

RÉPUBLIQUE ALGERIENNE DÉMOCRATIQUE & POUPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MENTOURI CONSTANTINE
FACULTÉ DES SCIENCES DE L'INGÉNIEUR
DÉPARTEMENT D'ÉLECTROTECHNIQUE

THÈSE

PRÉSENTÉE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE DOCTORAT EN SCIENCES
EN ÉLECTROTECHNIQUE

SPÉCIALITÉ
RÉSEAUX ÉLECTRIQUES

TITRE

**ÉTUDE & SIMULATION DES MODÈLES
ÉLECTRODYNAMIQUES PAR
LA MÉTHODE FDTD: LA Foudre**

PRÉSENTÉ PAR

Mr BOUKELKOUL LAHCENE

Soutenu le : 20/ 01./ 2011

DEVANT LE JURY CONSTITUÉ DE

<u>PRÉSIDENT:</u>	BOUZID Aissa	Pr.	Univ. Mentouri Constantine
<u>Rapporteurs:</u>	LEULMI Salah	Pr.	Univ. 20 Août 1955 Skikda
	BENALLA Hocine	Pr.	Univ. Mentouri Constantine
<u>Examineurs :</u>	BAYADI Abdelhafid	MC.	Université Ferhat Abbas Setif
	GHERBI Ahmed	MC.	Université Ferhat Abbas Setif
	BENTOUNSI Amar	MC.	Université Mentouri Constantine



Remerciements

Ce travail a été effectué dans des conditions difficiles demandant des sacrifices.

J'exprime ma sincère reconnaissance à Monsieur Leulmi Salah, Professeur à l'université de 20 août 1955 Skikda, pour avoir accepté de juger ce travail et d'assurer la tâche de rapporteur.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur Benalla Hocine, Professeur à l'université de Constantine, pour avoir suivi ce travail et accepté d'être le co-rapporteur.

Je remercie Monsieur BOUZID Aïssa Professeur à l'université de Constantine de me faire l'honneur de présider le jury de cette thèse.

J'associe à ces remerciements Messieurs:

Bayadi Abdelhafid, Maître de conférence à l'université F. A. Setif.

Gherbi Ahmed, Maître de conférence à l'université F. A. Setif

Bentounsi Amar, Maître de conférence à l'université de Constantine

De leur participation à ce jury.

L. Boukelkoul

Dédicaces

Une spéciale dédicace à ma petite famille qui a partagé avec moi les moments difficiles et de joies. J'exprime ma sincère gratitude à ma femme qui a supporté patiemment mes variations d'humeurs ainsi le désordre que j'ai fait pendant la rédaction de cette thèse.

A mon fils Hamed qui ne cesse de se demander sur l'état d'avancement de ce travail.

A mes filles Rahil, l'optimiste et à Amina qui aime travailler toute seule.

Toute ma reconnaissance va également à ceux qui m'ont entouré durant ce travail.

L. Boukelkoul

تمهيد

معادلات ماكسويل التفاضلية للكهروديناميك، التي صيغت أواخر القرن التاسع عشر تمثل الأساس الموحد بين الحقول الكهربائية و المغناطيسية و التي تنبأت بظاهرة الأمواج الكهرومغناطيسية. لحد الآن و في العالم بأسره يستعمل الباحثون حواسيب تتراوح من حاسوب المكتب البسيط إلى حواسيب عملاقة ذات السعة العالية للحصول على حل لهذه المعادلات من أجل توظيفها في : دليل الأمواج ، الإشعاع و الانتشار.

قدمت الطرق التحليلية لحل هذه المعادلات في البداية حولا لكنها محدودة لنماذج هندسية بسيطة. وتم تطوير الطرق العددية فيما بعد للحصول على حلول أكثر دقة لمختلف الأشكال الهندسية المعقدة. طريقة الفروق المنتهية في المجال الزمني. طريقة FDTD تمثل حلا مباشرا لالتفاف معادلات ماكسويل بدلالة الزمن. هذه الطريقة لا تستعمل أي كمون بل تعتمد على معايرة "الحقل القريب" المجهول لتوزيع الحقول الكهرومغناطيسية داخل أو حول المجال المراد دراسته. طريقة FDTD هي عملية تتماشى مع الزمن لمحاكاة الأمواج الكهرومغناطيسية الحقيقية المستمرة في حيز محدود بمعايرة معلومات لموجة مثلية رقمية تنتشر في حيز للحساب. التدرج الزمني يتواصل مع انتشار الموجة الرقمية داخل الشبكة المتسامتة مع ربط الخصائص الفيزيائية للمنطقة النموذجية. عند محاكاة مناطق تمتد إلى ما لانهاية توضع شروط للحدود الماصة التي تسمح لجميع الأمواج النافذة إلى الخارج لتتلاشى بدون انعكاس.

لتوضيح ظاهرة من الظواهر الكهروديناميكية اختير لهذه الأطروحة نموذج الضربة المرتدة للصاعقة. تم تطوير نماذج تحليلية لتمثيل التيار الكهربائي للصاعقة بدلالة علاقة هايدلر آخذين بعين الاعتبار سرعة و تناقص السعة مما يسمح بتمثيل جيد للظاهرة. تتم محاكاة الحقول المنبعثة من إشعاع تيار قناة الصاعقة لحسابها بنظام FDTD. طريقة التهجين بين FDTD و طريقة تحليلية، أظهرت السهولة التي يتم بها تنفيذ هذا النظام مع أنظمة أخرى.

الكلمات المفتاح : الكهروديناميك، معادلات ماكسويل، FDTD، ضربة صاعقة، حلول هجينة.

Abstract

Maxwell's partial differential equations of electrodynamics formulated in the late nineteenth century represent a fundamental unification of electric and magnetic fields, predicting electromagnetic propagation phenomena. Up to now researchers worldwide use computers ranging from simple desktop machines to massively parallel supercomputing arrays to obtain solutions of these equations for the purpose of investigating electromagnetic wave guiding, radiation and scattering.

Analytic solutions were, first, introduced. However, they are limited to specified geometrical structures. Numerical solutions were, afterwards, developed to obtain more accurate solutions to any type of structure. Finite difference time domain (FDTD) technique is a direct numerical solution method for Maxwell's time dependent curl equations. This method employs no potentials. Rather, it is based upon volumetric sampling of the unknown near-field distribution of fields within and surrounding the structure of interest. The FDTD technique is a marching in time procedure that simulates the continuous actual electromagnetic waves in a finite spatial region by sampled data of numerical analogs propagating in a computer data space. As the numerical wave propagates, the time is incremented taking into account the characteristics of the modelled different regions. For simulation, where the modelled region must extend to infinity, absorbing boundary conditions are employed at the outer grid truncation planes which ideally permit all outgoing wave analogs to exit the region with negligible reflection.

In this thesis, a lightning return stroke model is chosen to illustrate an electrodynamic phenomenon. The lightning channel current is modelled by analytic approximation in the form of Heidler function taking into account the speed of propagation and the decreasing amplitude giving an accurate representation of the phenomenon. Fields radiated by the channel are, then, simulated and calculated through an FDTD domain code. Hybrid method is used to show the simplicity in which the FDTD method can be implemented and manipulated with other methods.

Key words: Electrodynamics, Maxwell's equations, FDTD, lightning strike, hybrid solution.

RESUME

Les équations aux dérivées partielles de Maxwell de l'électrodynamique étaient formulées au début du 19^{ème} siècle caractérisant une unification fondamentale entre les champs électriques et magnétiques pour prédire les ondes électromagnétiques.

Jusqu'à présent, les chercheurs utilisent des calculateurs allant de petits ordinateurs de bureaux jusqu'aux puissants ordinateurs de grandes capacités pour obtenir la solution de ces équations dans le but de résoudre les problèmes liés aux ondes électromagnétiques tels que les guides d'ondes, le rayonnement et la diffraction.

Au début, les solutions analytiques ont été introduites, mais elles sont limitées à des structures de simple géométrie. Par contre, les solutions numériques se sont développées après, pour acquérir à des solutions plus exactes pour différentes structures plus au moins complexes. La méthode des différences finies dans le domaine temporel est une méthode de solution itérative directe du rotationnel des équations de Maxwell dépendant du temps. Cette méthode n'emploie aucun potentiel ni électrique ni magnétique. Elle est basée sur l'échantillonnage dans un volume des inconnues des champs proches de la distribution des champs à l'intérieur ou entourant la structure de calcul. La méthode FDTD est une procédure incrémentée dans le temps qui simule les ondes électromagnétiques actuelles continues dans une région d'espace finie par échantillonnage discontinu des ondes numériques se propageant dans un domaine de calcul. Comme l'onde numérique se propage, le temps est incrémenté tout en tenant compte des caractéristiques des différentes régions modélisées. Pour une simulation où la région à modéliser s'étend à l'infini, des conditions aux limites absorbantes sont employées à la périphérie du volume de calcul qui permettent l'absorption des ondes évanescents et réduisent leurs réflexions.

Dans cette thèse, le modèle du canal de la foudre a été choisi pour illustrer un phénomène électromagnétique. Plusieurs modèles analytiques représentant le courant dans le canal, ont été développés. Le modèle choisi pour cette étude est la fonction de Heidler. Le modèle Heidler prend en considération la vitesse de propagation et la décroissance d'amplitude permettant ainsi une bonne représentation du phénomène. Les champs rayonnés par le canal sont, ensuite, simulés et calculés à travers un volume de calcul par l'utilisation de la méthode FDTD. L'hybridation de la méthode avec une approche analytique permet de profiter de la simplification de l'implémentation et la manipulation des codes FDTD.

Mots clés : Electrodynamique, équations de Maxwell, FDTD, coup de foudre, solutions hybrides.

LISTE DES ACRONYMES

ADE: Auxiliary Differential Equation

BG: Bruce-Gold

CG : Cloud – Ground

CFL : Courant Friedrich Lévy

EFIE : Electrical Field Integral Equation

FDTD : Finite Difference in Time Domain, (Différence Finie dans le Domaine Temporel).

GM-NTFF: Geometric Mean Near To Far Field

IC : Intra – Nuage

LEMP : Lightning Electromagnetic pulse

MTLL: Modified Transmission Line (L: linear current decay)

MTLE: Modified Transmission Line with exponential attenuation

NTFF: Near To Far Field

PML: Perfect Matched Layer

TL: Transmission Line

TCS: Travelling Current Source

UPML: Unsplit Perfect Matched Layer.

VED : Vertical Electrical Dipole

LISTE DES FIGURES

	Pages
Fig. 2.1 – Surface de séparation entre le milieu 1 & le milieu 2	10
Fig. 2.2 – Distribution spatiale d'une distribution volumique de charge	15
Fig. 3.1 – Problème initial & son équivalent	20
Fig. 3.2 – Maillage d'un domaine en éléments finis	23
Fig. 3.3 – Maillage d'un élément irrégulier	23
Fig. 3.4. Elément triangulaire à trois nœuds	24
Fig. 4.1 – Domaines d'application de l'électromagnétisme	28
Fig. 4.2 – Cellule typique de l'algorithme de Yee. Localisation des champs électriques & magnétiques	31
Fig. 4.3 – Principe de discrétisation temporelle.	32
Figure 4.4 – Organigramme simplifié du programme FDTD	35
Fig. 4.5 – Variation de la vitesse de phase normalisée	37
Fig. 4.6 – Conditions aux limites sur un conducteur parfait	43
Fig. 4.7 – Technique PML (en 2-D)	46
Fig. 4.8 – Illustration du champ proche – champ lointain	48
Fig. 4.9 – Géométrie du champ proche – champ lointain	48
Fig. 5.1 – Circuit électrique global	53
Fig. 5.2 - Différentes catégories de décharges nuages sols	54
Figure 5.3 – Forme du courant dans les modèles TL et MTLE	63
Fig. 6.1 – Géométrie du problème	65
Fig. 6.2 – Géométrie du problème	73
Fig. 6.3 – Canal incliné & point d'observation	75
Fig. 6.4 – Champs électrique et magnétique rayonnés par un canal incliné	77
Fig. 6.5 – Impédance transitoire du sol	79
Fig. 6.6 – Courant à la base du canal	80
Fig. 6.7 – Parcours de l'intégral	81
Fig. 6.8 – Champ électrique horizontal pour 2 angles d'inclinaison différents et 2 valeurs de permittivité différentes	82
Fig. 6.9 – Comparaison des champs électriques	83

LISTE DES TABLEAUX

	Pages
Tableau 5.1 - Valeurs de $P(z')$ et ν pour les modèles d'ingénieur	59
Tableau 5.2 Courant et densité de la charge des différents modèles	60

LISTE DES SYMBOLES

\vec{A} : Potentiel vecteur magnétique
 A : Matrice d'impédance
 b : Matrice des éléments de discrétisation
 \vec{B} : Champ d'induction
 c : Vitesse de la lumière
 C : Capacité par unité de longueur
 \vec{D} : Champ de déplacement
 dl : Élément de déplacement
 ds : Élément de surface
 \vec{E} : Champ électrique
 \vec{H} : Champ magnétique
 $H(\)$: Hauteur du canal de la foudre
 H_0^1, H_1^2 : Fonctions de Henkel
 I : Intensité du courant
 $i(\)$: Courant instantané
 \vec{J} : Densité superficielle de courant
 J_1 : Fonction de Bessel
 $k_{x,y,z}$: Composantes du vecteur d'onde
 L : Inductance par unité de longueur
 M : Aimantation
 \vec{n} : Normale à la surface
 $N_i^e(\)$: Fonction de discrétisation
 P : Polarisation électrique
 $P(\)$: Fonction d'atténuation du courant en fonction de la hauteur
 Q : Charge électrique
 $Q(\)$: Potentiel électrique scalaire en fonction de la position
 r : Distance du point d'observation
 r' : Distance du point de la source
 R : Résistance par unité de longueur
 $R(\)$: Distance du point d'observation de l'élément de courant
 S : Surface
 t : Temps
 T : Période
 $U(\)$: La fonction de Heaviside
 v : Volume
 v_f : Vitesse de propagation de l'éclair
 v_p : Vitesse de phase
 V : Potentiel électrique scalaire
 w : Energie électrique
 $w(\)$: Fonction test
 x, y, z : Coordonnées cartésiennes

Z : Impédance
 ∇ : Opérateur nabla
 ∇^2 : Le laplacien
 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$: Incrémentation spatiale
 Δt : Incrémentation temporelle
 ρ : Densité volumique de charge
 $\delta(\)$: Fonction de Dirac
 ε_0 : Permittivité du vide
 ε : Permittivité absolue
 $\Phi(\)$: Fonction
 η : Facteur de correction de l'amplitude du courant
 Γ : Frontière
 μ_0 : Perméabilité du vide
 μ : Perméabilité absolue
 σ : Conductivité
 ω : Pulsation angulaire
 λ : Longueur d'onde
 χ_e : Susceptibilité électrique
 γ : Densité superficielle de charge
 τ : Constante du temps
 $\Pi_s(\)$: Potentiel vecteur de Hertz
 ζ : Fonction scalaire
 \otimes : Produit de convolution

TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENTS	
DEDICACES	
ABSTRACT EN ARAB	i
ABSTRACT EN ANGLAIS	ii
ABSTRACT EN FRANÇAIS	iii
LISTE DES ACRONYMES	iv
LISTE DES FIGURES	v
LISTES DES TABLEAUX	vi
LISTES DES SYMBOLES	vii

1 - GENERALITES

1.1 - INTRODUCTION	1
1.2 - ETUDE & SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE	1
1.3 - CHRONOLOGIE DE DISCRETISATION DES EQUATIONS DE MAXWELL	2
1.4 - FORMULATION DU PROBLEME	3
1.5 - CONTRIBUTIONS SOUHAITEES	3
1.6 - PRESENTATION DE LA THESE	4
1.7 - TRAVAUX SCIENTIFIQUES REALISES	4

2 - MODELISATION DES PHENOMENES ELECTRODYNAMIQUES

2.1 - INTRODUCTION & OBJECTIFS	6
2.1.1 - Préambule	6
2.1.2 - Objectifs	6
2.2 - PHENOMENES ELECTRODYNAMIQUES	6
2.3 - POTENTIEL VECTEUR MAGNETIQUE & POTENTIEL SCALAIRE ELECTRIQUE	7
2.4 - TRANSFORMATION DE JAUGE	8
2.5 - EQUATIONS DE MAXWELL SOUS FORME GLOBALE	9
2.6 - CONDITIONS AUX LIMITES	10
2.7 - RELATIONS CONSTITUTIVES	11
2.8 - RESOLUTION DES PROBLEMES D'ELECTROMAGNETISME	12
2.9 - CHAMPS VARIANTS DANS LE TEMPS	13
2.10 - EQUATIONS D'ONDE	13
2.11 - POTENTIELS RETARDES	14
2.12 - CONDITIONS DE SIMILITUDE ELECTRODYNAMIQUE	15
2.13 - CONCLUSIONS	16

3 - METHODES DE RESOLUTION DES EQUATIONS DE MAXWELL

3.1 - INTRODUCTION & OBJECTIFS	17
3.1.1 - Préambule	17
3.1.2 - Objectifs	17
3.2 - METHODES ANALYTIQUES	18

3.2.1 - Méthode de séparation des variables	18
3.2.2 - Décomposition polynomiale	18
3.2.3 - Méthode des perturbations	18
3.3 - METHODES NUMERIQUES	18
3.3.1 - Aspects communs aux méthodes numériques	19
3.3.2 - Formulation intégrale dans le domaine fréquentiel	20
3.3.3 - Méthodes des éléments finis	22
3.3.4 - Méthode des FDTD	26
3.4 - CONCLUSIONS	27

4 - METHODE DES DIFFERENCES FINIES DANS LE DOMAINE TEMPOREL

4.1 - INTRODUCTION & OBJECTIFS	28
4.1.1 - Préambule	28
4.1.2 - Objectifs	28
4.2 - BASES DE LA METHODE FDTD	29
4.2.1 - Introduction	29
4.2.2 - Principe des différences finies	29
4.2.3 - Algorithme de Yee	30
4.3 - CRITERE DE STABILITE	35
4.4 - DISPERSION NUMERIQUE	36
4.5 - ATTENUATION & DISPERSION PHYSIQUE	38
4.6 - METHODE D'IMPLEMENTATION DE LA DISPERSION PHYSIQUE.	38
4.6.2 - Méthode de convolution récursive	38
4.6.2 - Méthode ADE	41
4.7 - TRAITEMENT DES INTERFACES	42
4.7.1 - Traitement des interfaces diélectriques	42
4.7.2 - Traitement des conducteurs parfaits	42
4.7.3 - Murs magnétiques	43
4.8 - CONDITIONS AUX LIMITES	43
4.9 - TRANSFORMATION CHAMP PROCHE – CHAMP LOINTAIN	47
4.10 – CONCLUSIONS	49

5 - MODELISATION DU COURANT DE LA Foudre

5.1 - INTRODUCTION & OBJECTIFS	50
5.1.1 - Préambule	50
5.1.2 - Objectifs	51
5.2 - PHENOMENE DE LA Foudre	51
5.3 - CONDENSATEUR TERRRESTRE	51
5.4 - NUAGE DE LA Foudre	52
5.5 - Foudre NATURELLE	54
5.6 - MODELISATION DE L'ARC EN RETOUR	55
5.7 - MODELISATION DU COURANT DE LA Foudre	56
5.6.1 - Modèle du gaz dynamique	56
5.6.2 - Modèle électromagnétique	57
5.6.3 - Modèle des lignes à constantes réparties	57
5.6.4 - Modèle d'ingénieur	59
1 - Modèle de Bruce Gold	61

2 - Source du courant mobile	61
3 - Modèles des lignes de transmission	61
a - Modèle généralisé	61
b – Modèle modifié	62
c – Modèle modifié avec atténuation exponentielle	62
5.7 - COURANT A LA BASE DU CANAL	62
5.8 - ADEQUATION DES SIMILITUDES ELECTRODYNAMIQUES	64
5.9 - CONCLUSIONS	64

6 - SIMULATIONS DES CHAMPS RAYONNES

6.1 - GENERALITES SUR LE CALCUL DES CHAMPS	65
6.2 - SOL : CONDUCTEUR PARFAIT	65
6.2.1 – Technique de la condition de Lorentz	66
6.2.2 – Technique de l'équation de la continuité	70
6.3 - CHAMPS ELECTOMAGNETIQUES DUS A UN DIPOLE ELECTRIQUE VERTICAL	71
6.3.1 – Méthodes des champs proches de la source	71
6.3.2 – Méthodes des quasi-images	72
6.4 - METHODE FDTD	74
6.5 - METHODE HYBRIDE	76
6.6 - SOL : CONDUCTEUR IMPARFAIT	80
6.6.1 – Formule d'ondelettes	80
6.6.2 – Formule de Cooray	81
6.7 - COMPARAISON, COMMENTAIRES & VALIDATIONS	83
6.8 - CONCLUSIONS	84

7 - CONCLUSIONS & PERSPECTIVES

7.1 – CONCLUSIONS	86
7.2 – PERSPECTIVES	87

ANNEXES

ANNEXE A – LA METHODE ADE	88
ANNEXE B – TRAITEMENT DE L'INTERFACE ENTRE 2 MILIEUX DIELECTRIQUES	89
ANNEXE C – RESUME ETENDU DE LA THESE	91

REFERENCES

1 - GENERALITES

1.1 - INTRODUCTION	1
1.2 - ETUDE & SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE	1
1.3 - CHRONOLOGIE DE DISCRETISATION DES EQUATIONS DE MAXWELL	2
1.4 - FORMULATION DU PROBLEME	3
1.5 - CONTRIBUTIONS SOUHAITEES	3
1.6 - PRESENTATION DE LA THESE	3
1.7 - TRAVAUX SCIENTIFIQUES REALISES	4

1 – GENERALITES

1.1 – INTRODUCTION

Avant d'aborder l'étude mathématique et numérique des phénomènes électrodynamiques, il convient de rappeler le lien étroit de tout développement de méthode numérique avec la problématique de la modélisation; les équations que l'on cherche à résoudre et les approximations accomplies proviennent du savoir faire des physiciens. La modélisation des phénomènes physiques constitue une partie non négligeable de l'approximation numérique de ces phénomènes. Les problèmes de propagation des ondes issues des équations de Maxwell font partie des phénomènes électrodynamiques. L'étude de l'agression de la foudre se modélise en temporel qui se déduit, directement, des équations du rotationnel de Maxwell. Les caractéristiques principales des phénomènes de propagation d'ondes sont la propagation à vitesse finie, la notion de causalité (qui fixe le sens de temps) dans le domaine temporel. Ceci se traduit dans le domaine fréquentiel par un certain comportement à l'infini, imposé par la condition de radiation de Sommerfeld [1] – [10].

1.2 – ETUDE & SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE

A défaut de l'histoire de l'électrodynamique, qui exigerait une connaissance approfondie de la théorie de l'électromagnétisme, on peut en jalonner le déroulement par l'énumération de quelques dates et chercheurs mythiques [4]. Ces derniers se sont caractérisés par des changements importants, dans le domaine, à la lumière de notre compréhension actuelle.

La loi de la force de Coulomb est établie à la suite des travaux expérimentaux de divers précurseurs (Franklin en 1755, Cavendish en 1773) [4]. Mais, le mérite de son acceptation par la communauté scientifique (1785) revient à son éponyme pour avoir publié la description de ses expériences et l'interprétation de leurs résultats sous une forme convaincante [1] & [2].

La notion de potentiel, issue de la gravitation, est transposée à l'électrostatique par Poisson en 1813, pour aboutir à l'équation qui porte maintenant son nom. La même année, Gauss établit le cas particulier du théorème de Stokes permettant d'obtenir la relation intégrale à laquelle son nom est resté attaché.

Ersted observe l'effet d'un courant électrique sur une aiguille aimantée (1819-1820). Ses expériences répétées et mesurées par Biot et Savart (1820) leurs permettent d'établir leur formule sous la forme du couple exercé par un courant sur une aiguille aimantée. La même expérience suggère à Ampère (1820), l'apparition des forces mutuelles entre fils parcourus par des courants électriques qui lui permettent d'établir la parenté entre les interactions aimant-aimant, courant-aimant et courant-courant.

Avec la confirmation des effets magnétiques du courant électrique, Faraday, après des efforts intermittents, parvient à mettre en évidence (1831) la production de l'électricité par un magnétisme variable. Pendant les vingt années suivantes, il lui resta à expérimenter les diverses manifestations de l'induction, tout en mettant au point une représentation des forces à distance par des lignes de champ que lui suggéraient les figures dessinées par la limaille de fer au voisinage d'un aimant [4].

En 1841, William Thomson, en établissant la théorie du potentiel (inspirée de la théorie de la chaleur de Fourier), ouvre une brèche dans la tradition mécaniste (une

force centrale héritée de la gravitation) au profit d'un point de vue dynamique local (équation aux dérivées partielles).

Influencé par Faraday et Thomson, Maxwell élabore un modèle mécanique complet en 1861. Celui-ci lui donne une description complètement locale. En même temps, l'introduction du terme de déplacement dans l'équation d'Ampère assure, finalement, l'identité souhaitée entre la vitesse de propagation des vibrations électromagnétiques et celles des propagations lumineuses. Ses méditations sur l'électromagnétisme, publiées dans son traité en 1873, conduisent finalement Maxwell à réaliser le caractère purement accessoire, quoique commode, de son modèle mécanique dans l'élaboration des équations de l'électromagnétisme [6] - [11].

Durant cette période et indépendamment de Maxwell, Lorentz transpose, à la théorie de la propagation des ondes de courant de Kirchhoff, la notion de potentiel retardé qu'il avait introduite en 1861. En 1887, l'existence des ondes électromagnétiques prédites par la théorie de Maxwell s'est enfin avérée, expérimentalement, par Hertz. Le champ électromagnétique acquiert, selon Hertz, une réalité concrète au même titre que n'importe quel système dynamique. On assiste à l'émergence du concept de champ en tant qu'aspect fondamental de tous les phénomènes naturels [2].

1.3 – CHRONOLOGIE DE DISCRETISATION DES EQUATIONS DE MAXWELL DEPENDANT DU TEMPS

La solution des équations de Maxwell nécessite des méthodes soit analytique ou numérique. Il n'existe pas de méthode générale efficace, à très basse et haute fréquence, en même temps. Dans les domaines aéronautiques, distribution et transport d'énergie électrique, pour représenter les effets dus aux coups de foudre, la principale méthode utilisée au niveau des structures est la méthode des FDTD. Elle permet en effet de couvrir un large spectre de fréquence (de quelques [kHz] à plusieurs centaines de [MHz]) pour un coût de calcul, relativement, faible. On utilise la méthode des différences finies en temps et en espace sur le système d'équations de Maxwell écrit dans le domaine temporel. Le schéma numérique utilisé, le plus fréquemment, est un schéma explicite décalé en temps et en espace pour le champ électrique \vec{E} et le champ magnétique \vec{H} . La discrétisation des opérateurs est centrée en temps et en espace. Le schéma numérique conserve la propriété de conservation de l'énergie comme pour le problème continu. On subdivise, donc, le domaine de calcul en cubes réguliers. Ceci présente l'intérêt de ne pas avoir à stocker le maillage. Mais, il a l'inconvénient d'approcher les domaines courbés par des marches escaliers. Le développement de la méthode FDTD est passé par des étapes dont les plus marquantes sont [12] - [26] :

- **1966** : Yee décrivait la technique numérique de maillage espace temps du rotationnel des équations de Maxwell.
- **1975** : Taflove et Brodwin publiaient le correct critère de stabilité numérique de l'algorithme de Yee.
- **1977** : Holland, Kunz et Lee appliquaient la méthode FDTD aux pulsations électromagnétiques.
- **1981** : Mur publiait les conditions aux limites absorbantes pour le maillage de la cellule de Yee.
- **1988** : Sullivan & al. publiaient le premier modèle 3D FDTD d'absorption du corps humain des ondes électromagnétiques.

- **1994** : Berrenger introduisait les couches, parfaitement, conjuguées (PML) pour les conditions aux limites absorbantes.
- **1996** : Sacks et Gedney introduisaient « Unsplit » PML (UPML).
- **2000** : Zheng Chen & Zhang développaient le premier algorithme en 3D ADI FDTD qui est stable quelque soit le pas temporel.

1.4 – FORMULATION DU PROBLEME

L'effet d'une onde rayonné par un coup de foudre indirecte est un problème intéressant, puisque plusieurs problèmes se posent lors de la modélisation de ces phénomènes et surtout celle de l'intensité des champs agresseurs. Le canal de la foudre permettant la représentation du phénomène d'arc en retour intervenant lors de la jonction du précurseur descendant au niveau du sol est, généralement, modélisé par une antenne verticale alimentée par un générateur de courant à sa base. Des modèles analytiques représentant le courant sous forme d'une fonction de Heidler, prenant en compte la vitesse de propagation et la décroissance d'amplitude, permettent une bonne représentation du phénomène.

On désire, dans ce travail, d'évaluer le champ rayonné par le canal de la foudre en différents points d'un volume de calcul situé près du point d'impact. La méthode FDTD est choisie pour le calcul de ces champs rayonnés du fait de sa simplicité et de sa robustesse.

Pour réduire le temps de calcul et la mémoire utilisée pendant les calculs, l'hybridation d'une méthode analytique avec la méthode FDTD a été proposée et utilisée.

1.5 – CONTRIBUTIONS SOUHAITEES

La connaissance de la distribution et de l'intensité du champ électromagnétique rayonné par le canal de la foudre permet, notamment, le calcul des tensions induites dans l'appareillage électrique et les lignes de transmission de puissance et de communication que ce soit aériennes ou souterraines. Une protection n'est possible que si on prévoit la valeur, la durée et la forme de ces surtensions expectatives.

Dans la majorité de la littérature, il était assumé que le canal de la foudre est une ligne droite (presque verticale). Par contre, dans la pratique, le canal de la foudre est composé de plusieurs segments de différentes longueurs et différentes orientations.

Dans cette thèse, une orientation arbitraire du canal de la foudre est choisie. Les champs électromagnétiques rayonnés sont calculés suivant l'inclinaison du canal.

La méthode de calcul des champs électromagnétiques appliquée dans ce travail est la méthode FDTD. Malgré sa simplicité d'implémentation, on rencontre des difficultés dans le cas où le volume de calcul est très grand. Ceci rend le temps de calcul énorme. Le problème est surmonté par hybridation de la méthode FDTD avec une méthode analytique. Par conséquent, au lieu de balayer tout le volume par discrétisation, l'application de la méthode hybride a permis de réduire le temps de calcul sans perdre l'exactitude des résultats.

Dans cette thèse, nous allons montrer les principaux avantages de la modélisation FDTD d'un canal incliné de la foudre. Les champs électromagnétiques rayonnés par ce canal sont calculés par une méthode hybride plus simple et plus rapide.

1.6 – PRESENTATION DE LA THESE

Nous avons présenté dans ce chapitre, une étude et synthèse bibliographique de la modélisation des phénomènes électrodynamiques. La discrétisation des équations de Maxwell fait partie des méthodes de résolution et d'approximation des phénomènes électromagnétiques.

Dans le deuxième chapitre, nous nous sommes intéressés à l'ensemble des lois, régissant les champs électriques et magnétiques variables dans le temps. Ces lois sont regroupées au nombre de 4 appelées équations de Maxwell. A ces équations s'ajoutent les relations constitutives qui caractérisent les différents milieux.

Le troisième chapitre est dédié à l'étude des différentes méthodes de résolution des équations de Maxwell dépendant du temps qui ne feront pas l'objet d'implémentation particulière dans cette thèse. On aborde, sommairement, les méthodes analytiques et les méthodes numériques.

Dans le quatrième chapitre, nous présentons la méthode FDTD, comme, l'outil de résolution directe des équations de Maxwell. On décrit dans un premier temps la discrétisation spatiale et temporelle d'après le schéma de Yee (1966) des équations de Maxwell. Dans un deuxième temps, nous abordons l'ensemble des impératifs d'implémentation de la méthode FDTD tels que les conditions de stabilité numérique, les problèmes des conditions absorbantes et ceux de la prise en compte de la dispersion diélectrique.

Le cinquième chapitre est consacré à l'étude du phénomène de la foudre, comme phénomène électrodynamique. Une généralité sur l'électricité atmosphérique et le mécanisme de la formation de l'orage sont donnés en premier lieu. En deuxième position, la décharge nuage - terre est étudiée suivant les modèles proposés dans la littérature. La modélisation du courant de la foudre est étudiée suivant les modèles théoriques.

Enfin, dans le sixième chapitre, on aborde les calculs des champs électromagnétiques rayonnés par le canal de la foudre d'une orientation quelconque. Le calcul des champs rayonnés est effectué, premièrement, par l'implémentation de la méthode FDTD. Une méthode hybride, FDTD – analytique, est ensuite réalisée, pour le même but de calcul.

Par manque de laboratoires spécialisés dans notre université, la validation de nos résultats sera accomplie par confrontation avec ceux obtenus dans certaines références établies [53] & [60].

Dans le dernier chapitre, un certain nombre de conclusions et de perspectives sont étalées.

1.7 – TRAVAUX SCIENTIFIQUES REALISES

➤ **Mémoires & thèses soutenues**

- “Etude & amélioration d'un tour à bobiner”, Mémoire **d'ingénieur**, Electrotechnique, USTO, Oran, Algérie, 1983
- “Design & analysis of a G. T .O. inverter for a brushless disc-machine”, **MSc by research thesis**, Electrical Engineering, Warwick University, Coventry, UK, 1988.

➤ **Publications internationales:**

- L. Boukelkoul, S. Leulmi, H. Benalla. “Effect of transient impedance of a lossy ground on horizontal electromagnetic field due to inclined lightning

strokes”, International Review of Electrical Engineering (I.R.E.E.), Vol. 2, No. 6, Italy, Nov.–Dec. 2007.

➤ **Communications internationales:**

- L. Boukelkoul, S. Leulmi, H. Benalla. “A hybrid method for calculating very close electromagnetic fields due to inclined lightning strokes”, ICEEDT’07, Hammamet, Tunisia, Nov. 4-6, 2007.
- L. Boukelkoul, S. Leulmi, H. Benalla. “A review of closed form expressions for self and mutual transient ground impedance”, ICCP09, Muscat, Oman, Feb. 15-18, 2009.

2 - MODELISATION DES PHENOMENES ELECTRODYNAMIQUES

2.1 - INTRODUCTION & OBJECTIFS	6
2.1.1 - Préambule	6
2.1.2 - Objectifs	6
2.2 - PHENOMENES ELECTRODYNAMIQUES	6
2.3 - POTENTIEL VECTEUR MAGNETIQUE & POTENTIEL SCALAIRE ELECTRIQUE	7
2.4 - TRANSFORMATION DE JAUGE	8
2.5 - EQUATIONS DE MAXWELL SOUS FORME GLOBALE	9
2.6 - CONDITIONS AUX LIMITES	10
2.7 - RELATIONS CONSTITUTIVES	11
2.8 - RESOLUTION DES PROBLEMES D'ELECTROMAGNETISME	12
2.9 - CHAMPS VARIANTS DANS LE TEMPS	13
2.10 - EQUATIONS D'ONDE	13
2.11 - POTENTIELS RETARDES	14
2.12 - CONDITIONS DE SIMILITUDE ELECTRODYNAMIQUE	15
2.13 - CONCLUSIONS	16

2 – MODELISATION DES PHENOMENES ELECTRODYNAMIQUES

2.1 – INTRODUCTION & OBJECTIFS

2.1.1 – Préambule

L'électromagnétisme caractérise l'ensemble des lois, régissant les champs électriques et magnétiques variables dans le temps et dans l'espace. Ces lois ont été formulées par Maxwell, à partir des faits expérimentaux connus à son époque. Depuis, on n'a jamais relevé de phénomènes électromagnétiques n'obéissant pas à ces lois. On peut admettre celles-ci, résumées dans les équations de Maxwell et leurs conditions aux limites, comme des postulats auxquels obéissent les phénomènes électromagnétiques. L'électromagnétisme est, donc, une discipline dans laquelle les équations caractérisant les processus physiques sont connues. La difficulté consiste à résoudre ces équations dans chaque cas particulier, avec des conditions aux limites propres. Malheureusement, on ne trouve une solution analytique exacte des équations de Maxwell que dans certains cas. Encore, faut-il en général admettre des hypothèses simplificatrices de linéarité, isotropie, ...etc.

2.1.2 – Objectifs

Parmi les objectifs de ce chapitre, on s'intéresse, beaucoup plus, à :

- Décrire l'équation de Maxwell.
- Définir les potentiels.
- Décrire le passage d'un milieu à un autre différent.
- Résoudre des problèmes électrodynamiques.
- Analyser l'équation d'onde et des potentiels retardés.
- Discuter les conditions de similitudes électrodynamiques.

