



UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE

Faculté des sciences de l'ingénieur

Département de Génie Civil

THESE

Présentée pour obtenir le grade de Docteur en Science en Génie Civil

Spécialité : Géotechnique

N° d'ordre :

Série :

Etude de glissement de terrain sous séisme par instabilité matérielle et rupture diffuse

Par

Noura BELHEINE

1. Laboratoire Sols Solides Structure et Risques L3S-R Grenoble. France
2. Université 20 Août 1955 – Skikda. Algérie
3. Université Mentouri de Constantine. Algérie

Thème

Soutenu le: 08.12.2010.

Devant le jury composé de :

Président :	Mr. Hacem HOUARI	Professeur - Université Mentouri Constantine.
Encadreurs :	Mr. Ahcene SERIDI	Professeur - Université Boumerdes.
Co-Encadreur	Mr. Felix DARVE	Professeur - Institut National Polytechnique Grenoble.
Examineurs :	Mr. Mohamed GUENFOUD	Professeur - Université 08 Mai 45 Guelma.
	Mr. Salah KHALFALLAH	Professeur - Université de Jijel.
	Mr. Rachid LASSOUED	M.C. - Université Mentouri Constantine.

Thèse préparée au sein du Laboratoire 3S-R, « Sol, Solide, Structure et Risque » de Grenoble
Dans le cadre d'un programme d'une formation à l'étranger.

“...Il me semble que je n’ai jamais
été qu’un enfant jouant sur une plage,
m’amusant à trouver ici ou là un galet
plus lisse ou un coquillage plus beau
que d’ordinaire, tandis que, totalement
inconnu, s’étendait devant moi le grand
océan de la vérité...”

Isaac Newton

A mes chers parents

Remerciements

Que toutes celles et tous ceux qui ont contribué de loin ou de près à ces travaux de recherche, trouvent ici le témoignage de ma plus sincère gratitude.

En premier lieu, je tiens à remercier Messieurs F.DARVE et F.V. DONZE de m'avoir accueilli dans le laboratoire 3S-R en acceptant mon sujet de recherche. Je les remercie tout particulièrement pour le soutien qu'ils m'ont apporté, pour la confiance qu'ils m'ont accordée, pour leur très grande disponibilité et ces encouragements tout le long de mon travail.

Un énorme et chaleureux merci à Monsieur A. SERIDI, mon directeur de thèse en Algérie, pour leurs orientations constructives et leurs nombreux conseils. Merci beaucoup pour tout le temps qu'il m'a consacré et pour les nombreux encouragements.

Je voudrais également remercier Monsieur M. GUENFOUD qui a suivi mon travail et l'a constamment critiqué et encouragé. Et tout particulièrement, je remercie O.HARIRECHE qui m'a fait partager à distance ces connaissances sur les milieux granulaires.

J'exprime également ma gratitude à Monsieur H. HOUARI pour avoir accepté d'assurer la présidence du jury.

Mes remerciements vont de même à Messieurs R. LASSOUED et S. KHALFALLAH qui ont accepté d'être membres de ce jury.

Un grand merci aux précieux amis que j'ai pu me faire au laboratoire 3SR : L.Sibille, J.P. Plassiard ainsi que tout le personnel administratif : Carole, Shahrazade et Julie. Je les remercie pour leur écoute, leur gentillesse et leurs encouragements jusqu'aux derniers moments. Les moments passés ensemble resteront inoubliables. J'exprime également ma gratitude à J.P.Plassiard dont sa thèse a été un modèle de travail pour moi et qui m'a tant apporté lors de nos échanges sur les éléments discrets. Je remercie aussi tous les collègues du Laboratoire pour la bonne ambiance qu'ils ont fait régner.

Merci également à ma famille, et plus particulièrement à mes parents et mes sœurs, pour m'avoir toujours fait confiance dans mes choix et qui ont suivi avec intérêt les pérégrinations de mon parcours scolaire, étudiantin, et plus encore...

Au moment de tourner cette page, je pense aussi à mes proches et mes amis, qui ont toujours été à mes côtés, même dans les moments les plus durs.

Modélisation des milieux granulaires par une méthode aux éléments discrets avec une nouvelle loi de contact

Chapitre 1. Bibliographie et état de l'art.

Chapitre 2. Développement d'un nouveau modèle discret et modélisation 3D.

Chapitre 3. Comportement macroscopique d'un milieu granulaire sous sollicitations quasi-statiques : expériences et simulation numérique.

Chapitre 4. Analyse de la réponse mécanique macroscopique basée sur une cinématique locale à l'échelle des grains.

Chapitre 5. Analyse du comportement incrémental du modèle discret associé à la MTL.

Chapitre 6. Travail du second ordre macroscopique et microscopique global aux contacts.

Résumé

Récemment, la méthode aux éléments discrets (E.D) est devenue l'une des techniques de modélisation les mieux adaptées à l'analyse du comportement du sol. Grâce à une représentation discrète des discontinuités, le comportement serait décrit à l'échelle du volume élémentaire représentatif comme un ensemble de grains interagissant par des forces de contact.

Ce travail de thèse tente de proposer une méthodologie qui permette de reproduire le comportement mécanique macroscopique d'un milieu granulaire non cohésif. Un modèle numérique tridimensionnel basé sur la méthode aux éléments discrets associé à une nouvelle loi portant sur le roulement inter-granulaire est développé et une démarche spécifique est proposée afin de simuler le comportement mécanique de ces matériaux sous sollicitation triaxiale. Nous tentons aussi de découpler l'ensemble des mouvements pouvant exister lors d'une sollicitation axisymétrique, pour mieux comprendre les mécanismes cinématiques microscopiques responsables de la déformation volumique macroscopique.

De plus, un second problème plus fondamental lié à la rupture dans les milieux granulaires est abordé par la suite en utilisant le même modèle numérique.

Dans le cas des sols et plus généralement dans celui des milieux granulaires, qui sont des matériaux non associés, des ruptures diffuses existent pour des états de contrainte strictement inclus dans la condition limite de plasticité. Ces observations, qui vont à l'encontre de la sécurité et qui contredisent les analyses classiques de la rupture dans les milieux granulaires, impliquent d'étudier de nouvelles approches permettant de décrire ces modes de ruptures particuliers voir de les prédire. Nous proposons dans ce document d'aborder la rupture en un point matériel comme un problème de bifurcation. La non-associativité du modèle numérique a été vérifiée. Les points de bifurcations sont détectés à l'aide du signe du travail du second ordre, soit la forme locale du critère de stabilité de Hill. Les analyses présentées portent principalement sur des simulations discrètes par la méthode aux éléments discrets étoffées par une nouvelle loi portant sur le roulement inter-granulaire. Pour des assemblages numériques soumis à différentes pressions de confinement, un domaine de bifurcation est mis en évidence à l'intérieur du critère de Mohr-coulomb.

Finalement, les origines microscopiques du travail du second ordre sont analysées. Il est vérifié numériquement qu'une relation directe existe entre le travail du second ordre macroscopique d'une part, et les forces inter-granulaires et les déplacements relatifs (translations et rotations) aux points de contacts d'autre part, dans le cas de déformations élastiques et plastiques.

Mots clés

Méthodes aux éléments discrets, milieux granulaires, roulement inter-granulaire, bifurcation, critère de stabilité de Hill, travail du second ordre, recherches directionnelles, enveloppes réponses, mécanisme de roulement, mécanisme de glissement.

Modelling of the granular mediums by the discrete element method with a new contact law

Chapter 1. Bibliography and art state.

Chapter 2. New discrete model development and 3D modelling.

Chapter 3. Macroscopic behavior of a granular medium under quasi-static sollicitations : Experiments and numerical simulation.

Chapter 4. Analysis of the macroscopic mechanical response based on the local kinematics on a grains scale.

Chapter 5. Analysis of the incremental behavior of the discrete model associated with the MTL.

Chapter 6. Macroscopic and microscopic second order work.

Abstract

Recently, the discrete element method (DEM) became one of the modeling techniques best suited to the analysis of the soil behavior. Through a discrete representation of discontinuities, the behavior is described on a representative elementary volume of an assembly of grains interacting by contact forces.

This thesis work presents a methodology which makes it possible to reproduce the macroscopic mechanical behavior of a non-cohesive granular medium. A 3D numerical model based on the discrete element method associated with a new law that takes into account the intergranular rolling is developed and a special approach is proposed in order to simulate the mechanical behavior of these materials under triaxial tests,. To better understand the microscopic kinematics responsible for the macroscopic volumetric deformation, the set of motions which may exist at the time of an axisymmetric loading are uncoupled.

Moreover, a more fundamental problem about failure in granular media is investigated using the same numerical model.

In soils and in granular media in general, which a non-associated materials type, diffuse failure exists for states of stress strictly within plastic limits. These observations, which go against safety and which contradicts conventional approach of failure in granular media, suggest developing new ways to describe these particular modes of ruptures and new techniques to predict them. We propose in this document to approach rupture in a material point as a problem of bifurcation. The non-associated characteristic of the numerical model is checked. The points of bifurcation are detected using the sign of the work of the second order, i.e. the local form of Hill's stability criterion. The analyses presented relate mainly to discrete simulations by the discrete elements method using a new law that takes into account the intergranular rolling. For numerical assemblies subjected to various confining pressures, a field of bifurcations is evidenced inside the Mohr-Coulomb criterion.

Finally, the microscopic origins of the second order work are analyzed. A direct relationship between the second order work on the one hand, and the contact force and the relative displacements (translations and rotations) at contact point on the other hand, are numerically checked for an elastic and plastic strains.

Key Words

Discrete element method, granular medium, inter-granular rolling, bifurcation, Hill's stability criterion, second order work, stress probes, response envelope, rolling mechanism's, sliding mechanism's.

ملخص:

في الأونة الأخيرة ، أصبحت طريقة العناصر المنفصلة واحدة من انسب تقنيات النمذجة لتحليل سلوك التربة. بفضل التمثيل العنصري للثغرات ، يوصف السلوك في نطاق حجم اساسى عنصري ممثل كمجموعة من الحبوب متفاعلة فيما بينها بقوات اتصال.

وبهذه الأطروحة نحاول اقتراح منهجية تمكن من إنتاج السلوكيات الميكانيكية العامة لتربة غير متماسكة. و قد طورنا نموذجا عدديا ثلاثي الأبعاد مبني على طريقة العناصر المنفصلة المرتبطة بالقانون الجديد القائم على الدوران ما بين الحبيبات مع اقتراح نهج محدد لمحاكاة السلوك الميكانيكي للمواد تحت الضغط الثلاثي. ونحن أيضا في محاولة لفصل مجموعة من الحركات التي قد تكون موجودة أثناء التحميل المتناسق مع المحور، لفهم أفضل للآليات الحركية المهجرية الدقيقة المسؤولة عن التشويه الحجمي الإجمالي.

بالإضافة إلى ذلك، ناقشنا مشكلة ثنائية أكثر جوهرية تتعلق بالانهيار في البيئة الحبيبية مع استعمال نفس النموذج العددي.

في حالة التربة وعموما في البيئة الحبيبية، التي تنتسب إلي المواد الغير مرتبطة، توجد انهيارات منتشرة لحالة الاجهادات الموجودة داخل شرط الحد البلاستيكي. هذه الملاحظات، التي تتعارض مع الأمن وتتناقض مع التحليل التقليدي للانهيار في البيئة الحبيبية، تنطوي على استكشاف أساليب جديدة لوصف هذه الانهيارات و تنبؤها. ونقترح في هذا الملف معالجة الانهيار في نقطة مادية كمشكلة التشعب. لقد تم التحقق من عدم الترابط للنموذج العددي. يتم الكشف عن نقاط التشعب باستخدام علامة العمل من الدرجة الثانية، والذي هو شكل محلي لمعيار استقرار هيل.

والتحليل المقدمة مؤسسة على المحاكاة المتقطعة بالطريقة منفصلة العناصر الموسعة بالقانون الجديد القائم على الدوران ما بين الحبيبات. للتجمعات الرقمية التي تتعرض لضغوط مختلفة للاحتواء، سلط الضوء على منطقة التشعب ضمن معايير مور كولومب .

وأخيراً، يتم تحليل جذور المجهرية لعمل من الدرجة الثانية. رقمياً يتم التحقق من وجود علاقة مباشرة بين العمل من الدرجة الثانية من ناحية، والقوات المشتركة بين الحبيبات والحركات النسبية المتصلة بها من ناحية أخرى، وهذا في حالة تشوهات المرنة و البلاستيكية.

Table des matières

Liste des figures

Liste des tableaux

Introduction générale

Chapitre 1. Bibliographie et état de l'art	8
1.1. <i>Introduction</i>	9
1.2. <i>Vocabulaire</i>	10
1.3. <i>La rupture à l'intérieur du critère de Mohr-Coulomb : Vue expérimentale</i>	12
1.3.1. <i>Chemins triaxiaux non drainés pour un sable lâche</i>	12
1.3.2. <i>Chemins triaxiaux proportionnels en déformation</i>	15
1.3.3. <i>Chemins triaxiaux à contrainte déviatorique constante</i>	17
1.4. <i>Remarques</i>	18
1.5. <i>Description des ruptures à l'intérieur de la condition limite de plasticité</i>	18
1.5.1. Critère de stabilité	18
1.5.1.1. Définition de stabilité de Lyapunov	19
1.5.1.2. Critère de stabilité de Drucker	19

1.5.1.3.	Condition de stabilité de Hill : forme globale.....	20
1.5.1.4.	Forme locale de la condition de stabilité de Hill : Le travail du second ordre 22	
1.5.2.	Vers la prédiction d'un mode de bifurcation non localisé : "mode diffus"	24
1.5.2.1.	Condition d'instabilité proposée par Lade	24
1.5.2.2.	Notion de rupture "diffuse" selon Darve et <i>al.</i>	25
1.5.2.3.	Mode diffus selon Nova.....	27
1.6.	<i>Modélisation des matériaux granulaires : Quelle approche choisir – expérimentale ou numérique</i>	29
1.7.	<i>Les modèles numériques basés sur la méthode des éléments discrets</i>	31
1.7.1.	Les modèles d'éléments discrets dans la littérature	31
1.7.2.	Applications en domaine de Génie Civil.....	32
1.7.3.	Simulation d'essais expérimentaux	33
1.7.3.1.	Echantillon représentatif	33
1.7.3.2.	Calibration des paramètres.....	34
1.7.4.	Réponse des modèles d'essais triaxiaux : un saut dans la littérature	35
1.7.4.1.	Comportement singulier des assemblées de sphères	35
1.7.4.2.	Comportement des assemblées d'éléments convexes non sphériques.....	36
1.7.4.3.	Comportement des assemblées d'éléments non convexes.....	39
1.7.4.4.	Des assemblées de sphère avec limitation des mécanismes de rotation	41
1.8.	<i>Importance des rotations et de la résistance au roulement dans la réponse macroscopique</i>	42
1.8.1.	Angle de frottement local, angle de frottement interne et roulement.....	42
1.8.2.	Le rôle de la résistance au roulement dans la réponse macroscopique	45

Chapitre 2. Développement d'un nouveau modèle discret et modélisation en 3D	48
2.1. <i>Introduction</i>	49
2.2. <i>Simulation numérique : Différentes méthodes discrètes</i>	49
2.3. <i>Description de la méthode numérique utilisé</i>	51
2.4. <i>Description du milieu granulaire</i>	52
2.5. <i>Grains et recherche de contacts</i>	54

2.6.	<i>Lois d'interaction</i>	54
2.6.1.	Lois de comportement dans la direction normale au contact	54
2.6.1.1	Comportement élastique normale et choix des raideurs normales.....	54
2.6.1.2.	Interaction avec adhésion normale et adoucissement	56
2.6.1.3.	Contact avec endommagement en décharge (irréversibilité en compression)	58
2.6.1.4.	Contact normal avec limite élastique en compression.....	60
2.6.2.	Lois de comportement dans la direction tangentielle au contact	61
2.6.2.1.	Comportement dans le plan tangentiel et choix des raideurs.....	61
2.6.2.2.	Contact frottant	62
2.6.2.3.	Interaction cohésive	62
	Dans ce type d'interaction et par analogie au cas du comportement purement frottement, le comportement à la rupture d'un matériau purement cohésif, peut être décrit par une cohésion locale notée a_s dont l'unité est une pression. On se donnera un critère de rupture que l'on mettra sous la forme :	62
2.6.2.4.	Interaction cohésive-frictionnelle	63
2.6.3.	Lois de comportement des contacts en rotation	64
2.6.3.1.	Introduction à la loi transfert du moment (MTL)	64
2.6.3.2.	Modèle discret avec MTL.....	65
2.6.3.2.1.	La cinématique de contact entre deux éléments	65
2.6.3.2.2.	Le vecteur angulaire du roulement au niveau du contact	67
2.6.3.2.3.	Le moment résistant au roulement.....	68
2.6.3.2.4.	Choix implicite des paramètres pour appliquer la MTL.....	69
2.6.3.2.5.	Modèle rhéologique avec MTL.....	71
2.6.4	Intégration des équations du mouvement.....	73
2.6.5	Condition de convergence	74

Chapitre 3. Comportement macroscopique d'un milieu granulaire sous sollicitations quasi-statiques : expériences et simulations numérique.....

3.1.	<i>Introduction</i>	77
------	---------------------------	----

3.2.	<i>Comportement mécanique sous sollicitations quasi-statique</i>	77
3.3.	<i>Expériences et leur modélisation numériques</i>	81
3.4.	<i>Caractérisation mécanique d'un sol sous sollicitations triaxiales</i>	85
3.5.	<i>Modélisation numérique d'un milieu granulaire et simulation d'essais triaxiaux véritables</i>	87
3.5.1.	Généralité	87
3.5.2.	Séparation d'échelle et choix d'un Volume Élémentaire Représentatif	88
3.5.3.	Mise en place (protocole de préparation) de l'assemblage granulaire	89
3.5.4.	Validité du modèle numérique généré	91
3.5.5.	Condition de convergence des simulations	92
3.5.5.1.	Choix du pas de temps	92
3.5.5.2.	Amortissement	93
3.5.6.	Quelques idées sur le comportement micromécanique et incrémental des milieux granulaires	93
3.5.6.1.	La distribution statistique des forces de contact	93
3.5.6.2.	Caractérisation du comportement incrémental par une analyse directionnelle à l'échelle macroscopique.....	95
3.5.7.	Simulation d'essais triaxiaux véritables.....	96
3.5.7.1.	Création de l'échantillon numérique et procédure de génération	96
3.5.7.2.	Caractéristiques des échantillons générés	97
3.5.7.2.1.	Energie cinétique et stabilité de l'assemblage numérique.....	97
3.5.7.2.2.	Interpénétration moyenne des sphères.....	98
3.5.7.2.3.	L'anisotropie géométrique.....	99
3.5.7.2.4.	L'homogénéité des forces de contact	102
3.5.7.2.5.	La coordinance	102
3.5.7.3.	Procédure de la simulation numérique de l'essai triaxial	103
3.5.7.4.	Conditions de simulation numérique d'essais triaxiaux	104
3.5.7.4.1.	Asservissement des parois en vitesse et contrainte latérale contrôlée.....	104
3.5.7.4.2.	Hypothèse quasi statique : choix d'une vitesse de sollicitation.....	106
3.5.7.4.3.	Influence de l'amortissement non visqueux	108
3.5.7.5.	Représentativité de l'éprouvette	110
3.5.7.5.1.	Prédiction du modèle du comportement mécanique macroscopique observé en laboratoire	110
3.5.7.5.2.	Dispersion des résultats	111

3.5.7.5.3.	Influence de la taille moyenne des éléments (Nombre d'éléments).....	114
3.5.7.5.4.	Influence de la distribution de tailles des éléments	115
3.5.7.5.5.	Effet de la discrétisation	118
3.5.7.5.6.	Influence du rayon d'interaction.....	119
3.5.8.	Dépendance micro-macro	120
3.5.8.1.	Introduction.....	120
3.5.8.2.	Influence de la porosité initiale de l'échantillon.....	121
3.5.8.3.	Influence de la pression de confinement.....	124
3.5.8.4.	Relation entre les paramètres locaux du modèle et le comportement globale	128
3.5.8.4.1.	Influence de la raideur normale k''	128
3.5.8.4.2.	Influence de la raideur tangentielle k^s	130
3.5.8.4.3.	Influence du frottement local μ	131
3.5.8.4.4.	Influence de la raideur élastique de roulement.....	134
3.5.8.4.5.	Influence de la limite élastique en roulement.....	135
3.5.9.	Bilan des résultats obtenus	137
3.5.10.	Procédure de calibration des paramètres micromécanique à partir du comportement macroscopique expérimental	138
3.5.11.	Application à la prédiction de résultats expérimentaux	139
3.5.11.1.	Résultats expérimentaux	140
3.5.11.1.1.	Caractérisation du sable de Labenne	140
3.5.11.1.2.	Résultats des essais triaxiaux.....	140
3.5.11.1.3.	Présentation du modèle numérique et résultats des simulations.....	141
3.5.11.1.4.	Observation sur le critère de rupture et le concept d'état critique des matériaux granulaires	144
3.5.12.	Unicité du jeu de paramètres du modèle	147
3.5.13.	Prédiction du modèle des enveloppes réponse.....	147
3.5.14.	Validation du modèle à l'échelle microscopique	150
3.5.14.1.	Transmission et distribution des forces internes.....	150
3.5.14.2.	Caractère bimodale de la transmission des forces.....	152
3.5.14.3.	Distribution des orientations des contacts pour la phase forte et faible.....	153
3.6.	<i>Conclusion</i>	154

Chapitre 4. Analyse de la réponse mécanique macroscopique basée sur une cinématique locale à l'échelle des grains	156
4.1. <i>Introduction</i>	157
4.2. <i>Contribution du mouvement des particules dans le comportement mécanique macroscopique d'un milieu granulaire sous sollicitations triaxiales axisymétriques</i>	158
4.2.1. Champs de déplacement des grains.....	159
4.2.2. Champs des rotations des grains.....	161
4.2.3. Modes de mouvement relatif au niveau des contacts par le model DEM-MTL....	164
4.2.3.1. Glissement pur sans rotations.....	166
4.2.3.2. Rotation avec roulement sans glissement.....	166
4.2.3.2. 1. Roulement dont les vitesses de rotation ont le même signe (1 ^{er} mode) " Sliding contacts".....	166
4.2.3.2. 2. Roulement dont les vitesses de rotation ont deux signes opposés (2 ^{ème} et 3 ^{ème} mode) " rolling contacts".....	167
4.2.3.2. 3. Roulement individuel d'une sphère par rapport à l'autre (4 ^{ème} mode).	167
4.3. <i>Lien entre : L'angle de frottement interne, mécanisme de roulement et de glissement, la coordinance et la porosité</i>	173
4.3.1. Mécanismes de "rolling contacts" et de "sliding contacts"	174
4.3.2. Nombre de coordinance.....	174
4.3.3. La porosité	175
4.4. <i>Conclusion</i>	176
Chapitre 5. Analyse du comportement incrémental du modèle discret associé à la MTL	178
5.1. <i>Introduction</i>	179
5.1.1. Travail du second ordre : une variable directionnelle	179
5.1.2. Enveloppes réponses et définition d'une recherche directionnelle	180
5.1.3. Continuité de la réponse incrémentale	181
5.2. <i>Caractérisation du comportement mécanique incrémental du modèle discret avec MTL</i>	182
5.2.1. La simulation numérique des recherches directionnelles	182
5.2.1.1. Procédure de la simulation.....	182
5.2.1.2. Choix de la magnitude de la norme de l'incrément de sollicitation	183

5.2.2.	Evolution des enveloppes réponse le long d'un chemin triaxial drainé	185
5.2.2.1.	Enveloppes réponses totales	185
5.2.2.2.	Enveloppes réponses élastiques	190
5.2.2.3.	Enveloppes réponses plastiques – Règle d'écoulement non associée	192
5.2.2.4.	Définition des contacts glissants et contacts non permanents	200
5.2.3.	Réponses enveloppes : Cas d'un chargement/déchargement	201
5.2.4.	Bilan	204
5.3.	<i>Etude du travail du second ordre</i>	205
5.3	Expression semi-Lagrangienne et Eulérienne du travail du second ordre	205
5.3.2.	Cônes et domaine d'instabilité directionnelle	207
5.3.2.1.	Résultats numériques	208
5.3.2.2.	Cône de direction instable dans le plan d'axisymétrie des contraintes.....	210
5.3.2.3.	Présentation de quelques résultats numériques et expérimentales de la littérature	211
5.4	<i>Influence de la loi moment rotation sur les enveloppes réponses</i>	212
5.4.1.	Enveloppes réponses totales	213
5.4.2.	Enveloppes réponses élastiques	214
5.4.3.	Enveloppes réponses plastiques	215
5.5	<i>Influence de la loi moment rotation sur le travail du second ordre d^2W_{nom}</i>	216
5.5.1.	1 ^{er} Cas : Mêmes Etats de contrainte initiaux	216
5.5.2.	2 ^{ème} Cas : Etats de contrainte initiaux équivalents	217
5.6	<i>Conclusion</i>	219

Chapitre 6. Travail du second ordre microscopique global aux contacts et macroscopique.....221

6.1.	<i>Introduction</i>	222
6.2.	<i>Travail du second ordre discret vu par différents auteurs</i>	222
6.2.1.	Une description liée aux grains, vu par Darve [Darve et al., 2004].....	222
6.2.2.	Une description liée aux contacts, vu par Sibille [Sibille, 2006] sur un modèle discret a rotation libre inspiré du modèle de Mandel [Mandel, 1966]	224
6.3.	<i>Travail du second ordre macroscopique et travail du second ordre global aux contacts avec le modèle discret associé à la MTL</i>	225
6.3.1.	Description liée aux contacts avec le modèle discret associé à la MTL	225

6.3.2.	Approche numérique	226
6.3.2.1.	Calcul du travail du second ordre aux contacts	227
6.3.2.2.	Représentation des résultats numériques d'un modèle DEM à rotations libres sur le sable d'Huston [Sibille, 2006 et d'autres articles]	232
6.3.2.3	Résultats et influence des composantes $d^2W_n^{ct}$, $d^2W_t^{ct}$ et $d^2W_r^{ct}$	233
6.3.2.4	Comparaison entre le travail du second ordre global aux contacts d^2W^{ct} et le travail du second ordre macroscopique d^2W^{macro}	237
6.4.	Conclusion.....	240

Conclusion générale

Bibliographie

Liste des figures

Figure 1.1. Exemple de liquéfaction lors d'un essai triaxial non-drainé, causée par une "perturbation" après le pic de q [Servant et <i>al.</i> , 2005] (a), Rupture par bande de cisaillement lors d'un triaxial drainé sur sable dense [Desrues et Chambon, 2002] d'après [Colliat-Dangus, 1986] (b).....	12
Figure 1.2. Localisation de la ligne d'instabilité [Lade, 1993].	13
Figure 1.3. Région d'instabilité [Lade et <i>al.</i> , 1987, 1988].	13
Figure 1.4. Initiation de l'instabilité du sable de rivière Sacramento lâche [Lade, 1994].....	14
Figure 1.5. Détermination des zones de comportement stable, temporairement instable et potentiellement instable [Lade, 1993].	14
Figure 1.6. Test de stabilité sur sable dense pour une valeur de q fixé et une valeur de $(d\varepsilon_v/d\varepsilon_1)_i < (d\varepsilon_v/d\varepsilon_1)_s$ imposée : pour l'échantillon s'effondre (a), dans le cas contraire la réponse reste stable (b).....	16
Figure 1.7. Chemins drainés à q constant sur sables lâches : évolution des contraintes effectives (a), [Sasitharan et <i>al.</i> , 1993], et réponse en terme variation volumique (b), [Gajo et <i>al.</i> , 2000].	17
Figure 1.8. Localisation de la ligne d'instabilité d'après Lade [Lade, 1992] pour des conditions non drainées.....	25

Figure 1.9. Tracé du domaine d’instabilité suivant le critère de positivité du travail du second ordre dans le plan déviatoire des contraintes pour un sable lâche et dense. [Darve et Laouafa, 2000].....	27
Figure 1.10. Limite du domaine de bifurcation dans le plan d’axisymétrie des contraintes et cônes de direction instables [Darve et <i>al.</i> , 2004].	27
Figure 1.11. Lieux de perte d’unicité constitutive selon Omposimato et Nova [Imposimato et Nova , 1998].....	29
Figure 1.12. Schéma d’homogénéisation.	34
Figure 1.13. Réponse d’une assemblée de sphères pour différentes valeurs de l’angle de frottement microscopique.....	36
Figure 1.14. Formes d’éléments proposées par Nougier-Lehon [Nougier-Lehon et <i>al.</i> , 2003].....	37
Figure 1.15. Forme d’éléments proposées par Potapov et Campbell [Potapov and Campbell, 1998].....	37
Figure 1.16. Formes d’éléments proposées par Pournin et Liebling [Pournin and Liebling, 2005].....	37
Figure 1.17. Résultats obtenus par Kuhn et Bagi [Kuhn and Bagi, 2004] pour diverses formes d’éléments pour un essai biaxial en 2D (à gauche) et triaxial (à droite).....	38
Figure 1.18. Formes d’éléments proposées par [Emeriault and Claquin, 2004 Salot].....	38
Figure 1.19. Résultats obtenus par Emeriault et Claquin [Emeriault et Claquin, 2004] pour des essais biaxiaux.	38
Figure 1.20. Catalogue des grains en 2D pour la modélisation du sable de Tayoura par [Matsushima et Saomoto, 2002].....	39
Figure 1.21. Forme d’éléments composés de 100 sphères en 3D pour la modélisation du sable de Tayoura par [Matsushima et Saomoto, 2002].	40
Figure 1.22. Comparaison des simulations pour des échantillons composés de sphères et d’éléments de deux sphères [O’Sullivan et Bray, 2005].....	40
Figure 1.23. Angles de frottement et de dilatance en fonction de l’angle de frottement microscopique obtenus par Suiker et Fleck [Suiker et Fleck, 2004] avec et sans rotation des éléments.....	41
Figure 1.24. Comparaison entre les déviateurs et déformations volumiques obtenus expérimentalement et numériquement par Calvetti et al. [Calvetti et <i>al.</i> , 2003].	42

Figure 1.25. Variation de la rotation moyenne totale et dans la bande de cisaillement en fonction de la déformation axial.....	44
Figure 1.26. Le champ de rotation d'un milieu granulaire semi-infini soumis à l'application d'un poinçonnement. Rotation libre (à gauche) et rotation restreinte (à droite).	44
Figure 1.27. Comparaison entre les déviateurs et déformations volumiques obtenus numériquement avec la DEM à rotation libre, rotation bloquées et avec la MDEM avec une résistance au roulement [Iwashita et Oda, 2004].	45
Figure 1.28. Influence de la résistance au roulement sur le comportement contrainte – déplacement d'après [Jianfeng et al., 2004]......	46
Figure 1.29. Résultats obtenus par Ming Jing et al. [Jiang et al., 2005] avec un nouveau modèle discret prenant en compte de la résistance au roulement.....	47
Figure 1.30. Relation entre le paramètre de forme δ représentant la résistance au roulement et l'angle de frottement interne par Ming Jing et al. [Jiang et al., 2005]......	47
Figure 2.1. Contact avec les méthodes S-DEM.....	50
Figure 2.2. Contact avec les méthodes NS-DEM.....	51
Figure 2.3. Schématisation du cycle de calcul de la Méthode des Eléments Discrets.	52
Figure 2.4. Définition des notations utilisées	53
Figure 2.5. Interaction normale et tangentielle entre deux sphères.....	55
Figure 2.6. Interaction avec adhésion normale et adoucissement	58
Figure 2.7. Interaction pris en compte un endommagement en décharge. Prise en compte de déformations irréversibles après une phase de compression.....	59
Figure 2.8. Interaction pris en compte un comportement à limite élastique en compression normale.....	61
Figure 2.9. Cinématique d'un contact au temps t et $t + \Delta t$	67
Figure 2.10. Définition du moment résistant au roulement agissant dans le plan de contact .	69
Figure 2.11. Modèle rhéologique avec MTL.....	72
Figure 2.12. Modèle des lois de contact	72
Figure 3.1. Essai triaxial de révolution (à gauche) et essai à la boîte de cisaillement direct (à droite).....	76
Figure 3.2. Appareil de l'essai triaxial « vrai »	77
Figure 3.3. Comportement mécanique macroscopique obtenu lors d'essais biaxiaux de révolution et triaxiaux vrais d'après Degny [Degny, 1984]......	78
Figure 3.4. Histoire du chargement q imposé au cours du temps [Di prisco et Imposimato, 1997]......	79

Figure 3.5. Evolution de σ_1 au cours du temps à déformation imposées. [Di Benedetto et al., 1997].....	79
Figure 3.6. Processus d’analogie entre les essais de caractérisation, les ouvrages réels et numériques.	80
Figure 3.7. Model numérique :.....	81
Figure 3.8. L’essai triaxial vrai (éprouvette cubique ou parallélépipède) et sa modélisation tridimensionnelle (une paroi n’apparaît pas pour pouvoir visualiser l’échantillon numérique composé de 10 000 éléments sphérique).	83
Figure 3.9. Les réponses mécaniques type obtenues pour des essais biaxiaux de révolution. Contrainte-déformation (à gauche) et déformation volumique-axiale (à droite).	84
Figure 3.10. Les paramètres caractérisant les courbes contrainte-déformation axiale et déformation volumique-déformation axiale.	85
Figure 3.11. Représentation d’un VER dans un milieu granulaire.	87
Figure 3.12. Réseau des forces de contact dans un assemblage bidimensionnel. La largeur des traits est proportionnelle à l’intensité de la force [Radjai, 1996].....	92
Figure 3.13. Principe de la procédure de la mise en place de l’échantillon par grossissement dynamique.	95
Figure 3.14. Evolution de la porosité et du rayon moyen au cours de la phase de grossissement dynamique.....	95
Figure 3.15. Evolution de l’énergie cinétique du système au cours de la phase du grossissement dynamique.....	96
Figure 3.16. Evolution de l’interpénétration moyenne au cours de la phase de grossissement.	97
Figure 3.17. Distribution des orientations de contacts avec effet de parois dans les plans (x-y), (x-z), (y-z).	99
Figure 3.18. Distribution des orientations de contact sans effet de parois dans les plans (x-y), (x-z), (y-z).	99
Figure 3.19. Les forces normales de contact dans l’échantillon de référence (les épaisseurs des traits sont proportionnelles à la force). Section suivant les plans xx, yy et zz.....	100
Figure 3.20. Evolution de la coordinance globale et interne de l’échantillon de référence lors du processus de grossissement.	101
Figure 3.21. Procédure de la simulation numérique de l’essai triaxial.	102

Figure 3.22. Evolution de la pression de confinement (à gauche) et de l'énergie cinétique (à droite) au cours de la simulation.	103
Figure 3.23. Influence de la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}_I$ imposée sur un essai triaxial à 100 kPa de confinement.	106
Figure 3.24. Dépendance linéaire de la contrainte au pic q^{pic} en fonction de la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ (à gauche), Influence de la vitesse de sollicitation sur la déformation au pic ε_I^{pic} (à droite).	106
Figure 3.25. Influence de l'amortissement non visqueux sur un essai triaxial à 100 kPa de confinement.	107
Figure 3.26. Dépendance linéaire de la contrainte au pic q^{pic} en fonction du coefficient d'amortissement λ	107
Figure 3.27. Simulation d'un essai triaxial avec et sans utilisation de la MTL. Réponse mécanique macroscopique en terme contrainte-déformation (à gauche) et La variation volumique en fonction de la déformation axiale (à droite).	109
Figure 3.28. La distribution de tailles des quatre échantillons réputée identiques.	111
Figure 3.29. Simulation d'un essai triaxial sur quatre échantillons numériques générés d'une manière réputée identique.	111
Figure 3.30. Evolution du nombre de coordination pour les quatre échantillons.	112
Figure 3.31. Influence de la taille moyenne des éléments sur le comportement initial.	113
Figure 3.32. Indépendance comportementale de la phase déviatoire.	113
Figure 3.33. Décalage homothétique de la courbe granulométrique réelle vers les tailles des éléments de l'échantillon numérique (Sable de Hostun), d'après [Sibille, 2006].	114
Figure 3.34. Distribution de tailles des éléments pour différentes valeurs des paramètres de la fonction aléatoire de Weibull (α, γ)	115
Figure 3.35. Influence de la distribution de taille sur le comportement déviatoire pour différentes valeurs de α et γ paramètres de la fonction aléatoire de Weibull.	115
Figure 3.36. Les différentes tailles géométriques des échantillons à modéliser (en mètre). ..	116
Figure 3.37. Evolution des déviateurs de contrainte et déformation volumique en fonction de la déformation axiale pour les trois tailles géométriques.	117
Figure 3.38. Influence du rayon d'interaction sur le comportement déviatoire.	118
Figure 3.39. Evolution de la coordination pour deux rayons d'interaction différents au cours de la simulation du comportement déviatoire.	118

Figure 3.40. Evolution de la coordination en fonction de la déformation axiale pour les différentes valeurs de la porosité.....	120
Figure 3.41. Influence de la porosité sur les caractéristiques élastiques. Dépendance du module élastique initial E_0 et du coefficient de Poisson ν	120
Figure 3.42. Simulations d'essais triaxiaux pour différentes porosités initiales.	121
Figure 3.43. Influence de la porosité sur le déviateur au pic q^{pic}	122
Figure 3.44. Influence de la pression de confinement sur le comportement initial $\varepsilon_a = 10^{-5}$	124
Figure 3.45. Evolution de la coordination en fonction de la pression de confinement.	124
Figure 3.46. Agrandissement de la partie initiale de la phase déviateur au régime correspondant à $\varepsilon_a = 0.1\%$ pour les différentes pressions de confinement.	124
Figure 3.47. Dépendance du module sécant de la pression de confinement pour une déformation axiale $\varepsilon_a = 0.1\%$	125
Figure 3.48. Influence de la pression de confinement sur le rapport des contraintes q/p et sur la variation volumique en fonction de la déformation axiale. Les simulations sont effectuées avec et sans MTL.	125
Figure 3.49. Figure 3.49. Enveloppe de rupture dans le plan de Mohr-Coulomb pour une gamme de pression de confinement [50, 100, 200, 300] inférieur à 1 MPa. Les simulations sont réalisées avec et sans MTL.	126
Figure 3.50. Dépendance du comportement élastique global de la rigidité normale local k^n . Module de Young (à gauche) et coefficient de Poisson (à droite).	127
Figure 3.51. Evolution du déviateur de contrainte au cours des simulations pour différentes valeurs de k^n	127
Figure 3.52. Evolution du module initial E_0 (à gauche) et du coefficient de Poisson ν (à droite) en fonction de α	129
Figure 3.53. Influence du rapport α sur le comportement déviatoire.	129
Figure 3. 54. Dépendance entre l'angle de frottement local μ et le comportement initial défini par le module initial E_0 (à gauche) et le coefficient de Poisson ν (à droite).	131
Figure 3.55. Dépendance entre l'angle de frottement local μ et le frottement global au pic φ^{pic} . L'ensemble des simulations numériques font intervenir des éléments circulaires et sphériques aux rotations libres.	131

Figure 3.56. Evolution du comportement déviateur (à gauche) et variation volumique (à droite) en fonction de l'angle de frottement local.	132
Figure 3.57. Influence du paramètre adimensionnel de rigidité en roulement β_r sur le module initial E_0 (à gauche) et le coefficient de Poisson ν (à droite).	133
Figure 3.58. Evolution du comportement globale en terme déviateur (à gauche) et variation volumique (à droite) en fonction du paramètre adimensionnel de rigidité en roulement β_r	133
Figure 3.59. Influence du paramètre adimensionnel de rigidité en roulement η_r sur le module initial E_0 (à gauche) et le coefficient de Poisson ν (à droite).	134
Figure 3.60. Evolution du comportement globale en terme déviateur (à gauche) et variation volumique.....	134
Figure 3.61. Procédure de calibration des paramètres du modèle.	137
Figure 3. 62. Courbe granulométrique et photo du sable de Labenne.....	138
Figure 3.63. Courbes $q - \varepsilon_a$ expérimentales (à droite) et Courbes $\varepsilon_v - \varepsilon_a$ expérimentales (à gauche)	139
Figure 3.64. Comparaison des résultats des simulations numériques avec les résultats expérimentaux pour les essais $\sigma_3 = 100\text{kPa}, 200\text{kPa}$ et 300kPa	141
Figure 3. 65. Courbes déviatoriques dans le plan $(p : q)$	142
Figure 3.66. Représentation de l'état critique dans les diagrammes : $e - p$ (à gauche) et $e - \log p$ (à droite).....	143
Figure 3.67. Variation du module initial E_0 (à droite) et coefficient de Poisson ν (à gauche) des simulations numériques et des essais expérimentaux.	144
Figure 3. 68. Variation de l'angle de frottement au pic φ^{pic} (à droite) et angle de dilatance au pic ψ^{pic} (à gauche) des simulations numériques et des essais expérimentaux.....	144
Figure 3.69. Représentation des Cercles de Mohr pour le comportement au pic (à gauche) et le comportement résiduel (à droite) des simulations numériques.	145
Figure 3.70. Comparaison des enveloppes réponses expérimentales pour trois auteurs : Royis & Doanh, Clavetti et al et Sibille extrait de la thèse de [Sibille 2006].	146
Figure 3.71. Enveloppes réponses obtenues par le modèle discret avec MTL sur le sable de Labenne pour différents états de contraintes initiaux.....	147

Figure 3.72. Carte des forces normales dans une potion dans un assemblage de 10 000 sphères en équilibre quasi statique (L'épaisseur du trait est proportionnelle à la valeur de la force). Rouge : contact faible, Noir : contact fort.	148
Figure 3.73. Densité de probabilité P_{f_n} et P_{f_t} de force normales et tangentielles normalisées $f_n / \langle f_n \rangle$ et $f_t / \langle f_t \rangle$: tracé semi logarithmique (à gauche) et log-log (à droite).	150
Figure 3.74. Valeur du rapport q/p en fonction de ξ est déduit uniquement des contacts vérifiant $f_n < \xi \langle f_n \rangle$	151
Figure 3.75. Distribution des orientations de contact suivant leur appartenance à la phase faible ou forte ; Z est la direction de compression.	152
Figure 4. 1. La structure macroscopique et microscopique de l'assemblage granulaire avant et après application des sollicitations triaxiales.	158
Figure 4. 2. Champs de déplacement des centres des particules à $\varepsilon_a = 1\%$ et ε_a^{pic}	160
Figure 4. 3. Distribution des rotations des grains à ε_1^{pic}	161
Figure 4. 4. Evolution de la rotation moyenne incrémentale des particules suivant les trois axes (x, y, z) en fonction de la déformation axiale.	162
Figure 4. 5. Evolution de l'écart type en fonction de la déformation axiale pour le modèle à rotations libres (sans MTL) (a), le modèle à rotations bloquées (forte MTL) (b) et le modèle à rotations contrôlées (MTL calibré) (c)	163
Figure 4. 6. Cinématique d'un contact au temps t et $t + \Delta t$	165
Figure 4. 7. Différentes possibilités de mouvement inter-granulaire vues par le modèle DEM-MTL.	168
Figure 4. 8. Réponse macroscopique globale sous sollicitations triaxiales expérimentales et numériques obtenues par les trois modèles : Sans MTL (à rotations libres), avec une MTL à paramètres calibrés (rotations contrôlées) et avec une forte MTL.	170
Figure 4. 9. Histogramme de la fraction SR pour un état de déformation $\varepsilon_a = 1\%$	171
Figure 4. 10. Histogramme de la fraction SR pour un état de déformation $\varepsilon_a = 1\%$	172
Figure 4. 11. Evolution du rapport $\frac{N_r}{N_s}$ en fonction de la déformation axiale pour le modèle à rotation libre (a) modèle avec une forte MTL (b) et modèle a rotations contrôlées (c).	173

Figure 4. 12. Lien entre l'angle de frottement local, la fraction S_f et R_f pour les deux modèles à rotations libres et à rotations contrôlées pour $\varepsilon_a = 6\%$	175
Figure 4. 13. Lien entre l'angle de frottement local, la coordinence (a) et la porosité (b) pour les deux modèles à rotations libres et à rotations contrôlées.....	176
Figure 5.1. Définition des plans d'axisymétrie de Rendulic. Recherche directionnelle en contrainte (a), Enveloppe réponse en déformation (b).....	181
Figure 5.2. Continuité des réponses incrémentales.	181
Figure 5.3. Chemins de déformation pour des recherches directionnelles à partir d'un même état initial ($\sigma_3 = 100\text{kPa}$, $\eta = 0.42$) et pour $\ d\bar{\sigma}\ = 0.1, 1.0, 10\text{kPa}$	184
Figure 5.4. Chemins de déformation pour des recherches directionnelles à partir d'un même état initial ($\sigma_3 = 200\text{kPa}$, $\eta = 0.8823$) et pour $\ d\bar{\sigma}\ = 0.1, 1.0, 10\text{kPa}$	184
Figure 5.5. Les états d'équilibre étudiés pour $\sigma_3 = 100\text{kPa}$, $\sigma_3 = 200\text{kPa}$ et $\sigma_3 = 300\text{kPa}$	186
Figure 5.6. Enveloppes réponses pour l'échantillon de référence et $\sigma_3 = 100\text{kPa}$	187
Figure 5.7. Enveloppes réponses pour l'échantillon de référence et $\sigma_3 = 200\text{kPa}$	188
Figure 5.8. Enveloppes réponses pour l'échantillon de référence et $\sigma_3 = 300\text{kPa}$	189
Figure 5.9. Enveloppes réponses totales et élastiques pour $\sigma_3 = 100\text{kPa}$ et $n = 0.92$ (a), et $\sigma_3 = 200\text{kPa}$, $\sigma_3 = 100\text{kPa}$ et $n = 0.95$ (b).....	191
Figure 5.10. Chemin de sollicitation en contrainte, chargement/déchargement (gauche) ; chemin de réponse en déformation (droite) pour un angle de frottement intergranulaire proche de 90° . $\sigma_3 = 100\text{kPa}$ et $n = 0.92$	191
Figure 5.11. Enveloppes réponses élastiques pour un état isotrope et un état anisotrope ($\sigma_3 = 200\text{kPa}$).....	192
Figure 5.12. Enveloppe réponse plastiques pour l'échantillon de référence à $\sigma_3 = 100\text{kPa}$ et $n = 0.92$ (a), $\sigma_3 = 200\text{kPa}$ et $n = 1.105$ (b), $\sigma_3 = 300\text{kPa}$ et $n = 1.071$ (c).	193
Figure 5.13. Norme des déformations plastiques $\ d\bar{\varepsilon}_p\ $ et élastiques $\ d\bar{\varepsilon}_e\ $ (a), direction des déformations plastiques β_p et élastiques β_e (b), en fonction de la direction de sollicitation α . Echantillon de référence avec $\sigma_3 = 100\text{kPa}$ et $n = 0.92$	195

Figure 5. 14. Norme des déformations plastiques $\|d\vec{\varepsilon}_p\|$ et élastiques $\|d\vec{\varepsilon}_e\|$ (a), direction des déformations plastiques β_p et élastiques β_e (b) en fonction de la direction de sollicitation α . Echantillon de référence avec $\sigma_3 = 200\text{kPa}$ et $n = 1.105$ 195

Figure 5. 15. Norme des déformations plastiques $\|d\vec{\varepsilon}_p\|$ et élastiques $\|d\vec{\varepsilon}_e\|$ (a), direction des déformations plastiques β_p et élastiques β_e (b) en fonction de la direction de sollicitation α . Echantillon de référence avec $\sigma_3 = 300\text{kPa}$ et $n = 1.071$ 196

Figure 5. 16. Direction en contrainte engendrant un chargement au sens de l'élasto-plasticité classique 196

Figure 5. 17. Norme des déformations plastiques $\|d\vec{\varepsilon}_p\|$ en fonction de la direction de sollicitation α . Echantillon de référence avec $\sigma_3 = 100\text{kPa}$ pour différents états d'équilibre. 197

Figure 5. 18. Norme des déformations plastiques $\|d\vec{\varepsilon}_p\|$ en fonction de la direction de sollicitation α . Echantillon de référence avec $\sigma_3 = 200\text{kPa}$ pour différents états d'équilibre. 198

Figure 5. 19. Norme des déformations plastiques $\|d\vec{\varepsilon}_p\|$ en fonction de la direction de sollicitation α . Echantillon de référence avec $\sigma_3 = 300\text{kPa}$ pour différents états d'équilibre. 199

Figure 5. 20. Direction de l'écoulement plastique et de la normale à la surface de limite élastique, le trait fin continu représente le critère de Mohr-Coulomb..... 199

Figure 5. 21. Proportions de contacts glissants et non-permanents en fonction de la direction de sollicitation α pour $\sigma_3 = 100\text{kPa}$ et $n = 0.75$ (a), et pour $\sigma_3 = 100\text{kPa}$ et $n = 1.391$ (b). .. 200

Figure 5. 22. Proportions de contacts glissants et non-permanents (à gauche), Norme des déformations plastiques $\|d\vec{\varepsilon}_p\|$ (à droite) en fonction de la direction de sollicitation α pour $\sigma_3 = 100\text{kPa}$ et $n = 0.75$ 201

Figure 5.23. Réponse mécanique macroscopique en terme contrainte-déformation. Cas d'un chargement/déchargement..... 202

Figure 5.24. Comparaison des enveloppes réponses totales (a) et élastiques (b) pour les deux états d'équilibre B et B' 203

Figure 5.25. Enveloppes réponses totales et élastique de l'état d'équilibre B' 203

Figure 5.26. Enveloppe réponse plastiques pour les deux états d'équilibre B et B'	204
Figure 5. 27. Direction des déformations plastiques β_p (a), Norme des déformations plastiques $\ d\vec{\varepsilon}_p\ $ (b), en fonction de la direction de sollicitation α	204
Figure 5.28. Expression semi-Lagrangienne et Eulérienne du travail du second ordre calculé à partir de recherches directionnelles.	207
Figure 5.29. Représentation circulaire du travail du second ordre normalisé d^2W_{nom} pour l'échantillon de référence.	209
Figure 5.30. Comparaison de la direction β des réponses en déformation pour l'échantillon de référence.	210
Figure 5.31. Cône de direction instable dans le plan d'axisymétrie des contraintes $(\sqrt{2}\sigma_3, \sigma_1)$. Les cercles représentent les états d'équilibre en contrainte, le cône représente le cône de direction instable.	210
Figure 5.32. Présentation circulaire du travail du second ordre normalisé d^2W_{nom} calculé d'après les recherches directionnelles réalisées par Sibille [Sibille, 2006] sur le sable d'Hostun pour trois échantillons a densité différente.	211
Figure 5.33. Présentation circulaire du travail du second ordre normalisé d^2W_{nom} calculé d'après les recherches directionnelles réalisées par Royis et Doanh [Royis et al., 1998] sur un sable d'Hostun Dense.	212
Figure 5. 34. Enveloppes réponses élastiques pour l'état isotrope avec et sans MTL.	213
Figure 5.35. Comparaison des enveloppes réponses totales avec et sans MTL.	214
Figure 5.36. Comparaison des enveloppes réponses élastiques avec et sans MTL.	214
Figure 5.37. Comparaison des enveloppes réponses plastiques avec et sans MTL.	215
Figure 5. 38. Norme des déformations plastiques $\ d\vec{\varepsilon}_p\ $ en fonction de la direction de sollicitation α avec et sans MTL.	216
Figure 5. 39. Représentation circulaire du travail du second ordre normalisé d^2W_{nom} du modèle discret avec et sans MTL pour un même état de contrainte initial.	217
Figure 5. 40. Représentation circulaire du travail du second ordre normalisé d^2W_{nom} du modèle discret avec et sans MTL pour un état de contrainte initial équivalent.	218
Figure 5.41. Proportions de contacts glissants et non-permanents en fonction de la direction de sollicitation α pour $n = 0.75$ (avec MTL) équivalent à $n = 0.4893$ (sans MTL) (a), et $n = 0.92$ (avec MTL) équivalent à $n = 0.6002$ (sans MTL) (b).	219

Figure 6.1. Configuration initiale et conditions aux limites de l'empilement de rouleaux [Darve et <i>al.</i> 2003].....	224
Figure 6.2. Modèle représentant le comportement d'un contact [Sibille, 2006].....	225
Figure 6.3. Définition du repère local lié au contact entre deux grains g_1 et g_2	226
Figure 6.4. Algorithme de post-traitement pour le calcul du travail du second ordre global aux contacts.....	232
Figure 6.5. Extrait de résultats de Sibille [] concernant le lien entre le d^2W^{macro} et d^2W^{ct}	233
Figure 6.6. Travail du second ordre global aux contacts : composante normale $d^2W_n^{ct}$, tangentielle $d^2W_t^{ct}$, de roulement $d^2W_r^{ct}$ et valeur totale d^2W^{ct} pour un état de contrainte déformation isotrope ($\sigma_3 = 100kPa, n = 0.0$). Les simulations sont effectuées avec et sans MTL.	234
Figure 6.7. Comparaison entre le travail du second ordre global total aux contacts d^2W^{ct} pour un état de contrainte déformation isotrope ($\sigma_3 = 100kPa, n = 0.0$). Les simulations sont effectuées avec et sans MTL.	234
Figure 6.8. Travail du second ordre global aux contacts : composante normale $d^2W_n^{ct}$, tangentielle $d^2W_t^{ct}$, de roulement $d^2W_r^{ct}$ et valeur total d^2W^{ct} pour les deux modèles avec et sans MTL aux états de contrainte $n = 0.42$ (avec MTL) équivalent à $n = 0.274$ (sans MTL) et $n = 0.92$ (avec MTL) équivalent à $n = 0.6002$ (sans MTL).	236
Figure 6.9. Comparaison entre le travail du second ordre macroscopique et le travail du second ordre global aux contacts pour les deux modèles avec et sans MTL à un état de contrainte isotrope ($\sigma_3 = 100kPa, n = 0.0$).	237
Figure 6.10. Comparaison entre le travail du second ordre macroscopique et le travail du second ordre global aux contacts pour les deux modèles avec et sans MTL aux états de contrainte déviatoire $n = 0.42$ (avec MTL) équivalent à $n = 0.274$ (sans MTL) et $n = 0.92$ (avec MTL) équivalent à $n = 0.6002$ (sans MTL).	238

Liste des tableaux

Tableau 3. 1. Déformation constatées et modules élastiques apparents selon les trois axes principaux après l'application d'une sollicitation mécanique isotrope de 100 kPa	98
Tableau 3. 2. Paramètre de simulation des essais triaxiaux avec rotation libre et rotation contrôlée (MTL)	109
Tableau 3. 3. Synthèse de la dispersion des résultats réalisée sur les quatre échantillons réputés identiques	110
Tableau 3. 4. Synthèse de la dispersion des résultats réalisée sur les quatre échantillons réputés identiques	117
Tableau 3. 5. Quelques valeurs de k^n relevées dans la littérature	126
Tableau 3. 6. Récapitulation des résultats de l'étude paramétrique	135
Tableau 3. 7. Valeurs des paramètres macroscopiques caractérisant le sable de Labenne pour chaque essai [Mestat, 2005]	139
Tableau 3. 8. Jeu de paramètres microscopiques optimal caractérisant le modèle discret ...	140
Tableau 3. 9. Valeurs des paramètres macroscopiques données par les simulations numériques pour chaque essai	140

Tableau 5. 1. Quelques valeurs - relevées dans la littérature – de la norme de l’incrément de contrainte utilisée pour des recherches directionnelles.	184
Tableau 5. 2. Les premières et les dernières directions des déformations plastiques trouvées pour différents états d’équilibre à différents confinements.....	194
Tableau 5. 3. Les directions de $\partial f / \partial \sigma$ et $\partial g / \partial \sigma$ pour différents états d’équilibre à différents confinements	194

Introduction générale

Un Peu d'histoire...



Les milieux granulaires sont présents sous différentes formes, dans de nombreux secteurs d'activité. En effet, on les rencontre aussi bien en génie civil (ballast des voies ferrées, sables, ciments, bétons, digues, routes, etc.), qu'en mécanique des sols et des roches, ou encore dans l'industrie pharmaceutique et chimiques (Malaxage de poudre) sans oublier tout le secteur agro-alimentaire (produits céréaliers en silos). Par ailleurs les milieux granulaires interviennent dans de nombreux phénomènes naturels dont les conséquences sont parfois catastrophiques. Citons à titre d'exemples, le déplacement des dunes de sable, les avalanches ou encore les glissements de terrain qui sont à l'origine de nombreux dégâts. Le comportement de ces milieux sous diverses sollicitations est d'une grande importance ce qui explique l'intérêt porté par les chercheurs dans des domaines scientifiques extrêmement variés (physique bien sûr mais aussi mécanique, chimie, géologie, ainsi que génies chimique, civil et pétrolier...). Cependant, la compréhension de leur comportement est une tâche qui est loin d'être achevée. Ils présentent une variété de comportement qui les rend inclassables parmi les états habituels de la matière, à savoir solide, liquide et gazeux. En effet, prenons le cas d'un tas de sable sec. Ce n'est pas un solide, car s'il résiste apparemment à la compression (ce n'est donc pas un gaz), il ne résiste pas à l'étirement. Pourtant, tant que la pente de sa surface ne dépasse pas une certaine limite, il ne se passe rien, et il s'apparente assez à un solide; mais si la pente augmente trop, il se produit des avalanches à sa surface, ce qui donne à sa couche superficielle un caractère presque liquide. Cependant, ce n'est pas un liquide, puisque, au repos, sa surface n'est pas horizontale. Cette ambivalence a fait dire à certains auteurs qu'il s'agit là d'un quatrième état de la matière, situé entre le solide et le liquide. Ces milieux ont par ailleurs des propriétés macroscopiques caractéristiques que l'on ne trouve dans aucun des trois autres états, parmi lesquelles on peut citer la dilatance¹ [Bolton, 1986], [Sirieys, 1994], la localisation de déformation² ou encore la fluidisation, la ségrégation³ et l'effet de voûte [Abriak, 1991], [Duran, 1997], [Guyon et al., 1994]. De ces diverses constatations, un bon nombre du comportement des milieux granulaires a été déterminé empiriquement sans qu'il ait une compréhension profonde. Plusieurs démarches ont été tentées, les plus répandues jusqu'à ces dernières années étant l'expérience en laboratoire et l'observation grandeur nature.

Ce la fait plusieurs siècles que le caractère exceptionnel des milieux granulaires intéressent les chercheurs. Les observations de Kepler, Descartes ou Buffon sur des grains macroscopiques ou sur des empilements de pommes grenades et de petits pois, sont à l'origine de la science de la matière et des matériaux. Colomb [Colomb, 1776], qui s'intéressait à l'art des fortifications et au problème de talus, a montré que le frottement est en partie responsable du comportement complexe des milieux granulaires et proposa un critère de rupture. Il divise la résistance en cisaillement du milieu en une composante de cohésion ou d'adhésion et une composante due au frottement. En 1885, Reynolds faisait remarquer qu'un milieu granulaire doit d'abord se dilater pour pouvoir se déformer, sinon les grains sont trop imbriqués pour pouvoir bouger. Et c'est vers 1920, avec Terzaghi, qu'apparaissent les premiers travaux de

¹ Un milieu granulaire, pour se déformer, subit une variation de volume.

² Un milieu granulaire se cisaille le long de surfaces de rupture.

³ On parle aussi de l'effet "noix du Brésil" [Duran, 1997].

mécanique analysant les phénomènes à l'échelle des grains; jusqu'alors, on se contentait de la mécanique des milieux continus pour décrire le comportement des milieux granulaires.

Suite à l'introduction par Terzaghi de la notion de contrainte effective le critère de rupture de Mohr-Coulomb classiquement utilisé en mécanique des sols pour prédire la limite des contraintes admissible s'écrit :

$$\tau = \sigma'_n \tan\phi' + c'$$

Où τ est la contrainte de cisaillement, σ' la contrainte effective normale, ϕ' l'angle de frottement et c' la cohésion.

Notons que le critère de Mohr-Coulomb est une approximation de la limite des contraintes admissibles qui reste raisonnable dans bon nombre d'applications. A partir de ce critère et avec le développement de la méthode des éléments Finis (E.F.), les mécaniciens des sols ont intensifié les études sur les milieux granulaires, en développant des modèles rhéologiques susceptibles de rendre compte du comportement complexe de ces milieux [Boussine, 1994] [Darve et al., 1995], [Darve et al., 1999], [Skempton, 1981]. On citera notamment l'ensemble des modèles élasto-plastiques qui intègrent un critère de rupture que ce soit celui de Mohr-Coulomb ou d'autres plus particulièrement adaptés aux méthodes numériques. Toutefois, certaines ruptures dans les milieux granulaires restent inexplicables, et les modèles rhéologiques utilisées dans les méthodes E.F. ne suffisent pas. Même si ces modèles s'avèrent utiles dans la pratique, elles font intervenir des variables dont le sens physique n'est pas facile à préciser. Par contre lorsqu'on étudie le milieu à l'échelle des grains, le sens physique des variables qui interviennent est beaucoup plus clair. Ces variables "microscopiques" sont, par exemple, les propriétés géométriques de l'arrangement de grains, les propriétés physiques des grains, les forces et les orientations des contacts, les déplacements et les rotations des grains, etc. Il faut alors développer d'autres modèles qui puissent tenir compte des propriétés au niveau microscopique, à l'échelle des grains.

Ces modèles sont basés sur des théories d'homogénéisation qui moyennent les informations, microscopiques telles que la cinématique des grains et les efforts intergranulaires [Combou, 1981], [Combou, 1985], [Combou, 1995]. Il est donc nécessaire de développer des outils qui donnent accès à ces informations. On parle alors d'une nouvelle approche micromécanique. Bien que réaliste, elle est difficile à mettre en œuvre, tant expérimentalement que numériquement. D'un point de vue expérimental, l'étude des milieux granulaires à l'échelle microscopique s'est largement répandue via la modélisation bidimensionnelle des sols par des empilements de cylindres appelés matériaux de Schneebeli [Schneebeli, 1956]. En 1957, Dantu [Dantu, 1957], [Dantu, 1967] fut l'un des premiers à mettre en évidence la grande hétérogénéité des chaînes de forces au sein d'un empilement de rouleaux photoélastiques. Cependant, par manque de répétabilité [Evesque et al., 1993], les essais de laboratoire ne permettent pas d'identifier et de classer avec précision les variables locales. Bien que les matériaux dits de Schneebeli aient été et restent encore très largement utilisés [Calvetti et al., 1997], [Dantu, 1967], [Evesque et al., 1993], [Joer et al., 1996], [Joer, 1991], les améliorations foudroyantes des possibilités informatiques, ont largement contribué à l'avancée des connaissances sur les milieux granulaires. Une nouvelle approche est apparue à la fin des années septante avec l'article quasi mythique de Cundall et Strack⁴ : la simulation numérique discrète. Elle consiste à utiliser des lois de contacts intergranulaires élastiques avec frottement de Coulomb. De par la richesse des informations qu'elle fournit, à l'échelle

⁴ Voir : [Cundall, 1979].

granulaire, sur les mécanismes de déformation et sur la répartition des efforts, la simulation numérique discrète constitue un moyen majeur dans l'étude du comportement des milieux granulaires. C'est dans cette dynamique que s'inscrit ce travail de thèse.

À ce jour, plusieurs types d'approches ont été proposés. On parle de méthode des Éléments Discrets (E.D) par opposition à la méthode des Éléments Finis (E.F), cette dernière est une approche de type milieux continus, qui consiste à identifier le matériau granulaire à un milieu continu. La Méthode aux éléments discrets (E.D.) consiste à suivre individuellement chaque grain et quand un contact intergranulaire se produit, une loi de comportement locale détermine les mouvements résultants des grains impliqués. Ainsi plusieurs modélisations E.D. ont été proposées, chacune proposant une gestion particulière de la loi de contact et des chocs.

Problématique et objectif



À l'heure actuelle, la modélisation du comportement des sols a évolué progressivement. Les lois de comportement décrivant non seulement la rupture mais également des comportements de plus en plus complexes (comportement cyclique, anisotropie,...) ont vu le jour d'une façon concurrente. Ces lois sont associées à la méthode aux éléments finis. Le nombre de paramètres intervenant dans ces lois est croissant, sans que ces paramètres aient toujours un sens physique bien défini. Cette profusion a creusé d'après certains auteurs [Bolton, 1999] un fossé de plus en plus profond entre la communauté des chercheurs et les praticiens du génie civil, justifiant aux yeux de ces derniers une certaine désinvolture vis-à-vis de la caractérisation du comportement.

Récemment, la méthode aux éléments discrets (E.D) est devenue l'une des techniques de modélisation les mieux adaptés à l'analyse du comportement du sol. Grâce à une représentation discrète des discontinuités, le comportement serait décrit à l'échelle du volume élémentaire représentatif comme un ensemble de grains interagissant par des forces de contact. En étudiant les mécanismes se produisant à l'échelle des grains, la micromécanique des milieux granulaires tend à considérer l'évolution macroscopique comme la conséquence d'un ensemble d'événements se produisant à l'échelle micro. Cette méthode conduit a priori à une meilleure compréhension des mécanismes de rupture locale responsable de l'apparition de la bande de cisaillement d'un essai triaxial par exemple et les mécanismes d'instabilité d'une pente à faible voir très faible inclinaison comparativement à d'autres méthodes comme celles des éléments finis(E.F). Si la méthode aux éléments discrets (E.D.) permet bien de résoudre certaines difficultés rencontrés par les approches de type milieu continu, elle pose aussi de nouvelles questions que l'on considère comme un premier problème vu au cours de cette thèse: quelles est la signification des éléments discrets ?, Comment caler les paramètres micromécaniques du modèle (choisir ou modifier la loi de contact entre grain) quand le comportement du sol est exclusivement caractérisé à l'échelle macroscopique ?, quelles sont les mécanismes cinématiques microscopiques qui dominent ou qui sont responsables des déformations macroscopiques ? Et quelles est l'importance des réarrangements des grains dans les déformations macroscopiques ?

Ce travail de thèse tente de proposer une méthodologie qui permette de reproduire le comportement mécanique macroscopique du milieu granulaire sous sollicitations triaxiales depuis une échelle élémentaire, dite microscopique, à laquelle les éléments exhibent une

structure quasi-discrète, jusqu'à l'échelle beaucoup plus large, dite macroscopique, à laquelle en principe l'ingénieur peut agir. Nous tentons aussi de découpler l'ensemble des mouvements pouvant exister lors d'une sollicitation axisymétrique, pour mieux comprendre les mécanismes cinématiques microscopiques responsables de la déformation volumique macroscopique.

Un second problème, plus fondamental vu au cours de ce travail de recherche, est lié à la simulation de la rupture des milieux granulaires en utilisant l'approche discrète. La rupture (au sein) d'un matériau est une des questions essentielles auxquelles les ingénieurs se trouvent confrontés.

Dans le cas des sols et plus généralement dans celui des milieux granulaires, qui sont des matériaux non associés, des ruptures diffuses existent pour des états de contrainte strictement inclus dans la condition limite de plasticité. Ces observations, qui vont à l'encontre de la sécurité et qui contredisent les analyses classiques de la rupture dans les milieux granulaires, impliquent d'étudier de nouvelles approches permettant de décrire ces modes de ruptures particuliers voir de les prédire. Nous proposons dans ce document d'aborder la rupture en un point matériel comme un problème de bifurcation.

Une bifurcation correspond à un changement discontinu dans l'état du système sous évolution continue des variables d'état [Petrik, 1993]. Dans ce contexte, l'énergie cinétique en équilibre sous des conditions de chargement données peut augmenter brutalement sans changement dans les paramètres contrôlant les conditions aux limites [Nicot et al., 2007], [Nicot et Darve, 2007]. De telles bifurcations peuvent être détectées par l'annulation du travail du second-ordre (critère de Hill). Ces résultats théoriques ont été confirmés par des expériences de laboratoires [Darve et al., 2007] et des expériences numériques menées à l'aide de la Méthode aux Eléments Discrets à rotation libre [Sibille et al., 2007]. Les résultats obtenus par ces derniers auteurs peuvent être rappelés. Dans un premier temps ils ont détectés les points de bifurcation à l'aide du critère du travail du second ordre et dans un deuxième temps ils ont établi le lien entre un point de bifurcation détecté par le critère du second ordre et la rupture. Et cela est fait à deux niveaux : à l'échelle macroscopique de l'assemblage granulaire et à l'échelle microscopique des contacts intergranulaires par des simulations numériques directes.

Dans notre travail nous allons abordés ces deux même points mais avec un modèle discret associé à la MTL (Le modèle discret est associé à une loi moment-rotation) : la vérification de la non associativité du modèle, la détection des points de bifurcation et les origines microscopiques du travail du second ordre.

Sibille [Sibille et al., 2007] a étudié dans sa thèse le lien entre le travail du second ordre d^2W^{macro} (macroscopique) et le travail du second ordre global aux contacts d^2W^{ct} . Il a montré d'un point de vue numérique avec un modèle discret à rotation libre, qu'il y a une égalité entre ces deux grandeurs tant qu'il n'y a pas de réorganisation micro-structurale (D'après l'auteur la réorganisation micro-structurale se traduit par les déformations plastiques en régimes dynamique) et dans le cas inverse, l'égalité entre d^2W^{macro} et d^2W^{ct} n'est pas vérifiée. Un autre travail effectué par [Nicot et Darve, 2007] a montré avec des développements analytiques que cette égalité existe. Notre idée principale sur ce point est de vérifier cette

égalité en utilisant un modèle discret associé à une loi moment rotation qui consiste à introduire un moment artificiel opposé au mouvement du roulement.

Afin de donner des éléments de réponses aux questions posées, nous nous sommes restreints à la simulation des milieux granulaires secs et sans cohésion. Le comportement de l'assemblage granulaire sera étudié dans le cadre de l'essai triaxial. Les essais mécaniques seront réalisés sur un modèle d'assemblage constitué de sphères élastiques.

Organisation de cette thèse



n feuilletant rapidement cette thèse, on verra qu'elle est composée de 6 chapitres. *Le chapitre 1* est consacré à une synthèse bibliographique sur laquelle nous nous sommes appuyés pour mener à bien notre travail de recherche. Elle se compose en quatre parties principales. Une brève synthèse des cas qu'on puisse trouver dans la littérature relative aux exemples de rupture à l'intérieur du critère de Mohr-Coulomb est établie dans la première partie. Dans la deuxième partie, nous nous attacherons à présenter le critère du travail du second ordre (le critère de stabilité de Hill, 1958 [Hill, 1958]). Nous classons ce critère par rapport aux différents critères de bifurcations habituels, nous informons le lecteur sur le sens que lui attribuent certains auteurs et nous précisons l'utilisation qui a déjà été faite jusqu'à présent pour décrire les instabilités dans les sols. Notre propos n'est pas de faire une révision exhaustive de ces critères. Nous voulons plutôt montrer que, bien qu'un important effort de recherche ait été consacré à ce sujet, il y a encore un certain nombre de problèmes fondamentaux qui n'ont pas été résolus. La troisième partie de ce chapitre est dévolue à la méthode aux éléments discrets. Nous présenterons les raisons qui nous ont conduit à choisir une méthode de simulation numérique discrète (DEM) plutôt qu'une approche expérimentale. Nous verrons que cette méthode constitue un cadre d'analyse privilégié pour étudier les relations micro-macro, car elle donne accès à un nombre d'essais qui ne seraient pas, à l'heure actuelle, réalisable expérimentalement. La dernière partie porte sur l'importance du roulement dans la réponse macroscopique. Une brève synthèse historique des travaux qui ont été consacrés au rôle des rotations et de la résistance au roulement dans la réponse macroscopique est exposée.

Le chapitre 2 est consacré à la présentation du modèle discret utilisé pour la modélisation de l'ensemble des comportements mécaniques vu au cours de ce travail. Il débute par un bref rappel sur les différentes méthodes discrètes existantes. Ensuite, une description du code de calcul SDEC est exposée. Il correspond à la DEM de type newtonienne utilisant des lois d'interactions régulières. Une description du milieu granulaire est aussi abordée. Les lois d'interaction font intervenir des rigidités normales et tangentielles ainsi que du frottement de Coulomb, de la cohésion et une résistance à la traction. L'implémentation principale réalisée au cours de ce travail concerne la loi de résistance au roulement, appelée aussi loi de transfert de moment – LTM. Cette loi permet de limiter le roulement des éléments que la géométrie sphérique favorise, afin d'être plus représentatif d'un matériau granulaire. Une étude comparative permet de saisir l'intérêt de cette loi au chapitre suivant. A la fin, l'approche numérique liée à la méthode de résolution choisie est détaillée avec des précautions à prendre en compte.

Le chapitre 3 est dédié au comportement numérique des milieux granulaires sous sollicitations quasi-statique. On souhaite à travers ce chapitre établir avec quel degré de précision la modélisation numérique par éléments discrets est apte, après calibration, à

reproduire le comportement des milieux granulaires. Pour cela, un échantillon numérique, constitué d'éléments discrets et représentatif du milieu granulaire, est modélisé afin de vérifier les caractéristiques mécaniques du milieu. Premièrement, il s'agit de vérifier la représentativité de cet échantillon : les aspects tels que l'homogénéité, le degré d'anisotropie, la reproductibilité ou l'influence de l'assemblage sont étudiés. Deuxièmement, la modélisation de l'essai triaxial est établie. La pertinence de l'hypothèse quasi-statique et l'influence de l'amortissement non visqueux sont ensuite étudiées. Dans la même partie, différentes pressions de confinement ont été étudiées et la réponse obtenue est comparée à celle de l'expérience. La troisième partie porte sur les relations entre les paramètres régissant le contact et la réponse globale de l'échantillon. Une étude paramétrique est réalisée pour définir l'influence des paramètres locaux sur la réponse globale du modèle. Une analyse systématique est entreprise concernant l'influence des paramètres locaux sur la réponse élastique, sur l'état à la rupture et sur l'état résiduel. Des relations mathématiques ou des domaines d'influence en sont extraits. Une procédure de calage des paramètres est proposée. Cette procédure de calibration et l'aptitude du modèle à prédire le comportement mécanique des milieux granulaires à divers pression de confinement ont été validés par des essais expérimentaux menés à l'appareil triaxial sur le sable de Labenne.

Le chapitre 4 traite les mécanismes cinématiques locaux à l'échelle des grains qui sont responsables de la déformation macroscopique d'un échantillon numérique soumis à des sollicitations quasi-statique axisymétriques. Sur la base de la simulation numérique discrète, la définition du déplacement relatif peut être utilisée pour décomposer le mouvement des grains en deux cas séparés : mouvement en translation et mouvement en rotation. Les deux mécanismes locaux principaux dans le mouvement en rotation sont le glissement et le roulement. Par des simulations numériques d'essais triaxiaux, nous montrons la contribution respective des deux mécanismes locaux de roulement et de glissement dans la réponse mécanique macroscopique. Pour évaluer quantitativement le rôle de ces deux mécanismes locaux, deux modèles discrets ont été utilisés : un modèle discret à rotation libre et l'autre associé à la MTL dont les résultats ont été comparés.

Après avoir exposé les mécanismes cinématiques locaux à l'échelle des grains dans le chapitre 4, nous nous intéressons dans *le chapitre 5* à deux grandes parties. La première partie est consacrée à la caractérisation du comportement mécanique du modèle discret associé à la MTL (écoulement plastique, associativité ou non associativité, caractéristiques des déformations élastiques et plastiques, dépendance de l'écoulement plastique de l'historique du chargement). Cette caractérisation s'appuie sur l'évolution des enveloppes réponses à différents niveaux de contrainte. La deuxième partie est dédiée à l'étude du signe du travail du second ordre à partir du même modèle discret dans le plan d'axisymétrie des contraintes. Darve et son équipe [Darve et al., 2000], [Darve et al., 2004], [Khoa, 2005], [Louafa, 2002] ont déjà largement étudié le signe du travail du second ordre dans l'espace des contraintes pour des sables d'hostun lâche et dense avec un modèle phénoménologique. Nous considérons que le signe du travail du second ordre est un critère permettant de détecter les points de bifurcations. Dans un premier temps nous rappelons que le travail du second ordre est une variable directionnelle. Par la suite on étudie son signe en fonction du niveau de contrainte et de la direction des sollicitations. A la fin nous abordons une étude comparative entre les réponses du modèle discret avec et sans MTL à travers les enveloppes réponses, la norme et le signe du travail du second ordre.

Un atout de la simulation numérique discrète est de fournir des informations à l'échelle des grains (force de contact intergranulaires, position des grains). Dans *le chapitre 6* nous tentons de relier le travail du second ordre, qui est une grandeur traditionnellement définie dans le cadre des milieux continus à partir de variables tensorielles (l'incrément de contrainte et l'incrément de déformation), à des variables à l'échelle des grains, et plus précisément à l'échelle des contacts (les forces aux contacts et les déplacements relatifs aux contacts). Etablir un lien direct entre ces deux grandeurs permet de mieux comprendre les causes micromécaniques de la bifurcation. Dans ce sens l'approche numérique utilisée est bien détaillée en utilisant un modèle discret associé à une loi moment rotation (MTL) qui consiste à introduire un moment artificiel opposé au mouvement du roulement. Les résultats et conclusions de cette approche associée au modèle discret avec MTL sont comparés à ceux trouvés par [Sibille, 2006] par un modèle à rotation libre.

Enfin, nous concluons sur les résultats obtenus et les possibles extensions de ces travaux.

CHAPITRE 1.

Bibliographie et état de l'art

1.1. Introduction



Le but de ce chapitre est de présenter le cadre de notre étude. Il est dédié à un aperçu des connaissances actuelles concernant deux principaux sujets :

- Les approches numériques discrètes et passage micro-macro,
- La rupture et instabilité dans les milieux granulaires.

Ces deux sujets font l'objet de ce mémoire de thèse.

En premier lieu, nous présentons un vocabulaire précisant la définition de quelques termes clefs. A notre connaissance, ce vocabulaire paraît nécessaire au lecteur pour la bonne compréhension de l'ensemble du manuscrit.

Ensuite, nous présentons une brève synthèse sur un ensemble d'observation expérimentale relative à l'occurrence de ruptures non envisagées dans le cadre classique de la mécanique des sols. Ces observations, choisies par leur richesse bibliographique, constituent la base de la problématique posée par ce travail de thèse.

Dans une deuxième partie, nous exposons les critères qui seraient susceptibles de décrire les ruptures observées. Ces critères sont adaptés par certains auteurs au cas des milieux granulaires. Nous résumons leurs travaux en mettant l'accent sur le critère de stabilité de Hill et le sens que lui leur attribuent pour décrire les instabilités dans les sols.

La troisième partie de ce chapitre est dévolue à la méthode aux éléments discrets (fondement et aperçu rapide de ces nombreuses applications en génie civil). Nous présentons les raisons qui nous ont conduits à choisir une méthode de simulation numérique discrète (DEM) plutôt qu'une approche expérimentale. Par la suite nous discutons, à partir d'exemples issus de la littérature, de son aptitude à décrire le comportement et la prise en compte des discontinuités dans les milieux granulaire. Nous nous intéresserons en particulier aux insuffisances et carences des méthodes classiques, ainsi qu'aux solutions proposées pour approcher de façon plus réaliste le comportement macroscopique des assemblages granulaires (éléments non sphérique et limitation des rotations)

La dernière partie porte sur l'importance du roulement dans la réponse macroscopique. Une brève synthèse historique des travaux qui ont été consacrés au rôle des rotations et de la résistance au roulement dans la réponse macroscopique est exposée.

Pour finir, nous concluons sur l'ensemble des travaux exposés.

1.2. Vocabulaire

Tout au long de ce mémoire seront mentionnés les termes ci-dessous. Il paraît donc essentiel de préciser ses termes dans le contexte de la géomécanique pour une meilleure compréhension de ce travail de thèse.

Modélisation : est la représentation mathématique d'un système réel dans un contexte et une problématique donnés. Toutes les caractéristiques connues de ce système sont alors rassemblées dans un *modèle*. Un modèle n'est jamais parfait, sauf dans le cas de systèmes extrêmement simples, car nos connaissances sont toujours limitées et grossières. Il devra donc, dans la mesure du possible, être validé par des expériences pratiques. Mais même après validation, il faudra rester prudent.

Simulation : est la programmation et la manipulation du modèle sur ordinateur, ainsi que l'analyse des résultats.

Milieu granulaire : C'est un assemblage de nombreux éléments solides, qui peuvent interagir par exemple lors de collisions, mais aussi sous l'effet de forces électromagnétiques ou gravitationnelles. Ces éléments, désignés sous le terme générique de *grains*, sont généralement arrangés de manière désordonnée et présentent souvent des différences de forme, de taille et d'état de surface.

Nombre de coordination : correspond à la moyenne sur l'ensemble du milieu du nombre de contact par particule.

Interpénétration : chevauchement entre les grains.

Milieu monodisperse : est celui constitué de particule ayant les mêmes tailles.

Milieu polydisperse : est celui constitué de particule ayant différentes tailles.

Echelle macroscopique : Très grande devant la taille de la plus grande hétérogénéité, on peut à cette échelle supposer le milieu homogène. Il est possible grâce à des méthodes d'homogénéisation (champ moyen, milieu effectif) d'obtenir les caractéristiques d'un milieu homogène équivalent.

Echelle microscopique : L'échelle microscopique dans un milieu granulaire est caractérisée par l'organisation des particules et de leurs contacts dans l'espace. Cette microstructure évolue avec les déformations et elle peut prendre des morphologies très variables en termes de connectivité des particules (réseau de contacts) et des orientations des plans de contacts (anisotropie).

Rupture : Un matériau est dans un état de rupture lorsqu'un petit accroissement de chargement conduit à des déformations très grandes voire non bornées. En mécanique des matériaux, la rupture caractérise l'état limite de contrainte que peut soutenir un échantillon. Au point de rupture, la charge ne peut plus être augmentée, et les déplacements et vitesses de déformations peuvent, le cas échéant, devenir très grands. A ce titre on peut citer l'exemple de l'essai triaxial. Dans cet essai le pic ou le palier de la courbe contrainte-déformation constitue un exemple d'état de rupture.

(In) stabilité : La notion de stabilité s'applique à un phénomène, en lien avec son évolution au cours du temps. Une définition possible et souvent admise est celle proposée par Lyapunov [Lyapunov, 1907] : un système est réputé instable si et seulement si une perturbation infinitésimale induit des changements finis dans l'état du système. En science des matériaux, la notion de stabilité s'applique à un état de contrainte-déformation d'un matériau, par rapport à son évolution temporelle sous des conditions de chargement données. Dans ce contexte, la définition usuellement adoptée est [Darve et al., 1995] : *Pour un matériau non visqueux et une histoire de déformation donnée, un état de contrainte-déformation est considéré stable si pour toutes "petites" variation de sollicitation, la réponse engendrée reste "petite"*.

Bifurcation :

Maximas mutationes faepe quidem tam brevi fieri temporis momento, ut fenfibus nullo plane modo percipi possunt, determinandas tamen effe ad singula puncta, tum ut motus animo recte percipiatur, tum quia exinde varia deduci possunt Theoremata.

Daniel BERNOULLI[Bernoulli, 1738]

La notion de bifurcation est une des plus récentes notions dégagées par les mathématiciens et dont la signification est des plus intéressantes. D'après l'étonnante citation donnée en exergue par Daniel BERNOULLI en 1738, *les lieux de bifurcation sont des ensembles singuliers et donc rares, le milieu, déstructuré par rapport à ses voisins, est donc chargé de potentialités de développement, et par lesquels la transition entre structures différentes s'accomplit en général de manière extrêmement rapide.*

L'exemple le plus simple qu'on puisse donner d'une bifurcation relève encore de l'observation des paysages montagnards : nous voyons d'abord l'alpiniste grimper pour atteindre un sommet, d'où ensuite il redescend : il était sur une pente ascendante, le voici maintenant sur la pente descendante, et ce changement, cette bifurcation dans la nature de la pente, changement essentiel, survient en ce seul point singulier qu'est le sommet.

Plus généralement, la bifurcation décrit un changement immédiat de forme, d'état ou de comportement d'un système entraîné par la variation continue des paramètres définissant son état et la sollicitation appliquée.

1.3. La rupture à l'intérieur du critère de Mohr-Coulomb : Vue expérimentale

Des expérimentations spécifiques ont montré, depuis quelques années, que la rupture d'un échantillon de sol peut se développer à l'intérieur strict du critère limite de plasticité de Mohr-Coulomb lors d'essais triaxiaux de révolution pour des chemins de sollicitations bien particuliers.

1.3.1. Chemins triaxiaux non drainés pour un sable lâche

L'étude expérimentale concernant la liquéfaction des sols pulvérulents a généralement été menée sur des sables lâches sollicités en chemin triaxial non drainé [Casagrande, 1975], [Lade, 1992], [Ishihara, 1993]. Si le chemin est contrôlé en déformations, il est possible de poursuivre la rupture jusqu'à l'annulation des contraintes effectives de manière continue (sans accélération significative des déformations). Si la force axiale est pilotée, l'échantillon s'effondre de façon brutale au pic du déviateur (q) [Sladen *et al.*, 1985], [Lindenberg et Koning, 1981], [Khoa *et al.*, 2006], [Darve *et al.*, 2007]. Un exemple d'un tel effondrement est présenté sur la Figure 1.1a. Rappelons que le caractère non associé du modèle de comportement est indispensable pour décrire des phénomènes tels que la liquéfaction d'un sable lâche [Nova, 1991], [Darve, 1996].

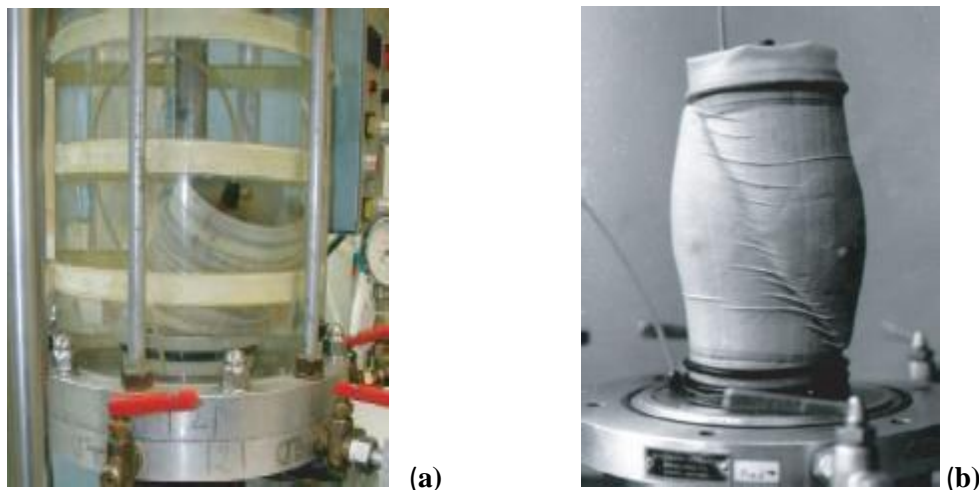
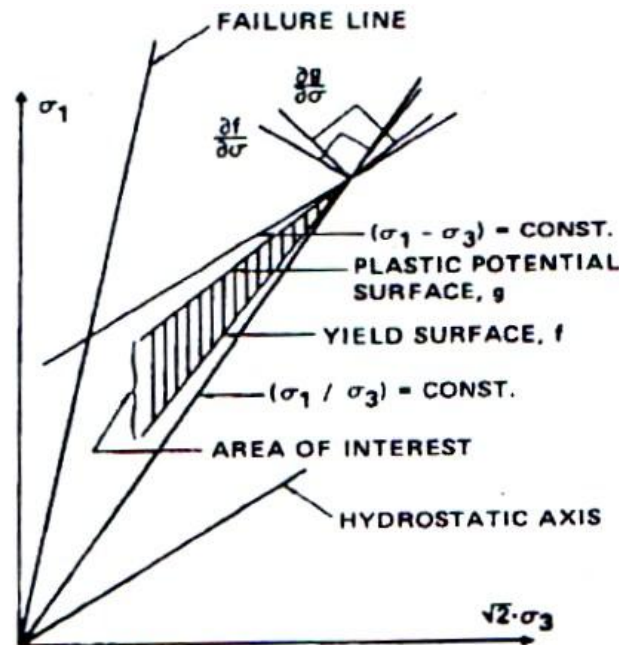
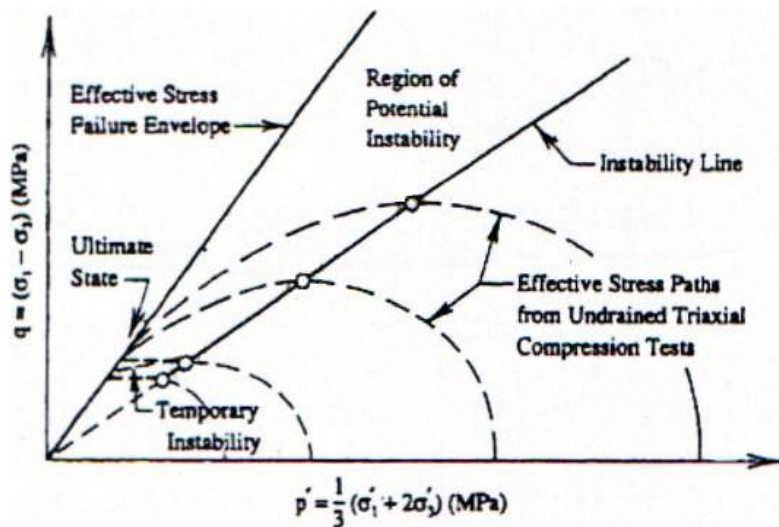


Figure 1.1. Exemple de liquéfaction lors d'un essai triaxial non-drainé, causée par une "perturbation" après le pic de q [Servant *et al.*, 2005] (a), Rupture par bande de cisaillement lors d'un triaxial drainé sur sable dense [Desrués et Chambon, 2002] d'après [Colliat-Dangus, 1986] (b).

Sladen *et al.* [Sladen *et al.*, 1985] et Lade [Lade, 1992] ont montré expérimentalement que l'effondrement d'un échantillon de sable lâche en condition non drainé peut se produire sous certaines conditions et que les pics du déviateur de contrainte q dans le plan (q/p') se rassemblent sur une même ligne (Figure 1.2.). Toutefois l'effondrement ne se produit que si un certain niveau de contrainte caractérisé par exemple par le rapport (q/p') (ou p' est la

pression moyenne effective) est dépassé. Sladen et al. [Sladen et al., 1985] et Lade [Lade, 1992] expliquent que, à cause d'un très faible fluage volumique, le fait de fermer le drainage entraîne une légère augmentation dans la pression interstitielle. Cette légère perturbation dans les pressions interstitielles entraîne ainsi la baisse de la contrainte effective de confinement et la chute de la résistance au cisaillement. Les chemins des contraintes effectives migrent vers la zone hachurée de la Figure 1.3 ou le chargement plastique aie lieu, et une fois à l'intérieur, les échantillons deviennent instables et vont vers la rupture (Figure 1.4.).



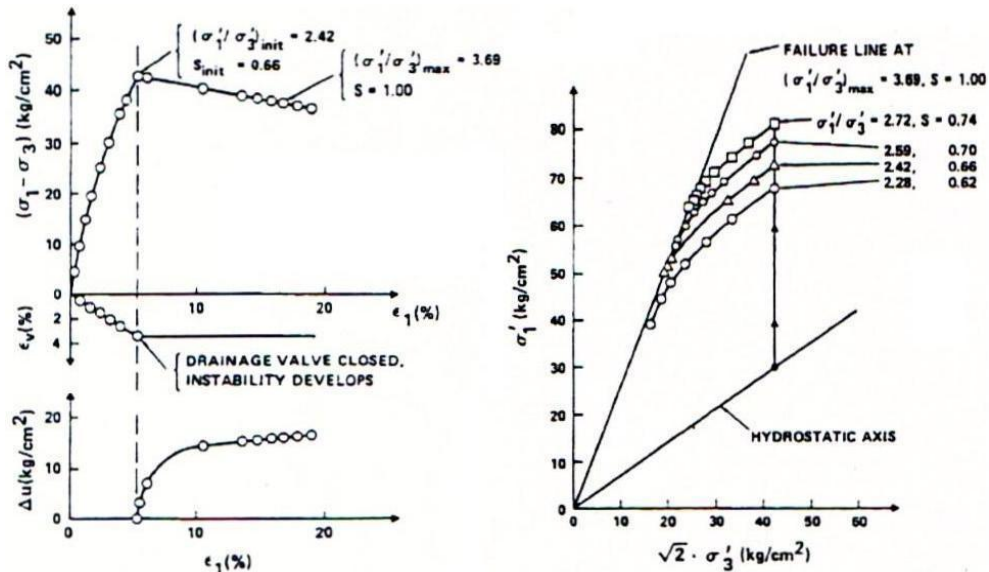


Figure 1.4. Initiation de l'instabilité du sable de rivière Sacramento lâche [Lade, 1994].

Pour une évaluation plus approfondie des instabilités, Lade [Lade, 1992] identifie, d'après les résultats obtenus par [Lee, 1967] et [Seed et al., 1967] sur la sable de la rivière Sacramento, une région d'instabilité potentielle, une région d'instabilité temporaire, ainsi qu'une région de comportement stable (Figure 1.5). Il est bien clair qu'à l'intérieur de la région d'instabilité temporaire, les chemins de contraintes effectives montrent une baisse du déviateur q avant d'atteindre la zone de dilatance drainée ou la contrainte de confinement commence à augmenter. L'échantillon regagne alors de la résistance et devient stable. Concernant la région d'instabilité potentielle, sa limite inférieure est caractérisée par un déviateur de contrainte égal au déviateur de contrainte sur la ligne d'instabilité. Au delà de cette limite, le comportement instable induisant la liquéfaction est prédominant.

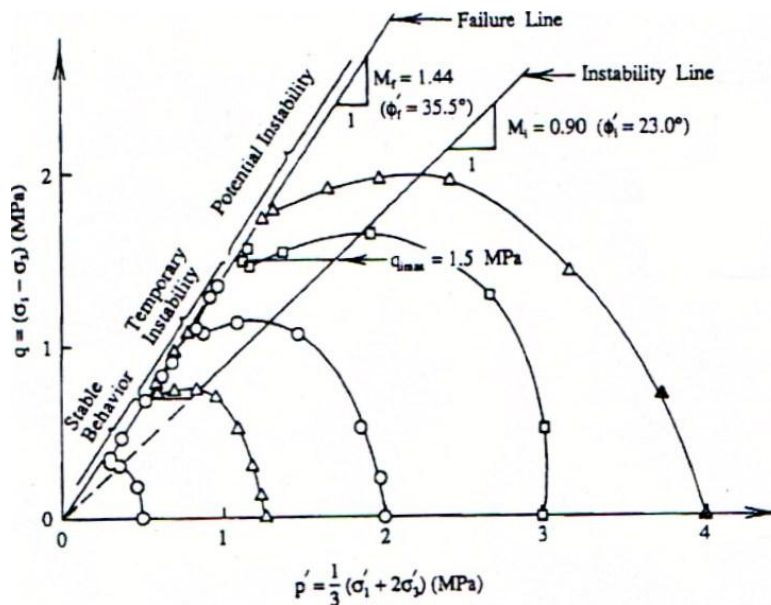


Figure 1.5. Détermination des zones de comportement stable, temporairement instable et potentiellement instable [Lade, 1993].

[Chu et Leong, 2003] ont également observé des problèmes d'instabilité sur un sable lâche en condition non drainée. Les résultats obtenus permettent de conclure que l'instabilité ne peut se manifester que si l'état de contrainte se situe au dessus de la ligne d'instabilité définie par Lade [Lade, 1992].

Si le chargement est contrôlé en force pour ces chemins non drainés, il est possible que l'effondrement, après le pic de q , apparaisse brutalement menant à l'annulation des contraintes effectives [Castro, 1969], [Lancelot et al., 2004].

Récemment Georgopoulos [Georgopoulos, 2005] a montré expérimentalement sur des sables lâches en chemin non drainé en compression qu'il n'y a pas de bande localisée et que l'instabilité semble conduire à la rupture de type diffus de l'échantillon. D'autres travaux réalisés par [Servant et al., 2004] et [Khoa et al., 2006] ont également montré les mêmes résultats expérimentaux. Nous trouvons aussi et dans le même cadre, les travaux réalisés par [Han et al., 1991]. Ils ont montrés que lors d'essais non drainés contrôlés en déplacement sur des sables lâches, aucune localisation des déformations n'a été observée. [Finno et al., 1996] et [Mokni et al., 1999] ont également observé sur des essais contrôlés en déplacement, que la condition de localisation apparaît comme voisine de la condition limite de plasticité.

1.3.2. Chemins triaxiaux proportionnels en déformation

Les chemins triaxiaux proportionnels en déformation consistent à contrôler les déformations volumiques par l'intermédiaire du rapport $(d\varepsilon_v/d\varepsilon_1)_i$ ($d\varepsilon_v$ est la déformation volumique, l'indice i dénote que ce ratio est imposé durant l'essai). Si $d\varepsilon_v/d\varepsilon_1 = 0$, il s'agit du cas du chemin non drainé. Quand $d\varepsilon_v/d\varepsilon_1 < 0$ il s'agit d'un chemin dilatant tandis qu'il devient contractant $d\varepsilon_v/d\varepsilon_1 > 0$. Chu et Leong [Chu et Leong, 2001, 2003] ont montré avec des essais triaxiaux drainés proportionnels en déformation sur des sables lâche et dense que le mécanisme conduisant à l'instabilité peut s'exprimer par la différence entre l'incrément de déformation imposée $(d\varepsilon_v/d\varepsilon_1)_i$ et l'incrément de déformation propre au matériau $(d\varepsilon_v/d\varepsilon_1)_s$; qui est le taux de déformation volumique à la rupture mesuré sur un essai drainé (ce taux est lié à la règle d'écoulement). L'instabilité se produit quand $(d\varepsilon_v/d\varepsilon_1)_i - (d\varepsilon_v/d\varepsilon_1)_s \leq 0$. Pour un sable très lâche $(d\varepsilon_v/d\varepsilon_1)_s \geq 0$. L'instabilité tend à apparaître quand $(d\varepsilon_v/d\varepsilon_1)_i = 0$, i.e. en condition non drainée. Pour un sable dense $(d\varepsilon_v/d\varepsilon_1)_s$ est négatif. L'instabilité est possible seulement si $(d\varepsilon_v/d\varepsilon_1)_i$ est encore plus petit (négatif) que $(d\varepsilon_v/d\varepsilon_1)_s$.

[Lancelot et al., 2004] montrent également par des chemins drainés proportionnels en déformation sur sable lâche ou dense qu'il est possible d'obtenir de la liquéfaction statique (l'effondrement de l'échantillon) si $(d\varepsilon_v/d\varepsilon_1)_i < (d\varepsilon_v/d\varepsilon_1)_s$. Cette condition peut également s'exprimer en termes d'angle de dilatance : la liquéfaction peut être atteinte si l'angle de dilatance du matériau est inférieur à l'angle de dilatance imposé par le chemin de chargement [Darve et Pal, 1997].

Sur la base de ces chemins proportionnels en déformation [Lancelot et al., 2004], [Chu et al., 1993, 2003] ont effectué des tests d'instabilité sur un sable dense. Les auteurs montrent

que pour une valeur du rapport q/p' suffisamment élevée, l'effondrement de l'échantillon se produit si $(d\varepsilon_v/d\varepsilon_1)_i < (d\varepsilon_v/d\varepsilon_1)_s$ (Figure 1.6.).

D'après les résultats exposés par [Lancelot et al., 2004] le type de contrôle joue un rôle important sur l'évolution de l'état du matériau. Lorsque les essais proportionnels en déformation sont pilotés par l'intermédiaire de la déformation axiale l'évolution vers la rupture totale s'effectue de manière quasi-statique. Lors des tests d'instabilité ou un contrôle en force est imposé la rupture est brutale.

Selon [Darve et Laouafa, 2000] ce type de chemins de sollicitation permet d'obtenir des instabilités dans l'espace des contraintes principales. Les auteurs ont montré analytiquement et numériquement sur un sable lâche, l'existence d'un large domaine d'instabilité matérielle au sens de Hill, à l'intérieur strict du critère de Mohr-Coulomb.

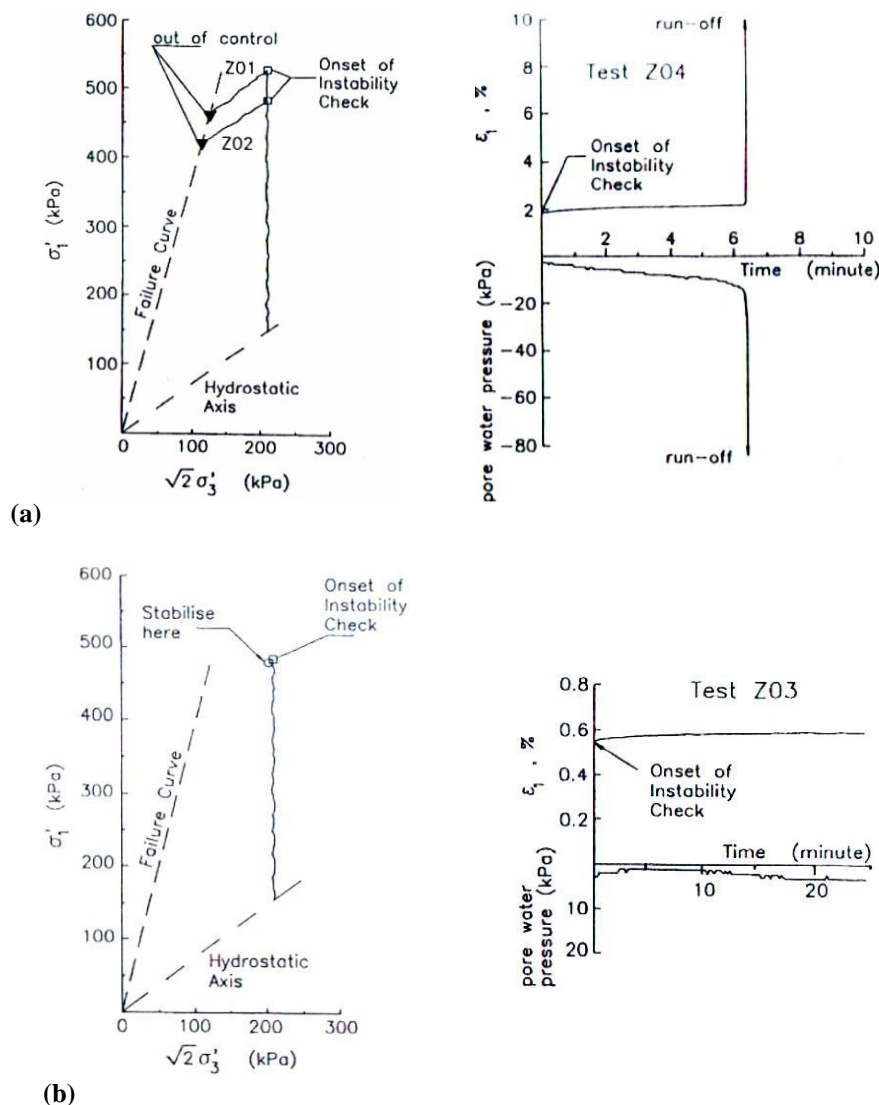


Figure 1.6. Test de stabilité sur sable dense pour une valeur de q fixé et une valeur de $(d\varepsilon_v/d\varepsilon_1)_i < (d\varepsilon_v/d\varepsilon_1)_s$ imposée : pour l'échantillon s'effondre (a), dans le cas contraire la réponse reste stable (b).

1.3.3. Chemins triaxiaux à contrainte déviatorique constante

Sasitharan et coauteurs [Sasitharan et al., 1993] ont étudié le comportement des sables lâches soumis à des chemins triaxiaux drainés à q -constant. Les auteurs ont remarqué que la rupture était brutale dans le matériau et qu'elle est suivit parfois par une légère variation de l'indice des vides de l'échantillon pendant la décharge hydrostatique ($dq=0 \Rightarrow d\sigma_1 = d\sigma_2 = d\sigma_3$). Ils ont observé que cette rupture est provoquée par l'atteinte d'une surface limite définie dans le plan des premiers et seconds invariants des contraintes (q, p') et que l'angle de frottement mobilisé à la rupture était plus faible que la résistance au cisaillement prédite par le critère de Mohr-Coulomb (Figure 1.7a.).

Les instabilités trouvées sur les chemins drainés à déviateur q -constant ont été également observées expérimentalement par Chu et Leong [Chu et al., 2003] sur un sable lâche. Ces instabilités se sont manifestées par un accroissement rapide des déformations plastiques alors qu'aucune variation de pression n'était détectée pendant les essais. Cela signifie que c'est en conditions drainées que se sont produites ces instabilités. Il est donc difficile d'expliquer ce phénomène par l'occurrence d'une liquéfaction non drainée. Ce type de rupture a été observé par Lade [Lade, 2002] sur des sables denses et par Zhu [Zhu, 2002] sur des roches tendres.

Gajo et ces collaborateurs [Gajo et al., 2000] ont également étudié le phénomène d'instabilité d'un sable lâche soumis à un essai drainé à q -constant. Le comportement du milieu est tout d'abord dilatant jusqu'à atteindre un volume maximal pour ensuite être contractant (Figure 1.7b). Ils ont remarqué que, à un moment sur ce chemin, l'essai est devenu totalement incontrôlable, d'importantes déformations sont apparues et la rupture fut immédiate.

Il semblerait à la vue des résultats de Darve [Darve et al., 2003] et Servant [Servant et al., 2003] sur des sables lâche et dense que les conditions triaxiales drainées a q -constant peut manifester un comportement instable comparable à celui qui est mis en évidence en condition non drainées. Ces instabilités conduisent à une rupture diffuse des échantillons en l'absence de mode de localisation.

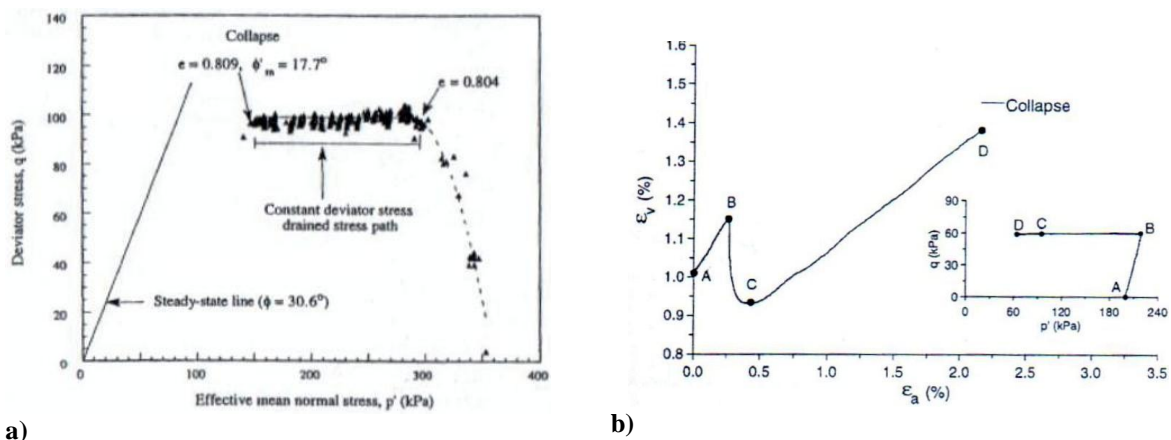


Figure 1.7. Chemins drainés à q constant sur sables lâches : évolution des contraintes effectives (a), [Sasitharan et al., 1993], et réponse en terme variation volumique (b), [Gajo et al., 2000].

1.4. Remarques

A travers ces trois parties précédentes, il semblerait que les ruptures observées suivant les différents chemins de sollicitations sont des ruptures identiques.

- D'une manière générale si les essais sont contrôlés en force et quelque soit le chemin suivi, drainé ou non drainé, des instabilités apparaissent d'une manière brutale pour des angles de frottement inférieurs à ceux prédits par le critère de Mohr-Coulomb.
- Selon [Chu et al., 1993] pour des chemins proportionnels en déformation, et [Servant et al., 2005] pour des essais non drainés, la rupture est de type diffuse puisque aucune bande de cisaillement (localisation) n'a pu être observée sur les échantillons testés. Les autres auteurs ne précisent pas la présence ou non d'une localisation sans doute à cause d'une vitesse de déformation trop élevée lors de la rupture.
- Selon Gajo et al. [Gajo et al., 2000] en ce qui concerne des chemins à q -constant et Lade [Lade, 2002] et Sladen et al. [Sladen et al., 1985] sur des chemins en non drainé avancent l'idée que l'occurrence d'un effondrement dans ces conditions serait liée à une légère augmentation dans la pression interstitielle lors du passage de condition drainée à non-drainée.

Pour résumer, les effondrements présentés par ces différents chemins de sollicitation sont des ruptures homogènes survenant en des points de bifurcation et de perte d'unicité pour certain paramètre de contrôle [Nova, 1994], [Imposimato et Nova, 1998]. Ces ruptures se produisent avant que le critère limite de Mohr-Coulomb soit satisfait. Il se révèle insuffisant pour expliquer ce mode de rupture.

1.5. Description des ruptures à l'intérieur de la condition limite de plasticité

Dans une première partie, la définition de stabilité au sens de Lyapunov est donnée ainsi qu'une synthèse des différentes approches du traitement possible des instabilités. Dans une seconde partie sont présentés les différents critères permettant la prévision des instabilités aux niveaux global et local. Puis dans une dernière partie, nous classons ce critère par rapport aux différents critères de bifurcations habituels, nous informons le lecteur sur le sens que lui attribuent certains auteurs et nous précisons l'utilisation qui a déjà été faite jusqu'à présent pour décrire les instabilités dans les sols.

1.5.1. Critère de stabilité

La définition la plus classique de la stabilité est celle de Lyapunov [Lyapunov, 1907]: toute perturbation de la configuration d'équilibre induit une réponse bornée. Le premier domaine identifie comme instable est la surface de rupture. Il apparaît cependant que cette surface ne rend pas compte de toutes les instabilités qui peuvent apparaître même à l'intérieur de la

surface de rupture. De nouveaux critères permettent de caractériser ces instabilités. Avant d'aborder ces différents critères, nous revenons en premier lieu sur la définition de stabilité de Lyapunov.

1.5.1.1. Définition de stabilité de Lyapunov

Rappelons que suivant la définition donnée par Hadamard [Hadamard, 1903], un problème mathématique est "bien posé" s'il ya une solution, si cette solution est unique et si elle est continue vis-à-vis des conditions initiales. Pour toute résolution de problèmes aux limites, il est donc important de s'enquérir de l'existence et de l'unicité de la solution. L'existence de la solution signifie que, pour un problème avec des conditions aux limites données, il existe au moins une solution. Si cette solution est unique, la condition d'unicité est remplie. La stabilité de la solution signifie que pour une petite perturbation des conditions initiales d'entrée, la solution et les données de sortie changent de la même manière. L'idée est de savoir si une petite perturbation va stabiliser ou accroître indéfiniment la solution (perte de stabilité par divergence).

En ce qui concerne la stabilité d'une solution donnée, la définition la plus classique est celle proposée par Lyapunov [Lyapunov, 1907]. Elle est destinée à l'étude du mouvement d'un système mécanique possédant un nombre fini de degrés de liberté et décrit par des fonctions dépendantes du temps. Dans le cadre de la mécanique des milieux continus [Darve, 1994], cette définition peut s'exprimer de la façon suivante :

"Un état de contrainte-déformation pour un matériau donné, après une histoire de sollicitation donnée, est dit stable si, pour tout scalaire positif ε , il existe un scalaire positif $\eta(\varepsilon)$ tel que, pour tout incrément de sollicitation ds borné par η , la réponse associée dr reste bornée par ε "

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta = \eta(\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad \|ds\| < \eta \Rightarrow \|dr\| < \varepsilon \quad \mathbf{1.1}$$

Ainsi, tous les états limites de contrainte "états dits de rupture" sont instables au sens de Lyapunov. De même, le pic de contrainte déviatoire et toute la branche descendante située après ce pic de la réponse en condition non drainée d'un sable lâche représentée dans le plan $q-p'$ constituent par ailleurs un état potentiellement instable, selon la définition de Lyapunov, puisque tout incrément de force axiale (qui se traduit par une augmentation du déviateur des contraintes), si faible soit-il, conduit à une grande réponse en déformation.

1.5.1.2. Critère de stabilité de Drucker

Différentes conditions suffisantes de stabilité ont été proposées. Le critère de stabilité donnée par Drucker [Drucker, 1959] considère qu'une condition suffisante est fournie par un travail plastique du second ordre strictement positif pour toute sollicitation incrémentale :

$$\forall d\sigma, d\sigma : d\varepsilon^p > 0 \quad 1.2$$

Ou $d\sigma$ et $d\varepsilon^p$ sont reliés par la loi de comportement.

Le postulat de stabilité de Drucker est une condition locale suffisante d'unicité (et non une condition nécessaire). Drucker précise que l'utilisation de ce postulat impose une relation contrainte-déformation incrémentalement linéaire et une règle d'écoulement associée. Pour le cas des géomatériaux (sols, roches, bétons) pour lesquels les déformations plastiques sont fortement non associées, le postulat de stabilité de Drucker peut être violé même dans le régime à écrouissage positif [Vardoulakis et Sulem, 1995].

1.5.1.3. Condition de stabilité de Hill : forme globale

Hill [Hill, 1958] annonce un critère suffisant de stabilité pour un système matériel, en supposant qu'une partie de sa surface est contrainte de manière rigide (bloquée en déplacement) et que toutes les charges sont maintenues constantes sur le reste ("Charges mortes"), pour n'importe quel mouvement à partir d'un état d'équilibre à l'instant t . Hill considère, alors que le système est instable si pour une petite perturbation de contrainte, la déformation peut se poursuivre de manière infinitésimale sans apport d'énergie extérieur au système.

Formellement le critère de Hill s'écrit de la façon suivante (selon [Hill, 1958]) :

$$\int_V \dot{s}_{ij} \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} dV > 0 \quad \forall \dot{u}_i(x_j) \neq 0 \quad 1.3$$

- s_{ij} est appelé tenseur nominal de contrainte par Hill. C'est la transposés du premier tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff. s_{ij} est donc le taux de contrainte nominale.
- $\frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i}$ est le champ de gradient des vitesses cinématiquement admissible associées au taux de contrainte \dot{s}_{ij} .

L'expression 1.3 est une condition suffisante de stabilité. Elle est toujours vérifiée quels que soit les champs de vitesses (non nuls) et les champs de contrainte associés par le modèle constitutif.

Le tenseur nominal de contrainte s peut s'exprimer en fonction du tenseur de contrainte de Cauchy σ par :

$$s = J F^{-1} \sigma^t \quad 1.4$$

Ou : J est la jacobienne de la transformation linéaire tangente F qui fait passer de la configuration de référence à la configuration courante, soit $F_{ij} = \partial x_i / \partial x_j^0$

Si on néglige les changements de configuration et pour de petites transformations la condition de Hill (Eq. 1.3) s'écrit :

$$\int_V \dot{\sigma} : \dot{\varepsilon} dV > 0 \quad \forall \dot{\varepsilon} \neq 0, \quad 1.5$$

Avec $\dot{\sigma}$ et $\dot{\varepsilon}$ respectivement les taux de contrainte et de déformation.

Pour le cas de l'élasticité, nous retrouvons la condition de stabilité proposée par [Hadamard, 1903] et elle est souvent appelée "stabilité infinitésimale".

Récemment, Osinov et Wu [Osinov et Wu, 2005] ont étendu l'interprétation du critère de stabilité de Hill que se soit pour une évolution quasi-statique, ou une évolution dynamique du solide. Ils considèrent un solide en état d'équilibre dont une partie de la frontière extérieure est contrainte de manière cinématique et une autre partie est soumise à des forces extérieures constantes.

- Dans le cas de l'évolution quasi-statique, le solide est perturbé en déformation quasi-statique infinitésimales. L'équilibre du solide pendant la perturbation est maintenu par l'application des agents extérieurs (forces de volume et de frontière). Les auteurs ont bien remarqués qu'aucune énergie cinétique n'apparaît du fait que l'agent extérieur maintient des vitesses infiniment lentes. Ils montrent que le signe de l'énergie reçue par le solide coïncide avec le signe du travail $\int_V \dot{\sigma} : \dot{\varepsilon} dV > 0$.
- En ce qui concerne l'évolution dynamique, une conclusion identique a été obtenue. Le solide est perturbé par l'application d'un champ de vitesse qui sert de conditions initiales au problème. Les agents extérieurs maintenant l'équilibre statique sont remplacés par le mouvement du solide. Osinov et Wu [Osinov et Wu, 2005] ont démontré qu'à l'instant initial de l'application de la perturbation :

$$\frac{d^2 E_c}{d^2 t} = - \int_V \dot{\sigma} : \dot{\varepsilon} dV \quad 1.6$$

Ce résultat est très intéressant car dans l'établissement du critère de Hill, il n'y a pas lieu d'introduire de l'énergie cinétique, et par conséquent, un agent extérieur ne peut extraire de l'énergie du système.

Les résultats obtenus par [Osinov et Wu, 2005] ont montré que la positivité du critère de Hill peut être considérée comme une condition de stabilité dans les deux sens quasi- statique et dynamique. De plus, il est important et intéressant de remarquer que cette conclusion est obtenue indépendamment de la linéarité incrémentale de l'équation constitutive. Autrement dit, elle peut être également généralisée pour les modèles incrémentalement non linéaires.

1.5.1.4. Forme locale de la condition de stabilité de Hill : Le travail du second ordre

Une forme locale de la condition de stabilité de Hill peut être développée à partir de la forme globale exposée dans le paragraphe précédent. Cette condition locale porte sur le signe du travail du second ordre d^2W . L'importance de cette condition locale repose sur la notion d'instabilité matérielle, c'est à dire l'instabilité pouvant se développer à partir d'un point matériel du milieu continu [Bigoni, 2000].

En petites transformations, pour les matériaux associés Hill [Hill, 1958] a exprimé une notion classique de stabilité matérielle portant sur le signe du travail du second ordre. La stabilité est assurée si :

$$d^2W = \dot{\sigma} : \dot{\varepsilon} > 0 \quad \forall \dot{\varepsilon} \neq 0 \quad 1.7$$

Avec $\dot{\sigma}$ et $\dot{\varepsilon}$ reliés par la relation constitutive du matériau.

Valanis [Valanis, 1985], a montré que cette condition s'appliquait aussi bien à des problèmes quasi-statiques que dynamiques.

Remarquons que si la condition locale (1.7) est assurée en tous points d'un solide de volume V implique que la condition globale (1.5) est vérifiée. Notons que, pour un problème homogène, les deux conditions (globales et locales) coïncident.

Bigoni et Hueckel [Bigoni et Hueckel, 1991] ont montré que la condition locale (1.7) est valable aussi pour le cas plus général des matériaux non associés.

Bazant [Bazant, 1988] a montré que la relation (1.7) est une condition suffisante de stabilité sous charges mortes. Pour des charges variables, des termes avec un degré plus élevé doivent être inclus.

Si l'on suppose la décomposition du taux de déformation $\dot{\varepsilon}$ en une partie élastique $\dot{\varepsilon}^e$ et une partie plastique $\dot{\varepsilon}^p$ alors le travail du second ordre s'écrit :

$$d^2W = \dot{\sigma} : \dot{\varepsilon}^e + \dot{\sigma} : \dot{\varepsilon}^p > 0 \quad 1.8$$

La condition de stabilité matérielle au sens de Hill est donc moins restrictive par rapport à celle de Drucker.

En ce qui concerne la relation entre la définition de la stabilité selon Lyapunov et la condition de stabilité de Hill, Osinov et Wu [Osinov et Wu, 2005] confirment qu'il n'existe pas de corrélation entre ces deux critères de stabilité. La condition de Hill nous informe sur la variation de l'énergie cinétique et l'évolution du solide sur un intervalle de temps très court après l'application de la perturbation à l'instant t_0 , par contre, la définition de Lyapunov s'intéresse à l'évolution de la perturbation pour tous instant, $t > t_0$. En fait, la corrélation ne peut être établie que dans des cas très spécifiques comme certains systèmes dynamiques

conservatifs. Koiter [Koiter ,1969] a effectué une démonstration d'équivalence entre ces deux critères de stabilité mais uniquement dans le cadre de l'élasticité.

De nombreuses lois constitutives (formulation incrémentale ou en vitesse) ont été développées pour la prédiction du comportement mécanique des sols. Le signe du travail du second ordre entraîne un certain nombre d'implications sur ces lois constitutives. Pour plus de détails le lecteur est conseillé de consulter les travaux de [Bigoni, 2000] et [Bigoni et Hueckel, 1991]. Il s'agit donc :

- Hill [Hill, 1958] propose alors une condition suffisante d'unicité du problème en vitesse sous la forme suivante:

$$\int_V \Delta \dot{\sigma} : \Delta \dot{\epsilon} dV > 0 \quad \forall \dot{\epsilon} \quad \mathbf{1.9}$$

Quelques soit les solutions distinctes du problème en vitesse. Avec Δ est la différence entre deux champs admissibles. Cette implication a été étendue par [Hueckel et Maier, 1977], [Raniecki, 1979] et [Raniecki et Bruhns, 1981] aux modèles élasto-plastiques non-associés en définissant des solides linéaires de comparaison. Pour les modèles hypoplastiques l'équivalence entre l'unicité et la positivité définie du travail du second ordre a été établie par [Chambon et Caillerie, 1999]. Valanis [Valanis, 1985] montre toutefois que l'unicité peut être vérifiée même si la condition suffisante de stabilité de Hill est violée.

- Le critère d'ellipticité forte est une condition plus faible par rapport au critère local de Hill mais suffisant pour exclure la localisation des déformations. Selon [Bigoni et Hueckel, 1991], pour un solide homogène, ce critère peut s'écrire :

$$\underline{\underline{\bar{g}}} \otimes \underline{\underline{\bar{n}}} : \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\bar{n}}} \otimes \underline{\underline{\bar{g}}} > 0 \quad \forall \underline{\underline{\bar{g}}} \neq \underline{\underline{0}} \quad \forall \underline{\underline{\bar{n}}} \ni \|\underline{\underline{\bar{n}}}\| = 1 \quad \mathbf{1.10}$$

Avec $\underline{\underline{D}}$ caractérise le tenseur constitutif incrémentalement linéaire du solide. Cela correspond à l'écriture de la condition de positivité du travail du second ordre pour un mode de taux de déformation particulier défini par le produit vectoriel $\underline{\underline{\bar{g}}} \otimes \underline{\underline{\bar{n}}}$ ou $\underline{\underline{\bar{g}}}$ représente le gradient de la vitesse dans la direction $\underline{\underline{\bar{n}}}$. Si le tenseur $\underline{\underline{D}}$ est symétrique le critère (1.10) implique que toutes les valeurs propres du tenseur acoustique sont réelles et strictement positives. Ottensen et Runesson [Ottensen et Runesson ,1991] montre que la perte d'ellipticité forte se produit quand la partie symétrique du tenseur acoustique n'est plus définie positive.

- Le critère de localisation de la déformation en bande de cisaillement (un cas particulier de perte d'unicité) est atteint lorsqu'il y a perte d'ellipticité, ou autrement dit lorsque le déterminant du tenseur acoustique est nul ($\det(\underline{\underline{\bar{n}}} : \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\bar{n}}}) = 0$). L'unicité de la réponse n'est plus garantie par apparition d'un mode localisé.

1.5.2. Vers la prédiction d'un mode de bifurcation non localisé : "mode diffus"

1.5.2.1. Condition d'instabilité proposée par Lade

Sur la base des résultats des essais expérimentaux en conditions drainées et non drainées et pour un sol qui obéit à une loi d'écoulement non-associée, Lade [Lade, 1992] énonce les conditions d'instabilités suivantes portant en partie sur le signe du travail du second ordre :

$$d^2W < 0 \quad 1.11$$

$$\text{et } \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \delta_{ij} > 0 \quad 1.12$$

$$\text{et } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \delta_{ij} < 0 \quad 1.13$$

Où g est le potentiel plastique, f la fonction de charge et δ le tenseur de Kronecker.

L'inégalité (1.12) est valide lorsque le matériau présente un comportement plastique contractant.

L'inégalité (1.13) stipule que la normale de la surface de charge doit être dirigée vers l'extérieur de l'axe hydrostatique, autrement dit vers les valeurs négatives de p' dans un plan $q - p'$. D'après Lade [Lade, 1992], l'équation (1.11) ce n'est pas une condition d'instabilité nécessaire, mais il faut la compléter par d'autres conditions tel que les équations (1.12) et (1.13) pour détecter une rupture. Remarquons que dans la condition (1.11), les déformations élastiques sont négligées et par conséquent d^2W est assimilé à $\dot{\sigma} : \dot{\varepsilon}^p$.

Lade [Lade 1992, 2002] définit une droite d'instabilité ou "instability line" dans le plan $q - p'$. La Figure 1.8 schématise l'état de contrainte (le pic) au-delà duquel l'instabilité peut être atteinte en condition non-drainée pour des sols contractants. Il correspond à un sommet très proche du sommet de la surface de charge après le quel la condition (1.13) est vérifiée. Le domaine entre la ligne d'instabilité et la ligne de rupture identifie une région d'instabilité potentielle. De ce fait l'enveloppe de ces pics, pour différentes pressions de confinement, donne la droite d'instabilité ou "instability line". Elle représente la limite à partir de laquelle la condition (1.13) est vérifiée. Donc selon Lade [Lade 1992, 2002] le domaine délimité par la droite d'instabilité et la ligne de rupture représente une région potentiellement instable.

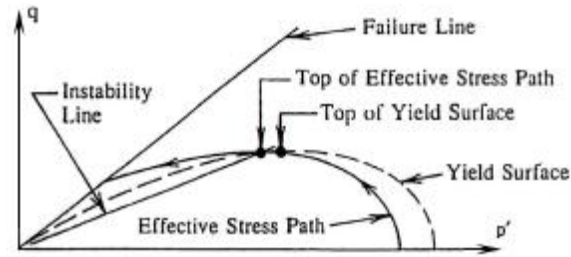


Figure 1. 8. Localisation de la ligne d'instabilité d'après Lade [Lade, 1992] pour des conditions non drainées.

1.5.2.2. Notion de rupture "diffuse" selon Darve et al.

Des modes de bifurcation des déformations de nature différente sont possibles et se développent effectivement. Dans les matériaux non associés, un mode de bifurcation discontinue ou localisée correspondant à la formation d'une bande de cisaillement est observé (voir Figure 1.1.b). Darve *et al.* [Darve *et al.*, 2004] et Darve & Roguiez [Darve et Roguiez, 1998] opposent à ce type de bifurcation discontinue, la notion de la bifurcation continue associée à un mode de rupture sans localisation de déformation nommée "rupture diffuse" (voir Figure 1.1.a). Ce mode de rupture diffuse correspond au passage d'une solution unique d'équilibre, où un seul champ de déformation peut être solution d'un problème aux conditions limites considérées, à l'existence de plusieurs solutions, voire une infinité pour ce même problème. Un état de bifurcation est un point où la solution des équations mathématiques qui gouvernent le problème aux limites considérées et l'évolution du système mécanique étudié (équations d'équilibre, loi de comportement) perdent leur caractère d'unicité. Les notions de bifurcation de l'équilibre et de perte d'unicité de la solution permettent de décrire, par exemple, le changement du processus de déformation au cours du chargement et la transition entre un état initial de déformation homogène et un état non-homogène à l'intérieur de l'échantillon.

D'après Darve et ces coauteurs [Darve *et al.*, 2004] les modes de rupture diffuse dans des échantillons homogènes peuvent être détectés par la condition suffisante de stabilité de Hill sous sa forme locale portant sur la positivité du travail du second ordre. De plus, les auteurs montrent que le travail du second ordre dépend seulement de la partie symétrique du tenseur constitutif M :

$$d^2W = d\sigma M d\sigma \quad 1.14$$

$$d^2W = d\sigma (M^S + M^A) d\sigma \quad 1.15$$

$$d^2W = d\sigma M^S d\sigma \quad 1.16$$

Où M^S et M^A sont respectivement la partie symétrique et antisymétrique du tenseur constitutif M . L'inégalité (1.7) portant sur la positivité du travail du second ordre implique :

$$\det M^S > 0$$

1. 17

Remarquons que pour des valeurs propres variant d'une manière continue à partir d'un état vierge le long du chemin de sollicitation, la condition (1.17) se confond avec la condition (1.7). En outre, pour des matériaux associés dont le tenseur constitutif M est symétrique, on peut en déduire que la violation de la condition de stabilité de Hill coïncide avec les états limites de plasticité définis par $\det M = 0$. En ce qui concerne les matériaux non-associés, ceux-ci sont caractérisés entre autres par un tenseur constitutif non symétrique. Pour un paramètre de chargement croissant et monotone le déterminant de la partie symétrique du tenseur constitutif M s'annule avant le déterminant du tenseur lui-même, nous pouvons conclure que la violation du critère de stabilité de Hill précède la condition limite de plasticité.

Darve et ses coauteurs, [Darve et al., 2004], [Darve et Lambert, 2004] et [Lanier et Jean, 2000] sur la base de recherches directionnelles ont déterminé la limite du domaine de bifurcation, dans l'espace des contraintes regroupant les états pour lesquels le travail du second ordre est négatif ou nul. Cette étude a été réalisée avec une loi incrémentalement linéaire par morceau et une loi incrémentalement non linéaire. Ces deux lois ont été calées sur le sable d'Hostun lâche et dense. La Figure 1.9 décrit, dans le plan déviatoire des contraintes, le domaine d'instabilité (bifurcation), situé entre l'hexagone qui représente le critère de Mohr Coulomb et la courbe en pointillé, calculé avec la loi incrémentalement non linéaire.

Les mêmes auteurs se sont également intéressés au calcul de la limite du domaine de bifurcation dans le plan d'axisymétrie des contraintes $(\sqrt{2}\sigma_3, \sigma_1)$. La Figure 1.10 représente pour différents états de contrainte des cônes d'instabilité à l'intérieur du domaine de bifurcation. Pour des lois incrémentales, le travail du second ordre est défini par la relation (1.14). Donc pour estimer le d^2W , il est nécessaire de considérer un incrément de chargement $d\sigma$. Or le tenseur constitutif M dépend de la direction du chargement et du nombre de zones tensorielles considérées. De ce fait, le travail du second ordre est une quantité essentiellement directionnelle. La Figure 1.10 représente l'ensemble des directions de chargement instables sous forme de cônes pour lesquels le travail du second ordre s'annule ou devient négatif. Notons finalement qu'un domaine de bifurcation existe à l'intérieur même du critère limite de Mohr-Coulomb.

Comme conclusion des résultats obtenus par Darve et ces coauteurs, une rupture diffuse en un point matériel du milieu étudié est possible pour les états de contraintes situés à l'intérieur du domaine de bifurcation et pour des directions de chargement incluses dans les cônes de direction instables.

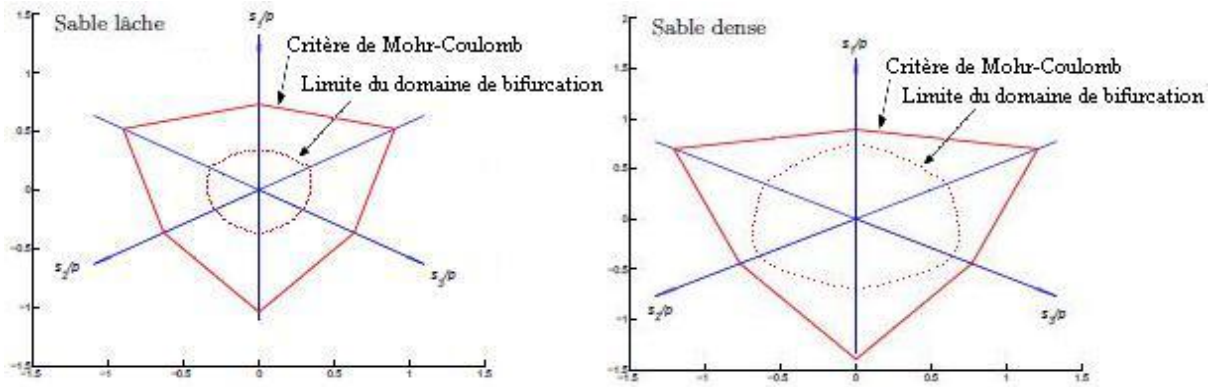


Figure 1. 9. Tracé du domaine d'instabilité suivant le critère de positivité du travail du second ordre dans le plan déviatoire des contraintes pour un sable lâche et dense. [Darve et Laouafa, 2000].

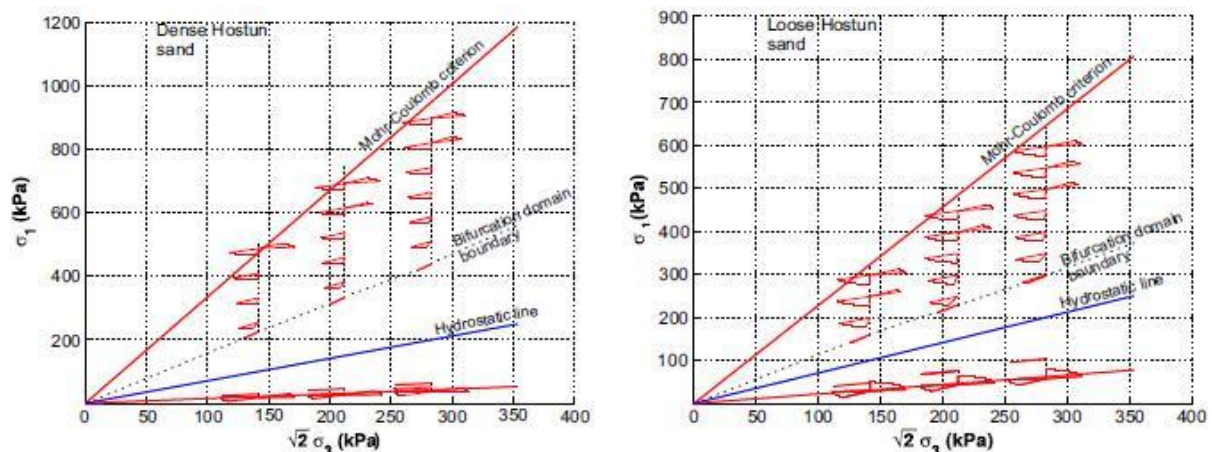


Figure 1. 10. Limite du domaine de bifurcation dans le plan d'axisymétrie des contraintes et cônes de direction instables [Darve et al., 2004].

1.5.2.3. Mode diffus selon Nova

Le concept de perte de contrôlabilité établi par Nova [Nova, 1994] et Imposimato et Nova [Imposimato et Nova, 1998] est basée sur la recherche de perte d'unicité au niveau constitutif au cours d'un programme de sollicitation imposé. A la différence du critère de localisation de déformation donné par Rudnicki et Rice, les auteurs supposent que l'état de contrainte-déformation soit homogène avant et après la perturbation. Ils ont étudié cette perte d'unicité sur des lois élasto-plastique écrouissable non-associées.

Les sollicitations "géotechniques" sont le plus souvent définies de façon mixte en contrainte-déformation. Par exemple, la somme des taux de déformations principales est maintenue à zéro lors d'essais non drainés. Imposimato et Nova [Imposimato et Nova, 1998]

ont introduit des variables de contrôle qui permettent de décrire différents types de chemins (triaxial drainé, oedomètre . . .), ces dernières s'écrivent de la manière suivante :

$$\dot{\eta} = T_\varepsilon \dot{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \dot{\xi} = T_\sigma \dot{\sigma} \quad \mathbf{1.18}$$

Les deux matrices T ne sont pas nécessairement orthogonales. Ils montrent ensuite qu'il est possible d'obtenir une relation contrainte-déformation généralisée à l'aide d'une matrice de souplesse généralisée Δ dépendant de la matrice élasto-plastique constitutive du matériau :

$$\dot{\xi} = \Delta \dot{\eta} \quad \mathbf{1.19}$$

Afin d'imposer le chemin de sollicitation voulu on choisit de contrôler certaines composantes de $\dot{\eta}$ et $\dot{\xi}$. Pour cette raison il est pratique de partitionner la matrice de souplesse généralisée :

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{1.20}$$

Où les variables $\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2$ et $\dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2$ sont des vecteurs colonne de j rangées et $6-j$ rangées avec $1 \leq j < 6$. L'équation 1.20 devient dans le cadre d'un pilotage mixte (en supposant que Δ_{22} est non singulière) :

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\eta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} - \Delta_{12}\Delta_{22}^{-1}\Delta_{21} & \Delta_{12}\Delta_{22}^{-1} \\ -\Delta_{22}^{-1}\Delta_{21} & \Delta_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{1.21}$$

Pour un couple de paramètres de contrôle $(\dot{\xi}_1, \dot{\eta}_2)$ il existe une unique solution $(\dot{\eta}_1, \dot{\xi}_2)$ au système posé, si seulement si, le déterminant de la matrice de l'équation 1.21, noté A est non nul. Dans le cas contraire, il existe une infinité de solution qui sera proportionnelles aux vecteurs propres A : il y a alors perte de contrôlabilité.

Notons que $\dot{\xi}_1$ et $\dot{\eta}_1$ ainsi que $\dot{\xi}_2, \dot{\eta}_2$ sont des variables conjuguées par l'intermédiaire du travail du second ordre :

$$d^2W = \dot{\varepsilon} : \dot{\sigma} = \dot{\eta} : \dot{\xi} = \dot{\xi}_1 : \dot{\eta}_1 + \dot{\xi}_2 : \dot{\eta}_2 \quad \mathbf{1.22}$$

Pour un modèle élasto-plastique à simple potentiel, Nova [Nova, 1994] a montré que la perte de contrôlabilité est équivalente à la perte de positivité du travail du second ordre. De plus, avec le même modèle Imposimato et Nova [Imposimato et Nova, 1998] ont démontré qu'il existait un large domaine dans le plan déviatoire où une perte de stabilité constitutive pouvait se rencontrer. Ces régions sont délimitées par des points sur la Figure 1.11, et sont exclusivement situées dans le domaine entre le critère limite de plasticité et les points pour lesquels la partie symétrique de la matrice de rigidité devient singulière c'est-à-dire points pour lesquels le travail du second ordre s'annule.

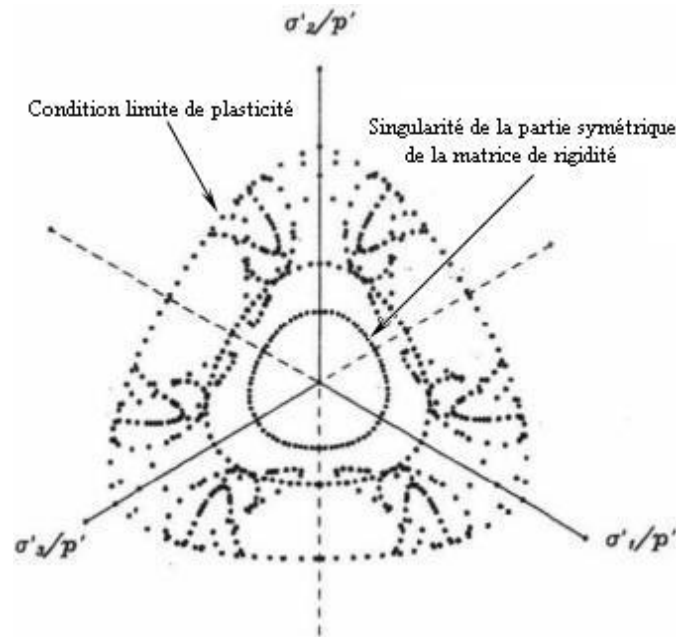


Figure 1.11. Lieux de perte d'unicité constitutive selon Omposimato et Nova [Imposimato et Nova , 1998].

1.6. Modélisation des matériaux granulaires : Quelle approche choisir – expérimentale ou numérique

Comme nous l'avons signalé dans l'introduction générale, le but principal de ce travail de thèse se divise en deux parties :

- Reproduire le comportement d'un milieu granulaire sous sollicitations, depuis une échelle élémentaire dite microscopique jusqu'à l'échelle beaucoup plus large, dite macroscopique.
- Étudier la rupture au sein d'un milieu granulaire comme un problème de bifurcation.

Ces deux points peuvent être étudiés avec différentes approches ; par exemple avec des essais expérimentaux ou avec des modèles numériques tels qu'une simulation numérique discrète.

Les essais expérimentaux ont l'avantage d'être plus *réalistes* que les modèles numériques. Cependant, pour l'étude que nous avons réalisée, l'approche expérimentale présente aussi quelques difficultés :

- Il est impossible de faire varier systématiquement une propriété des grains sans devoir changer de matériau.
- Il est difficile d'avoir le même état initial dans plusieurs expériences.
- Il est difficile d'avoir accès aux variables à l'échelle des grains et des contacts (forces inter-granulaires) ce qui constitue une limitation dans l'étude détaillée des mécanismes inter-granulaires à l'équilibre ou en cours de chargement.

En revanche, une méthode de simulation numérique permet de contourner facilement ces difficultés :

- On peut agir facilement sur les paramètres et déterminer ainsi leur influences sur le comportement du système : par exemple, dans le contexte des milieux granulaires, on peut facilement modifier la forme et la taille des grains, leur densité, leur résistance, etc.
- On connaît à tout moment l'état du système. Cela signifie que l'on peut par exemple observer les mécanismes cinématiques et comment ils évoluent au cours du temps. On peut faire des mesures sans perturbation du système.
- Une fois le modèle programmé, on peut faire un grand nombre d'expérience à peu de frais.
- On peut refaire plusieurs fois une expérience avec strictement les mêmes conditions initiales.

