

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE CONSTANTINE
INSTITUT D'ELECTRONIQUE

THESE DE MAGISTER ~~K~~

YAH
2973

THEME

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DES SYSTEMES
DYNAMIQUES NON LINEAIRES MODELISES
PAR L'EQUATION DE LANDAU GINZBURG**

présenté par:
YAHIA MOUSSA

~

Devant le jury:

BELARBI Khaled
BENSLAMIA Malek
BENMAMMED Khier
CHETOUANI Lyazid

M.C. à l'Univ de Cne
M.C. à l'Univ de Cne
M.C. à l'Univ de Setif
Professeur à l'Univ de Cne

Président
Rapporteur
Examineur
Examineur

23 - 04 - 1997

9

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE CONSTANTINE
INSTITUT D'ELECTRONIQUE

THESE DE MAGISTER ~~X~~

YAH
2973

THEME

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DES SYSTEMES
DYNAMIQUES NON LINEAIRES MODELISES
PAR L'EQUATION DE LANDAU GINZBURG**

présenté par:
YAHIA MOUSSA

~

Devant le jury:

BELARBI Khaled
BENSLAMIA Malek
BENMAMMED Khier
CHETOUANI Lyazid

M.C. à l'Univ de Cne
M.C. à l'Univ de Cne
M.C. à l'Univ de Setif
Professeur à l'Univ de Cne

Président
Rapporteur
Examineur
Examineur

23 - 04 - 1997

Table des matieres

Résumé	1
Introduction	3

Chapitre I

Generalités sur les systèmes dynamiques et définitions

1-Description d'un système dynamique par des équations différentielles	8
2-Systèmes linéaires	9
2-1-Définitions	9
2-2-point d'équilibre	11
3-Systèmes non-linéaires	11
3-1-Définitions	11
3-2-Stabilité	12
3-3-Systèmes discrets	13
3-3-1-Définition du point fixe	13
3-3-2-Localisation du point fixe	14
3-4-Carte de Poincaré	14
3-4-1-Définitions.....	14
3-4-1-1-Carte de Poincaré pour les systèmes non autonomes	14
3-4-1-2-Carte de Poincaré pour les systèmes autonomes	15
3-5-Cycles Limites	15
3-6-Bifurcation	17
3-7-Attracteur	17
4-Analyse d'un système dynamique non-linéaire	17
4-1-Localisation des points d'équilibres	18
4-1-1-Algorithmè de Newton-Raphson	18
4-1-2-Stabilité du point d'équilibre	19

Chapitre II

Solutions périodiques

1-Introduction	22
2-Normalisation et Stabilité linéaire	22
3-Stabilité de Lagrange	23
4-Solutions à cycle limite	27
5-Comparaison avec les solutions périodique exactes	29

Chapitre III

Limite cubique dans l'équation de Schrodinger

1-Introduction	36
2-L'équation cubique de Schrodinger	37
3-Critère de selection	39

4-Solution adaptées	40
4-1-Les conditions de périodicité	40
4-2-Critère de selection	40

Chapitre IV
Stabilité des solutions à cycle limite

1-Introduction	46
2-Solutions à cycle limite	46
3-Points d'équilibres	49
4-Stabilité	52
4-1-Stabilité des points d'équilibres	52
4-2- Stabilité des solutions périodiques	55
Conclusion	60
Bibliographie	62
Annexe	66

REMERCIEMENT

Je tiens à adresser mes sincères remerciements à toutes les personnes qui m'ont permis de mener à bien ce travail. Mes remerciements s'adressent tout d'abord à Monsieur Malek Benslama qui m'a proposé le sujet de cette thèse et m'a dirigé ce travail, je le remercie aussi de l'aide et du soutien inestimable qu'il m'a apporté

Je remercie Mr. K.BELARBI de me faire l'honneur de présider le Jury.

Je remercie Mr. Lyazid CHETOUANI d'avoir bien voulu participer au Jury.

Je remercie Mr. K.BENMAHAMED d'avoir bien voulu participer au Jury.

Je remercie Mon frère Ahcen de son aide matériel et moral.

Résumé

On présente dans cette thèse, une contribution à l'étude des systèmes dynamiques non-linéaires modélisés par l'équation de Landau-Ginzburg (L-G) pour donner une solution aux problèmes des instabilités. Nous considérons des solutions à cycle limite spatialement périodiques de (L-G), une approximation de la solution périodique est déterminée en série asymptotique d'un paramètre faible. cette solution est par la suite comparée avec la solution numérique exacte, par la suite nous discutons la limite cubique dans l'équation de Schrodinger depuis l'équation de (L-G).

Une discussion sur la stabilité linéaire des solutions périodiques est effectuée. Ceci nous ouvre le champ au traitement numérique. Un système de trois équations différentielles est élaboré, l'intégration numérique du système donne des solutions périodiques en utilisant la carte de Poincaré pour déterminer les points fixes et la méthode d'Henon pour se positionner exactement sur la surface de section de Poincaré. la stabilité linéaire de ces solutions périodiques est étudiée à travers l'examen de la matrice de Floquet obtenue à partir de l'équation variationnelle associée avec le système d'équation différentielles.

INTRODUCTION

INTRODUCTION

La variété des phénomènes observés dans la nature est une preuve de la multiplicité des systèmes évolutifs existants dans les différents domaines; parmi ces systèmes on peut citer les systèmes linéaires connus par leur simplicité d'évolution et d'analyse et les systèmes non linéaires beaucoup plus complexes mais beaucoup plus représentatif des phénomènes naturels.

Ces dernières années, le grand essor qu'a connu le domaine de l'informatique, a fait que les systèmes non linéaires sont de plus en plus utilisés pour modéliser les systèmes évolutifs.

En effet, l'existence d'outils informatiques puissants a permis la programmation des Algorithmes les plus complexes, et leur exécution en des temps très courts.