2.2 – PHENOMENES ELECTRODYNAMIQUES

Les phénomènes électriques et magnétiques ont, tout d'abord, été étudiés séparément. Il n'est pas évident, à première vue, que ces effets font partie d'un même ensemble. Les observations expérimentales de Franklin (1706-1790) et de Coulomb (1736-1806) ont montré les interactions entre les charges et le champ électrique et sont à la base de l'électrostatique. Les propriétés magnétiques de la matière étaient connues depuis l'antiquité. L'action à distance d'un courant électrique sur un aimant permanent a été découverte par Oersted (1775-1851). Les travaux d'Ampère (1775-1836), de Gauss (1777-1855) et de Faraday (1791-1867) ont mis en évidence les interactions entre champs électriques, magnétiques et courants.

C'est, cependant, grâce à Maxwell (1831-1879) que l'on doit à la formulation la plus complète des relations liant entre elles les grandeurs électriques et magnétiques. Les équations de Maxwell spécifient que toute variation spatiale d'un champ électrique ou magnétique, en un point de l'espace, entraîne (ou est due à) l'existence, (ou à la variation dans le temps), d'un autre champ au même point de l'espace. On peut dire que la théorie de l'électromagnétisme concerne l'étude et l'analyse des équations de Maxwell. Pour commencer, la forme locale (différentielle) des équations de Maxwell est décrite par 4 équations vectorielles aux dérivées partielles.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.4)$$

Où :

\vec{E} : Champ électrique [V/m]

\vec{H} : Champ magnétique [A/m]

\vec{D} : Champ de déplacement [As/m^2]

\vec{B} : Champ d'induction [Vs/m^2]

\vec{J} : Densité superficielle de courant [A/m^2]

ρ : Densité volumique de charge [As/m^3]

Ces grandeurs sont des fonctions du temps et de l'espace. En coordonnées cartésiennes, l'opérateur nabla (∇) s'exprime de la façon suivante :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (2.5)$$

A ces relations s'ajoutent les relations constitutives qui caractérisent les différents milieux :

$$D = f(E) \quad (2.6)$$

$$B = g(H) \quad (2.7)$$

$$J = f^*(E) \quad (2.8)$$

2.3 – POTENTIEL VECTEUR MAGNETIQUE & POTENTIEL SCALAIRE ELECTRIQUE

La divergence de l'induction \vec{B} est nulle (voir (2.4)). Ceci signifie qu'il n'existe pas de charge magnétique isolée. Il en résulte que le champ d'induction \vec{B} a la forme d'un rotationnel. La divergence d'un rotationnel est toujours, identiquement, nulle. On peut, donc, définir un potentiel vecteur magnétique \vec{A} dont le rotationnel est, précisément, le champ d'induction.

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.9)$$

Il faut encore remarquer, ici, que l'équation (2.9) ne définit pas, entièrement, le potentiel vecteur magnétique \vec{A} . Pour qu'il soit complètement défini, il faut encore définir sa divergence. La définition de cette divergence se traduit par le contexte des jauge [1].

Si maintenant, on introduit l'équation (2.9), dans la première équation de Maxwell (2.1), on trouve que :

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.10)$$

Sachant que le rotationnel d'un gradient est toujours nul, on peut définir un potentiel scalaire V tel que :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V \quad (2.11)$$

Ce potentiel est défini à une constante près.

2.4 – TRANSFORMATION DE JAUGE

La correspondance entre les champs et les potentiels n'est pas univoque. On peut modifier les potentiels par une transformation de jauge sans modifier les champs :

$$\begin{aligned} V &\rightarrow V - \frac{\partial \zeta}{\partial t} \\ \vec{A} &\rightarrow \vec{A} + \nabla \zeta \end{aligned} \quad (2.12)$$

Où ζ est une fonction scalaire.

Ces 2 transformations vérifient, aisément, la non modification des champs, puisque le rotationnel du gradient est nul et que les 2 dérivées de ζ s'annulent mutuellement dans \vec{E} . La non unicité des potentiels nous permet d'imposer des conditions sur les potentiels sans que cela ne restreigne les champs. On désigne ces conditions sous le nom de jauge.

➤ **Jauge de Lorentz impose la condition :**

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (2.13)$$

Si les potentiels ne satisfont pas à cette condition (Lorentz), alors, il est toujours possible de trouver une transformation de jauge (c'est-à-dire une fonction ζ) telle que les nouveaux potentiels \vec{A}' et ζ' y satisfassent l'équation :

$$\nabla \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V'}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla^2 \zeta - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \quad (2.14)$$

Il suffit, alors, de résoudre l'équation d'onde. La condition de Lorentz ne fixe pas les potentiels de façon unique, puisqu'une transformation de jauge telle que :

$$\nabla^2 \zeta - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0 \tag{2.15}$$

n'affecte pas la condition de Lorentz.

➤ **Jauge de coulomb ou transverse exprime la condition :**

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \tag{2.16}$$

Pour satisfaire cette condition à l'aide d'une transformation de jauge et à partir d'un potentiel \vec{A} quelconque, il suffit de résoudre l'équation de Poisson :

$$\nabla \cdot \vec{A}' = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla^2 \zeta \quad \Rightarrow \quad \zeta(r) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \cdot \vec{A}(r')}{|r - r'|} d^3 r' \tag{2.17}$$

Où r et r' sont, respectivement, la distance du point d'observation et de la source. Dans le cas statique, les 2 cas de jauge sont équivalents.

2.5 – EQUATIONS DE MAXWELL SOUS FORME GLOBALE

Les 4 équations de Maxwell (2.1) – (2.4) lient entre elles des variations des champs en un point donné de l'espace. On peut les intégrer, soit sur une surface s pour le rotationnel, soit sur un volume v pour les divergences. Ainsi, on obtient alors, à l'aide des relations intégrales, la forme globale des 4 équations de Maxwell.

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_s \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ds \tag{2.18}$$

Où :

$d\vec{l}$: Elément de déplacement le long du contour c .

ds : Elément de surface s .

Cette relation est appelée loi d'induction de Faraday. De même, on peut écrire le champ magnétique \vec{H} sous la forme globale suivante :

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s \vec{n} \cdot \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \right) ds \tag{2.19}$$

Cette relation est appelée loi d'Ampère. Dans les 2 cas, les intégrales du membre de gauche portent sur un contour fermé c , qui entoure complètement une surface s , sur laquelle est évaluée l'intégrale de droite. \vec{n} est la normale à cette surface. La forme globale de la 3^{ème} loi de Maxwell s'écrit comme suit :

$$\int_S \vec{n} \cdot \vec{D} \, ds = \int_V \rho \cdot dv = Q_V \tag{2.20}$$

Avec dv caractérise l'élément du volume V .

Cette relation est appelée relation de Gauss. Elle possède comme membre de gauche une intégrale sur une surface fermée S , qui entoure complètement un volume V , sur lequel est évaluée l'intégrale de droite. Q_V caractérise la charge totale contenue dans ce volume. Similairement, la 4^{ème} loi s'écrit comme suit :

$$\int_S \vec{n} \cdot \vec{B} \, ds = 0 \tag{2.21}$$

Cette relation indique que le flux du champ d'induction à travers toute surface fermée est nul.

2.6 – CONDITIONS AUX LIMITES

Lors du passage abrupt d'un milieu matériel à un autre, certaines composantes des champs subissent des discontinuités. La forme locale des équations de Maxwell (2.1) – (2.4) possède alors des singularités. Par conséquent, elle n'est pas utilisable au voisinage de la surface de séparation. En revanche, sous leurs formes globales (2.18) – (2.21), les équations de Maxwell restent utilisables. Ainsi, on peut tirer les conditions aux limites pour les champs.

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \tag{2.22}$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_S \tag{2.23}$$

$$\vec{n} \times (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_S \tag{2.24}$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \tag{2.25}$$

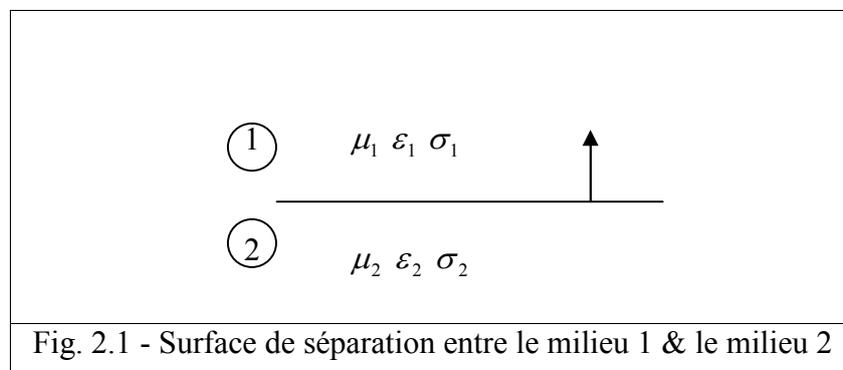


Fig. 2.1 - Surface de séparation entre le milieu 1 & le milieu 2

Dans ces 4 équations, \vec{n} est la normale à la surface de séparation, pointée du milieu 2 vers le milieu 1. Les indices 1 et 2 indiquent dans lequel des 2 milieux le champ est

défini (Fig. 2.1). Les 2 termes de droite J_s et ρ_s sont, respectivement, la densité de courant de surface et la densité de charge de surface. Ces 2 grandeurs ne sont définies que sur la surface de séparation entre 2 milieux différents.

Il s'ensuit des équations de Maxwell (2.1) – (2.2) qu'à la surface de séparation les composantes tangentielles des champs vecteurs doivent être continues, sauf s'il existe une surface de courant (comme dans le cas d'un milieu super conducteur). Dans ce dernier cas, le champ magnétique possède une discontinuité égale à la densité du courant de la surface. Similairement, d'après les équations de la divergence de Maxwell (2.3) & (2.4), les composantes normales des densités des flux \vec{B} et \vec{D} doivent être continues à la surface de séparation, sauf s'il existe une charge superficielle à l'interface. Dans ce dernier cas, le vecteur densité du flux électrique \vec{D} (déplacement) possède une discontinuité égale à la densité de charge.

2.7 – RELATIONS CONSTITUTIVES

Dans tout milieu matériel, des relations existent entre les champs \vec{D} et \vec{E} , \vec{J} et \vec{E} , \vec{B} et \vec{H} . Elles sont exprimées dans le cas général comme suit :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (2.26)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} \quad (2.27)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (2.28)$$

Avec :

$\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ [As/Vm] caractérise la permittivité du vide.

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ [Vs/Am] simule la perméabilité du vide.

\vec{P} est la polarisation, \vec{M} caractérise l'aimantation et σ simule la conductivité.

Les problèmes électromagnétiques, en général, peuvent être divisés en plusieurs classes selon la nature de la perméabilité et de la permittivité. En général, ils peuvent être des tenseurs non linéaires. Dans la majorité des matériaux, il existe une simple proportionnalité entre la cause et l'effet, pour des champs de faibles amplitudes. On parle alors des milieux linéaires, pour lesquels les relations (2.26) – (2.27) prennent la forme :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \quad (2.29)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (2.30)$$

Où on a défini la permittivité absolue ε , la permittivité relative ε_r , les perméabilités absolue μ et relative μ_r . Dans la plupart des matériaux courants, l'aimantation M est négligeable face au champ magnétique H , et par conséquent $\mu_r \approx 1$. Ce n'est que dans les matériaux ferromagnétiques, tels que les composés du fer, du nickel, du cobalt et de certaines terres rares, que l'aimantation peut devenir très importante.

Dans un métal, \vec{J} est, nettement, plus important que $\partial\vec{D}/\partial t$ suivant la relation de conservation de charge :

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \right) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (2.31)$$

La substitution de \vec{J} par la relation (2.28) dans l'expression (2.31) nous donne :

$$\nabla \cdot \sigma E + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad (2.32)$$

Avec ρ la densité volumique de la charge. On a, d'autre part, dans un milieu homogène :

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon} \rho \quad (2.33)$$

En reportant l'expression (2.33) dans la relation (2.32), nous obtenons:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho = 0 \quad (2.34)$$

Il en résulte que la densité de charge est, à un instant quelconque :

$$\rho = \rho_0 e^{-\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)t} \quad (2.35)$$

La constante d'intégration ρ_0 étant égale à la densité à l'instant $t = 0$. La distribution initiale des charges dans le conducteur décroît, exponentiellement, avec le temps, en tout point et de façon totalement indépendante du champ appliqué.

2.8 – RESOLUTION DES PROBLEMES D'ELECTROMAGNETISME

La résolution suit un schéma général. Il faut résoudre les équations de Maxwell (sous forme locale ou globale), en tenant compte des relations constitutives, en présence des conditions aux limites et des conditions initiales. Pour étudier la propagation, on part des équations d'onde, dans lesquelles les équations de Maxwell et les équations constitutives sont déjà combinées.

Pour satisfaire les relations de continuité sur une surface séparant 2 milieux, il faut définir cette surface dans un système de coordonnées adéquat. Par exemple, l'équation, $z = Cste$, désigne un plan en coordonnées cartésiennes ou cylindriques. Par contre, l'équation $\rho = Cste$, caractérise un cylindre de révolution et l'équation $r = Cste$, simule une sphère en coordonnées sphériques. La forme des limites impose, pratiquement, le système de coordonnées dans lequel on doit résoudre les équations de Maxwell. Seules quelques formes donnent une équation simple, avec laquelle on peut résoudre le problème de façon exacte. Dans beaucoup de cas, on doit faire appel à des approximations.

2.9 – CHAMPS VARIANTS DANS LE TEMPS

L'étude des champs électromagnétiques variant dans le temps donne lieu à certaines difficultés. D'une part, on doit résoudre des équations aux dérivées partielles par rapport à l'espace et au temps. D'autre part, la notion des matériaux linéaires n'est applicable, lorsque les champs varient dans le temps, qu'à des matériaux sans pertes. La présence des pertes produit un retard entre la cause et l'effet et il n'est, alors, plus possible de définir des constantes de proportionnalité.

2.10 – EQUATION D'ONDE

Une méthode commune pour réduire la complexité de résolution des équations de Maxwell est de remplacer les équations (2.1) – (2.4) du premier ordre avec les relations constitutives (2.26) – (2.27) par des équations différentielles du second ordre. On obtient, après quelques calculs, des équations d'onde non homogènes.

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \vec{J} \quad (2.36)$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho \quad (2.37)$$

Où le symbole ∇^2 représente le Laplacien.

Le champ magnétique est produit par la densité de courant, tandis que le champ électrique découle, simultanément, de la densité de charge et de la densité de courant.

Faisons intervenir les potentiels vecteur \vec{A} et scalaire V et imposons à ces 2 potentiels une relation supplémentaire appelée Jauge de Lorentz,

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (2.38)$$

On obtient, ainsi, 2 équations d'ondes, également, non homogènes, liant respectivement le potentiel vecteur \vec{A} à la densité de courant \vec{J} et le potentiel scalaire V à la densité de charge ρ .

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \quad (2.39)$$

$$\nabla^2 V - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\rho / \epsilon \quad (2.40)$$

Dans un espace sans charges ni courants, les membres de droites des équations d'onde sont nuls ; on obtient, ainsi, des équations d'ondes homogènes.

2.11 – POTENTIELS RETARDES

En 1888, Hertz montra qu'on pourrait déduire, de la structure des équations de Maxwell, la notion de propagation des phénomènes électromagnétiques, se transmettant à travers l'espace à une vitesse finie. Cette propriété fut mise à profit par Marconi, en vue d'établir des communications « sans fil » à longue distance. Cette nouvelle notion était à la base du développement rapide des systèmes de télécommunications [5] - [6]. Plusieurs problèmes du champ électromagnétique, particulièrement quand il s'agit du rayonnement, nécessitent l'extension du champ à l'infini en espace libre. L'analyse de telles situations est, souvent, traitée par les potentiels retardés.

Supposons qu'on veut trouver le potentiel scalaire en un point quelconque P au voisinage d'une charge ponctuelle q placée en un point à l'infini (Fig.2.2). Comme l'espace libre est sans pertes, le potentiel V satisfait l'équation d'onde homogène sans pertes, suivante :

$$\nabla^2 V - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \quad (2.41)$$

Cette équation est satisfaite partout sauf au point où la charge est placée. L'équation (2.41), exprimée en coordonnées sphériques, donne :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \quad (2.42)$$

Cette équation peut être, facilement, résolue en substituant $U = rV$. Ainsi, on obtient:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad (2.43)$$

L'équation (2.43) admet comme solution :

$$U = h \left(t \pm r\sqrt{\mu\varepsilon} \right) \quad (2.44)$$

Où la fonction h est 2 fois dérivable. Par conséquent, le potentiel électrique scalaire est donné comme une onde d'une certaine forme, se déplaçant radialement vers ou loin du point source $\partial\rho$ [1] & [26] :

$$V = \frac{h \left(t \pm r\sqrt{\mu\varepsilon} \right)}{r} \quad (2.45)$$

La fonction h peut être définie, dans ce cas, comme suit [27] :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon r} q \left(t - r\sqrt{\mu\varepsilon} \right) \quad (2.46)$$

Le signe positif est négligé, parce que le potentiel est dû à la présence de la charge $q(t)$, c'est pour cela qu'on a une onde se déplaçant loin de la charge, mais non vers la charge. La généralisation de l'équation (2.46), pour une distribution volumique dans le vide donne :

$$V = \int \frac{1}{4\pi\epsilon r} \rho(t - r/c) dv \quad (2.47)$$

Où c est la vitesse de la lumière. Le même résultat peut être obtenu pour le potentiel vecteur magnétique pour une distribution d'une densité de courant :

$$\vec{A} = \int \frac{\mu}{4\pi r} \vec{J}(t - r/c) dv \quad (2.48)$$

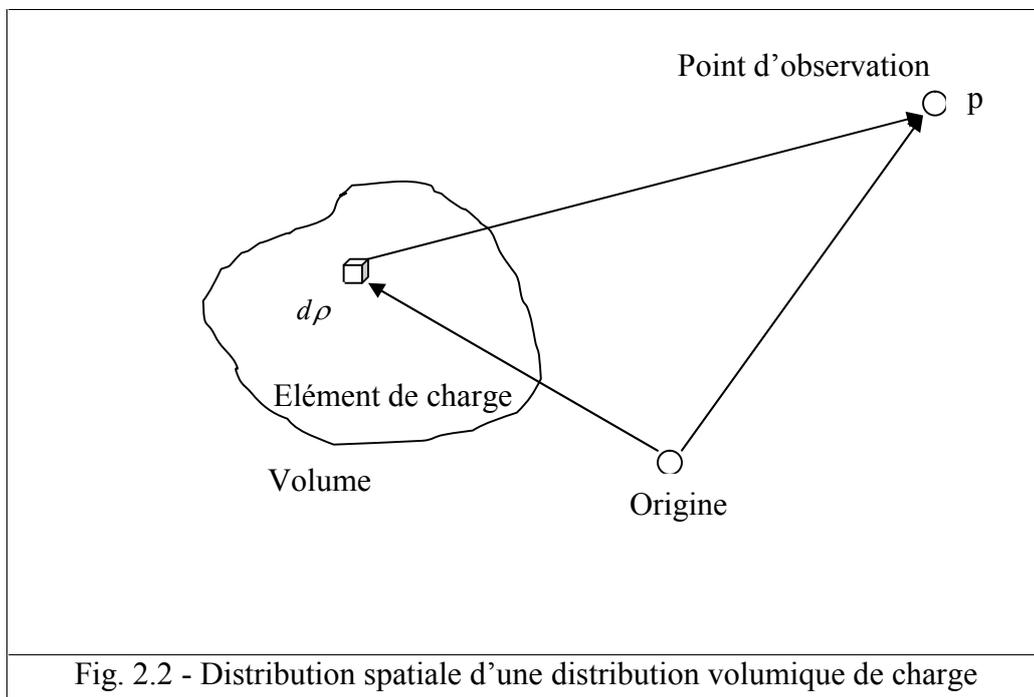


Fig. 2.2 - Distribution spatiale d'une distribution volumique de charge

Les équations (2.47) - (2.48) sont, physiquement, simples et compréhensibles. Mais, mathématiquement, elles sont très compliquées à utiliser, parce que le retard n'est pas facile à résoudre dans la majorité des cas. Le champ rayonné est, aussi, affecté par la proximité du sol ou d'autres objets [23].

2.12 – CONDITIONS DE SIMILITUDE ELECTRODYNAMIQUE

Il est fréquent en mécanique de fluide, d'expérimenter sur des modèles réduits. Les résultats, ainsi, obtenus peuvent être appliqués à une série d'objets identiques, différents du modèle réduit par des facteurs d'échelles. On peut procéder de même pour concevoir des structures électromagnétiques, en particulier, des antennes ou des sources des courants et des charges oscillantes. En effet, les antennes de radio diffusion, par exemple, sont souvent de grandes dimensions et l'étude des modèles réduits présente de très grands avantages. Il y a, donc, lieu d'établir les conditions à

assurer pour que la situation électromagnétique du modèle réduit soit identique à celle du modèle réel.

2.13 – CONCLUSIONS

L'électrodynamique constitue, après l'électrostatique et la magnétostatique, le troisième volet de l'électromagnétisme. Elle est fondée sur le fait qu'un champ électrique qui varie dans le temps crée un champ magnétique et inversement. Les lois de l'électrodynamique sont résumées par 4 équations appelées équations de Maxwell, du nom du physicien qui a parachevé la théorie de l'électrodynamique classique.

Dans ce chapitre, nous avons présenté les 4 équations de Maxwell sous leurs formes locale et globale. Dans le cadre d'un formalisme mathématique, on a déduit les potentiels électrique et magnétique. Les relations entre les champs et les potentiels électriques et magnétiques, lors du passage d'un milieu à un autre milieu différent sont définies par les conditions aux limites. Des applications des équations de Maxwell à la propagation des ondes électromagnétiques sont, elles - aussi, également, présentées.

La notion du potentiel retardé est, brièvement, abordée. Mais, elle sera bien utilisée dans la propagation des champs électromagnétiques rayonnés par le canal de la foudre.

3 - METHODES DE RESOLUTION DES EQUATIONS DE MAXWELL

3.1 - INTRODUCTION & OBJECTIFS	17
3.1.1 - Préambule	17
3.1.2 - Objectifs	17
3.2 - METHODES ANALYTIQUES	18
3.2.1 - Méthode de séparation des variables	18
3.2.2 - Décomposition polynomiale	18
3.2.3 - Méthode des perturbations	18
3.3 - METHODES NUMERIQUES	18
3.3.1 - Aspects communs aux méthodes numériques	19
3.3.2 - Formulation intégrale dans le domaine fréquentiel	20
3.3.3 - Méthodes des éléments finis	22
3.3.4 - Méthode des FDTD	26
3.4 - CONCLUSIONS	27

3 – METHODES DE RESOLUTION DES EQUATIONS DE MAXWELL

3.1 – INTRODUCTION & OBJECTIFS

3.1.1 – Préambule

Modéliser consiste à créer des modèles mathématiques de la réalité. Ces modèles sont des objets mathématiques caractérisés, en général, par des équations. Les équations qu'on va rencontrer, régissant la répartition spatiale de certains champs (électriques, magnétiques...etc.) sont presque toutes aux dérivées partielles. Dans la pratique, il n'en va pas ainsi, la plus part des équations se résolvent par l'examen des modèles beaucoup plus simples. Les équations que l'on cherche à résoudre et les approximations faites sur elles proviennent du « savoir faire » des physiciens, de l'état de l'art des numériciens et des besoins concrets des ingénieurs. Il existe un compromis entre la complexité souhaitée du modèle, les contraintes du temps de calcul liées au « savoir-faire », à la capacité des ordinateurs existants et aux exigences de la précision voulue. La modélisation des phénomènes physiques constitue une partie non négligeable de l'approximation numérique de ces phénomènes. Les problèmes liés aux phénomènes électrodynamiques font partie des problèmes linéaires. La linéarité permet un traitement de la variable temps par la transformée de Fourier. Ainsi, on passe de l'étude du domaine temporel vers celle du domaine fréquentiel. Le fonctionnement d'une antenne s'étudie à une fréquence donnée ou autour de celle-ci. L'étude de l'agression de la foudre se modélise plutôt en temporel. Les caractéristiques principales des phénomènes de propagation d'ondes sont la propagation à vitesse finie et la notion de causalité (qui fixe le sens du temps) dans le domaine temporel.

Il existe un grand nombre de méthodes de modélisation. Chacune d'elles est plus ou moins adaptée à un certain type de problèmes. Entre 1873 quand Maxwell annonça les fameuses équations de champ, et disant 1950, une quantité énorme d'excellents travaux était faite pour arriver à trouver des solutions analytiques aux problèmes de champs. Une large variété de systèmes de coordonnées était développée pour résoudre les problèmes dynamiques et statiques. Comme ces solutions ont la propriété d'orthogonalité, il est possible pour un problème donné, de synthétiser une combinaison linéaire de ces solutions pour des conditions aux limites spécifiées. Malgré la diversité des systèmes de coordonnées et les conditions aux limites, les solutions obtenues ne sont pas adéquates. Beaucoup de problèmes pratiques, ne peuvent pas être résolus par des méthodes analytiques. Par contre, par les méthodes numériques, on peut arriver à une solution très proche de la solution réelle.

3.1.2 – Objectifs

Les objectifs de ce chapitre sont :

- Présentation des différentes méthodes de résolution des équations de Maxwell
- Méthodes analytiques
 - ✓ Méthode de séparation de variables
 - ✓ Décomposition polynomiale
 - ✓ Méthode des perturbations
- Méthodes numériques

- ✓ Méthodes des moments
- ✓ Méthodes des éléments finis
- ✓ Méthodes des différences finis

3.2 – METHODES ANALYTIQUES

En termes de fonctions analytiques, ces méthodes sont utilisées dans des cas spéciaux de géométrie simples. Les méthodes analytiques, la transformation conforme, les méthodes des images et la méthode de séparation de variables s'avèrent d'application très difficile, voire impossible, dès que la complexité de la géométrie s'accroît et que certains matériaux possèdent des caractéristiques non linéaires [21] - [22]. Malgré leurs applications limitées, les solutions analytiques sont, extrêmement, utiles dans le but de valider les méthodes numériques car, elles présentent des solutions exactes de zéro erreur.

3.2.1 – Méthode de séparation des variables (méthode de Fourier)

Cette technique est très utilisée et constitue le point de départ d'autres méthodes. Le concept est simple : si l'on cherche la solution $\Phi(x, y, z, t)$ d'une équation aux dérivées partielles, alors on propose, si la physique du problème nous permet, d'exprimer cette fonction sous la forme [2] :

$$\Phi(x, y, z, t) = X(x) Y(y) Z(z) T(t) \quad (3.1)$$

Ces simplifications permettent de déterminer plus, facilement, les solutions générales.

3.2.2 – Décomposition polynomiale

La méthode de séparation de variables engendre, souvent, la nécessité d'utiliser des séries de fonctions orthogonales. Ces séries peuvent, aussi, être adaptées à des EDP à variables non séparables. Après avoir choisi la forme des fonctions orthogonales approchant au mieux les phénomènes physiques, on intègre l'EDP sur l'ensemble du domaine. On obtient, ainsi, les coefficients des différents termes de séries [2].

3.2.3 – Méthode des perturbations

Cette méthode permet d'utiliser les résultats analytiques d'une structure simple pour modéliser une structure dérivée plus complexe. On suppose que certaines variables électromagnétiques restent inchangées. La méthode est précise tant que les variations du dispositif n'entraînent pas l'apparition de phénomènes physiques remettant en cause la répartition des champs électromagnétiques dans la structure [2].

3.3 – METHODES NUMERIQUES

Les méthodes numériques sont les seules disponibles lorsque la géométrie du domaine à étudier est complexe. Ces méthodes font appel à des techniques de discrétisation. Elles transforment les équations aux dérivées partielles du champ en systèmes d'équations algébriques dont la solution fournit une approximation du champ en une grille discrète de points du plan ou de l'espace.

Les méthodes aux différences finies utilisent une discrétisation des équations aux dérivées partielles du champ tandis que les éléments finis procèdent, d'abord, par une formulation variationnelle ou projective du problème physique associé. Par contre, les méthodes intégrales utilisent les théorèmes de Green pour ramener le problème sur les frontières [13] - [30].

Les équations gouvernant les champs électromagnétiques peuvent être formulées de différentes manières suivant les hypothèses auxquelles sont soumises. Elles ne sont, par conséquent, pas strictement équivalentes en termes d'approximations. On distingue, en général, les formulations intégrale et différentielle des équations de Maxwell exprimées dans le domaine temporel ou spectral. A chacune de ces représentations correspond une technique particulière de résolution. On retiendra, malgré tout, que plus qu'un problème de terminologie auquel tout cela peut se ramener, l'idée directrice est de résoudre les valeurs de champs électromagnétiques dans le temps et dans l'espace, en discrétisant les opérateurs et le milieu inhérent à chaque formulation. La nécessité de faire des choix s'accompagne de certaines exclusions. Ainsi, avant d'aborder en détail la méthode des différences finies dans le domaine temporel, on présente, sommairement, d'autres méthodes de résolution utilisées en modélisation électromagnétique, mais non implémentées dans le cadre de cette thèse.

Comme le but de cette étude est le domaine temporel, le domaine fréquentiel sera brièvement traité. L'avantage du domaine temporel, c'est qu'on peut résoudre le problème étudié pour une bande assez large de fréquences.

3.3.1 – Aspects communs aux méthodes numériques

Le but de toute les méthodes numériques en électromagnétique est de trouver une solution approximée pour les équations de Maxwell (ou des équations issues d'elles) qui satisfassent des conditions aux limites et les états initiaux données. Formuler un problème électromagnétique correspond à spécifier les propriétés que la solution doit avoir pour être qualifiée. Ces propriétés sont spécifiées comme locales (différentielles) ou globales (intégrales) dans l'espace et sur les bordures.

Pour implémenter une méthode, on doit la formuler de telle façon qu'elle doit converger, rapidement, vers la solution exacte pour des scénarios électromagnétiques variés. La base de telles solutions par ordinateur sont les techniques mathématiques classiques d'approximation d'une fonction $f(x)$ (la solution inconnue) par une somme de fonctions connues $f_n(x)$ appelées fonctions de bases.

$$f(x) = \sum_n \alpha_n f_n(x) \quad (3.1)$$

Le poids ou coefficient α_n de chaque fonction de base doit être déterminé, pour que la somme s'approche à la solution exacte. Un exemple typique est la représentation d'une fonction par les séries de Fourier. Dans ce cas, les fonctions de bases sont les fonctions sinus et cosinus et les coefficients α_n sont les amplitudes des fonctions de bases.

3.3.2 – Formulation intégrale dans le domaine fréquentiel

La méthode la plus utilisée dans le domaine fréquentiel est la méthode des moments MOM (méthode des résidus pondérés). Cette méthode correspond à la résolution de la formulation intégrale des équations de Maxwell. Elle consiste en l'application du principe d'équivalence (surfactive ou volumique). C'est un principe grâce auquel la réponse d'un corps, caractérisé par ses propriétés électriques, peut être assimilée à une distribution de courant équivalente dans le volume ou à la surface de l'hétérogénéité en question (Fig. 3.1).

Soit E^i , H^i les champs incidents illuminant un objet de permittivité $\varepsilon(\vec{r})$. Lorsqu'une hétérogénéité diffractante est illuminée par une source lointaine dans le vide, on obtient :

$$\vec{E} = \vec{E}^i + \vec{E}^d \quad (3.3)$$

$$\vec{H} = \vec{H}^i + \vec{H}^d \quad (3.4)$$

Avec E^d et H^d sont les champs diffractés

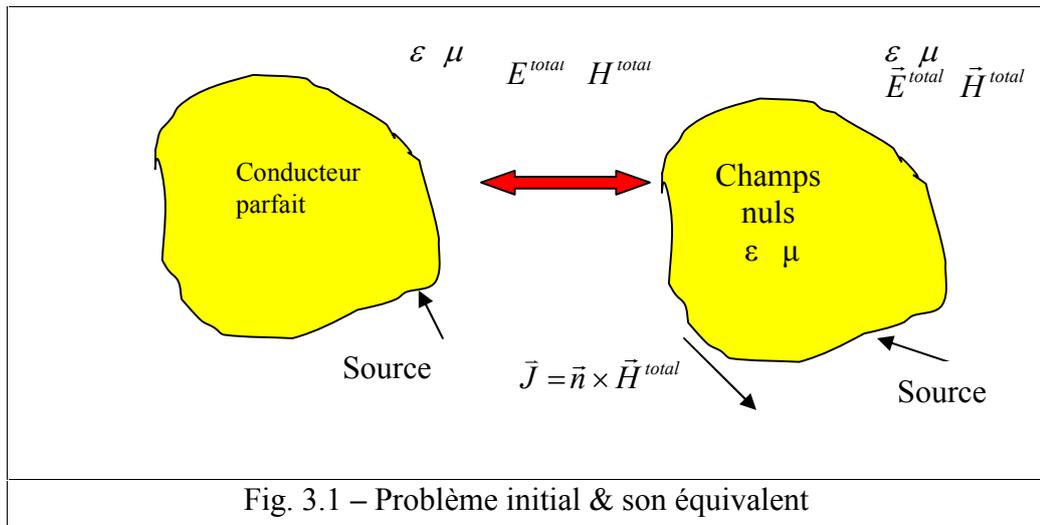


Fig. 3.1 – Problème initial & son équivalent

Ainsi, les équations de Maxwell peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H} \quad (3.5)$$

$$\nabla \times \vec{H} = -j\omega\varepsilon(\vec{r}) \vec{E} + \sigma(\vec{r}) \vec{E} \quad (3.6)$$

Les champs incidents doivent satisfaire les relations suivantes :

$$\nabla \times \vec{E}^i = -j\omega\mu_0 \vec{H}^i \quad (3.7)$$

$$\nabla \times \vec{H}^i = -j\omega\epsilon_0 \vec{E}^i \quad (3.8)$$

En substituant la loi d'Ampère, on obtient :

$$\nabla \times (\vec{H} - \vec{H}^i) = j\omega\epsilon(\vec{r}) \vec{E} + \sigma(\vec{r}) \vec{E} - j\omega\epsilon_0 \vec{E}^i \quad (3.9)$$

En utilisant la définition de \vec{E}^d et de \vec{H}^d à partir des équations (3.3) – (3.4), on obtient :

$$\nabla \times \vec{H}^d = j\omega\epsilon_0 \vec{E}^d + [j\omega(\epsilon(\vec{r}) - \epsilon_0) + \sigma(\vec{r})] \vec{E} \quad (3.10)$$

Le terme entre crochets peut être assimilé à un courant, qu'on peut nommer \vec{J}_{eq} .

Substituons la loi de Faraday et en utilisant les définitions de \vec{H}^d et \vec{E}^d , on obtient :

$$\nabla \times \vec{E}^d = -j\omega\mu_0 \vec{H}^d \quad (3.11)$$

$$\nabla \times \vec{H}^d = j\omega\epsilon_0 \vec{E}^d + \vec{J}_{eq} \quad (3.12)$$

Par conséquent, on peut résoudre ces équations pour les champs diffractés. La solution pour \vec{E}^d en utilisant le terme \vec{J}_{eq} comme fonction connue, sera :

$$\vec{E}^d = -j\omega\mu \int \left[\left(1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right) \frac{e^{-j\omega(\vec{r} - \vec{r}')}}{4\pi(\vec{r} - \vec{r}')} \right] \vec{J}_{eq}(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.13)$$

$$\vec{E}^d = -j\omega\mu \int \dot{G}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{J}_{eq} d\vec{r}' \quad (3.14)$$

Avec $\dot{G}(\vec{r}, \vec{r}')$ est le « dyadique », ou tenseur de la fonction de Green. Finalement, on a :

$$\vec{E} = \vec{E}^i - j\omega\mu \int d\vec{r}' \dot{G}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{J}_{eq}(\vec{r}, \vec{r}') \quad (3.15)$$

Cette dernière relation est appelée 'équation intégrale du champ électrique' abrégée dans la littérature anglophone par EFIE volume. L'inconnue est \vec{E} ou bien le courant équivalent \vec{J}_{eq} . En remplaçant \vec{J}_{eq} en fonction de \vec{E} suivant la relation (3.10), on obtient :

$$\vec{E}^i(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) + j\omega\mu \int \dot{G}(\vec{r}, \vec{r}') [j\omega(\epsilon(\vec{r}') - \epsilon_0) + \sigma(\vec{r}')] \vec{E}(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.16)$$

La solution est de la forme [25]:

$$\vec{E} = \sum_1^N a_n \vec{f}_n(\vec{r}) \quad (3.17)$$

Le domaine de l'intégrale est uniquement où on a $\varepsilon(\vec{r}') \neq \varepsilon_0$, ou $\delta(\vec{r}') \neq 0$. La fonction $\vec{f}_n(\vec{r}')$ est une fonction de discrétisation telles que :

$\vec{f}_n(\vec{r}') = 1$, si on se trouve sur un créneau de discrétisation.

$\vec{f}_n(\vec{r}') = 0$, si on se situe dans tous les autres créneaux.

Dans un référentiel bidimensionnel, l'EFIE volume devient [24]:

$$\vec{E}^i(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) + j\omega\mu \int \frac{1}{4j} H_0^2(k|\vec{r} - \vec{r}'|) J(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.18)$$

Ceci conduit au système linéaire suivant :

$$Ax = b \quad (3.19)$$

b : Matrice de \vec{E} discrétisée, $b_n = E^i(\vec{r}_m)$.