Cependant, une simulation numérique est moins *réaliste* qu'un essai expérimental, mais reste *à priori* bien adaptées pour la simulation des milieux granulaires dont le comportement dépend d'une grande partie de la présence des discontinuités. Reste qu'à l'heure actuelle, et probablement pour longtemps, les moyens informatiques ne permettent pas de simuler de façon réaliste l'ensemble des particules de sol, trop nombreuses et de formes trop complexes. Le milieu granulaire est simplifié pour pouvoir calculer son évolution ; par exemple, de supposer que les grains ont une forme circulaire et de rendre le milieu bidimensionnel. Ces simplifications peuvent être vues comme une limitation, mais elles peuvent aussi être vues comme un grand avantage. Dans certains cas, elles peuvent même être souhaitables, car elles permettent d'écarter l'effet de certains paramètres et d'étudier le comportement du système dans leur absence. Comme par exemple, si on veut écarter l'effet de l'angularité des grains, on peut utiliser des grains circulaires ou sphériques, ou si l'on veut écarter l'effet du frottement et de la gravité, on peut les enlever.

C'est à la fin des années septante que les chercheurs ont commencé à s'intéresser sérieusement à la simulation des milieux granulaires. De nombreux modèles existent donc déjà. On peut dans un premier temps distinguer deux approches : l'approche continue et l'approche discrète.

Nous nous intéressons ici uniquement à la seconde, eu égard à l'approche adoptée dans le cadre de ce travail et au domaine d'étude considéré. Disons brièvement que la première considère un milieu granulaire comme continu. Elle ne s'intéresse pas au comportement particulier de chaque grain, mais au comportement du milieu dans sa globalité. Cette méthode, dite des *éléments finis*, ne s'applique pas à tous les cas d'étude :

- difficile en effet d'observer des phénomènes comme la ségrégation, où les grains de petites tailles se séparent de ceux de grandes tailles, puisque les grains ne sont pas représentés en tant que tels.
- Dans les bétons ou les roches, la localisation des zones de fractures est difficilement reproductible [Camborde et al., 2000].
- Dans les géomatériaux composites, le comportement localisé au niveau des interactions entre ses différents composants est difficilement contrôlé [Saltot, 2007].

L'approche continue ne semble pas en mesure d'appréhender efficacement les différents comportements. En revanche, des modèles basés sur l'approche discrète engendrent naturellement des phénomènes de localisation liés à la nature discrète du modèle. L'ensemble des phénomènes physiques résultants est également contrôlé par des lois d'interactions simples.

1.7. Les modèles numériques basés sur la méthode des éléments discrets

Les modèles numériques basés sur la DEM se composent d'un ensemble de grains virtuels pouvant s'interpénétrer au voisinage des contacts. Ils constituent des assemblages assimilables à des milieux granulaires réels. Ces modèles ont donc l'avantage de pouvoir reproduire les caractéristiques physiques ou géométriques des matériaux à simuler. Cette partie présente des résultats et des observations collectées de la littérature. Elle touche aussi sur les difficultés que peut présenter la modélisation du comportement mécanique d'un milieu granulaire et plus particulièrement les sols pulvérulents.

Après une description générale des modèles numériques reposant sur la DEM et de ces applications, la simulation d'essais expérimentaux sera abordée. Dans la plupart des cas, l'ordre de grandeur du nombre de grain constituant un milieu réel est considérable ce qui est difficile voire impossible de le reproduire par un modèle numérique. Cette question est particulièrement cruciale puisque l'on cherche à caractériser le comportement macroscopique du milieu granulaire. Il s'agit de déterminer un nombre suffisant de grain et un volume d'éléments dont le comportement sera représentatif. Parallèlement, l'obtention de résultats quantitatifs nécessite la détermination des paramètres du modèle. Cette phase a conduit de nombreux auteurs, expérimentateurs ou numériciens, à réfléchir préalablement sur la stratégie à adopter. Pour finir, on montrera sur quelques exemples que le comportement des modèles composés de sphères n'est pas adapté à la simulation du comportement du sol et on présentera ainsi les solutions proposées dans la littérature pour une meilleure représentation du comportement des milieux granulaires.

1.7.1. Les modèles d'éléments discrets dans la littérature

Les modèles d'éléments discrets intéressent des disciplines variées comme la mécanique, la physique de la matière, la chimie, l'astronomie, ...etc. Pour la plus grande partie, ils ont été développés à l'origine dans le but de résoudre des problèmes faisant intervenir des phénomènes non cohésifs. Il serait intéressant d'analyser leur évolution. Ils ont donné naissance à une importante littérature dont un panorama exhaustif dépasse le cadre de cette étude.

Dès 1882, Hertz établit une loi de contact entre deux sphères. Au siècle suivant, [Schneebeli, 1956] étudie de manière expérimentale des empilements de cylindres et permis d'explorer le comportement des milieux granulaires à l'échelle macroscopique. Dans la seconde moitié du 20^{ème} siècle, de nombreuses méthodes numériques discrètes ont été développées pour étudier le comportement des milieux granulaires. La première présentation a été faite par [Cundall, 1971] pour l'étude de stabilité de joints rocheux de grande taille, représentés par des éléments virtuels bidimensionnels polygonaux. Il simule les interactions au niveau des contacts dont les déplacements sont régis par le principe fondamental de la dynamique. Très vite, les modèles discrets ont été appliqués à l'étude des milieux granulaires comme les sols. Il existe de nombreux modèles numériques basés sur la DEM. Ils peuvent être classés suivant divers paramètres : les schémas d'intégration, la rotation et la déformabilité des éléments, les algorithmes de détection des contacts, les lois de contacts, etc.

Toutes ces méthodes ont été déjà bien détaillées, nous invitons le lecteur à se référer à la littérature [Cundall et Hart 1992], [Muller, 1996], [Cambou et Jean 2001]. Parmi ces méthodes la *Dynamique Moléculaire* [Allen and Tildesley, 1987] et la *Dynamique des Contacts* [Moreau, 1994, 2000], [Jean, 1999] et [Radjai, 1998]. Elles sont les mieux adaptées pour les milieux granulaires et conçoivent différemment la base même des lois de contacts. Elles ont comme point commun qu'elles mettent en œuvre la discrétisation dans le temps des équations de la dynamique.

La méthode la plus répandue est la dynamique moléculaire. Elle se caractérise par la prise en compte d'une élasticité dans les contacts et repose sur un schéma d'intégration explicite. Les trajectoires des particules sont alors régulières au sens où l'on calcul des variations continues des quantités cinématiques relatives aux grains. Dans sa forme la plus classique, l'interaction entre deux corps frottants est régie par deux lois de contact qui statuent sur les efforts normaux et tangentiels entre les grains. Aujourd'hui, la majorité des codes de calculs s'inspire de la dynamique moléculaire et plus particulièrement de la méthode des éléments distincts élaborée par Cundall et Strack [Cundall et Strack, 1979].

1.7.2. Applications en domaine de Génie Civil

En génie civil, la modélisation numérique discrète a été utilisée pour de multiples applications. Durant la dernière décennie, elle a permis des études relatives à de nombreux thèmes de recherche:

- La stabilité de pentes rocheuses [Deluzarche et al., 2003a];
- Les impacts de matériaux rocheux [Kecili-Laouafa et Nicot, 2004];
- DEM Modelling of soil structures reinforced with geosynthetics [Chareyre et al. 2005];
- Réponse au défi des déchets de pneus : Comportement mécanique et modélisation numérique de mélanges de copeaux de pneus – sol [Gotteland et al., 2006];
- Application de la méthode des éléments discrets aux calculs des ouvrages en sol renforcés par géosynthétique [Letnh et al., 2007];
- Modélisation par éléments discrets d'ouvrages 3D en génie civil : Application de la méthode Non Smooth Contact Dynamics [Perales et al., 2007];
- Modeling of a rock fall using the discrete element method and study of the seismic signal [Pater et al., 2008] ;
- Modélisation par la méthode aux éléments discrets des ouvrages en géomatériaux [Donze et al., 2009];
- Using nonconvex discrete elements to predict experimental behaviour of granular material [Gotteland et al., 2009].

Ces différents thèmes montrent la diversité des applications de la méthode. Cependant, les résultats menés par ces applications ne sont pas quantitatifs ce qui nécessitent une détermination adéquate des paramètres du modèle. Cela fait appel à une procédure de calibration des paramètres suivi par une comparaison des résultats numériques avec les résultats expérimentaux.

1.7.3. Simulation d'essais expérimentaux

De nombreux auteurs ont interprété des essais expérimentaux en se reposant sur l'hypothèse que le comportement mécanique d'un échantillon de sol peut être assimilé à celui d'un milieu continu dont le comportement est défini, en chaque point, par une loi macroscopique en contrainte-déformation. Ceci semble a priori logique pour l'expérience car le rapport de taille est très grand entre l'échantillon et le plus gros grain. Cependant on peut s'interroger sur l'assimilation des échantillons virtuels issus de la DEM à un milieu continu sachant qu'ils sont composés d'un nombre réduit d'éléments.

1.7.3.1. Echantillon représentatif

La détermination du comportement macroscopique d'un échantillon numérique peut se faire :

- Par technique d'homogénéisation ;
- Par des mesures globales effectuées sur l'ensemble de l'échantillon numérique.

La technique d'homogénéisation a pour objectif de décrire le comportement d'un matériau à l'échelle macroscopique (caractérisé par la loi de comportement reliant les tenseurs de contrainte et de déformation) en fonction de ces propriétés à l'échelle microscopique (structure du milieu, champ de forces, champ de déplacement des particules). Ceci a tout son intérêt pour des milieux tels que les milieux granulaires dont le comportement global est fortement influencé par la nature discrète à l'échelle microscopique. Ces propriétés à l'échelle locale sont moyennées sur un Volume Élémentaire Représentatif (Pour une bonne compréhension du VER le lecteur se reportera au Chapitre 3 section 3.5.2. Ce VER est défini d'après Cambou et Jean [Cambou et Jean, 2001] comme étant un volume élémentaire où sa réponse correspond à un comportement bien déterminé et unique.

Cette démarche s'avère nécessaire lorsqu'on utilise la MED comme un accès à des quantités locales. Elle apporte des éléments de réponse à la question du choix des paramètres. Elle permet aussi la comparaison entre la simulation et les lois constitutives. Bien que les approches puissent différer d'un auteur à l'autre, le principe de l'homogénéisation est généralement celui schématisé par Cambou et *al.* [Cambou et *al.*, 95] (Figure 1.12). le schéma d'homogénéisation est composé de trois principales relations, citons, (1) la loi de contact qui relie les deux variables locales cinématique et statique, (2) une opération de moyenne qui permet de décrire une variable globale en fonction de la distribution des variables locales, (3) une opération de localisation qui, au contraire de la précédente, permet de décrire la variable locale en fonction de la variable globale correspondante.

En ce qui concerne le comportement macroscopique obtenu à partir des mesures globales, l'échantillon est dit représentatif si pour une augmentation de son nombre d'élément ou bien de son volume, conduit à une faible variation de sa réponse macroscopique. En effet, un

échantillon est dit représentatif si le rapport de taille est très grand entre la plus petite dimension de l'échantillon et le plus gros élément le composant.

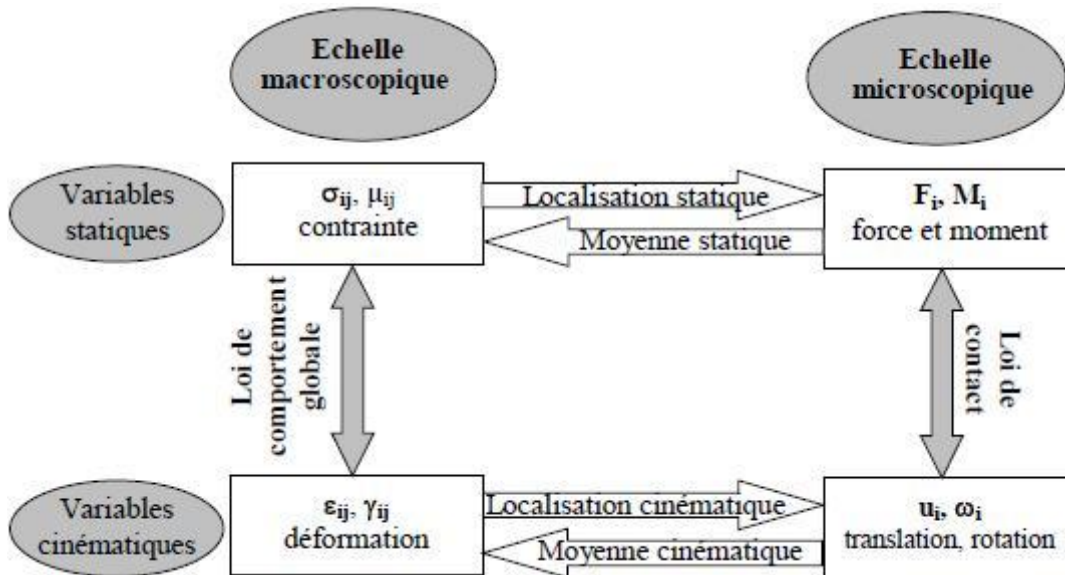


Figure 1.12. Schéma d'homogénéisation.

1.7.3.2. Calibration des paramètres

Cette phase de calibration consiste à déterminer le lien entre les paramètres du modèle numérique et les paramètres macroscopiques choisis par le modélisateur. Leur détermination permet une prédiction quantitative des résultats expérimentaux. En effet, pour une bonne prédiction d'une réponse expérimentale donnée, il est nécessaire de connaître la dépendance paramétrique et son influence sur la réponse du modèle et aussi de bien comparer cette dernière à un résultat issu de l'expérience.

Dans ce cadre nous trouvons les travaux de Chareyre [Chareyre, 2003]. Avant de passer à l'échelle de l'ouvrage, l'auteur a proposé de simuler des essais biaxiaux et de faire une analogie entre les résultats numériques et expérimentaux pour aboutir à un jeu de paramètres optimal. Nous trouvons aussi, les travaux de [Plassiard, 2007], [Belheine et al., 2008] sur les simulations numériques des essais triaxiaux d'un milieu pulvérulent. Les auteurs ont pu développer une méthodologie de calage entre l'expérimental et le numérique [Plassiard et al., 2008]. De la même manière que les essais de laboratoire servent à caractériser le comportement mécanique d'un sol granulaire, la simulation de ces essais fournit un jeu de paramètres permettant d'approcher quantitativement le comportement macroscopique du matériau.

1.7.4. Réponse des modèles d'essais triaxiaux : un saut dans la littérature

Parmi les principaux facteurs influençant la simulation des essais expérimentaux par la MED, nous trouvons:

- La limitation de la puissance des calculs ne permet pas de reproduire un échantillon avec autant de grain qu'il n'en possède en réalité ;
- La forme des particules et leur mise en place s'avère être complexe ;
- Le contrôle des conditions aux limites...etc.

La forme des particules est un facteur particulièrement intéressant. La modélisation d'une forme géométrique plus proche à celle des grains reste une question ouverte. En effet, si les particules sont choisis sphériques, pour des raisons de simplicité de détection et de gestion de contact, les mécanismes de déformation sont dominés par la rotation des particules ce qui conduit à une faible résistance au cisaillement. Au contraire, si les particules sont plus anguleuses, le temps de calcul augmente considérablement et des blocages ont lieu, empêchant les rotations et mobilisant pleinement la résistance au cisaillement par glissement des grains. Ainsi, nous trouvons dans la littérature différentes approches qui considèrent des éléments aux formes proches des grains, des éléments non sphériques de forme géométrique simple ou des éléments sphériques au roulement limité. Ces approches sont bien résumées ci-dessous.

1.7.4.1. Comportement singulier des assemblées de sphères

De nombreux exemples montrent que des assemblées de sphères se comparent bien aux résultats expérimentaux obtenus sur des assemblées de billes de verre mais nettement moins à ceux obtenus sur sable sec soumis à des essais triaxiaux, car la résistance obtenue numériquement est bien trop sous-évaluée. Des mécanismes de roulement susceptibles de se développer avec des éléments sphériques sont mis en cause [Achmus et abdel-Rahman, 2003].

La Figure 1.13 montre les résultats des essais numériques effectués sur des assemblées de sphères sous un confinement de 110 kPa , et pour différentes valeurs de l'angle de frottement microscopique avec des lois de contacts identiques à celles utilisées par [Achmus et abdel-Rahman, 2003]. Il est bien clair que ces assemblées semblent incapables d'atteindre de frotts déviateurs à l'état résiduel (inférieur à 160 kPa). L'angle de frottement résiduel macroscopique correspondant est dans les environs de 26° . Classiquement, pour des sables secs on observe un angle de frottement résiduel supérieur à 30° . En effet, malgré la rapidité des calculs favorisée par la forme sphérique (toute imbrication de sphère est empêchée), le modèle composé d'une assemblée de sphère semble donc pas en mesure de bien reproduire le comportement mécanique d'un milieu granulaire quelconque.

Afin de palier ce déficit, il semblerait d'après Matsushima et Saomoto [Matsushima et Saomoto, 2002] que le fait de considérer des éléments non sphériques et plus anguleux permet d'augmenter la résistance au cisaillement et ainsi d'obtenir des résultats comparables au sable réel. Plusieurs méthodes ont été proposées pour remédier au roulement des grains. Elles sont soit basées sur l'utilisation d'éléments non sphériques, soit sur l'utilisation des lois

de contact spécifique qui ont pour conséquence le blocage partiel ou total des rotations des éléments.

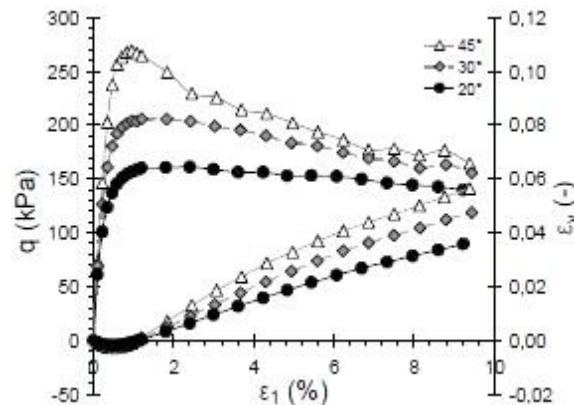


Figure 1. 13. Réponse d'une assemblée de sphères pour différentes valeurs de l'angle de frottement microscopique

1.7.4.2. Comportement des assemblées d'éléments convexes non sphériques

De nombreux problèmes traités par la MED utilisent des éléments polygonaux en 2D. Nous trouvons les travaux de Alonso-Marroquin [Alonso-Marroquin, 2004] et Nouguiet-Lehon [Nouguiet-Lehon et Frossard, 2005] qui ont fait varier l'allongement des éléments comme le montre la Figure 1.14. Les auteurs ont pu montrer en dynamique des contacts que des polygones allongés permettent de limiter les mécanismes de rotations au sein de l'échantillon.

Les travaux de Potapov et Campbell [Potapov et Campbell, 1998] proposent de simuler des milieux granulaires par des assemblées d'éléments 2D plus complexes dont la forme peut évoluer d'un cercle à un triangle ou un carré comme le montre la Figure 1.15. Nous trouvons également les travaux de Pournin et Liebling [Pournin et Liebling, 2005] sur des assemblées en 3D. La forme d'éléments 3D initialement composée de sphère est redue convexe (présentée sur la Figure 1.16). Malheureusement, aucun essai mécanique n'est réalisé sur ces assemblées et aucune indication sur l'anisotropie n'est donnée.

Kuhn et Bagi [Kuhn et Bagi, 2004] proposent des éléments disques et ovales en 2D et des éléments sphères et sphéroïdes allongés et aplatis en 3D pour simuler des essais biaxiaux et triaxiaux, respectivement. La Figure 1.17 représente les résultats des essais. Les auteurs montrent que les assemblées composées de formes géométriques parfaitement symétriques (disques et sphères) ont une résistance plus faible.

Emeriault et Claquin [Emeriault et Claquin, 2004] ont développé des éléments de forme quasi circulaires composés par des disques indissociables collés l'un sur l'autre pour simuler des

essais biaxiaux (représenté sur la Figure 1.18). Des simulations numériques ont été menées sur des assemblées granulaires composées d'éléments de 8 disques et d'éléments de 12 disques. La Figure 1.19 représente les résultats des essais. On constate que les échantillons composés d'éléments de 8 disques présentent une résistance maximale supérieure de 15% à celles obtenues pour les deux autres échantillons. Cette augmentation de résistance est due à une rugosité de surface des éléments plus importante et est donc liée à une surface non convexe.

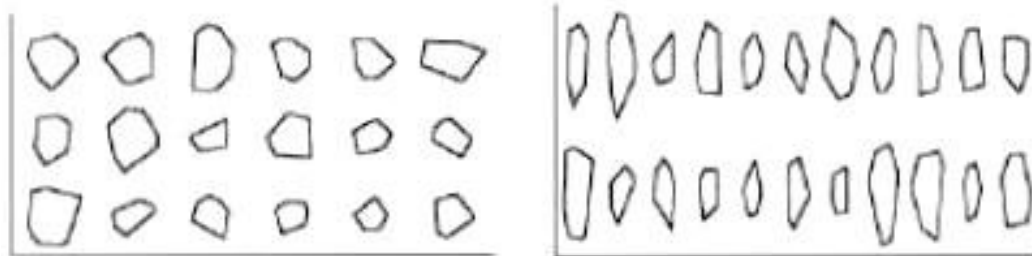


Figure 1.14. Formes d'éléments proposées par Nougier-Lehon [Nougier-Lehon *et al.*, 2003].

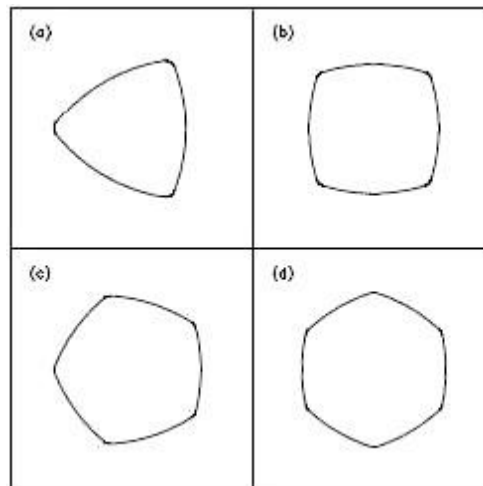


Figure 1.15. Forme d'éléments proposés par Potapov et Campbell [Potapov and Campbell, 1998].

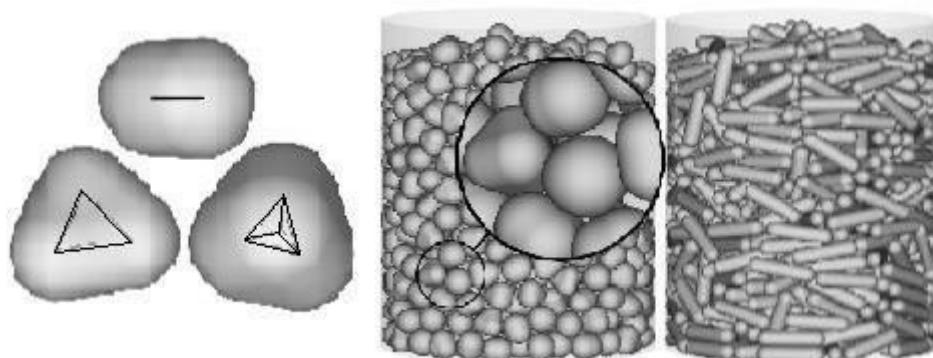


Figure 1.16. Formes d'éléments proposées par Pournin et Liebling [Pournin and Liebling, 2005].

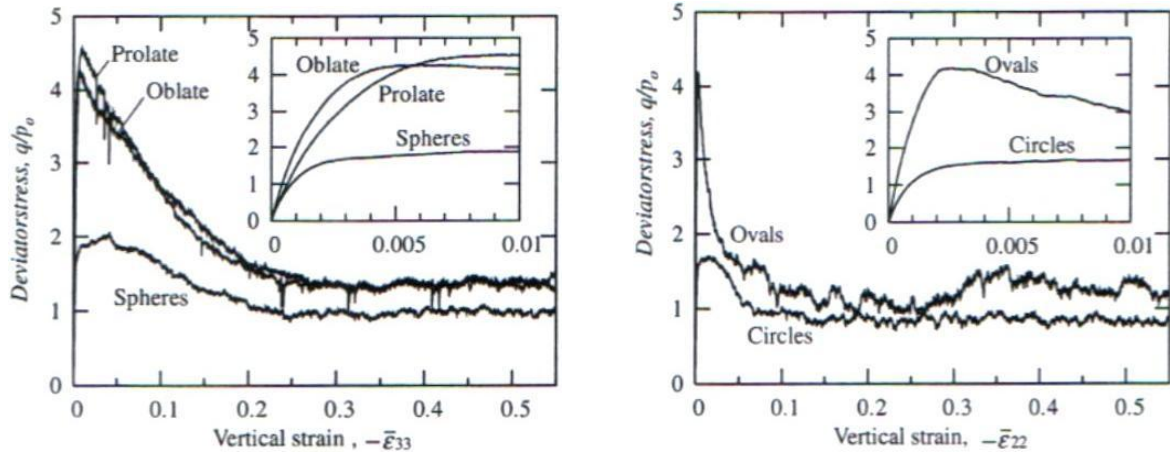


Figure 1.17. Résultats obtenus par Kuhn et Bagi [Kuhn and Bagi, 2004] pour diverses formes d'éléments pour un essai biaxial en 2D (à gauche) et triaxial (à droite).

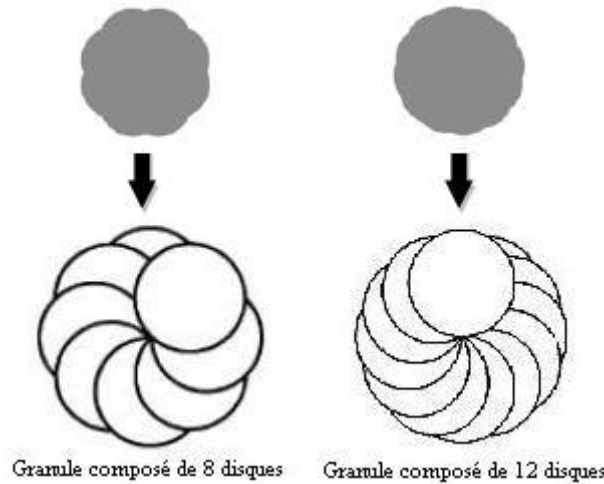


Figure 1.18. Formes d'éléments proposées par [Emeriault and Claquin, 2004 Salot].

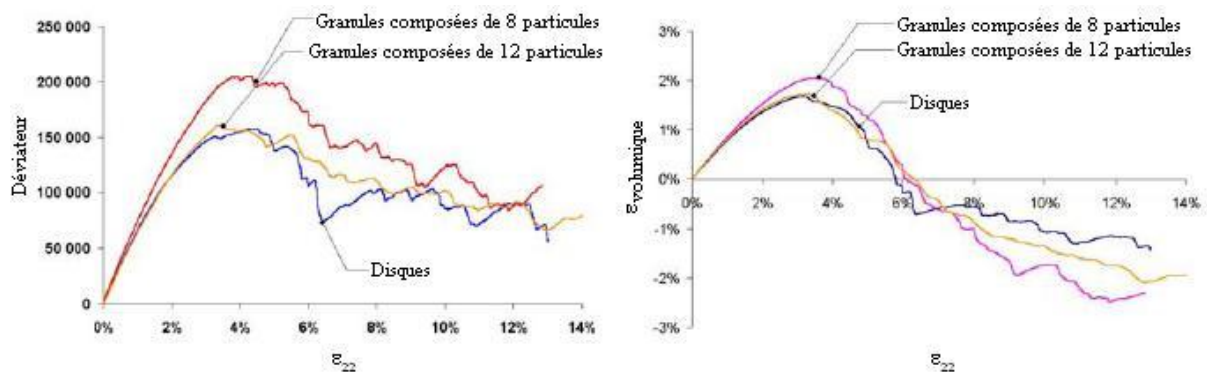


Figure 1.19. Résultats obtenus par Emeriault et Claquin [Emeriault et Claquin, 2004] pour des essais biaxiaux.

1.7.4.3. Comportement des assemblées d'éléments non convexes

Plusieurs chercheurs ont menés des simulations discrètes d'essais triaxiaux avec des éléments non convexes. D'après [Matsushima et Saomoto, 2002], les éléments non convexes engendrent un transfert de moments entre eux, ce qui augmente la résistance globale de l'assemblage granulaire. Ces auteurs ont mis en évidence un algorithme spécifique pour mieux approcher la forme réelle des grains de sol par des assemblages d'éléments circulaires en 2D ou sphérique en 3D (présentés sur les Figures 1.20 et 1.21).

Rothenberg et Bathurst [Rothenberg et Bathurst, 1992] ont conduit une série d'essai biaxiale avec des éléments elliptiques de différents allongements. Ils ont montré que les échantillons composés d'ellipses dont l'allongement est environ 0.8 présentent une résistance au cisaillement maximale par rapport aux autres formes.

Matsushima et Konagai [Matsushima et Konagai, 2001] proposent des éléments elliptiques et polygonaux réguliers en 2D pour simuler des essais de cisaillement simple. Les auteurs constatent que les éléments polygonaux montrent une plus grande résistance à la rotation à leurs points de contacts qui mènent à une résistance au cisaillement plus élevée. Ils favorisent les éléments polygonaux réguliers pour mieux modéliser la forme des grains de sable étudié.

O'Sullivan et Bray [O'Sullivan et al., 2005] ont utilisé des éléments composés de deux sphères ayant le même rayon nommés « Clusters ». Les échantillons sont soumis à des essais triaxiaux dont la réponse est donnée sur la Figure 1.22. Ils constatent que ces éléments non convexes engendrent un nombre de contacts plus important et une meilleure résistance que des assemblées composées de sphères.

En conclusion, des formes simples non convexes engendrent des échantillons plus résistants qu'une assemblée de sphères et capables d'approcher quantitativement le comportement mécanique d'un sable.

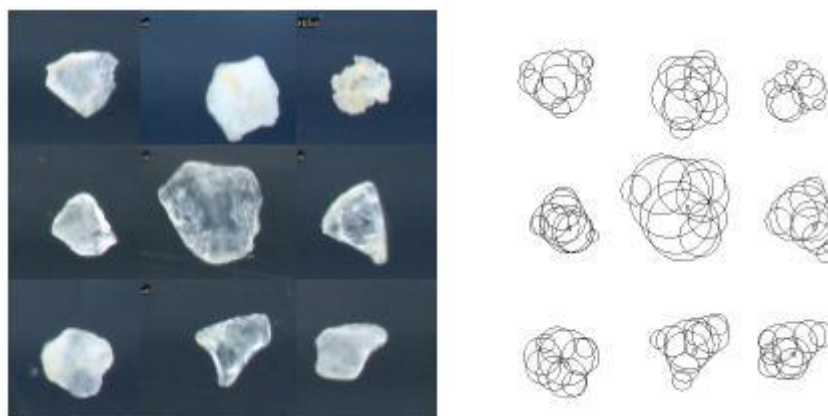


Figure 1. 20. Catalogue des grains en 2D pour la modélisation du sable de Tayoura par [Matsushima et Saomoto, 2002].

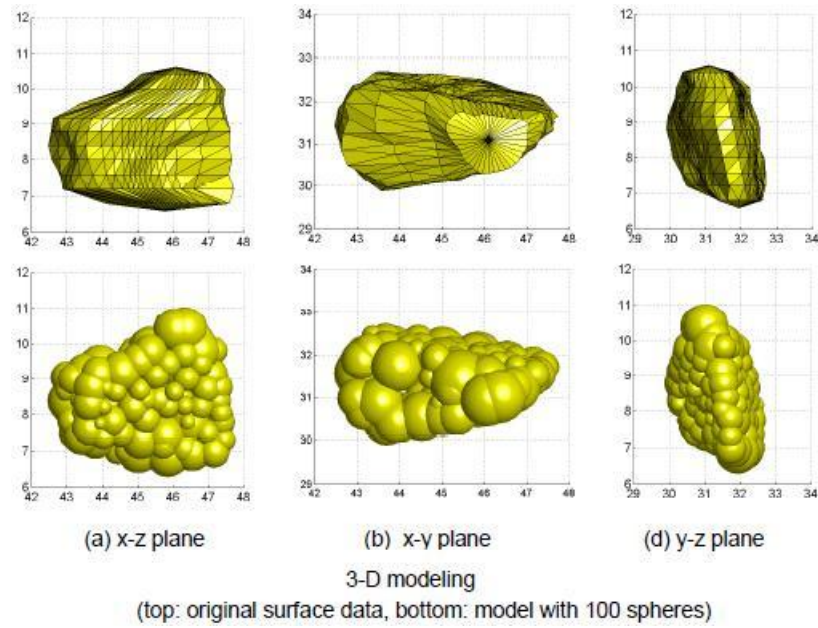


Figure 1. 21. Forme d'éléments composés de 100 sphères en 3D pour la modélisation du sable de Tayoura par [Matsushima et Saomoto, 2002].

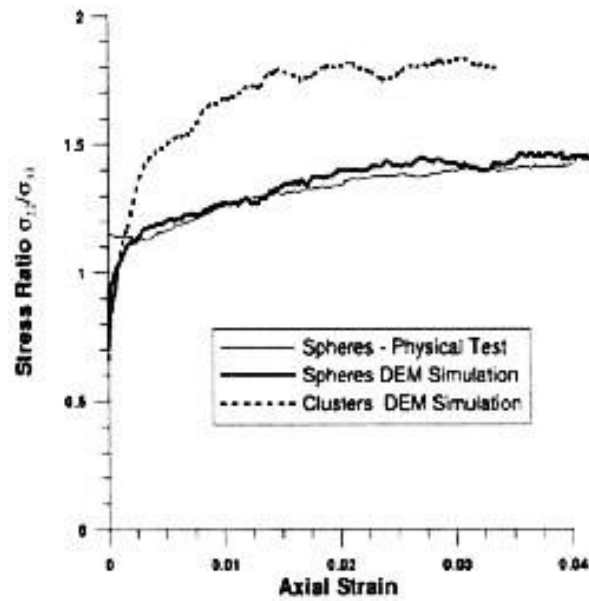


Figure 1. 22. Comparaison des simulations pour des échantillons composés de sphères et d'éléments de deux sphères [O'Sullivan et Bray, 2005].

1.7.4.4. Des assemblées de sphère avec limitation des mécanismes de rotation

Plusieurs modèles théoriques consistent à limiter la rotation des éléments en prenant en compte de la résistance au roulement au niveau des contacts [Iwashita et Oda, 1998], [Zhou et al., 1999], [Bratberg et Radjai, 2002], [Delenne et al., 2004], [Jiang et al., 2006]. Ces modèles permettent d'obtenir des valeurs d'angles de frottement interne et de déformation volumique plus réalistes que celles obtenues lorsque la rotation relative des éléments n'est pas restreinte [Iwashita et Oda, 2000], [Zhou et al., 2001, 2002]. D'autres chercheurs ont aussi étudié des milieux dont lesquels la rotation des éléments est complètement restreinte [Latham et al., 2005], [Calvetti et Nova, 2005], [Calvetti et al., 2005], [Alonso-Marroqu'in et al., 2006].

Suiker et Fleck [Suiker et Fleck, 2004] ont utilisé des éléments sphériques à rotation libre ou non. Les échantillons sont soumis à un essai de compression triaxial. La Figure 1.23 représente d'une part la réponse déviatoire et d'autre part l'évolution de l'angle de frottement macroscopique en fonction de l'angle de frottement microscopique pour des rotations libres et bloquées. Ils constatent que le blocage des rotations des éléments sphériques engendre une augmentation marquée de la résistance au cisaillement. Calvetti et al. [Calvetti et al., 2003] bloque également les rotations des éléments. La Figure 1.24 montre que le blocage des rotations permet d'approcher quantitativement le comportement mécanique d'un sable sous sollicitation triaxiales.

Iwashita et Oda [Iwashita et Oda, 2000], et [Jiang et Haris, 2005] ont modifié les lois de contacts classiques en 2D en introduisant une résistance au roulement. Le modèle de [Iwashita et Oda, 2000] a été adapté en 3D par [Plassiard et al., 2008] et ouvre de nouvelles perspectives.

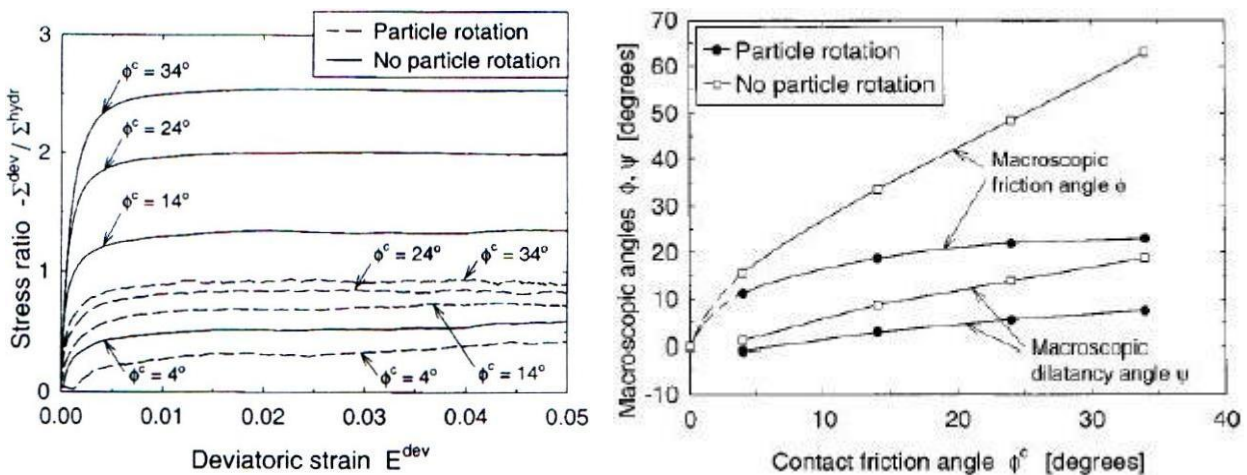


Figure 1. 23. Angles de frottement et de dilatance en fonction de l'angle de frottement microscopique obtenus par Suiker et Fleck [Suiker et Fleck, 2004] avec et sans rotation des éléments.

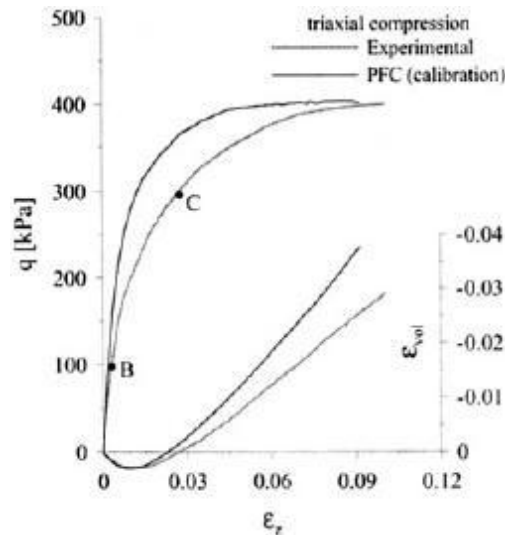


Figure 1. 24. Comparaison entre les déviateurs et déformations volumiques obtenus expérimentalement et numériquement par Calvetti et al. [Calvetti et al., 2003].

1.8. Importance des rotations et de la résistance au roulement dans la réponse macroscopique

La troisième partie porte sur l'importance du roulement dans la réponse macroscopique. Une brève synthèse historique des travaux qui ont été consacrés au rôle des rotations dans les paramètres qui décrivent la résistance au cisaillement et la déformation volumique est exposée.

1.8.1. Angle de frottement local, angle de frottement interne et roulement

Il est bien reconnu que l'angle de frottement interne est l'un des paramètres qui caractérise la résistance au cisaillement d'un milieu granulaire. En 1934, Caquot a été l'un des premiers à s'intéresser au rôle des propriétés de résistance locales dans ce paramètre macroscopique [Caquot, 1934]. Il a considéré un milieu isotrope, et il a supposé que, lors du cisaillement, la force tangentielle appliquée sur tous les contacts du milieu prend la valeur limite imposée par la loi de frottement de Coulomb. En 1954, Bishop, à partir des considérations énergétiques, a proposé deux expressions qui permettent de calculer l'angle de frottement interne en fonction de l'angle de frottement inter-granulaire [Bishop, 1954] ; ceci pour un essai en compression triaxial. Plus tard, en 1962, Rowe s'est intéressé au cisaillement d'un arrangement monodisperse de sphères [Rowe, 1962], et il a obtenu une expression reliant le rapport des contraintes et les deux angles dépendant du type d'arrangement et de la direction dans laquelle le milieu est cisailé. Une étude similaire a été développée par Horne en 1965 [Horne, 1965].

En 1969, des travaux expérimentaux de Skinner sur des billes de verre, ont montré que les relations théoriques proposées par Caquot, Bishop, Rowe et Horne étaient fausses [Skinner,

1969]. Skinner a remarqué que les billes de verre offrent une opportunité exceptionnelle de faire varier l'angle de frottement microscopique. En fait, l'angle de frottement entre deux billes de verre sèches est très faible ($\cong 5^\circ$), mais, si les billes sont mouillées, l'angle de frottement est à peu près 7 fois plus élevé ($\cong 35^\circ$). Skinner a cisailé un milieu composé de billes de verre lisses (i.e., sèches) et un milieu composé de billes de verre frottantes (i.e., mouillées), et il a montré que l'angle de frottement interne à l'état résiduel des deux milieux est le même. Or, les relations théoriques proposées par Caquot, Bishop, Rowe, et Horne affirmaient que si l'angle de frottement local augmentait, alors l'angle de frottement interne devait aussi augmenter.

Skinner a argumenté que la différence entre ses expériences et les prédictions théoriques était due au fait que ces prédictions théoriques négligeaient *le roulement* au niveau des contacts. Il a expliqué son argument de la manière suivante : si l'angle de frottement interne des deux expériences (i.e., celle avec les billes lisses et celle avec les billes frottantes) est le même, alors l'énergie dissipée dans les deux expériences est la même. Or, cette énergie est principalement dissipée par frottement aux contacts, et l'angle de frottement inter-granulaire dans les deux expériences diffère par un facteur de $\cong 7$. Ceci implique que, pour que l'énergie dissipée dans les deux expériences soit la même, le nombre de contacts glissants doit diminuer lorsqu'on augmente l'angle de frottement entre les billes. Si le nombre de contacts glissants diminue, alors le mouvement relatif entre les particules doit avoir lieu en utilisant un mode différent de glissement. Skinner a suggéré que ce mode est *le roulement* au niveau des contacts.

Dans les années 70, les expériences de Oda sur des matériaux photo-élastiques [Oda, 1972], [Oda et Konishi, 1974], [Oda et al., 1982] ont confirmé la supposition de Skinner. Ces expériences montrent que le pourcentage des contacts glissants peut être très faible lors du cisaillement, et que *le roulement* au niveau des contacts est très actif, en particulier lorsque l'angle de frottement inter-granulaire est élevé. De plus les observations de Oda [Oda et al., 1982] sont également en accord avec celles de Bardet et Probet [Bardet et Proubet, 1992]. Ces derniers montrent par des simulations numériques sur des milieux granulaires idéalisés, que le roulement des particules joue un rôle majeur et les rotations se concentrent à l'intérieur de la bande de cisaillement développée (voir Figure 1.25).

Dedecker et al. [Dedecker et al., 2000] ont mesuré le taux de rotation d'un assemblé de disque soumis à des sollicitations biaxiaux. Les auteurs constatent que la rotation des éléments était aussi plus grande que la vitesse de déformation globale au sein du milieu. De plus, des fluctuations de rotation augmentent avec l'augmentation des déformations.

La rotation des particules d'un assemblé fait réduire sa résistance et sa rigidité. Ceci a été établi par deux types d'essais numériques. Le premier essai permet la restriction totale ou partielle des rotations. La résistance et la rigidité en résultant dépassent celles obtenues avec un essai à rotations non restreintes [Bardet et Proubet, 1992], [Iwashita et Oda, 1998], [Calvetti et al., 1997]. Le deuxième essai permet de visualiser l'effet incrémentale des rotations sur les forces de contacts [Kuhn, 2004]. Les résultats suggèrent également un effet de softening dû à la rotation des particules.

Tordesillas et al. [Tordesillas et al., 2004] ont examiné la réponse constitutive d'un milieu granulaire semi-infini soumis à l'application d'un poinçonnement par le biais d'une barre plate rigide. Les auteurs montrent que les rotations produites près des bords de la barre rigide, ou il y a une concentration de contrainte, s'avèrent être étendues dans le cas où la rigidité

rotationnelle entre les grains est moindre. Ces rotations, à leur tour, font dilater les régions adjacentes à la barre (présentés sur la Figure 1.26).

Ces études ont permis de montrer que le comportement du milieu est fortement affecté par la restriction, totale ou partielle, du roulement relatif des particules en contact. Ceci a permis d'expliquer pourquoi il est difficile d'obtenir des valeurs réalistes d'angle de frottement interne en utilisant des milieux granulaires modèles composés des particules sphériques (ou circulaires en 2D). La raison en est que, dans un tel milieu, la rotation relative des particules en contact n'est pas restreinte. Ceci représente une grande différence avec les milieux réels, dans lesquels les contacts peuvent souvent résister au roulement. Ceci peut avoir différentes origines microscopiques telles que la présence d'un ciment, la déformation plastique de la région de contact, et la forme non-convexe des grains.

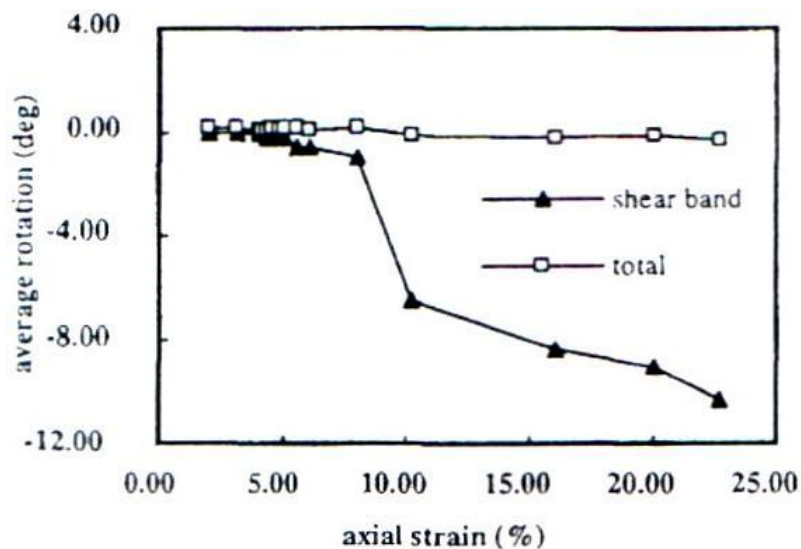


Figure 1. 25. Variation de la rotation moyenne totale et dans la bande de cisaillement en fonction de la déformation axiale.

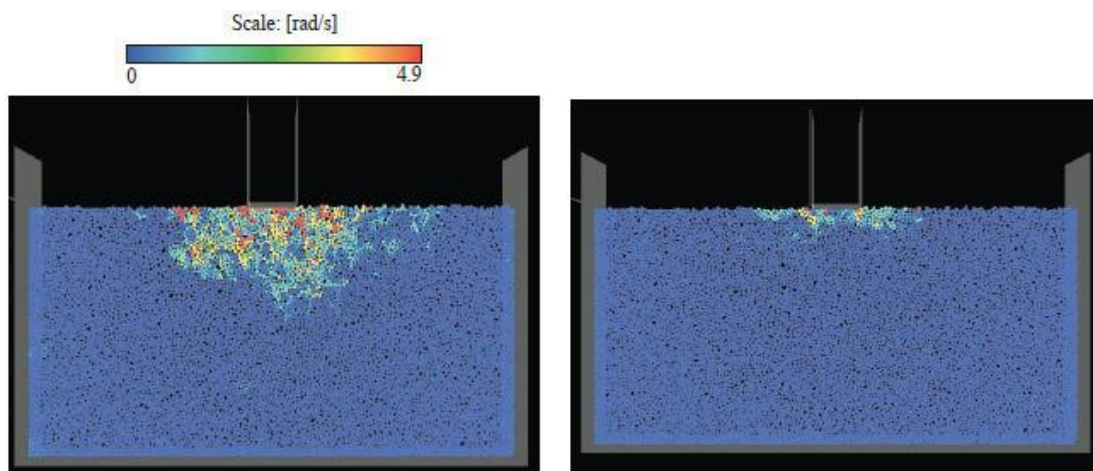


Figure 1. 26. Le champ de rotation d'un milieu granulaire semi-infini soumis à l'application d'un poinçonnement. Rotation libre (à gauche) et rotation restreinte (à droite).

1.8.2. Le rôle de la résistance au roulement dans la réponse macroscopique

Plusieurs modèles théoriques ont été développés prenant en compte la résistance au roulement au niveau des contacts [Iwashita et Oda, 1998], [Zhou et al., 1999], [Bratberg et Radjai, 2002], [Delenne et al., 2004], [Jiang et al., 2006]. Ces modèles permettent d'étudier le rôle de la résistance au roulement dans la réponse macroscopique du milieu, ainsi que d'obtenir des valeurs d'angle de frottement interne et de déformation volumique plus réalistes que celles obtenues lorsque la rotation relative des particules n'est pas restreinte [Oda et Iwashita, 2000], [Iwashita et Oda, 2000], [Zhou et al., 2001, 2002]. D'autres chercheurs ont aussi étudié des milieux dans lesquels la rotation des particules est complètement restreinte [Latham et al., 2005], [Calvetti et Nova, 2005], [Calvetti et al., 2005], [Alonso-Marroqu'in et al., 2006]. Cependant, cet artifice paraît difficile à justifier du point de vue physique.

Afin d'estimer le rôle de la résistance au roulement, Iwashita et Oda [Iwashita et Oda, 1998] ont simulé des essais biaxiaux avec deux modèles différents : la DEM à rotation libre ou à rotation bloquée et la MDEM (Modified Discret Element Method) prenant en compte la résistance au roulement. La Figure 1.27 présente l'évolution du déviateur et de la déformation volumique durant l'essai biaxial. Pour de faibles déformations ($\varepsilon < 0.2\%$), le déviateur et la déformation volumique résultant des deux modèles DEM à rotations libres ou bloquées et la MDEM sont confondus. La valeur du module élastique et le coefficient de poisson sont donc indépendants de la rotation des particules durant la phase élastique. Au-delà de 1% de déformation axiale, les résistances au pic et résiduelles sont plus fortes pour les deux modèles DEM à rotations bloquées et MDEM que le modèle DEM à rotations libres.

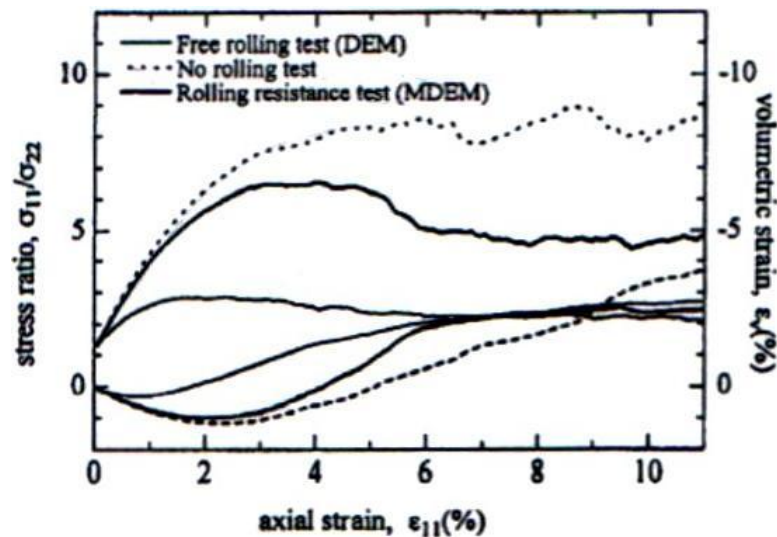


Figure 1. 27. Comparaison entre les déviateurs et déformations volumiques obtenus numériquement avec la DEM à rotation libre, rotation bloquées et avec la MDEM avec une résistance au roulement [Iwashita et Oda, 2004].

Jianfeng et al. [Jianfeng et al., 2004] ont également étudié des assemblés de sphères soumis à un essai de cisaillement direct dans leur plan en utilisant le PFC^{2D}. Leur étude consiste à examiner l'influence de la résistance au roulement sur la réponse macroscopique de

l'assemblé. Les résultats sont présentés sur la Figure 1.28. On constate que la prise en compte de la résistance au roulement engendre une augmentation marquée de la résistance de l'assemblé en comparaison avec celle où les rotations sont libres.

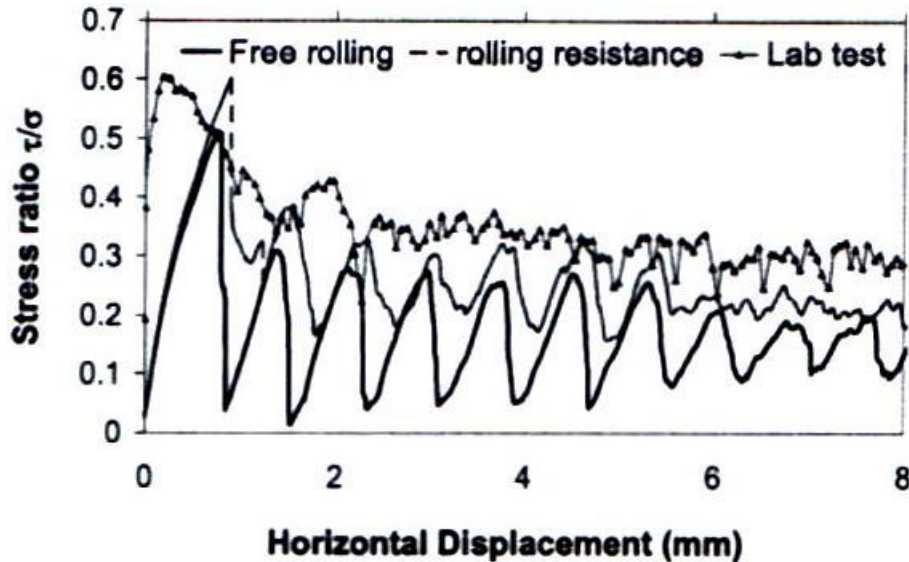


Figure 1. 28. Influence de la résistance au roulement sur le comportement contrainte –déplacement d'après [Jianfeng et al., 2004].

Ming Jiang et al. [Jiang et al., 2005] ont développé un nouveau modèle discret bidimensionnel en prenant compte de la résistance au roulement au point de contact entre les éléments. Les auteurs ont mené des simulations d'essais biaxiaux sur des échantillons composés d'éléments disques dont la réponse est donnée sur la Figure 1.29. Ils constatent que leur nouveau modèle donne une résistance au cisaillement au pic et résiduelle plus importante qu'un modèle à rotations relatives libres. Cette augmentation de résistance est donc liée à la prise en compte d'une résistance au roulement au niveau des contacts. Egalement ce modèle permet d'obtenir des valeurs d'angle de frottement interne plus réalistes que celles obtenues lorsque la rotation relative des particules n'est pas restreinte. La Figure 1.30 donne la plage de la valeur de δ (paramètre de forme donnant la limitation des rotations relatives) pour laquelle des angles de frottement internes au pic ou résiduels semblent plus réalistes.

En conclusion, la prise en compte de la résistance au roulement au contact engendre des échantillons plus résistants capables d'approcher le comportement mécanique des sables et permet d'obtenir des valeurs d'angle de frottement interne et de déformation volumique plus réalistes d'un sable.

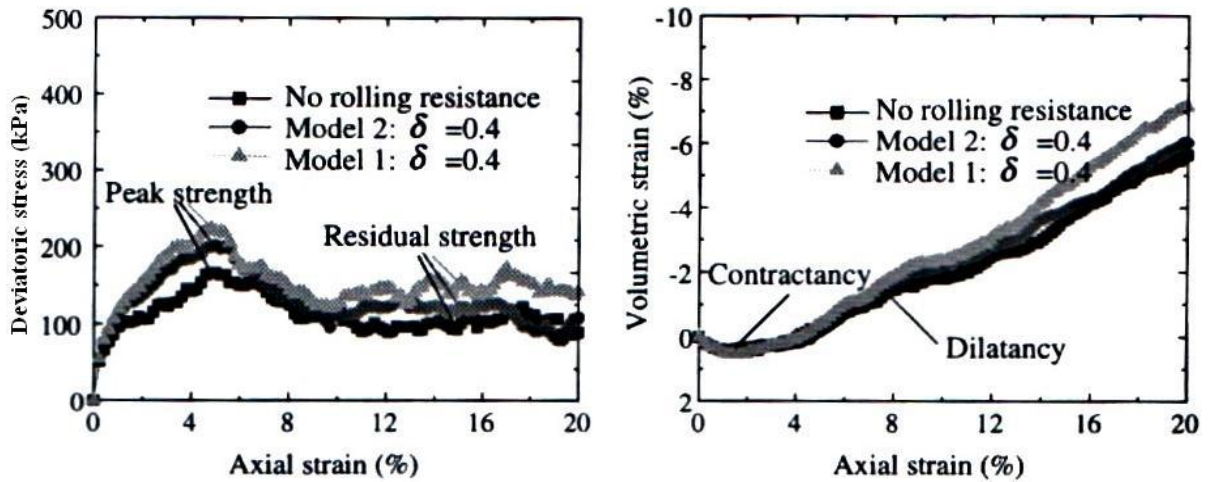


Figure 1. 29. Résultats obtenus par Ming Jiang *et al.* [Jiang *et al.*, 2005] avec un nouveau modèle discret prenant en compte de la résistance au roulement.

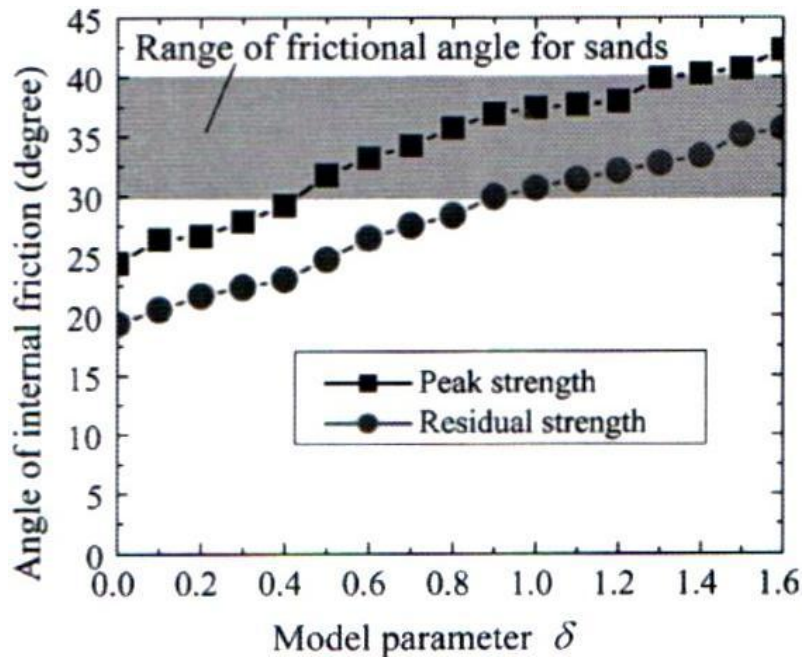


Figure 1. 30. Relation entre le paramètre de forme δ représentant la résistance au roulement et l'angle de frottement interne par Ming Jiang *et al.* [Jiang *et al.*, 2005].

CHAPITRE 2.

Développement d'un nouveau modèle discret et modélisation en 3D

2.1. Introduction



Le but de ce chapitre est de présenter le modèle DEM classique modifié utilisé pour la modélisation de l'ensemble des comportements mécaniques que l'on prévoit de présenter dans les chapitres qui suivent. Dans un premier temps, nous abordons brièvement les différentes méthodes discrètes existantes. Ces méthodes constituent un cadre d'analyse privilégié pour étudier les relations micro-macro, car elle donne accès à un grand nombre d'essais qui ne sera pas à l'heure actuelle réalisables expérimentalement. Ensuite, le logiciel SDEC est décrit, il correspond à la DEM de type dynamique moléculaire utilisant des lois d'interactions régulières. Une description du milieu granulaire est aussi abordée. Dans un deuxième temps et après une description de la détection des contacts entre grains, on s'intéressera à la description des lois d'interactions. Elle constitue donc un aspect essentiel de la modélisation car elle conditionne la prédiction du comportement global d'un matériau granulaire. Ces interactions sont rangées en trois sous section suivant qu'elles interviennent sur le comportement normal ou tangentiel au contact, ou en rotation. On détaillera ensuite, l'approche numérique liée à la méthode de résolution choisie. Pour finir, des précautions sont pris en compte pour assurer la stabilité du calcul itératif

2.2. Simulation numérique : Différentes méthodes discrètes

Les milieux granulaires sont le siège de nombreux phénomènes physiques qui trouvent leur origine à l'échelle locale comme par exemple le cas du frottement inter-granulaire ou la cohésion. Dans ce contexte, les modélisations numériques basées sur des approches en éléments discrets constituent un outil privilégié pour étudier l'influence des phénomènes locaux sur le comportement observé à l'échelle macroscopique des milieux granulaires. Depuis les premières simulations effectuées par Cundall et Strack [Cundall et Strack, 1979], plusieurs méthodes en éléments discrets ont été développées à l'origine dans le but de résoudre des problèmes faisant intervenir des phénomènes non cohésifs. Il est possible de distinguer plusieurs types de méthodes numériques discrètes [Cambou et Jean, 2001], [Duran, 1999] :

- Les méthodes de type "Non Smooth Discrete Element Method" (**NS-DEM**) sont basées sur la mécanique non régulière qui prennent en compte des lois d'interactions non différentiables comme par exemple les chocs sans interpénétration des grains. Ces méthodes sont particulièrement adaptées à la description des systèmes dynamiques. Parmi ces méthodes, on peut citer les approches suivantes :
 - La méthode ED "Event Driven" appelée aussi méthode "collisionnelle" ou "gérée par les évènements" est utilisée pour des milieux dispersés tels que les gaz granulaires par exemple. Dans sa forme la plus simple, les contacts simultanés étant exclus.
 - La méthode NSCD "No Smooth Contact Dynamics" initiée par J.-J. Moreau et M. Jean [Jean, 1999], [Moreau, 2000] est une méthode capable de prendre en compte des contacts simultanés et elle exige contrairement à la plupart des méthodes un traitement implicite de l'équation de la dynamique et des relations intergranulaires.

- Les méthodes de type **S-DEM** "Smooth Discrete Element Method" utilisent des lois d'interactions entre grains décrites par des fonctions régulières contrairement aux méthodes NS-DEM. Parmi ces méthodes on peut citer par exemple :
 - - Les méthodes MD "Molecular Dynamics" sont, à l'origine, destinées aux particules de gaz en collision sans prendre en compte ni les rotations ni les interactions dues au frottement. Elles s'intéressent aussi aux échelles des atomes et des molécules [Gerschel, 1995], [Allen et Tildesley, 1987]. Les particules sont considérés soit sphériques ou circulaires soumis à des interactions représentées par des forces normales appliquées aux centres des sphères.
 - Les méthodes DEM "Discrete Element Method" développées par Cundall et Strack [Cundall, 1974], [Cundall et Strack, 1979], sont dédiées au cas des corps solides avec l'adjonction de lois de contact et de frottement. Les actions mécaniques entre grains sont prises en compte sous forme de ressorts, patins et amortisseurs. Cette approche est la plus employées et elle fait l'objet d'un grand nombre d'extensions [Iwashita et Oda, 1998], en particulier par l'adjonction de lois de cohésion [Deleenne, 2002], [Preechawuttipong, 2002].

Les méthodes de type **NS-DEM** et **S-DEM** diffèrent dans leur façon de prendre en compte les efforts :

- Les méthodes de types S-DEM autorisent une interpénétration entre les grains. Pour cela, elles sont parfois appelées méthodes des "corps mous". Cet artifice permet de considérer l'effort au contact f_n comme une fonction du déplacement d_n (Figure 2.1.). Pour le contact, il est possible dans certains cas de donner un sens physique à cette fonction en utilisant, par exemple, la théorie de Hertz [Maugis, 1999]. Ce type de méthode utilise des discrétisation explicites des équations de la dynamique. Les méthodes types NS-DEM sont parfois qualifiées de méthodes des "corps durs". Elles font un traitement des contacts et des chocs entre grains sans interpénétration. Le graphe de la loi de contact (loi de Signorini) est donc non régulier (Figure 2.2). Ce type de méthode utilise des formes implicites de discrétisation.

Remarque :

Pour plus de détail sur les approches discrètes, le lecteur peut se rapporter, par exemple, au chapitre "simulation numérique discrète" de l'ouvrage de Cambou & Jean [Cambou, 2001] et même dans [Müller, 1996]. Il semblerait que les méthodes de type S-DEM soient les plus répandues.

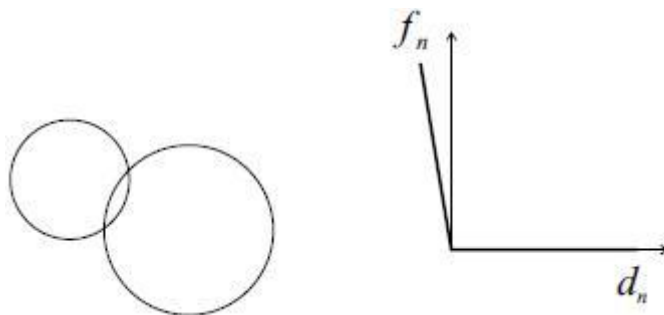


Figure 2. 1. Contact avec les méthodes S-DEM.

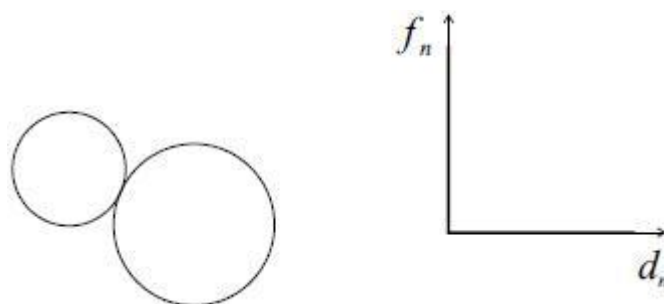


Figure 2. 2. Contact avec les méthodes NS-DEM.

2.3. Description de la méthode numérique utilisé

Le code de calcul utilisé, dénommé SDEC (Spherical Discret Element Code), a été développé par Frédéric Victor Donzé [Donzé et Magnier, 1995], [Donzé et Magnier, 1997] et correspond à la méthode DEM (Discret Element Method) initiée par Cundall [Cundall, 1974]. La méthode DEM est une méthode newtonienne de type explicite c'est-à-dire que cette méthode utilise des lois d'interactions régulières. Le code de calcul est décomposé en trois grandes étapes (Figure 2.3.) :

- 1- *L'étape de pré-traitement*, qui consiste à définir ;
 - La géométrie des grains et leur arrangement respectif dans la configuration initial (Texture du squelette solide),
 - Les caractéristiques physiques de l'échantillon : masse des grains, paramètres des lois d'interaction...
- 2- *L'étape de calcul*. Elle se décompose en deux volets qui seront exécutés de façon itérative :
 - Le premier volet consiste à calculer les efforts en fonction des déplacements des grains obtenus au temps précédent. Ces déplacements sont calculés à partir des grandeurs cinématiques de position, vitesse et accélération.
 - Le deuxième volet consiste à calculer les grandeurs cinématiques à partir d'une intégration des équations de la dynamique, tout en considérant les efforts calculés à l'étape précédente ainsi que les grandeurs cinématiques calculées au pas de temps précédent.

3- *L'étape de post-traitement*.

Cette étape consiste à extraire des informations du calcul précédent et regroupe toutes les opérations qui permettent de les exploiter : étude statistique, suivi des grandeurs au cours de la simulation des essais, visualisation de l'évolution des échantillons sous format de films... Pour cette étape de post-traitement, les outils de visualisation des milieux granulaires sont fort utiles et appréciés par des chercheurs ; pour ces travaux de thèse, on utilise le logiciel Pov-Ray, le matlab.

L'étape de calcul est le cœur des simulations numériques. Cette étape est détaillée dans la suite de ce chapitre.

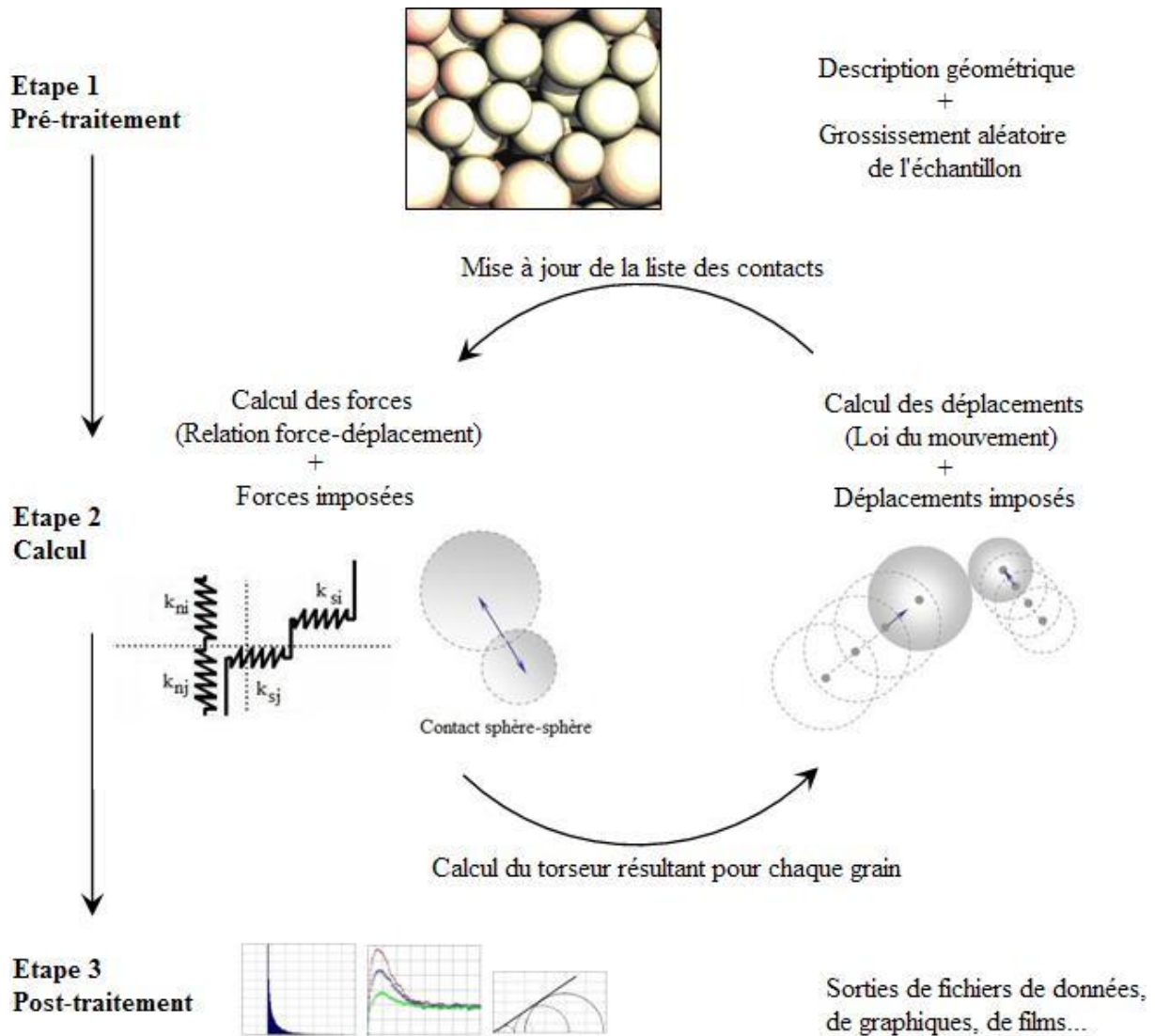


Figure 2. 3. Schématisation du cycle de calcul de la Méthode des Éléments Discrets.

2.4. Description du milieu granulaire

On considère un milieu granulaire dont les grains se présentent sous forme de sphère. Pour un grain repéré A , on note O_A son centre, r_A son rayon, m_A sa masse. Les positions, vitesses et accélérations des grains sont calculées dans un référentiel global $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ d'origine O et de base orthonormée $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ (Figure 2.4.). A chaque grain est attaché un repère $(O_A, \vec{x}_A, \vec{y}_A, \vec{z}_A)$ dont les vecteurs de base sont initialement confondus à ceux du repère global, défini par $\vec{OO}_A = \vec{R}_A$. La rotation du grain A par rapport au référentiel macroscopique est repérée par l'angle θ_A ($\theta_A = (\vec{x}, \vec{x}_A)$). La vitesse d'interaction au point C est notée

$\vec{v}(C) = \frac{d}{dt} \vec{OC}$. Les vitesses des grains sont notées $\vec{v}_A = \vec{v}(O_A) = \frac{d\vec{R}_A}{dt}$, leur vitesse angulaire $\vec{\omega}_A = \frac{d}{dt} \theta_A$.

Lorsque le grain A est susceptible d'interagir avec un grain B , un repère d'interaction de base $(\vec{n}, \vec{t}_1, \vec{t}_2)$ (Figure 2.4.) est défini par:

La normale entrante par rapport au grain B et s'écrit :

$$\vec{n} = \frac{\vec{O_A O_B}}{\|\vec{O_A O_B}\|} \quad 2.1$$

Les vecteurs unitaires tangents \vec{t}_1 et \vec{t}_2 s'écrivent :

$$\vec{t}_2 = \frac{\vec{Y} \wedge \vec{n}}{\|\vec{Y} \wedge \vec{n}\|} \quad 2.2$$

$$\vec{t}_1 = \vec{t}_2 \wedge \vec{n} \quad 2.3$$

La distance d'équilibre séparant les deux centres O_A et O_B au moment de la création de l'interaction est dénommée distance intergranulaire. Elle est notée d_n et définie géométriquement par :

$$d_n = \|\vec{O_A O_B}\| - (r_A + r_B) \quad 2.4$$

On peut ainsi distinguer trois cas, tel que :

Les grains s'interpénètrent lorsque $d_n < 0$,

Les grains sont en contact mais sans interpénétration $d_n = 0$,

Les grains ne sont pas en contact $d_n > 0$

Dans la DEM, la détermination de l'effort résultant est basée sur le calcul de la distance d_n .

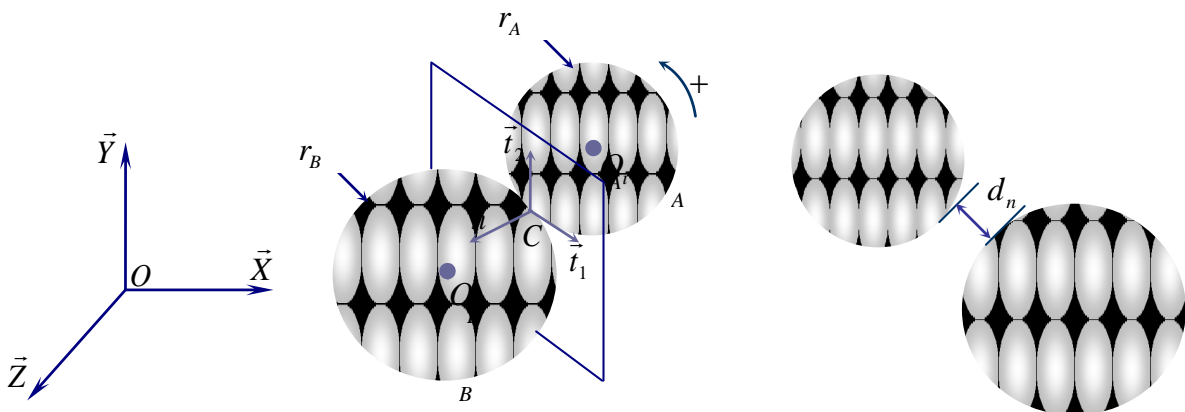


Figure 2. 4. Définition des notations utilisées

2.5. Grains et recherche de contacts

La méthode DEM utilisée dans SDEC, nécessite un calcul des distances entre grain à chaque pas de temps Δt . Par exemple, pour déterminer si le grain A et le grain B sont en contact, on doit, à priori, évaluer toutes les distances d_n^{AB} . Cette opération de recherche des interactions est particulièrement coûteuse en temps CPU; elle l'est d'autant plus que les pas de temps sont en générale très petits (de l'ordre de $10^{-7} s$ à $10^{-5} s$) et que le nombre de grains est très élevé. Sa gestion doit donc être efficace, de ne prendre en compte que les grains B contenus dans un voisinage proche du grain A et donc susceptibles d'interagir directement avec le grain A . Plusieurs techniques d'optimisation par voisinage peuvent être utilisées [Müller, 1996]. SDEC propose une option de recherche des contacts par subdivision de l'espace à une grille en trois dimensions. A chaque maille de la grille une liste d'élément est associée en fonction de leur position sous l'hypothèse que les éléments sont de même taille. La recherche des contacts est ensuite réalisée entre les éléments d'une même maille et des mailles adjacentes, c'est-à-dire pour un grain A , il suffira d'évaluer les distances aux grains contenus dans la maille de A et dans les mailles adjacentes, les autres grains étant à une distance trop grande du grain A pour qu'il y ait en contact. Cette technique permet de réduire sensiblement les temps de calcul. Elle est intéressante au cas des assemblages présentant une distribution de taille des éléments assez resserrée. Dans le cas de dispersion granulométrique importante, certains auteurs utilisent un quadrillage adaptatif en fonction de la taille des grains. Bien que permettant de limiter le nombre d'opération, ce type de technique est encore lourd à mettre en œuvre. La technique de recherche des contacts par grille est utilisée pour l'ensemble de nos simulations.

2.6. Lois d'interaction

Dans un milieu composé de sphères rigides, les contacts sont fait sur la base d'une surface infiniment petite assimilable à un point, et dans chaque contact il y a trois degrés de liberté : l'interpénétration, le glissement, et le roulement. Ainsi, l'interaction entre deux particules peut être vue comme la superposition de trois interactions : une dans la direction normale, une dans la direction tangentielle, et une concernant les rotations. Ces interactions peuvent être représentées par un ensemble d'états admissibles du contact. Cet ensemble d'états admissibles est appelé une loi de contact.

2.6.1. Lois de comportement dans la direction normale au contact

2.6.1.1 Comportement élastique normale et choix des raideurs normales

Dans notre étude, à l'échelle macroscopique le comportement élastique est défini par deux paramètres propres au matériau, qui sont le module de Young et le coefficient de Poisson, notés respectivement E et ν . A l'échelle du contact, le comportement élastique est régi par une loi d'interaction élastique. Dans la littérature, nous distinguons plusieurs types de loi d'interaction [Cambou et Jean, 2001], [Cundall & strack, 1979], [Bardet, 1994]. Parmi celles-

ci on peut mentionner le modèle original de Walton et Braun [Walton et Braun, 1986], qui tient compte de l'histoire du chargement et déchargement. On peut aussi citer la loi faisant intervenir qu'une seule interaction dans la direction normale au contact. Mais cette loi ne peut malheureusement pas reproduire les deux grandeurs élastiques vues à l'échelle macroscopique (E et ν). Il faut donc que l'interaction locale doive être définie par deux paramètres élastiques afin de pouvoir reproduire correctement le comportement élastique macroscopique observé. La loi de contact est donc composée d'une raideur normale k^n et une raideur tangentielle k^s (voir Figure 2.5.). Cette dernière située dans le plan de contact et sera présentée dans la section traitant le comportement élastique dans la direction tangentielle.

Soit D_{eq} la distance d'équilibre séparant deux sphères A et B , et D_{AB} la distance entre les centres des deux sphères. La distance d'interaction d_n au moment du contact est définie géométriquement par :

$$d_n = D_{eq} - D_{AB} \quad 2.5$$

Soit \vec{n} la normale au contact et k^n la raideur dans la direction normale au contact. Formellement la force normale est modélisée par une fonction continue de l'interpénétration d_n donnée par :

$$\vec{F}^n = k^n . d_n . \vec{n} \quad 2.6$$

La raideur normale de contact k^n s'exprime en fonction des raideurs normales k_A^n et k_B^n intrinsèques aux deux sphères A et B de rayon r_A et r_B .

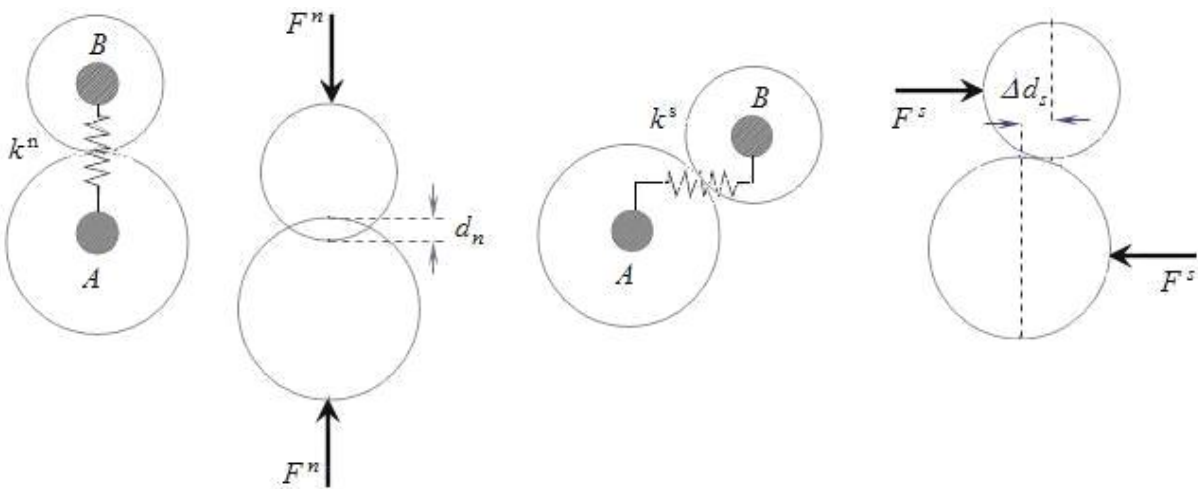


Figure 2. 5. Interaction normale et tangentielle entre deux sphères

Les raideurs normales k_A^n et k_B^n à leur tour sont déduites des valeurs de K_A^n et K_B^n , paramètres fixé par l'utilisateur. Le rayon moyen d'une interaction et la raideur k_A^n de la sphère A sont exprimé respectivement par l'expression suivante :

$$r_{AB} = \frac{r_A + r_B}{2} \quad 2.7$$

$$k_A^n = K_A^n \cdot r_{AB} \quad 2.8$$

L'intervention du rayon d'interaction r_{AB} dans la formulation permet d'homogénéiser le comportement élastique observé à l'échelle de l'assemblage discret.

L'une des enrichissements de la loi d'interaction donnée par l'expression 2.6 consiste à utiliser une relation entre les raideurs de types élasticité linéaires ou non linéaires. Dans le premier cas la raideur k^n est constante de la création du contact jusqu'à sa suppression. Pour l'élasticité non linéaire, on trouve le modèle de Hertz [Cundall, 1988]. Ce dernier est très répandu, nécessite la détermination de raideurs fonction de l'interpénétration des sphères et de la force de contact normale instaurée entre elles. Ces raideurs nécessitent d'être calculées à chaque pas de temps. Cependant Cundall [Cundall, 1988] a montré que des rigidités linéaires sont moins couteuses en temps de calcul et mènent à des résultats comparables à l'échelle de l'assemblage granulaire. Luding [Luding, 2004] indique également que le choix de lois d'interaction non linéaires est préconisé pour l'étude des problèmes dynamiques tels que la transmission des ondes, mais à moins d'importance dans le cas de problèmes quasi-statiques. Dans ce travail de thèse notre choix s'est porté sur un modèle d'élasticité linéaire. Un cas déjà utilisé par Plassiard [Plassiard, 2007]. La formulation liant les raideurs d'une interaction et les raideurs de deux sphères correspond à la mise en série de ces raideurs est exprimée par :

$$k^n = \frac{k_A^n \cdot k_B^n}{k_A^n + k_B^n} \quad 2.9$$

2.6.1.2. Interaction avec adhésion normale et adoucissement

L'introduction de la cohésion dans les milieux granulaires est actuellement un domaine de recherche actif mais qui n'a pas encore atteint le niveau de synthèse que l'on trouve pour les milieux granulaires sans cohésion. Les modèles les plus classiques prennent en compte une cohésion selon la normale. Citons une étude d'usure de granulats [Bortzmeyer, 1997] formés de grains, collés par une force de cohésion normale au plan de contact. Des modèles phénoménologiques décrivant les phénomènes d'adhésion peuvent être trouvés dans [Delenne, 2002], [Soulie, 2005], [Johnson et al., 1971], [Maugis, 1994], [Maugis, 1999].

Notre modèle fait parti des modèles classiques, la résistance à la traction est insérée sous forme d'une adhésion normale enrichi d'un adoucissement en traction.

Soit $D_{AB}^{(init)}$ la distance initiale entre deux sphères A et B au moment de la création de l'interaction et $D_{AB}^{(actuel)}$ la distance à l'itération courante. Sur la Figure 2.6, $D_{eq}^{(init)}$ est équivalent

à $D_{AB}^{(init)}$. Le phénomène de traction atteint sa limite élastique et entre en comportement adoucissant pour une distance égale à $D_{elast}^{(init)}$. Cette dernière dépend initialement de la raideur normale de l'interaction k^n et de l'effort $F_{elast}^{(init)}$, elle est donnée par l'équation 2.10.

$$D_{elast}^{(init)} = D_{eq}^{(init)} - \frac{F_{elast}^{(init)}}{k^n} \quad 2.10$$

Au-delà de cette distance, la loi de comportement est adoucissante piloté par un coefficient ζ . La distance actuelle est donc $D_{elast}^{(actuel)}$ supérieure à $D_{elast}^{(init)}$. Elle correspond à $D_{AB}^{(actuel)}$ dans le cas suivant :

$$(D)_{AB}^{(actuel)} > D_{elast}^{(init)} \quad 2.11$$

D_{rupt} correspond à la distance pour le quel le phénomène d'adoucissement en traction entraîne l'annulation de l'effort normale. Ce phénomène est tjrs valable dès que cette distance n'est pas franchie. Elle dépend également du coefficient d'adoucissement ζ , exprimé comme suit :

$$D_{rupt} = D_{elast}^{(init)} \left(\frac{\zeta + 1}{\zeta} \right) - \frac{D_{eq}^{(init)}}{\zeta} \quad 2.12$$

Avec $\zeta > 0$. Si $D > D_{rupt}$, l'interaction est rompue.

Cette phase d'adoucissement local permet donc de maîtriser l'adoucissement macroscopique obtenu. La force de traction $F_{elast}^{(init)}$ pendant cette phase est donc actualisée à $F_{elast}^{(actuel)}$, exprimée par l'équation 2.13. Il en va de même pour la distance d'équilibre initiale $D_{eq}^{(init)}$, remplacée par $D_{eq}^{(actuel)}$ donnée par l'expression 2.14.

$$F_{elast}^{(actuel)} = F_{elast}^{(init)} \cdot \frac{D_{elast}^{(actuel)} - D_{rupt}}{D_{elast}^{(init)} - D_{rupt}} \quad 2.13$$

$$D_{eq}^{(actuel)} = D_{elast}^{(actuel)} (\zeta + 1) - \zeta \cdot D_{rupt} \quad 2.14$$

Si $\zeta \rightarrow 0$, alors le comportement de l'interaction est parfaitement fragile et si $\zeta \rightarrow \infty$, l'interaction est parfaitement élastoplastique. La valeur de ζ est établie comme la moyenne entre les deux valeurs ζ_A et ζ_B intrinsèques aux éléments A et B (équation 2.15).

$$\zeta = moy(\zeta_A; \zeta_B) \quad 2.15$$

La Figure 2.6 montre le comportement adoucissant de l'interaction.

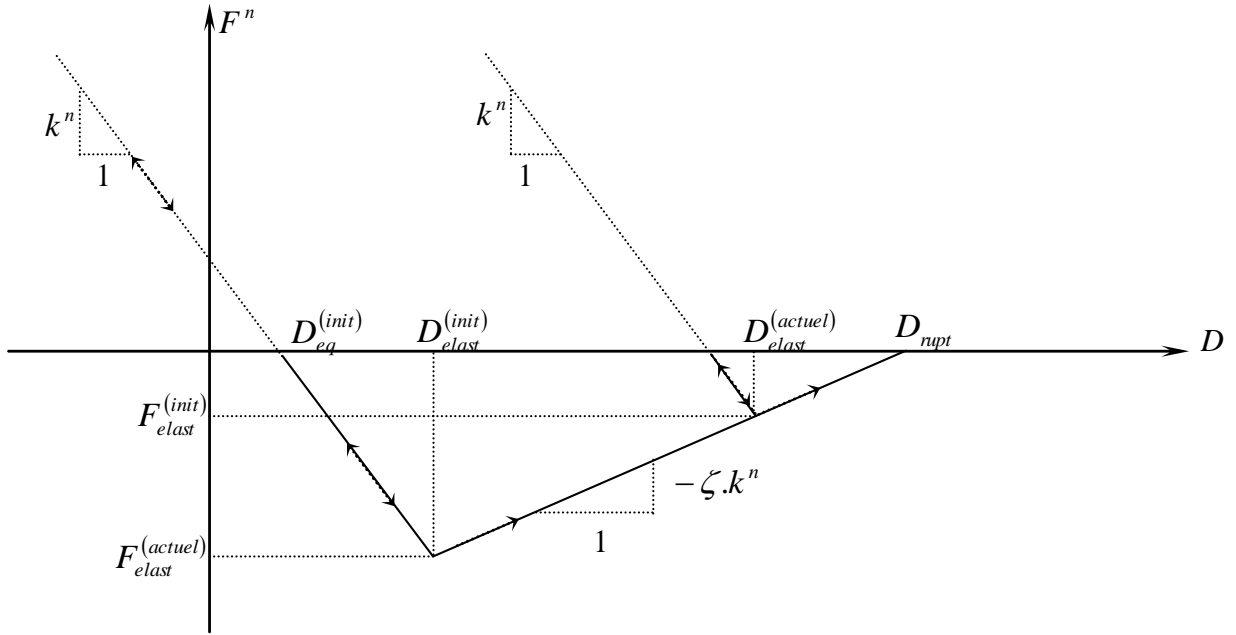


Figure 2. 6. Interaction avec adhésion normale et adoucissement

2.6.1.3. Contact avec endommagement en décharge (irréversibilité en compression)

Pour prendre en compte l'histoire du chargement (cycles charges-décharges) dans chaque contact, le modèle est doté d'un comportement avec endommagement en décharge. L'effort normal est exprimé en tenant compte des déformations irréversibles après une compression ($D < D_{eq}^{init}$). Cet aspect ne fait intervenir aucun critère de rupture, mais plutôt une modélisation non réversible du comportement élastique.

Lorsque deux particules en contact se rapprochent (chargement), la pente de la courbe force-interpénétration est k^n . Si la distance entre les centres des particules augmente (déchargement), la pente est alors $\xi.k^n > k^n$. Dans le cas où les deux grains se rapprochent de nouveau, sans que la force de contact n'ait été préalablement annulée (perte de contact), la courbe force-interpénétration a, dans un premier temps, une pente $\xi.k^n$. Puis, lorsque la force de contact est égale au maximum $F_{endom}^{(actuel)}$ atteint au cours du précédent chargement, la pente de la courbe redevient k^n .

On définit par $D_{eq}^{(init)}$ la distance d'équilibre entre deux sphères au moment de création de l'interaction. Lors du chargement, la force de contact F^n est liée à l'interpénétration courante $D_{AB}^{(actuel)}$ par l'équation suivante :

$$F^n = k^n (D_{eq}^{(init)} - D_{ij}^{(actuel)}) \quad 2.16$$

Lorsque le déchargement intervient, la modélisation de l'endommagement est prise en compte. La bifurcation se produisant au point $(D_{endom}^{(actuel)}, F_{endom}^{(actuel)})$. La force normale de contact F^n est définie en fonction d'une distance comprise dans l'intervalle $[D_{endom}^{(actuel)}; D_{eq}^{(actuel)}]$, sa valeur est alors calculée par l'expression suivante :

$$F^n = \xi \cdot k^n (D_{AB}^{(actuel)} - D_{eq}^{(actuel)}) \quad 2.17$$

La Figure 2.7 montre le comportement de l'effort normal, avec $D_{eq}^{(actuel)}$ est une nouvelle distance d'équilibre, établie en fonction du coefficient de l'endommagement ξ en décharge comme suit :

$$D_{eq}^{(actuel)} = D_{endom}^{(actuel)} \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) + \frac{D_{eq}^{(init)}}{\xi} \quad 2.18$$

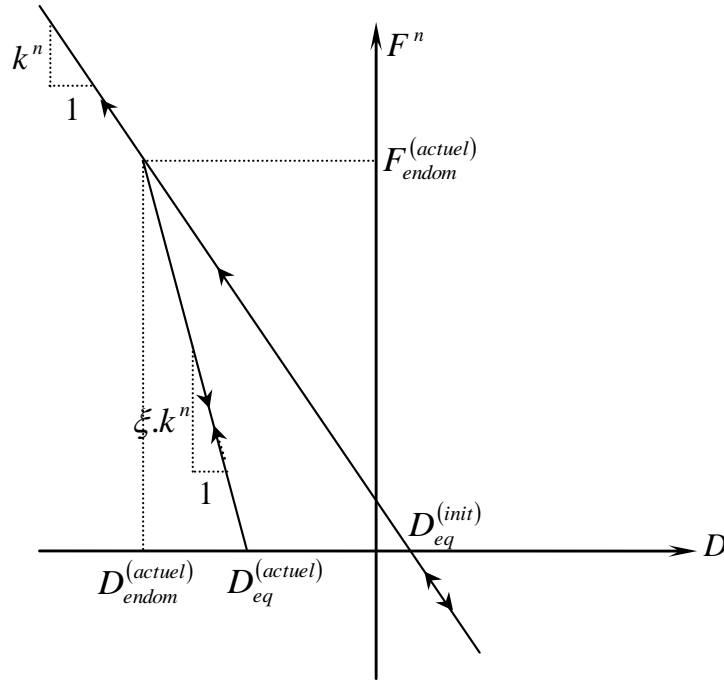


Figure 2. 7. Interaction pris en compte un endommagement en décharge. Prise en compte de déformations irréversibles après une phase de compression.

Dans l'équation 2.17, si $D_{AB}^{(actuel)} > D_{eq}^{(actuel)}$, l'effort correspond à une force de traction et suit des lois constitutives liées à ce comportement. Si $D_{AB}^{(actuel)} < D_{eq}^{(actuel)}$, implique un effort de charge de valeur supérieure à $F_{endomm}^{(actuel)}$. La pente du comportement en charge redevient de nouveau k^n et $D_{eq}^{(actuel)}$ reprend la valeur $D_{eq}^{(init)}$.

Le paramètre ξ est compris dans l'intervalle $[1.0, +\infty]$. Si $\xi = 1.0$, la pente de la décharge coïncide avec la pente de charge, le comportement est ainsi élastique réversible. A l'inverse, pour des valeurs plus grandes, la décharge est impliquée selon une pente plus raide que celle de charge.

La valeur de ξ est établie comme la moyenne entre les deux valeurs ξ_A et ξ_B intrinsèques aux éléments A et B (équation 2.19).

$$\xi = moy(\xi_A; \xi_B) \quad 2.19$$

2.6.1.4. Contact normal avec limite élastique en compression

La Figure 2.8 illustre le comportement d'une interaction possédant une limite élastique en compression normale. Il s'agit d'un comportement élastique parfaitement plastique. Le comportement élastique est réversible de type linéaire en compression.

On définit par $D_{eq}^{(init)}$ la distance d'équilibre entre deux sphères au moment de création de l'interaction. F_{limit}^n est la limite élastique de l'effort en compression supporté par l'interaction, et $D_{limit}^{(init)}$ désigne la distance caractérisant la limite du comportement élastique en compression. Elle est donnée par :

$$D_{limit}^{(init)} = D_{eq}^{(init)} - \frac{F_{limit}^n}{k^n} \quad 2.20$$

Dans le cas où l'inégalité définie en 2.21 n'est pas vérifiée et que l'interaction est en charge, la distance de la limite élastique sera actualisée à la distance D_{AB} de l'itération courante et que l'effort F^n sera rapporté à la valeur limite F_{limit}^n .

$$F^n \geq F_{limit}^n \quad 2.21$$

La nouvelle distance d'équilibre actuel D_{eq}^{actuel} est exprimée par l'équation suivante :

$$D_{eq}^{(actuel)} = D_{limit}^{(actuel)} + \frac{F_{limit}^n}{k^n} \quad 2.22$$

La valeur de F_{limit}^n est toujours positive. Valeur évaluée à partir des contraintes limites d'élasticité en compression σ_{limit}^A et σ_{limit}^B des deux éléments en contact A et B . Soit r_A et r_B leurs rayons respectifs, les limites élastiques de l'effort de compression F_{limit}^{nA} et F_{limit}^{nB} sont définies par :

$$F_{limit}^{nA} = \sigma_{limit}^A \pi \cdot r_A^2 \quad 2.23$$

$$F_{limit}^{nB} = \sigma_{limit}^B \pi \cdot r_B^2 \quad 2.24$$

La valeur de F_{limit}^n est établie comme étant la moyenne entre les deux valeurs F_{limit}^{nA} et F_{limit}^{nB} (équation 2.25).

$$F_{limit}^n = moy(F_{limit}^{nA}; F_{limit}^{nB}) \quad 2.25$$

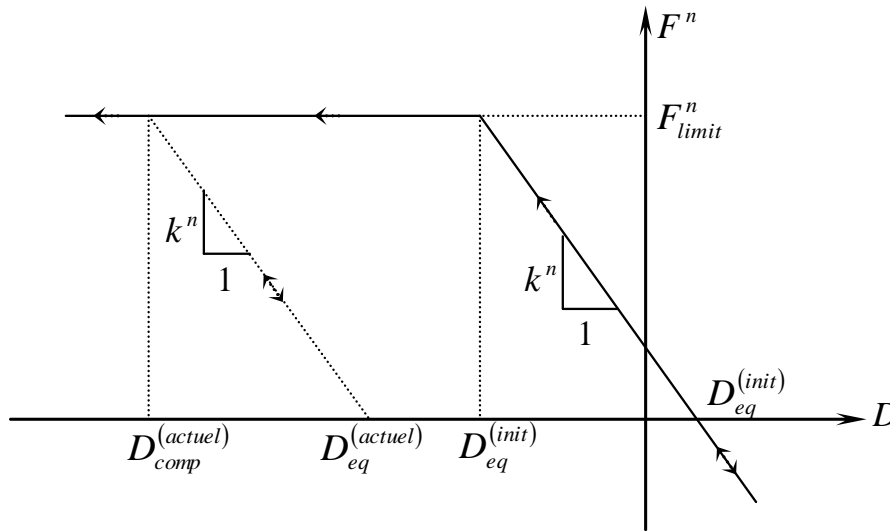


Figure 2. 8. Interaction pris en compte un comportement à limite élastique en compression normale

2.6.2. Lois de comportement dans la direction tangentielle au contact

2.6.2.1. Comportement dans le plan tangentiel et choix des raideurs

La composante tangentielle de la force élastique est calculée d'une manière incrémentale au point de l'interaction pendant un intervalle de temps Δt [Hart et al., 1988], [Donzé et Magnier, 1997]. La variation $d\vec{F}^s$ de l'effort tangentiel \vec{F}^s est définie à partir de l'incrément de déplacement tangentiel $d\vec{U}_s$ par l'équation 2.26. L'effort tangentiel \vec{F}^s est alors obtenu par addition des incréments $d\vec{F}^s$ à chaque itération depuis la création du contact.

$$d\vec{F}^s = -k^s \cdot d\vec{U}_s \quad 2.26$$

Où k^s est la raideur tangentielle de l'interaction déduite des valeurs K_A^s, K_B^s et du rayon moyen r_{AB} . Analogiquement à l'élasticité dans la direction normale, la formulation liant les

raideurs de l'interaction et les raideurs des deux sphères correspond à la mise en série de ces raideurs, est exprimée par :

$$k^s = \frac{k_A^s \cdot k_B^s}{k_A^s + k_B^s} \quad 2.27$$

2.6.2.2. Contact frottant

Pour les lois de contact régissant les efforts tangentiels, plusieurs approches sont possibles. L'une de ces approches on trouve celle proposée par Cundall et Strack [Cundall et Strack, 1979]. Elle permet d'introduire une raideur tangentielle k^s dans l'interaction. Lorsque les deux grains sont en contact sans cohésion, la force normale F^n de l'interaction élastique est positive, définie par l'équation 2.6. L'effort tangentiel \vec{F}^s présent dans la même interaction est défini également en additionnant les incréments $d\vec{F}^s$ donnés par l'équation 2.26. Dans le cadre de l'élasticité, cet effort est borné par le critère de Coulomb (Equation 2.28).

$$\left\| \vec{F}^s \right\| \leq \left\| \vec{F}^n \right\| \cdot \tan \mu \quad 2.28$$

Ce seuil de glissement représente l'amplitude maximale que peut avoir la force tangente du au frottement. Mais le franchissement de ce critère à une itération donnée, implique d'actualiser l'effort tangentiel à la valeur \vec{F}_{actuel}^s . Elle est donnée par :

$$\vec{F}_{actuel}^s = \frac{\vec{F}^s}{\left\| \vec{F}^s \right\|} \left\| \vec{F}^n \right\| \tan \mu \quad 2.29$$

μ étant le coefficient de frottement statique (frottement de Coulomb) de l'interaction. Il est déterminé comme étant la valeur moyenne entre les valeurs de frottement, notées μ_A et μ_B intrinsèques aux éléments A et B .

$$\tan \mu = \text{moy}(\tan \mu_A, \tan \mu_B) \quad 2.30$$

Dans des cas particuliers, la valeur du frottement local est prise comme le minimum entre les deux valeurs du frottement local intrinsèque.

2.6.2.3. Interaction cohésive

Dans ce type d'interaction et par analogie au cas du comportement purement frottement, le comportement à la rupture d'un matériau purement cohésif, peut être décrit par une

cohésion locale notée a_s dont l'unité est une pression. On se donnera un critère de rupture que l'on mettra sous la forme :

$$\|\vec{F}^s\| \leq a_s \cdot S_{AB} \quad 2.31$$

Avec S_{AB} est la surface de contact entre les deux éléments A et B .

Lorsque le critère de rupture est atteint, l'effort de cisaillement, doit être actualisé selon le paramètre de seuil, par l'équation :

$$\vec{F}_{(actuel)}^s = \frac{\vec{F}^s}{\|\vec{F}^s\|} \cdot a_s \cdot S_{AB} \quad 2.32$$

a_s étant le paramètre de cohésion locale de l'interaction. Il est déterminé comme étant la valeur moyenne entre les valeurs de cohésion locale, notées a_s^A et a_s^B intrinsèques aux éléments A et B .

$$a_s = (a_s^A, a_s^B) \quad 2.33$$

Pour la surface de contact entre les deux éléments, on choisit ici d'utiliser le minimum des deux surfaces selon l'équation :

$$S_{AB} = \min(S_A, S_B) \quad 2.34$$

C'est-à-dire au niveau de l'élément le plus petit. Cette surface peut être déterminée par divers moyens, par exemples par une moyenne arithmétique, ou une moyenne harmonique ou autres.

2.6.2.4. Interaction cohésive-frictionnelle

Ce type d'interaction fait intervenir l'aspect cohésif et frictionnel dans une seule relation définissant le critère de rupture suivant :

$$\|\vec{F}^s\| \leq \|\vec{F}^n\| \tan \mu + a_s \cdot S_{AB} \quad 2.35$$

Si le seuil est atteint, l'effort tangentiel est actualisé par l'expression suivante :

$$\|\vec{F}^s\| = \left(\|\vec{F}^n\| \tan \mu + a_s \cdot S_{AB} \right) \frac{\vec{F}^s}{\|\vec{F}^s\|} \quad 2.36$$

Le frottement local μ et l'adhésion tangentielle a_s de l'interaction seront déterminés de manière analogue au cas précédent ; contact frottant et interaction purement cohésive.

2.6.3. Lois de comportement des contacts en rotation

2.6.3.1. Introduction à la loi transfert du moment (MTL)

Dans les sections précédentes et pour une forme géométrique sphérique, nous avons présentés les différentes lois de contact pouvant exister selon la direction normale et tangentielle. Ces lois agissent aux différents points de contact entre les éléments. La géométrie sphérique des éléments et leur propriété d'invariance par rotation qui en découle, rendent leur simulation plus simple que pour d'autres formes géométriques. Le temps de simulation est ainsi optimisé. Elle favorise même le phénomène de roulement entre les éléments. Or, dans les milieux granulaires réels, il est courant que les grains aient des formes géométriques complexes (ellipsoïdes ou polyèdres) et puissent aussi exercer des moments et résister au roulement. Les grains sont en contact à leur voisin par des surfaces de contact et non pas par des points uniques. La texture des surfaces est souvent rugueuse et parfois recouvertes d'une fine pellicule de produits altérés [Mitchell, 1976]. Dans ce cas, le torseur représentant l'action d'un grain sur son voisin se compose donc d'un effort et d'un moment dépendant des efforts tangentiels comme des efforts normaux. De ce fait, la résistance au roulement participe dans une certaine mesure dans le comportement du milieu. Diverses études numériques [Thornton, 1993], [Bardet, 1994], [Mahboubi et al., 1996], [Oger et al., 1998], [Thornton, 2000], [Cambou, 2004], [Taboada et al., 2005], [Krunz et Rothenburg, 2006] ont montré le rôle majeur joué par les rotations dans la résistance au cisaillement et la déformation des milieux granulaires. Ces études ont permis de montrer que le comportement du milieu est fortement affecté par la restriction, totale ou partielle, du roulement relatif des particules en contact. Ceci a permis d'expliquer pourquoi il est difficile d'obtenir des valeurs réalistes d'angle de frottement interne en utilisant des milieux granulaires modèles composés des particules sphériques (ou circulaires en 2D). La raison en est que, dans un tel milieu, la rotation relative des particules en contact n'est pas restreinte. Ceci représente une grande différence avec les milieux réels, dans lesquels les contacts peuvent souvent résister au roulement.

Afin de palier ce déficit, la modification du code de calcul basé sur la DEM, est préconisée pour mieux modéliser ; le comportement en déformation, rotation des particules et le phénomène de cisaillement observé dans les milieux granulaires réels soumis à des sollicitations extérieures.

Plusieurs possibilités sont envisageables et classées suivant deux catégories : soit la modification du modèle géométrique des éléments composant le milieu, soit la modification des lois d'interaction de contact. La première consiste à affiner le modèle géométrique des éléments. Il apparaît que le simple fait de considérer des particules polygonales [Alonso-Marroquin, 1998] ou elliptiques [Olivera, 2004] ou des sphères collées deux à deux ou même trois à trois [Salto, 2006] ou l'utilisation des clusters [Yade, 2006] permettent d'augmenter la résistance au cisaillement et ainsi d'obtenir des résultats comparables au sable réel. Outre l'intérêt que représentent ces solutions, la plus grande difficulté réside dans la détection des contacts. Autant, cette étape est simple dans le cas des éléments sphériques ou circulaires, autant elle est problématique dans le cas des éléments ayant des formes géométriques complexes. Il n'est pas rare que les processus de détection des contacts prennent plus de 60% du temps de simulation, par exemple, pour des assemblages d'ellipses.

Le second moyen, originellement destinée à la modification des lois d'interaction de contact est à présent considérée. Conservons les avantages de la forme sphérique,

l'inconvénient que l'on souhaite surmonter correspond localement au roulement excessif des éléments en comparaison avec celui des matériaux granulaires réels. Plusieurs modèles théoriques bidimensionnels ont été développés prenant en compte la résistance au roulement au niveau des contacts [Iwashita et Oda, 1998], [Zhou, 1999], [Bratberg, 2002], [Deleenne, 2004], [Jiang, 2006]. Ces modèles permettent d'étudier le rôle de la résistance au roulement dans la réponse macroscopique du milieu, ainsi que d'obtenir des valeurs d'angle de frottement interne et de déformation volumique plus réalistes que celles obtenues lorsque la rotation relative des particules n'est pas restreinte [Oda et Iwashita, 2000], [Iwashita et Oda, 2000], [Zhou, 2001], [Zhou, 2002]. D'autres chercheurs ont aussi étudié des milieux dans lesquels la rotation des particules est complètement restreinte [Latham, 2005], [Calvetti, 2005], [Calvetti, 2005], [Alonso-Marroquin, 2006]. Cependant, cet artifice paraît difficile à justifier du point de vue physique.

L'option retenue ici consiste à introduire un moment artificiel opposé au mouvement du roulement. Ce dernier est ainsi limité ou contrôlé. Cette option est largement inspirée d'une version originellement développée pour des assemblages bidimensionnels de disques afin d'étudier les micro-mécanismes dans les bandes de cisaillement [Oda et Iwashita, 1997], [Iwashita et Oda, 1998], [Iwashita et Oda, 2000]. Son développement tridimensionnel est néanmoins complexe qu'à deux dimensions, où moment et rotation sont tous perpendiculaires au plan contenant les éléments. La loi d'interaction de contact, décrite ci après a été nommé « Moment Transfer Law » pour son aptitude de générer un couple au niveau du contact sur le second élément lorsque le premier subit une rotation.

Dans les sections qui suivent, nous montrons comment cet effet peut être introduit dans la DEM en modifiant légèrement les équations de la dynamique, ainsi qu'en rajoutant une nouvelle loi de contact qui contrôle le roulement.

2.6.3.2. Modèle discret avec MTL

2.6.3.2.1. La cinématique de contact entre deux éléments

Considérons une interaction entre deux éléments sphériques A et B , de rayon r_A et r_B , de centres d'inertie G_A et G_B (Figure 2.9). Dans le repère global G et au temps t , leurs positions sont repérées par x_A, x_B et leurs rotations sont données respectivement par ω_A et ω_B . On définit aussi par $\dot{\omega}_A$ et $\dot{\omega}_B$ leurs vitesses de rotation respectives. $d\omega_A$ et $d\omega_B$ représentent leurs incréments de rotations intervenant durant le pas de temps courant. Le contact entre les deux éléments ait lieu au point C suivant la normale définie par \vec{n} , orientée de l'élément A vers l'élément B . Au temps $t + \Delta t$, la nouvelle configuration des deux éléments est repérée par les centres d'inertie G'_A et G'_B d'abscisses x'_A et x'_B avec le nouveau point de contact est le point C' . La nouvelle normale au contact est baptisée \vec{n}' . On définit par r le rayon moyen des deux éléments en contact de la Figure 2.9.

Le roulement relatif intervenant entre deux éléments durant le pas de temps courant a pu être identifié si seulement si les rotations incrémentales et la composante du glissement sont connus. Au temps $t + \Delta t$ les points C_A et C_B sont définis par les expressions suivantes:

$$\vec{G}'_A C_A = \vec{G}_A C \quad 2.37$$

$$\vec{G}'_B C_B = \vec{G}_B C \quad 2.38$$

Les vecteurs $C'C_A$ et $C'C_B$ sont liés au mouvement de translation et au phénomène de glissement. Leurs expressions sont définies par :

$$\vec{C}'C_A = r_A(\vec{n} - \vec{n}') \quad 2.39$$

$$\vec{C}'C_B = r_B(\vec{n}' - \vec{n}) \quad 2.40$$

Il faut choisir une notation propre aux vecteurs. Au temps $t + \Delta t$, le point de contact de l'élément A (ou B) repéré par le point C au temps t sera situé au point M_A (ou M_B). On définit alors les vecteurs suivants, liés au phénomène de rotation relative intervenant entre les deux éléments :

$$\vec{C}_A M_A = r_A dt \vec{\omega}_A \wedge \vec{n} \quad 2.41$$

$$\vec{C}_B M_B = r_B dt \vec{\omega}_B \wedge \vec{n} \quad 2.42$$

La position relative des points M_A et M_B vis-à-vis du nouveau point de contact C' correspond à la somme des vecteurs liés au mouvement de translation et les vecteurs liés à la rotation relative :

$$\vec{C}'M_A = \vec{C}'C_A + \vec{C}_A M_A = r_A((\vec{n} - \vec{n}') + dt \vec{\omega}_A \wedge \vec{n}) \quad 2.43$$

$$\vec{C}'M_B = \vec{C}'C_B + \vec{C}_B M_B = r_B((\vec{n}' - \vec{n}) + dt \vec{\omega}_B \wedge \vec{n}) \quad 2.44$$

En supposant que la dispersion des rayons n'est pas trop importante ($r_A \approx r_B$), l'incrément de roulement noté $d\vec{U}_r$ peut s'exprimer comme en 2D [Iwashita et Oda, 1998] et supposé reste valable en 3D par l'expression suivante en fonction des vecteurs définis en équation 2.43 et 2.44 :

$$d\vec{U}_r = \frac{\vec{C}'M_A + \vec{C}'M_B}{2} \quad 2.45$$

Physiquement cette quantité est associée au mécanisme de dissipation d'énergie comme dans le cas des milieux continus [Iwashita et Oda, 1998].

Comme l'incrément de roulement est une combinaison entre le mouvement de rotation et le mouvement de translation dus au glissement, il serait bien apprécié d'étudier les deux cas particuliers suivant :

- Il s'agit d'un glissement pur si les composantes des rotations incrémentales sont nulles. Les deux expressions liées au changement d'orientation des normales définies par les équations 2.39 et 2.40 sont opposées, entraînant l'annulation de l'équation 2.44.
- La translation relative est désormais supposée nulle alors que les éléments sont animés de vitesses de rotations opposées. La normale au contact est inchangée d'un pas à un autre, les équations 2.39 et 2.40 sont donc nulles. Les rotations incrémentales (2.41, 2.42) sont égales. Il s'agit dans ce cas d'un roulement pur.

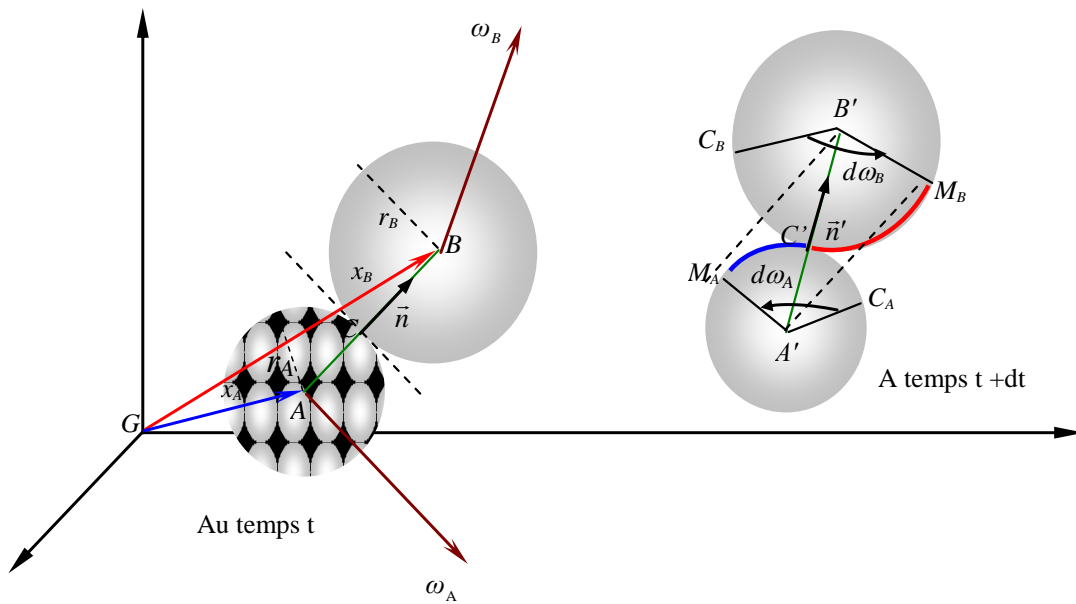


Figure 2. 9. Cinématique d'un contact au temps t et $t + \Delta t$

2.6.3.2.2. Le vecteur angulaire du roulement au niveau du contact

Le phénomène de roulement correspond à la rotation relative des éléments. Cependant, on peut définir un vecteur angulaire de roulement incrémentale nommé $d\vec{\theta}_r$. Soit $\vec{n}_{d\theta_r}$ le vecteur unitaire portant le vecteur angulaire $d\vec{\theta}_r$, exprimé par :

$$\vec{n}_{d\theta_r} = \frac{\vec{n}' \wedge d\vec{U}_r}{\|\vec{n}' \wedge d\vec{U}_r\|} \quad 2.46$$

Le vecteur angulaire incrémental de roulement est alors donné par l'expression suivante:

$$d\vec{\theta}_r = \frac{\|d\vec{U}_r\|}{r} \vec{n}_{d\theta_r} \quad 2.47$$

Avec r est le rayon moyen des deux éléments en contact.

Le vecteur angulaire de roulement défini par θ_r est estimé par la sommation des incréments $d\theta_r$, depuis la création du contact jusqu'à sa suppression.

$$\vec{\theta}_r = \sum d\vec{\theta}_r \quad 2.48$$

C'est à partir de ce vecteur angulaire que l'on peut estimer le moment résistant destiné à limiter le phénomène de roulement. Mais ce moment résistant intervient au niveau de l'interaction locale entre les deux éléments. Dans ce cas, et comme toutes les équations sont exprimées dans le repère global, on est obligé d'exprimer le vecteur angulaire de roulement θ_r dans un repère local. Ce repère est un trièdre direct défini par un centre situé au point de contact C . Ses axes étant composés du vecteur normal au plan de contact n , et deux vecteurs unitaires arbitraires du plan de contact t_1 et t_2 (voir Figure 2.4.).

On définit par θ_r^L , le vecteur angulaire de roulement exprimé dans le repère local L , par l'équation suivante :

$$\vec{\theta}_r^L = [m_{G-L}] \vec{\theta}_r \quad 2.49$$

$[m_{G-L}]$ désigne la matrice de passage du repère global G au repère local L . Seules les composantes dirigées suivant les deux vecteurs arbitraires du plan de contact interviennent dans le calcul du moment au roulement. La composante dirigée selon la normale au plan de contact n'est pas prise en compte. Le phénomène de torsion est à négliger.

2.6.3.2.3. Le moment résistant au roulement

La possibilité d'exercer des moments donne au contact la faculté de résister au roulement. Dans la DEM, ceci peut être pris en compte en rajoutant une loi de contact analogue à la loi de frottement de Coulomb.

Le moment résistant au roulement est défini par une composante agissant dans le plan de contact (voir Figure 2.10.). Sous l'hypothèse d'un comportement isotrope au roulement, la raideur de roulement est exprimée par un scalaire nommé k^r . Dans le repère local L , le roulement génère un moment élastique \vec{M}_{elast}^L défini par :

$$\vec{M}_{elast}^L = k^r \cdot \vec{\theta}_r^L \quad 2.50$$

Le module de ce moment est à comparer à la valeur seuil définie par S_{lim} imposée par la loi MTL de roulement. Cette valeur est attribuée au moment au-delà de laquelle des irréversibilités apparaissent.

On désigne par $[T_{L-G}]$, matrice de passage du repère local L au repère global G . Le moment au roulement à exercer au contact est exprimé dans le repère global par l'équation suivante :

$$\vec{M}_r = [T_{L-G}] \min\left(\|\vec{M}_{elast}^L\|; S_{lim}\right) \frac{\vec{M}_{elast}^L}{\|\vec{M}_{elast}^L\|} \quad 2.51$$

Le moment \vec{M}_r est appliqué à l'élément A . Suivant le principe d'action-réaction son opposé $-\vec{M}_r$ sera appliqué à l'élément B pour assurer l'équilibre de l'interaction.

Enfin, si à l'itération courante, la limite élastique S_{lim} est atteinte ou des irréversibilités interviennent, le vecteur angulaire de roulement $\vec{\theta}_r^L$ est à réajuster. Ceci signifie que les éléments d'une interaction ne peuvent revenir à leur configuration initiale même si l'énergie élastique de roulement est entièrement restituée. Sa valeur est modifiée par la formule suivante :

$$\vec{\theta}_r^L = \frac{\vec{M}_{elast}^L}{k^r} \cdot \frac{S_{lim}}{\|\vec{M}_{elast}^L\|} \quad 2.52$$

Bref, la loi MTL est résumée comme suit :

$$\text{Si : } \|\vec{M}_{elast}^L\| < S_{lim} : \vec{M}_r = [T_{L-G}] \vec{M}_{elast}^L ; \vec{\theta}_r^L = \frac{\vec{M}_{elast}^L}{k^r} \quad 2.53$$

$$\text{Si : } \|\vec{M}_{elast}^L\| \geq S_{lim} : \vec{M}_r = [T_{L-G}] \vec{M}_{elast}^L \frac{S_{lim}}{\|\vec{M}_{elast}^L\|} ; \vec{\theta}_r^L = \frac{\vec{M}_{elast}^L}{k^r} \cdot \frac{S_{lim}}{\|\vec{M}_{elast}^L\|} \quad 2.54$$

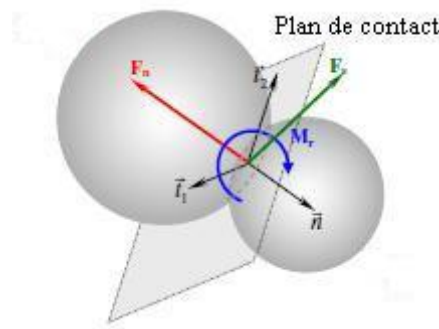


Figure 2. 10. Définition du moment résistant au roulement agissant dans le plan de contact

2.6.3.2.4. *Choix implicite des paramètres pour appliquer la MTL*

La loi de comportement régie par la MTL doit permettre de représenter les grandes classes du comportement d'un milieu granulaire sec : élasticité et plasticité. La première est régie par la raideur au roulement k^r et la seconde intervient sous forme d'un frottement au roulement intervenant d'une valeur limite imposée au moment de roulement S_{lim} . Ces deux paramètres seront exprimés dans le cadre des milieux granulaires sec et peu cohésifs.

En ce moment, il n'existe pas un raisonnement rationnel pour choisir une valeur spécifique pour la raideur au roulement k^r . Dans [Iwashita et Oda, 1998], lors de leurs simulations bidimensionnelles, les auteurs proposent une hypothèse simplificatrice visant à exprimer ce paramètre. Au niveau de l'interaction, la rotation des deux éléments fait naître un moment incrémentale de roulement $d\vec{M}_r$ et un moment incrémentale du à l'effort tangentiel $d\vec{M}_s$. Leurs valeurs respectives sont exprimées par les équations suivantes :

$$d\vec{M}_r = k^r \frac{d\vec{U}_r}{r} \quad 2.55$$

$$d\vec{M}_s = k^s .d\vec{U}_s .r \quad 2.56$$

Les auteurs supposent que les deux moments incrémentaux sont équivalents et du même ordre de grandeur sous la condition suivante :

$$d\vec{U}_r \cong d\vec{U}_s \quad 2.57$$

Cette simplification donne accès à la relation suivante :

$$k^r = k^s r^2 \quad 2.58$$

On suppose que cette relation est convenable pour des milieux polydispersés en 3D. Elle a toujours l'avantage d'estimer la raideur en roulement à appliquer mais elle ne permet pas de la traiter comme un paramètre indépendant. Le phénomène de roulement entre grains réels peut avoir différentes origines microscopiques. Il dépend de la forme non convexe des grains, de leur rugosité et même de la déformation plastique de la région de contact...etc. Afin de pouvoir intégrer tout ces aspects dans notre modèle la relation 2.58 est toujours conservée mais pondérée par un coefficient de roulement adimensionnel que l'on nomme β_r . La nouvelle relation de k^r est donnée par l'équation qui suit :

$$k^r = \beta_r k^s r^2 \quad 2.59$$

Cette relation permet de prendre en compte les divers aspects géométriques précités. Le paramètre adimensionnel β_r est toujours positif afin de respecter le sens physique de la raideur. Enfin, le comportement élastique en roulement est régi par β_r .

Le comportement plastique en roulement désigné par la valeur limite imposée au moment de roulement S_{lim} est à présent considéré. Pour déterminer cette valeur, considérons l'équilibre d'un bloc et d'un disque de rayon r placés sur un plan incliné d'un angle θ . La stabilité du

bloc est assurée par la force tangentielle $\vec{F}^s < \mu \vec{F}^n$, et le glissement a lieu si θ atteint sa valeur limite. La stabilité du disque, par rapport au roulement, est assurée par le moment de contact \vec{M} , qui est égal au moment exercé par le poids du disque autour du point de contact, et qui doit être inférieur au moment maximal S_{lim} . Si l'on suppose que, comme pour le glissement, le roulement a lieu une fois que l'angle d'inclinaison du plan atteint une valeur limite, on obtient :

$$S_{lim} = \eta_r \left\| \vec{F}^n \right\| r \quad \mathbf{2.60}$$

Cette limite est incorporée dans la formulation du modèle, avec η_r est un coefficient adimensionnel toujours positif nommé paramètre de la limite élastique en roulement. La MTL est alors analogue à la loi de frottement de Coulomb, puisque les irréversibilités en roulement dépendent linéairement de l'effort normal du contact. Cette modélisation est utilisée pour représenter le comportement du matériau granulaire.

Donc la MTL est régi par les deux paramètres β_r et η_r . Ces deux paramètres sont à déterminer suivant le matériau utilisé, mais une illustration succincte des comportements obtenus pour les valeurs limites de ce couple est possible. Cependant, une valeur nulle du paramètre adimensionnel β_r implique un moment de roulement nul. Cette configuration correspond au cas sans MTL ou les rotations sont libres et contrôlées que par les efforts de cisaillements. Même configuration est obtenue lorsque la limite élastique en roulement est nulle, puisque le seuil élastique du moment S_{lim} est nul. Le deuxième cas limite correspond à $\beta_r \rightarrow \infty$ et $\eta_r \rightarrow \infty$ simultanément, ce qui ne permet à avoir aucun roulement entre les éléments. Cette configuration est donc équivalente à une configuration ou les rotations sont totalement bloquées.

2.6.3.2.5. *Modèle rhéologique avec MTL*

Sur la base des lois de comportement exposées dans les sections précédentes, le modèle mécanique utilisé dans l'ensemble des simulations est composé d'une raideur normale, une raideur tangentielle et une raideur au roulement (Figure 2.10.). Ces trois composantes ont le même principe. Elles sont tous constituées d'un ressort pour prendre en compte le comportement élastique au niveau du contact. Le modèle dans la direction normale se compose d'un ressort associé en série à un diviseur (résistance à la traction nulle) qui fait simuler l'état de contact lorsque les grains sont séparés (Figure 2.11a). Dans la direction tangentielle, le modèle fait associer en série un ressort et un patin à seuil basé sur le critère de Mohr- Coulomb (Figure 2.11b). Dans la direction rotationnelle, le modèle présente un comportement élasto-plastique parfait présenté par un ressort associé à ressort de roulement (Figure 2.11c).

La liste de lois de contact pour les efforts normaux, tangentiels et pour le roulement n'est pas exhaustive. Il existe d'autres modèles rhéologiques et en particulier ceux qui prennent en compte de la viscosité et de la cohésion entre les grains [Zang et whitens, 1998], [plassiard, 2007], [Preechawuttipong et al., 2000], [Nase et al., 2001].

Le choix d'une loi de contact par rapport à une autre est complexe. Par des confrontations de résultats numériques et expérimentaux, les auteurs [Schäfer et al., 1996] sont conclus qu'il n'existe pas de modélisation meilleure qu'une autre. Le choix d'un modèle rhéologique se doit d'être guidé par le type de simulation que l'on réalise (Dynamique, statique, etc...).

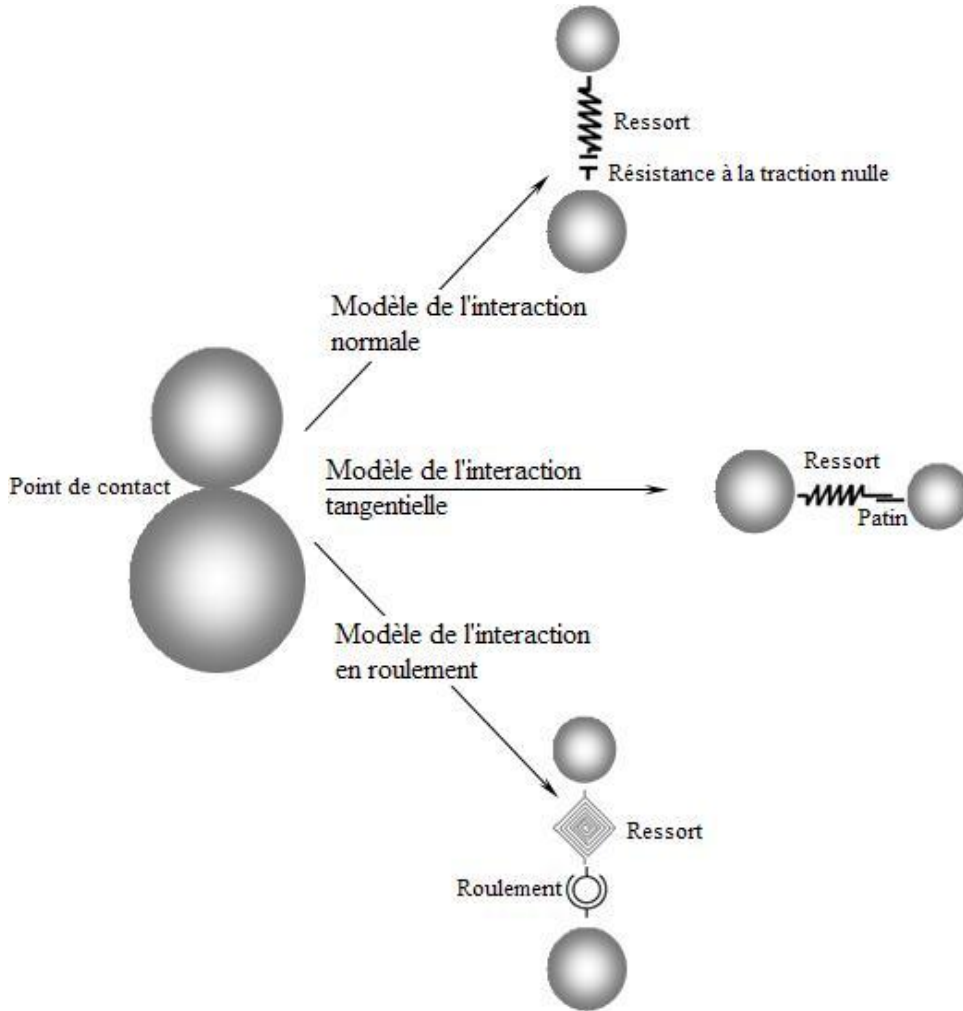


Figure 2. 11. Modèle rhéologique avec MTL

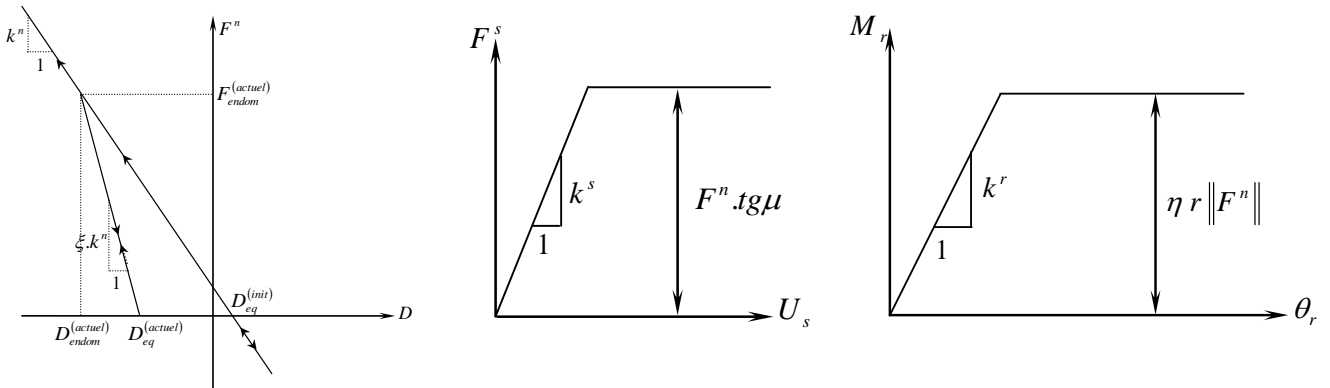


Figure 2. 12. Modèle des lois de contact

2.6.4 Intégration des équations du mouvement

La cinématique des grains est obtenue grâce à l'utilisation d'algorithmes d'intégration. Ces algorithmes consistent à calculer au temps $t + \Delta t$ pour le mouvement en translation, les positions x_i , les vitesses $\vec{\dot{x}}_i$ et les accélérations $\vec{\ddot{x}}_i$ et pour le mouvement en rotation, les rotations θ_i , les vitesses angulaires $\vec{\dot{\theta}}_i$ et les accélérations angulaires $\vec{\ddot{\theta}}_i$ des centres des grains dans le repère global, à partir de la cinématique des grains au temps t . Où i dénote les 3 directions de l'espace.

On désigne par \vec{F}_i le bilan des forces extérieures appliqué à un grain donné selon l'axe i du repère principal au temps t . De même, la somme des moments appliqués à cet élément selon l'axe i est notée \vec{M}_i . Par application du principe fondamentale de la dynamique à chaque grain, sa masse m et son moment d'inertie J sont respectivement liés aux accélérations en translation $\vec{\ddot{x}}_i$ et en rotation $\vec{\ddot{\theta}}_i$ de son centre de gravité par les équations (2.61) et (2.62):

$$\vec{F}_i = m \vec{\ddot{x}}_i \quad 2.61$$

$$\vec{M}_i = J \vec{\ddot{\theta}}_i \quad 2.62$$

Les schémas numériques classiquement utilisés pour les méthodes de type DEM sont des schémas aux différences finis explicites [Allen et Tildesley, 1987], [Cambou et Jean, 2001]. L'algorithme utilisé dans le code de calcul est l'algorithme aux différences finies centrées d'ordre deux.

Connaissions les variables cinématiques $\vec{\dot{x}}_i$ au temps t , par intégration successive de celles-ci suivant un schéma aux différences finies centrées sur un pas de temps Δt on obtient les vitesses de translation $\vec{\dot{x}}_i$ et de rotation $\vec{\dot{\theta}}_i$ au temps intermédiaire $t + \Delta t / 2$:

$$\vec{\dot{x}}_i^{(t+\Delta t/2)} = \vec{\dot{x}}_i^{(t-\Delta t/2)} + \left(\frac{\vec{F}_i^t}{m} \right) \Delta t \quad 2.63$$

$$\vec{\dot{\theta}}_i^{(t+\Delta t/2)} = \vec{\dot{\theta}}_i^{(t-\Delta t/2)} + \left(\frac{\vec{M}_i^t}{J} \right) \Delta t \quad 2.64$$

Puis les nouvelles positions à $t + \Delta t$:

$$\vec{x}_i^{(t+\Delta t)} = \vec{x}_i^{(t)} + \vec{\dot{x}}_i^{(t+\Delta t/2)} \Delta t \quad 2.65$$

En revanche, la rotation n'est pas déduite de la vitesse angulaire puisqu'elle n'est pas utilisée lors de la résolution du problème.

Le cycle de calcul est maintenant fermé et la liste des contacts peut à nouveau être mise à jour.

2.6.5 Condition de convergence

Travailler avec des algorithmes d'intégration temporelle nous oblige de prendre en compte des précautions pour que le calcul itératif soit stable, tâche qui n'est pas facile. L'une de ces précautions concerne un choix judicieux du pas de temps. Il nous faut alors faire un choix d'un Δt , qui se doit être suffisamment petit pour que la solution en sortie ait un sens, mais qui ne doit pas être sévère afin de garder des temps de calcul raisonnables. Dans le cas du mouvement des grains, le pas de temps ne doit dépasser un pas de temps critique $\Delta t_{critique}$. Le pas de temps critique, qui correspond à la durée d'un choc entre deux grains, peut être déterminé en considérant le cas du choc frontal entre un grain i et un grain j lié par un système ressort. Le pas de temps critique est considéré dans le cas le plus défavorable, en considérant qu'il n'y a pas d'amortissement. Il est donné par l'expression suivante:

$$\Delta t_{critique} = \pi \sqrt{\frac{m}{K^n}} \quad 2.66$$

La relation 2.66 montre que le pas de temps critique est fonction des paramètres m et K^n . La méthode DEM considérée nécessite l'utilisation de pas de temps très petits. Pour réduire la durée globale des temps de calculs, c'est-à-dire conserver des pas de temps compris entre $10^{-7}s$ et $10^{-5}s$ tout en assurant la stabilité des calculs, il est possible de modifier artificiellement la valeur du pas de temps critique en agissant sur l'un des deux paramètres m et K^n . La valeur de K^n ne doit pas être trop élevée pour ne pas prendre des pas de temps trop petits, mais ne doit pas non plus être trop lâche entraînant une instabilité dans les calculs. Mais dans le cas où on veut conserver une raideur au contact élevée, le paramètre K^n n'est pas modifié. Les masses des grains, par contre, sont augmentées et donc diminuent artificiellement la valeur du pas de temps critique. Les simulations sont effectuées pour des configurations quasi-statiques, l'inertie des grains n'a donc que peu d'influence et l'utilisation de ce facteur de masse ne perturbe pas les résultats des essais. Une autre précaution à prendre en compte est d'introduire de l'amortissement pour éviter des instabilités numériques, et pour dissiper de l'énergie élastique fournie lors des ruptures. En général les codes de calcul basés sur la DEM permettent l'introduction d'un amortissement dans le système de grain. On trouve deux types d'amortissements : un amortissement dit "visqueux" et un amortissement dit "non visqueux". Le premier agit sur les quantités cinématiques absolues des éléments pour introduire de la dissipation d'énergie sous forme visqueuse, il s'agit d'un amortissement global visqueux. Physiquement, il signifie que les centres de gravité des grains sont reliés au repère du laboratoire par des amortisseurs fonctionnant en translation et en rotation [Cundall & Strack, 1979]. Ce type d'amortissement a l'inconvénient de créer des forces de volumes indésirables qui peuvent influencer la rupture de l'assemblage granulaire [Cundall, 1987]. L'amortissement local visqueux, par contre, introduit de la dissipation d'énergie au niveau des interactions, par exemple, en reliant les grains par des amortisseurs [Iwashita et Oda, 1998], ou de chaque élément indépendamment les uns des autres. Cet amortissement semble influencer considérablement le comportement du milieu. Il sera adapté s'il reflète effectivement la physique du milieu réel. Dans le cas contraire, on peut se demander si cet amortissement est bien adapté. Une autre version de l'amortissement local mais "non visqueux", proposée par Cundall [Cundall, 1987]. Il s'applique indépendamment à chaque grain dont l'effort (ou le moment) d'amortissement est proportionnel à la force totale (ou moment) résultante sur le grain. Pratiquement, dans le Principe Fondamentale de la Dynamique on ajoute à chaque grain une force d'amortissement \vec{F}_a et un moment d'amortissement \vec{M}_a de la forme

$$\vec{F}_a = -\lambda |\vec{F}_{tot}| \text{sign}(\vec{\dot{x}}) \quad 2.67$$

$$\vec{M}_a = -\lambda |\vec{M}_{tot}| \text{sign}(\vec{\dot{\omega}}) \quad 2.68$$

Le signe (-) fait amortir les vibrations plutôt que les mouvements permanents, ce qui fait aucune force d'amortissement n'est créée lors du mouvement. Le coefficient d'amortissement λ est adimensionnel compris entre 0 et 1, et *sign* est une fonction renvoyant le signe d'un scalaire. L'amortissement est indépendant de la fréquence des mouvements des éléments, il est pour effet de diminuer la force résultante si elle est motrice ou l'accroître si elle s'oppose au mouvement.

Comme conclusion sur le choix du pas de temps et l'amortissement, ces deux précautions sont primordiales pour obtenir des résultats ayant un sens mécanique.

Le chapitre suivant est dédié à l'étude du comportement macroscopique d'un milieu granulaire sous sollicitations quasi-statique.

CHAPITRE 3.

