.4. Cas de charge 4 :

Charge triangulaire avec pic. (Figure.4.2.d)

6.5.4.1 : Plaque isotrope mince :

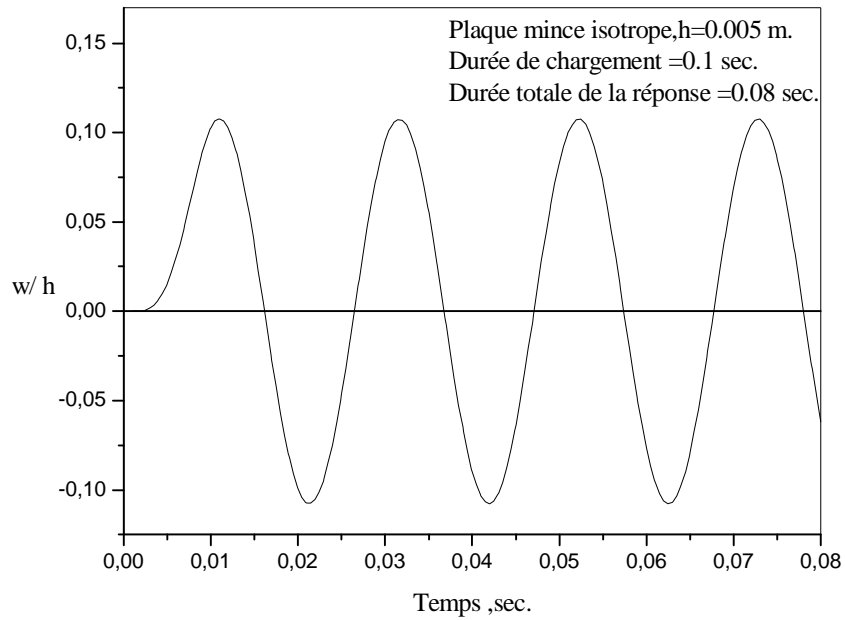


Figure 6.19: Réponse dynamique d'une plaque isotrope mince sous charge impulsive triangulaire avec pic.

6.5.4.2 : plaque isotrope épaisse :

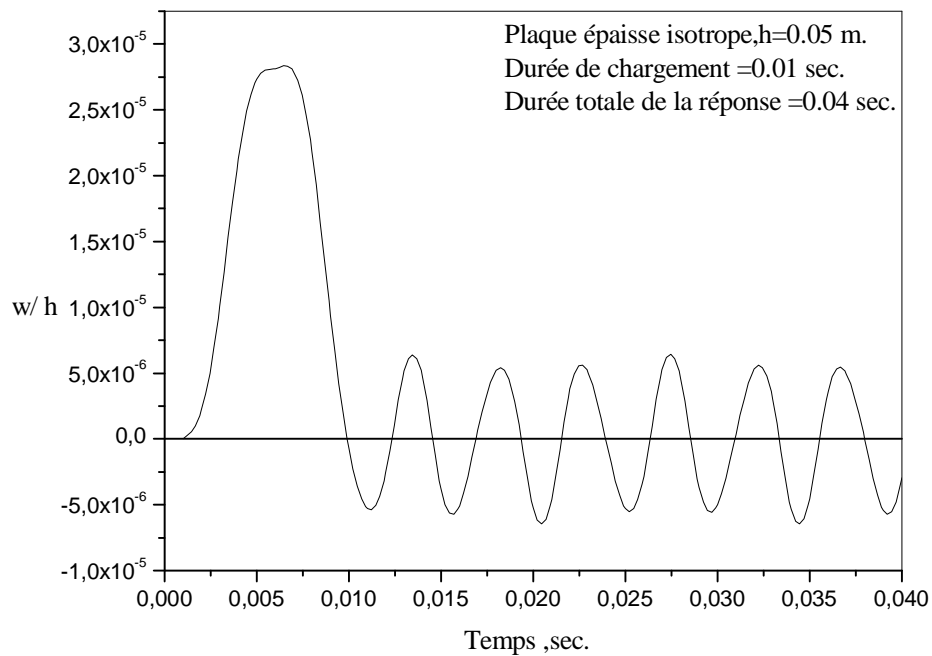


Figure 6.20: Réponse dynamique d'une plaque isotrope épaisse sous charge impulsive triangulaire avec pic.