A : Matrice d'impédance dont les éléments sont donnés par :

$$A_{mn} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\pi a_n}{2} J_1(ka_n) H_0^2(k|\vec{r}_m - \vec{r}_n|) \quad \text{Si } m \neq n \quad (3.20)$$

$$A_{mn} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\pi a_n}{2} H_1^2(ka_n) - j \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\varepsilon_{rm}}{k(\varepsilon_{rm} - 1)} \quad \text{Si } m = n \quad (3.21)$$

j_1 : Fonction de Bessel.

H_0^2 : Fonction de Hankel, d'ordre zéro de deuxième espèce.

H_1^2 : Fonction de Hankel, d'ordre un de deuxième espèce.

Cette méthode a été popularisée dans le cadre du génie électrique par Harrington [25]. Elle est très utilisée, notamment, pour la modélisation des problèmes d'antennes et de transitions. L'application de la méthode des moments se limite à des problèmes où le nombre d'hétérogénéité est restreint parce que l'interaction entre les cellules démultiplie, rapidement, la matrice d'impédance.

3.3.3 – Méthode des éléments finis

On a vu que la méthode des moments consiste à résoudre une formulation intégrale des équations de Maxwell. Les fonctions $\vec{f}_n(\vec{r}')$ sont appliquées au niveau de la solution à évaluer, sur la surface ou à l'intérieur de l'hétérogénéité. Pour la méthode des éléments finis, l'approche est similaire sauf que la discrétisation se fait en amont, au niveau d'une formulation différentielle des équations. L'idée principale derrière cette méthode est de représenter le domaine en petits sous domaines appelés « éléments finis » (Fig. 3.2). La distribution

de l'inconnue primaire dans un élément est interpolée suivant les valeurs aux nœuds de cet élément.

Les étapes principales à suivre pour résoudre un problème par la méthode des éléments finis sont les suivantes :

- Discrétiser le domaine en éléments finis
- Choisir une fonction d'interpolation (connue aussi sous le nom de fonction de forme ou fonction de base)
- Obtenir les équations linéaires correspondant à un élément
- Former la matrice globale par assemblage des équations de tous les éléments
- Résoudre le système linéaire des équations en utilisant une technique d'algèbre linéaire
- Les résultats peuvent être utilisés postérieurement

Partant par exemple d'une expression générale de l'équation de Helmholtz bidimensionnelle :

$$(\nabla^2 + k^2) \cdot \Phi = f(x, y) \tag{3.22}$$

Le terme source $f(x, y)$ étant, par exemple, une densité de courant.

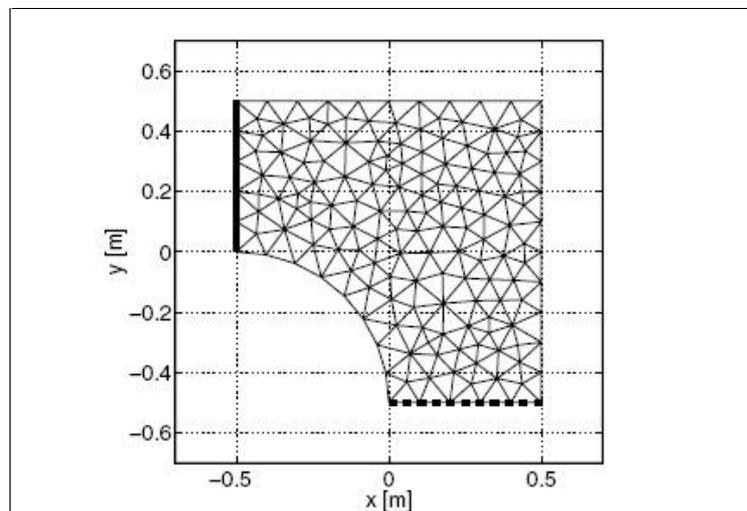


Fig. 3.2 – Maillage d'un domaine en éléments finis

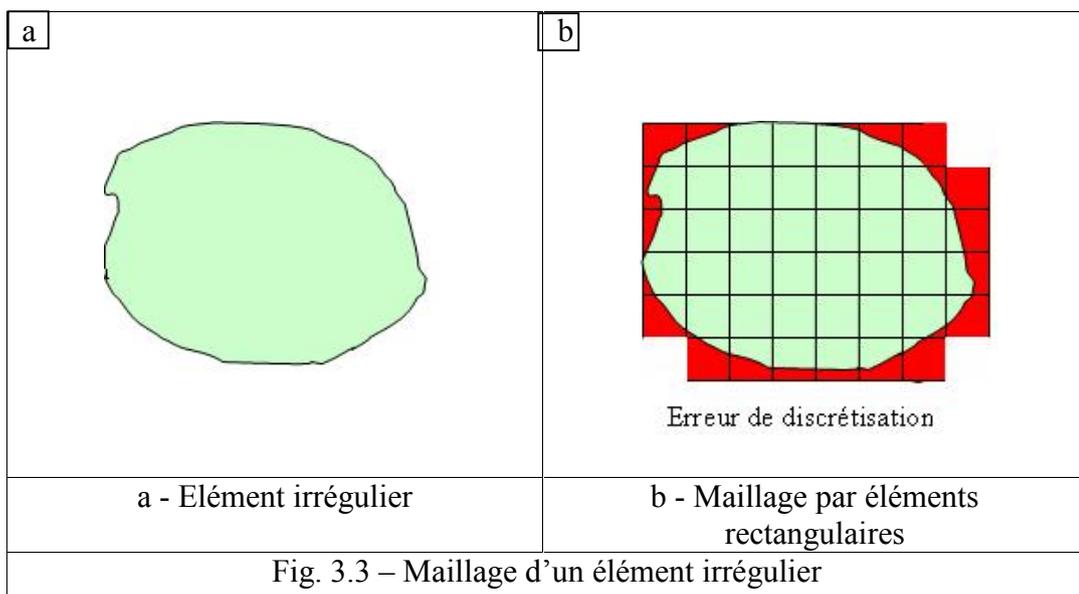


Fig. 3.3 – Maillage d'un élément irrégulier

La première étape consiste à mailler le domaine de calcul grâce à des éléments géométriques adaptés. A chacun de ces éléments est associé un certain nombre de nœuds. La sélection de la forme de l'élément est choisie de telle façon que l'erreur de maillage du domaine de la solution soit minimale (Fig. 3.3).

Dans un système bidimensionnel, des éléments triangulaires, par exemple, peuvent être caractérisés par 3 nœuds ou 6 nœuds si l'on y ajoute les points milieux des segments. Sur chacun des éléments triangulaires (pour une description de l'élément 'triangle' par 3 nœuds), on définit des fonctions continues (Fig.3.4). Ces fonctions, dites fonction de base, sont des approximations continues de la solution du problème. Ainsi, pour un élément triangle, on a :

$$\Phi(x, y) = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 \Phi_e N_i^e(x, y) \quad (3.23)$$

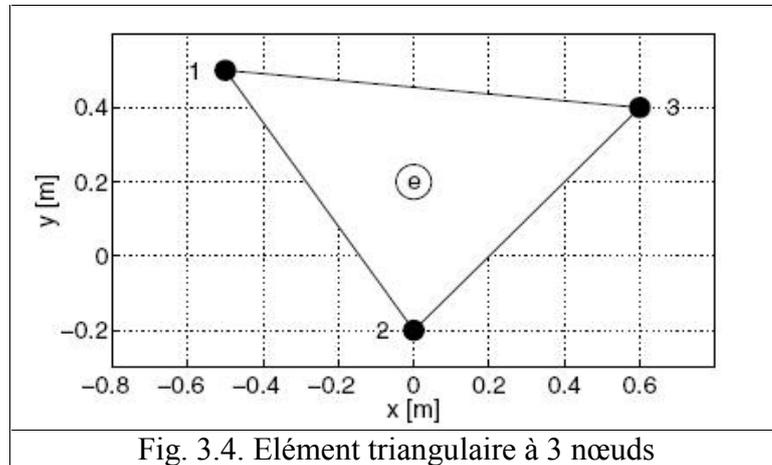


Fig. 3.4. Élément triangulaire à 3 nœuds

Les fonctions $N_i^e(x, y)$, pour $i = 1, 2, 3$ (avec une numérotation locale des nœuds pour chaque élément triangulaire), doivent être linéairement indépendantes et valent 1 au nœud i et 0 aux 2 autres, d'où l'appellation de fonction de base [21] - [23]. Comme exemple, choisissons une variation linéaire de Φ^e dans chaque élément e de la forme suivante :

$$\Phi_e = N_1^e + N_2^e x + N_3^e y \quad (3.24)$$

Où x et y sont les coordonnées des nœuds de l'élément e .

La deuxième étape consiste à reformuler l'équation de Helmholtz afin de limiter à l'ordre 1, les dérivées de l'équation N. Pour ce faire, on considère une des fonctions testes $w(x, y)$, respectant des conditions de dérivabilité et de continuité de calcul, telles que :

$$I = \int_{\Omega} w(x, y) (\nabla^2 + k^2) \Phi \, dx \, dy - \int w(x, y) f(x, y) \, dx \, dy = 0 \quad (3.25)$$

Cette formulation est appelée ‘forme faible’ de l’équation aux dérivées partielles. En utilisant l’identité :

$$\nabla \cdot (v \vec{A}) = v \nabla \cdot \vec{A} + \nabla v \cdot \vec{A} \quad (3.26)$$

Avec l’identité :

$$\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot (\nabla \Phi)$$

On obtient :

$$w \cdot \nabla^2 \Phi = \nabla \cdot (w \nabla \Phi) - \nabla w \cdot \nabla \Phi \quad (3.27)$$

Ainsi, l’intégrale (3.25) devient :

$$I = \int_{\Omega} \left\{ \nabla \cdot (w \nabla \Phi) - \nabla w \cdot \nabla \Phi + w k^2 \Phi - w f \right\} dx dy \quad (3.28)$$

En utilisant le théorème de la divergence, on a :

$$I = \int_{\Omega} \left\{ -\nabla w \cdot \nabla \Phi + w k^2 \Phi - w f \right\} dx dy + \int_{\Gamma} w \nabla \Phi \cdot \vec{n} d\Gamma$$

$$I = \int_{\Omega} \left\{ \nabla w \cdot \nabla \Phi - w k^2 \Phi + w f \right\} dx dy - \int_{\Gamma} w \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\Gamma \quad (3.29)$$

L’intérêt d’une telle formulation réside dans le fait qu’elle réunit, en une seule expression, l’équation de Helmholtz (dans l’intégrale de surface) ainsi que les conditions aux limites (dans l’intégrale curviligne), en ne faisant intervenir que des dérivées d’ordre 1. En remplaçant Φ par les fonctions de base dans l’équation (3.28), on obtient :

$$\sum_{e=1}^{N^e} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \left\{ \nabla w \cdot \nabla N_i^e - w k^2 N_i^e + w f \right\} \Phi^e dx dy - \int_{\Gamma} w \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (3.30)$$

Le choix des fonctions testes W se fait d’une manière générale, d’après la méthode de Galerkin [28]. Elles sont prises égales aux fonctions de base. De plus, sur la frontière, on peut avoir les conditions suivantes :

$$\text{Condition de Newmann : } \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0 \quad \& \quad \text{Condition de Dirichlet : } \Phi \Big|_{\Gamma} = 0$$

Comme les fonctions de base N_i^e ne sont non nulles qu’au niveau de l’élément fini, l’équation (3.29) devient, dans les conditions de Newmann :

$$\sum_{e=1}^{N^e} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} (\nabla w \cdot \nabla N_i^e - k^2 w N_i^e) \Phi^e dx dy = - \int_{\Omega} w f dx dy \quad (3.31)$$

L'équation (3.29) se ramène à un système matriciel à 3 dimensions :

$$[A^e]^{3 \times 3} \{\Phi_i^e\}^3 = \{b^e\}^3 \quad (3.32)$$

$$A_i^e = \int_{\Omega} (\nabla N_i^e \cdot \nabla N_i^e - k^2 N_i^e N_i^e) dx dy \quad (3.33)$$

$$b_i^e = - \int_{\Omega} N_i^e f dx dy \quad (3.34)$$

En réalité, chaque fonction de base est définie pour autant d'éléments adjacents. Il y a, donc, autant d'équations supplémentaires pour évaluer les inconnues Φ_i^e . On assemble, donc, toutes les matrices A^e correspondant à chaque élément fini afin de sommer les contributions respectives des éléments finis adjacents. Le système déduit de l'assemblage des $3 \times N^e$ matrices, a pour dimension N^e , soit N^e équations linéaires [19].

$$[A^e]^{N^e \times N^e} \{\Phi_i^e\}^{N^e} = \{b^e\}^{N^e} \quad (3.35)$$

L'inconnue Φ_i^e est, finalement, évaluée de façon continue grâce à l'équation (3.23).

La méthode des éléments finis offre, sans aucun doute, une souplesse d'implémentation vis-à-vis des milieux complexes. Sa grande souplesse d'adaptation à modéliser des phénomènes complexes dans des géométries élaborées, a conduit à la généralisation de son utilisation dans presque tous les problèmes aux dérivées partielles dans la conception des machines. Les principales limites de cette méthode vis-à-vis d'une implémentation exhaustive de la propagation électromagnétique se situent au niveau des équations de départ. En effet, les expressions du second ordre découplées des équations de propagation ne prennent pas en compte l'effet de couplage entre le champ magnétique et le champ électrique. De nombreux logiciels existent dans le commerce (PE2D, Ansoft HFSS...) et permettent des calculs de structures complexes en 3 dimensions grâce à un maillage adaptatif. Les fonctions utilisées sont des fonctionnelles construites par rapport aux potentiels ou aux champs électromagnétiques. La méthode est robuste. Mais, elle nécessite des moyens informatiques importants.

3.3.4 – Méthode FDTD

Comme il a été mentionné, plusieurs méthodes peuvent être utilisées, pour résoudre les équations de Maxwell dépendant du temps telles que, les méthodes des moments et les méthodes des éléments finis. Mais, la méthode la plus populaire est, sans doute, celle des différences finies dans le domaine temporel, appelée FDTD. La méthode des différences finies dans le domaine temporel, initialement, élaborée par K. S. Yee en 1966 [40], est actuellement une technique puissante pour la résolution numérique des équations de Maxwell dépendant du temps. Cette méthode est une discrétisation par les différences finies centrées d'ordre 2 dans l'espace et dans le temps des équations de Maxwell - Faraday et de Maxwell - Ampère.

La méthode FDTD se fonde sur la formulation standard des équations de Maxwell dans la matière au premier ordre (3.36) – (3.39). Ceci a pour avantage d'éviter des approximations en amont.

$$\nabla \times E(r, t) + \frac{\partial}{\partial t} B(r, t) = 0 \quad (3.36)$$

$$\nabla \times H(r, t) - \frac{\partial}{\partial t} D(r, t) = J \quad (3.37)$$

$$H(r, t) = \mu(r, t) \otimes B(r, t) \quad (3.38)$$

$$D(r, t) = \varepsilon(r, t) \otimes E(r, t) \quad (3.39)$$

Avec \otimes l'opérateur de convolution temporelle, r la position spatiale et t le temps.

La discrétisation des opérateurs de dérivation utilise un schéma centré des différences finies, avec une formulation dont l'erreur est du second ordre pour chaque pas de discrétisation. En d'autres termes, la diminution de moitié du pas de discrétisation réduit de 25% les erreurs d'évaluation des opérateurs de dérivation.

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x/2) - f(x_0 - \Delta x/2)}{\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (3.40)$$

La méthode FDTD sera plus détaillée dans le chapitre 4.

3.4 – CONCLUSIONS

Le choix entre les méthodes de résolution est délicat et dépend des configurations mises en jeu. Depuis la fin des années 80, on assiste à un développement des méthodes de calcul numérique dites PDE. Grâce aux ordinateurs actuels, il est maintenant possible de résoudre des problèmes ayant des géométries très complexes en utilisant une méthode susceptible de nous donner la solution voulue. Ces méthodes permettent de résoudre les équations aux dérivées partielles dans les domaines temporel ou fréquentiel. Il faut souligner l'utilisation des méthodes hybrides qui, pour une même structure, on peut utiliser plusieurs méthodes, chacune modélisant la zone du système (et/ou le domaine fréquentiel) où elle est la plus performante.

Les différences entre les techniques numériques résident, essentiellement, dans :

- la quantité électromagnétique qui va être approximée.
- Les fonctions de bases utilisées pour déterminer la solution.
- La stratégie employée pour déterminer les coefficients des fonctions de bases.

La solution d'un problème électromagnétique demande de trouver le champ électrique ou magnétique, une fonction potentielle, ou une distribution de charges et /ou de courants. Comme ces quantités possèdent différentes propriétés, par conséquent, la formulation du problème pour chacune est, évidemment, différente.

4 - METHODE DES DIFFERENCES FINIES DANS LE DOMAINE TEMPOREL

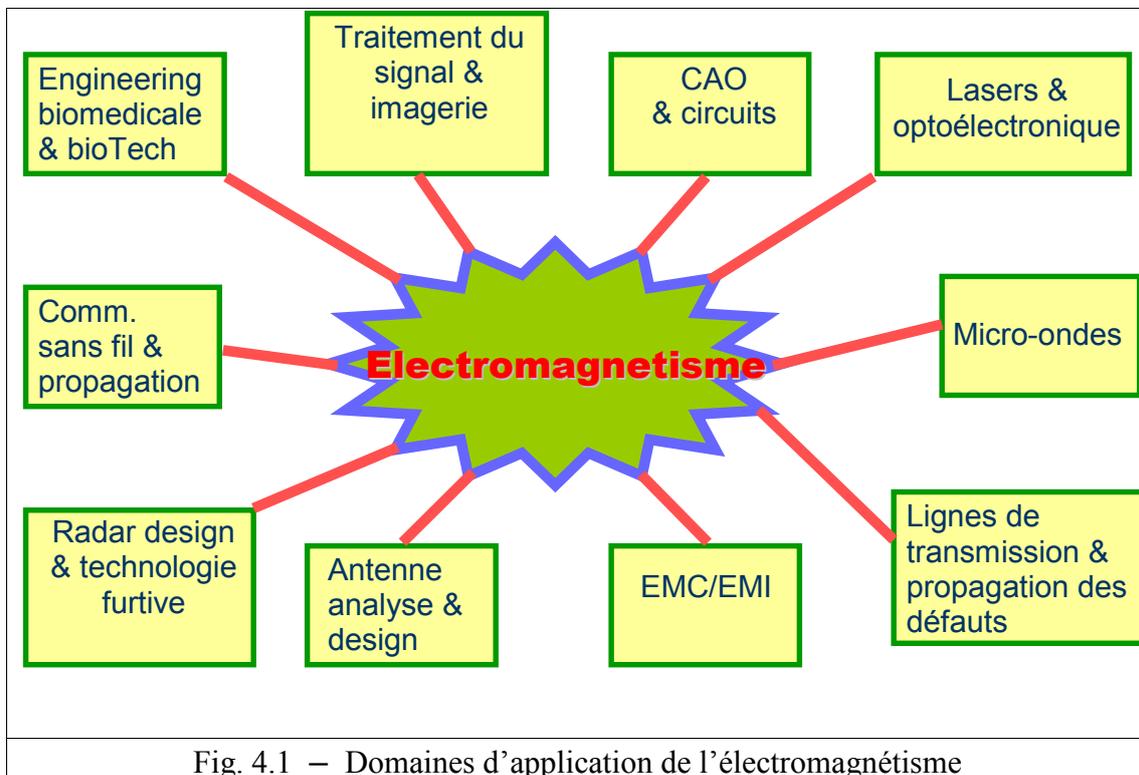
4.1 - INTRODUCTION & OBJECTIFS	28
4.1.1 - Préambule	28
4.1.2 - Objectifs	28
4.2 - BASES DE LA METHODE FDTD	29
4.2.1 - Préambule	29
4.2.2 - Principe des différences finies	29
4.2.3 - Algorithme de Yee	30
4.3 - CRITERE DE STABILITE	35
4.4 - DISPERSION NUMERIQUE	36
4.5 - ATTENUATION & DISPERSION PHYSIQUE	38
4.6 - METHODE D'IMPLEMENTATION DE LA DISPERSION PHYSIQUE.	38
4.6.1 - Méthode de convolution récursive	38
4.6.2 - Méthode ADE	41
4.7 - TRAITEMENT DES INTERFACES	42
4.7.1 - Traitement des interfaces diélectriques	42
4.7.2 - Traitement des conducteurs parfaits	42
4.7.3 - Murs magnétiques	43
4.8 - CONDITIONS AUX LIMITES	43
4.9 - TRANSFORMATION CHAMP PROCHE – CHAMP LOINTAIN	47
4.10 - CONCLUSIONS	49

4 – METHODE DES DIFFERENCES FINIES DANS LE DOMAINE TEMPOREL

4.1 – INTRODUCTION & OBJECTIFS

4.1.1 – Préambule

Beaucoup de ce qu'on appelle technologie moderne dépend sur l'analyse et la synthèse des systèmes électromagnétiques à hautes fréquences. Comme diverses applications, on cite : régimes transitoires, coups de foudres, télécommunication, radar, études géophysiques, diagnostic médical et thérapie et défense militaire (Fig. 4.1). L'habilité de comprendre et de contrôler les rayonnements, la réfraction et la pénétration des ondes électromagnétiques est de grande importance. L'analyse et la synthèse des systèmes électromagnétiques à hautes fréquences sont basées sur l'obtention des solutions exactes des équations de Maxwell.



4.1.2 – Objectifs

L'objectif principal de ce chapitre est l'étude de la méthode FDTD :

- Présentation de la méthode FDTD.
- Algorithmes de Yee.
- Condition de stabilité.
- Dispersion numérique.
- Méthode d'implémentation de la dispersion.
- Atténuation.
- Traitement des interfaces.

- Conditions aux limites absorbantes

4.2 – BASES DE LA METHODE FDTD

4.2.1 – Préambule

Le développement des méthodes numériques a connu un saut exceptionnel dans les dernières décennies. Les raisons de cet engouement sont multiples :

- Robustesse des calculs pour une grande diversité de systèmes.
- Possibilité d'éviter les inversions des matrices.
- Approche systématique pour tout type de structure.
- Croissance très élevée des ressources informatiques permettant à ces méthodes d'évoluer très rapidement.
- Visualisation aisée de nombreux phénomènes physiques.

Parmi ces algorithmes des EDP, c'est la méthode FDTD qui possède le plus grand nombre de domaines d'applications tant au niveau des structures pouvant être modélisées qu'au niveau des domaines de fréquences explorés. Cette méthode a été proposée par Yee en 1966 [40], puis plus ou moins oubliée jusqu'en 1975. Cette année-là, Allen Taflovà [50] - [60], qui n'arrivait pas à résoudre un problème de pénétration de micro-ondes sur l'œil humain (de nombreuses cataractes avaient été observées sur des techniciens radar durant la seconde guerre mondiale), décide d'utiliser l'algorithme de Yee. Malgré le succès de sa modélisation et les différentes améliorations qu'il apporte à la méthode, celle-ci retombe dans l'oubli, sans doute, par manque de moyens informatiques suffisants (seule la défense Américaine continue à l'utiliser). Dès la fin des années 80, la révolution informatique a permis de généraliser l'utilisation de la méthode FDTD.

Ce succès s'explique, principalement, par la simplicité du principe de base de la méthode. Il s'agit d'implémenter les équations de Maxwell et de les appliquer sur l'ensemble de l'espace de modélisation pour tout instant de simulation. Or, les équations de Maxwell régissent le comportement électromagnétique de la matière. Ceci leur permet d'être appliqué quel que soit le système envisagé.

Le domaine d'application de la méthode FDTD est très vaste, on cite quelques uns :

- Etude de la réponse du corps humain à un rayonnement électromagnétique.
- Simulation d'antenne.
- Etude des circuits électroniques subnanosecondes.
- Propagation optique subpicoseconde.
- Conception d'avions furtifs.
- Fonctionnement des satellites artificiels.

La méthode FDTD est tout à fait adaptée au parallélisme informatique. En effet, chaque calcul de champ ne fait intervenir que ses plus proches voisins.

4.2.2 – Principe des différences finies

Considérons une fonction $f(u)$ connue aux points $u_0 - \Delta u/2$, u_0 et $u_0 + \Delta u/2$. On évalue, numériquement, la dérivée de $f(u)$ en u_0 en développant $f(u)$ en série de Taylor aux points $u_0 - \Delta u/2$ et $u_0 + \Delta u/2$. Ainsi, on obtient :

$$f(u_0 + \Delta u / 2) = f(u_0) + \frac{\Delta u}{2} f'(u_0) + \frac{\Delta u^2}{8} f''(u_0) + O(\Delta u^3) \quad (4.1)$$

$$f(u_0 - \Delta u / 2) = f(u_0) - \frac{\Delta u}{2} f'(u_0) + \frac{\Delta u^2}{8} f''(u_0) + O(\Delta u^3) \quad (4.2)$$

La dérivée peut être obtenue de différentes manières :

- Soit par une approximation par différence avant, à partir de l'équation (4.1) :

$$f'(u_0) = \frac{f(u_0 + \Delta u / 2) - f(u_0)}{\Delta u / 2} + O(\Delta u) \quad (4.3)$$

- Soit par une approximation par différence arrière à partir de l'équation (4.2) :

$$f'(u_0) = \frac{f(u_0) - f(u_0 - \Delta u / 2)}{\Delta u / 2} + O(\Delta u) \quad (4.4)$$

- Soit par une approximation par différence centrée à partir des équations (4.1) – (4.2).

$$f'(u_0) = \frac{f(u_0 + \Delta u / 2) - f(u_0 - \Delta u / 2)}{\Delta u} + O(\Delta u^2) \quad (4.5)$$

4.2.3 – Algorithme de Yee

Contrairement aux méthodes évoquées précédemment, la méthode FDTD se fonde sur la formulation des équations de Maxwell dans la matière au premier ordre des équations (4.6) – (4.9). Ceci a pour avantage d'éviter des approximations en amont :

$$\nabla \times \vec{E}(r, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(r, t) = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}(r, t)}{\partial t} \quad (4.6)$$

$$\nabla \times \vec{H}(r, t) = \vec{J}(r, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(r, t) = \sigma \vec{E}(r, t) + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}(r, t)}{\partial t} \quad (4.7)$$

$$\vec{B}(r, t) = \mu \cdot \vec{H}(r, t) \quad (4.8)$$

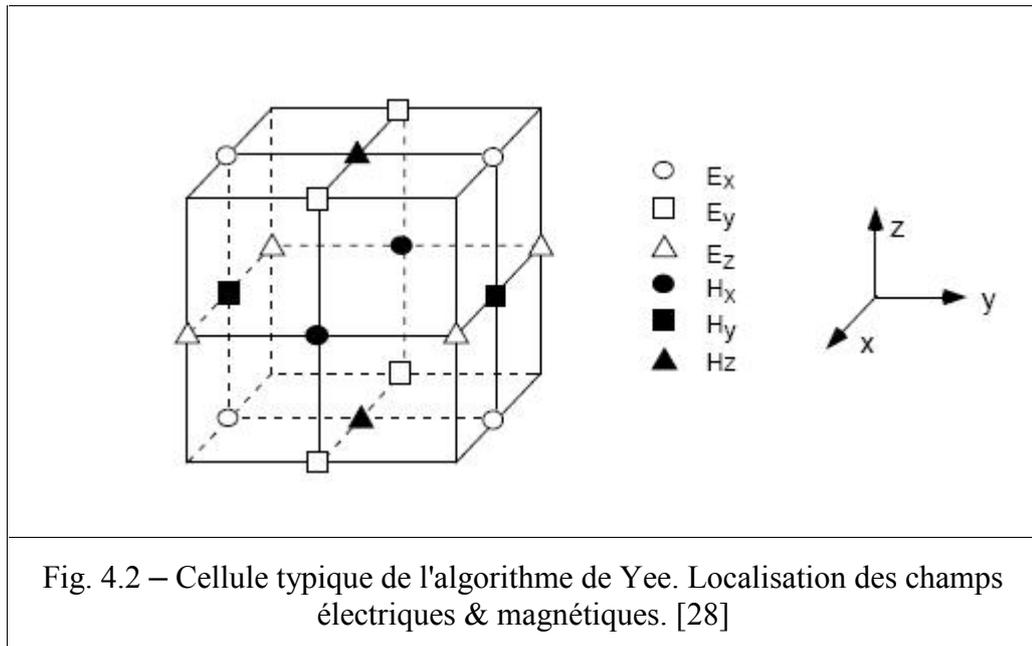
$$\vec{D}(r, t) = \varepsilon \cdot \vec{E}(r, t) \quad (4.9)$$

La double discrétisation spatiale et temporelle par les différences finies, appliquées aux équations de Maxwell couplées, utilisées ici, a été décrite de manière originale par Yee en 1966. La discrétisation des opérateurs de dérivation utilise un schéma centré des différences finies, avec une formulation dont l'erreur est du second ordre pour chaque pas de discrétisation. Pour une fonction quelconque, la différence centrée spatiale et temporelle est donnée par la formule suivante :

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x/2) - f(x_0 - \Delta x/2)}{\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (4.10)$$

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{t=t_0} = \frac{f(t_0 + \Delta t/2) - f(t_0 - \Delta t/2)}{\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (4.11)$$

La figure 4.2 montre la grille de Yee servant à la discrétisation spatiale pour le schéma des différences finies.



Les champs électriques et magnétiques sont référencés par rapport à un nœud représentant une cellule cubique. Les champs électriques sont, ici, positionnés au centre des arêtes, alors que les champs magnétiques sont positionnés au centre des faces du cube (Fig. 4.2). On remarque le décalage d'un demi pas spatial entre les composantes des champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{H} .

Dans un système de coordonnées cartésiennes, le rotationnel des 2 équations vectorielles (4.6) – (4.7) peut être décomposé pour donner 6 équations scalaires. Chaque équation scalaire est une équation différentielle partielle du premier ordre.

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right) \quad (4.15)$$

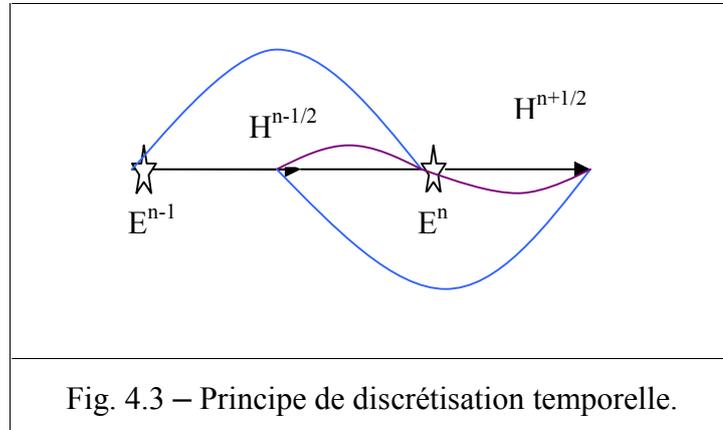
$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right) \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right) \quad (4.17)$$

En utilisant la notation simplifiée suivante pour les coordonnées spatiales et temporelles :

$$(i, j, k) = (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z) \quad \text{avec} \quad t = n\Delta t$$

Concernant la discrétisation temporelle, le modèle utilisé est appelé « leap frog » (Fig.4.3). Les 2 champs électrique et magnétique sont décalés l'un de l'autre par un demi pas temporel.



La différence centrée, appliquée au second ordre, permet d'obtenir une discrétisation dans le temps et dans l'espace des 6 équations scalaires.

$$\frac{H_x|_{i,j,k}^{n+1/2} - H_x|_{i,j,k}^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{1}{\mu_{i,j,k}} \left(\frac{E_y|_{i,j,k+1/2}^n - E_y|_{i,j,k-1/2}^n}{\Delta z} - \frac{E_z|_{i,j+1/2,k}^n - E_z|_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y} \right) \quad (4.18)$$

$$\frac{H_y|_{i,j,k}^{n+1/2} - H_y|_{i,j,k}^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{1}{\mu_{i,j,k}} \left(\frac{E_z|_{i+1/2,j,k}^n - E_z|_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} - \frac{E_x|_{i,j,k+1/2}^n - E_x|_{i,j,k-1/2}^n}{\Delta z} \right) \quad (4.19)$$

$$\frac{H_z|_{i,j,k}^{n+1/2} - H_z|_{i,j,k}^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{1}{\mu_{i,j,k}} \left(\frac{E_x|_{i,j+1/2,k}^n - E_x|_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y} - \frac{E_y|_{i+1/2,j,k}^n - E_y|_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} \right) \quad (4.20)$$

$$\frac{E_x|_{i,j,k}^{n+1} - E_x|_{i,j,k}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon_{i,j,k}} \left(\frac{H_z|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} - H_z|_{i,j-1/2,k}^{n+1/2}}{\Delta y} - \frac{H_y|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} - H_y|_{i,j,k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} - \sigma_{i,j,k} E_x|_{i,j,k}^{n+1/2} \right) \quad (4.21)$$

$$\frac{E_y|_{i,j,k}^{n+1} - E_y|_{i,j,k}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon_{i,j,k}} \left(\frac{H_x|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} - H_x|_{i,j,k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} - \frac{H_z|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} - H_z|_{i-1/2,j,k}^{n+1/2}}{\Delta x} - \sigma_{i,j,k} E_y|_{i,j,k}^{n+1/2} \right) \quad (4.22)$$

$$\frac{E_z|_{i,j,k}^{n+1} - E_z|_{i,j,k}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon_{i,j,k}} \left(\frac{H_y|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} - H_y|_{i,j-1/2,k}^{n+1/2}}{\Delta x} - \frac{H_x|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} - H_x|_{i,j,k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta y} - \sigma_{i,j,k} E_z|_{i,j,k}^{n+1/2} \right) \quad (4.23)$$

Les termes $\sigma E|_{i,j,k}^{n+1/2}$ dans les équations (4.21) – (4.23), sont évalués au pas temporel $(n+1/2)\Delta t$, qui n'est pas supposé en mémoire. Par contre, les termes de E^n et E^{n+1} sont évalués aux pas temporels $(n+1)\Delta t$ et $n\Delta t$. On a besoin, donc, d'estimer le terme $\sigma E|_{i,j,k}^{n+1/2}$, avec une bonne approximation comme suit :

$$E|_{i,j,k}^{n+1/2} = \frac{E|_{i,j,k}^{n+1} + E|_{i,j,k}^n}{2} \quad (4.24)$$

Après substitution de la relation (4.24) dans les équations (4.21) – (4.23) et réarrangement des équations (4.18) – (4.23), on obtient :

$$H_x|_{i,j,k}^{n+1/2} = H_x|_{i,j,k}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu_{i,j,k}} \left(\frac{E_y|_{i,j,k+1/2}^n - E_y|_{i,j,k-1/2}^n}{\Delta z} - \frac{E_z|_{i,j+1/2,k}^n - E_z|_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y} \right) \quad (4.25)$$

$$H_y|_{i,j,k}^{n+1/2} = H_y|_{i,j,k}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu_{i,j,k}} \left(\frac{E_z|_{i+1/2,j,k}^n - E_z|_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} - \frac{E_x|_{i,j,k+1/2}^n - E_x|_{i,j,k-1/2}^n}{\Delta z} \right) \quad (4.26)$$

$$H_z|_{i,j,k}^{n+1/2} = H_z|_{i,j,k}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu_{i,j,k}} \left(\frac{E_x|_{i,j+1/2,k}^n - E_x|_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y} - \frac{E_y|_{i+1/2,j,k}^n - E_y|_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} \right) \quad (4.27)$$

$$E_x|_{i,j,k}^{n+1} = \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) \cdot E_x|_{i,j,k}^n + \left(\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) \cdot \left(\frac{H_z|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} - H_z|_{i,j-1/2,k}^{n+1/2}}{\Delta y} - \frac{H_y|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} - H_y|_{i,j,k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} \right) \quad (4.28)$$

$$E_y|_{i,j,k}^{n+1} = \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) \cdot E_y|_{i,j,k}^n + \left(\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) \cdot \left(\frac{H_x|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} - H_x|_{i,j-1/2,k}^{n+1/2}}{\Delta z} - \frac{H_z|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} - H_z|_{i,j,k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} \right) \quad (4.29)$$

$$E_z|_{i,j,k}^{n+1} = \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) \cdot E_z|_{i,j,k}^n + \left(\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) \cdot \left(\frac{H_y|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} - H_y|_{i,j-1/2,k}^{n+1/2}}{\Delta x} - \frac{H_x|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} - H_x|_{i,j,k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta y} \right) \quad (4.30)$$

La figure 4.4 montre l'organigramme simplifié du programme FDTD.