En automatisme, dans le contrôle et dans la commande des processus industrielles les techniques linéaires ont atteint leurs limites; Ceci d'une part. D'autre part, si on considère les phénomènes physiques leur nature fondamentale(en mécanique des fluides, dans la théorie du plasma) les questions les plus importantes demeurent sans solutions exacte, il est donc essentiel de considérer les phénomènes physiques ainsi que les applications qui en découlent sous forme non-linéaire.

Dans le cas du plasma, une équation fondamentale (équation non-linéaire de Boltzman) demeure sans solution exacte.

Notre premier objectif est d'introduire une discussion et un début de calcul qui peut mener à cette équation. En mécanique des fluides, une équation fondamentale est toujours utilisée (équation de Landau-Ginzburg). Le plasma est toujours un fluide, nous essayerons dans cette thèse d'aborder toutes les solutions possibles de l'équation de Landau-Ginzburg avec l'objectif de réappliquer ses solutions à l'équation de Boltzman.

L'équation de Landau-Ginzburg fait partie d'un ensemble mathématique qui mène vers des comportements stables, instables ou chaotique. C'est aussi notre second objectif. Nous commençons par donner un exposé historique sur cette équation.

En 1944, Landau [1] établit une conjecture sur des bases purement heuristiques que l'indépendance spatiale de l'amplitude d'une équation régissant le flux d'un fluide visqueux au nombre critique de Reynolds avait la forme:

$$A_t = \sigma_r A - \beta |A|^2 A \quad (\sigma_r \text{ réel}, \beta \text{ complexe}) \quad (1)$$

Une année plus tard, Stuart [2] montre que l'équation (1) est une forme correcte de l'amplitude de l'équation d'un flux de Poiseuille près du nombre critique de Reynolds. Une forme similaire développée par Watson [3] appelée équation de Stuart-Landau connue aussi sous l'appellation de l'équation des populations. Plus généralement, si on inclut une variation spatiale, alors l'équation (1) devient de la forme suivante:

$$A_t = \pm \sigma_r A - \beta |A|^2 A + \lambda \Delta A \quad (2)$$

avec σ_r réel, λ, β , complexe. Cette équation dépendante du temps est désignée par l'équation de Landau-Ginzburg. Elle est le prototype même de l'équation d'amplitude

régissant l'évolution d'un paquet d'ondes près du point critique des systèmes physiques instables [4]. Pour les problèmes de la convection de Benard, Newel et Whitehead [5] déterminent l'équation de Landau-Ginzburg qui les régissent avec cependant (β, λ) réel). Hocking, Stewartson et Stuart [6] ont montré que l'équation (L-G) résulte comme une équation de Landau-Stuart généralisée, lorsque la variation spatiale est incluse pour le cas d'un flux de Poiseuille avec β réel et λ complexe.

En 1975, Pavlick et Rowlands [7] déterminent l'équation de Landau-Ginzburg pour la propagations non linéaire des ondes dans les piézo-électriques semi conducteurs avec β complexe, λ imaginaire pur, près de la valeur critique d'un champ continu. Sous la condition limite $\sigma_1 = 0$, λ , β imaginaires purs, l'équation (L-G) se réduit à l'équation cubique de Schrodinger pour les ondes en eau profondes. Elle est aussi déterminée comme une approximation en champ lointain des systèmes dispersifs décrivant l'amplitude des ondes quasi monochromatiques dans une large variété de problèmes de la physique [8--12].

Plus récemment, l'équation (L-G) a été le point de focalisation de plusieurs études numériques sur la transition vers le chaos. Kuramoto [13] dans le contexte du chaos induit dans la diffusion des systèmes chimiques a étudié l'équation (2). La question fondamentale qu'il s'est posée, est la suivante: Quel est l'effet d'une inhomogénéité spatiale sur un milieu oscillant? Il discute deux types de comportement distincts: la phase de la turbulence et l'amplitude de la turbulence. Dans le contexte de l'amplitude de la turbulence, il intègre numériquement l'équation (L-G), et note la présence de bifurcations successives lorsque la diffusion diminue. Ces travaux furent le prélude à d'autres recherches initiées par Moon,

réglissant l'évolution d'un paquet d'ondes près du point critique des systèmes physiques instables [4]. Pour les problèmes de la convection de Benard, Newel et Whitehead [5] déterminent l'équation de Landau-Ginzburg qui les régit avec cependant (β, λ réel). Hocking, Stewartson et Stuart [6] ont montré que l'équation (L-G) résulte comme une équation de Landau-Stuart généralisée, lorsque la variation spatiale est incluse pour le cas d'un flux de Poiseuille avec β réel et λ complexe.

En 1975, Pavlick et Rowlands [7] déterminent l'équation de Landau-Ginzburg pour la propagation non linéaire des ondes dans les piézo-électriques semi conducteurs avec β complexe, λ imaginaire pur, près de la valeur critique d'un champ continu. Sous la condition limite $\sigma_r = 0$, λ , β imaginaires purs, l'équation (L-G) se réduit à l'équation cubique de Schrodinger pour les ondes en eau profondes. Elle est aussi déterminée comme une approximation en champ lointain des systèmes dispersifs décrivant l'amplitude des ondes quasi monochromatiques dans une large variété de problèmes de la physique [8--12].

Plus récemment, l'équation (L-G) a été le point de focalisation de plusieurs études numériques sur la transition vers le chaos. Kuramoto [13] dans le contexte du chaos induit dans la diffusion des systèmes chimiques a étudié l'équation (2). La question fondamentale qu'il s'est posée, est la suivante: Quel est l'effet d'une inhomogénéité spatiale sur un milieu oscillant? Il discute deux types de comportement distincts: la phase de la turbulence et l'amplitude de la turbulence. Dans le contexte de l'amplitude de la turbulence, il intègre numériquement l'équation (L-G), et note la présence de bifurcations successives lorsque la diffusion diminue. Ces travaux furent le prélude à d'autres recherches initiées par Moon,

Huerre, Redekopp[14,15], Nozaki et Bekki [16], Bretherton, Spiegel [17], et Keefe[18].