Comportement macroscopique d'un milieu granulaire sous sollicitations quasi-statiques : expériences et simulations numérique

3.1. Introduction



Le chapitre vise à modéliser l'essai triaxial et à étudier le comportement d'un milieu granulaire sous sollicitations quasi statique en s'appuyant sur l'expérimentation à l'échelle globale et sur un modèle numérique basé sur la méthode aux éléments discrets. L'objectif est de déterminer les paramètres du modèle numérique de manière à reproduire un essai expérimental dit de référence réalisé à une pression de confinement donnée. La pression de confinement est ensuite modifiée et la réponse obtenue est comparée à celle de l'expérience. La démarche permettant l'identification du jeu de paramètre jugé pertinent est appelé procédure de calibration. Elle permet de faire le lien entre l'échelle locale et l'échelle globale. Nous obtenons par ce biais, les paramètres locaux permettant la meilleure corrélation entre la réponse numérique et expérimentale. Après une présentation générale de la problématique, ce chapitre détaille la procédure utilisée pour générer des échantillons numériques représentatifs et simuler la sollicitation triaxiale de compression axisymétrique. Nous discutons ensuite la pertinence de l'hypothèse quasi-statique et l'influence de l'amortissement non visqueux. Grâce à ce type de simulation, la procédure de calibration est établie sur la base d'une étude paramétrique portant sur l'influence des paramètres géométriques (taille caractéristique des éléments, distribution granulométrique...etc.) et micromécanique au niveau du contact sur la réponse macroscopique des simulations triaxiales. Après l'étude paramétrique, la procédure de calibration est appliquée pour une pression de confinement donnée afin de reproduire le comportement macroscopique d'un matériau granulaire. Ensuite, des simulations numériques sont menées pour différentes pressions de confinement. La comparaison des résultats numériques et expérimentaux permet de conclure sur la capacité et la puissance du modèle testé à prédire le comportement mécanique macroscopique du matériau à divers pressions de confinement. De plus, nous nous sommes intéressés à l'évaluation des caractéristiques mécaniques du matériau en termes de rupture (angle de frottement interne, état critique) et déformations volumiques de contractance et de dilatance (angle de dilatance). Dans les deux dernières sections, nous présentons les réponses incrémentales du modèle suivant des recherches directionnelles et nous nous assurons qu'elles vérifient des résultats classiques de la micro-mécanique granulaire.

3.2. Comportement mécanique sous sollicitations quasi-statique

Il existe de nombreux essais mécaniques permettant l'étude de la rhéologie des sols. Les essais les plus répandus sont les essais de cisaillement direct et les essais triaxiaux, parmi lesquels on trouve les essais triaxiaux de révolution et les essais triaxiaux dits « vrais ». Même si l'essai de cisaillement direct (voir Figure 3.1) propose une mise en œuvre plus facile que l'essai triaxial, il présente des inconvénients tels que l'impossibilité d'accéder aux contraintes sur ses parois ou la non homogénéité des déformations en raison d'une surface de rupture imposée même pour de faibles déformations. Dans ce cas nous ne pouvons en déduire qu'une relation du type effort déplacement, et non une loi de comportement du matériau proprement dite [Nova, 2005]. L'essai triaxial de révolution est le plus couramment utilisé en laboratoire [Degny, 1984]. Il permet de déterminer les caractéristiques mécaniques dans le domaine des petites et des grandes déformations. La loi de comportement du matériau peut ainsi être déduite. La réalisation de cet essai suit les normes NF P 94-070 et NF P 94-074. Il consiste à

soumettre une éprouvette de sol de forme cylindrique, généralement d'élancement 2, à une pression hydrostatique σ_3 dite de confinement (phase de compression isotrope $\sigma_1 = \sigma_3$), ensuite l'essai consiste à imposer une contrainte axiale σ_1 grâce au piston (phase d'écrasement, $\sigma_1 > \sigma_3$) (voir Figure 3.2). L'expérimentateur fait augmenter σ_1 en imposant une vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}_1$ constante jusqu'à la rupture de l'éprouvette, σ_3 restant constante.



Figure 3. 1. Essai triaxial de révolution (à gauche) et essai à la boîte de cisaillement direct (à droite)

Notons que les essais triaxiaux véritables dits « vrai » permettant d'imposer trois contraintes principales indépendantes non nulles, sont très rares (Voir Figure 3.3). L'un d'entre eux est situé au Laboratoire Sols Solides Structures Risques à Grenoble, mais le contrôle et l'interprétation des essais est extrêmement délicat du fait de l'impossibilité d'observer directement la zone sollicitée. De plus la réalisation des échantillons est très coûteuse. L'essai consiste à placer un échantillon parallélépipédique entre six parois rigides qui se déplacent pour imposer un déplacement à déformation donnée ou une contrainte pilotée par un asservissement avec correction en déplacement. Les parois sont lisses afin de supprimer tout frottement aux extrémités de l'échantillon. De ce fait, les pressions appliquées par les parois sont colinéaires avec les contraintes principales de l'échantillon.



Figure 3. 2. Appareil de l'essai triaxial « vrai »

La Figure 3.4 présente les résultats obtenus par Degny [Degny, 1984] pour des essais biaxiaux de révolution et triaxiaux vrais pour des pressions de confinement de 300 et 800 kPa. Ses résultats mettent en évidence des différences de comportement obtenues expérimentalement. Entre les deux types d'essais l'auteur a constaté, une faible différence entre les contraintes au pic et une pente initiale plus faible obtenue pour l'essai de révolution. La dilatance obtenue lors d'un essai triaxial véritable est également plus faible, il semble aussi que l'angle de frottement résiduel est plus faible même si l'état résiduel n'est pas atteint. D'autres essais triaxiaux de révolutions classiques (élanement égale à 2) ont été réalisés par Colliat-Dangus [Colliat-Dangus, 1988] sous différentes conditions sur des sables denses et sables lâches. L'auteur a conclu que les conditions d'essais engendrent un pic de contrainte plus marqué (pour les sables denses), une dilatance plus importante et un état résiduel précoce.

Dans le cadre de la modélisation des milieux granulaires, les chercheurs ont explorés le comportement macroscopique par l'étude des phénomènes physiques à l'échelle microscopique. Des essais biaxiaux ont été effectués sur des échantillons de sol analogique constitués de rouleaux en dural [Schneebeli, 1956], en caoutchouc [Oda et al., 1983], en PVC [Gourvès et Mezghani, 1988] ou en acier [Kastner, 1982], [Dolzhenko, 2002]. Encore largement en géomécanique, l'idée d'une modélisation bidimensionnelle des sols est souvent reprise dans le cadre de la simulation numérique des milieux granulaires. Malheureusement, les courbes de comportement mécanique obtenues par simulation numérique sont généralement très bruitées. Ce constat a également été fait par certains expérimentateurs [Evesque et al., 1993], [Kim, 1995], [Elie, 1998].

Le comportement mécanique macroscopique mesuré pendant l'essai est censé être indépendant de la vitesse de déformation $\dot{\epsilon}_1$. D'un point de vue pratique, il est recommandé d'appliquer des vitesses de sollicitation faibles afin de pouvoir considérer l'évolution du comportement de l'échantillon comme étant une succession d'états d'équilibre infiniment voisins (évolution quasi statique d'où la négligence des forces d'inertie qui entrent en jeu).

[Di Benedetto et Tatsuoka, 1997] et [Semblat et Liong, 1999] précisent la notion de la quasi-staticité en comparant, à une longueur de référence (Hauteur H de l'échantillon par exemple), la longueur d'onde de la sollicitation, λ ($= C.T$ avec C est la vitesse à laquelle une variation d'effort se propage d'un point à un autre, ou propagation de l'onde mécanique et T la période de la sollicitation). Lorsque le rapport λ/H est grand devant l'unité, les sollicitations peuvent être considérées comme quasi-statiques et l'inertie négligée. Lorsque ce même rapport est petit devant l'unité, les sollicitations sont dynamiques, l'inertie cesse d'être négligeable et les composantes de l'accélération doivent être prises en compte. Les essais classiques de laboratoires sont de type quasi-statique car les longueurs d'ondes des sollicitations sont très supérieures aux dimensions caractéristiques des échantillons.

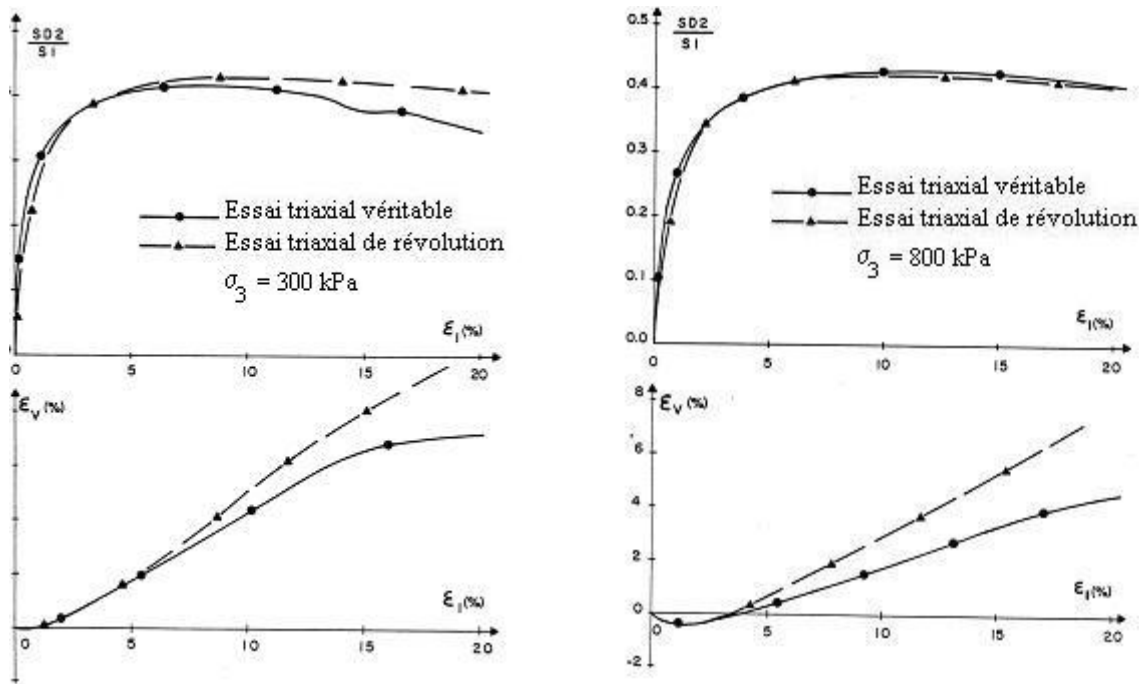


Figure 3. 3. Comportement mécanique macroscopique obtenu lors d'essais biaxiaux de révolution et triaxiaux vrais d'après Degny [Degny, 1984].

Il est généralement admis que le comportement des milieux dits pulvérulents est relativement insensible à la vitesse de sollicitation $\dot{\epsilon}_1$ lors d'un essai triaxial [Matsushita et al., 1999]. Mais est-il influencé par le mode de chargement? En fait, il existe deux types d'essais triaxiaux, ceux qui s'effectuent à contrainte imposée croissante et ceux qui s'effectuent à déformations imposées. Dans le premier cas, on trouve les résultats de Di prisco et Imposimato [Di prisco et Imposimato, 1997] sur des échantillons lâches du sable d'Hostun RF. Les auteurs ont observé que pour chaque incrément de chargement fixé, les réponses obtenues en déformation ont des intensités variables, et présentent un caractère non prédictible. Dans le second cas, on trouve les travaux de Di Benedetto et al [Di Benedetto, 1997] sur des sables secs en régime quasi-élastique. Au cours de ces essais, les auteurs ont observé que la transition entre deux états d'équilibre successifs s'étend sur de très grands intervalles de temps d'où la présence d'une composante visqueuse dans le comportement des sables suivant leur interprétation.

Pour conclure, les études menées par [Di prisco et Imposimato, 1997] et [Di Benedetto et al., 1997] mettent en évidence des comportements non quasi-statiques dépendant du temps physique, constitué d'états d'équilibre et phases de réarrangement (voir Figure 3.5 et Figure 3.6). Il semblerait plus raisonnable de faire l'hypothèse d'une sensibilité aux variations des vitesses de sollicitation comme vu par [Matsushita et al., 1999].

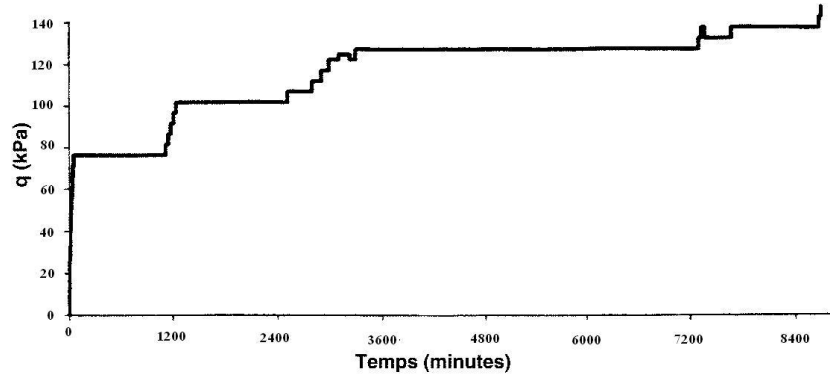


Figure 3. 4. Histoire du chargement q imposé au cours du temps [Di prisco et Imposimato, 1997].

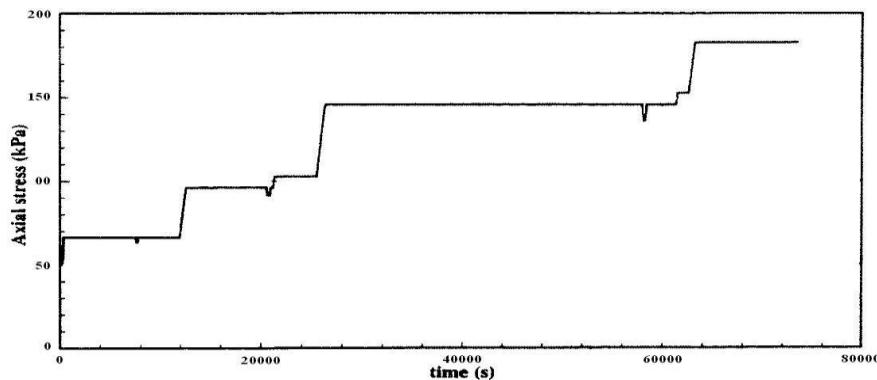


Figure 3. 5. Evolution de σ_1 au cours du temps à déformation imposées. [Di Benedetto et al., 1997]

3.3. Expériences et leur modélisation numériques

Afin de mieux comprendre le comportement d'un ouvrage complexe, les simulations numériques peuvent s'avérer un outil puissant, à condition que les modèles utilisés soient d'abord validés à partir des résultats expérimentaux. Elles apparaissent comme un formidable outil pour venir enrichir les connaissances apportées par le biais des expériences. Elles permettent d'avoir des informations qui sont impossibles de les obtenir expérimentalement, notamment les forces de contact locales, ...de simuler des milieux parfaits et de faire varier plus facilement de nombreux paramètres physiques (coefficient de frottement, de restitution...) et d'observer les mécanismes intergranulaires des modèles à l'équilibre ou en cours de chargement. Aujourd'hui, la simulation numérique intervient dans tous les domaines sans exception. En géotechnique, avant de passer à l'échelle de l'ouvrage, les mécaniciens des

sols ont essayé de reproduire leurs essais par simulations numériques à l'aide de ces méthodes dites des éléments discrets. De la même manière que les essais de laboratoire servent à caractériser le comportement mécanique d'un sol, la simulation de ces essais fournit un ensemble de paramètres permettant d'approcher quantitativement le comportement macroscopique du matériau. La cinématique est généralement reproduite avec succès aussi bien au niveau des déplacements des particules qu'au niveau des localisations des déformations [Bardet et Proubet, 1991]. Chareyre [Chareyre, 2003] a proposé de simuler des essais biaxiaux et de faire une analogie entre les résultats numériques et expérimentaux pour aboutir à un ensemble de paramètres optimaux. Nous trouvons aussi, les travaux de [Plassiard, 2007], [Belheine et al., 2008] sur les simulations numériques des essais triaxiaux d'un milieu pulvérulent. Les auteurs ont pu développer une méthodologie de calage entre l'expérimental et le numérique [Plassiard et al., 2008]. Si une bonne correspondance entre le comportement du modèle de sol et celui du sol réel aura lieu, le jeu de paramètres obtenu sera adopté pour simuler le comportement global de l'ouvrage. Dans ce cadre, le processus d'analogie entre l'expérimentale et le numérique est schématisé sur la Figure 3.7.

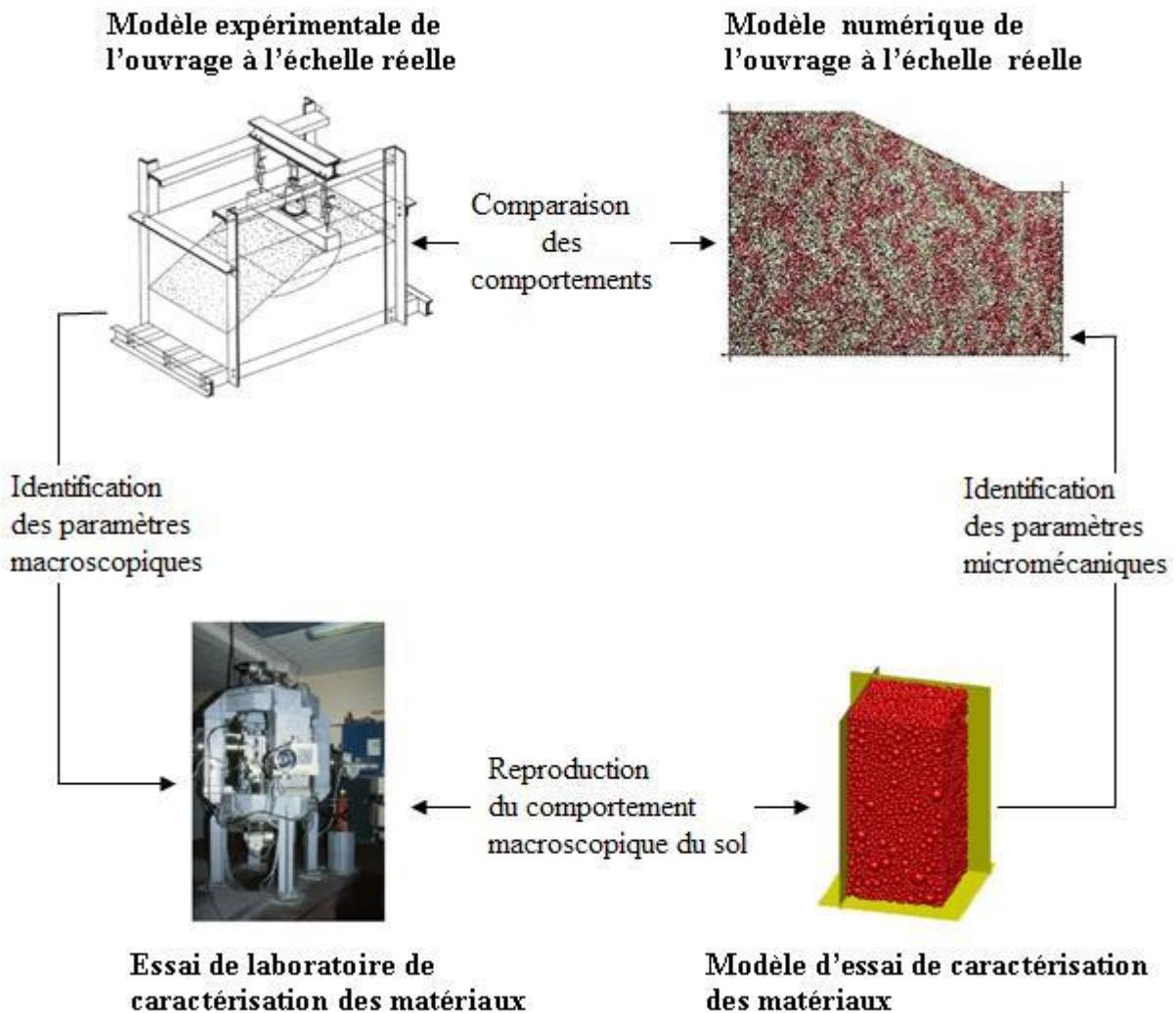


Figure 3. 6. Processus d'analogie entre les essais de caractérisation, les ouvrages réels et numériques.

Dans toute étude géotechnique, l'ingénieur est confronté au choix du type de modélisation ; 2D ou 3D. La simulation bidimensionnelle (2D) est parfois l'unique possibilité dans la pratique, à cause de la complexité et du temps de calcul associés aux logiciels en trois dimensions, mais elle ne permet pas de simuler des phénomènes agissant dans une direction ou un plan non définis. Elle s'impose lorsque le comportement de l'ouvrage est considéré plan (une des dimensions est grande devant les deux autres) et qu'un modèle 3D engendrerait un nombre d'éléments prohibitif. C'est le cas de l'étude de la stabilité d'un talus ancré et de son essai de caractérisation présentés sur la Figure ci-dessous (Figure 3.8).

Le modèle de l'ouvrage et celui de l'essai de caractérisation sont bidimensionnels [Chareyre, 2003]. Dans le cas d'une géométrie plus compacte et malgré une augmentation des temps de calcul, un modèle tridimensionnel est généralement préféré pour une meilleure représentation physique de phénomènes réels. C'est le cas de l'étude de l'impact sur un merlon [Plassiard, 2007] et l'étude d'une dalle soumise à un impact missile [Shiu et al., 2008] et leur essai de caractérisation. D'après les auteurs, le choc d'un bloc ou d'un missile provoque des phénomènes tridimensionnels. L'ouvrage n'est donc nulle part soumis à un état de déformation plane. Donc le modèle numérique de l'ouvrage ainsi que le modèle de son essai de caractérisation sont tridimensionnels.

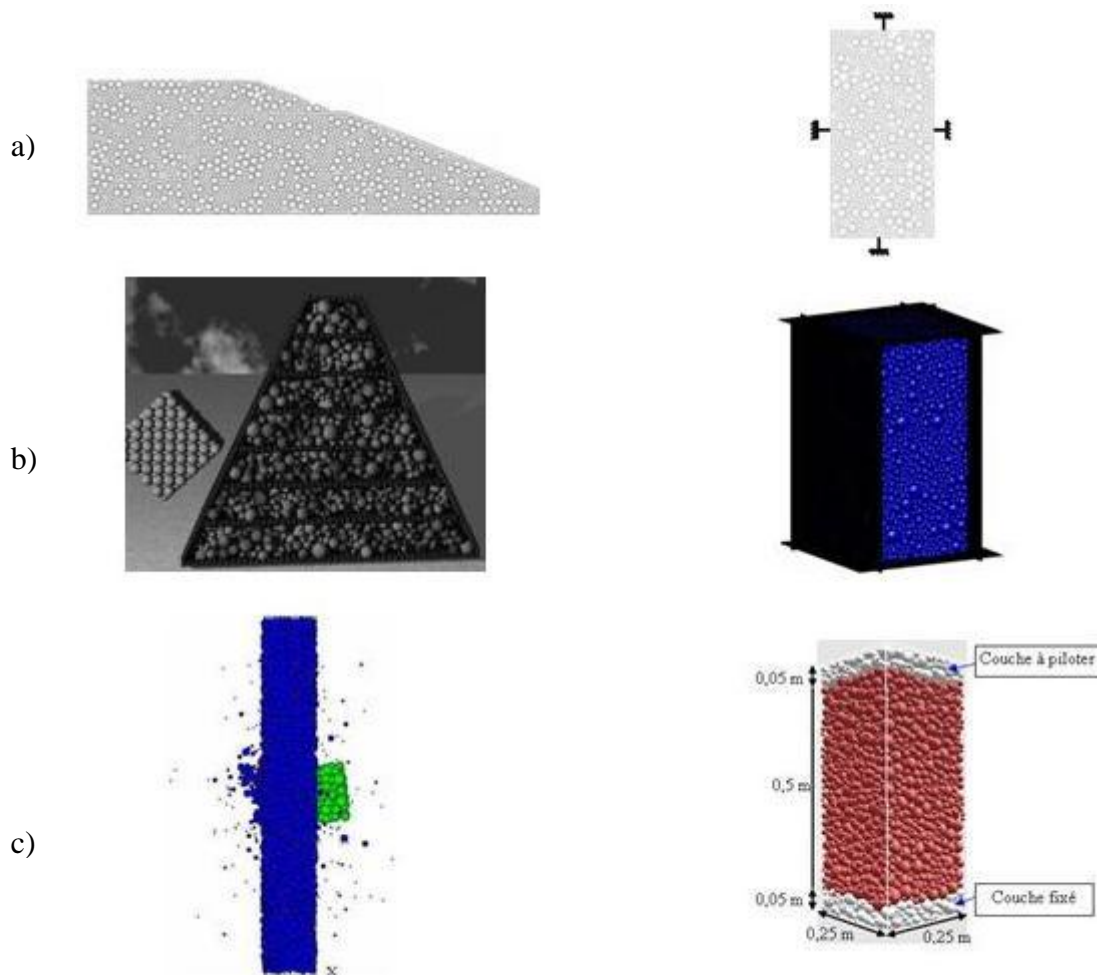


Figure 3. 7. Model numérique :

- a) d'un talus ancré et de son essai de caractérisation [Chareyre, 2003],
- b) d'un merlon, de son impacteur et de son essai de caractérisation [Plassiard, 2007],
- c) d'une dalle, d'un impacteur missile et de son essai de caractérisation [Shiu et al., 2008].

Par exemple dans le cadre d'une étude de stabilité de pente sous l'effet de la présence d'un massif rocheux, le choix du type du modèle à utiliser dépend de l'aspect considéré.

A présent, nous abordons la modélisation de l'essai de caractérisation. Pour mieux comparer les résultats du modèle numérique avec ceux de l'expérience, une équivalence entre les deux types d'essais devrait être considérée. Cela nous permet d'étudier (ou d'apprécier) l'influence de chaque paramètre (porosité, angle de frottement, la cohésion..) sur le comportement mécanique du sol réel. L'essai biaxial de révolution souvent utilisé dans tous les laboratoires de mécanique des sols, consiste à réaliser une compression/traction axiale sur un échantillon cylindrique de sol (couvert d'une membrane rigide ou flexible), confiné latéralement dans une cellule par de l'eau ou de l'air comprimé. Ceci a comme incidence la création d'un déviateur de contraintes. Un modèle numérique de ce type d'essai a été généré [Yuji Kishino, 2003], [Salot, 2004]. Le dernier auteur a mis en évidence la difficulté de simuler un comportement adéquat de la membrane. Dans le cas de la simulation d'une membrane souple ayant des propriétés élastiques faibles, la perte des liens entre les éléments géométriques composant cette membrane permet aux éléments de l'échantillon numérique de s'échapper du secteur confiné. Par contre un modèle de membrane trop rigide ne permet pas la transmission correcte du confinement, d'où la difficulté de la localisation de la bande de cisaillement. En outre, parmi les limitations de l'essai biaxial de révolution nous trouvons l'impossibilité de contrôler indépendamment la contrainte principale intermédiaire σ_2 et la contrainte principale mineure σ_3 , ce qui rend difficile à analyser les modèles les plus sophistiqués.

Vu la nécessité d'appliquer des chemins de sollicitations plus spécifiques, l'essai biaxial de révolution a subi de nombreuses modifications. L'essai triaxial « vrai », de dimension trois, consiste à solliciter une éprouvette cubique ou parallélépipédique de sol selon les trois directions de l'espace par des plateaux rigides ou souples qui l'entourent. Trois configurations sont rencontrées :

- Des essais à interfaces rigides, où le chargement se fait par l'intermédiaire de six plateaux rigides, permettant une bonne maîtrise des déplacements au niveau des frontières de l'éprouvette d'où une meilleure uniformité et estimation du champ de déformations,
- Des essais à interfaces souples où les sollicitations sont, dans le cas général, réalisées à partir d'une enceinte de confinement à paroi souple ou par l'intermédiaire de coussins (d'air ou d'eau) à pression contrôlable, permettant l'assurance d'une bonne uniformité du champ de contraintes,
- Des essais mixtes à interfaces rigides et souples, qui cumulent les avantages et les possibilités des deux précédentes configurations.

Les essais biaxiaux sont un cas particulier des vrais triaxiaux, dont deux interfaces rigides et opposées sont fixes. Ces essais créent des états de déformation plane simulant par exemple, le comportement d'un sol derrière un ouvrage de soutènement.

L'essai triaxial simulé appartient à la première catégorie. Celui-ci est plus facile à modéliser que l'essai biaxial de révolution ou l'essai triaxial vrai à interfaces souples ou mixtes. Les parois rigides, et l'application du déviateur par asservissement peuvent être facilement représentées numériquement (Figure 3.9). Ce choix a été fait par souci de simplicité et pour conserver un état de déformation aussi homogène que possible. La recherche bibliographique a montré que plusieurs modèles similaires ont été réalisés pour étudier le comportement du sol à la rupture [Calvetti *et al.*, 2003], [Sibille *et al.*, 2005], [Plassiard,

2007], [Belheine *et al.*, 2008]. Les points communs de ces modèles sont : Les conditions aux limites sont de type : paroi rigide, plane et sans friction conformément au cas expérimental, les éléments composant l'échantillon numérique sont non pesants. L'effet de gravité est supposé négligeable. Le contrôle s'effectue, de manière générale, en imposant sur une partie de la frontière des conditions cinématiques (en vitesse de déplacement ou en déformation) et sur la partie complémentaire des conditions en force ou en contrainte.

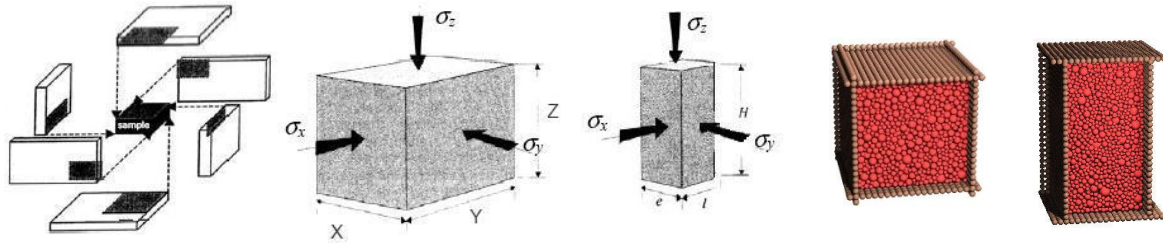


Figure 3. 8. L'essai triaxial vrai (éprouvette cubique ou parallélépipède) et sa modélisation tridimensionnelle (une paroi n'apparaît pas pour pouvoir visualiser l'échantillon numérique composé de 10 000 éléments sphérique).

3.4. Caractérisation mécanique d'un sol sous sollicitations triaxiales

Nous ne détaillerons pas le comportement rhéologique précis du matériau étudié dans cette section. Nous donnons simplement les aspects de l'expérimentation utilisée par les mécaniciens des sols que la simulation numérique doit reproduire.

Beaucoup d'expériences ont été réalisées sur les matériaux granulaires afin de préciser le comportement lorsque l'échantillon est soumis à des sollicitations triaxiales. Deux comportements peuvent être différenciés en fonction de la densité initiale : sable lâche et sable dense. Les réponses mécaniques types obtenues au terme d'un essai biaxial de révolution sur des échantillons initialement lâches et denses sont présentées sur la Figure 3.10. Pour le matériau lâche on observe une montée progressive de la contrainte jusqu'à une valeur de palier pour des déformations relativement importantes. Simultanément, le sol se densifie donc son volume diminue. Pour le matériau dense, après une période de contractance, le matériau se dilate fortement, la courbe contrainte –déformation présente alors un pic. Elle décroît ensuite pour atteindre un plateau, tandis que la déformation volumique sature à une valeur asymptotique. Pour les deux échantillons dense et lâche, la résistance passe par une valeur maximale avant de se stabiliser à une valeur qualifiée de résiduelle. On retrouve donc la notion d'état critique : état limite atteint par le matériau, indépendamment de son état initial, pour une sollicitation monotone produisant des déformations assez grandes, et caractérisé par la poursuite de la déformation plastique sans changement de volume [Wood, 1990].

La Figure 3.11 résume les principaux paramètres utilisés dans cette étude pour caractériser les courbes contraintes – déformation que la simulation numérique doit reproduire pour être jugée représentative ou non. Les paramètres E_0 et ν caractérisent la pente initiale des

courbes de contrainte et de déformation volumique qui correspond au régime $\varepsilon_a = 1\%$ dit régime pseudo-élastique. Il faut se placer dans la gamme de très faibles déformations pour que la pente $dq/d\varepsilon_a$ se rapproche du module de Young E_0 , et la pente $d\varepsilon_v/d\varepsilon_a$ de la quantité $(1-\nu)$ en 2D. La limite élastique correspond à l'état caractéristique, état de contrainte déviateur supportable par le matériau. La valeur maximale atteinte par le déviateur est nommée q_{pic} . A cet état sont associés un angle de frottement et une cohésion. La valeur du palier pour les grandes déformations ou les caractéristiques du matériau n'évoluent plus est nommée q_{res} . Cette valeur dite résiduelle caractérise l'état critique. On lui associe un angle de frottement interne résiduel et une variation volumique résiduelle. La partie quasi linéaire de la phase de dilatance est caractérisée par un angle de dilatance défini par l'équation 3.1 [Bolton, 1986].

$$\left(\frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_a}\right)_{\max} = \frac{2 \sin \psi}{1 - \sin \psi} \tag{3.1}$$

La résistance au cisaillement est aussi caractérisée par un angle de frottement interne qui est défini par l'équation (3.2)

$$\sin \varphi = \frac{q}{q + 2 \cdot \sigma_3} \tag{3.2}$$

En mécanique des sols, on s'intéresse généralement aux valeurs de φ_{pic} et φ_{res} . De même, on détermine ψ_{pic} , sachant que la valeur de ψ_{res} est nulle (ce qui correspond à un écoulement plastique sans changement de volume).

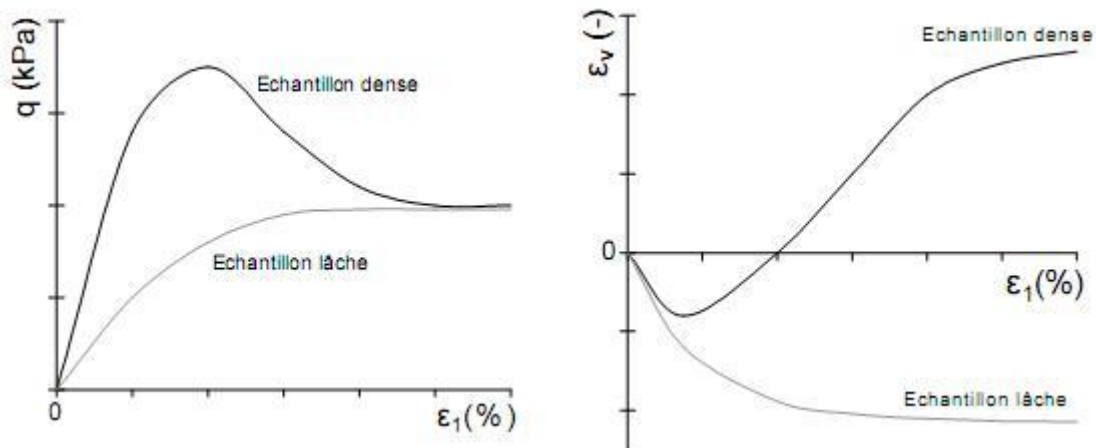


Figure 3. 9. Les réponses mécaniques type obtenues pour des essais biaxiaux de révolution. Contrainte-déformation (à gauche) et déformation volumique-axiale (à droite).

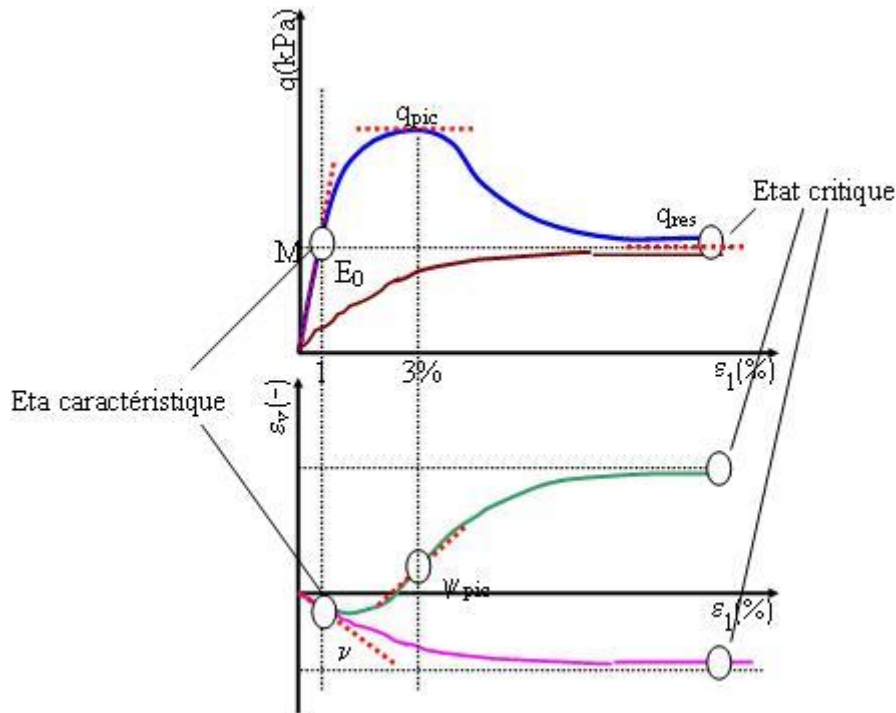


Figure 3. 10. Les paramètres caractérisant les courbes contrainte-déformation axiale et déformation volumique-déformation axiale.

3.5. Modélisation numérique d'un milieu granulaire et simulation d'essais triaxiaux véritables

3.5.1. Généralité

La volonté d'adopter une approche discrète dans la modélisation des milieux granulaires est due au fait que leur comportement à l'échelle macroscopique résulte des interactions à l'échelle des grains. En particulier, l'étude des mécanismes de rupture locale responsable de l'apparition de la bande de cisaillement d'un essai triaxial et les mécanismes d'instabilité d'une pente naturelle au repos vont nous conduire à nous intéresser à l'échelle locale des grains. Dès lors, la difficulté d'une approche expérimentale est évidente. Si l'utilisation des techniques d'imagerie PIV (Particle Image Velocimetry), des techniques de réfraction laser ou l'analyse de la réflexion lumineuse sur les particules permettent de déterminer les champs de vitesse, les champs de rotations et la trajectoire des particules dans le cas d'un milieu granulaire 2D en écoulement, leur utilisation deviennent beaucoup plus délicate en géométrie 3D, ou dans le cas d'évolution quasi statique. Elles ne permettent pas des mesures locales, d'où la connaissance du réseau de force de contact s'avère nécessaire. Cependant, la simulation numérique a de nombreux avantages par rapport aux essais réels :

- On connaît à tout moment l'état du système. Elle donne accès aux variables locales, soit les coordonnées spatiales, les composantes de la vitesse de chaque particule et comment elles évoluent au cours du temps, et les composantes des forces de contacts. On peut observer des choses impossibles à voir en pratique. Elle nous permis de mieux comprendre l'évolution de l'état interne du milieu étudié soumis à une sollicitation.

- On peut faire plusieurs fois un essai avec strictement les mêmes conditions initiales. On peut même contrôler les caractéristiques des contacts qui, dans l'expérience sont très sensibles aux conditions extérieures, ainsi que les conditions de l'expérience (frottement au niveau des parois).
- Une fois le modèle près, on peut faire une multitude d'essais à peu de frais.

Après une discussion sur les intérêts que puisse porter la simulation numérique d'un milieu granulaire basée sur une approche discrète, on s'intéresse à la simulation d'essais expérimentaux. Ces expérimentations numériques présentent des difficultés (la définition d'une loi de contact réaliste) et cela pour les raisons suivantes:

- La puissance de calcul ne permet pas de reproduire un échantillon avec autant de grains qu'il n'en possède en réalité. Il s'agit de déterminer un nombre et un volume d'éléments dont le comportement soit représentatif. Un VER (volume élémentaire représentatif) constitué de particules bidimensionnelles ou tridimensionnelles peut être défini. Différents chemins de sollicitation, par exemple similaires à ceux développés dans les essais classiques de laboratoire peuvent être appliqués sur ce VER.
- La mise en place des éléments s'avère complexe.
- Les paramètres du modèle doivent être déterminés à partir des résultats expérimentaux.

3.5.2. Séparation d'échelle et choix d'un Volume Élémentaire Représentatif

La résolution d'un problème impliquant un milieu formé de grains, par une approche de type mécanique des milieux discrets, n'est valable que dans la mesure où le volume concerné est nettement supérieur au volume représentatif (volume minimale au-delà duquel les propriétés physiques et mécaniques de la structure granulaire ne dépendent plus de l'échelle d'observation) et par conséquent, à la dimension caractéristique des grains. Le point que l'on vient d'évoquer est la notion de séparation d'échelles. Pour chaque matériau et chaque type d'essai, il faut définir l'échelle à laquelle la loi de comportement est pertinente pour décrire les propriétés recherchées. Autrement dit, le milieu équivalent sera représentatif du milieu réel finement hétérogène. Les champs de déplacement et les efforts dans le milieu réel et dans le milieu équivalent doivent être proches. On détermine ainsi un volume contenant suffisamment d'hétérogénéités dans lequel on suppose que les champs des contraintes et des déformations peuvent être assimilés à des champs moyens homogènes. Ce volume, sur lequel on effectue des essais expérimentaux, numériques ou analytiques constitue un volume élémentaire représentatif (VER). Le VER doit donc être suffisamment grand pour être représentatif de l'hétérogénéité du milieu, tout en étant aussi petit que possible pour limiter le temps de calcul [Kanit *et al.*, 2003] et que la grandeur ainsi définie conserve un caractère local (voir Figure 3.12). Ce VER est élémentaire parce qu'il est considéré comme un point matériel du milieu équivalent [Cambou, 2001] et représentatif parce qu'il représente bien le comportement intrinsèque du matériau au niveau macroscopique. Pour [Cambou, 2001] à l'échelle du VER, le véritable test de séparation d'échelle est de considérer que la loi de comportement obtenue soit indépendante de la sollicitation homogène appliquée et que le comportement macroscopique soit unique. Le concept du VER reste un sujet de grande discussion. Les travaux de Toth [Toth, 1967] ont prouvé que la valeur du paramètre physique fixé cesse de fluctuer à partir de différents volumes tout en indiquant que le VER peut exister à différentes échelles d'observation. Le travail expérimental de [Calvetti *et al.*, 1997] sur des rouleaux de Schneebeli a montré qu'au-delà d'une certaine valeur de surface la composante

de la déformation homogénéisée converge vers la valeur mesurée aux frontières de l'échantillon et n'est plus influencée par la surface considérée et que cette surface est la surface limite du VER. Elle est estimée à dix fois le diamètre du plus gros rouleau. Chareyre [Chareyre, 2003] a montré à partir des résultats des simulations numériques des essais biaxiaux, que le comportement macroscopique varie en fonction du nombre d'éléments du modèle. La dispersion des résultats est d'autant plus grande que le nombre d'éléments est petit. Il trouve, pour des échantillons de 4000 grains, un écart type de 1 degré sur l'angle de frottement calculé, ce qu'il juge satisfaisant pour un comportement macroscopique unique. Long [Long et al., 1982] mettent en valeur les paramètres géométriques (densité de fracturation, loi de distribution des fractures, carte d'orientation et loi de distribution des fractures) qui ont un impact direct sur le choix du VER. En outre, il montre que la taille du VER doit être plus grande que la longueur de corrélation des fractures afin de fournir une bonne statistique de la population des fissures sans aucune dépendance des propriétés physiques d'une des fractures appartenant à la population. En général, nous pouvons dire qu'un milieu hétérogène de dimension donnée se comporte comme un système homogène équivalent quand la variation du paramètre physique choisi devient faible voir insignifiante.

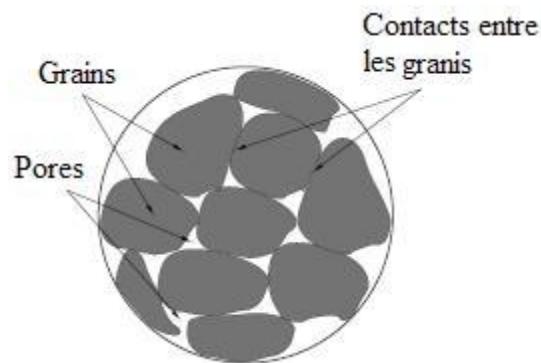


Figure 3. 11. Représentation d'un VER dans un milieu granulaire.

3.5.3. Mise en place (protocole de préparation) de l'assemblage granulaire

Dans le cas des milieux granulaires, la distribution granulométrique est généralement décrite par une courbe granulométrique caractérisée par des coefficients d'uniformité et de courbure [Mitchell, 2005]. L'influence de ces coefficients sur le comportement mécanique a fait l'objet d'un grand nombre d'études qui restent souvent basées sur des considérations empiriques. Enfin, les milieux fortement polydisperses restent difficilement accessibles aux simulations numériques du fait de la nécessité d'utiliser un grand nombre d'éléments pour assurer la représentativité de l'échantillon. Pour la simulation comme pour l'expérience, on doit donc se préoccuper de l'influence du processus d'assemblage. L'état initial du milieu granulaire, en particulier sa densité initiale, joue un rôle prépondérant dans l'évolution de son comportement. Le caractère non répétitif de la compacité du milieu, obtenu à la mise en place des échantillons, ne facilite pas la compréhension du comportement du milieu granulaire. Numériquement, on doit fabriquer un assemblage granulaire susceptible de reproduire, qualitativement les propriétés d'homogénéité (ou l'hétérogénéité), l'isotropie (on

l'anisotropie) et le nombre de coordinance et quantitativement les propriétés physiques ou mécaniques du milieu réel. La mise en œuvre de ces assemblages est contrôlée par différentes techniques. On peut distinguer les méthodes géométriques et les méthodes dites dynamiques.

- Les méthodes géométriques dites constructives utilisent des algorithmes exclusivement basés sur la géométrie des éléments. La méthode implémentée dans SDEC [Donzé *et al.*, 2001] utilisée par [Hentz, 2003], [Plassiard *et al.*, 2004], [Belheine *et al.*, 2005] consiste à utiliser un algorithme géométrique proposé par Jodrey & Tory [Jodrey et Tory, 1985]. Cette méthode permet d'obtenir des assemblages aléatoires ayant les qualités souhaitées (milieu isotrope et homogène) en un minimum de temps, mais elle ne contrôle pas la porosité du milieu. Elles peuvent être adaptées pour la simulation numérique des essais triaxiaux, et la porosité du milieu sera contrôlée par un rapprochement des parois [Sibille, 2006]. Ce déplacement des parois n'apparaît pas applicable à l'échelle d'un modèle d'ouvrage ayant une forme géométrique un peu particulière, en plus ce rapprochement ne fait compacter en priorité que les grains proches de la périphérie. Dans ce cas, la porosité des éprouvettes de caractérisation n'est alors pas forcément égale à celle de l'ouvrage à modéliser. Il est d'ailleurs difficile d'agir sur la porosité finale de l'ouvrage ce qui nous oblige à modifier sa taille. Une solution n'est pas souhaitable par le modélisateur en plus, les propriétés micromécaniques obtenus lors des essais triaxiaux numériques ne sont plus représentatives pour la simulation de l'ouvrage. Pour résoudre le problème, on a recours à d'autres méthodes de génération qui s'adaptent mieux à des volumes et des formes géométriques particulières.

- Les méthodes dynamiques sont basées sur le réarrangement du milieu granulaire par déplacement et/ou grossissement des éléments. La méthode de dépôt par gravité ([Calvetti *et al.*, 1997] et [Nouguier-lehon *et al.*, 2003] pour des polygones allongés en 2D) consiste à faire tomber les grains sous l'effet de la pesanteur dans une boîte. Elle constitue en elle-même une simulation numérique nécessitant un calcul dynamique géré par l'algorithme de la DEM. Cette méthode génère des assemblages anisotropes et ne permet pas de contrôler la porosité du milieu. Cette anisotropie a été également observée par Moreau [Moreau, 2000] par une simulation numérique de dépôt sous gravité des grains polygonaux 2D. Pour faire disparaître cette anisotropie Combe [Combe, 2002] a proposé de réaliser des mélanges aléatoires en l'absence de gravité et de frottement. La gravité est ensuite activée pour le processus de sédimentation. Certains auteurs [Mahboubi, 1996] et [Thornon et Antony, 2000] proposent de positionner initialement les grains puis de réduire la cellule dans laquelle est enclos l'échantillon, d'autres proposent le grossissement des particules dans un récipient fixe (volume constant) [Chareyre, 2003], [Plassiard, 2007]. Ces méthodes sont particulièrement adaptées à des volumes et des formes géométriques quelconques et permettent de contrôler la porosité et la distribution de tailles des éléments. Chareyre [Chareyre, 2003] a développé une méthode en 2D appelée "Expansion de Rayon et Diminution de Frottement" qui permet de gérer la porosité en jouant sur l'angle de frottement local. Plus celui-ci est faible plus l'assemblage sera dense. On trouve aussi, la méthode dite de grossissement dynamique développée par [Potyondy *et al.*, 1996], méthode sur laquelle on se base pour la mise en œuvre de nos assemblages numériques utilisés dans cette thèse. L'expérience a montré que cette méthode induit une plus petite anisotropie géométrique et une meilleure homogénéité dans le modèle. Cette méthode s'adapte mieux aux formes géométriques quelconques et permet l'obtention de la porosité choisie par l'utilisateur. La procédure de création de l'assemblage aléatoire est décrite ci-dessous:

- On positionne initialement les grains selon un réseau cristallin de type cubique à faces centrées (CFC), dans un espace délimité par des parois rigides et suivant la

forme géométrique souhaitée, de telle sorte qu'ils n'aient aucun contact entre eux ni avec les parois.

- Ensuite on réduit le rayon des éléments dès la première itération du processus de grossissement, d'un même facteur fixé par le modélisateur (on choisit généralement 10).
- la troisième étape consiste à multiplier les rayons par un facteur compris dans l'intervalle [0.5 ; 2], c'est bien le cas des simulations effectuées.
- Ce facteur est fixé selon la loi de distribution aléatoire de Weibull. On établit un rayon d'élément r_w . Sa valeur maximale et minimale sont respectivement r_{\max} et r_{\min} . α et γ sont les paramètres qui gèrent la distribution et $rand_{[0;1]}$ est un nombre aléatoire compris dans l'intervalle [0 ; 1]. On obtient d'après ce tirage aléatoire un nuage de rayon, donné par l'équation suivante :

$$r_w = r_{\min} + (r_{\max} - r_{\min}) \left(-\alpha \ln(1 - rand_{[0;1]}) \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad 3.3$$

- Ensuite à chaque pas de temps les éléments sont ainsi grossis par multiplication de leur rayon d'un facteur légèrement supérieur à 1 (entre 1.00001 et 1.00005) jusqu'à l'obtention de la porosité souhaitée.
- Le cycle de calcul se répète jusqu'à l'obtention d'un état stable de l'assemblage granulaire caractérisé par une énergie cinétique faible voire négligeable qui tend vers zéro. Pendant ce processus de stabilisation, les éléments entrent en contact et se réorganisent sous l'effet des lois élastiques.

Ce processus de préparation des assemblages est créé en absence de gravité et sans frottement inter-granulaire. Le milieu ainsi obtenu est isotrope et homogène.

3.5.4. Validité du modèle numérique généré

La mise en place de l'assemblage numérique est une étape clef de la MED, puisque le comportement macroscopique dépend sans nul doute de l'échantillon généré, problème qui n'a pas fait l'objet d'un grand nombre d'études et qui est loin d'être résolu. La question qui se pose est : Quels sont les aspects que ce dernier doit satisfaire avant d'être utilisé pour une simulation? La réponse à cette question est évidemment très complexe, et concerne la forme et la taille des éléments, ainsi que la structure elle-même de l'assemblage. Dans ce travail de thèse, les aspects tels que la porosité voulue, la forme, la taille des éléments et la distribution de tailles et l'orientation des contacts sont des éléments pris en considération pour juger la validité de génération de l'échantillon. Pour des raisons de simplification, la forme géométrique de l'élément discret est choisie sphérique. Bien que la distribution de taille ne soit pas représentée dans le modèle numérique (distribution réduite), la porosité est choisie égale à la porosité réelle. La procédure de grossissement provoque une réorganisation des éléments. L'énergie cinétique du système qui a tendance à augmenter vers une valeur maximale, doit tendre vers une valeur faible voir nulle, ce qui signifie qu'une configuration stable (un état d'équilibre) a été trouvée. La distribution des orientations des contacts doit

tendre vers une répartition uniforme dans l'espace. Un critère supplémentaire de validité de l'échantillon porte sur l'interpénétration des éléments. En l'absence de forces extérieures telle que la gravité, le chevauchement entre les éléments doit rester faible pour ne pas influencer la réponse du modèle et notamment sur la variation volumique. Ce critère est évalué comme étant la moyenne du rapport entre la distance de chevauchement et la somme des rayons des éléments en contact. Il est jugé acceptable pour une valeur inférieure ou égale à 1%.

3.5.5. Condition de convergence des simulations

3.5.5.1. Choix du pas de temps

Les équations traduisant le mouvement dans les milieux granulaires sont difficilement résolues par des méthodes analytiques surtout lorsque la géométrie du problème est complexe et lorsque le comportement est non-linéaire. La formulation dynamique est basée sur des équations différentielles, et il est nécessaire d'intégrer par rapport au temps ces équations du second ordre. Généralement la méthode utilisée pour résoudre un tel système d'équations suit un schéma d'intégration pas à pas. Il existe plusieurs schémas d'intégration dans le temps. Dans le cas des milieux granulaires ou les ondes sont susceptibles de se propager avec une forte réorganisation des contacts, un schéma explicite est préférable. De plus, dans les cas où la matrice de masse est diagonale, son inversion est triviale, le système d'équation est découplé, et un schéma d'intégration explicite est donc particulièrement adapté. Pour ces raisons, la plupart des codes MED utilisent une version explicite. Le fonctionnement des schémas explicites nécessite le choix d'un pas de temps critique pour assurer la convergence vers une solution stable. Le pas de temps doit être choisi comme étant le plus petit des temps caractéristiques du système. Dans le cas d'un assemblage de grains soumis chacun à plusieurs interactions, la recherche des pulsations propres (périodes $T = 2\pi\sqrt{m/k}$) reste prohibitif du point de vue de leur temps de calcul. De considérer parmi les éléments celui de plus petite masse et parmi les interactions celle de la plus grande rigidité donnerait un pas de temps trop petit, même ce choix est extrêmement restrictif. Chaque code MED propose une idée pour déterminer le pas de temps critique. Le SDEC procède de la manière suivante :

- Pour chaque cycle de calcul, pour chaque élément et pour chacune des directions i de l'espace on détermine la raideur équivalente $(k_{eq}^{trans})_i$ définie comme étant la contribution des rigidités normale k_N et tangentielle k_S . On calcule le pas de temps en translation correspondant à chacune de ces raideurs $\Delta t_{crit}^{trans} = \sqrt{\frac{m}{(k_{eq}^{trans})_i}}$. m est la masse de l'élément considéré.
- Et en rotation le pas de temps critique est défini par la grandeur $\Delta t_{crit}^{rot} = \sqrt{\frac{I}{(k_r)_i}}$. I correspond au moment d'inertie de l'élément et k_r à la rigidité en roulement
- Le pas de temps critique Δt_{crit} est choisi parmi tous les Δt_{crit}^{trans} et Δt_{crit}^{rot} de tous les grains comme le plus petit.
- On applique la pondération S . Le choix définitif de S est donc le fruit d'un compromis entre la précision des résultats obtenus et les temps de calcul. En général, il est de l'ordre de 0.1. Les simulations des essais triaxiaux entreprises ici sont de type quasi-

statique (sollicitations suffisamment lentes), une valeur de 0.8 semble suffisante pour assurer une convergence numérique des calculs.

3.5.5.2. Amortissement

Lors d'un incrément de charge, l'effet des forces non équilibré provoque des mouvements des grains dans le milieu. Si les interactions sont purement élastiques, où du moins les grains sollicités d'une manière élastique, le frottement ne dissipe pas d'énergie et la perturbation reste piégée indéfiniment. Ceci ne facilite pas d'atteindre un état d'équilibre statique dans le milieu. Pour dissiper efficacement de l'énergie, afin d'approcher rapidement des états d'équilibre, on a intérêt de prendre en compte l'amortissement. Généralement les codes basés sur la MED permettent l'introduction de l'amortissement au niveau des grains. Le SDEC utilise une version d'amortissement local en effort, ou amortissement dynamique dont le principe est décrit par Cundall [Cundall, 1987]. Ce type d'amortissement introduit de la dissipation d'énergie au niveau de chaque élément indépendamment les uns des autres. Ce n'est pas un paramètre du modèle physique, il est donc indispensable qu'il n'influence pas la réponse du modèle. Pratiquement, on ajoute à chaque élément, avant l'application du principe fondamental de la dynamique, une force d'amortissement F^a pour le mouvement de translation et un moment d'amortissement M^a pour le mouvement de rotation de la forme :

$$\begin{aligned} F_i^a &= -\lambda^a |F^i| \text{sign}(\dot{x}_i), \\ M_i^a &= -\lambda^a |M_i| \text{sign}(\dot{\omega}_i) \quad \text{avec } \lambda^a \in [0,1] \end{aligned} \quad 3.4$$

Le coefficient d'amortissement λ^a est adimensionnel. La force d'amortissement est proportionnelle à la force résultante sur le grain. Le signe de la force d'amortissement est choisi de façon à atténuer les effets dynamiques et confère à l'évolution un caractère quasi statique. Si la résultante des efforts sur une particule s'oppose au mouvement, elle est multipliée par $(1 + \lambda^a)$, mais si la résultante est motrice, elle est multipliée par $(1 - \lambda^a)$.

Le choix de l'amortissement dépend du résultat que l'on désire obtenir. Par exemple, si on étudie la déformation lente d'un échantillon en recherchant un état d'équilibre, on peut choisir une valeur de $\lambda^a = 0.5$ et si l'on souhaite assurer une stabilité numérique pendant la phase du déviateur, on pourra choisir $\lambda^a = 0.1$.

3.5.6. Quelques idées sur le comportement micromécanique et incrémental des milieux granulaires

3.5.6.1. La distribution statistique des forces de contact

Parmi les propriétés remarquables des milieux granulaires, la transmission des efforts a suscité un intérêt tout particulier durant la dernière décennie. Des études expérimentales [Makse et al., 2000], [Dantu, 1957] et des simulations numériques [Luding, 1997], [Radjai et al., 96] ont montré que les forces de contact présentent une forte inhomogénéité. La Figure 3.13 présente le réseau des forces normales aux contacts obtenus par simulation numérique

[Radjai et al., 1996]. Une étude statistique menée par [Radjai et al., 1996] sur des assemblages de disques polydispersés montre que la fonction de densité de probabilité (pdf) peut être décomposée en deux parties : pour les forces supérieures à la force moyenne, le pdf a une distribution exponentielle décroissante, tandis que les forces inférieures à la moyenne, le pdf a une distribution en loi de puissance.

La relation (3.5) donne les densités de probabilité p_f des forces de contact proposées par [Radjai et al., 1996].

$$p_f \propto \begin{cases} \left[\frac{f}{\langle f \rangle} \right]^\alpha & \text{Pour } f < \langle f \rangle \\ \exp \left[\beta \cdot \left(1 - \frac{f}{\langle f \rangle} \right) \right] & \text{pour } f > \langle f \rangle \end{cases} \quad 3.5$$

f étant la force à chaque contact, $\langle f \rangle$ est la moyenne des forces de contact.

Ils ont observé que les distributions statistiques des forces normales étaient indépendantes de la taille du système et que le nombre de forces tangentielles faibles et fortes suit la même statistique avec des coefficients α et β sensiblement différents. De nombreuses études montrent que $\alpha = 0.0$ et $\beta = 1.4$. Distribution valable dans les cas 2D et 3D. En outre, il a été montré que la divergence du nombre de contacts faibles en une loi de puissance est en partie liée à la microstructure du système. Un comportement lié à l'effet d'arches qui constitue un mécanisme de ramification progressive des grandes forces vers des forces de plus en plus faibles. En ce qui concerne les contacts appartenant à la phase forte, leur distribution exponentielle résulte de la contrainte d'équilibre de chaque particule, conjuguée au désordre géométrique intrinsèque d'un milieu granulaire [Cambeau, 2001]. Ces deux réseaux faible et fort ont des géométries différentes et contribuent de manière complémentaire aux propriétés mécaniques du milieu [Radjai et al., 1998].

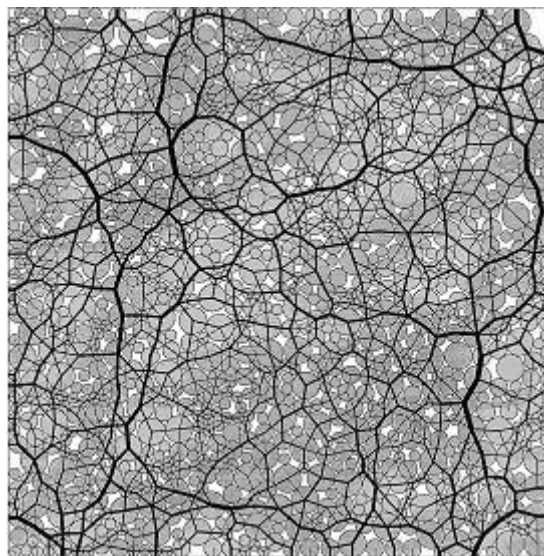


Figure 3. 12. Réseau des forces de contact dans un assemblage bidimensionnel. La largeur des traits est proportionnelle à l'intensité de la force [Radjai, 1996].

3.5.6.2. Caractérisation du comportement incrémental par une analyse directionnelle à l'échelle macroscopique

Tout au long des dernières décennies, des études expérimentales [Tatsuoka et Ishihara, 1974], [Lam et Tatsuoka, 1988], [Anandarajah, 1995], [Wan, 2004] comme numériques [Alonso-Marroquin, 2005], [Calvetti et al., 2003], [Bardet, 1994], [Kishino, 2003] ont décrit le comportement incrémental d'un milieu granulaire réel et/ou idéalisé. Dans cet objectif ils ont étudié le caractère directionnel de la réponse mécanique c.-à-d sa dépendance de la direction et de l'histoire du chargement. Plus généralement, il s'avère que la description du comportement du sol en fonction de la direction du chargement est non seulement utile pour la modélisation de la réponse des ouvrages géotechniques soumise à des sollicitations cycliques ou bien pour l'analyse des phénomènes de localisation, mais également est un ingrédient clef pour l'analyse des ouvrages géotechniques où les différentes zones du sol subissent des chemins de contraintes largement différents. Par exemple le cas des fondations profondes et les tunnels. Cela a été démontré dans certaines applications pratiques [Viggiani, 2000], [Whittle, 1993].

Bardet [Bardet, 1994] a montré par des simulations numériques des recherches directionnelles sur des assemblages de grains circulaires que pour un état isotrope vierge, la réponse présente un caractère isotrope linéaire et élastique, par contre pour un état de contrainte anisotrope, le comportement peut être décrit par une loi élastoplastique classique à simple mécanisme (soit deux zones tensorielle) avec une règle d'écoulement non associée. Une description paraît raisonnable pour le comportement des matériaux granulaires. Les études réalisées par [Calvetti et al., 2003] pour des recherches directionnelles dans le plan d'axisymétrie sur des assemblages de grains sphériques confirment le résultat obtenu par Bardet [Bardet, 1994] à condition que l'assemblage n'ait pas subi une histoire de chargement/déchargement. Dans le cas où l'assemblage subit un chemin de chargement/déchargement, des déformations plastiques sont constatées pour toutes les directions de chargement sauf celles qui pourraient être interpréter comme étant des directions de chargement neutres. D'après l'auteur, il est toujours possible d'appliquer une loi élastoplastique (simple mécanisme) à deux zones tensorielles et que chacune de ces zones serait caractérisé par une direction distincte de l'écoulement plastique.

Kishino [Kishino, 2003] a effectué des recherches directionnelles semblables sur un assemblage à grains sphériques mais dans le plan déviatoire (hors plan d'axisymétrie). L'auteur indique que la direction de l'incrément de déformation plastique est dépendante de l'incrément de contrainte et que le comportement incrémentale dans ces conditions est entièrement non linéaire. Dans ce cas, une description appropriée du comportement incrémentale exige une modification plus avancée de la théorie de plasticité ou des approches constitutives alternatives comme la théorie de l'hypoplasticité.

Du côté expérimental, quelques contributions ont été fournies par [Anandarajah, 1995] sur le sable d'Ottawa. L'auteur a effectué des recherches directionnelles dans le plan d'axisymétrie. Il semble que pour un état isotrope vierge, une réponse isotrope linéaire et élastique a été trouvée. Pour un état de contrainte anisotrope, il a montré qu'il existe une direction unique pour l'incrément de déformations plastique indépendamment du chargement directionnel ce qui confirme l'applicabilité de la théorie de plasticité avec une règle d'écoulement régulière non-associée.

Malgré sa simplicité, la DEM est remarquablement efficace pour reproduire qualitativement le comportement macroscopique complexe tel que celui observé par les sables sous l'effet de différents chemins de sollicitations.

3.5.7. Simulation d'essais triaxiaux véritables

3.5.7.1. Création de l'échantillon numérique et procédure de génération

L'éprouvette considérée au cours de ce travail est composée de 10 000 éléments environ (Figure 3.14). Bien entendu, le nombre de grains numériques ne peut être aussi élevé que dans un échantillon réel, et la question qui se pose de savoir comme dans toute expérience de mécanique des sols est de savoir ce qu'est un échantillon représentatif.

Dans la pratique, on fait le choix d'un échantillon abordable en fonction des moyens de calcul et des disponibilités en temps (1000, 5000, 10 000, 30 000, etc. grains) et l'on espère que les informations fournies par cet échantillon donnent des indications pertinentes sur les mécanismes et le comportement qualitatif des grands systèmes.

Dans nos simulations numériques, ayant pour but d'étudier le comportement macroscopique d'un milieu granulaire, on souhaite préparer, un échantillon représentatif des aspects qualitatifs et quantitatifs bien précises. Ces différents aspects sont les propriétés d'homogénéités et d'isotropie géométrique sur le plan qualitatif, et de reproduire au mieux les propriétés physiques ou mécaniques macroscopiques sur le plan quantitatif.

La préparation numérique d'un échantillon tel que celui présenté sur la Figure 3.15, peut se faire de plusieurs manières. Elle a été faite selon la procédure détaillée dans la section 3.5.3. Sur la Figure 3.16 on présente le principe de cette procédure à partir de l'assemblage régulier monodisperse jusqu'on obtient un assemblage irrégulier polydispense avec la porosité souhaitée. Elle permet de contrôler relativement la porosité et la distribution de tailles des éléments. L'évolution de la porosité et du rayon moyen au cours de la phase du grossissement dynamique sont présentés sur la Figure 3.17.

Certains aspects du modèle peuvent être améliorés afin d'optimiser la phase de grossissement. Par exemple afin de stabiliser la coordination pendant la phase où le système cherche un état d'équilibre, on ajoute un peu de frottement local intergranulaire entre les éléments de l'échantillon. Cette procédure de grossissement dynamique présente l'avantage d'être rapide, et elle est effectuée sans force de pesanteur pour assurer l'homogénéité et l'isotropie du processus. Une loi purement élastique est appliquée pour toutes les interactions entre les éléments avec désactivation de la loi moment rotation. Les caractéristiques générales de l'échantillon obtenu et d'autres aspects seront présentés par la suite.

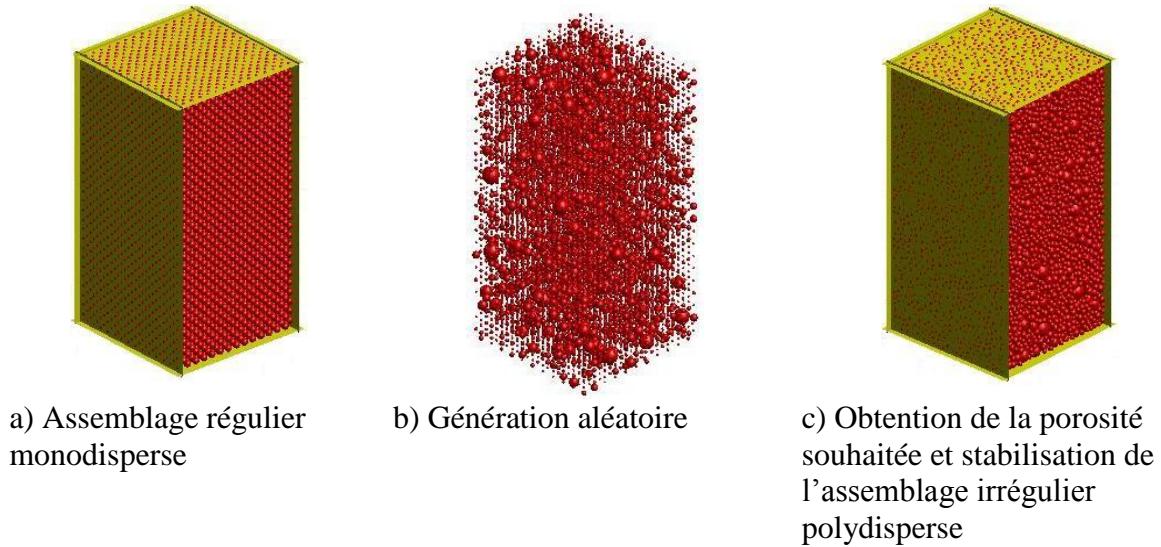


Figure 3. 13. Principe de la procédure de la mise en place de l'échantillon par grossissement dynamique.

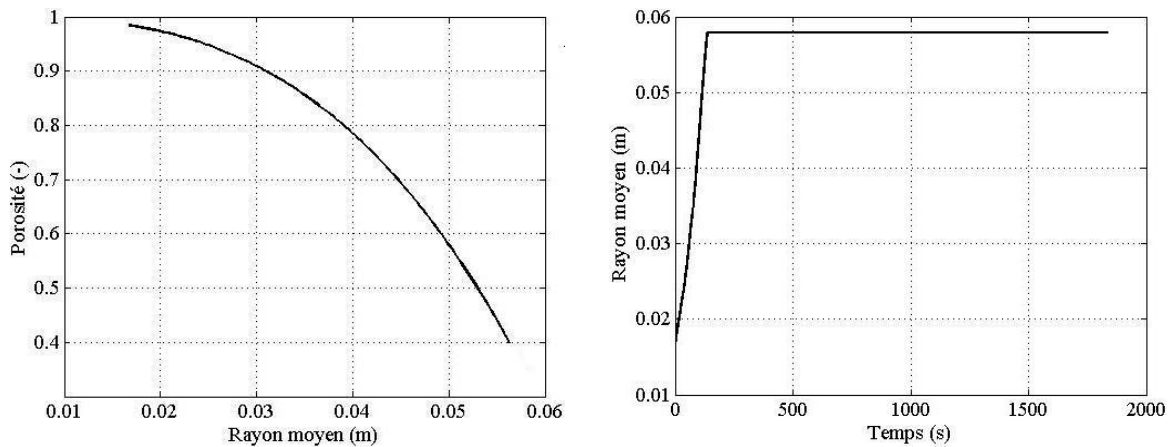


Figure 3. 14. Evolution de la porosité et du rayon moyen au cours de la phase de grossissement dynamique.

3.5.7.2. Caractéristiques des échantillons générés

3.5.7.2.1. Energie cinétique et stabilité de l'assemblage numérique

La méthode de création de l'assemblage numérique, repose sur une procédure de grossissement dynamique par diminution du rayon puis gonflement jusqu'à atteindre leur taille finale. Il est indispensable que l'assemblage trouve un état d'équilibre stable à la fin du processus. La Figure 3.18 schématise l'évolution de l'énergie cinétique au cours du temps en terme d'itération. Elle présente deux paliers et un maximum. Au début de la simulation l'énergie cinétique est nulle, les éléments sont en équilibre ce qui explique l'existence du premier palier. Après, le rayon sera perturbé par une fonction aléatoire de grossissement. Les éléments bougent et se grossissent en même temps jusqu'à ce que la porosité voulue soit

atteinte, le système atteint alors son maximum d'énergie qui correspond à la valeur de la porosité souhaitée. Après les éléments ne se grossissent plus mais plutôt se réorganisent entre eux jusqu' à une position d'équilibre, l'énergie cinétique diminue, jusqu'elle se stabilise au tour d'une valeur très faible voire nulle ce qui explique le deuxième palier. Si l'énergie cinétique à la fin du processus est importante, cela signifie que l'assemblage est instable et que les éléments sont en mouvement perpétuel. Dans ce cas on risque d'avoir l'effet de parois sur l'homogénéité et l'isotropie (la distribution des orientations des normales au contact) de l'échantillon. Et pour dissiper efficacement cette énergie, afin d'approcher rapidement le système à un état d'équilibre, on a intérêt de prendre en compte de l'atténuation en effort.

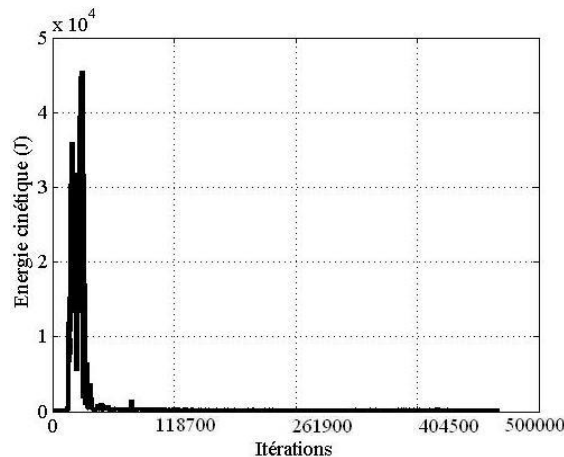


Figure 3. 15. Evolution de l'énergie cinétique du système au cours de la phase du grossissement dynamique.

3.5.7.2.2. *Interpénétration moyenne des sphères*

Au cours de la phase de grossissement, les éléments s'interpénètrent l'un par rapport à l'autre. Une fois la porosité souhaitée est atteinte les éléments se réarrangent tout au long de la phase de relaxation du système. En effet, le chevauchement toléré entre les éléments est moindre que sa valeur initiale en fin de la phase de grossissement.

Néanmoins, un chevauchement trop important pourrait défavorablement influencer la précision des simulations. Dans le cas d'une interpénétration moyenne trop importante, le volume des zones d'interpénétration est comparable au volume total des éléments. Dans ce cas la porosité atteinte lors de la phase de grossissement ne correspond plus à la porosité souhaitée. De plus, la réorganisation des contacts au cours des simulations pourrait changer les mécanismes de mouvement des éléments et par conséquent la déformabilité de l'assemblage granulaire. Pour éviter ce désagrément, nous vérifions systématiquement que l'interpénétration moyenne entre les éléments est faible en fin de grossissement. La valeur tolérée ne présente que quelques pour cent, elle est inférieure au centième de la somme des rayons des éléments composant l'interaction (Figure 3.19).

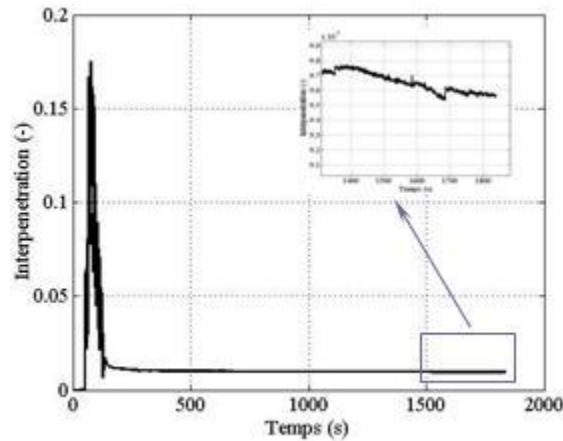


Figure 3. 16. Evolution de l'interpénétration moyenne au cours de la phase de grossissement.

3.5.7.2.3. L'anisotropie géométrique

La préparation de l'échantillon est très importante et demande beaucoup de précautions. Le risque est d'introduire une anisotropie [Bathurst, 1988], [Bathurst, 1990], [Lanier, 1988] et de perturber la simulation. L'anisotropie est donc une caractéristique importante des milieux granulaires qu'il est indispensable de mieux connaître pour améliorer la description des empilements granulaires statiques. Comme le montre les travaux de [Vanel, 1999], le protocole de préparation d'un tas granulaire conique influence l'anisotropie du milieu et illustre bien l'importance de l'histoire du milieu granulaire sur ses propriétés mécaniques finales.

Dans l'étude des milieux granulaires, on distingue fréquemment deux types d'anisotropie, chacune correspondant à une échelle de description du milieu : l'anisotropie de la texture, et l'anisotropie des modules élastiques.

- L'anisotropie de la texture est une caractérisation géométrique qui est obtenue à partir de la distribution angulaire normalisée de l'orientation des normales aux contacts et correspond donc à une description du milieu à l'échelle locale. La dispersion des tailles de particules évite la formation de structure cristalline qui pourrait induire une anisotropie initiale de l'arrangement. Un échantillon correctement mis en place, soumis à un état de contrainte isotrope, doit présenter une bonne isotropie géométrique.
- L'anisotropie des modules élastiques doit permettre de quantifier l'anisotropie qui apparaît dans le comportement élastique d'un matériau et correspond donc à une description du milieu à l'échelle globale. L'échantillon géométriquement isotrope doit présenter aussi une réponse isotrope en terme de déformation. Dans le cas contraire, l'anisotropie géométrique implique une anisotropie mécanique, se traduisant par des déformations inégales selon les axes de sollicitations [Plassiard, 2007].

Dans ce dernier cas de l'anisotropie dans le comportement élastique, nous pouvons distinguer deux composantes :

- **anisotropie initiale**, liée au protocole de préparation de l'échantillon et au champ de contrainte avant le test. C'est cette composante de l'anisotropie qui dépend fortement du protocole de préparation et de la compacité.
- **anisotropie induite**, liée à la manière d'appliquer le chargement ultérieur correspondant au test mécanique car en effet, des travaux expérimentaux montrent clairement que tout chargement non isotrope d'un milieu granulaire rend son comportement élastique fortement anisotrope. Radjai et ses collaborateurs [Radjai *et al.*, 1998] ont montré qu'il existait des directions privilégiées pour forces de contact en fonction de leur intensité. Cette anisotropie des orientations de contact en fonction des intensités des forces intergranulaires est principalement présente lors d'essais avec application d'un déviateur de contrainte.

Afin de mettre en évidence ce phénomène d'anisotropie, nous présentons, sur l'échantillon de la Figure 3.20, une visualisation de la distribution des orientations de contact à la fin du processus selon les trois plans principaux de l'espace, voir Figure 3.21. Elle correspond donc à l'état non sollicité de l'échantillon. Ces histogrammes mettent en évidence une proportion non négligeable de contacts particules-parois dans les directions 0° et $\pm 90^\circ$. Nous constatons que le mode opératoire de l'échantillon n'induit pas d'anisotropie significative. La Figure 3.22 présente la même distribution des orientations mais sans parois. Cette distribution est obtenue en éliminant les contacts proches des parois et on ne considère que les contacts entre les éléments de l'assemblage. Dans ce cas la distribution des orientations des normales au contact ne présente pas des orientations de contact privilégiées dans la direction du mouvement. L'échantillon de référence présente une bonne isotropie géométrique. On constate que l'orientation des contacts à proximité de la frontière de l'assemblage granulaire est influencée par la présence des parois.

Outre que l'échantillon de référence doit être géométriquement isotrope, nous allons vérifier l'anisotropie dans le comportement élastique. L'échantillon est soumis à une sollicitation mécanique isotrope de 100 kPa sur chaque face. Le Tableau 3.1 présente la réponse élastique en terme de déformation selon les trois axes principaux ainsi que les modules élastiques apparents associés. Les déformations principales étant approximativement équivalentes, ce qui donne des modules élastiques apparents selon chaque direction principale approximativement proches. Dans ce cas, on considère que l'échantillon de référence est apte à présenter une isotropie mécanique qui apparaît dans le comportement élastique.

Axe de sollicitation	x	y	z
Déformation (%)	0.140	0.14174	0.14163
Module élastique (MPa)	71.42	70.83	70.60

Tableau 3. 1. Déformation constatées et modules élastiques apparents selon les trois axes principaux après l'application d'une sollicitation mécanique isotrope de 100 kPa

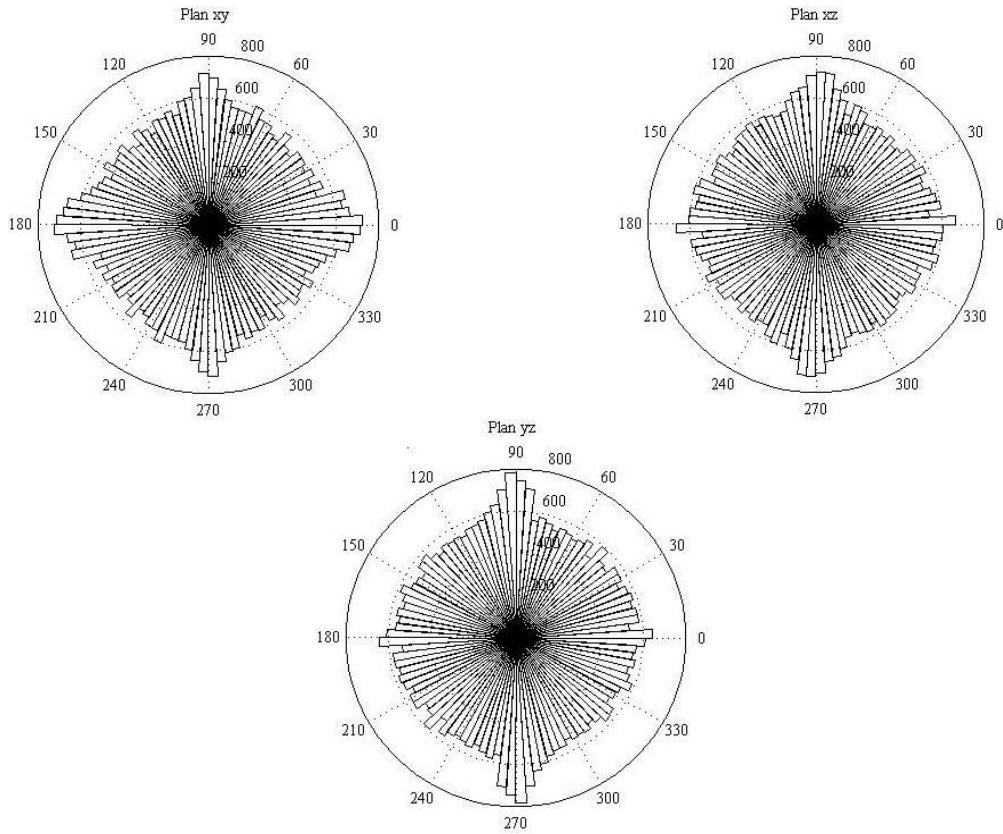


Figure 3. 17. Distribution des orientations de contacts avec effet de parois dans les plans (x-y), (x-z), (y-z).

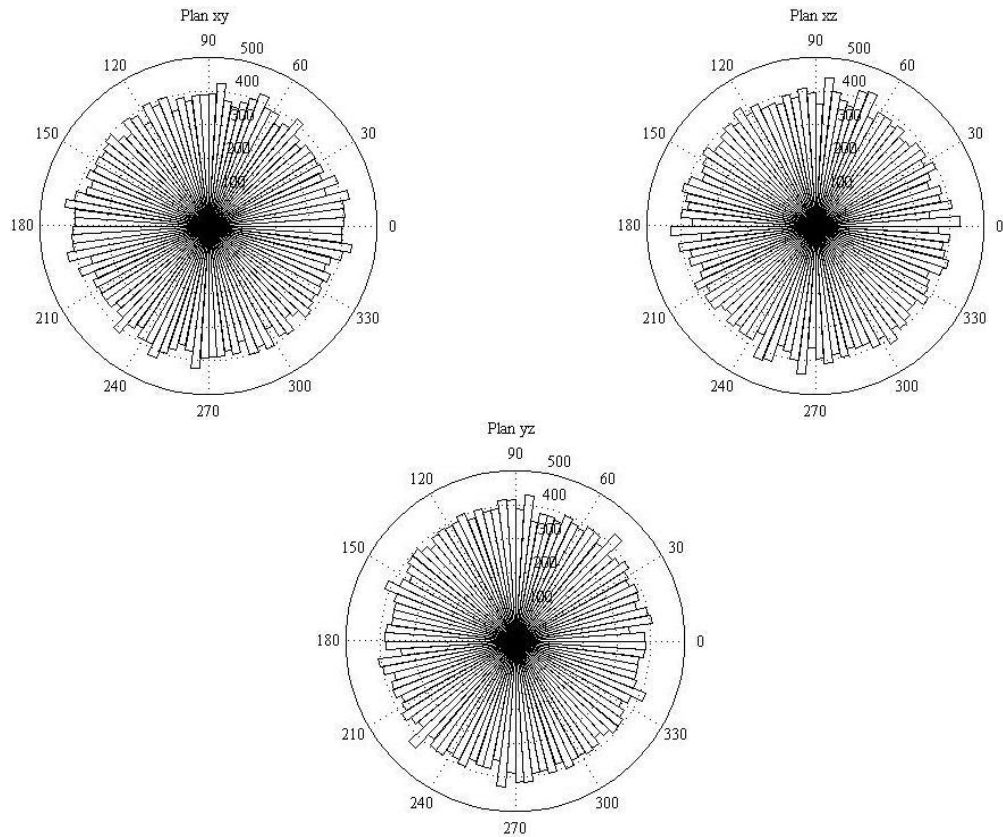


Figure 3. 18. Distribution des orientations de contact sans effet de parois dans les plans (x-y), (x-z), (y-z).

3.5.7.2.4. L'homogénéité des forces de contact

Afin de quantifier l'homogénéité des échantillons numériques, nous avons étudié la répartition des forces normales de contact sous un confinement isotrope. La compression de l'assemblage granulaire est une étape de préparation obligatoire. Elle doit répondre à des critères d'homogénéité aussi bien à l'échelle de l'échantillon qu'à l'échelle des grains.

La Figure 3.23 montre des sections horizontale et verticale des chaînes de forces normales dans l'échantillon de référence, après un chargement isotrope de 100 kPa. En reliant les centres des particules par un segment dont l'épaisseur est proportionnelle à la valeur de la force de contact, on obtient une représentation visuelle des forces de contact. L'orientation correspond à la direction du contact projeté dans les plans horizontal ou vertical. Elle ne semble pas concentrer dans une direction privilégiée. Cette observation est confirmée par l'étude des orientations de contact à l'état isotrope. Les forces sont réparties de façon homogène dans toutes les directions. Ce réseau de force est homogène au sein de l'échantillon. Ce dernier est apte à représenter un milieu homogène.

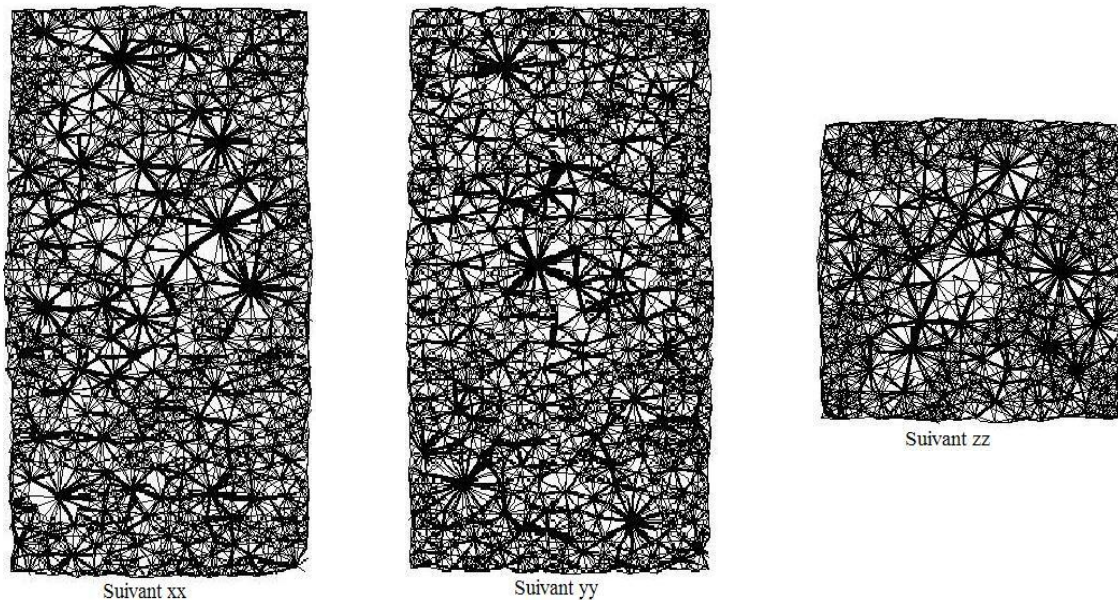


Figure 3. 19. Les forces normales de contact dans l'échantillon de référence (les épaisseurs des traits sont proportionnelles à la force). Section suivant les plans xx, yy et zz.

3.5.7.2.5. La coordinance

Un assemblage granulaire est caractérisé par son réseau de contact. De celui-ci, un paramètre global essentiel est tiré : le nombre de coordinance globale ou la coordinance de contact qui correspond au nombre moyen de contacts par grains. La connaissance des contacts réels entre grains est essentielle, car physiquement c'est par le contact que tout passe. En particulier, la transmission d'une force dans un matériau granulaire s'effectue par les contacts entre grains ou se produit la plus grande partie de la déformation (selon la loi de Hertz par exemple, dans le cas d'une déformation élastique). La dissipation par frottement dans le cas d'un cisaillement s'effectue par ces mêmes contacts [Khidas, 2001].

Pour fixer les idées, le nombre de coordination pour un arrangement de billes de verre (3D), varie entre 6 et 12 lorsque sa structure passe d'une forme cubique à hexagonale [Graton et Fraser, 1953]. Et pour un empilement désordonné de disques, elle est inférieure ou égale à 4.

La Figure 3.24 présente le nombre de coordination de l'échantillon de référence au cours de la phase de grossissement. Il s'agit de la coordination globale, en considérant toutes les particules du milieu, et la coordination interne ou nous ne tenons pas compte des particules en contact avec les parois.

Au début de la phase de grossissement la coordination est faible. Cela s'explique par la présence de particules sans contact en raison de la façon de la mise en place de l'échantillon. Ensuite, elle augmente jusqu'à se stabiliser. D'après [Roux et Chevoir, 2005], cette coordination joue un rôle prépondérant sur les caractéristiques mécaniques à l'échelle globale aussi bien sur le comportement élastique que sur comportement à la rupture. Quelques études numériques [Roux et Chevoir, 2005] et expérimentales en 3D [Pinson et al., 1998] mettent en évidence un nombre de coordination constant entre 6 et 7. Dans notre cas, nous constatons que le nombre de coordination est stable à la fin du processus de grossissement au tour de la valeur 6 ce qui est conforme a ces résultats.

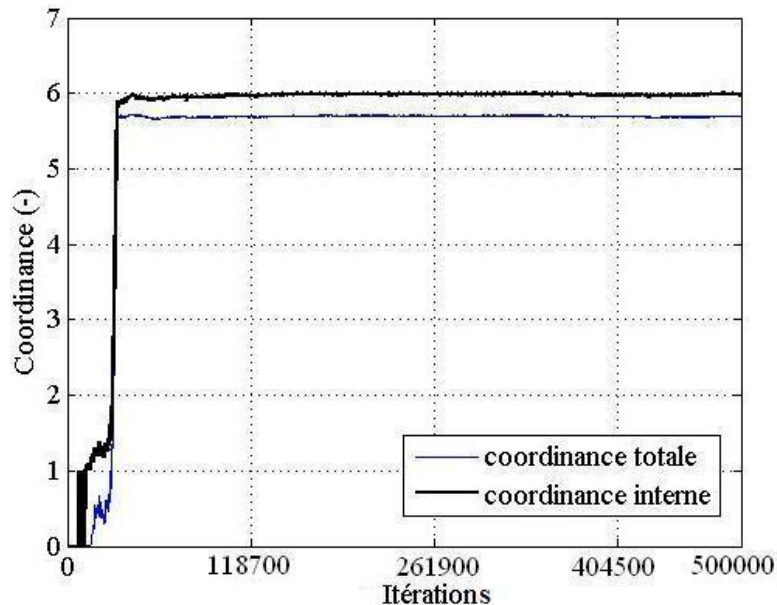


Figure 3. 20. Evolution de la coordination globale et interne de l'échantillon de référence lors du processus de grossissement.

3.5.7.3. Procédure de la simulation numérique de l'essai triaxial

Afin de simuler les essais triaxiaux nous avons décidé de reproduire numériquement toutes les phases expérimentales effectuées. Après la phase de génération de l'échantillon, et après avoir introduit les nouveaux paramètres de simulation, on effectue un confinement isotrope tout en contrôlant la contrainte latérale $\sigma_1 = \sigma_3$ (Figure 3.25). Le confinement a lieu sans la gravité. Lors de la compression triaxiale, la vitesse de compression et la contrainte de confinement σ_3 sont maintenues constantes. Le chargement est imposé par le rapprochement

des parois haute et basse. La contrainte de confinement est réglée par déplacements simultanés des parois latérales pendant les simulations. Les positions des parois et les efforts qu'elles exercent permettent de calculer les contraintes et les déformations dans l'échantillon. A la fin de la phase de confinement ou l'équilibre est obtenu, on s'assure que l'échantillon est isotrope. Pour cela, on doit vérifier l'état de distribution des efforts au sein de l'échantillon et qu'une répartition globalement uniforme est obtenue.

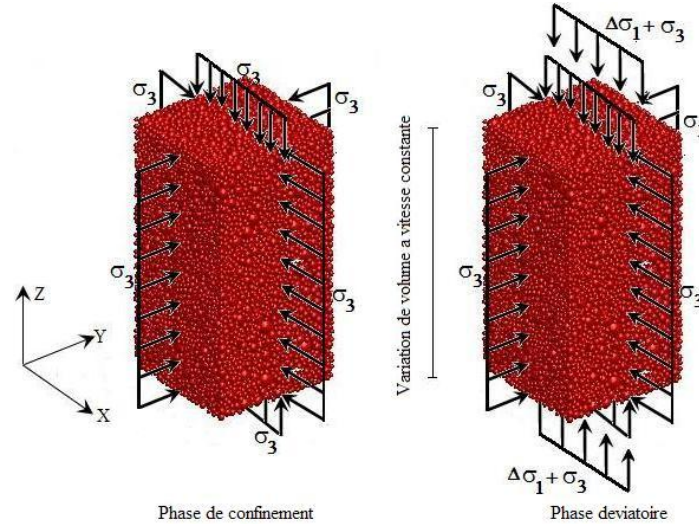


Figure 3. 21. Procédure de la simulation numérique de l'essai triaxial.

3.5.7.4. Conditions de simulation numérique d'essais triaxiaux

3.5.7.4.1. Asservissement des parois en vitesse et contrainte latérale contrôlée

Le suivi de l'état de déformation de l'assemblage granulaire s'effectue par l'asservissement des parois soit en vitesse soit en contrainte. Dans les deux cas, la sollicitation n'est pas appliquée brusquement mais plutôt d'une manière progressive, afin de limiter les effets de propagation d'onde dans le milieu. La méthode d'asservissement a été développée par [Sibille, 2006] et [Plassiard, 2007]. Elle est notamment inspirée du fonctionnement de la presse TRITRI du laboratoire 3S-R. Les conditions de type parois rigides planes sans friction sont considérées. Elles correspondent à des dispositifs expérimentaux de cisaillement. L'algorithme de recherche de contacts par grille a permis d'implanter l'élément plaque pour modéliser les parois. Pour plus de détail le lecteur est invité à consulter la référence [Sibille, 2007]. La taille de cet élément est semblable à celle des grains de l'assemblage. Les éléments composant la paroi subissent des déplacements égaux selon la normale de celle-ci. Une colinéarité des contraintes appliquées sur les parois est vérifiée. Leur asservissement est effectué en suivant les points ci-dessous.

- On définit la pression initiale s'exerçant en début de la simulation $\sigma_{initiale}$ et la pression finale souhaitée $\sigma_{souhaitée}$. La valeur de la pression appliquée évolue au cours de la simulation d'une manière continue et graduelle (Voir Figure 3.26). A chaque

instant on peut mesurer la pression exercée par l'échantillon sur les parois par l'expression suivante :

$$\sigma_{appliquée} = \sigma_{initiale} + (\sigma_{souhaitée} - \sigma_{initiale}) \frac{n_{iter_courant}}{n_{iter_trans}} \quad 3.6$$

Avec :

$n_{iter_courant}$: Le nombre d'itération actuel au cours de la simulation.

n_{iter_trans} : Le nombre d'itération transitoire entre $\sigma_{initiale}$ et $\sigma_{souhaitée}$.

Une fois la pression souhaitée est atteinte ($n_{iter_courant} = n_{iter_trans}$), des cycles de calcul sont effectués jusqu'à stabilisation du milieu. Ceci est justifié par le contrôle de l'énergie cinétique du système (tend vers zéro).

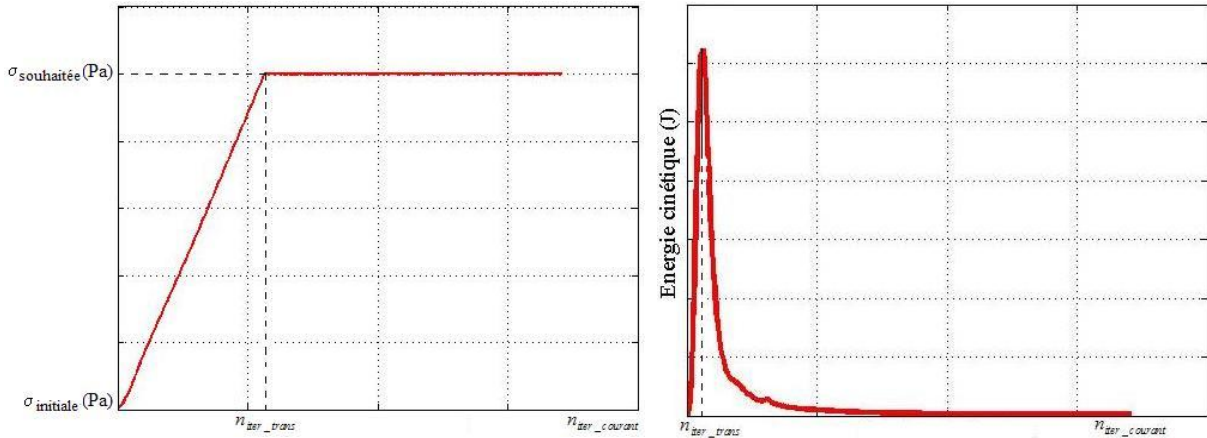


Figure 3. 22. Evolution de la pression de confinement (à gauche) et de l'énergie cinétique (à droite) au cours de la simulation.

- A chaque pas de temps la raideur équivalente K_{eq} entre la paroi et l'ensemble des grains en contact avec celle-ci est calculée. Il suffit de sommer la raideur de chaque contact grain paroi. La raideur équivalente est donnée par :

$$K_{eq} = \sum_{contact_grain_paroi} k_n \quad 3.7$$

- A l'itération courante, on peut déterminer la pression correspondante $\sigma_{corresp}$ aux efforts s'exerçant par l'échantillon sur la paroi considérée. Cette pression est calculée en actualisant à chaque pas la valeur S_{paroi} égale à l'aire de la paroi interceptée par les quatre autres parois qui lui sont perpendiculaire.

$$\sigma_{corresp} = \frac{\sum_{contact_grain_paroi} F_n}{S_{paroi}} \quad 3.8$$

- L'incrément de déplacement Δx_{paroi} permettant de corriger, en un seul pas de temps, la différence entre la pression effectivement appliquée $\sigma_{corresp}$ et la pression souhaitée est alors calculé selon l'équation :

$$\Delta x_{paroi} = \frac{\alpha_{red} (\sigma_{souhaitée} - \sigma_{corresp}) S_{paroi}}{K_{eq}} \quad 3.9$$

Avec α_{red} est un coefficient réducteur permettant d'assurer la stabilité de la convergence de l'algorithme d'asservissement [Sibille, 2006]. Dans toutes les simulations effectuées on a choisi $\alpha_{red} = 1$. L'équation (3.9) est écrite pour la paroi de gauche, inverser le signe pour la paroi de droite. Par conséquent, la vitesse à imposer à la paroi au cours du pas de temps de durée Δt est donnée par :

$$v = \frac{\Delta x_{paroi}}{\Delta t} \quad 3.10$$

- Cette procédure fait qu'il existe toujours un écart résiduel entre $\sigma_{corresp}$ et $\sigma_{souhaitée}$, car sinon la paroi resterait fixe. La position actualisée x_{actuel} est alors calculée par une simple correction de l'ancienne position x_{ancien} par :

$$x_{actuel} = x_{ancien} + \Delta x_{paroi} \quad 3.11$$

Si l'essai est piloté en déplacement, le couple de parois se déplace à la même vitesse mais en sens opposés. Dans l'idéal, on devrait utiliser une vitesse de déformation égale à la vitesse expérimentale, c'est à dire de l'ordre de quelques $mm.s^{-1}$. Ceci n'est pas envisageable numériquement, car le pas de temps du schéma explicite d'intégration est trop petit et entrainerait un cout de calcul rédhibitoire. Il faut donc utiliser une vitesse de déplacement des parois suffisante pour diminuer le temps de calcul, mais pas trop importante pour limiter les effets dynamiques. De plus, il faut contrôler l'aspect quasi statique de la sollicitation (ce point sera discuté dans la section suivante). Le déplacement du couple de parois consiste en 2 phases : une première phase départ à vitesse nulle, accélération constante ce qui fait la vitesse augmente linéairement en fonction du temps jusqu'à atteindre la vitesse de déformation imposée par l'utilisateur $v_{choisie}$ puis une phase à vitesse constante égale à $v_{choisie}$ permettant de suivre le comportement de l'assemblage granulaire jusqu'à l'état souhaité.

3.5.7.4.2. Hypothèse quasi statique : choix d'une vitesse de sollicitation

Dans ce paragraphe on vérifie qu'il est possible d'obtenir une indépendance de la réponse de l'assemblage granulaire vis-à-vis de la vitesse de sollicitation, que celle-ci soit en contrainte ou en déformation. C'est-à-dire une unique relation contrainte déformation quelles que soient les vitesses de sollicitation. Dans l'expérimentation des essais triaxiaux, la vitesse de sollicitation est généralement trop faible de l'ordre de quelques millimètres par seconde. Et reproduire cette vitesse numériquement lors des simulations serait trop pénalisant du point de vue cout de calcul. Dans [Hentz, 2003], [Chareyre, 2003], [Plassiard, 2007], [Belheine et al.,

2008], les simulations des essais triaxiaux et biaxiaux ont été réalisées à des vitesses de sollicitations supérieures. Ces vitesses ont été choisies de telle manière que la réponse de l'assemblage granulaire n'a pas été affectée par l'effet inertiel.

Dans [Dolezalova, 2003], l'auteur a montré qu'avec l'augmentation de la vitesse de sollicitation, on observe un chevauchement important entre les éléments. Les mécanismes de mouvement des éléments se changent, et par conséquent la déformabilité et les contraintes développés dans l'assemblage granulaire. Il a conclu que les vitesses trop élevées devraient être évitées, pour ne pas influencer défavorablement l'exactitude des simulations.

Dans le même contexte, on peut citer le travail de [Chareyre, 2003]. L'auteur a montré que les vitesses trop élevées entraînent généralement une surestimation de la résistance de l'échantillon. Et dans le cas des vitesses qui ne sont pas trop élevées, l'erreur commise sur le déviateur au pic q^{pic} dépend linéairement de la vitesse de déformation $\dot{\epsilon}$. Cette dépendance linéaire nous permet d'interpoler la contrainte au pic pour les conditions quasi-statiques.

Sur la Figure 3.27, on a reproduit les courbes contrainte-déformation obtenues avec différentes vitesses de déformation. Les simulations sont effectuées sur l'échantillon de référence.

On s'aperçoit que la vitesse de déformation n'a pratiquement pas d'influence sur les courbes contraintes déformations entre l'état isotrope et le pic du déviateur de contrainte q^{pic} . Par contre, il est clair qu'une vitesse trop élevée supérieure à $\dot{\epsilon} = 0.015s^{-1}$ conduit à surestimer la contrainte au pic de l'assemblage. Les réponses correspondant aux vitesses de déformation $\dot{\epsilon} = 0.0045s^{-1}$ et $\dot{\epsilon} = 0.0015s^{-1}$ sont clairement superposées l'une sur l'autre pour un écart relatif sur la valeur de q^{pic} de l'ordre de 0.1 %. Les deux courbes atteignent le même point indépendamment de la vitesse. Sur la Figure 3.24a on présente la dépendance quasi linéaire du déviateur au pic q^{pic} en fonction de la vitesse de déformation $\dot{\epsilon}$. On constate que l'augmentation du déviateur au pic q^{pic} peut être considérée proportionnelle à la vitesse. Le même résultat a été obtenu par [Chareyre, 2003] en simulation 2D et par [Plassiard, 2007] en simulation 3D. D'après la Figure 3.28, la vitesse de déformation n'influe pas uniquement le déviateur au pic q^{pic} mais aussi la déformation axiale au pic ϵ_1^{pic} . Plus la vitesse est grande plus qu'on localise moins vite.

Les simulations présentées sont effectuées pour un taux de déformation égale à 16% pour un temps de calcul un peu important, et en général on s'intéresse à présenter le comportement à l'état résiduelle autour de 40% de déformation. Du point de vue précision de résultat et coût de calcul ces simulations indiquent que la vitesse de déformation $\dot{\epsilon} = 0.015s^{-1}$ est suffisante pour représenter le comportement. Et cela est basé sur l'écart absolu calculé entre le déviateur au pic correspondant à cette valeur de vitesse et celle qui correspond $\dot{\epsilon} = 0.0015s^{-1}$ soit 4.34 kPa. Cette différence se traduit par un écart relatif de 0.5% sur l'angle de frottement, ce qui semble acceptable pour nos simulations.

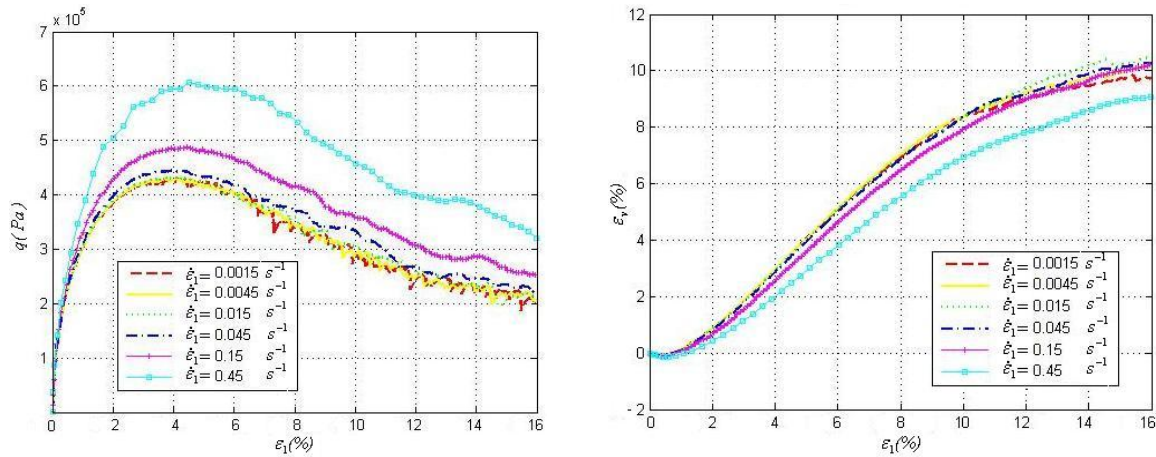


Figure 3. 23. Influence de la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}_1$ imposée sur un essai triaxial à 100 kPa de confinement.

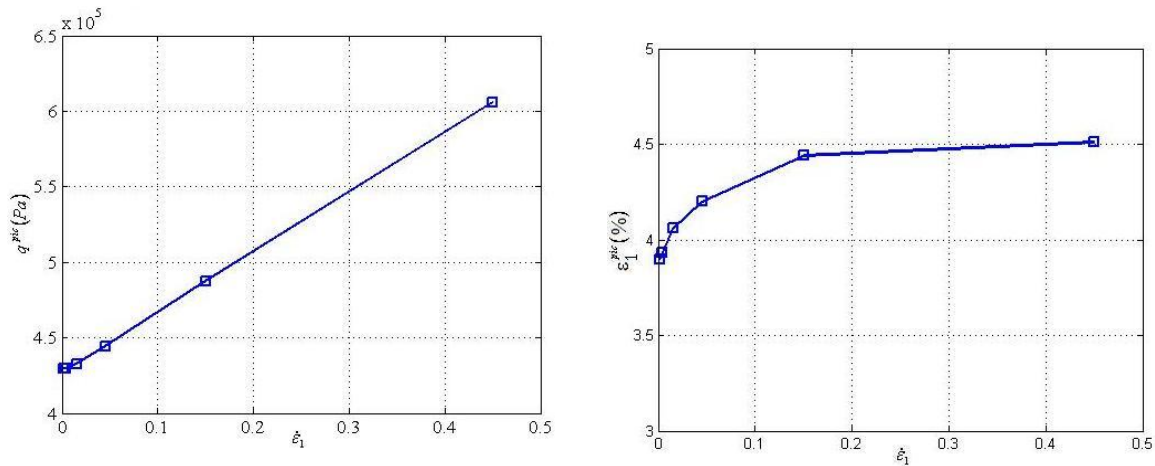


Figure 3. 24. Dépendance linéaire de la contrainte au pic q^{pic} en fonction de la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ (à gauche), Influence de la vitesse de sollicitation sur la déformation au pic ε_1^{pic} (à droite).

3.5.7.4.3. Influence de l'amortissement non visqueux

Un amortissement local en effort λ a été introduit dans le modèle [Cundall, 1987]. Il fait dissiper de l'énergie cinétique au cours de la simulation. Ce type d'amortissement est un amortissement numérique qui a peu de sens physique mais qui a l'avantage de fournir un temps de calcul raisonnable. La Figure 3.29 montre les réponses contraintes-déformation pour les valeurs de l'amortissement testé ($\lambda = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$). On constate qu'une valeur non nulle de l'amortissement engendre une augmentation de la résistance de l'échantillon bien que le régime puisse être considéré comme quasi statique. Cette remarque a également été faite par [Fu, 2005] qui constate une valeur de résistance au pic plus faible lors d'un essai de cisaillement simulé avec une valeur d'amortissement nulle.

Sur la Figure 3.30 on aperçoit que le comportement entre l'état isotrope et le pic du déviateur de contrainte q^{pic} pour les différentes réponses est quasiment identique et pas de

fluctuations. Ce qui signifie que les interactions entre les éléments sont purement élastiques et aucune énergie cinétique n'est dissipée. Cependant, les réponses entre la phase d'adoucissement jusqu'à l'état résiduel ne se superposent plus, et que les fluctuations sont d'autant plus marquées que la valeur de l'amortissement est plus faible. Seule la simulation avec $\lambda = 0.7$ ne présente pas de fluctuations importante dans le comportement post pic. Sur la Figure 3.31, il est bien clair que la relation entre le déviateur de contrainte au pic q^{pic} et le coefficient d'amortissement λ est linéaire, résultat déjà observé par [Chareyre, 2003] en simulation 2D et par [Plassiard, 2007] en simulation 3D. Donc pour obtenir le déviateur de contrainte au pic q^{pic} correspondant au cas sans amortissement, il nous suffit de faire continuer la droite jusqu'à l'axe des ordonnées. La valeur de $q_{\lambda=0,0}^{pic}$ est proche de 423 kPa. Le choix du coefficient d'amortissement est fait en tenant compte à la fois de la précision attendue du résultat et du temps raisonnable pour l'obtenir. Donc une valeur non nulle de λ permettra notamment d'accélérer l'atteinte d'un état de contrainte-déformation à l'équilibre quasi statique. Dans les simulations qui suivent, nous avons choisi un coefficient $\lambda = 0.1$. Soit un écart relatif de 2% par rapport au cas sans amortissement.

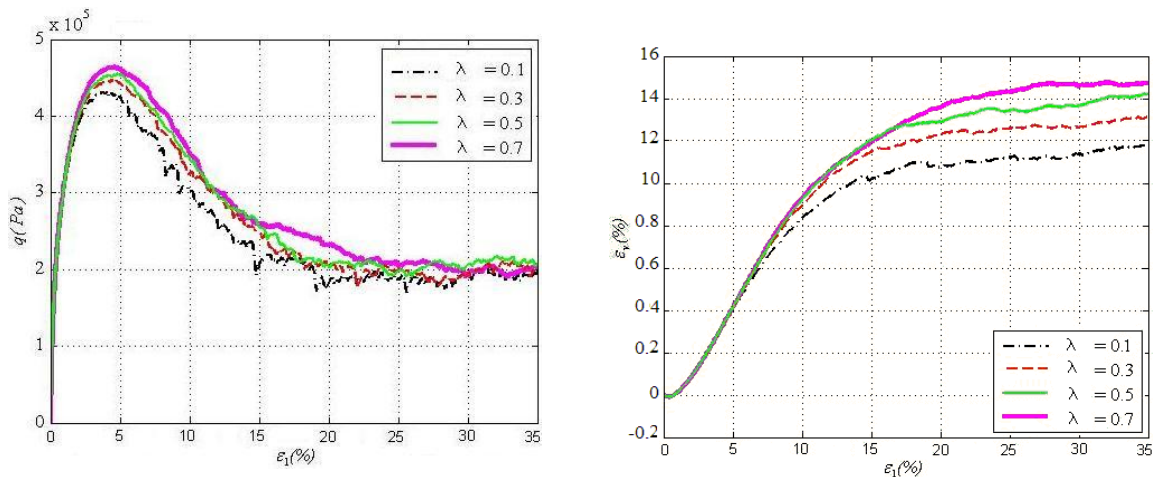


Figure 3. 25. Influence de l'amortissement non visqueux sur un essai triaxial à 100 kPa de confinement.

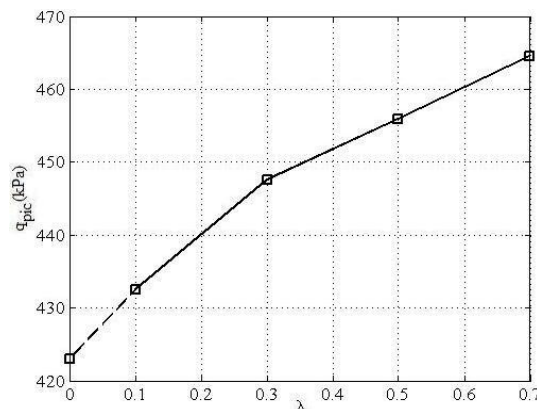


Figure 3. 26. Dépendance linéaire de la contrainte au pic q^{pic} en fonction du coefficient d'amortissement λ .

3.5.7.5. Représentativité de l'éprouvette

3.5.7.5.1. Prédiction du modèle du comportement mécanique macroscopique observé en laboratoire

L'un de nos objectifs est de mettre en œuvre un modèle numérique qui permette de décrire qualitativement et quantitativement le comportement mécanique d'un matériau granulaire.

Dans la partie précédente, on a parlé sur la simulation de l'essai triaxial et ces conditions ainsi que sur certains aspects géométriques qualitatifs que doit satisfaire l'échantillon numérique. La Figure 3.32 montre l'évolution caractéristique du déviateur et de la déformation volumique avec la déformation axiale pour deux cas différents. Résultats obtenus avec des éléments sphériques à rotations libres ou avec rotations contrôlées (utilisation de la MTL). Les paramètres de ces deux simulations sont présentés dans le Tableau 3.2. Ces résultats, obtenus par simulation numérique, montrent que l'on retrouve bien les comportements classiquement observés en laboratoire. Le déviateur, lors de la compression triaxiale de l'échantillon passe par une valeur maximale q^{pic} , associée à une valeur d'angle de frottement interne φ^{pic} . Il décroît ensuite pour atteindre un plateau, tandis que la déformation volumique sature à une valeur asymptotique. Le matériau se dilate après une très courte phase initiale contractante invisible sur la Figure 3.33.

Cet exemple indique que la simulation permet d'observer les mêmes comportements que les expériences de laboratoire. Il nous permet même de faire une comparaison préliminaire entre les deux configurations afin de ressortir les avantages et les inconvénients de l'utilisation de la MTL (cf. Chapitre 2). De la Figure 3.34, il est bien lisible que la simulation ne faisant pas intervenir la MTL, donne un déviateur au pic q^{pic} moins important que celui issu du cas utilisant la MTL. Dans [Achmus et Abdel Rahman, 2003], il est bien montré que les modèles classiques utilisant des éléments sphériques à rotation libre ne permettent pas de reproduire quantitativement la résistance au cisaillement d'un sol non cohésif soumis à des essais triaxiaux. Les mécanismes de roulement développés sont mis en cause. On constate aussi que la déformation axiale à la rupture obtenue pour le cas à rotation libre est égale à 1.5% alors qu'une valeur de 3.78% ressort de la simulation avec MTL. Cette dernière valeur semble plus réaliste et proche aux résultats trouvés dans la littérature [Plassiard, 2007].

Une autre observation réside sur le comportement résiduel. Comme le montre la Figure 3.35, le comportement sans MTL ne permet pas d'obtenir de forts déviateurs à l'état résiduel. Leur valeur correspond à un angle de frottement résiduel maximal de 20°. Par contre, la valeur issue du cas avec MTL est de 30°. Pour des sables et des graviers, on observe classiquement des angles de frottements résiduels supérieurs ou égaux à 30°. Donc le modèle avec éléments sphériques et sans MTL n'est donc pas en mesure de modéliser un comportement mécanique d'un milieu granulaire quelconque. Cette particularité peut être due à la géométrie sphérique qui empêche toute imbrication des éléments et favorise leur roulement. Comme le montre aussi la Figure 3.36, la variation volumique des deux comportements est bien différente. Le comportement sans MTL se dilate plus vite que celui avec MTL. Ceci est dû aux mécanismes de roulement développés, qui ne nous permettent jamais d'avoir un comportement dilatant réaliste. Résultat déjà vu par [Plassiard, 2007]. L'auteur a montré sur un exemple que l'évolution de la variation volumique indique une dilatance plus importante pour la simulation sans MTL. L'angle de dilatance au pic ψ^{pic} vaut à 9.2°, et dans le cas avec MTL, il vaut à 16.9°. Une valeur plus conforme à celles observées dans l'expérimentation.

Cependant, l'utilisation de la MTL avec des éléments sphériques porte des avantages dans la simulation des essais triaxiaux. Une bonne reproduction de la résistance au cisaillement que se soit au pic ou à l'état résiduel, une déformation axiale de rupture en accord avec l'expérimentation, et une dilatance plus conforme à la réalité sont obtenus. Par conséquent, le seul inconvénient de l'utilisation de la MTL réside dans le temps de calcul. Il semble un peu pénalisant en comparaison avec des simulations sans utilisation de la MTL.

Pour conclure, les résultats de la Figure 3.37 sont encourageants puisqu'ils reproduisent des comportements expérimentalement connus. Au-delà de ce constat rassurant, il faut s'interroger cependant sur leur sensibilité à la procédure d'expérimentation numérique et au choix des paramètres, et aussi les exploiter pour comprendre les phénomènes macroscopiques observés.

	Rotations libres (sans MTL)	Rotations contrôlée (MTL)
Raideur normale k^n (MNm^{-2})	600	600
Raideur tangentiel k^s (MNm^{-2})	24	24
Frottement local μ ($^\circ$)	32.5	32.5
Coefficient de la raideur élastique en roulement β^r	0.0	0.12
Coefficient de la limite plastique en roulement η^r	0.0	1.0

Tableau 3. 2. Paramètre de simulation des essais triaxiaux avec rotation libre et rotation contrôlée (MTL)

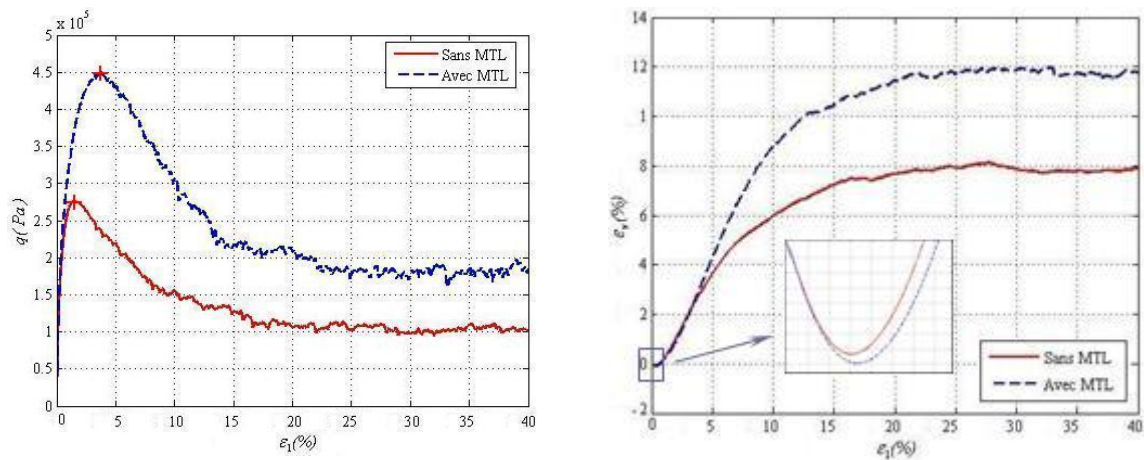


Figure 3. 27. Simulation d'un essai triaxial avec et sans utilisation de la MTL. Réponse mécanique macroscopique en terme contrainte-déformation (à gauche) et La variation volumique en fonction de la déformation axiale (à droite).

3.5.7.5.2. Dispersion des résultats

L'identification du comportement mécanique macroscopique d'un matériau granulaire passe par des expériences, qu'elles soient menées à bien en laboratoire ou sur ordinateur, avec des échantillons représentatifs. On doit donc se préoccuper par les fluctuations de comportement observées entre échantillons, mais régis par la même procédure de génération. C'est-à-dire qu'ils ont une géométrie identique, à savoir des dimensions, un nombre

d'éléments, une distribution de tailles, et des paramètres de grossissement identiques. Ils ne diffèrent que par l'aspect aléatoire de leur génération. Quatre échantillons sont générés suivant la procédure exposée dans la section 3.5.3. La Figure 3.38 montre la distribution de tailles des quatre échantillons réputés identiques. Les échantillons d'essai se composent de 10 000 éléments. Pour chaque échantillon, on détermine :

- Le nombre de coordination,
- L'angle de frottement au pic φ_{pic} et le déviateur au pic q_{pic} ,
- Le coefficient de poisson et le module initiale pour de faibles déformations.

Pour ces paramètres, on détermine une moyenne empirique m et un écart type σ (ou précision sur la moyenne) en supposant que la densité de probabilité correspond à une loi normale. Les résultats sont présentés dans le Tableau 3.3. Les rapports $2\sigma/m$ obtenus pour l'angle de frottement et le déviateur au pic sont inférieurs à 1%. Ce rapport est inférieur à 2% pour les mesures du coefficient de Poisson et du module d'élasticité initial.

Les Figures 3.39 et 3.40 représentent l'évolution du déviateur, de la déformation volumique et du nombre de coordination pour les quatre échantillons. Les courbes macroscopiques présentées sur la Figure 3.41 confirment une dispersion très faible des résultats. Il en est de même pour le nombre de coordination sur la Figure 3.42. Finalement, la variabilité des résultats engendrée par la mise en place aléatoire de 10 000 éléments est de l'ordre de 1% pour les paramètres observés. Les courbes macroscopiques confirment une bonne reproductibilité des résultats.

Paramètres	Coordinance (-)	φ^{pic} (°)	q^{pic} (kPa)	ν_0 (-)	E_0 (MPa)
Tests n° 1	4.10	42.7453	432.55	0.280	110.210
2	4.12	42.6397	433.56	0.285	109.780
3	4.11	42.3193	430.57	0.280	109.406
4	4.12	42.5873	435.34	0.280	110.806
Moyenne m	4.1125	42.5729	433.005	0.28125	110.0505
Ecart type σ	0.00829	0.340	1.72	0.00210	0.52
$2\sigma/m$	0.4%	0.73%	0.79%	1.5%	0.94%

Tableau 3. 3. Synthèse de la dispersion des résultats réalisée sur les quatre échantillons réputés identiques.

Le nombre de grains composant l'échantillon numérique et la reproductibilité de la procédure de génération conditionne la dispersion de la réponse. Une augmentation du nombre d'éléments au sein de l'échantillon numérique engendrerait une dispersion des résultats plus faible [Chareyre, 2003]. L'auteur a analysé sur des simulations biaxiales l'écart type du déviateur de contrainte au pic en fonction du nombre de grains. C'est en quelque sorte un moyen de vérifier l'unicité du comportement macroscopique. Il trouve, que le déviateur au pic diminue proportionnellement à $N^{1/2}$, où N représente le nombre d'éléments. Pour des simulations tridimensionnelles, des études ont été menées avec 10 000 éléments, pour représenter un échantillon cubique [Sibille, 2006] et un échantillon parallélépipédique [Plassiard, 2007]. Les auteurs ont estimé une dispersion suffisamment faible sur la réponse macroscopique. C'est en fonction de ce résultat que nous avons choisi 10 000 éléments. La faible dispersion engendrée va permettre de mettre clairement en évidence l'influence de divers paramètres sur le comportement mécanique résultant.

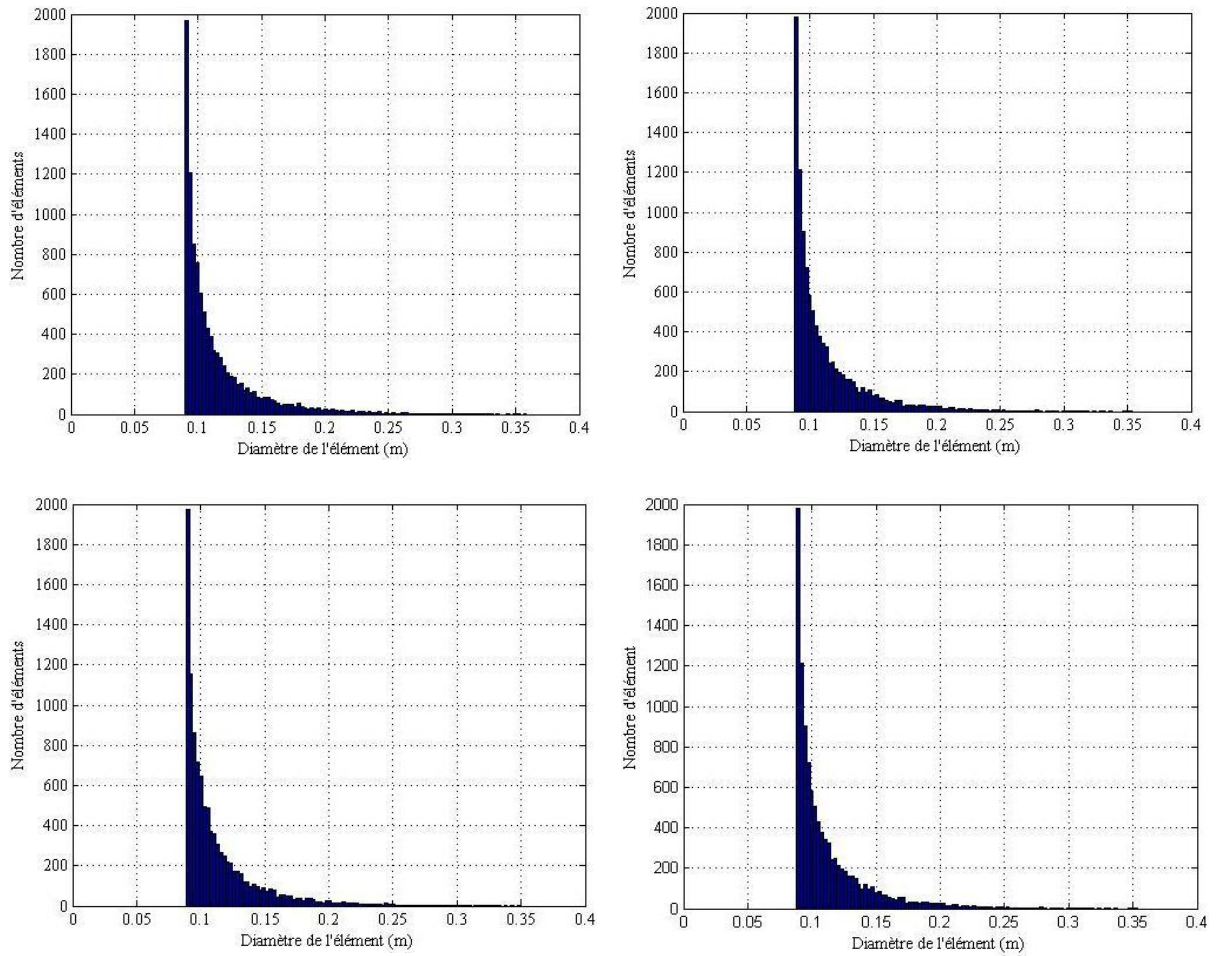


Figure 3. 28. La distribution de tailles des quatre échantillons réputée identiques.

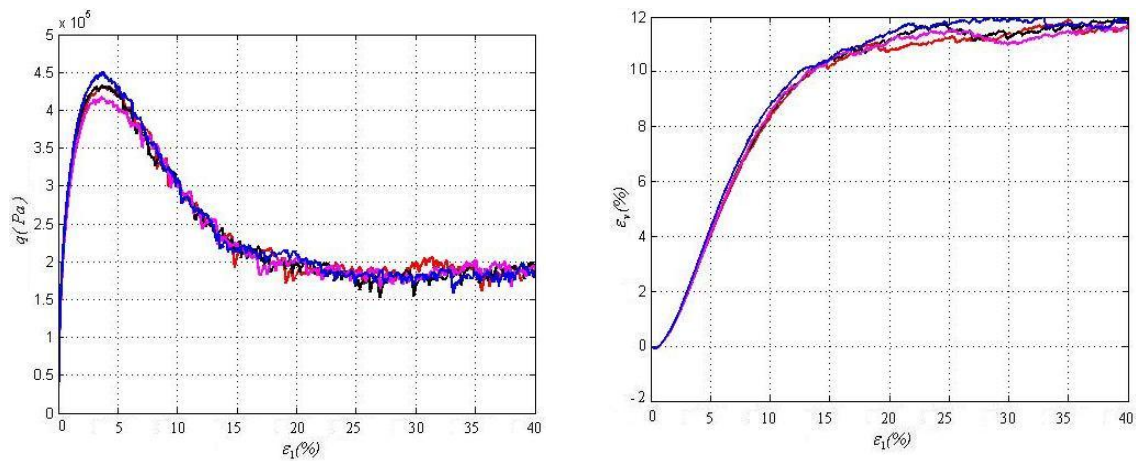


Figure 3. 29. Simulation d'un essai triaxial sur quatre échantillons numériques générés d'une manière réputée identique.

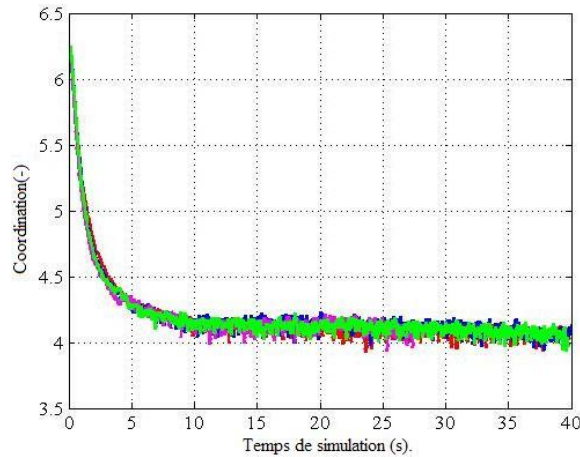


Figure 3. 30. Evolution du nombre de coordination pour les quatre échantillons.

3.5.7.5.3. Influence de la taille moyenne des éléments (Nombre d'éléments)

Le nombre d'éléments et la répartition granulométrique sont initialement fixés et déterminent la taille des éléments dans le modèle. La porosité initiale est maintenue constante. Les éléments utilisés ne correspondent pas en taille à la dimension du grain réel. Le calage du modèle est ainsi effectué sur des échantillons ayant des tailles nettement supérieures à celle de l'échantillon expérimental. Il s'agit donc d'étudier l'influence du nombre d'éléments sur la réponse globale. Cette question a été déjà étudiée dans le cas bidimensionnel [Chareyre, 2003]. L'auteur a montré que la taille moyenne des éléments n'influe pas sur la réponse globale, même sur le plan tridimensionnel [Plassiard, 2007]. Des essais sont menés pour des échantillons composés de 10 000, 30 000 et 90 000 éléments. Notons, qu'une bonne reproductibilité des résultats a été obtenue à partir de 10 000 éléments.

La Figure 3.31, illustre la dépendance du comportement initial de la taille moyenne des éléments. On observe que le comportement initial est partiellement influencé par le nombre d'élément et donc de la taille moyenne des éléments. Le comportement paraît moins raide lorsque seulement 10 000 éléments sont utilisés. La variation de E_0 , le module de Young initial et ν , le coefficient de Poisson entre 10 000 et 30 000 éléments est remarquable par rapport à celle observée entre 30 000 et 90 000 éléments. De là, on constate qu'il ne s'agit vraiment pas d'une dépendance de l'élasticité envers la taille caractéristique de l'élément. Cependant, on attribue cette dépendance et d'après la loi des grands nombres, au biais statistique du caractère aléatoire de l'assemblage qui se réduit lorsque la taille de l'assemblage augmente.

Sur la Figure 3.43, un aspect équivalent est observable pour les grandes déformations. La réponse de l'ensemble des échantillons est globalement identique, excepté le comportement volumique à l'état résiduel pour un nombre d'élément égal à 10 000. Il est clair aussi que le nombre d'élément influence peu la partie initiale des courbes. Cependant, la différence entre les réponses macroscopiques obtenues pour ces assemblées est suffisamment faible et semble être acceptable. En conclusion, le comportement quasi-statique est considéré indépendant de la taille des éléments et on adoptera un nombre d'éléments valant 10 000 pour la suite de cette étude.

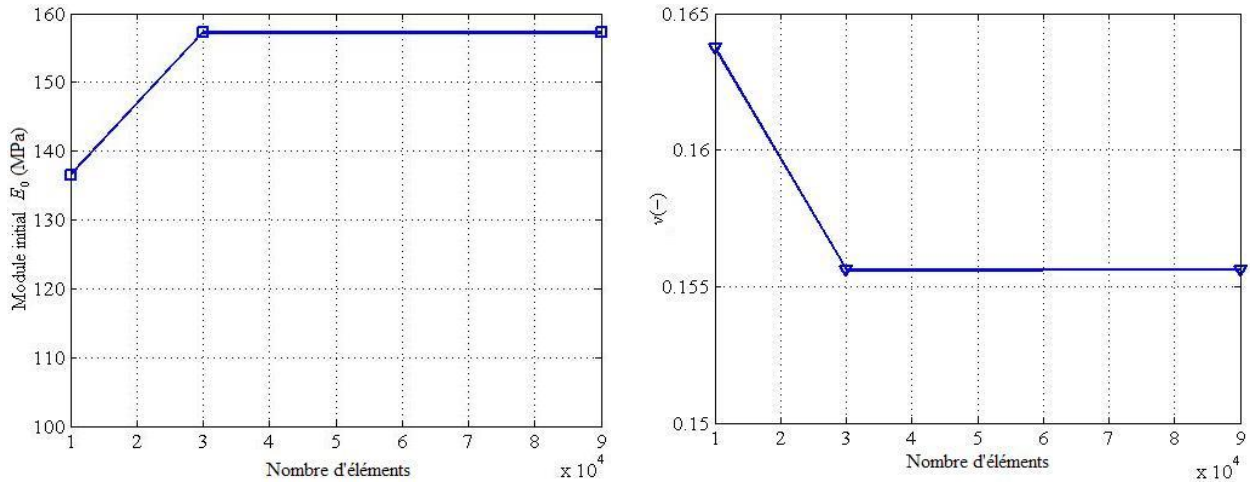


Figure 3. 31. Influence de la taille moyenne des éléments sur le comportement initial.

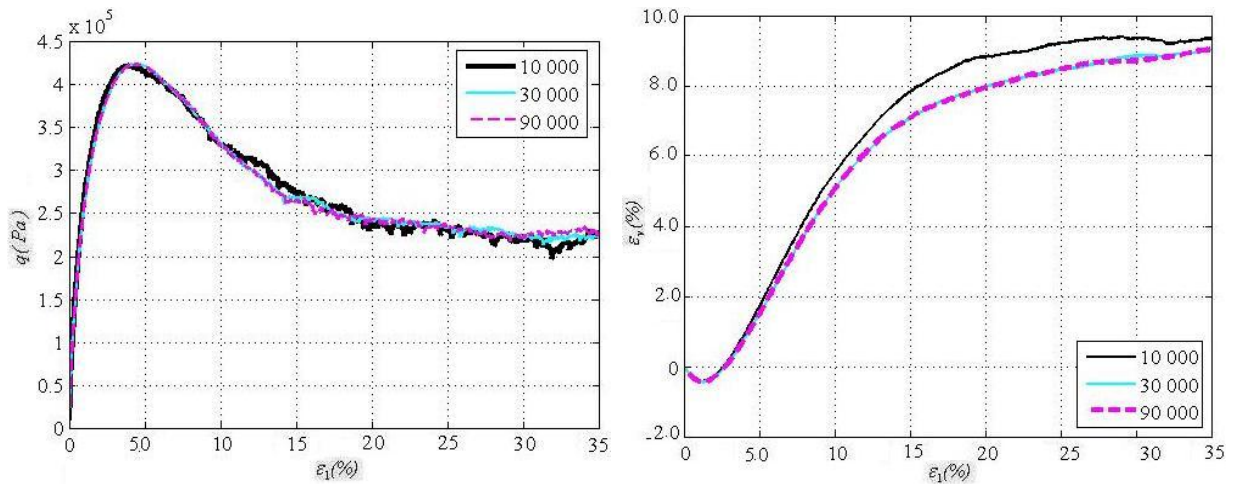


Figure 3. 32. Indépendance comportementale de la phase déviatoire.

3.5.7.5.4. Influence de la distribution de tailles des éléments

Le comportement d'un matériau granulaire est fondamentalement lié à la texture du milieu. Cette dernière est fortement influencée par le degré de polydispersité des tailles des grains. L'influence de la distribution granulométrique sur le comportement mécanique a été étudiée pour de faibles [Goddard *et al.*, 1998] ou de fortes [Herrmann *et al.*, 2003] polydispersités. Le premier cas concerne notamment la transition de l'ordre vers le désordre dans un arrangement granulaire. Le second cas touche particulièrement le remplissage optimal de l'espace par l'insertion de petits grains dans les pores créés par les plus gros grains. Dans le cas des sols réels, la dimension des grains est décrite par une courbe granulométrique caractérisée par les paramètres tels que le coefficient d'uniformité et le coefficient de courbure [Cambeau, 2001]. L'influence de ces paramètres sur le comportement mécanique a fait l'objet d'études aussi bien expérimentales [Pinson *et al.*, 1998], [Zhu *et al.*, 1996] que numériques [Zhang *et al.*, 1997]. Elle est basée sur des considérations empiriques. Enfin, Les milieux granulaires fortement polydisperses restent difficilement accessibles aux simulations numériques par éléments discrets du fait de la nécessité d'utiliser un grand nombre d'éléments pour assurer

une bonne représentativité de l'échantillon. La Figure 3.44 représente la distribution de tailles d'un assemblage discret [Sibille, 2006]. Elle est plus étroite que la distribution réelle. La granulométrie étalée nécessite un nombre important d'éléments (du fait des éléments de petite taille) et accroît les temps de calcul du modèle. C'est la raison pour laquelle de nombreux auteurs utilisent une granulométrie étroite. Certains auteurs ont cherché de faire coïncider l'allure de la courbe granulométrique du milieu réel à celle du milieu discret par homothétie des tailles des éléments [Sibille, 2006]. Et comme le comportement mécanique est indépendant vis-à-vis de la taille moyenne des grains [Chareyre, 2003], une translation de la distribution réelle est permise pour obtenir son clone numérique.

La Figure 3.45 montre un ensemble de courbes de distribution de taille, définies par la même loi de Weibull dont les paramètres alpha et gamma sont différents d'une distribution à l'autre. Un bon choix de ces paramètres nous permet d'atteindre de très bons résultats (granulométrie étalée, isotropie géométrique). Quelques gros éléments et beaucoup de petits venant de remplir les espaces entre les grands [Hentz, 2003]. Des essais triaxiaux sont menés pour chacune des répartitions granulométriques. La Figure 3.46 représente l'évolution du déviateur et de la déformation volumique en fonction de la déformation axiale. Il est bien clair que l'influence de la distribution granulométrique sur le comportement déviatoire au pic est faible, dans l'ordre de 1% sur l'angle de frottement interne. Par contre aucun effet sur le comportement à l'état résiduel, les résultats sont en tout point identiques. Cependant ce n'est pas tout à fait le cas pour ce qui concerne le comportement volumique. Une influence plus importante vis à vis de la déformation volumique à l'état résiduel que du déviateur de contrainte, mais cette influence reste faible pour la gamme de déformation choisie. En effet, la dilatance au pic ne semble pas être influencé par la granulométrie. D'une manière générale, plusieurs études ont montré que la forme géométrique des éléments influe fortement le comportement mécanique en comparaison avec l'influence de répartition granulométrique [Clacquin, 2003]. Donc, la distribution de tailles est un aspect supplémentaire à prendre en compte dans le calage du modèle numérique. La distribution de tailles de l'échantillon de référence est aléatoire avec les deux paramètres de forme $\alpha = 0.15$ et $\gamma = 0.75$.