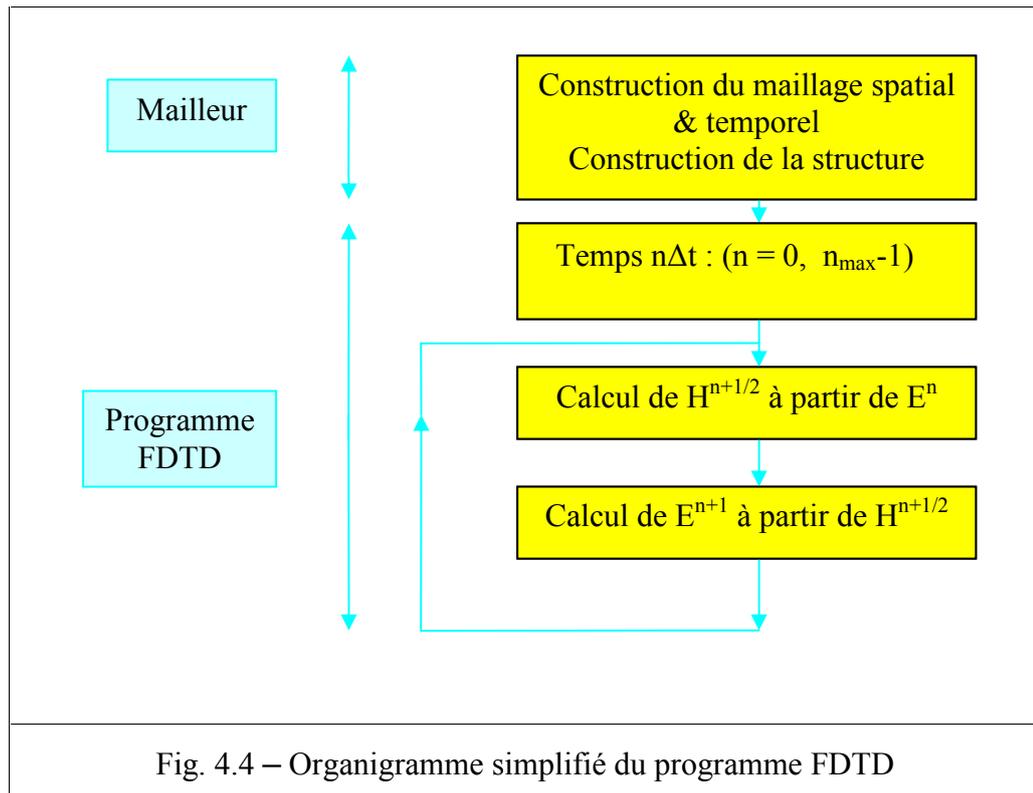


Fig. 4.4 – Organigramme simplifié du programme FDTD

4.3 – CRITERE DE STABILITE

Une condition sur le pas de temps existe pour assurer la convergence du schéma numérique. Si la vitesse d'une onde électromagnétique dans la grille est bornée, l'onde doit circuler à une vitesse inférieure à la vitesse physique maximale autorisée, réellement, par le milieu. La plus simple condition consiste à s'assurer que la valeur absolue du rapport du champ à 2 instants successifs est inférieure à l'unité. En effet, une onde, se propageant dans le vide, ne peut être plus vite que la vitesse de la lumière. Si l'onde se propage le long d'une cellule, elle nécessite un temps minimum qui est $\Delta t = \Delta x / c$. Si la cellule est bidimensionnelle, l'onde doit parcourir la diagonale, dans un temps minimum de $\Delta t = \Delta x / (\sqrt{2} c)$. On peut résumer ces conditions par l'expression dite CFL (Courant Friedrich Lévy) :

$$\Delta t \leq 1 / \left(c \sqrt{(1/\Delta x)^2 + (1/\Delta y)^2 + (1/\Delta z)^2} \right) \quad (4.31)$$

Si la discrétisation au niveau des 3 axes est la même, $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta$ l'expression (4.31) devient :

$$\Delta t \leq \Delta / (c\sqrt{3}) \quad (4.32)$$

Cette condition implique que le pas de temps doit être plus petit que le temps nécessaire pour parcourir une cellule à la vitesse de la lumière c .

4.4 – DISPERSION NUMERIQUE

L'induction des erreurs lors de la propagation d'une onde dans un milieu discrétisé est, notablement, dépendante du choix fixé des paramètres de discrétisation [16]. En effet, le spectre de la source dont l'amplitude est notable sur un intervalle borné, n'est qu'en partie correctement discrétisé. La vitesse de phase numérique de l'onde dans le domaine discrétisé diffère de celle du vide. Cette différence est due à la longueur d'onde, à la direction de propagation dans le maillage et à la discrétisation. Le mauvais choix de discrétisation entraîne un cumul de retard de l'onde en propagation ou des erreurs de phases. L'idée étant de définir les pas spatiaux et temporels pour la fréquence la plus énergétique dite fréquence de pic de l'impulsion. Au delà d'une certaine fréquence, chaque maille agit, par conséquent, comme un réflecteur [26] - [30]. Ce phénomène apparaît, en général, lorsque la longueur d'onde associée à la fréquence correspond à moins de 3 mailles et la grille de Yee se comporte, par conséquent, comme un passe bas. Au bout d'un certain temps, on observe un train d'onde haute fréquence en retard par rapport à l'ensemble (Fig. 4.5). L'évaluation théorique de ce phénomène de dispersion numérique est, abondamment, détaillée dans la littérature [19]-[30]. La mise en évidence théorique de la dispersion numérique se fait en comparant l'expression discrétisée et l'expression analytique de l'impulsion entre le nombre d'onde et la pulsation, dite relation de dispersion. La relation de dispersion analytique pour une onde plane dans un milieu continu sans pertes est la suivante :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (4.33)$$

Où :

ω : Pulsation du signal en [rad/s].

k_x, k_y, k_z : Composantes du vecteur d'onde.

c : Vitesse de la lumière dans le milieu en [m/s].

Pour une grille de 3 dimensions à maillage orthogonal, dans le cas d'une onde plane incidente avec un angle α , la relation de la dispersion devient :

$$\left[\frac{1}{\Delta t} \sin\left(\frac{\omega \cdot \Delta t}{2}\right) \right]^2 = \left[\frac{1}{\Delta x} \sin\left(\frac{k_x \cdot \Delta x}{2}\right) \right]^2 + \left[\frac{1}{\Delta y} \sin\left(\frac{k_y \cdot \Delta y}{2}\right) \right]^2 + \left[\frac{1}{\Delta z} \sin\left(\frac{k_z \cdot \Delta z}{2}\right) \right]^2 \quad (4.34)$$

Pour une discrétisation spatiale isotrope bidimensionnelle $\Delta x = \Delta y = \Delta$, avec un angle d'incidence α par rapport à l'axe des x positifs, on aura :

$$\frac{\Delta^2}{\Delta t} \sin^2\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\Delta k \cos \alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\Delta k \sin \alpha}{2}\right) \quad (4.35)$$

On remarque que les 2 relations (4.33) – (4.34) sont identiques pour $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ et Δt tendant vers zéro. On peut, donc, réduire au degré désiré la différence entre les

relations de dispersion numérique et physique en jouant sur le pas de discrétisation, mais au détriment des temps de calculs et des ressources mémoires.

La résolution des équations (4.34), dans laquelle k est l'inconnue, s'effectue de manière itérative par la méthode de Newton [26].

$$k_{i+1} = k_i - \frac{\sin^2(A \cdot k_i) + \sin^2(B \cdot k_i) - C}{A \cdot \sin(2A \cdot k_i) + B \cdot \sin(2B \cdot k_i)} \tag{4.36}$$

Avec les coefficients A , B & C donnés par:

$$A = \frac{\Delta \cdot \cos \alpha}{2} ; \quad B = \frac{\Delta \cdot \sin \alpha}{2} ; \quad C = \left(\frac{\Delta}{c \Delta t} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\omega \cdot \Delta t}{2} \right) \tag{4.37}$$

Pour une fréquence donnée, on définit dans le vide la longueur d'onde idéale $\lambda_0 = cT$, où $T = 2\pi / \omega$ est la période. La longueur d'onde dans le milieu discrétisé est $\lambda = 2\pi / k$, avec k le vecteur d'onde. En choisissant $\Delta t = \Delta / 2c$ qui remplit la condition de CFL, on obtient une mesure de la dispersion numérique dans le rapport $\frac{v_p}{c} = \frac{\lambda}{\lambda_0}$ où v_p est la vitesse de phase dans le milieu discrétisé. On peut simplifier ce rapport en choisissant Δ , le pas de discrétisation égal à la longueur d'onde dans le vide λ_0 . Ceci est équivalent à normaliser la longueur d'onde à l'unité. La solution de

l'équation (4.34) nous donne $\frac{v_p}{c} = \frac{2\pi}{k_{final}}$ où k_{final} est le résultat final de la méthode

d'itération de Newton. La figure 4.5 montre la variation de ce rapport en fonction de l'angle d'incidence.

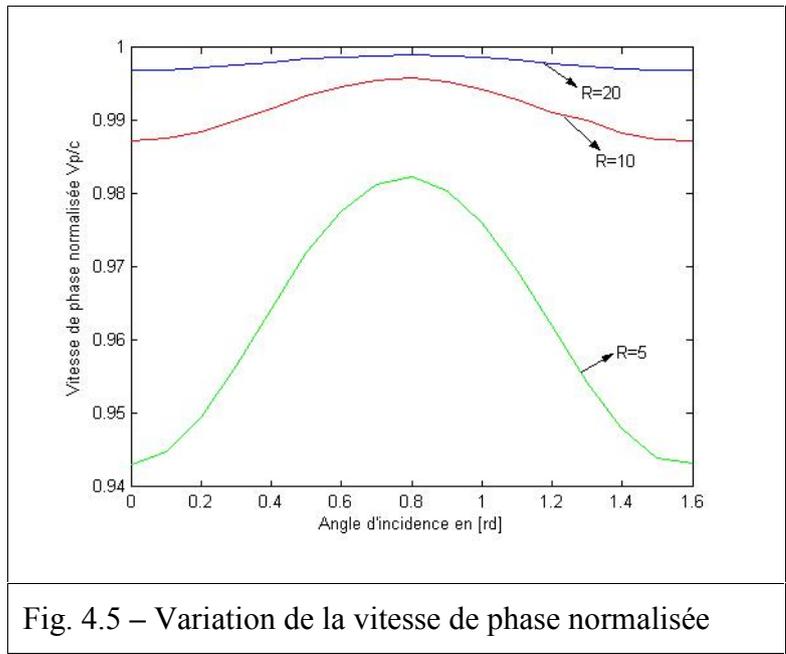


Fig. 4.5 – Variation de la vitesse de phase normalisée

En fonction de l'angle d'incidence et de la résolution de maillage, on constate que :

- Selon la résolution, la dispersion diminue quand l'incrément spatial diminue (pas de discrétisation spatiale par longueur d'onde).
- La vitesse de phase calculée est plus faible lorsque le front d'onde est normal aux axes (angle d'incidence 0 ou $\pi/2$).
- La vitesse de phase est maximale quand l'angle d'incidence est selon la diagonale. (angle d'incidence $\pi/4$).
- La courbe est symétrique par rapport à $\pi/4$.
- Pour un pas de discrétisation spatiale égale à $\lambda/20$, on observe une dispersion numérique inférieure à 0.31%.

4.5 – ATTENUATION & DISPERSION PHYSIQUE

La matière est le lieu de phénomènes dispersifs et atténuants. Ces phénomènes, intimement liés, sont le résultat des interactions entre l'onde et la matière sous la forme de polarisations électrique et magnétique et de conduction de particules. Lorsque la source génère un signal d'une largeur de bande plus au moins définie, la dépendance fréquentielle des paramètres va induire des vitesses de phases différentes pour l'ensemble des composantes fréquentielles du signal. Par conséquent, la forme initiale du signal sera déformée lors de sa propagation. Sachant que les dépendances fréquentielles des phénomènes sont liées aux différents temps de relaxation, donc aux polarisations électriques, magnétiques et à la conductivité, l'objectif est de trouver des fonctions mathématiques qui caractérisent ces phénomènes.

4.6 – METHODES D'IMPLEMENTATION DE LA DISPERSION PHYSIQUE

L'implémentation des phénomènes dispersifs peut se faire, essentiellement, de 3 manières [26] - [27]:

- Par convolution récursive (Recursive Convolution Method).
- Par transformée de Fourier (Auxiliary Differential Equation Method).
- Par transformée en Z (Z - Transform Method).

4.6.1 – Méthode de convolution récursive

En 1990, Luebbers et al. reportaient une méthode intéressante pour modéliser les interactions des ondes électromagnétiques avec des matériaux linéaires dans la formulation par différences finies en considérant seulement une permittivité électrique dispersive. On sait bien que la relation entre le champ électrique E , l'induction électrique D et la polarisation P au point \vec{r} est définie par [26] :

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \varepsilon_\infty(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r}) = \varepsilon_0 [\varepsilon_\infty(\vec{r}) + \chi_e(\vec{r}, \omega)] \vec{E}(\vec{r}) \quad (4.38)$$

Où :

ε_0 : Permittivité du vide

ε_∞ : Permittivité relative à haute fréquence ($\omega = \infty$) et χ_e est la susceptibilité électrique.

Si la polarisation est, linéairement, dépendante du champ électrique, on peut appliquer la transformée de Fourier à la relation (4.38), pour obtenir :

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \varepsilon_\infty(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t) + \varepsilon_0 \chi_e(\vec{r}, t) \otimes \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (4.39)$$

Où \otimes est le produit de convolution.

En substituant l'équation (4.39) dans l'équation (4.7), on obtient :

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \chi_e(\vec{r}, t)}{\partial t} \otimes \vec{E}(\vec{r}, t) + \sigma(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (4.40)$$

La variation de la susceptibilité électrique en fonction de la fréquence est donnée par la fonction rationnelle suivante :

$$\chi_e(\vec{r}, \omega) = \frac{\beta_m (j\omega)^m + \beta_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + \beta_1 (j\omega) + \beta_0}{\zeta_n (j\omega)^n + \zeta_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + \zeta_1 (j\omega) + \zeta_0} \quad \text{avec } n > m \quad (4.41)$$

. La transformée inverse de Fourier donne :

$$\chi_e(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N [A_i \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)] e^{-\alpha_i t} U(t) \quad (4.42)$$

A_i , B_i , ω_i et α_i sont des constantes réelles déterminées à partir de l'équation (4.41). $U(t)$ est la fonction unité activée à l'instant $t = 0$. Supposons qu'il y a des termes de ω_i qui sont nuls. Trois cas canoniques du comportement de la dispersion peuvent être formulés à partir des expressions (4.41) – (4.42).

➤ **Modèle de Debye**

$$\chi_e(t) = \left(\frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{t_0} \right) \cdot e^{-t/t_0} U(t) \Leftrightarrow \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + j\omega \cdot t_0} = \chi_e(\omega) \quad (4.43)$$

Avec ε_s la permittivité en courant continu et t_0 le temps de relaxation du milieu. La permittivité relative est donnée par :

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + j\omega \cdot t_0} \quad (4.44)$$

➤ **Modèle du plasma non magnétique**

$$\chi_e(t) = \frac{\omega_p^2}{v_c} (1 - e^{-v_c t}) U(t) \Leftrightarrow -\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + jv_c)} = \chi_e(\omega) \quad (4.45)$$

Où v_c est la fréquence de collision et ω_p la fréquence du plasma.

➤ **Résonance Lorentzienne**

$$\chi_e(t) = \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} e^{-\delta t} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t) U(t) \quad (4.46)$$

$$\chi_e(\omega) = \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2j\omega\delta - \omega^2} \quad (4.47)$$

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2j\omega - \omega^2} \quad (4.48)$$

Avec ω_0 la fréquence de résonance et δ la constante d'amortissement. Posons la relation (4.42) sous la forme suivante :

$$\chi_e(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N \text{Im}[G e^{-\gamma_i t} U(t)] \quad (4.49)$$

Avec $G_i = A_i + jB_i$, $\gamma_i = \alpha_i - j\omega_i$ et Im représente la partie imaginaire. Substituons (4.49) dans (4.40), le terme de convolution devient :

$$\left\{ \sum_{i=1}^N \frac{\partial \text{Im}[G_i e^{-\gamma_i t} U(t)]}{\partial t} \right\} \otimes \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (4.50)$$

Après manipulation et simplification de l'équation (4.50), on obtient :

$$\sum_{i=1}^N \left\{ B_i \vec{E}(\vec{r}, t) - \text{Im}[G_i \gamma_i e^{-\gamma_i t} U(t) \otimes \vec{E}(\vec{r}, t)] \right\} \quad (4.51)$$

L'équation (4.40) devient :

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \varepsilon_\infty(\vec{r}) \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \left[\varepsilon_0 \sum_{i=1}^N B_i + \sigma(\vec{r}) \right] \vec{E}(\vec{r}, t) \\ - \varepsilon_0 \sum_{i=1}^N \text{Im}[G_i \gamma_i e^{-\gamma_i t} U(t) \otimes \vec{E}(\vec{r}, t)] \end{aligned} \quad (4.52)$$

L'équation (4.52) peut être, maintenant, implémentée numériquement de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \varepsilon_\infty(\vec{r}) \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \left[\varepsilon_0 \sum_{i=1}^N B_i + \sigma(\vec{r}) \right] \vec{E}(\vec{r}, t) \\ - \varepsilon_0 \sum_{i=1}^N \text{Im} \left[G_i \gamma_i \sum e^{-\gamma_i(n-m)\Delta t} \vec{E}(\vec{r}) \Big|_{m\Delta t} \right] \end{aligned} \quad (4.53)$$

Où n désigne le nième pas temporel du temps $t = n\Delta t$ et m est un entier. Le dernier terme de l'équation (4.53) peut être reformulé pour donner la relation de récurrence suivante :

$$\bar{\psi}_i(\vec{r})|^{n+1} = \bar{\psi}_i(\vec{r})|^n e^{-\gamma_i \Delta t} + G_i (1 - e^{-\gamma_i \Delta t}) \bar{E}(\vec{r})|^{n+1} \quad (4.54)$$

Où :

$$\bar{\psi}_i(\vec{r})|^{n+1} = G_i \gamma_i \sum_{m=1}^n e^{-\gamma_i (n-m)\Delta t} \bar{E}(\vec{r})|^{n+1} \quad (4.55)$$

En substituant l'expression (4.54) dans l'expression (4.53), on obtient :

$$\nabla \times \bar{H}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \varepsilon_\infty(\vec{r}) \frac{\partial \bar{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \left[\varepsilon_0 \sum_{i=1}^N B_i + \sigma(\vec{r}) \right] \bar{E}(\vec{r}, t) - \varepsilon_0 \sum_{i=1}^N \text{Im}(\bar{\psi}_i(\vec{r})|^{n+1}) \quad (4.56)$$

On peut procéder, maintenant, à la différence centrée de Yee pour obtenir, par exemple, la mise à jour de la composante du champ électrique E_x , d'après l'équation (4.54).

$$\frac{H_z|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} - H_z|_{i,j-1/2,k}^{n+1/2}}{\Delta y} - \frac{H_y|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} - H_y|_{i,j,k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} = \varepsilon_0 \varepsilon_\infty|_{i,j,k} \left(\frac{E_x|_{i,j,k}^{n+1} - E_x|_{i,j,k}^n}{\Delta t} \right) + \left(\varepsilon_0 \sum_{l=1}^N B_l + \sigma|_{i,j,k} \right) \cdot \left(\frac{E_x|_{i,j,k}^{n+1} + E_x|_{i,j,k}^n}{2} \right) - \varepsilon_0 \sum_{l=1}^N \text{Im}(\bar{\psi}_{l,x}|_{i,j,k}^n) \quad (4.57)$$

On voit bien que dans l'expression (4.57) la relation de convolution est évaluée dans son intégralité. De cette façon, le stockage de toutes les valeurs est évité.

4.6.2 – METHODE ADE

La méthode ADE est basée sur les propriétés d'inversion de la transformée de Fourier entre les domaines spectral et temporel. Ces mêmes propriétés permettent d'établir les équivalences suivantes :

$$j\omega E \Leftrightarrow \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{E^{n+1/2} - E^{n-1/2}}{\Delta t} \quad (4.58)$$

Prenons, comme exemple d'illustration, le modèle de dispersion sur la permittivité de type Debye du premier ordre donné par l'expression (4.44).

La multiplication de la relation (4.44) par ε_0 et son remplacement dans l'équation (4.9) donne après transformation inverse de Fourier, le mode temporel (Annexe A) :

$$D + \tau \frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon_s E + \tau \varepsilon_\infty \frac{\partial E}{\partial t} \quad (4.59)$$

L'équation différentielle (4.59) est facile à implémenter dans la formulation des différences finies pour obtenir la composante électrique. Prenons, comme exemple, l'expression des différences finies, suivant la direction z :

$$E_z|_i^{n+1} = \frac{\Delta t + 2\tau}{2\tau\varepsilon_\infty + \varepsilon_s\Delta t} D_z|_i^{n+1} + \frac{\Delta t - 2\tau}{2\tau\varepsilon_\infty + \varepsilon_s\Delta t} D_z|_i^n + \frac{2\tau\varepsilon_\infty - \varepsilon_s\Delta t}{2\tau\varepsilon_\infty + \varepsilon_s\Delta t} E_z|_i^n \quad (4.60)$$

4.7 – TRAITEMENT DES INTERFACES

Le calcul des champs électromagnétiques s'effectue dans l'algorithme FDTD à l'intérieur d'une cellule élémentaire de volume $\Delta x \Delta y \Delta z$. La définition d'un domaine fini de discrétisation est en contradiction avec la situation réelle. Il est, donc, nécessaire de trouver un moyen pour simuler la continuité de la propagation d'une cellule à sa voisine. Alors, les interfaces sont des plans, au sens mathématique du terme. Par conséquent, on doit modifier l'algorithme FDTD pour approcher cette réalité.

4.7.1 – Traitement des interfaces diélectriques

La discontinuité d'une certaine composante des champs électromagnétiques entre 2 milieux diélectriques différents nécessite de traiter, spécifiquement, le plan de l'interface entre ces milieux. Ainsi, pour le calcul des composantes tangentielles du champ électrique, on utilisera la permittivité électrique équivalente ε_{eq} . Cette notion permet d'approximer le comportement électromagnétique de la matière pour une interface de ce type (Annexe B).

$$\varepsilon_{eq} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \quad (4.61)$$

Où ε_1 représente la permittivité du milieu 1 et ε_2 la permittivité du milieu 2.

4.7.2 – Traitement des conducteurs parfaits

Sur les conducteurs parfaits, les composantes tangentielles du champ électrique sont forcées à une valeur nulle :

$$E_{\Gamma,t} = 0 \quad (4.62)$$

Où l'indice Γ désigne une surface et t caractérise la composante tangentielle (Fig. 4.6).

Notons que la discrétisation de l'équation (4.62) nécessite une précision au niveau des arêtes et des points des structures métalliques. Cependant, des solutions existent pour remédier à ce genre de problèmes [30] - [36]. Pour des conducteurs réels dont on connaît la conductivité, on affectera, celles-ci, aux cellules élémentaires de l'espace FDTD.

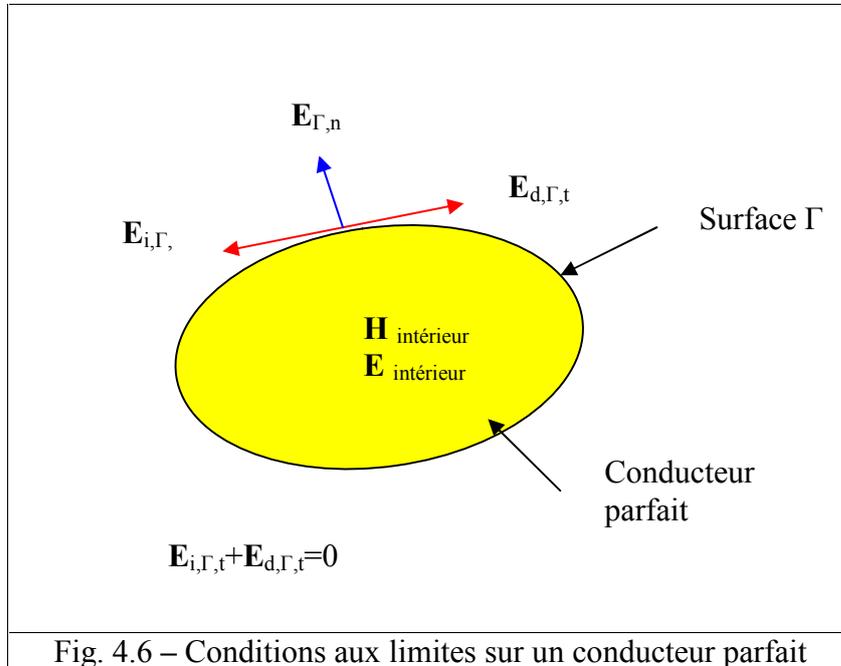


Fig. 4.6 – Conditions aux limites sur un conducteur parfait

4.7.3 – Murs magnétiques

Dans le cas des problèmes à symétrie plane (lignes coplanaires), on peut se limiter à l'étude de la moitié de la structure. En effet, la connaissance de la configuration électromagnétique générale de la structure nous indique que le plan de symétrie est équivalent à un mur magnétique (champs électrique normal et champ magnétique tangentiel nuls).

4.8 – CONDITIONS AUX LIMITES

Le domaine de calcul a des dimensions, nécessairement, finies. Ceci pose un problème pour la simulation de problèmes ouverts. Cela veut dire que les équations de Maxwell discrétisées doivent être tronquées au niveau des frontières qui délimitent le volume de calcul. Cette troncature ne doit pas être quelconque. Elle doit permettre en effet de simuler la propagation de n'importe quelle onde sortante vers l'infini. Si cette condition n'est pas vérifiée, de multiples réflexions se produisent sur les frontières lors d'une simulation. Il faut pour cela appliquer des conditions d'absorption des ondes sortantes sur les frontières du volume de calcul. Avant d'aborder les méthodes nécessaires pour remédier à ce problème, il est nécessaire de présenter l'évolution historique des travaux qui ont été faits à ce sujet depuis plus de 30 ans [26], [30] - [37].

Les recherches concernant les conditions absorbantes aux limites ont débuté en même temps que les premiers développements de la méthode FDTD. Les couches adaptées de Holland [36] furent les premières à susciter un intérêt, malgré l'efficacité

limitée aux seules ondes qui sortent, orthogonalement, aux frontières. Ensuite, il est apparu toute la famille des opérateurs à dérivées partielles en espace et en temps. L'élaboration de ces opérateurs sensés simuler l'absorption des ondes sortantes, est basée sur l'équation de Helmholtz. Bayliss et Turkel sont les premiers qui ont proposé une formulation en coordonnées sphériques et cylindriques de ces opérateurs. Cependant, leurs travaux étaient, difficilement, transposables en coordonnées cartésiennes [26].

Enquist et Majdam ont, à leur tour, proposé un opérateur adapté aux coordonnées cartésiennes, en divisant suivant chaque axe l'équation de Helmholtz en 2 opérateurs correspondant aux 2 sens de propagation [35]. Mur a proposé en 1981, d'après les travaux d'Enquist et Majda, d'approcher à la limite d'après l'équation de propagation d'une onde [26] :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \right) W = 0 \quad (4.63)$$

La connaissance de la valeur de l'onde au-delà de la limite va être déduite de la valeur de cette onde à un instant précédent et de sa valeur à un pas de discrétisation à l'intérieur de l'espace de modélisation. Si on considère, par exemple, une onde se propageant à la vitesse c selon la direction x , alors celle-ci vérifie, approximativement, l'équation de propagation suivante :

$$\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial W}{c \partial t} = 0 \quad (4.64)$$

La discrétisation de cette équation permet d'obtenir des conditions dites absorbantes pour les plans $x = 0$ et $x = X_{\max}$ (limites de l'espace de modélisation). L'expression d'une telle condition au premier ordre pour $x = 0$ est [33] :

$$W|_{0,j,k}^{n+1} = -W|_{1,j,k}^{n-1} + \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \left(W|_{1,j,k}^{n+1} + W|_{0,j,k}^{n-1} \right) + \frac{2\Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \left(W|_{1,j,k}^n + W|_{1,j,k}^n \right) \quad (4.65)$$

Le résultat obtenu permet, effectivement, d'éviter toute réflexion, mais, uniquement pour une onde incidente normale au plan limite.

Trefethen et Halpem ont généralisé la méthode de Mur en développant l'opérateur d'Enquist et Majda sous forme de fonctions rationnelles [26] & [37]. C'est Higdon qui a parachevé la généralisation de l'opérateur d'Enquist et Majda en faisant apparaître de manière explicite les angles d'absorption au sein d'un nouvel opérateur [26].

L'évolution lente des performances des couches absorbantes a subi une forte accélération avec l'avènement des PML de Berenger en 1994 [36]. Les PML ont mis, quasiment, fin aux recherches des précédents types de conditions aux limites, car elles sont, théoriquement, parfaites dans leurs absorptions des ondes sortantes.

Pour calculer les composantes tangentielles du champ électrique à la frontière, on ne peut pas utiliser les équations de base, puisque celles-ci nécessiteraient la connaissance des valeurs du champ magnétique se trouvant à l'extérieur du volume. La méthode PML consiste à placer sur les frontières un milieu à pertes dit PML dans

lequel le champ magnétique et le champ électrique sont décomposés en 2 sous composantes. Les PML utilisent le principe d'impédance suivant :

Dans le vide, une onde plane à incidence normale sur un milieu de conductivité électrique σ et de conductivité magnétique σ^* ne conduit à aucune réflexion si :

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma^*}{\mu_0} \quad (4.66)$$

Cependant pour une incidence quelconque, cela n'est pas vrai. On contourne le problème en décomposant les champs suivant les axes principaux. Ceci permet de définir, constamment, la normale aux bords et ce, quelque soit l'angle d'incidence initial. La décomposition s'accompagne de la définition de conductivité virtuelle pour chacune de ces sous composantes. Le matériau absorbant est, ainsi, défini par une certaine épaisseur (nombre de mailles) et est délimité par un conducteur parfait où les champs électriques sont nuls. L'atténuation se fait, progressivement, pendant le double parcours dans le matériau absorbant. L'implémentation des PML est spécifique à chaque direction.

Nous allons expliquer le principe en 2 dimensions. Soit un milieu de permittivité ε , de perméabilité μ , de conductivités électrique et magnétique σ et σ^* , respectivement. Dans ce milieu les équations de Maxwell s'écrivent:

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \sigma^* \vec{H} \quad (4.67)$$

$$\nabla \times \vec{H} = +\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E} \quad (4.68)$$

En mode TE par rapport à l'axe (Oz), on écrit la composante comme suit:

$$\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (4.69)$$

$$\varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y = \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (4.70)$$

$$\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} + \sigma^* H_z = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (4.71)$$

Dans le milieu PML, la composante du champ magnétique suivant Oz, H_z est décomposée en 2 sous composantes H_{zx} et H_{zy} :

$$\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma_{xy} E_x = \frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial y} \quad (4.72)$$

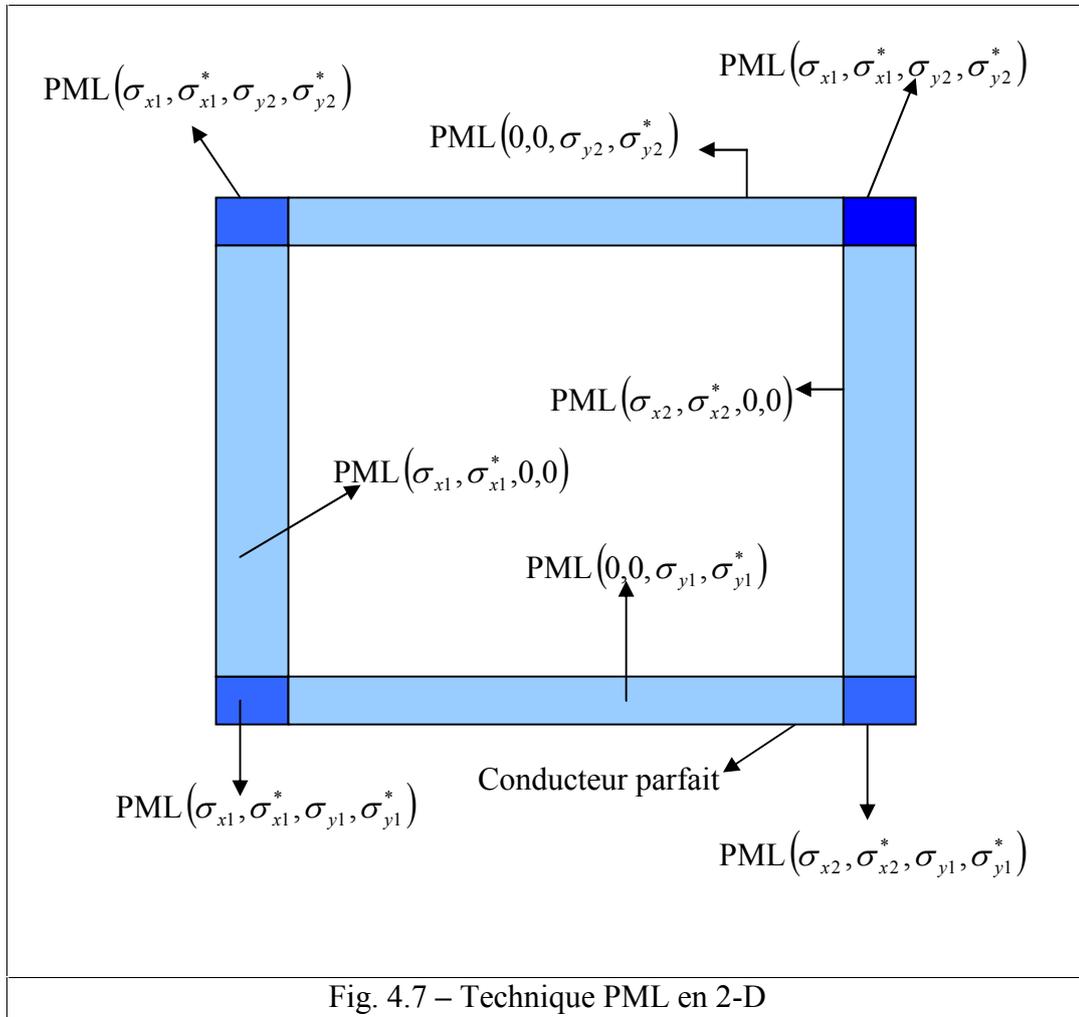
$$\varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma_{yx} E_y = \frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial x} \quad (4.73)$$

$$\mu \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_{zy}^* H_{zy} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (4.74)$$

$$\mu \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{zy} = \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad (4.75)$$

Le choix des quadruples $(\sigma_x^*, \sigma_y^*, \sigma_x, \sigma_y)$, pour chaque direction, en respectant la relation (4.65), permet ainsi d'annuler les réflexions sur chaque bord du domaine.

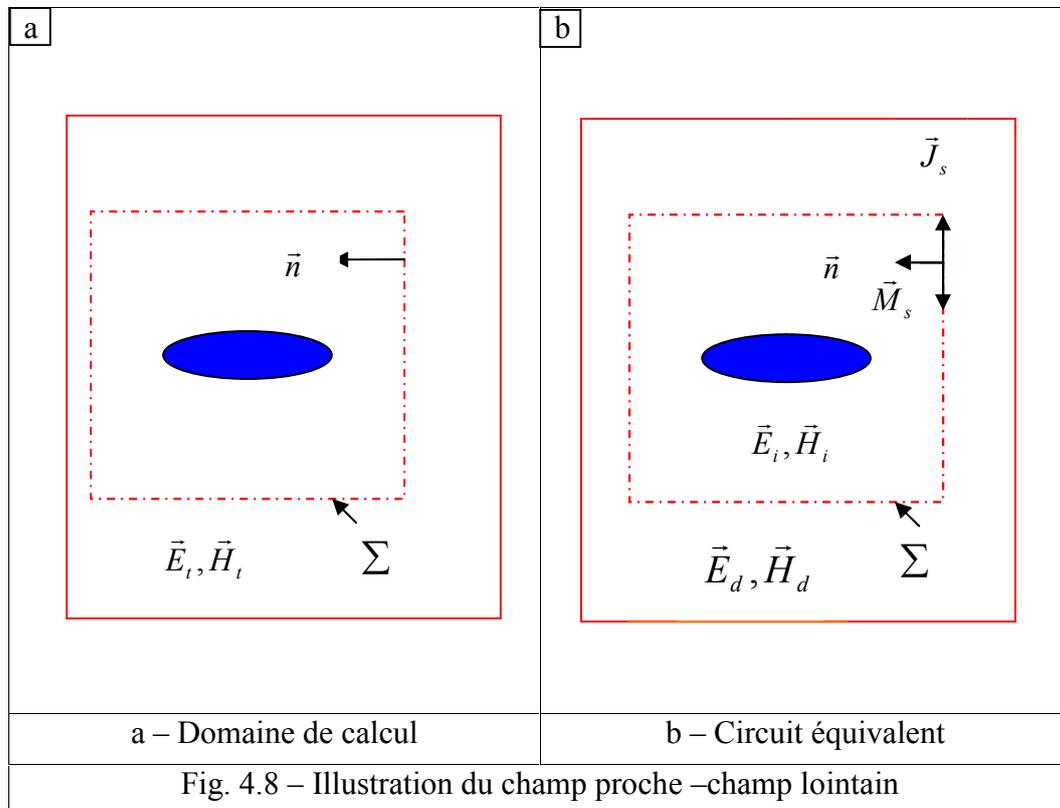
On montre que le coefficient de réflexion de l'onde arrivant sur le milieu PML est, en théorie, nul quel que soit l'angle d'incidence si à l'interface normale à Ox , le milieu 1 et le milieu PML ont les mêmes conductivités transverses (σ_x, σ_x^*) , à l'interface normale à Oy , si le milieu 1 et le milieu PML ont mêmes conductivités transverses (σ_y, σ_y^*) (Fig. 4.7).