La question fondamentale que nous considérons est similaire à celle de Kuramoto. Nous considérons en effet, des solutions à cycle limite spatialement périodiques de (L-G). Ceci est la première transition qui résulte lorsque un milieu oscillant est perturbé par une inhomogénéité spatiale périodique. Une approximation de la solution périodique est déterminée en série asymptotique d'un paramètre faible. Cette solution est par la suite comparée avec la solution numérique exacte. Par la suite nous discutons la limite cubique dans l'équation de Schrodinger depuis l'équation (L-G), les solutions approximatives sont reliées de manière naturelle à la fonction Elliptique de Jacobi solution de l'équation cubique de Schrodinger.

Une discussion sur la stabilité linéaire des solutions périodiques est effectuée. Ceci nous ouvre le champ au traitement numérique des questions précédemment posées. Un système d'équations différentielles est élaboré, il régit la périodicité spatiale, et donne des solutions séparables de l'équation (L-G). L'intégration numérique du système donne des solutions périodiques exactes. La stabilité linéaire de ces solutions périodiques est étudiée à travers l'examen de la matrice de Floquet obtenue à partir de l'équation variationnelle associée avec ces solutions périodiques.

Huerre, Redekopp[14,15], Nozaki et Bekki [16], Bretherton, Spiegel [17],et Keefe[18].

La question fondamentale que nous considérons est similaire à celle de Kuramoto. Nous considérons en effet, des solutions à cycle limite spatialement périodiques de (L-G). Ceci est la première transition qui résulte lorsque un milieu oscillant est perturbé par une inhomogénéité spatiale périodique. Une approximation de la solution périodique est déterminée en série asymptotique d'un paramètre faible. Cette solution est par la suite comparée avec la solution numérique exacte. Par la suite nous discutons la limite cubique dans l'équation de Schrodinger depuis l'équation (L-G), les solutions approximatives sont reliées de manière naturelle à la fonction Elliptique de Jacobi solution de l'équation cubique de Schrodinger.

Une discussion sur la stabilité linéaire des solutions périodiques est effectuée. Ceci nous ouvre le champ au traitement numérique des questions précédemment posées. Un système d'équations différentielles est élaboré, il régit la périodicité spatiale, et donne des solutions séparables de l'équation (L-G). L'intégration numérique du système donne des solutions périodiques exactes. La stabilité linéaire de ces solutions périodiques est étudiée à travers l'examen de la matrice de Floquet obtenue à partir de l'équation variationnelle associée avec ces solutions périodiques.

CHAPITRE I
GENERALITES SUR LES SYSTEMES DYNAMIQUES ET
DEFINITIONS

1-Description d'un système dynamique par des équations différentielles

Parmi, les systèmes évolutifs rencontrés dans les différents domaines, les systèmes dynamiques décrits par des équations différentielles ordinaires à variables réelles, occupent une place très importante. Ainsi, le modèle mathématique qui décrit une large variété des systèmes du $n^{\text{ème}}$ ordre est de la forme suivante[19]:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = h \left[t, y(t), \dot{y}(t), \dots, \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \right] \quad t \geq 0 \quad \text{I-(1)}$$

En posant :

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$

$$x_n(t) = \frac{dy^{n-1}(t)}{dt^{n-1}}$$

L'équation I-(1) peut alors s'écrire sous la forme d'un système d'équations du premier ordre.

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t)$$

$$\dot{x}_n(t) = h[t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$$

I-(2)

Ce qui donne les systèmes d'équations différentielles définis par I-(3) ou I-(4)

1-Description d'un système dynamique par des équations différentielles

Parmi, les systèmes évolutifs rencontrés dans les différents domaines, les systèmes dynamiques décrits par des équations différentielles ordinaires à variables réelles, occupent une place très importante. Ainsi, le modèle mathématique qui décrit une large variété des systèmes du n^{ème} ordre est de la forme suivante[19]:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = h \left[t, y(t), \dot{y}(t), \dots, \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \right] \quad t \geq 0 \quad \text{I-(1)}$$

En posant :

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$

$$x_n(t) = \frac{dy^{n-1}(t)}{dt^{n-1}}$$

L'équation I-(1) peut alors s'écrire sous la forme d'un système d'équations du premier ordre.

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t)$$

$$\dot{x}_n(t) = h[t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$$

I-(2)

Ce qui donne les systèmes d'équations différentielles définis par I-(3) ou I-(4)

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad i=1,2,\dots,n \quad \text{I-(3)}$$

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad i=1,2,\dots,n \quad \text{I-(4)}$$

Dans I-(3), la variable qui représente le temps, n'intervient pas explicitement, le système est alors dit système autonome. Par contre, dans I-(4), ce n'est pas le cas et le système est dit non autonome.

Les conditions suivantes:

$$x_i(t_0) = x_{i0} \quad i=1,2,\dots,n \quad \text{I-(5)}$$

sont les coordonnées du point initial M_0 . Les solutions $x_i(t)$ de I-(3) et I-(4) définissent une courbe passant par M_0 appelé trajectoire. Chaque point $M(t)$ de la trajectoire définit l'état du système dynamique décrit par I-(3) ou I-(4). On peut ainsi suivre l'évolution du système dans le temps à partir de l'état initial.

2- Systèmes linéaires

2-1 Définitions

Définition 1 :

Un système est linéaire si la relation entre les grandeurs d'entrée et / ou les grandeurs de sortie est un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants[20].