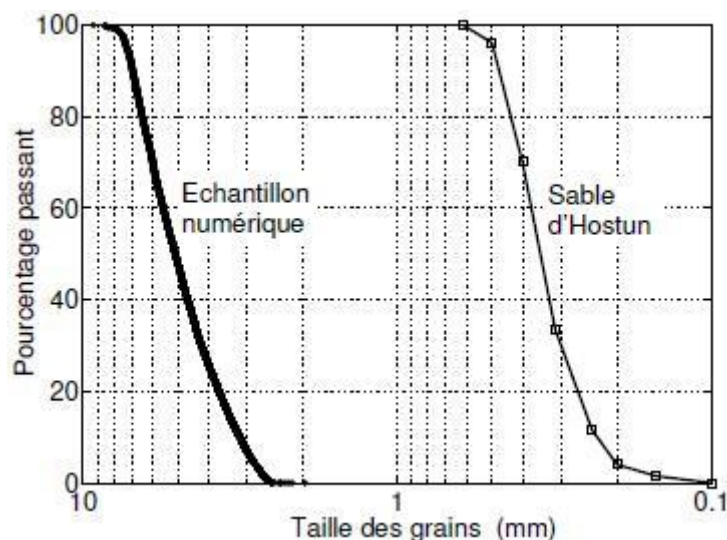


Figure 3. 33. Décalage homothétique de la courbe granulométrique réelle vers les tailles des éléments de l'échantillon numérique (Sable de Hostun), d'après [Sibille, 2006].

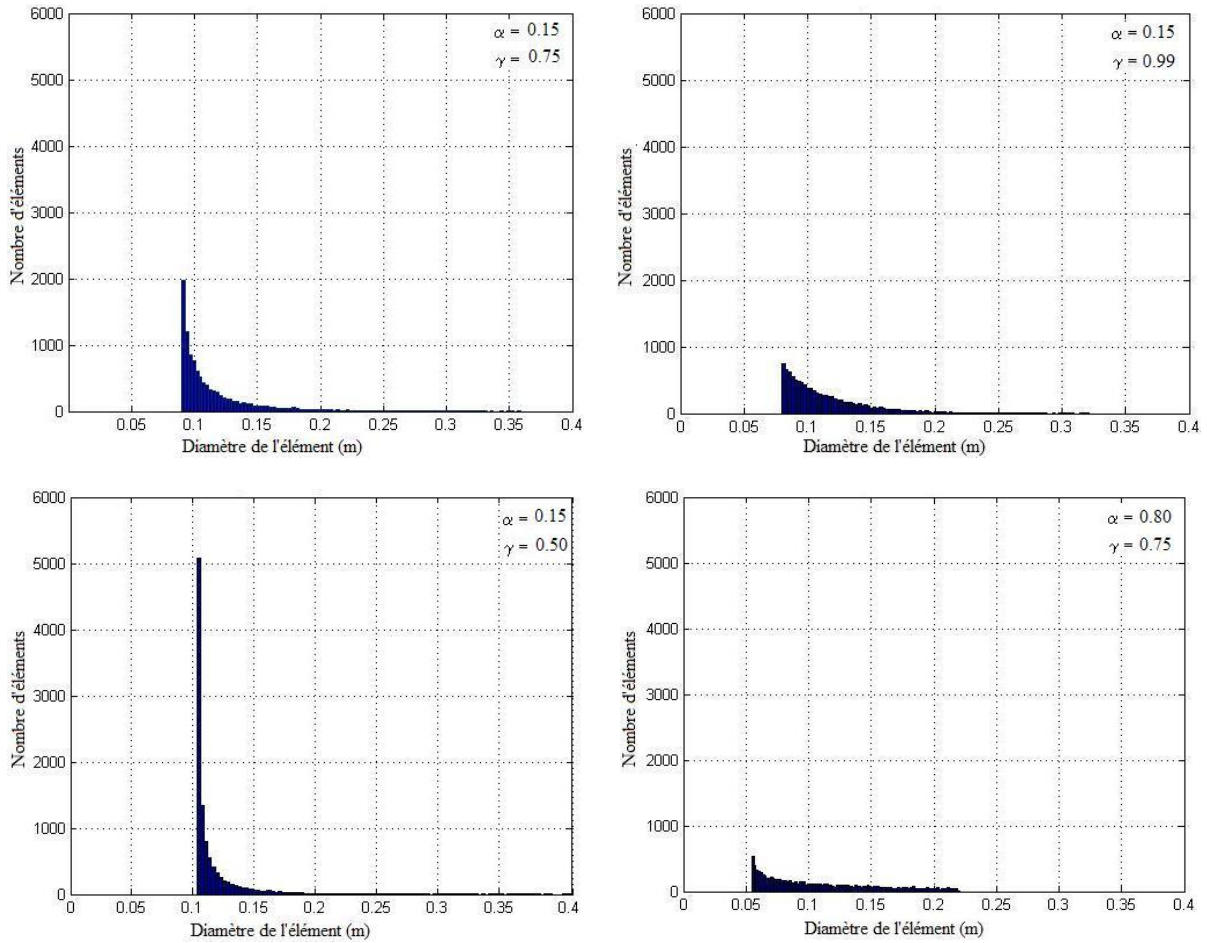


Figure 3. 34. Distribution de tailles des éléments pour différentes valeurs des paramètres de la fonction aléatoire de Weibull (α, γ).

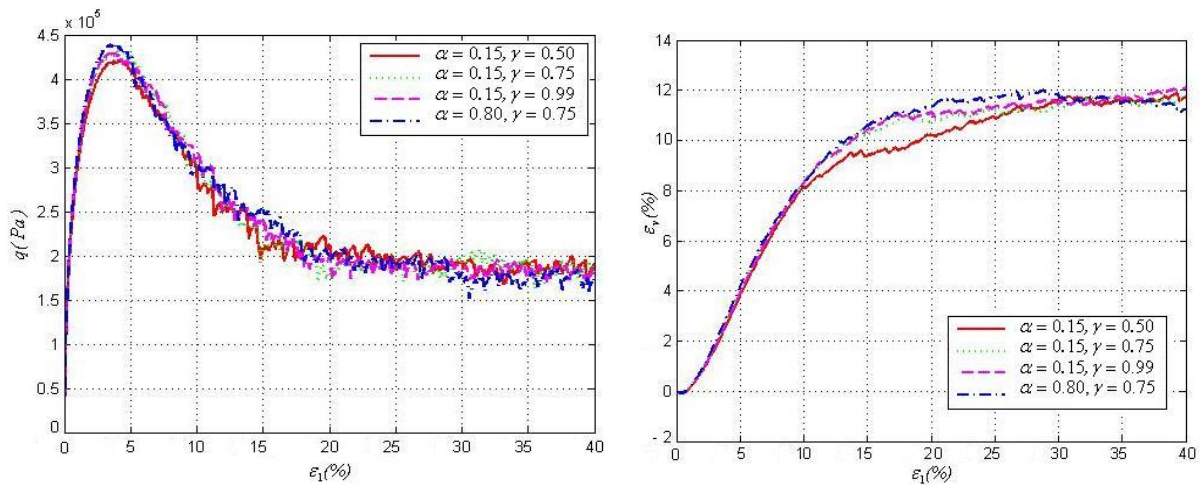


Figure 3. 35. Influence de la distribution de taille sur le comportement déviatoire pour différentes valeurs de α et γ paramètres de la fonction aléatoire de Weibull.

3.5.7.5.5. Effet de la discrétisation

Un autre aspect important concerne la mise en échelle de l'essai à modéliser. La Figure 3.47 montre l'image des trois échantillons numériques dont la dimension de la boîte triaxiale et la taille moyenne des éléments sont différents. Chaque échantillon se compose de 10 000 éléments. Au laboratoire, le mécanicien des sols se heurte également à un problème d'échelle. Le diamètre de l'échantillon doit être au moins 10 fois supérieur à la taille du grain le plus grand [El Bied, 2000]. Cet aspect est respecté par l'ensemble des échantillons d'essais. En fait, le rapport entre la dimension géométrique des échantillons et la taille des grains peut varier dans de très larges proportions [El Bied, 2000]. La Figure 3.48 illustre le comportement global au cours de l'essai triaxial pour ces trois échantillons. En effet, nous constatons que le comportement en faible ou en grande déformation est globalement identique, ce qui paraît également logique, car on a conservé le même nombre de contact. Ce point prouvant que le comportement global ne dépend pas crucialement de la taille de l'échantillon. Donc, l'échantillon doit posséder un nombre d'éléments suffisamment modeste (nombre de contact suffisant) pour que l'ouvrage puisse être modélisé avec des éléments de même taille caractéristique, sans que le nombre de grains modélisant l'ouvrage soit prohibitif. Imaginons un grain de taille moyenne toute petite, ce qui fait au total un nombre d'éléments énorme pour modéliser un ouvrage réel... La simulation d'essais triaxiaux pour la calibration de la loi de comportement du model est réalisé sur des échantillons dont la taille est nettement supérieure à l'essai triaxial expérimental [Belheine *et al.*, 2008], [Plassiard, 2007], [Calvetti *et al.*, 2006], [Chareyre, 2003], [Hentz, 2003], [Deluzrache, 2004].

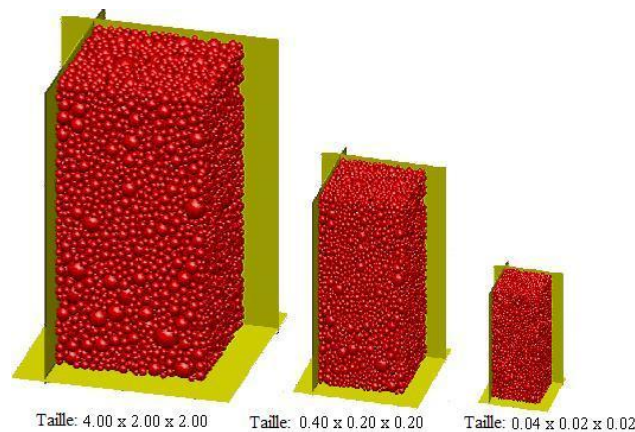


Figure 3. 36. Les différentes tailles géométriques des échantillons à modéliser (en mètre).

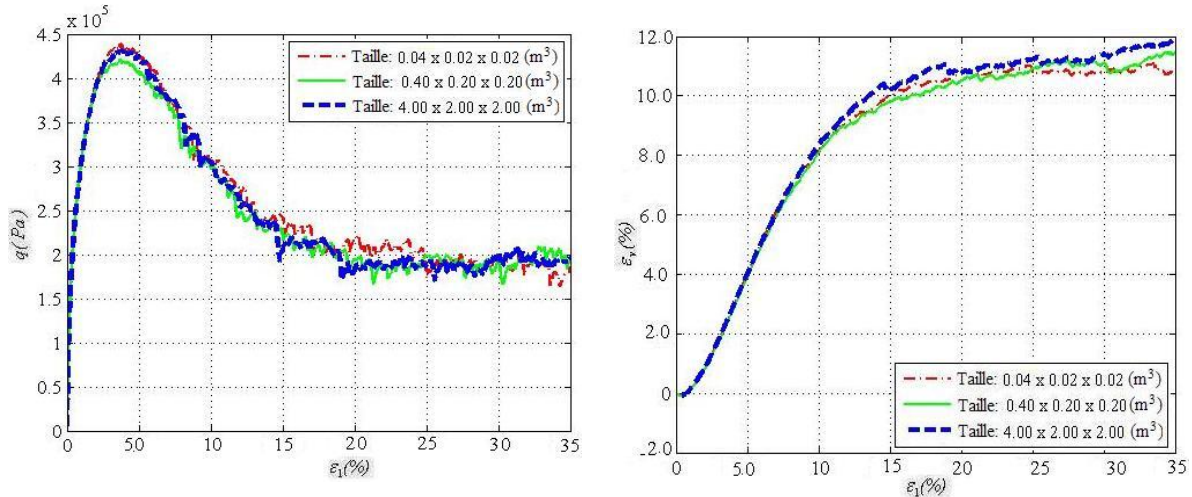


Figure 3. 37. Evolution des déviateurs de contrainte et déformation volumique en fonction de la déformation axiale pour les trois tailles géométriques.

3.5.7.5.6. Influence du rayon d'interaction

Les Figure 3.49 et 3.50 illustrent le comportement global ainsi que l'évolution du nombre de coordinance au cours de la simulation de l'essai triaxial pour deux rayons d'interactions différents ($D_a = 1.1$ et $D_a = 1.0$), toutes choses égales par ailleurs. L'influence du rayon d'interaction est évidente, essentiellement pour le comportement en petites déformations. Les caractéristiques du comportement élastique initial en petite déformation, le module de Young et le coefficient de Poisson sont données sur le Tableau 3.4 ci-dessous. En effet nous constatons que le module de Young diminue fortement avec le rayon d'interaction, en même temps que le nombre de coordinance. On constate également que le coefficient de poisson est légèrement plus grand lorsque le plus petit rayon est utilisé, ce qui paraît logique, car dans ce cas, les éléments sont moins contraints les uns par les autres. Globalement le milieu possède un domaine de contractance d'autant plus important que le rayon d'interaction est plus petit. Il apparaît aussi que le déviateur au pic augmente avec l'augmentation du rayon d'interaction. Cela se justifie par l'augmentation du nombre de contacts par particule. Le milieu avec un rayon d'interaction $D_a = 1.0$ représente un angle de frottement de 42° environ et le milieu ayant un rayon plus important représente un angle de frottement nettement supérieur.

Rayon d'interaction	Module de Young (MPa)	Coefficient de Poisson (-)
$D_a = 1.0$	92.45	0.294
$D_a = 1.1$	157.70	0.263

Tableau 3. 4. Synthèse de la dispersion des résultats réalisée sur les quatre échantillons réputés identiques

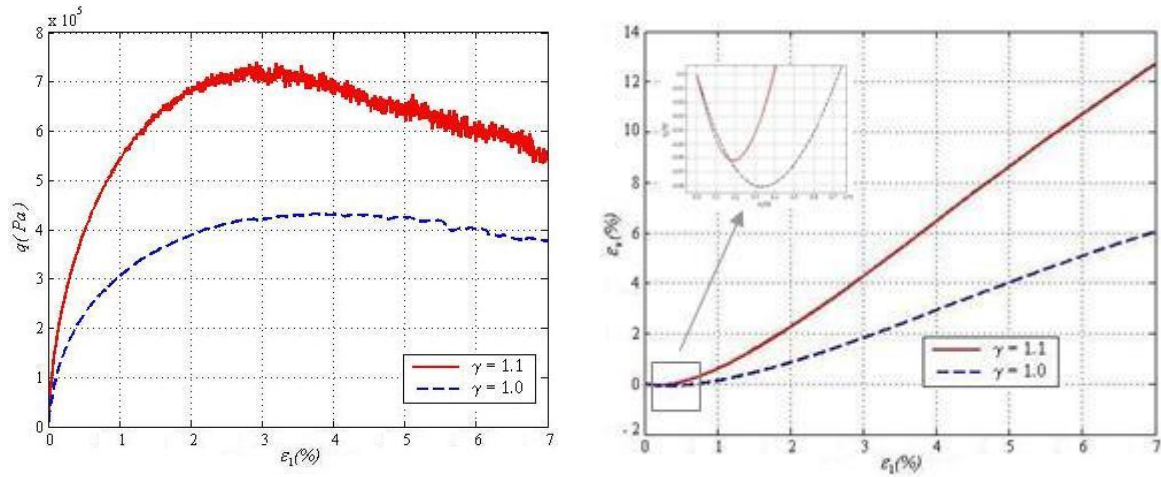


Figure 3. 38. Influence du rayon d'interaction sur le comportement déviatoire.

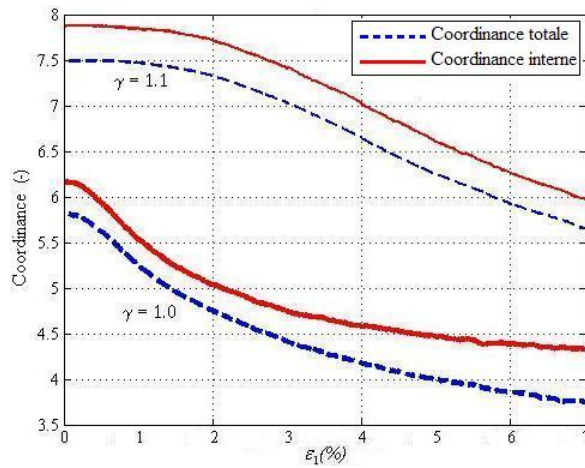


Figure 3. 39. Evolution de la coordination pour deux rayons d'interaction différents au cours de la simulation du comportement déviatoire.

3.5.8. Dépendance micro-macro

3.5.8.1. Introduction

L'influence des paramètres caractérisant l'aspect géométrique a été étudié dans les sections précédentes. Du point de vue général le modèle numérique prédit bien le comportement mécanique sous sollicitations triaxiales vu au laboratoire. Il a été vérifié qu'un échantillon composé de 10 000 éléments est suffisant pour assurer quelques aspects de base tels que ; une homogénéité suffisante et une bonne isotropie géométrique. On a indiqué aussi que le bon choix de la distribution granulométrique, c'est-à-dire la prépondérance des éléments de petites tailles, nous permet d'assurer une porosité numérique égale à la porosité réelle. C'est un résultat intéressant qui constitue une simplification au niveau des paramètres du modèle à étudier, car certaines études le considèrent comme paramètre à examiner. On a vu aussi que le comportement mécanique est indépendant de la taille des éléments, on peut utiliser donc le même jeu de paramètres jugé optimal pour une autre taille caractéristique des éléments.

Le but de cette partie est d'étudier la sensibilité des propriétés de résistance globales vis-à-vis des propriétés locales au niveau des contacts. Pour cela, les paramètres sont testés un à un sur un assemblage dit de référence. On étudie l'influence de chacun de ces paramètres lors de l'application de la compression triaxiale. Deux aspects du comportement macroscopique ont été examinés. Le premier concerne le comportement initial en petites déformations. Dans ce cas, on définit un module élastique $E_{1\%}$ correspondant au module apparent lorsque le déviateur appliqué atteint 1% de la pression de confinement. Et de même, on définit un coefficient de Poisson $\nu_{1\%}$ correspondant à la même valeur du déviateur appliqué. Expérimentalement dans [Biarez et Hicher, 1994], le comportement est considéré purement élastique pour une déformation inférieure à 10^{-4} . Il a été même constaté que le module élastique était constant pour des valeurs de déformation moindre. Le second aspect concerne le comportement à la rupture en grandes déformations (pic et post-pic). Les observations conçues de ces deux aspects nous permettent d'étudier l'impact de chaque paramètre du modèle sur le comportement globale. Une procédure de calibration est ensuite mise en place afin de déterminer les valeurs des paramètres locaux définissant le modèle numérique qui permettront une prédiction optimale des réponses expérimentales.

3.5.8.2. Influence de la porosité initiale de l'échantillon

Pour déterminer l'influence de la porosité initiale sur le comportement macroscopique de l'assemblage granulaire, trois simulations triaxiales ont été menées sur des échantillons ayant différentes porosité initiale ($n = 0.30, 0.35, 0.40$). Les simulations ont été effectuées avec et sans MTL. Elles montrent clairement l'influence de la MTL sur le comportement macroscopique. Sur la Figure 3.51, représentant l'évolution du nombre de coordination en fonction de la déformation axiale, on constate que les milieux denses possèdent une coordination initiale plus élevée et que les deux configurations avec et sans MTL ont des similitudes qualitatives. En effet, on retrouve que le nombre de coordination initial vaut à 7.31 pour un milieu dense ($n = 0.30$) et à 4.9 pour un milieu lâche ($n = 0.40$). Il décroît ensuite pour atteindre un plateau et sature à une valeur asymptotique. Il semble indépendant de l'état initial. Sur la Figure 3.52, on constate, une dépendance linéaire entre le module élastique initial et le coefficient de Poisson vis-à-vis de la porosité initiale. Il est bien lisible que, plus le milieu est dense plus le module élastique initial est élevé et un coefficient de poisson conforme aux résultats expérimentales. Les milieux lâches présentent un coefficient de Poisson plus faible que ce lui des milieux denses [Holtz, 1991]. Le premier aspect est directement lié à la coordination. On note un module d'élasticité initial proche pour les deux configurations avec et sans MTL. Ce qui fait, La MTL n'a pas d'influence prépondérante sur le comportement initial.

L'évolution des déviateurs et la variation volumique correspondant à différentes porosités initiales est présentée sur la Figure 3.53. Elle montre une influence de la MTL sur les résultats. Les deux configurations présentent une tendance similaire ainsi que des similitudes qualitatives durant les trois simulations. On retrouve bien une augmentation du déviateur au pic avec la diminution de la porosité. Résultat conforme aux résultats expérimentaux [Biarez et Hicher, 1994] et numériques [Chareyre, 2003], [Plassiard, 2007]. De même pour la dilatance au pic, diminue avec l'augmentation de la porosité. Mais le déviateur évolue ensuite vers une valeur résiduelle qui semble indépendante de l'état initial. Simultanément les porosités des échantillons tendent vers la même limite. Ils ont tous approximativement la

même densité en fin de simulation, que soit le milieu dilatant ou contractant. On retrouve donc par la simulation la notion d'état critique, état limite rejoint par le matériau indépendamment de son état initial et cela pour les deux configurations avec et sans MTL. Résultats numériques déjà signalés par [Mahboubi et al., 1996], [Chareyre, 2003] et [Plassiard, 2007]. Le comportement déviatoire à l'état résiduel et la porosité sont indépendants de l'état initial. Ce résultat est conforme aux observations expérimentales [Biarez et Hicher, 1994].

Comme signalé au début, la MTL influe sur les résultats des simulations. Elle modifie le comportement à l'état résiduel et au pic. On trouve un déviateur résiduel dans le cas sans MTL vaut à 105 kPa qui correspond à un angle de frottement résiduel égale à 20° . Les simulations réalisées avec MTL donnent un déviateur résiduel égal à 195 kPa correspondant à un angle de frottement résiduel égal à 30° . Une valeur plus en accord que la première avec les résultats expérimentaux [Biarez et Hicher, 1994]. La Figure 3.54 représente l'influence de la porosité sur le comportement au pic, on constate une dépendance linéaire entre la porosité initiale et le déviateur au pic q^{pic} pour les deux configurations.

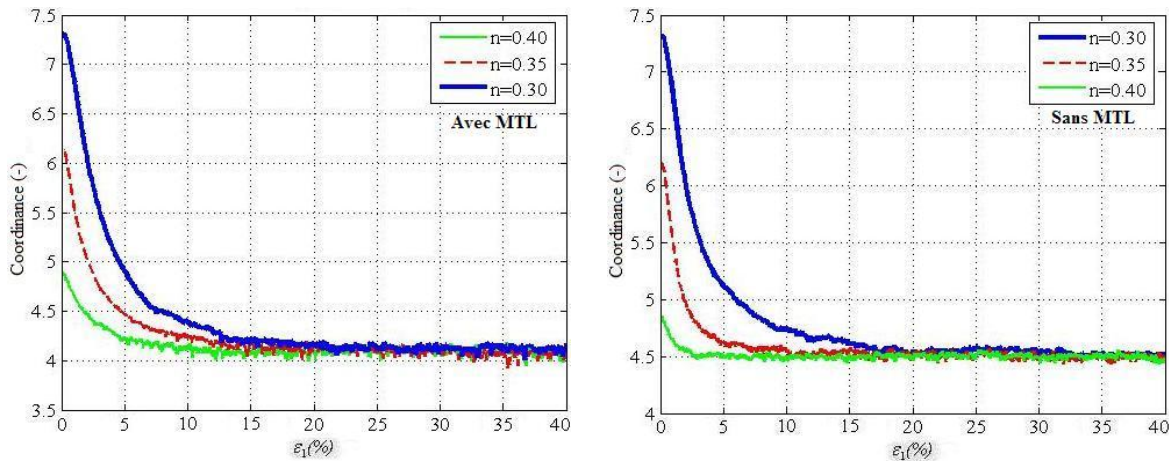


Figure 3. 40. Evolution de la coordination en fonction de la déformation axiale pour les différentes valeurs de la porosité.

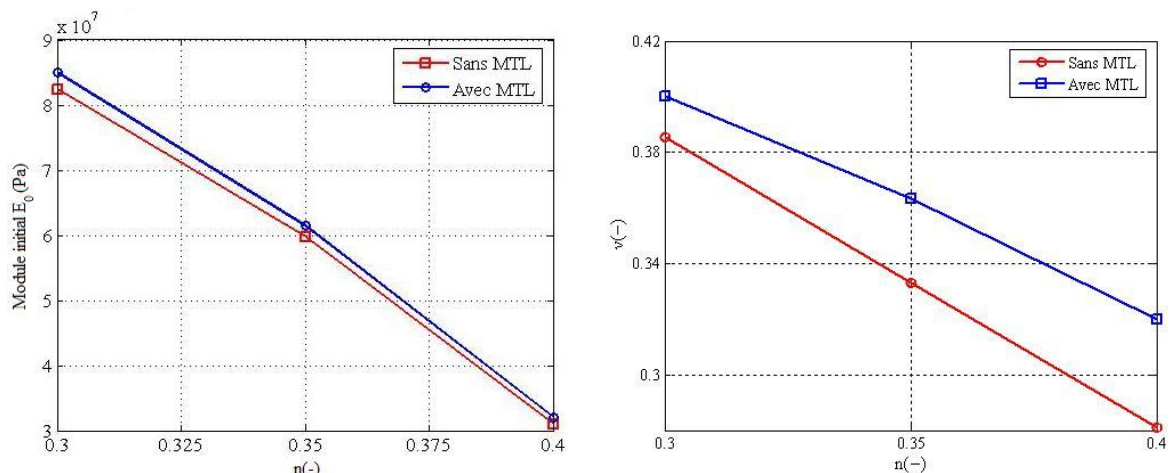


Figure 3. 41. Influence de la porosité sur les caractéristiques élastiques. Dépendance du module élastique initial E_0 et du coefficient de Poisson ν .

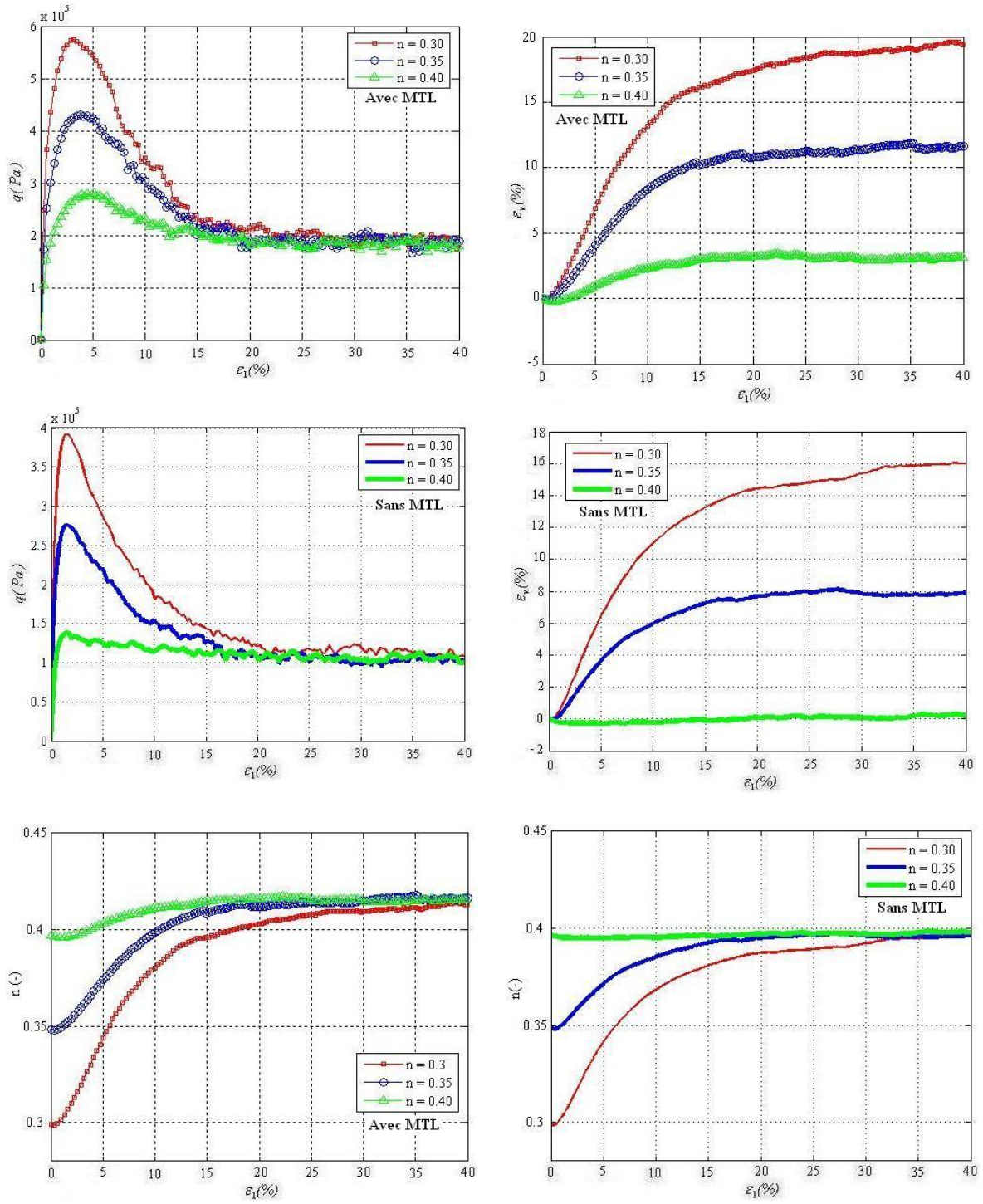


Figure 3. 42. Simulations d'essais triaxiaux pour différentes porosités initiales.

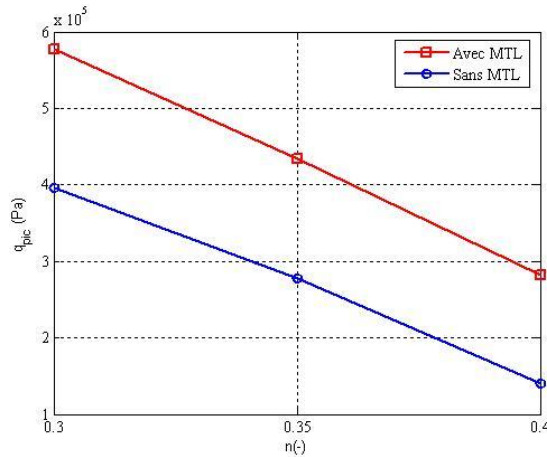


Figure 3.43. Influence de la porosité sur le déviateur au pic q^{pic} .

3.5.8.3. Influence de la pression de confinement

La compressibilité d'un milieu granulaire est, en premier lieu, fonction de sa densité relative initiale, de sa nature minéralogique et du niveau de contrainte auquel il est soumis. Dans ce qui suit on s'intéresse qu'à l'influence de la pression de confinement sur la réponse macroscopique. Pour les niveaux de contrainte classique (inférieurs à 1MPa), il est admis que la déformation des sables est pratiquement instantanée. Par contre plusieurs auteurs mettent en évidence un effet du temps sur la déformation des sables soumis à de fortes contraintes de confinement [Colliat-Dangus, 1986]. Notre étude se place dans le cadre des confinements inférieurs à 1MPa. Quatre essais triaxiaux sont effectués pour une gamme de contrainte de confinement allant de 50 kPa à 300 kPa.

Dans [Biarez et Hicher, 1994], le module élastique initial (correspondant à $\varepsilon_a = 10^{-5}$) est dépendant de la pression de confinement pour les milieux granulaires. Sa valeur varie avec cette pression approximativement comme une loi de puissance avec un exposant entre 1/2 et 1/3. La Figure 3.55, illustre l'évolution du rapport des contraintes q/p et la variation volumique en fonction de la déformation axiale. Afin de vérifier l'hypothèse citée par [Biarez et Hicher, 1994], les modules élastiques initiaux sont pris dans une gamme de très faible déformation. Dans l'ordre de $\varepsilon_a = 10^{-5}$, pour que la pente $dq/d\varepsilon_a$ se rapproche du module initial E_0 , et la pente $d\varepsilon_v/d\varepsilon_a$ de la quantité $(1-2\nu_0)$. La Figure 3.56 montre l'évolution du module initial et le coefficient de Poisson en fonction de la pression de confinement. Pour le coefficient de Poisson et conformément aux observations classiques, l'augmentation de la pression de confinement n'a pas d'influence. L'effet du confinement s'avère aussi quasiment nul sur le module initial, pour les deux type de loi de comportement avec et sans MTL. Des résultats présentant des tendances similaires ont été rapportés dans [Plassiard, 2007]. Cette légère influence pourrait être liée à l'évolution modérée de la coordinance. Ceci est bien clair sur la Figure 3.57, une légère augmentation du nombre de contact avec la pression de confinement pour les deux cas avec ou sans MTL. Ce dernier aspect est l'une des limitations de la loi de comportement élastique linéaire qui régit l'interaction entre particules. Dans [Chevoir et Roux, 2005], avec la loi de Hertz, une dépendance entre le module initial et la pression de confinement a été observée.

Par contre, si on s'intéresse à l'évolution du module sécant E_{sec} , correspondant au régime $\varepsilon_a = 0.1\%$ (valeur faible en comparaison avec celle à la rupture) pour l'ensemble des simulations (Figure 3.58), l'analyse des résultats de la Figure 3.59 met clairement en évidence la dépendance du comportement de la pression de confinement. Le module sécant E_{sec} calculé à $\varepsilon_a = 0.1\%$ s'étend dans la gamme 89 MPa- 175 MPa, pour une plage de pression de confinement de 50 kPa à 300 kPa. La dépendance obtenue suit une loi de puissance avec un exposant égale à 1/2. Ce résultat est conforme aux observations expérimentales. Ce module peut suivre la même loi que le module initial E_0 . La seule différence réside dans le fait que l'exposant de la puissance varie avec la valeur de déformation pour la quelle le module est calculé [Biarez et Hicher, 1996].

L'évolution de la coordinance avec la déformation axiale est présentée sur la Figure 3.60. On observe pour les deux lois de comportement avec et sans MTL, qu'avec l'augmentation de la pression de confinement, le milieu granulaire trouve son équilibre avec un nombre de coordinance élevé. Cette observation rejoint celle de [Sitharam, 1999]. Autrement dit, l'augmentation de la pression de confinement fait compacter de plus en plus le milieu granulaire, ce qui fait accroître le nombre de contact entre les particules. Il décroît ensuite pour atteindre un plateau pour chaque simulation. Ceci implique que dans le domaine de grande déformation, le comportement est indépendant de la coordinance et que le nombre de contact gagné égale au nombre de contact perdu. Si on s'intéresse maintenant, à l'évolution du rapport des contraintes q/p en fonction de la déformation axiale (Figure 3.61), nous constatons que celui-ci décroît lorsque la contrainte de confinement augmente, ce qui traduirait une diminution du frottement. Des résultats numériques et expérimentaux présentant des tendances similaires ont été rapportés dans [Plassiard, 2007], [Ben Hmed, 2004], respectivement. La valeur au pic des courbes $(\varepsilon_a, q/p)$ est plus élevée dans le cas avec MTL, par contre dans le cas sans MTL, ce maximum est approximativement constant. La présence de la MTL améliore la résistance au cisaillement. Concernant le comportement en grandes déformations, l'expérimentation indique que les comportements à de faible pression de confinement (inférieurs à 1MPa), sont superposables [Weber, 1966], [Biarez et Hicher, 1996]. Cette observation n'est pas vérifiée par nos résultats. Les courbes, que ce soit la MTL intervient ou non, ne sont pas rigoureusement superposables, mais qu'elles forment un fuseau étroit, bien que l'éventail de variation de la pression de confinement ait été volontairement choisi un peu large (un rapport de 6 entre la valeur minimale et la valeur maximale de la pression de confinement). La valeur de q/p au palier semble indépendante de la pression de confinement.

En ce qui concerne les variations volumiques, la contrainte de confinement appliquées a, la aussi, et conformément aux observations classiques, un effet considérable sur les propriétés de contractance et de dilatance du matériau. On remarque que l'augmentation de la pression de confinement a pour effet d'augmenter la phase de contractance et par conséquent de diminuer la phase de dilatance.

Sur la Figure 3.62 sont tracées les enveloppes de rupture des deux lois de comportement avec MTL et sans. Dans le cas sans MTL, l'enveloppe est une droite qui tangente parfaitement les cercles de Mohr. L'angle de frottement correspondant vaut environ 34.5° . Le modèle sans MTL régit localement par l'angle de frottement μ est capable de représenter le critère de rupture de Mohr-Colomb pour un milieu dense. Des résultats analogues ont été observé par [Plassiard, 2007] et [Sibille, 2006]. En ce qui concerne, le comportement ou la

MTL intervient, le critère de rupture est aussi décrit par une droite passant par l'origine. L'angle de frottement vaut à 40.3° . Comme indiqué au début, la MTL améliore la résistance au cisaillement du milieu.

Dans la suite du travail, les simulations sont effectuées pour une pression de confinement de 100 kPa. Les enveloppes de rupture pour les deux lois avec ou sans MTL sont décrites par une droite passant par l'origine.

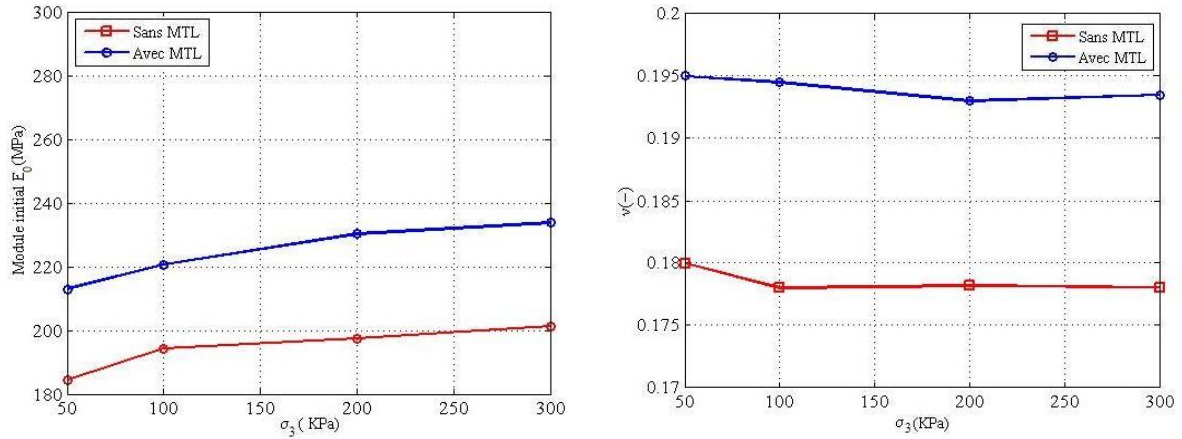


Figure 3. 44. Influence de la pression de confinement sur le comportement initial $\varepsilon_a = 10^{-5}$

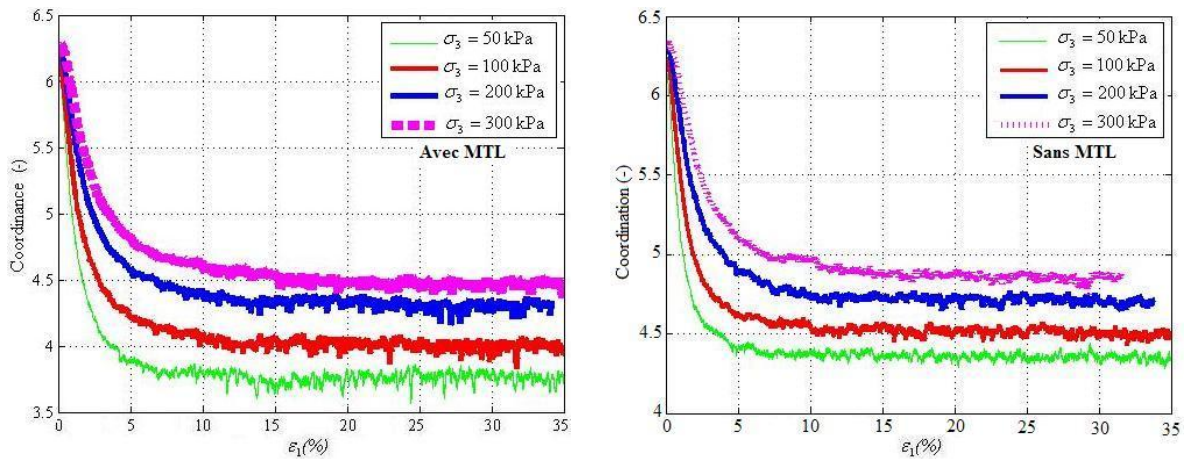


Figure 3. 45. Evolution de la coordination en fonction de la pression de confinement.

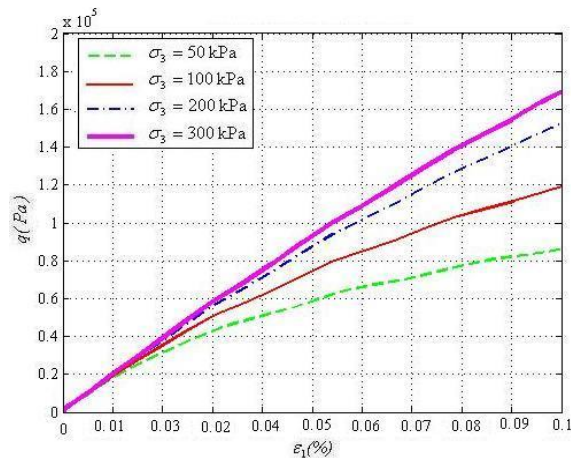


Figure 3. 46. Agrandissement de la partie initiale de la phase déviateur au régime correspondant à $\varepsilon_a = 0.1\%$ pour les différentes pressions de confinement.

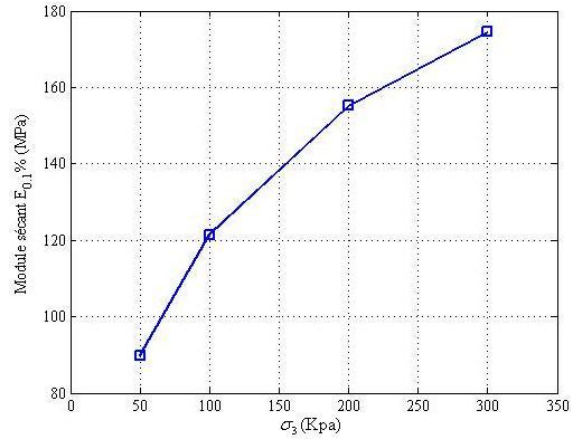


Figure 3. 47. Dépendance du module sécant de la pression de confinement pour une déformation axiale $\epsilon_a = 0.1\%$.

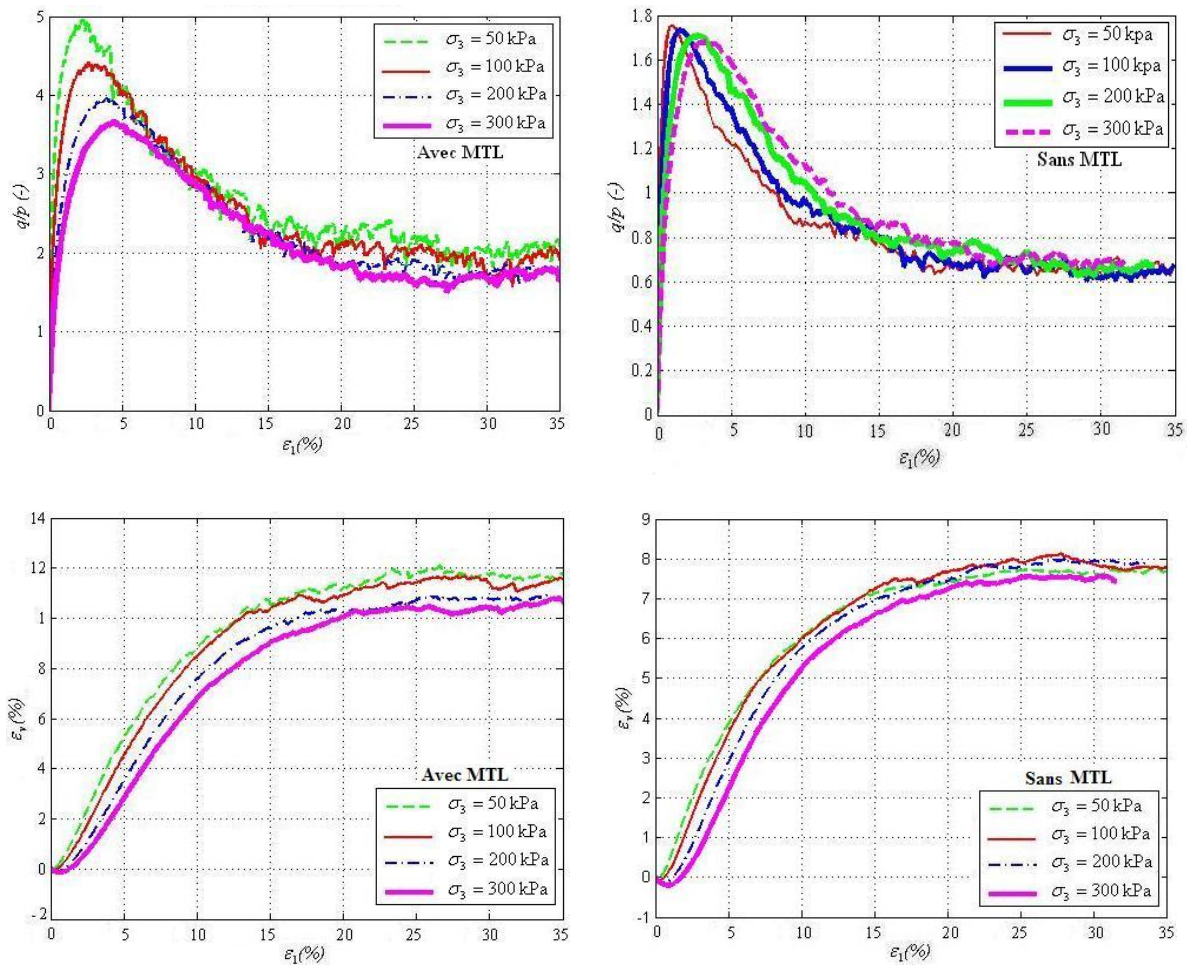


Figure 3. 48. Influence de la pression de confinement sur le rapport des contraintes q/p et sur la variation volumique en fonction de la déformation axiale. Les simulations sont effectuées avec et sans MTL.

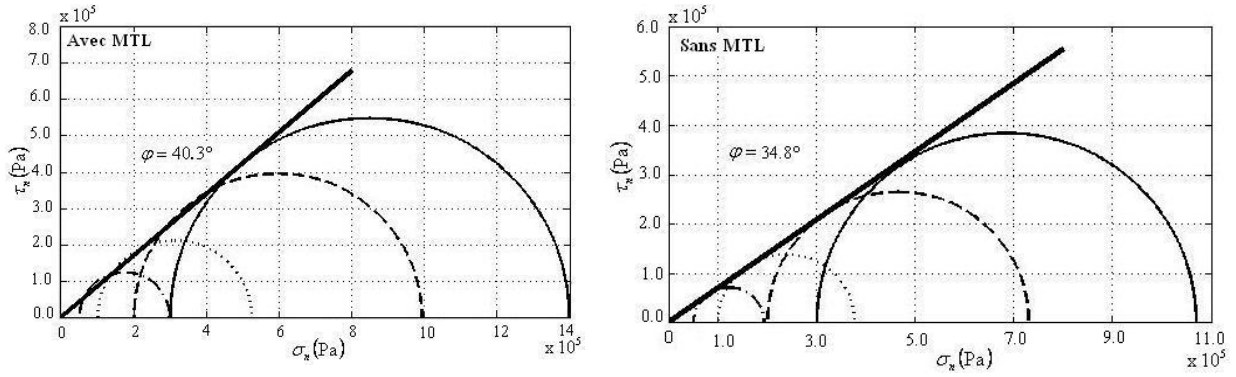


Figure 3. 49. Figure 3.63. Enveloppe de rupture dans le plan de Mohr-Coulomb pour une gamme de pression de confinement [50, 100, 200, 300] inférieur à 1 MPa. Les simulations sont réalisées avec et sans MTL.

3.5.8.4. Relation entre les paramètres locaux du modèle et le comportement globale

3.5.8.4.1. Influence de la raideur normale k^n

Le paramètre k^n détermine la rigidité normale d'un contact. Plus k^n sera faible, pour une pression de confinement σ_3 donnée, plus le nombre de contact sera élevé. A ce titre, il peut être intéressant de rappeler les rigidités mises en œuvre par différents auteurs. On liste dans le Tableau 3.5 quelques valeurs de la rigidité normale utilisée par certains auteurs pour des simulations de compressions biaxiales et triaxiales avec des lois de contact normales élastiques linéaires.

	N ^{bre} d'élément	Pression de confinement σ_3	Rigidité normale k^n
[Oda et Iwashita, 1997] en 2D.	3960	1.32×10^5 Pa	6.00×10^7 N/m.
[M.Shodja et G.Nezami, 2003] en 2D.	200-300	3.00×10^2 Pa	1.00×10^5 N/m
[Sitharam, 2002] en 3D.	1000	2.00×10^2 Pa	1.00×10^5 N/m
[Sitharam, 1999] en 2D	1000	1.00×10^2 Pa	$(1.5 - 2.5) \times 10^9$ N/m
[Achmus, 2003] en 3D	9992	1.00×10^2 Pa	2.00×10^7 N/m
[Kishino, 2003] en 3D	360	1.00×10^2 Pa	2.00×10^6 N/m
[Calvetti et al., 2003] en 3D	3500	1.00×10^2 Pa	1.00×10^5 N/m
[Plassiard, 2007] en 3D	10000	1.00×10^2 Pa	1.7×10^8 N/m ²

Tableau 3. 5. Quelques valeurs de k^n relevées dans la littérature

Dans ce qui suit, on veut déterminer l'influence de ce paramètre sur la réponse macroscopique de l'échantillon à modéliser. Cinq échantillons sont réalisés avec des raideurs normales respectives de 6×10^7 , 10^8 , 6×10^8 , 10^9 et 6×10^9 Pa. Sur la Figure 3.64, on représente l'évolution du module de Young E_0 et du coefficient de Poisson ν en fonction de la raideur normale k^n dans un repère logarithmique. Le logarithme du module de Young est

constaté varie linéairement en fonction du logarithme de k^n . Le coefficient de Poisson possède aussi une dépendance linéaire vis-à-vis du logarithme de ce paramètre. Les réponses macroscopiques ayant de fortes valeurs de k^n supérieures ou égales à 6×10^8 produisent presque le même coefficient de Poisson ν . Sa variation devient marginale, d'où une indépendance entre ν et k^n . Le module élastique du matériau à modéliser est compris entre 60 MPa et 130 MPa. Cet intervalle correspond à une gamme de valeur de k^n comprise entre 6×10^8 et 6×10^9 Pa. La dépendance de $\log E_0$ en fonction de $\log k^n$ est linéaire dans cet intervalle, ce qui implique de réaliser juste une interpolation dans le graphe $(k^n; E_0)$ pour définir la valeur appropriée de k^n .

L'évolution des déviateurs dans une gamme de déformation égale à 35% est donnée par la Figure 3.65. Pour de plus forte valeur de k^n , la montée en charge est bien plus raide. On constate aussi que k^n ayant une valeur supérieure à 10^8 Pa ne semble pas beaucoup influencer le comportement macroscopique à l'état résiduel. Le comportement au pic n'est pas tout à fait constant pour des valeurs de k^n supérieure à 10^8 Pa, il correspond à une erreur de l'ordre de 1° sur l'angle de frottement au pic ce qui est acceptable.

Cependant, la rigidité normale k^n , dans la gamme des valeurs examinées n'influe ni sur le comportement au pic ni sur le comportement à l'état résiduel. En revanche, une augmentation de sa part engendre un module de Young plus fort et un état de déformation contactant moins important.

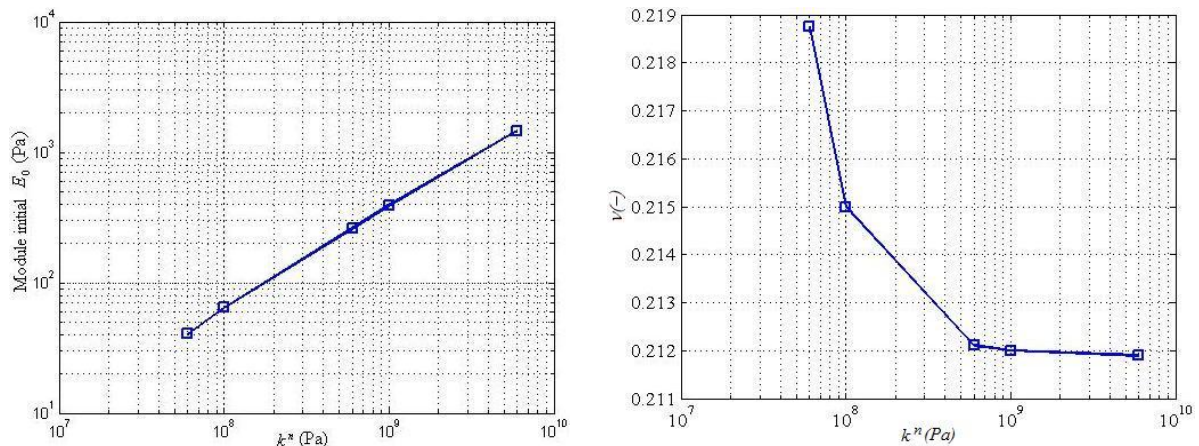


Figure 3. 50. Dépendance du comportement élastique global de la rigidité normale local k^n . Module de Young (à gauche) et coefficient de Poisson (à droite).

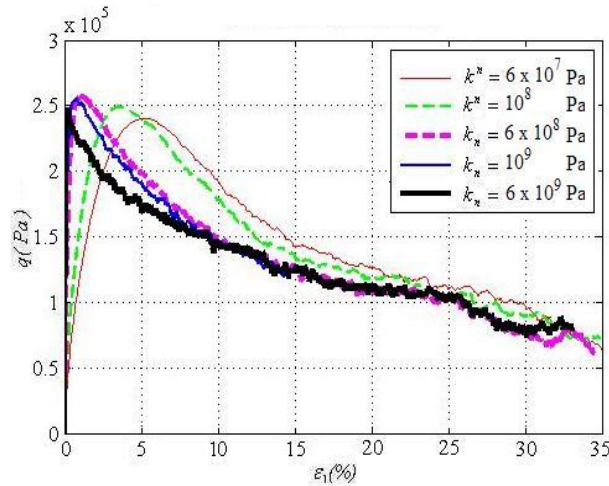


Figure 3. 51. Evolution du déviateur de contrainte au cours des simulations pour différentes valeurs de k^n

3.5.8.4.2. Influence de la raideur tangentielle k^s

On veut étudier l'influence de la raideur tangentielle locale k^s sur le comportement macroscopique de l'échantillon numérique. L'influence de ce paramètre est analysée en introduisant un paramètre α défini comme étant le rapport entre la rigidité tangentielle et la rigidité normale d'un contact. α est donné ci-dessous par :

$$\alpha = \frac{k^s}{k^n} \quad 3.12$$

Des essais sont menés pour six valeurs de α : 0.01, 0.04, 0.3, 0.5, 0.7. D'après [Bathurst, 1988] et [Mindlin, 1953], ce rapport a un rôle déterminant sur le comportement en général et sur ν en particulier. D'après la loi de Hertz-Mindlin pour deux sphères élastiques en contact [Mindlin, 1953], $2/3 < \alpha < 1$. Si $\alpha > 1$, on peut obtenir un comportement physiquement aberrant, caractérisé par $\nu < 0$.

Sur la Figure 3.66, on représente l'évolution du module de Young E_0 et le coefficient de Poisson ν en fonction de ce rapport. L'évolution de E_0 en fonction de α est quasiment linéaire. On constate globalement qu'une augmentation de α engendre une augmentation du module initial E_0 , propriété déjà mise en évidence analytiquement en 2D [Walton 1987] et en 3D [Cambou, 1995], et aussi numériquement en 2D [Chareyre, 2003] et en 3D [Cambou, 1995], [Plassiard, 2007]. En effet, la diminution de α minimise les efforts tangentiels et engendre un échantillon globalement moins rigide. Le coefficient de Poisson ν varie aussi linéairement en fonction de α . On constate, que ν augmente avec la diminution de α . Cette observation rejoint celle de Chareyre [Chareyre, 2003] En effet, la calibration de k^s reproduisant le coefficient de Poisson souhaité est donc aisée. Les valeurs de ν obtenues par notre modèle discret sont cependant inférieures à 0.25.

Les réponses macroscopiques en terme contrainte-déformation et variation volumique données sur la Figure 3.67 montrent clairement une dépendance négligeable vis-à-vis de α . L'influence de α n'est sensible que si elle est inférieure ou égale à 0.01. La valeur du

déviateur se distingue des autres valeurs présentées. Dans le domaine des grandes déformations, les courbes se superposent l'une sur l'autre aussi bien en contraintes qu'en déformations. Cet aspect reflète la quasi indépendance du comportement à l'état de rupture et à l'état résiduel du rapport α .

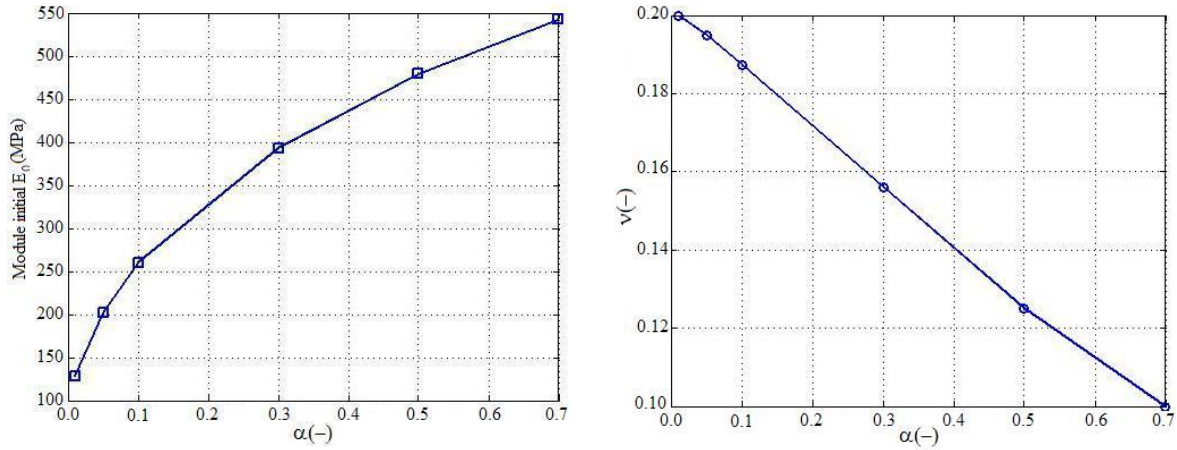


Figure 3. 52. Evolution du module initial E_0 (à gauche) et du coefficient de Poisson ν (à droite) en fonction de α .

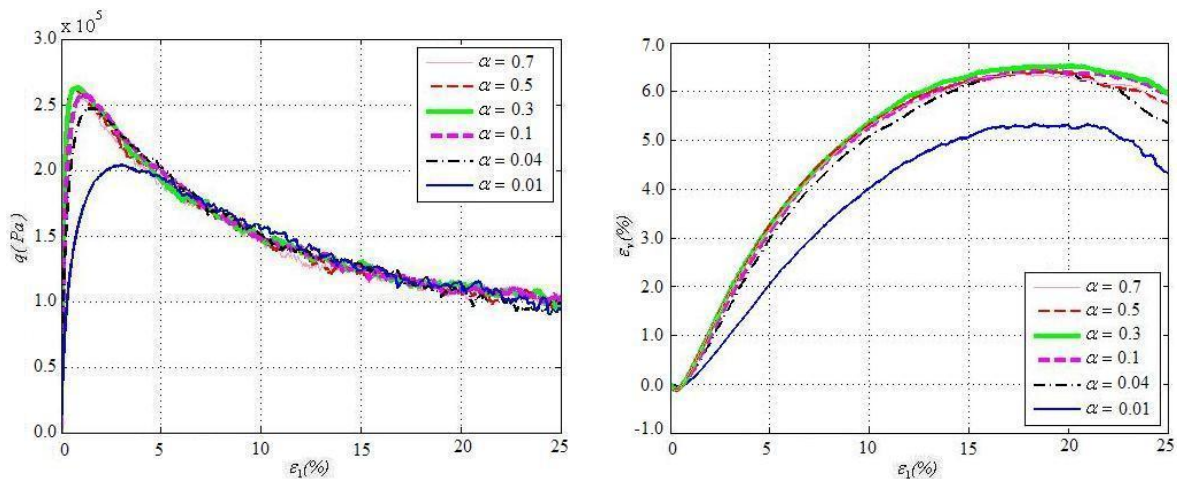


Figure 3. 53. Influence du rapport α sur le comportement déviatoire.

3.5.8.4.3. Influence du frottement local μ

L'angle de frottement local μ entre deux particules est caractéristique du critère de rupture. Sa diminution facilite le mécanisme de glissement entre les éléments de l'échantillon. Ce paramètre intervient dans l'apparition des irréversibilités en glissement, il doit donc influencer la réponse du modèle lors des simulations triaxiales. Cette partie a pour objectif de discuter et d'éclaircir ces dépendances.

Des simulations de l'essai triaxial sont menées pour des valeurs de l'angle de frottement local de 15, 25, 35 et 45°. La Figure 3.68 indique une quasi-indépendance entre la partie

initiale, définie par le module élastique initiale E_0 et le coefficient de Poisson ν , et l'angle de frottement local, ce qui est conforme à la théorie de l'élasticité. Cette observation est en accord avec celles faites sur des essais en 2D [Chareyre, 2003], et en 3D [Plassiard, 2007], [Salot, 2007].

Certains travaux dans la littérature suggèrent des relations entre l'angle de frottement local μ et l'angle de frottement global au pic φ^{pic} . Une équivalence a été proposée entre ces deux paramètres, dont les relations semblent complexes et qui demandent à être validées sur un plus grand nombre de cas [Emeriault, 1996]. Dans [Chareyre, 2000], et pour des assemblages en 2D à maillage régulier une dépendance linéaire entre φ^{pic} et μ a été proposée. Ultérieurement, l'auteur indique que cette relation n'est plus linéaire pour des éléments circulaires à rotations libres [Chareyre, 2003]. Le même résultat a été observé par [Mahboubi et al., 1996] et [Hainbüchner et al., 2003]. Sur la Figure 3.69, la dépendance entre l'angle de frottement local et global est schématisée pour plusieurs auteurs que soit en 2D ou en 3D. La relation n'est pas linéaire. Il existe une saturation de φ^{pic} lorsque μ augmente limitant les valeurs maximales de φ^{pic} . A l'inverse, φ^{pic} ne s'annule pas avec μ .

Par contre, un autre résultat indique le contraire. Une dépendance linéaire entre ces deux paramètres a été observée pour un assemblage composé d'éléments disques à rotation bloquée [Comborde, 1999]. Il serait aimable et intéressant de vérifier cet aspect dans le cas des assemblages tridimensionnels composés de sphères. Mais dans notre cas, on ne peut vérifier cet aspect, car on se place dans le cadre des simulations tridimensionnelles à rotations libres ou contrôlées en faisant intervenir la MTL. Il semble finalement que la seule méthode permettant d'ajuster l'angle de frottement global est d'effectuer des tests pour une large gamme du frottement local. Les résultats sont présentés sur la Figure 3.70, et superposés aux résultats de [Plassiard, 2007]. Ils sont en général en bon accord.

La Figure 3.71, présente l'évolution du déviateur et la déformation volumique en fonction de la déformation axiale, pour divers angles de frottement. Il est bien clair, qu'une augmentation du frottement local engendre un déviateur au pic plus fort, une dilatance supérieure et une faible augmentation du déviateur résiduel (pour la gamme des valeurs étudiées). Ce dernier semble quasi-indépendant. Localement, le cisaillement macroscopique se traduit par le phénomène de glissement et de roulement inter-granulaire. Une valeur supérieure du frottement local génère des contacts plus résistants et permet un nombre de contact plus faible ce qui favorise le mécanisme de roulement et l'échantillon tend à se dilater. Ce résultat a été déjà observé par [Mahboubi, 1996], [Chareyre, 2003], [Salot, 2007], [Plassiard, 2007]. L'angle de frottement résiduel correspondant - $\varphi_{res} \approx 20^\circ$ - est proche de celui obtenu par [Plassiard, 2007]. En comparant cette valeur à celle obtenue en faisant intervenir la MTL, φ_{res} vaut dans les environs de 35° . Une valeur plus réaliste et proche au cas des matériaux granulaires. Les angles de frottement critiques donnés dans la littérature pour les sols non cohésifs comme des sables valent :

- Pour un sable moyen à fin du lagon de Venise de 34° à 39° [Cola et Simonini, 2002],
- Pour un sable d'Athabasca de l'ordre de 31° [Samieh et Wong, 1998],
- Pour un sable d'Hustun de 30 à 34° [Lancelot et al., 2006].

Le modèle discret avec des éléments sphériques à rotation libre n'est donc pas en mesure d'atteindre l'angle de frottement résiduel d'un sol granulaire classique. Il est nécessaire d'introduire des modifications afin de corriger cet aspect. Le blocage des rotations des

éléments circulaires ou sphériques permet d'atteindre un angle de frottement global réaliste, mais il ne traduit pas forcément la réalité physique de la cinématique à l'échelle des grains [Calvetti et al., 2003], [Sibille, 2006]. D'autres auteurs ont cherché à affiner le modèle géométrique des grains. Nous trouvons par exemple, en 2D, Chareyre [Chareyre, 2003] a collé les disques deux par deux pour n'en faire plus qu'un seul grain, Olivera [Sibille 2006] utilise des grains de forme elliptique et allonso-Marroquin [Sibille, 2006] de forme polygonale. Un autre moyen, et de modifier la loi de comportement par l'insertion d'un moment entre deux éléments en contact jusqu'à une valeur seuil [Iwashita et al., 1996]. Enfin, l'étude de l'angle de frottement montre que ce paramètre n'influe pas sur le comportement initial défini par (E_0, ν) ni sur le comportement à l'état résiduel. En revanche, une forte dépendance avec le déviateur au pic et la dilatance.

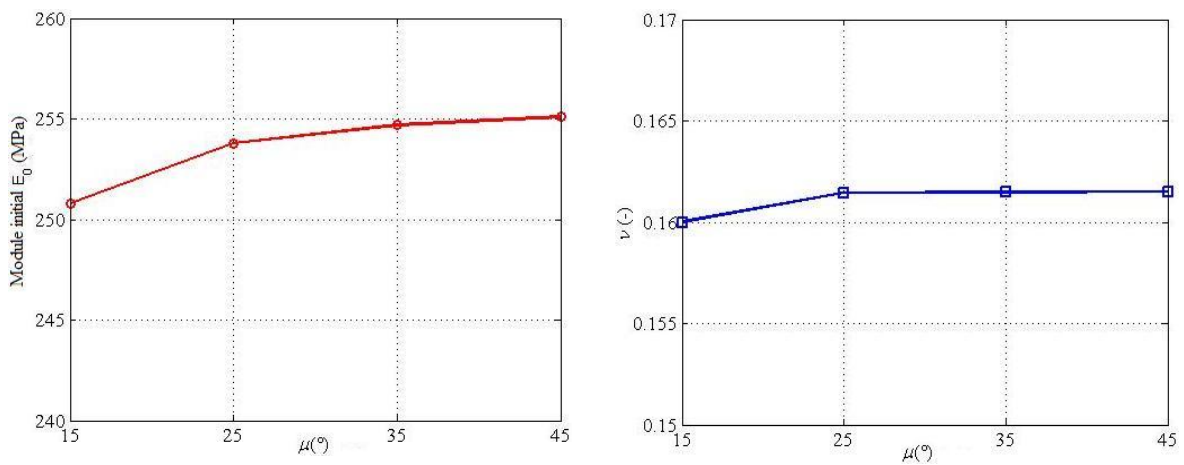


Figure 3. 54. Dépendance entre l'angle de frottement local μ et le comportement initial défini par le module initial E_0 (à gauche) et le coefficient de Poisson ν (à droite).

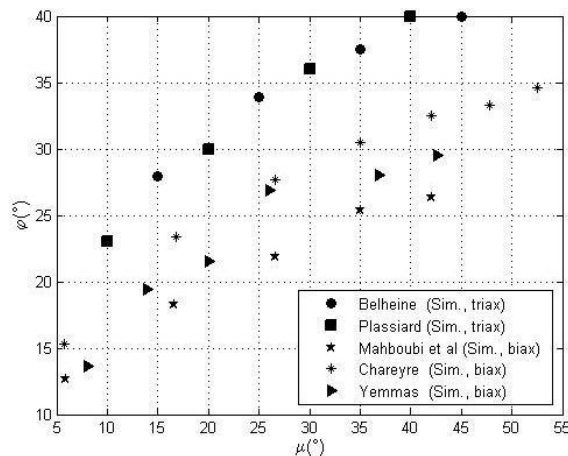


Figure 3. 55. Dépendance entre l'angle de frottement local μ et le frottement global au pic φ^{pic} . L'ensemble des simulations numériques font intervenir des éléments circulaires et sphériques aux rotations libres.

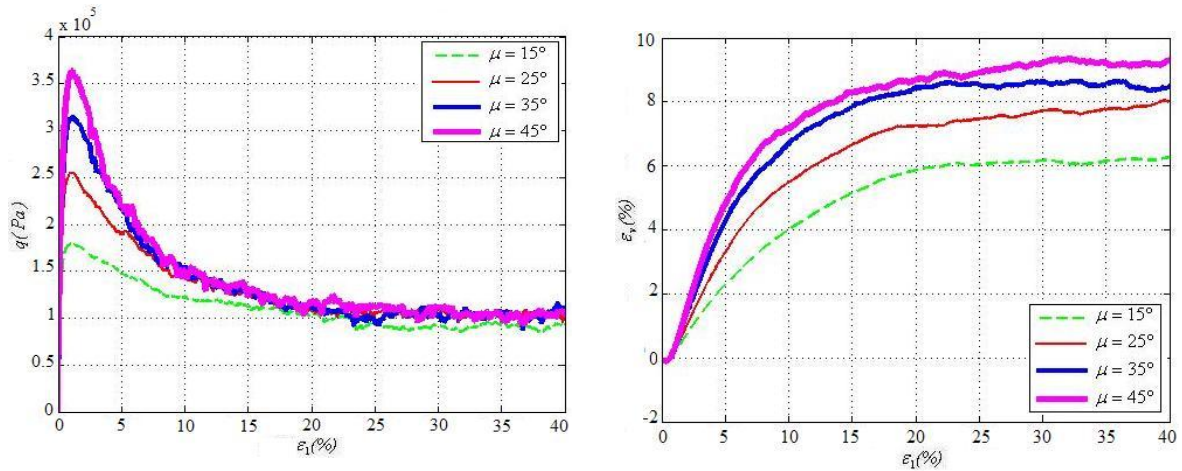


Figure 3. 56. Evolution du comportement déviateur (à gauche) et variation volumique (à droite) en fonction de l'angle de frottement local.

3.5.8.4.4. Influence de la raideur élastique de roulement

β_r représente le premier paramètre adimensionnel régissant la loi de comportement faisant intervenir la MTL (voir Chapitre 2). Comme indiqué précédemment dans le cas avec et sans MTL (voir les Figures 3.72, 3.73 et 3.74), le comportement initial ne se change pas beaucoup quand la MTL est incorporée, ce paramètre a donc peu d'influence à ce niveau. En effet, on peut vérifier cet aspect en faisant varier β_r .

Des essais sont menés pour cinq valeurs de β_r : 0.1, 0.15, 0.3, 1.0, 1.5 et 3.0. Sur la Figure 3.75, on constate qu'une augmentation de β_r possède bien une influence sur le comportement initial, autant pour le module initial E_0 que sur le coefficient de poisson ν . Les variations induites sont de l'ordre de 8 à 10% pour toute la gamme des valeurs testées. Cette influence est donc modérée en comparaison avec celle provoquée par les raideurs normales et tangentielles. Donc, les pentes du déviateur et de la variation volumique sont relativement indépendantes de ce paramètre. Cet aspect est utilisé pour faciliter la procédure de calibration. Un résultat similaire est trouvé dans [Jianfeng et al., 2004] pour une étude bidimensionnelle du comportement des interfaces au cisaillement. Dans [Plassiard, 2007] et [Belheine et al., 2008], les auteurs ont utilisé des valeurs β_r égales à 1.8 pour un tout venant et 0.12 pour le sable de Labenne, respectivement. C'est pour cette raison qu'on a pris une large gamme de valeur pour ce paramètre.

Sur la Figure 3.76, on présente l'évolution du comportement globale en terme déviateur et variation volumique. Il est bien visible, que dans la gamme des valeurs testées de β_r , une augmentation de ce paramètre engendre une augmentation plus au pic qu'au palier. La variation volumique présente quelques différences au-delà de 5% de la déformation axiale. Cependant, la dilatance est relativement indépendante de la raideur en roulement, et elle ne sera contrôlée par ce paramètre.

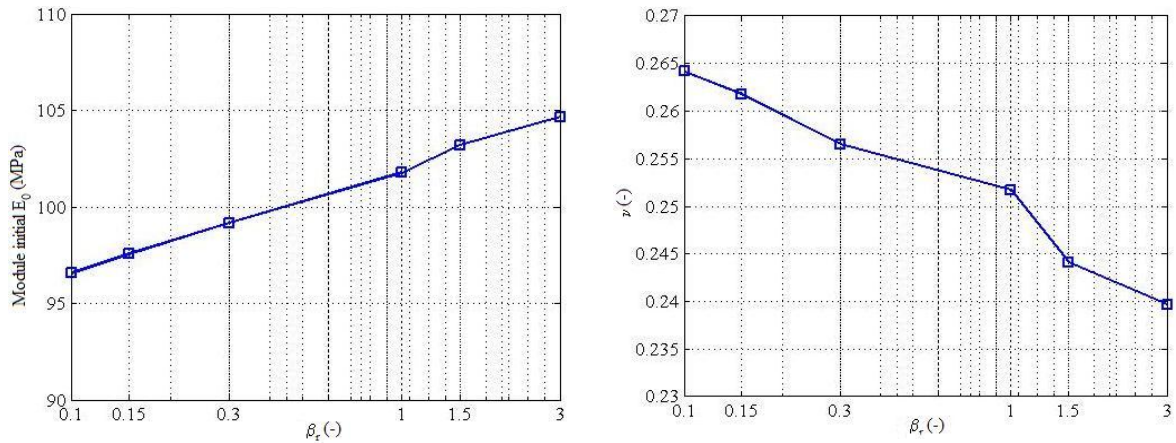


Figure 3. 57. Influence du paramètre adimensionnel de rigidité en roulement β_r sur le module initial E_0 (à gauche) et le coefficient de Poisson ν (à droite).

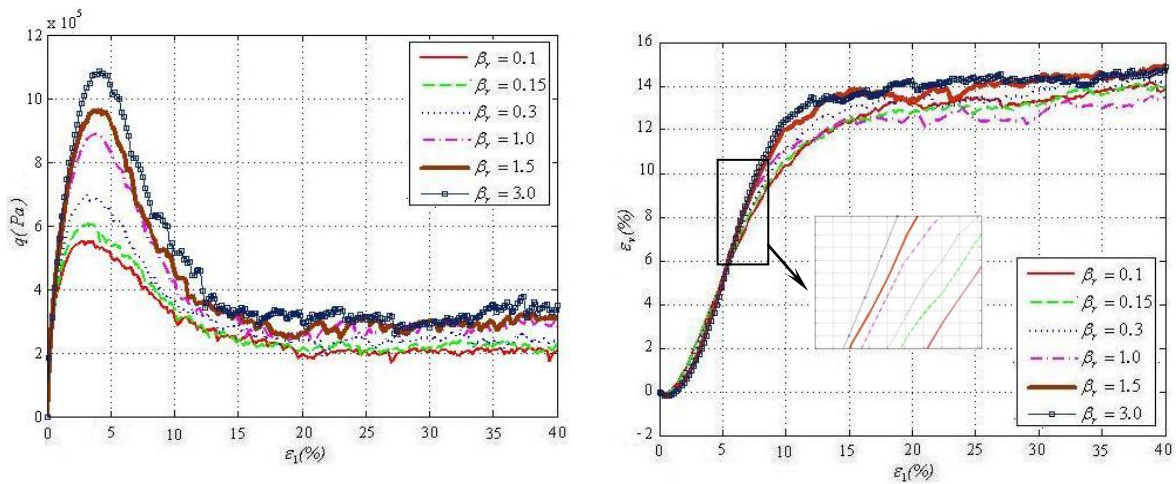


Figure 3. 58. Evolution du comportement global en terme déviateur (à gauche) et variation volumique (à droite) en fonction du paramètre adimensionnel de rigidité en roulement β_r .

3.5.8.4.5. Influence de la limite élastique en roulement

Le second paramètre constitutif régissant la MTL correspond au paramètre adimensionnel de la limite élastique en roulement η_r (voir Chapitre 2). La Figure 3.77 illustre la dépendance du module initial E_0 et du coefficient de Poisson ν vis-à-vis de la limite élastique en roulement. La gamme des valeurs testées est : 0.3, 1.0, 1.5 et 3.0. On constate qu'une augmentation de ce paramètre n'influe pas sur le comportement initial. L'effet de η_r s'avère quasiment nulle. Il est de l'ordre de quelques pourcent pour toute la gamme des valeurs testées, voir négligeable en comparaison avec les effets exercés par les raideurs normales et tangentielles. La Figure 3.78 représente l'évolution du déviateur et de la déformation volumique pour une déformation axiale allant jusqu'à 40%. On constate que le comportement à la rupture est fortement influencé par le paramètre η_r . Pour des valeurs de $\eta_r > 0.3$, le déviateur au pic tend vers une valeur limite. Pour $\eta_r = 1.0$, la réponse déviateur reste

semblable à celle de $\eta_r = 3.0$. En revanche, pour $\eta_r = 0.3$, le déviateur au pic s'est révélé moins important. Le comportement à l'état résiduel semble tendre vers la même valeur limite pour l'ensemble des valeurs de η_r . La variation volumique varie peu avec ce paramètre, et la dilatance au pic, est particulièrement indépendante de sa valeur. Ces observations rejoignent celle de Plassiard [Plassiard, 2007].

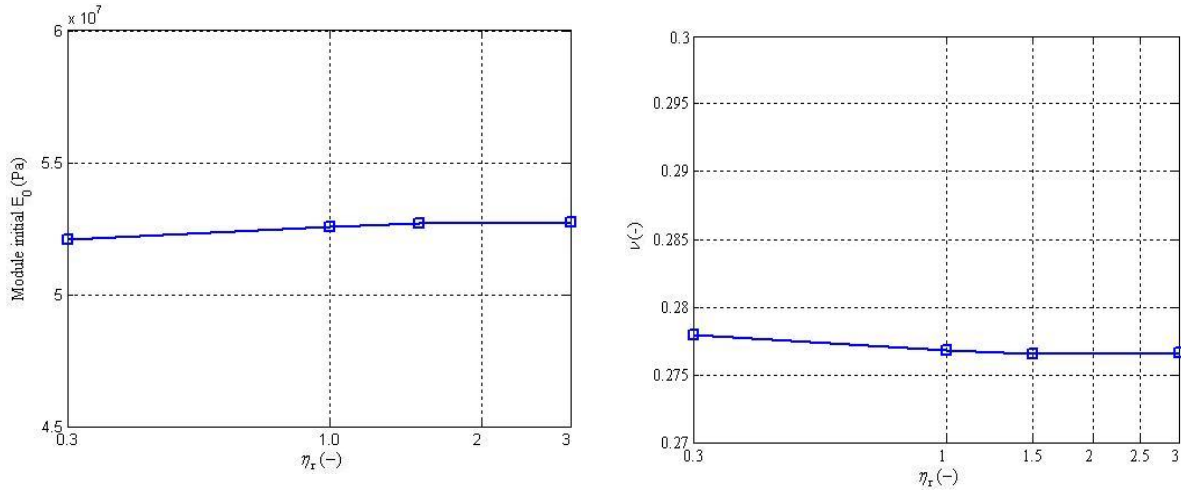


Figure 3. 59. Influence du paramètre adimensionnel de rigidité en roulement η_r sur le module initial E_0 (à gauche) et le coefficient de Poisson ν (à droite).

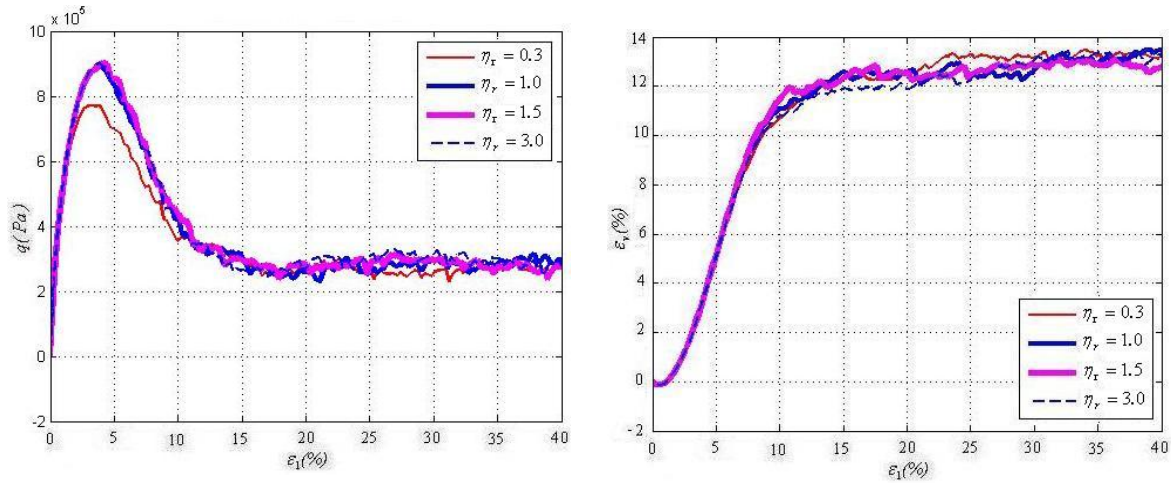


Figure 3. 60. Evolution du comportement globale en terme déviateur (à gauche) et variation volumique (à droite) en fonction du paramètre adimensionnel de rigidité en roulement η_r .

3.5.9. Bilan des résultats obtenus

Les résultats de l'analyse paramétrique montrent l'influence des paramètres micromécaniques et géométriques sur la réponse global du modèle. Elle permet d'établir une relation qualitative entre ces paramètres $(k^n, \alpha, \mu, \beta_r, \eta_r)$ et les paramètres du comportement macroscopique global restitué par le modèle $(E_0, \nu, \psi_{pic}, q_{pic}, q_{res})$.

Le Tableau 3.6 récapitule les grandes tendances observées entre les paramètres locaux et les paramètres macroscopiques. On remarque notamment que :

- Le comportement initial défini par le module initial E_0 et le coefficient de Poisson ν ne dépend que de k_n et k_s . L'influence de k_n sur le coefficient de Poisson est quasiment nulle, dans l'intervalle des valeurs aptes à modéliser le comportement d'un sol réel. Le comportement au pic et le comportement à l'état résiduel sont indépendants des paramètres locaux k_n et k_s ,
- La dilatace au pic ψ_{pic} dépend essentiellement de l'angle de frottement local μ . L'influence de la rigidité en roulement β_r est négligeable en comparaison avec celui de μ ,
- Le déviateur au pic q_{pic} dépend à la fois de l'angle de frottement local μ et des deux paramètres constitutif de la MTL ; la rigidité au roulement β_r et la limite élastique en roulement η_r ,
- Le comportement à l'état résiduel défini par q_{res} ne dépend que du paramètre de la rigidité en roulement β_r . Il est indépendant du reste des paramètres micromécaniques.

	E_0	ν	ψ_{pic}	q_{pic}	q_{res}
k^n	▲	—	—	—	—
k^s	▲	▲	—	—	—
μ	—	—	▲	▲	—
β_r	—	—	—	▲	▲
η_r	—	—	—	▲	—

Tableau 3. 6. Récapitulation des résultats de l'étude paramétrique.

▲ : dépendance vis-à-vis du paramètre testé

— : indépendance vis-à-vis du paramètre testé

3.5.10. Procédure de calibration des paramètres micromécanique à partir du comportement macroscopique expérimental

Au vu des résultats obtenus de l'analyse paramétrique, nous sommes en mesure de définir une procédure de calibration permettant l'identification du jeu de paramètres du modèle. Ce dernier sera le mieux adapté pour reproduire le comportement expérimental du milieu à modéliser sous différents trajets de sollicitation. En effet, on a observé que les paramètres élastiques locaux du modèle k^n et k^s n'influent que sur le comportement élastique macroscopique, tandis que les paramètres plastiques μ , β_r et η_r n'influent que sur le comportement à la rupture. Alors, comme premier constat, la calibration du comportement élastique est indépendante de celui à la rupture. Et là, nous avons choisi de calibrer le comportement élastique en premier lieu, suivi du comportement à la rupture. Les différentes étapes de la procédure de calibration sont synthétisées sur la Figure 3.79.

L'échantillon numérique de référence ayant une porosité égale à la porosité réelle est initialement fixé, et donc également la distribution de tailles des éléments, et le nombre des éléments composant cet échantillon. La contrainte de confinement adoptée correspond à celle de l'essai expérimentale à modéliser. Cinq étapes successives sont nécessaires à la calibration du modèle, et elles sont résumées sur la Figure 3.80:

- a) La rigidité tangentielle k^s est calibrée pour rapprocher au mieux le coefficient de Poisson expérimental du matériau à modéliser. La dépendance n'est pas linéaire, ce qui implique d'effectuer des simulations triaxiaux. On pourra suivre une procédure itérative pour ajuster ce paramètre,
- b) La rigidité normale k^n est déterminée afin que le modèle reproduise au mieux le module initial expérimental E_0 . La dépendance entre ces deux paramètres est quasiment linéaire, ce qui implique de réaliser deux essais à valeur de k^n distinctes, suivi d'une interpolation pour définir la valeur appropriée. L'ajustement de k^n n'influe pas sur le coefficient de Poisson et ne remet pas en cause sa calibration,
- c) Le paramètre adimensionnel correspondant à la raideur en roulement β_r est ajusté afin que le modèle numérique approche le déviateur à l'état résiduel q_{res} du matériau à modéliser. On a vu aussi que ce paramètre influe le comportement au pic. Ce dernier sera ajusté par un autre paramètre.
- d) L'angle de frottement local μ sera ajusté en fonction de la dilatance au pic ψ_{pic} caractérisant le matériau à modéliser.
- e) Le paramètre adimensionnel correspondant à la limite élastique en roulement η_r est calibré afin que le modèle reproduise au mieux le déviateur au pic q_{pic} expérimental.

Finalement, cette procédure de calibration n'est valable que pour les sols pulvérulents. Dans le cas des milieux frictionnels cohésifs, il n'est plus possible de raisonner de la même façon. Pour plus de détails, voire la référence [Plassiard, 2007].

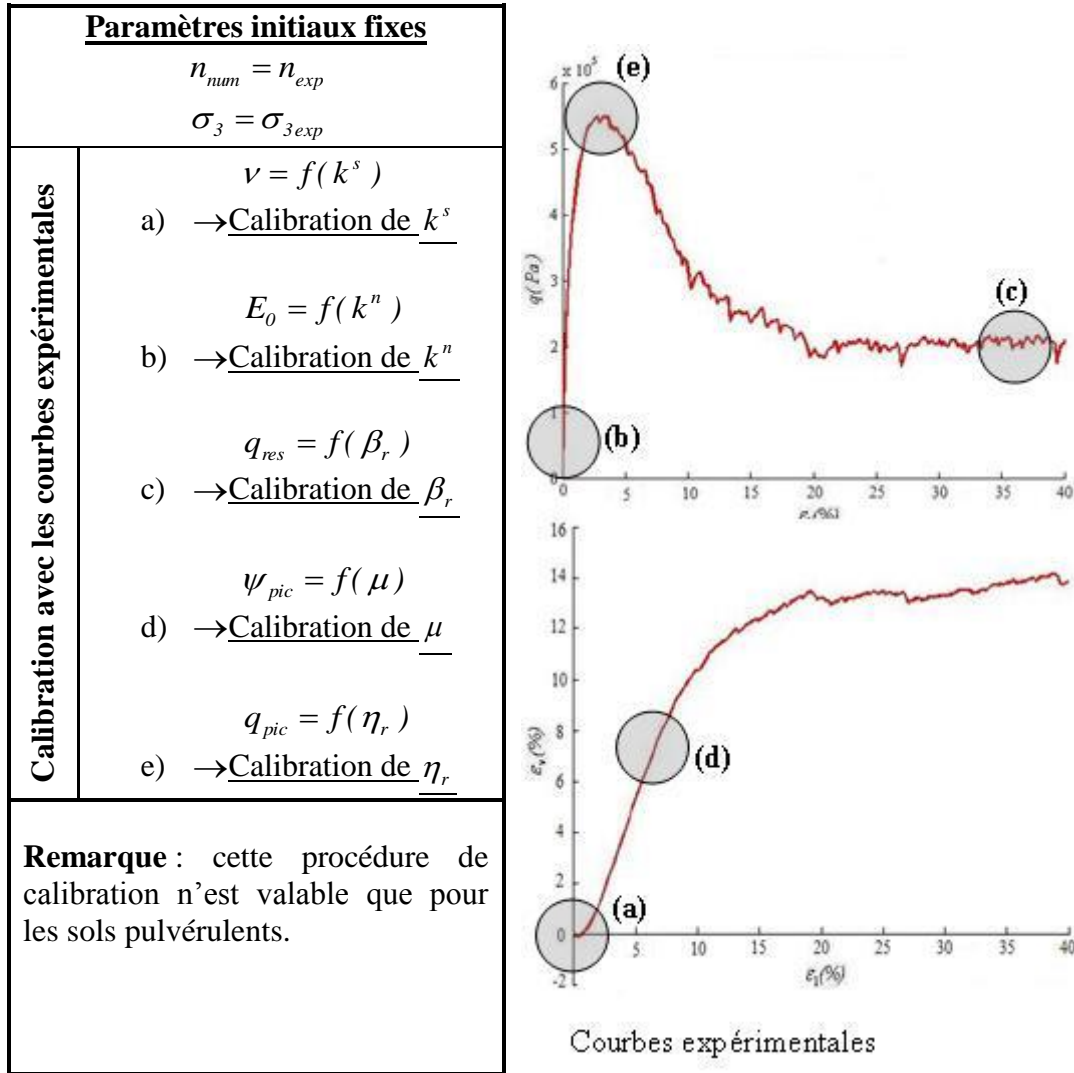


Figure 3. 61. Procédure de calibration des paramètres du modèle.

3.5.11. Application à la prédiction de résultats expérimentaux

Des simulations numériques sont comparées à des résultats expérimentaux d'essais triaxiaux vrais trouvés dans la littérature [Canepa et Depresles, 1990], [Mestat, 2001], [Coquillay, 2005] afin de valider la procédure de calibration proposée.

La procédure de calibration développée dans la section précédente a été utilisée pour calibrer divers matériaux granulaires tels qu'un tout venant à l'état lâche [Lorentz, 2007], et un autre tout venant dans les propriétés sont données par [Plassiard, 2007]. Dans notre cas, l'évaluation de cette procédure sera réalisée sur un sable moyennement dense -Sable de Labenne- dont les propriétés seront données par la suite. Pour cela, les paramètres du modèle sont calibrés grâce à un essai de référence réalisé à une porosité et un confinement donnés. Une fois la calibration effectuée, des essais réalisés à des pressions de confinement différentes sont modélisés. Les résultats expérimentaux est numériques sont comparés et le critère de rupture est analysé. Enfin, on conclut sur l'efficacité de la procédure adoptée et la puissance prédictive du modèle numérique développé.

3.5.11.1. Résultats expérimentaux

Des essais de cisaillement triaxial ont été réalisés au laboratoire régional des Ponts et chaussées (LCPC) de Rouen entre fin 1988 et mars 1989 et ont permis de caractériser le comportement mécanique du sable de Labenne [Mestat, 2001], [Coquillay, 2005]. Un ensemble de données important était donc disponible. Une partie de ces résultats est reprise dans ce travail pour la validation du modèle numérique adopté. Les essais ont été réalisés sur des éprouvettes d'élongement deux, confectionnées par pluviométrie dans un moule métallique [Gestin, 1989]. L'éprouvette est ensuite montée dans une cellule de type Bishop et Wesley dont l'originalité est constituée par un système hydraulique appliquant la sollicitation axiale sur l'éprouvette. Les pressions nécessaires au fonctionnement de la cellule sont assurées par des contrôleurs de pression-volume.

3.5.11.1.1. Caractérisation du sable de Labenne

La Figure 3.81 montre la courbe granulométrique du matériau testé. Il s'agit d'un sable fin naturel de dune homogène de 0/1 mm avec un coefficient d'uniformité égale à 10. Son poids volumique sec est de 16.6 kN/m^3 et une porosité de 0.4. La photo permet d'apprécier la forme générale des grains.

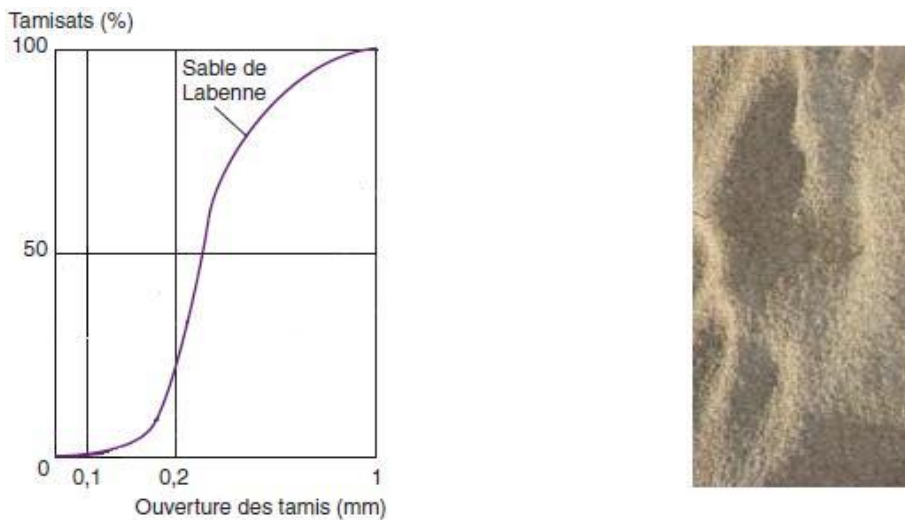


Figure 3. 62. Courbe granulométrique et photo du sable de Labenne.

3.5.11.1.2. Résultats des essais triaxiaux

Sur la Figure 3.82 on représente les résultats des essais triaxiaux à différentes pressions de confinement allant de 100 à 300 MPa [Mestat, 2001]. Les graphiques illustrent l'évolution du déviateur et de la déformation volumique en fonction de la déformation axiale. Les courbes $q - \varepsilon_a$ montrent que le matériau ne présente pas véritablement de pic de contrainte, mais un palier uniquement dans la gamme de déformation étudiée. Ces courbes présentent une partie initiale, d'autant plus importante que σ_3 est élevée, suivi d'un changement de pente progressif.

Les courbes donnant les variations volumique dans l'échantillon en fonction de ε_a , montrent un comportement contractant au début des essais, allant jusqu'à une déformation axiale de l'ordre de 2%. A partir de cette valeur le phénomène de dilatance se manifeste et l'éprouvette commence à augmenter de volume.

Le Tableau 3.7 regroupe les principales caractéristiques du matériau testé ($\gamma = 16.6 \text{ KN/m}^3$) pour les différentes valeurs de confinement.

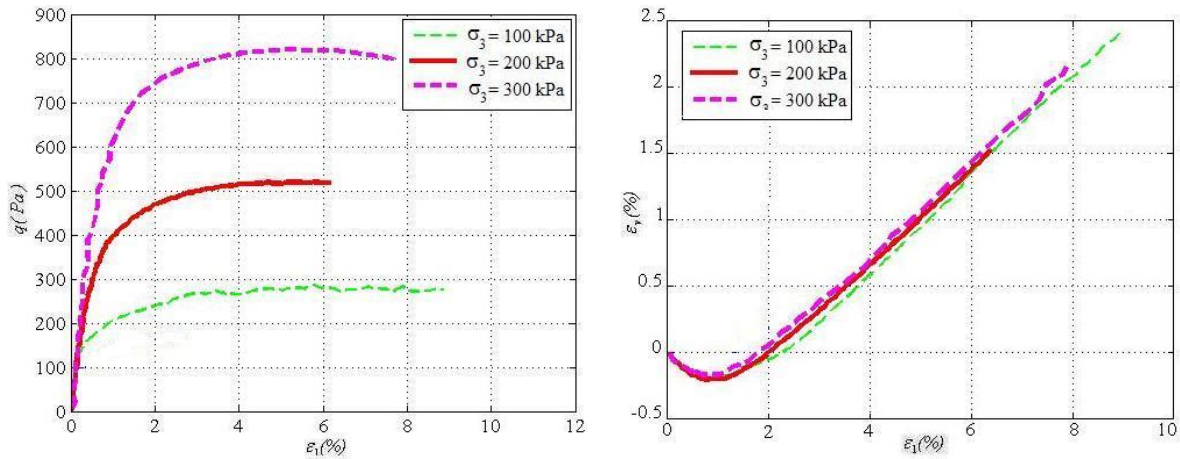


Figure 3. 63. Courbes $q - \varepsilon_a$ expérimentales (à droite) et Courbes $\varepsilon_v - \varepsilon_a$ expérimentales (à gauche)

Paramètres	Confinement		
	100 kPa	200 kPa	300 kPa
Porosité initiale	0.3684	0.3676	0.3653
Densité initiales (kN/m^3)	16.61	16.63	16.69
Module de Young E_0 (MPa)	63.90	95.60	120.30
Coefficient de Poisson ν	0.28	0.27	0.38
Angle de frottement φ ($^\circ$)	35.56	35.30	34.50
Angle de dilatance ψ ($^\circ$)	11.096	10.92	11.81

Tableau 3. 7. Valeurs des paramètres macroscopiques caractérisant le sable de Labenne pour chaque essai [Mestat, 2005].

3.5.11.1.3. Présentation du modèle numérique et résultats des simulations

La première étape avant de procéder la calibration, est de préparer l'échantillon numérique de référence (voir Section 3.5.7.1 et Section 3.5.7.2). Cet échantillon est composé de 10 000 éléments et engendre une faible dispersion au niveau des résultats (voir Section 3.5.7.5). La réponse de la simulation d'essais triaxiaux et la connaissance de l'influence des paramètres géométriques et micromécaniques sur la réponse macroscopique (voir Section 3.5.8) permet de déterminer un jeu de paramètres reproduisant la réponse expérimentale d'un essai donné.

La Figure 3.83 compare les résultats expérimentaux et numériques obtenus pour les essais correspondant aux différentes pressions de confinement après calibration des paramètres

géométriques et micromécaniques du modèle. On note une bonne concordance entre les résultats expérimentaux et calcul numérique. Le Tableau 3.8 présente les valeurs moyennes des paramètres micromécaniques adoptés pour le modèle discret. Le même jeu de paramètres a été utilisé pour les simulations numériques de 100 kPa, 200 kPa et 300 kPa. Ce choix de ces paramètres locaux permet de reproduire convenablement les critères que l'on souhaite. Les résultats prédictifs du modèle numérique sont alors confrontés aux résultats expérimentaux obtenus sur le sable de Labennes moyennement dense. La modélisation du comportement d'un matériau lâche peut être aussi obtenue sans modifier la procédure de calibration. Cela revient à considérer que le φ^{pic} et φ^{res} sont équivalents. Des simulations au cours de notre étude ont été effectuées dans ce sens, on trouve le tout venant modélisé par [Lorentz, 2007].

La méthodologie de détermination des paramètres micromécaniques du modèle discret ou la procédure de calibration proposées a conduit à d'excellents résultats pour les trois contraintes de confinements. Le Tableau 3.9 regroupe les valeurs obtenues. L'analyse de ces valeurs fournit quelques indications sur l'ordre de grandeur de ces paramètres :

- L'angle de frottement au pic φ^{pic} semble compris entre 34° et 36° . Il ne varie pas beaucoup dans la plage de contrainte étudiée ;
- Le module de Young varie entre 63 et 130 MPa environ. Il augmente avec l'augmentation de la pression de confinement ;
- La dilatance au pic ψ^{pic} est de l'ordre de 11° ;
- Le coefficient de Poisson par contre est dans l'intervalle de [0.29 – 0.36].

Paramètres correspondant à :	Valeurs moyennes
La rigidité normale k_n (Pa)	9.8×10^8
Le rapport $\alpha = k_s / k_n$	0.04
L'angle de frottement local μ ($^\circ$)	30.0
la raideur en roulement β_r (-)	0.12
la limite élastique en roulement η_r (-)	1.0

Tableau 3. 8. Jeu de paramètres microscopiques optimal caractérisant le modèle discret

Paramètres	Tests		
	100 kPa	200 kPa	300 kPa
Module de Young E_0 (MPa)	63.30	95.50	129.32
Coefficient de Poisson ν	0.289	0.274	0.363
Angle de frottement φ ($^\circ$)	35.43	34.01	34.71
Angle de dilatance ψ ($^\circ$)	11.2	10.91	11.03

Tableau 3. 9. Valeurs des paramètres macroscopiques données par les simulations numériques pour chaque essai.

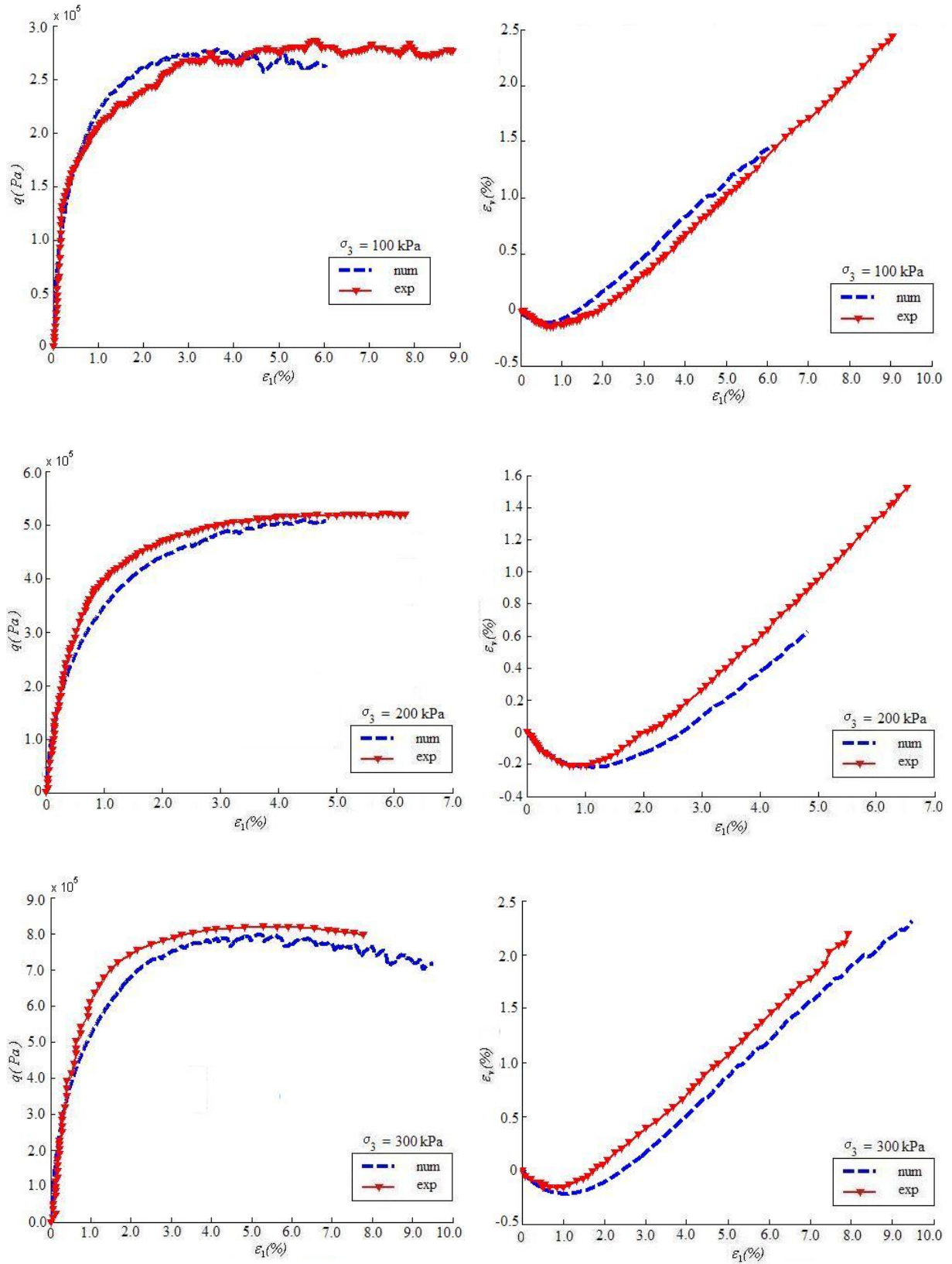


Figure 3. 64. Comparaison des résultats des simulations numériques avec les résultats expérimentaux pour les essais $\sigma_3 = 100$ kPa, 200 kPa et 300 kPa.

3.5.11.1.4. Observation sur le critère de rupture et le concept d'état critique des matériaux granulaires

L'analyse des courbes déviatoriques présentées sur la Figure 3.84 et la Figure 3.85, nous permettent d'estimer le critère de rupture et l'état critique du matériau granulaire testé (sable de Labenne). L'état critique ou état de plasticité parfaite est défini comme étant l'état durant lequel le matériau continu à se déformer à contrainte et indice des vides constants [Roscoe et al., 1958], [Schofield et Wroth, 1968] et [Wood, 1990], c'est-à-dire des grandes déformations se produisent à volume constant (variation de volume nulle). La courbe présentant les états critiques est une courbe tridimensionnelle définie par ces projections dans les plans (q, p) , (e, p) et $(e, \log p)$. Pour un milieu granulaire dont le critère de plasticité est le critère de Coulomb (sans cohésion comme notre cas), la projection de cette courbe des états critiques sur le plan (q, p) est une droite passant par l'origine dont la pente M est liée à l'angle de frottement interne φ^{crit} :

$$q^{crit} = M \cdot p^{crit} \quad 3.13$$

Où M s'exprime en fonction de l'angle de frottement mobilisé à l'état critique sous la forme suivante (cas des essais triaxiaux de compression) :

$$M = \frac{6 \sin \varphi^{crit}}{3 - \sin \varphi^{crit}} \quad 3.14$$

Les états de contraintes correspondant à l'état critique pour les trois essais réalisés ont été représentés dans le plan (q, p) (Figure 3.86). On constate que la totalité des essais correspond à des points qui se trouvent alignés sur une même droite montrant ainsi l'unicité de l'état critique dans le plan (q, p) , indépendamment de l'indice des vides initial, et de la pression moyenne. Ceci est en accord avec les résultats de la littérature [Mooney et al., 1998]. L'angle de frottement correspondant est de 35.69° , également en bon accord avec les valeurs généralement rapportées dans la littérature pour les sables.

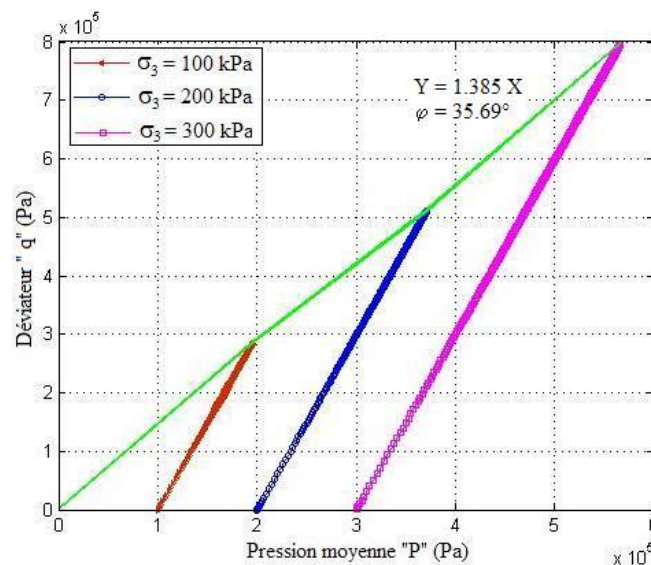


Figure 3. 65. Courbes déviatoriques dans le plan $(p : q)$

Sur la Figure 3.87 sont présentées les traces des chemins correspondant aux trois essais dans les plans (e, p) et $(e, \log p)$. Par rapport aux observations faites dans le plan (q, p) , on observe, dans ses plans, des différences entre les points représentatifs de l'état critique pour les trois essais, qui devrait selon la théorie de l'état critique, s'aligner sur une seule et même droite. La, on peut poser le problème de l'unicité de cet état dans ce plan.

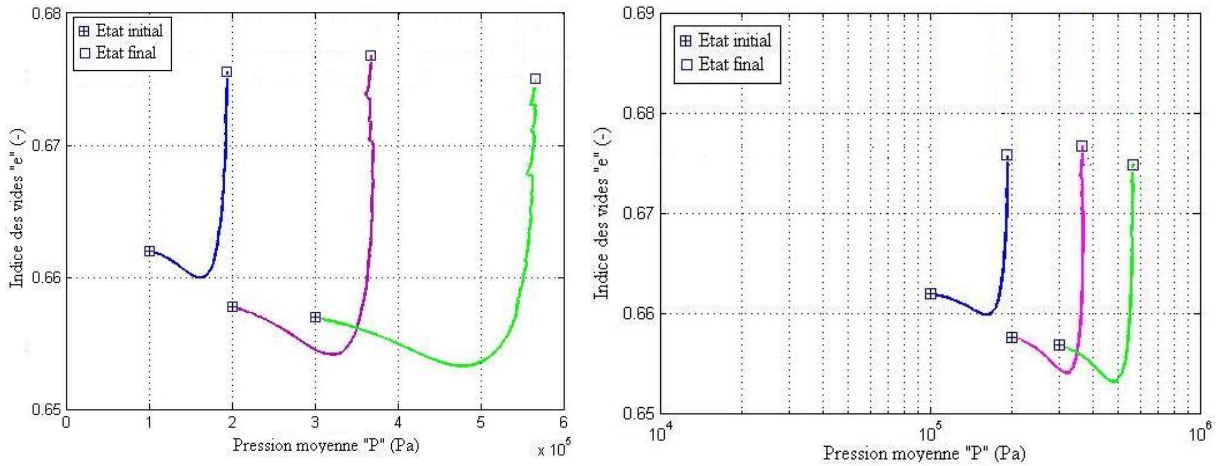


Figure 3. 66. Représentation de l'état critique dans les diagrammes : $e - p$ (à gauche) et $e - \log p$ (à droite)

La Figure 3.88 montre la variation du module d'Young E_0 et le coefficient de Poisson ν en fonction de la pression de confinement issus de l'expérience et de la simulation numérique. On remarque que le module d'Young E_0 dépend fortement de la pression de confinement, il montre une croissance proportionnelle avec σ_3 , numériquement comme expérimentalement. A part que le coefficient de Poisson varie peu. Il est en général, indépendant de la contrainte et de l'indice des vides. Et cette variation observée par notre modèle peu être liée à la coordination. Le nombre de contact augmente légèrement avec la pression de confinement. L'évolution de l'angle de frottement φ^{pic} et de l'angle de dilatance ψ^{pic} en fonction de la pression de confinement est présentée sur la Figure 3.89 pour les résultats obtenus par essais et ceux de notre modèle. On constate qu'une augmentation de la pression de confinement σ_3 conduit expérimentalement et numériquement à une diminution de φ^{pic} pour $\sigma_3=100$ kPa et 200 kPa de l'ordre de 1.5 °, puis une légère augmentation pour $\sigma_3=300$ kPa. La même observation est faite pour l'angle de dilatance. On note que l'angle de dilatance ne varie pas beaucoup dans la plage de contraintes étudiée (Voir le Tableau 3.10).

Dans la littérature, de nombreuses études ont été consacrées à la dépendance de la surface de rupture vis-à-vis du confinement. Les essais triaxiaux comme biaxiaux font apparaître un phénomène de diminution de l'angle de frottement avec l'augmentation de la pression de confinement. Par exemple, les travaux de Mahmoud [Mahmoud, 1997] sur le sable lâche d'Hustun montrent une variation de l'angle de frottement au pic de 38.5° à 35.5°. Dans le cas du sable dense il note une variation de l'angle de frottement de 48.8° à 44.8° pour la même plage du confinement. On trouve aussi les travaux de Sitharam [Sitharam, 1999] sur un

assemblage biaxial. L'auteur a observé une diminution de l'angle de frottement avec l'augmentation de la pression de confinement.

Sur la Figure 3.90 sont tracées les enveloppes de rupture au pic et à l'état résiduel pour les trois confinements. L'enveloppe est une droite qui tangente parfaitement les cercles de Mohr. Les angles de frottement au pic et à l'état résiduel ont pour valeurs 35.7° et 29.7° respectivement.

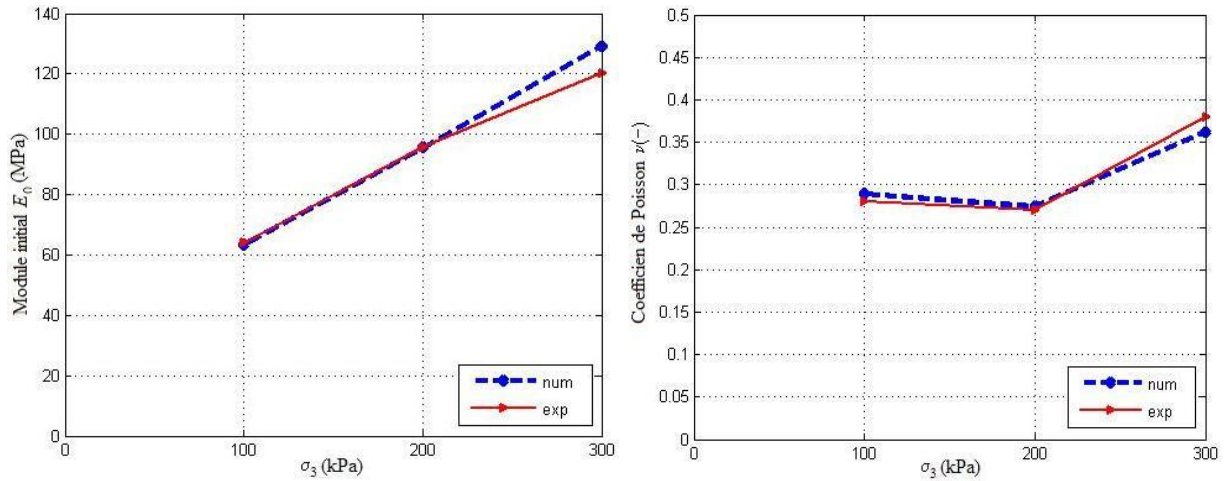


Figure 3. 67. Variation du module initial E_0 (à droite) et coefficient de Poisson ν (à gauche) des simulations numériques et des essais expérimentaux.

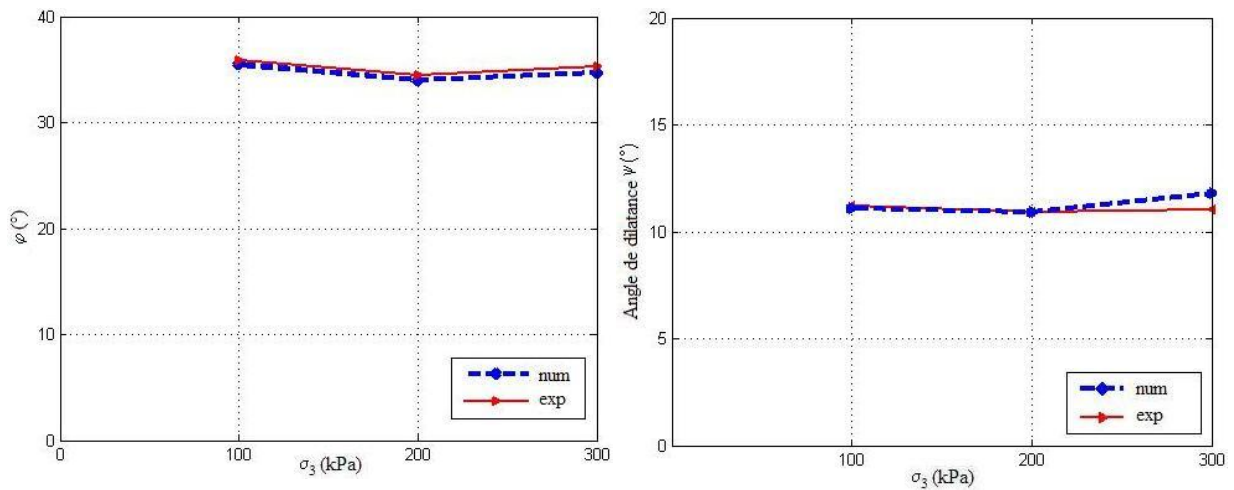


Figure 3. 68. Variation de l'angle de frottement au pic φ^{pic} (à droite) et angle de dilatance au pic ψ^{pic} (à gauche) des simulations numériques et des essais expérimentaux.

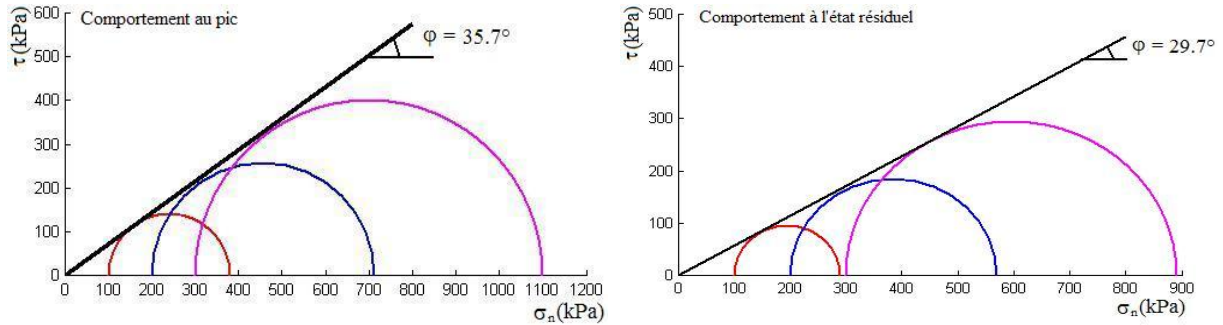


Figure 3. 69. Représentation des Cercles de Mohr pour le comportement au pic (à gauche) et le comportement résiduel (à droite) des simulations numériques.

3.5.12. Unicité du jeu de paramètres du modèle

Le modèle discret avec la MTL est un modèle à cinq paramètres. La simulation numérique nous a permis de déterminer l'influence de ces différents paramètres sur les essais d'identification. Nous avons pu trouver un jeu de paramètres capable de simuler correctement un chargement de compression triaxial. Nous avons validé notre modèle sur des essais réalisés expérimentalement. Ce jeu de paramètres sera utilisé par la suite pour des simulations plus complexes. L'unicité de la solution a été démontrée par les dépendances micro-macro établies précédemment. D'après la synthèse des résultats obtenus, le comportement élastique est traité séparément de celui à l'état plastique. La phase de calibration a montré que le coefficient de Poisson ν dépend uniquement du paramètre k^s . Le module de Young E_0 également ne dépend que du paramètre k^n . Par conséquent, le couple régissant le comportement élastique est unique. Le comportement en grande déformation, indique aussi la dépendance unique de la dilatance au pic ψ_{pic} et le déviateur à l'état résiduel q_{res} (l'angle de frottement résiduel ϕ_{res}) du frottement local μ et du paramètre de raideur en roulement β_r respectivement. Une fois ces valeurs sont fixées, le déviateur au pic q_{pic} (l'angle de frottement au pic ϕ_{pic}) peut facilement être calibré à l'aide du paramètre de la limite élastique η_r .

Enfin, la procédure de calibration démontre que les paramètres composant le modèle ne peuvent avoir qu'une seule et unique valeur suivant le comportement modélisé. Dans ce cas, le jeu de paramètre est considéré unique. Il est également souhaitable de tester le modèle sous d'autres chemins de sollicitations, par exemple des essais de chargement- déchargement.

3.5.13. Prédiction du modèle des enveloppes réponse

Sibille [Sibille, 2006] a simulé des recherches directionnelles avec le modèle SDEC à rotation libre (le cas sans MTL) en contrainte pour trois états de contraintes initiaux atteints après un chargement de compressions triaxiales axisymétriques drainées pour : $q = 0.0$ kPa (après l'état de la compression isotrope), $q = 100$ kPa et $q = 300$ kPa. Le matériau granulaire testé est celui de Royis & Doanh [Royis & Doanh, 1998]. Sur la Figure 3.91, sont présentées les enveloppes réponse du modèle pour les trois états de contraintes initiaux. L'auteur a constaté que le modèle discret à rotation libre (le cas sans MTL) donne des enveloppes réponses

proches de celles obtenues expérimentalement ou simulées numériquement par d'autre auteur sur le même matériau. De manière identique à Sibille (référence) nous avons effectué des recherches directionnelles avec le modèle discret associé à la MTL, mais sur un autre matériau, qui est le sable de Labenne. Pour ce type de sable aucune réponse enveloppe expérimentale n'est disponible, vu à la difficulté observée lors de la réalisation des recherches directionnelles. L'objectif est d'élargir dans ce sens le nombre de résultats numériques sur un nombre suffisant de matériaux granulaires et d'analyser leur comportement incrémentale.

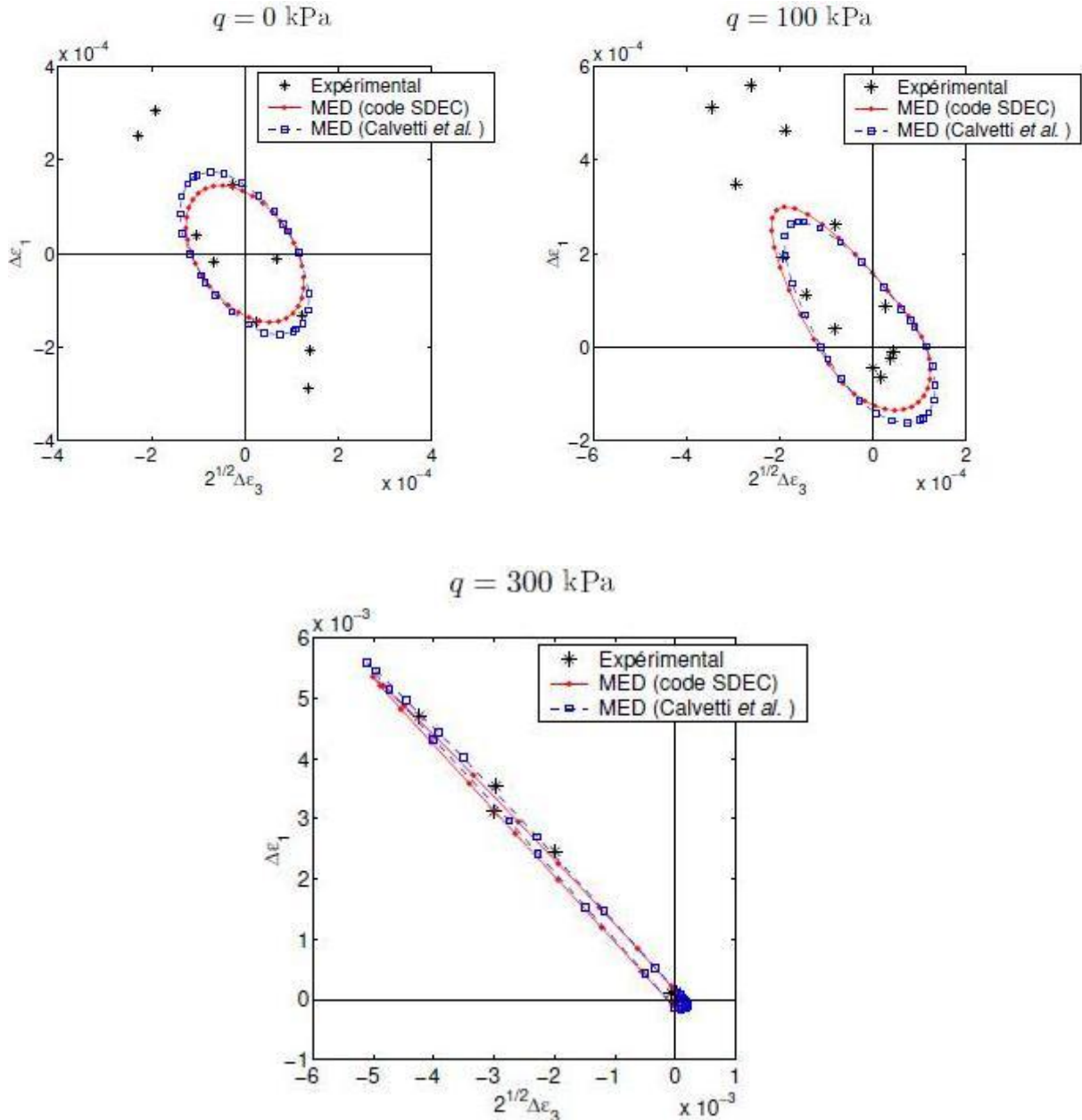


Figure 3. 70. Comparaison des enveloppes réponses expérimentales pour trois auteurs : Royis & Doanh, Clavetti et al et Sibille extrait de la thèse de [Sibille 2006].

Les états de contrainte initiaux testés sont : $q = 0.0\text{kPa}$, $q = 100\text{kPa}$, $q = 132.7\text{kPa}$ et $q = 240\text{kPa}$. Les directions des incréments de contrainte s'étalent de 0° à 360° dans le plan d'axisymétrie des incréments des contraintes, tous les 10° . Les paramètres micromécaniques utilisés sont ceux obtenus de la procédure de calibration (Voir le Tableau 3.11). Sur la Figure 3.92, sont illustrées les enveloppes réponses pour les quatre états de contrainte initiaux.

- Pour l'état de contrainte initial isotrope ($q = 0.0\text{kPa}$), les enveloppes réponses sont des ellipses centrées par rapport à l'origine du repère, résultat identique dans sa forme à celui trouvé par Sibille [Sibille, 2006] et Calvetti [Calvetti et al., 2003] sur le matériau de Royis&Doanh [Royis et Doanh, 1998].
- Pour les états de contrainte initiaux : $q = 100\text{kPa}$, $q = 132.7\text{kPa}$ et $q = 240\text{kPa}$ les enveloppes réponses ne sont plus symétriques par rapport au centre du repère, elles sont plus allongées. Leur forme indique clairement que le comportement incrémental est non-linéaire avec l'existence d'une règle d'écoulement. Donc le modèle discret avec MTL prédit correctement la direction de l'écoulement plastique.

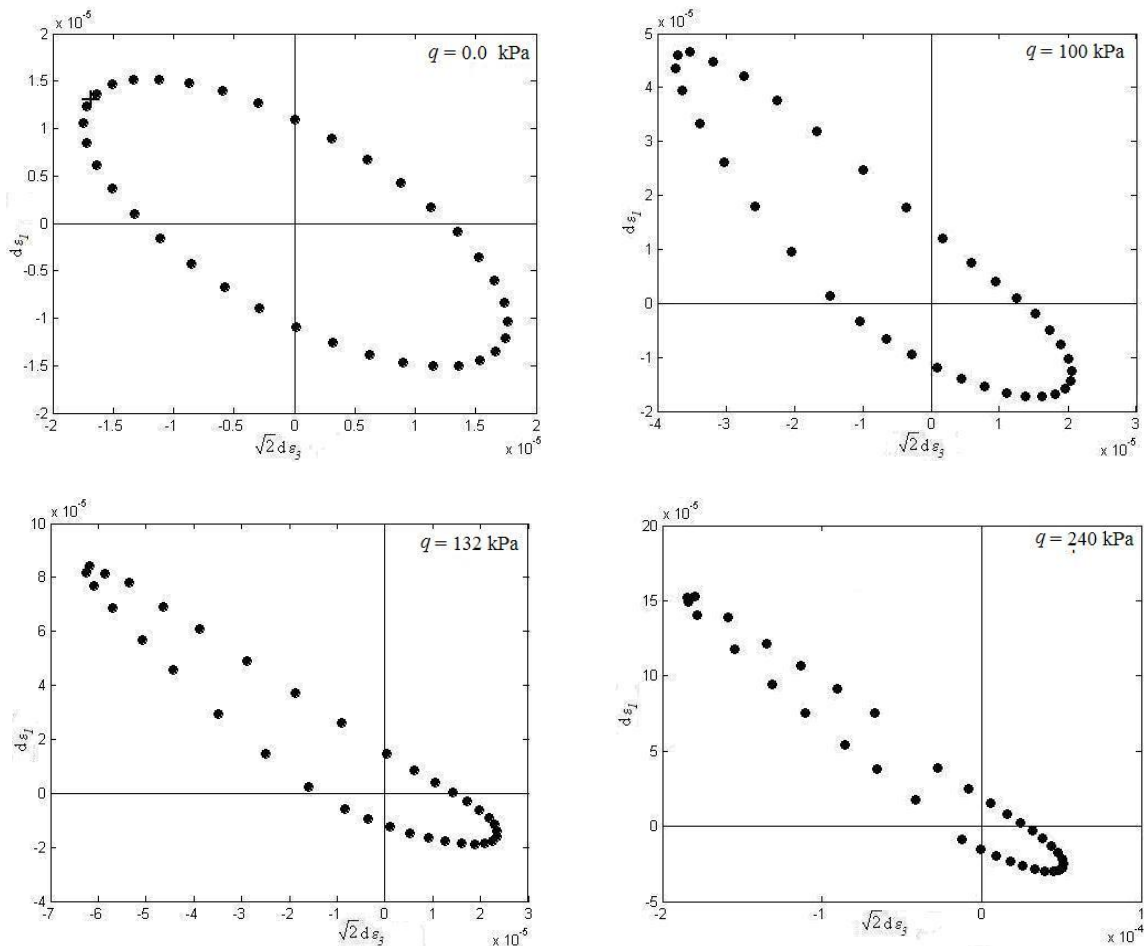


Figure 3. 71. Enveloppes réponses obtenues par le modèle discret avec MTL sur le sable de Labenne pour différents états de contraintes initiaux.

3.5.14. Validation du modèle à l'échelle microscopique

3.5.14.1. Transmission et distribution des forces internes

La forte hétérogénéité des forces de contact est une propriété majeure bien connue des milieux granulaires. Leur distribution a été étudiée pour des assemblages sphériques ou circulaires grâce à des expériences et des simulations numériques par éléments discrets [Radjai et al., 1996], [Silbert et al., 2002], [Mueth et al., 1998], [Sajmudar et al., 2005], [Berdnagen et al., 2000], [Antony et al., 2001]. Cependant, Il paraît important de confronter notre modèle discret avec MTL et les informations que l'on peut en tirer à d'autres trouvés dans la littérature. Cette validation est purement basée sur des observations numériques. Dans ce cas, nous nous sommes intéressés aux études réalisées par Radjai et collaborateurs [Radja et al., 1998] sur des assemblages de disques polydisperses. Ces études sont aussi valables en deux dimensions qu'en trois dimensions. Elles ont été vérifiées par la méthode aux éléments discrets et celle de la Dynamique des contacts.

La Figure 3.93 représente les forces de contact dans une portion de l'assemblage numérique à deux états d'équilibre différents (cas a: $q/p = 0.75$, le cas b : $q/p = 1.2$). En reliant les centres des éléments par un segment dont l'épaisseur est proportionnelle à la valeur de la force de contact, on obtient une carte des forces de contact au sein de l'échantillon. On observe une forte hétérogénéité très marquée des forces de contact. Ce résultat a été déjà vu par la simulation numérique et par l'expérience [Radjai et al., 1996], [Radjai, 2001], [Azema et al., 2007] et [Makse et al., 2000].

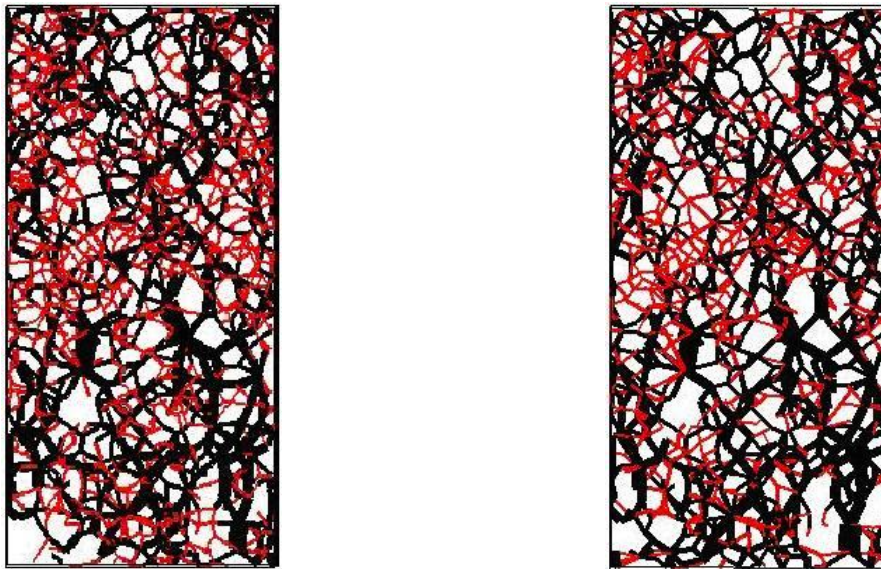


Figure 3. 72. Carte des forces normales dans une portion dans un assemblage de 10 000 sphères en équilibre quasi statique (L'épaisseur du trait est proportionnelle à la valeur de la force). Rouge : contact faible, Noir : contact fort.

La distribution statistique des forces de contact (normale et tangentielle) dans l'échantillon numérique est reportée sur la Figure 3.94, et illustre la grande variabilité de leur intensité. De ce fait, la distribution statistique des forces dans un milieu granulaire se révèle comme une caractéristique robuste. La densité de probabilité des forces de contact normales et tangentielle est représenté en échelle log-linéaire et log-log pour un état d'équilibre statique $q/p = 0.75$. Les forces sont normalisées par la force moyenne $\langle f_{nt} \rangle$. f_{nt} étant indifféremment une force de contact normale ou tangentielle. Les deux courbes se superposent et suivent des lois différentes suivant que la force de contact (normale ou tangentielle) est supérieure ou inférieure à la moyenne des forces de contact $\langle f_{nt} \rangle$. Les forces supérieures à la force moyenne $f_{nt} > \langle f_{nt} \rangle$, que nous appelions des fortes forces, ont une distribution exponentielle décroissante, tandis que les forces inférieures à la force moyenne $f_{nt} < \langle f_{nt} \rangle$, les faibles forces, ont une distribution en loi de puissance. :

$$P_{f_{nt}} \propto \begin{cases} \left[\frac{f_{nt}}{\langle f_{nt} \rangle} \right]^\alpha & \text{Pour } f_{nt} < \langle f_{nt} \rangle \\ \exp \left[-\beta \cdot \left(\frac{f_{nt}}{\langle f_{nt} \rangle} \right) \right] & \text{pour } f_{nt} > \langle f_{nt} \rangle \end{cases} \quad \mathbf{3.15}$$

Avec $\alpha = -0.25$ et $\beta = 1.01$ que se soit pour P_{f_n} et P_{f_t} . En ce qui concerne les faibles forces ($f_{nt} < \langle f_{nt} \rangle$), on observe que la distribution ne tend pas vers zéro lorsque f_{nt} tend vers zéro, et il y a un petit pic à une valeur de f_{nt} légèrement inférieure à $\langle f_{nt} \rangle$. C'est un trait caractéristique des distributions telles qu'on les observe aussi dans les expériences et dans les simulations numériques [Silbert et al., 2002], [Liu et al., 1995], [Antony, 2001], [Radjai et al., 1996], [Mueth et al., 1998], [Majmudar et al., 2005], [Lovol et al., 1999].

Les coefficients α et β dépendent de la valeur du déviateur appliqué, par exemple pour $q/p = 1.2$, nous trouvons $\alpha = -0.25$ et $\beta = 1.1$. Ces résultats restent cependant en accord avec les résultats obtenus par Radjai et al [Radjai et al., 1996] ($\alpha = -0.3$ et $\beta = 1.4$ pour P_{f_n} et $\alpha = -0.5$ et $\beta = 1.0$ pour P_{f_t}) et avec ceux obtenus par [Emilien, 2006] sur un assemblage tridimensionnel composé de sphères ($\alpha = -0.24$ et $\beta = 1.1$ que se soit pour P_{f_n} et P_{f_t}).

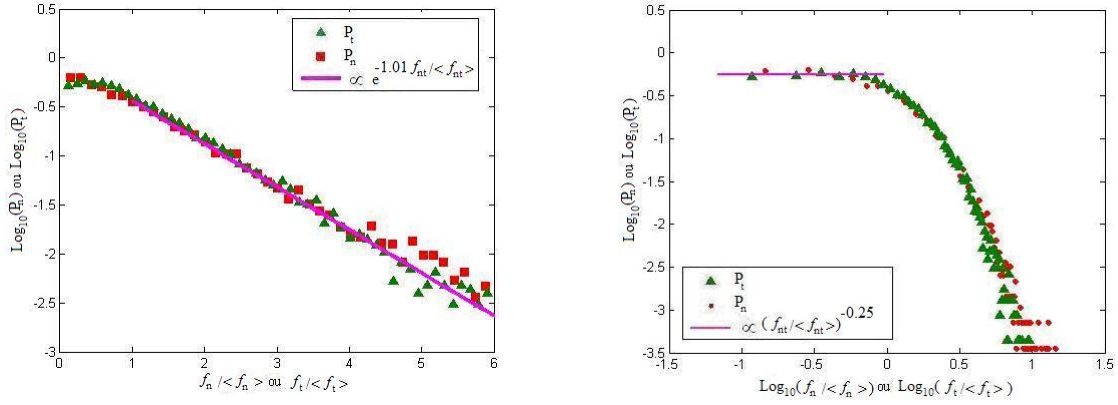


Figure 3. 73. Densité de probabilité P_{f_n} et P_{f_t} de force normales et tangentielles normalisées $f_n / \langle f_n \rangle$ et $f_t / \langle f_t \rangle$: tracé semi logarithmique (à gauche) et log-log (à droite).

3.5.14.2. Caractère bimodale de la transmission des forces

Pour mieux comprendre le rôle mécanique des forces de contact, phase faible et forte, dans un milieu granulaire, il faut considérer le lien entre les forces de contact à l'échelle des inhomogénéités et le tenseur des contraintes qui décrit l'état global des contraintes [Cambou, 2001]. Dans ce cas, considérons le sous-réseau de contacts constitué uniquement de contacts portant une force inférieure à $\xi \langle f_n \rangle$, appelé « ξ -réseau ». Lorsque ξ varie de 0 à ∞ , ce réseau s'élargit des forces les plus faibles vers tout le réseau de force en passant par la force moyenne. Le comportement de ξ -réseau en terme déviateur de contrainte en fonction ξ permet de rendre compte de la corrélation qui existe entre les forces et la texture. Pratiquement, le tenseur de contrainte partiel $\sigma(\xi)$ est calculé en restreignant la formule d'homogénéisation [Love, 1927], [Weber, 1966] donnée ci-dessous aux contacts vérifiant $f_n < \xi \langle f_n \rangle$:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{contacts} F_i l_j \quad 3.16$$

où F_i la $i^{\text{ème}}$ composante de la force de contact, V le volume total de l'assemblage granulaire, l_j la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur branche reliant les centres des grains en contact.

Appliquons cette approche pour le calcul du rapport $q(\xi)/p$ défini comme le déviateur de contrainte partiel $q(\xi)$ du ξ réseau normalisé par la pression moyenne total p donné ci-dessous :

$$q(\xi)/p = [\sigma_1(\xi) - \sigma_2(\xi)]/p \quad 3.17$$

$$q(\xi)/p = [\sigma_1(\xi) - \sigma_3(\xi)]/p \quad 3.18$$

La variation $q(\xi)/p$ en fonction de ξ est représentée pour une déformation de $\varepsilon_a = 0.15\%$ sur la Figure 3.95. La valeur du déviateur de contrainte est quasiment nulle pour $\xi < 1$, c'est-à-dire l'ensemble des contacts dont la force normale est inférieure à la force moyenne, ne donnent presque aucune contribution à la reprise de la partie déviateur du tenseur des

contraintes. Cela montre effectivement que la partie déviateur est entièrement distribuée dans le réseau fort de contacts $\xi > 1$.