Dans les PML, un profil croissant de la conductivité évite des réflexions et permet l'absorption de l'onde. Après un aller-retour à travers les couches PML, l'onde réfléchiée devient négligeable. La variation de la conductivité peut se faire de manière linéaire, parabolique ou géométrique. C'est ce dernier type qui est intégré dans le maillleur. Pour la technique PML tridimensionnelle, chaque composante du champ électromagnétique $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$ doit être subdivisée en 2 sous composantes notées, respectivement, $E_{xy}, E_{xz}, E_{yx}, E_{yz}, E_{zx}, E_{zy}, H_{xy}, H_{xz}, H_{yx}, H_{yz}, H_{zx}$ et H_{zy} . Un milieu PML possède, alors, les 6 paramètres $(\sigma_{x1}, \sigma_{x1}^*, \sigma_{y1}, \sigma_{y1}^*, \sigma_{z1}, \sigma_{z1}^*)$.

4.9 – TRANSFORMATION CHAMP PROCHE - CHAMP LOINTAIN

La résolution des équations de Maxwell par la technique FDTD permet le calcul des composantes du champ proche. La détermination du diagramme d'un rayonnement d'une source nécessite le calcul du champ lointain. La transformation champ proche – champ lointain dépend du type d'excitation. Si l'excitation est mono - fréquentielle, on utilise des formules classiques des potentiels vecteurs retardés; si l'excitation est du type temporel, plusieurs formulations ont été proposées. Citons comme exemple, la méthode FDTD domaine fréquentiel champ proche – champ lointain (NTFF) et la méthode de la moyenne géométrique FDTD champ proche – champ lointain (GM-NTFF) [35]. Dans le principe de calcul du champ lointain, on construit une surface fermée S dite de Huygens entourant l'objet rayonnant (Fig. 4.8). Sur cette surface, on évalue les sources de courant électrique et magnétique à l'aide des relations suivantes :



$$\vec{J}_s = \vec{n} \times \vec{H}_i \cdot \delta_\Sigma(m) \tag{4.76}$$

$$\vec{M}_s = -\vec{n} \times \vec{E}_i \cdot \delta_\Sigma(m) \tag{4.77}$$

Où $\delta_\Sigma(m)$ est la distribution de Dirac associée à la surface Σ , c'est-à-dire :

$$\delta_\Sigma(m) = 0 \quad \text{si } m \notin \Sigma$$

$$\delta_\Sigma(m) \rightarrow +\infty \quad \text{si } m \in \Sigma$$

\vec{n} désigne le vecteur normal à la surface Σ mais orienté vers l'intérieur de Σ .

Les sources du courant électrique J_s et du courant magnétique M_s permettent de calculer les potentiels vecteurs magnétiques et électriques (la géométrie du problème est illustrée par la figure 4.9) selon les relations :

$$\vec{A}(\vec{r}, \omega) \cong jk \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \iint_s \vec{J}_s(\vec{r}') e^{jk r' \cos \xi} dS \tag{4.78}$$

$$\vec{F}(\vec{r}, \omega) \cong jk \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \iint_s \vec{M}_s(\vec{r}') e^{jk r' \cos \xi} dS \tag{4.79}$$

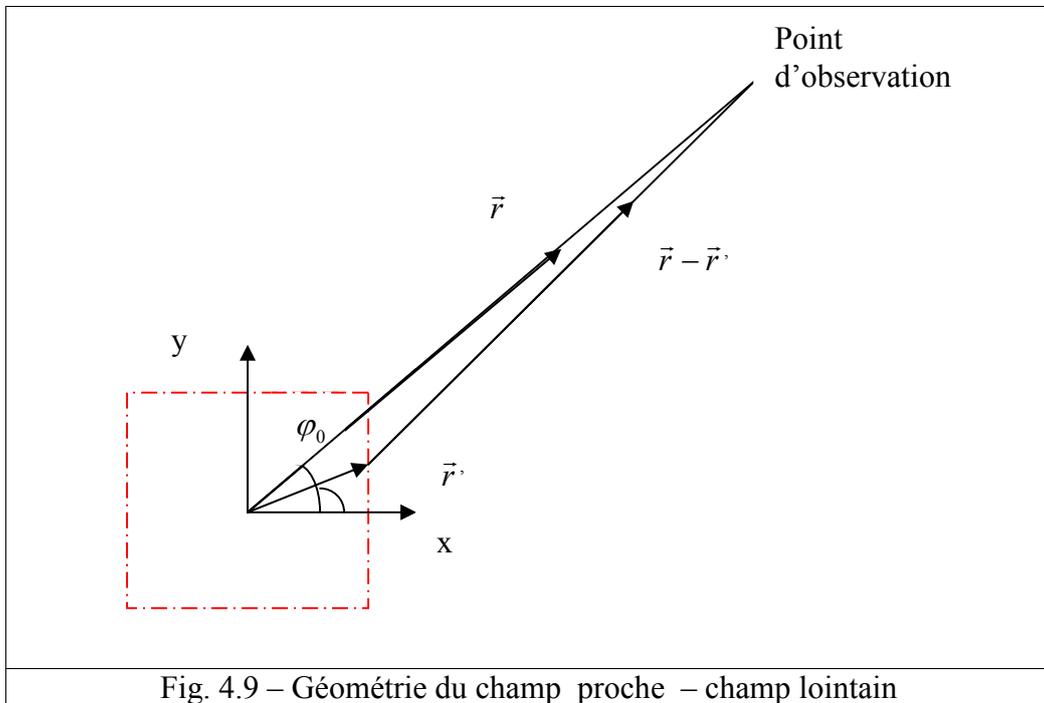


Fig. 4.9 – Géométrie du champ proche – champ lointain

Où :

r' : distance du point source à l'origine

R : distance du point d'observation à l'origine

$k = 2\pi / \lambda$: vecteur d'onde

λ : longueur d'onde

$R = |r - r'| \cong r - r' \cos \xi$, dans le calcul de la phase

$R \cong r$ dans le calcul de l'amplitude.

$$r' \cos \xi = (x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0) \sin \theta_0 + z \cos \theta_0$$

x, y, z : coordonnées cartésiennes du point source sur la surface S.

4.10 – CONCLUSIONS

La méthode FDTD est, pratiquement, très utilisée. Le calcul des dérivées spatiales et temporelles se fait grâce à l'approximation des différences centrées. C'est une méthode itérative sur le temps où les données sont des échantillons temporels des excitations. La région modélisée est représentée par 2 grilles de points discrets intercalés d'une demie maille. Une grille contient les points où sont calculés les champs magnétiques et l'autre où sont évalués les champs électriques. Chaque composante du champ magnétique est entourée de 4 composantes du champ électrique.

Ce formalisme implique, donc, que la taille mémoire et le temps de calcul nécessaires à une simulation FDTD sont, directement, proportionnels à la dimension du volume de calcul et aux pas (temporel et spatiaux) de discrétisation choisis. Le pas temporel et les pas spatiaux sont reliés par la condition CFL.

Pour obtenir une solution unique, il est nécessaire d'imposer des conditions limites de champs aux frontières du système. Des murs métalliques imposent aux composantes tangentielles du champ électrique de s'annuler.

Une difficulté de la méthode des différences finies est de décrire une structure ouverte. Diverses techniques tendent à limiter ce problème. Le concept des couches absorbantes est une solution pour convaincre ces difficultés.

De plus, le formalisme FDTD permet de mettre à jour, pour chaque cellule élémentaire, les caractéristiques des matériaux en fonction de l'espace et du temps. Il est, ainsi, possible de modéliser des matériaux anisotropes et non linéaires.

5 - MODELISATION DU COURANT DE LA Foudre

5.1 - INTRODUCTION & OBJECTIFS	50
5.1.1 - Préambule	50
5.1.2 - Objectifs	51
5.2 - PHENOMENE DE LA Foudre	51
5.3 - CONDENSATEUR TERRRESTRE	51
5.4 - NUAGE DE LA Foudre	52
5.5 - Foudre NATURELLE	54
5.6 - MODELISATION DE L'ARC EN RETOUR	55
5.7 - MODELISATION DU COURANT DE LA Foudre	56
5.6.1 - Modèle du gaz dynamique	56
5.6.2 - Modèle électromagnétique	57
5.6.3 - Modèle des lignes à constantes réparties	57
5.6.4 - Modèle d'ingénieur	59
1 - Modèle de Bruce Gold	61
2 - Source du courant mobile	61
3 - Modèles des lignes de transmission	61
a - Modèle généralisé	61
b - Modèle modifié	62
c - Modèle modifié avec atténuation exponentielle	62
5.7 - COURANT A LA BASE DU CANAL	62
5.8 - ADEQUATION DES SIMILITUDES ELECTRODYNAMIQUES	64
5.9 - CONCLUSIONS	64

5 - MODELISATION DU COURANT DE LA Foudre

5.1 – INTRODUCTION & OBJECTIFS

5.1.1 – Préambule

Jadis les phénomènes électromagnétiques n'étaient pas connus, mais, il y en eut 2 très étranges : en frottant un morceau d'ambre, on pouvait soulever des petits morceaux de papyrus ; il y avait un minéral qui attirait le fer. Il est étonnant de penser que c'était là les 2 seuls phénomènes connus des ancêtres dans lesquels les effets de l'électricité et du magnétisme apparaissaient. Les savants qui découvraient, après, une série de nouveaux phénomènes qui étaient en réalité des aspects de ces effets de l'ambre ou de l'aimant. Maintenant, nous comprenons que les phénomènes d'interaction chimique et finalement de la vie, elle-même, doivent être compris dans le cadre de l'électromagnétisme.

En même temps que se développait la compréhension de l'électromagnétisme, des possibilités techniques qui défiaient l'imagination des générations précédentes apparaissaient. Il devint possible d'envoyer des signaux aux véhicules dans l'espace sur de longues distances et de parler à quelqu'un à des milliers de kilomètres sans aucune connexion entre les deux. Commander des systèmes d'une puissance énorme, telles que, une immense turbine hydraulique, thermique ou nucléaire reliée par des filaments sur des centaines de kilomètres à un moteur qui tourne en liaison avec la turbine. Plusieurs milliers de dérivations, milliers de moteurs à des milliers d'endroits différents, qui font marcher les machines des usines et des maisons, tous tournent et fonctionnent grâce à la connaissance des lois de l'électromagnétisme.

Aujourd'hui, nous mettons en application des effets encore plus subtils. Les forces électriques aussi grandes qu'elles soient, peuvent aussi être très petites. Nous pouvons les contrôler et les utiliser de mille façons. Nos instruments sont si sensibles que nous pouvons dire ce que fait un homme, par la façon dont il agit sur les électrons d'une fine tige métallique, à des centaines voire des milliers de kilomètres. Tout ce que nous avons à faire est d'utiliser la tige, comme une antenne pour un récepteur de télévision.

Une longue revue de l'histoire de l'humanité, faite sur, disons, mille ans à partir de maintenant, montrera sans le moindre doute que la découverte par Maxwell des lois de l'électromagnétisme est l'événement le plus important du 19^e siècle.

Parmi ces innombrables phénomènes électromagnétiques, un phénomène que l'homme a connu depuis l'antiquité, sans donner des explications comment et pourquoi se produit-il ? Ce phénomène électromagnétique qui englobe tout les aspects statique, quasi-statique et dynamique, c'est la foudre.

Ce n'est qu'en 18^e siècle que Benjamin Franklin (1707-1790) entrepris les expériences des décharges atmosphériques et mis en évidence la nature électrique de la foudre au cours de l'expérience du cerf volant (2 septembre 1752) [4]. De 1755 à 1760, ses travaux basés sur l'observation des bâtiments frappés par la foudre permettaient la mise au point du paratonnerre dont il équipait plusieurs monuments. Cette invention se propage et se vulgarise à tel point que la mode s'en empare et que l'en propose des parapluies paratonnerres ainsi que des chapeaux paratonnerres. La prise de conscience du danger de ces paratonnerres se faisait lors de l'accident mortel du physicien de St Petersburg, le professeur G. Wrichman en 1753. Cet homme fut

foudroyé dans son laboratoire alors qu'il tentait de mesurer l'intensité d'un nuage d'orage. Il avait, pour se faire, relié un paratonnerre à un fil de laiton et tentait de mesurer l'intensité du nuage d'orage à l'aide d'un électromètre de son invention. Il fut, alors semble-t-il, frappé par un éclair [37] – [40].

5.1.2 – Objectifs

L'objectif de ce chapitre est de donner une brève description de la décharge atmosphérique et les possibilités de modéliser le courant de foudre. La foudre englobe 3 phénomènes électromagnétiques essentiels : l'électricité statique, l'induction et le rayonnement. Les principaux éléments sont :

- Le phénomène de la foudre.
- La décharge atmosphérique et les types de foudre.
- La modélisation du courant de la foudre.
- Le courant de la base de la foudre.
- Adéquation des modèles proposés.

5.2 – PHENOMENE DE LA Foudre

Il est facile de dire que la foudre résulte de phénomènes électriques complexes liés à des phénomènes, aussi complexes, engendrés par la dynamique des orages. Le but est de savoir quels sont les phénomènes de base qui interviennent avec suffisamment de force pour nécessiter des protections contre leurs effets destructeurs.

Benjamin Franklin entreprend les premières expériences sur les décharges atmosphériques et met en évidence la nature électrique de la foudre au cours de l'expérience du cerf volant [39].

Le 19^{ème} siècle n'apporta que peu de nouvelles connaissances sur la physique de la foudre et des orages. Au 20^{ème} siècle, une percée importante dans les techniques d'observation photographique de la décharge fut rendu possible grâce, à la camera à objectifs tournants. Elle permettait d'analyser avec beaucoup plus de finesse la trajectoire et le nombre de décharges successives au cours d'un même coup de foudre. Les observations photographiques à la camera tournante ont permis la mise en évidence des 2 phases principales d'un coup de foudre. La première est constituée par les précurseurs qui forment le pré canal et y déposent les charges électriques en provenance du nuage. La seconde est la décharge proprement dite par neutralisation des charges déposées au fur et à mesure de la formation. Elles représentent, alors, les conditions originelles de cette phase. Cette seconde phase qui est la plus intéressante pour les applications à cause des courants et de leurs variations les plus intenses qui s'y développent. Son étude fait l'objet de ce chapitre. L'étude de la première est, cependant, indispensable dans la mesure où l'on doit connaître les conditions originelles de la seconde. Le pré canal, peu lumineux, se transforme alors en un canal fortement lumineux. C'est le trait brillant de retour.

5.3 – CONDENSATEUR TERRESTRE

Au beau temps au dessus d'un endroit désert et plat, ou au dessus de la mer, quand on s'élève à partir de la surface du sol, le potentiel électrique augmente d'environ 100 [V/m]. Il y a, ainsi, un champ électrique vertical \vec{E} de 100 [V/m] dans l'air. Le signe du champ correspond à une charge négative à la surface de la terre [4].

L'étude de l'électricité atmosphérique permanente conduit à représenter la terre comme une armature d'un immense condensateur. La seconde armature est constituée par l'ionosphère. Ce condensateur est, normalement, chargé et il existe, à une altitude de 3 [km], une différence de potentiel de 200 [kV] par rapport au sol. La terre est, ainsi, protégée contre les rayons cosmiques et le rayonnement solaire [4] & [39]. Cette représentation est, bien évidemment, très simplifiée mais elle permet de rendre compte facilement de la contribution de la foudre à l'équilibre électrique global du système. A ce champ électrique de 100 [V/m] correspond une densité de charge superficielle moyenne à la surface du sol :

$$\gamma = \varepsilon_0 E \quad (5.1)$$

γ simule la densité superficielle de la charge [C/m²]. L'air étant légèrement conducteur, des charges positives vont être transférées à la terre. La densité de courant est égale à :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (5.2)$$

Avec :

J : Densité de courant [A/m²] ;

σ : Conductivité de l'air = $3 \cdot 10^{-14}$ [S/m]

On en déduit que la densité superficielle de la charge à la surface de la terre est environ $8.85 \cdot 10^{-10}$ [C/m²], et que la densité de courant qui circule est de $3 \cdot 10^{-12}$ [A/m²]. La surface de la terre étant d'environ $5 \cdot 10^{14}$ [m²], un courant permanent de 1500 [A] circule et le condensateur devrait se décharger en 300 [s]. Or le champ électrique terrestre est permanent. Un bilan global permet de comprendre ce paradoxe apparent. Un nuage orageux est chargé positivement en partie haute et négativement en partie basse (Fig. 5.1). Les décharges électriques sous le nuage s'effectuent suivant 3 mécanismes :

- 90% des éclairs apportent une charge négative à la terre.
- Décharges par effet de pointe au niveau du sol.
- Pluie.

Le schéma électrique global peut, donc, être représenté de cette manière [39] :

- Les charges positives d'un orage sont transférées vers l'électrosphère et sont redistribuées pour fournir le courant du beau temps.
- Les charges négatives sont apportées au niveau du sol par les éclairs et le phénomène orageux.

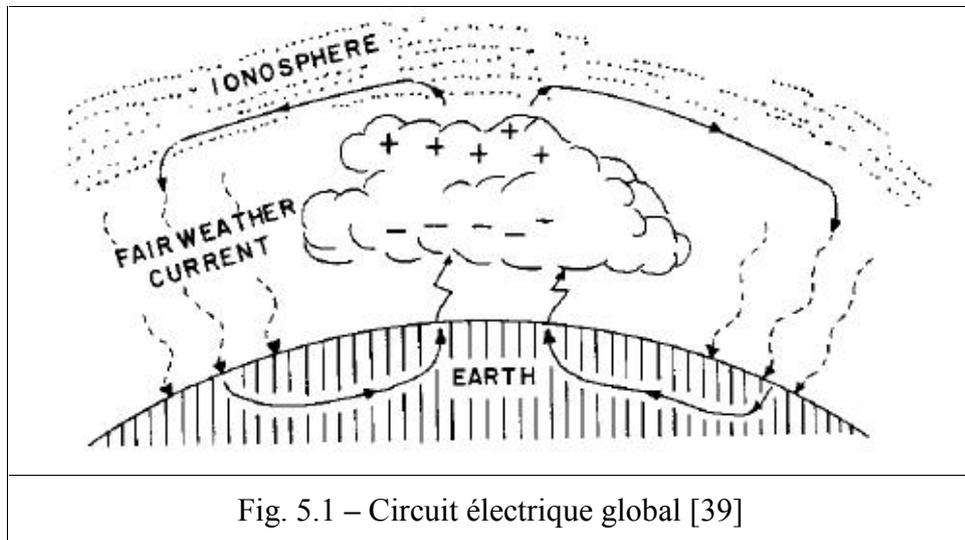
La foudre participe à l'équilibre électrique de notre planète [4].

5.4 – NUAGE DE LA FOUDRE

Le nuage électrique de la foudre est le cumulonimbus (nuage d'orage). Ses caractéristiques géométriques sont impressionnantes puisqu'il peut s'étendre sur plusieurs kilomètres. Il est constitué de gouttes d'eau dans sa partie inférieure et de cristaux de glaces dans sa partie supérieure. La formation de ce type de nuage est liée à différents phénomènes météorologiques.

- Les orages dits de convection apparaissent, principalement, en fin d'après-midi. Ils sont dus, à la fois, à l'effet de l'humidité et du réchauffement local du sol. Ils se développent, donc, en fonction de la nature des sols, des différences

de végétation et peuvent être accentués par le relief, notamment, en flanc des montagnes. Les orages de convection sont, généralement, de courte durée et ne couvrent qu'une petite zone.



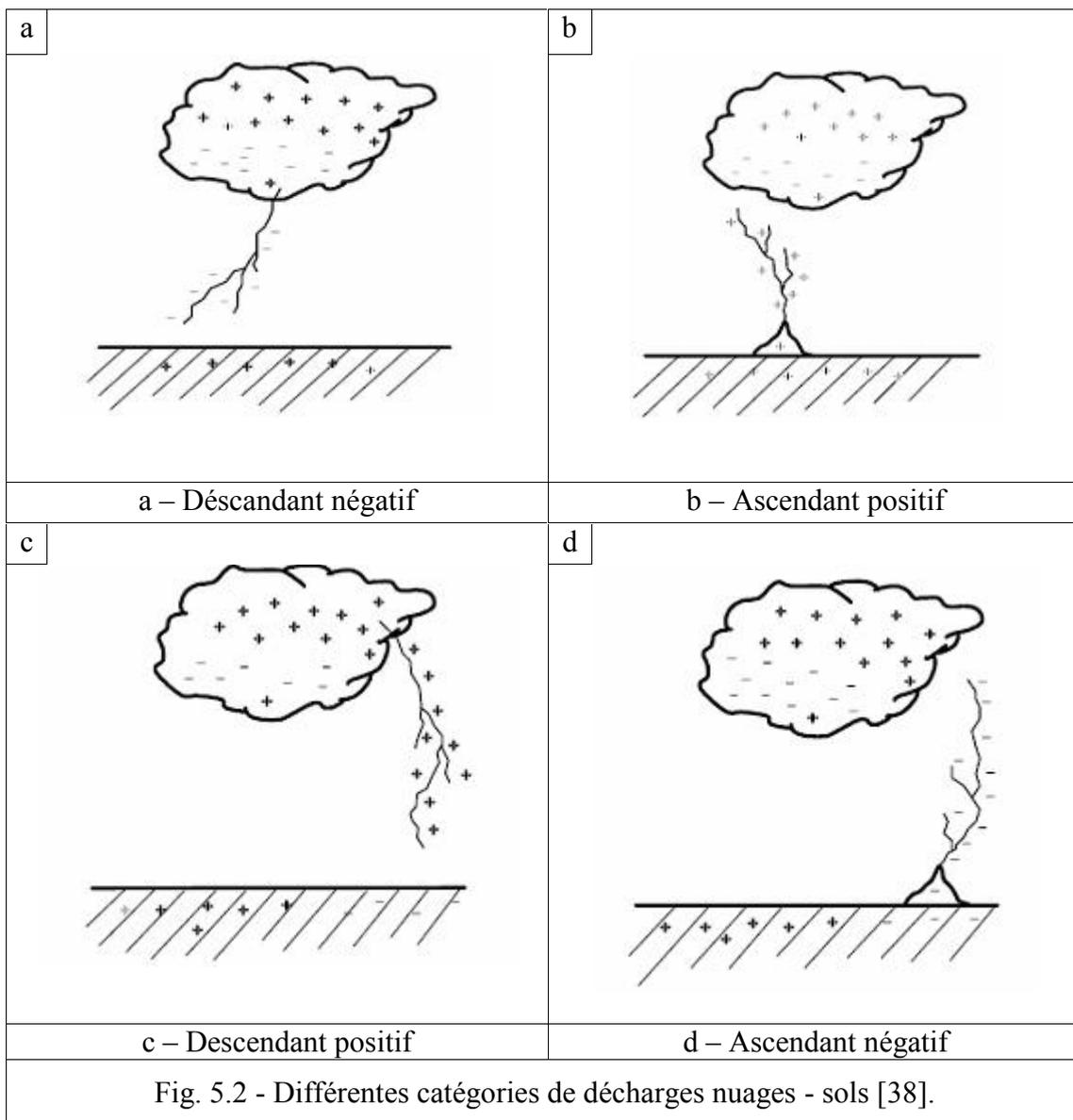
- Les orages frontaux apparaissent lors de la rencontre de 2 masses d'air. Une perturbation est constituée d'un front chaud, d'un secteur chaud et d'un front froid. L'évolution des différentes masses d'air en fonction des conditions climatiques peut provoquer la formation des phénomènes orageux lorsque le front froid plus actif se glisse sous le front chaud. Un front orageux prend, alors, naissance et donne lieu à des charges qui peuvent s'étendre sur une grande distance et dont la durée peut atteindre plusieurs jours.

Plusieurs théories ont été élaborées pour expliquer le phénomène d'électrification du nuage [4] & [38] - [40]. De multiples hypothèses ont été avancées pour expliquer la séparation des charges, mais aucune de ces théories n'est satisfaisante pour expliquer la totalité du phénomène. Basé sur le mécanisme de séparation des charges dans le nuage, on distingue [42]:

- **Séparation de charge** : Le bas du nuage orageux est constitué de gouttes d'eau. Par contre, le top, à une température inférieure à zéro, est constitué de petits glaçons. Ces hydrométéores, neutres d'un point de vue électrique, sont soumis aux ascendances aérologiques et à la gravitation. Lors de la rencontre de 2 hydrométéores, les charges se neutralisent et on retrouve ainsi des particules lourdes chargées négativement qui tombent dans le bas du nuage alors que les particules légères positives s'étalent dans le haut du nuage.
- **Distribution finale de charge** : La séparation de charge dans le liquide et des cristaux de glaces donne lieu à une distribution de charge tripolaire. Cette distribution forme une cellule orageuse. On retrouve, alors, dans le bas du nuage aux environ de 3 [km] d'altitude une forte charge négative, une charge positive dans le haut du nuage à environ 15 [km] d'altitude. De nombreuses observations ont mis en évidence la présence d'une petite poche positive dans le bas du nuage. Aucune explication satisfaisante n'est donnée jusqu'à présent [42].

5.5 – Foudre NATURELLE

La foudre est une décharge électrique transitoire très intense, dont la longueur dépasse quelques kilomètres. Bien que la moitié des éclairs se passent dans les nuages et sont appelés intra nuages (IC) décharges. Les éclairs nuages - terres (CG) ont été, largement, étudiés plus que les autres formes d'éclairs. Ceci est dû à son importance dans la pratique (cause de blessures, perturbation dans le système de distribution de puissance et de communication,...). La foudre dans l'air au dessous des nuages est facile à étudier.



Quatre différents types de décharges entre le nuage et la terre ont été identifiés [40]. La façon dont elles sont initialisées est montrée dans la figure 5.2. Sans entrer dans les détails, les différentes phases de l'éclair sont les suivantes dans le cas nuage - sol, en rase campagne ou dans des forêts :

- L'éclair commence par un trait peu lumineux qui s'élance de la base du nuage sur une distance de 20 à 100 [m] selon les auteurs [42]. Après une pause de

l'ordre de 10 à 150 [μ s] sans luminosité apparente, un second trait lumineux part de la base du nuage et s'avance au-delà, à une distance qui peut être du simple au double de la première. Le processus recommence jusqu'à ce que le dernier trait flèche s'approche près du sol. La vitesse des traits flèches est de l'ordre de 10^5 à quelque 10^6 [m/s]. L'ensemble des traits flèches constitue le traceur par bonds.

- Lorsque le dernier trait s'approche suffisamment du sol, le potentiel par rapport à la terre est de l'ordre de 10 [MV] [42]. Ainsi, un trait flèche positif s'élance depuis le sol à son rencontre. Cette phase est appelée le processus d'attachement. Il se crée, alors, le trait brillant de retour ; celui-ci constitue la décharge proprement dite du canal. Alors que, ses précurseurs constituent la charge du canal. La vitesse du trait brillant est proche de la vitesse de la lumière de l'ordre de 10^6 à 10^8 [m/s]. Elle serait maximale près du sol (au moment de l'amorçage du trait brillant) et diminuerait au fur et à mesure de sa propagation vers le nuage. C'est pendant cette phase que se développeraient les courants les plus grands et en tous cas les émissions lumineuses les plus intenses et les plus longues.
- Après la phase de l'arc en retour, l'éclair peut disparaître. Néanmoins, si une quantité résiduelle de charge est encore présente au sommet du canal, il se développe dans le canal, précédemment tracé, un traceur obscur (dark leader) à une vitesse de l'ordre de $3 \cdot 10^6$ [m/s]. Après une pause de quelques millisecondes, le traceur obscur franchit la distance nuage - sol en un seul bond dans le même canal que celui du premier. Ce traceur continu, en arrivant au sol, il déclenche un second trait brillant de retour qui est l'arc en retour subséquent (subsequent return stroke). Le processus peut se produire 5 ou 6 fois, (3 en moyenne) : il constitue la base des coups multiples. Le dernier arc en retour draine la charge résiduelle de la cellule orageuse.

Cette décomposition des phases de l'éclair correspond à des traceurs négatifs à cause de leur charge : le courant de décharge est, alors, positif. Dans les cas où la charge est positive, le courant de décharge est, alors, négatif, bien que cette configuration soit rare, c'est elle qui donne les courants les plus intenses.

5.6 – MODELISATION DE L'ARC EN RETOUR

Afin de protéger d'une manière efficace les systèmes électriques et électroniques contre les perturbations engendrées par la foudre, il est nécessaire de connaître et de caractériser son champ électrique pulsionnel. Les variations les plus brutales et de grandes amplitudes du champ électromagnétique émis par une décharge de foudre ont lieu lors de la phase de l'arc en retour. Durant ces dernières années, plusieurs modèles de l'arc en retour ont été développés afin de permettre d'évaluer son rayonnement électromagnétique [38] & [42] – [51]. L'une des difficultés majeures liées à la modélisation du canal de foudre réside dans le fait que le courant ne peut être mesuré qu'à la base du canal. Or, pour déterminer les champs électriques et magnétiques rayonnés, il est nécessaire de connaître la distribution du courant le long du canal.

Des études récentes basées sur des modélisations numériques et des observations expérimentales ont montré que la présence de la structure foudroyée, où celle utilisée pour la déclencher, contamine la mesure du courant de la foudre. Cette contamination, qui dépend de la géométrie de la structure elle-même, compromet la fiabilité des statistiques adoptées jusqu'alors pour les paramètres du courant de la foudre [41].

5.7 – MODELISATION DU COURANT DE LA Foudre

L'étude de l'interaction entre le champ électromagnétique rayonné par la foudre et les systèmes électriques, ainsi que la coordination des stratégies de protection sont, généralement, basées sur des distributions statistiques du courant mesurés à la base du canal de la foudre obtenues en utilisant des tours instrumentées ou par la technique de déclenchement artificiel de la foudre. On distingue dans la littérature 4 modèles [41]-[43] :

- Modèles du gaz dynamique
- Modèles électromagnétiques
- Modèles des lignes à constantes réparties
- Modèles d'ingénieur (engineering models)

5.7.1 - Modèles du gaz dynamique

Dans ce modèle, on assimile le canal de la foudre à un segment court d'une colonne cylindrique de plasma chauffé par le passage d'un courant variable dans le temps. Des modèles de ce type ont été développés pour des décharges dans les laboratoires, ensuite, appliqués pour la modélisation des courants de la foudre. On appelle ce modèle aussi « le modèle physique ». Dans ce modèle, Braginskii a utilisé le principe du choc fort « strong shock) pour définir les paramètres du canal de l'arc en retour, tels que : le rayon, la température et la pression en fonction du courant initial [45]. Braginskii, pour calculer le rayon du canal, donna l'expression suivante :

$$r(t) \approx 9.35 [I(t)]^{1/3} t^{1/2} \quad (5.3)$$

Où :

r : rayon du canal [cm]
 $I(t)$: courant dans le canal [A]
 t : temps [s]

La conductivité du canal est prise comme constante, $\sigma = 2.22 \cdot 10^4$ [S/m] et la densité de l'air est de $1.29 \cdot 10^{-3}$ [g/cm³]. Pour un rayon donné, la résistance du canal par unité de longueur est :

$$R(t) = [\sigma \pi r^2(t)]^{-1} \quad (5.4)$$

L'énergie dans le canal est calculée de la façon suivante :

$$w(t) = \int_0^t I^2(\tau) R(\tau) d\tau \quad (5.5)$$

Duboyov et al. assument que :

- La colonne du plasma est cylindrique, rectiligne et symétrique.
- La somme algébrique des charges positives et négatives est nulle dans chaque élément de volume.
- L'équilibre thermodynamique existe à chaque instant.

Les conditions initiales qui caractérisent le canal créé par le précurseur sont la température (de l'ordre de $10\,000^{\circ}$ [K]) et le rayon du canal est de l'ordre de 1 [mm]. Pour chaque pulsation du courant, les énergies déposées et rayonnées sont calculées. L'énergie déposée dans le canal est calculée de la manière suivante : la colonne du

plasma est divisée en une série de zones annulaires concentriques. Dans chaque zone les propriétés du gaz sont constantes. Pour une température et densité de masse connues, la composition du plasma est définie suivant l'équilibre thermodynamique de l'air. Etant donné la composition du plasma, la conductivité de chaque zone annulaire est calculée. Le courant est distribué dans le canal suivant la résistance de chaque zone. De cette façon, l'énergie déposée dans le canal peut être calculée. L'énergie déposée dans le canal sous forme de chaleur dans le centre est transférée à l'extérieur vers les zones plus froides. Le rayonnement est le mécanisme dominant de la redistribution de l'énergie aux températures supérieures à 10 000° [K].

5.7.2 - Modèle électromagnétique

Dans ce modèle, on assimile le canal de la foudre à un fil conducteur mince avec pertes, chargé à l'instant pris pour origine formant, ainsi une antenne. Ce modèle nécessite la résolution numérique des équations de Maxwell pour trouver la distribution du courant dans le canal en utilisant la méthode des moments. Les modèles électromagnétiques peuvent être classés en 5 types selon la représentation du canal [43] :

- Un fil mince conducteur/résistif dans l'air au dessus du sol.
- Un fil entouré par milieu diélectrique (différent de l'air) qui occupe le demi-plan au dessus du sol.
- Un fil enveloppé par un isolant dans l'air au dessus du sol.
- Deux fils en parallèles, assimilés à une structure coaxiale verticale, ayant une distribution additionnelle de condensateurs dans l'air.
- Un fil ayant une distribution additionnelle d'inductance en série dans l'air.

5.7.3 - Modèles des lignes à constantes réparties

Ce modèle considère le canal de la foudre comme une ligne de transmission ayant une résistance, capacité et inductance réparties selon la longueur du canal. L'application de l'équation des télégraphistes pour déterminer la répartition du courant nécessite de définir, auparavant, dans le cas de l'éclair, les caractéristiques locales du chemin de foudre. Soit l'équation scalaire reliant le champ électrique au potentiel vecteur magnétique A_z et au potentiel électrique V :

$$E_z = -j\omega A_z - \frac{\partial V}{\partial z} \tag{5.6}$$

La composante verticale du potentiel vecteur est exprimée en coordonnées cylindriques et après transformation de Laplace, s'écrit :

$$A_z(z, r, \varphi, p) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-h}^{+h} \int_0^{r_a} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\xi_0 \Delta}}{\Delta} i_z(z', r', \varphi', p) \partial z' \partial r' \partial \varphi' \tag{5.7}$$

Où i_z est la composante verticale de la densité de courant et en posant :

$$\Delta^2 = \Delta'^2 + \Delta''^2 ; \Delta'^2 = (z - z')^2 ; \Delta''^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi') ; \xi_0 = p/c \tag{5.8}$$

Où r, z, φ désignent, respectivement, les coordonnées du point d'observation et r', z', φ' celle du point du courant, r_a le rayon du cylindre, p l'opérateur de Laplace et c la vitesse de la lumière.

Si on calcule le potentiel au centre du cylindre pour lequel $r = 0$. Ceci nous permet de rendre le rayon vecteur indépendant de φ' , on a ainsi :

$$\int_0^{r_a} 2\pi i_z r dr = I \left(z', t - \frac{\Delta}{c} \right) \quad (5.9)$$

Si, de plus, dans l'expression du potentiel vecteur magnétique, on néglige le retard, dans ces conditions, on trouve :

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} I(z, p) \int_{-h}^{+h} \frac{dz'}{\Delta_a} \quad (5.10)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q(z, p) \int_{-h}^{+h} \frac{dz'}{\Delta_a} \quad (5.11)$$

Avec $\Delta_a^2 = \Delta'^2 + r_a^2$ et où $q(z, p) = \int_0^{r_a} 2\pi\rho r dr$. En désignant par ρ la densité superficielle des charges et q la charge par unité de longueur du cylindre. On pose, ensuite :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-h}^{+h} \frac{dz'}{\Delta_a} \quad \& \quad L = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-h}^{+h} \frac{dz'}{\Delta_a} \quad (5.12)$$

La grandeur L a les dimensions d'un coefficient d'une inductance propre par unité de longueur et C celle d'une capacité par unité de longueur. La vitesse de l'onde de courant vaut, alors, $v^2 = 1/LC = c^2$ et l'impédance caractéristique, dans le cas où la résistance est négligée, sera :

$$Z_c = 30 \int_{-h}^{+h} \frac{dz'}{\Delta_a} = 30\Omega(z) \quad (5.13)$$

$$\Omega(z) = \log \frac{h+z + \sqrt{r_a^2 + (h+z)^2}}{r_a} + \log \frac{h-z + \sqrt{r_a^2 + (h-z)^2}}{r_a} \quad (5.14)$$

Au milieu de l'antenne ($z = 0$), cette fonction a la valeur :

$$\Omega_0 = 2 \log \frac{2h}{r_a} \quad (5.15)$$

Du fait que $h \gg r_a$; cette valeur ne varie que très lentement. Aux extrémités ($z \pm h$), elle décroît jusqu'à :

$$\Omega(\pm h) = \log \frac{4h}{r_a} \tag{5.16}$$

5.7.4 - Modèles d'ingénieur (engineering models)

Les équations du courant dans les modèles d'ingénieur peuvent être exprimées par la formule généralisée proposée par Rakov [42] - [43]:

$$i(z', t) = u(t - z' / v_f) P(z') i(0, t - z' / v) \tag{5.17}$$

Où :

u : Fonction de Heaviside , $u(t - z' / v_f) = 1$ pour $t \geq z' / v_f$

$P(z')$: Facteur d'atténuation du courant en fonction de la hauteur.

v_f : Vitesse de propagation de l'éclair.

v : Vitesse de propagation du courant.