L'hypothèse de linéarité a pour conséquence le principe de superposition: La réponse $y(t)$ d'un système linéaire produite par différents signaux d'entrées $\alpha_1 x_1(t)$, $\alpha_2 x_2(t)$, ..., $\alpha_n x_n(t)$ agissant simultanément, est égale à la somme des réponses produites par chacun des signaux agissant séparément [21]. L'équation différentielle linéaire à coefficients constants décrivant le comportement du système linéaire, c'est à dire la relation entrée-sortie a la forme générale:

$$x_1(t) = C_1 \alpha_{11} e^{\lambda_1 t} + C_2 \alpha_{12} e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n \alpha_{1n} e^{\lambda_n t}$$

$$x_2(t) = C_1 \alpha_{21} e^{\lambda_1 t} + C_2 \alpha_{22} e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n \alpha_{2n} e^{\lambda_n t}$$

$$x_n(t) = C_1 \alpha_{n1} e^{\lambda_1 t} + C_2 \alpha_{n2} e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n \alpha_{nn} e^{\lambda_n t} \quad \text{I-(9)}$$

$C_i, i=1, 2, \dots, n$: sont les constantes d'intégration déterminées par les conditions initiales $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$, et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, sont données par les solutions particulières.

2-2 Point d'équilibre

Un point O défini par les coordonnées $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ est dit point d'équilibre si

$$\begin{cases} \dot{x}_1^* = 0 \\ \dot{x}_2^* = 0 \\ \vdots \\ \dot{x}_n^* = 0 \end{cases} \quad \forall t \geq 0 \quad \text{I-(10)}$$

3- systèmes non-linéaires

3-1 Définitions

Un système non-linéaire d'ordre n peut-être décrit par les équations différentielles:

$$\begin{aligned}
 b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) &= \delta \\
 a_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{de(t)}{dt} + a_0 e(t) &
 \end{aligned}
 \tag{I-6}$$

Définition 2 :

Un système linéaire est décrit par un modèle mathématique dont les équations différentielles sont linéaires:

$$\begin{cases}
 \dot{x}_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\
 \dot{x}_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \\
 \vdots \\
 \dot{x}_n = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n
 \end{cases}
 \tag{I-7}$$

ou sous une forme condensée:

$$\dot{x} = Ax
 \tag{I-8}$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

La solution générale du système I-(8) est obtenue à partir des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, solutions de l'équation caractéristique (valeurs propres de la matrice A). La forme de la solution est comme suit:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad \text{I-(11)}$$

Avec les conditions initiales $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$.

Les f_i $i = 1, 2, \dots, n$ sont des fonctions non linéaires telle que le système d'équations I-(11) ne peut être ramené sous la forme d'un système linéaire. Les solutions de I-(11),

$$\begin{cases} X_1 = x_1(t, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \\ X_2 = x_2(t, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \\ \vdots \\ X_n = x_n(t, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \end{cases} \quad \text{I-(12)}$$

Peuvent être définies par des développements en série convergentes ou par des méthodes numériques.

A l'inverse du cas linéaire, le système non linéaire I-(11), peut admettre plusieurs points d'équilibres. Ces points d'équilibres sont définis par:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = \dots = \frac{dx_n}{dt} = 0 \quad \text{I-(13)}$$

C'est à dir les solutions des équations:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{I-(14)}$$

3-2 Stabilité

Définitions:

Un point d'équilibre est dit Stable, si pour tout λ petit, il existe $\delta > 0$ tel que tout point d'équilibre $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ vérifiant

$x_{10}^2 + x_{20}^2 + \dots + x_{n0}^2 < \lambda$ entraîne $x_1^2(t) + x_2^2(t) + \dots + x_n^2(t) < \delta$ pour t suffisamment grand.

-Dans le cas contraire le point est instable

-Si on plus de la stabilité on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_1^2(t) + x_2^2(t) + \dots + x_n^2(t)) = 0$$

Alors le point d'équilibre est dit asymptotiquement stable. Si δ est infiniment petit, on dit qu'on a une stabilité locale, par contre, s'il est suffisamment grand on parle de stabilité globale.

3-3 Systemes discrets

Chaque Application $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie un système dynamique discret par l'équation d'état:

$$x_{k+1} = P(x_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad I-(15)$$

ou $x_k \in \mathbb{R}^n$ est l'état et P transforme l'état x_k vers le prochain état x_{k+1} . Partant avec une condition initiale x_0 , et l'application P génère une séquence de points $\{x_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$, nommée orbite ou trajectoire.

3-3-1 Définition du point fixe

On appelle point fixe x^* , un point tel que:

$$x_k = x_{k+1} \quad I-(16)$$

L'abscisse x^* d'un point fixe, correspond à l'une des solutions pour l'équation:

$$\dot{x} = P(x) \quad I-(17)$$

Pour les systèmes non-linéaires on peut avoir en générale plusieurs points fixes.

3-3-2 Localisation des points fixes

La localisation d'un point fixe revient à la détermination des racines de l'équation I-(17), pour cela on utilise l'algorithme de Newton-Raphson.

3-4 Carte de Poincaré

La technique classique pour l'analyse des systèmes dynamiques a été initiée par Poincaré[22]. Elle remplace le flux d'un système dynamique continue d'ordre n par un système discret d'ordre $(n-1)$. Cette technique est connue comme la carte de Poincaré. L'utilité de la carte de Poincaré provient de la réduction de l'ordre et l'existence d'une correspondance "une à une" entre les systèmes dynamiques continues et discrets; c'est à dire au lieu d'analyser toute la trajectoire, il suffit d'analyser juste quelques points de la trajectoire; donc ça devient discret.

3-4-1 définitions

La définition de la carte de Poincaré est différente selon les systèmes autonomes et les systèmes non-autonomes. On présente les deux cas séparément.

3-4-1-1 Carte de Poincaré pour les systèmes non-autonomes

Un système non-autonome d'ordre n périodique dans le temps peut être transformé en un système autonome d'ordre $(n+1)$ dans un espace d'état cylindrique $\mathbb{R}^n \times S^1$.

Soit le plan $\Sigma \in \mathbb{R}^n \times S^1$ définie par

$$\Sigma := \{(\mathbf{x}, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1 : \theta = \theta_0\}. \quad \text{I-(18)}$$

La trajectoire émanant par un point se situe sur le plan Σ , après T secondes, la trajectoire I-(12) va couper Σ au point $P_N(\mathbf{x})$ (Fig. I-1).