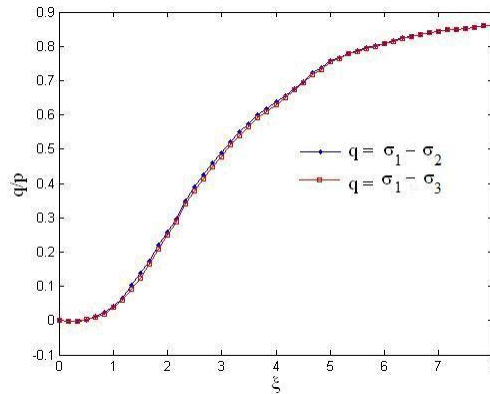


Figure 3. 74. Valeur du rapport q/p en fonction de ξ est déduit uniquement des contacts vérifiant $f_n < \xi \langle f_n \rangle$.

La phase forte est composée des contacts qui portent une force supérieure à la force moyenne. La distribution statistique des force dans cette phase est exponentielle décroissante. La phase faible est constituée des contacts qui portent une force inférieure à la force moyenne. La distribution statistique des forces dans cette phase est en loi puissance. Du point de vue de la transmission des forces, la phase faible se comporte comme un liquide en ce qu'elle ne donne aucune contribution à la partie déviatoire. Toute la contrainte déviatoire est supportée par la phase forte qui se comporte, de ce point de vue, comme le squelette solide du milieu et qui lui donne sa tenue mécanique.

Pour des valeurs élevées de ξ on vérifie bien que la valeur du rapport $q(\xi)/p$ calculé par homogénéisation tant vers celui qui décrit l'état global « mesuré » aux frontières de l'échantillon soit $q/p = 0.86$. Ces résultats sont en bon accord avec ceux obtenus par Radjai et al. [Radjai et al., 2001].

3.5.14.3. Distribution des orientations des contacts pour la phase forte et faible

Dans cette section, nous nous sommes intéressés à la texture géométrique du système, c'est-à-dire à la distribution des orientations de contact appartenant respectivement aux phases forte et faible. La Figure 3.96 représente la distribution des orientations de contact dans les plans x-y, x-z et y-z pour un état d'équilibre $q/p = 1.2$. La compression triaxiale a été effectuée suivant l'axe Z. La phase forte présente une anisotropie d'axe parallèle à l'axe de compression, tandis que la phase faible présente une anisotropie orthogonale moins remarquable. Ces résultats sont typiques à ceux obtenus par Radjai et al. [Radjai et al., 1998]. Dans le plan x-y, perpendiculaire à la direction de compression, la distribution des contacts appartenant respectivement pour la phase forte et faible sont sensiblement identiques et restent isotropes. En effet, l'essai triaxial étant axisymétrique.

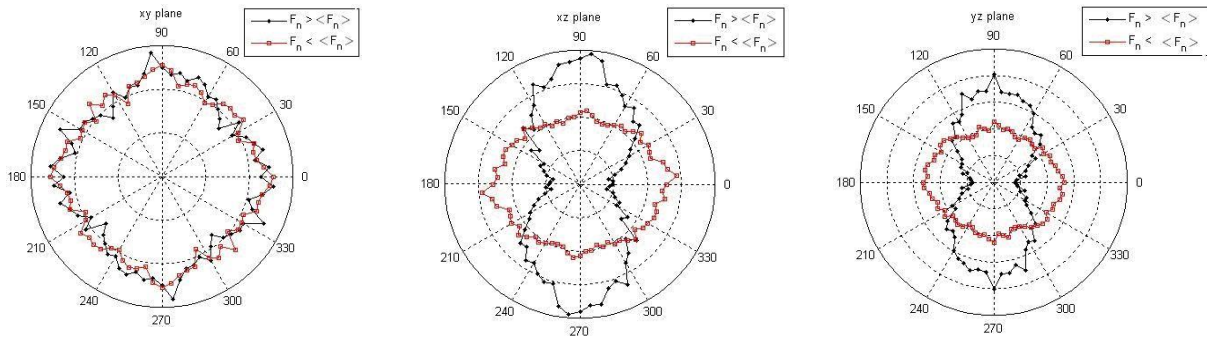


Figure 3. 75. Distribution des orientations de contact suivant leur appartenance à la phase faible ou forte ; Z est la direction de compression.

3.6. Conclusion

Des éléments discrets simples de forme sphérique ont été utilisés. Cette simplification peut être vue comme une limitation, mais elle peut aussi être vue comme un grand avantage. Dans certains cas, elle peut même être souhaitable, car elle permet d'écartier l'effet de certains paramètres et d'étudier le comportement du système en leur absence. Par exemple, on a pu écartier la forme anguleuse des particules et les faire associer à une loi moment rotation (MTL). De plus, on a pu enlever l'effet de la gravité dans nos simulations.

Les simulations numériques discrètes représentent un cadre d'analyse privilégié pour l'étude des relations micro-macro, car elles nous permettent d'accéder à un grand éventail d'essais idéaux, qui ne seraient pas réalisables expérimentalement. La simulation de l'essai triaxial et la compréhension des dépendances macro-micro, qui constitue la partie la plus importante de ce travail de thèse, est justement un de ces essais idéaux.

L'ensemble de l'étude présentée dans ce chapitre montre qu'il est possible de reproduire, grâce à un modèle numérique basé sur la DEM associé à la MTL et grâce à une procédure de calibration, le comportement macroscopique d'un matériau granulaire homogène sans avoir à décrire parfaitement la structure granulaire ni prendre en considération la complexité de forme des grains. Une étude paramétrique de l'essai triaxial modélisé a été menée. La représentativité de l'échantillon de référence a été vérifiée. Une bonne reproductibilité des résultats, une homogénéité suffisante et une anisotropie négligeable ont été bien assurés. De plus, la distribution des tailles des éléments n'influe pas beaucoup sur le comportement mécanique, une fois la prépondérance des éléments de petites tailles est respectée. Ce résultat a permis de choisir la porosité numérique égale à la porosité réelle. Ce qui fait simplifier les variables du modèle à étudier.

L'influence de la porosité initiale et de la pression de confinement a été vérifiée. La porosité initiale n'influe pas le comportement résiduel. Cet aspect suggère l'existence d'un état critique comparable à ce qui est observé expérimentalement. Pour la pression de confinement on s'est placé dans le cadre des confinements faibles inférieurs à 1MPa. Sa variation reproduit le critère de Mohr-Coulomb et l'angle de frottement macroscopique φ a pu être défini.

L'étude de la sensibilité de chaque paramètre local du modèle sur le comportement globale est une voie vers la compréhension des dépendances entre chaque paramètre local et les grandeurs globales observées. Il a été constaté que la calibration du comportement élastique peut se faire d'une manière indépendante de la calibration à l'état de rupture, les deux pouvant être réalisées dans un ordre arbitraire. Une méthode de calibration est ensuite développée pour définir un jeu de paramètre local juger optimal est unique du modèle. Cette procédure de calibration a été ensuite testée sur un cas expérimental. Le comportement macroscopique du matériau testé a été reproduit et le jeu de paramètre correspondant a pu être identifié. Les résultats montrent que le modèle respecte qualitativement et quantitativement le comportement macroscopique d'un sable. Nous avons pu aussi présenter à l'échelle microscopique quelques propriétés statistiques importantes de la transmission des efforts mécaniques dans les milieux granulaires.

Dans le chapitre suivant, nous analysons les mécanismes cinématiques locaux à l'échelle des grains qui sont responsables de la déformation macroscopique d'un échantillon numérique soumis a des sollicitations quasi-statique axisymétriques.

CHAPITRE 4.

Analyse de la réponse mécanique macroscopique basée sur une cinématique locale à l'échelle des grains

4.1. Introduction



Les rotations des particules jouent un rôle prépondérant dans le comportement des milieux granulaires et plus particulièrement dans ceux composés d'éléments circulaires ou sphériques. Elles ont fait l'objet de plusieurs études numériques et expérimentales [Shodja et al., 2003], [Jianfeng et al., 2004], [Kuhn et al., 2004], [Akke et al., 2004], [Jiang et al., 2005]. Oda et ces co-auteurs [Oda et al., 1972], [Oda et al., 1974], [Oda et al., 1982] ont montré avec des expériences sur des matériaux photo-élastiques, que le mécanisme de roulement est plus dominant en particulier lorsque l'angle de frottement local est élevé. Des travaux numériques ont aussi confirmé le rôle majeur joué par les rotations dans la résistance et la déformation des milieux granulaires. Nous trouvons les travaux de [Bardet, 1994] sur des milieux idéalisés analogiques. Ces travaux ont montré que la résistance au cisaillement du milieu idéalisé est fortement affectée par la restriction totale du roulement relatif des particules en contact. Par contre, les propriétés élastiques ne le sont pas. Nous trouvons aussi les travaux numériques de [Shodja et al., 2003], [Kuhn et al., 2004] sur des empilements bidimensionnels. Ces travaux confirment la dominance du mécanisme de roulement.

Ce chapitre traite la cinématique locale (champs de déplacement, champs de rotations...) à l'échelle des grains qui est responsables de la déformation macroscopique d'un échantillon numérique soumis à des sollicitations quasi-statique axisymétriques. Cette analyse est réalisée sur un échantillon numérique de référence défini au chapitre 3. Trois modèles de la DEM sont utilisés. Un modèle sans MTL (à rotations libres), un modèle avec une MTL à paramètres calibrés (rotations contrôlées) et un modèle avec une forte MTL.

Dans un premier temps, nous présenterons les champs de déplacement et de rotation au sein de l'échantillon pour les trois modèles étudiés. Deux états de déformations sont considérés; $\varepsilon_1 = 1\%$ et ε_1^{pic} pour chaque modèle. Ensuite, nous décrivons le mouvement relatif au niveau des contacts. La définition du déplacement relatif entre deux particules a pu être utilisée pour décomposer le mouvement relatif en deux cas séparés : mouvement en translation et mouvement en rotation. Quatre modes ont été identifiés. Leur dominance est quantifiée par le rapport SR . Des comparaisons entre les trois modèles sont présentées. Nous trouvons que la MTL joue un rôle dans la limitation des rotations. Plus précisément, sur le mécanisme du au roulement frottant nommée "*Rolling contacts*" ou les deux rotations ont deux signes opposés. Du modèle avec une MTL à paramètres calibrés (rotations contrôlées) qui représente bien la réponse macroscopique expérimentale, nous observons la dominance du mécanisme nommé "*Rolling contacts*" que celui du au glissement frottant nommé "*Sliding contacts*". Dans un deuxième temps, nous présenterons et nous analyserons le lien entre l'angle de frottement, les deux mécanismes nommés "*Rolling contacts*" et "*Sliding contacts*", la coordinance et la porosité. Nous trouvons que l'augmentation de l'angle de frottement génère des contacts plus résistants et donc un nombre de coordinance plus faible ce qui favorise le mécanisme nommé "*Rolling contacts*" et par conséquent l'échantillon tend à se dilater. A la fin du chapitre nous concluons.

4.2. Contribution du mouvement des particules dans le comportement mécanique macroscopique d'un milieu granulaire sous sollicitations triaxiales axisymétriques

La nature discrète des milieux granulaires est responsable de la complexité de leur comportement global. Les particules sont arrangées d'une manière désordonnée, et présentent souvent des différences de forme, de taille et d'état de surface. Elles peuvent interagir entre elles sous l'effet de sollicitations extérieures. Différentes interactions peuvent se développer au sein du milieu. Notre objectif est de mieux comprendre le comportement de l'ensemble des particules à partir de leur cinématique et de ces efforts qu'elles transmettent. Des études expérimentales faites à ce sujet [Evesque *et al.*, 1993], [Khali, 1996] ne permettent pas, par manque de reproductibilité, de jauger avec précision l'influence des variables microscopiques sur le comportement global macroscopique. Des simulations numériques basées sur le modèle DEM-MTL développé dans le chapitre 2 permettent d'observer les mécanismes inter-granulaires et d'accéder à leurs cinématiques.

Dans cette section nous proposons d'examiner l'effet du mouvement particule -a- particule sur la réponse globale macroscopique d'un échantillon soumis à des sollicitations triaxiales axisymétriques. La Figure 4.1 schématise d'une part la structure macroscopique de l'assemblage granulaire avant et après application des sollicitations triaxiales et d'autre part sa structure microscopique.

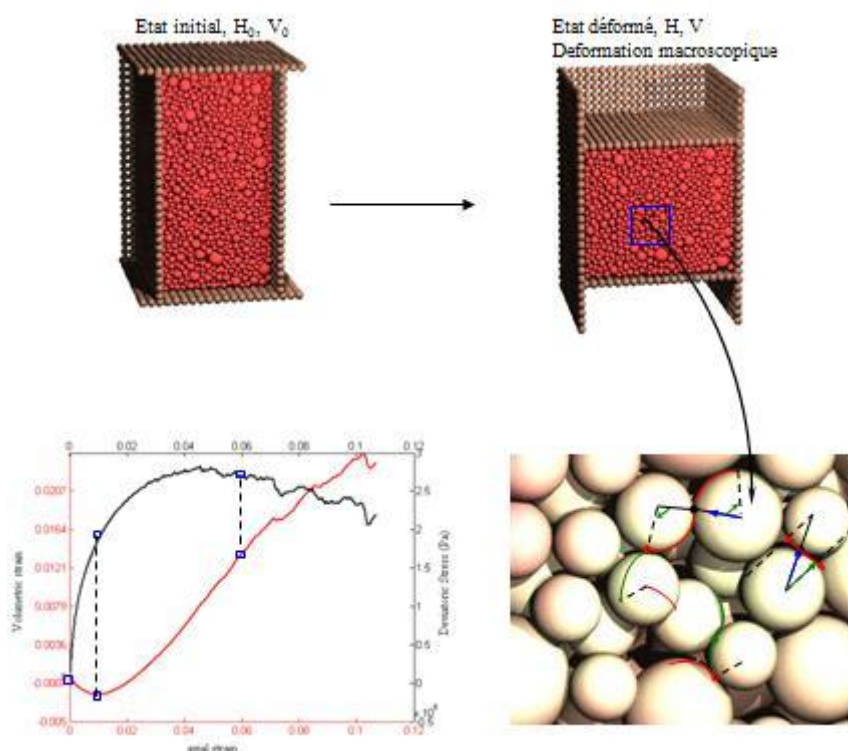


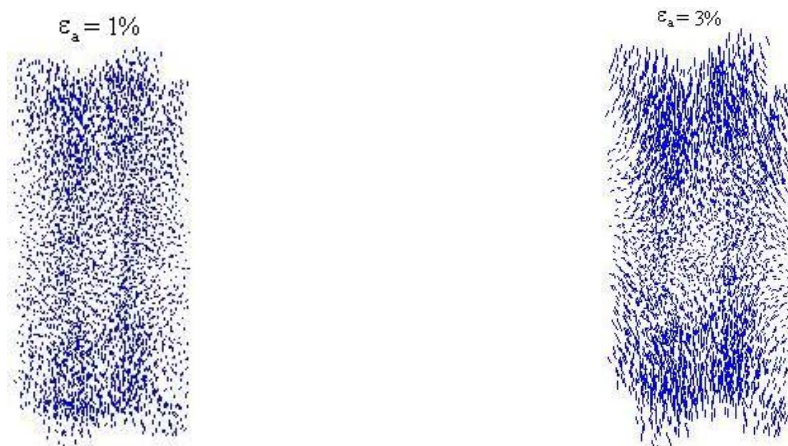
Figure 4. 1. La structure macroscopique et microscopique de l'assemblage granulaire avant et après application des sollicitations triaxiales.

4.2.1. Champs de déplacement des grains

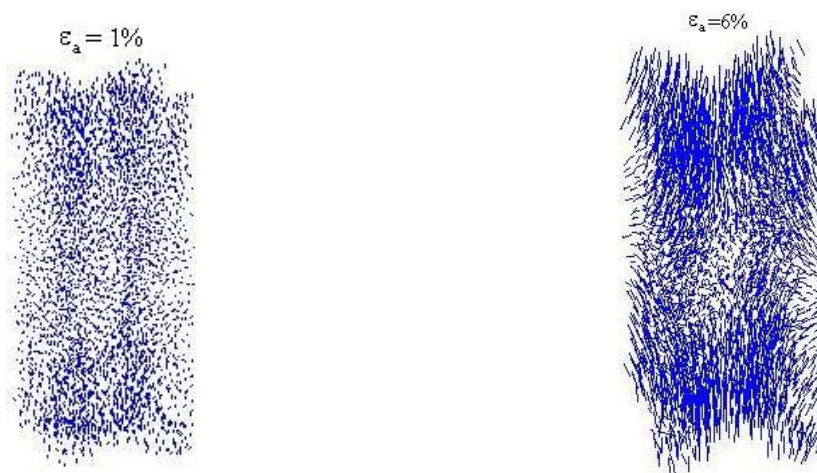
Les résultats des simulations numériques sont illustrés sur la Figure 4.2 pour les trois modèles à savoir celui sans MTL (à rotations libres), avec une MTL à paramètres calibrés (rotations contrôlées) et avec une forte MTL. Cette figure représente les champs de déplacement des centres des particules à deux états de déformations différents tel que, $\varepsilon_1 = 1\%$ et ε_1^{pic} pour chaque modèle. Pour une meilleure représentation, les amplitudes des vecteurs déplacements sont multipliées par un facteur d'échelle indépendamment de leurs valeurs absolues. Cependant, leur orientation est bien lisible. En effet, on peut constater qualitativement que les déplacements mesurés des centres de particules (flèches) suivent assez bien les prévisions de la mécanique des milieux continus. Pour l'ensemble des configurations on note que :

Pour $\varepsilon_1 = 1\%$, la configuration des champs de déplacement des centres des particules est similaire pour les trois modèles. Comme vu au chapitre 3, la MTL n'intervient pas dans le comportement élastique. Ce qui fait, les centres des particules se déplacent d'une façon uniforme.

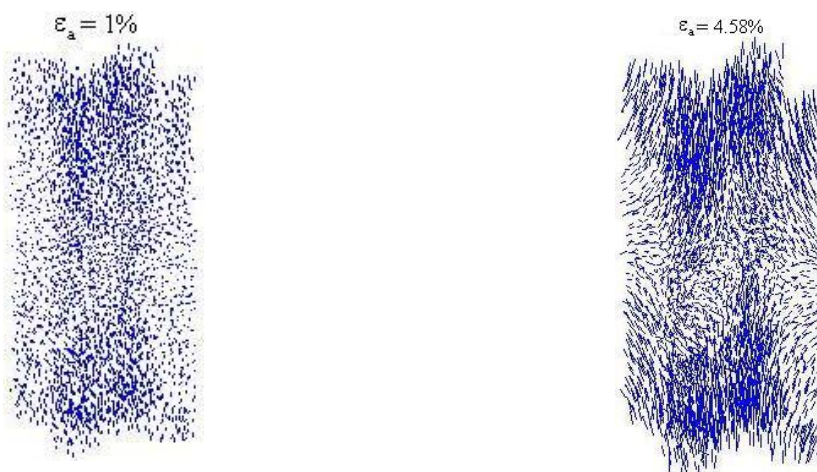
Par contre, pour chaque valeur au pic ε_1^{pic} des trois modèles, on observe que les vecteurs déplacements changent d'orientation. Leur trajectoires sont nettement courbées et se concentrent et se dirigent vers les parois de l'échantillon. Pour le modèle à rotations contrôlées (MTL a paramètres calibrés) on remarque que les vecteurs déplacements ont tendance à se concentrer d'une façon homogène et que la rotation des particules est plus intense. La rotation est donc un degré de liberté qui augmente la mobilité des particules et qui domine aussi les mécanismes de localisation dans les milieux granulaires [Bardet, 1994], [Oda et al., 1982] et [Iwashita, 2000].



(a) Sans MTL (Rotations Libres)



(b) Une forte MTL



(c) Paramètre de la MTL calibrés, (Rotations Contrôlées)

Figure 4. 2. Champs de déplacement des centres des particules à $\varepsilon_a = 1\%$ et ε_a^{pic} .

- a) Modèle Sans MTL (Rotations Libres)
- b) Modèle avec une forte MTL (Rotations Bloquées)
- c) Modèle à paramètre de la MTL calibrés (Rotations contrôlées)

4.2.2. Champs des rotations des grains

Afin d'estimer l'importance des rotations au sein de l'échantillon durant la phase d'écrasement, les trois modèles sans MTL (à rotations libres), MTL à paramètres calibrés (à rotations contrôlées) et avec une forte MTL sont étudiés.

La Figure 4.3 représente la distribution spatiale des rotations à ε_1^{pic} . La taille du symbole carré est proportionnelle à la rotation du grain correspondant. La rotation est évaluée à partir de l'état initial à $\varepsilon_1 = 0\%$ jusqu'au pic. On constate que la rotation des grains se concentre et se densifie pour le modèle à rotations contrôlées (MTL à paramètres calibrés) et se distribue aléatoirement pour le modèle à rotation libre. Pour celui avec une forte MTL sa distribution n'est pas importante vu au deux autres modèles.

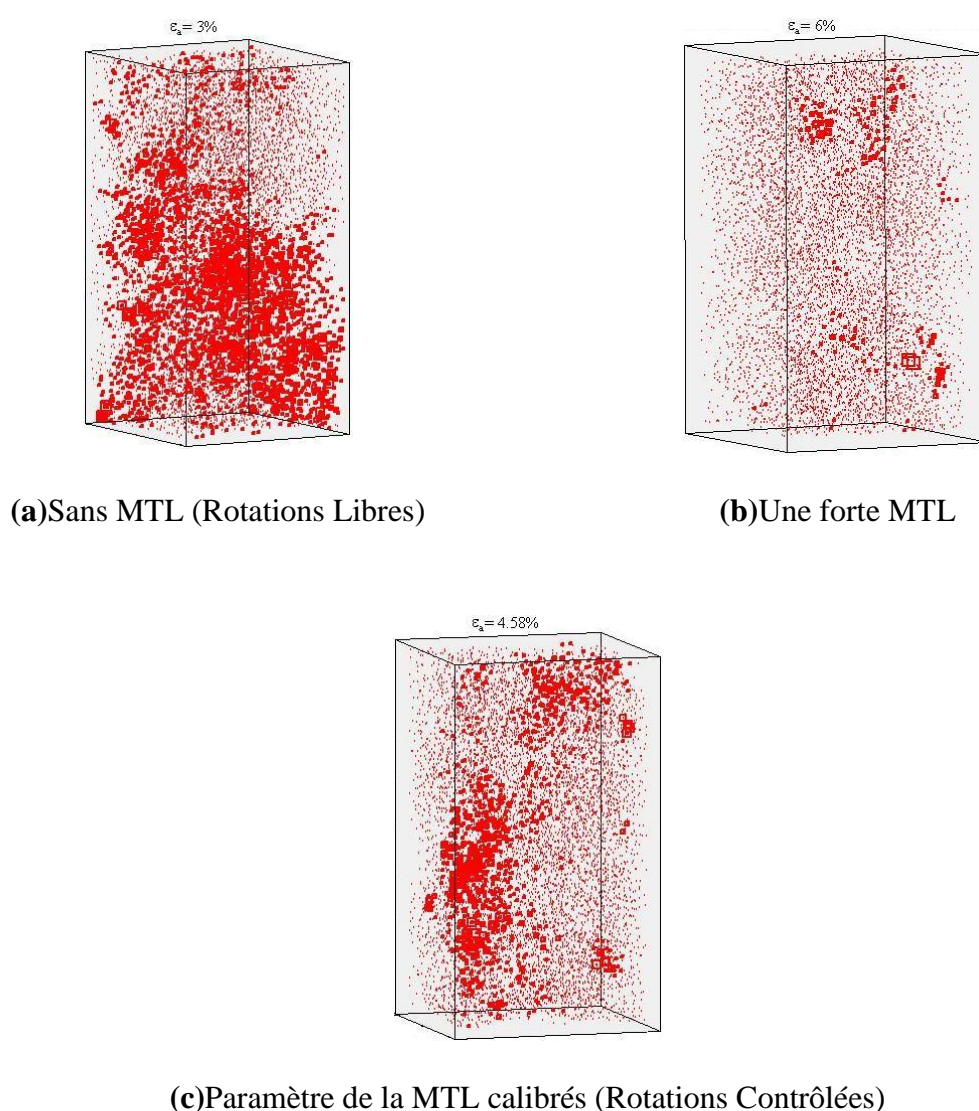


Figure 4. 3. Distribution des rotations des grains à ε_1^{pic} .

- a) Modèle Sans MTL (Rotations Libres).
- b) Modèle avec une forte MTL (Rotations Bloquées).
- c) Modèle à paramètre de la MTL calibrés (Rotations contrôlées).

Au cours de la phase d'écrasement, on peut suivre, à partir de la configuration de référence, l'évolution de la moyenne des rotations des grains. La Figure 4.4 représente l'évolution de la moyenne des rotations $\varpi_{(x,y,z)}$ suivant les trois axes de l'ensemble des particules de l'échantillon en fonction de la déformation axiale pour les trois modèles. Elle est définie comme suit :

$$\varpi_{(x,y,z)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega_{i(x,y,z)} \quad 4.1$$

Malgré les hétérogénéités du champ de déplacement (voir Figure 4.2), on observe sur la Figure 4.4 que la moyenne des rotations $\varpi_{(x,y,z)}$ reste proche de zéro dans l'intervalle de déformation $\varepsilon_1 \in [0, 1\%]$, pour les deux modèles : MTL à paramètres calibrés (rotations contrôlées) et avec une forte MTL. On note aussi pour le modèle à rotation libre (sans MTL) à l'état initial $\varepsilon_1 = 0\%$ une valeur non nulle de la moyenne des rotations. Ceci est du peut être à son état d'équilibre cinétique qui n'a pas été atteint à la fin de la phase de confinement. Son évolution reste assez proche de zéro durant tout l'essai. De rester proche de zéro est du principalement aux rotations symétriques des particules durant la phase d'écrasement. Des observations similaires sont vues sur des empilements bidimensionnels [Cambou, 2001].

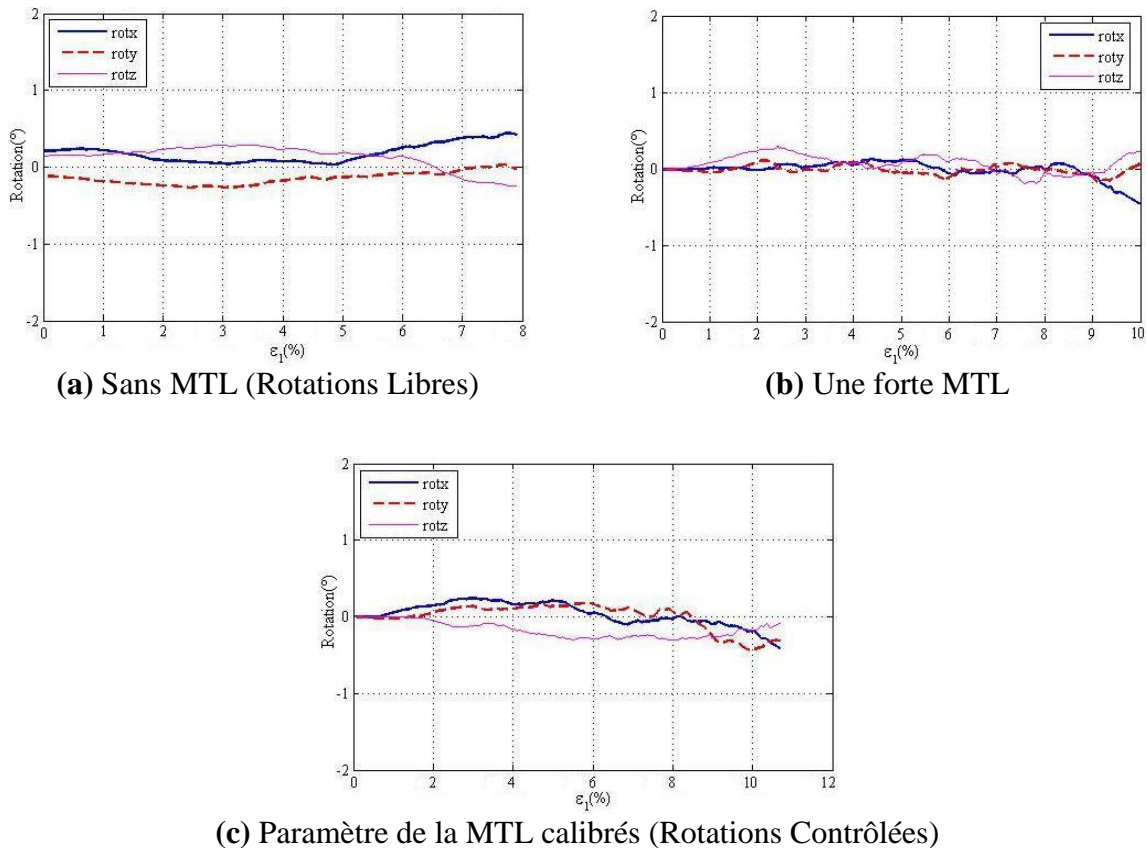


Figure 4. 4. Evolution de la rotation moyenne incrémentale des particules suivant les trois axes (x, y, z) en fonction de la déformation axiale.

- a) Modèle Sans MTL (Rotations Libres).
- b) Modèle avec une forte MTL (Rotations Bloquées).
- c) Modèle à paramètre de la MTL calibrés (Rotations contrôlées).

La Figure 4.5 illustre l'évolution de l'écart type des rotations $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ en fonction de la déformation axiale durant la phase d'écrasement pour les trois modèles. Il est défini par l'expression suivante :

$$\sigma_{x,y,z} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\omega_{i(x,y,z)} - \bar{\omega}_{(x,y,z)})^2} \quad 4.2$$

On observe que l'écart type croît d'une façon significative avec la déformation axiale malgré que la moyenne des rotations reste proche de zéro. Il varie de 0° à 68° pour le modèle avec MTL à paramètres calibrés (rotations contrôlées), de 0° à 45° pour le modèle avec une forte MTL et de 11° à 50° pour le modèle sans MTL (à rotations libres) suivant les trois axes (x, y, z) . Pour des déformations faibles on note une valeur non nulle de l'écart type pour le modèle sans MTL (à rotations libres). Ceci est du peut être a son état d'équilibre cinétique qui n'a pas été atteint à la fin de la phase de confinement. On constate aussi que dans l'intervalle de déformation [0%, 2%], les écarts types suivant les trois axes (x, y, z) des deux modèles avec MTL à paramètres calibrés (rotations contrôlées) et avec une forte MTL coïncident l'un sur l'autre. Ceci est du peut être au fait que les rotations sont contrôlées, alors que pour le premier modèle elles sont libres.

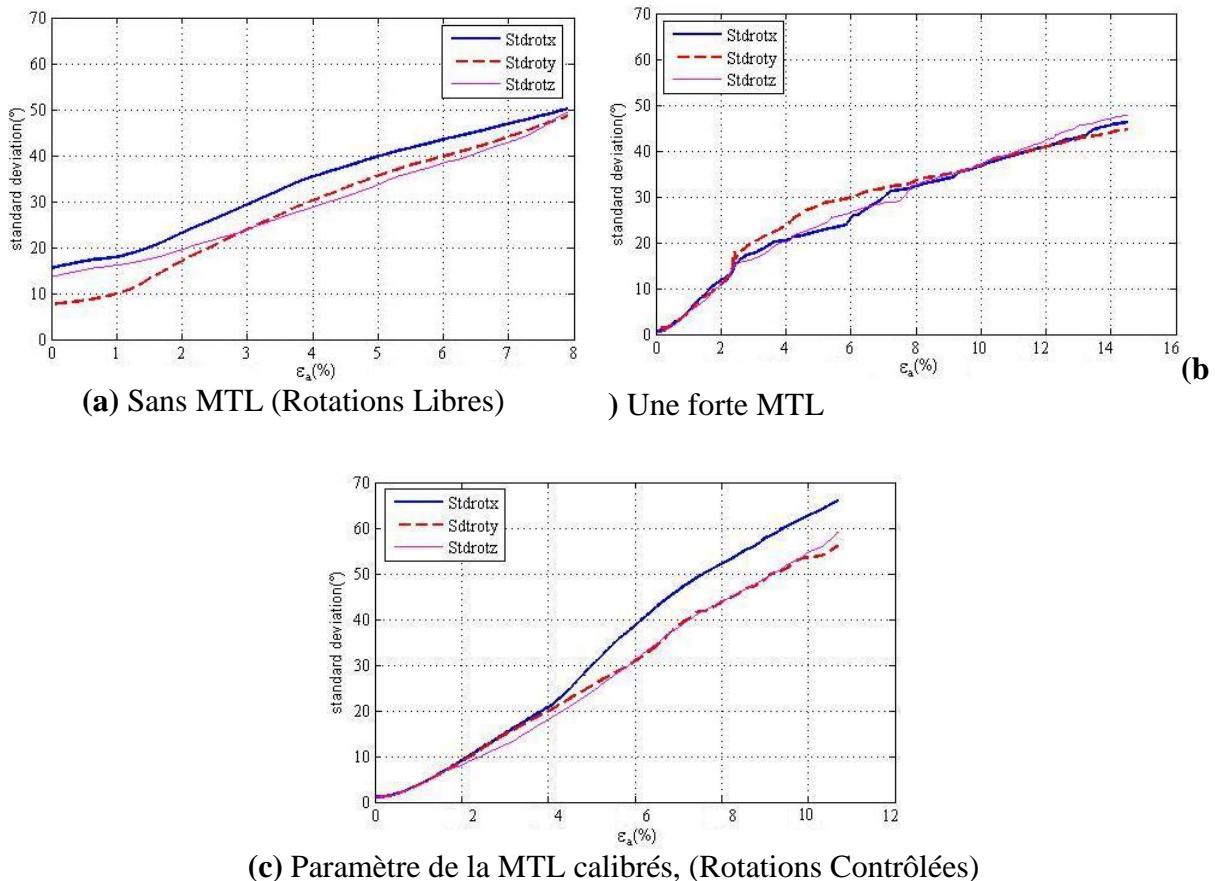


Figure 4. 5. Evolution de l'écart type en fonction de la déformation axiale pour le modèle à rotations libres (sans MTL) (a), le modèle à rotations bloquées (forte MTL) (b) et le modèle à rotations contrôlées (MTL calibré) (c)

Des observations expérimentales par [Calvetti et al., 1997] sur des rouleaux en bois, montrent que l'écart type des rotations croît et varie quasi-linéairement et d'une façon cohérente avec la déformation axiale. D'autres observations faites par [Cambou, 2001] sur un empilement bidimensionnel soumis à un essai de compression biaxiale ensuite à un cisaillement, montrent également une augmentation de l'écart type avec la déformation axiale.

4.2.3. Modes de mouvement relatif au niveau des contacts par le model DEM-MTL

Considérons deux particules A et B , de rayon r_A et r_B , de centres d'inertie G_A et G_B au sein d'un milieu granulaire soumis à des sollicitations triaxiales (Figure 4.6). Les deux particules subissent des mouvements incrémentaux de translation et de rotation. Au temps t , les positions, vitesses et accélérations sont calculées dans un référentiel global $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ d'origine O et de base orthonormée $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$. Soit \vec{OG}_A et \vec{OG}_B deux vecteurs positions qui vont du point O au centre des deux particules. Les rotations de ces deux dernières par rapport au référentiel macroscopique sont repérées par $\vec{\omega}_A$ et $\vec{\omega}_B$ respectivement. $d\omega_A$, $d\omega_B$ et du_A , du_B représentent leurs incréments de rotations et de translations respectivement intervenant durant le pas de temps courant. Le contact entre les deux éléments ait lieu au point C suivant la normale définie par \vec{n} , orientée de l'élément A vers l'élément B . Au temps $t + \Delta t$, la nouvelle configuration des deux éléments est repérée par les centres d'inertie G'_A et G'_B avec le nouveau point de contact est le point C' . La nouvelle normale au contact est baptisée \vec{n}' . On définit par r le rayon moyen des deux éléments en contact de la Figure 4.6.

Le mouvement relatif intervenant entre deux éléments durant le pas de temps courant peut être identifié si seulement si les rotations et la composante du glissement sont connues.

Au temps $t + \Delta t$, le point de contact de l'élément A (ou B) repéré par le point C au temps t sera situé au point M_A (ou M_B) (définis dans le Chapitre 2, section 2.6.3.2). On définit alors la position relative des points M_A et M_B vis-à-vis du nouveau point de contact C' . Elle correspond à la somme des vecteurs liés au mouvement de translation et les vecteurs liés à la rotation relative :

$$\begin{cases} \vec{C'M}_A = d\vec{u}_A + r_A d\vec{\theta}_A \wedge \vec{n} \\ d\vec{u}_A = r_A (\vec{n} - \vec{n}') \\ d\vec{\theta}_A = dt \cdot \vec{\omega}_A \end{cases} \quad 4.3$$

Et

$$\begin{cases} \vec{C'M}_B = d\vec{u}_B - r_B d\vec{\theta}_B \wedge \vec{n} \\ d\vec{u}_B = r_B (\vec{n}' - \vec{n}) \\ d\vec{\theta}_B = dt \cdot \vec{\omega}_B \end{cases} \quad 4.4$$

En supposant que la dispersion des rayons n'est pas trop importante ($r_A \approx r_B$), l'incrément du mouvement relatif noté $d\vec{U}_r$ peut s'exprimer comme en 2D [Iwashita et Oda, 1998] et supposé reste valable en 3D par l'expression suivante en fonction des vecteurs définis en équation 2.43 et 2.44 :

$$d\vec{U}_r = \frac{C'\vec{M}_A + C'\vec{M}_B}{2} \quad 4.5$$

Remplaçant les deux équations 4.5 et 4.6 dans 4.7, on obtient :

$$d\vec{U}_r = \frac{r_A(\vec{n} - \vec{n}') + r_A dt \vec{\omega}_A \wedge \vec{n} + r_B(\vec{n}' - \vec{n}) + r_B dt \vec{\omega}_B \wedge \vec{n}}{2} \quad 4.6$$

Comme l'incrément du mouvement est une combinaison entre le mouvement de rotation et le mouvement de translation dus au glissement, il serait bien apprécier d'étudier chaque cas en particulier.

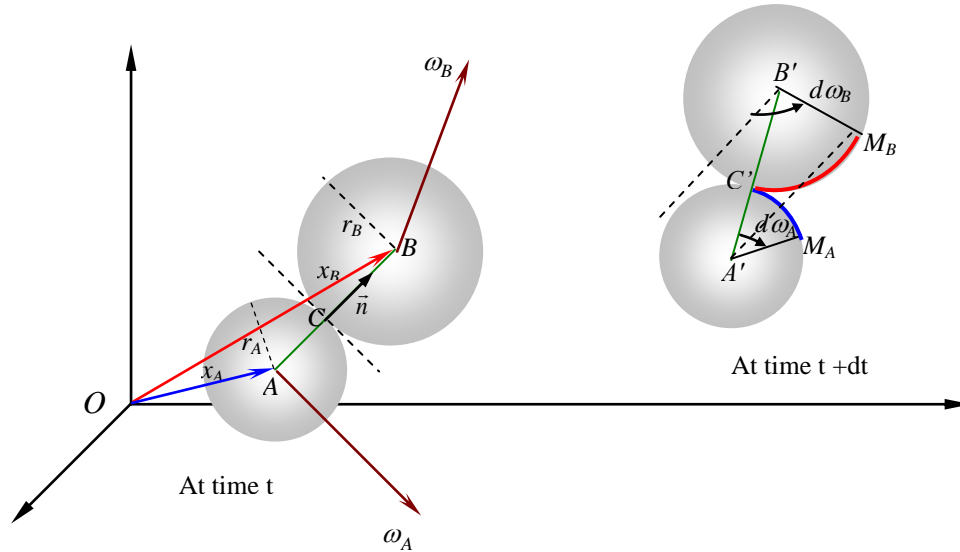


Figure 4. 6. Cinématique d'un contact au temps t et $t + \Delta t$.

4.2.3.1. Glissement pur sans rotations

Il s'agit d'un glissement pur si les composantes des rotations incrémentales sont nulles. Les normales au contact changent d'orientation (voir Figure 4.7a), les vitesses de translation sont différentes de zéro et les vitesses de rotation sont nulles. Le mouvement relatif est défini par l'expression suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\vec{U}_r^{gliss-trans} = \frac{(r_B(\vec{n}'-\vec{n})-r_A(\vec{n}'-\vec{n}))}{2} \\ \vec{v}_{trans} \neq \vec{0} \\ \vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B = \vec{0} \end{array} \right. \quad 4.7$$

Le déplacement incrémental $d\vec{U}_r^{gliss-trans}$ représente le mode de mouvement relatif dominant la translation dus au glissement, nommée *glissement pur sans rotation*.

4.2.3.2. Rotation avec roulement sans glissement.

Il s'agit d'un mode de mouvement relatif dominant les rotations du point de contact dues au roulement des deux particules. La trajectoire du contact ponctuel désigné par C' est liée à la vitesse de rotation des deux particules, que se soit dans le sens des aiguilles d'une montre ou non. En se basant sur les deux positions relatives du point C' notées C_1' et C_2' , nous avons cinq cas à examiner.

4.2.3.2. 1. Roulement dont les vitesses de rotation ont le même signe (1^{er} mode) "Sliding contacts".

Ce mode de mouvement est schématisé sur la Figure 4.7b. Les vitesses de rotation sont différentes de zéro et ont le même signe. Dans ce cas la, les deux positions relatives C_1' et C_2' sont opposées par rapport au point de contact C' . Le mouvement relatif est donnée par l'expression définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\vec{U}_r^{roul-gliss-1} = \frac{(r_A \cdot dt \cdot \vec{\omega}_A \wedge \vec{n} - r_B \cdot dt \cdot \vec{\omega}_B \wedge \vec{n})}{2} \\ \vec{\omega}_A \text{ est } \vec{\omega}_B \text{ sont différent de zéro} \\ sign(\vec{\omega}_A) = sign(\vec{\omega}_B) \end{array} \right. \quad 4.8$$

Le déplacement incrémental relatif $d\vec{U}_r^{roul-gliss-1}$ représente le premier mode de mouvement relatif dominant la rotation due au roulement, nommée *roulement dont les vitesses de rotation ont le même signe* ou pour simplifier on le nomme en anglais "Sliding contacts".

4.2.3.2.2. Roulement dont les vitesses de rotation ont deux signes opposés (2^{ème} et 3^{ème} mode) "Rolling contacts".

Ce mode de mouvement est schématisé sur la Figure 4.7c. Les vitesses de rotation sont différentes de zéro et ont deux signes opposés. Les deux positions relatives C'_1 et C'_2 sont situées dans le même coté par rapport au point de contact C' . Dans ce cas, l'arc $C'C'_1$ est plus grand que l'arc $C'C'_2$ et le mouvement relatif est exprimé par l'équation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\vec{U}_r^{roul-gliss-2} = \frac{(r_A \cdot dt \cdot \vec{\omega}_A \wedge \vec{n} + r_B \cdot dt \cdot \vec{\omega}_B \wedge \vec{n})}{2} \\ C'C'_1 > C'C'_2 \\ \vec{\omega}_A \text{ est } \vec{\omega}_B \text{ sont différent de zéro} \\ sign(\vec{\omega}_A) = -sign(\vec{\omega}_B) \end{array} \right. \quad 4.9$$

Le déplacement incrémental relatif $d\vec{U}_r^{roul-gliss-2}$ représente le deuxième mode de mouvement relatif dominant la rotation due au roulement, nommée cette fois ci *roulement dont les vitesses de rotation ont deux signes opposés*.

En effet, l'étude de ce mode de mouvement relatif permet de mettre en évidence un autre mode de mouvement tel que :

- l'arc $C'C'_1$ est égal à l'arc $C'C'_2$. Il s'agit d'un *roulement pur* (3^{ème} mode). La Figure 4.8d représente ce mode de mouvement relatif, qui est ainsi donné par l'équation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\vec{U}_r^{roul-pur-3} = r_A \cdot dt \cdot \vec{\omega}_A \wedge \vec{n} \\ C'C'_1 = C'C'_2 \\ sign(\vec{\omega}_A) = -sign(\vec{\omega}_B) \end{array} \right. \quad 4.10$$

4.2.3.2.3. Roulement individuel d'une sphère par rapport à l'autre (4^{ème} mode).

La Figure 4.8e représente ce mode de mouvement. Il s'agit du roulement de l'un des deux sphères par rapport à l'autre (l'une des deux sphères est fixe). Le mode de mouvement relatif est ainsi défini comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\bar{U}_r^{roul_gliss_4} = \frac{r_B \cdot dt \cdot \bar{\omega}_B \wedge \bar{n}}{2} \\ C' C'_1 = \bar{0}, \quad C' C'_2 \neq \bar{0} \\ \bar{\omega}_A = \bar{0}, \quad \bar{\omega}_B \neq \bar{0} \end{array} \right. \quad \mathbf{4.11}$$

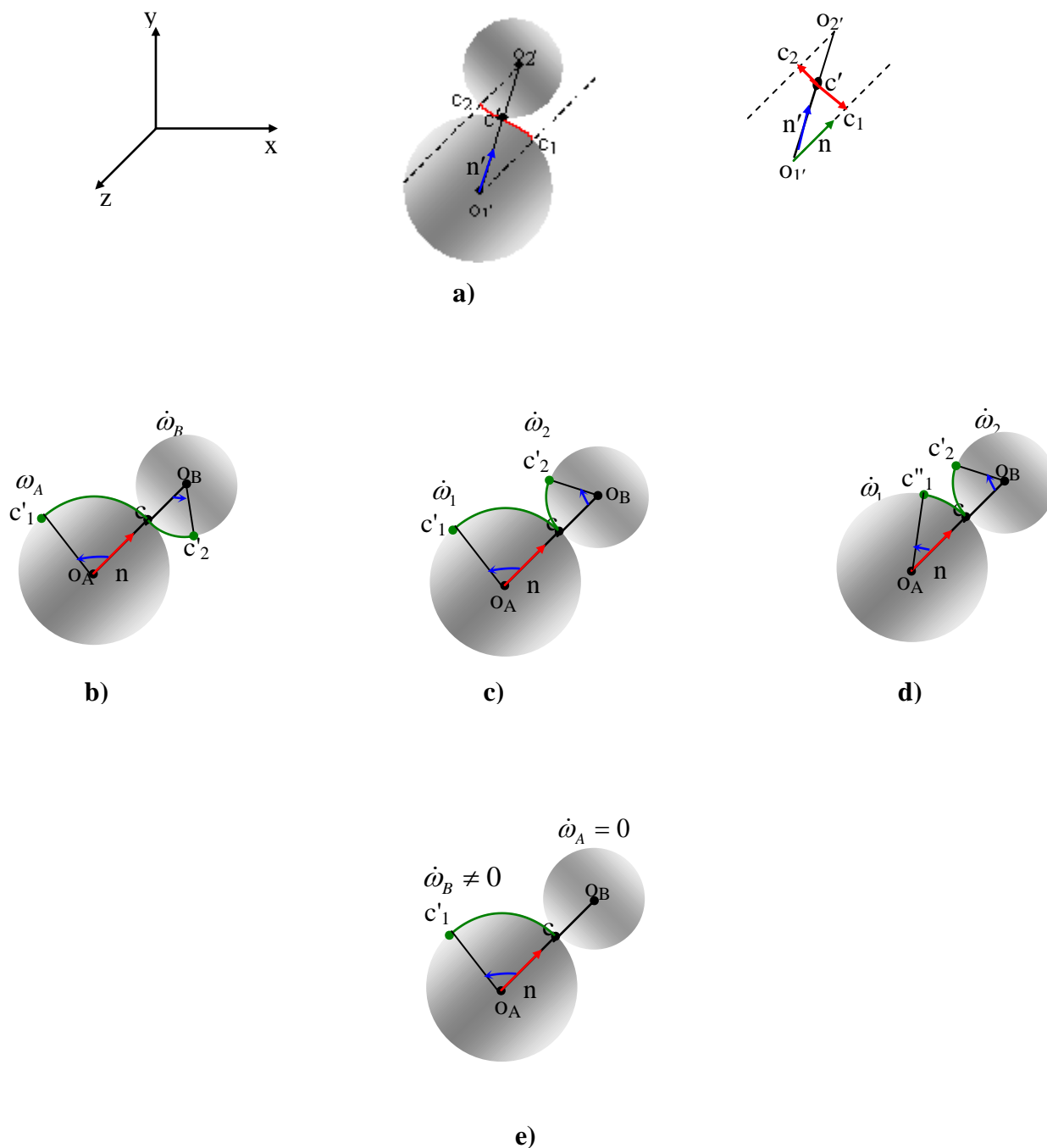


Figure 4. 7. Différentes possibilités de mouvement inter-granulaire vues par le modèle DEM-MTL.

4.2.3.1. Mécanisme de *Rolling contacts* et *Sliding contacts* et leur dominance

Contrairement aux travaux de [Manna et Hermann, 1992], les expériences de [Oda et al., 1982] sur des matériaux photo-élastiques ont confirmé l'importance du roulement, en particulier lorsque l'angle de frottement est élevé. La décomposition du mouvement relatif présentée dans la section précédente nous a permis de montrer que $d\vec{U}_r$ peut prendre plusieurs formes de mouvement relatif. Le but de cette section est d'étudier plus finement le rôle des deux mécanismes de mouvement relatif de roulement et de glissement par le modèle DEM-MTL. Pour aborder cette question nous avons étudié un milieu granulaire non cohésif à l'aide d'un essai triaxial en 3D.

Comme nous l'avons signalé dans la section précédente, $d\vec{U}_r$ est caractérisé par le déplacement et la vitesse de rotation du contact ponctuel. Cependant, pour analyser les modes de mouvement relatif dominants, la nature du déplacement est exprimée quantitativement par le rapport SR (suivant x, y, z) pour chaque contact ponctuel. Il est défini comme suit :

$$SR = \frac{\left| \vec{C}'C'_1 + \vec{C}'C'_2 \right|}{\max\left(\left| \vec{C}'C'_1 \right|, \left| \vec{C}'C'_2 \right|\right)} \quad 4.12$$

Selon cette définition, ce rapport $SR_{x,y,z}$ varie dans l'intervalle $[0, 2]$.

Le mode dominant est le roulement dont les vitesses de rotation ont le même signe (les deux positions relatives C'_1 et C'_2 sont opposées par rapport au point de contact C' , $d\vec{U}_r^{roul-gliss-1}$) nommé "*Sliding contacts*", si le rapport SR varie dans l'intervalle $]1, 2]$, et si le rapport $SR = 0$, le roulement pur (les deux arcs sont égaux et ont le même signe, $d\vec{U}_r^{roul-gliss-3}$) a lieu. Dans le cas du roulement dont les vitesses de rotation ont deux signes opposés (les deux positions relatives C'_1 et C'_2 sont situées dans le même côté par rapport au point de contact C' , $d\vec{U}_r^{roul-gliss-2}$), le rapport SR varie dans l'intervalle $]0, 1]$, nommé "*Rolling contacts*". Et finalement, dans le cas où l'une des deux sphères roule sur l'autre (4^{ème} mode), ce rapport est égale à l'unité ($SR = 1$).

Dans la suite de la section, nous appelons un mode de mouvement relatif du au "*Sliding contacts*" si : $1 < SR \leq 2$ et un mode de mouvement relatif du au "*Rolling contacts*" si : $0 < SR \leq 1$. Cette abréviation nous permet de séparer le mode relatif du au "*Sliding contacts*" de celui du au "*Rolling contacts*".

En effet, pour mieux apprécier le lien entre le rapport SR et les deux mécanismes de "*Sliding contacts*" et de "*Rolling contacts*", trois types de simulations sont effectuées. La Figure 4.8, représente l'évolution caractéristique du déviateur et de la déformation volumique avec la déformation axiale pour ces trois cas différents. Résultats obtenus avec des éléments sphériques à rotations libres (Sans MTL), à rotations contrôlées (MTL a paramètres calibrés) et avec une forte MTL. Il est à noter, que les résultats obtenus ressemblent à ceux des essais en laboratoire et que le modèle calé représente mieux la réponse expérimentale.

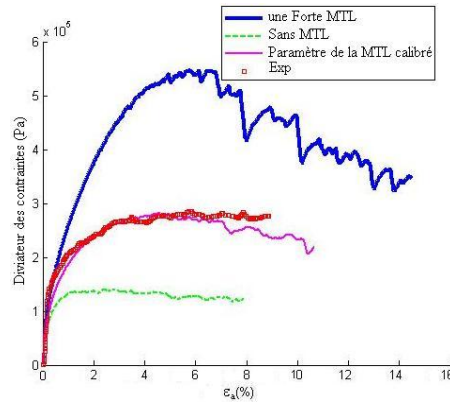


Figure 4. 8. Réponse macroscopique globale sous sollicitations triaxiales expérimentales et numériques obtenues par les trois modèles : Sans MTL (à rotations libres), avec une MTL à paramètres calibrés (rotations contrôlées) et avec une forte MTL.

Les Figures 4.9 et 4.10 représentent un histogramme pour le rapport SR mesuré dans la direction de chargement z , donnée par les trois modèles étudiés, à deux états de déformation axiale différents tel que : $\varepsilon_a = 1\%$ et $\varepsilon_a = 6\%$. Cette représentation permet de mieux visualiser la dominance de l'un des deux mécanismes de "*Sliding contacts*" et/ou de "*Rolling contacts*". On remarque que les distributions de SR se ressemblent dans leur forme pour les trois modèles étudiés. En plus pour $\varepsilon_a = 6\%$ leurs fréquences sont plus importantes pour le modèle sans MTL (à rotations libres) que les deux autres modèles faisant intervenir la MTL. Ceci explique que la MTL intervient que sur les rotations.

Sur la Figure 4.9a correspondant au modèle sans MTL (à rotation libre), on observe que la fréquence de la distribution de SR se trouvant dans l'intervalle $0 < SR \leq 1$ est plus importante que celle se trouvant ainsi dans l'intervalle $1 < SR \leq 2$. Pour $\varepsilon_a = 1\%$, le nombre de contact du mécanisme nommé "*Rolling contacts*" est de 70% plus grand que le nombre de contact du au mécanisme nommé "*Sliding contacts*", et de 75 % pour $\varepsilon_a = 6\%$. Ces résultats confirment la dominance du mécanisme du "*Rolling contacts*". Ils montrent que le pourcentage des contacts du au mécanisme "*Sliding contacts*" reste faible et que le mécanisme "*Rolling contacts*" au niveau des contacts est très actif. Des résultats similaires sont rapportés par [Shodja, 2003], [Odal et al., 1997], [Skinner, 1969], [Bardet, 1992]. De plus, la comparaison entre les Figures 9a,b et 10a,b montre bien que le nombre de contacts du au "*Rolling contacts*" décroît et le nombre de contact du au mécanisme "*Sliding contacts*" augmente pour le modèle faisant intervenir une forte MTL, que ce soit pour $\varepsilon_a = 1\%$ ou $\varepsilon_a = 6\%$. La Figure 9c montre également la dominance du mécanisme de "*Rolling contacts*" pour le modèle faisant intervenir une MTL à paramètre calé. Pour $\varepsilon_a = 1\%$, le nombre de contact du au mécanisme "*Rolling contacts*" est de 39% plus grand que le nombre de contact du au mécanisme "*Sliding contacts*" et de 36 % pour $\varepsilon_a = 6\%$. Le rapport entre le nombre des contacts du au mécanisme nommée "*Rolling contacts*" a celui du au mécanisme nommé "*Sliding contacts*" noté $\frac{N_r}{N_s}$ varie au cours de la simulation. La Figure 4.11 représente l'évolution de $\frac{N_r}{N_s}$ en fonction de la déformation axiale pour les trois modèles étudiés. Les trois courbes se

ressemblent dans leur forme, et le rapport $\frac{N_r}{N_s}$ atteint : des valeurs maximales pour le modèle

sans MTL (à rotation libre), des valeurs minimales pour le modèle faisant intervenir une forte MTL et des valeurs intermédiaires pour le modèle faisant intervenir une MTL à paramètre calée. Ces résultats impliquent que le mécanisme "Rolling contacts" est plus prononcé pour le modèle sans MTL (à rotation libre) en comparaison avec les deux autres modèles. De plus le nombre de contact du au mécanisme "Rolling contacts" est plus élevé que celui du au mécanisme "Sliding contacts". En effet, vu la réponse macroscopique des trois modèles (voire Figure 4.2), le mécanisme "Rolling contacts" est probablement responsable de la diminution de la résistance au pic et de la rigidité inter-granulaire permettant une dilatance plus rapide pour le modèle sans MTL(à rotation libre). En effet, la DEM avec MTL permet de limiter les rotations est plus précisément le mécanisme "Rolling contacts" et engendre des comportements plus réalistes.

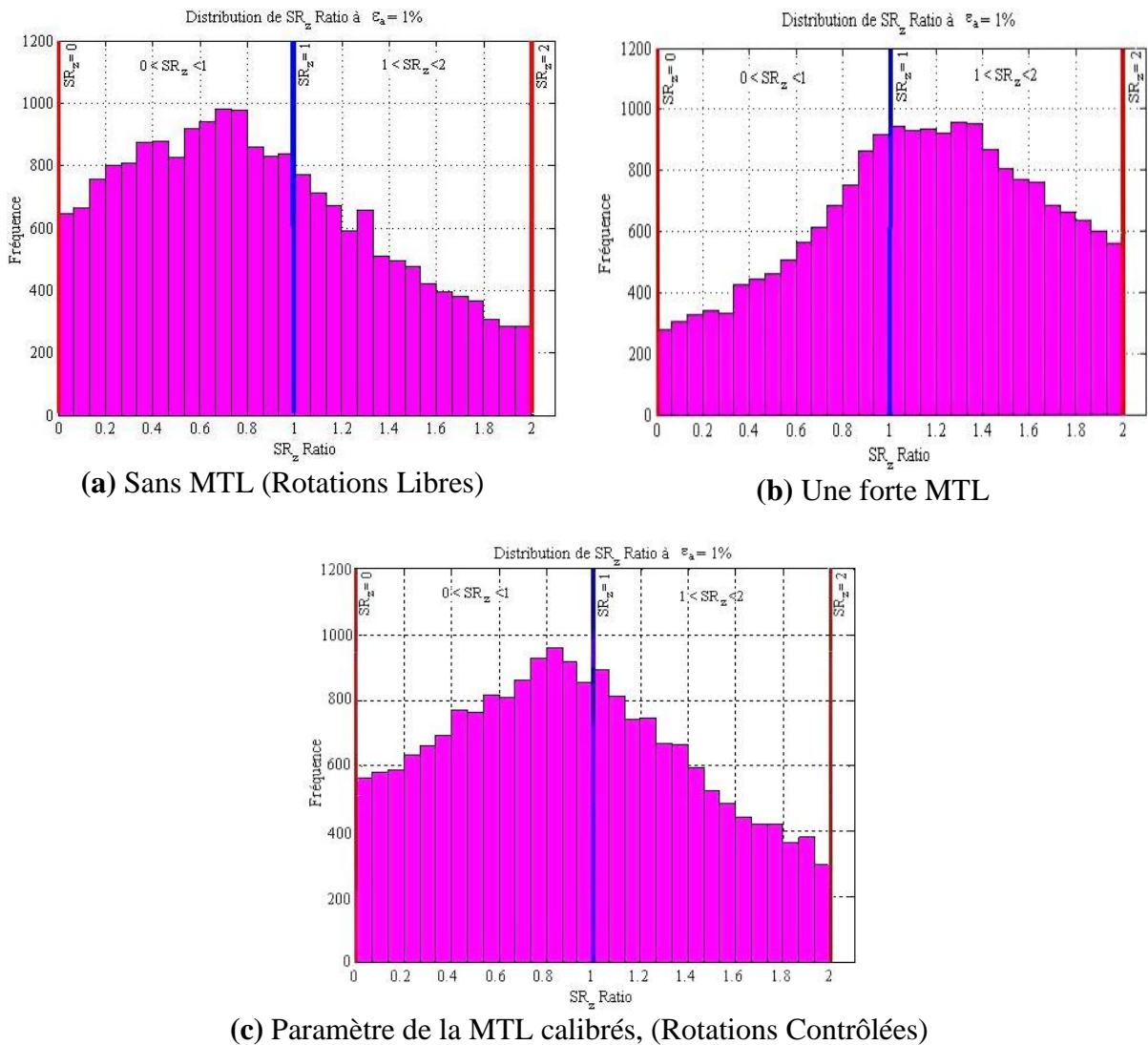
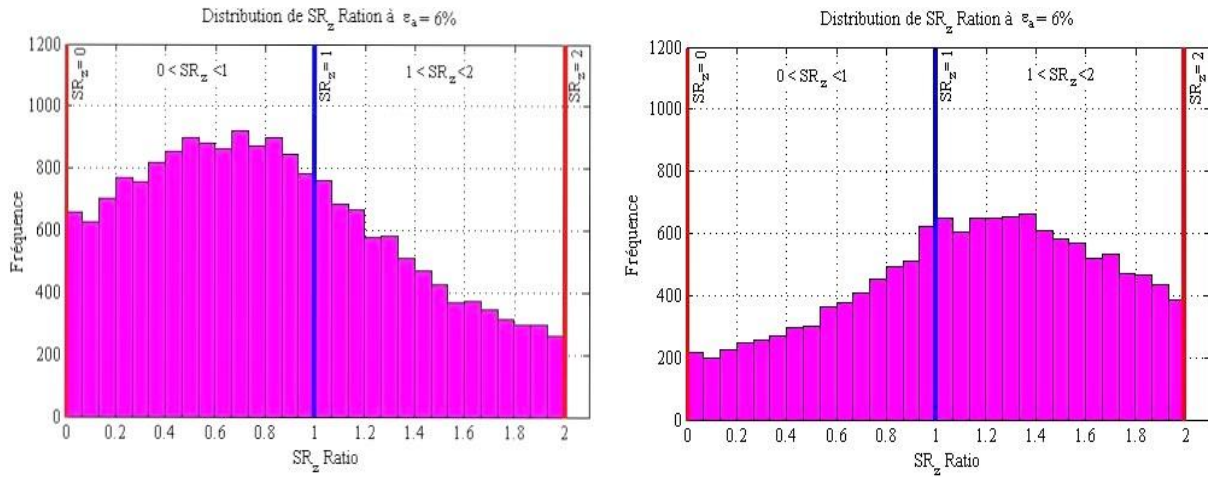


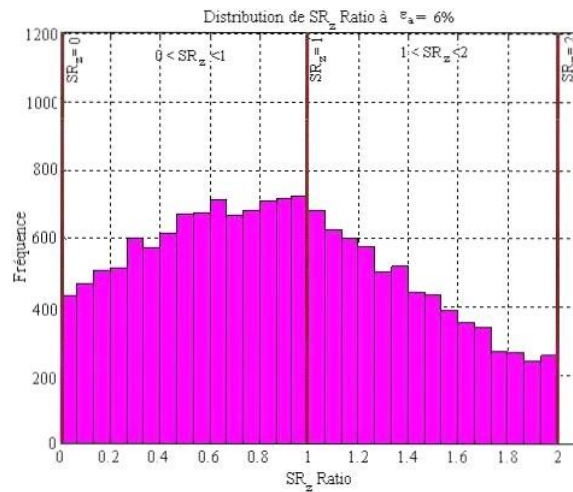
Figure 4. 9. Histogramme de la fraction SR pour un état de déformation $\varepsilon_a = 1\%$.

- a) Modèle Sans MTL (Rotations Libres).
- b) Modèle avec une forte MTL.
- c) Modèle à paramètre de la MTL calibrés (Rotations contrôlées).



(a) Sans MTL (Rotations Libres)

(b) Une forte MTL



(c) Paramètre de la MTL calibrés, (Rotations Contrôlées)

Figure 4. 10. Histogramme de la fraction SR pour un état de déformation $\varepsilon_a = 1\%$.

- a) Modèle Sans MTL (Rotations Libres).
- b) Modèle avec une forte MTL.
- c) Modèle à paramètre de la MTL calibrés (Rotations contrôlées).

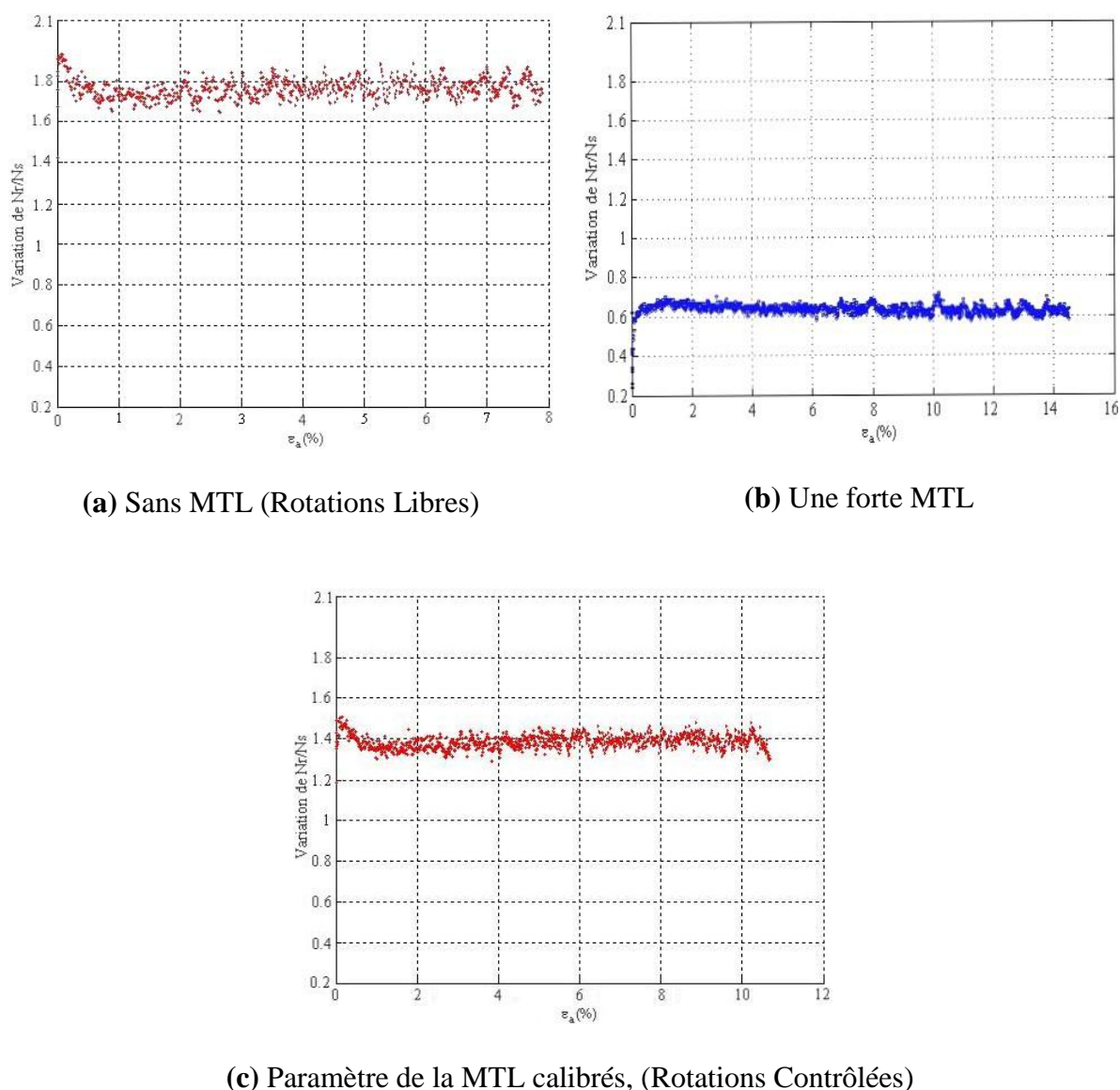


Figure 4. 11. Evolution du rapport $\frac{N_r}{N_s}$ en fonction de la déformation axiale pour le modèle à rotation libre (a) modèle avec une forte MTL (b) et modèle à rotations contrôlées (c).

4.3. Lien entre : L'angle de frottement interne, les mécanismes de roulement et de glissement, la coordinance et la porosité .

Pour étudier la relation entre l'angle de frottement, les deux mécanismes nommés "*Rolling contacts*" et "*Sliding contacts*", la coordinance et la porosité, des simulations de l'essai triaxial ont été menées pour des valeurs de l'angle de frottement local de 13, 25, 32.5°. Elles ont été effectuées avec le modèle à rotation libre (sans MTL) et avec le modèle avec MTL à paramètres calés.

4.3.1. Mécanismes de "Rolling contacts" et de "Sliding contacts"

Afin d'expliquer le lien entre l'angle de frottement macroscopique et les mécanismes de "Rolling contacts" et/ou de "Sliding contacts", il est instructif d'introduire les variables suivantes : la fraction du contact roulant R_f et la fraction des contacts glissants S_f . La première est définie comme étant la fraction entre le nombre de contact du au mécanisme "Rolling contacts" et le nombre total des contacts au sein du milieu granulaire. La deuxième variable est définie aussi comme la fraction entre le nombre de contact du au mécanisme "Sliding contacts" au nombre total des contacts.

La Figure 4.12 représente la variation des deux fractions R_f et S_f en fonction de l'angle de frottement locale pour $\varepsilon_a = 6\%$. Il est bien clair, qu'une augmentation dans l'angle de frottement local engendre une diminution dans la fraction S_f et une croissance dans la fraction R_f . Ce résultat explique bien le cisaillement macroscopique. Localement ce dernier se traduit par le phénomène de glissement et de roulement inter-granulaire. Une valeur supérieure du frottement local génère des contacts plus résistants et permet un nombre de contact plus faible (S_f décroît) ce qui favorise le mécanisme de "Rolling contacts" (R_f croît) et l'échantillon tend à se dilater. Ceci est en accord avec des résultats déjà observé par [Oda et al., 1997], [Akke, 2004], [Bardet et al., 1994], [Skinner, 1969] et [Thornton, 2000] qui considère que le frottement local est une contrainte cinématique provoquant le roulement des particules. Des trois cas étudiés précédemment, pour $\varepsilon_a = 6\%$ nous trouvons une fraction S_f égale à 35%, 41% et 60% et une fraction R_f égale à 64%, 57% et 39%, respectivement pour le modèle à rotations libres (Sans MTL), à rotations contrôlées (MTL a paramètres calibrés) et avec une forte MTL. On constate que la DEM avec la MTL contrôle l'effet du roulement inter-granulaire en augmentant la dissipation frictionnelle ce qui donne lieu à une dilatance plus conforme à la réalité.

4.3.2. Nombre de coordinence

Une autre caractéristique intéressante est le lien entre le nombre de coordinence et l'angle de frottement local. Pour fixer les idées, Le nombre de coordinence pour un arrangement de billes de verre (3D), varie entre 6 et 12 lorsque sa structure passe d'une forme cubique a une forme hexagonale [Graton et Fraser, 1953]. Quelques études numériques [Roux et Chevoir, 2005] et expérimentales en 3D [Pinson et al., 1998] donnent un nombre de coordination constant entre 6 et 7. [Alexandre, 1998] et [Akke, 2004] mettent aussi en évidence un nombre de coordinence minimal égale à 6 pour un empilement rigide isostatique composé de sphères monodisperses non frottantes. Et pour un empilement rigide isostatique composé de sphères monodisperses frottantes, le nombre de coordinence est égal à 4.

La Figure 4.13a représente l'évolution du nombre de coordinence en fonction de l'angle de frottement local pour un taux de déformation $\varepsilon_a = 6\%$. Il est bien clair qu'une extrapolation - des deux courbes obtenues avec les deux modèles à rotations libres (sans MTL) et à rotations contrôlées (MTL a paramètres calibrés) - met en évidence un nombre de coordinence égale à 6 pour un angle de frottement local $\mu = 0^\circ$. Ce résultat est en accord avec celui trouvé par

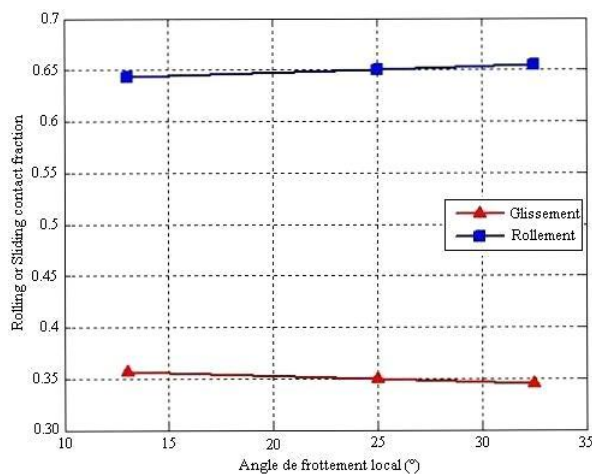
[Alexandre S, 1998] et [Akke, 2004]. De plus, une valeur supérieure du frottement local permet un nombre de contact plus faible. Il est observable que les deux courbes ont une tendance décroissante. On constate aussi que la courbe obtenue avec le modèle à rotations contrôlées (MTL à paramètres calibrés) décroît plus vite que celle obtenue avec le modèle à rotations libres (sans MTL). Ceci est expliqué par le fait que de bloquer ou de contrôler les rotations empêche ou limite tout mécanisme de roulement et engendre un blocage précoce des éléments. Seules les ruptures par glissement engendrent des pertes de contacts et un réarrangement des éléments.

4.3.3. La porosité

La Figure 4.13b représente l'évolution de la porosité en fonction de l'angle de frottement pour un taux de déformation $\varepsilon_a = 6\%$. On constate qu'une augmentation de l'angle de frottement local crée une augmentation de la porosité pour les deux modèles à rotations libres (sans MTL) et à rotations contrôlées (MTL à paramètres calibrés). En effet, les deux configurations présentent une tendance similaire. En combinant ces deux configurations avec la courbe de la porosité initiale ($n = 0.40$), on observe que l'assemblage granulaire avec le modèle à rotations contrôlées (MTL à paramètres calibrés) se compacte pour de faibles angles de frottement local et se dilate pour des valeurs plus élevées. Par contre, l'assemblage granulaire avec le modèle à rotations libres (sans MTL) se compacte que se soit à faible ou à fort angle de frottement local (voire la Figure 3.42. P. 123).

Des deux Figures 4.13a et 4.13b, nous concluons que plus l'angle de frottement est élevé et plus le mécanisme de "Rolling contacts" est dominant, ce qui permet à un nombre de coordination plus faible et par conséquent, l'assemblage se dilate.

(a) Sans MTL (Rotations libres)



(b) Paramètre de la MTL calibrés, (Rotations Contrôlées)

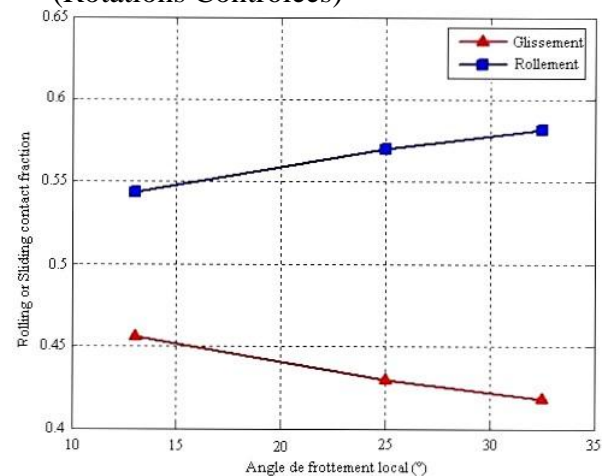


Figure 4. 12. Lien entre l'angle de frottement local, la fraction S_f et R_f pour les deux modèles à rotations libres et à rotations contrôlées pour $\varepsilon_a = 6\%$.

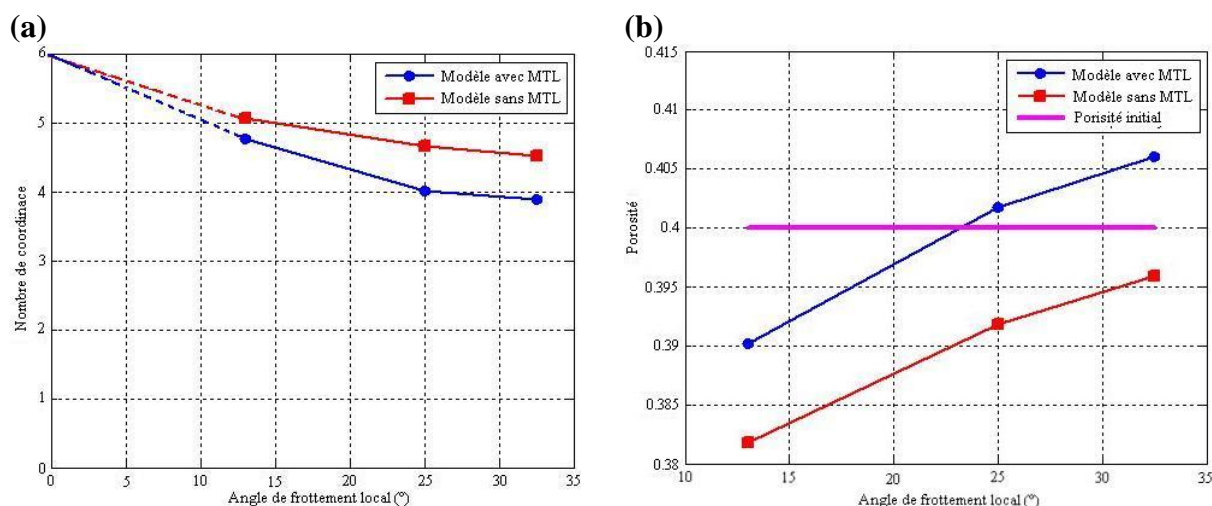


Figure 4. 13. Lien entre l'angle de frottement local, la coordinnace (a) et la porosité (b) pour les deux modèles à rotations libres et à rotations contrôlées.

4.4. Conclusion

Ce chapitre traite plus finement les mécanismes cinématiques locaux à l'échelle des grains qui sont responsables de la déformation macroscopique d'un échantillon numérique soumis à des sollicitations quasi-statique axisymétriques. Pour se faire, nous avons étudié trois modèles différents : à rotations libres (sans MTL), à rotations bloquées (fort MTL) et à rotations contrôlées (MTL à paramètres calibrés).

Sur la base de la simulation numérique discrète, nous avons obtenu des mesures cinématiques à l'échelle des grains. Nous avons pu montrer que :

- le champ de déplacement des centres des grains suit assez bien les prévisions de la mécanique des milieux continus que se soit le modèle avec ou sans MTL.
- Le champ de rotation est plus important et se distribue aléatoirement pour le modèle sans MTL. Pour le modèle à rotations bloquées (fort MTL) son intensité n'est plus significative. Ce résultat postule que la MTL joue un rôle important dans la limitation des rotations.
- La moyenne des rotations reste proche de zéro mais il existe un écart type important pour les trois modèles. Ces résultats sont en accord avec ceux reportés dans [Calvetti et al., 1997] et [Cambou, 2001].

Cependant, la connaissance du champ de déplacement et de rotation des grains permet d'examiner les mécanismes de déformation pouvant exister dans un milieu granulaire. Nous avons pu utiliser la définition du déplacement relatif entre deux grains (vue au chapitre 2) pour mieux décrire ces mécanismes. Le mouvement des grains est décomposé en deux cas séparés. Mouvement en translation et mouvement en rotation. Et comme dans les milieux granulaires le mécanisme de roulement est le plus dominant, on s'est intéressé qu'au mouvement de rotation. Quatre modes du mouvement de rotation ont été identifiés. Il s'agit du roulement dont les vitesses de rotation ont le même signe. (2^{ème} mode), roulement glissant

dont les vitesses de rotation ont deux signes opposés (3^{ème} mode), qui à son tour peut se décomposer en un roulement pur (4^{ème} mode) et un roulement individuel d'une sphère par rapport à l'autre (5^{ème} mode). La contribution de ces quatre modes a été mesurée par le rapport SR . Il permet de caractériser le mode dominant. Cependant, une comparaison entre le modèle sans MTL (à rotations libres) et le modèle avec une forte MTL a mis en évidence l'importance de la MTL dans la limitation des rotations. Nous trouvons aussi que le fait de contraindre les rotations au niveau des contacts par une forte MTL a une influence sur la réponse macroscopique, plus précisément sur la partie élastique (le cas de la Figure 4.10a). En fait, le mécanisme nommé "*Rolling contacts*" est le mode dominant si $0 < SR \leq 1$. En revanche, le mécanisme nommé "*Sliding contacts*" est le mode dominant si $0 < SR \leq 2$.

Pour mieux caractériser le mode dominant nous avons introduit les deux fractions R_f et S_f . Celles-ci ont été établies comme étant le rapport entre le nombre de contact du aux deux mécanismes cités précédemment au nombre totale des contacts de l'échantillon. Nous avons vu que le mécanisme nommé "*Rolling contacts*" en terme de nombre de contact est plus prononcé lorsque les rotations sont libres.

De plus, l'étude de la relation entre l'angle de frottement, les deux mécanismes nommés "*Rolling contacts*" et "*Sliding contacts*", la coordinance et la porosité nous a permis de montrer que lorsque l'angle de frottement augmente, cela génère des contacts plus résistants et permet un nombre de contact plus faible (S_f décroît) ce qui favorise le mécanisme de "*Rolling contacts*" (R_f croît) et un nombre de coordinance plus faible et par conséquent l'échantillon tend à se dilater.

Dans le chapitre suivant nous analysons le comportement mécanique macroscopique du modèle discret associé à la MTL par le biais des enveloppes réponses à différents niveaux de contrainte suivi par une étude du travail du second ordre macroscopique.

CHAPITRE 5.

Analyse du comportement incrémental du modèle discret associé à la MTL

5.1. Introduction



près avoir exposé l'analyse du comportement mécanique macroscopique du modèle discret basé sur une cinématique locale à l'échelle des grains dans le chapitre précédent, nous nous intéressons dans ce chapitre à deux grandes parties. La première partie est consacrée à la caractérisation du comportement mécanique du modèle discret associé à la MTL (écoulement plastique, associativité ou non associativité, caractéristiques des déformations élastiques et plastiques, dépendance de l'écoulement plastique de l'historique du chargement). Cette caractérisation s'appuie sur l'évolution des enveloppes réponses à différents niveaux de contrainte. La deuxième partie est dévolue à l'étude du signe du travail du second ordre à partir du même modèle discret. Nous considérons que le signe du travail du second ordre est un critère permettant de détecter les points de bifurcations par perte d'unicité constitutive. Dans un premier temps nous rappelons que le travail du second ordre est une variable directionnelle. Par la suite on étudie son signe en fonction du niveau de contrainte et de la direction des sollicitations. A la fin nous abordons une étude comparative entre les réponses du modèle discret avec et sans MTL à travers les enveloppes réponses, la norme et le signe du travail du second ordre.

5.1.1. Travail du second ordre : une variable directionnelle

Le travail du second ordre est une quantité essentiellement directionnelle puisque, si nous utilisons une écriture incrémentale des lois l'elastoplasticite [Darve, 1990] on a :

$$d\varepsilon = M(u)d\sigma \quad \text{avec} \quad u = \frac{d\sigma}{\|d\sigma\|} \quad 5.1$$

Il vient :

$$\frac{d^2W}{\|d\sigma\|^2} = \frac{d\sigma : d\varepsilon}{\|d\sigma\|^2} = \frac{d\sigma}{\|d\sigma\|} \cdot M(u) \cdot \frac{d\sigma}{\|d\sigma\|} = u \cdot M(u) \cdot u \quad 5.2$$

Expression qui ne fait intervenir que la direction de $d\sigma$.

On peut donc étudier la variation du signe de d^2W avec la direction de $d\sigma$ par une représentation polaire [Darve et Roguiez, 1997] ou une représentation circulaire [Darve et Laouafa, 1999, 2000] pour un état de contrainte-déformation donné et après une histoire de sollicitation donnée. Cette dernière représentation permet d'épanouir la courbe réponse et évite ainsi les recoupement/chevauchement des branches en cas d'annulation de la grandeur représentée.

5.1.2. Enveloppes réponses et définition d'une recherche directionnelle

Gudehus [Gudehus, 1979] en 1979 a proposé une méthode permettant la comparaison de manière géométrique de la réponse incrémentale unitaire de différents modèles. Les lois pour les milieux granulaires sont indépendantes des vitesses de sollicitations. Par conséquent, pour un état mécanique et une histoire mécanique donnée, on détermine par la relation constitutive l'image d'une sphère de sollicitation.

Dans le cas des lois incrémentalement linéaires, l'image d'un cercle est une ellipse. Dans le cas des lois incrémentalement non linéaires, l'image d'un cercle est une courbe plus complexe. Ces enveloppes réponses de Gudehus permettent d'explorer la réponse de la loi dans toutes les directions à partir d'un état d'équilibre donné. Il suffit alors de vérifier si chaque direction est instable ou non par rapport à un critère donné.

Dans notre cas, toutes les simulations respectent les conditions d'axisymétrie au tour de l'axe z ($\sigma_2 = \sigma_3$ et $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$). Par conséquent, les états de contraintes et de déformations peuvent être représentés respectivement dans le plan d'axisymétrie (ou de Rendulic) des contraintes $(\sigma_1, \sqrt{2}\sigma_3)$ et le plan d'axisymétrie des déformations $(\varepsilon_1, \sqrt{2}\varepsilon_3)$. Une recherche directionnelle en contrainte, consiste à appliquer, à partir d'un état de contrainte-déformation donné, un ensemble de sollicitations incrémentales définies dans le plan d'axisymétrie de Rendulic par un incrément de contrainte $d\sigma$. Ce dernier est défini par une norme égale par exemple à l'unité donné par $(\|d\sigma\| = \sqrt{(d\sigma_1)^2 + 2(d\sigma_3)^2} = 1)$ et par un angle α entre l'axe $\sqrt{2}\sigma_3$ et $d\sigma$. En faisant varier α de 0° à 360° , les directions décrivent toutes une sphère unitaire. Les réponses relatives sont ensuite tracées pour chaque direction de sollicitation dans le plan de Rendulic des incréments de déformation. Ces réponses sont définies par une norme donnée par $(\|d\varepsilon\| = \sqrt{(d\varepsilon_1)^2 + 2(d\varepsilon_3)^2})$ et un angle β entre l'axe $\sqrt{2}d\varepsilon_3$ et $d\varepsilon$. Le principe de la représentation est donné à la Figure 5.1. Dans le cas des recherches directionnelles en déformation, on procède d'une manière réciproque à celle exposée ci dessus.

Une fois la recherche directionnelle effectuée, le travail du second ordre macroscopique est évident à calculer pour chacune des directions testées.

En effet, l'intérêt des recherches directionnelles ainsi que le tracé des enveloppes réponses nous permet, et pour une même charge, à étudier le signe du travail du second ordre en fonction des directions de la sollicitation et à la caractérisation du comportement incrémental du modèle.

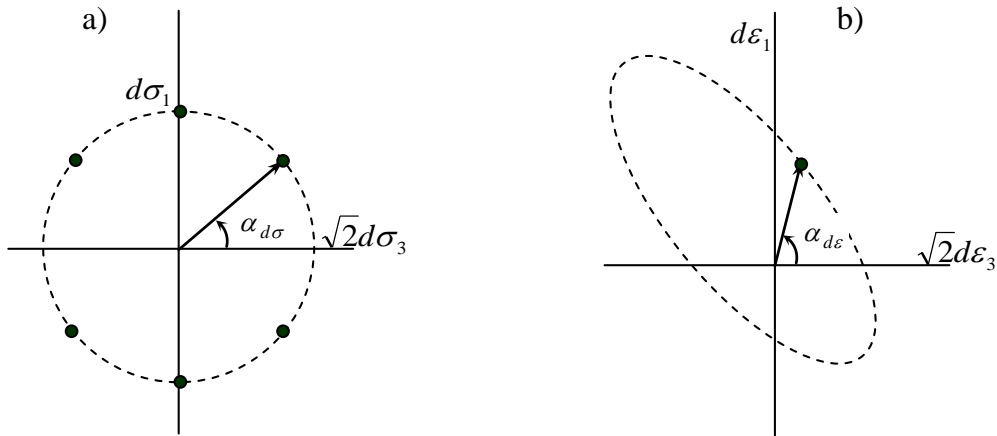


Figure 5.1. Définition des plans d'axisymétrie de Rendulic. Recherche directionnelle en contrainte (a), Enveloppe réponse en déformation (b).

5.1.3. Continuité de la réponse incrémentale

Par ailleurs, la continuité permanente de la réponse incrémentale est une des conditions de cohérence du modèle. C'est-à-dire que pour deux directions de sollicitations incrémentales différentes (points 1 et 2), doivent correspondre deux directions de réponses incrémentales différentes (points 1' et 2'). Cette condition est indispensable quant à la réalisation de la stabilité et l'unicité de la solution d'un problème aux limites.

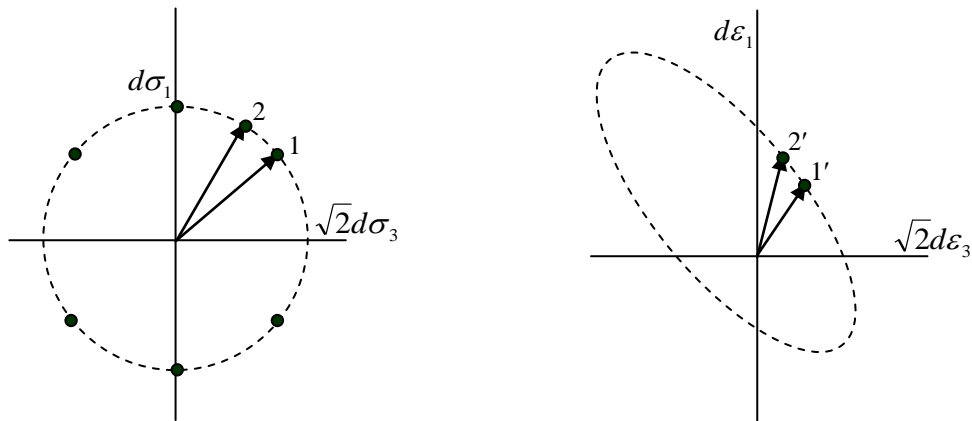


Figure 5.2. Continuité des réponses incrémentales.

5.2. Caractérisation du comportement mécanique incrémental du modèle discret avec MTL

5.2.1. La simulation numérique des recherches directionnelles

La simulation numérique des recherches directionnelles nous donne la possibilité de caractériser le comportement incrémental du modèle en se basant sur les enveloppes réponses [Gudehus, 1979]. Expérimentalement, il est difficile de tracer ces enveloppes, car elles exigent la préparation de nombreux échantillons identiques ayant les mêmes propriétés mécaniques, ce qui est impossible. C'est pourquoi, Bardet et Proubet [Bardet et Proubet, 1989] ont suggéré d'utiliser la simulation numérique pour la solution d'un tel problème. A partir d'un seul échantillon numérique, il devient possible d'effectuer différentes histoire de chargement.

Dans notre cas, deux paramètres à fixer pour simuler des recherches directionnelles. Il s'agit de la magnitude de la norme de l'incrément de sollicitation et le nombre de direction à étudier. Ce dernier paramètre est directement fixé par les capacités de calcul disponibles. Nous nous sommes limités à une sollicitation tous les 10° , soit 36 directions à étudier. Etant donné une vitesse de sollicitation imposée très faible (quasi statique), la simulation de 36 directions demande une trentaine d'heure sur un Pentium 4.0 à 4 GHz. La magnitude de la norme de l'incrément de sollicitation est une question difficile à trancher. Son choix est un peu arbitraire, de ce fait, nous nous sommes basés sur le fait que l'incrément de chargement doit permettre de caractériser le comportement mécanique du matériau à l'état de contrainte-déformation considéré.

5.2.1.1. Procédure de la simulation

En conditions axisymétriques, un état initial est caractérisé par la pression de confinement σ_3 et par le niveau de contrainte défini comme étant le rapport $n = q/p$ où $q = \sigma_1 - \sigma_3$ est le déviateur de contrainte et $p = (\sigma_1 + 2\sigma_3)/3$ est la pression moyenne. Différents états initiaux et trois pressions de confinement ($\sigma_3 = 100\text{kPa}, 200\text{kPa}$ et 300kPa) sont considérés.

Les étapes principales de la procédure numérique pour atteindre les états initiaux et pour simuler les recherches directionnelles sont détaillées ci-dessous l'une après l'autre :

1. Après la phase de grossissement et après avoir atteint la porosité souhaitée, l'échantillon numérique subit une compression isotrope jusqu'à la valeur de la pression de confinement désirée. On laisse l'échantillon se relaxer (énergie cinétique nulle) tout en maintenant la pression de confinement constante.
2. Le déviateur est ensuite appliqué graduellement jusqu'à ce que la valeur de n choisie soit atteinte. On laisse encore une fois l'échantillon revenir à son état de repos (énergie cinétique négligeable). Il est recommandé de bien respecter cette phase de relaxation pour garantir un bon résultat des simulations de la recherche directionnelle.

3. Après l'étape précédente, et lors d'un cycle de calcul de la DEM, on applique progressivement l'incrément de sollicitation pour chaque direction à tester. L'état de contrainte atteint après application de la totalité de l'incrément de chargement est maintenu constant jusqu'à la stabilisation des déformations, ce qui correspond de nouveau à la relaxation de l'échantillon. Suivant le niveau de contrainte n et la direction testée α les déformations peuvent être importantes. De ce fait, la vitesse de la sollicitation est choisie lente afin de garder le mode quasi-statique du chargement, et d'autant plus lente que l'état de contrainte est proche du critère de Mohr-Coulomb. Généralement, le choix de la vitesse de chargement relève de l'expérience, la simulation de certaines recherches directionnelles doit être refaite lorsque la vitesse de chargement est jugée trop importante au regard des déformations calculées.

5.2.1.2. Choix de la magnitude de la norme de l'incrément de sollicitation

Au sens des lois incrémentales, un incrément de chargement $d\sigma$ dans une direction donnée va produire un incrément de déformation $d\varepsilon$ dont la direction est indépendante de la norme de l'incrément de chargement $d\sigma$ (voir l'équation 5.1).

Dans le cas de simulation numérique des recherches directionnelles, tout comme dans celui d'un essai expérimental, un incrément de chargement $d\sigma$ (défini au sens des lois incrémentales), correspond en pratique à l'application d'un chemin de sollicitation rectilinéaire en contrainte comportant une infinité d'états. La réponse incrémentale associée en terme de déformation $d\varepsilon$ n'est pas nécessairement rectilinéaire [Darve et al., 1995]. Sa direction dépend donc en partie de la norme de $d\sigma$.

A titre indicatif, le tableau 5.1 donne quelques valeurs de $\|d\vec{\sigma}\|$ utilisées par certains auteurs pour des réalisations expérimentales ou des simulations numériques discrètes de recherches directionnelles. Par ailleurs nous avons réalisé des recherches directionnelles sur l'échantillon de référence (Chapitre 3, Section 3.5.7.) pour $\|d\vec{\sigma}\| = 0.1, 1.0, 10\text{kPa}$. Les Figures 5.3 et 5.4 présentent les réponses en déformation, relatives aux états d'équilibre suivants: $\sigma_3 = 100\text{kPa}$, $n = 0.42$ et $\sigma_3 = 200\text{kPa}$, $n = 0.8823$. Les observations que l'on peut faire sont :

- pour les directions de $d\vec{\sigma}$ correspondant à un déchargement, les chemins de déformation restent rectilinéaires quelque soit la valeur de $\|d\vec{\sigma}\|$, dans ce cas la direction des vecteurs $\|d\vec{\varepsilon}\|$ est indépendante de la valeur $\|d\vec{\sigma}\|$,
- pour les directions de $d\vec{\sigma}$ correspondant à un chargement, les chemins de déformations peuvent devenir non rectilinéaires lorsque la valeur de $\|d\vec{\sigma}\|$ et σ_3 augmente. Ce phénomène a lieu pour $\sigma_3 = 200\text{kPa}$, $n = 0.8823$ et $\|d\vec{\sigma}\| = 10\text{kPa}$.

Bien que le choix d'une valeur de $\|d\vec{\sigma}\|$ soit quelque peu arbitraire nous nous sommes basés sur le fait que l'incrément de chargement doit permettre de caractériser le comportement

mécanique du matériau à l'état de contrainte-déformation considéré. Nous avons donc opté pour une valeur de $\|d\vec{\sigma}\| = 1 \text{ kPa}$, valeur qui permet de rester au plus près de l'état initial.

Auteurs	Type de simulation	$\ d\vec{\sigma}\ \text{ (kPa)}$
[Alonso-Marroquin, 1998]	2D	0.016
[Calvetti et al, 2003]	3D	10.0
[Kishino, 2003]	3D	1.0

Tableau 5. 1. Quelques valeurs - relevées dans la littérature – de la norme de l'incrément de contrainte utilisée pour des recherches directionnelles.

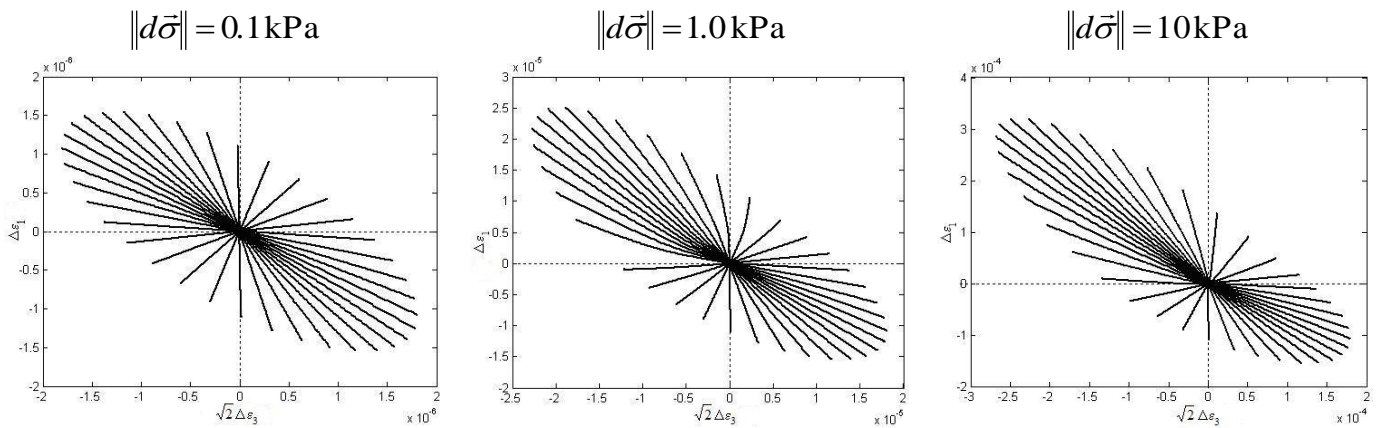


Figure 5.3. Chemins de déformation pour des recherches directionnelles à partir d'un même état initial ($\sigma_3 = 100 \text{ kPa}$, $\eta = 0.42$) et pour $\|d\vec{\sigma}\| = 0.1, 1.0, 10 \text{ kPa}$

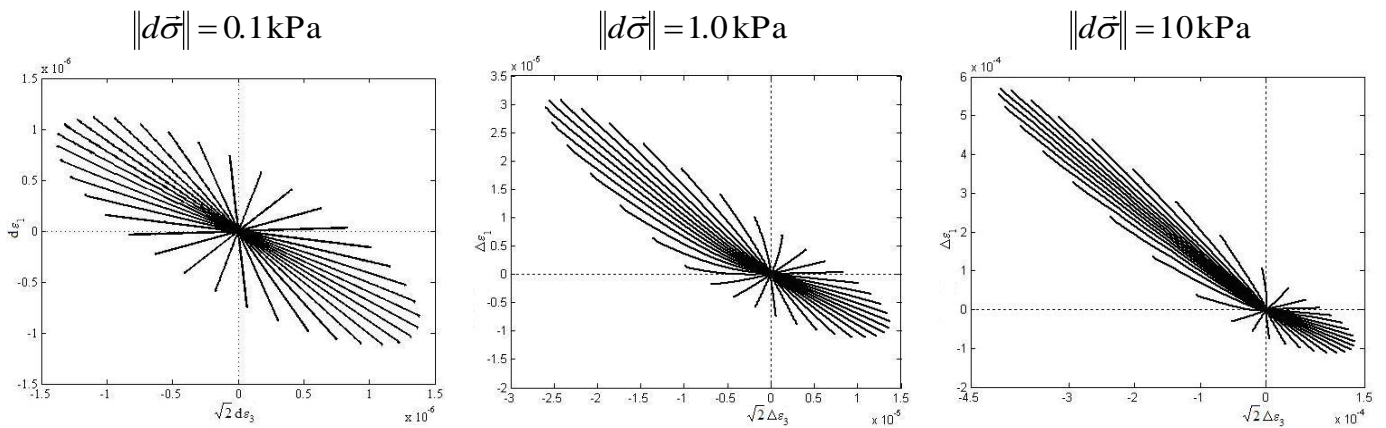


Figure 5.4. Chemins de déformation pour des recherches directionnelles à partir d'un même état initial ($\sigma_3 = 200 \text{ kPa}$, $\eta = 0.8823$) et pour $\|d\vec{\sigma}\| = 0.1, 1.0, 10 \text{ kPa}$

5.2.2. Evolution des enveloppes réponse le long d'un chemin triaxial drainé

Il est maintenant bien acquis que les géomatériaux (sols, roches et bétons) sont des matériaux non associés au sens de l'élasto-plasticité, c'est-à-dire que leur surface de plasticité est distincte de leur règle d'écoulement. Dans cette section nous analysons les enveloppes réponses pour caractériser le comportement mécanique incrémental du modèle discret associé à la MTL. Nous cherchons notamment si le modèle présente une règle d'écoulement associée ou non pour bien modéliser les géomatériaux.

5.2.2.1. Enveloppes réponses totales

Les Figures 5.6 et 5.7 représentent les enveloppes réponses pour des recherches directionnelles réalisées sur l'échantillon de référence pour trois confinements $\sigma_3 = 100\text{kPa}$, $\sigma_3 = 200\text{kPa}$ et $\sigma_3 = 300\text{kPa}$ pour différentes valeurs de n (voir la Figure 5.5).

Pour $n = 0.0$, qui correspond à un chargement isotrope $\sigma_1 = \sigma_3$, les enveloppes réponses sont des ellipses symétriques centrées sur l'origine du repère dont l'axe principal forme un angle $\beta = 125^\circ$ avec l'axe des abscisses. Cette direction bien repérée par le symbole en forme de croix sur chacune des ellipses correspond à un chargement en contrainte purement déviatorique ($d\sigma_1 = -2d\sigma_3 > 0$ soit $dp = 0$ et $\beta = 125^\circ$). On peut affirmer que ces enveloppes réponses sont typiques d'un comportement incrémentalement linéaire (i.e. élastique) isotrope [Calvetti, 2003], [Bardet, 1994], [Gudehus, 1979].

Pour des valeurs de n plus élevées, les enveloppes réponses s'allongent pour finalement générer des ellipses plus serrées. Ce changement de forme témoigne à priori de l'existence d'une règle d'écoulement, puisque la direction de $d\varepsilon$ reste inchangée pour un intervalle de valeur de $d\sigma$. Ce point sera clarifié dans les sections qui suivent lors des calculs des déformations plastiques.

Pour mieux affiner l'analyse des enveloppes réponses, nous supposons la décomposition classique des déformations en une partie élastique et une autre partie plastique donnée par l'équation :

$$d\varepsilon = d\varepsilon_{elas} + d\varepsilon_{plas} \quad 5.3$$

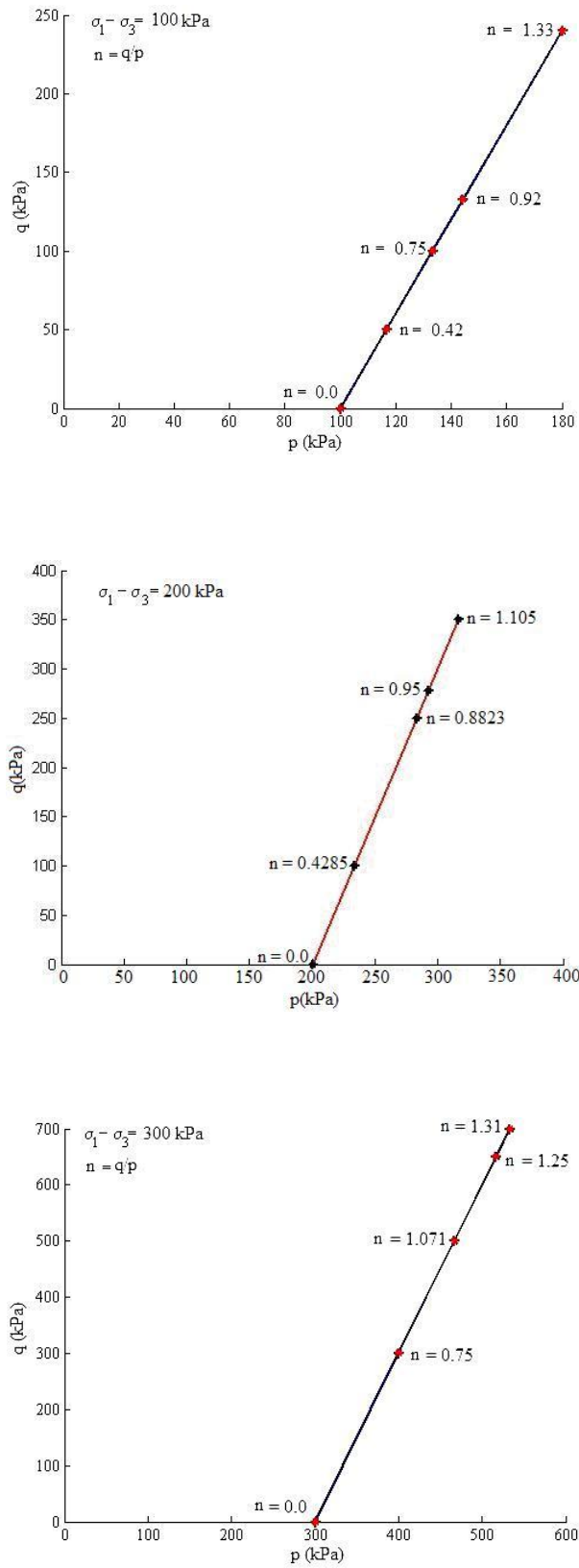


Figure 5.5. Les états d'équilibre étudiés pour $\sigma_3 = 100$ kPa, $\sigma_3 = 200$ kPa et $\sigma_3 = 300$ kPa.

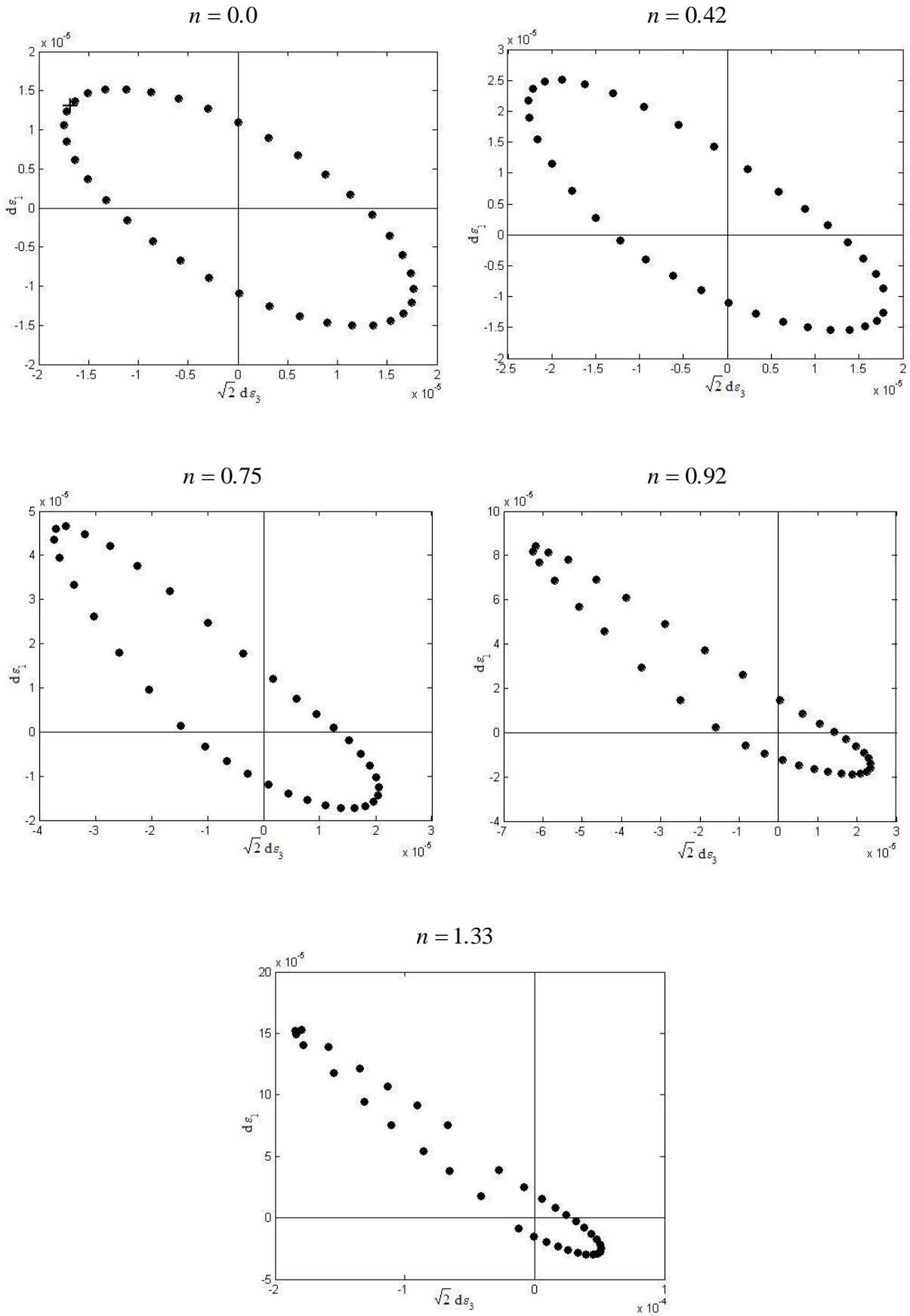


Figure 5.6. Envelopes réponses pour l'échantillon de référence et $\sigma_3 = 100kPa$.

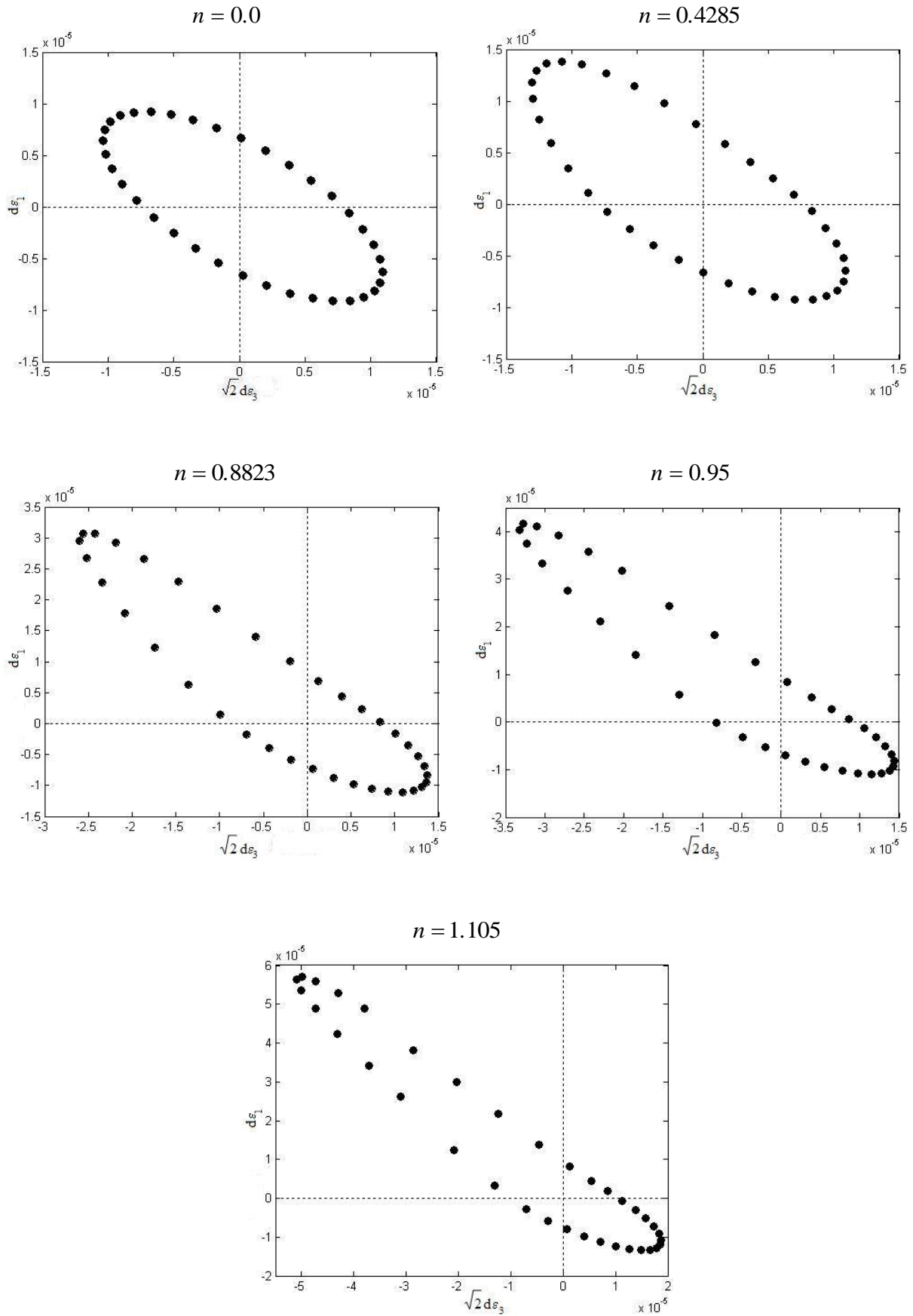


Figure 5.7. Enveloppes réponses pour l'échantillon de référence et $\sigma_3 = 200kPa$.

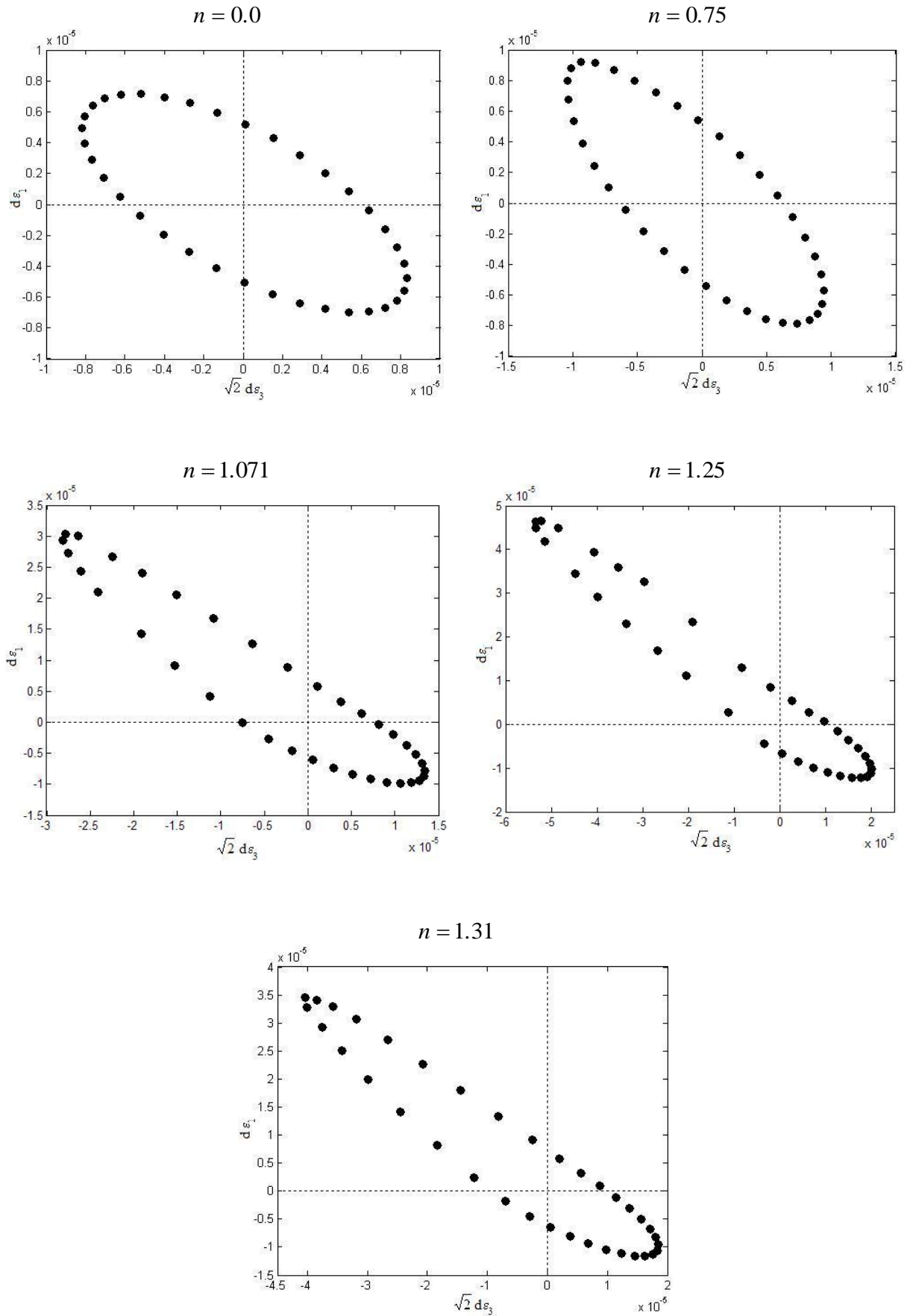


Figure 5.8. Envelopes réponses pour l'échantillon de référence et $\sigma_3 = 300kPa$

5.2.2.2. Enveloppes réponses élastiques

Expérimentalement il est impossible de mesurer directement les déformations plastiques et/ou les déformations élastiques. Dans certains cas où le comportement à la rupture est considéré, la composante élastique des déformations est supposée négligeable ou bien elle est évaluée approximativement à partir de l'équation constitutive du comportement élastique. Dans d'autres cas où les études expérimentales sont plus précises, les déformations résiduelles après un cycle de chargement/déchargement sont supposées plastiques et la composante élastique est calculée par une simple soustraction.

Du point de vue numérique, l'utilisation d'un modèle discret est plus avantageux à cet égard. À notre connaissance il existe deux méthodes pour calculer les déformations élastiques lors des recherches directionnelles.

- La première consiste à simuler un état de chargement/déchargement dans chacune des directions testées [Bardet, 1994], [Kishino, 2003]. Les déformations élastiques sont évaluées comme étant la différence entre les déformations totales après chargement et les déformations résiduelles après déchargement. Dans cette méthode, les auteurs supposent que les déformations au cours du déchargement sont des déformations réversibles et il ne doit pas exister des déformations élastiques bloquées, ce qui n'est pas vérifié dans notre cas
- La deuxième méthode consiste à simuler une recherche directionnelle tout en interdisant les mécanismes locaux irréversibles responsables de la dissipation d'énergie sous forme de glissement intergranulaire et d'ouverture des contacts [Calvetti *et al.*, 2003]. Nous nous sommes limités à appliquer cette méthode du fait que l'interdiction du glissement intergranulaire suffit pour évaluer les déformations élastiques sur des recherches directionnelles.

La Figure 5.9 représente les enveloppes réponses totales et élastiques pour $\sigma_3 = 100\text{kPa}$, $n = 0.92$ et pour $\sigma_3 = 200\text{kPa}$, $n = 0.95$. L'enveloppe la plus grande est calculée sans condition particulière sur le mécanisme de glissement (déformations totales) alors que la plus petite est calculée sous la condition de non-glissement intergranulaire en spécifiant un angle de frottement proche de 90° (déformations élastiques).

Pour mieux expliquer l'aspect de l'interdiction du glissement intergranulaire, nous avons simulé un cycle de chargement/déchargement en imposant $\mu = 90^\circ$. La Figure 5.10 montre le chemin en contrainte à gauche et le chemin de réponse en déformation à droite pour la direction $\alpha = 150^\circ$. Les chemins de réponse en déformation correspondant au chargement et déchargement sont confondus et les déformations résiduelles sont nulles à la fin du cycle. De plus, le nombre de contacts glissants ou ouverts est négligeable par rapport au nombre de contacts avant chargement (résultat observé lors des simulations). D'après ces résultats, on constate que la condition de l'interdiction du glissement intergranulaire est suffisante pour calculer les déformations élastiques lors des recherches directionnelles. D'ailleurs, les enveloppes réponses représentées sur les Figures 5.9 et 5.11, simulées sous cette condition, sont des ellipses centrées sur l'origine du repère. Un résultat typique pour les matériaux élastiques [Gudehus, 1979], [Bardet, 1994]

La Figure 5.11 représente les enveloppes réponses élastiques calculées à l'état isotrope superposées aux états calculés respectivement pour $n = 0.95$ et $n = 1.105$ avec $\sigma_3 = 200\text{kPa}$.

Le symbole en forme de croix sur les enveloppes réponses représente la réponse en déformation due à un chargement en contrainte purement déviatorique ($\alpha = 125^\circ$).

Comme nous l'avons déjà vu, les enveloppes réponses élastiques trouvées ici pour $n = 0.95$ et $n = 1.105$ sont des ellipses centrées sur l'origine du repère. Cependant, contrairement aux enveloppes réponses calculées pour des états isotropes, la direction de l'axe principale des ellipses est à un angle $\beta > 125^\circ$. De plus, la déformation $d\vec{\varepsilon}$ engendrée par un chargement purement déviatorique n'est pas alignée sur l'axe principale. Ces enveloppes réponses sont le reflet d'un comportement incrémental linéaire (i.e. élastique) anisotrope [Guedehus, 1979], [Bardet, 1994].

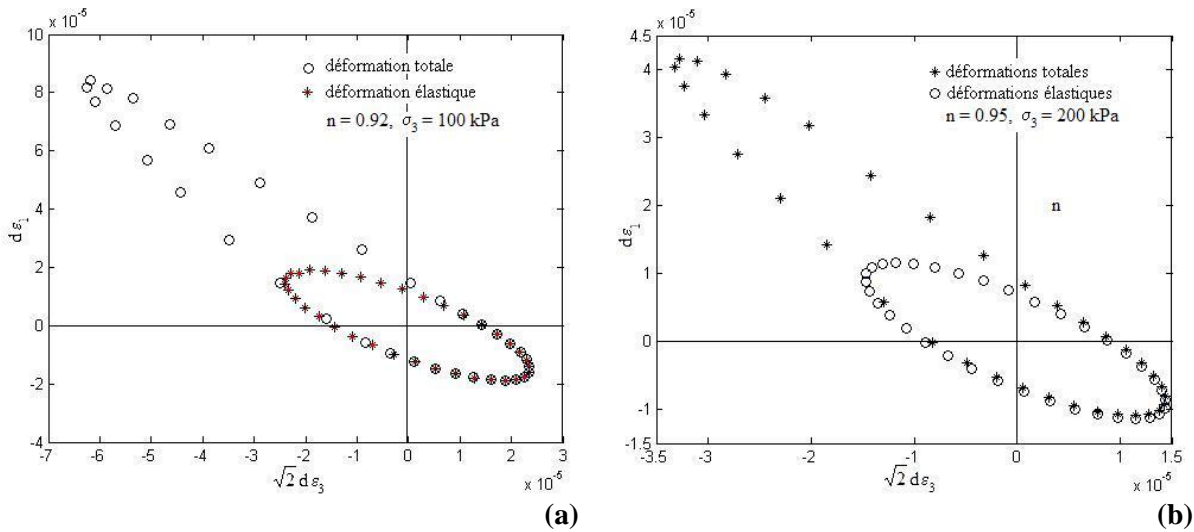


Figure 5.9. Enveloppes réponses totales et élastiques pour $\sigma_3 = 100$ kPa et $n = 0.92$ (a), et $\sigma_3 = 200$ kPa et $n = 0.95$ (b).

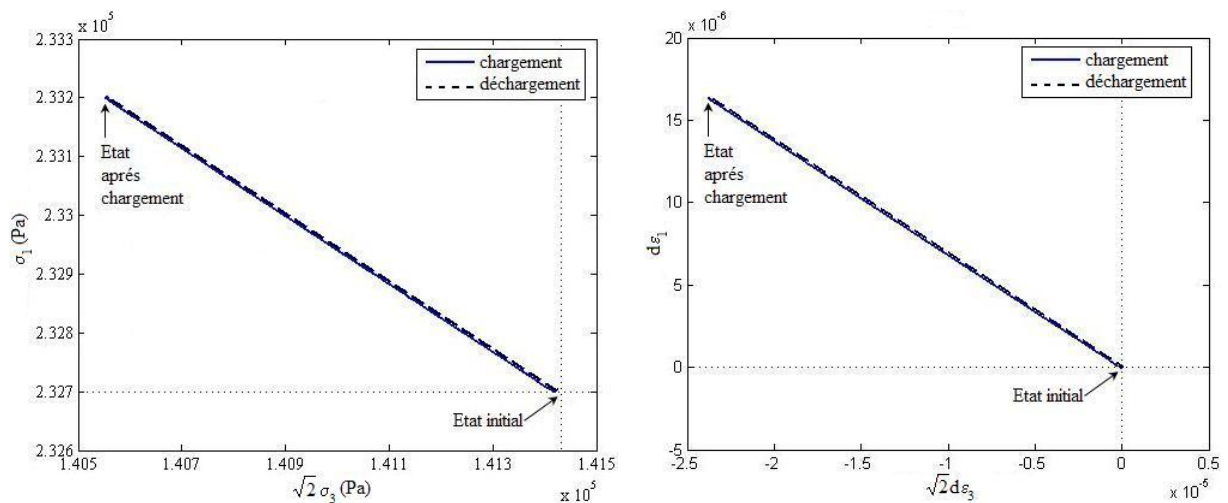


Figure 5.10. Chemin de sollicitation en contrainte, chargement/déchargement (gauche) ; chemin de réponse en déformation (droite) pour un angle de frottement intergranulaire proche de 90° . $\sigma_3 = 100$ kPa et $n = 0.92$.

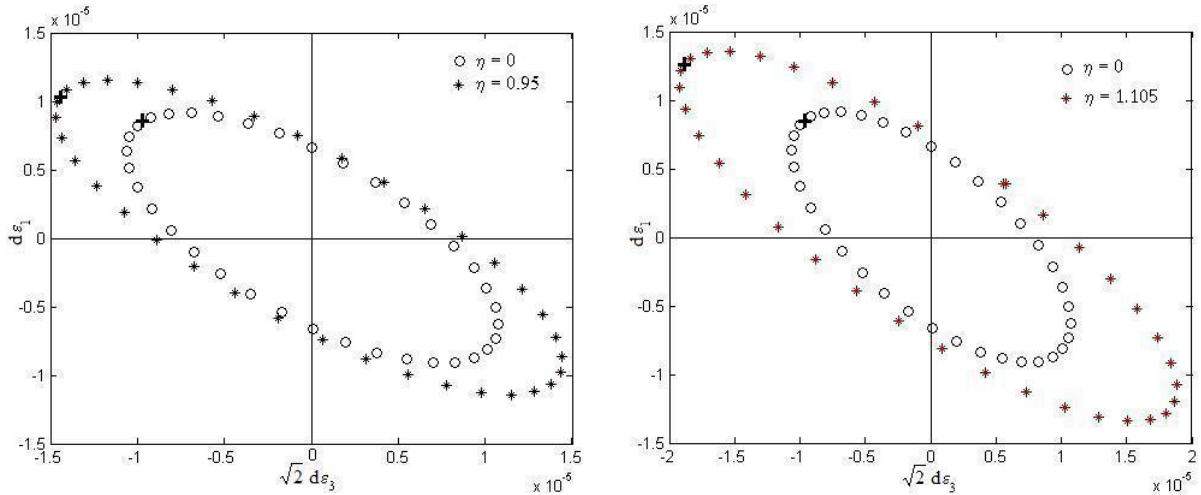


Figure 5.11. Enveloppes réponses élastiques pour un état isotrope et un état anisotrope ($\sigma_3 = 200\text{kPa}$).

5.2.2.3. Enveloppes réponses plastiques – Règle d’écoulement non associée

La décomposition de l’incrément de déformation totale en déformations réversibles (élastiques) et en déformations irréversibles (plastiques), comme indiqué dans la section 5.2.2.1, permet d’obtenir plus d’éclaircissement sur le comportement incrémental du milieu étudié.

La partie plastique des enveloppes réponses est ainsi obtenue en soustrayant les déformations élastiques des déformations totales. La Figure 5.12 illustre la partie plastique des enveloppes réponses totales représentées sur les Figures 5.7, 5.8 et 5.9. Les points composant les enveloppes réponses plastiques sont alignés sur une droites pour les trois cas étudiés, la direction β_p des déformations plastiques $d\varepsilon_p$ est donc indépendante de la direction α du vecteur contrainte $d\bar{\sigma}$. Comme cela avait été à priori indiqué, le modèle discret associé à la MTL décline clairement une règle d’écoulement.

Les enveloppes réponses plastiques peuvent également être plus détaillées à l’aide de deux représentations. La première est de tracer la norme des déformations plastiques $d\bar{\varepsilon}_p$ en fonction de la direction α du vecteur contrainte (Figures 5.13(a), 5.14(a) et 5.15(a)). La seconde consiste à tracer la direction β_p des déformations plastiques $d\bar{\varepsilon}_p$ en fonction de α (Figures 5.13(b), 5.14(b) et 5.15(b)). L’évolution de la courbe $\|d\bar{\varepsilon}_p\|$ en fonction de α se présente sous forme d’une cloche. On observe d’ailleurs, une valeur relativement constante de la direction β_p . Soit $\beta_p = 121^\circ$, $\beta_p = 125^\circ$ et $\beta_p = 128^\circ$ pour $\sigma_3 = 100\text{kPa}$ et $n = 0.92$, $\sigma_3 = 200\text{kPa}$ et $n = 1.105$ et $\sigma_3 = 300\text{kPa}$ et $n = 1.071$ respectivement. La direction β_p nous informe sur la direction de l’écoulement plastique.

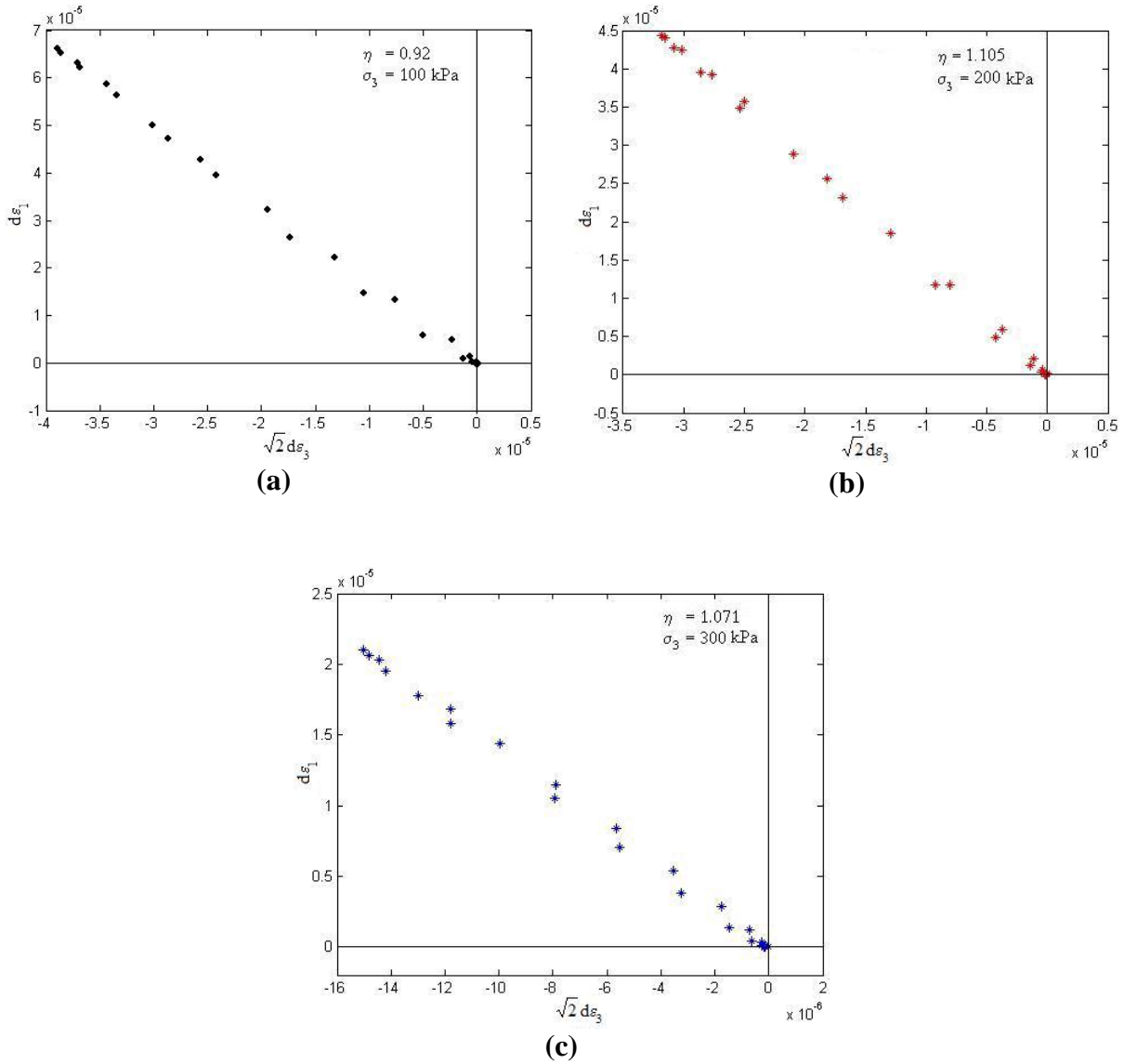


Figure 5.12. Enveloppe réponse plastiques pour l'échantillon de référence à $\sigma_3 = 100\text{kPa}$ et $n = 0.92$ (a), $\sigma_3 = 200\text{kPa}$ et $n = 1.105$ (b), $\sigma_3 = 300\text{kPa}$ et $n = 1.071$ (c).

Au sens de l'élasto-plasticité à simple potentiel cette direction correspond à la normale $\partial g / \partial \sigma$ au potentiel plastique g . Pour savoir que le modèle numérique présente une règle d'écoulement satisfaisant la règle de la normalité ou non (associée ou non), il faut déterminer la normale $\partial f / \partial \sigma$ à la surface de limite élastique f . La Figure 5.16 schématise l'ensemble des directions en contrainte engendrant un chargement au sens de l'élasto-plasticité classique donnant naissance à des déformations plastiques. En prenant le sens direct, la première et la dernière direction de chargement sont tangentes à la surface de la limite élastique. Il est donc possible de déterminer les tangentes à la surface limite élastique à gauche et adroite de l'état de contrainte considéré à partir de l'évolution de $\|d\vec{\varepsilon}_p\|$ en fonction de la direction de sollicitation α . A partir des Figures 5.13, 5.14 et 5.15, les premières déformations plastiques à gauche et les dernières à droite sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Etat d'équilibre à différents confinements	$\sigma_3 = 100\text{kPa}$ $n = 0.92$	$\sigma_3 = 200\text{kPa}$ $n = 1.105$	$\sigma_3 = 300\text{kPa}$ $n = 1.071$
Première direction des sollicitations qui donne lieu à des déformations plastiques α	50°	50°	60°
Dernière direction des sollicitations qui donne lieu à des déformations plastiques α	230°	230°	240°
Direction de la médiane	140°	140°	150°
Direction des déformations plastiques β_p	121°	125°	128°

Tableau 5. 2. Les premières et les dernières directions des déformations plastiques trouvées pour différents états d'équilibre à différents confinements

D'après le Tableau 5.1, les tangentes à droite et à gauche sont colinéaires, la surface de la limite élastique f au voisinage de l'état de contrainte considéré semble donc plane et sa normale $\partial f / \partial \sigma$ est alignée suivant la direction de la médiane des deux directions. Cependant, les directions de $\partial g / \partial \sigma$ et $\partial f / \partial \sigma$ sont largement différentes et on peut dire que la règle d'écoulement est non-associée.

Remarquons sur les Figures 5.17, 5.18 et 5.19 que pour l'ensemble d'états de contraintes étudiés et sous différents confinement que les directions de chargement (au sens de l'élasto-plasticité) s'étalent sur un intervalle de 180°. Par conséquent, la direction de la normale à la surface de limite élastique est considérée comme la valeur médiane de cet intervalle, qui correspond à son tour au maximum de $\|d\vec{\varepsilon}_p\|$ calculé.

Le tableau 5.2 résume les directions de $\partial g / \partial \sigma$ et $\partial f / \partial \sigma$ trouvées pour différents états de contraintes sous différents confinements des Figures 5.17, 5.18 et 5.19.

Etat d'équilibre	$\sigma_3 = 100\text{kPa}$			$\sigma_3 = 200\text{kPa}$			$\sigma_3 = 300\text{kPa}$		
	$n = 0.75$	$n = 0.92$	$n = 1.33$	$n = 0.8825$	$n = 0.95$	$n = 1.105$	$n = 0.75$	$n = 1.071$	$n = 1.25$
Direction de $\partial f / \partial \sigma$	140°	140°	150°	140°	140°	140°	140°	140°	150°
Direction de $\partial g / \partial \sigma$	127°	121°	134°	126°	125°	125°	125°	128°	129°

Tableau 5. 3. Les directions de $\partial f / \partial \sigma$ et $\partial g / \partial \sigma$ pour différents états d'équilibre à différents confinements

La Figure 5.20 représente les directions d'écoulement plastique et de la normale à la surface de limite élastique pour différents états de contraintes sous les confinements $\sigma_3 = 100\text{kPa}$ et $\sigma_3 = 200\text{kPa}$. Lorsque n augmente, la tangente à la surface de limite élastique a tendance à s'aligner sur le critère de rupture de Mohr-Coulomb. Un résultat similaire a été trouvé par [Sibille, 2006] sur un modèle numérique DEM avec rotation libre. Dans le même sens, Darve et al. [Darve et al., 1995] ont montré pour un sable lâche et sable dense que la forme de la limite élastique épouse la forme de la limite de plasticité quand la surface de limite élastique s'en rapproche.