6.5.4.3 : plaque orthotrope mince :

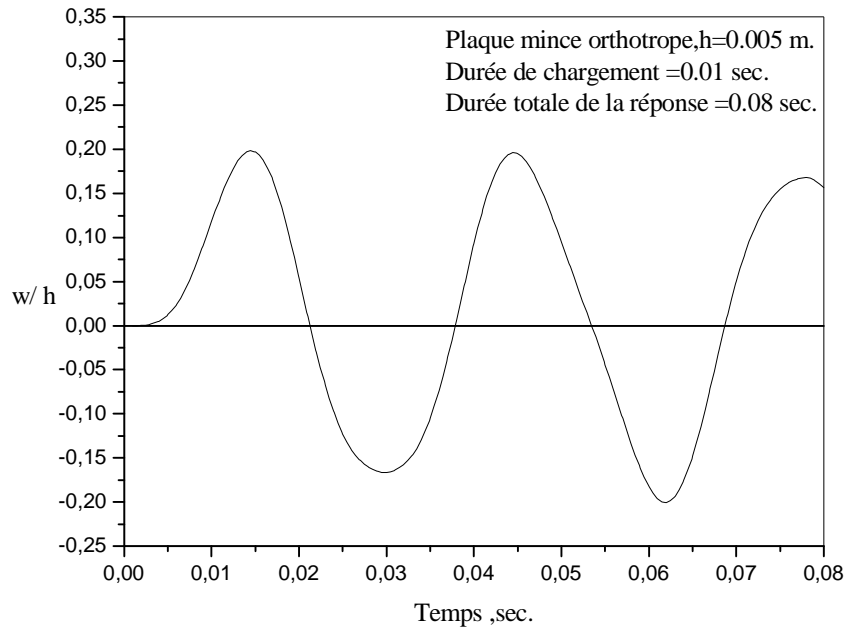


Figure 6.21: Réponse dynamique d'une plaque orthotrope mince sous charge impulsive triangulaire avec pic.

6.5.4.4 : plaque orthotrope épaisse :