De cette manière, on définit une application:

$$\begin{aligned} P_N : \Sigma &\rightarrow \Sigma (\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n) \\ P_N(\mathbf{x}) &:= \Phi_{t_0+T}(\mathbf{x}, t_0). \end{aligned} \quad \text{I-(19)}$$

P_N définit la carte de Poincaré pour les systèmes non-autonomes.

3-4-1-2 Carte de Poincaré pour les systèmes autonomes

Soit Σ le plan transversal au flux $\phi_t(\mathbf{x})$ de la trajectoire solution de l'équation:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \text{I-(20)}$$

La carte de Poincaré est définie comme étant l'ensemble des points se trouvant dans un voisinage $U \subset \Sigma$ du point \mathbf{x}^* ; point d'intersection du cycle limite Γ (Fig I-2) avec la surface du plan Σ .

-soit \mathbf{x} un point dans un voisinage de \mathbf{x}^* ; la carte de Poincaré :

$P_A : \Sigma \rightarrow \Sigma$ est définie par

$$P_A(\mathbf{x}) = \phi_T(\mathbf{x}) \quad \text{I-(21)}$$

3-5 Cycles limites

Pour les système dynamiques non linéaires [23], en général, on a un nombre fini de solutions périodiques. Chaque solution correspond dans le plan de phase a une courbe fermé appelée cycle limite. Les trajectoires définissent des spirales qui tendent vers cette courbe quand $t \rightarrow \infty$ ou qui s'en éloignent.

$$\Sigma := \{(\mathbf{x}, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1 : \theta = \theta_0\}. \quad \text{I-(18)}$$

La trajectoire émanant par un point se situe sur le plan Σ , après T secondes, la trajectoire I-(12) va couper Σ au point $P_N(\mathbf{x})$ (Fig. I-1).

De cette manière, on définit une application:

$$\begin{aligned} P_N: \Sigma &\rightarrow \Sigma (\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n) \\ P_N(\mathbf{x}) &:= \Phi_{t_0+T}(\mathbf{x}, t_0). \end{aligned} \quad \text{I-(19)}$$

P_N définit la carte de Poincaré pour les systèmes non-autonomes.

3-4-1-2 Carte de Poincaré pour les systèmes autonomes

Soit Σ le plan transversal au flux $\phi_t(\mathbf{x})$ de la trajectoire solution de l'équation:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \text{I-(20)}$$

La carte de Poincaré est définie comme étant l'ensemble des points se trouvant dans un voisinage $U \subset \Sigma$ du point \mathbf{x}^* ; point d'intersection du cycle limite Γ (Fig I-2) avec la surface du plan Σ .

-soit \mathbf{x} un point dans un voisinage de \mathbf{x}^* ; la carte de Poincaré :

$P_A: \Sigma \rightarrow \Sigma$ est définie par

$$P_A(\mathbf{x}) = \phi_T(\mathbf{x}) \quad \text{I-(21)}$$

3-5 Cycles limites

Pour les systèmes dynamiques non linéaires [23], en général, on a un nombre fini de solutions périodiques. Chaque solution correspond dans le plan de phase à une courbe fermée appelée cycle limite. Les trajectoires définissent des spirales qui tendent vers cette courbe quand $t \rightarrow \infty$ ou qui s'en éloignent.

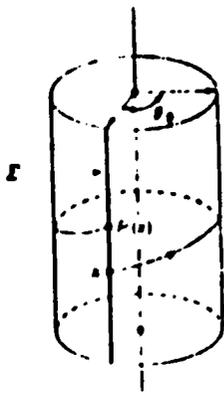


Fig 1-1 Carte de Poincaré pour un systèmes non-autonome

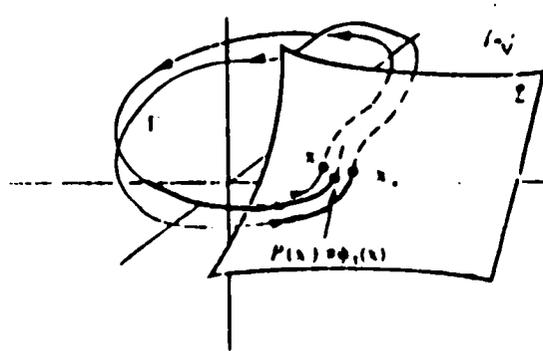


Fig 1-2: Carte de poincaré pour un système autonome

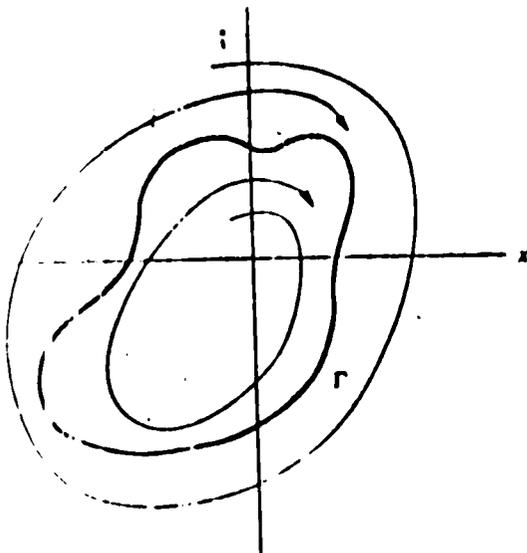


Fig 1-3: Cycle limite stable

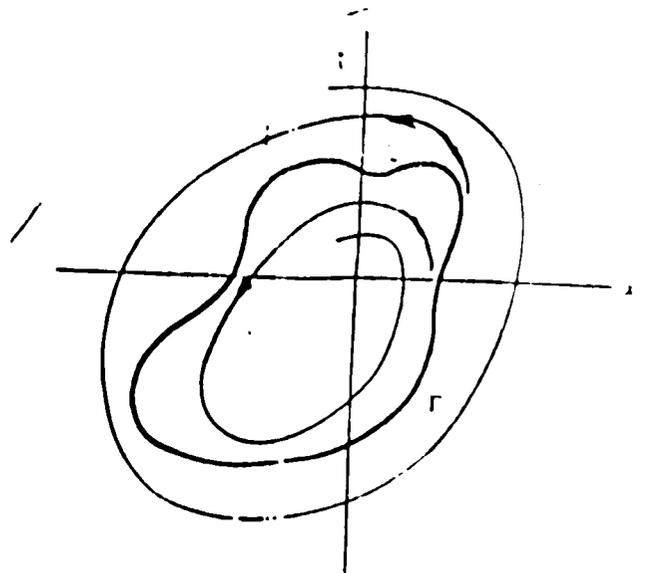


Fig 1-4: Cycle limite instable

Si la trajectoire tend vers la courbe fermée quand $t \rightarrow \infty$, on a un cycle limite stable (Fig I-3), si elle s'en éloigne le cycle limite est instable.