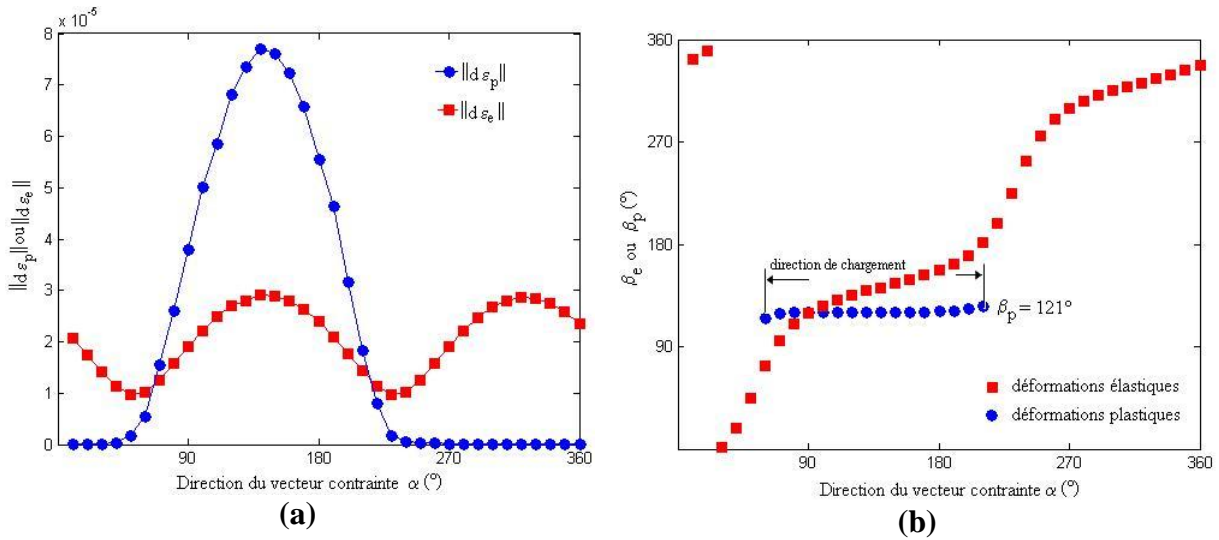


Figure 5.13. Norme des déformations plastiques $\|d\vec{\varepsilon}_p\|$ et élastiques $\|d\vec{\varepsilon}_e\|$ (a), direction des déformations plastiques β_p et élastiques β_e (b), en fonction de la direction de sollicitation α . Echantillon de référence avec $\sigma_3 = 100\text{kPa}$ et $n = 0.92$

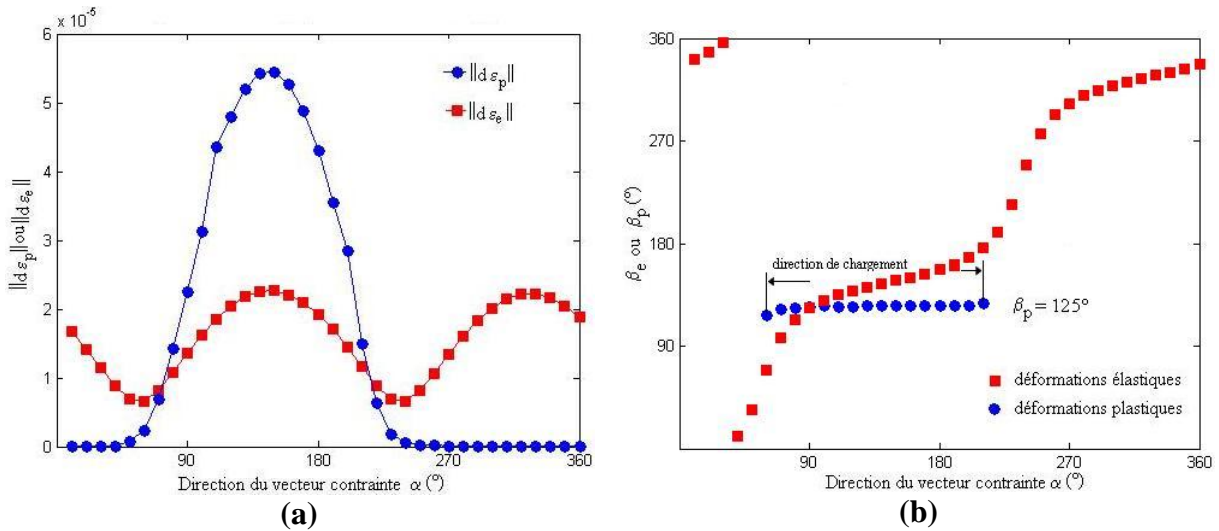


Figure 5.14 Norme des déformations plastiques $\|d\vec{\varepsilon}_p\|$ et élastiques $\|d\vec{\varepsilon}_e\|$ (a), direction des déformations plastiques β_p et élastiques β_e (b) en fonction de la direction de sollicitation α . Echantillon de référence avec $\sigma_3 = 200\text{kPa}$ et $n = 1.105$

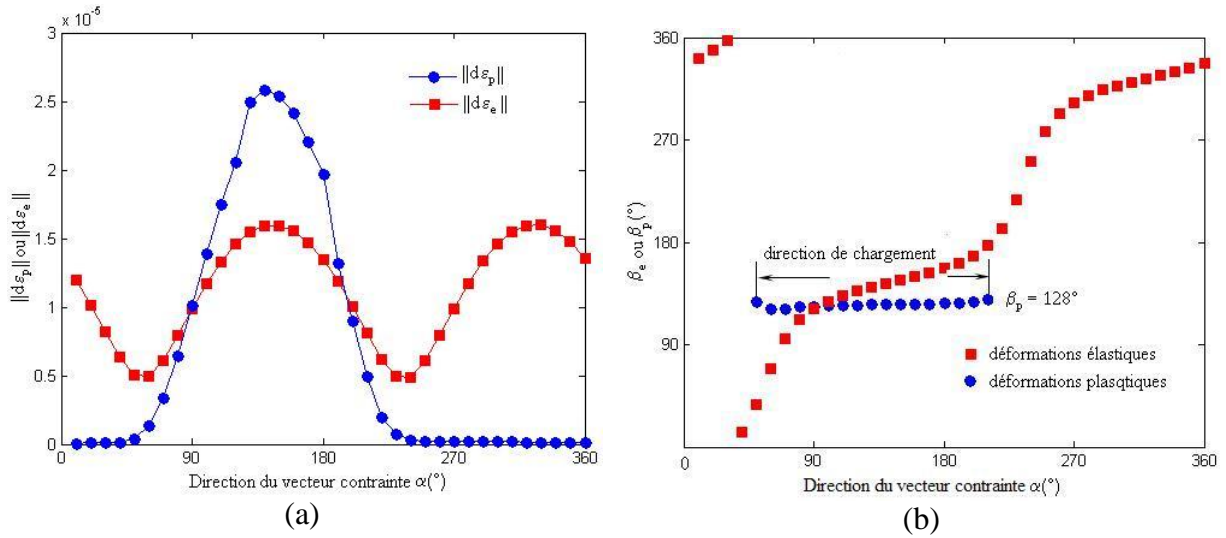


Figure 5. 15 Norme des déformations plastiques $\|d\bar{\varepsilon}_p\|$ et élastiques $\|d\bar{\varepsilon}_e\|$ (a), direction des déformations plastiques β_p et élastiques β_e (b) en fonction de la direction de sollicitation α . Echantillon de référence avec $\sigma_3 = 300\text{kPa}$ et $n = 1.071$

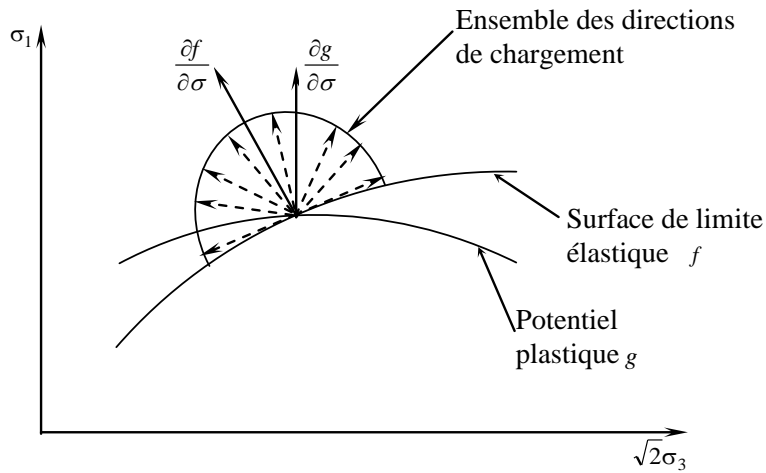


Figure 5. 16 Direction en contrainte engendrant un chargement au sens de l'élasto-plasticité classique

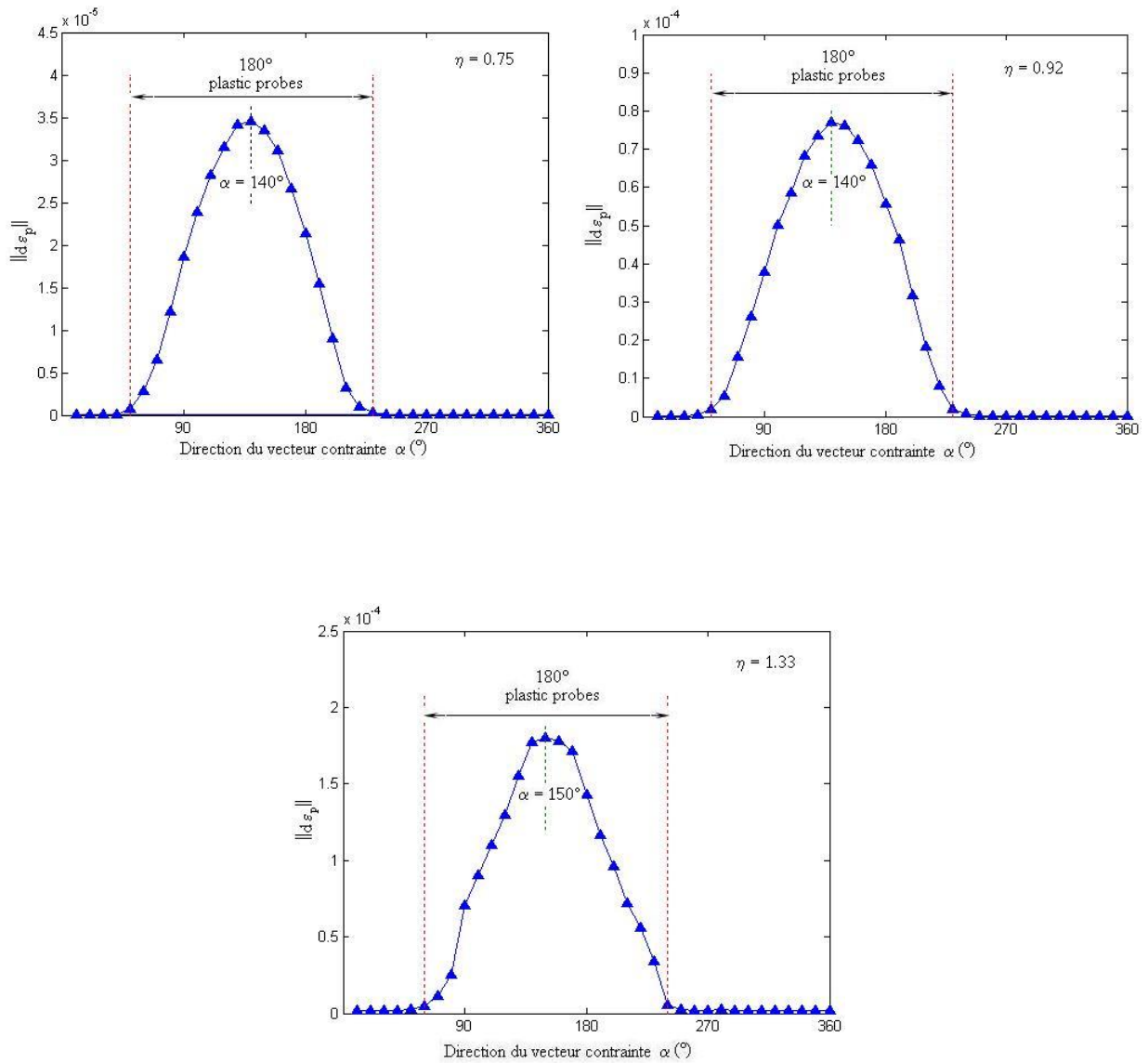


Figure 5. 17 Norme des déformations plastiques $\|d\vec{\varepsilon}_p\|$ en fonction de la direction de sollicitation α . Echantillon de référence avec $\sigma_3 = 100\text{kPa}$ pour différents états d'équilibre.

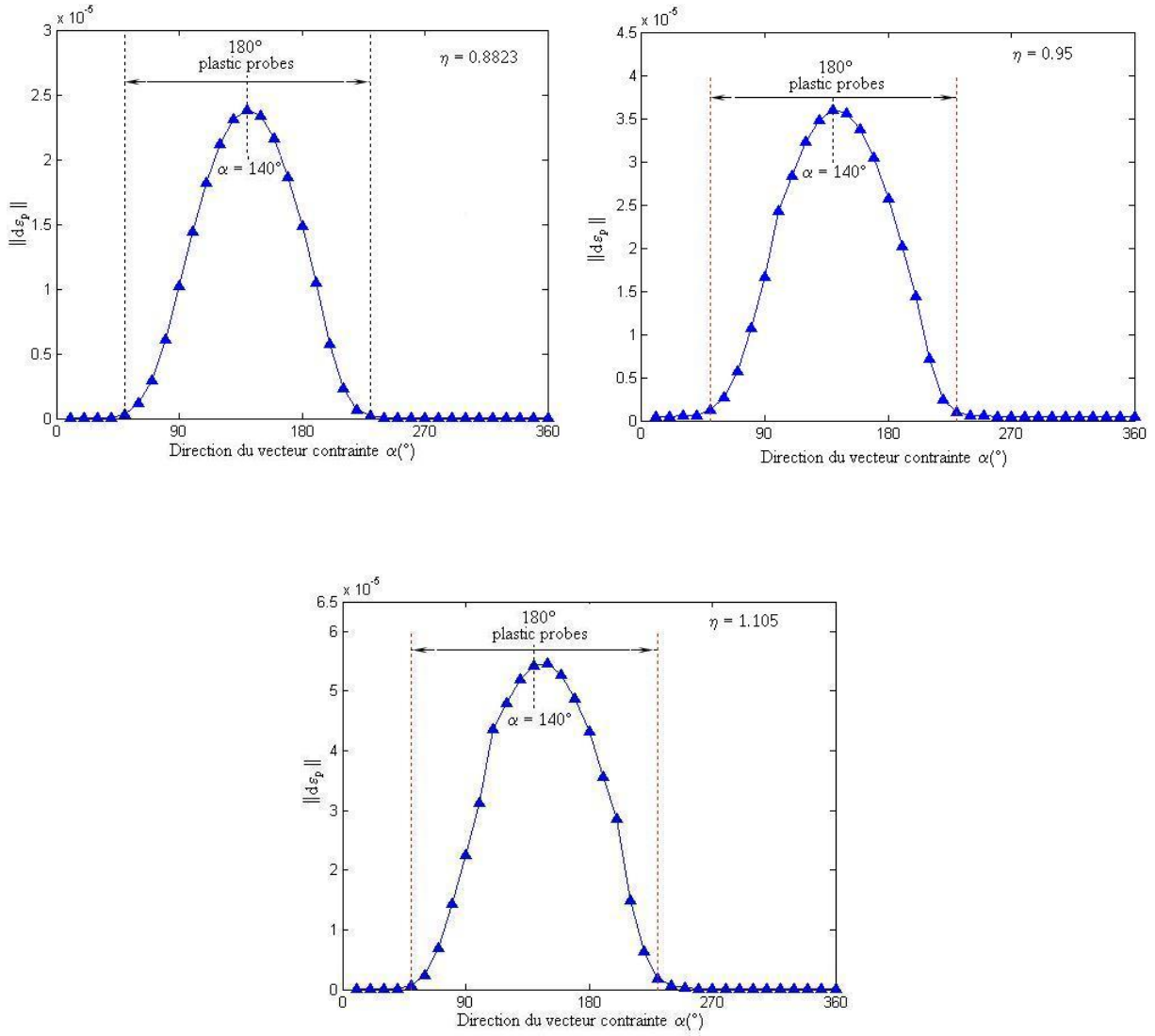


Figure 5. 18 Norme des déformations plastiques $\|d\vec{\varepsilon}_p\|$ en fonction de la direction de sollicitation α . Echantillon de référence avec $\sigma_3 = 200\text{kPa}$ pour différents états d'équilibre.

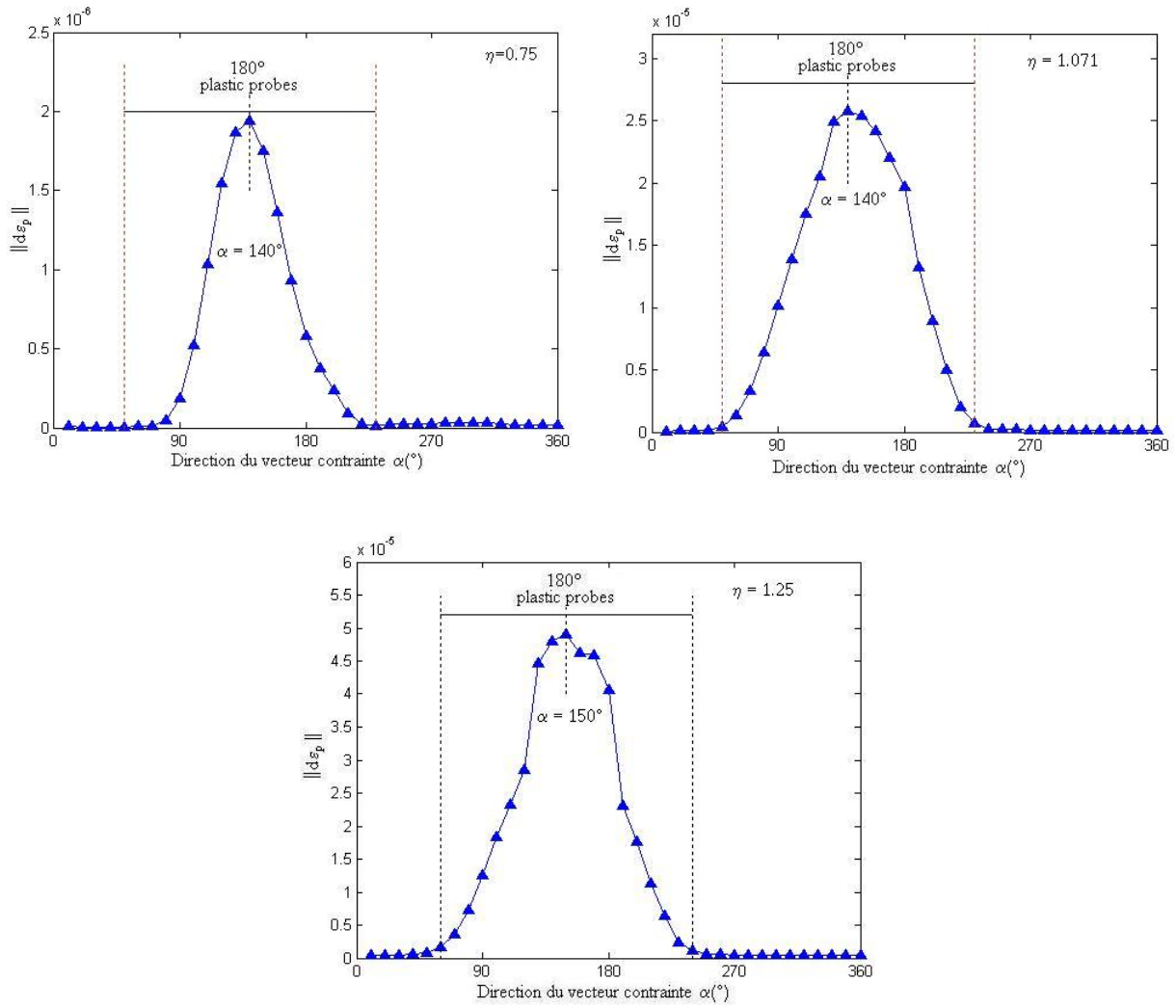


Figure 5. 19 Norme des déformations plastiques $\|d\bar{\epsilon}_p\|$ en fonction de la direction de sollicitation α .

Echantillon de référence avec $\sigma_3 = 300\text{kPa}$ pour différents états d'équilibre.

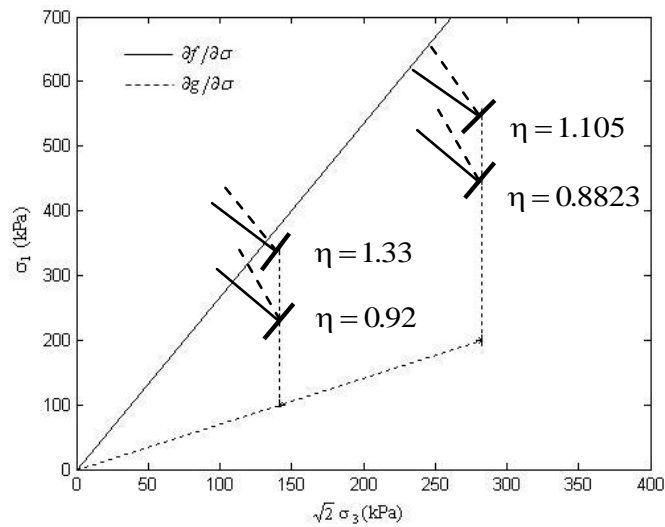


Figure 5. 20 Direction de l'écoulement plastique et de la normale à la surface de limite élastique, le trait fin continu représente le critère de Mohr-Coulomb.

5.2.2.4. Définition des contacts glissants et contacts non permanents

Pour une sollicitation dans une direction α donnée, nous définissons un contact glissant comme un contact ayant atteint le critère de Mohr-Coulomb, en général sur un cycle de calcul de la DEM. De plus, nous définissons un contact non-permanent comme un contact qui s'ouvre et ne persiste pas pendant la simulation d'une sollicitation dans une direction α . La Figure 5.21 représente les pourcentages (par rapport au nombre de contacts à l'état initial) de contacts glissants et de non-permanents en fonction de la direction α . De la Figure 5.22 et dans le cas des directions α ($\alpha \in [0, 40] \cup [230, 350]$) pour lesquelles la déformation associée est uniquement élastique (soit $\|d\tilde{\varepsilon}_p\| = 0$), la proportion des contacts glissants est quasi-constante autour de la valeur de 0.45%. Pour les directions de sollicitation entraînant une réponse plastique (soit $\|d\tilde{\varepsilon}_p\| \neq 0$), cette proportion se présente sous la forme d'une cloche comme celle des déformations plastiques dont le sommet est 10 fois plus haut. La proportion de contacts non-permanents est presque négligeable par rapport aux contacts glissants que se soit pour les directions correspondant aux déformations élastiques ou plastiques. Par contre pour un état de contrainte plus élevé ($n = 1.391$) la proportion des contacts glissants augmente et se présente toujours sous la forme d'une cloche. La proportion des contacts non-permanents est corrélée avec l'existence des déformations plastiques. Par conséquent, les déformations plastiques sont dues à des glissements intergranulaires et à des pertes et créations de contacts liées à priori à une réorganisation de la micro-structure.

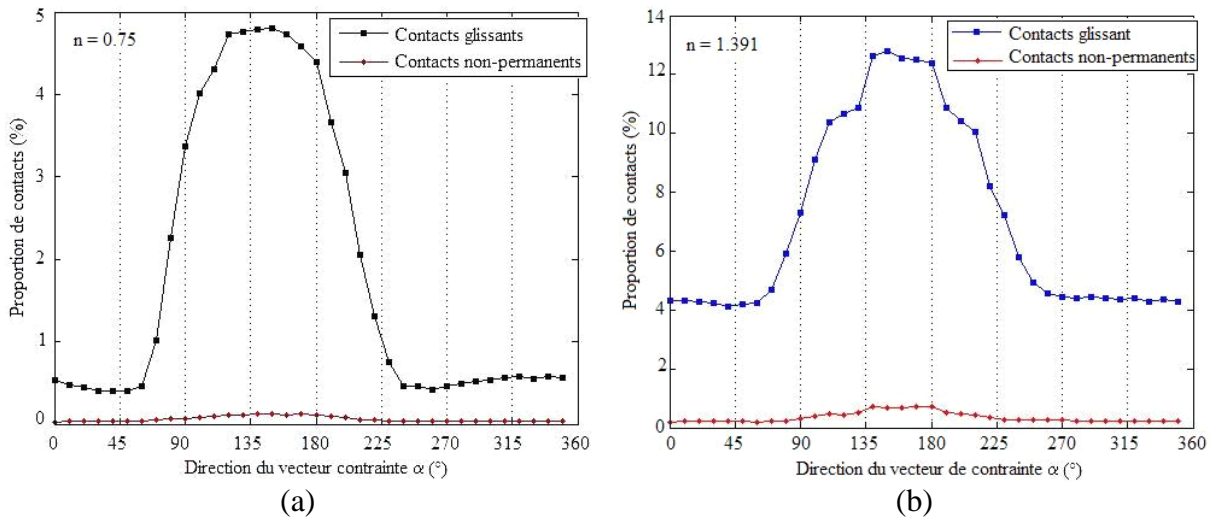


Figure 5. 21 Proportions de contacts glissants et non-permanents en fonction de la direction de sollicitation α pour $\sigma_3 = 100 \text{ kPa}$ et $n = 0.75$ (a), et pour $\sigma_3 = 100 \text{ kPa}$ et $n = 1.391$ (b).

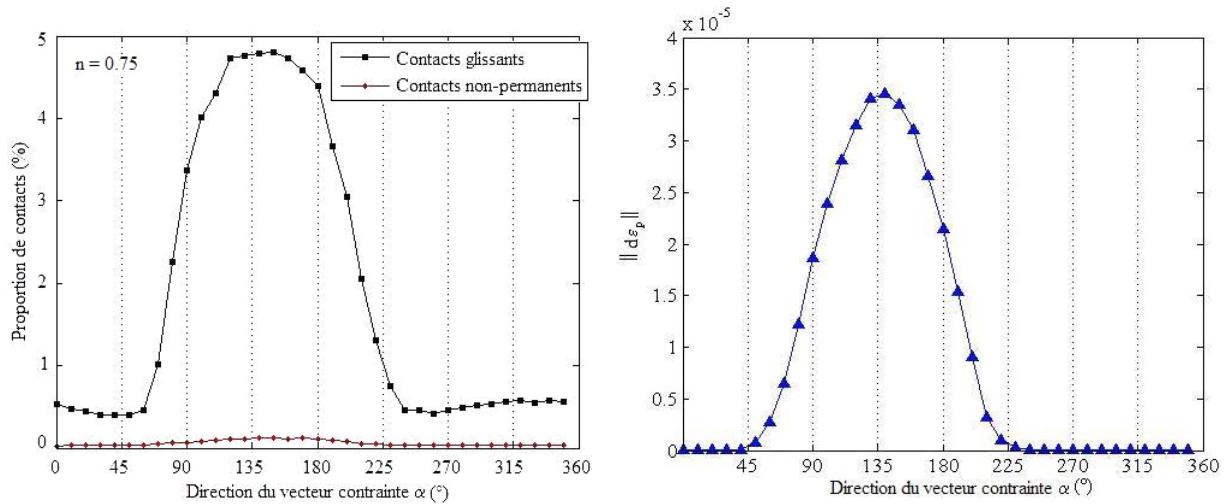


Figure 5.22 Proportions de contacts glissants et non-permanents (à gauche), Norme des déformations plastiques $\|d\vec{\epsilon}_p\|$ (à droite) en fonction de la direction de sollicitation α pour $\sigma_3 = 100\text{kPa}$ et $n = 0.75$

5.2.3. Réponses enveloppes : Cas d'un chargement/déchargement

Afin d'étudier l'influence de l'histoire du chargement sur le comportement incrémental, une série de recherches directionnelles a été simulée à partir de l'état de contrainte initial caractérisé par $n = 0.75$ (point B' après déchargement) pour un confinement $\sigma_3 = 100\text{kPa}$. Sur la Figure 5.23 est illustré le trajet de chargement/déchargement $ABCB'$ en terme de déviateur de contrainte et de déformation volumique en fonction de la déformation axiale.

La Figure 5.24 représente une superposition des enveloppes réponses totales et élastiques calculées à l'état d'équilibre B (chemin de chargement) et à l'état d'équilibre B' (chemin de déchargement). Remarquons que pour l'état après déchargement (point B'), l'enveloppe réponse totale est une ellipse centrée sur l'origine du repère, par contre pour celle du cas de chargement (point B), l'ellipse est allongée. De plus, une légère réduction de la rigidité élastique à l'état B' est observée sur tout le plan d'axisymétrie (ou de Rendulic). Une caractéristique généralement observée dans le cas des sols réels. Cette réduction de la rigidité ne peut être attribuée à l'augmentation de la porosité, car dans notre cas, elle est presque nulle (varie de 0.3946 pour l'état de contrainte au point B à 0.3950 pour l'état d'équilibre au point B'). En effet, une analyse de la microstructure des deux états de contrainte faite au cours des simulations révèle une diminution importante du nombre total des contacts inter-granulaires de l'état B à l'état B' . Une cause plus que probable de la réduction de la rigidité élastique au niveau macroscopique. Dans le même sens Calvetti et al. [Calvetti et al. 2003] ont montré pour un échantillon numérique généré par la DEM à rotation libre que la réduction de la rigidité élastique est due principalement à la diminution du nombre de contacts inter-granulaires.

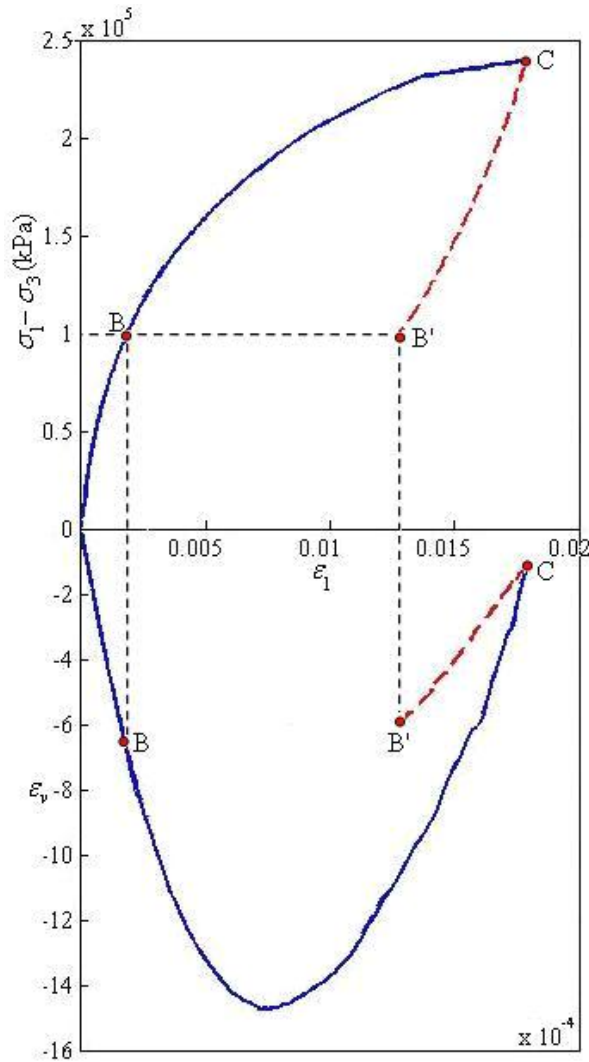


Figure 5.23. Réponse mécanique macroscopique en terme contrainte-déformation. Cas d'un chargement/déchargement.

La Figure 5.25 représente les enveloppes réponses totales et élastiques à l'état d'équilibre B' . La comparaison entre les deux réponses indique qu'une partie non négligeable de l'incrément de déformation est inélastique. Cette partie correspond bien aux directions α ayant un chargement déviatorique important.

La Figure 5.26 montre les enveloppes réponses plastiques correspondant aux états d'équilibre B et B' . Les deux enveloppes réponses plastiques ont dégénéré en une droite. La direction β_p des déformations plastiques $d\vec{\epsilon}_p$ est donc indépendante de la direction α du vecteur contrainte $d\vec{\sigma}$; que ce soit pour l'état d'équilibre B ou B' . Plus précisément, l'enveloppe réponse plastique de l'état de contrainte B' s'étend sur deux directions opposées par rapport à l'origine. Notons qu'aucune de ces deux directions, ne coïncide avec la direction de l'écoulement plastique du matériau à l'état vierge B (voir Figure 5.27a). Cependant, la direction de l'écoulement plastique dépend de l'historique du chargement.

La Figure 5.27b illustre la variation de la norme des déformations plastiques $\|d\vec{\epsilon}_p\|$ en fonction de la direction α du vecteur contrainte pour les deux états d'équilibre B et B' .

Comme prévue, les déformations plastiques de l'état B' sont plus petites que celles de l'état B , un facteur d'environ 5 existe entre les valeurs maximales.

Un résultat saisissant est que, pour l'état B' les déformations plastiques ne sont pas limitées à une partie spécifique des directions α du vecteur contrainte, mais plutôt couvre l'ensemble des directions, excepté deux directions singulières. Ces deux dernières correspondent à une compression ou une extension isotrope. En plus, la variation de la norme $\|d\vec{\varepsilon}_p\|$ en fonction de la direction α présente deux directions distinctes de la normale à la surface de la limite élastique respectivement $\alpha = 135^\circ, 310^\circ$

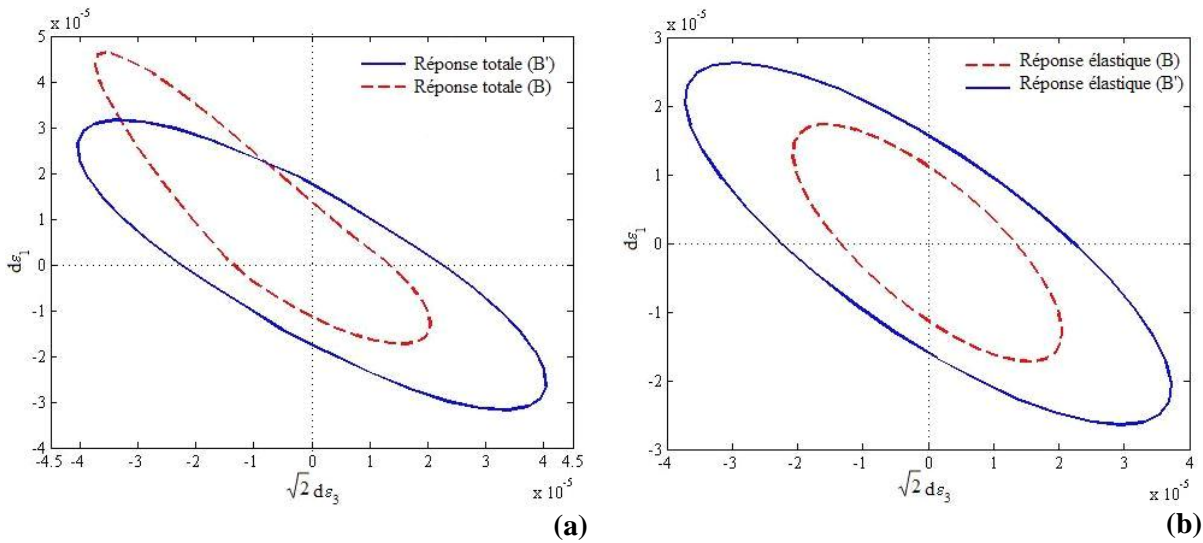


Figure 5.24. Comparaison des enveloppes réponses totales (a) et élastiques (b) pour les deux états d'équilibre B et B'

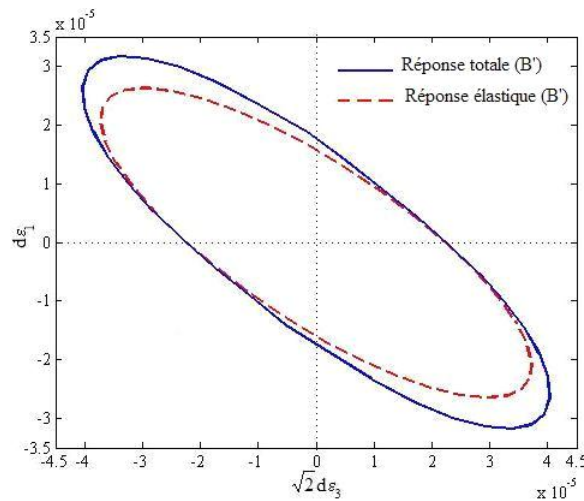


Figure 5.25. Envelopes réponses totales et élastique de l'état d'équilibre B' .

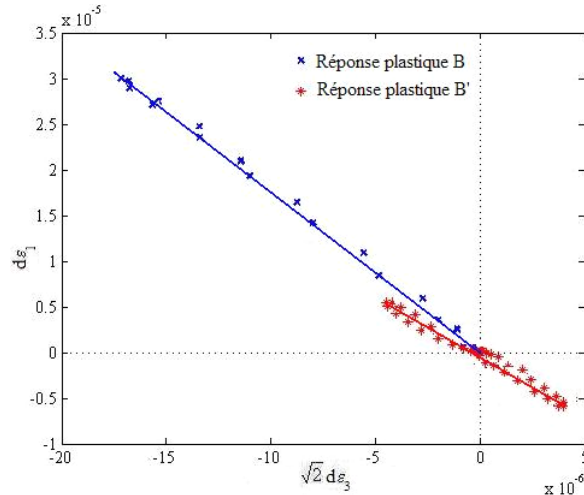


Figure 5.26. Enveloppe réponse plastiques pour les deux états d'équilibre B et B' .

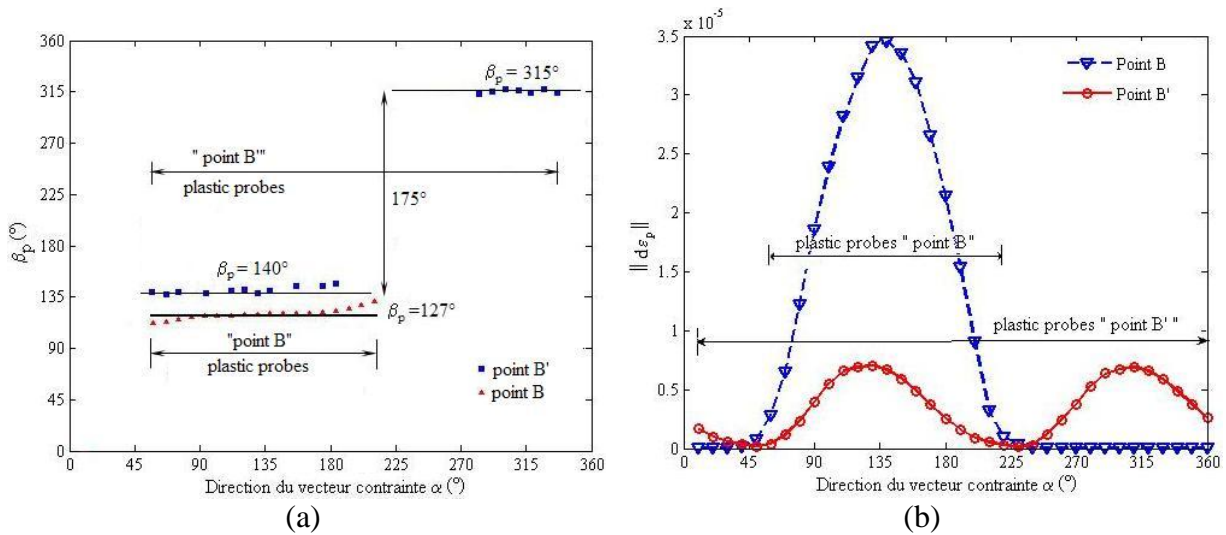


Figure 5.27. Direction des déformations plastiques β_p (a), Norme des déformations plastiques $\|d\bar{\epsilon}_p\|$ (b), en fonction de la direction de sollicitation α .

5.2.4. Bilan

A mi-parcours de ce chapitre résumons les principaux points mis en évidence vis-à-vis du comportement mécanique incrémental du modèle discret associé à la MTL.

- l'évolution des enveloppes réponses élastiques avec l'augmentation du niveau de contrainte n montre bien une évolution de la texture isotrope vers une texture anisotrope de l'assemblage granulaire sous l'effet d'une compression triaxial axisymétrique.
- Le modèle discret présente une règle d'écoulement non-associée en condition axisymétrique. On peut donc s'attendre à trouver des valeurs négatives du travail du second ordre avant que le critère de Mohr-Colomb ne soit atteint.

- La proportion des contacts non-permanents est corrélée avec l'existence des déformations plastiques. Par conséquent, les déformations plastiques sont dues à des glissements intergranulaires et à des pertes et créations de contacts liés à priori à une réorganisation de la micro-structure.
- La direction de l'écoulement plastique dépend du niveau de contrainte n et de l'histoire du chargement, mais elle est indépendante de la direction de l'incrément de contrainte α .

5.3.1. Etude du travail du second ordre

5.3.1.1. Expression semi-Lagrangienne et Eulérienne du travail du second ordre

Dans les paragraphes précédents nous avons exprimé le travail du second ordre en fonction du tenseur de contraintes de Cauchy σ et du tenseur des petites déformations ε (Eqs. 5.2, p. 1). D'après le formalisme utilisé par Hill [Hill, 1958] dans la définition de la condition de stabilité, le travail du second ordre que nous désignons dans ce cas par Δ , s'écrit :

$$\Delta = ds_{ji} \frac{\partial(du_j)}{\partial x_i} \quad 5.4$$

Où s_{ji} est le tenseur nominal de contrainte : $s = J F^{-1} \sigma^t$,

u_i est le champ de déplacement et x_i réfère au point matériel dans la configuration courante au temps t .

Plus particulièrement dans le cas des recherches directionnelles où l'état initial (Avant l'application du chargement incrémental dans une direction donnée) est choisi comme la configuration de référence, la configuration courante et de référence correspondent temporairement à l'état initial. s_{ji} est le transposé du premier tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff π_{ij} et la quantité Δ peut s'exprimer de la manière suivante [Nicot et al., 2006]:

$$\Delta = d\pi_{ij} \frac{\partial(du_i)}{\partial x_j^0} \quad 5.5$$

Où x_j^0 réfère au point matériel dans la configuration de référence. Le tenseur π_{ij} est un tenseur semi-lagrangien. Il considère les forces de la configuration courante appliquées à la configuration de référence. L'expression (5.5) est appelée expression semi-lagrangienne du travail du second ordre [Nicot et al., 2006].

Dans [Nicot et al., 2006], les auteurs montrent également que le travail du second ordre peut s'exprimer sous une forme eulérienne. L'expression du premier tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff π défini à partir du tenseur de contrainte de Cauchy σ est :

$$\pi = J\sigma(F^{-1})^t \quad 5.6$$

Avec $J = \det F$, et F est le gradient des positions (transformation linéaire tangente).

De plus :

$$d\pi = J(d\sigma + J \operatorname{div}(d\bar{u})\sigma - \sigma(L)^t dt)(F^{-1})^t \quad 5.7$$

Avec L est le tenseur gradient de vitesse, soit $L_{ij} = \partial \dot{u}_i / \partial x_j$.

En remplaçant l'équation (5.7) dans l'équation (5.5), nous obtenons alors la relation suivante :

$$\Delta = (d\sigma + \operatorname{div}(d\bar{u})\sigma - \sigma(L)^t dt) : Ldt \quad 5.8$$

L'équation (5.8) est une expression eulérienne du travail du second ordre. Il a trois composantes :

$d\sigma : Ldt$,

$\operatorname{div}(d\bar{u})\sigma : Ldt$: Ce terme prend en compte la déformation volumique à travers le facteur $\operatorname{div}(d\bar{u})$,

$\sigma(L)^t dt : Ldt$: Ce terme peut être relié à l'évolution de la texture de l'assemblage granulaire [Nico et al., 2007].

En se plaçant dans le cadre des petites transformations et en négligeant les variations géométriques, l'expression eulérienne (5.8) est l'expression classique du travail du second ordre à savoir :

$$d^2W = d\sigma : d\varepsilon \quad 5.9$$

A partir des recherches directionnelles, nous avons calculé les expressions semi-Lagrangienne et Eulérienne ainsi que chaque composante de l'expression Eulérienne. La Figure 5.28 représente les résultats obtenus pour deux confinements et états d'équilibre différents ($\sigma_3 = 100\text{kPa}$, $n = 1.39$ et $\sigma_3 = 300\text{kPa}$, $n = 1.279$). Lors des simulations, on a bien constaté que les directions α appartenant à l'intervalle $[70^\circ, 240^\circ]$ conduisent à des déformations plastiques plus grandes en comparaison avec les déformations élastiques, ce qui explique l'importance du travail du second ordre trouvé pour ces mêmes directions. Comme premier constat, il est bien clair que les expressions semi-Lagrangienne et Eulérienne du travail du second ordre coïncident comme le prévoient les développements présentés ci-dessus. Dans l'expression Eulérienne le terme $d\sigma : Ldt$ est le plus prépondérant. Le terme $\operatorname{div}(d\bar{u})\sigma : Ldt$ qui prend en compte la variation volumique à travers le terme $\operatorname{div}(d\bar{u})$ est négligeable. Finalement le terme $\sigma(L)^t dt : Ldt$ reste petit mais pas négligeable.

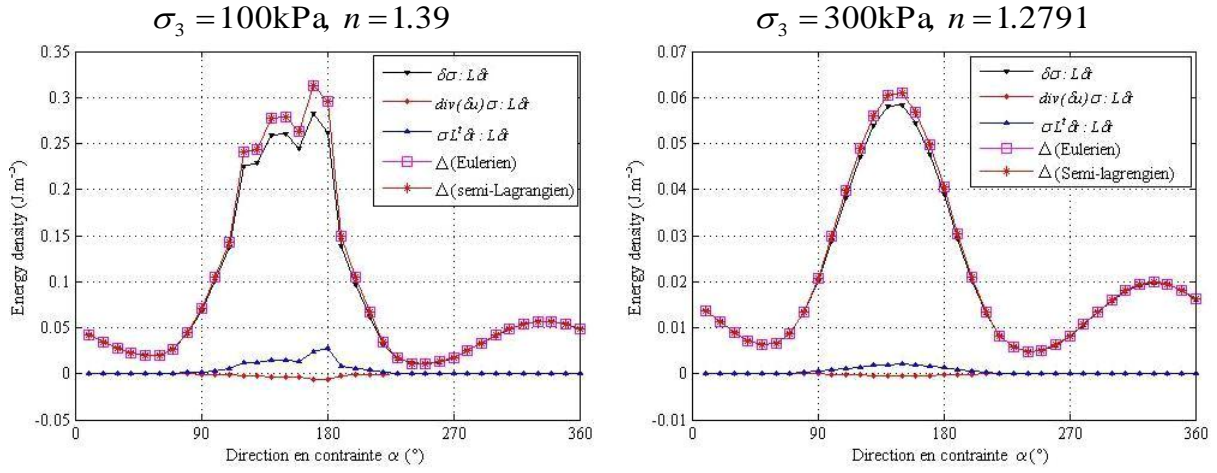


Figure 5.28. Expression semi-Lagrangienne et Eulérienne du travail du second ordre calculé à partir de recherches directionnelles.

Dans le cas des recherches directionnelles présentées dans ce travail de thèse, on reste toujours dans le domaine de petites déformations. Les variations de la géométrie sont négligeables. Par conséquent, le travail du second ordre donné par l'expression $d^2W = d\sigma : d\varepsilon$ est équivalent au terme $d\sigma : Ldt$ et sous estime légèrement les expressions semi-Lagrangienne et Eulérienne comme nous l'avons montré numériquement. Dans ce qui suit nous utilisons l'expression classique de d^2W .

5.3.2. Cônes et domaine d'instabilité directionnelle

Suite aux recherches directionnelles effectuées sur l'échantillon de référence (Chapitre 3 Section 3.5.7.) à différents états de contraintes initiales et à différents confinements, nous avons calculé le travail du second ordre d^2W en fonction de la direction de sollicitation en contrainte α . Et pour des raisons de commodité graphique, nous allons présenter le travail du second ordre normalisé [Darve et al., 2000] afin de faciliter la lecture des Figures.

Le travail du second ordre normalisé est défini par :

$$d^2W_{nom} = \frac{d\vec{\sigma} \cdot d\vec{\varepsilon}}{\|d\vec{\sigma}\| \|d\vec{\varepsilon}\|} \quad 5.10$$

d^2W_{nom} varie entre -1 et $+1$ comme cosinus de l'angle entre $d\vec{\sigma}$ et $d\vec{\varepsilon}$.

La représentation circulaire de $d^2W_{nom}(\alpha)$ consiste à représenter la fonction :

$$y(\alpha) = d^2W_{nom}(\alpha) + \rho \quad 5.11$$

Où $\rho > 0$ est un paramètre constant choisi de telle manière que $\forall \alpha, y > 0$. Par conséquent, un cercle en tirets est tracé sur les diagrammes circulaires pour la représentation des valeurs nulles de la variable polaire $d^2W_{nom}(\alpha)$. A l'intérieur du cercle la variable d^2W_{nom} prend des valeurs négatives, et à l'extérieur des valeurs positives.

5.3.2.1. Résultats numériques

La Figure 5.29 illustre la représentation circulaire du travail du second ordre normalisé d^2W_{norm} en fonction de l'état de contraintes initiales des recherches directionnelles caractérisé par le confinement σ_3 et n .

D'une manière générale, il est bien clair que quelque soit le confinement les valeurs de d^2W_{norm} diminuent dans les quarts sud-ouest et nord-est des diagrammes circulaires. Dans les quarts sud-ouest des diagrammes, une valeur négative de d^2W_{norm} est trouvée sauf pour le confinement $\sigma_3 = 300\text{kPa}$. Ces recherches directionnelles ont été simulées chaque 10° avec un incrément de contrainte $\|d\vec{\sigma}\| = 1\text{kPa}$ comme indiqué dans les paragraphes précédents. Cependant, une seule valeur négative de d^2W_{norm} a été trouvée et on peut très bien imaginer des valeurs négatives de d^2W_{norm} pour un angle incrémental de sollicitation plus petit (par exemple 5° au lieu de 10°) pour l'incrément de contraintes de calcul et pour des états d'équilibre plus important.

L'ensemble des directions α , à un état donné, pour lesquelles $d^2W_n \leq 0$ forme un cône, appelé par Darve et al. [Darve et al., 2004] cône de directions de contraintes instables (en bref : cône d'instabilité). Les chemins de contraintes inclus dans ces cônes sont donc potentiellement instables au sens de Hill et les états initiaux des recherches directionnelles correspondants sont des points de bifurcation.

Notons que les valeurs minimales (ou du moins négatives) de d^2W_{norm} sont trouvées, que se soit dans le quart sud-ouest ou le quart nord-est, pour des directions α voisines des directions tangentes à la surface de limite élastique. Dans [Kishino, 2003], des recherches directionnelles ont été simulées avec un modèle discret. Bien que l'auteur n'ait pas trouvé de valeur négative du travail du second ordre, il remarque également que les valeurs minimales sont obtenues pour des directions en contrainte voisines des directions tangentes à la surface de limite élastique. Sibille [Sibille, 2006] a son tour, a simulé des recherches directionnelles avec un modèle numérique discret à rotation libre. Il a trouvé des valeurs négatives ou du moins minimales de d^2W_{norm} dans le quart sud-ouest ou le quart nord-est. Il remarque aussi que les valeurs minimales sont obtenues pour des directions en contrainte voisines des directions tangentes à la surface de limite élastique. En effet, rappelons que d^2W_{norm} varie entre -1 et $+1$ comme cosinus de l'angle entre $d\vec{\sigma}$ et $d\vec{\varepsilon}$ donc d^2W_{norm} et d^2W prennent des valeurs négatives ou nulles si $|\alpha - \beta| \geq 90^\circ$. Pour des directions de chargement (au sens de l'élasto-plasticité) dans le domaine où les déformations élastiques sont petites par rapport aux déformations plastiques, la valeur de β est à peu près constante et égale à la direction de l'écoulement plastique. Par conséquent, $|\alpha - \beta|$ sera plus grand si α sera plus proche d'une direction tangente à la surface de limite élastique. Bien sur dans le cas d'une règle d'écoulement non associée, on aura $|\alpha - \beta| > 90^\circ$.

La première direction α (dans le sens direct) pour laquelle le travail du second ordre s'annule est directement liée à la direction de l'écoulement plastique β du vecteur des déformations plastiques. La Figure 5.30 représente la direction β du vecteur des déformations

totales $d\bar{\varepsilon}$ en fonction de α pour l'état de contrainte caractérisé par : $\sigma_3 = 300\text{kPa}$ et $n = 1.3506$ (voir le cône de direction instable sur la Figure 5.29). Lorsque la courbe β en fonction de α franchissent les droites $|\alpha - \beta| = 90^\circ$ le travail du second ordre prend des valeurs négatives. De plus, cette courbe présente un plateau dépendant principalement de la direction de l'écoulement plastique $\beta \approx 135^\circ$ tandis que les directions α dans l'intervalle $[230^\circ, 265^\circ]$ appartiennent au cône de direction instable.

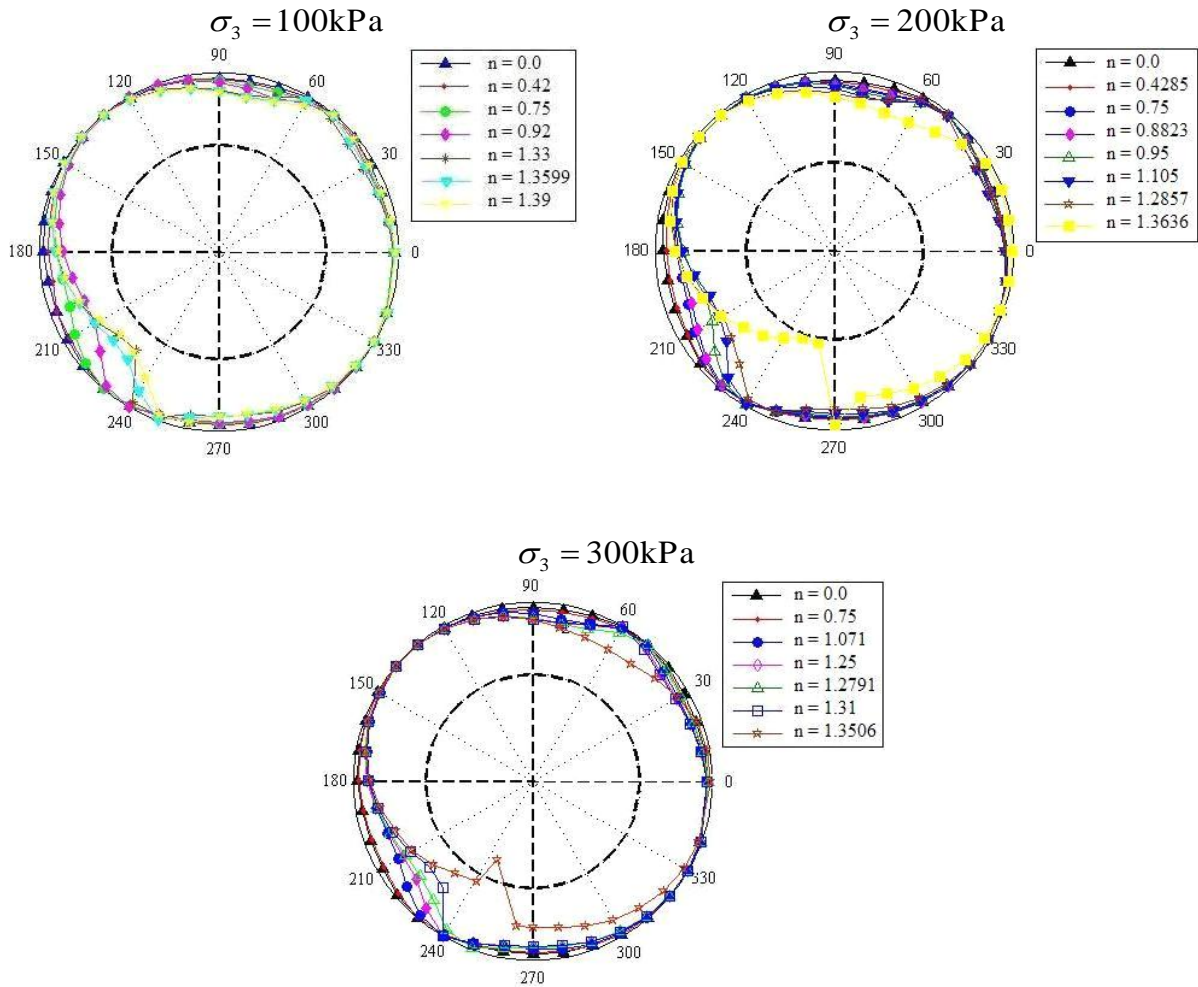


Figure 5.29. Représentation circulaire du travail du second ordre normalisé d^2W_{nom} pour l'échantillon de référence.

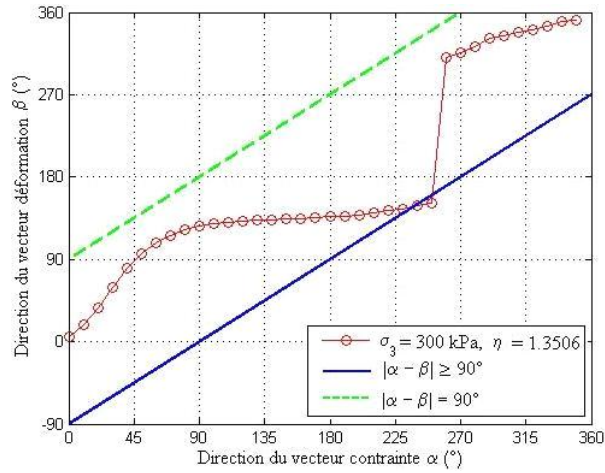


Figure 5.30. Comparaison de la direction β des réponses en déformation pour l'échantillon de référence.

5.3.2.2. Cône de direction instable dans le plan d'axisymétrie des contraintes

La Figure 5.31 représente l'ensemble des recherches directionnelles simulées sur l'échantillon de référence pour différents confinement et différents états d'équilibre. Aucun cône n'est trouvé pour les pressions de confinement $\sigma_3 = 100\text{kPa}, 200\text{kPa}$ quelque soit l'état d'équilibre étudié (toutes les valeurs de d^2W_{nom} sont positives). Par contre pour une pression de confinement plus grande $\sigma_3 = 300\text{kPa}$ et pour un état d'équilibre plus important on a pu détecter un seul cône de directions potentiellement instables au sens de Hill (la valeur de d^2W_{nom} est négative).

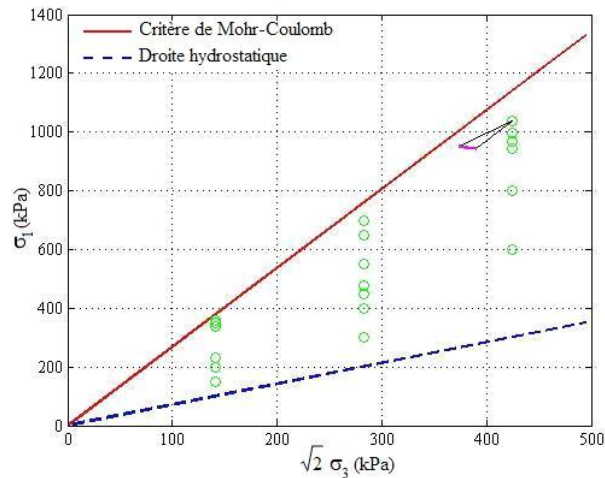


Figure 5.31. Cône de direction instable dans le plan d'axisymétrie des contraintes $(\sqrt{2}\sigma_3, \sigma_1)$. Les cercles représentent les états d'équilibre en contrainte, le cône représente le cône de direction instable.

5.3.2.3. Présentation de quelques résultats numériques et expérimentales de la littérature

Sibille [Sibille, 2006] a effectué des simulations des recherches directionnelles en contraintes sur trois échantillons à différentes densités. La Figure 5.32 montre les valeurs de d^2W_{nom} calculées pour ces trois échantillons pour un confinement de 100 kPa à différents états d'équilibre.

L'évolution de d^2W_{nom} est similaire à celle trouvée avec le modèle discret associé à la MTL. Lorsque n augmente les valeurs du travail du second ordre décroissent dans les quarts sud-ouest et nord-est du diagramme. Les auteurs montrent également que les cônes s'ouvrent soudainement à partir d'un niveau de contrainte donné. De même, le niveau de contrainte est d'autant plus faible que l'échantillon est plus lâche. Ils remarquent aussi que le domaine de bifurcation est plus vaste pour un échantillon lâche qu'un échantillon dense suivant l'ouverture des cônes.

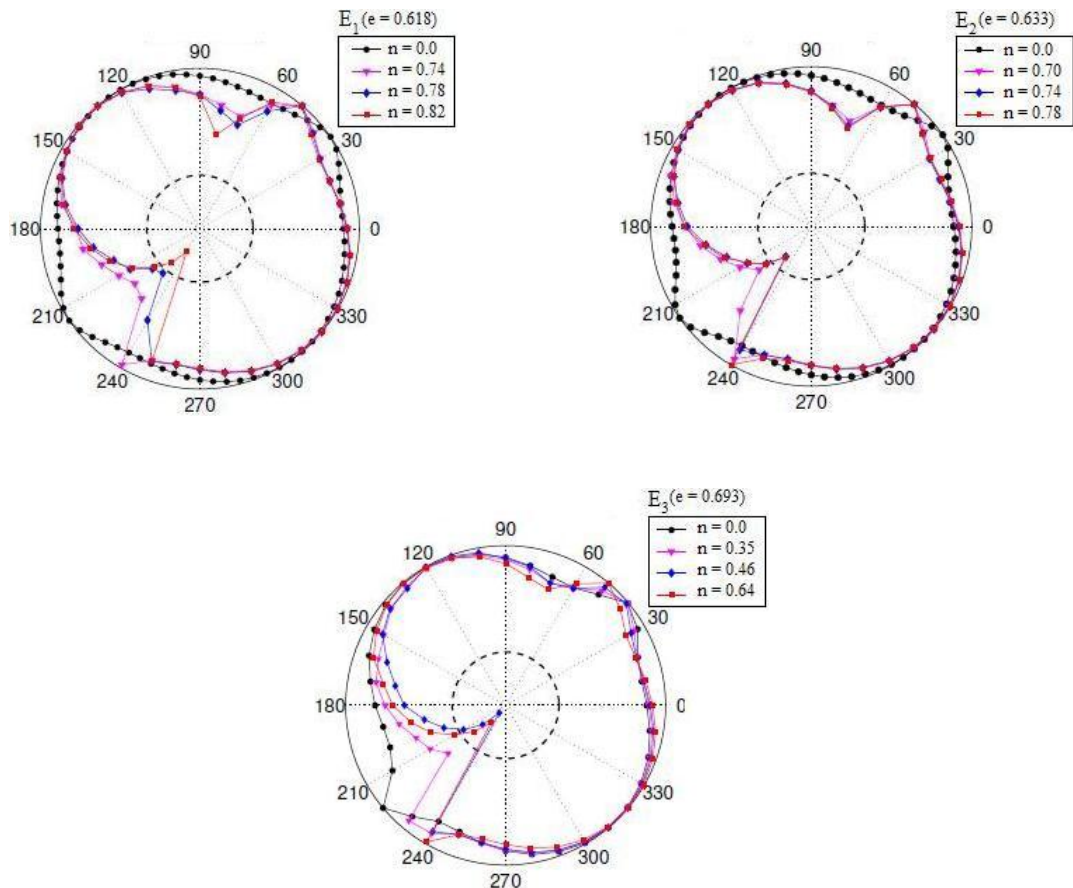


Figure 5.32. Présentation circulaire du travail du second ordre normalisé d^2W_{nom} calculé d'après les recherches directionnelles réalisées par Sibille [Sibille, 2006] sur le sable d'Hostun pour trois échantillons à densité différente.

Expérimentalement, nous retrouvons les résultats de Royis et Doanh [Royis et al., 1998] sur le sable d'Huston même. Les deux auteurs ont testé peu de direction vue la difficulté de l'expérience. Pour chacune des sollicitations dans une direction à partir d'un état initial, un nouvel échantillon doit être fabriqué. La Figure 5.33 montre la représentation circulaire du travail du second ordre normalisé d^2W_{nom} calculé à partir de leurs données. Toutes les valeurs de d^2W_{nom} sont positives. Dans tous les cas la tendance est similaire à celle observée pour nos simulations. Les valeurs de d^2W_{nom} diminuent lorsque n augmente dans les quarts sud-ouest et nord-est du diagramme.

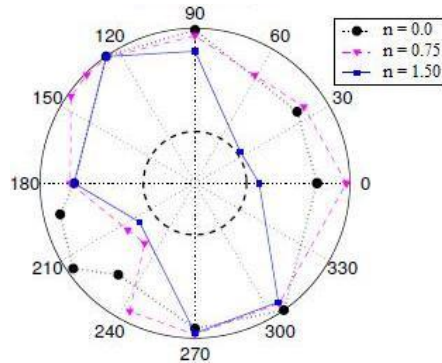


Figure 5.33. Présentation circulaire du travail du second ordre normalisé d^2W_{nom} calculé d'après les recherches directionnelles réalisées par Royis et Doanh [Royis et al., 1998] sur un sable d'Hostun Dense.

5.4.1.1. Influence de la loi moment rotation sur les enveloppes réponses

Dans le Chapitre 3, une comparaison entre les configurations avec et sans MTL a été mise en évidence durant le comportement déviatorique d'un milieu granulaire non cohésif. Les résultats obtenus montrent que l'on retrouve bien les comportements classiquement observés en laboratoire. Les simulations ne faisant pas intervenir la MTL, donnent une résistance au cisaillement moins importante que celle issue du modèle utilisant la MTL. De plus, le comportement sans MTL se dilate moins vite que celui avec MTL. Ceci est dû aux mécanismes de roulement développés, qui ne nous permette jamais d'avoir un comportement dilatant réaliste. Dans cette section, nous allons voir l'influence de la loi moment rotation (MTL) sur le comportement incrémental d'un milieu granulaire non cohésif en termes d'enveloppes réponses. Des recherches directionnelles ont été simulées avec et sans MTL pour une pression de confinement de 100 kPa à différents états d'équilibre. Les enveloppes réponses (totales, élastiques et plastiques) obtenues sont représentées et analysées pour les deux cas de Figure.

5.4.1. Enveloppes réponses totales

Les Figures 5.34 et 5.35 présentent une comparaison des réponses incrémentales données par les deux modèles avec et sans MTL à des états d'équilibre différents.

Sur la Figure 5.34 sont superposées les enveloppes réponses totales calculées à l'état isotrope $n = 0.0$ avec et sans MTL. Les enveloppes réponses sont des ellipses centrées sur l'origine du repère dont l'axe principal a un angle $\beta = 125^\circ$ environ pour les deux cas. Le symbole en forme de croix sur chacune des ellipses représente la réponse en déformation due à un chargement en contrainte purement déviatorique, la direction de cette réponse est confondue avec l'axe principal ($\beta = 125^\circ$). Nous constatons que la différence entre les deux réponses données par les deux modèles avec et sans MTL est petite pour l'ensemble des directions simulées. Ce qui explique que l'influence de la MTL sur le comportement élastique est faible, voire négligeable.

La Figure 5.35 montre les enveloppes réponses totales calculées à deux états d'équilibre différents ($n = 0.75, n = 0.92$). On constate que la MTL a une influence sur les enveloppes réponses totales. Le modèle, que ce soit en rotation libre ou avec MTL, reflète une règle d'écoulement.

Pour $n = 0.75$, les deux enveloppes réponses sont des ellipses ayant la même inclinaison par rapport à l'axe $\sqrt{2}\varepsilon_3$. Plus on s'éloigne, en augmentant la valeur de n ($n = 0.92$), plus les enveloppes réponses se séparent l'une par rapport à l'autre et l'enveloppe réponse calculée à rotation libre est plus inclinée que celle calculée avec utilisation de la MTL. De plus, les déformations totales pour le modèle à rotation libre sont plus importantes que celle du modèle comportant la MTL. Cependant, le modèle discret à rotation libre surestime de manière importante la rigidité du sable autour de la direction de déformation déviatorique, que ce soit en compression ou en extension.

Comme on a vu au Chapitre 3, le comportement à rotation libre se dilate moins vite qu'un comportement faisant intervenir la MTL. Les mécanismes de roulement développés sont mis en cause. Ceci explique la différence au niveau des grandeurs des enveloppes réponses totales ainsi que les déformations.

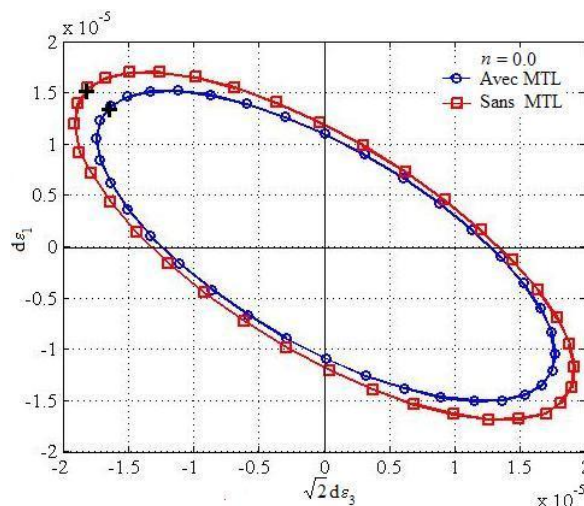


Figure 5. 34. Enveloppes réponses élastiques pour l'état isotrope avec et sans MTL.

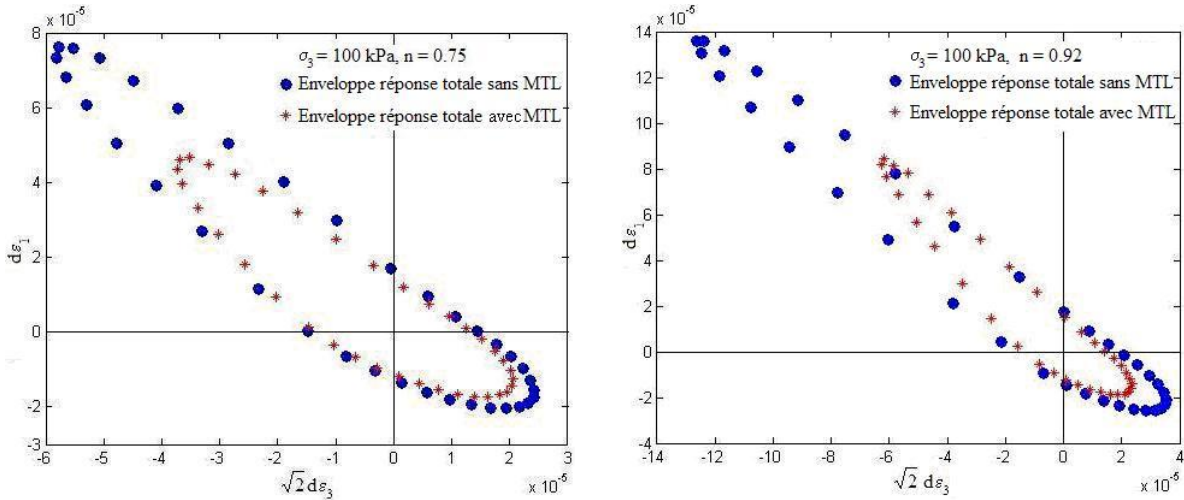


Figure 5.35. Comparaison des enveloppes réponses totales avec et sans MTL.

5.4.2. Enveloppes réponses élastiques

Comme on a déjà vu dans la section 5.2.2.2, les enveloppes réponses élastiques sont obtenues en interdisant les mécanismes locaux irréversibles responsables de la dissipation d'énergie sous forme de glissement intergranulaire et ouverture des contacts [Calvetti et al., 2003]. La Figure 5.36 représente les enveloppes réponses élastiques obtenues pour deux états d'équilibre différents ($n = 0.75$, $n = 0.92$). Les plus grandes réponses sont calculées sans MTL et les plus petites sont calculées avec MTL.

Comme nous l'avons déjà fait remarquer les enveloppes réponses élastiques trouvées ici pour $n = 0.75$ et $n = 0.92$, avec ou sans MTL, sont des ellipses centrées sur l'origine du repère mais la direction de l'axe principal a un angle $\beta > 125^\circ$.

Toutefois, nous remarquons que pour le même état, le modèle avec MTL génère une réponse incrémentale plus serrée, ce qui explique que la MTL intervient à des états d'équilibre plus proche à q^{pic} , niveau de chargement pour lequel les mécanismes de roulement apparaissent.

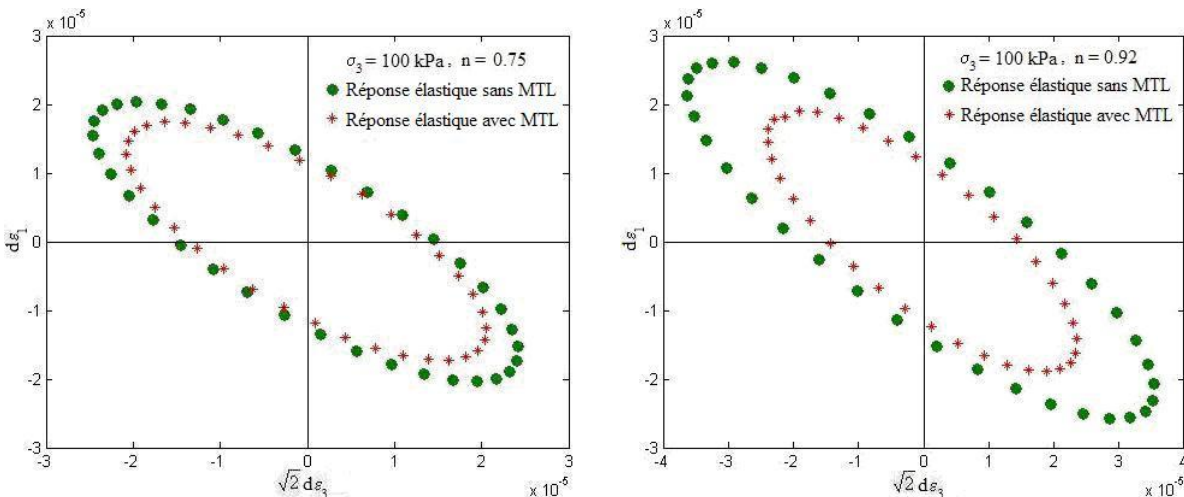


Figure 5.36. Comparaison des enveloppes réponses élastiques avec et sans MTL.

5.4.3. Enveloppes réponses plastiques

La Figure 5.37 montre la partie plastique des enveloppes réponses totales présentées sur la Figure 5.35. Nous remarquons que les enveloppes réponses dégénèrent progressivement en une droite mais à des inclinaisons différentes. Le modèle discret à rotation libre (sans MTL) ou avec utilisation de la MTL montre un étirement de la réponse à l'approche de la surface limite.

Pour $n = 0.75$, les deux enveloppes réponses plastiques à rotation libre ou avec MTL, ont la même inclinaison de l'axe principal par rapport à l'axe $\sqrt{2}\varepsilon_3$. Par contre pour $n = 0.92$, les deux enveloppes réponses plastiques sont distinctes. Les deux axes principaux ont deux inclinaisons différentes par rapport à l'axe $\sqrt{2}\varepsilon_3$. L'enveloppe réponse donnée par le modèle à rotation libre (sans MTL) est plus grande que celle donnée avec utilisation de la MTL.

Sur la Figure 5.38 est illustrée la norme des déformations plastiques $\|d\vec{\varepsilon}_p\|$ en fonction de la direction α du vecteur contrainte. Nous remarquons que pour les deux états de contraintes étudiés ($n = 0.75$, $n = 0.92$), les directions de chargement (au sens de l'élastoplasticité) s'étalent sur un intervalle de 180° pour les deux cas de Figures étudiés. Pour le reste des directions, les déformations associées sont uniquement élastiques. On remarque aussi que la norme des déformations plastiques à rotation libre au sommet est deux fois plus grande que celle obtenue avec la MTL.

De la Figure 5.36 on remarque que les axes principaux des enveloppes réponses élastiques du modèle à rotation libre ou avec MTL ont la même inclinaison, par contre au niveau des réponses plastiques la différence est bien marquée. Cette différence implique que la MTL intervient dans la réponse plastique ce qui domine la réponse totale.

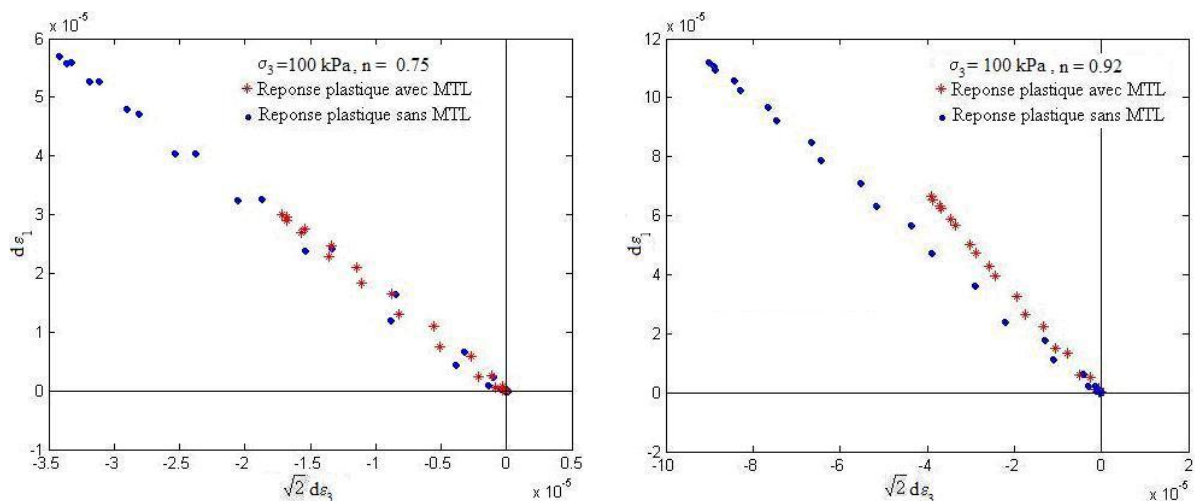


Figure 5.37. Comparaison des enveloppes réponses plastiques avec et sans MTL.

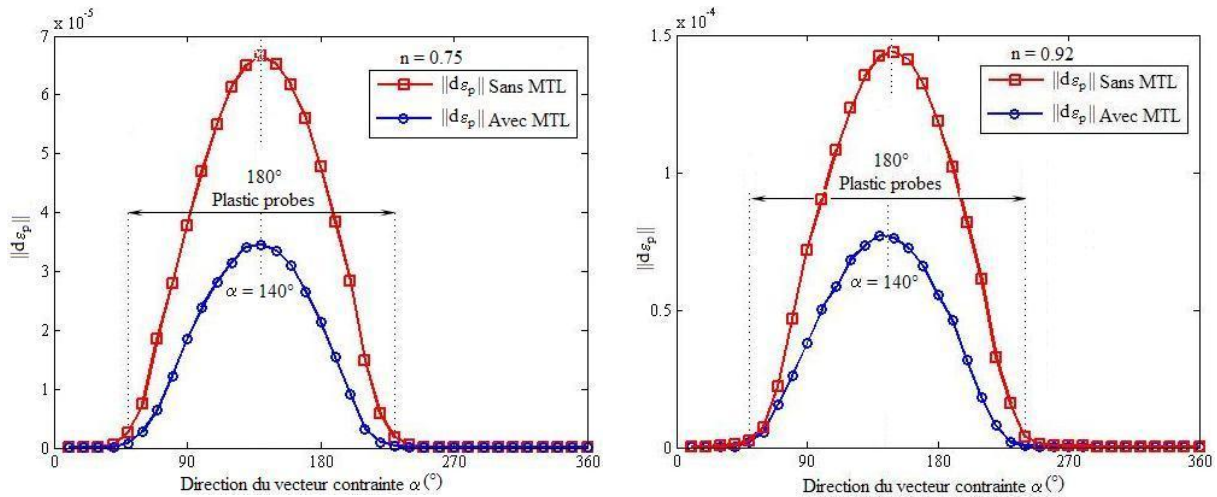


Figure 5. 38. Norme des déformations plastiques $\|d\vec{\varepsilon}_p\|$ en fonction de la direction de sollicitation α avec et sans MTL.

5.5.1.1. Influence de la loi moment rotation sur le travail du second ordre d^2W_{nom}

Dans ce qui suit, nous abordons une étude comparative entre les réponses du modèle discret avec et sans MTL à travers la norme et le signe du travail du second ordre. Deux cas seront traités lors de cette étude, il s'agit de deux cas différents :

- Mêmes états de contraintes initiaux ;
- Etats de contraintes initiaux équivalents.

Cette étude permettra de voir l'influence de la MTL sur le travail du second ordre macroscopique.

5.5.1. 1^{er} Cas : Mêmes Etats de contrainte initiaux

Les représentations circulaires de d^2W_{nom} du modèle discret avec et sans MTL sont respectivement montrées sur la Figure 5.39. Ces résultats correspondent à deux états de contraintes caractérisés par $\sigma_3 = 200\text{kPa}$, $n = 0.75$ et $n = 0.8823$ que ce soit avec ou sans MTL.

D'une manière générale on observe que les valeurs de d^2W_{nom} que ce soit avec ou sans MTL diminuent dans les quarts sud-ouest et nord-est des diagrammes circulaires. Dans le quart sud-ouest des diagrammes, les valeurs de d^2W_{nom} du modèle sans MTL diminuent plus vite que celle obtenues avec la MTL. On peut donc s'attendre à trouver des valeurs négatives

du travail du second ordre au sens de HILL avec le modèle sans MTL plus rapidement que celui avec MTL. Dans tous les cas la tendance est similaire pour les deux modèles : les valeurs de d^2W_{nom} diminuent lorsque n augmente.

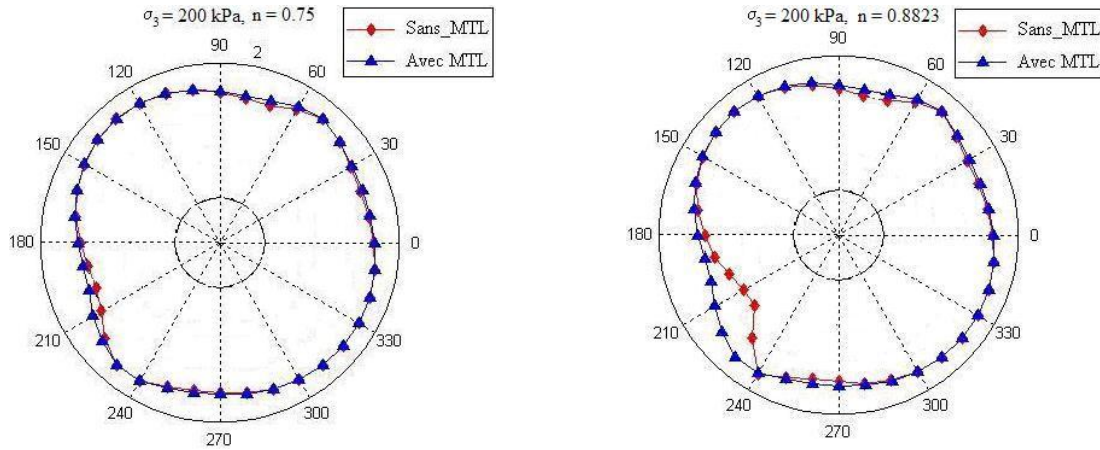


Figure 5. 39 Représentation circulaire du travail du second ordre normalisé d^2W_{nom} du modèle discret avec et sans MTL pour un même état de contrainte initial.

5.5.2. 2^{ème} Cas : Etats de contrainte initiaux équivalents

Sur la Figure 5.40 sont présentées les valeurs du travail du second ordre normalisé d^2W_{nom} du modèle discret avec et sans MTL. Les deux états de contrainte étudiés sont caractérisé par $\sigma_3 = 100\text{kPa}$, $n = 0.42$ (avec MTL) équivalent à $n = 0.274$ (sans MTL), $n = 0.75$ (avec MTL) équivalent à $n = 0.4893$ (sans MTL) et $n = 0.92$ (avec MTL) équivalent à $n = 0.6002$ (sans MTL). L'équivalence se résume au niveau du

$$\text{rapport} \left(\frac{n}{n_{critique}} \right)_{MTL} \equiv \left(\frac{n}{n_{critique}} \right)_{sansMTL} .$$

Dans ce cas d'étude et pour de faibles valeurs de n , les deux modèles avec et sans MTL coïncident, présentant une tendance similaire dans le sud-ouest et le nord-est du diagramme. En augmentant le niveau de contrainte n , les valeurs de d^2W_{nom} obtenues avec la MTL décroissent dans le sud-ouest du diagramme par rapport à celles obtenues sans MTL.

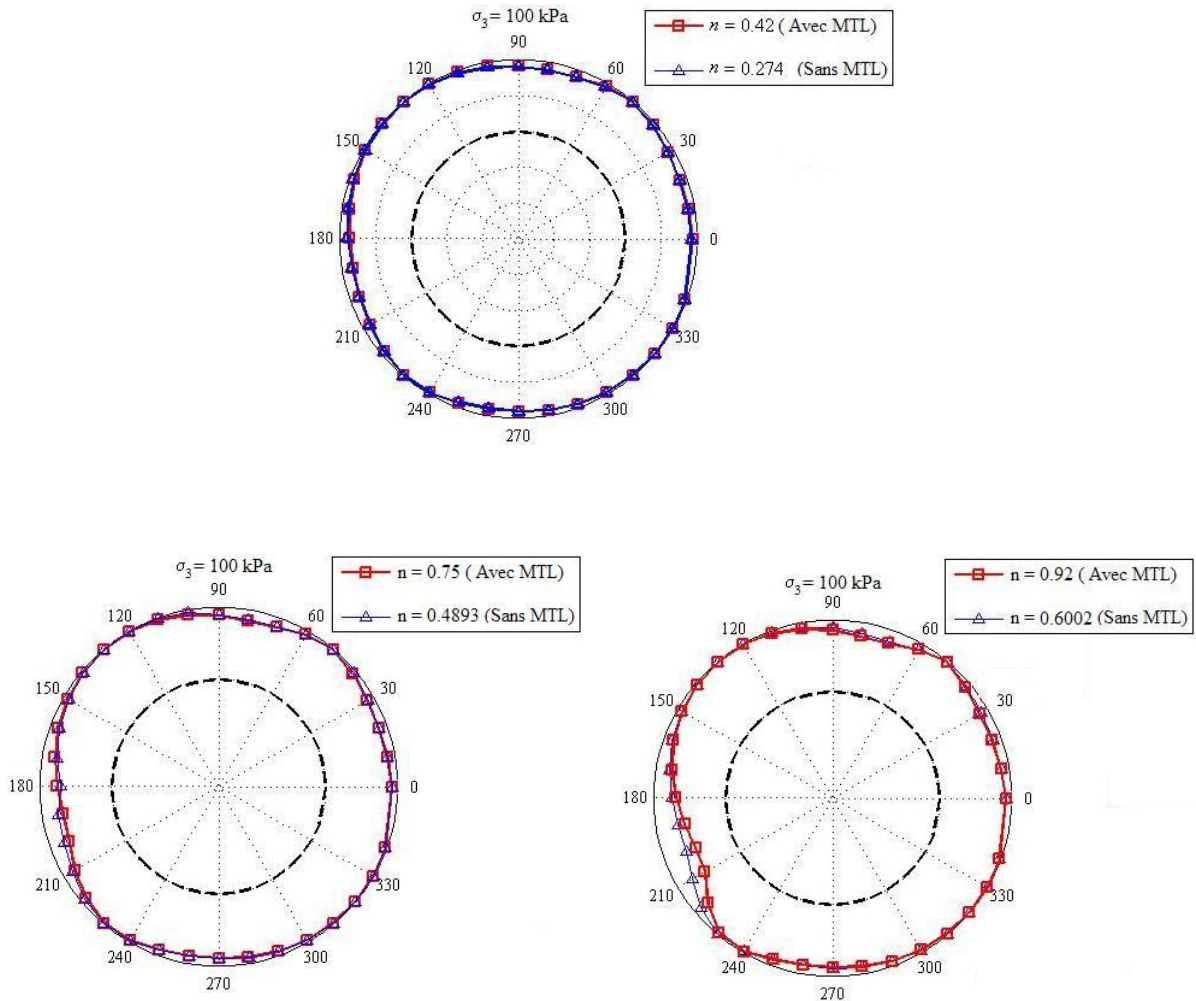


Figure 5. 40 Représentation circulaire du travail du second ordre normalisé d^2W_{norm} du modèle discret avec et sans MTL pour un état de contrainte initial équivalent.

Les pourcentages de contacts glissants et de contacts non-permanents en fonction de la direction α sont représentés sur la Figure 5.41. Les deux proportions de contacts glissants pour $n = 0.75$ (avec MTL) équivalent à $n = 0.4893$ (sans MTL) sont très voisines ce qui explique probablement la coïncidence des diagrammes du travail du second ordre. Bien que les proportions des contacts glissants soient très voisines, un écart entre les proportions des contacts non-permanents existe pour une gamme de valeur de α .

Pour $n = 0.92$ (avec MTL) équivalent à $n = 0.6002$ (sans MTL), les proportions des contacts non-permanents sont voisines pour l'ensemble des directions α . Néanmoins, l'écart est moins prononcé ici que par rapport au cas précédent.

Pour les proportions de contacts glissants un facteur d'environ 1.5 existe entre les valeurs maximales. Ce qui fait que les valeurs de d^2W_{norm} obtenues avec la MTL sont minimales dans le quart sud-ouest du diagramme par rapport a celles obtenues sans MTL.

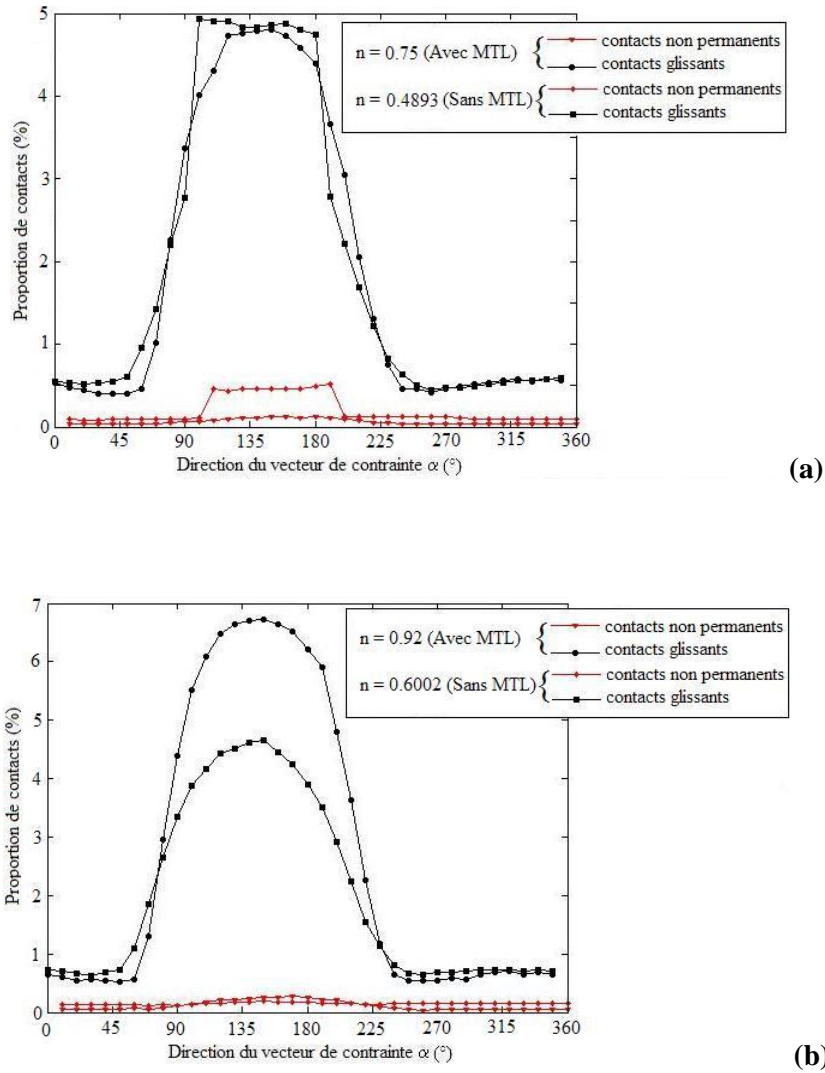


Figure 5.41. Proportions de contacts glissants et non-permanents en fonction de la direction de sollicitation α pour $n = 0.75$ (avec MTL) équivalent à $n = 0.4893$ (sans MTL) (a), et $n = 0.92$ (avec MTL) équivalent à $n = 0.6002$ (sans MTL) (b).

5.6.1.1. Conclusion

Un bilan sur l'analyse du comportement mécanique du modèle discret associé à la MTL a été déjà présenté à la fin de la première partie du chapitre (Section 5.2.4, p.204), nous nous intéressons donc ici à conclure sur le signe du travail du second ordre d^2W_{nom} et l'influence de la loi moment rotation (MTL) sur les enveloppes réponses et sur le travail du second ordre lui-même.

Avec la MTL un seul cône a été observé pour un confinement $\sigma_3 = 300\text{kPa}$. Aucun cône n'est trouvé pour les pressions de confinement $\sigma_3 = 100\text{kPa}, 200\text{kPa}$ quelque soit l'état d'équilibre étudié. Cependant, nous pouvons affirmer qu'un domaine de bifurcation est trouvé avec le modèle discret associé à la MTL strictement à l'intérieur du critère de Mohr-Coulomb. A partir d'un point de bifurcation seules quelques directions de chargement ne vérifient pas la

condition de stabilité de Hill. Des chemins en contrainte dans ces directions pourraient donc conduire à une rupture de l'assemblage granulaire.

Un aspect remarquable des résultats obtenus lors de l'étude comparative, réside dans le fait que pour la MTL associée au modèle discret, les enveloppes réponses plastiques n'ont plus la même inclinaison par rapport à l'axe $\sqrt{2}\varepsilon_3$. Cette différence implique que la MTL intervient dans la réponse plastique ce qui domine la réponse totale.

En ce qui concerne le travail du second ordre d^2W_{nom} , deux cas de Figure ont été étudiés. Dans le premier cas, nous avons constaté qu'avec le modèle discret sans MTL, le matériau est susceptible de s'effondrer à l'intérieur du critère de Mohr-Coulomb plus rapidement que celui associé à la MTL. Dans le deuxième cas, nous avons constaté que l'évolution du travail du second ordre a un lien avec le taux de contacts non permanents et contacts glissants.

Dans le chapitre suivant, tentons de relier le travail du second ordre, qui est une grandeur traditionnellement définie dans le cadre des milieux continus à partir de variables tensorielles (l'incrément de contrainte et l'incrément de déformation), à des variables à l'échelle des grains, et plus précisément à l'échelle des contacts (les forces aux contacts et les déplacements relatifs aux contacts).

CHAPITRE 6.

Travail du second ordre microscopique global aux contacts et macroscopique

6.1. Introduction

Dans le chapitre précédent, le domaine de bifurcation détecté par le modèle associé à la MTL a été étudié à l'échelle macroscopique sur un échantillon de référence sensé d'être un volume élémentaire représentatif. Théoriquement, si l'on suppose que le comportement mécanique macroscopique d'un assemblage granulaire peut être déduit du comportement de chaque grain à l'échelle du contact, alors le travail du second ordre macroscopique sera équivalent à celui évalué sur l'ensemble des contacts des grains. Dans ce chapitre, nous tentons de trouver un lien entre le travail du second ordre classiquement défini dans le cadre des milieux continus, et des variables définies à l'échelle des contacts.

Pour cela et comme point de départ, nous utilisons une idée originale développée par Laouafa [Laouafa et al., 2001] et Darve et al. [Darve et al., 2003b], [Darve et al., 2004b], [Darve et Lambert, 2004] sur des empilements analogiques bidimensionnels. Ces auteurs ont défini une grandeur au niveau des *grains* par analogie avec le travail du second ordre. A partir d'un principe similaire et en connaissance de la loi régissant le comportement aux contacts, nous définissons une grandeur au niveau des *contacts* représentant le travail du second ordre aux contacts. Ces définitions représentent la première partie de ce chapitre.

Dans la seconde partie nous étudions la relation qui est susceptible d'exister entre le travail du second ordre et la grandeur que nous avons définie, au niveau du contact. La recherche d'une relation entre le travail du second ordre macroscopique et des variables microscopiques a été effectuée en se basant sur une approche numérique développée au cours de cette thèse.

6.2. Travail du second ordre discret vu par différents auteurs

6.2.1. Une description liée aux grains, vue par Darve [Darve et al., 2004b]

Dans les milieux granulaires deux échelles de description peuvent être observées. L'échelle des grains et des phénomènes de contacts -frottement et cohésion- à l'interface entre les grains, ce qui constitue une approche discrète, et une échelle qui considère des centaines ou des milliers de grains, ce qui constitue une approche continue.

Dans cette section, nous rappelons la méthodologie employée par Laouafa et al. [Laouafa et al., 2001] et Darve et al. [Darve et al., 2003b], [Darve et al., 2004b], [Darve et Lambert, 2004] pour la description d'une avalanche de grains. Ces auteurs ont proposé une approche purement discrète basée sur une grandeur définie au niveau des grains.

Tout d'abord, ils se sont basés sur la réalisation de différentes pentes (quatre au total) constituées d'un milieu analogique bidimensionnel (Rouleaux de Schneebeli [Schneebeli, 1956]). Le milieu granulaire réel est constitué d'un empilement de cylindres de bois (350 éléments environ) de diamètre 13, 18, 28 mm. Le milieu est disposé dans l'appareil biaxial expérimental dénommé $1\gamma 2\varepsilon$. Cet appareil permet d'appliquer un programme de chargement (une distorsion et deux déformations normales indépendantes dans le plan) par variation des conditions aux limites en déplacement [Joer, 1991]. Une chaîne d'acquisition d'image automatique et de traitement numérique des données assure l'obtention des champs discrets

de translation et de rotation de l'empilement au cours de la sollicitation. L'une des configurations initiales considérées ainsi que les conditions aux limites sont représentées sur la Figure 6.1. Les résultats expérimentaux obtenus ne nous informent que sur la cinématique de l'empilement.

Dans un deuxième temps, la configuration initiale obtenue à partir de la configuration réelle dans l'appareil biaxial est introduite dans un code de calcul aux éléments discrets, basé sur la méthode de la dynamique des contacts initiée par Moreau [Raniecki, 1979]. La simulation est validée par comparaison des champs de déplacements expérimentaux et numériques.

Par analogie au travail du second ordre défini dans le cadre des milieux continus, Mandel [Mandel, 1966] a montré que l'on pouvait définir le travail du second ordre discret par :

$$d^2w^o = d\vec{F}.d\vec{l} + d\vec{C}.d\vec{\omega} \quad 6.1$$

Avec $d\vec{l}$ est l'incrément de déplacement causé par l'incrément de force $d\vec{F}$ appliquée sur le rouleau, $d\vec{C}$ est l'incrément de moment total appliqué sur le rouleau et $d\vec{\omega}$ est l'incrément de rotation. Ces deux derniers vecteurs sont normaux au plan d'empilement des rouleaux.

L'idée de Laouafa *et al.* [Laouafa *et al.*, 2001] et Darve *et al.* [Darve *et al.*, 2003b], [Darve *et al.*, 2004b], [Darve et Lambert, 2004] fut de comparer l'évolution de la quantité présentée en (6.1) avec la variation d'énergie cinétique qui ne manque pas d'apparaître si un mouvement de grains se déroule dans l'empilement de rouleau. L'énergie cinétique pour chaque rouleau s'exprime de la façon suivante :

$$e_{cr} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad 6.2$$

Avec m , masse du grain, v sa vitesse, I le moment d'inertie par rapport à l'axe de l'élément et ω sa vitesse de rotation.

Les auteurs présumant qu'il pourrait y avoir un lien entre les valeurs négatives de d^2w^o et la rupture, qui se manifeste dans ce cas sous la forme d'avalanches de grains. L'énergie cinétique est utilisée comme indicateur de rupture, les pics indiquent des zones de mouvements importants. La comparaison entre la répartition des valeurs négatives du travail du second ordre discret d^2w^o et la répartition de l'énergie cinétique e_{cr} montre une bonne corrélation entre ces deux grandeurs. Dans ce cas le travail du second ordre pourrait donc constituer un indicateur de la stabilité de l'empilement. Cette observation est renforcée par l'examen de l'évolution de la somme des variables discrètes. Les auteurs ont également calculés l'énergie cinétique totale et le travail du second ordre global. Cela conduit aux expressions suivantes :

$$d^2W^o = \sum_{rouleaux} d^2w^o \text{ et } E_{cr} = \sum_{rouleaux} e_{cr} \quad 6.3$$

Les comparaisons entre l'évolution des pics d'énergie cinétique E_{cr} montrent une bonne corrélation avec les plus grandes valeurs négatives de d^2W^m par rapport au paramètre de chargement. Ainsi, à partir de l'évolution de d^2W^m en fonction du paramètre de chargement on pourrait déterminer les valeurs critiques de ce paramètre. Les auteurs ont étudiés d'autres configurations initiales avec des conditions aux limites différentes. Des conclusions similaires ont été obtenues.

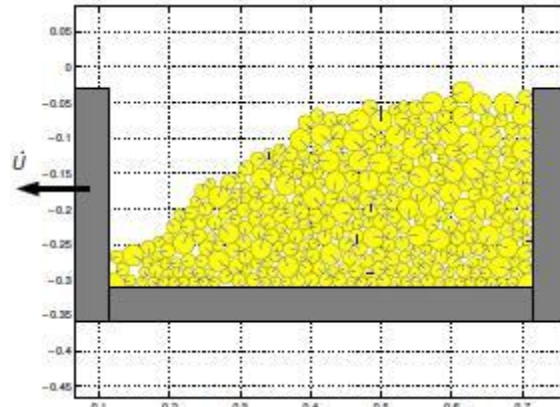


Figure 6. 1 Configuration initiale et conditions aux limites de l'empilement de rouleaux [Darve et al. 2003b]

6.2.2. Une description liée aux contacts, vu par Sibille [Sibille, 2006] sur un modèle discret a rotation libre inspiré du modèle de Mandel [Mandel, 1966]

Mandel a montré avec un modèle simple composé d'un ressort et d'un patin que le postulat de Drucker n'est pas une condition nécessaire de stabilité lorsqu'il s'agit des frottements internes du type Coulomb. Sibille [Sibille, 2006] a utilisé comme point de départ la démarche de Mandel pour étudier et définir le travail du second ordre lié à un contact. Il a considéré que chaque contact peut se comporter comme un corps à part entière dont la loi de comportement est clairement définie. La Figure 6.2 représente la loi de contact utilisé dans le modèle discret choisi par l'auteur. Il s'agit d'une abstraction de deux grains impliqués. Le patin correspond au frottement de Coulomb caractérisé par un angle de frottement φ . Les rigidités des deux ressorts a et b sont supposées identiques pour des raisons simplificatrices. Le point M est soumis à l'action des deux forces P et Q . Son mouvement est caractérisé par les deux directions de l'espace P et q . Il est à noter que la relation entre P et p est toujours élastique alors que la relation entre Q et q est élasto-plastique parfaite. Dans ce cas la, le travail du second ordre attribué à ce modèle est défini par la grandeur d^2w^{ct} :

$$d^2w^{ct} = dPdp + dQdq \quad 6.4$$

L'auteur a étudié le signé de la grandeur d^2w^{ct} . Il a conclu que cette grandeur est négative uniquement lorsque les trois conditions suivantes sont remplies simultanément : glissement,

$dp < 0$ (ou $dP < 0$) et $dq > -dp/\tan\varphi$. En d'autres termes, $d^2w^{ct} > 0$ n'est pas une condition de non glissement, $d^2w^{ct} < 0$ est une condition suffisante de glissement par descente du critère de Coulomb. Nicot & Darve [Nicot et Darve, 2006] ont analysé dans le cas tridimensionnel les conditions d'annulation du travail du second ordre lié au contact. Ces conditions imposent qu'il y ait glissement avec décharge dans la direction normale " descente du critère de Coulomb", elles portent également sur la direction et l'amplitude du glissement tangentiel.

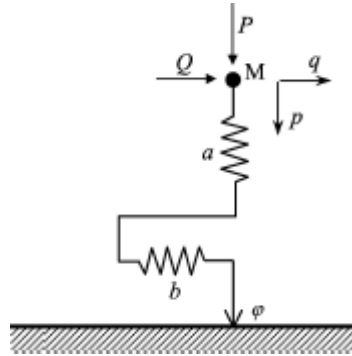


Figure 6. 2. Modèle représentant le comportement d'un contact [Sibille, 2006]

6.3. Travail du second ordre macroscopique et travail du second ordre global aux contacts avec le modèle discret associé à la MTL.

Comme nous l'avons vu suivant la description donnée par Sibille [Sibille, 2006] du travail du second ordre avec un modèle discret à rotation libre, chaque contact présent dans l'assemblage granulaire est considéré comme un corps à part entière dont la loi de comportement constitutive est connue. Le travail du second ordre attribué à ce corps est défini par analogie au travail du second ordre classique sous la forme de la grandeur d^2w^{ct} . L'auteur a étudié le lien entre le travail du second ordre d^2W^{macro} (macroscopique) et le travail du second ordre global aux contacts d^2W^{ct} dans le but d'expliquer les origines microscopiques (à l'échelle des contacts) du travail du second ordre d^2W^{macro} . Un autre travail effectué par [Nicot et Darve, 2007a] a abouti avec des développements analytiques à une égalité entre les deux grandeurs discutées auparavant ce qui n'est pas vérifié parfaitement avec le modèle à rotation libre [SDEC], [Sibille et al., 2007]. C'est d'ailleurs cette dernière interrogation qui nous a principalement motivés ; c'est de vérifier l'équivalence entre les deux grandeurs d^2W^{macro} et d^2W^{ct} en utilisant un modèle discret associé à une loi moment rotation qui consiste à introduire un moment artificiel opposé au mouvement du roulement.

6.3.1. Description liée aux contacts avec le modèle discret associé à la MTL

Notre modèle discret est décrit dans la section 2.6.3.2.5. En se basant sur l'idée de Louafa et al. [Laouafa et al., 2001], Darve et al. [Darve et al., 2003b], [Darve et al., 2004b], [Darve

et Lambert, 2004] et Sibille [Sibille, 2006], le travail du second ordre d^2w^{ct} attribué a notre modèle est exprimé sous la forme vectorielle suivante:

$$d^2w^{ct} \approx \hat{d}\vec{F} \cdot \hat{d}\vec{u} + \hat{d}\vec{M}_r \cdot \hat{d}\vec{\theta}_r \quad 6.5$$

Ou $\hat{d}\vec{F}$ est l'incrément de la force de contact du grain g_1 sur le grain g_2 et $\hat{d}\vec{u}$ l'incrément de déplacement relatif du grain g_1 par rapport au grain g_2 au point de contact. $\hat{d}\vec{M}_r$ et $\hat{d}\vec{\theta}_r$ sont respectivement l'incrément du moment de roulement et l'incrément du roulement relatif dans le plan du contact (Figure 6.3).

L'incrément de la force de contact doit être calculé par rapport à un repère lié au contact et non par rapport à un repère global Galiléen. Notons \mathfrak{R} le repère Galiléen et \mathfrak{R}' le repère local lié au contact défini par $(\vec{n}, \vec{t}_1, \vec{t}_2)$ ou \vec{n} est normal au plan tangent au contact et \vec{t}_1 et \vec{t}_2 appartiennent au plan tangent (figure 6.3). L'incrément de la force \vec{F} calculé par rapport au repère \mathfrak{R} est noté $d\vec{F}$. Par contre $\hat{d}\vec{F}$ est calculé par rapport au repère local \mathfrak{R}' . L'incrément du moment \vec{M}_r calculé par rapport au repère \mathfrak{R} est noté $d\vec{M}_r$. Il est noté $\hat{d}\vec{M}_r$ lorsque l'incrément est calculé par rapport au repère local \mathfrak{R}' .

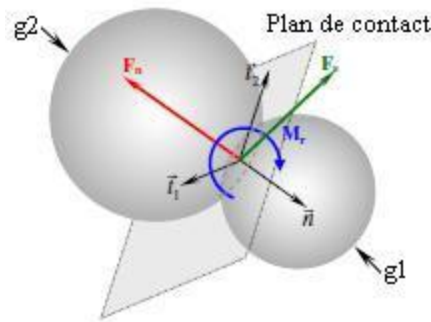


Figure 6. 3. Définition du repère local lié au contact entre deux grains g_1 et g_2

6.3.2. Approche numérique

L'approche numérique développée dans la section suivante est basée sur les simulations des recherches directionnelles présentées dans le Chapitre 5 avec le modèle discret associé à la MTL décrit dans le Chapitre 2. Nous comparons pour l'ensemble des directions de chargement les valeurs du travail du second ordre macroscopique d^2W^{macro} , défini par analogie au travail du second ordre classique ($d^2W = d\sigma : d\varepsilon$), calculés aux frontières de l'échantillon et les valeurs du travail du second ordre global aux contacts d^2W^{ct} . Les résultats présentés ci-après sont obtenus avec l'échantillon numérique de référence défini dans le Chapitre 3.

Dans ce qui suit et pour éviter les confusions nous appelons le travail du second ordre classique défini dans le cadre des milieux continus *travail du second ordre macroscopique*

désigné par d^2W^{macro} . Le travail du second ordre attribué à un contact est appelé par *travail du second ordre au contact*, il sera désigné par d^2W^{ct} et également la valeur globale elle sera nommée *travail du second ordre global aux contacts* noté par d^2W^{ct} .

6.3.2.1. Calcul du travail du second ordre aux contacts

Les résultats du travail du second ordre aux contacts présentés dans la suite de ce chapitre, sont calculés soigneusement par l'expression définie comme suit:

$$d^2w^{ct} = \hat{dF} \cdot \hat{d\vec{u}} + \hat{d\vec{M}}_r \cdot \hat{d\vec{\theta}}_r \quad 6.6$$

Les incréments $\hat{d\vec{F}}$, $\hat{d\vec{u}}$, $\hat{d\vec{M}}_r$ et $\hat{d\vec{\theta}}_r$ sont calculés par rapport au repère local $\hat{\mathfrak{R}}$ lié au contact défini par $(\vec{n}, \vec{t}_1, \vec{t}_2)$. Les composantes de $\hat{d\vec{\theta}}_r$ sont dirigées selon \vec{t}_1 et \vec{t}_2 uniquement (pas de torsion selon la normale \vec{n}).

Le travail du second ordre au contact exprimé par $\hat{d\vec{F}} \cdot \hat{d\vec{u}}$ peut se décomposer en un terme correspondant à la direction normale au contact donné par $d^2w_n^{ct}$ et un terme correspondant au plan tangent au contact donné par $d^2w_t^{ct}$. Le travail du second ordre au contact défini par $\hat{d\vec{M}}_r \cdot \hat{d\vec{\theta}}_r$, sera exprimé par $d^2w_r^{ct}$.

Donc :

$$d^2w^{ct} = d^2w_n^{ct} + d^2w_t^{ct} + d^2w_r^{ct} \quad 6.7$$

Avec :

$$d^2w_n^{ct} = \hat{d\vec{F}}_n \cdot \hat{d\vec{u}}_n \quad 6.8$$

Ou $\hat{d\vec{F}}_n$ et $\hat{d\vec{u}}_n$ sont respectivement l'incrément de la force de contact et l'incrément du déplacement relatif dans la direction normale au contact,

Et :

$$d^2w_t^{ct} = \hat{d\vec{F}}_t \cdot \hat{d\vec{u}}_t \quad 6.9$$

Ou $\hat{d\vec{F}}_t$ et $\hat{d\vec{u}}_t$ sont respectivement l'incrément de la force de contact et l'incrément du déplacement relatif dans le plan tangent au contact,

Et :

$$d^2w_r^{ct} = \hat{d\vec{M}}_r \cdot \hat{d\vec{\theta}}_r \quad 6.10$$

Ou $\hat{d\vec{M}}_r$ et $\hat{d\vec{\theta}}_r$ sont respectivement l'incrément du moment de roulement et l'incrément du roulement relatif dans le plan du contact.

Par ailleurs, au cours de la simulation de l'application d'un chargement, il est essentiel de bien comprendre qu'il y a en général une réorganisation topologique de la micro-structure. Elle est caractérisée par la perte et le gain des contacts. Ainsi, les contacts qui persistent toujours, avant et après application du chargement sont dits contacts permanents. Par contre, certains contacts existant à l'état initial avant application du chargement s'ouvrent au cours de l'application des sollicitations : ils sont dits contacts perdus. D'autres, au contraire, n'existaient pas avant l'application du chargement mais sont présents à la fin : ils sont dits contacts gagnés. Cependant, le calcul du travail du second ordre d^2w^{ct} dans une direction, est effectué pour chacune des catégories de contacts suivants : les contacts permanents, les contacts perdus et les contacts gagnés au cours de la simulation du chargement. Comme celui du travail du second ordre macroscopique, le calcul de d^2w^{ct} dans une direction, nécessite deux états d'équilibre que nous qualifierons d'état initial et état final. Pour un contact permanent, l'état initial correspond à l'état du contact avant application du chargement, l'état final correspond à l'état du contact après l'application du chargement. Pour un contact perdu, l'état initial correspond à l'état avant application du chargement, et l'état final correspond à l'état du contact lors de son ouverture. Pour un contact gagné, l'état initial correspond à l'état du contact lors de sa création et l'état final à l'état du contact après l'application du chargement.

Le calcul pratique de la composante normale $d^2w_n^{ct}$ du travail du second ordre au contact est le suivant :

$$d^2w_n^{ct} = (f_n^{final} - f_n^{init}) (\delta_c^{final} - \delta_c^{init}) \quad 6.11$$

Avec f_n^{init} et f_n^{final} sont respectivement, les composante de la force de contact \vec{F} suivant la normale \vec{n} dans l'état initial et l'état final du contact. δ_c^{init} et δ_c^{final} sont respectivement les interpénétration au contact à l'état initial et à l'état final du contact.

La composante tangentielle $d^2w_t^{ct}$ du travail du second ordre au contact est calculée de la manière suivante :

$$d^2w_t^{ct} = (f_{t_1}^{final} - f_{t_1}^{init}) du_{t_1} + (f_{t_2}^{final} - f_{t_2}^{init}) du_{t_2} \quad 6.12$$

Ou f_{t_1} et f_{t_2} sont les composantes de la force de contact \vec{F} dans le plan tangent suivant les axes \vec{t}_1 et \vec{t}_2 . du_{t_1} et du_{t_2} sont les composantes du déplacement tangentiel relatif du_t au point de contact suivant les axes \vec{t}_1 et \vec{t}_2 entre l'état initial et l'état final. Il manque les indices 1 et 2 dans la relation 6.12. Notons que la composante du_t est directement calculée à partir du déplacement tangentiel relatif fourni par le code SDEC à chaque cycle de calcul de la MED.

La composante due au roulement $d^2w_r^{ct}$ du travail du second ordre est calculée d'une façon similaire à celle de la composante tangentielle, donnée par :

$$d^2w_r^{ct} = (m_{n_1}^{final} - m_{n_1}^{init}) d\theta_{n_1} + (m_{n_2}^{final} - m_{n_2}^{init}) d\theta_{n_2} \quad 6.13$$

Ou m_{n_1} et m_{n_2} sont les composantes du moment de roulement \vec{M}_r suivant les axes \vec{t}_1 et \vec{t}_2 . $d\theta_{n_1}$ et $d\theta_{n_2}$ sont les composantes du roulement relatif $d\theta_r$ suivant les axes \vec{t}_1 et \vec{t}_2 entre l'état initial et l'état final. Même rmq pour les indices 1 et 2. Notons qu'à chaque cycle de calcul de la MED, la composante de $d\theta_r$ est directement calculée à partir de la rotation incrémental fourni par le code SDEC.

Du fait que le travail du second ordre d^2w^{ct} soit décomposé en trois termes, il peut en être fait de même pour le travail du second ordre en sa forme global d^2W^{ct} . Il s'agit d'une composante relative à la direction normale au contact, l'autre au plan tangent au contact et une autre composante relative au roulement perpendiculaire au plan de contact :

$$d^2W^{ct} = d^2W_n^{ct} + d^2W_t^{ct} + d^2W_r^{ct} \quad 6.14$$

Avec :

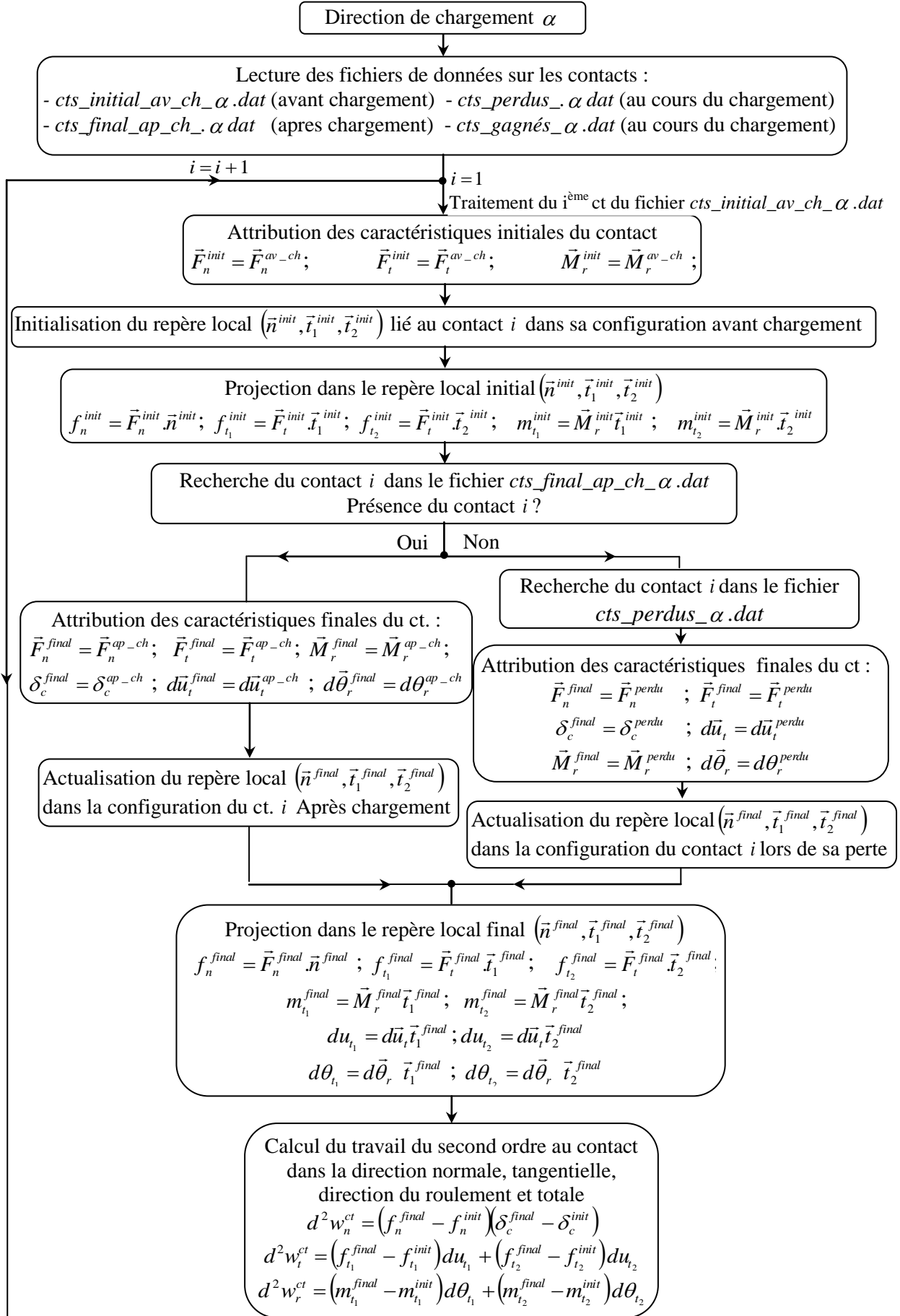
$$d^2W_n^{ct} = \frac{1}{V} \sum_{contacts} d^2w_n^{ct} \quad 6.15$$

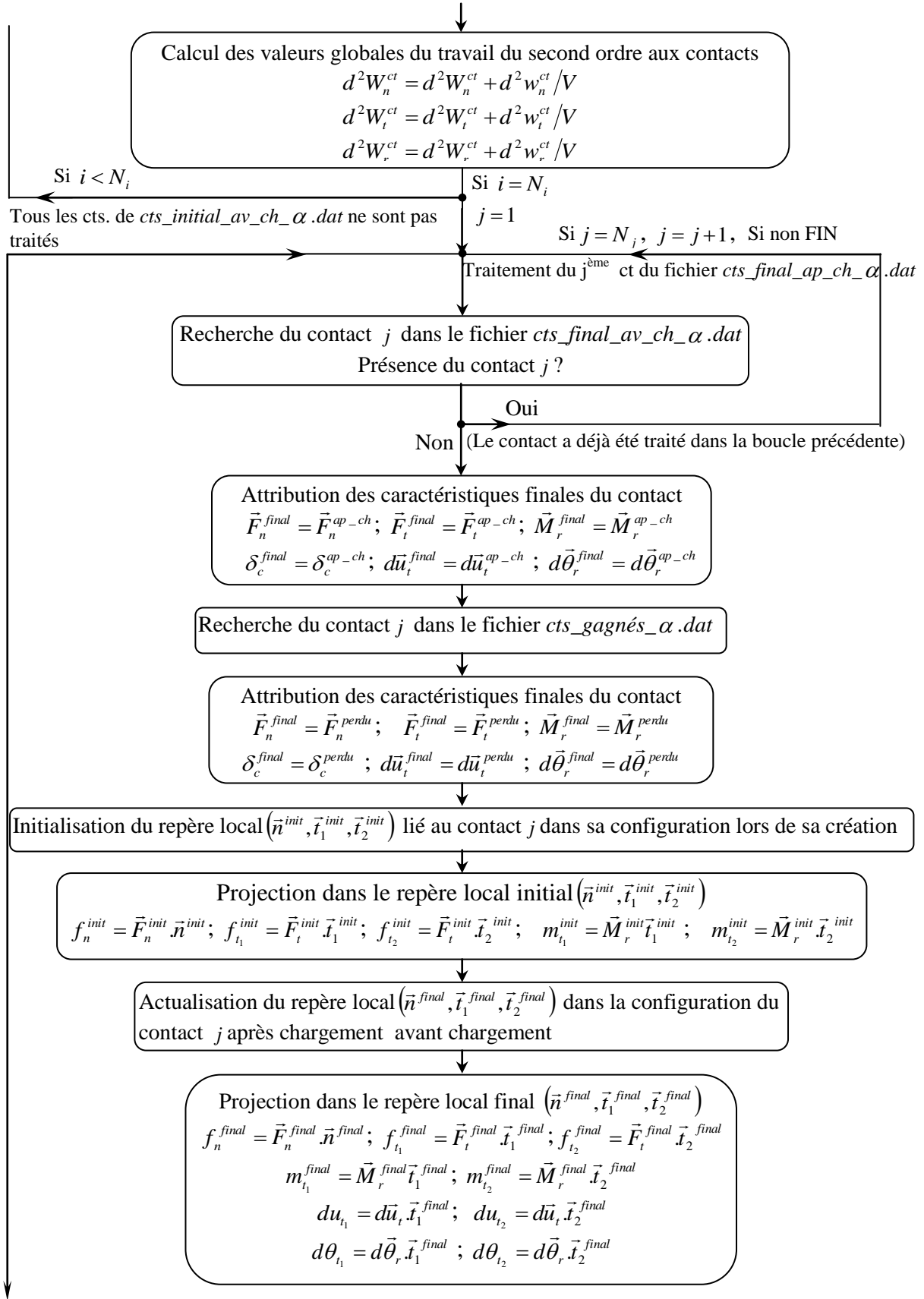
$$d^2W_t^{ct} = \frac{1}{V} \sum_{contacts} d^2w_t^{ct} \quad 6.16$$

$$d^2W_r^{ct} = \frac{1}{V} \sum_{contacts} d^2w_r^{ct} \quad 6.17$$

Le travail du second ordre au contact d^2w^{ct} et sa forme globale d^2W^{ct} ont été calculés en post traitement. Cette étape consiste à extraire des informations à partir des fichiers résultats fournis par le SDEC. En effet, la simulation d'une recherche directionnelle est une opération longue qui demande une trentaine d'heure (voir 36 directions), cette étape de post traitement présente l'avantage de pouvoir modifier le traitement des données issues de la simulation sans avoir à renouveler la simulation en elle-même.

La Figure 6.4 représente l'algorithme de calcul de d^2w^{ct} et d^2W^{ct} en post traitement. Le logiciel utilisé est le Matlab. Cet algorithme se devise en deux grandes parties composées chacune par une boucle. La première boucle assure le traitement des contacts permanents et les contacts perdus alors que la seconde permet de traiter les contacts gagnés. Notons quelques définitions sur les notations utilisées dans la présentation de l'algorithme. L'exposant $cts_initial_av_ch_alpha$ fait référence à l'état du contact avant application du chargement issue de l'état d'équilibre. L'exposant $cts_final_ap_ch_alpha$ fait référence à l'état du contact après application du chargement. L'exposant cts_perdus_alpha fait référence à l'état du contact lors de sa perte et l'exposant $cts_gagnés_alpha$ à son état lors de sa création. Les exposants *init* et *final* font références à l'état initial et final entre lesquels les différentes quantités sont calculées.





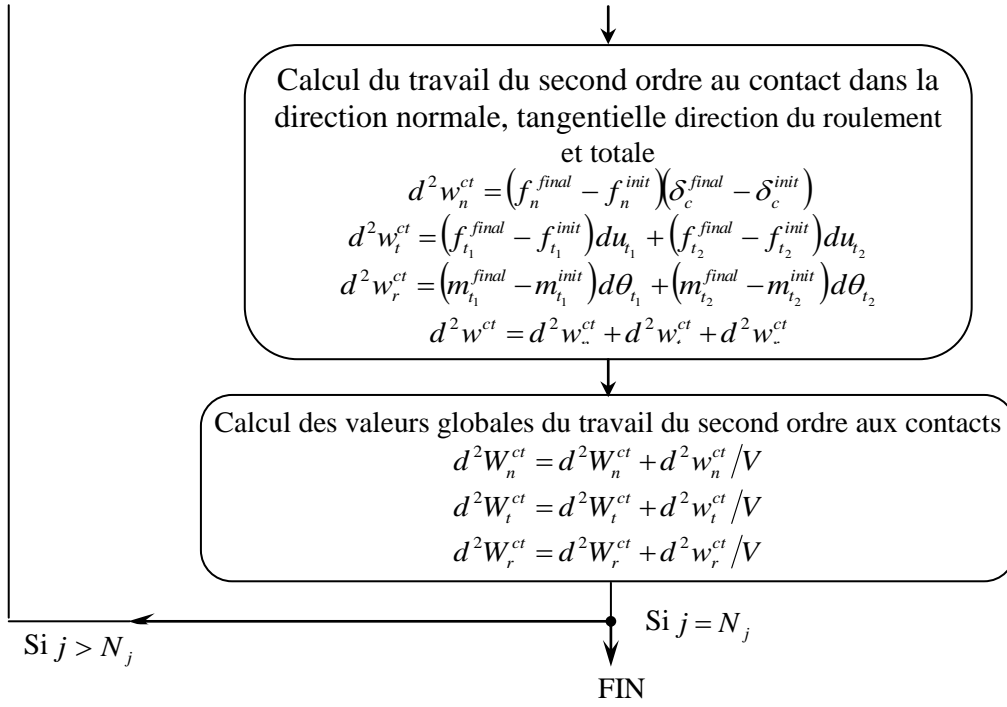


Figure 6. 4. Algorithme de post-traitement pour le calcul du travail du second ordre global aux contacts

6.3.2.2. Représentation des résultats numériques d'un modèle DEM à rotations libres sur le sable d'Huston [Sibille, 2006]

Sibille [Sibille, 2006] à son tour a tenté de relier le travail du second ordre macroscopique à des variables à l'échelle de la microstructure. Il a simulé des recherches directionnelles en contrainte avec le modèle SDEC à rotations libres. La Figure 6.5 illustre un extrait de ces résultats obtenus. L'auteur a montré que pour un état isotrope, les valeurs de $d^2W_n^{ct}$, $d^2W_t^{ct}$ et d^2W^{ct} sont positives pour l'ensemble des directions de chargement α . Ceci explique que le comportement du modèle est essentiellement élastique. Par contre pour un état de contrainte différent que l'état isotrope, les directions de chargement sont séparées en deux intervalles complémentaires. Les valeurs absolues de $d^2W_n^{ct}$, $d^2W_t^{ct}$ et d^2W^{ct} pour $\alpha \in [90^\circ; 210^\circ]$ sont plus importantes que les valeurs de ces mêmes grandeurs pour $\alpha \in [0^\circ; 80^\circ] \cup [220^\circ; 350^\circ]$. Une autre remarque faite par l'auteur est que la composante normale du travail du second ordre global aux contacts $d^2W_n^{ct}$ est toujours positive quelque soit la valeur de α . Concernant la composante $d^2W_t^{ct}$ liée à la direction tangentielle, celle-ci est toujours négative pour des directions de chargement conduisant à des déformations plastiques et elle est toujours positive lors des déformations élastiques. L'auteur n'a pu trouver des valeurs négatives pour d^2W^{ct} . Maintenant, concernant le lien entre d^2W^{macro} et d^2W^{ct} , Sibille a montré que le travail du second ordre macroscopique d^2W^{macro} est égal au travail du second ordre global aux contacts d^2W^{ct} tant qu'il n'y a pas de réorganisation micro-structurale (lors des déformations élastiques). Et lorsque des réorganisations micro-structurales se produisent (c.-à-d. lors que la

sollicitation conduit à des déformations plastiques) l'égalité entre d^2W^{macro} et d^2W^{ct} n'est plus vérifiée.

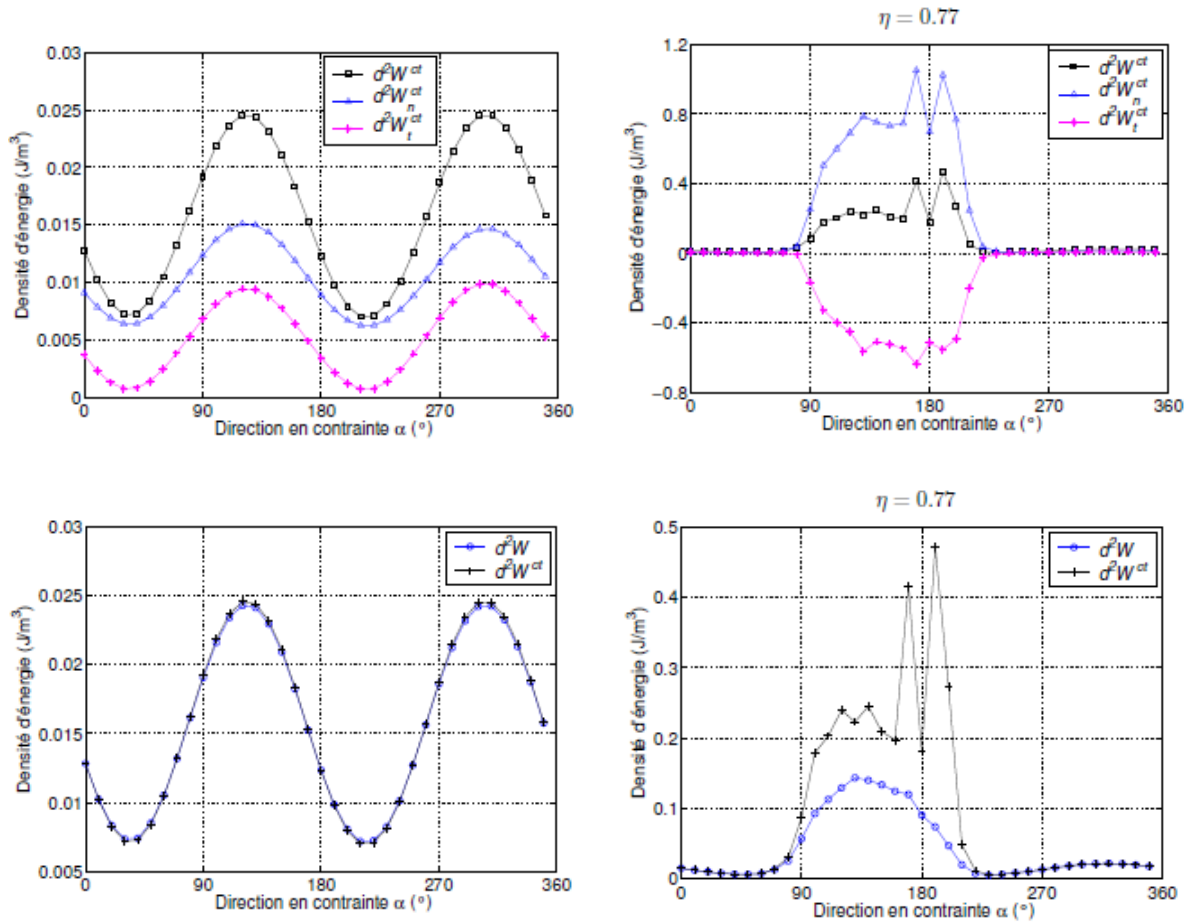


Figure 6. 5. Extrait de résultats de Sibille [Sibille, 2006] concernant le lien entre le d^2W^{macro} et d^2W^{ct} .

6.3.2.3 Résultats et influence des composantes $d^2W_n^{ct}$, $d^2W_t^{ct}$ et $d^2W_r^{ct}$

Dans cette section, nous présentons les résultats concernant le travail du second ordre global aux contacts d^2W^{ct} dissocié en une composante liée à la direction normale des contacts $d^2W_n^{ct}$, une composante liée à la direction tangentielle $d^2W_t^{ct}$ et une troisième composante liée au roulement $d^2W_r^{ct}$. Comme nous ne nous sommes pas intéressés à des valeurs normalisées du travail du second ordre, nous nous sommes limités à des représentations cartésiennes. Les tracés sont plus lisibles et faciles à lire.

La Figure 6.6 illustre dans un repère cartésien les valeurs de d^2W^{ct} , $d^2W_n^{ct}$, $d^2W_t^{ct}$ et $d^2W_r^{ct}$ en fonction de la direction de chargement α pour un état de contrainte-déformation isotrope ($\sigma_3 = 100kPa, n = 0.0$). Le travail du second ordre est évalué pour les deux modèles : sans MTL (à rotations libres) et avec MTL à paramètres calibrés (rotations contrôlées). Quelque soit la direction de chargement α et quelque soit le modèle avec ou sans MTL, le travail du second ordre $d^2W_r^{ct}$ est nul et $d^2W_t^{ct}$, $d^2W_n^{ct}$ sont positifs et par conséquent

d^2W^{ct} également. La loi d'interaction utilisée dans la direction normale aux contacts pour les deux modèles est uniquement élastique, par conséquent $d^2W_n^{ct}$ ne peut être que positif. Dans la direction tangentielle, seul un très faible nombre de contact glisse, et le reste travaille d'une manière élastique, ce qui explique la positivité de $d^2W_t^{ct}$. De la Figure 6.7, nous constatons que la différence entre les deux réponses données par les deux modèles -sans MTL (à rotations libres) et avec MTL à paramètres calibrés (rotations contrôlées)- est petite pour l'ensemble des directions simulées. Ce qui explique que l'influence de la MTL sur le comportement élastique est faible, voir négligeable. Résultat déjà vu au Chapitre 5 (au niveau des enveloppes réponses totales pour un état de contrainte-déformation isotrope).

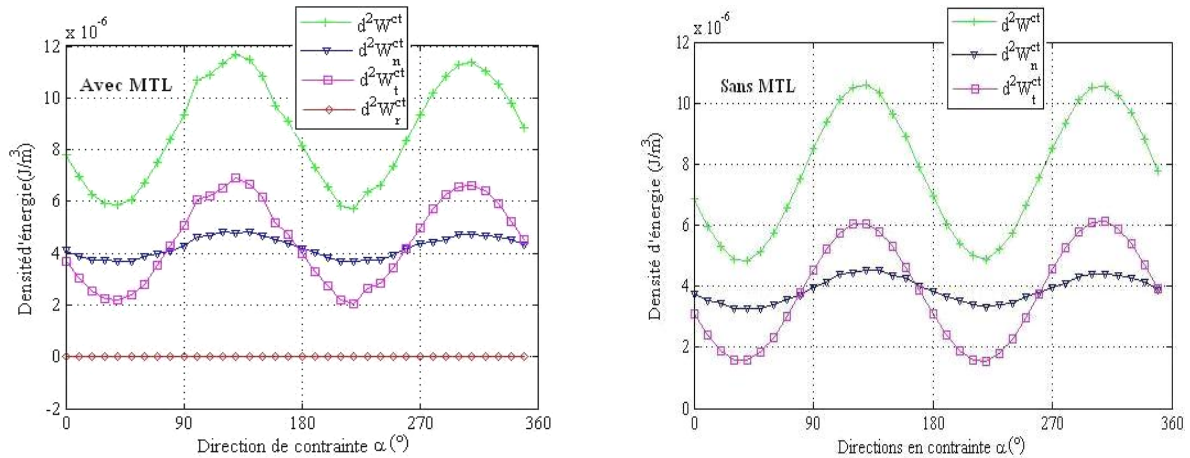


Figure 6.6. Travail du second ordre global aux contacts : composante normale $d^2W_n^{ct}$, tangentielle $d^2W_t^{ct}$, de roulement $d^2W_r^{ct}$ et valeur totale d^2W^{ct} pour un état de contrainte déformation isotrope ($\sigma_3 = 100kPa, n = 0.0$). Les simulations sont effectuées avec et sans MTL.

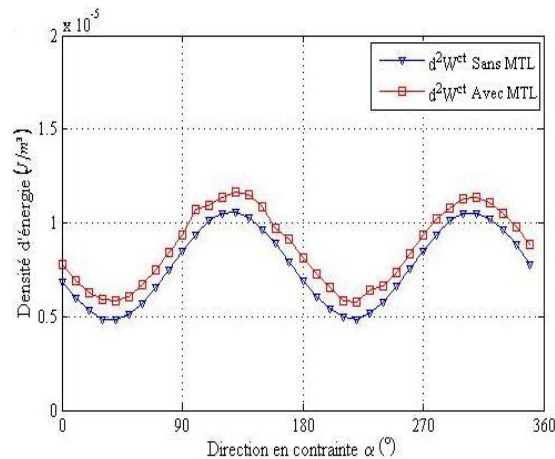


Figure 6.7. Comparaison entre le travail du second ordre global total aux contacts d^2W^{ct} pour un état de contrainte déformation isotrope ($\sigma_3 = 100kPa, n = 0.0$). Les simulations sont effectuées avec et sans MTL.

Sur la Figure 6.8 sont présentées les valeurs de d^2W^{ct} , $d^2W_n^{ct}$, $d^2W_t^{ct}$ et $d^2W_r^{ct}$ en fonction des directions de chargement α pour un confinement $\sigma_3 = 100kPa$ pour les deux modèles : sans MTL (à rotations libres) et avec MTL à paramètres calibrés (rotations contrôlées). Les états de contrainte-déformation étudiés sont les suivants :

$n = 0.42$ (avec MTL) équivalent à $n = 0.274$ (sans MTL).

$n = 0.92$ (avec MTL) équivalent à $n = 0.6002$ (sans MTL) ;

L'équivalence, comme on a vu au Chapitre 5 se résume au niveau du rapport

$$\left(\frac{n}{n_{critique}}\right)_{MTL} \equiv \left(\frac{n}{n_{critique}}\right)_{sansMTL} . \text{ Avec } n \text{ est le rapport entre le déviateur de contrainte } q \text{ et la}$$

pression moyenne p tel que : $n = \frac{q}{p}$

Pour l'ensemble des états de contrainte et pour les deux modèles : sans MTL (à rotations libres) et avec MTL à paramètres calibrés (rotations contrôlées), l'évolution de d^2W^{ct} , $d^2W_n^{ct}$ et $d^2W_t^{ct}$ en fonction de α se présente sous forme quasi sinusoïdale. La direction pour laquelle la valeur du travail du second ordre global aux contacts est maximale correspond à la direction engendrant une déformation plastique $\|d\varepsilon_p\|$ maximale (voir Chapitre 5. Page 216).

Concernant la composante $d^2W_r^{ct}$ pour le modèle avec MTL et pour chacun des deux états de contrainte étudiés $n = 0.42$ et $n = 0.92$, les directions de chargement peuvent être séparées en deux sous ensembles complémentaires. Par exemple pour le cas $n = 0.92$, $\alpha \in [100^\circ, 190^\circ]$ les valeurs absolues de $d^2W_r^{ct}$ sont plus importantes par rapport aux valeurs de ces mêmes grandeurs pour $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ] \cup [200^\circ, 350^\circ]$. Dans le dernier ensemble les valeurs de $d^2W_r^{ct}$ sont faibles mais non nulles. L'intervalle où les valeurs absolues du travail du second ordre $d^2W_r^{ct}$ sont importantes, c'est également l'intervalle où les rotations relatives du au roulement sont plus importantes et l'on peut donc s'attendre à des valeurs importantes de $d^2W_r^{ct}$.

Nous remarquons ici encore que quelque soit la valeur de la direction de chargement α et quelque soit le modèle avec ou sans MTL, le travail du second ordre $d^2W_t^{ct}$, $d^2W_n^{ct}$ et d^2W^{ct} sont positifs. Concernant la composante liée au roulement $d^2W_r^{ct}$, celle-ci est toujours négative pour des directions conduisant à des rotations relatives importantes dues au roulement. Les valeurs de $d^2W_r^{ct}$ sont faible par comparaison aux valeurs de $d^2W_t^{ct}$ et $d^2W_n^{ct}$. Finalement, nous constatons que le travail du second ordre global aux contacts d^2W^{ct} est toujours positif pour l'ensemble des états de contraintes étudiés. Nous n'avons d'ailleurs jamais trouvé au cours de nos recherches directionnelles des valeurs négatives de d^2W^{ct} même si un nombre significatif de contacts est glissant (entre 6 à 7%, Chapitre 5. Page 219).