Le tableau 5.1 résume les différentes valeurs de $P(z')$ et v pour les 5 modèles d'ingénieur.

Tab. 5.1 - Valeurs de $P(z')$ & de v pour les modèles d'ingénieur		
Modèles	$P(z')$	v
Lignes de transmission (TL)	1	v_f
Lignes de transmission modifiées avec atténuation linéaire (MTLL)	$1 - z' / L$	v_f
Lignes de transmission modifiées avec atténuation exponentielle (MTLE)	$\exp(-z' / \lambda)$	v_f
Bruce-Golde (BG)	1	∞
Source de courant mobile (TCS)	1	- c

L et λ sont des constantes représentant le taux de décroissance du courant le long du canal de la foudre. Dans ce qui suit, on va brièvement définir les modèles mentionnés dans le tableau 5.1 qui sont souvent les plus adoptés dans la littérature scientifique.

Dans ces modèles, la distribution spatiale et temporelle du courant dans le canal est spécifiée. Le courant $I(z', t)$ du canal est connu à n'importe quel instant et à n'importe quelle hauteur en fonction du courant $I(0, t)$ à la base du canal ($z' = 0$). Une expression équivalente en terme de la densité de charge est obtenue en utilisant le principe de la continuité de charge suivant :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0 \tag{5.18}$$

Les modèles les plus utilisés dans cette catégorie peuvent être classés en 2 classes :

- Modèles de ligne de transmission
- Modèles de source du courant mobile

Le tableau 5.2 résume les différents modèles avec indication de l'équation du courant et de la densité de la charge.

$$v^* = v_f (1 + v_f / c) \tag{5.19}$$

Tab. 5.2 - Courant & densité de la charge des différents modèles	
Modèles	Equation du courant & de la densité de la charge
Lignes de transmission (TL)	$i(z', t) = i(0, t - z' / v)$ $\rho(z', t) = \frac{i(0, t - z' / v)}{v}$
Lignes de transmission modifiées avec atténuation linéaire (MTLL)	$i(z', t) = \left(1 - \frac{z'}{L}\right) i(0, t - z' / v)$ $\rho(z', t) = \left(1 - \frac{z'}{L}\right) \frac{i(0, t - z' / v)}{v} + \frac{Q(z', t)}{L}$
Lignes de transmission modifiées avec atténuation exponentielle (MTLE)	$i(z', t) = e^{-z' / \lambda} i(0, t - z' / v)$ $\rho(z', t) = e^{-z' / \lambda} \left(\frac{i(0, t - z' / v)}{v} + \frac{Q(z', t)}{\lambda} \right)$
Bruce-Golde (BG)	$i(z', t) = i(0, t)$ $\rho(z', t) = \frac{i(0, z' / v_f)}{v_f}$
Source de courant mobile (TCS)	$i(z', t) = i(0, t + z' / c)$ $\rho(z', t) = \frac{i(0, t + z' / c)}{c} + \frac{i(0, z' / v^*)}{v^*}$

1 - Modèle de Bruce-Golde

Il peut être considéré le plus simple modèle du courant de l'arc en retour (l'éclair). Il suppose que le courant, $I(z', t)$, le long du canal (en dessous du front de l'onde ascendante du courant) est égal au courant à la base d'origine $I(0, t)$, et il est nul en dessus du front de l'onde. Mathématiquement, on écrit :

$$I(z', t) = I(0, t) \quad \forall \quad z' \leq vt \quad (5.20)$$

$$I(z', t) = 0 \quad \forall \quad z' \geq vt \quad (5.21)$$

2 - Source de courant mobile TCS

Dans le modèle TCS, une source de courant, se déplace en haut le long d'un canal à une vitesse v du sol vers le nuage [43]. Le courant injecté par cette source à une hauteur z' est assumé de se propager vers le bas à la vitesse de la lumière c . Dans ces conditions, le courant à la hauteur z' doit être égal au courant au sol avec un retard de z'/c qui peut être exprimé de la façon suivante :

$$I(z', t) = I(0, t + z'/c) \quad \forall \quad z' \leq vt \quad (5.22)$$

$$I(z', t) = 0 \quad \forall \quad z' \geq vt \quad (5.23)$$

Dans les 2 modèles BG et TCS, une discontinuité apparaît au front de l'arc en retour qui représente l'enlèvement instantané de la charge à chaque hauteur $z' = vt$ par le front de l'arc en retour.

3 - Modèle de ligne de transmission (TL)

a – Modèle généralisé

Ce modèle assimile le canal de la foudre à une ligne de transmission sans pertes où une impulsion de courant se propage à partir du sol à la vitesse de l'arc en retour v . La base de la théorie des lignes repose, essentiellement, sur les équations des télégraphistes munies des coefficients constants et qui résulte de la résolution du système de 2 équations aux dérivées partielles :

$$L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri = - \frac{\partial V}{\partial z} \quad (5.24)$$

$$C \frac{\partial V}{\partial t} + Gi = - \frac{\partial i}{\partial z} \quad (5.25)$$

L et C représentent l'inductance propre et la capacité par unité de longueur, respectivement. R et G représentent la résistance (pertes longitudinales) et la conductance (pertes transversales) par unité de longueur, respectivement. Dans le cas

d'un cylindre vertical en régime transitoire brusque, le terme dû aux pertes latérales, y compris celles par effet couronne, peut être négligé en raison de l'amplitude et de la durée de la composante radiale du champ électrique. Ce modèle fut proposé par Uman et Mclain en 1969 et est largement utilisé jusqu'à ce jour [43]. La distribution du courant est définie par :

$$I(z', t) = I(0, t - z'/c) \quad \forall \quad z' \leq vt \quad (5.26)$$

$$I(z', t) = 0 \quad \forall \quad z' \geq vt \quad (5.27)$$

Etant donné que l'intensité du courant le long du canal reste constante, le modèle TL ne permet aucun transfert de charge entre le traceur et l'arc en retour. Or, les mesures des variations du champ électrique associées au traceur ont mis en évidence que le traceur est bel et bien porteur d'une certaine densité de charge [43].

b - Modèles de lignes de transmission modifiées avec atténuation linéaire (MTLL)

Dans ce modèle le courant est atténué en fonction de la hauteur :

$$I(z', t) = I(0, t - z'/c) (1 - z'/H_{tot}) \quad \forall \quad z' \leq vt \quad (5.28)$$

$$I(z', t) = 0 \quad \forall \quad z' \leq vt \quad (5.29)$$

Où H_{tot} est la hauteur totale du canal de la foudre.

c - Modèle de ligne de transmission modifiée avec atténuation exponentielle du courant (MTLE)

Afin de pallier aux inconvénients du modèle TL sans toucher à sa simplicité qui permet une utilisation aisée dans les calculs de couplage, une modification au modèle TL a été proposée. La distribution spatio-temporelle du courant $I(z', t)$ est définie par :

$$I(z', t) = I(0, t - z'/c) \exp(-z'/\lambda) \quad \forall \quad z' \leq vt \quad (5.30)$$

$$I(z', t) = 0 \quad \forall \quad z' \geq vt \quad (5.31)$$

Le paramètre λ représente le taux de décroissance de l'intensité du courant le long du canal ; sa valeur, entre 1.5 et 2 [km], a été déterminée en utilisant des enregistrements simultanés de champs électromagnétiques à plusieurs distances. La figure 5.3 présente un exemple de comparaison entre les 2 modèles TL et MTLE. Les champs rayonnés peuvent être calculés en partant du courant à la base du canal et de la vitesse de l'arc en retour.

5.8 – COURANT À LA BASE DU CANAL

Depuis les années 50, plusieurs expériences ont été réalisées afin de caractériser le courant de foudre. L'intérêt a été motivé par le désir d'avoir une technique, relativement, directe pour connaître :

- Les paramètres du courant de la foudre à partir des champs électromagnétiques mesurés de loin.
- Prédire les effets du couplage résultants des champs électromagnétiques rayonnés par un coup de foudre sur les installations électriques ou sur les avions.

La description la plus complète du courant de l'arc en retour est donnée par l'équipe du Professeur Berger (ETHZ), qui durant les années 1950 - 1970 a exploité une station expérimentale [42]. Dans le cas des modèles d'ingénieur en assumant un canal vertical de la foudre et un sol parfaitement conducteur, Heidler proposa une relation approximative qui est la suivante [43] :

$$I(0,t) = \frac{I_0}{\eta} \frac{(t/\tau_1)^n}{(t/\tau_1)^n + 1} e^{-t/\tau_2} \tag{5.32}$$

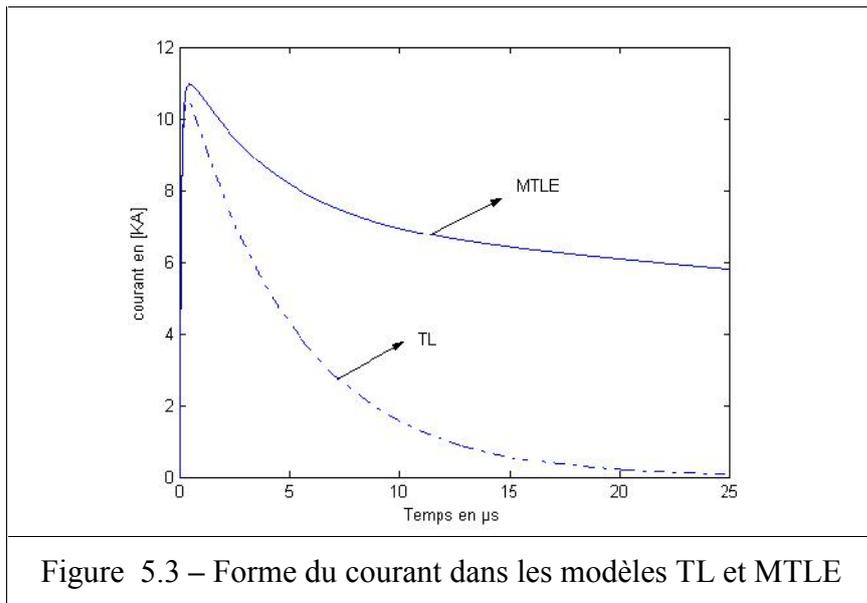


Figure 5.3 – Forme du courant dans les modèles TL et MTLE

Où :

- I_0 caractérise l'amplitude du courant à la base du canal.
- τ_1 est la constante du temps du front (taux de croissance).
- τ_2 est le taux de décroissance.
- n représente un exposant ayant pour valeurs de 2 à 10.
- η simule le facteur de correction de l'amplitude obtenu par :

$$\eta = e^{-\frac{\tau_1}{\tau_2} \left(\frac{\tau_2}{\tau_1} \right)^{1/n}} \tag{5.33}$$

La fonction de Heidler a été introduite parce qu'elle satisfait plusieurs contraintes, essentiellement :

- La deuxième dérivée est nulle à l'instant initial.
- Elle est consistante avec les valeurs mesurées et avec la forme de l'onde du courant. Elle permet, facilement et avec précision, d'ajuster l'amplitude du courant, la dérivée maximale et la charge électrique transférée presque indépendamment en variant I_0 , τ_1 et τ_2 , respectivement.

La combinaison de la fonction de Heidler avec une seconde fonction [44] ou avec une fonction double exponentielle [49] sont utilisées pour reproduire un courant conforme avec celui obtenu par la mesure.

La formulation proposée par [50] a été adoptée comme un courant typique (standard) à la base du canal par plusieurs chercheurs. Ce courant est exprimé comme la somme de la fonction de Heidler et de la fonction double exponentielle comme indiqué par l'équation suivante :

$$I(0,t) = \frac{I_{01}}{\eta} \frac{(t/\tau_1)^n}{(t/\tau_1)^n + 1} e^{-t/\tau_2} + I_{02} (e^{-t/\tau_3} - e^{-t/\tau_4}) \quad (5.34)$$

5.9 – ADEQUATION DES MODELES D'INGENIEUR

Les modèles d'ingénieur sont considérés adéquats, car ils reproduisent les champs avec une approximation raisonnable par rapport aux valeurs obtenues par les expériences [45]. Les versions modifiées du modèle TL (MTLL et MTLE) sont probablement les plus raisonnables, du point de vue de la simplicité mathématique et de la précision. On peut résumer la validation des modèles d'ingénieur comme suit :

- La relation entre les valeurs pics initiales du champ électrique et le courant est bien prédite.
- Les champs électriques à 10 [m] loin du canal après les 10 à 15 [μ s] sont, raisonnablement, produits par les modèles MTLL, BG et TCS, mais, pas avec les 2 autres modèles TL et MTLE.

5.10 – CONCLUSIONS

Le développement de l'éclair atmosphérique est initié par la phase du traceur correspondant à la formation de canaux ionisés dans l'air vierge. L'utilisation des caméras rapides, la mesure des champs et des courants associés à la décharge permettent de comparer les caractéristiques de propagation des traceurs de laboratoires et ceux de l'éclair naturel ou de celui déclenché artificiellement.

Les processus physiques, mis en jeu, peuvent être analysés grâce aux modèles développés dans la théorie. À cause du niveau des tensions et des puissances mis en jeu dans un coup de foudre, on ne peut, donc, pas l'étudier en totalité dans un laboratoire. Pour ces mêmes raisons et d'autres, telles que :

- La nature aléatoire du phénomène.
- L'étude dans la nature n'est pas facile non plus.

6 - SIMULATIONS DES CHAMPS RAYONNES

6.1 - GENERALITES SUR LE CALCUL DES CHAMPS	65
6.2 - SOL : CONDUCTEUR PARFAIT	65
6.2.1 – Technique de la condition de Lorentz	66
6.2.2 – Equation de continuité	70
6.3 - CHAMPS ELECTROSTATIQUES DUS A UN DIPOLE ELECTRIQUE VERTICAL	71
6.3.1 – Méthodes des champs proches de la source	71
6.3.2 – Méthodes des quasi-images	72
6.4 - METHODE FDTD	74
6.5 - METHODE HYBRIDE	76
6.6 - SOL : CONDUCTEUR IMPARFAIT	79
6.6.1 – Formule d'ondelettes	80
6.6.2 – Formule de Cooray	81
6.7 - COMPARAISON, COMMENTAIRES & VALIDATIONS	83
6.8 - CONCLUSIONS	84

6 – SIMULATION DES CHAMPS RAYONNES

6.1 – GENERALITES SUR LE CALCUL DES CHAMPS

Le calcul des champs implique la définition d'un système de coordonnées d'après la configuration du point d'observation par rapport à la géométrie de la source, en l'occurrence une antenne cylindrique verticale par rapport à un point d'observation situé sur le sol. A grande distance, on peut admettre que les fronts d'ondes sont sphériques ou plans. A courte distance, le centre de symétrie de la source considérée est cylindrique. Cependant, du fait de la hauteur finie de ce centre, la distance du point d'observation devra être inférieure à quelques hauteurs d'antenne. Au-delà de 10 hauteurs d'antenne [38], on peut supposer que les fronts d'ondes sont devenus sphériques ou planes. Mais, il faut désormais prendre en compte la nature des sols et les réflexions ionosphériques. Si on se limite à des distances inférieures, on doit utiliser un système en coordonnées cylindriques.

Avant de calculer les champs électrique et magnétique dus à un éclair, il est nécessaire d'étudier les champs issus d'un dipôle électrique verticale ou un élément infinitésimal d'un courant (orientation sur l'axe z dans les coordonnées cylindriques) localisé sur une interface séparant 2 milieux différents. Le milieu 1 représente l'air et le milieu 2 représente le sol. Le calcul des champs électromagnétiques peut être divisé en deux classes, selon la conductivité du sol.

6.2 – SOL : CONDUCTEUR PARFAIT

Rubinstein & Uman ont développé 2 méthodes équivalentes pour calculer le champ électromagnétique produit par une source spécifiée. La première méthode est appelée technique du dipôle qui implique [53] – [55] :

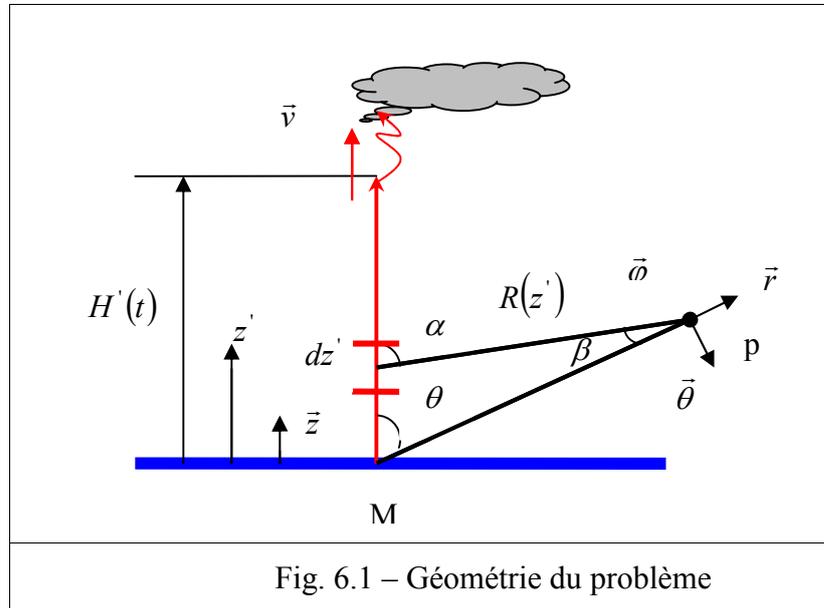
- Spécification de la densité du courant \vec{J} .
- L'utilisation de \vec{J} pour trouver le potentiel vecteur \vec{A} .
- L'utilisation de \vec{A} et la condition de Lorentz pour trouver le potentiel scalaire ϕ .
- Le calcul du champ électrique se fait à partir de \vec{A} et de ϕ .
- Le champ magnétique est calculé à partir de \vec{A} .

Dans cette technique, la source est définie, uniquement, par le terme de la densité du courant \vec{J} . L'utilisation de la condition de Lorentz assure la continuité de l'équation du courant qui n'est pas, explicitement, utilisé.

La deuxième méthode est appelée technique du monopole qui implique :

- La spécification de la densité du courant \vec{J} (ou densité linéaire de la charge ρ).
- L'utilisation de \vec{J} (ou ρ) et de l'équation de la continuité pour trouver ρ (ou \vec{J}).
- L'utilisation de \vec{J} pour trouver \vec{A} et de ρ pour trouver ϕ .
- Le calcul du champ électrique se fait à partir de \vec{A} et de ϕ .
- Le champ magnétique \vec{B} est calculé à partir de \vec{A} .

Dans cette technique la source est définie par les 2 termes, la densité du courant \vec{J} et la densité linéaire de la charge ρ . L'équation du champ est, alors, exprimée par ρ et \vec{J} , ou par \vec{J} , ou par ρ .



6.2.1 - Technique de la condition de Lorentz

L'objectif est d'obtenir le potentiel électrique scalaire en utilisant le potentiel vecteur magnétique selon la condition de Lorentz. L'éclair peut être modélisé comme un fil rectiligne vertical fixé à la terre au point M avec l'autre bout qui s'étend à la vitesse v [55]. Les coordonnées sont définies selon la géométrie de la figure 6.1. A l'instant initial $t = 0$, l'arc en retour commence à se propager du point M. L'observateur au point fixe p voit l'arc en retour s'émerger du point M à l'instant $t = r/c$ avec c la vitesse de la lumière. La hauteur actuelle du canal à l'instant 't' est donnée par :

$$H(t) = vt \tag{6.1}$$

La hauteur apparente du canal à l'instant 't', vue par l'observateur, est différente de $H(t)$. Cette hauteur peut être appelée 'hauteur retardée'. Si on définit le temps 't' comme étant le temps nécessaire pour que l'onde de l'arc en retour arrive à la hauteur H' , plus le temps nécessaire du signal d'arriver à l'observateur à partir de H' . Le temps 't' est obtenu par la relation suivante :

$$t = H'(t)/v + R(H')/c \tag{6.2}$$

$$R(H') = \sqrt{r^2 + H'^2(t) - 2H'(t)r \cos \theta} \tag{6.3}$$

Le courant retardé dans chaque élément dz' est donné par la relation $i(z' - R(z')/c)$ avec z' est inférieur ou égal à $H'(t)$, la hauteur du canal vue par l'observateur au

point p à l'instant 't'. Si le front de l'onde de l'arc en retour se déplace à une vitesse constante v, on peut obtenir $H'(t)$ par la relation suivante :

$$H'(t) = \frac{r}{1-\beta^2} \left[-\beta^2 \cos \theta + \frac{vt}{r} - \beta \sqrt{(1-\beta^2) + \frac{v^2 t^2}{r^2} + \beta^2 \cos^2 \theta} - \frac{2vt}{r} \cos \theta \right] \quad (6.4)$$

$$\beta = v/c \quad (6.5)$$

Le potentiel vecteur magnétique au point d'observation due à l'arc en retour est donné par la relation suivante [53] :

$$\vec{A}(r, \theta, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{H'} \frac{i(z', t - R(z')/c)}{R(z')} \vec{k} dz' \quad (6.6)$$

En coordonnées sphériques, le potentiel vecteur magnétique s'écrit :

$$A(r, \theta, \varphi, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{H'} \left[i(z', t - R/c) \frac{\cos \alpha}{R} u_r - i(z', t - R/c) \frac{\sin \alpha}{R} u_\theta \right] dz' \quad (6.7)$$

Evaluons, maintenant, le rotationnel du vecteur potentiel magnétique. Selon l'équation (6.6), on obtient :

$$\nabla \times dA = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{H'} \left[-\frac{\sin \alpha}{R} \frac{\partial i(z, t - R/c)}{\partial R} + \frac{\sin \alpha}{R^2} i(z, t - R/c) \right] dz u_\phi \quad (6.8)$$

Comme nous avons :

$$\frac{\partial i(z', t - R/c)}{\partial R} = -\frac{1}{c} \frac{\partial i(z', t - R/c)}{\partial t} \quad (6.9)$$

La relation (6.8) devient :

$$\nabla \times dA = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{H'} \left[\frac{\sin \alpha}{R^2} i(z, t - R/c) + \frac{\sin \alpha}{cR} \frac{\partial i(z, t - R/c)}{\partial t} \right] dz u_\phi \quad (6.10)$$

Le champ électrique total peut être calculé d'après la relation :

$$\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (6.11)$$

Où ϕ est calculé d'après la relation de Lorentz :

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (6.12)$$

Par conséquent :

$$\phi(r, \theta, t) = -c^2 \int_{r/c}^t \nabla \cdot \vec{A} d\tau \quad (6.13)$$

La divergence de l'équation (6.6) donne :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{A}(r, \theta, t) = & \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{H'(t)} \left[\frac{z' - r \cos \theta}{R^3(z')} i(z', t - R(z')/c) \right. \\ & \left. + \frac{z' - r \cos \theta}{cR^2(z')} \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial \tau} \right] dz' \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{H' - r \cos \theta}{cR^2(H')} i(H', t - R(H')/c) \frac{dH'}{dt} \end{aligned} \quad (6.14)$$

En substituant l'expression (6.14) dans l'équation (6.13) et en interchangeant l'ordre d'intégration, on obtient la formule suivante du potentiel scalaire en fonction du courant :

$$\phi(r, \theta, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{H'(t)} \left[\frac{z' - r \cos \theta}{R^3(z')} \int_{\tau}^t i(z', t - R(z')/c) d\tau + \frac{z' - r \cos \theta}{cR^2(z')} i(r, \theta, t) \right] dz' \quad (6.15)$$

Le gradient de l'équation (6.15) et la dérivée par rapport au temps de l'équation (6.6), donnent l'expression du champ électrique \vec{E} sous la forme suivante :

$$E_h = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_0^{H'(t)} \left[\frac{\cos \theta - 3 \cos \alpha(z') \cos \beta(z')}{R^3(z')} \int_{t_b}^t i(z', \tau - R(z')/c) d\tau \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\cos \theta - 3 \cos \alpha(z') \cos \beta(z')}{cR^2(z')} i(z', \tau - R(z')/c) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\cos \theta - \cos \alpha(z') \cos \beta(z')}{c^2 R(z')} \frac{\partial i(z', \tau - R(z')/c)}{\partial t} \right] dz \right. \\ \left. - \left[\frac{\cos \theta - \cos \alpha(H') \cos \beta(H')}{c^2 R(H')} \right] i \left(H', t - \frac{R(H')}{c} \right) \frac{dH'}{dt} \right\} \quad (6.16)$$

$$E_{\theta} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_0^{H'(t)} \left[\frac{\sin\theta + 3\cos\alpha(z')\sin\beta(z')}{R^3(z')} \int_{t_b}^t i(z', \tau - R(z')/c) d\tau + \frac{\sin\theta + 3\cos\alpha(z')\sin\beta(z')}{cR^2(z')} i(z', \tau - R(z')/c) + \frac{\sin\theta + \cos\alpha(z')\sin\beta(z')}{c^2R(z')} \frac{\partial i(z', \tau - R(z')/c)}{\partial t} \right] dz' + \left[\frac{\sin\theta + \cos\alpha(H')\sin\beta(H')}{c^2R(H')} \right] i\left(H', t - \frac{R(H')}{c}\right) \frac{dH'}{dt} \right\} \quad (6.17)$$

Le champ magnétique est obtenu par le rotationnel de l'équation (6.6). Pour un canal vertical, l'induction n'a qu'une composante horizontale qui est :

$$B_{\varphi} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int_0^{H'(t)} \left[\frac{\sin\alpha(z')}{R^2(z')} i(z', \tau - R(z')/c) + \frac{\sin\alpha(z')}{cR(z')} \frac{\partial i(z', \tau - R(z')/c)}{\partial t} \right] dz' + \frac{\sin\alpha(H')}{cR(H')} i\left(H', t - \frac{R(H')}{c}\right) \frac{dH'}{dt} \right\} \quad (6.18)$$

Les 2 derniers termes des équations (6.17) - (6.18) contenant dH'/dt ne sont pas nuls s'il y a une discontinuité du courant au niveau du front de l'onde.

Pour obtenir le champ électrique total en un point au niveau du sol, l'effet du sol comme conducteur parfait est ajouté en faisant une image symétrique au canal dans la direction des z négatifs. Donc, il suffit de remplacer z' dans (6.15) par $-z'$. On aura, ainsi :

$$\phi_{image}(z) = -\phi_{reel}(-z) \quad (6.19)$$

$$A_{image}(z) = A_{reel}(-z) \quad (6.20)$$

La somme de la composante réelle et celle de l'image nous donne le potentiel total.

$$\phi_t(z) = \phi_{reel}(z) - \phi_{reel}(-z) \quad (6.21)$$

$$A_t(z) = A_{reel}(z) + A_{reel}(-z) \quad (6.22)$$

Au niveau du sol, l'angle $\theta = 90^\circ$ et le vecteur unitaire sphérique $\vec{\theta}$ devient $-\vec{z}$. Le champ électrique au niveau du sol est donné par la relation suivante :

$$\begin{aligned}
 E_v(r, t) = & \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{H(t)} \frac{2-3\sin^2\alpha(z')}{R^3(z')} \int_{t_b}^t i(z', \tau - R(z')/c) d\tau dz' \\
 & + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{H(t)} \frac{2-3\sin^2\alpha(z')}{R^3(z')} i(z', R(z')/c) dz' \\
 & - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{H(t)} \frac{\sin^2\alpha(z')}{cR^2(z')} \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial t} dz' \\
 & - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sin^2\alpha(H)}{cR^2} i(H, t - R(H)/c) \frac{dH}{dt}
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

Où : E_v est la composante verticale du champ électrique. Par contre, la composante horizontale, E_h est nulle du fait que le sol est un conducteur parfait.

6.2.2 - Technique de l'équation de la continuité (formulation de Thomson)

Selon la configuration géométrique de la figure 6.1, le potentiel scalaire est donné par la formule suivante :

$$\phi(r, \theta, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(t-r/c)}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{R(z')} \rho^*(z', t - R(z')/c) dz' \tag{6.24}$$

Ou' $Q(t-r/c) = - \int_{r/c}^t i(0, \tau - r/c)$ est la charge stationnaire localisée à la surface du

sol à $z'=0$ et $\left. \frac{\partial \rho^*(z', t - R(z')/c)}{\partial t} = - \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial z'} \right|_{t-R(z')/c=Cte}$. L'étoile est

utilisée pour dire que la variable spécifiée n'est nulle qu'au front de l'onde ou derrière le front. Par contre, les variables sans étoiles sont des fonctions continues et indépendantes de la position de l'arc en retour. Prenons la dérivée de (6.14)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi(r, \theta, t)}{\partial t} = & - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{i(0, t-r/c)}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{H(t)} \frac{1}{R(z')} \frac{\partial \rho^*(z', t - R(z')/c)}{\partial t} dz' \\
 & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho^*(H, t - R(H))}{R(H)} \frac{dH}{dt}
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

Après simplification, on trouve :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi(r, \theta, t)}{\partial t} = & - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{H(t)} \left[\frac{z'-r\cos\theta}{R^3(z')} i(z', t - R(z')/c) \right. \\
 & \left. + \frac{z'-r\cos\theta}{cR^2(z')} \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial t} \right] dz' \\
 & - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{H-r\cos\theta}{cR^2(H)} i(H, t - R(H)/c) \frac{dH}{dt}
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

Divisons l'équation (6.13) par c^2 et ajoutons la relation (6.12), on obtient, ainsi l'équation de continuité :

$$\nabla \cdot \vec{A}(r, \theta, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi(r, \theta, t)}{\partial t} = 0 \quad (6.27)$$

6.3 – CHAMPS ELECTROMAGNETIQUES DUS A UN DIPOLE ELECTRIQUE VERTICAL (VED)

Le potentiel vecteur de Hertz pour un VED situé au point $(0,0,h)$ s'écrit pour un point d'observation m de la façon suivante [59] :

$$\Pi_z(m) = G(R_1) + G(R_2) + \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty f(\nu) J_0(\nu r) \exp(-\gamma_1 \xi) d\nu \quad (6.28)$$

$$G(R_{1,2}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(-jk_1 R_{1,2})}{R_{1,2}} \quad (6.29)$$

$$f(\nu) = \frac{2k_1^2 \gamma_2}{k_2^2 \gamma_1 + k_1^2 \gamma_2} \frac{\nu}{\gamma_1}, \quad R_1 = \sqrt{r^2 + (z-h)^2}, \quad R_2 = \sqrt{r^2 + \xi^2}, \quad \xi = z+h$$

$$\gamma_{1,2} = \sqrt{\nu^2 - k_{1,2}^2}, \quad k_1 = \omega \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}, \quad k_2 = \omega \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2 (1 - j\sigma_2 / \omega \varepsilon_2)}$$

r : Distance horizontale entre le point du dipôle et le point d'observation

z : Hauteur du point d'observation

$J_0(\nu r)$: Fonction de Bessel d'ordre 0

Le dernier terme de l'équation est connu sous le nom de l'intégrale de Sommerfeld. L'intégrale de Sommerfeld n'a pas une solution analytique. Elle peut être résolu soit par la méthode numérique soit par l'approximation. On présente, ici, 2 méthodes utilisées pour approximer l'intégrale de Sommerfeld.

6.3.1 - Méthodes des champs proches de la source

Pour des petites distances loin de la source, l'intégrale de Sommerfeld a 2 points branches : $\nu = k_1$ et $\nu = k_2$. Lorsqu'on a $|k_2| > |k_1|$, il est présumé que la contribution du point $\nu = k_2$ à la valeur de l'intégrale est, considérablement, inférieur que la contribution du point $\nu = k_1$. Ceci est dû au facteur d'atténuation exponentielle. Tenant compte de cette condition, l'intégrand est réduit de la façon suivante [60] :

$$f(\nu) = \frac{2k_1^2 j k_2 \cdot \nu}{k_2^2 \gamma_1^2 [1 + (k_1^2 k_2) / (k_2^2 k_1)]} = j \frac{2k_1}{n+1} \frac{\nu}{\gamma_1^2} \quad (6.30)$$

Avec $n = k_2 / k_1$

Soit l'intégrale suivante :

$$I(r, R_2) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty J_0(\nu r) \exp(-\gamma_1 \xi) \frac{\nu}{\gamma_1^2} d\nu = \frac{1}{4\pi} \int_1^\infty \frac{\exp(-jk_1 R_2)}{\sqrt{t^2 - (r/R_2)^2}} dt \quad (6.31)$$

En exprimant le dénominateur en série de puissance, l'expression (6.28) sera :

$$I(r, R_2) = \frac{1}{4\pi} \sum_0^\infty A_m E_{2m+1}(jk_1 R_2) \quad (6.32)$$

$$A_m = \frac{1.3.5...(2m-1)}{2.4.6...2m} \left(\frac{r}{R_2}\right)^{2m} \quad \& \quad E_m(z) = \int_1^\infty \frac{\exp(-zt)}{t^m} dt \quad (6.33)$$

On peut établir une expression par récurrence pour exprimer E_{2m+1} en fonction de E_{2m-1} , on aura, donc :

$$E_{2m+1}(jkR) = \frac{\exp(-jkR)}{2m} \left(1 - \frac{jkR}{2m-1}\right) - \frac{(kR)^2}{2m(2m-1)} E_{2m-1}(jkR) \quad (6.34)$$

La convergence de cette intégrale ne demande que 3 à 4 termes.

6.3.2 - Méthode des quasi-images

Dans les modèles d'ingénieur, le canal de la foudre est considéré droit et vertical (Fig. 6.2). L'élément du courant Idh est considéré comme un dipôle électrique à une hauteur h . le point d'observation a une distance horizontale r du canal et à la hauteur z . R_0 , R_1 et R_2 sont les distances du dipôle électrique et de ses images, respectivement.