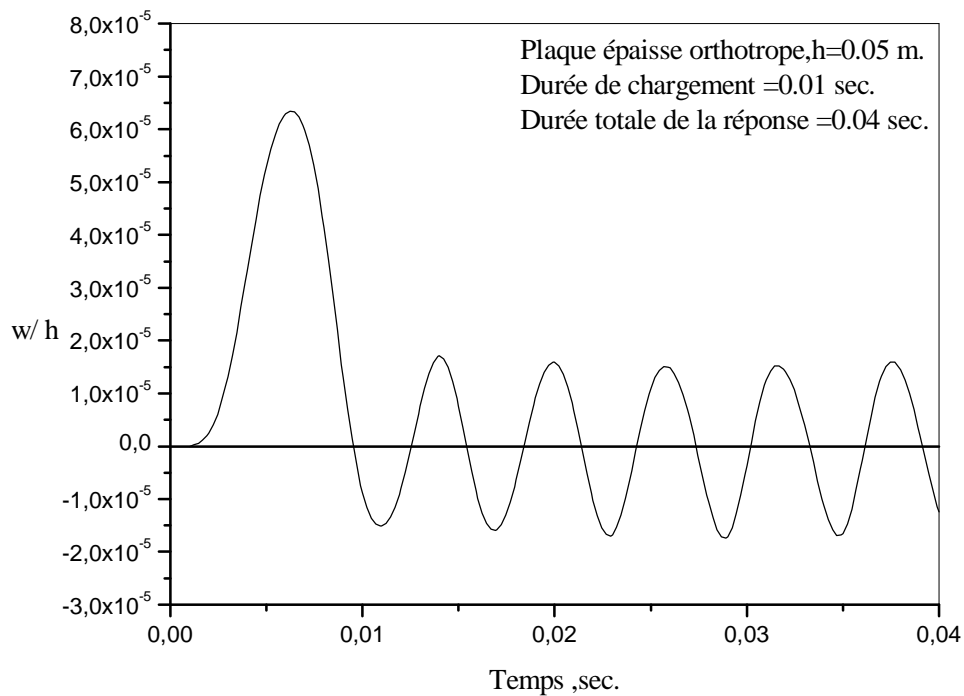


Figure 6.22: Réponse dynamique d'une plaque orthotrope épaisse sous charge impulsive triangulaire avec pic.

CONCLUSION

Dans ce travail de recherche l'analyse de la réponse dynamique de plaques isotrope et orthotrope a été conduite par la méthode des éléments finis. Le comportement sous différentes charges impulsives transversales a été décrit. **L'essentiel contribution de la présente étude, consiste en l'élaboration d'une méthode analytique basée sur la formulation énergétique des équations différentielles aux dérivées partielles du 2^{ème} ordre.**

L'étude est conduite en élasto- plasticité avec prise en compte de la **non linéarité**.

Les résultats des études numériques présentés, ont permis de tirer les conclusions importantes suivantes :

- La fiabilité du programme de calcul numérique modifié [26] pour une bonne estimation du comportement d'une plaque.
- Le déplacement vertical diminue avec l'augmentation de l'épaisseur.
- **L'utilisation de charges impulsives différentes a permis de conclure que les résultats obtenus pour une plaque orthotrope sont similaires du point de vue aspect générale qui est caractérisé par le fait que la réponse de la plaque épouse l'allure de la charge durant le temps de chargement avant la chute et l'oscillation avec l'amplitude de vibration libre après arrêt de chargement.**
- Les propriétés de la plaque ont un effet important sur sa réponse dynamique. La prise en compte des propriétés de la plaque a pour effet de diminuer sa rigidité avec l'augmentation de son épaisseur lorsqu'elle est considérée comme orthotrope.

Par conséquent ce travail de recherche peut être étendu à l'analyse **de** .

La réponse transitoire des éléments soumis à un chargement dynamique est un sujet d'ingénierie d'une importance considérable, et même de nos jours, les éléments ayant le plus d'intérêt sont orthotropes.

Il a été montré dans plusieurs exemples que l'approche analytique acquiert des résultats assez précis avec peu de calcul.

Les résultats obtenus par le code ANALYTIC, sur plusieurs exemples sont comparés à.....

REFERENCES

- [1] Bathe K. J., *Finite element procedures*. Prentice-Hill, Englewood Cliffs., New Jersey, 1996.
- [2] Batoz J. L., Dhatt G., *Modélisation des structures par éléments finis*, vol. 2, 1990. Poutres et Plaques. © Hermès, Paris.
- [3] Bettess P., (1984). *Infinite elements for static problems*. Eng. Comput. Vol.1. March
- [4] Chen J., Dawe D.J., *Nonlinear transient analysis of rectangular laminated plates by a finite strip-mode superposition method*. *Composite structures*. pp. 35:213-28. 1975.
- [5] Chen J., Dawe D.J., Wang S., *Nonlinear transient analysis of rectangular composite laminated plates*. *Composite structures*. N°. 49, pp. 129-139, 2000.
- [6] Chu H. N., Herrmann G., *Influence of large amplitudes on free flexural vibrations of rectangular plates*. *J. Appl. Mech.* 23, 532-540 (1956)
- [7] Clough, R.W., Penzien, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, Singapore, 1975.
- [8] Dumir P. C., Bhaskar A., *Nonlinear forced vibrations of orthotropic thin rectangular plates*. *J. Mech. Sci.* 30, 371-380 (1988)
- [9] Gallagher R.H., *Introduction aux éléments finis*, Editions Pluralis, 1976.
- [10] Ganapathi M., Varadan T.K., Sarma B.S., *Nonlinear flexural vibrations of laminated orthotropic plates*. *Computers & structures*. Vol. 39, N°. 6, pp.685-688, Pergamon press plc. 1991.
- [11] Gmür T., *Dynamique des structures*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1997.