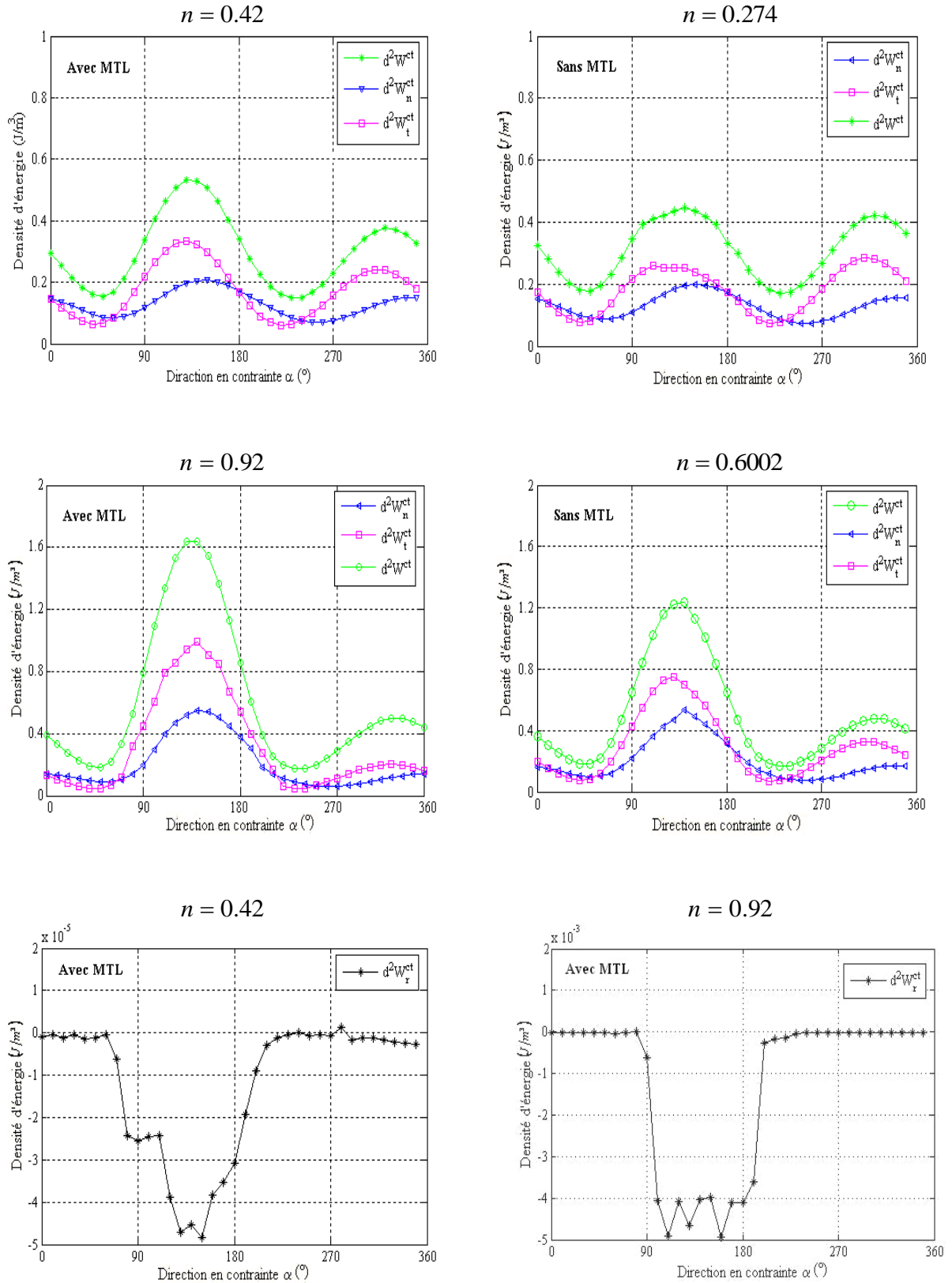


Figure 6. 8. Travail du second ordre global aux contacts : composante normale $d^2W_n^{ct}$, tangentielle $d^2W_t^{ct}$, de roulement $d^2W_r^{ct}$ et valeur total d^2W^{ct} pour les deux modèles avec et sans MTL aux états de contrainte $n = 0.42$ (avec MTL) équivalent à $n = 0.274$ (sans MTL) et $n = 0.92$ (avec MTL) équivalent à $n = 0.6002$ (sans MTL).

6.3.2.4 Comparaison entre le travail du second ordre global aux contacts d^2W^{ct} et le travail du second ordre macroscopique d^2W^{macro}

Les états de contraintes étudiés sont identiques à ceux étudiés dans la section précédente.

La Figure 6.9 illustre la comparaison entre le travail du second ordre macroscopique d^2W^{macro} et le travail du second ordre global aux contacts d^2W^{ct} pour les deux modèles sans MTL (à rotations libres) et avec MTL à paramètres calibrés (rotations contrôlées) à l'état isotrope ($\sigma_3 = 100kPa, n = 0.0$). Dans ce cas et quelque soit la direction de chargement α on établit numériquement que $d^2W^{macro} = d^2W^{ct}$.

La comparaison entre le travail du second ordre macroscopique d^2W^{macro} et le travail du second ordre global aux contacts d^2W^{ct} pour les deux modèles sans MTL (à rotations libres) et avec MTL à paramètres calibrés (rotations contrôlées) aux états de contrainte-déformation $n = 0.42$ (avec MTL) équivalent à $n = 0.274$ (sans MTL) et $n = 0.92$ (avec MTL) équivalent à $n = 0.6002$ (sans MTL) est présentée sur la Figure 9.10. A partir de l'évolution des courbes de d^2W^{ct} et d^2W^{macro} , on constate que la direction α où les valeurs de d^2W^{ct} et d^2W^{macro} sont maximales correspond à la même direction où les déformations plastiques sont maximales (Chapitre 5. Page. 216). En outre, on remarque que pour le modèle sans MTL (à rotations libres), les valeurs de d^2W^{ct} sont égales aux valeurs de d^2W^{macro} uniquement pour certaines direction de chargement. Pour le reste des directions α , les valeurs de O.K. diffèrent des valeurs de d^2W^{macro} . Par contre, pour le modèle avec MTL à paramètres calibrés (rotations contrôlées), les courbes représentant les évolutions de d^2W^{ct} et d^2W^{macro} sont confondues pour l'ensemble des directions α . On vérifie donc bien que $d^2W^{ct} = d^2W^{macro}$. Les petites différences sont probablement dues à des contacts perdus et gagnés en plasticité qui introduisent de légers biais dans les calculs.

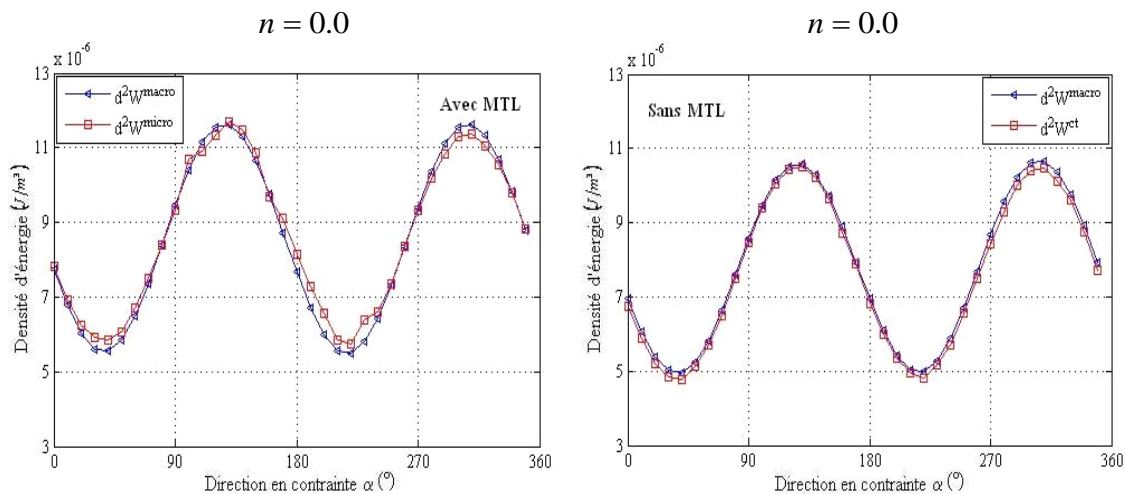


Figure 6. 9.Comparaison entre le travail du second ordre macroscopique et le travail du second ordre global aux contacts pour les deux modèles avec et sans MTL à un état de contrainte isotrope ($\sigma_3 = 100kPa, n = 0.0$).

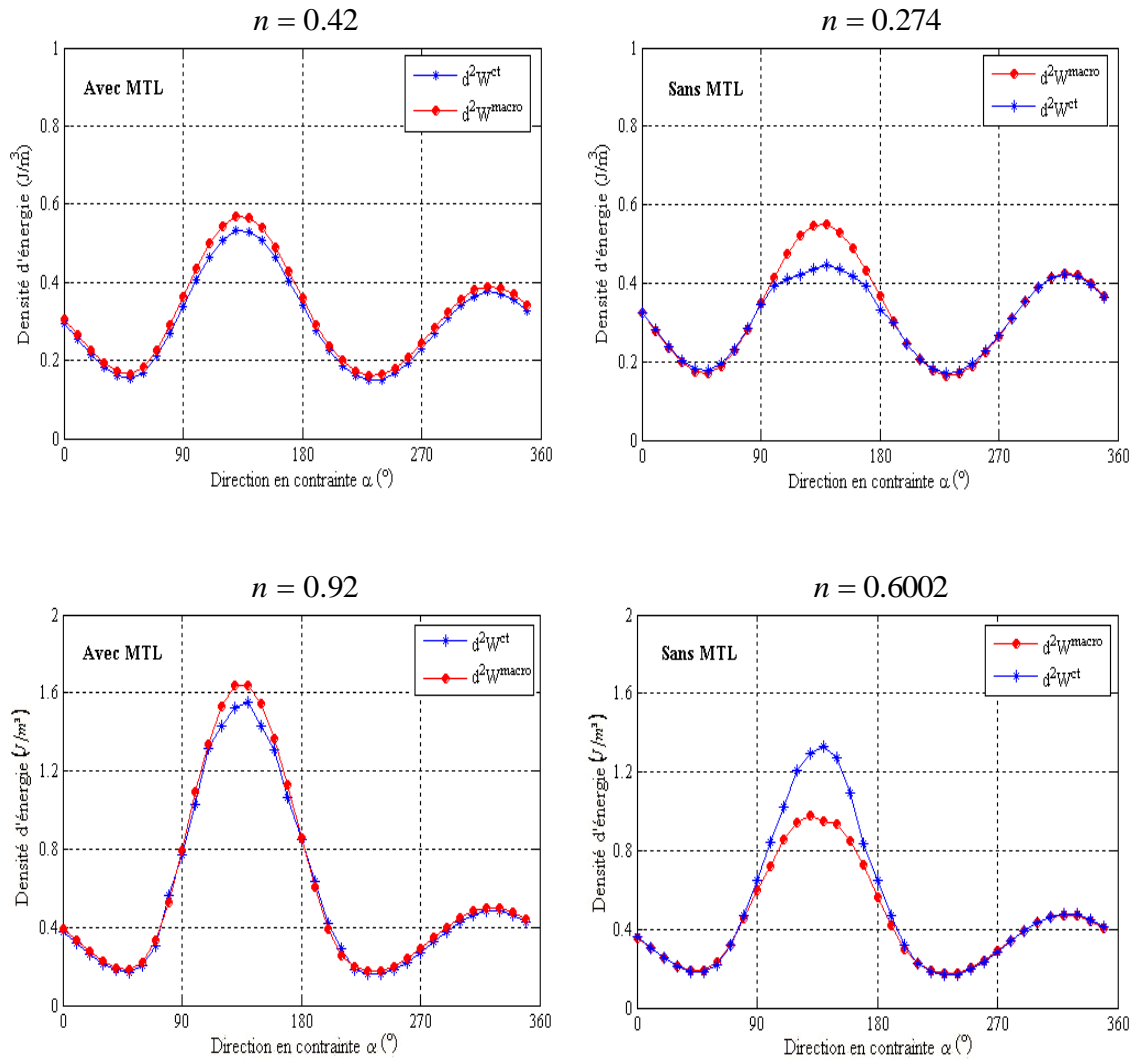


Figure 6. 10. Comparaison entre le travail du second ordre macroscopique et le travail du second ordre global aux contacts pour les deux modèles avec et sans MTL aux états de contrainte déviatoire $n = 0.42$ (avec MTL) équivalent à $n = 0.274$ (sans MTL) et $n = 0.92$ (avec MTL) équivalent à $n = 0.6002$ (sans MTL).

6.4. Conclusion

L'approche numérique développée a permis de comparer le travail du second ordre global aux contacts d^2W^{ct} et le travail du second ordre global macroscopique d^2W^{macro} pour différents états de contrainte pour les deux modèles sans MTL (à rotations libres) et avec MTL à paramètres calibrés (rotations contrôlées). Les principaux points mis en évidence lors de cette approche sont :

- Quelque soit l'état de déformation étudié (isotrope ou non) pour les deux modèles sans MTL (à rotations libres) et avec MTL à paramètres calibrés (rotations contrôlées), le travail du second ordre lié à la direction normale des contacts $d^2W_n^{ct}$ et le travail du second ordre lié à la direction tangentielle $d^2W_t^{ct}$ sont toujours positifs ;

- avec la loi moment rotation utilisée, et lors des déformations élastiques ou plastiques, la composante liée au roulement $d^2W_r^{ct}$, est négative ;
- Quelque soit l'état de déformation étudié (isotrope ou non) en utilisant le modèle avec MTL à paramètres calibrés (rotations contrôlées) et pour l'ensemble des directions, on vérifie numériquement que $d^2W^{macro} = d^2W^{ct}$. Par contre pour le modèle sans MTL (à rotations libres) et pour des déformations plastiques l'égalité entre d^2W^{ct} et d^2W^{macro} n'est plus vérifiée.

Conclusion générale



‘objectif de ce travail de thèse était double. Il s’agissait de tester la *capacité* d’un modèle basé sur la MED associé à une nouvelle loi nommée “Loi moment-rotation : MTL”, à restituer le comportement macroscopique de matériaux granulaires non cohésifs d’une part et d’autre part de prédire des modes de ruptures diffus qui existent pour des états de contraintes strictement inclus dans la condition limite de plasticité. La confrontation entre modélisation et expérimentation s’est faite sur la base d’essais triaxiaux axisymétriques.

L’originalité du travail de modélisation repose sur deux constats évidents :

- Les niveaux de résistance atteints par des assemblages de sphères dans des modèles 3D d’essais triaxiaux sont insuffisants pour modéliser des sols, d’où la nécessité de modifier la loi de comportement inter-granulaire classiquement utilisée par la MED.
- Les méthodes courantes basées sur la méthode aux éléments finis avec l’utilisation de la théorie de plasticité et de localisation ne permettent pas de détecter certains modes de rupture comme le mode diffus qui peut se manifester strictement à l’intérieur du critère de rupture, notamment dans le cadre des géomatériaux. Une approche permettant de prédire ces ruptures mérite d’être développée. L’approche considérée dans le présent document, consiste à être capable de détecter l’ensemble des points de bifurcation. D’après les travaux effectués par différents auteurs, dont une synthèse bibliographique est donnée au chapitre 1, le critère de Hill portant sur le signe du travail du second ordre semble pouvoir décrire, dans le cadre de l’élastoplasticité non associée, la rupture diffuse précédant, si elle existe, les autres modes de rupture comme la localisation décrite par le critère de Rice. Ce critère semble donc un candidat approprié pour détecter un point de bifurcation. A l’heure actuelle, cette approche a été abordée principalement avec des modèles phénoménologiques, et ce que nous proposons comme idée originale dans ce travail de thèse est d’utiliser une méthode numérique discrète basée sur une description dynamique du mouvement des grains. L’avantage d’utiliser une telle méthode se présente en deux points : premièrement la prise en compte du mouvement dynamique des grains permet de simuler des effondrements tels qu’ils pourraient être observés à partir des essais expérimentaux, deuxièmement la description du matériau à l’échelle de ses hétérogénéités autorise la recherche d’une signification physique à l’échelle microscopique d’une grandeur macroscopique.

Sur cette base, Le code SDEC a été adapté pour répondre à nos besoins. Une approche numérique basée sur la DEM associée à une nouvelle loi de comportement agissant sur le phénomène de roulement (la MTL présenté au Chapitre 2) a été proposée. Cette loi fait intervenir deux nouveaux paramètres dans le modèle : une rigidité de roulement et une limite élastique en roulement. L’implémentation de la LTM a pour but d’être plus représentatif du comportement du matériau granulaire aussi bien en petites déformations qu’à la rupture ou à l’état résiduel, que ce que ne le permettait jusqu’à présent la MED utilisant des éléments discrets sphériques à rotations libres.

Le modèle numérique a été validé par des essais expérimentaux réalisés sur le sable de Labenne sous diverses pressions de confinement. Les résultats obtenus et les tendances

observées ont servi d'assise à la vérification du non associativité du modèle, la détection des points de bifurcation et les origines microscopiques du travail du second ordre. Les critères de validation du modèle numérique du matériau granulaire portent sur la représentativité du comportement en quasi-staticité. En effet, des essais triaxiaux ont été simulés (présentés au chapitre 3), dont les paramètres régissant le comportement quasi-statique ont pu être classés en trois catégories :

1. *Les paramètres d'essais* : il s'agit principalement des influences de la vitesse de déformation en phase déviatoire, de la pression de confinement et de l'amortissement visqueux. Au cours de cette étude, il apparaît que le choix de la vitesse de sollicitation doit être fait de telle manière que la réponse de l'assemblage ne soit affectée par l'effet inertiel. Concernant, l'influence de la pression de confinement, une étude approfondie est portée sur le comportement en petites déformation comme à la rupture. L'augmentation de la pression de confinement n'a pas d'influence sur le coefficient de Poisson ν et le module initial E_0 , pour les deux types de loi de comportement avec et sans MTL. Pour le module sécant E_{sec} , les résultats mettent en évidence une dépendance avec l'augmentation de la pression de confinement. La dépendance obtenue suit une loi de puissance. Par contre, le comportement à la rupture, les enveloppes de rupture pour les deux lois avec ou sans MTL sont décrites par une droite qui tangente parfaitement les cercles de Mohr passant par l'origine.
2. *Les paramètres géométriques* : ils correspondent à l'homogénéité et l'isotropie. La simulation des échantillons numériques a mis en évidence l'influence de la distribution des tailles d'éléments sur leur comportement. Un résultat important est trouvé, indiquant que la distribution des tailles des éléments a peu d'effet sur le comportement de l'éprouvette numérique dès que la condition d'un nombre élevé de petits éléments est vérifiée. La forme de distribution de taille peut alors être fixée afin d'être utilisée dans tous les essais entrepris par la suite, pour la modélisation des essais triaxiaux. Ce résultat permet finalement de fixer la porosité numérique à la valeur réelle. La calibration du modèle ne fait donc plus intervenir d'aspect géométrique – forme des éléments, distribution de taille, porosité –, mais uniquement des paramètres liés aux lois de contacts entre éléments.
3. *Les paramètres mécaniques* : Le lien entre les paramètres locaux du modèle et la réponse macroscopique de l'échantillon a été étudié. L'influence de chaque paramètre mécanique local sur le comportement élastique, à la rupture et à l'état résiduel a été abordée. Cette étude a permis d'observer les paramètres régissant le comportement élastique de ceux gérant le comportement plastique à l'échelle de l'échantillon. Une procédure de calibration par calage successif des paramètres locaux en fonction de la réponse de l'échantillon est proposée. Cette procédure montre aussi bien que le jeu de paramètres du modèle discret est unique. Des simulations numériques sur matériau homogène ont été menées montrant l'intérêt de la MTL et de la procédure de calibration. Le comportement quasi-statique du sable de Labenne que se soit en terme contrainte ou déformation volumique a pu ainsi être reproduit dans les trois états considérés, en petites déformations, à la rupture et à l'état résiduel, ce qui a montré l'intérêt de l'utilisation de la MTL et de la procédure de calibration.

D'un point de vue général, le modèle d'essai triaxial avec MTL ainsi que la procédure de calibration permettent de prédire le comportement d'essais expérimentaux pour diverses pressions de confinement. Il n'est donc pas nécessaire de reproduire la structure granulaire

(forme des grains, granulométrie) d'un matériau pour en modéliser son comportement à l'échelle macroscopique.

Après validation du modèle numérique et la procédure de calibration, on s'est intéressé à la cinématique locale (champs de déplacement, champs de rotations...) à l'échelle des grains et son importance dans la réponse macroscopique de l'échantillon sous sollicitations quasi-statique axisymétriques. Les mécanismes de mouvement locaux pouvant exister ont été examinés par le biais des simulations menées avec et sans MTL. Comme dans les milieux granulaires, nos simulations ont mis en évidence la dominance du mécanisme de roulement dans la réponse macroscopique. Quatre modes de mouvement de rotation ont été identifiés. Leur contribution a été mesurée par un rapport permettant de déterminer le mode dominant. Et pour mieux caractériser le mode dominant nous avons introduit deux nouvelles fractions régissant sur le nombre de contact. De plus, une étude de la relation entre l'angle de frottement, les mécanismes de déformation, la coordinance et la porosité a été portée. Cette étude a permis de montrer que lorsque l'angle de frottement augmente, des contacts plus résistants sont générés et permet un nombre de contact plus faible ce qui favorise un mécanisme de roulement et un nombre de coordinance plus faible et par conséquent l'échantillon tend à se dilater.

Progresser vers l'étude du comportement incrémental du modèle, une vérification du non associativité du modèle, la détection des points de bifurcation et les origines microscopiques du travail du second ordre ont été réalisés.

Dans le cadre d'une formulation indépendante du temps et avec la prise en compte de l'identité d'Euler pour la relation constitutive incrémentale, le travail du second ordre apparaît comme une grandeur dont le signe dépend uniquement de la direction de sollicitation. Sur cette base, l'étude du signe du travail du second ordre et la détection de points de bifurcation implique la réalisation des recherches directionnelles. C'est le code numérique SDEC qui a été utilisé. Ce dernier a été étoffé par une procédure numérique permettant la simulation de ces recherches directionnelles dans le plan d'axisymétrie des incréments des contraintes.

Les simulations des recherches directionnelles dans le plan d'axisymétrie des incréments des contraintes ont montré, que le modèle numérique discret associé à la MTL présente une règle d'écoulement non-associée et que des valeurs négatives du travail du second ordre existent à l'intérieur du critère de Mohr-Coulomb. Un seul cône a été observé pour un confinement $\sigma_3 = 300\text{kPa}$ et aucun cône n'est trouvé pour les pressions de confinement $\sigma_3 = 100\text{kPa}, 200\text{kPa}$ quelque soit l'état d'équilibre étudié. A partir d'un point de bifurcation seules quelques directions de chargement ne vérifient pas la condition de stabilité de Hill. Des chemins en contrainte dans ces directions pourraient donc conduire à une rupture de l'assemblage granulaire.

Un aspect remarquable des résultats obtenus lors de l'étude comparative du travail du second ordre d^2W_{nom} , que pour le modèle discret sans MTL, le matériau est susceptible de s'effondrer à l'intérieur du critère de Mohr-Coulomb plus rapidement que celui associé à la MTL.

Après la détection de points de bifurcation ou la condition de Hill est violée à l'intérieur du critère de Mohr-Coulomb, on a tenté de rechercher une origine microscopique du travail du second ordre, c.-à-d. de relier le travail du second ordre macroscopique évalué au niveau des

frontière de l'échantillon à des variables à l'échelle de la microstructure. La tâche a été faite pour les deux modèles, avec et sans MTL. D'un point de vue numérique nous vérifions l'égalité entre le travail du second ordre macroscopique d^2W^{macro} et le travail du second ordre global au contact d^2W^{ct} tant qu'il n'y a pas de réorganisations micro-structurelles, et cela que se soit avec le modèle avec ou sans MTL. Lorsque des réorganisations micro-structurelles se produisent, ce qui se traduit à l'échelle de l'assemblage granulaire par des déformations plastiques, on vérifie toujours l'égalité entre d^2W^{macro} et d^2W^{ct} pour le modèle utilisant la MTL. Par contre pour le modèle sans MTL l'égalité entre d^2W^{ct} et d^2W^{macro} n'est plus vérifiée. Cependant la loi de comportement inter-granulaire utilisant la MTL estime mieux le travail du second ordre global au contact mesuré par des variables à l'échelle de la microstructure par comparaison au travail du second ordre macroscopique mesuré aux frontières de l'échantillon. Une approche micromécanique, au sens analytique du terme de [Nicot et Darve, 1989], a également montré que cette égalité existe.

Perspectives



Dans le prolongement de tous ces résultats encourageants, plusieurs perspectives peuvent être envisagées pour ce travail.

Nous savons qu'à l'échelle locale, les forces de capillarité jouent un rôle très important dans la cohésion entre les grains. En effet, pour des particules de tailles suffisamment petites, les forces de capillarité peuvent compenser - et même surpasser - l'action de la gravité [Duran, 1999]. Il est ainsi possible d'améliorer la loi de comportement inter-granulaire pour étudier les interactions de cohésion d'origine capillaire entre les particules et son effet sur le comportement macroscopique. De plus, une influence de ce type d'interaction sur le domaine de bifurcation et les directions instables est souhaitée.

Une autre perspective, porte sur la simulation numérique discrète d'un processus naturel : les glissements de terrains. La simulation discrète permet d'aborder le problème des glissements de terrain avec une nouvelle "optique", qui cherche à expliquer les comportements macroscopiques en fonction des interactions qui ont lieu à l'échelle des particules. Dans ce cadre, nous pourrions envisager de mener le même genre d'étude que celle présentée dans le chapitre 4 sur une pente heuristique, afin de mieux comprendre les mécanismes de déclenchement d'un glissement en sens de la microstructure.

Bibliographie

- A** [Abriak, 1991] N.-E. Abriak. Ecoulement d'un matériau granulaire à travers un orifice, effet de paroi. Thèse de Doctorat de l'Université de Lille, 1991.
- [Achmus et abdel-Rahman, 2003] M. Achmus and K. Abdel-Raman. The influence of "up-scaling" on the results of particle method calculations of non-cohesive soils, Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, *Proc. of the First International PFC Symposium* (Gelsenkirchen, Germany, 6/7 November 2002), Konietzky, 183-187, 2003.
- [Alexandre, 1998] S. Alexander. Amorphous solids: their structure, Lattice dynamics and Elasticity, *Physics. Reports.*, Vol. 296(2-4) : 65-236, 1998.
- [Allen and Tildesley, 1987] M.-P. Allen and D.-J. Tildesley. Computer simulations of liquids. *Oxford Science Publications.*, 1987.
- [Alonso-Marroquin, 2004] F. Alonso-Marroquin. Micromechanical investigation of soil deformation: incremental response and granular ratcheting. Thèse de Doctorat de l'Université de Stuttgart, 2004.
- [Alonso-Marroquin, 2005] F. Alonzo-Marroquin and H.-J. Hermann. The incremental response of soils. An investigation using a discrete element model. *Journal of Engineering Mathematics*. Vol.52: 11- 34, 2005.
- [Alonso-Marroquin, 2006] F. Alonso-Marroqu'in, I. Vardoulakis, H.-J. Herrmann, D. Weatherley, and P. Mora. Effect of rolling on dissipation in fault gouges. *Physics Review*. E74(1) n°3: 1539-3755, 2006
- [Akke et al., 2004] A.-S.J. Suiker, N.-A. Fleck. Frictional Collapse of granular assemblies. *Journal of Applied Mechanics.*, Vol. 71(3): 350-358, 2004.
- [Anandarajah, 1995] A. Anandarajah, K. Sobhan, N. Kuganenthira. Incremental stress strain behaviour of granular soil. *Journal of Geotechnical Engineering.*, Vol. 121(1): 57- 68, 1995.
- [Antony et al., 2001] S.-J. Antony. Evolution of force distribution in three-dimensional granular media. *Physics Review*. E63 (1): 011302, 2001.
- [Azema et al., 2007] E. Azéma, F. Radjai, R. Peyroux, G. Saussine. Force transmission in a packing of pentagonal particles. *Physics Review*. E76 (1): 1-13, 2007.
- B** [Bardet et Proubet, 1991] J.-P. Bardet and J. Proubet. A numerical investigation of the structure of persistent shear bands in granular media. *Géotechnique*, Vol. 41(4): 599-613, 1991.

- [Bardet et Proubet, 1989]** J.-P. Bardet and J. Proubet. Application of micro-mechanics to incrementally nonlinear constitutive equations for granular media. (Ed.) *Powders and Grains*. Balkema, Rotterdam, 265–273, 1989.
- [Bardet, 1994]** J.-P. Bardet. Numerical simulations of the incremental responses of idealized granular materials. *International Journal of Plasticity*, Vol. 10(8): 879-908, 1994.
- [Bathurst, 1988]** R. Bathurst and L. Rothenburg. Micromechanical aspect of isotropic granular assemblies with linear contact interactions, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 55(1): 17-23, 1988.
- [Bathurst, 1990]** R. Bathurst and L. Rothenburg. Observations on stress-force-fabric relationships in idealized granular materials, *Mechanics of Materials*, Vol. 9(1): 65-80, 1990.
- [Bazant, 1988]** Z.-P. Bazant. Stable states and paths of structures with plasticity and damage. *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 114(12) :2013–2034, 1988.
- [Belheine et al., 2005]** N. Belheine, A. Seridi, M. Guenfoud, F.-V. Donze, F. Darve. Modélisation d'une pente heuristique par éléments discret. 1^{er} Congrès international sur les risques naturels et glissement de terrain, Guelma 15-16 Novembre 2005.
- [Belheine et al., 2008]** N. Belheine, J.-P. Plassiard, F.-V. Donze, F. Darve, A. Seridi. Numerical simulation of drained triaxial test using 3D discrete element modelling. *Computer Geotechnics*. DOI: 10.1016/j.compgeo.2008.02.003, 2008.
- [Ben Hmed, 2001]** N. Benahmed. Comportement mécanique d'un sable sous cisaillement monotone et cyclique : application aux phénomènes de liquéfaction et de mobilité cyclique. Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale des Pont et Chaussées, 2001.
- [Berdenhagen et al., 2000]** S.-G. Bardenhagen, J.-U. Brackbill, D. Sulsky. Numerical study of stress distribution in sheared granular material in two dimensions. *Physics Review E* 62 (3): 3882-3890, 2000.
- [Bernoulli, 1738]** D. Bernoulli. Hydrodynamica sive de viribus et motibus fluidorum commentarii, *Johannus Reinholdi Dulsekeri, Bâle*, 1738.
- [Biarez et Hicher, 1994]** J. Biarez and P.-Y. Hicher. Elementary Mechanics of soil behaviour, Balkema, 1994.
- [Bigoni et Hueckel, 1991]** D. Bigoni and T. Hueckel. Uniqueness and localization- I. Associative and nonassociative elastoplasticity. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 28(2): 197-213, 1991.
- [Bigoni, 2000]** D. Bigoni. *Bifurcation and instability of non-associative elastoplastic solids*. Material instabilities in elastic and plastic solids. H. Petryk Ed., *CISM Courses and Lectures*, Springer-Verlag, n° 414 :1-52, 2000.
- [Bishop, 1954]** A.-W. Bishop. Correspondence on "shear characteristics of a saturated

silt measured in triaxial compression. *Géotechnique*, Vol.4: 43-45, 1954.

[**Bolton, 1986**] M.-D. Bolton. The strength and dilatancy of sands, *Géotechnique*. Vol. 36(1): 65-78, 1986.

[**Bolton, 1999**] M.-D. Bolton. The role of micro-mechanics in soil mechanics, *International Workshop on soil Crushability*, Yamaguchi University, Japan, July 1999.

[**Bortzmeyer, 1997**] D. Bortzmeyer. Mechanical properties and attrition resistance of porous agglomerates. In *Powders and Grains*. A.A Balkema, Rotterdam. 121-124, 1997.

[**Boussine, 1994**] L. Boussine. Simulation numérique des processus de poinçonnement, de coupe et de formage des métaux et des matériaux granulaires, *Faculté Polytechnique de Mons*, Octobre 1994.

[**Bratberg et Radjai, 2002**] I. Bratberg, F. Radjai, A. Hansen. Dynamic rearrangements and packing regimes in randomly deposited two-dimensional granular beds. *Physics Review. E, Stat. Nonlin. Soft Matter Phys.*, 66(3): 031303-1, 2002.

C [**Calveti et al., 1997**] F. Calveti, G. Combe, and J. Lanier. Experimental micromechanical analysis of a 2D granular material: relation between structure evolution and loading path. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, Vol. 2: 121-163, 1997.

[**Calveti et al., 2003**] F. Calveti, G. Viggiani, C. Tamagnini. A numerical investigation of the incremental non-linearity of granular soils, *Italian Geotechnical Journal*, Special Issue on *Mechanics and Physics of Granular Materials*, 2003.

[**Calveti et Nova, 2005**] F. Calveti and R. Nova. Micro-macro relationships from DEM simulated element and in-situ tests. In H.J. Herrmann R. Garc'ia Rojo and S. Mc- Namara, editors, *Powders and Grains*, 5th. International Conference on Micromechanics of Granular Media, Stuttgart, A.A. Balkema. Vol.1: 245-249, 2005.

[**Calveti et al., 2005**] F. Calveti, R. Nova, S. Utili. On modeling rock slope retreat by the discrete element method. In H.J. Herrmann R. Garc'ia Rojo and S. McNamara, editors, *Powders and Grains*, 5th. International Conference on Micromechanics of Granular Media, Stuttgart, A.A. Balkema, Vol.1: 671-675, 2005.

[**Calveti et al., 2006**] F. Calveti, C. Di Prisco, M. Vecchiotti. Experimental and numerical study of rock-fall impacts on granular soils, *Rivista Italiana Di Geotecnica*, Vol. 4, 2006.

[**Camborde, 1999**] F. Camborde. Modélisation du comportement dynamique du béton - Application aux problèmes d'impacts et d'explosions. Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes, 1999.

[**Camborde et al., 2000**] F. Camborde, C. Mariotti, F.-V. Donze. Numerical study of rock and concrete behaviour by discrete element modelling, *Computers and Geotechnics*, Vol. 27: 225-247, 2000.

[Cambou, 1985] B. Cambou et F. Sidoroff. Description de l'état d'un matériau granulaire par variables internes statiques à partir d'une approche discrète, *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, Vol. 4(2) : 223-242, 1985.

[Cambou et al., 1995] B. Cambou, P. Dubujet, F. Emeriault, F. Sidoroff. Homogenization for granular materials, *European Journal of mechanics A/Solids*, Vol. 14 : 255-276, 1995.

[Cambou et Jean 2001] B. Cambou and M. Jean. Micromécanique des matériaux granulaires, *Hermès science publication* (Ed.), Paris, 2001.

[Cambou, 2004] B. Cambou, Ph. Dubujet, C. Nouguier-Lehon. Anisotropy in granular materials at different scales. *Mechanics of Materials*, Vol.36: 1185-1194, 2004.

[Canepa et Depresles, 1990] Y. Canepa and D. Depresles. Fondations superficielles. Essais de chargement de semelles établies sur une couche de sable en place, station expérimentale de Labenne. Influence des conditions d'exécution, *Compte rendue des essais*, FAER 1. 17.02.09, 1990.

[Caquot, 1934] A. Caquot. Equilibre des massifs à frottement interne - Stabilité des terres pulvérulentes ou cohérentes. Gauthier - Villars, Editeur, Paris, 1934.

[Casagrande, 1975] A. Casagrande. Liquefaction and cyclic deformation of sands - a critical review. In *Proc. 5th Pan American Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, 1975.

[Castro, 1969] G. Castro. Liquefaction of sand. *Harvard Soil Mechanics Series*, 81, Cambridge, MA, 1969.

[Chambon et Caillerie, 1999] R. Chambon and D. Caillerie. Existence and uniqueness theorems for boundary value problems involving incrementally non-linear models. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 36(33): 5089-5099, 1999.

[Chareyre, 2000] B. Chareyre. "Application de la méthode des éléments distincts à des problèmes géotechniques – caractérisation des paramètres", *Rapport de stage de DEA*, Université Joseph Fourier, Grenoble, 31p. 2000.

[Chareyre, 2003] B. Chareyre. Modélisation du comportement d'ouvrages composites sol – géosynthétique par éléments discrets – Application aux ancrages en tranchées en tête de talus. Thèse de doctorat de l'UJF de Grenoble I, 2003.

[Chareyre et al. 2005] B. Chareyre and P. Villard. DEM Modelling of soil structures reinforced with geosynthetics. *Powders and grains*, 4p, 18th - 22nd July 2005, Stuttgart, Germany, 2005.

[Chu et al., 1993] J. Chu, S.-C.R. Lo, I.-K. Lee. Instability of granular soils under strain path testing. *Journal of Geotechnical Engineering*, 119(5) :874-892, 1993.

[Chu et Leong, 2001] J. Chu and W.-K. Leong. Pre-failure strain softening and pre-failure instability of sand: a comparative study. *Géotechnique*, 51(4):311–321, 2001.

[Chu et Leong, 2003] J. Chu and W.-K. Leong. Recent progress in experimental studies on instability of granular soil. In Labuz & Drescher, editor, *Int. Workshop on Bifurcations and Instabilities in Geomechanics*, Swets & Zeitlinger, 175-192, 2003.

[Clacquin, 2003] C. Claquin. Etude du comportement de l'interface milieu granulaire et inclusion par une approche multi-échelle. Thèse de doctorat de l'Institut National des Sciences de Lyon, 2003.

[Cola et Simonini, 2002] S. Cola and P. Simonini. Mechanical behavior of silty soils of the Venice lagoon as a function of their grading characteristics, *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 39: 879-893, 2002.

[Colliat-Dangus, 1986] J.-L. Colliat-Dangus. Comportement des matériaux granulaires sous fortes contraintes, Influence de la nature minéralogique du matériau étudié. Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier, Grenoble I, 1986.

[Colliat-Dangus, 1988] J.-L. Colliat-Dangus, J. Desrues, P. Foray. Triaxial testing of granular soil under elevated cell pressure advanced triaxial testing of soil and rock, *American Society for Testing and Materials STP 977 (Philadelphia, USA)*, Donaghe et al. (Eds), 290-310, 1988.

[Combe, 2002] G. Combe. Mécanique des matériaux granulaires et origines microscopiques de la déformation. LCPC(ed.) , Paris, 2002, 165p.

[Colomb, 1776] C. Coulomb. Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture, *Mémoire Académique. Royale des Sciences*, Vol. 973 :343-382, 1776.

[Coquillay, 2005] S. Coquillay. Prise en compte de la non-linéarité du comportement des sols soumis à de petites déformations pour le calcul des ouvrages géotechniques. Thèse de doctorat de l'Ecole nationale des Ponts et Chaussées. Paris 2005.

[Cundall, 1971] P.-A. Cundall. A computer model for simulating progressive large scale movements in blocky rock systems. In *Proceedings of the Symposium of the International Society of Rock Mechanics*, Vol.1 (II-8): 132-150, 1971.

[Cundall, 1974] P.-A. Cundall. A computer model for rock-mass behavior using interactive graphics for the input and output of geometrical data. *Technical Report*, Departement of civil and mineral engineering, University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota, 1974.

[Cundall et Strack, 1979] P.-A. Cundall and O.-D.L. Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, Vol. 29(1) :47-65, 1979.

[Cundall, 1987] P.-A. Cundall. Distinct element models of rock and soil structure. In E.T. Brown, editor, *Analytical and computational methods in engineering rock mechanics*, George Allen and Unwin. London. 129-163, 1987.

[Cundall, 1988] P.-A. Cundall. Computer simulations of dense sphere assemblies, *Mechanics of Granular Materials*, Satake M. et Jenkins J.T. (Eds), 113-123, 1988.

[Cundall et Hart 1992] P.-A. Cundall and R-D. Hart. Numerical modelling of discontinua, *Engineering. Computations*, 101-113, 1992.

D [Darve, 1990] F. Darve. Incrementally non-linear constitutive relationships, *Geomaterials Constitutive Equations and Modelling*, F. Darve (eds), Elsevier. *Applied Science*, 213-238, 1990

[Darve, 1994] F. Darve. Stability and uniqueness in geomaterials constitutive modelling. *Localisation and Bifurcation Theory for Soils and Rocks*, Chambon, Desrues, Vardoulakis (eds), Balkema (2):73-88, 1994.

[Darve et al., 1995a] F. Darve, P.-Y. Hicher and J.-M. Reynouard. Les géomatériaux, théorie, expériences et modèles, Hermès, Paris, 1995.

[Darve et al., 1995b] F. Darve, E. Flavigny, M. Méghachou. Constitutive modelling and instabilities of soil behaviour. *Computer and Geotechnics*, 17 :203-224, 1995.

[Darve, 1996] F. Darve. Liquefaction phenomenon of granular materials and constitutive instability. *International Journal of Engineering Computations*, 7:5-28, 1996.

[Darve et Pal, 1997] F. Darve and O. Pal. Liquefaction: a phenomenon specific to granular media. In Berhinger & Jenkins, editor, *Proceeding 3th International Conference on Powders & Grains*, Balkema : 69-73, 1997.

[Darve et Roguiez, 1997] F. Darve and X. Roguiez. Instabilities in granular materials, *Publ. CIMNE*, Owen, Onate, Hinton (Eds.): 720-727, 1997.

[Darve et Roguiez, 1998] F. Darve and X. Roguiez. Homogeneous bifurcation in soils. In Adachi et al., editor, *Localization and Bifurcation Theory for Soils and Rocks*, Balkema , 43-50, 1998.

[Darve et Laouafa, 1999] F. Darve and F. Laouafa. Plane strain instabilities in soil. Application to slopes stability, *In Proceeding of International Symposium On Numerical Models in Geomechanics*, Graz, Austria, 1-3 sept, 1999.

[Darve et Laouafa, 2000] F. Darve and F. Laouafa. Instabilities in granular materials and application to landslides. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, Vol. 5(8): 627-652, 2000.

[Darve et al., 2003a] F. Darve, G. Servant, H.-D.V. Khoa. Modelling of instabilities in natural media. Int. *Workshop on Prediction and Simulation Methods in Geomechanics*, TC34 ISSMGE, Athens, 33-36, 2003.

[Darve et al., 2003b] F. Darve, F. Louafa, G.Servant. Discrete instabilities in granular materials. *Italian Geotechnical Journal*, Vol. 37(3): 57-67, 2003.

[Darve et al., 2004a] F. Darve, G. Servant, H.D.V. Khoa, and I.O. Georgopoulos. Failure condition and flow rule of granular materials. In *Numerical Models in Geomechanics*, Pande, Pietruszczak, Schweiger (eds), Balkema, 85-90, 2004.

[Darve et al., 2004b] F. Darve, G. Servant, F. Louafa, and H.-D.V. Khoa. Failure in geomaterials : continuous and discrete analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, Vol. 193(27-29) : 3057-3085, 2004.

[Darve et Lambert, 2004] F. Darve, C. Lambert. Continuous and discrete modelling of failure in geomechanics. Ein F. Darve and I. Vardoulakis, editors, *Degradations and Instabilities in Geomaterials*, Vol. 461 of *CISM courses and lectures*. Springer, 2004.

[Darve et al., 2007] F. Darve, L. Sibille, A. Daouadji, and F. Nicot. Bifurcations in granular media: macro- and micro-mechanics approaches. *Comptes Rendus Académie des Sciences Mécanique*, Vol. 335: 496–515, 2007.

[Dantu, 1957] P. Dantu. Contribution à l'étude mécanique et géométrique des milieux pulvérulents. In Proceedings of the 4th International Conference on *Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Butterworth, London, Tome I, 144-148, 1957.

[Dantu, 1967] P. Dantu. Étude expérimentale d'un milieu pulvérulent compris entre deux plans verticaux et parallèles. *Annales des Ponts et Chaussées*, IV:193-202, 1967.

[Dedecker et al., 2000] F. Dedecker, M.Chaze, Ph. Dubujet and B. Cambou. Specific features of strain in granular materials. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*. Vol. 5: 173-193, 2000.

[Degny 1984] E. Degny. Etude du comportement d'un sable dense à l'aide d'une presse tridimensionnelle. Thèse de doctorat de l'Université scientifique et médicale et INPG de Grenoble ,1984.

[Delenne et al., 2004] J.-Y. Delenne, M.-S. El Youssoufi, F. Cherblanc and J.-C. Bénéat. Mechanical behaviour and failure of cohesive granular materials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 28 :1577-1594, 2004.

[Delenne, 2002] J.-Y. Delenne. Milieux granulaires à comportement solide - Modélisation, analyse expérimentale de la cohésion, validation et applications. Thèse de Doctorat de l'Université Montpellier.II, 2002.

[Deluzarche et al., 2003a] R. Deluzarche, F. Dedecker, J.-J. Fry. Static and dynamic analysis of stability of rocky slopes via particle methods. Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods. *Proc. of the First International PFC Symposium* (Gelsenkirchen, Germany, 6/7 November 2002), Konietzky, 219-224, 2003a.

[Deluzarche, 2004] R. Deluzarche. Modélisation discrète des enrochements – application aux barrages. Thèse de Doctorat de l'Ecole Centrale de Lyon, 2004.

[Desrues et Chambon, 2002] J. Desrues and R. Chambon. Shear band analysis and

shear moduli calibration. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39: 3757-3776. 2002

[Di Benedetto et Tatsuoka, 1997] H. Di Benedetto and F. Tatsuoka. Small strain behaviour of geomaterials: modelling of strain rate effects. *Soils and Foundations*, Vol. 37(2):127-138, 1997.

[Di prisco et Imposimato, 1997] C. Di Prisco and S. Imposimato. Experimental analysis and theoretical interpretation of triaxial load controlled loose sand specimen collapses. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, Vol. 2: 93-120, 1997.

[Dolezalova et al., 2003] M. Doležalová, P. Czene, F. Havel. Micromechanical modeling of stress path effects using PFC2D code. *Numerical Modeling in Micromechanics* via Particle Methods- Konietzky (ed.) 2003 Swets & Zeitlinger, Lisse, ISBN 90 5809 532 0.

[Dolzhenko, 2002] N. Dolzhenko, P. Mathieu, R. Kastner. Modélisation expérimentale et numérique bidimensionnelle d'ouvrages souterrains urbains. Réalisation d'essais biaxiaux et oedométrique sur le sol analogique de Taylor-schneebeli. In : *XVIIIème Rencontres de l'AUGC* à Lyon, Aménagement urbain, 2000, 27-28- mai, p 281-288.

[Donzé et Magnier, 1995] F.-V. Donze and S.-A. Magnier. Formulation of a three dimensional numerical model of brittle behaviour. *Geophysical Journal International*, Vol.122 (3): 790-802, 1995.

[Donzé et Magnier, 1997] F.-V. Donze and S.-A. Magnier. Spherical Discrete Element Code, In: *Discrete Element Project Report n°2*. GEOTOP, Université du Québec à Montréal, 1997.

[Donzé et al., 2001] F.-V. Donze, S.-A. Magnier, S. Montani and F. Descoedres. Numerical study of rock block impacts on soil-covered sheds by a discrete element method, ISRN *GEONUM*, 2001.

[Donze et al., 2009] F.-V. Donze, P. Villard, D. Dominique. Modélisation par la méthode aux éléments discrets des ouvrages en géomatériaux. *Traité MIM*, 2009.

[Drucker, 1959] D.-C. Drucker. A definition of stable inelastic material. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 26: 101-106, 1959.

[Duran, 1997] J. Duran. Sables, poudres et grains. Introduction à la physique des milieux granulaires, *Eyrolles sciences*, Paris, 1997.

[Duran 1999] J. Duran. Sables, poudres et grains. *Eyrolles Sciences*, Paris, 1999.

E [El Bied, 2000] A. El Bied. Etude expérimentale et modélisation du comportement des roches granulaires : écrouissage, radoucissement et rupture en mode localisé. Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 2000.

[Elie, 1998] M. Elie. Étude de la compression de billes de verre en grande

déformation. Mémoire de DEA, École doctorale de Paris, 1998.

[Emeriault, 1996] F. Emeriault and B. Cambou. Micromechanical modelling of anisotropic nonlinear elasticity of granular medium. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 33(18): 2591-2607, 1996.

[Emeriault et Claquin, 2004] F. Emeriault and C. Claquin. Statistical homogenization for assemblies of elliptical grains: effect of the aspect ratio and particle rotation, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41: 5837-5849, 2004.

[Emilien et al., 2007] E. Azéma, F. Radjai, R. Peyroux, and G. Saussine. Force transmission in a packing of pentagonal particles. *Physics Review*. E(76): 011301, 2007.

[Evesque et al., 1993] P. Evesque, W. Meftah, J. Biarez. Mise en évidence de variations brutales et d'évolutions quasi discontinues dans les courbes contraintes-déformation d'un milieu granulaire bi-dimensionnel de rouleaux. *Compte Rendus de l'académie des sciences, série IIb*, Vol.316 n°3 : 321-327, 1993.

F **[Finno et al., 1996]** R.-J. Finno, W.-W. Harris, G. Viggiani, and M.-A. Mooney. Strain localization and undrained steady state of sand. *Journal of Geotechnical Engineering fracture mechanics*, ASCE, Vol. 122(6): 462-473, 1996.

[Fu, 2005] Y. FU. Experimental quantification and DEM simulation of micro – macro behaviours of granular materials using X–ray tomography imaging. These: Philosophy: Louisiana State University, 2005.

G **[Gajo et al., 2000]** A. Gajo, L. Piffer, F. De Polo. Analysis of certain factors affecting the unstable behaviour of saturated loose sand. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, Vol. 5: 215-237, 2000.

[Georgopoulos, 2005] I.-O. Georgopoulos. Mechanisms of liquefaction of granular materials and the role of fabric anisotropy. Thèse de Doctorat de La N.T.U.A., 2005.

[Gerschel, 1995] A. Gerschel. Liaisons intermoléculaires. *Savoir actuel*, Paris, France, 1995.

[Gestin, 1989] F. Gestin. Fondations superficielles – Etudes expérimentales. Essais de laboratoire sur le sable de Labenne. *Rapport interne LCPC*, FAER 1.05.11.8, LRPC, Rouen, 114 pages, 1989.

[Goddard et al., 1998] J.-D. Goddard and A.-K. Didwania. Computations of dilatancy and yield surfaces for assemblies of rigid frictional spheres. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* Vol. 51 : 15-43, 1998.

[Gotteland et al., 2006] P. Gotteland, S. Lambert, C. Salot, and P. Villard. Réponse au défi des déchets de pneus ; comportement mécanique et modélisation numérique de mélange de copeaux de pneus-sol. *Actes XXIVème rencontre Universitaire de Génie Civil*, 1 au 2 juin 2006, La Grande Motte, 2006.

[**Gotteland et al., 2009**] P. Gotteland, P. Villard, C. Salot. Using Nonconvex Discret Elements to Predict Experimental Behaviour of Granular Materials. *Powders & Grains*, 361-364, Golden, Colorado, USA, 2009.

[**Gourvès et Mezghani, 1988**] R. Gourvès and M. Mezghani. Micromécanique des milieux granulaires, approche expérimentale utilisant le modèle de Schneebeli. *Revue Française de Géotechnique*, Vol. 42 : 23-34, 1988.

[**Graton et Fraser, 1953**] L.-C. Graton and H.-J. Frazer. Systematic packing of spheres with particular relation no porosity and permeability: *Journal of Geology*, Vol. 43: 785-909, 1953.

[**Gudehus, 1979**] G. Gudehus. A comparaison of some constitutive laws for soils under radially symmetric loading and unloading. *International Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 20: 502-516, 1979.

[**Guyon et al., 1994**] E. Guyon and J.-P. Troadec. *Du sac de billes au tas de sable*, Odile Jacob, Paris, 1994.

H [**Hadamard, 1903**] J. Hadamard. Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique. *Hermann A.*, Paris, 1903.

[**Hainbuchner et al., 2003**] E. Hainbuchner, S. Potthoff, H. Konietzky and L. Kamp. Particle based modeling of shear box tests and stability problems for shallow foundations in sand, *Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods*, Konietzky (Eds.), 151-156, 2003

[**Han et al., 1991**] C. Han and I. Vardoulakis. Plane strain compression experiments on water-saturated fine-grained sand. *Géotechnique*, Vol. 41(1): 49-78, 1991.

[**Hart et al., 1988**] R. Hart, P. -A. Cundall, J. Lemos. Formulation of a three dimensional distinct element model- Part II. Mechanical calculation for motion and interaction of a system composed of many polyhedral blocks, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics*. Vol. 25(3): 117-125, 1988.

[**Hentz, 2003**] S. Hentz. Modélisation d'une structure en béton armé soumise à un choc par la méthode des éléments discrets. Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier, Grenoble, 2003.

[**Herrmann et al., 2003**] H.-J. Herrmann, R.-M. Baram, M. Wackenhut. Searching for the perfect packing. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 330(1-2) : 77-82, 2003.

[**Hill, 1958**] R. Hill. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 6(3): 236-249, 1958.

[**Holtz, 1991**] R.-D. Holtz and W.-D. Kovacs. Introduction à la géotechnique. Edition de l'école polytechnique de Montréal, 1991.

[**Horne, 1965**] M.-R. Horne. The behaviour of an assambley of rotound, rigid,

cohesionless particles. *International Proceeding of the Royal Society A* Vol. 286 n° 1404: 62–78, 1965.

[**Hueckel et Maier, 1977**] T. Hueckel and G. Maier. Incremental boundary value problems in the presence of coupling of elastic and plastic deformations : a rock mechanics oriented theory. *International Journal of Solids and Structures*, Vol.13(1): 1-15, 1977.

I [**Imposimato et Nova, 1998**] S. Imposimato and R. Nova. An investigation on the uniqueness of the incremental response of elastoplastic models for virgin sand. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, Vol. 3: 65-87, 1998.

[**Ishihara, 1993**] K. Ishihara. Liquefaction and flow failure during earthquakes. The 33rd Rankine Lecture. *Géotechnique*, Vol. 43(3): 351-415, 1993.

[**Iwashita et Oda, 1998**] K. Iwashita and M. Oda. Rolling resistance at contacts in simulation of shear band development by dem. *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.124(3): 285-292, 1998.

[**Iwashita et Oda, 2000**] K. Iwashita and M. Oda. Micro-deformation mechanism of shear banding process based on modified distinct element method. *Powder Technology*, Vol.109 (1-3): 192-205, 2000.

[**Iwashita et al., 1995**] K. Iwashita, K. Matsuura, M. Oda. Distinct element method with the effect of moment transfer at the contact point. *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 529 (III-33): 145-154, 1995.

J [**Jean, 1999**] M. Jean. The non-smooth contact dynamics method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 177: 235-257, 1999.

[**Jianfeng et al., 2004**] W. Jianfeng, G. Marte, D. Joseph. Effect of particle rolling resistance on interface shear behavior. *17th ASCE Engineering Mechanics conference*. University of Delaware, Newark, DE, June 16-16, 2004.

[**Jiang et Haris, 2005**] M.-J. Jiang, H.-S. Yu, D. Harris. A nouvel discrete model for granular material incorporating rolling resistance. *Computers and Geotechnics.*, Vol. 32 :340-357, 2005.

[**Jiang et al., 2006**] M.- J. Jiang, H.-S. Yu, D. Harris. Bond rolling resistance and its effect on yielding of bonded granulates by DEM analyses. *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 30(8) :723-761, 2006.

[**Jodrey et Tory, 1985**] W.-S. Jodrey and E.-M. Tory. Computer simulation of close random packing of equal spheres. *Physical Review A*, Vol. 32(4): 2347-2351, 1985.

[**Joer, 1991**] H.-A. Joer. 1γ2€, une nouvelle machine de cisaillement pour l'étude du comportement des milieux granulaires. Thèse de Doctorat de l'Université Joseph Fourier, Grenoble I, 1991.

[**Joer et al., 1996**] H.-A. Joer, J. Lanier, M. Fahey. Déformation of granular materials

- due to rotation of principal axes. *Géotechnique*, Vol. 48(5): 605-619, 1996.
- [Johnson et al., 1971]** K.-L. Johnson, K. Kendall, A.-D. Roberts. Surface energy and the contact of elastic solids. *Proceeding of Royal Society, A.*, 324: 301-313, 1979.
- K** **[Kanit et al., 2003]** T. Kanit, S. Forest, I. Galliet, V. Mounoury and D. Jeulin. Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40: 3647-3679, 2003.
- [Kastner, 1982]** R. Kastner. Excavation profondes en site urbain. These de Genie civil, de l' INSA de Lyon, 1982.
- [Kecili-Laouafa et Nicot, 2004]** S. Kecili-Louafa and F. Nicot. Modélisation numérique de l'impact d'un bloc rocheux sur un éboulis : Analyse stochastique des coefficients de réflexion, *Revue française de géotechnique*, Vol. 109 : 87-97, 2004.
- [Khati, 1996]** S. Khati. Comportement des matériaux granulaires : Etude micro-macro du frottement et de la dilatance. Thèse de Doctorat de l'université de Lille, 1996.
- [Khidas, 2001]** Y. Khidas. Etude expérimentale du frottement et des rotations dans les milieux granulaires modèles. Thèse de Doctorat de l'Université de Rennes 1, 2001.
- [Khoa, 2005]** H.-D.V. Khoa. Modélisation des glissements de terrains comme un problème de bifurcation. Thèse de Doctorat de l'INPG de Grenoble, 2005.
- [Khoa et al., 2006]** H.-D.V. Khoa, I.-O. Georgopoulos, F. Darve and F. Laouafa. Diffuse failure in geomaterials : Experiments and modelling. *Computers and Geotechnics*, Vol. 33 :1-14, 2006.
- [Kim, 1995]** M.-S. Kim. Étude expérimentale du comportement mécanique des matériaux granulaires sous fortes contraintes. Thèse de Doctorat, École Centrale de Paris, 1995.
- [Kishino, 2003]** Y. Kishino. On the incremental nonlinearity observed in a numerical model for granular media. *Rivista Italiana di Geotecnica*, Vol.3 :30-38, 2003.
- [Koiter ,1969]** W.-T. Koiter. On the thermodynamic background of elastic stability theory. Problems of Hydrodynamics and continuum Mechanics, *SIAM, Philadelphia*, 423-433, 1969.
- [Krunz et Rothenburg ,2006]** N.-P. Kruty and L. Rothenburg. Shear strength, dilatancy, energy and dissipation in quasi-static deformation of granular materials. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, (P07021), 2006.
- [Kuhn et Bagi, 2004]** M.-R. Kuhn and K. Bagi. Contact rolling and deformation in granular media, *Int. Journal of Solids and Structures*, Vol.41: 5793-5820, 2004.
- L** **[Lade, 1987]** P.-V. Lade, B. Nelson, M. Ito. Non associated flow and stability of

- granular materials. *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.113(9) : 1302-1318, 1987.
- [Lade, 1988] P.-V. Lade, B. Nelson, M. Ito. Instability of granular materials with non associated flow. Non associated flow and stability of granular materials. *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.114(12) : 2173-2191, 1988.
- [Lade, 1992] P.-V. Lade. Static instability and liquefaction of loose fine sandy slopes. *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol.118(1): 51-69, 1992.
- [Lade, 1993] P.-V. Lade. Initiation of static instability in the submarine Nerlerk berm. *Canadian Geotechnical*, Vol.16 :51-69, 1993.
- [Lade, 1994] P.-V. Lade. Instability and liquifaction of granular materials. *Computers and Geotechnics*, Vol.16 : 123-151, 1994.
- [Lade, 2002] P.-V. Lade. Instability, shear banding, and failure in granular materials. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39 (13-14) :3337-3357, 2002.
- [Lam et Tatsuoka, 1988] W.-K. Lam, and F. Tatsuoka. Effects of initial anisotropic fabric and σ_2 on strength and deformation characteristics of sand. *Soils and Foundations*, Vol. 28(1): 89-106, 1988.
- [Lancelot et al., 2004] L. Lancelot, I. Shahrour, M. Al Mahmoud. Instability and static liquefaction on proportional strain paths for sand at low stresses. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 130(11): 1365-1372, 2004.
- [Lancelot et al., 2006] L. Lancelot, I. Shahrour, M. Al Mahmoud. Failure and dilatancy properties of sand at relatively low stresses, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.132 (12): 1396-1399, 2006.
- [Lanier et Jean, 2000] J. Lanier and M. Jean. Experiments and numerical simulations with 2D-disks assembly. *Powder Technology*, Vol.109: 206-221, 2000.
- [Lanier, 1988] J. Lanier. Géomatériaux non cohérents, *Rapport du G.R.E.C.O. géomatériaux*, 1988.
- [Laouafa, 2002] F. Laouafa and F. Darve. Modelling of slope failure by a material instability mechanism. *Computer and Geotechnics*, Vol. 29(4): 301-325, 2002.
- [Laouafa et al., 2001] F. Laouafa, F. Darve, J. Lanier. Instabilités dans les milieux granulaires et application aux glissements de terrains. *Rapport interne*. Laboratoire Sols, Solides, structures, Grenoble, 2001.
- [Latham et al., 2005] S. Latham, S. Abe, P. Mora. Microscopic friction response of rotational and non-rotational lattice solid gouge in 2d and 3d. In H.J. Herrmann R. García Rojo and S. McNamara, editors, *Powders and Grains*, 5th. International Conference on Micromechanics of Granular Media, Stuttgart, Vol. 1 : 213-217. A.A. Balkema, 2005.
- [Lee, 1967] K. Lee and H.-B. Seed. Cyclic stress conditions causing liquefaction of

sand. *Journal of Geotechnical engineering Division*, Vol. 93(SM1) : 47-70, 1967.

[**Letnh et al., 2007**] Letnh., O. Ple, P. Villard. Application de la méthode des éléments discrets aux calculs des ouvrages en sol renforcés par géosynthétique. CD-ROM, Nancy, France, 4 - 6 juin 2008.

[**Lindenberg et Koning, 1981**] J. Lindenberg, H.-L. Koning. Critical density of sand. *Géotechnique*, Vol. 31(2) :231-245, 1981.

[**Liu et al., 1995**] C.-H. Liu, S.-R. Nagel, D.-A. Schecter, S.-N. Coppersmith, S. Majumdar, O. Narayan, and T.-A. Witten. Force fluctuations in bead packs. *Science*, Vol. 269: 513, 1995.

[**Long et al., 1982**] J.-C.S Long, J.-S. Remer, C.-R. Wilson, and P.-A. Witherspoon. Porous media equivalents for networks of discontinuous fractures. *Water Resources Research*, Vol. 18: 645-658, 1982.

[**Lorentz, 2007**] J. Lorentz. Etude de la capacité de dissipation sous impact d'une structure sandwich de protection contre les chutes de blocs rocheux. Thèse de Doctorat de l'Université Joseph Fourier, Grenoble, 2007.

[**Love, 1927**] A.-E.H Love. A treatise on the mathematical theory of elasticity. *Cambridge University Press*, Cambridge, 1927.

[**Lovol et al., 1999**] G. Lovol, K. Maloy and E. Flekkoy. Force measurements on static granular materials. *Physics Review. E*, Vol. 60: 5872-5878, 1999.

[**Luding, 2004**] S. Luding. Micro-macro transition for anisotropic, frictional granular packing. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41: 5821-5836, 2004.

[**Luding, 1997**] S. Luding. Stress distribution in static two dimensional granular model media in the absence of friction. *Physics Review. E*, Vol. 55: 4720-4729, 1997

[**Lyapunov, 1907**] A.-M. Lyapunov. Problème générale de la stabilité des mouvements. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, Vol. 9 : 203-274, 1907.

M [**Majmudar et al., 2005**] T.-S. Majmudar, R.-P. Behringer. Contact force measurements and stress-induced anisotropy in granular materials. *Nature*, Vol. 435: 1079-1082, 2005.

[**Mahboubi et al., 1996**] A. Mahboubi, A. Ghaouti, and B. Cambou. La simulation numérique discrète du comportement des matériaux granulaires. *Revue Française de Géotechnique*, Vol.76: 45-61, 1996.

[**Mahmoud, 1997**] M.-A. Mahmoud. Etude en laboratoire du comportement des sables sous faibles contraintes, Thèse de LML, USTL, 1997.

[**Makse et al., 2000**] H.-A. Makse, D.-L. Johnson, and L.-M. Schwartz. Packing of compressible granular materials. *Physical Review Letters*. Vol. 84(18): 4160-4163, 2000.

[Mandel, 1966] J. Mandel. Conditions de stabilité et postulat de drucker. *Rheology and soil Mechanics*, J. Kravtchenko and P. M. Sirieys (eds), Springer, Berlin : 58-68, 1966.

[Manna et Hermann, 1991] S.-S. Manna and H.-J. Hermann. Precise determination of the fractal dimensions of appolonian packing and space-filling bearing, *Journal of Physics. A: Mathematical and General*. Vol. 24 : 481-4901, 1991.

[Matsushima et Konagai, 2001] T. Matsushima and K. Konagai. Grain-shape effect on Peak Strength of Granular Materials, *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, Desai et al., eds., Balkema, 1: 361-366, 2001. Matsushima, T., Documentation of DEMSEG version 2, 2001.

[Matsushima et Saomoto, 2002] T. Matsushima and H. Saomoto. Discrete element modeling for irregularly-shaped sand grains, *Proc. NUMGE2002: Numerical Methods in Geotechnical Engineering* (Paris, France, 4-6 September 2002), Mestat, 239-246, 2002.

[Matsushita et al., 1999] M. Matsushita, F. Tatsuoka, J. Koseki, B. Cazacliu, H. Di Benedetto, and S.-J. M. Yasin. Time effects on the pre-peak deformation properties of sands. In Lo Presti Jamiolkowski, Lancellotta, editor, *Pre-failure deformation characteristics of geomaterials*, Torino, 681-689, Rotterdam, A.A. Balkema, 1999.

[Maugis, 1994] D. Maugis. The JKR-DMT transition in the presence of a liquid meniscus and the extension of the JKR theory to large contact radii. In Raous, M., Jean, M., et Moreau, J.J., editors, *Second contact mechanics international symposium*. Carry-Le-Rouet, France, September 19-23 Plenum Press, New York, 1994.

[Maugis 1999] D. Maugis. Contact, adhesion and rupture of elastic solids. *Solid-State Sciences*, Berlin, 1999.

[Mestat, 2001] P. Mestat and Y. Riou. Méthodologie de détermination des paramètres pour la loi de comportement élastoplastique de Vermeer et simulations d'essais de mécanique des sols. *Bulletin de Laboratoire Ponts Chaussées*. Vol. 235(Novembre-Décembre) :19-39 [REF 4391], 2001.

[Mindlin, 1953] R.-D. Mindlin, H. Deresiewicz. Elastic spheres in contact under varying oblique forces. *Journal of applied mechanics*, Vol. 20: 327-344, 1953.

[Mitchell, 1976] J.-K. Mitchell. Fundamentals of Soil Behavior. John Wiley & Sons, Inc., New York, N.Y.,1976.

[Mitchell, 2005] J.-K. Mitchell, K. Soga. Fundamentals of soil behaviour. John Wiley New Jersey, 83-109, 2005.

[Mokni et al., 1999] M. Mokni and J. Desrues. Strain localization measurements in undrained plane strain biaxial tests on hostun rf sand. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, Vol. 4: 419-441, 1999.

[Mooney et al., 1998] M. Mooney, R. Finno, G. Viggiani. A unique critical state for sand. *Journal of Geotechnical and Geo-environmental Engineering*. Vol. 24(11) : 1100-1108, 1998.

[Moreau, 1994] J.-J. Moreau. Some numerical methods in multibody dynamics : application to granular materials. *European journal of mechanics. A. Solids*. Vol. 13(4) :93-114, 1994.

[Moreau, 2000] J.-J. Moreau. Contact et frottement en dynamique des systèmes de corps rigides. *Revue Européenne des Eléments Finis*, Vol. 9: 9-28, 2000.

[Mueth et al., 1998] D.-M. Mueth, H.-M. Jaeger, S.-R. Nagel. Force distribution in a granular medium. *Physics Review. E.*, Vol. 57 (3): 3164-3169, 1998.

[Müller 1996] D. Muller. Techniques informatiques efficaces pour la simulation des milieux granulaires par la méthode des éléments discrets. Thèse de Doctorat de l'EPFL de Lausanne, 1996.

N [Nase et al., 2001] S.-T. Nase, W.-L. Vargas, A.-A. Abatan and J.-J. McCarty. Discrete characterization tools for cohesive granular material. *Powder Technology*, Vol. 116: 214-223, 2001.

[Nicot et Darve, 2006] F. Nicot and F. Darve. Micro-mechanical investigation of material instability in granular assemblies. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43(11-12) : 3569-3595, 2006

[Nicot et Darve, 2007a] F. Nicot and F. Darve. A micro-mechanical investigation of bifurcation in granular materials. *International Journal of Solids and Structures*. Vol. 44(20): 6630-6652, 2007.

[Nicot et al., 2007] F. Nicot, F. Darve, H.D.V. Khoa. Bifurcation and second-order work in geomaterials. *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. Vol. 31(8): 1007-1032, 2007.

[Nouguier-lehon et al., 2003] C. Nouguier-lehon, B. Combou, E. Vincens. Influence of particle shape and angularity on the behaviour of granular materials : A numerical analysis. *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 27: 1644-1655, 2003.

[Nouguier-Lehon et Frossard, 2005] C. Nouguier-Lehong and E. Frossard. Influence of particle shape on rotations and rolling movements in granular media. *Powders and Grains, Proc. of the 5th international conference on micromechanics of granular media* (Stuttgart, Germany, 18-22 July 2005), Garcia-Rojo et al., eds, 1339-1343, 2005.

[Nova, 1991] R. Nova. A note on sand liquefaction and soil stability. In *Third Int. Conf. Constitutive Laws for Engineering Materials: Theory and Applications*, Tuscon, USA, 153-156, 1991.

[Nova, 1994] R. Nova. Controllability of the incremental response of soil specimens subjected to arbitrary loading programmes. *Journal of Mechanical behaviour of*

materials, Vol. 5(2): 193-201, 1994.

[Nova 2005] R. Nova. Fondements de la mécanique des sols. *Hermès Science Publications*, 2005.

- O [Oda, 1972] M. Oda. The mechanism of fabric changes during compressional deformation of sand. *Soils and foundations*, Vol. 12(2) :1-18, 1972.

[Oda et al., 1982] M. Oda, J. Konishi, S. Nemat-Nasser. Experimental micromechanical evaluation of strength of granular materials : effects of particle rolling. *Mechanics of materials*, Vol.1: 269-283, 1982.

[Oda et al., 1983] M. Oda, J. Konishi, S. Nemat-Nasser. Experimental micromechanical evaluation of strength of granular materials : effects of particle rolling. In : Jenkins and Stake Eds. *Mechanics of granular Materials : New Models and Constitutive Relations*, 21-30, 1983.

[Oda et Iwashita 1997] M. Oda, K. Iwashita, T. Kakiuchi. Importance of particle rotation in the mechanics of granular materials, dans *Powders and Grains*, Behringer et Jenkins (dir.), Balkema, Rotterdam, 207-210, 1997.

[Oda et Iwashita, 2000] M. Oda and K. Iwashita. Study on couple stress and shear band development in granular media based on numerical simulation analyses. *International Journal of Engineering Science*, Vol.38 (15): 1713-1740, 2000.

[Oda et Konishi, 1974] M. Oda and J. Konishi. Microscopic deformation mechanism of granular material in simple shear. *Soils and foundations*, Vol.14(4): 25-38, 1974.

[Oger et al., 1998] L. Oger, S.-B. Savage, D. Corriveau, and M. Sayed. Yield and deformation of an assembly of disks subjected to a deviatoric stress loading. *Mechanics of materials*, Vol. 27:189-210, 1998.

[Olivera 2004] R. Olivera. Numerical simulations of undrained granular media. Thèse de Doctorat de l'Université de Waterloo, 2004.

[O'Sullivan et al., 2005] C. O'Sullivan and J.D.Bray. The importance of accurately capturing particle geometry in DEM simulations, *Powders and Grains, Proc. of the 5th international conference on micromechanics of granular media* (Stuttgart, Germany, 18-22 July 2005), Garcia-Rojo et al. (eds), 1333-1337, 2005.

[Osinov et Wu, 2005] V. Osinov and W. Wu. Instability and ill-posedness in the deformation of plastic solids: some correlations through simple examples. In Y.Wang and K Hutter, editor, *Trends in Applications of Mathematics to Mechanics*, Shaker Verlag, 361-370 2005.

[Ottosen et Runesson ,1991] N.-S.Ottosen and K. Runesson. Properties of discontinuous bifurcation solutions in elasto-plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, Vol.7(54): 401-421, 1991.

- P [Pater et al., 2008] A. Pater, E. Dembicki, P. Villard. Modeling of a rock fall using the

discrete element method and study of the seismic signal. *Archives of civil engineering*, ISSN : 1230-2945, IV: 405-422, 2008.

[Perales et al., 2007] R. Perales, M. Vinches, C. Bohatier. Modélisation par éléments discrets d'ouvrages 3D en génie civil : Application de la méthode Non Smooth Contact Dynamics. *Revue européenne de génie civil*. Vol. 11(9-10): 1169-1185, 2007.

[Petrik, 1993] H. Petryk. On the Micro-macro Transition and Hardening Moduli in Plasticity. *IUTAM Symposium on Micro- and Macrostructural Aspects of Thermoplasticity Solid Mechanics and its Applications*, 2002, Vol.62(4), 219-230, DOI: 10.1007/0-306-46936-7-21.

[Pinson et al., 1998] D. Pinson, R.-P. Zou, A.-B. Yu, P. Zulli and M.-J. McCarthy. Coordination number of binary mixtures of spheres. *Journal of Physics. D: Applied physics*, Vol. 31: 457-462, 1998.

[Plassiard et al., 2004] J.-P. Plassiard, F.-V. Donze, P. Plotto. High energy impact on embankments – A numerical discrete approach. Proc. IX Symposium on Numerical Models in Geomechanics, IX NUMOG *Symposium on Numerical Models in Geomechanics* Ottawa, 25-27 August, 2004.

[Plassiard, 2007] J.-P., Plassiard. Modélisation par la Méthode des éléments discrets d'impact de blocs rocheux sur structures de protection type merlons. Thèse de Doctorat de l'Université Joseph Fourier, Grenoble 2007.

[Plassiard et al., 2009] J.-P. Plassiard, N. Belheine, F.-V. Donzé. A spherical discrete element model: calibration procedure and incremental response. *Granular Matter* Revue. Vol. 11(5): 293-306, 2009.

[Potapov et Campbell, 1998] A.-V. Potapov and C.-S. Campbell. A fast model for the simulation of non-round particles, *Granular Matter*. Vol. 1: 9-14, 1998.

[Potyondy et al., 1996] D.-O. Potyondy, P.-A. Cundall, C.-A. Lee. Modelling rock using bonded assemblies of circular particles. *Rock Mechanics Tools and Techniques*, Montreal, 1937-1944, 1996.

[Pournin et Liebling, 2005] L. Pournin and T.-M. Liebling. A generalization of distinct element method to tridimensional particles with complex shapes, *Powders and Grains, Proc. of the 5th international conference on micromechanics of granular media* (Stuttgart, Germany, 18-22 July 2005), Garcia-Rojo et al.,eds, 1375-1378, 2005.

[Preechawuttipong, 2002] Preechawuttipong. Modélisation du comportement mécanique de matériaux granulaires cohésifs. Thèse de Doctorat de l'Université Montpellier 2, 2002.

Q

R **[Radjai et al., 1996]** F. Radjai, M. Jean, J.-J. Moreau. Force distribution in dense two-dimensional granular systems. *Physical Review Letters*, Vol. 77(2): 274-277, 1996.

[Radjai et al., 1998] F. Radjai, D.-E. Wolf, M. Jean, and J.-J. Moreau. Bimodal character of stress transmission in granular packings. *Physical Review Letters*, Vol.80 (1): 61-64, 1998.

[Radjai, 2001] F. Radjai. Features of force transmission in granular media. In *Powders and Grains*, Kishino Y (eds). Swets & Zeitlinger, 157-160, 2001.

[Raniecki, 1979] B. Raniecki. Uniqueness criteria in solids with non-associated plastic flow laws at finite deformations. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical series*, Vol. 27 : 8-9, 1979.

[Raniecki et Bruhns, 1981] B. Raniecki and O.-T. Bruhns. Bounds to bifurcation stresses in solids with non-associated plastic flow law at finite strain. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 29(2): 153-172, 1981.

[Roscoe et al., 1958] K.-H. Roscoe, A.-N. Schofield, C.-P. Wroth. On the yielding of soils. *Geotechnique* Vol.8(1): 22-52, 1958. (This paper was awarded the first prize of the British Soil Mechanics Society.)

[Rothenberg et Bathurst, 1992] Rothenberg and Bathurst. Micromechanical features of granular assemblies with planner elliptical particles, *Geotechnique*, Vol.42(1): 79-95, 1995.

[Roux et Chevoir, 2005] J.-N. Roux, F. Chevoir. Simulation numérique discrète et comportement mécanique des matériaux granulaires, *Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, n° 254, 1^{er} Trimestre, 2005.

[Rowe, 1962] P.-W. Rowe. The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact. *International Proceedings of the Royal Society of London. Series. A*, 269 : 500-527, 1962

[Royis et Doanh, 1998] P. Royis and T. Doanh. Theoretical analysis of strain response envelopes using incrementally non-linear constitutive equations. *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 22(2): 97-132, 1998.

S [Salot, 2004] C. Salot. Modélisation tridimensionnelle d'un composite sol-inclusion par la méthode des éléments discrets, mémoire de Master, LIRIGM, 2004.

[Salot, 2007] C. Salot. Modélisation du comportement d'un matériau granulaire composite par la méthode des éléments discrets. Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier, Grenoble, 2007.

[Samieh et Wong, 1998] A.-M. Samieh and R.-C.K. Wong. Modelling the responses of Athabasca oil sand in triaxial compression tests at low pressure, *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 35(2): 395-406, 1998.

[Sasitharan et al., 1993] S. Sasitharan, P.-K. Robertson, D.-C. Sego, and N.-R. Morgenstern. Collapse behavior of sand. *Canadian Geotechnical Journal*, Vol.30(4): 569-577, 1993.

- [Schäfer et al., 1996] S. Schäfer, S. Dippel, and D.-E. Wolf. Forces schemes in simulations of granular materials. *Journal de physique I*, Vol. 6 (1): 5-20, 1996.
- [Schneebeli, 1956] G. Shneebeli. Une analogie mécanique pour les terres sans cohésion, *Comptes rendus de l'academie des sciences*, Vol. 243(1): 125-126, 1956.
- [Schofield et Wroth, 1968] A.-H. Shofield, C.-P. Worth. Critical state soil mechanisms. McGraw-Hill, *European Civil Engineering Series*, London, 1968.
- [Seed et al., 1967] H.-B. Seed and I.-M. Idriss. Analysis of soil liquefaction : Niigata earthquake. *Proceeding of the American Society of Civil Engineers*, 93(SM3) : 83-108, 1967.
- [Semblat et Liong, 1999] J.-F. Semblat, M. Phong luong, G.Gary. 3D-Hopkinson Bar: New experiments for dynamic testing on soil. *Journal of Japanese Geotechnical society: Soils and Foundation*, Vol. 39(1): 1-10, 1999.
- [Servant et al., 2003] G. Servant, H.-D.V. Khoa, F. Darve. Rupture diffuse dans les géomatériaux: un exemple. In *XVIème Congrès Français de Mécanique, Nice*, 2003.
- [Servant et al., 2004] G. Servant, F. Darve, J. Desrues, and I.-O. Georgopoulos. Diffuse modes of failure in geomaterials. In Di Benedetto, editor, *Deformation characteristics of geomaterials*. Swets & Zeitlinger, 2004.
- [Servant et al., 2005] G.Servant, F. Darve, J. Desrues, and I.-O. Georgopoulos. Diffuse modes of failure in geomaterials. In Di Benedetto et al., editor, *Deformation characteristics of geomaterials*, page 181-200. Taylor & Francis Group, 2005.
- [Shiu et al., 2008] W. Shiu, F.-V. Donzé, L. Daudeville, Compaction process in concrete during missile impact: a DEM analysis, *Computers and Concrete*, accepted, to appear, 2008.
- [Shodja et Nezami, 2003] H.-M. Shodja and E.-G. Nezami. A micromechanical study of rolling and sliding contacts in assemblies of oval granules. *International Journal for Numerical and analytical Methods in Geomechanics*. 2003; 27:000-000 (DOI: 10.1002/nag.278).
- [Sibille et al., 2005] L. Sibille, F.-V. Donze, F. Darve, and F. Nicot. Une utilisation de la MED : la description de la rupture dans les sols. In *XXIIIe Rencontres Universitaire de Génie Civil*, Grenoble, 2005
- [Sibille, 2006] L. Sibille. Modélisation discrète de la rupture dans les matériaux granulaires. Thèse de doctorat de L'Institut National Polytechnique de Grenoble, 2006.
- [Sibille et al., 2007] L. Sibille, F. Nicot, F.-V. Donzé and F. Darve. Material instability in granular assemblies from fundamentally different models. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.31: 457-481. 2007.
- [Silbert et al., 2002] L.-E. Silbert, G.-S. Grest, J.-W. Landry. Statistics of the contact

network in frictional and frictionless granular packings, *Physics Review E*, Vol. 66: 1-9, 2002.

[Sirieys, 1994] P. Sirieys. Dilatance-Contractance des milieux pulvérulents : déformation d'un milieu analogique, *Revue Française de Géotechnique*, Vol. 67 : 33-38, 1994.

[Sitharam, 1999] T.-G. Sitharam. Micromechanical modeling of granular materials: effect of confining pressure on mechanical behaviour, *Mechanics in Materials*. Vol. 31: 653-665, 1999.

[Sitharam et al., 2002] T.-G. Sitharam, S.-V. Dinesh, N. Shimizu. Micromechanical modelling of monotonic drained and undrained shear behaviour of granular media using three-dimensional DEM. *International Journal for numerical and analytical Methods in Geomechanics*. Vol. 26(12): 1167-1189, 2002.

[Skempton, 1981] A.-W. Skempton. Les premiers temps de la mécanique des sols. *Revue Française de Géotechnique*, Vol.15 : 5-16, 1981.

[Skinner, 1969] A.-E. Skinner. A note on the influence of interparticle friction on the shearing strength of a random assembly of spherical particles, *Géotechnique*, Vol.19(1) :150-157, 1969.

[Sladen et al., 1985] J.-A. Sladen, R.-D. D'Hollander, J. Krahn. Back analysis of the nerlerk berm liquefaction slides, *Canadian Geotechnical Journal*, Vol.22(4): 579-588, 1985.

[Soulie, 2005] F. Soulie. Cohésion par capillarité et comportement mécanique de milieux granulaires. Thèse de Doctorat de l'Université Montpellier 2, 2005.

[Suiker et Fleck, 2004] A.-S.J. Suiker and N.-A. Fleck. Frictional collapse of granular assemblies, *Journal for Applied Mechanics*, Vol.71: 350-358, 2004.

T [Taboada et al., 2005] A. Taboada, K.-J. Chang, F. Radjai, and F. Bouchette. Rheology, force transmission, and shear instabilities in frictional granular media from biaxial numerical tests using the contact dynamics method. *Journal of Geophysical Research*, Vol. 110(9): B09202, 2005.

[Tatsuoka et Ishihara, 1974] F. Tatsuoka and K. Ishihara. Yielding of sand in triaxial compression. *Soils and Foundations*, Vol. 14(2): 63-76, 1974.

[Thornton, 1993] C. Thornton and G. Sun. Axisymmetric compression of 3d polydisperse systems of shperes. In C. Thornton, editor, *Powders and Grains*, 2nd. *International Conference on Micromechanics of Granular Media*, Aston, 129-134. A.A. Balkema, 1993.

[Thornton, 2000] C. Thornton. Numerical simulations of deviatoric shear deformation of granular media, *Géotechnique*, Vol. 50 (1): 43-53, 2000.

[Thornton et Antony, 2000] C. Thornton and S.-J. Antony. Quasi-static shear

deformation of a soft particle system. *Powder Technology*, Vol.109: 179-191, 2000.

[**Tordesillas et al., 2004**] A.Tordesillas, J. Peters, M. Muthuswamy. Role of particle rotations and rolling resistance in a semi-infinite particulate solid indented by a rigid flat punch, *In ANZIAM Journal.*, 46, 2004.

[**Toth, 1967**] T. Tram and A. Journel. Ground water in sedimentary (elastic rocks), *In Symposium on Groundwater Hydrology*, San Francisco, California, Nov 6-8 1967.

U

V

[**Valanis, 1985**] K.-C. Valanis. On the Uniqueness of Solution of the Initial Value Problem in Softening Materials, *International Journal of Applied Mechanics*, Vol. 52(3): 649-653, 1985.

[**Vanel, 1999**] L. Vanel, D. Howell, D. Clark, R.-P. Behringer and E. Clément. Memories in sand: Experimental tests of construction history on stress distributions under sandpiles, *Physics Review*. E. 60; 1999.

[**Vardoulakis et Sulem, 1995**] I. Vardoulakis and J. Sulem. Bifurcation analysis in Geomechanics. Chapman & Hall, 1995.

[**Viggiani, 2000**] G. Viggiani and C. Tamagnini. Ground movements around excavations in granular soils: a few remarks on the influence of the constitutive assumptions on FE predictions. *Mechanical of Cohesive-Frictional Materials*, Vol. 5(5): 399-423, 2000.

W

[**Walton et Braun, 1986**] O.-R. Walton and R.-L. Braun. Viscosity, granular temperature, and stress calculations for shearing assemblies of inelastic, frictional disks. *Journal of Rheology*, Vol. 30(5): 949-980, 1986.

[**Wan, 2004**] R.-G. Wan, Al-Mamun. Micromechanical investigation of a 2-D granular material with respect to structure evolution and loading paths. *Numerical Model in Geomechanics – NUMOG IX – Pande & Pietruszczak(eds.) 2004* Taylor & Francis Group, London, ISBN 90 5809 6 36X.

[**Weber, 1966**] J. Weber. Recherches concernant les contraintes intergranulaires dans les milieux pulvérulents : Application aux lois de similitude dans les études aux modèles réduits de problèmes de mécanique des sols pulvérulents. *Bullutin de Liaison des Ponts et Chaussées*. N° 20 – Juil.-Aout 1966 – ref. 337.

[**Whittle, 1993**] A. -J. Whittle, Y.-M. A. Hashash, R.-V. Whitman. Analysis of deep excavation in Boston. *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol. 119(1): 69-90, 1993.

[**Wood, 1990**] D.-M. Wood. Soil behaviour and critical state soil mechanics, Cambridge University Press, 1990.

X

- Y** [Yade, 2006] <http://yade.wikia.com/wiki/Yade>.
- Z** [Zang et whiten, 1998] D. Zhang, W.-J. Whiten. Contact modelling for discrete element modelling of ball mills. *Minerals Engineering (UK)*. Vol. 11(8): 689-698, 1998.
- [Zhang et al., 1997] Z.-P. Zhang, A.-B. Yu, J.-A. Dodds. Analyse of the pore characteristics of mixtures of disks. *Journal of Colloid and Interface Science*, Vol. 195: 8-18, 1997.
- [Zhou et al., 1999] Y.-C. Zhou, B.-D. Wright, R.-Y. Yang, B.-H. Xu, and A.-B. Yu. Rolling friction in the dynamic simulation of sandpile formation. *Physica A*, 269(2) :536–553, 1999. M. Oda and K. Iwashita. Study on couple stress and shear band development in granular media based on numerical simulation analyses. *International Journal of Engineering Science*, Vol. 38(15) :1713–1740, 2000.
- [Zhou et al., 2001] Y.-C. Zhou, B.-H. Xu, A.-B. Yu, and P. Zulli. Numerical investigation of the angle of repose of monosized spheres. *Physics Review. E*, 64 :021301, 2001.
- [Zhou et al., 2002] Y. C. Zhou, B. H. Xu, A. B. Yu, and P Zulli. An experimental and numerical study of the angle of repose of coarse spheres. *Powder Technology*, Vol. 125(1): 45-54, 2002.
- [Zhu et al., 1996] Y. Zhu, A. Shukla, M.-H. Saad. The effect of microstructural fabric on dynamic load transfer in two dimensional assemblies of elliptical particles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 44(8): 1283-1303, 1996.
- [Zhu, 2002] W. Zhu. poster. *Gordon conference on Rock deformation*, 2002

Numerical simulation of drained triaxial test using 3D discrete element modeling

N. Belheine^{a,b,c}, J.-P. Plassiard^c, F.-V. Donzé^{c,*}, F. Darve^c, A. Seridi^d

^a *Laboratoire de Genie Civil et d'Hydraulique, Université de Guelma, Algeria*

^b *Laboratoire de Genie Civil et d'Hydraulique, Université de Skikda, Algeria*

^c *Laboratoire Sols, Solides, Structures et Risques (3S-R), UMR5521, Université Joseph Fourier, Grenoble Université, Domaine Universitaire, BP 53, 38041 Grenoble Cedex 9, France*

^d *Laboratoire de Mécanique des Solides et Systèmes (LM2S), Université M Hamed Bougara de Boumerdes, Algeria*

Received 18 December 2006; received in revised form 19 November 2007; accepted 8 February 2008

Available online 18 April 2008

Abstract

A discrete element modeling of granular material was carried out using a 3D spherical discrete model with a rolling resistance, in order to take into account the roughness of grains. The numerical model of Labenne sand was generated, and the desired porosity was obtained by a radius expansion method. Using numerical triaxial tests the micro-mechanical properties of the numerical material were calibrated in order to match the macroscopic response of the real material. Numerical simulations were carried out under the same conditions as the physical experiments (porosity, boundary conditions and loading). The pre-peak, peak and post-peak behavior of the numerical material was studied. The calibration procedure revealed that the peak stress of the sand sample does not only depend on local friction parameters but also on the rolling resistance. The larger the value of the applied rolling resistance, the higher the resulting stress peak. Furthermore, the deformational response depends strongly on local friction. The numerical results are quantitatively in agreement with the laboratory test results.

© 2008 Elsevier Ltd. All rights reserved.

Keywords: Discrete element model; Granular material; Triaxial test; Rolling resistance; Micro-mechanics

1. Introduction

A continuum assumption is generally used to investigate many complex engineering problems, for example, building foundations, excavations, retaining walls, tunnels, slope stability problem.

Refined constitutive models and those based on the continuum assumption have proven to be powerful tools to describe the critical states for soils [1,2]. These models, which are primarily concerned with mathematical modeling of the observed phenomena at the macroscopic scale, do not represent the local discontinuous nature of the material. However, this discontinuous nature plays a major role in the behavior of granular materials. This induces spe-

cial features such as anisotropy, micro-fractures or local instabilities, which are difficult to understand or model based on the principles of continuum mechanics.

An alternative approach is the discrete element method which considers the discrete nature of soils and provides new insight into constitutive modeling. In it, the physical processes which govern the constitutive behavior can be understood more rigorously starting with the behavior at the scale of a grain [2]. Using this approach, the macro-mechanical response of the physical material (deformability, strength, dilatancy, strain localization and other) is reproduced by determining the micro-properties of the material (normal, tangential and rolling stiffness, local friction and non-dimensional plastic coefficient of the contacts). The discrete element method has proven to be a very useful tool to obtain complete qualitative information on microscopic features of assemblies of particles [3].

* Corresponding author. Tel.: +33 4 76 82 70 55; fax: +33 4 76 82 70 00.
E-mail address: donze@geo.hmg.inpg.fr (F.-V. Donzé).

The objective of this study is to show how well a numerical model based on a local discontinuous description, can reproduce the macro behavior of a granular material in a quantitative manner. To do so, the discrete element method (DEM), which is widely used to simulate the behavior of a large range of geomaterials, has been chosen. Note that, most of the previous studies using DEM models led to restrictive qualitative results. Here, a simple DEM formulation is used to perform quantitative triaxial test simulations, although recent investigations have shown the importance of rolling in the deformation process [4,5]. These simulations are compared with a series of axisymmetric triaxial laboratory tests performed on Labenne sand [6–8].

To reproduce the behavior of material at a macro level as a global response, a mechanical model of Labenne sand was generated. To calibrate the micro-properties of the numerical sand medium according to the Labenne sand laboratory tests, a numerical testing procedure for the drained triaxial tests was used. This calibration procedure is a crucial issue.

The five main input micro-parameters in the numerical model are: the normal contact stiffness, tangential contact stiffness, rolling contact stiffness, local friction and a dimensionless coefficient which controls the plastic limit of rolling. Several parametric studies were done to evaluate the influence of each of the above parameters on the output macro parameters such as Poisson's ratio, Young's modulus, the dilatancy angle, the peak and the post-peak strength. It was found that the elastic response is mainly governed by the normal contact stiffness and the ratio of shear to normal contact stiffnesses. Secondly, a coupled effect was found between the local friction, the rolling stiffness on the peak stress and a plastic moment on the post-peak stress of the sand. In addition, the observed deformation depends strongly on local friction.

2. Discrete element method with Moment Transfer Law

2.1. Basic features

To keep a low calculation cost while using spherical discrete elements, the local constitutive law of classical DEM [9–11] is modified by introducing an additional component at each point of contact through which rolling resistance can be supplied. This is referred to MTL as the “Moment Transfer Law” [12].

By rolling resistance we mean that a couple may be transferred between the discrete elements via the contacts, and this couple resists particle rotations. The rolling which occurs during shear displacement is decreased and a more reasonable value of the friction angle is obtained [13].

Using a rolling resistance between spherical discrete elements is justified since real grains are generally not spherical and may exhibit a rough surface texture, which can be covered with a thin film of weathered products [13,14]. In this case, grains are in contact with their neighbors through

a contact surface, and not a single point, so that rolling resistance can play a major role on the contact behavior of the granular material.

The two dimensional simulations by Iwashita and Oda [13,15,16] have shown the importance of rolling resistance in granular mechanics. A three dimensional extension, largely inspired by the formulation presented in [13,15,16], was established in the SDEC code [11,12,17]. Note that SDEC is a code based on the discrete element method, using a force–displacement approach, Newton's second law of motion describes the motion of each element as the sum of all forces applied on this element. The dynamic behavior of the system is solved numerically by a time algorithm in which the velocities and the accelerations are constant at each time step. The system evolves and an explicit finite difference algorithm is used to reproduce this evolution.

2.2. The discrete model using MTL

2.2.1. Kinematics in contact

Let us consider two rigid spheres with A and B as their centers, incrementally loaded under strain state as shown in Fig. 1. Let x_A and x_B denote the position vectors of the centers in the global set of axes G , while their rotations are given by ω_A and ω_B . Their rotation velocities are $\dot{\omega}_A$ and $\dot{\omega}_B$ and $d\omega_A$ and $d\omega_B$ denote the incremental rotations (in radians) which take place during the incremental deformation from t to $t + dt$. During a time step, the two spheres with radii r_A and r_B , are assumed to remain in contact. Let n and n' be two unit vectors at time t and $t + dt$ which are normal to the common surface at contact point C and C' , respectively. The new position of the centers A' and B' are defined by the vectors x'_A and x'_B .

The relative rolling between the two spheres can be described when the incremental rotation and the sliding components are identified. From that, the incremental displacement vector, denoted dU_r , can be expressed in terms of the relative position. Pure sliding occurs without any particle rotation if the components of incremental rotation are equal to zero. Pure rolling occurs at the contact if the relative sliding is equal to zero, and the two spheres have an opposite rotation velocity. In both cases, it is assumed that the two spheres have the same radius ($r_A = r_B$). Generally, $r_A \approx r_B$, so it is reasonable to consider that dU_r is used to define the rolling part. Physically it is associated to energy dissipation as defined in classical continuum mechanics [13].

2.2.2. Angular vector of the rolling at the contact

Using a rolling component dU_r and an average radius r , it is convenient to define a relative particle rotation denoted $d\theta_r$, as follows:

$$d\theta_r = \frac{dU_r}{r} n_{d\theta_r}, \quad (1)$$

where $n_{d\theta_r}$ is the vector oriented along $d\theta_r$ and r is the average radius calculated by

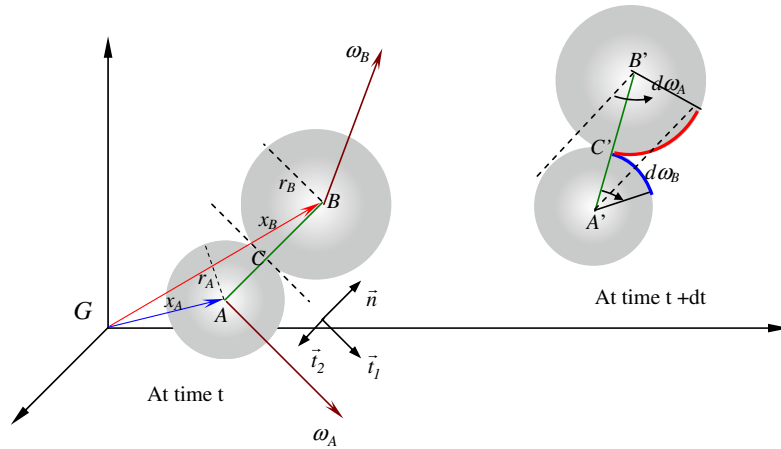


Fig. 1. Kinematics of spheres in contact at time t and $t + dt$.

$$r = \frac{r_A + r_B}{2}, \quad (2)$$

The angular vector of the rolling part can be defined by summing of the angular vector of incremental rolling, as follows:

$$\theta_r = \sum d\theta_r. \quad (3)$$

Since all equations are expressed in the global set of axes G , let θ_r^L denote the angular vector of the rolling part in the local reference L . Its origin is the contact point between two spheres. Its axes are the normal vector n , and two perpendicular vectors t_1, t_2 which are in the contact plane

$$\theta_r^L = [m_{G \perp L}] \cdot \theta_r, \quad (4)$$

where $[m_{G \perp L}]$ represents the matrix transformation between the local and the global set of axes.

2.2.3. Physical model with rolling resistance

The interaction force vector F which represents the action of element A on element B may be decomposed into a normal and a shear vector F_n and F_t , respectively, see Fig. 2, which may be classically linked to relative displacements, through normal and tangential stiffnesses, K_n and K_s

$$F_n = K_n \cdot U_n, \quad \Delta F_t = K_s \cdot dU_s, \quad (5a, b)$$

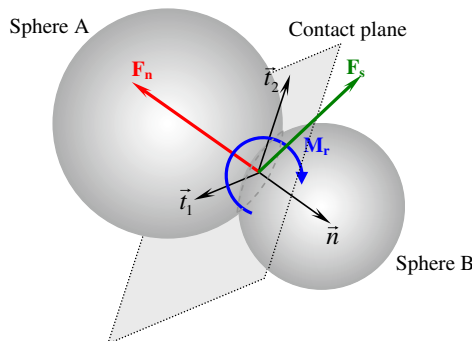


Fig. 2. Two spheres in contact at time t .

where U_n is the relative normal displacement between two elements and dU_s is the incremental tangential displacement.

Let K_n and K_s be the resultant normal and tangential stiffnesses, respectively. In this paper, we will use a linear model. The stiffnesses of two elements in contact are connected in series, therefore K_n and K_s are defined by the following equations:

$$K_n = \frac{\left(\frac{k_n^A \cdot k_n^B}{k_n^A + k_n^B} \right)}{r} \quad \text{and} \quad K_s = \frac{\left(\frac{k_s^A \cdot k_s^B}{k_s^A + k_s^B} \right)}{r}, \quad (6a, b)$$

where indexes $[A]$ and $[B]$ represent the two elements in contact.

The shear process starts working at the contact point, where F_n and F_t satisfy the following inequality:

$$F_t \geq F_n \cdot \tan \mu, \quad (7)$$

where μ is the internal friction angle.

The rolling resistance is defined by the component acting in the contact plane. On the one hand, the elastic moment M_{elastic}^L resulting from the rolling part in the local set of axes is written as

$$M_{\text{elastic}}^L = k_r \cdot \theta_r^L, \quad (8)$$

where k_r is the rolling stiffness. Its value is obtained by assuming that for small displacements [13], $dU_r \cong dU_s$, which leads to

$$k_r = \beta \cdot K_s \cdot r^2, \quad (9)$$

where β is a dimensionless coefficient used for the rolling stiffness.

On the other hand, if $\|F_n\|$ represents the norm of the normal force, the elastic limit is controlled by the plastic moment vector M_{plastic}^L such that

$$M_{\text{plastic}}^L = \eta \cdot r \cdot \|F_n\|, \quad (10)$$

where η is a dimensionless coefficient used for the plastic moment.

If the elastic limit is reached, the angular rolling vector θ_r has to be recomputed. Its value is determined by

$$\theta_r^L = \frac{M_{plastic}^L}{k_r}. \tag{11}$$

Then the rolling moment M_r , in the global set of axes is defined by the minimal norm of the two moments given by Eqs. (8) and (9), such that

$$M_r = [m_{L-G}] \min \left(\|M_{elastic}^L\|; \|M_{plastic}^L\| \right) \frac{M_{elastic}^L}{\|M_{elastic}^L\|}, \tag{12}$$

where $[m_{L-G}]$ represents the matrix transformation between the local and the global set of axes.

The MTL is summarized here as follows:

If $\|M_{elastic}^L\| < \|M_{plastic}^L\|$: $M_r = [m_{L-G}]M_{elastic}^L$ and $\theta_r^L = \frac{M_{elastic}^L}{k_r}$, (13)

If $\|M_{elastic}^L\| \geq \|M_{plastic}^L\|$: $M_r = [m_{L-G}] \|M_{plastic}^L\| \frac{M_{elastic}^L}{\|M_{elastic}^L\|}$ and $\theta_r^L = \frac{M_{plastic}^L}{k_r}$. (14)

2.3. Mechanical contact model with rolling resistance

Based on the physical model given in the above section, a complete mechanical model is composed of normal, tangential and rolling contact components, as shown in Fig. 3. These three components are similar in principle. They are

all made of a spring to account for the elastic behavior of the contact. In addition, the normal contact model includes a divider to simulate the fact that no force is transmitted when the grains are separated. The tangential contact model includes on the other hand, a slider to provide the contact shear resistance controlled by a Mohr–Coulomb criterion. Finally, the rolling contact model includes a roller that represents the contact rolling resistance described by Eq. (8). Fig. 4 displays the mechanical response of the normal, tangential and rolling contact models.

The rolling contact model is characterized by the rolling stiffness k_r and consists of an initial linear part controlled by Eq. (8) followed by a constant value defined by

$\eta \cdot r \cdot \|F_n\|$, where η is the plastic moment coefficient [18]. This model is an approximation of the rolling resistance model, and exhibits elastic–plastic behavior with a failure criterion similar to the Mohr–coulomb criterion. The proposed rolling contact model is shown in Fig. 3.

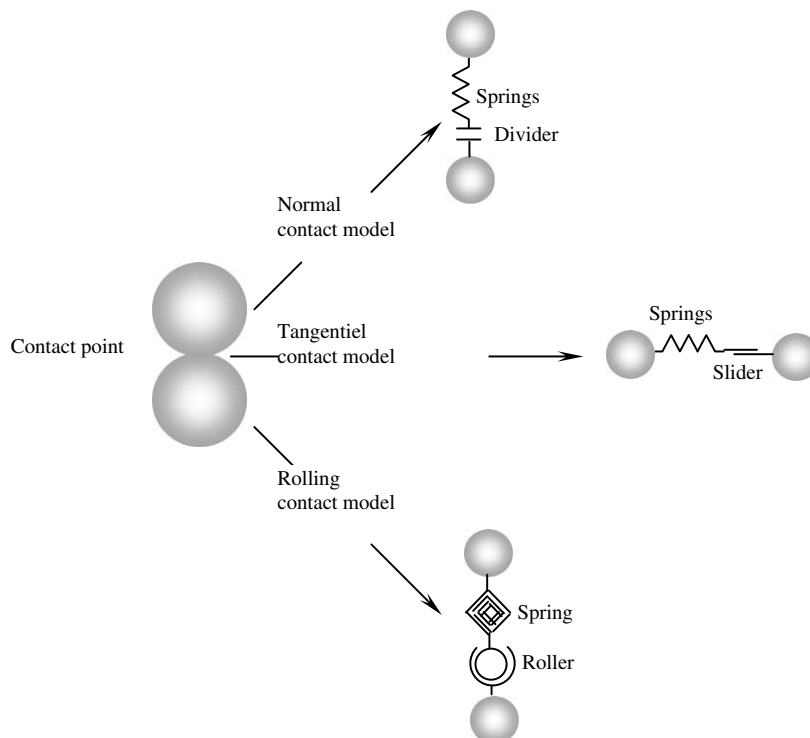


Fig. 3. Contact model in the DEM with MTL.

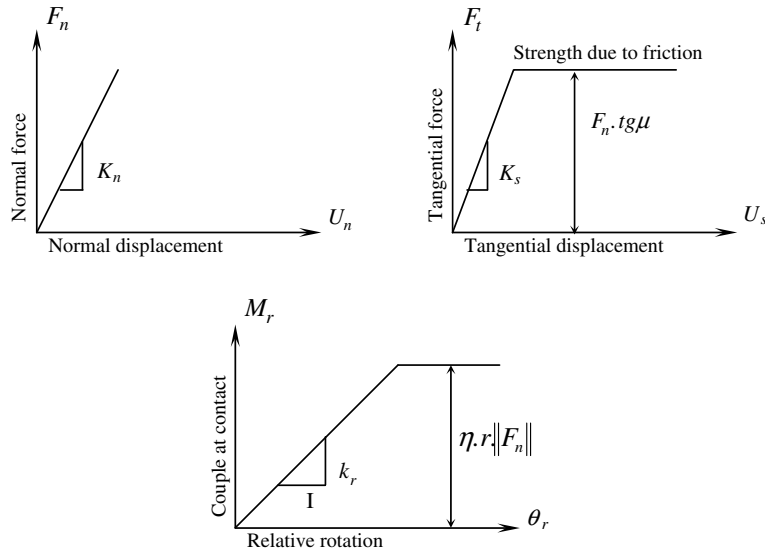


Fig. 4. Mechanical response of the contact models: (a) normal contact model; (b) tangential contact model; and (c) rolling contact model.

3. Failure criterion used in the model

3.1. Pre and post failure

Once initial interactions disappear, new ones are identified: they are merely contact interactions, and cannot undergo any tension force. A classical Coulomb criterion is then used, with a contact friction angle μ_c . Note that tensile strength can also be used in this model but in the present study only frictional contact interactions are considered.

Fig. 5 summarizes the failure criteria used in the model.

4. Law of motion with rolling resistance

In our model, a grain contact is composed of the normal and shear components, but only the normal component contributes to the rolling resistance. It is clear that rolling resistance (couple) does not affect the translational motions of grains but does affect the angular motion. The movement of an element is determined by the resulting force and moment applied to the element. For an element A with

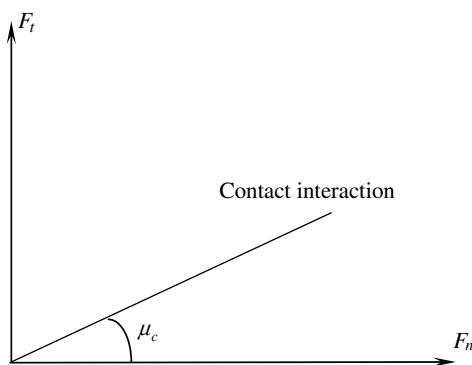


Fig. 5. Failure criteria used in the model.

radius r_A , the contact forces $F_n^{(k)}$, $F_t^{(k)}$ and couple $M^{(k)}$ are summed over p neighbors, which govern the motion of the element in the translational direction and in its rotation about the center mass

$$\ddot{x}_i^A = \frac{1}{m^A} \sum_{k=1}^p F_i^{(k)}, \quad \ddot{\theta}^A = \frac{1}{I^A} \left(\sum_{k=1}^p r^A F_t^{(k)} + \sum_k M^{(k)} \right),$$

where $F_i^{(k)}$ are the components of the resultant force at contact k and $i = 1, 2, 3$, represent directions.

5. Calibration parameters

Among currently used techniques, the discrete element method is extensively used to study the behavior of numerical material, under the perfectly controlled conditions of the numerical experiment. The calibration of the properties of the numerical material – i.e. by the assembly of particles – to the properties of a real geo-material is conveniently done by comparing real and simulated triaxial tests. To do this, an axisymmetric triaxial procedure has been established which is described in the following section. This procedure allows us firstly to estimate the values of the microscopic parameters k_n , $\alpha = \frac{k_s}{k_n}$, μ , β and η and subsequently to reproduce, respectively, the macroscopic behavior characterized by Young's modulus E , the Poisson's ration ν , the dilatancy angle ψ , the peak and the post-peak normal stress σ . These characteristics are the features of the stress–strain curves deduced from the axisymmetric triaxial tests. From a macroscopic point of view, the behavior of a system of particles in the numerical axisymmetric triaxial tests may be treated as the macroscopic behavior of three dimensional continua. In general; see Fig. 6:

- The initial slope of the volumetric strain lets us determine Poisson's ratio ν .

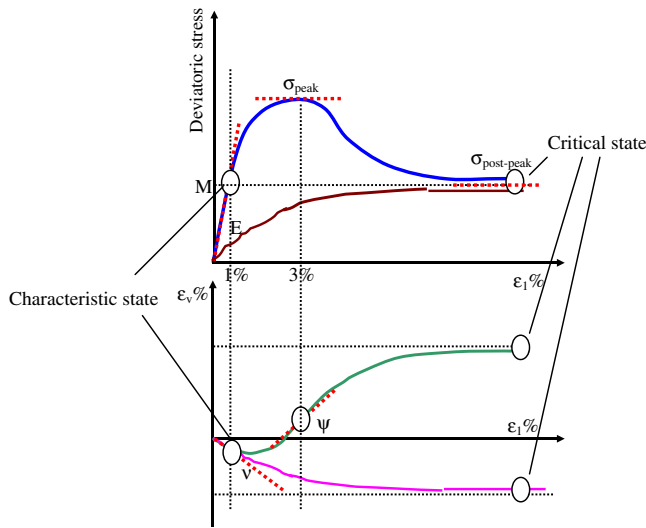


Fig. 6. Typical behavior obtained with triaxial tests.

- The initial slope of the stress–strain diagram is related to Young’s modulus E and the complete set of material properties can be extracted directly from the simulation.
- The slope of the volumetric strain curve in the dilatancy regime is related to the dilatancy angle ψ .
- The characteristic state corresponds to the minimum volume.
- The deformation at which the stress is maximum σ_{peak} must also correspond to the maximum dilatancy, which corresponds to the inflection point where the material starts to show mechanical instabilities [19].

6. Calibration methodology

During the calibration procedure, the microscopic parameters that were introduced in the model ($k_n, \alpha = \frac{k_s}{k_n}, \mu, \beta$ and η) were selected by comparing the experimental results with the numerical ones. However, some of the parameters can have a cross effect on the macroscopic ones (for example β and μ on the maximum σ_{peak}). Thus, a calibration methodology is proposed to overcome this cross dependency. This methodology is

- The normal contact stiffness k_n and the ratio $\alpha = \frac{k_s}{k_n}$ were varied to match the deformation modulus and Poisson’s ratio of the real material while all other parameters of the test were kept constant. It is worth noting that contact stiffness has a significant effect on the deformation characteristics. Young’s modulus and the Poisson’s ratio were determined from an initial small loading with a maximum axial strain of 1%.
- Using the same assembly, a series of simulation tests were carried out with the appropriate elastic local parameters. The inter-particle friction angle μ was varied to adjust the dilatancy curve to that of the real material, while all other parameters were kept constant.

After the adjustment of the dilatancy curve (dilatancy angle) by the inter-particle friction, a check on the validity of the stress–strain curve was carried out by varying the rolling stiffness coefficient and the plastic moment coefficient. The first parameter controls the stress–strain curve in the domain located at the peak and the second more specifically modifies the post-peak phase. Furthermore, it allows us to correct the macroscopic angle of friction in the peak and post-peak regime. It is worth noting that the rolling stiffness coefficient and the plastic moment coefficient have little influence on the dilatancy curve.

7. Application example: Experimental data of Labenne sand

In the calibration phase, the numerical modeling has been performed simulating Labenne medium sand to compare the numerical results with experimental ones. This Labenne’s sand has been studied intensively by others [20,21]. It is a homogeneous rounded dune sand. According to the triaxial tests [6–8], the physical properties of the sand are given in Table 1. Results with fairly dense samples ($\rho = 16.6 \text{ kN/m}^3$) for different confining pressures (σ_3) are shown in Fig. 7.

Based on the experimental results, the stress–strain behavior of this sand is highly non-linear. The results indicate that the initial deformation modulus increases with increasing cell pressure; see Table 1. Another distinct feature of the Labenne sand is that as sample loading begins, initial compaction takes place, followed in the pre-peak regime, by dilatancy.

8. DEM model simulating the compression triaxial tests

8.1. The geometrical model

To prepare sphere packing [22], numerous methods exist [23,24]. Here, the radii expansion method, based on a Weibull distribution was applied. The only case where the radii can be reduced is when overlapping exists at the very end of the growing process. With it, the desired porosity which corresponds to the porosity of the real specimen $n = 0.40$ was reached. The assembly representing the numerical model of Labenne sand consisted of 10,648 particles with different radii of 0.043–0.175 m (see Fig. 8b) and sample

Table 1
Macroscopic parameters values of the Labenne medium sand for each test [6–8]

Parameters	Tests		
	100 kPa	200 kPa	300 kPa
Initial porosity (%)	0.3684	0.3676	0.3653
Initial densities (kN/m^3)	16.61	16.63	16.69
Young’s modulus E (MPa)	63.90	95.60	120.30
Poisson’s ratio ν	0.28	0.27	0.38
Friction angle φ (°)	35.56	35.30	34.50
Dilatancy angle ψ (°)	11.096	10.92	11.81

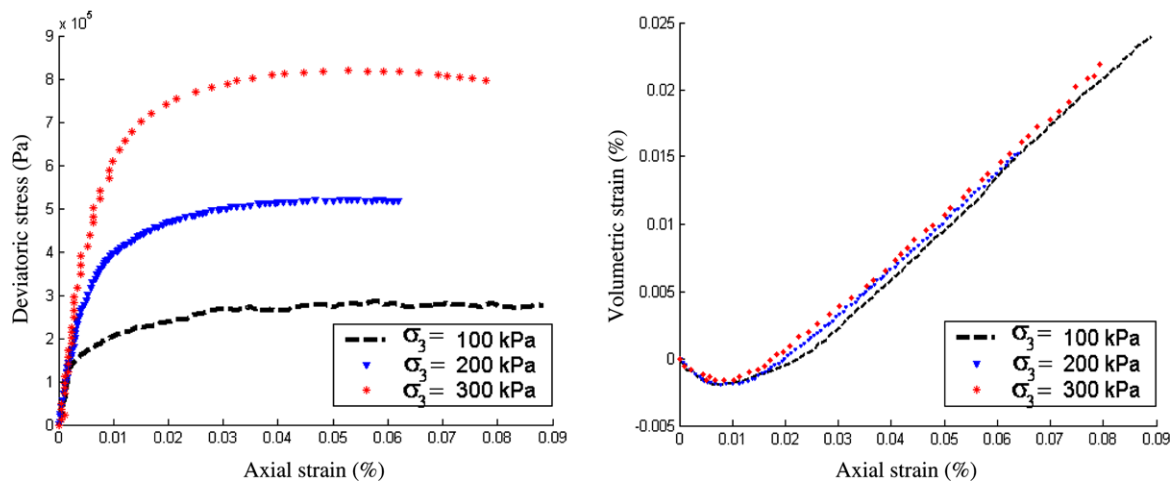


Fig. 7. Experimental triaxial test results for Labenne medium sand [6–8].

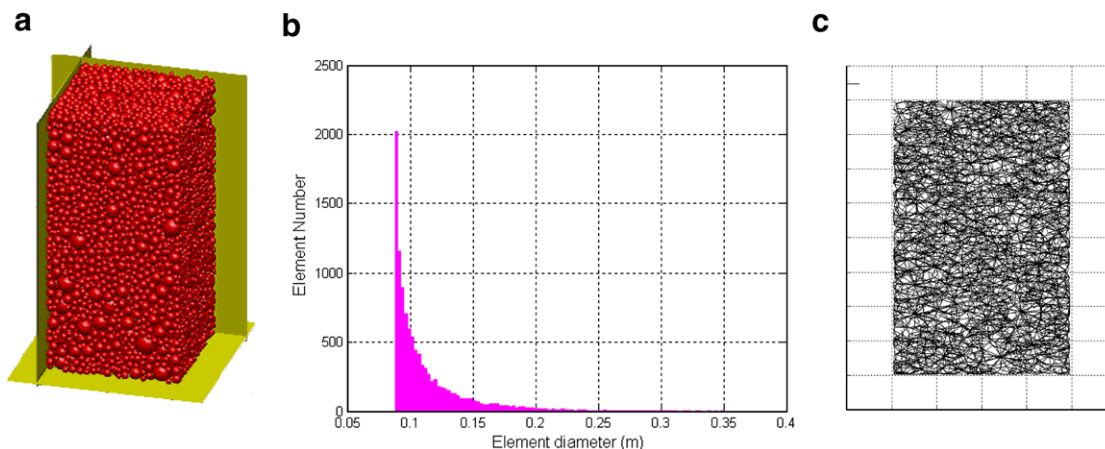


Fig. 8. (a) Numerical specimen, (b) distribution size of numerical specimen, and (c) normal force distribution.

size of ($H = 4$ m and $D = 2$ m). Note that, as long as the sample's slenderness is equal to 2.0, which is similar to the typical geometric ratio used in experiments [20], the model's results do not depend on the discrete element's characteristic's size since the local parameters, intrinsically, take it into account. It has been checked that the homothetic modification of the model has no influence on the numerical results. During the generation of the assembly only the normal and shear stiffnesses and the initial density are used. In Fig. 8 the sample of the virtual material, the diagram of size distribution and the normal force distribution are shown.

It is important to check the existence of a possible anisotropy in the orientations of the contacts due to the mode of sample preparation. It is anticipated that angles of 0° and 90° are privileged orientations directly as a result of the directions of compression. In Fig. 9 the orientation of the contacts are presented. Roux and Combe [25] showed that there is a privileged direction of the contact forces according to their intensity. This anisotropy due to the intensity of inter-granular forces occurs during the application of the deviatoric stress. Although the mechanical load-

ing is isotropic, we will check that the procedure does not lead to a privileged contact orientation in the direction of motion.

With the histogram of the contact orientation, shown in Fig. 9, we can see that the contacts are homogeneously distributed in all directions.

8.2. Modeling procedure

After the preparation phase, new micro-mechanical properties were introduced in the model. The triaxial test was modeled by confining the medium within six smooth walls. The isotropic compression took place under gravity-free conditions, so that the particle arrangement was considered to be almost isotropic, see Fig. 8c. The top and bottom boundaries moved vertically as loading platens, either under force-controlled condition or under strain-controlled conditions. The lateral ones simulate the confining pressure experienced by the sample sides. In our simulation, the sample is loaded in a strain-controlled mode by specifying the velocities of the top and the bottom walls. To this end, it can be noted that as the walls are fric-

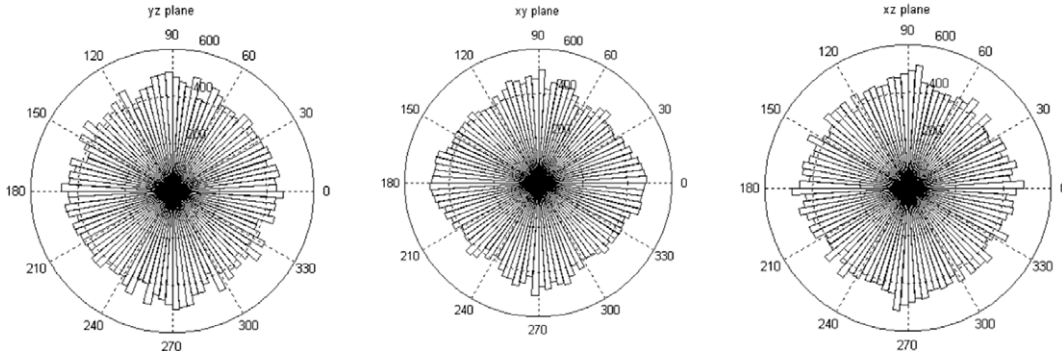


Fig. 9. Distribution of the contact orientation, prior to applying deviatoric loading.

tionless, thus any friction between the sample and the loading platens is avoided, hence allowing the wall applied stresses to remain normal to each wall [26].

During all the steps of the test, displacements of the lateral walls are controlled automatically by a servo mechanism [27] that maintains a constant confining stress within the sample. According to the given boundary conditions, the stress and strain states within the sample are assumed to be homogeneous. Strains are then calculated directly from wall displacements, while the corresponding

stresses are obtained from boundary forces, as in conventional laboratory testing, see Fig. 10.

8.3. Modeling results

During the numerical axisymmetric triaxial test the model parameters (normal contact stiffness k_n , ratio $\alpha = \frac{k_s}{k_n}$, inter-particle friction angle μ , rolling stiffness coefficient β and plastic moment coefficient η), were chosen by comparing the experimental results with the numerical ones. Laboratory tests are available under different confining pressures (100, 200 and 300 kPa). Several attempts were made to evaluate the influence of the input microscopic parameters on the deformation and the characteristic strength. Fig. 11 shows the relationship between the elastic macroscopic parameters (Young’s modulus E , Poisson’s ratio ν) and elastic microscopic parameters (normal contact stiffness k_n and ratio $\alpha = \frac{k_s}{k_n}$) for a confining pressure of 100 kPa. It can be seen that there is an almost linear relationship in the domain of interest firstly, between the normal contact stiffness and the Young’s modulus, and secondly, between the ratio $\alpha = \frac{k_s}{k_n}$ and the Poisson’s coefficient. The elastic region is mainly influenced by the elastic microscopic parameters. These values were chosen as

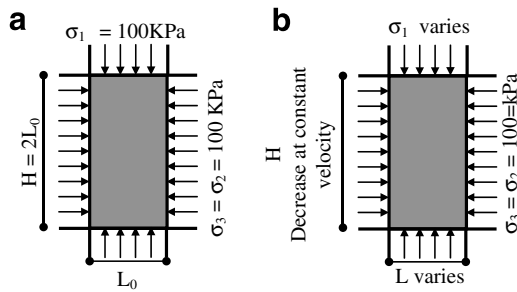


Fig. 10. Test procedure: (a) initial state and (b) triaxial test.

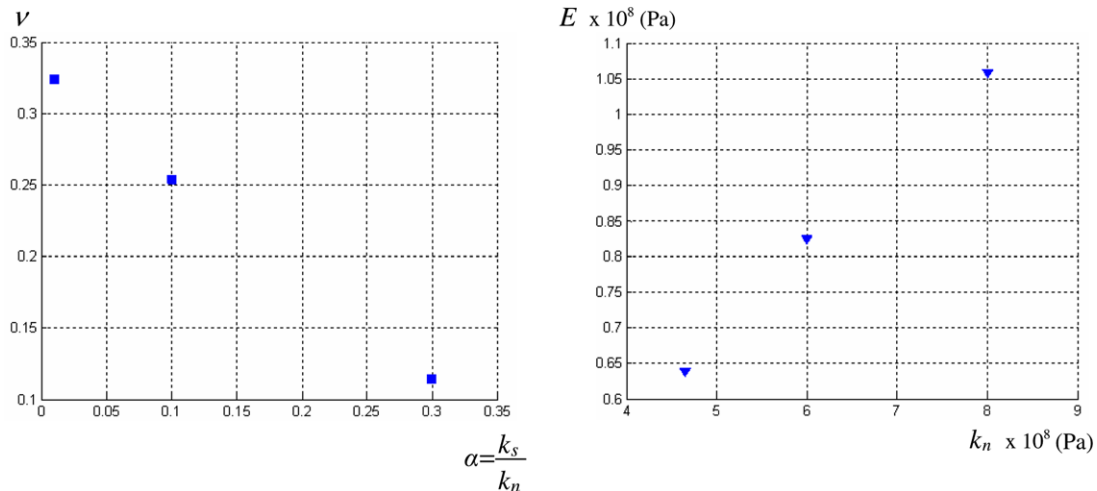


Fig. 11. Effect of local properties at particle contact on macro-properties of Labenne sand for a confining pressure of 100 kPa.

$k_n = 9.6 \times 10^8$ Pa and $\alpha = 0.04$ in order to match experimental results. Fig. 12 shows the numerical results obtained with the parameters reported in Table 2 for confining pressures of 100, 200 and 300 kPa. The results indicate that the non-linear stress–strain behavior of sand including dilatancy is covered by the numerical model. This means that the model is predictive.

The considerable influence of the inter-particle friction angle μ , and the small influence of the rolling stiffness coef-

Table 2

Values of the microscopic parameters of the discrete element model

Parameters	Mean value
Normal contact stiffness k_n (Pa)	9.6×10^8
Ratio $\alpha = \frac{k_s}{k_n}$	0.04
Inter-particle friction angle μ (°)	30.0
Rolling stiffness coefficient β	0.12
Plastic moment coefficient η	1.0

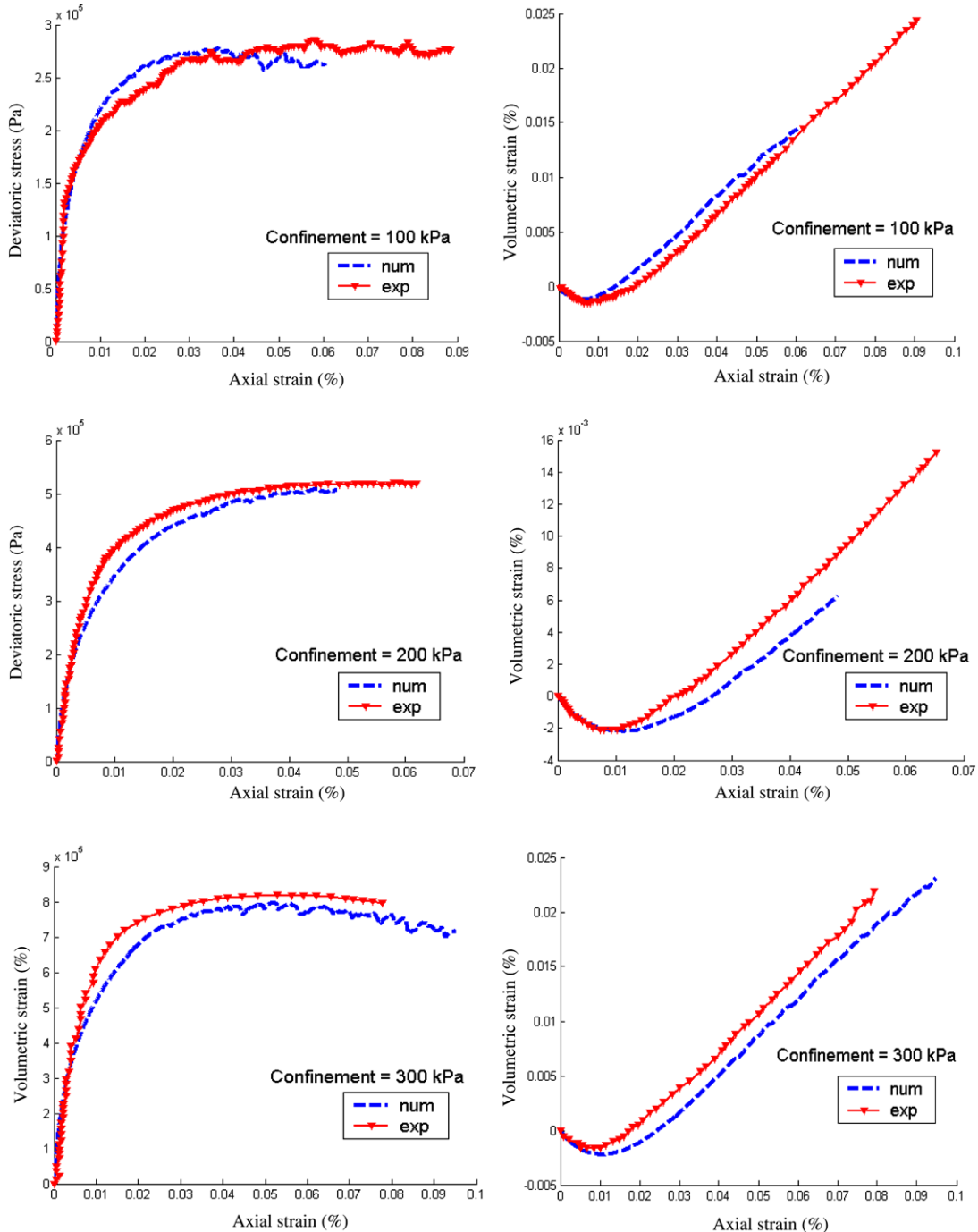


Fig. 12. Stress and volumetric strain plotted versus axial strain for the Labenne sand and numerical sample.

Table 3
Macroscopic parameters of the numerical medium sand for each test

Parameters	Tests		
	100 kPa	200 kPa	300 kPa
Young's modulus E (Mpa)	63.3	95.5	129.32
Poisson's ratio ν	0.289	0.274	0.363
Friction angle φ ($^\circ$)	35.43	34.01	34.71
Dilatancy angle ψ ($^\circ$)	11.2	10.91	11.03

efficient β and plastic moment coefficient η on the dilatancy curve should be noted. Furthermore, the peak strength not only depends on friction but also on the rolling stiffness coefficient β and the plastic moment coefficient η . The higher the value chosen, the higher the calculated peak strength. The best results were achieved with $\mu = 30^\circ$, $\beta = 0.12$, and $\eta = 1.0$. A further increase did not yield a better agreement with experimental results. With the first parameter the dilatancy curve is adjusted with the second and the last, the stress–strain curve in the peak and post-peak regimes are, respectively, controlled. Furthermore, the macroscopic friction angle to be corrected with the last two parameters.

Table 3 shows the macroscopic parameters for numerical medium sand. It is observed that the deformation mod-

ulus increases with increasing confining pressure, and it is very close to the experimental one. In Fig. 13a and b, the variation of the deformation modulus, Poisson's coefficient versus the confining pressure are plotted. The deformation modulus depends strongly on the confining pressure, unlike the Poisson's coefficient, which does not vary much with confinement. Fig. 13c and d gives the evolution of the macroscopic friction angle at the peak and the dilatancy angle versus confining pressure. The friction angle decreases with increasing confining pressure (100–200 kPa) by approximately 1.5° , then a slight increase for 300 kPa, which is a phenomenon also observed in physical samples. The same observation is noted for the dilatancy angle.

8.4. Mohr–Coulomb parameters

As an acceptable result of the calibration procedure, the numerical model of Labenne sand, Mohr-circles and the failure envelope constructed using series of triaxial test are presented in Fig. 14. The failure envelope is linear for the chosen parameters for peak and residual stresses, as often found for natural soils. Since no local cohesion has been used, the macroscopic failure envelope goes through the origin. This clearly shows the ability of the modified discrete model in reproducing the macroscopic Mohr–Cou-

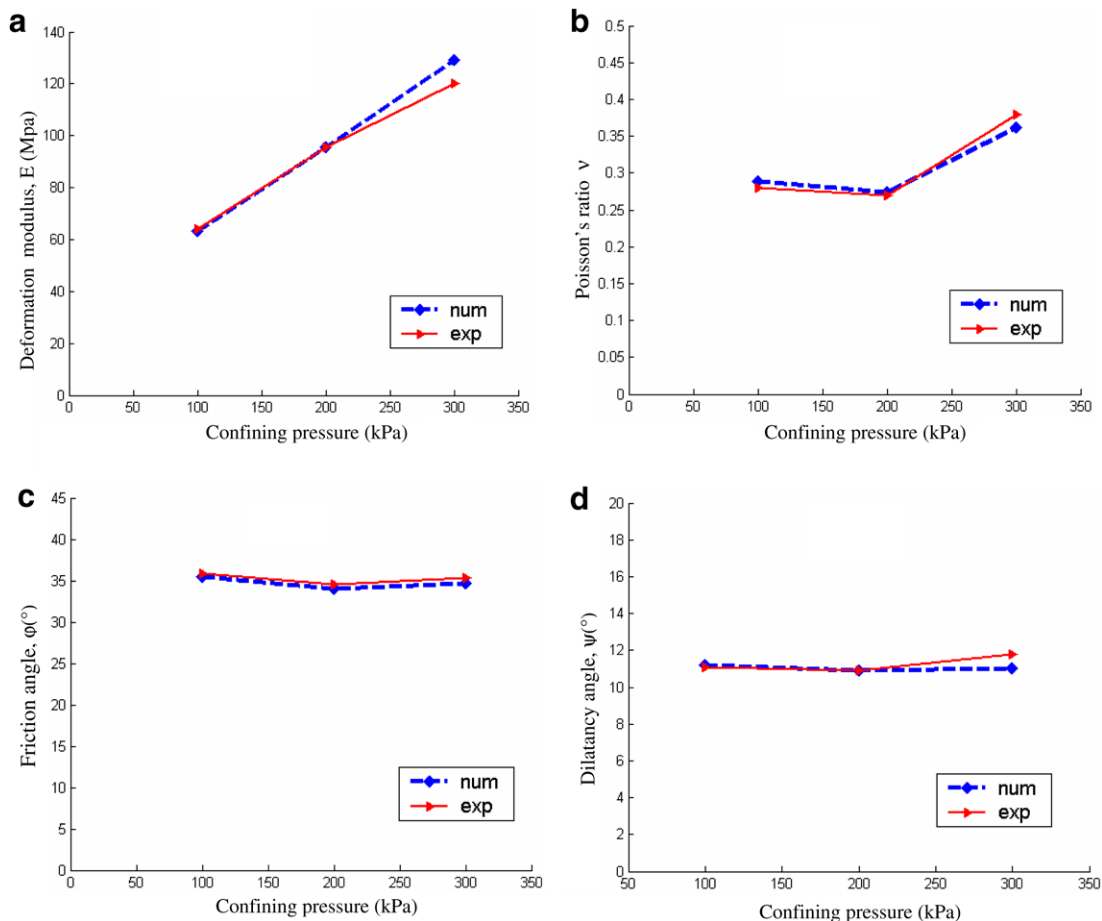


Fig. 13. Variation of: (a) deformation modulus, (b) Poisson's ratio, (c) friction angle, and (d) dilatancy angle, versus confining pressure.

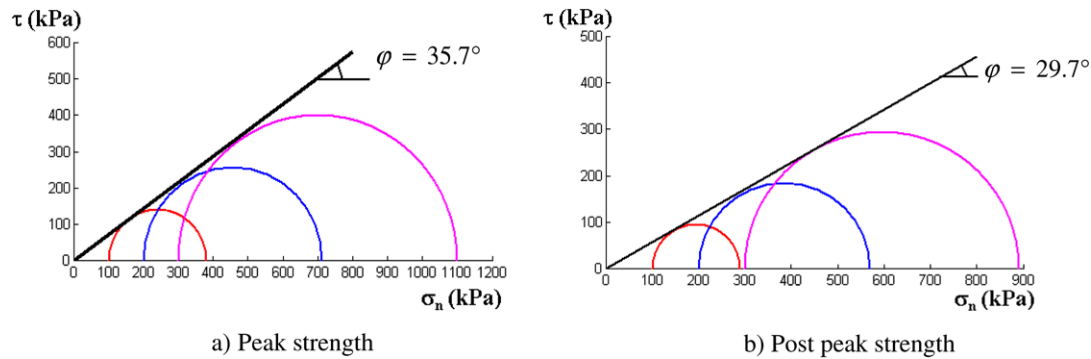


Fig. 14. Mohr circle representation of the numerical sand according to the results of triaxial test.

lomb criterion. The slope of the failure envelope gives a macroscopic friction angle. A maximum macroscopic friction angle of 35.7° (the angle of friction falls in the interval measured in physical tests) corresponds to a microscopic friction angle of 30° .

9. Discussion

The objective of the above calibration process was to create a numerical sand sample, which would reproduce the mechanical response of Labenne sand and could directly be used to solve the boundary problem under consideration. The calibration was carried out using triaxial (axisymmetric) laboratory test results. Simulations are done under the same test conditions as experiments (porosity, boundary condition and loading). Using the calibration methodology proposed in Section 6, we could calibrate the numerical model of Labenne sand. Several parametric studies were performed. The results presented in Fig. 12 are the results of this methodology. It is worth noting that the macroscopic response in the elastic region is mainly influenced by the elastic microscopic parameter. A coupled effect between the inter-particle friction angle, the rolling stiffness coefficient and the plastic moment coefficient on the peak and post-peak regime was also found. The inter-particle friction angle, μ governs the dilatancy curve. The rolling stiffness coefficient β and a plastic moment coefficient η have little influence on this. Furthermore, the peak strength not only depends on friction but also on the rolling stiffness coefficient β and a plastic moment coefficient η . The last two control the stress–strain curve in the peak and post-peak regimes, respectively, and enables the macroscopic friction angle to be corrected.

It is observed that the failure stress increases with increasing confining pressure. The initial stiffness is also found to increase with an increase in the confining pressure. It varies with confining pressure according to a power law. Poisson's ratio varies slightly with the confining pressure: this dependence could be due to the variation of the number of contacts. Moreover, the volumetric strain shows that the discrete element assembly

becomes more compressible and that there exists a dilatancy tendency at higher strain. This result corresponds to those observed in laboratory tests. From the stress–strain curve presented in Fig. 12, we determined the values of the peak and the post-peak friction angle. The slope of the line which passes through the origin and is tangent to the circles is equal to $\tan \mu = 0.71$ or $\mu = 35.7^\circ$; see Fig. 14. It is noted that the friction angle does not vary much in the stress range studied, as in Fig. 13c. The variation lies between 35.43° and 34.71° for confining pressure from 100 to 300 kPa, which is similar to the variation of friction angles found in sands. The variation of dilatancy angle with confining pressure is displayed in Fig. 13d. Once again, this quantity does not vary much in the studied stress range and it falls in the range measured in physical material. The numerical and experimental results are in good qualitative and quantitative agreement; as seen in Fig. 12. In particular, the best estimate is obtained with the set of parameters given in Table 2. The only exception was the volumetric response, with needs further tuning.

10. Conclusion

Numerical tests were carried out to simulate laboratory tests of Labenne sand. To reach this goal, the calibration methodology explained in Section 6 needs to be followed. Based on this, the main conclusions are:

- (1) In spite of its simplicity, the numerical model with MTL is able to reproduce the main features of the axisymmetric triaxial tests, as well as several mechanical properties of sand. In terms of the deformational characteristics, a good agreement between the numerical and physical material is obtained (the chosen microscopic values of $k_n = 9.6 \times 10^8$ Pa and $\alpha = 0.04$ give macroscopic values $E = 95.8$ MPa, $\nu = 0.275$ for a numerical material which corresponds well with the macroscopic values $E = 96$ MPa, $\nu = 0.28$ for the physical material). A linear relationship between the elastic parameters at the micro and macro scales is found.

- (2) The corresponding shear strength parameters agree well. The friction angle (35.7°) of the numerical sand sample, which was determined by a linear failure envelope, is slightly smaller than that of the physical material (36.50°). When calibrating the numerical material, a considerable influence of the inter-particle friction on the volumetric strain was found. Little influence of the rolling stiffness coefficient β and non-dimensional plastic coefficient η on the dilatancy curve should be noted. This means that the rolling effect is more dominant than the sliding effect [4,5]. Indeed, rolling occurs only if the moment at the contact point is large enough.
- (3) The major reason for introducing the rolling resistance is because the representation of the roughness of grains lacks in spherical DEM models. Thus, the results are in very good agreement with experimental results, even if the numerical medium is made of a small amount of particles (around 10,000).

The authors believe that the near future massive 3D simulations of granular materials will use basic geometries such as the spherical shapes or cluster of spherical discrete elements. This is why a special effort must be made to improve their local behavior law.

Acknowledgement

The first author would like to acknowledge the Research Ministry of Algeria for the financial support, in the framework of the “Comité Mixte d’Evaluation et de Prospective Franco-Algérien”.

References

- [1] Manzari MT, Dafalias YF. A critical state two-surface plasticity model for sands. *Geotechnique* 1997;47(2):255–72.
- [2] Duncan JM. State of the art: limit equilibrium and finite-element analysis of slopes. *J Geotech Eng – ASCE* 1996;122(7):577–96.
- [3] Doležalová M, Czene P, Havel F. Micromechanical modeling of stress path effects using PFC2D. *Code Num Mod Micro via Particle Meth* 03. Lisse: Swets & Zeitlinger; 2003. p. 173–81.
- [4] Bagi K, Kuhn MR. A definition of particle rolling in a granular assembly in terms of particle translations and rotations. *J Appl Mech, Trans Am Soc Mech Eng* 2004;71:493–501.
- [5] Kuhn MR, Bagi K. Contact rolling and deformation in granular media. *Int J Solids Struct* 2004;41:5793–820.
- [6] Mestat P, Berthelon JP. Modélisation par éléments finis des essais sur fondations superficielles à Labenne. *Bull Laborat Ponts Chaussées* 2001;234(Septembre–Octobre):19–39 [REF 4389].
- [7] Mestat P, Riou Y. Méthodologie de détermination des paramètres pour la loi de comportement élastoplastique de Vermeer et simulations d’essais de mécanique des sols. *Bull Laborat Ponts Chaussées* 2001;235(Novembre–Décembre):19–39 [REF 4391].
- [8] Mestat Ph. Caractérisation du comportement du sable de Labenne. Détermination des paramètres des lois de Nova et de Vermeer à partir d’essais de laboratoire. *Laborat Cent Ponts Chaussées* 2001;225(Mars–Avril):21–40.
- [9] Cundall PA, Strack ODL. The distinct numerical model for granular assemblies. *Géotechnique* 1979;29:47–65.
- [10] Cundall PA, Strack ODL. The distinct element method as a tool for research in granular media. Part II. Department of Civil Engineering Report. University of Minnesota; 1979.
- [11] Donzé FV, Magnier S-A, Daudeville L, Mariotti C, Davenne L. Study of the behavior of concrete at high strain rate compressions by a discrete element method. *ASCE J Eng Mech* 1999;125(10):1154–63.
- [12] Plassiard J-P, Belheine N, Donzé FV. Calibration procedure for spherical discrete elements using a local moment law. In: 4th International conference on discrete element methods (DEM 07), Brisbane, 27–29 August 2007.
- [13] Iwashita K, Oda M. Rolling resistance at contacts in simulation of shear band development by DEM. *ASCE J Eng Mech* 1998;124(3):285–92.
- [14] Jiang MJ, Yu H-S, Harris D. A novel discrete model for granular material incorporating rolling resistance. *Comput Geotech* 2005;32(5):340–57.
- [15] Iwashita K, Oda M. Micro-deformation mechanism of shear banding process based on modified distinct element. *Powder Technol* 2000;109:192–205.
- [16] Oda M, Iwashita K, Kakiuchi T. Importance of particle rotation in the mechanics of granular materials. *Powders & grains*, vol. 97. Rotterdam: Balkema; 1997. p. 207–10.
- [17] Donze F-V, Magnier S-A. Formulation of a three-dimensional numerical model of brittle behavior. *Geophys J Int* 1995;122:790–802.
- [18] Sakaguchi H, Ozaki E, Igarachi T. Plugging of the flow of granular materials during the discharge from a silo. *Int J Mod Phys B* 1993;7:1949–63.
- [19] Evesque P. Mécanique des milieux granulaires. *Poudres Grains* 2000;NS51:1–60.
- [20] Coquillay S. Prise en compte de la non-linéarité du comportement des sols soumis à de petites déformations pour le calcul des ouvrages géotechniques. PhD Thesis, Ecole nationale des ponts et chaussées. Paris, 2005.
- [21] Canepa Y, Depresles D. Fondations superficielles. Essais de chargement de semelles établies sur une couche de sable en place, station expérimentale de Labenne. Influence des conditions d’exécution, *Compte rendu des essais, FAER* 1. 17.02.09, 1990.
- [22] Weitz DA. Packing in the spheres. *Science* 2004;303:968–9.
- [23] Chang C, Misra A. Packing structure and mechanical properties of granulates. *J Eng Mech* 1990;116(5):1077–93.
- [24] Fazekas S, Török J, Kertesz J, Wolf DE. Computer simulation of three dimensional Shearing of granular materials: formation of shear bands. *Powders & grains*, vol. 5. London: Taylor & Francis Group; 2005. p. 223–26.
- [25] Roux J-N, Combe G. Quasistatic rheology and the origins of strain. *Compte Rendus de l’académie des Sciences Série IV – Physics–Astrophysics (Comptes Rendus Physique)* 2002;3(2):131–40.
- [26] Calvetti F, Viggiani G, Tamagnini C. A numerical investigation of the incremental behavior of granular soils. *Riv Geotech* 2003;3:11–29.
- [27] PFC2D. Particle Flow in Two-Dimensions, Version 2.0, User Manual. Minneapolis, Minnesota: ITASCA Consulting Group, Inc.; 1996.