Le sol a une conductivité σ_1 et une permittivité $\varepsilon_1 = \varepsilon_r \varepsilon_0$. L'air a une conductivité nulle et de permittivité ε_0 . L'expression exacte pour le potentiel vecteur magnétique issu d'un dipôle électrique vertical sur un plan plat, non ferromagnétique est donné par Sommerfeld dans le domaine fréquentiel [59].

$$dA_z = \frac{\mu Idh}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\exp(-jk_0 R_0)}{R_0} - \frac{\exp(-jk_0 R_1)}{R_1} \\ + 2k_1^2 \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r) \lambda}{k_1^2 \nu_1 + k_2^2 \nu_0} \exp[-\nu_0(z+h)] d\lambda \end{array} \right\} \quad (6.35)$$

Qu'on peut écrire :

$$dA_z = \frac{\mu Idh}{4\pi} \left\{ \frac{\exp(-jk_0 R_0)}{R_0} + \int_0^\infty J_0(\lambda r) \exp[-\nu_0(z+h)] f(\nu_0) \frac{\lambda}{\nu_0} d\lambda \right\} \quad (6.36)$$

Avec :

J_0 : Fonction de Bessel d'ordre zéro.

$$f(v_0) = \frac{n^2 v_0 - \sqrt{\alpha^2 + v_0^2}}{n^2 v_0 + \sqrt{\alpha^2 + v_0^2}} \quad (6.37)$$

$$n^2 = \frac{k_1^2}{k_0^2}, \quad \alpha^2 = k_0^2 - k_1^2, \quad v_0 = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}, \quad v_1 = \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}, \quad k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \quad (6.35)$$

$$k_1^2 = -j\omega\mu_0(\sigma_1 + j\omega\varepsilon_1), \quad R_0 = \sqrt{r^2 + (z-h)^2}, \quad R_1 = \sqrt{r^2 + (z+h)^2} \quad (6.39)$$

L'approximation de l'intégral de Sommerfeld, dans ce cas, se fait par la méthode sus-indiquée :

Selon la théorie de l'image, quand la variable $|v_0|$ tend vers l'infinie, notamment $\lambda \rightarrow \infty$, la réflexion spectrale $f(v_0)$ tend à une valeur limite b , tel que :

$$b = f(\infty) = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \quad (6.40)$$

D'autre part, quand $|v_0/\alpha| \ll 1$, on peut écrire la fonction $f(v_0)$ en série de Taylor au point $v_0 = 0$.

$$f(v_0) = -1 + 2n^2 \left(\frac{v_0}{\alpha}\right) - 2n^4 \left(\frac{v_0}{\alpha}\right)^2 + (2n^6 - n^2) \left(\frac{v_0}{\alpha}\right)^3 + \dots \quad (6.41)$$

En utilisant les 2 représentations, $f(v_0)$ prend la forme suivante :

$$f(v_0) \approx b - B \exp(-v_0 d) \quad (6.42)$$

Dans le but de déterminer b & B , prenons les 2 premiers termes linéaires de la décomposition de $f(v_0)$ en série de Taylor.

$$f(v_0) \approx -1 + 2n^2 \left(\frac{v_0}{\alpha}\right) \approx \frac{1}{n^2 + 1} \left[(n^2 - 1) - 2n^2 e^{-v_0(n^2+1)/\alpha} \right] \quad (6.43)$$

Comparons, maintenant, les 2 expressions (6.42) & (6.43) on trouve :

$$b = \frac{2n^2}{n^2 + 1} \quad d = \frac{n^2 + 1}{\alpha} \quad (6.44)$$

Substituons les valeurs de b & B selon l'expression (6.44) dans l'expression du vecteur potentiel magnétique (6.39), on trouve :

$$dA_z = \frac{\mu I d h}{4\pi} \left\{ \frac{\exp(-jk_0 R_0)}{R_0} + A \frac{\exp(-jk_0 R_1)}{R_1} - B \frac{\exp(-jk_0 R_2)}{R_2} \right\} \quad (6.45)$$

$$R_2 = \sqrt{r^2 + (z + h + d)^2} \quad (6.46)$$

Le premier terme entre les accolades de l'équation (6.42) dénote l'onde incidente directe du dipôle au point d'observation. Le deuxième et le troisième terme représentent l'onde réfléchie des 2 images (Fig.6.2). Lorsque le sol est considéré comme un conducteur parfait, $\sigma_1 \rightarrow \infty$, c'est-à-dire, $n^2 \rightarrow \infty$, l'expression du vecteur potentiel magnétique se réduit à :

$$dA_z = \frac{\mu Idh}{4\pi} \left\{ \frac{\exp(-jk_0 R_0)}{R_0} + \frac{\exp(-jk_0 R_1)}{R_1} \right\} \quad (6.47)$$

Le champ magnétique s'écrit, alors :

$$dH_\varphi = \frac{Idh}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\exp(-jk_0 R_0)}{R_0} + A \frac{\exp(-jk_0 R_1)}{R_1} - B \frac{\exp(-jk_0 R_2)}{R_2} \right\} \quad (6.48)$$

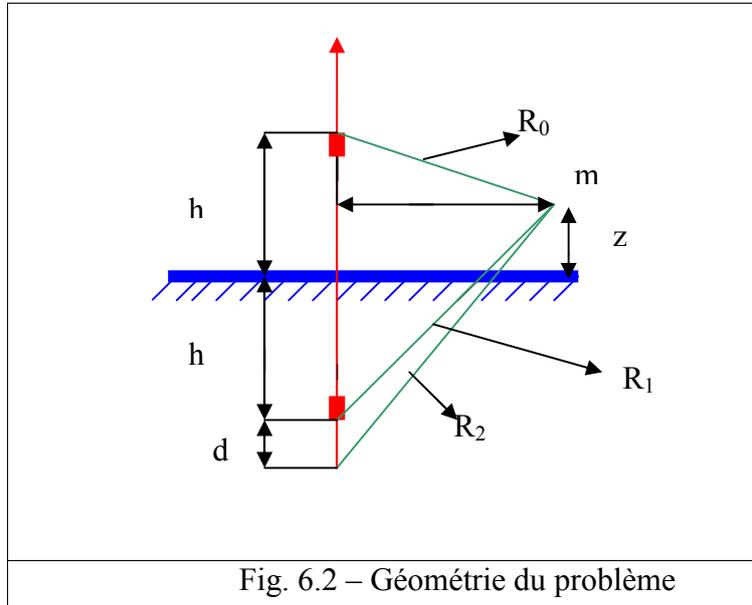


Fig. 6.2 – Géométrie du problème

De la même façon, le champ électrique s'écrit :

$$dE_r = \frac{Idh}{j4\pi\omega\epsilon_0} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left\{ \frac{\exp(-jk_0 R_0)}{R_0} + A \frac{\exp(-jk_0 R_1)}{R_1} - B \frac{\exp(-jk_0 R_2)}{R_2} \right\} \quad (6.49)$$

$$dE_z = \frac{Idh}{j4\pi\omega\epsilon_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right) \left\{ \frac{\exp(-jk_0 R_0)}{R_0} + A \frac{\exp(-jk_0 R_1)}{R_1} - B \frac{\exp(-jk_0 R_2)}{R_2} \right\} \quad (6.50)$$

6.4 - METHODE FDTD

Selon le chapitre 4, il est possible d'écrire, directement, les équations de Maxwell par les différences centrées. Nous utilisons les coordonnées cylindriques, au lieu des

coordonnées cartésiennes. L'utilisation des coordonnées cylindriques diminue le nombre des équations et le temps de calcul.

Les approximations des équations de Maxwell par la méthode des différences finies dans le domaine temporel en coordonnées cylindriques s'écrivent sous la forme suivante :

$$H_{\varphi} \Big|_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+1/2} = H_{\varphi} \Big|_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu_0} \left(\frac{E_z \Big|_{i+1, j+\frac{1}{2}}^n - E_z \Big|_{i, j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta r} - \frac{E_r \Big|_{i+\frac{1}{2}, j+1}^n - E_r \Big|_{i+\frac{1}{2}, j}^n}{\Delta z} \right) \quad (6.51)$$

$$E_z \Big|_{i, j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \left(\frac{2\varepsilon - \sigma \Delta t}{2\varepsilon + \sigma \Delta t} \right) E_z \Big|_{i, j+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{(2\varepsilon + \sigma \Delta t) r_i \Delta r} \left(r_{i+\frac{1}{2}} H_{\varphi} \Big|_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+1/2} - r_{i-\frac{1}{2}} H_{\varphi} \Big|_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+1/2} \right) \quad (6.52)$$

$$E_r \Big|_{i+\frac{1}{2}, j}^{n+1} = \left(\frac{2\varepsilon - \sigma \Delta t}{2\varepsilon + \sigma \Delta t} \right) E_r \Big|_{i+\frac{1}{2}, j}^n - \frac{\Delta t}{(2\varepsilon + \sigma \Delta t) \Delta z} \cdot \left(H_{\varphi} \Big|_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+1/2} - H_{\varphi} \Big|_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^{n+1/2} \right) \quad (6.53)$$

Vu que le domaine est ouvert, il faut que l'intervalle de calcul soit limité et borné. Pour ce faire, la technique des conditions aux limites absorbantes est appliquée. Nous introduisons la méthode de Mur (conditions aux limites absorbantes du premier ordre) [59], [64] & [66]. L'approximation de cette méthode dans notre cas se fait de la façon suivante :

➤ **Dans la direction verticale z**

$$H_{\varphi} \Big|_{i+\frac{1}{2}, j_{\max}+\frac{1}{2}}^{n+1/2} = H_{\varphi} \Big|_{i+\frac{1}{2}, j_{\max}-\frac{1}{2}}^{n-1/2} + \frac{V\Delta t - \Delta z}{V\Delta t + \Delta z} \left(H_{\varphi} \Big|_{i+\frac{1}{2}, j_{\max}-\frac{1}{2}}^{n+1/2} - H_{\varphi} \Big|_{i+\frac{1}{2}, j_{\max}+\frac{1}{2}}^{n-1/2} \right) \quad (6.54)$$

$$H_{\varphi} \Big|_{i+\frac{1}{2}, j_{\min}-\frac{1}{2}}^{n+1/2} = H_{\varphi} \Big|_{i+\frac{1}{2}, j_{\min}+\frac{1}{2}}^{n-1/2} + \frac{V\Delta t - \Delta z}{V\Delta t + \Delta z} \left(H_{\varphi} \Big|_{i+\frac{1}{2}, j_{\min}+\frac{1}{2}}^{n+1/2} - H_{\varphi} \Big|_{i+\frac{1}{2}, j_{\min}-\frac{1}{2}}^{n-1/2} \right) \quad (6.55)$$

➤ **Dans la direction horizontale r**

$$H_{\varphi} \Big|_{i_{\max}+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+1/2} = c_1 H_{\varphi} \Big|_{i_{\max}-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n-1/2} + c_2 H_{\varphi} \Big|_{i_{\max}+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n-1/2} + c_3 H_{\varphi} \Big|_{i_{\max}-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n-1/2} \quad (6.56)$$

$$c_1 = \frac{\frac{1}{2\Delta r} - \frac{1}{2V\Delta t} - \frac{1}{8r_i}}{\frac{1}{2\Delta r} + \frac{1}{2V\Delta t} + \frac{1}{8r_i}} ; c_2 = \frac{\frac{1}{2V\Delta t} - \frac{1}{2\Delta r} - \frac{1}{8r_i}}{\frac{1}{2\Delta r} + \frac{1}{2V\Delta t} + \frac{1}{8r_i}} ; c_3 = \frac{\frac{1}{2\Delta r} + \frac{1}{2V\Delta t} - \frac{1}{8r_i}}{\frac{1}{2\Delta r} + \frac{1}{2V\Delta t} + \frac{1}{8r_i}} \quad (6.57)$$

V : Vitesse de propagation du courant dans le canal.

Dans la direction z et suivant le canal, le calcul des champs électromagnétique est traité dans un cas spécial [59] & [64]. Dans la région source, on a :

$$E_z|_{0,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \left(\frac{2\varepsilon - \sigma \Delta t}{2\varepsilon + \sigma \Delta t} \right) E_z|_{0,j+\frac{1}{2}}^n + \frac{8\Delta t}{(2\varepsilon + \sigma \Delta t)\Delta r} H_\varphi|_{\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1/2} - \frac{4\Delta t}{\pi\varepsilon_0\Delta r^2} I\left(0, j + \frac{1}{2}\right) \quad (6.58)$$

Dans la région hors source, on a :

$$E_z|_{0,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \left(\frac{2\varepsilon - \sigma \Delta t}{2\varepsilon + \sigma \Delta t} \right) E_z|_{0,j+\frac{1}{2}}^n + \frac{8\Delta t}{(2\varepsilon + \sigma \Delta t)\Delta r} H_\varphi|_{\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1/2} \quad (6.59)$$

Courant à la hauteur $\Delta z \times \left(j + \frac{1}{2}\right) : I\left(0, j + \frac{1}{2}\right) :$

La conductivité de l'air étant nulle, ce qui fait $\sigma = 0$ et la permittivité est ε_0 . Le choix des pas temporel Δt et spatiaux $\Delta r, \Delta z$ est fait de telle façon à satisfaire le critère de stabilité suivant :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta r, \Delta z}{2V_{\max}} \quad (6.60)$$

$$(\Delta r, \Delta z) \leq \frac{\lambda_{\min}}{10} ; \quad \lambda_{\min} = \min\left(\frac{1}{k_i}, \frac{2\pi}{k_r}\right) ; \quad k = k_r + jk_i = k_0 \sqrt{\varepsilon_r - \frac{j\sigma}{\omega_{\max} \varepsilon_0}} \quad (6.61)$$

6.5 - METHODE HYBRIDE

Au lieu de balayer tout le volume par discrétisation, l'application de la méthode hybride a permis de réduire le temps de calcul sans perdre l'exactitude des résultats. Pour arriver à cela, il faut satisfaire les conditions suivantes :

- La distance d'impact est très proche, ne dépassant pas une centaine de mètres.
- L'effet de rayonnement et d'induction est négligé.
- L'effet électrostatique est pris en considération.

Considérons que le canal de la foudre a une orientation arbitraire définie par le vecteur unitaire \vec{n} (Fig.6.3) :

$$\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k} \quad (6.62)$$

Le champ magnétique près du canal (moins de 100 [m]), se réduit à la loi d'Ampère dans le cas statique :

$$H(x, y, z, t)_\varphi = i(t)/(2\pi\rho) \quad (6.63)$$

φ : direction azimutale des coordonnées cylindriques dont le canal de la foudre représente la direction verticale.

ρ : direction radiale

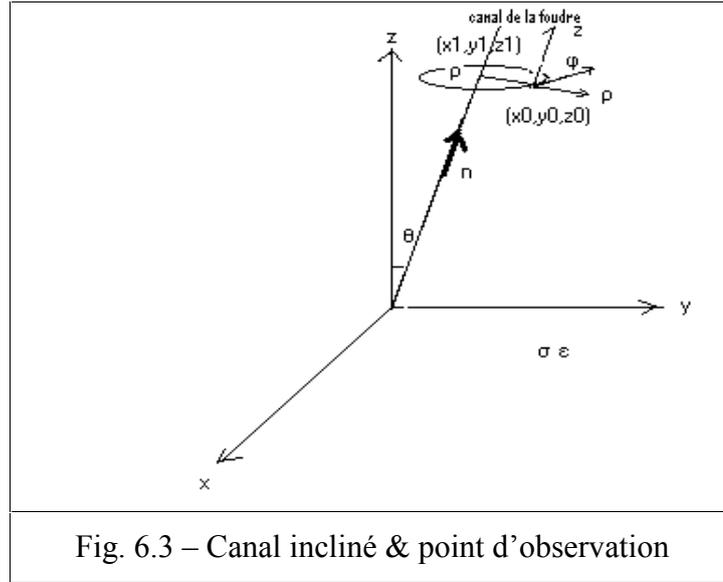


Fig. 6.3 – Canal incliné & point d'observation

En coordonnées cartésiennes, les composantes du champ électrique en un point (x_1, y_1, z_1) sont données par [66] - [70] & [79] - [80].

$$H_x(x, y, z) = \left(\frac{z_0 - z_1}{\rho} \cos \beta - \frac{y_0 - y_1}{\rho} \cos \gamma \right) H_\varphi \quad (6.64)$$

$$H_y(x, y, z) = \left(\frac{x_0 - x_1}{\rho} \cos \gamma - \frac{z_0 - z_1}{\rho} \cos \alpha \right) H_\varphi \quad (6.65)$$

$$H_z(x, y, z) = \left(\frac{y_0 - y_1}{\rho} \cos \alpha - \frac{x_0 - x_1}{\rho} \cos \beta \right) H_\varphi \quad (6.66)$$

D'après la loi d'Ampère, dans un milieu isotrope, le champ électrique se calcule comme suit :

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6.67)$$

Ecrivons les composantes vectorielles du rotationnel, on obtient un système d'équations scalaires :

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right) \quad (6.68)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right) \quad (6.69)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right) \quad (6.70)$$

En appliquant la méthode de Yee [26], pour discrétiser le système de équations (6.65), (6.66) & (6.67), nous obtenons pour la dérivée partielle spatiale :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = \frac{F^n_{i+1/2,j,k} - F^n_{i-1/2,j,k}}{\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \quad (6.71)$$

De la même façon, la dérivée par rapport au temps s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial F}{\partial t}(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = \frac{F^{n+1/2}_{i,j,k} - F^{n-1/2}_{i,j,k}}{\Delta t} + O[(\Delta t)^2] \quad (6.72)$$

En écrivant le système d'équations (6.68) - (6.70) sous la forme (6.71) - (6.72), nous obtenons :

$$E_x \Big|_{i,j,k}^{n+1/2} = \left(1 - \frac{\sigma(i,j,k)}{\varepsilon(i,j,k)} \Delta t\right) E_x \Big|_{i,j,k}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\varepsilon(i,j,k)\Delta} \left[H_z \Big|_{i,j+1/2,k}^n - H_z \Big|_{i,j-1/2}^n + H_y \Big|_{i,j,k-1/2}^n - H_y \Big|_{i,j,k+1/2}^n \right] \quad (6.73)$$

$$E_y \Big|_{i,j,k}^{n+1/2} = \left(1 - \frac{\sigma(i,j,k)}{\varepsilon(i,j,k)} \Delta t\right) E_y \Big|_{i,j,k}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\varepsilon(i,j,k)\Delta} \left[H_x \Big|_{i,j,k+1/2}^n - H_x \Big|_{i,j,k-1/2}^n + H_z \Big|_{i-1/2,j,k}^n - H_z \Big|_{i+1/2,j,k}^n \right] \quad (6.75)$$

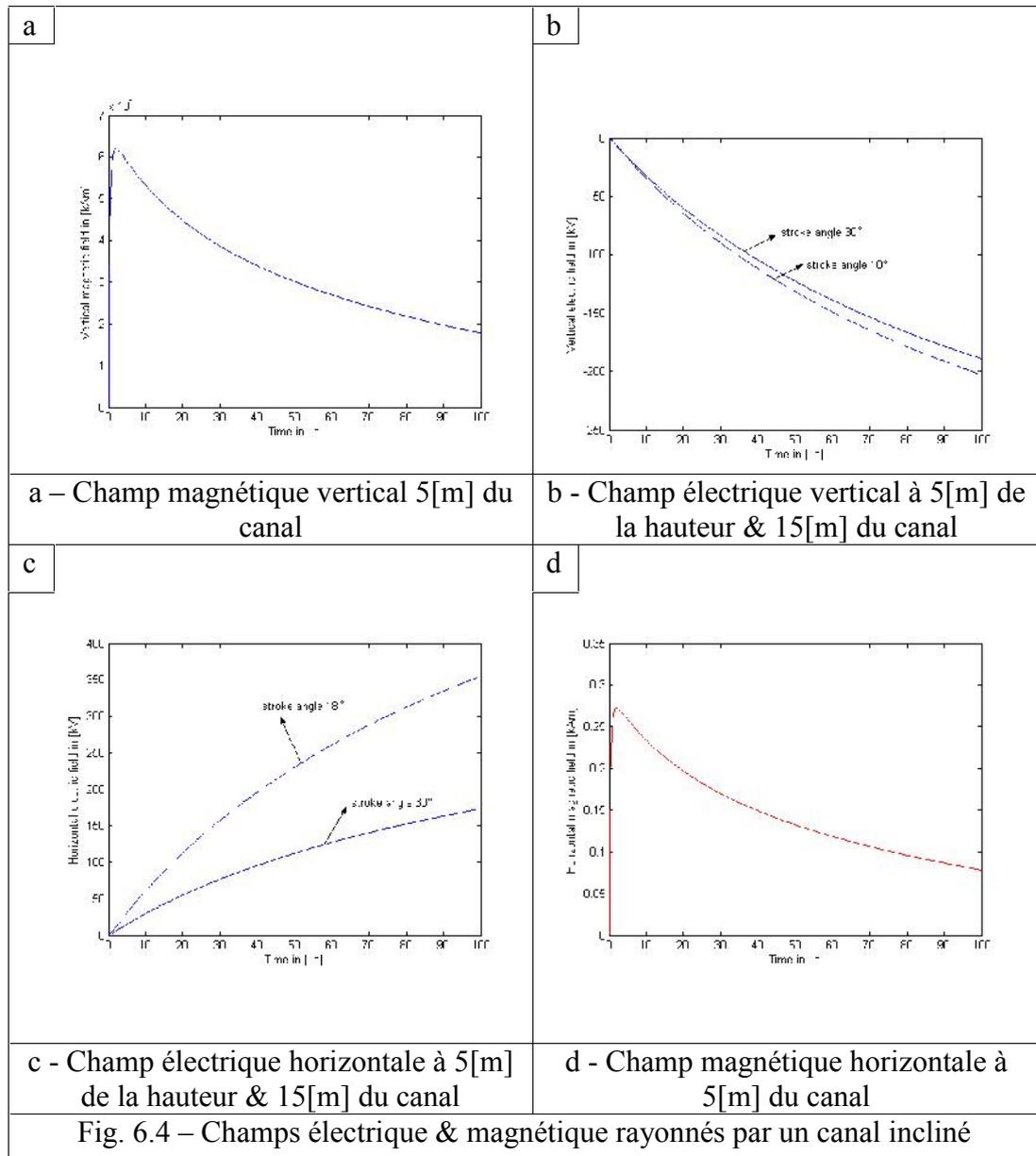
$$E_z \Big|_{i,j,k}^{n+1/2} = \left(1 - \frac{\sigma(i,j,k)}{\varepsilon(i,j,k)} \Delta t\right) E_z \Big|_{i,j,k}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\varepsilon(i,j,k)\Delta} \left[H_x \Big|_{i,j+1/2,k}^n - H_x \Big|_{i,j-1/2}^n + H_y \Big|_{i+1/2,j,k}^n - H_y \Big|_{i-1/2,j,k}^n \right] \quad (6.76)$$

Dans l'air, on a $\sigma = 0$, les composantes du champ électrique sont :

$$E_x \Big|_{i,j,k}^{n+1/2} = E_x \Big|_{i,j,k}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j,k}\Delta} \left[H_z \Big|_{i,j+1/2,k}^n - H_z \Big|_{i,j-1/2}^n + H_y \Big|_{i,j,k-1/2}^n - H_y \Big|_{i,j,k+1/2}^n \right] \quad (6.77)$$

$$E_y \Big|_{i,j,k}^{n+1/2} = E_y \Big|_{i,j,k}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j,k}\Delta} \left[H_x \Big|_{i,j,k+1/2}^n - H_x \Big|_{i,j,k-1/2}^n + H_z \Big|_{i-1/2,j,k}^n - H_z \Big|_{i+1/2,j,k}^n \right] \quad (6.78)$$

$$E_z \Big|_{i,j,k}^{n+1/2} = E_z \Big|_{i,j,k}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j,k}\Delta} \left[H_x \Big|_{i,j+1/2,k}^n - H_x \Big|_{i,j-1/2}^n + H_y \Big|_{i+1/2,j,k}^n - H_y \Big|_{i-1/2,j,k}^n \right] \quad (6.79)$$



Le champ électrique à l’instant $n + 0.5$ est calculé, en utilisant l’information du champ électrique à l’instant $n - 0.5$ et le champ magnétique à l’instant n .

L’avantage de cette méthode nous permet d’éviter le maillage de tout le volume du calcul. Ainsi, on réduit le temps de calcul. Due aux manques des résultats expérimentaux et les études théoriques concernant les champs proches au point d’impact de la foudre et plus particulièrement un canal d’orientation arbitraire, nous avons trouvé des difficultés à comparer nos résultats (Fig. 6.4) [69]. L’inconvénient de cette méthode, est que la distance doit être très proche du canal et la validité de l’approximation est limitée à quelque mégahertz.

6.6 – SOL: CONDUCTEUR IMPARFAIT

Pour un canal de la foudre vertical et linéaire sur un sol conducteur parfait, on a uniquement un champ magnétique horizontal et un champ électrique vertical. Le champ électrique au niveau du sol est nul. Le champ horizontal à la surface d'un conducteur parfait est nul selon les conditions aux limites [2]. Dans le cas où le sol est un conducteur imparfait, le champ électrique horizontal existe sur la surface et dans l'air. La composante verticale du champ électrique et la composante horizontale du champ magnétique sont, faiblement, affectées par la conductivité du sol [2]. Nous citons dans ce contexte 2 méthodes d'approximation pour le calcul du champ électrique horizontal.

6.6.1 – Formule d'ondelette (wavetilt formula)

Cette formule relie le rapport des transformées de Fourier du champ électrique vertical au champ électrique horizontal au niveau du sol par la relation suivante [43] :

$$w(j\omega) = \frac{E_r(j\omega)}{E_z(j\omega)} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{rs} + \sigma / j\omega\epsilon_0}} \quad (6.80)$$

Cette formule est une raisonnable approximation pour des coups de foudre relativement distants, ou bien, pour les premières microsecondes du coup de foudre auprès du canal [43].

Dans le but d'écrire l'équation (6.80) dans le domaine temporel, dans le cas d'implémentation dans la méthode FDTD. Le rapport entre le champ électrique horizontal et vertical qui représente l'impédance de la surface Z_s est écrit sous la forme de la transformée de Laplace, puis on calcule la transformée inverse de Laplace [76] - [77].

$$Z_s(\omega) = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \eta \sqrt{\frac{j\omega\epsilon / \sigma}{1 + j\omega\epsilon / \sigma}} \quad \text{avec} \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} \quad (6.81)$$

$$Z_s(s) = \sqrt{\frac{s/2a}{1 + s/2a}} = \eta \frac{s}{\sqrt{s^2 + 2as}} \quad \text{avec} \quad a = \frac{\sigma}{2\epsilon} \quad (6.82)$$

L'expression Z_s dans le domaine temporel est obtenue par la transformée inverse de l'équation (6.82).

$$Z_s(t) = \frac{\eta}{2j\pi} \int_{\zeta-j\infty}^{\zeta+j\infty} \frac{s}{\sqrt{s^2 + 2as}} ds \quad (6.83)$$

En faisant la transformation des variables, $\tau = s + a$, nous obtenons :

$$Z_g = \frac{\eta e^{-at}}{2j\pi} \int_{\zeta-j\infty}^{\zeta+j\infty} \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 - a^2}} - \frac{a}{\sqrt{u^2 - a^2}} \right) e^{at} du \quad (6.84)$$

La solution est représentée en termes de fonctions modifiées de Bessel :

$$Z_g(t) = \eta e^{-at} \{a[I_1(at) - I_0(at)]u(t) + \delta(t)\} \tag{6.85}$$

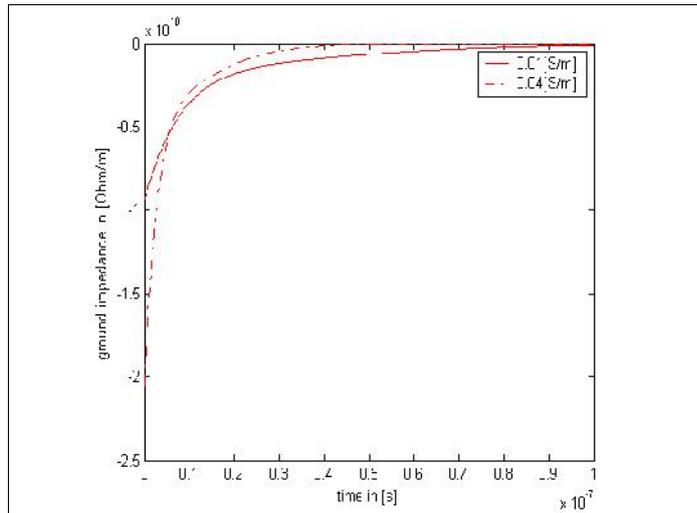


Fig. 6.5 – Impédance transitoire du sol

La figure 6.5 montre l'impédance transitoire. Le champ électrique horizontal au niveau du sol sera la somme du champ électrique pour un conducteur parfait plus celle calculée par l'équation (6.77). De la courbe, on observe que pour les premières microsecondes, l'impédance de surface est très grande, puis diminue, exponentiellement, vers zéro. Ce ci explique que sous haute fréquence, le sol présente une grande résistance. Pour les faibles fréquences, on peut considérer le sol comme un conducteur parfait. Les courbes représentant le champ électrique horizontale pour différentes hauteurs sont montrées dans la figure 6.8. Le courant utilisé dans le calcul du champ électrique horizontal est montré dans la figure 6.6.

6.6.2 - Formule de Cooray

Partant de la loi Ampère-Maxwell :

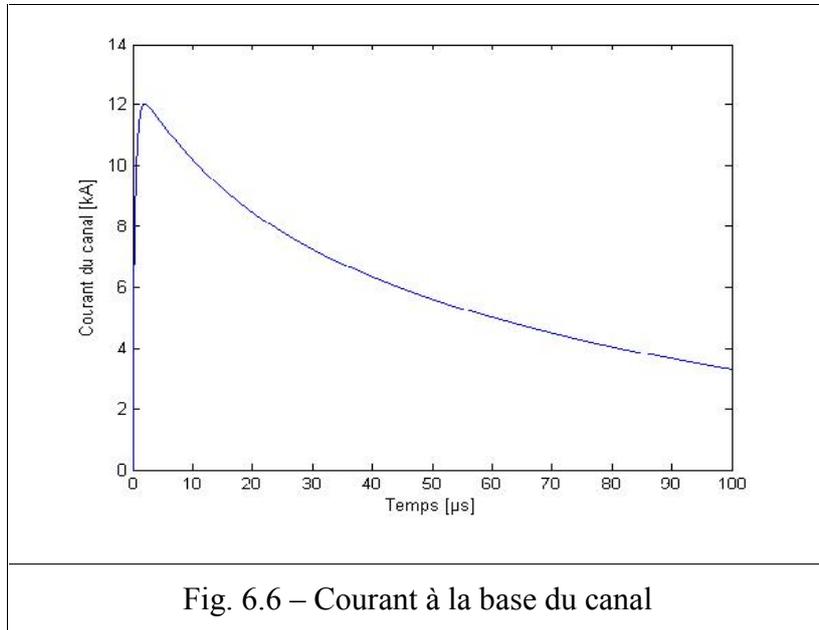
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_s \vec{j} \cdot d\vec{s} + j\omega \iint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} \tag{6.86}$$

La première étape est d'intégrer l'équation (6.86) le long d'un rectangle d'une largeur différentielle $rd\varphi$ et d'une longueur allant de $z = 0$ (niveau sol), jusqu'au niveau $z = -\infty$ (Fig. 6.7). Supposons que :

- La composante verticale du champ magnétique est nulle d'un dipôle vertical même pour un sol d'une conductivité finie.
- Toutes les composantes des champs à $z = -\infty$ sont nulles.

On peut écrire dans ce cas :

$$rd\varphi H_\varphi(z = 0, r) = -dI_c - dI_d \tag{6.87}$$



Où :

dI_c : Courant de conduction.

dI_d : Courant de déplacement passant par la surface d'intégration.

Weyl a montré que l'onde réfléchiée par un sol, modérément considéré bon conducteur, est donné par l'équation suivante [78] :

$$E_r(z, r) = E_r(z = 0, r) e^{j\omega\sqrt{\mu_0(\varepsilon - j\sigma/\omega)}z} \quad (6.88)$$

Ceci nous conduit à la relation suivante :

$$dI_c + dI_d = rd\varphi \int_{-\infty}^0 (\sigma + j\omega\varepsilon) E_r(z, r) dz \quad (6.89)$$

Le résultat de cette intégration est donné par la relation suivante [78] :

$$dI_c + dI_d = E_r(z = 0, r) \frac{\sigma + j\omega\varepsilon}{j\omega\sqrt{\mu_0(\varepsilon - j\sigma/\omega)}} rd\varphi \quad (6.90)$$

Substituant l'équation (6.90) dans la relation (6.88), on obtient :

$$E_r(z = 0, r) = -H_\varphi(z = 0, r) \frac{\sqrt{\mu_0}}{\sqrt{\varepsilon + \sigma/j\omega}} \quad (6.92)$$

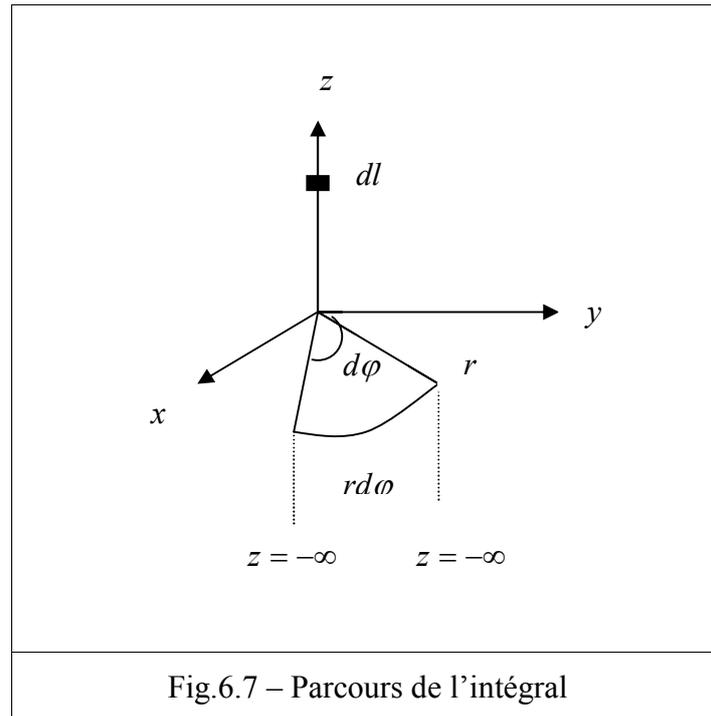


Fig.6.7 – Parcours de l'intégral

La relation (6.91) relie le champ électrique horizontal au champ magnétique horizontale par l'impédance de la surface mentionnée dans l'expression (6.79) des ondelettes.

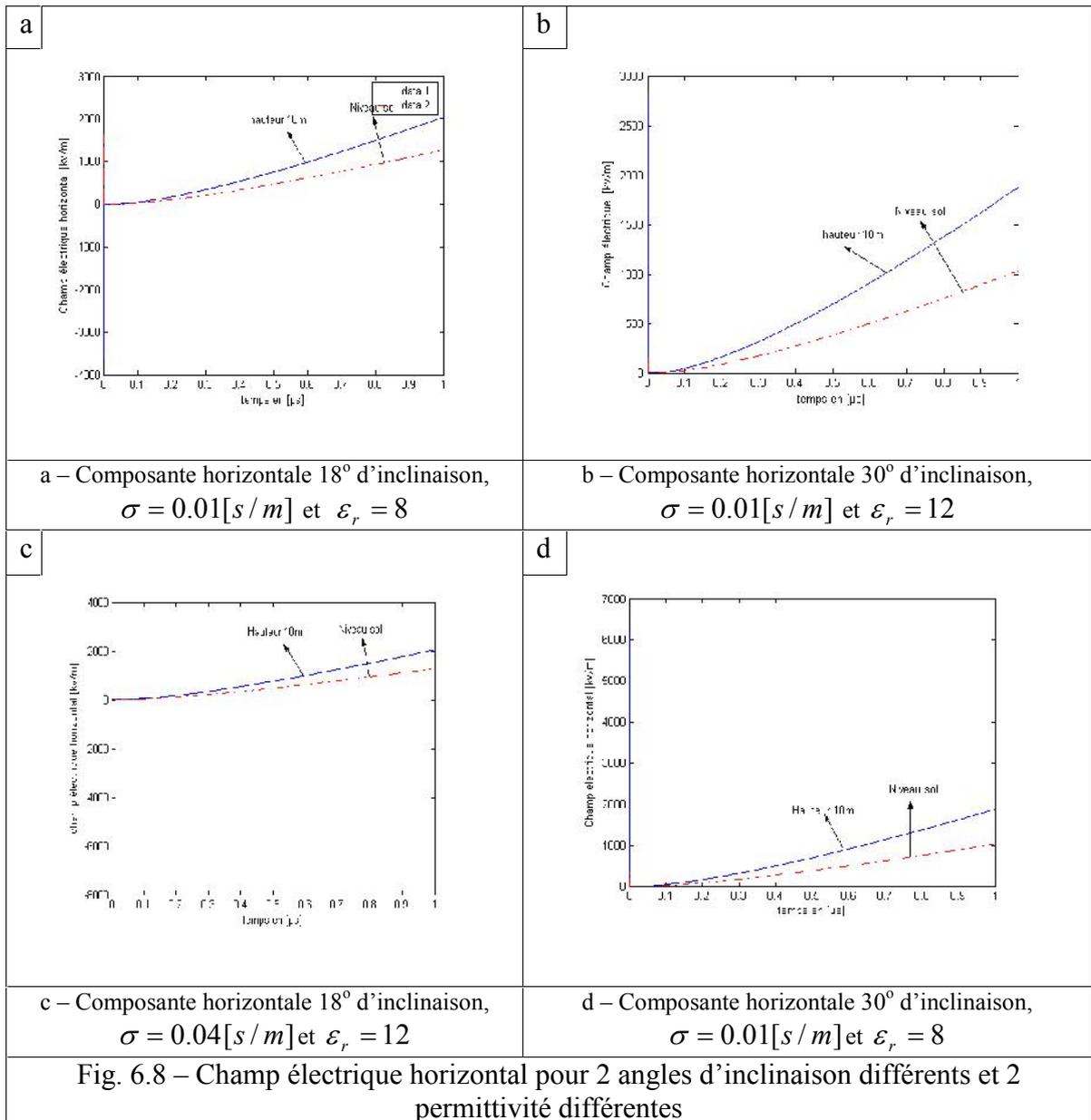
L'importance de la composante horizontale dans le calcul des surtensions induites dans les lignes de transport d'énergie électrique dans le contexte de formulation de couplage a été bien établie. La solution exacte basée sur la formule de Sommerfeld est inefficace de point de vue calcul si on l'utilise dans le cas d'un coup de foudre. Plusieurs techniques d'approximation dans la littérature ont été développées pour calculer la composante horizontale.

6.7 – COMPARAISON, COMMENTAIRES & VALIDATIONS

La figure 6.9 montre les courbes du champ électrique vertical et horizontal près du canal. Les courbes sont tracées à partir de 3 méthodes différentes. Figure 6.9 illustre bien que les 3 méthodes représentent des résultats très proches, tout en restant près du canal. Ceci explique que la méthode hybride appliquée dans le calcul des champs à courte distance du canal est valable pour la détermination des champs rayonnés par un éclair.