- [12] Gupta A. D., Frederick F. H., Bitting R. L., *Dynamic Analysis Of An Explosively Loaded Hinged Rectangular Plate. Computers & structures*. Vol. 26, N° 1/2, pp.339-344, Pergamon press plc. 1987.
- [13] Haxton R. S. and Haywood J. H., *linear elastic response of a ring stiffened cylindrical to underwater explosion loading. In Advances in Marine Structures. In advances in marine Structures (Edited by C. S. Smith and J. D. Clarke) pp. 366-389. Elsevier, London (1986).*
- [14] Houlston R., and Slater J. E., *Structural response of panels subjected to shock loading, 55th Shock and Vibration Bulletin, Part 2, 149-163 (1985).*
- [15] Huang H., *Numerical analysis of the linear interaction of pressure pulses with submerged structures. In Avances in marine Structures (Edited by C. S. Smith and J. D. Clarke) pp. 347-365. Elsevier, London (1986).*
- [16] Imbert, J. F., *Analyse des structures par éléments fini*. 3e édition, Collection Ecole nationale supérieure de l'aéronautique et de l'espace (Sup'aéro), Cépaduès Editions, Toulouse, 1991.
- [17] Liang C. C., Liao C. C., Ma Y. C., *A Large Deformation Elastic-plastic Dynamic Analysis Of Square Plate And Spherical Shell Subjected To Shock Loading. Computers & structures*. Vol. 39, N° 6, pp.653-661, Pergamon press plc. 1991.
- [18] Owen D.R.J., Hinton. *Finite elements in plasticity. Theory and practice*. Pineridge press Ltd., Swansea. U.K.
- [19] Sathyamoorthy M., *Nonlinear vibration of rectangular plates. J. Sound Vibr.* 58, 371-380 (1988)
- [20] Singhal and Larson, *Computers and Structures*, Vol. 41, N°. 2. pp. 325-330., Pergamon press plc. 1991.

- [21] Timoshenko, S., Goodier, J.N., *Théorie de l'élasticité*, Librairie polytechnique Ch. Béranger, Paris et Liège, 1961.
- [22] Touzot G., Dhatt G., (1981). *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine S.A Editeur Paris et les presses de l'université Laval Québec.
- [23] Manmin H., Petyt M., *Linear vibration Analysis of laminated rectangular Plates using the hierarchical finite element method-I. Free vibration analysis*. *Computers & structures*. Vol. 61, N°. 4, pp. 705-712, Pergamon press plc. 1996.
- [24] Wilson, E. L., *Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures, A Physical Approach with Emphasis on Earthquake Engineering*, University of California at Berkeley.
- [25] Zienkiewicz. (1971). *The finite element method in engineering science*, McGraw-Hill Publishing company limited Maidenhead, Berkshire, England.
- [26] Reddy, J. N., *An introduction to the finite element method*, McGraw-Hill Book company, 1984.

BIBLIOGRAPHIE

- Introduction à la méthode des éléments finis pour les ingénieurs.
 - Ø O. Rahmani. S. Kebdan.
 - Ø EDITIONS « O. P. U. ».
- Aide-mémoire de résistance des matériaux.
 - Ø G. Pissarenko. A.Yakovlev.
 - Ø EDITIONS de Moscou.
- Analyse des structures et milieux continus.
 - Volume 2 : Mécanique des structures.
 - Ø François frey.
 - Ø EDITIONS « presses polytechniques et universitaires romandes ».
- Analyse des structures et milieux continus.
 - Volume 6 : Méthode des éléments finis .
 - Ø François frey.
 - Ø EDITIONS « presses polytechniques et universitaires romandes ».