A spherical discrete element model: calibration procedure and incremental response

Jean-Patrick Plassiard · Noura Belheine ·
Frédéric-Victor Donzé

Received: 10 June 2008 / Published online: 12 March 2009
© Springer-Verlag 2009

Abstract When using spherical elements within the Discrete Element Method, computational costs can be kept low even for large numbers of elements. However, this oversimplification of the granular geometry has drawbacks when quantitatively assessing the model even for frictional geomaterials. To overcome this limitation, the local constitutive law must at least take into account the transfer of a moment between elements. This moment, which is added to normal and shear local interaction forces, increases the number of local parameters. Moreover, when local plastic thresholds are considered, the calibration of the model becomes tricky. With such a set of local parameters, a calibration procedure is proposed, which attempts to define the respective role of each parameter in the macroscopic behavior. A series of numerical simulations of triaxial compression tests has been performed to check the capability of this model to get good quantitative results and the incremental behavior of the numerical medium is studied by performing a series of axisymmetric stress probes with varying directions. The corresponding strain responses are measured. From different initial stress states, the results indicate that the incremental response is well described by elastoplasticity with a single mechanism, and a non-associative flow rule.

Keywords Discrete element method · Calibration procedure · Incremental behavior · Stress probes · Non-associative flow rule

1 Introduction

Scaling is one of the main issues to be addressed when a model based on the Discrete Element Method is used. It has been shown that the DEM is well adapted to model a granular material, when a discrete element represents a grain [1]; in this case the characteristic size of the model is well defined. In a different way, numerous authors have used the DEM to simulate granular materials at a higher scale [2,3], i.e. the size of an element is higher than the real grain size, and for these cases, the discrete approach also gives interesting insights into the local behavior [4].

Using the DEM to tackle physical problems for real structures becomes a real challenge since billion of discrete elements would be needed, inducing a totally prohibitive computational time.

For this configuration, i.e. working at a higher scale model, the use of the DEM consists in considering, that a discrete element represents a large amount of real grains. By doing so, the local parameters must be chosen to predict the mechanical behavior of a granular material studied at a chosen macro scale.

To keep calculation costs as low as possible, a spherical geometry for discrete elements is widely used. In this case, the numerical implementation of the contact detection and resolution algorithms remain simple and fast. However, the major drawback of using spherical geometry is that excessive rolling occurs during shear displacement [5] and such models underestimate the value of the friction angle as compared to real geomaterials.

While keeping the simplicity of the spherical geometry of elements, it is possible to act upon this rolling by blocking rotations. In triaxial compression simulations (which are widely used simulations which allow the behavior of the numerical medium to be analyzed), only sliding will then

J.-P. Plassiard · N. Belheine · F.-V. Donzé (✉)
Laboratoire Sols, Solides, Structures et Risques (3S-R),
Université Joseph Fourier, Grenoble Universités,
Domaine Universitaire, BP 53, 38041 Grenoble cedex 9, France
e-mail: frederic.donze@hmg.inpg.fr

occur, which in turn, will result in a higher and better value of the friction angle [6]. This extreme option gives good results for these loadings, however, for pure shear loadings with large deformation, the rolling process in real granular soils cannot be ignored [7]. Furthermore, several drawbacks have been seen when rotations are prevented, (see for example, [6]), and in this case, only the local friction angle is used to control the strength of a granular material. However doing so, there are no other local parameters to control in an independent way the peak dilatancy angle. Moreover, the stress softening behavior observed in real material after the peak stress is not reproduced adequately [8]. This is why a moment transfer has been added to the local constitutive law of spherical DEM in 2D to overcome the limitation of the “no-rotation” model.

Starting from this two-dimensional approach, the formulation of the moment transfer law has been extended for the three-dimensional case [9]. This moment, which is added to normal and shear local interaction forces, increases the number of local parameters and with such a set of local parameters, a calibration procedure is necessary in order to take into account the respective role of each local parameter in the macroscopic behavior.

In this paper, the role of these local parameters in the macro response is shown via a parametric study. A series of numerical simulations of triaxial compression tests were done to check if this model is able to get good quantitative results [10]. In this work, the contribution of local constitutive parameters on the macroscopic response of the model is revisited: does the given model show an associative or non-associative flow rule? And what are the local mechanisms involved?

Note that this property has been extensively studied over the last decades [6], in particular using various incremental constitutive models [11–13]. Recall that from the development of the nonlinear constitutive relations [14], a great variety of constitutive models describing different aspects of soils has been proposed [15]. The fundamental feature of such models is the assumption that the stress rate is a fully non-linear function of the strain rate. These incremental nonlinearities influence not only the simulation of the stress strain response but also the description of material instability.

One of the best experimental investigations on the incremental response of granular soils, consists in loading soils specimens to a specified state in the stress space, probing incrementally in different directions, and then recording the strain responses. However, few such stress probes experiments were carried out in the past, some on clays and others on sands [16]. Recently, an investigation of this kind has been performed on Hostun sand by [17] and on fine-granular soils by [16]. In fact, it seems almost impossible to carry out reliable tests on real granular soils because it is extremely difficult to perform all stress probes on a single specimen.

For some authors, the application and subsequent removal of stress increments are also not recommended because the stress increment may generate irreversible deformation that alters the initial state of the specimen [18, 19]. These tests are also difficult on random assemblies of two dimensional disks [7] or spheres [20].

In an attempt to circumvent these experimental problems, it is proposed here, as an application, to use the calibrated discrete element model to investigate the incremental non-linearities of a numerical granular material. The strain response envelope in the Rendulic plane is determined to see if the model presents an associative or non-associative plastic flow rule. In the present work, results from an axisymmetric probing carried out for $\sigma_3 = 100$ kPa are discussed.

2 Formulation of the discrete model

Let two spherical discrete elements A and B , be in contact. The radii of these elements are r_A and r_B . In the global set of axes, their positions are defined by two vectors x_A and x_B . The interaction force vector F which represents the action of element A on element B may be decomposed into a normal and a shear vector F^n and F^s , respectively, which may be classically linked to relative displacements, through normal and tangential stiffnesses, k^n and k^s .

$$F_i^n = k^n u^n n_i, \quad (1)$$

$$\Delta F_i^s = -k^s \Delta u_i^s, \quad (2)$$

where u^n is the relative normal displacement between two elements, Δu_i^s is the incremental tangential displacement and n is the normal contact vector. The shear force F^s is obtained by summing the ΔF^s increments. The normal and tangential stiffnesses are given by:

$$k^n = r \frac{K_A^n \cdot K_B^n}{K_A^n + K_B^n}, \quad (3)$$

$$k^s = r \frac{K_A^s \cdot K_B^s}{K_A^s + K_B^s}, \quad (4)$$

where $K_A^n, K_A^s, K_B^n, K_B^s$ define the input values of normal and tangential stiffnesses K^n and K^s for both elements A and B of a contact and r corresponds to the mean value of the two radii.

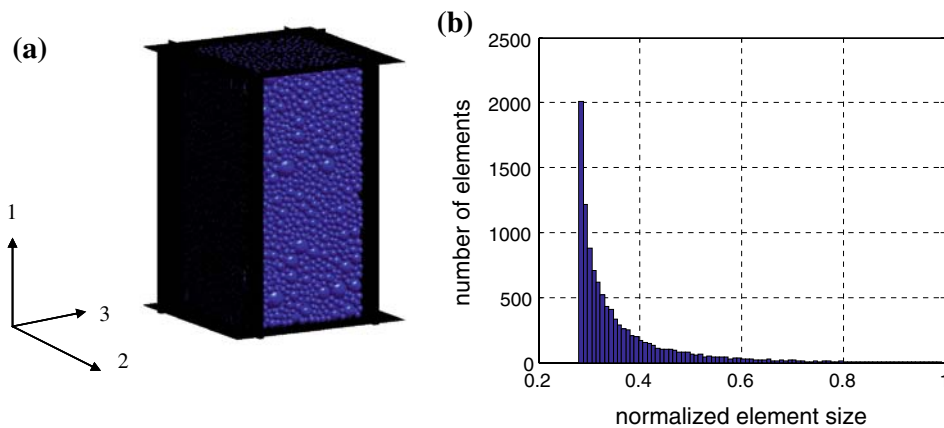
To reproduce the behavior of non-cohesive geomaterials, a Mohr–Coulomb rupture criterion is used:

$$\|F^s\| \leq \|F^n\| \cdot \tan \mu, \quad (5)$$

where μ is the local friction angle.

Let k^r be the rolling stiffness. If an isotropic rolling behavior is assumed, this value is a scalar. The elastic moment M_L^{elast} created by the rolling part in a local set of axes L is

Fig. 1 The numerical specimen (a) and the distribution size of elements, normalized by the size of the largest element (b)



written as:

$$M_L^{\text{elast}} = k^r \theta_L^r, \tag{6}$$

where θ_L^r is the angular vector of the rolling part in the set of axes L .

The rolling stiffness parameter k^r defines the level of influence that the resistant moment produces. Let's introduce a dimensionless number β^r which expresses a relationship between k^r and k^s , such that,

$$\beta^r = \frac{k^r}{k^s r^2}, \tag{7}$$

Let's also introduce η^r as a dimensionless parameter which controls the elastic limit of rolling. If $\|F^n\|$ represents the norm of the normal force at the contact point, the elastic limit is given by the plastic moment vector M_L^{plast} such that:

$$M_L^{\text{plast}} = \eta^r r \|F^n\|, \tag{8}$$

Thus, rolling moment M^r is given by:

$$M^r = m_{L-G} \min \left(\|M_L^{\text{elast}}\| ; \|M_L^{\text{plast}}\| \right) \frac{M_L^{\text{elast}}}{\|M_L^{\text{elast}}\|}, \tag{9}$$

where m_{L-G} defines the transition matrix from the local set of axes L to the global set of axes G .

This formulation [21] has been implemented in the SDEC software [22]. SDEC uses a force-displacement approach and Newton's second law of motion describes the motion of each element as the sum of all forces applied on this element. The dynamic behavior of the system is solved numerically by a time algorithm in which the velocities and the accelerations are constant at each time step. An explicit finite difference algorithm is used to reproduce the time evolution of the system.

3 Model generation

The macro-mechanical response of the numerical specimen is highly sensitive to the initial state of the sample. Numerous sphere packing methods exist [23–25]. In the present model, a radii expansion method, leading to a Weibull size distribution is obtained, such that:

$$r_w = r_{\min} + (r_{\max} - r_{\min}) \left(-\alpha \cdot \ln(1 - \text{rand}_{[0;1]}) \right)^{1/\gamma}, \tag{10}$$

Where r_w is the radius of the current element, r_{\min} and r_{\max} are the extreme radius values of elements, α and γ are the shape parameters of the chosen Weibull's distribution.

The assembly representing the numerical specimen studied in this section consisted of 10000 particles with a ratio of 4.0 between the largest and the smallest elements. Here $\alpha = 0.15$ and $\gamma = 0.75$ and the sample has a ratio of 2 (see Fig. 1).

It is also important to check the existence of a possible anisotropy arrangement due to the mode of the sample preparation. In the histogram of the contact orientation, see Fig. 2b, it is shown that the contacts are isotropically distributed. The contact forces distribution in the vertical section are plotted in Fig. 2a. The thickness of the solid lines is proportional to the force intensity. It is observed that this distribution is homogeneous. This has been checked for different sample sections, in order to check the mechanical homogeneity.

The objective is now to calibrate the model in order to reproduce macroscopically the behavior of a granular material (see Fig. 3), where the macroscopic parameters to be set are: Young's modulus E_0 , Poisson's ratio ν , the internal and residual friction angles ϕ_{peak} and ϕ_{res} (deduced from σ_{peak} and $\sigma_{\text{post-peak}}$, respectively) and the peak dilatancy angle ψ_{peak} . It is first necessary to evaluate the contribution of the local properties of the model on its global response. The results of a parametric study made on a quasi-static compression test, are now presented.

Fig. 2 Normal force distribution for a 100 kPa confining pressure (a). Vertical distribution of the contact orientation (b)

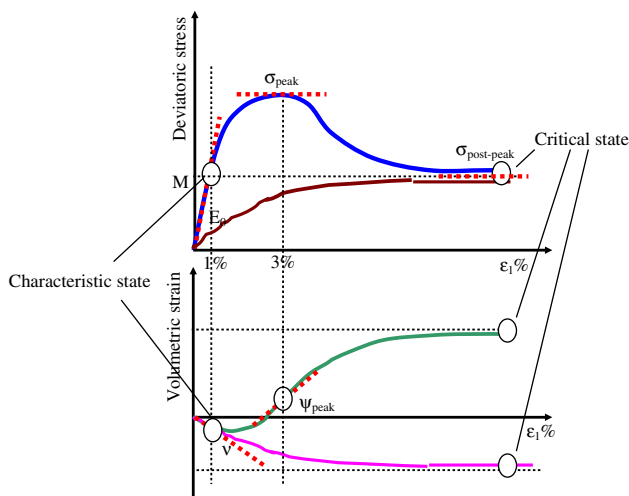
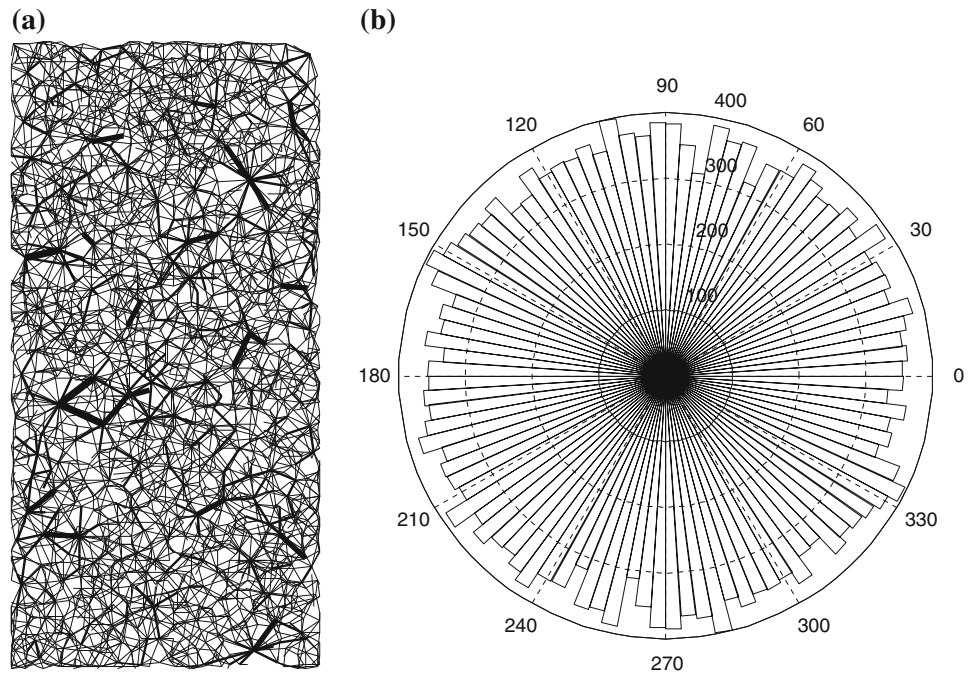


Fig. 3 Typical response obtained from triaxial tests carried out on granular materials. Differential stress q and volumetric strain ε_v versus axial strain ε_1

4 Parametric study

4.1 Quasi-static loading of the sample

Performing a simulation of triaxial test in the same condition as the experimental ones would be too computationally costly. Either the number of elements, the strain rate or the density, have to be adapted. For example, a strain rate identical to the experimental one has been combined with an increase of the density of elements in order to limit the quasi-static effects [1]. Here, another approach has been chosen.

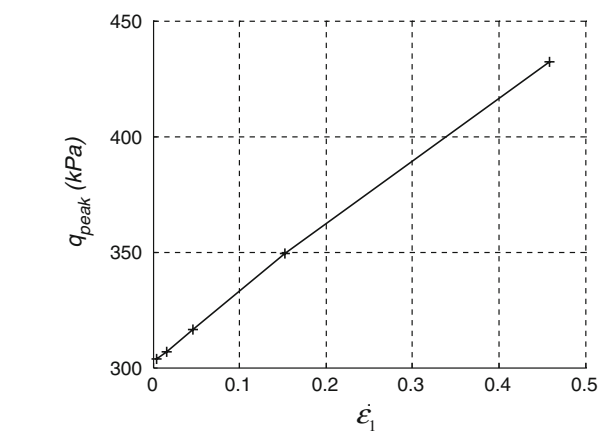


Fig. 4 Influence of the strain rate $\dot{\varepsilon}_1$ on the differential stress at peak state q_{peak}

The density has been kept to a realistic value ($2,650 \text{ kg}^{-3}$) while the strain rate has been increased in order to reduce the simulation time. Consequently, the quasi-static condition is not completely verified and inertial effects appear. The linear dependence of the value of differential stress at peak state q_{peak} to the strain rate $\dot{\varepsilon}_1$. A quasi-static value of q_{peak} can be deduced (see Fig. 4). Then, the strain rate is chosen as high as possible but without generating inertial effects such that the error made on the deduced internal friction angle exceeds one degree. With respect to these conditions, a strain rate of 0.015 s^{-1} has been chosen. The time step is determined by a ratio between the contact stiffnesses and the mass of elements [9]. Here, the time step is equal to $1.2 \times 10^{-4} \text{ s}$.

Table 1 Values of the local parameters of the Discrete Element model

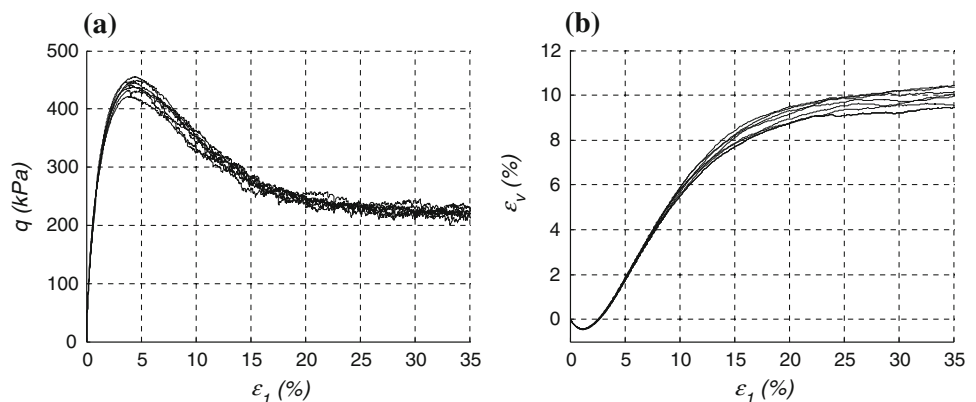
Parameters	Values
Normal stiffness K^n (MNm ⁻²)	170
Tangential stiffness K^s (MNm ⁻²)	35
Local friction angle μ (°)	17
Coefficient of rolling stiffness β^r [-]	1.8
Coefficient of rolling elastic limit η^r [-]	1.8

4.2 Effect of the random process for generating samples

Eight different samples have been generated, with the same geometry, and a nearly identical size distribution, but only differing through the random aspect of their generation. The test series were performed with identical local parameters (see Table 1). The aim of these tests was to verify that the numerical results do not depend on the initial random process of the discrete element distribution, as long as the distribution size function is kept constant. This aspect is particularly needed for the calibration process [9,26,27]).

The results, presented in Fig. 5 show that the curves ($q : \varepsilon_1$) and ($\varepsilon_1 : \varepsilon_v$) exhibit the same elastic response. For higher strain, the peak stress and the residual stress vary in a range of 25 kPa, corresponding to a margin of variation of 1° on both the internal and residual friction angles ϕ_{peak} and ϕ_{res} . The peak dilatancy is almost the same in all cases while a more important fluctuation is observed when axial strain exceed 15%. The evolution of volumetric strains is unpredictable after the peak stress in experimental tests also (i.e. important fluctuations are observed). Thus, the fluctuation observed at large strain in the numerical model is not considered here. The last results indicate that the sample formed of 10000 discrete elements should be sufficient to contain the effect of the initial discrete element distribution. Furthermore, the use of a sample made up of less than 10,000 discrete elements would induce too much fluctuation on the response.

Fig. 5 Triaxial test of eight samples randomly generated under the same conditions. Differential stress (a) and volumetric strain (b) are plotted versus axial strain



4.3 Effect of the discrete element size

Since the ultimate goal of this work is to model the geomaterial at a macro-scale, the choice of discrete element size should have a low influence on the global response of the system. This is why, the local behavior laws take into account the characteristic size of the discrete elements. In order to study this effect, four samples of identical sizes but with different numbers of elements (respectively 10,000, 20,000, 50,000, 90,000 elements), have been used. A triaxial test has been carried out for each sample. The stress-strain curves resulting from the triaxial test are presented in Fig. 6. It is verified that the global response is kept constant, except for the volumetric strain at residual state but the difference remains small for the chosen range of distribution size. It has also been verified that a proportional transformation of the sample does not affect the behavior of the sample [9]. The mechanical response obtained is independent of the mean size of the elements and from the characteristic size of the sample also.

Thus, using only 10,000 element in the model still seems reasonable to avoid size effects on the numerical medium response. Note that, it also confirms the reproducibility observed in Fig. 5.

4.4 Effect of the local contact law parameters on the mechanical response

The local contact law is characterized by the following local parameters:

- the normal and tangential contact stiffness's (K^n and K^s),
- the inter-particle friction angle μ ,
- the coefficient of rolling stiffness β^r ,
- and the coefficient of rolling elastic limit η^r (which controls the rolling resistance).

It has been previously shown that the elastic parameters (K^n and K^s) and the rupture parameters (μ , β^r , η^r) can be

Fig. 6 Triaxial loading of samples made of different numbers of elements. Deviatoric stress (a) and volumetric strain (b) are plotted versus axial strain

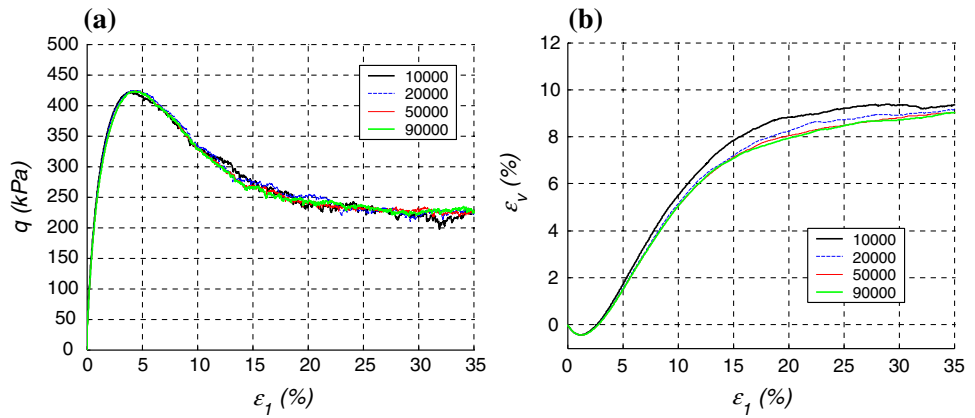
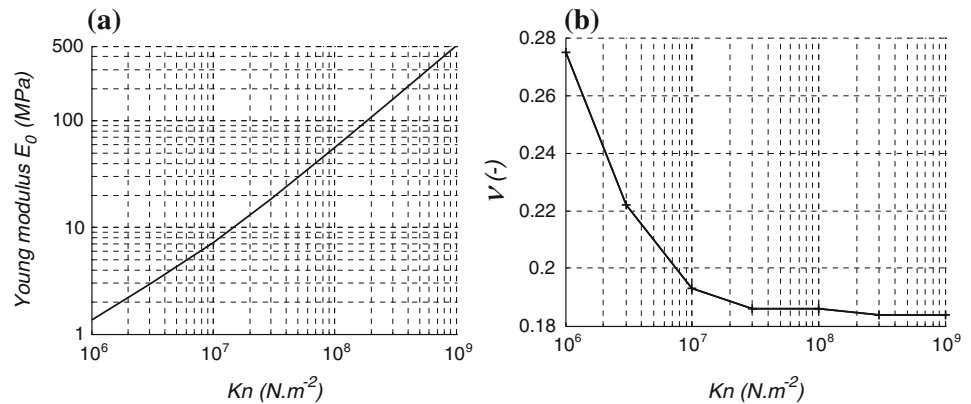


Fig. 7 Influence of the input value of normal stiffness K^n on the elastic response: Young’s modulus (a) and Poisson’s ratio (b) for $K^s = 35 \text{ MNm}^{-2}$



calibrated separately [6,28], and in the following paragraph, the contribution of the elastic parameters is first studied.

4.4.1 Effect of the local elastic parameters (K^n, K^s)

The local elastic parameters K^n and K^s play a major role in the elastic response. Note that, it has been observed that the β^r parameter has some influence on the elastic response, but it remains low (less than 10% on Young’s modulus E_0 and Poisson’s ratio ν). Thus, only K^n and K^s will be set first to calibrate the macroscopic elastic behavior. Figure 7 shows the relationship between the elastic microscopic parameter K^n and elastic macroscopic parameters, Young’s modulus E_0 and Poisson’s ratio ν obtained from axial compressive tests. It can be seen that, there is an almost linear relationship between the *logarithms* of the normal input stiffness K^n and Young’s modulus E_0 (see Fig. 7a) for $K^s = 35 \text{ MNm}^{-2}$. In other words, a power law rules the relationship between the input normal stiffness K^n and Young’s modulus E_0 .

Poisson’s ratio depends on K^n for values less than 10^7 Nm^{-2} (see Fig. 7b) but it is almost independent in the studied domain [$10^7 \text{ Nm}^{-2}; 10^8 \text{ Nm}^{-2}$]. Moreover, it has been observed that the computed elastic response of the numerical specimen is relatively unaffected for assumed values of K^n greater than $3 \cdot 10^7 \text{ Nm}^{-2}$. Young’s modulus E_0 is mainly

influenced by the elastic input parameter K^n in the domain of interest [9].

Secondly, the influence of the tangential stiffness K^s on the macroscopic response is studied. It corresponds to the second parameter governing the elastic behavior. Let’s define the ratio between the normal and tangential stiffnesses:

$$\alpha = \frac{K^s}{K^n}, \tag{11}$$

In Fig. 8, the relationship between ratio α and both Young’s modulus E_0 and Poisson’s ratio ν are plotted. It can be seen that this relationship between E_0 and α is almost linear, for the chosen range of values (see Fig. 8a). The results seem coherent with a value of 0.25 for Poisson’s ratio when $\alpha \rightarrow 0$. In Fig. 9, the effect of ratio $\alpha = \frac{K^s}{K^n}$ on the stress-strain response is shown. This confirms that there is no influence on the critical state. Thus K^s should only influence the elastic behavior.

4.4.2 Effect of the local friction angle μ

The effect of the local friction angle μ on the macroscopic response is now studied using triaxial tests. Four sets of simulations were performed, with $\mu = 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$ and 50° . In Fig. 10, the macroscopic stress strain curves are represented

Fig. 8 Influence of ratio $\alpha = \frac{K^s}{K^n}$ on the elastic response with $K^n = 200 \text{ MNm}^{-2}$: Young modulus (a) and Poisson's ratio (b)

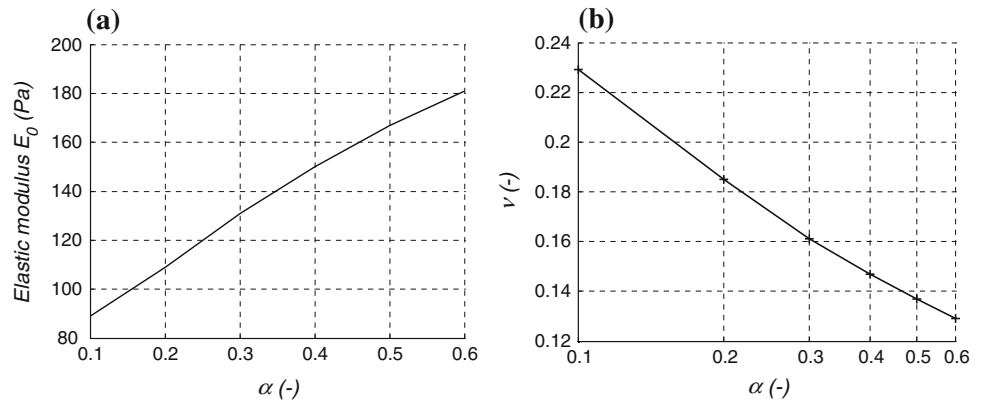


Fig. 9 Triaxial tests for different values of $\alpha = \frac{K^s}{K^n}$ (with $K^n = 200 \text{ MNm}^{-2}$): differential stress (a) and volumetric strain (b) are plotted versus axial strain

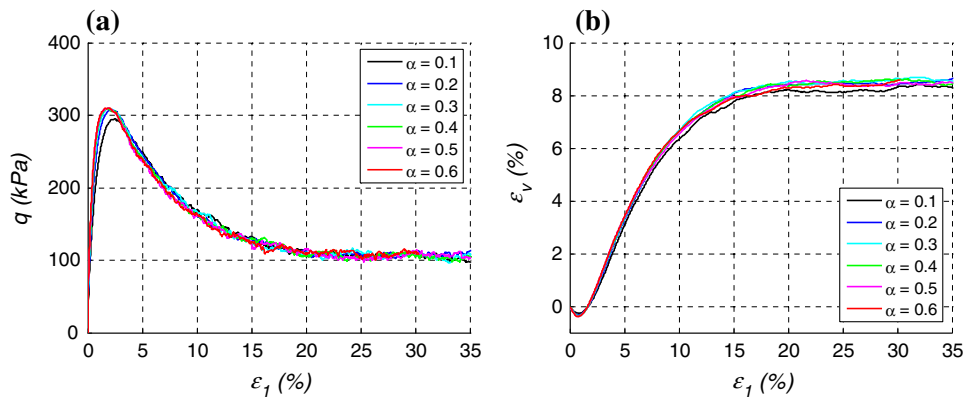
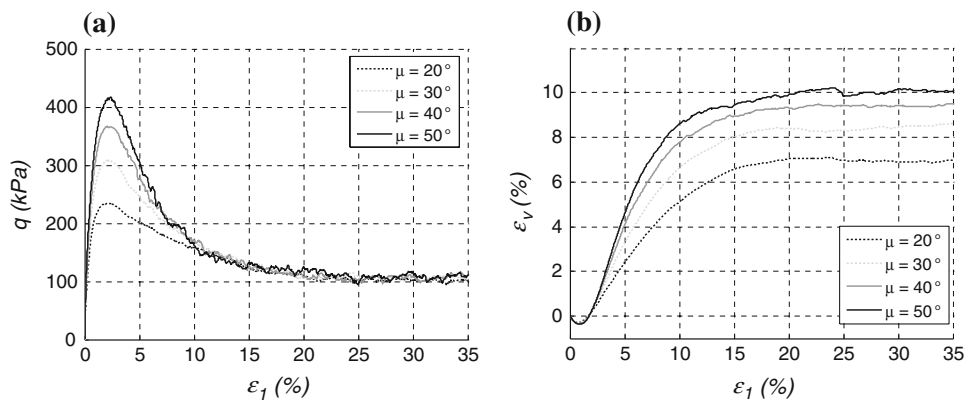


Fig. 10 Triaxial tests for different values of μ . Differential stress (a) and volumetric strain (b) are plotted versus axial strain



for the various contact friction angles. The elastic response keeps the same path but the peak stress level and the dilatancy angle have been modified when increasing the local contact friction angle. It can also be noticed that there is a negligible effect of μ on the residual state. This result is in agreement with previous results [27] and it will be assumed that the local friction angle μ influence ϕ_{peak} and ψ_{peak} , only.

4.4.3 Effect of the coefficient of rolling stiffness β^r

Several simulation tests were carried out, by changing the coefficient of rolling stiffness β^r , to see its effect on the macroscopic response of the model. Note that, previous

numerical simulations performed by [9,10,29] and [10], using a β^r ranging from 0.12 to 1.0, as it is also the case here, showed a negligible variation of the elastic response (lower than 5%). Consequently, and as noted in the beginning of Sect. 4.4, the effect of β^r on the elastic response can be neglected [9]. This assumption coincides also with other authors' results [30].

The relationships between differential stresses, axial strain and volumetric strain are shown in Fig. 11 for four tests with different values of β^r ranging from 0.1 to 3.0. The curves are quite similar in shape with a little influence of β^r on the peak dilatancy angle ψ_{peak} , but β^r has a strong influence on the stress peak and the residual state.

Fig. 11 Triaxial compression for different values of β^r . Differential stress (a) and volumetric strain (b) are plotted versus axial strain

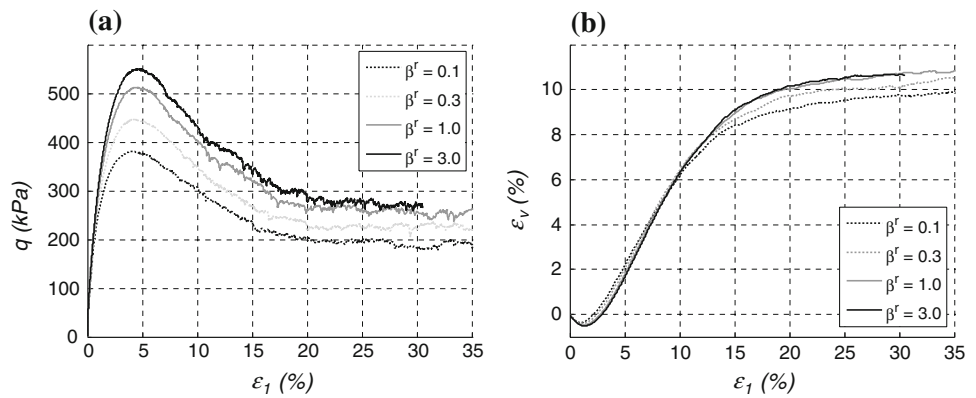
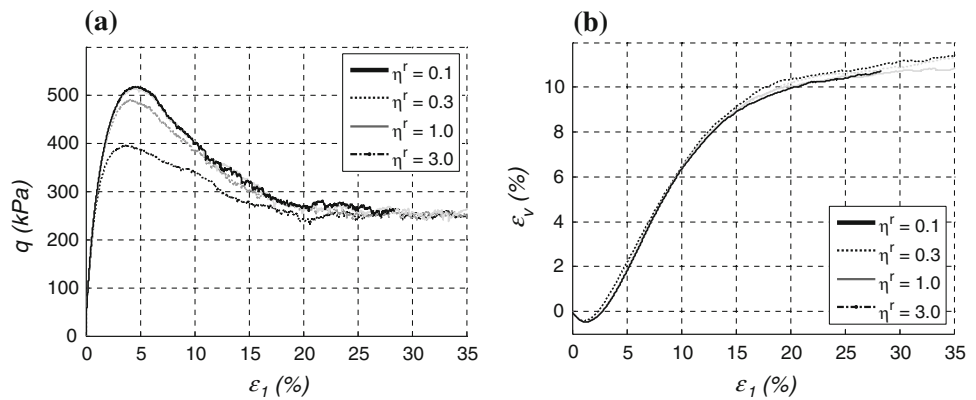


Fig. 12 Triaxial compression for different values of η^r . Differential stress (a) and volumetric strain (b) are plotted versus axial strain



4.4.4 Effect of the coefficient of rolling elastic limit η^r

Finally, numerical tests were performed using different values of η^r also ranging from 0.1 to 3.0. Contrary to what was observed for β^r , η^r has no influence, neither on the peak angle ψ_{peak} , nor on the residual friction angle ϕ_{res} , but only on the stress peak (see Fig. 12).

5 The calibration methodology

From the parametric study presented in Sect. 4 and the typical macroscopic responses obtained from triaxial tests on granular material (see Fig. 17), the selected macroscopic parameters, such as: Young’s modulus E_0 and Poisson’s ratio ν , the peak friction angle ϕ_{peak} , the dilatancy angle ψ_{peak} and the residual friction angle ϕ_{res} , can be now obtained from the local parameter values.

It was seen in previous sections, that the elastic parameters (K^n , K^s) and the rupture parameters (μ , β^r , η^r) can be calibrated separately [9,10]. First, Poisson’s ratio is set for the corresponding α value (see Fig. 8b). To do so, the value of K^s is set with an arbitrary value of K^n . Then, keeping α constant K^n is set such that the desired value of Young’s modulus is obtained (see Fig. 7a). The value of K^s has been modified as well.

Table 2 Values of the macroscopic parameters of the discrete element model

Parameters	Values
Young modulus $E_0(MPa)$	100
Poisson’s ratio $\nu(-)$	0.2
Internal friction angle $\phi_{peak}(^\circ)$	43
Peak dilatancy angle $\psi_{peak}(^\circ)$	16
Residual friction angle $\phi_{res}(^\circ)$	32

Once these local elastic parameters are set, the values of the other local parameters (μ , β^r , η^r) must be determined to fix ϕ_{peak} , ϕ_{res} and ψ_{peak} . First, it has been seen that the local friction angle μ has a major influence on both ϕ_{peak} and ψ_{peak} . Then, it has been observed that β^r has little influence on ψ_{peak} . Thus, the value of μ is chosen first to set the value of ψ_{peak} and once μ chosen, the value of β^r sets the value of ϕ_{res} . Finally, η^r which has little influence on both ϕ_{res} and ψ_{peak} , is used to set the value of ϕ_{peak} .

For example, using the local parameters given in Table 1, the resulting macroscopic features are given in Table 2.

This cross dependency investigation indicates that the local parameters (K^n , K^s , μ , β^r , η^r) have a uniqueness value. This calibration methodology has proven to be efficiency to

Table 3 Values of the local parameters of the model used to simulate the stress probe [10]

Parameters	
Normal stiffness K^n (MNm^{-2})	960
Tangential stiffness K^s (MNm^{-2})	38.4
Local friction angle μ ($^\circ$)	30.0
Coefficient of rolling stiffness β^r [-]	0.12
Coefficient of rolling Elastic limit η^r [-]	1.0

model a triaxial test carried out on the Labenne sand [10]. The numerical results were found in good qualitative and quantitative agreement with the experimental observation, even in a predictive way when different confining pressures were imposed to the same sample.

6 Incremental response and numerical stress probe tests: application and study

The numerical simulation of stress probes gives the possibility to investigate on the nature of the incremental behavior of the model, by using the so-called response envelope. The response envelope idea was introduced first by [31] to estimate the properties of a given incremental constitutive equation. In practice, it is difficult to determine the response envelope because it requires the preparation of many samples with identical material properties. This is why, Bardet and Proubet [32] suggested the use of numerical simulations with DEM to get the solution to this problem; from an identical numerical sample, it becomes possible to perform different loading histories.

Starting from a validated configuration (Table 3) obtained to reproduce the behavior of real sand [10], the stress-strain

curve in the $q : \varepsilon_1$ plane and the volumetric response of the material in the $\varepsilon_V : \varepsilon_1$ plane obtained with the set of parameters are shown in Fig. 13.

The initial stress probe states are obtained after two consecutive stress paths, which are composed of an initial isotropic compression followed by an axisymmetric triaxial compression for which $\sigma_2 = \sigma_3$ are kept constant. The simulation is stopped for a pre-defined value of $n = \frac{q}{p}$ [28], where $q = \sigma_1 - \sigma_3$ is the differential stress value and $p = (\sigma_1 + 2\sigma_3)/3$ is the mean effective stress value. Prior to the stress probe, a reference direction $\alpha_{d\sigma} = 10^\circ$ has been chosen in order to keep a reasonable cost of the calculation process. Then, at a given reference stress state, the norm of the stress increment $\|d\vec{\sigma}\|$ is kept constant for all different directions. The magnitude of the stress probe, defined as: $\|d\vec{\sigma}\| = \sqrt{(d\sigma_1)^2 + 2(d\sigma_3)^2}$ has been set to 1 kPa in this paper. In the present study, four states [noted (A), (B), (C) and (D) in Fig. 13] were investigated. These initial equilibrium states can also be plotted in the $q : p$ plane (see Fig. 14).

Therefore, for each initial state, the stress probes are performed from initial stress-strain state by imposing a loading vector $d\sigma$ defined in the Rendulic plane of stress increment ($d\sigma_1 : \sqrt{2}d\sigma_3$), by its norm $\|d\vec{\sigma}\| = 1$ kPa and the angle direction $\alpha_{d\sigma}$ (see Fig. 15). Note that $\alpha_{d\sigma}$, defined by:

$$\tan \alpha_{d\sigma} = \left(\frac{d\sigma_1}{\sqrt{2}d\sigma_3} \right) \quad \alpha_{d\sigma} \in [0; 360^\circ], \tag{12}$$

is increased from 0° to 360° by increments of 10° . The stress probes define a circle of radius 1 kPa in the Rendulic plane of stress increment (see Fig. 15a).

The response to the stress probes is depicted by using the incremental strain response envelope. The strain response envelope is defined as the image $d\varepsilon = f(d\sigma, \sigma)$ in the strain space of the unit sphere in the stress space, which becomes

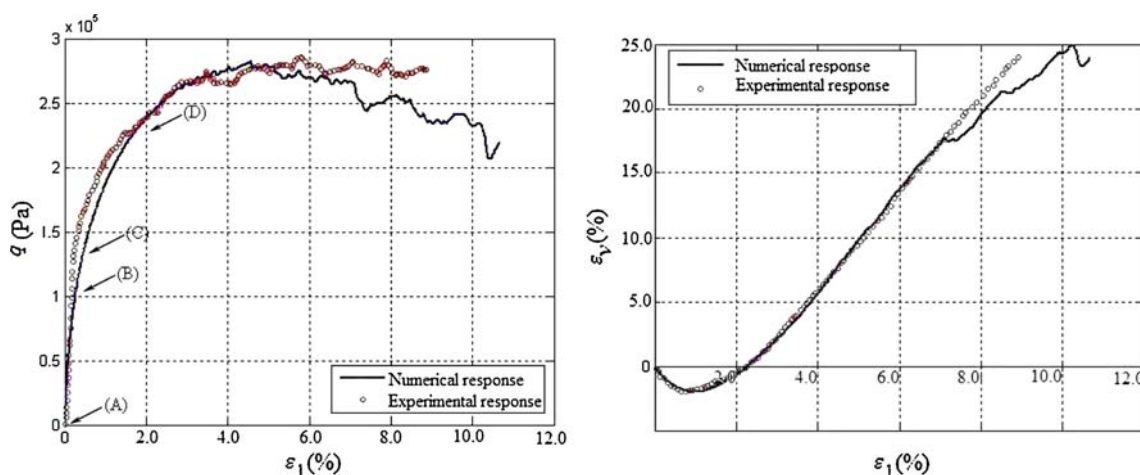


Fig. 13 Differential Stress and volumetric strain are plotted versus the axial strain for a confining pressure $\sigma_3 = 100$ kPa

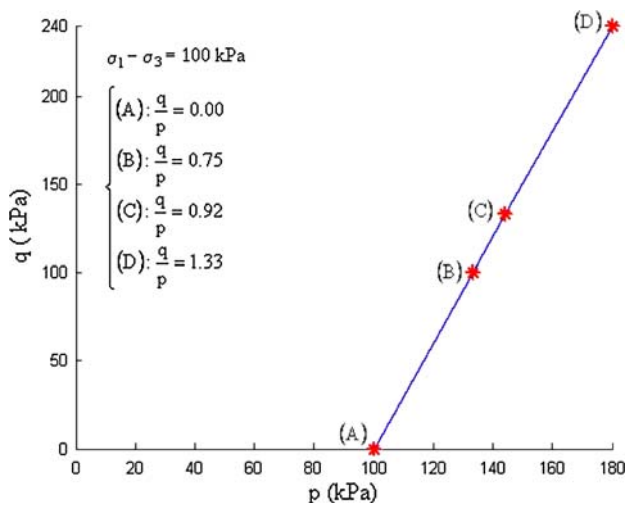


Fig. 14 Equilibrium state (A), (B), (C) and (D) for $\sigma_3 = 100$ kPa

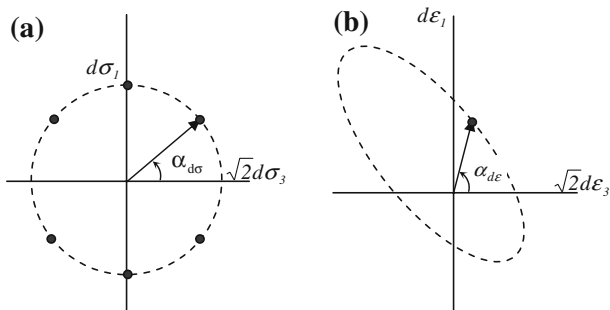


Fig. 15 Definition of Rendulic planes: stress probes (a) and strain responses (b)

an asymmetric surface in the strain space [31]. In the general case, an incremental strain response envelope is a surface in a six dimensional space. However, in the particular case of axisymmetric loading, the number of independent stress and strain variables reduces to two, and the strain-response envelope can be represented in the Rendulic plane of strain increments [19], $(d\epsilon_1 : \sqrt{2}d\epsilon_3)$ (see Fig. 15b).

7 Prediction of the response envelopes

7.1 Total, elastic and plastic response envelopes

Since no experimental envelope response of the Labenne sand is available to validate the present model, the objective of these numerical stress probes is to propose a possible and reasonable incremental behavior of granular soils [10,21]. For this purpose, four different equilibrium states are presently studied.

The computed response envelopes obtained upon stress probing from the initial equilibrium state A, B, C and D

for a confinement pressure $\sigma_3 = 100$ kPa are presented in Fig. 16.

For the initial isotropic state corresponding to case A with $n = 0.0$ (see Figs. 13, 14), the response envelope is regular and symmetric with respect to the origin of the strain increment space in which the principal axis, forms an angle of approximately, 125° (see Fig. 16), and the cross symbol on the figure represents the deformation response due to the purely differential loading ($d\sigma_1 = -2d\sigma_3 > 0$ for $dp = 0$ and $\alpha = 125^\circ$), and its direction is aligned with the principal axis of the ellipse ($\beta = 125^\circ$). For the initial states (B), with $n = 0.75$, (C) with $n = 0.92$ and (D) with $n = 1.33$ (see Figs. 13, 14), which represent an increase of the stress ratio for the initial state, the obtained response envelopes are asymmetric (see Fig. 16), which is a clear indication on the existence of a flow level.

These results are in good agreement with those found in literature [6,17,28].

To go further in the study of the response envelope, the total strain increments are split into their elastic and plastic parts. Thus, the total strain increment can be expressed as,

$$d\vec{\epsilon} = d\vec{\epsilon}_e + d\vec{\epsilon}_p, \tag{13}$$

Different methods can be used to calculate the elastic strain increment [28]. In the present work, the mechanisms responsible for the energy dissipation (interparticle sliding) and structure rearrangement (opening of contacts) are inhibited at the micro scale in order to calculate the elastic strain increment [19]. The plastic strain increments are then computed as the difference between the total strain increments and the elastic strain increments.

The elastic strain envelopes computed for all the initial equilibrium states (A, B, C and D) are represented in Fig. 17. One can note that the incremental response envelopes obtained are elliptical in the Rendulic plane of strain increment, as theoretically expected for an incrementally linear, elastic material [31,32]. The response envelopes keep an elliptical shape, but their orientations change with the value of n for cases B, C and D. Here, and contrary to the ellipse calculated for the isotropic states $n = 0.0$, the direction of the principal axis forms an angle greater than 125° , and the direction of the deformation response due to the purely differential loading, is not aligned with the principal axis of the ellipse anymore. This reorientation of envelope responses appears to be the consequence of an anisotropic incrementally linear behavior [18,31].

Now, let's consider the initial state C in term of elastic and plastic strain increments (see Fig. 18). The plastic part of the total strain increment, presented in Fig. 18b, shows that the response envelope nearly collapses into a straight line, which indicates that the plastic flow direction is independent of the

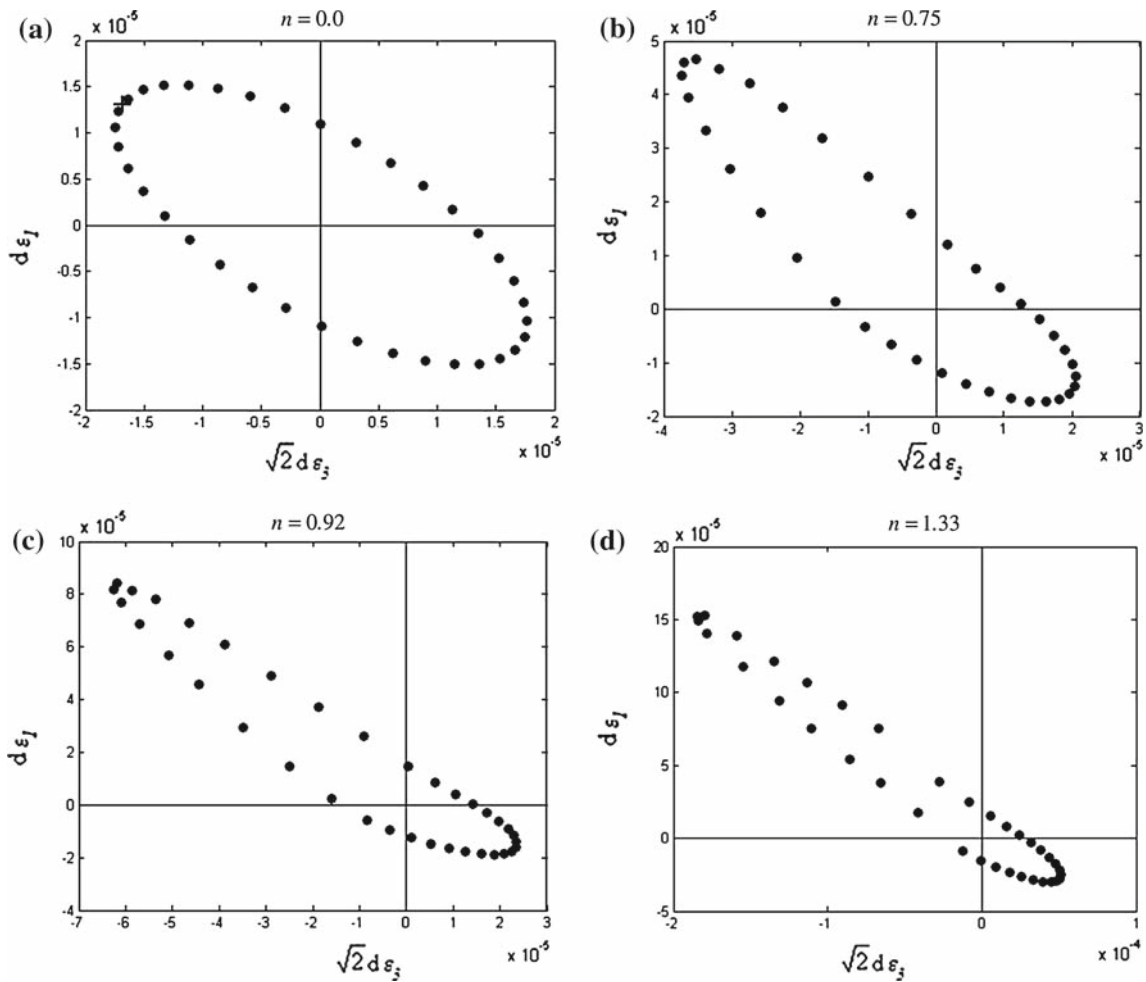


Fig. 16 Numerical response envelopes: **a** initial state A; **b** initial state B; **c** initial state C; **d** initial state D

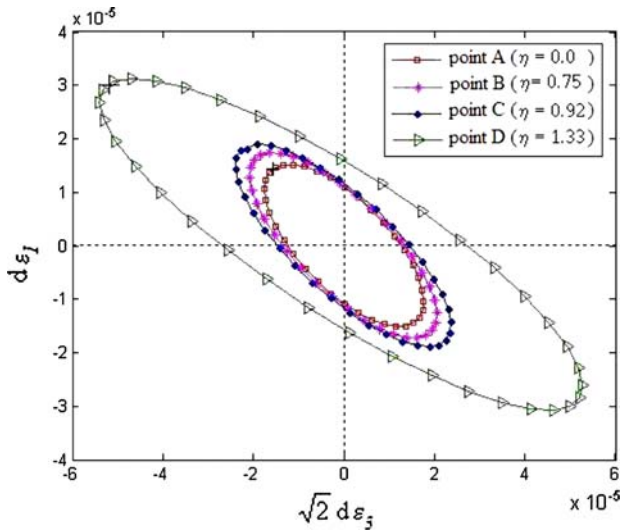


Fig. 17 Elastic response envelopes for cases A, B, C and D

imposed loading direction. Thus, this result shows that the numerical model presents clearly a flow rule for $n = 0.92$.

The norm of the plastic strain increment vector $\|d\vec{\epsilon}_p\|$, which is defined by,

$$\|d\vec{\epsilon}_p\| = \|d\vec{\epsilon} - d\vec{\epsilon}_e\| = \sqrt{(d\epsilon_1^p)^2 + (d\epsilon_2^p)^2 + (d\epsilon_3^p)^2}, \tag{14}$$

Can be plotted versus $\alpha_{d\sigma}$ for two different initial stress states, which can be, for example the initial stress states C and D (see Fig. 19). These curves have a bell shape with a maximum point located approximately at $\alpha_{d\sigma} = 140^\circ$ for the initial stress state C, and $\alpha_{d\sigma} = 150^\circ$ for the initial stress state D. Note that the magnitude of the plastic strains is about two times larger at point D than at point C. This is due to the fact that point D is closer to the failure limit, than point C.

In both cases, the development of plastic strains is limited to a portion of the stress increment plane, which is about approximately 180° .

The flow direction β_p , which is defined by:

$$\tan \beta_p = \left(\frac{d\epsilon_1^p}{\sqrt{2}d\epsilon_3^p} \right), \quad \beta_p \in [0; 360^\circ], \tag{15}$$

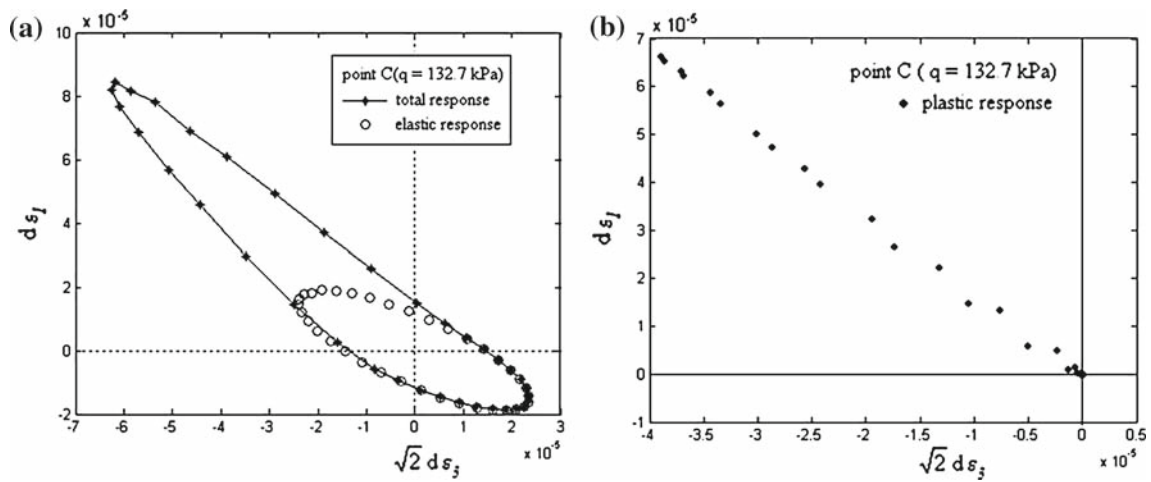


Fig. 18 DEM-LTM simulations, initial state C. Total and elastic response envelope (a) and plastic response envelope (b)

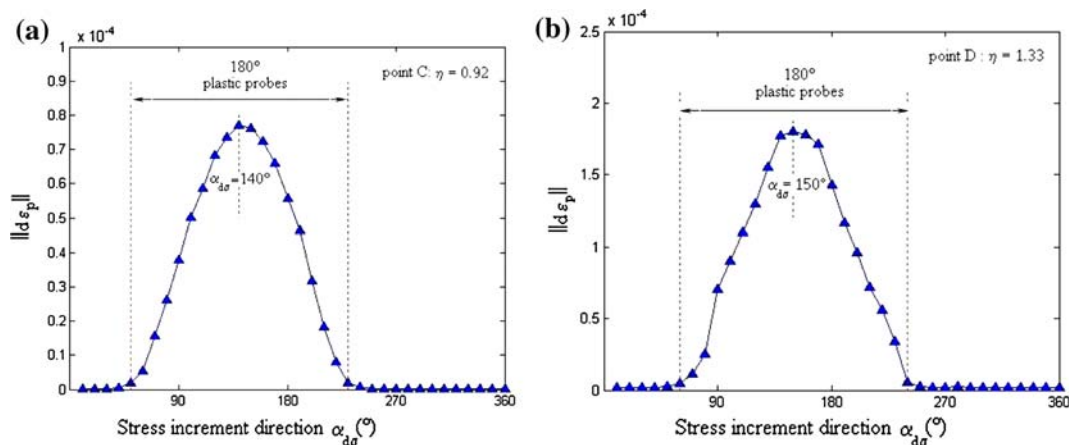


Fig. 19 Norm of plastic strain increment $\|d\bar{\epsilon}_p\|$ versus stress increment direction $\alpha_{d\sigma}$: a initial state C; b initial state D

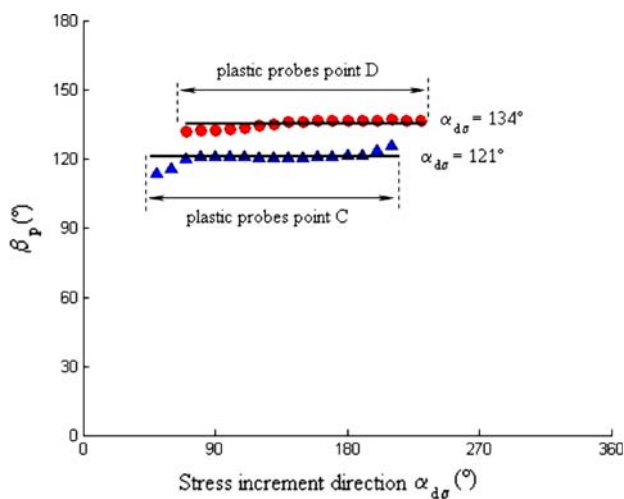


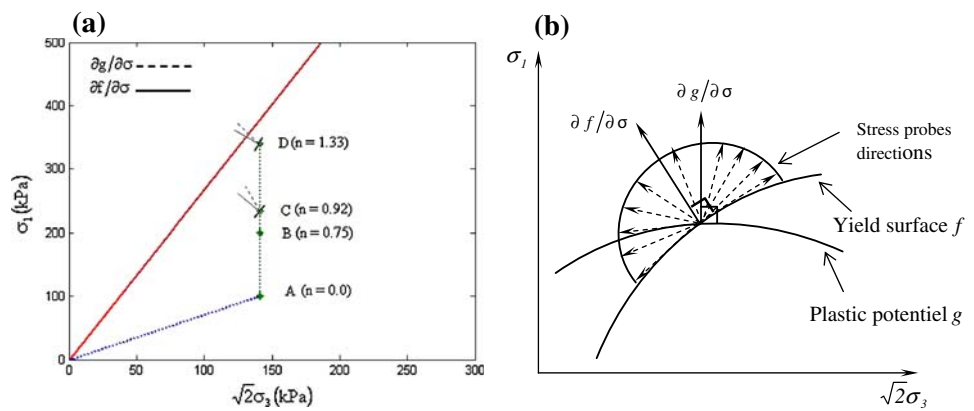
Fig. 20 Plastic flow direction β_p versus stress increment direction $\alpha_{d\sigma}$

is plotted versus $\alpha_{d\sigma}$ (see Fig. 20) for the initial stress states C and D. A fairly constant value of β_p can be observed in both cases equal to 121° and 134° for states C and D, respectively.

In terms of classical plasticity with a single loading mechanism [6, 33], the plastic flow direction noted β_p is characterized by the vector $\partial g / \partial \sigma$ normal to the plastic potential g . The plastic flow direction depends on the current stress state, but not on the stress increment direction.

The first and the last direction, separated by an angle of 180° , are tangent of the yield surface. So, it is possible to deduce the normal direction of the vector $\partial g / \partial \sigma$ from these two extreme tangents. In Fig. 19, it is observed that the first plastic strains are found from $\alpha_{d\sigma} = 50^\circ$ to $\alpha_{d\sigma} = 230^\circ$ for initial state C, and the first plastic strains are found from $\alpha_{d\sigma} = 60^\circ$ to $\alpha_{d\sigma} = 240^\circ$ for initial state D. It is clear that the tangents are collinear and the yield surface seems to be planar. So, the normal vector $\partial f / \partial \sigma$ of the yield surface f is aligned with direction $\alpha_{d\sigma} = 140^\circ$ for initial state C, and

Fig. 21 Plastic flow directions and normal of yield surface directions (a) and the stress probes directions in terms of classical plasticity generating a plastic deformation (b)



$\alpha_{d\sigma} = 150^\circ$ for initial state D, respectively. Further more, it corresponds to the maximum of $\|d\bar{\varepsilon}_p\|$. However, it is worth nothing that at both state C and D, the two directions, β_p (plastic flow direction) and $\alpha_{d\sigma}$ (loading direction) do not coincide, which is a clear indication of the non-associative-ness characteristic of the model (Fig. 21).

8 Conclusions

A calibration procedure for a DEM model using spherical elements with a local rolling resistance was presented. This model reproduces in a quantitative manner, the response of a real granular material submitted to triaxial tests, despite the fact that its formulation remains simple with a low calculation cost.

From previous work [10], where it was shown that this model can reproduce the response of a specific granular material, such as the Labenne Sand, the model using the same parameter values associated to the local behavior law, was used to investigate the global incremental behavior of a sand. Axisymmetric stress probes of same magnitude but varying in directions were applied to the numerical specimen starting from various initial stress states. Elastic and plastic strains were studied. The main conclusions are that:

- a more complete range of responses is obtained when a rolling resistance between spherical elements is used,
- it is possible to choose the values of the local parameters to control quantitatively the macroscopic response,
- the reorientation of the elastic response envelope when increasing the stress condition of the initial equilibrium state, shows the evolution of the medium response from a typical isotropic state to an anisotropic one,
- the reversible strains were found to be isotropic and linearly elastic, in axisymmetric and not preloaded stress states conditions,
- the incremental non-linearity seems to be a major feature of the observed behavior;

- for the axisymmetric studied stress probe, the direction of the incremental plastic strain is apparently independent of the direction of the incremental stress,
- as far as the simulation of axisymmetric stress probe test is concerned, the plastic response envelope seems to collapse into a unique line, which defines the direction of the plastic strain increment vector. This confirms the non-associated plasticity response of the model.

Thus, the DEM model using a rolling resistance seems able to reproduce complex behavior as observed in real granular materials, for which a non-associative flow rule is noted.

References

1. Thornton, C.: Numerical simulations of deviatoric shear deformation in granular media. *Géotechnique* **50**(4), 43–53 (2000)
2. Donzé, F.V., Bernasconi, P.: Simulation of the blasting patterns in shaft sinking using a discrete element method. *Electronic. J. Geotech. Eng.* **9**(B), 1–44 (2004)
3. Sibille, L., Nicot, F., Donze, F.V., Darve, F.: Material instability in granular assemblies from fundamentally different models. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.* **31**(3), 457–481 (2007)
4. Shiu, W., Donze, F.V., Magnier, S.A.: Numerical study of rockfalls on covered galleries by the discrete elements method. *Electronic. J. Geotech. Eng.* **11**(D) (2006)
5. Mahboubi, A., Ghaouti, A., Cambou, B.: La simulation numérique discrète du comportement des matériaux granulaires. *Rev. Franç. Geot.* **76**, 45–61 (1996)
6. Calvetti, F., Viggiani, G., Tamagnini, C.: A numerical investigation of the incremental behavior of granular soils. *Riv. Ital. Geotec.* **3**, 11–29 (2003)
7. Oda, M., Konishi, J., Nemat-Nasser, S.: Experimental micromechanical evaluation of strength of granular materials: effects of particles rolling. *Mech. Mater.* **1**, 267–283 (1982)
8. Iwashita, K., Oda, M.: Rolling resistance at contacts in simulation of shear band development by DEM. *J. Eng. Mech.* **124**, 285–292 (1998)
9. Plassiard, J.P.: Modélisation discrète d'impacts de blocs rocheux sur structures de protection type merlons. PhD Thesis, Joseph Fourier University, Grenoble (2007)
10. Belheine, N., Plassiard, J.P., Donze, F.V., Darve, F., Seridi, A.: Numerical simulation of drained triaxial test using 3D discrete element modeling. *Comput. Geotech.* **36**(1–2), 320–331 (2008)

11. Hill, R.: *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press, New York (1950)
12. Drucker, D.C., Prager, W.: Soil Mechanics and plastic Analysis or Limit Design. *Quart. Appl. Mech.* **10**, 157–165 (1952)
13. Mandel, J.: Generalisation de la théorie de la plasticité de W.T. Koiter. *Int. J. Solids. Struct.* **1**(3), 273–295 (1965)
14. Roscoe, K.H., Burland, J.B.: On the generalized stress-strain behavior of “wet” clay. In: Heyman, J., Leckie, F.A. (eds.) *Engineering Plasticity*, pp. 535–609. Cambridge University Press, Cambridge (1968)
15. Gudehus, G., Darve, F., Vardoulakis, I.: Constitutive relations of soils. pp. 5–12. Balkema, Rotterdam (1984)
16. Anandarajah, A., Sobhan, K., Kuganenthira, N.: Incremental stress-strain behavior of a granular soil. *J. Geotech. Eng.* **121**(1), 57–68 (1995)
17. Royis, P., Doanh, T.: Theoretical analysis of strain response envelopes using incrementally non-linear constitutive equations. *Int. J. Numer. Anal. Methods. Geomech.* **22**(2), 97–132 (1998)
18. Bardet, J.P.: Numerical simulations of the incremental responses of idealized granular materials. *Int. J. Plast.* **10**(8), 879–908 (1994)
19. Calvetti, F., Viggiani, G., Tamagnini, C.: On the incremental behavior of granular soils. In: *Proceedings of NUMOG VIII*, Rome, Swets & Zeitlinger, pp. 3–9 (2002)
20. Kishino, Y.: On the incremental nonlinearity observed in a numerical model for granular media. *Ital. Geotech. J.* **3**, 3–12 (2003)
21. Plassiard, J.P., Donze, F.V., Lorentz, J.: Simulation of Rockfall impact on embankments: general results and application, *Interdisciplinary Workshop on Rockfall Protection*, 23–25 June, Morschach, Switzerland (2008)
22. Donze, F.V., Magnier, S.A.: Formulation of a three dimensional numerical model of brittle behaviour. *Int. J. Geophys.* **22**, 790–802 (1995)
23. Weitz, D.A.: Packing in the spheres. *Science* **303**, 968–969 (2004)
24. Lubachevsky, B.D., Stillinger, F.H.: Geometric properties of random disk packings. *J. Stat. Phys.* **60**, 561–583 (2004)
25. Sherwood, J.D.: Packing of spheroids in three-dimensional space by random sequential add. *J. Phys. A Math. Gen.* **30**(24), L839–L843 (1997)
26. Hentz, S., Daudeville, L., Donzé, F.V.: Identification and validation of a discrete element model for concrete. *ASCE J. Eng. Mech.* **130**(6), 709–719 (2004)
27. Villard, P., Chareyre, B.: Design methods for geosynthetic anchor trenches on the basis of true scale experiments and discrete element modelling. *Can. Geotech. J.* **41**(6), 1193–1205 (2004)
28. Sibille, L., Nicot, F., Donze, F.V., Darve, F.: Material instability in granular assemblies from fundamentally different models. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* **31**, 457–481 (2007)
29. Lorentz, J., Donze, F.V., Perrotin, P., Plotto, P.: Experimental study of the dissipative efficiency of a multilayered protective structure against rockfall impact. *Rev. Eur. Génie Civ.* **10**(3), 295–308 (2006)
30. Bardet, J.P.: Observation on the effects of particle rotation on the failure of idealized granular materials. *Mech. Mater.* **18**, 159–182 (1994)
31. Gudehus, G.: A comparison of some constitutive laws for soils under radially symmetric loading and unloading. *Ing. Can. Geotech. J.* **20**, 502–516 (1979)
32. Bardet, J.P., Proubet, J. (eds.): *Application of micro-mechanics to incrementally nonlinear constitutive equations for granular media. Powders and Grains*, pp. 265–273. Balkema, Rotterdam (1989)
33. Darve, F.: The expression of reological laws in incremental form and the main classes of constitutive equations. In: Darve, F. (ed.) *Geomaterials: Constitutive Equations and Modelling*, pp. 123–148. Elsevier, London (1991)

A spherical discrete element model: calibration procedure and incremental response

Jean-Patrick Plassiard · Noura Belheine ·
Frédéric-Victor Donzé

Received: 10 June 2008 / Published online: 12 March 2009
© Springer-Verlag 2009

Abstract When using spherical elements within the Discrete Element Method, computational costs can be kept low even for large numbers of elements. However, this oversimplification of the granular geometry has drawbacks when quantitatively assessing the model even for frictional geomaterials. To overcome this limitation, the local constitutive law must at least take into account the transfer of a moment between elements. This moment, which is added to normal and shear local interaction forces, increases the number of local parameters. Moreover, when local plastic thresholds are considered, the calibration of the model becomes tricky. With such a set of local parameters, a calibration procedure is proposed, which attempts to define the respective role of each parameter in the macroscopic behavior. A series of numerical simulations of triaxial compression tests has been performed to check the capability of this model to get good quantitative results and the incremental behavior of the numerical medium is studied by performing a series of axisymmetric stress probes with varying directions. The corresponding strain responses are measured. From different initial stress states, the results indicate that the incremental response is well described by elastoplasticity with a single mechanism, and a non-associative flow rule.

Keywords Discrete element method · Calibration procedure · Incremental behavior · Stress probes · Non-associative flow rule

1 Introduction

Scaling is one of the main issues to be addressed when a model based on the Discrete Element Method is used. It has been shown that the DEM is well adapted to model a granular material, when a discrete element represents a grain [1]; in this case the characteristic size of the model is well defined. In a different way, numerous authors have used the DEM to simulate granular materials at a higher scale [2,3], i.e. the size of an element is higher than the real grain size, and for these cases, the discrete approach also gives interesting insights into the local behavior [4].

Using the DEM to tackle physical problems for real structures becomes a real challenge since billion of discrete elements would be needed, inducing a totally prohibitive computational time.

For this configuration, i.e. working at a higher scale model, the use of the DEM consists in considering, that a discrete element represents a large amount of real grains. By doing so, the local parameters must be chosen to predict the mechanical behavior of a granular material studied at a chosen macro scale.

To keep calculation costs as low as possible, a spherical geometry for discrete elements is widely used. In this case, the numerical implementation of the contact detection and resolution algorithms remain simple and fast. However, the major drawback of using spherical geometry is that excessive rolling occurs during shear displacement [5] and such models underestimate the value of the friction angle as compared to real geomaterials.

While keeping the simplicity of the spherical geometry of elements, it is possible to act upon this rolling by blocking rotations. In triaxial compression simulations (which are widely used simulations which allow the behavior of the numerical medium to be analyzed), only sliding will then

J.-P. Plassiard · N. Belheine · F.-V. Donzé (✉)
Laboratoire Sols, Solides, Structures et Risques (3S-R),
Université Joseph Fourier, Grenoble Universités,
Domaine Universitaire, BP 53, 38041 Grenoble cedex 9, France
e-mail: frederic.donze@hmg.inpg.fr

occur, which in turn, will result in a higher and better value of the friction angle [6]. This extreme option gives good results for these loadings, however, for pure shear loadings with large deformation, the rolling process in real granular soils cannot be ignored [7]. Furthermore, several drawbacks have been seen when rotations are prevented, (see for example, [6]), and in this case, only the local friction angle is used to control the strength of a granular material. However doing so, there are no other local parameters to control in an independent way the peak dilatancy angle. Moreover, the stress softening behavior observed in real material after the peak stress is not reproduced adequately [8]. This is why a moment transfer has been added to the local constitutive law of spherical DEM in 2D to overcome the limitation of the “no-rotation” model.

Starting from this two-dimensional approach, the formulation of the moment transfer law has been extended for the three-dimensional case [9]. This moment, which is added to normal and shear local interaction forces, increases the number of local parameters and with such a set of local parameters, a calibration procedure is necessary in order to take into account the respective role of each local parameter in the macroscopic behavior.

In this paper, the role of these local parameters in the macro response is shown via a parametric study. A series of numerical simulations of triaxial compression tests were done to check if this model is able to get good quantitative results [10]. In this work, the contribution of local constitutive parameters on the macroscopic response of the model is revisited: does the given model show an associative or non-associative flow rule? And what are the local mechanisms involved?

Note that this property has been extensively studied over the last decades [6], in particular using various incremental constitutive models [11–13]. Recall that from the development of the nonlinear constitutive relations [14], a great variety of constitutive models describing different aspects of soils has been proposed [15]. The fundamental feature of such models is the assumption that the stress rate is a fully non-linear function of the strain rate. These incremental nonlinearities influence not only the simulation of the stress strain response but also the description of material instability.

One of the best experimental investigations on the incremental response of granular soils, consists in loading soils specimens to a specified state in the stress space, probing incrementally in different directions, and then recording the strain responses. However, few such stress probes experiments were carried out in the past, some on clays and others on sands [16]. Recently, an investigation of this kind has been performed on Hostun sand by [17] and on fine-granular soils by [16]. In fact, it seems almost impossible to carry out reliable tests on real granular soils because it is extremely difficult to perform all stress probes on a single specimen.

For some authors, the application and subsequent removal of stress increments are also not recommended because the stress increment may generate irreversible deformation that alters the initial state of the specimen [18, 19]. These tests are also difficult on random assemblies of two dimensional disks [7] or spheres [20].

In an attempt to circumvent these experimental problems, it is proposed here, as an application, to use the calibrated discrete element model to investigate the incremental non-linearities of a numerical granular material. The strain response envelope in the Rendulic plane is determined to see if the model presents an associative or non-associative plastic flow rule. In the present work, results from an axisymmetric probing carried out for $\sigma_3 = 100$ kPa are discussed.

2 Formulation of the discrete model

Let two spherical discrete elements A and B , be in contact. The radii of these elements are r_A and r_B . In the global set of axes, their positions are defined by two vectors x_A and x_B . The interaction force vector F which represents the action of element A on element B may be decomposed into a normal and a shear vector F^n and F^s , respectively, which may be classically linked to relative displacements, through normal and tangential stiffnesses, k^n and k^s .

$$F_i^n = k^n u^n n_i, \quad (1)$$

$$\Delta F_i^s = -k^s \Delta u_i^s, \quad (2)$$

where u^n is the relative normal displacement between two elements, Δu_i^s is the incremental tangential displacement and n is the normal contact vector. The shear force F^s is obtained by summing the ΔF^s increments. The normal and tangential stiffnesses are given by:

$$k^n = r \frac{K_A^n \cdot K_B^n}{K_A^n + K_B^n}, \quad (3)$$

$$k^s = r \frac{K_A^s \cdot K_B^s}{K_A^s + K_B^s}, \quad (4)$$

where $K_A^n, K_A^s, K_B^n, K_B^s$ define the input values of normal and tangential stiffnesses K^n and K^s for both elements A and B of a contact and r corresponds to the mean value of the two radii.

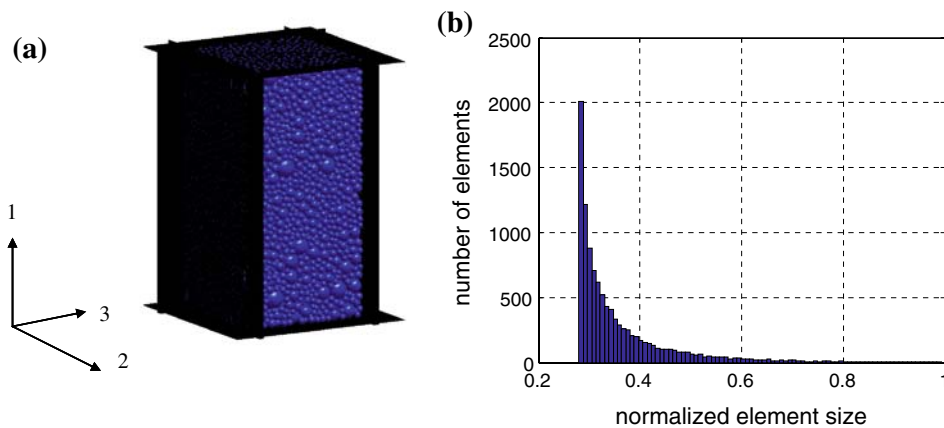
To reproduce the behavior of non-cohesive geomaterials, a Mohr–Coulomb rupture criterion is used:

$$\|F^s\| \leq \|F^n\| \cdot \tan \mu, \quad (5)$$

where μ is the local friction angle.

Let k^r be the rolling stiffness. If an isotropic rolling behavior is assumed, this value is a scalar. The elastic moment M_L^{elast} created by the rolling part in a local set of axes L is

Fig. 1 The numerical specimen (a) and the distribution size of elements, normalized by the size of the largest element (b)



written as:

$$M_L^{\text{elast}} = k^r \theta_L^r, \tag{6}$$

where θ_L^r is the angular vector of the rolling part in the set of axes L .

The rolling stiffness parameter k^r defines the level of influence that the resistant moment produces. Let's introduce a dimensionless number β^r which expresses a relationship between k^r and k^s , such that,

$$\beta^r = \frac{k^r}{k^s r^2}, \tag{7}$$

Let's also introduce η^r as a dimensionless parameter which controls the elastic limit of rolling. If $\|F^n\|$ represents the norm of the normal force at the contact point, the elastic limit is given by the plastic moment vector M_L^{plast} such that:

$$M_L^{\text{plast}} = \eta^r r \|F^n\|, \tag{8}$$

Thus, rolling moment M^r is given by:

$$M^r = m_{L-G} \min \left(\|M_L^{\text{elast}}\| ; \|M_L^{\text{plast}}\| \right) \frac{M_L^{\text{elast}}}{\|M_L^{\text{elast}}\|}, \tag{9}$$

where m_{L-G} defines the transition matrix from the local set of axes L to the global set of axes G .

This formulation [21] has been implemented in the SDEC software [22]. SDEC uses a force-displacement approach and Newton's second law of motion describes the motion of each element as the sum of all forces applied on this element. The dynamic behavior of the system is solved numerically by a time algorithm in which the velocities and the accelerations are constant at each time step. An explicit finite difference algorithm is used to reproduce the time evolution of the system.

3 Model generation

The macro-mechanical response of the numerical specimen is highly sensitive to the initial state of the sample. Numerous sphere packing methods exist [23–25]. In the present model, a radii expansion method, leading to a Weibull size distribution is obtained, such that:

$$r_w = r_{\min} + (r_{\max} - r_{\min}) \left(-\alpha \cdot \ln(1 - \text{rand}_{[0;1]}) \right)^{1/\gamma}, \tag{10}$$

Where r_w is the radius of the current element, r_{\min} and r_{\max} are the extreme radius values of elements, α and γ are the shape parameters of the chosen Weibull's distribution.

The assembly representing the numerical specimen studied in this section consisted of 10000 particles with a ratio of 4.0 between the largest and the smallest elements. Here $\alpha = 0.15$ and $\gamma = 0.75$ and the sample has a ratio of 2 (see Fig. 1).

It is also important to check the existence of a possible anisotropy arrangement due to the mode of the sample preparation. In the histogram of the contact orientation, see Fig. 2b, it is shown that the contacts are isotropically distributed. The contact forces distribution in the vertical section are plotted in Fig. 2a. The thickness of the solid lines is proportional to the force intensity. It is observed that this distribution is homogeneous. This has been checked for different sample sections, in order to check the mechanical homogeneity.

The objective is now to calibrate the model in order to reproduce macroscopically the behavior of a granular material (see Fig. 3), where the macroscopic parameters to be set are: Young's modulus E_0 , Poisson's ratio ν , the internal and residual friction angles ϕ_{peak} and ϕ_{res} (deduced from σ_{peak} and $\sigma_{\text{post-peak}}$, respectively) and the peak dilatancy angle ψ_{peak} . It is first necessary to evaluate the contribution of the local properties of the model on its global response. The results of a parametric study made on a quasi-static compression test, are now presented.

Fig. 2 Normal force distribution for a 100 kPa confining pressure (a). Vertical distribution of the contact orientation (b)

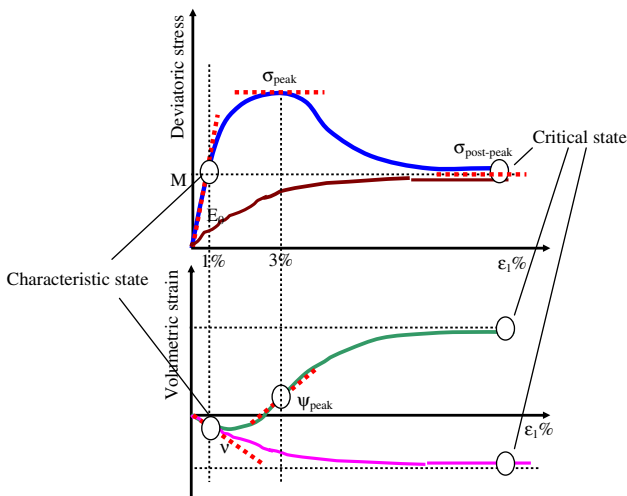
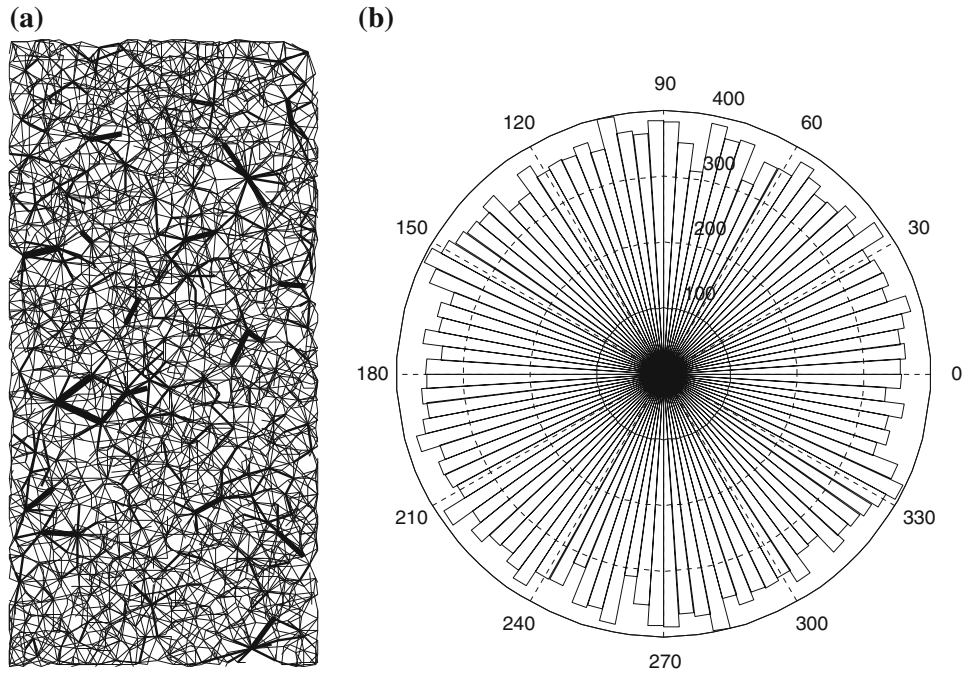


Fig. 3 Typical response obtained from triaxial tests carried out on granular materials. Differential stress q and volumetric strain ϵ_v versus axial strain ϵ_1

4 Parametric study

4.1 Quasi-static loading of the sample

Performing a simulation of triaxial test in the same condition as the experimental ones would be too computationally costly. Either the number of elements, the strain rate or the density, have to be adapted. For example, a strain rate identical to the experimental one has been combined with an increase of the density of elements in order to limit the quasi-static effects [1]. Here, another approach has been chosen.

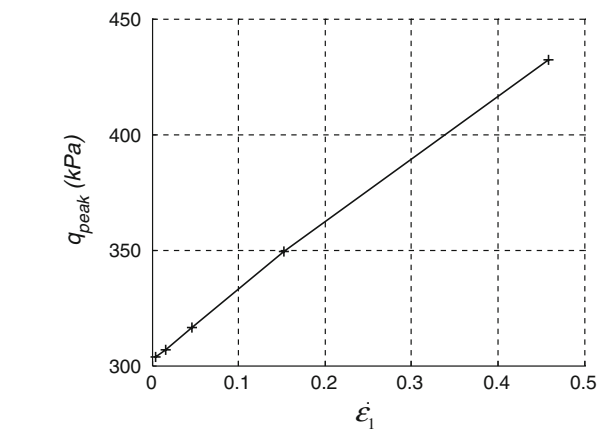


Fig. 4 Influence of the strain rate $\dot{\epsilon}_1$ on the differential stress at peak state q_{peak}

The density has been kept to a realistic value ($2,650 \text{ kg}^{-3}$) while the strain rate has been increased in order to reduce the simulation time. Consequently, the quasi-static condition is not completely verified and inertial effects appear. The linear dependence of the value of differential stress at peak state q_{peak} to the strain rate $\dot{\epsilon}_1$. A quasi-static value of q_{peak} can be deduced (see Fig. 4). Then, the strain rate is chosen as high as possible but without generating inertial effects such that the error made on the deduced internal friction angle exceeds one degree. With respect to these conditions, a strain rate of 0.015 s^{-1} has been chosen. The time step is determined by a ratio between the contact stiffnesses and the mass of elements [9]. Here, the time step is equal to $1.2 \times 10^{-4} \text{ s}$.

Table 1 Values of the local parameters of the Discrete Element model

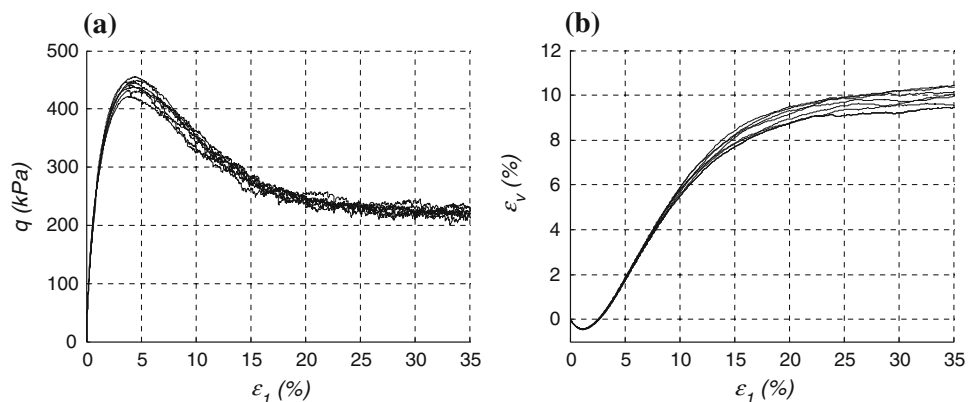
Parameters	Values
Normal stiffness K^n (MNm ⁻²)	170
Tangential stiffness K^s (MNm ⁻²)	35
Local friction angle μ (°)	17
Coefficient of rolling stiffness β^r [-]	1.8
Coefficient of rolling elastic limit η^r [-]	1.8

4.2 Effect of the random process for generating samples

Eight different samples have been generated, with the same geometry, and a nearly identical size distribution, but only differing through the random aspect of their generation. The test series were performed with identical local parameters (see Table 1). The aim of these tests was to verify that the numerical results do not depend on the initial random process of the discrete element distribution, as long as the distribution size function is kept constant. This aspect is particularly needed for the calibration process [9,26,27]).

The results, presented in Fig. 5 show that the curves ($q : \varepsilon_1$) and ($\varepsilon_1 : \varepsilon_v$) exhibit the same elastic response. For higher strain, the peak stress and the residual stress vary in a range of 25 kPa, corresponding to a margin of variation of 1° on both the internal and residual friction angles ϕ_{peak} and ϕ_{res} . The peak dilatancy is almost the same in all cases while a more important fluctuation is observed when axial strain exceed 15%. The evolution of volumetric strains is unpredictable after the peak stress in experimental tests also (i.e. important fluctuations are observed). Thus, the fluctuation observed at large strain in the numerical model is not considered here. The last results indicate that the sample formed of 10000 discrete elements should be sufficient to contain the effect of the initial discrete element distribution. Furthermore, the use of a sample made up of less than 10,000 discrete elements would induce too much fluctuation on the response.

Fig. 5 Triaxial test of eight samples randomly generated under the same conditions. Differential stress (a) and volumetric strain (b) are plotted versus axial strain



4.3 Effect of the discrete element size

Since the ultimate goal of this work is to model the geomaterial at a macro-scale, the choice of discrete element size should have a low influence on the global response of the system. This is why, the local behavior laws take into account the characteristic size of the discrete elements. In order to study this effect, four samples of identical sizes but with different numbers of elements (respectively 10,000, 20,000, 50,000, 90,000 elements), have been used. A triaxial test has been carried out for each sample. The stress-strain curves resulting from the triaxial test are presented in Fig. 6. It is verified that the global response is kept constant, except for the volumetric strain at residual state but the difference remains small for the chosen range of distribution size. It has also been verified that a proportional transformation of the sample does not affect the behavior of the sample [9]. The mechanical response obtained is independent of the mean size of the elements and from the characteristic size of the sample also.

Thus, using only 10,000 element in the model still seems reasonable to avoid size effects on the numerical medium response. Note that, it also confirms the reproducibility observed in Fig. 5.

4.4 Effect of the local contact law parameters on the mechanical response

The local contact law is characterized by the following local parameters:

- the normal and tangential contact stiffness's (K^n and K^s),
- the inter-particle friction angle μ ,
- the coefficient of rolling stiffness β^r ,
- and the coefficient of rolling elastic limit η^r (which controls the rolling resistance).

It has been previously shown that the elastic parameters (K^n and K^s) and the rupture parameters (μ , β^r , η^r) can be

Fig. 6 Triaxial loading of samples made of different numbers of elements. Deviatoric stress (a) and volumetric strain (b) are plotted versus axial strain

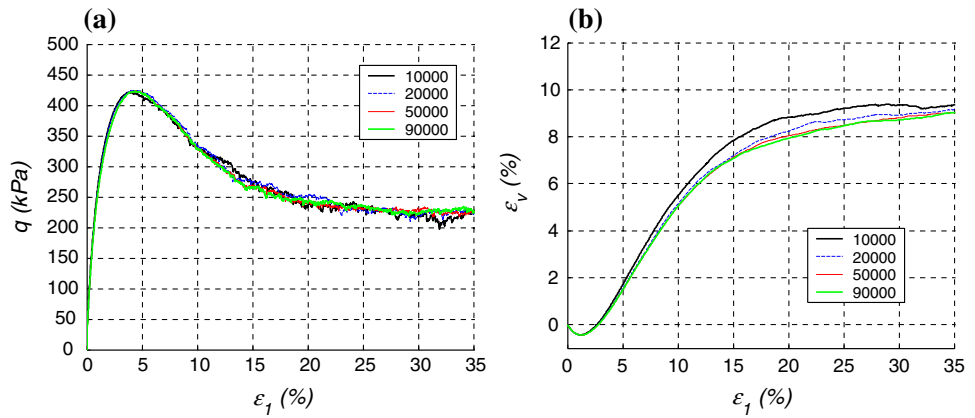
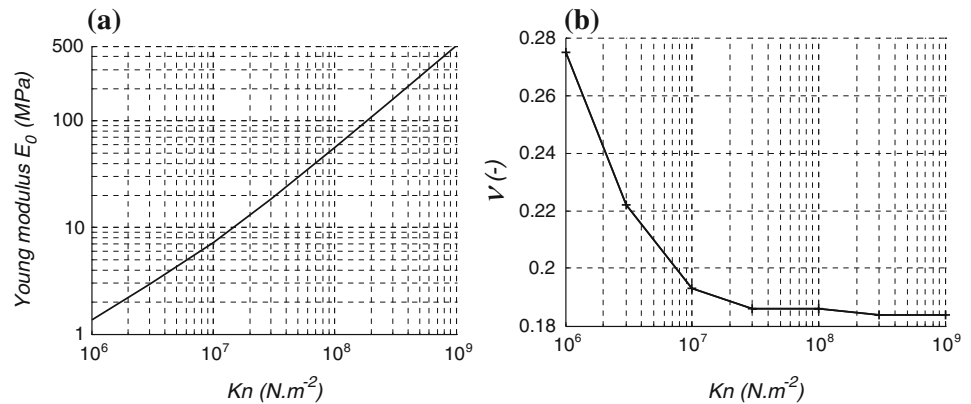


Fig. 7 Influence of the input value of normal stiffness K^n on the elastic response: Young's modulus (a) and Poisson's ratio (b) for $K^s = 35 \text{ MNm}^{-2}$



calibrated separately [6,28], and in the following paragraph, the contribution of the elastic parameters is first studied.

4.4.1 Effect of the local elastic parameters (K^n , K^s)

The local elastic parameters K^n and K^s play a major role in the elastic response. Note that, it has been observed that the β^r parameter has some influence on the elastic response, but it remains low (less than 10% on Young's modulus E_0 and Poisson's ratio ν). Thus, only K^n and K^s will be set first to calibrate the macroscopic elastic behavior. Figure 7 shows the relationship between the elastic microscopic parameter K^n and elastic macroscopic parameters, Young's modulus E_0 and Poisson's ratio ν obtained from axial compressive tests. It can be seen that, there is an almost linear relationship between the *logarithms* of the normal input stiffness K^n and Young's modulus E_0 (see Fig. 7a) for $K^s = 35 \text{ MNm}^{-2}$. In other words, a power law rules the relationship between the input normal stiffness K^n and Young's modulus E_0 .

Poisson's ratio depends on K^n for values less than 10^7 Nm^{-2} (see Fig. 7b) but it is almost independent in the studied domain [10^7 Nm^{-2} ; 10^8 Nm^{-2}]. Moreover, it has been observed that the computed elastic response of the numerical specimen is relatively unaffected for assumed values of K^n greater than $3 \cdot 10^7 \text{ Nm}^{-2}$. Young's modulus E_0 is mainly

influenced by the elastic input parameter K^n in the domain of interest [9].

Secondly, the influence of the tangential stiffness K^s on the macroscopic response is studied. It corresponds to the second parameter governing the elastic behavior. Let's define the ratio between the normal and tangential stiffnesses:

$$\alpha = \frac{K^s}{K^n}, \tag{11}$$

In Fig. 8, the relationship between ratio α and both Young's modulus E_0 and Poisson's ratio ν are plotted. It can be seen that this relationship between E_0 and α is almost linear, for the chosen range of values (see Fig. 8a). The results seem coherent with a value of 0.25 for Poisson's ratio when $\alpha \rightarrow 0$. In Fig. 9, the effect of ratio $\alpha = \frac{K^s}{K^n}$ on the stress-strain response is shown. This confirms that there is no influence on the critical state. Thus K^s should only influence the elastic behavior.

4.4.2 Effect of the local friction angle μ

The effect of the local friction angle μ on the macroscopic response is now studied using triaxial tests. Four sets of simulations were performed, with $\mu = 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$ and 50° . In Fig. 10, the macroscopic stress strain curves are represented

Fig. 8 Influence of ratio $\alpha = \frac{K^s}{K^n}$ on the elastic response with $K^n = 200 \text{ MNm}^{-2}$: Young modulus (a) and Poisson's ratio (b)

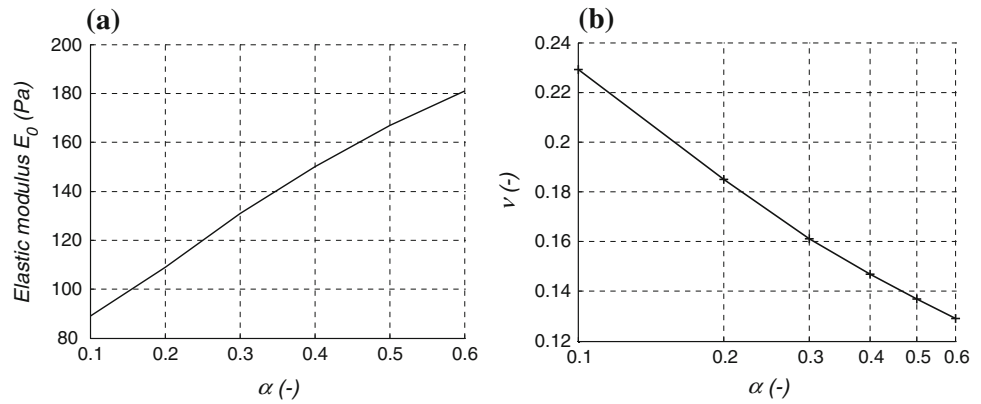


Fig. 9 Triaxial tests for different values of $\alpha = \frac{K^s}{K^n}$ (with $K^n = 200 \text{ MNm}^{-2}$): differential stress (a) and volumetric strain (b) are plotted versus axial strain

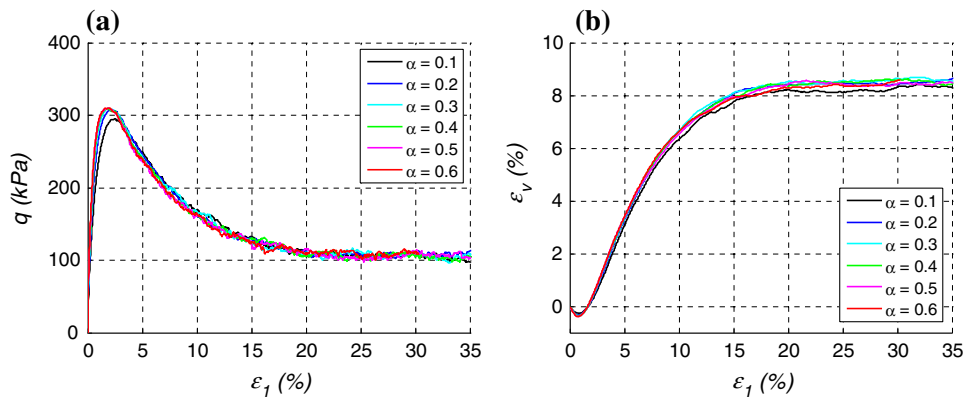
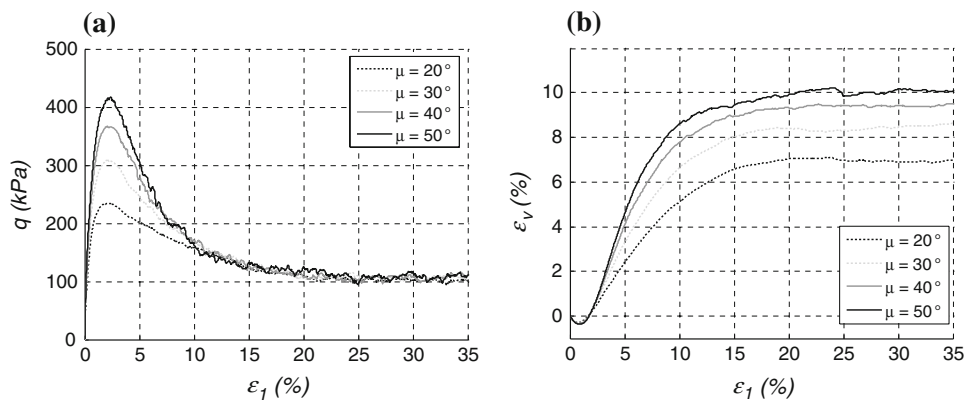


Fig. 10 Triaxial tests for different values of μ . Differential stress (a) and volumetric strain (b) are plotted versus axial strain



for the various contact friction angles. The elastic response keeps the same path but the peak stress level and the dilatancy angle have been modified when increasing the local contact friction angle. It can also be noticed that there is a negligible effect of μ on the residual state. This result is in agreement with previous results [27] and it will be assumed that the local friction angle μ influence ϕ_{peak} and ψ_{peak} , only.

4.4.3 Effect of the coefficient of rolling stiffness β^r

Several simulation tests were carried out, by changing the coefficient of rolling stiffness β^r , to see its effect on the macroscopic response of the model. Note that, previous

numerical simulations performed by [9,10,29] and [10], using a β^r ranging from 0.12 to 1.0, as it is also the case here, showed a negligible variation of the elastic response (lower than 5%). Consequently, and as noted in the beginning of Sect. 4.4, the effect of β^r on the elastic response can be neglected [9]. This assumption coincides also with other authors' results [30].

The relationships between differential stresses, axial strain and volumetric strain are shown in Fig. 11 for four tests with different values of β^r ranging from 0.1 to 3.0. The curves are quite similar in shape with a little influence of β^r on the peak dilatancy angle ψ_{peak} , but β^r has a strong influence on the stress peak and the residual state.

Fig. 11 Triaxial compression for different values of β^r . Differential stress (a) and volumetric strain (b) are plotted versus axial strain

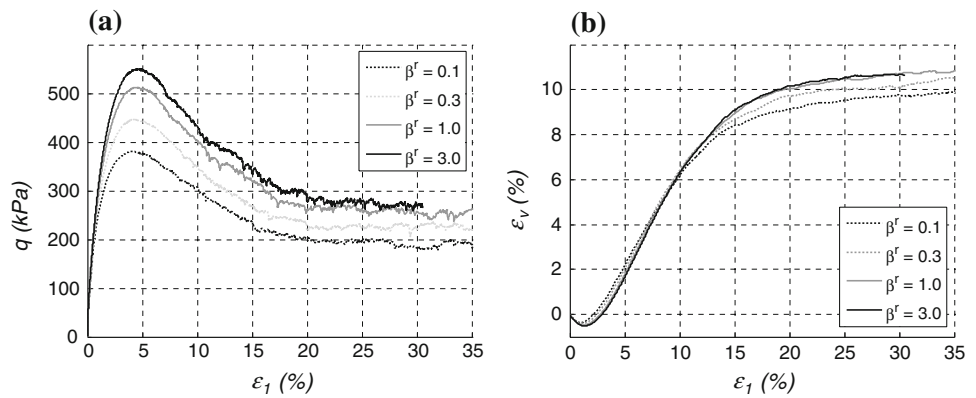
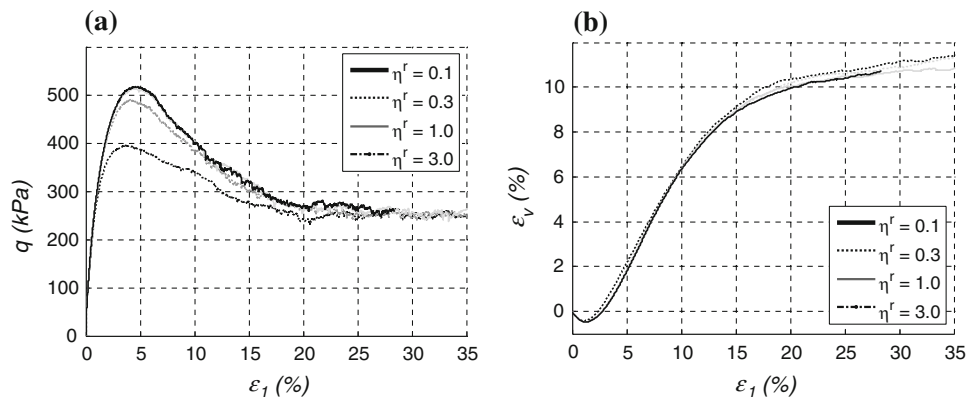


Fig. 12 Triaxial compression for different values of η^r . Differential stress (a) and volumetric strain (b) are plotted versus axial strain



4.4.4 Effect of the coefficient of rolling elastic limit η^r

Finally, numerical tests were performed using different values of η^r also ranging from 0.1 to 3.0. Contrary to what was observed for β^r , η^r has no influence, neither on the peak angle ψ_{peak} , nor on the residual friction angle ϕ_{res} , but only on the stress peak (see Fig. 12).

5 The calibration methodology

From the parametric study presented in Sect. 4 and the typical macroscopic responses obtained from triaxial tests on granular material (see Fig. 17), the selected macroscopic parameters, such as: Young’s modulus E_0 and Poisson’s ratio ν , the peak friction angle ϕ_{peak} , the dilatancy angle ψ_{peak} and the residual friction angle ϕ_{res} , can be now obtained from the local parameter values.

It was seen in previous sections, that the elastic parameters (K^n , K^s) and the rupture parameters (μ , β^r , η^r) can be calibrated separately [9,10]. First, Poisson’s ratio is set for the corresponding α value (see Fig. 8b). To do so, the value of K^s is set with an arbitrary value of K^n . Then, keeping α constant K^n is set such that the desired value of Young’s modulus is obtained (see Fig. 7a). The value of K^s has been modified as well.

Table 2 Values of the macroscopic parameters of the discrete element model

Parameters	Values
Young modulus $E_0(MPa)$	100
Poisson’s ratio $\nu(-)$	0.2
Internal friction angle $\phi_{peak}(^\circ)$	43
Peak dilatancy angle $\psi_{peak}(^\circ)$	16
Residual friction angle $\phi_{res}(^\circ)$	32

Once these local elastic parameters are set, the values of the other local parameters (μ , β^r , η^r) must be determined to fix ϕ_{peak} , ϕ_{res} and ψ_{peak} . First, it has been seen that the local friction angle μ has a major influence on both ϕ_{peak} and ψ_{peak} . Then, it has been observed that β^r has little influence on ψ_{peak} . Thus, the value of μ is chosen first to set the value of ψ_{peak} and once μ chosen, the value of β^r sets the value of ϕ_{res} . Finally, η^r which has little influence on both ϕ_{res} and ψ_{peak} , is used to set the value of ϕ_{peak} .

For example, using the local parameters given in Table 1, the resulting macroscopic features are given in Table 2.

This cross dependency investigation indicates that the local parameters (K^n , K^s , μ , β^r , η^r) have a uniqueness value. This calibration methodology has proven to be efficiency to

Table 3 Values of the local parameters of the model used to simulate the stress probe [10]

Parameters	
Normal stiffness K^n (MNm^{-2})	960
Tangential stiffness K^s (MNm^{-2})	38.4
Local friction angle μ ($^\circ$)	30.0
Coefficient of rolling stiffness β^r [-]	0.12
Coefficient of rolling Elastic limit η^r [-]	1.0

model a triaxial test carried out on the Labenne sand [10]. The numerical results were found in good qualitative and quantitative agreement with the experimental observation, even in a predictive way when different confining pressures were imposed to the same sample.

6 Incremental response and numerical stress probe tests: application and study

The numerical simulation of stress probes gives the possibility to investigate on the nature of the incremental behavior of the model, by using the so-called response envelope. The response envelope idea was introduced first by [31] to estimate the properties of a given incremental constitutive equation. In practice, it is difficult to determine the response envelope because it requires the preparation of many samples with identical material properties. This is why, Bardet and Proubet [32] suggested the use of numerical simulations with DEM to get the solution to this problem; from an identical numerical sample, it becomes possible to perform different loading histories.

Starting from a validated configuration (Table 3) obtained to reproduce the behavior of real sand [10], the stress-strain

curve in the $q : \varepsilon_1$ plane and the volumetric response of the material in the $\varepsilon_V : \varepsilon_1$ plane obtained with the set of parameters are shown in Fig. 13.

The initial stress probe states are obtained after two consecutive stress paths, which are composed of an initial isotropic compression followed by an axisymmetric triaxial compression for which $\sigma_2 = \sigma_3$ are kept constant. The simulation is stopped for a pre-defined value of $n = \frac{q}{p}$ [28], where $q = \sigma_1 - \sigma_3$ is the differential stress value and $p = (\sigma_1 + 2\sigma_3)/3$ is the mean effective stress value. Prior to the stress probe, a reference direction $\alpha_{d\sigma} = 10^\circ$ has been chosen in order to keep a reasonable cost of the calculation process. Then, at a given reference stress state, the norm of the stress increment $\|d\vec{\sigma}\|$ is kept constant for all different directions. The magnitude of the stress probe, defined as: $\|d\vec{\sigma}\| = \sqrt{(d\sigma_1)^2 + 2(d\sigma_3)^2}$ has been set to 1 kPa in this paper. In the present study, four states [noted (A), (B), (C) and (D) in Fig. 13] were investigated. These initial equilibrium states can also be plotted in the $q : p$ plane (see Fig. 14).

Therefore, for each initial state, the stress probes are performed from initial stress-strain state by imposing a loading vector $d\sigma$ defined in the Rendulic plane of stress increment ($d\sigma_1 : \sqrt{2}d\sigma_3$), by its norm $\|d\vec{\sigma}\| = 1$ kPa and the angle direction $\alpha_{d\sigma}$ (see Fig. 15). Note that $\alpha_{d\sigma}$, defined by:

$$\tan \alpha_{d\sigma} = \left(\frac{d\sigma_1}{\sqrt{2}d\sigma_3} \right) \quad \alpha_{d\sigma} \in [0; 360^\circ], \tag{12}$$

is increased from 0° to 360° by increments of 10° . The stress probes define a circle of radius 1 kPa in the Rendulic plane of stress increment (see Fig. 15a).

The response to the stress probes is depicted by using the incremental strain response envelope. The strain response envelope is defined as the image $d\varepsilon = f(d\sigma, \sigma)$ in the strain space of the unit sphere in the stress space, which becomes

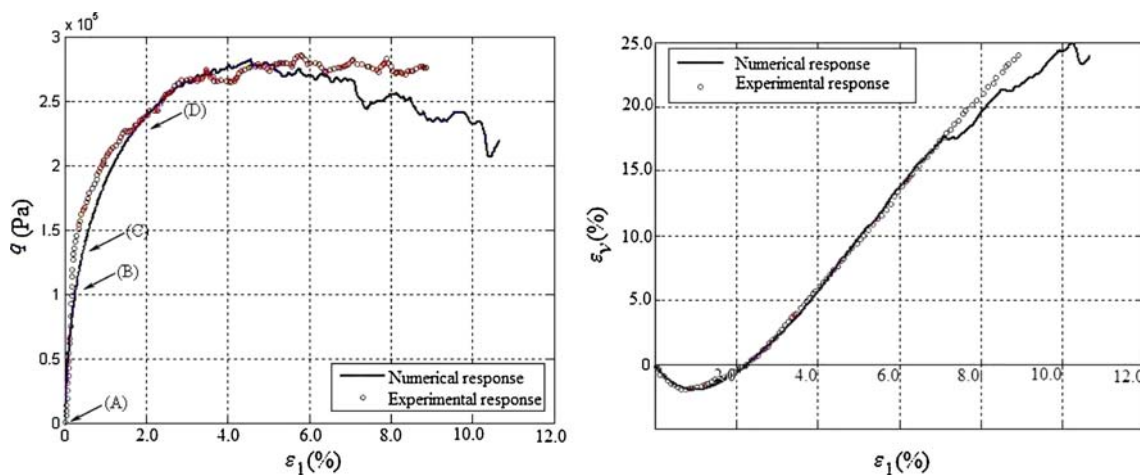


Fig. 13 Differential Stress and volumetric strain are plotted versus the axial strain for a confining pressure $\sigma_3 = 100$ kPa

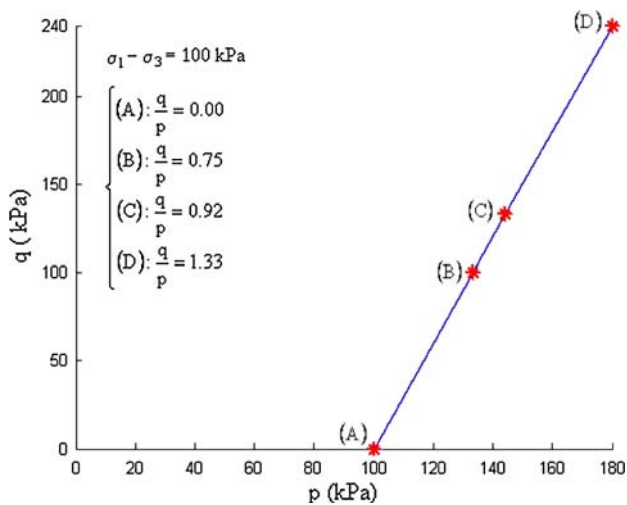


Fig. 14 Equilibrium state (A), (B), (C) and (D) for $\sigma_3 = 100$ kPa

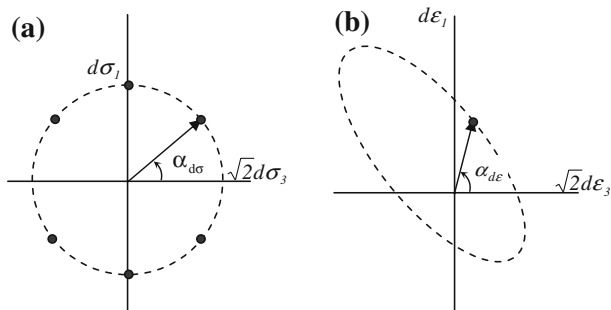


Fig. 15 Definition of Rendulic planes: stress probes (a) and strain responses (b)

an asymmetric surface in the strain space [31]. In the general case, an incremental strain response envelope is a surface in a six dimensional space. However, in the particular case of axisymmetric loading, the number of independent stress and strain variables reduces to two, and the strain-response envelope can be represented in the Rendulic plane of strain increments [19], $(d\epsilon_1 : \sqrt{2}d\epsilon_3)$ (see Fig. 15b).

7 Prediction of the response envelopes

7.1 Total, elastic and plastic response envelopes

Since no experimental envelope response of the Labenne sand is available to validate the present model, the objective of these numerical stress probes is to propose a possible and reasonable incremental behavior of granular soils [10,21]. For this purpose, four different equilibrium states are presently studied.

The computed response envelopes obtained upon stress probing from the initial equilibrium state A, B, C and D

for a confinement pressure $\sigma_3 = 100$ kPa are presented in Fig. 16.

For the initial isotropic state corresponding to case A with $n = 0.0$ (see Figs. 13, 14), the response envelope is regular and symmetric with respect to the origin of the strain increment space in which the principal axis, forms an angle of approximately, 125° (see Fig. 16), and the cross symbol on the figure represents the deformation response due to the purely differential loading ($d\sigma_1 = -2d\sigma_3 > 0$ for $dp = 0$ and $\alpha = 125^\circ$), and its direction is aligned with the principal axis of the ellipse ($\beta = 125^\circ$). For the initial states (B), with $n = 0.75$, (C) with $n = 0.92$ and (D) with $n = 1.33$ (see Figs. 13, 14), which represent an increase of the stress ratio for the initial state, the obtained response envelopes are asymmetric (see Fig. 16), which is a clear indication on the existence of a flow level.

These results are in good agreement with those found in literature [6,17,28].

To go further in the study of the response envelope, the total strain increments are split into their elastic and plastic parts. Thus, the total strain increment can be expressed as,

$$d\vec{\epsilon} = d\vec{\epsilon}_e + d\vec{\epsilon}_p, \tag{13}$$

Different methods can be used to calculate the elastic strain increment [28]. In the present work, the mechanisms responsible for the energy dissipation (interparticle sliding) and structure rearrangement (opening of contacts) are inhibited at the micro scale in order to calculate the elastic strain increment [19]. The plastic strain increments are then computed as the difference between the total strain increments and the elastic strain increments.

The elastic strain envelopes computed for all the initial equilibrium states (A, B, C and D) are represented in Fig. 17. One can note that the incremental response envelopes obtained are elliptic in the Rendulic plane of strain increment, as theoretically expected for an incrementally linear, elastic material [31,32]. The response envelopes keep an elliptical shape, but their orientations change with the value of n for cases B, C and D. Here, and contrary to the ellipse calculated for the isotropic states $n = 0.0$, the direction of the principal axis forms an angle greater than 125° , and the direction of the deformation response due to the purely differential loading, is not aligned with the principal axis of the ellipse anymore. This reorientation of envelope responses appears to be the consequence of an anisotropic incrementally linear behavior [18,31].

Now, let's consider the initial state C in term of elastic and plastic strain increments (see Fig. 18). The plastic part of the total strain increment, presented in Fig. 18b, shows that the response envelope nearly collapses into a straight line, which indicates that the plastic flow direction is independent of the

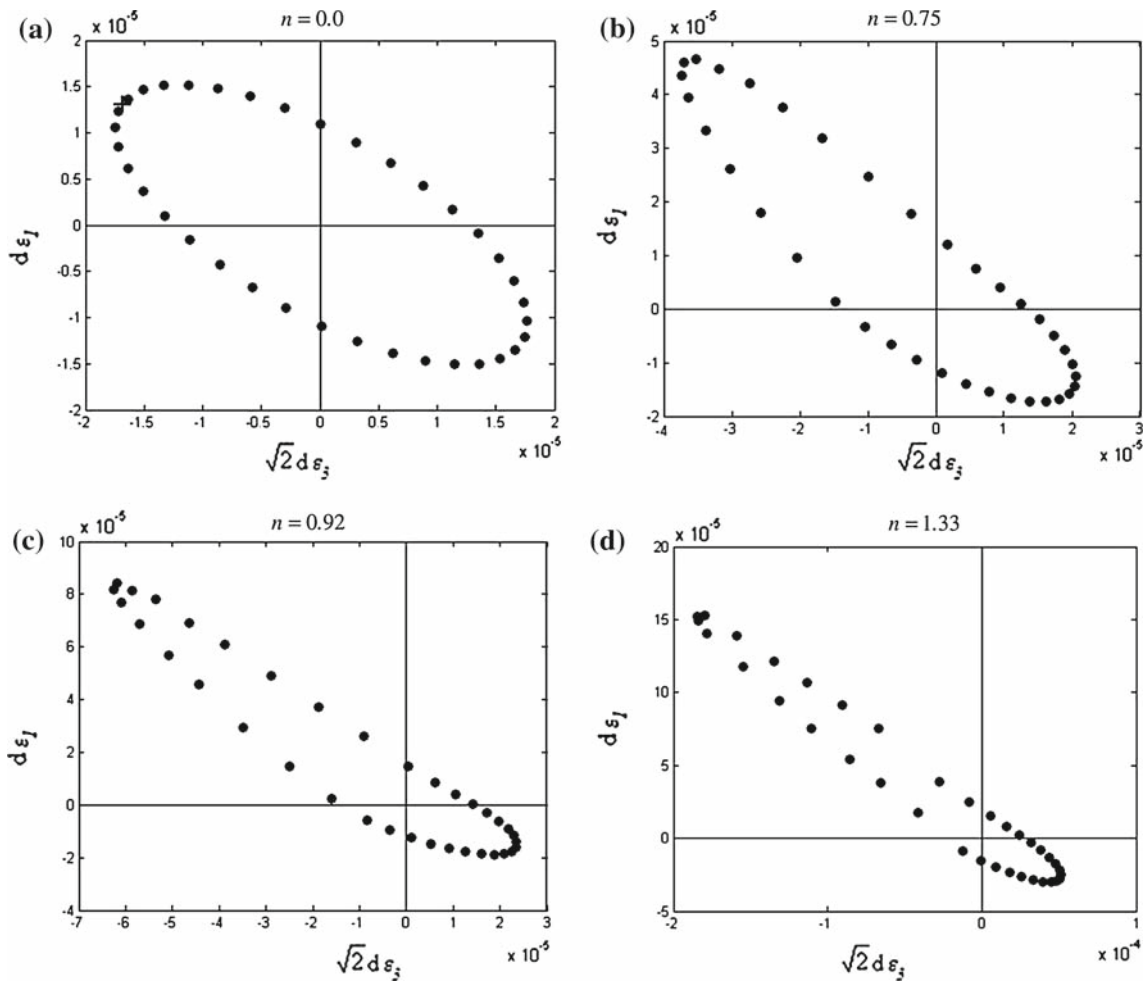


Fig. 16 Numerical response envelopes: **a** initial state A; **b** initial state B; **c** initial state C; **d** initial state D

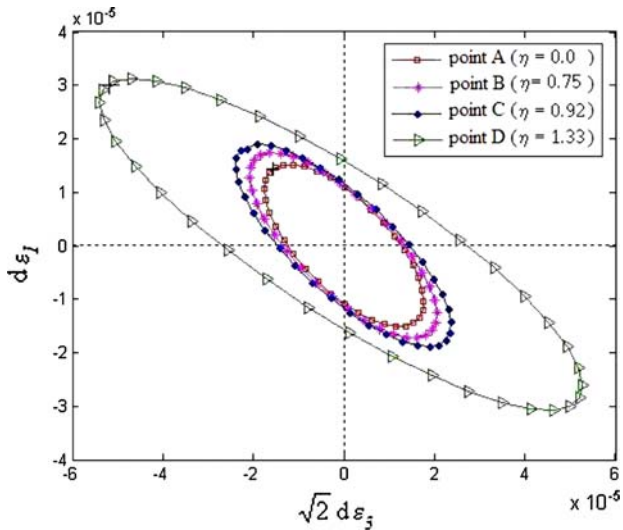


Fig. 17 Elastic response envelopes for cases A, B, C and D

imposed loading direction. Thus, this result shows that the numerical model presents clearly a flow rule for $n = 0.92$.

The norm of the plastic strain increment vector $\|d\vec{\epsilon}_p\|$, which is defined by,

$$\|d\vec{\epsilon}_p\| = \|d\vec{\epsilon} - d\vec{\epsilon}_e\| = \sqrt{(d\epsilon_1^p)^2 + (d\epsilon_2^p)^2 + (d\epsilon_3^p)^2}, \tag{14}$$

Can be plotted versus $\alpha_{d\sigma}$ for two different initial stress states, which can be, for example the initial stress states C and D (see Fig. 19). These curves have a bell shape with a maximum point located approximately at $\alpha_{d\sigma} = 140^\circ$ for the initial stress state C, and $\alpha_{d\sigma} = 150^\circ$ for the initial stress state D. Note that the magnitude of the plastic strains is about two times larger at point D than at point C. This is due to the fact that point D is closer to the failure limit, than point C.

In both cases, the development of plastic strains is limited to a portion of the stress increment plane, which is about approximately 180° .

The flow direction β_p , which is defined by:

$$\tan \beta_p = \left(\frac{d\epsilon_1^p}{\sqrt{2}d\epsilon_3^p} \right), \quad \beta_p \in [0; 360^\circ], \tag{15}$$

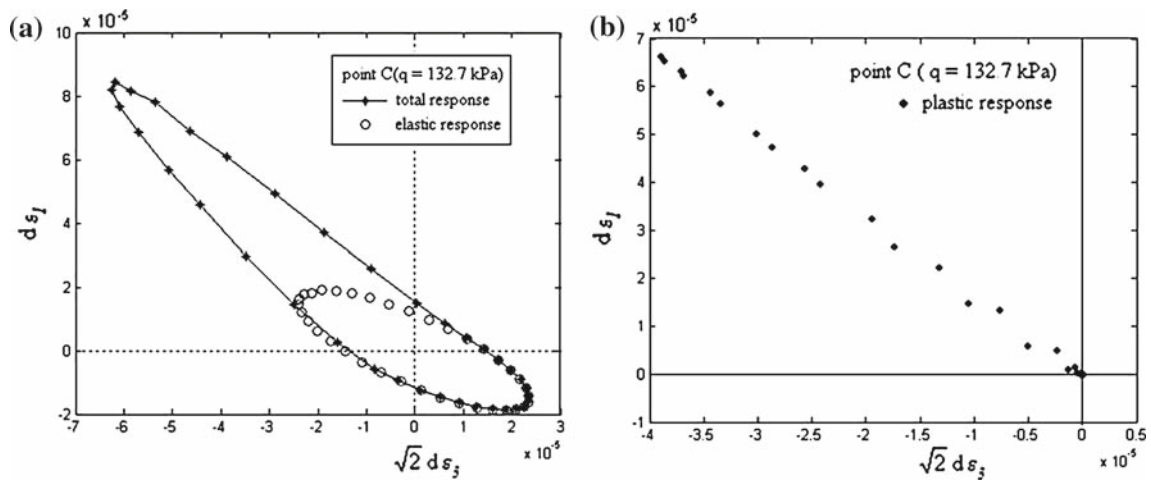


Fig. 18 DEM-LTM simulations, initial state C. Total and elastic response envelope (a) and plastic response envelope (b)

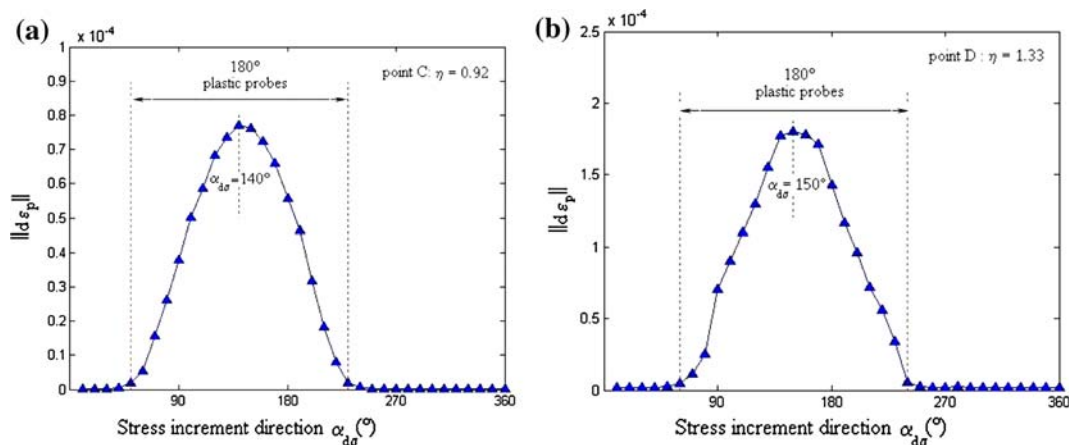


Fig. 19 Norm of plastic strain increment $\|d\bar{\epsilon}_p\|$ versus stress increment direction $\alpha_{d\sigma}$: a initial state C; b initial state D

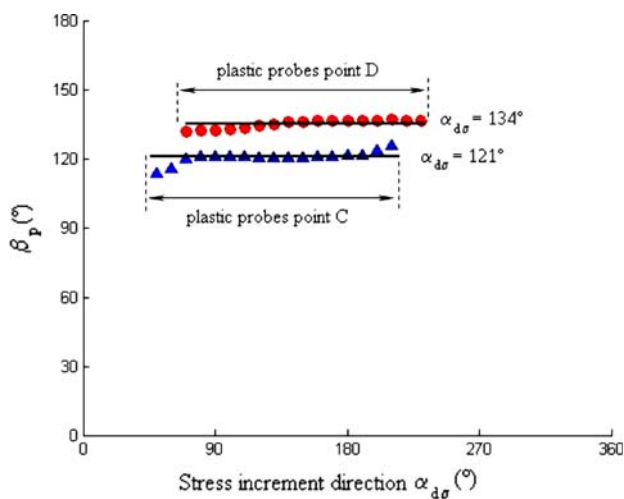


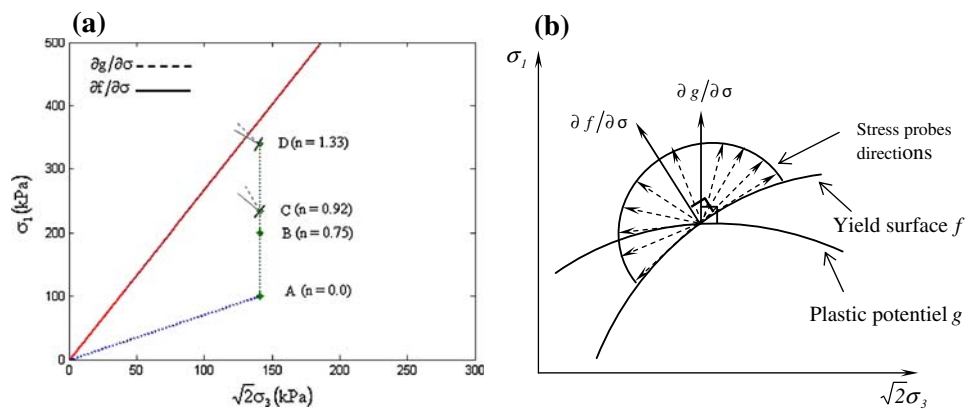
Fig. 20 Plastic flow direction β_p versus stress increment direction $\alpha_{d\sigma}$

is plotted versus $\alpha_{d\sigma}$ (see Fig. 20) for the initial stress states C and D. A fairly constant value of β_p can be observed in both cases equal to 121° and 134° for states C and D, respectively.

In terms of classical plasticity with a single loading mechanism [6, 33], the plastic flow direction noted β_p is characterized by the vector $\partial g / \partial \sigma$ normal to the plastic potential g . The plastic flow direction depends on the current stress state, but not on the stress increment direction.

The first and the last direction, separated by an angle of 180° , are tangent of the yield surface. So, it is possible to deduce the normal direction of the vector $\partial g / \partial \sigma$ from these two extreme tangents. In Fig. 19, it is observed that the first plastic strains are found from $\alpha_{d\sigma} = 50^\circ$ to $\alpha_{d\sigma} = 230^\circ$ for initial state C, and the first plastic strains are found from $\alpha_{d\sigma} = 60^\circ$ to $\alpha_{d\sigma} = 240^\circ$ for initial state D. It is clear that the tangents are collinear and the yield surface seems to be planar. So, the normal vector $\partial f / \partial \sigma$ of the yield surface f is aligned with direction $\alpha_{d\sigma} = 140^\circ$ for initial state C, and

Fig. 21 Plastic flow directions and normal of yield surface directions (a) and the stress probes directions in terms of classical plasticity generating a plastic deformation (b)



$\alpha_{d\sigma} = 150^\circ$ for initial state D, respectively. Further more, it corresponds to the maximum of $\|d\bar{\epsilon}_p\|$. However, it is worth nothing that at both state C and D, the two directions, β_p (plastic flow direction) and $\alpha_{d\sigma}$ (loading direction) do not coincide, which is a clear indication of the non-associative-ness characteristic of the model (Fig. 21).

8 Conclusions

A calibration procedure for a DEM model using spherical elements with a local rolling resistance was presented. This model reproduces in a quantitative manner, the response of a real granular material submitted to triaxial tests, despite the fact that its formulation remains simple with a low calculation cost.

From previous work [10], where it was shown that this model can reproduce the response of a specific granular material, such as the Labenne Sand, the model using the same parameter values associated to the local behavior law, was used to investigate the global incremental behavior of a sand. Axisymmetric stress probes of same magnitude but varying in directions were applied to the numerical specimen starting from various initial stress states. Elastic and plastic strains were studied. The main conclusions are that:

- a more complete range of responses is obtained when a rolling resistance between spherical elements is used,
- it is possible to choose the values of the local parameters to control quantitatively the macroscopic response,
- the reorientation of the elastic response envelope when increasing the stress condition of the initial equilibrium state, shows the evolution of the medium response from a typical isotropic state to an anisotropic one,
- the reversible strains were found to be isotropic and linearly elastic, in axisymmetric and not preloaded stress states conditions,
- the incremental non-linearity seems to be a major feature of the observed behavior;

- for the axisymmetric studied stress probe, the direction of the incremental plastic strain is apparently independent of the direction of the incremental stress,
- as far as the simulation of axisymmetric stress probe test is concerned, the plastic response envelope seems to collapse into a unique line, which defines the direction of the plastic strain increment vector. This confirms the non-associated plasticity response of the model.

Thus, the DEM model using a rolling resistance seems able to reproduce complex behavior as observed in real granular materials, for which a non-associative flow rule is noted.

References

1. Thornton, C.: Numerical simulations of deviatoric shear deformation in granular media. *Géotechnique* **50**(4), 43–53 (2000)
2. Donzé, F.V., Bernasconi, P.: Simulation of the blasting patterns in shaft sinking using a discrete element method. *Electronic. J. Geotech. Eng.* **9**(B), 1–44 (2004)
3. Sibille, L., Nicot, F., Donze, F.V., Darve, F.: Material instability in granular assemblies from fundamentally different models. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.* **31**(3), 457–481 (2007)
4. Shiu, W., Donze, F.V., Magnier, S.A.: Numerical study of rockfalls on covered galleries by the discrete elements method. *Electronic. J. Geotech. Eng.* **11**(D) (2006)
5. Mahboubi, A., Ghaouti, A., Cambou, B.: La simulation numérique discrète du comportement des matériaux granulaires. *Rev. Franç. Geot.* **76**, 45–61 (1996)
6. Calvetti, F., Viggiani, G., Tamagnini, C.: A numerical investigation of the incremental behavior of granular soils. *Riv. Ital. Geotec.* **3**, 11–29 (2003)
7. Oda, M., Konishi, J., Nemat-Nasser, S.: Experimental micromechanical evaluation of strength of granular materials: effects of particles rolling. *Mech. Mater.* **1**, 267–283 (1982)
8. Iwashita, K., Oda, M.: Rolling resistance at contacts in simulation of shear band development by DEM. *J. Eng. Mech.* **124**, 285–292 (1998)
9. Plassiard, J.P.: Modélisation discrète d'impacts de blocs rocheux sur structures de protection type merlons. PhD Thesis, Joseph Fourier University, Grenoble (2007)
10. Belheine, N., Plassiard, J.P., Donze, F.V., Darve, F., Seridi, A.: Numerical simulation of drained triaxial test using 3D discrete element modeling. *Comput. Geotech.* **36**(1–2), 320–331 (2008)

11. Hill, R.: *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press, New York (1950)
12. Drucker, D.C., Prager, W.: Soil Mechanics and plastic Analysis or Limit Design. *Quart. Appl. Mech.* **10**, 157–165 (1952)
13. Mandel, J.: Generalisation de la théorie de la plasticité de W.T. Koiter. *Int. J. Solids. Struct.* **1**(3), 273–295 (1965)
14. Roscoe, K.H., Burland, J.B.: On the generalized stress-strain behavior of “wet” clay. In: Heyman, J., Leckie, F.A. (eds.) *Engineering Plasticity*, pp. 535–609. Cambridge University Press, Cambridge (1968)
15. Gudehus, G., Darve, F., Vardoulakis, I.: Constitutive relations of soils. pp. 5–12. Balkema, Rotterdam (1984)
16. Anandarajah, A., Sobhan, K., Kuganenthira, N.: Incremental stress-strain behavior of a granular soil. *J. Geotech. Eng.* **121**(1), 57–68 (1995)
17. Royis, P., Doanh, T.: Theoretical analysis of strain response envelopes using incrementally non-linear constitutive equations. *Int. J. Numer. Anal. Methods. Geomech.* **22**(2), 97–132 (1998)
18. Bardet, J.P.: Numerical simulations of the incremental responses of idealized granular materials. *Int. J. Plast.* **10**(8), 879–908 (1994)
19. Calvetti, F., Viggiani, G., Tamagnini, C.: On the incremental behavior of granular soils. In: *Proceedings of NUMOG VIII*, Rome, Swets & Zeitlinger, pp. 3–9 (2002)
20. Kishino, Y.: On the incremental nonlinearity observed in a numerical model for granular media. *Ital. Geotech. J.* **3**, 3–12 (2003)
21. Plassiard, J.P., Donze, F.V., Lorentz, J.: Simulation of Rockfall impact on embankments: general results and application, *Interdisciplinary Workshop on Rockfall Protection*, 23–25 June, Morschach, Switzerland (2008)
22. Donze, F.V., Magnier, S.A.: Formulation of a three dimensional numerical model of brittle behaviour. *Int. J. Geophys.* **22**, 790–802 (1995)
23. Weitz, D.A.: Packing in the spheres. *Science* **303**, 968–969 (2004)
24. Lubachevsky, B.D., Stillinger, F.H.: Geometric properties of random disk packings. *J. Stat. Phys.* **60**, 561–583 (2004)
25. Sherwood, J.D.: Packing of spheroids in three-dimensional space by random sequential add. *J. Phys. A Math. Gen.* **30**(24), L839–L843 (1997)
26. Hentz, S., Daudeville, L., Donzé, F.V.: Identification and validation of a discrete element model for concrete. *ASCE J. Eng. Mech.* **130**(6), 709–719 (2004)
27. Villard, P., Chareyre, B.: Design methods for geosynthetic anchor trenches on the basis of true scale experiments and discrete element modelling. *Can. Geotech. J.* **41**(6), 1193–1205 (2004)
28. Sibille, L., Nicot, F., Donze, F.V., Darve, F.: Material instability in granular assemblies from fundamentally different models. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* **31**, 457–481 (2007)
29. Lorentz, J., Donze, F.V., Perrotin, P., Plotto, P.: Experimental study of the dissipative efficiency of a multilayered protective structure against rockfall impact. *Rev. Eur. Génie Civ.* **10**(3), 295–308 (2006)
30. Bardet, J.P.: Observation on the effects of particle rotation on the failure of idealized granular materials. *Mech. Mater.* **18**, 159–182 (1994)
31. Gudehus, G.: A comparison of some constitutive laws for soils under radially symmetric loading and unloading. *Ing. Can. Geotech. J.* **20**, 502–516 (1979)
32. Bardet, J.P., Proubet, J. (eds.): *Application of micro-mechanics to incrementally nonlinear constitutive equations for granular media. Powders and Grains*, pp. 265–273. Balkema, Rotterdam (1989)
33. Darve, F.: The expression of reological laws in incremental form and the main classes of constitutive equations. In: Darve, F. (ed.) *Geomaterials: Constitutive Equations and Modelling*, pp. 123–148. Elsevier, London (1991)

Modélisation des milieux granulaires par une méthode aux éléments discrets avec une nouvelle loi de contact

Résumé

Récemment, la méthode aux éléments discrets (E.D) est devenue l'une des techniques de modélisation les mieux adaptés à l'analyse du comportement du sol. Grâce à une représentation discrète des discontinuités, le comportement serait décrit à l'échelle du volume élémentaire représentatif comme un ensemble de grains interagissant par des forces de contact.

Ce travail de thèse tente de proposer une méthodologie qui permette de reproduire le comportement mécanique macroscopique d'un milieu granulaire non cohésif. Un modèle numérique tridimensionnel basé sur la méthode aux éléments discrets associé à une nouvelle loi portant sur le roulement inter-granulaire est développé et une démarche spécifique est proposée afin de simuler le comportement mécanique de ces matériaux sous sollicitation triaxiale. Nous tentons aussi de découpler l'ensemble des mouvements pouvant exister lors d'une sollicitation axisymétrique, pour mieux comprendre les mécanismes cinématiques microscopiques responsables de la déformation volumique macroscopique.

De plus, un second problème plus fondamental lié à la rupture dans les milieux granulaires est abordé par la suite en utilisant le même modèle numérique.

Dans le cas des sols et plus généralement dans celui des milieux granulaires, qui sont des matériaux non associés, des ruptures diffuses existent pour des états de contrainte strictement inclus dans la condition limite de plasticité. Ces observations, qui vont à l'encontre de la sécurité et qui contredisent les analyses classiques de la rupture dans les milieux granulaires, impliquent d'étudier de nouvelles approches permettant de décrire ces modes de ruptures particuliers voir de les prédire. Nous proposons dans ce document d'aborder la rupture en un point matériel comme un problème de bifurcation. La non-associativité du modèle numérique a été vérifiée. Les points de bifurcations sont détectés à l'aide du signe du travail du second ordre, soit la forme locale du critère de stabilité de Hill. Les analyses présentées portent principalement sur des simulations discrètes par la méthode aux éléments discrets étoffées par une nouvelle loi portant sur le roulement inter-granulaire. Pour des assemblages numériques soumis à différentes pressions de confinement, un domaine de bifurcation est mis en évidence à l'intérieur du critère de Mohr-coulomb.

Finalement, les origines microscopiques du travail du second ordre sont analysées. Il est vérifié numériquement qu'une relation directe existe entre le travail du second ordre macroscopique d'une part, et les forces inter-granulaires et les déplacements relatifs (translations et rotations) aux points de contacts d'autre part, dans le cas de déformations élastiques et plastiques.

Mots clés

Méthodes aux éléments discrets, milieux granulaires, roulement inter-granulaire, bifurcation, critère de stabilité de Hill, travail du second ordre, recherches directionnelles, enveloppes réponses, mécanisme de roulement, mécanisme de glissement.