La méthode quasi-image est une méthode analytique dans le domaine fréquentiel. En conséquence, les expressions de cette méthode peuvent être utilisées dans les analyses de l'interaction entre les champs rayonnés et n'importe qu'elle équipement électrique. En plus, les expressions mathématiques sont simples, mais, elle a certains inconvénients (mieux utilisées pour des sols mauvais conducteurs) lorsque la conductivité augmente [75].

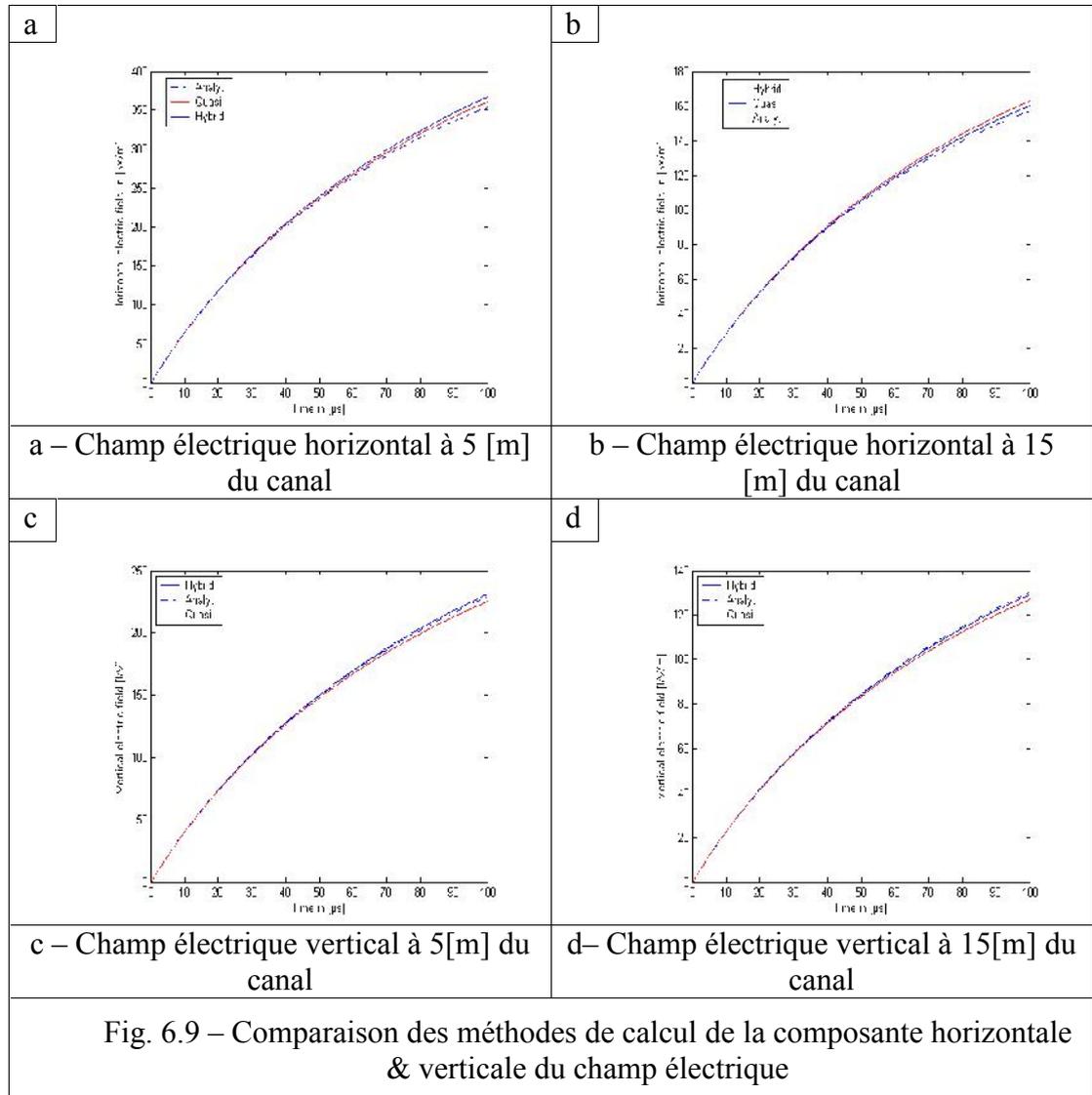
La méthode FDTD est une méthode numérique qui ne s'affecte pas par la conductivité du sol. L'inconvénient est que le temps de calcul augmente avec le volume de discrétisation. Pour réduire le temps de calcul, l'hybridation de la méthode FDTD avec une méthode analytique est adoptée. Les résultats obtenus affirment la validité de cette méthode pour les distances proches du canal (effet électrostatique).



6.8 – CONCLUSIONS

Les champs électromagnétiques rayonnés par le canal de la foudre sont calculés par des méthodes analytiques et numériques. Dans l'ordre de calculer ces champs électromagnétiques, on a adopté les 2 méthodes. Afin de valider nos résultats, on a calculé les composantes horizontales et verticales du champ électrique pour un canal vertical. Les méthodes analytiques ont l'inconvénient d'évaluer l'intégrale de Sommerfeld numériquement. La méthode FDTD, quand à elle, offre une simplicité de calcul et d'implémentation. Malgré sa simplicité d'implémentation, on rencontre des difficultés dans le cas où le volume de calcul est très grand. Ceci rend le temps de calcul énorme. Le problème est surmonté par hybridation de la méthode FDTD avec une méthode analytique. L'avantage de cette méthode nous permet d'éviter le

maillage de tout le volume du calcul. Ainsi, on réduit le temps de calcul. L'effet de l'impédance de la terre a été étudié. Les résultats montrent que le champ électrique horizontal est fortement affecté par l'impédance transitoire du sol.



La méthode hybride améliore, sensiblement, le temps de calcul et permet de reproduire d'une manière satisfaisante les champs rayonnés par un éclair, tout en ayant une structure mathématique relativement simple et facile à utiliser. La démonstration de l'équivalence entre cette méthode et les autres méthodes (quasi-images & analytique) a été élaborée par une comparaison des résultats obtenus par chaque méthode [60].

L'effet de l'impédance du sol a été proposé par une approximation dans le domaine temporel. Il a été montré que la composante horizontale du champ électrique est fortement affectée par l'impédance transitoire du sol.

Les théories et les méthodes de calcul peuvent être utilisées pour la conception et la coordination des systèmes de protection des réseaux électriques contre les perturbations électromagnétiques d'origine orageuse.

7 - CONCLUSIONS

7.1 - CONCLUSIONS	86
7.2 - PERSPECTIVES	87

7 - CONCLUSIONS & PERSPECTIVES

7.1 - CONCLUSIONS

Dans ce travail, l'investigation sur des issues clés variées, associées à l'étude d'un phénomène électromagnétique, est apportée. Les méthodes de résolution des équations liées aux phénomènes électrodynamiques proposées s'inscrivent dans le cadre des méthodes générales de résolution des équations de Maxwell. En effet, la modélisation des phénomènes physiques liés à un coup de foudre constitue une partie non négligeable de l'approximation numérique de ces phénomènes. Les problèmes de propagation des ondes issues des équations de Maxwell font partie des phénomènes électrodynamiques. L'étude de l'agression de la foudre se modélise en temporel qui se déduit, directement, des équations du rotationnel de Maxwell.

Les champs rayonnés par un éclair induisent des signaux perturbateurs qui peuvent être à l'origine de problèmes allant d'un mauvais fonctionnement jusqu'à la destruction totale d'un appareil. La protection correcte et efficace nécessite l'étude théorique préalable des champs électromagnétiques issus d'une agression d'un coup de foudre.

La liste suivante résume les conclusions importantes et les contributions qu'on peut tirer de ce travail :

- La proposition de la méthode FDTD a été choisie pour la solution des équations de Maxwell. Elle présente une simplicité d'implémentation et une efficacité de résoudre, directement, ces équations. Il s'agit d'implémenter les équations de Maxwell et de les appliquer sur l'ensemble de l'espace de modélisation pour tout instant de simulation. Or, les équations de Maxwell régissent le comportement électromagnétique de la matière. Ceci leur permet d'être appliquée quel que soit le système envisagé.
- Le phénomène de la foudre présente un modèle parfait pour l'électromagnétisme, du fait qu'il contient de l'électrostatique, de l'induction et du rayonnement. L'étude des effets néfastes de la foudre nécessite la connaissance de la forme et de l'intensité du courant dans le canal. La modélisation de l'arc en retour proposé dans notre étude est un modèle de Heidler (modèle d'ingeneering).
- Les champs électromagnétiques rayonnés par le canal de la foudre sont calculés par des méthodes analytiques et numériques. Les méthodes analytiques ont l'inconvénient d'évaluer, numériquement, l'intégral de Sommerfeld. Le calcul de l'intégral de Sommerfeld demande un large nombre de dipôles élémentaires le long du canal de la foudre et une large gamme de fréquence. La méthode FDTD, quand à elle, offre une simplicité de calcul et d'implémentation. Malgré sa simplicité d'implémentation, on rencontre des difficultés dans le cas où le volume de calcul est très grand. Ceci rend le temps de calcul énorme.
- Le problème est surmonté par hybridation de la méthode FDTD avec une méthode analytique. L'avantage de cette méthode nous permet d'éviter le maillage de tout le volume du calcul, ainsi, on réduit le temps de calcul. La validité de cette méthode (en comparaison avec la méthode quasi-images & la méthode FDTD) a donné des résultats très approchés aux résultats obtenus par les autres méthodes. L'inconvénient de cette méthode est que la distance doit

être très proche du canal et la validité de l'approximation est limitée à quelque mégahertz.

- La nature du sol affecte les champs électromagnétiques, notamment, en effet, considérer le sol comme un conducteur parfait, annule le champ électrique horizontal. On sait que la composante verticale du champ électrique est, faiblement, affectée par la conductivité finie du sol. La composante horizontale est, remarquablement, affectée par la nature du sol. La méthode FDTD a l'inconvénient de traiter la conductivité du sol comme étant constante.

7.2 - PERSPECTIVES

Après avoir présenté une idée générale sur ce thème très délicat et en principe aléatoire, il est certain qu'il y aura des doutes, des questions et des critiques. Ces 2 aspects (délicatesse & aléas) présentent des sources d'inspiration du futur travail. Parmi ces questions, on cite :

- N'y aura t-il pas un jour, où on peut lier la théorie et l'expérimentation dans nos études.
- La facilité de s'enrichir de la documentation en temps voulu et des logiciels pour comparer nos résultats mêmes avec des études théoriques.

La pré-connaissance de l'intensité et de la distribution des champs électromagnétiques est très utile pour développer une protection contre les tensions induites sur les installations électriques.

Le couplage entre les champs électromagnétiques et l'appareillage électrique nécessite des études très fiables et efficaces pour améliorer une protection future qui répond, au mieux, aux besoins des producteurs et des consommateurs de l'énergie électriques.

L'aspect aléatoire et stochastique du phénomène ne révèle t-il pas, peut être un jour, des techniques non déterministes (classiques) ou beaucoup mieux celles dites intelligentes (modernes)

ANNEXES

ANNEXE A – LA METHODE ADE

ANNEXE B – TRAITEMENT DE L'INTERFACE ENTRE 2 MILIEUX
DIELECTRIQUES

ANNEXE C – RESUME ETENDU DE LA THESE

A – METHODE ADE

La méthode ADE est basée sur les propriétés de l'inversion de la transformée de Fourier entre les domaines spectrales et temporels.

$$j\omega E \Leftrightarrow \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{E^{n+1} - E^{n-1}}{2\Delta t} \quad \text{A.1}$$

$$-\omega^2 E \Leftrightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{E^{n+1} - 2E^n + E^{n-1}}{(\Delta t)^2} \quad \text{A.2}$$

Considérons, comme exemple, le modèle de dispersion sur la permittivité de type Debye :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + j\omega t_0} \right) \quad \text{A.3}$$

En remplaçant l'équation A3 dans l'expression reliant D à E suivi d'une formulation aux différences finies, on obtient :

$$E^{n+1} = a D^{n+1} + b D^n + c E^n \quad \text{A.4}$$

Avec :

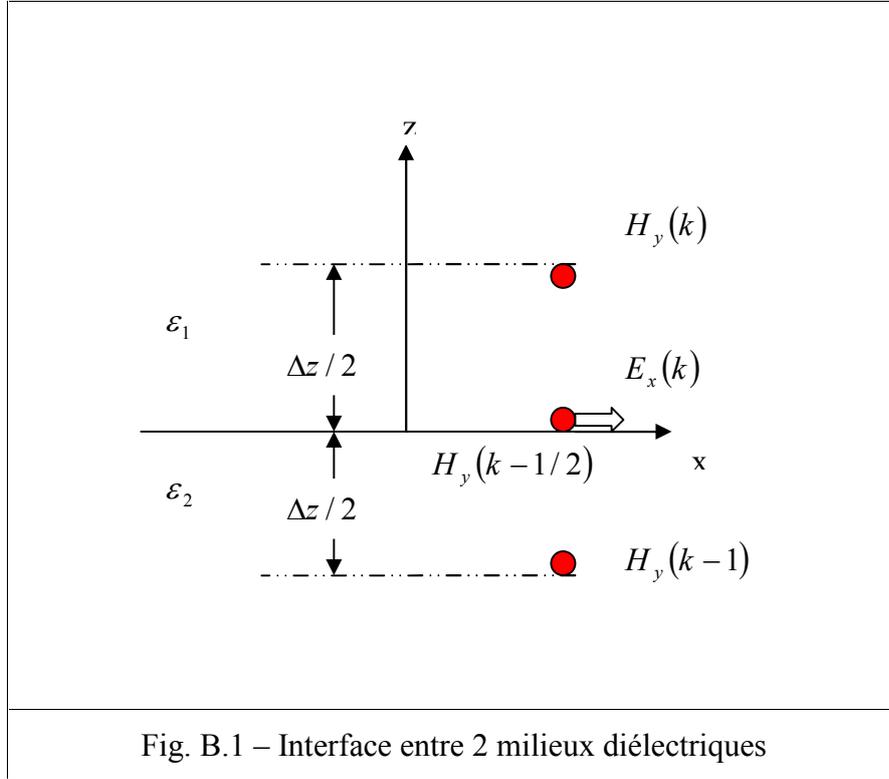
$$a = \frac{\Delta t + 2t_0}{2t_0\varepsilon_\infty + \varepsilon_s\Delta t} \quad \text{A.5}$$

$$b = \frac{\Delta t - 2t_0}{2t_0\varepsilon_\infty + \varepsilon_s\Delta t} \quad \text{A.6}$$

$$c = \frac{2t_0 - \varepsilon_s\Delta t}{2t_0\varepsilon_\infty + \varepsilon_s\Delta t} \quad \text{A.7}$$

B – TRAITEMENT DE L'INTERFACE ENTRE 2 MILIEUX DIELECTRIQUES

A l'interface de 2 milieux diélectriques différents, le calcul des composantes du champ électrique entraîne une discontinuité dans les composantes magnétiques. Prenons le cas illustré par la figure B.1.



Le champ électrique dans le milieu 1 s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_1} \nabla \times \vec{H} \quad (\text{B.1})$$

Le champ électrique dans le milieu 2 s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_2} \nabla \times \vec{H} \quad (\text{B.2})$$

Pour la composante E_x dans le milieu 1, on a :

$$\epsilon_1 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} \right)_1 - \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (\text{B.3})$$

Pour la composante E_x dans le milieu 2, on a :

$$\varepsilon_2 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} \right)_2 - \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (\text{B.4})$$

H_z est continu au niveau de l'interface (champ magnétique normale). La discontinuité de H_y nous oblige à évaluer sa dérivée au niveau de l'interface. D'après la figure B.1, on peut écrire la dérivée de H_y sous la forme suivante :

$$\left(\frac{\partial H_y}{\partial z} \right)_1 = \frac{H_y(k-1/2) - H_y(k-1)}{\Delta z / 2} \quad (\text{B.5})$$

$$\left(\frac{\partial H_y}{\partial z} \right)_2 = \frac{H_y(k) - H_y(k-1/2)}{\Delta z / 2} \quad (\text{B.6})$$

La somme des équations B.3 et B.4 donne :

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{\partial E_x}{\partial t} = \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} \right)_1 + \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} \right)_2 - 2 \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (\text{B.7})$$

En utilisant B.5 et B.6, on obtient :

$$\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (\text{B.8})$$

C - RESUME ETENDU DE LA THESE

C.1 - INTRODUCTION

La solution des équations de Maxwell nécessite des méthodes soit analytique ou numérique. Il n'existe pas de méthode générale efficace qui régit, simultanément, les domaines de très basse et de haute fréquence. Dans les domaines aéronautiques, de distribution et de transport d'énergie électrique, pour représenter les effets dus aux coups de foudre, la principale méthode utilisée au niveau des structures est la méthode des FDTD. Elle permet, en effet, de couvrir un large spectre de fréquence (de quelques [kHz] à plusieurs centaines de [MHz]) pour un coût de calcul, relativement, faible. On utilise la méthode des différences finies en temps et en espace pour décrire le système d'équations de Maxwell dans le domaine temporel. Le schéma numérique utilisé, le plus fréquemment, est un schéma explicite décalé en temps et en espace pour le champ électrique \vec{E} et le champ magnétique \vec{H} . La discrétisation des opérateurs est centrée en temps et en espace. Le schéma numérique conserve la propriété de conservation de l'énergie comme pour le problème continu. On subdivise, donc, le domaine de calcul en cubes réguliers. Ceci présente l'intérêt de ne pas avoir à stocker le maillage. Mais, il a l'inconvénient d'approcher les domaines courbés par des pas escaliers. Le développement de la méthode FDTD est passé par des étapes marquantes.

C.2 - FORMULATION DU PROBLEME

L'effet d'une onde rayonné par un coup de foudre indirecte est un problème très intéressant, puisque plusieurs problèmes se posent lors de la modélisation de ces phénomènes et surtout celle de l'intensité des champs agresseurs. Le canal de la foudre permettant la représentation du phénomène d'arc en retour intervenant lors de la jonction du précurseur descendant au niveau du sol est, généralement, modélisé par une antenne verticale alimentée par un générateur de courant à sa base. Des modèles analytiques représentant le courant sous forme d'une fonction de Heidler, prenant en compte la vitesse de propagation et la décroissance d'amplitude permettent une bonne représentation du phénomène.

On désire, dans ce travail, d'évaluer le champ rayonné par le canal de la foudre en différents points d'un volume de calcul situé près du point d'impact. La méthode de FDTD est choisie pour le calcul de ces champs rayonnés de fait de sa simplicité et sa robustesse. Pour réduire le temps de calcul et la mémoire utilisée pendant les calculs, l'hybridation d'une méthode analytique avec la méthode FDTD a été introduite.

C.3 - PRESENTATION DE LA THESE

Nous avons présenté dans le premier chapitre, une étude et synthèse bibliographique de la modélisation des phénomènes électrodynamiques. La discrétisation des équations de Maxwell fait partie des méthodes de résolution et d'approximation des phénomènes électromagnétiques.

Dans le deuxième chapitre, nous nous sommes intéressés à l'ensemble des lois, régissant les champs électriques et magnétiques variables dans le temps. Ces lois sont regroupées au nombre de 4, appelées équations de Maxwell. A ces équations s'ajoutent les relations constitutives qui caractérisent les différents milieux.

Le troisième chapitre est dédié à l'étude des différentes méthodes de résolution des équations de Maxwell dépendant du temps qui ne feront pas l'objet d'implémentation particulière dans cette thèse. On aborde, sommairement, les méthodes analytiques et les méthodes numériques.

Dans le quatrième chapitre, nous présentons la méthode FDTD, comme, un outil de résolution directe des équations de Maxwell. On décrit, dans un premier temps, la discrétisation spatiale et temporelle d'après le schéma de Yee (1966) des équations de Maxwell. Dans un deuxième temps, nous abordons l'ensemble des impératifs d'implémentation de la méthode FDTD tels que les conditions de stabilité numérique, les problèmes des conditions absorbantes et ceux de la prise en compte de la dispersion diélectrique.

Le cinquième chapitre est consacré à l'étude du phénomène de la foudre, comme phénomène électrodynamique. Une généralité sur l'électricité atmosphérique et le mécanisme de la formation de l'orage sont donnés, en premier lieu. En deuxième position, la décharge nuage - terre est étudiée suivant les modèles proposés dans la littérature. La modélisation du courant de la foudre est étudiée suivant les modèles théoriques.

Enfin dans le sixième chapitre, on aborde les calculs des champs électromagnétiques rayonnés par le canal de la foudre d'une orientation quelconque. Le calcul des champs rayonnés est effectué, premièrement, par l'implémentation de la méthode FDTD. Une méthode hybride, FDTD analytique est ensuite réalisée, pour le même but de calcul.

Par manque de laboratoires spécialisés dans notre université, la validation de nos résultats sera accomplie par confrontation avec ceux obtenus dans certaines références établies.

C.4 – CONCLUSIONS & PERSPECTIVES

Les champs électromagnétiques rayonnés par le canal de la foudre sont calculés par des méthodes analytiques et numériques. Les méthodes analytiques ont l'inconvénient d'évaluer, numériquement, l'intégral de Sommerfeld. Le calcul de l'intégral de Sommerfeld nécessite un grand nombre de dipôles élémentaires le long du canal de la foudre et une large gamme de fréquence. Par contre, la méthode FDTD offre une simplicité de calcul et d'implémentation. Malgré sa simplicité d'implémentation, on rencontre des difficultés dans le cas où le volume de calcul est très grand. Ceci rend le temps de calcul énorme. Le problème est surmonté par l'hybridation de la méthode FDTD avec une méthode analytique. L'avantage de cette méthode nous permet d'éviter le maillage de tout le volume du calcul. Ainsi, on réduit le temps de calcul. Due aux manques des résultats expérimentaux (difficulté de prendre des mesures très proche du canal) concernant les champs proches au point d'impact de la foudre et plus, particulièrement, un canal d'orientation arbitraire, nous avons trouvé des difficultés à comparer nos résultats. Cependant, on a pu comparer nos résultats avec les résultats d'autres méthodes. L'inconvénient de cette méthode, est que la distance doit être très proche du canal et la validité de l'approximation est limitée à quelques mégahertz.

La nature du sol affecte les champs électromagnétiques, notablement. En effet, considérer le sol comme un conducteur parfait, annule le champ électrique horizontal. Le sol présente une impédance transitoire et dépendante de la fréquence. On sait que la composante verticale du champ électrique est, faiblement, affectée par la conductivité finie du sol. La composante horizontale est, remarquablement, affectée

par la nature du sol. La méthode FDTD a l'inconvénient de traiter la conductivité du sol comme étant constante.

La validation des résultats s'avère très difficile, soit avec des résultats empiriques ou théoriques. Parmi ces difficultés, on cite :

- Absence des résultats empiriques près du canal.
- Le canal de la foudre est considéré dans la littérature comme vertical.
- Dans le cas d'inclinaison, la forme de courant est pulsionnelle (carrée).

REFERENCES

- [1] - J. A. Stratton, « Théorie de l'électromagnétisme », traduit par J. Hebestreit Dunod, Paris, 1961.
- [2] - J. D. Jackson, « Classical electrodynamics », John Wiley & Sons. Ltd., 3^{ème} edition, USA, 1999.
- [3] - M. V. K. Chari, P. P. Silvester, « Finite elements in electrical and magnetic field problems », John Wiley & Sons. Ltd., USA, 1984.
- [4] - Encyclopaedia Britannica online, academic edition, “ www.britannica.com”.
- [5] - C. W. Steele, « Numerical computation of electric and magnetic fields », Van Nostrand Reinhold company, New York, USA, 1989.
- [6] - Constantine A. Balanis, « Advanced electromagnetic engineering », John Wiley & Sons, USA, 1989.
- [7] - William H. Hayt, Jr, John A. Buck, « Engineering electromagnetics », Mc Graw Hill, 6^{ème} edition, USA, 2001.
- [8] - Daniel Fleisch, « A student guide to Maxwell's equations », Cambridge University Press, UK, 2008.
- [9] - Friedrich W. Hehl, Yuri N. Obukhov, « Foundations of electrodynamics », 2001.
- [10] - Malek G. M. Hussain, « General solutions of Maxwell's equations for signals in a lossy medium Part 1: Electric and magnetic field strengths due to electric exponential ramp function excitation », IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility, Vol. 30, No 1, Feb. 1988.
- [11] - M. E. El-Shandwily, « Solutions of Maxwell's equations for general non periodic waves in lossy media », IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility, Vol. 30, No 4, Feb. 1988.
- [12] - David Voltmer, « fundamentals of electromagnetics 2: Quasi-statics and waves », M & C, 1^{ière} edition, USA, 2007.
- [13] - A. Taflove, Morris E. Brodwin, « Numerical solution of steady state electromagnetic scattering problems using the time dependant Maxwell's equations », IEEE Trans. on Microwave theory tech., Vol. 23, No: 4, Aout 1975.
- [14] - Benjamin Crowell, « Electricity and magnetism », Light & Matter, California, 2nd edition, USA, 2007.
- [15] - R. Fitzpatrick, « Maxwell's equations and the principal of electromagnetism », Infinity science press LLC, USA, 2008.
- [16] - M. N. O. Sadiku, « Numerical techniques in electromagnetics », CRC, USA, 2nd edition, 2001.
- [17] - Bo Thidé, « Electromagnetic field theory », Upsilon books, Uppsala, Sweden, 2002.

- [18] -Donald G. Dudley, « Mathematical foundations for electromagnetic theory », IEEE Press Series on Electromagnetic Waves, 1994.
- [19] -M. V. K. Chari, S. Solon, « Numerical methods in electromagnetics », Academic Press, USA, 2000.
- [20] -Arnold R. Krommer, Christoph W. Ueberhuber, « Computational integration », Siam Philadelphia, USA, 1998.
- [21] -P. G. Ciarlet, J. L. Lions, « Handbook of numerical analysis », Elsevier sciences B.V. 1991.
- [22] -O. C. Zienkiewicz, « The finite element method », McGraw-Hill, USA, 3^{ème} edition, 1977.
- [23] -Dragon Poljak, « Advanced modelling in computational electromagnetic compatibility », John Wiley & Sons, USA, 2007.
- [24] -Walton C. Gibson, « The method of moment in electromagnetics », Chapman and Hall/CRC, USA, 2008.
- [25] -Roger F. Harrington, « Field computation by moment methods », IEEE Press, 1992.
- [26] -Allen Taflove, Susan C. Hagness, « Computational electrodynamics. The finite difference time domain », Artech House, 2nd edition, USA, 2000.
- [27] -Karl S. Kunz, Raymond J. Luebbers, « The finite difference time domain for electromagnetics », CRC Press, USA, 1993.
- [28] -S. D. Mellin, « Design and analysis of finite aperture diffractive optical elements », PhD thesis, School of Graduate studies, the University of Alabama Huntsville, USA, 2001.
- [29] -Gang Liu, Craig A. Grimes, Keat G. Ong, « A method for FDTD computation of field values at spherical coordinate singularity points applied to antennas », Microwave and Optical Technology Letters, Vol. 20, No. 6, Mars 1999.
- [30] -A. Taflove, K. Umashankar, « A hybrid moment method/finite difference time domain approach to electromagnetic coupling and aperture penetration into complex geometries », IEEE Trans. on Antennas and propagation, Vol. AP-30, No. 4, Juillet 1982.
- [31] -A. Taflove, K. Umashankar, B. Beker, F. Harfoush, K. S. Yee, « Detailed FDTD analysis of electromagnetic fields penetrating narrow slots and lapped joints in thick conducting screens », IEEE Trans. on Antennas and propagation, Vol. AP-36, No. 2, Juillet 1988.
- [32] -S. Berntsen, S. N. Hornsleth, « Retarded time absorbing boundary conditions », IEEE Trans. on Antennas and propagation, Vol. AP-42, No. 8, Aout 1994.
- [33] -T. G. Moore, J. G. Blaschak, A. Taflove, G. A. Kreigsmann, « Theory and application of radiation boundary operators », IEEE Trans. on Antennas and propagation, Vol. AP-36, No. 12, Decembre 1988.
- [34] -C. D. Sharris, Linda P. B. Katehi, J. F. Harvey, « Mesh truncation methods for multiresolution time domain techniques », International Symposium on Antennas and Propagation, 0-7803-6369-8/00/\$10.00 2000.

- [35] -D. J. Robinson, J. B. Schneider, « On the use of the geometric mean in FDTD near-to-far-field transformations », IEEE Trans. on Antennas and propagation, Vol. AP-55, No. 11, Novembre 2007.
- [36] -G. Mur, « Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic-field equations », IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility, Vol. 23, No. 4, Nov. 1981.
- [37] -R. Mittra, O. Ramahi, A. Khebir, R. Gordon, A. Kouki, « A review of absorbing boundary conditions for two and three dimensional electromagnetic scattering problems », IEEE Trans. on Magnetics, Vol. 25, No. 4, Juillet 1989.
- [38] -J. Papet-Lépine, « La modélisation de la foudre », Lavoisier, France, 2005.
- [39] -Lars Vahlen, « Atmospheric electrostatics », John Wiley & Sons, Ltd., USA, 1989
- [40] -M. A. Uman, « Naturel lightning », IEEE Trans. on Industry Applications, Vol. 30, No. 3, May/Juin 1994.
- [41] -E. F. Vance, M. A. Uman, « Differences between lightning and nuclear pulse interactions », IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility, Vol. 30, No. 1, Fev. 1988.
- [42] -T. Horvath, « Understanding lightning and lightning protection », John Wiley & Sons, Ltd., USA, 2006.
- [43] -Y. Baba, M. Ishii, « Characteristics of electromagnetic return stroke models », IEEE Tran. Electromagnetic Compatibility, Vol. 45, No. 1, Fevrier 2003.
- [44] -Y. Baba, V.A. Rakov, « Applications of electromagnetic models of the lightning return stroke », IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 23, No. 3, Avril 2008.
- [45] -V. A. Rakov, M. A. Uman, « Review and evaluation of lightning return stroke models including some aspects of their application », IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility, Vol. 40, No. 4, Novembre 1998.
- [46] -Lightning & insulator subcommittee of the T&D committee, « Parameters of lightning strokes: A review », IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 20, No. 1, Janvier 2005.
- [47] -V. Amoruso, F. Lattarulo, « Remarks on lightning electromagnetics », Eng. Analysis with Boundary Elements, Elsevier, 2003.
- [48] -M. André Da F. Mattos, C. Christopoulos, « A non linear transmission line model of the lightning return stoke », IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility, Vol. 30, No. 3, Aout 1988
- [49] -Y. Baba, V. A. Rakov, « On the transmission line model for lightning return stroke representation », Geophysical Research Letters, Vol. 30, No. 24, 2003.
- [50] -Y. Baba, V. A. Rakov, « On the mechanism of attenuation of current waves propagating along a vertical perfectly conducting wire above ground: Application to lightning », IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility, Vol. 47, No. 3, Aout 2005.
- [51] -C. Gomes, V. Cooray, « Concepts of lightning return strokes », IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility, Vol. 42, No. 1, Fevrier 2000.

- [52] -R. Thottappillil, V. A. Rakov, « On different approaches to calculating lightning electric fields », *Journal of Geophysical Research*, Vol. 106, No. D13, Juillet 16, 2001.
- [53] -R. Thottappillil, V. A. Rakov, « Review of three equivalent approaches for computing electromagnetic fields from an extending lightning discharge », *Journal of Lightning Research*, Vol. 1, 2007.
- [54] -R. Moini, B. Kordi, G. Z. Rafi V. A. Rakov, « A new lightning return stroke model based on antenna theory », *Journal of Geophysical Research*, Vol. 105, No. D24, Decembre 27, 2000.
- [55] -M. Rubinstein, M. A. Uman, « Methods for calculating the electromagnetic fields from a known source distribution: Application to lightning », *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility*, Vol. 31, No. 2, May 1989.
- [56] -M. A. Uman, « The electromagnetic radiation from a finite antenna », *AJP*, Vol. 43/33, Janvier 1975.
- [57] -M. Rubinstein, M. A. Uman, « Transient electric and magnetic fields associated with establishing a finite electrostatic dipole, revisited », *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility*, Vol. 33, No. 4, Novembre 1991.
- [58] -P. Ratnamahilan P. Hoole, S. Ratnajeevan H. Hoole, « Computing transient electromagnetic fields radiated from lightning », *J. of Applied phys.* 61(8), 15 Avril 1987.
- [59] -P. R. Bannister, « The quasi-near fields of dipole antennas », *IEEE Trans. Antennas and propagation*, Vol. AP-15, No. 5, Septembre 1967.
- [60] -C. Yang, B. Zhou, « Calculation methods of electromagnetic fields very close to lightning », *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility*, Vol. 46, No. 1, Fevrier 2004.
- [61] -I. V. Lindell, E. Alanen, « Exact image theory for the Sommerfeld half space problem. Part II : Vertical electric dipole”, *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, Vol. AP-32, No. 8, Aout 1984.
- [62] -P. L. Tokarsky, V. V. Dolzhikov, « Simple approximate formulas for evaluating Sommerfeld type integrals », *VIIth International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Kharkov, Ukraine, MMET98*.
- [63] -I. V. Lindell, E. Alanen, « Exact image theory for the Sommerfeld half space problem. Part III : General Formulation », *IEEE Trans. on Antennas and propagation*, Vol. AP-32, No. 10, Octobre 1984.
- [64] -E. Petrache, M. Paolone, C. A. Nucci, V. A. Rakov, M. A. Uman, « Lightning induced disturbances in buried cables. Part I : Theory », *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility*, Vol. 47, No. 3, Aout 2005.
- [65] -Y. Baba, S. Miyazaki, M. Ishii, « Reproduction of lightning electromagnetic field waveforms by engineering model of return stroke », *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility*, Vol. 46, No. 1, Novembre 2004.
- [66] -A. Mimouni, F. Rachidi, Z. Azzouz, « Electromagnetic environment in the immediate vicinity of a lightning return stroke », *Journal of Lightning Research*, Vol. 2, 2007.

- [67] -T. X. Song, Y. H. Liu, J. M. Xiong, « Computations of electromagnetic fields radiated from complex lightning channels », *Progress in Electromagnetic Research*, PIER 73, 93-105, 2007.
- [68] -C. A. F. Satori, J. R. Cardoso, « An analytical FDTD method for near LEMP calculation », *IEEE Trans. Magnetics*, Vol. 36, No. 4, Juillet 2000.
- [69] -B. Kordi, R. Moini, F. Rachidi, « Modelling an inclined lightning return stroke using antenna theory », *Proc. International Zurich Symposium on Electromagnetic Compatibility*, Zurich, Switzerland, Fevrier 2001.
- [70] -H. K. Høidalen, « Analytical formulation of lightning induced voltages on multiconductor overhead lines above lossy ground », *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility*, Vol. 45, No. 1, fevrier 2003.
- [71] -M. Rubinstein, « An approximate formula for the calculation of the horizontal electric field from lightning at close, intermediate, and long range », *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility*, Vol. 38, No. 3, Aout 1996.
- [72] -L. Boukelkoul, S. Leulmi, H. Benalla, « A hybrid method for calculating very close electromagnetic fields due to inclined lightning strokes », *International conference on electrical engineering design & technologies, ICEEDT'07*, Hammamet, Tunisia, 2007.
- [73] -G. Lupo, C. Petrarca, V. Tucci, M. Vitelli, « EM fields generated by lightning channels with arbitrary location and slope », *IEEE Trans. on Electromagnetic compatibility*, Vol. 42, No. 1, Fevrier 2000.
- [74] - L. Boukelkoul, S. Leulmi, H. Benalla, « Effect of transient impedance of a lossy ground on horizontal electromagnetic fields due to inclined lightning strokes », *International Review of Electrical Engineering IREE*, Vol. 2 No. 6, Italy, Nov. Dec. 2007.
- [75] -H. K. Høidalen, J. Sletbak, T. Henriksen, « Ground effects on induced voltages from nearby lightning », *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility*, Vol. 39, No. 4, Novembre 1997.
- [76] -L. Boukelkoul, S. Leulmi, H. Benalla, « Review of closed form expressions for self and mutual transient ground impedance », *International Conference on Communication, Computer and Power, ICCCP09*, Muscat, Oman Sultanate, February 15-18, 2009.
- [77] -F. A. Rachidi, C. A. Nucci, M. Ianoz, « Transient analysis of multiconductor lines above a lossy ground », *IEEE Trans. on Power Delivery*, Vol. 14, No. 1, Jan. 1999.
- [78] -H. Y. Pao, « Exact closed form representation for the time domain surface impedance of a homogeneous lossy half space », *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, Vol. AP-52, No. 10, Octobre 2004.
- [79] -Zhong-kuo Zhao, Qi-Lin Zhang, « Influence of channel tortuosity on the lightning return stroke electromagnetic field in the time domain », *Atmospheric Research* 91, 404-409, 2009, Elsevier.
- [80] -D. Ruiz, C. Torralba, J. P. Marco, « A new concept in lightning parameters measurement », *Journal of Electrostatics* 67, 496-500, 2009, Elsevier.