On peut également avoir le cas où d'un côté les trajectoires tendent vers la courbe fermée quand $t \rightarrow \infty$ et d'un côté elles s'en éloignent. Dans ce cas, on parle de cycle limite semi-stable [24].

3-6 Bifurcation

On parle de Bifurcation, si pour certaines valeurs prises par un paramètre apparaissant dans les équations définissant le système, le comportement de la solution est différent.

La valeur frontière entre ces deux comportements est appelé valeur de bifurcation du système et le paramètre paramètre de bifurcation[22].

Ainsi, un point de bifurcation peut correspondre à la création ou à la disparition d'un cycle limite ainsi que le changement du type de stabilité de ce cycle limite.

3-7 Attracteur

Un attracteur est un point ou ensemble de points dans le plan de phase qu'une orbite ou trajectoire tendent à approcher.

On définit, également un bassin d'attraction comme étant l'ensemble des points du plan de phase, caractérisant le système dynamique tel que pour des conditions initiales choisies dans ce bassin d'attraction la solution évolue vers un attracteur particulier

4 Analyse d'un système dynamique non linéaire

L'étape préliminaire dans l'analyse d'un système consiste entre autre en:
La localisation des points d'équilibres, et des points fixes (pour les solutions à cycle limite), l'étude de la stabilité du système et le calcul de la trajectoire.

4-1 Localisation des points d'équilibres

La localisation des points d'équilibres d'un système dynamique non-linéaire définit par le système d'équations:

$$\dot{x} = f(x, t) \quad f, x \in \mathbb{R}^n \quad \text{I-(22)}$$

revient à résoudre:

$$f(x, t) = 0 \quad \text{I-(23)}$$

C'est donc un problème de résolution d'un système non linéaire de 'n' équation à 'n' inconnues.

Parmi les nombreux algorithmes de résolutions de tels systèmes:
L'algorithme de Newton-Raphson.

4-1-1 Algorithme de Newton-Raphson

En posant:

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

et

$$f = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$$

L'algorithme de Newton-Raphson, consiste à faire les itérations suivantes:

$$x_{k+1} = x_k - J_k^{-1} \cdot f_k \quad \text{I-(24)}$$

Avec J est la matrice Jacobien (la matrice des dérivées partielles):

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \text{I-(25)}$$

et k: L'indice d'itération.

Partant d'un point initial $x_0 = [x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}]^T$ se situant dans un proche voisinage de la solution, le processus itératif est répété, jusqu'à ce que l'on trouve un point d'équilibre d'abscisse x_{eq}^*

$$x_{eq}^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*] \quad \text{I-(26)}$$

vérifiant $f(x_{eq}^*) < \varepsilon$ (ε tolérance choisie par l'utilisateur)

La puissance de cet algorithme réside dans sa très grande vitesse de convergence. Par contre, les inconvénients de cette méthode itérative sont:

- **Le choix des valeurs initiales** : Les valeurs initiales doivent être choisies au voisinage de la solution.
- **La nature du Jacobien** : La nature des dérivées partielles doit être définie positive.

4-1-2 Stabilité du point d'équilibre

L'algorithme de Newton-Raphson, consiste à faire les itérations suivantes:

$$x_{k+1} = x_k - J_k^{-1} \cdot f_k \quad \text{I-(24)}$$

Avec J est la matrice Jacobien (la matrice des dérivées partielles):

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \text{I-(25)}$$

et k: L'indice d'itération.

Partant d'un point initial $x_0 = [x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}]^T$ se situant dans un proche voisinage de la solution, le processus iteratif est répété, jusqu'à ce que l'on trouve un point d'équilibre d'abscisse x_{∞}^*

$$x_{\infty}^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*] \quad \text{I-(26)}$$

vérifiant $f(x_{\infty}^*) < \varepsilon$ (ε tolérance choisie par l'utilisateur)

La puissance de cet algorithme réside dans sa très grande vitesse de convergence. Par contre, les inconvénients de cette méthode itérative sont:

- **Le choix des valeurs initiales** : Les valeurs initiales doivent être choisies au voisinage de la solution.
- **La nature du Jacobien** : La nature des dérivées partielles doit être définie positive.

4-1-2 Stabilité du point d'équilibre

Considérons un point d'équilibre $x_{e,q}$ de I-(11). Pour analyser le comportement du système au voisinage du point d'équilibre $x_{e,q}$ (comportement local), on doit linéariser f au point d'équilibre $x_{e,q}$:

posant

$$x = x_{e,q} + \delta x \quad \text{I-(27)}$$

$$\dot{x} = f(x) \Rightarrow \dot{x}_{e,q} + \delta \dot{x} = f(x_{e,q} + \delta x) \quad \text{I-(28)}$$

Développant la fonction f en série de Taylor (1^{er} ordre):

$$f(x_{e,q} + \delta x) = f(x_{e,q}) + Df(x_{e,q}) \cdot \delta x \quad \text{I-(29)}$$

alors, en particulier:

$$\delta \dot{x} = Df(x_{e,q}) \cdot \delta x \quad \text{I-(30)}$$

avec Df est la matrice Jacobienne (matrice des dérivées partielles de f)

donc l'analyse du comportement d'un système non- linéaire au point d'équilibre devient similaire à l'analyse d'un système linéaire.

La stabilité du point d'équilibre est déterminée grâce aux valeurs propres λ_i du Jacobien $Df(x_{e,q})$.

- Si la partie réelle des valeurs propres est négative ($\text{Re}[\lambda_i < 0]$) pour tout λ_i ; alors $x_{e,q}$ est un point asymptotiquement stable. c'est à dir toute perturbation tend vers zéro quand $t \rightarrow \infty$.

-Si la partie réelle des valeurs propres est positive ($\text{Re}[\lambda_i > 0]$) pour tout λ_i ; alors $x_{e,q}$ est un point instable; car toute perturbation va croître avec le temps.

Considérons un point d'équilibre $x_{e,q}$ de I-(11). Pour analyser le comportement du système au voisinage du point d'équilibre $x_{e,q}$ (comportement local), on doit linéariser f au point d'équilibre $x_{e,q}$:

posant

$$x = x_{e,q} + \delta x \quad \text{I-(27)}$$

$$\dot{x} = f(x) \Rightarrow \dot{x}_{e,q} + \delta \dot{x} = f(x_{e,q} + \delta x) \quad \text{I-(28)}$$

Développant la fonction f en série de Taylor (1^{er} ordre):

$$f(x_{e,q} + \delta x) = f(x_{e,q}) + Df(x_{e,q}) \cdot \delta x \quad \text{I-(29)}$$

alors, en particulier:

$$\delta \dot{x} = Df(x_{e,q}) \cdot \delta x \quad \text{I-(30)}$$

avec Df est la matrice Jacobienne (matrice des dérivées partielles de f)

donc l'analyse du comportement d'un système non-linéaire au point d'équilibre devient similaire à l'analyse d'un système linéaire.

La stabilité du point d'équilibre est déterminée grâce aux valeurs propres λ_i du Jacobien $Df(x_{e,q})$.

- Si la partie réelle des valeurs propres est négative ($\text{Re}[\lambda_i < 0]$) pour tout λ_i ; alors $x_{e,q}$ est un point asymptotiquement stable. c'est à dire toute perturbation tend vers zéro quand $t \rightarrow \infty$.

- Si la partie réelle des valeurs propres est positive ($\text{Re}[\lambda_i > 0]$) pour tout λ_i ; alors $x_{e,q}$ est un point instable; car toute perturbation va croître avec le temps.

-Si on a des valeurs propres à partie réelle positive ($\text{Re}[\lambda_i > 0]$) et des valeurs propres à partie réelle négative ($\text{Re}[\lambda_i < 0]$); le point d'équilibre $x_{e,q}$ est non stable.

La distinction entre instable et non stable sert dans le cas d'une étude des systèmes dynamiques. Dans le cas inverse, un point instable devient asymptotiquement stable, et un point non stable reste non stable.

CHAPITRE II
SOLUTIONS PERIODIQUES

1: INTRODUCTION

Les études numériques récentes sur la transition vers le chaos sont focalisées sur l'équation de (L-G) [15--20,26],

$$A_x - (\lambda_r + i\lambda_i)A_{xx} = \sigma_r A - (\beta_r + i\beta_i)|A|^2 A \quad \text{II-(1)}$$

Ici $\lambda_r, \lambda_i, \sigma, \beta_r, \beta_i$ représentent des quantités réels. Cette équation a été déterminée comme une équation d'amplitude ou d'enveloppe d'une onde régissant les solutions des paquets d'ondes dans les différents problèmes de la stabilité des fluides pour chaque paramètre externe [7,8,27,28,29]. A la limite ($\sigma = 0, \lambda_r = 0, \lambda_i = 1, \beta_r = 0$) cette équation devient l'équation cubique de Schrodinger (pour les ondes en eau profonde) qui est déterminée l'intervalle lointain pour les systèmes dispersifs décrivent l'équation d'amplitude des ondes quasi-monochromatiques dans les problèmes de la physique [12,14,30,31].

Il est trivial de constatée que l'équation (II-(1)) possède une solution uniforme dans l'espace, cette solution est sinusoidale dans le temps et elle est connue comme la solution de Stokes. Des considérations élémentaires montrent que cette solution est instable pour les perturbations périodiques. L'effet est lié directement à la source désigné (instabilité de bord de bande) [30,32,33].

2: NORMALISATION ET STABILITE LINEAIRE

Si II-(1) est normalisée comme

$$t' = \lambda_i |\sigma_r / \lambda_r| t, \quad x' = |\sigma_r / \lambda_r| x, \quad A' = |\beta_r / \sigma_r|^{1/2} A \quad \text{II-(2)}$$

On obtient

$$iA'_t + (1 - ic_0)A'_{xx} = ic_0 A' - (c_1 + ic_0)|A'|^2 A' \quad \text{II-(3)}$$

avec

$$c_0 = |\lambda_r|/\lambda_i, \quad c_1 = -\beta_r|\lambda_r| / |\beta_i|\lambda_i. \quad \text{II-(4)}$$

Pour simplifier on suppose $\lambda_r, \sigma_r, \beta_r, \lambda_i, -\beta_i$ positives. Une seconde normalisation est donnée par:

$$t'' = c_1 t', \quad x'' = x' (c_1)^{1/2} \quad \text{II-(5)}$$

dans ce cas II-(3) devient :

$$iA_t + (1-ic_0)A_{xx} = ic_0/c_1 A - (1+ic_0/c_1)|A|^2 A \quad \text{II-(6)}$$

Cette dernière équation est satisfait par la solution de Stokes:

$$A = \exp(it) \quad \text{II-(7)}$$

Si la solution de stokes II-(7) est perturbée par une perturbation périodique dans l'espace de longueur d'onde $L = 2\pi/q$ ceci implique que II-(7) est linéairement stable à moins que [34].

$$q^2 < \frac{2(1-c_0^2/c_1)}{(1-c_0^2)} = q_0^2 \quad \text{II-(8)}$$

(La courbe typique de q_0 est montré dans la figure II-1).

on pose

$$\varepsilon^2 = q^2 - q_0^2 \quad \text{II-(9)}$$

3: STABILITE DE LAGRANGE

En considération de l'instabilité de II-(7) selon les perturbations périodiques, nous examinons maintenant les conséquences de la croissances temporelle. Pour spécifier on introduit l'énergie:

$$I = \int_0^L |A(x, t)|^2 dx = \|A\|_2^2 \quad \text{II-(10)}$$

et on considère le cas de la croissance,

$$\frac{\partial I}{\partial t} \geq 0 \quad \text{II-(11)}$$

La forme énergétique de II-(6) est obtenue en multipliant elle même par le conjugué A^* et intégrant sur la période, L . Ceci dégage

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -2c_0 Q I + \frac{2c_0}{c_1} I - 2 \frac{2c_0}{c_1} \int_0^L |A|^4 dx \quad \text{II-(12)}$$

avec

$$Q = \int_0^L |A_x|^2 dx / I \quad \text{II-(13)}$$

est le rapport de Rayleigh. nous montrons que le dernier terme de II-(12), est satisfait par l'inégalité de Schwarz, resultat qui sera utilisé par la suite.

$$\int_0^L |A|^4 dx \geq I^2 / L \quad \text{II-(14)}$$

A travers une séries de lemmes on peut montrer que II-(11) garde

$$\|A\|_\infty^2 = \max_{0 \leq x \leq L} |A(x, t)|^2 < K \quad \text{II-(15)}$$

pour tout $t \geq 0$ où K est constant. Si II-(15) a une solution alors ce dernier est vérifiée la stabilité de Lagrange [35].

On commence la démonstration par,

lemme 1.[35] Dans la région de paramètre où II-(11) est satisfaite on a :

$$I(t) < L \quad \text{II-(16)}$$

et

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} \leq \frac{Lc_0}{2c_1} \quad \text{II-(17)}$$

Preuve: De II-(12) et le fait que I et Q sont tous les deux non négatives

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} \leq \frac{2c_0}{c_1} I - \frac{2c_0}{c_1} \int_0^L |A|^2 dx \quad \text{II-(18)}$$

Par conséquent de II-(14)

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} \leq I \left[\frac{2c_0}{c_1} - \frac{2c_0}{c_1 L} I \right] \quad \text{II-(19)}$$

et par la suite on peut déduire directement II-(17), ensuite avec l'hypothèse:

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} \geq 0$$

on a

$$I \left[\frac{2c_0}{c_1} - \frac{2c_0}{c_1 L} I \right] \geq 0. \quad \text{II-(20)}$$

ceci nous donne II-(16)

lemme 2.[35]: Pour la région de paramètre où II-(11) est satisfaite le rapport de Rayleigh reste limité:

$$Q(t) \leq 1/c_1 \quad \text{II-(21)}$$

et de plus

$$\max_{0 < x < L} |A(x, t)|^2 \leq L \left(\frac{1}{L} + \frac{2}{\sqrt{c_1}} \right) \quad \text{II-(22)}$$

pour $t > 0$

preuve: A chaque instant, soit x_0 le point pour laquelle $|A(x, t)|^2$ prend sa valeur minimum. considérons:

$$A^2(x, t) = A^2(x_0, t) + 2 \int_{x_0}^x AA_x dx \quad \text{II-(23)}$$

donc

$$|A(x, t)|^2 \leq A^2(x_0, t) + 2 \int_{x_0}^x |AA_x| dx \quad \text{II-(24)}$$

on observe aussi

$$|A(x_0, t)|^2 = \frac{1}{L} \int_0^L |A(x_0, t)|^2 dx \leq \frac{1}{L} \int_0^L |A(x, t)|^2 dx \quad \text{II-(25)}$$

et à partir de l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\int_0^L |AA_x| dx \leq LQ^{1/2} \quad \text{II-(26)}$$

La substitution de ces relations dans II-(24) nous donne

$$|A(x, t)|^2 \leq L \left(\frac{1}{L} + 2Q^{1/2} \right) \quad \text{II-(27)}$$

Revenons à II-(12)

$$Q = \frac{1}{1} \left\{ -\frac{1}{2c_0} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_1} \int_0^1 |A|^2 dx \right\} \quad \text{II-(28)}$$

maintenant on affirme,

$$Q \leq 1/c_1 \quad \text{II-(29)}$$

Donc à partir de II-(29) et II-(16), II-(27) conduit à:

$$|A(x, t)|^2 \leq L \left(\frac{1}{L} + 1/\sqrt{c_1} \right), \quad \text{II-(30)}$$

et la stabilité de Lagrange est établie. Donc la limite est obtenue même quand l'énergie générale augmente.

4. SOLUTIONS A CYCLE LIMITE

La limite qui vient d'être démontrée et les études numériques mentionnés dans l'introduction suggèrent que la solution de Stokes se bifurque premièrement à un cycle limite. Pour examiner cette hypothèse nous devons approcher le problème à travers une analyse de perturbation autour de la solution de Stokes. Pour éviter la non uniformité on remarque que la solution proposée, aura en générale une nouvelle période. Pour accommoder cette effet on écrit la forme perturbée de la solution comme:

$$A(x, t; \varepsilon) = (1 + \phi(x, t; \varepsilon)) \exp(i\Omega(\varepsilon)t) \quad \text{II-(31)}$$

Où $\Omega(0) = 1$ (s est défini par (I-9)). le temps est normalisé par

$$\tau = \Omega t \quad \text{II-(32),}$$

qui avec II-(31) transforme II-(6) en II-(33)

sachant que II-(33) admet une solution pair, on considèr:

$$\phi = \sum_{n=0} a_n(\tau, \varepsilon) \cos(nqx) \quad \text{II-(34)}$$

avec $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ sont des fonctions du temps et de ε . Une étude basée sur la théorie de la perturbation montre qu'on peut adopter l'ansatz (l'accessoire):

$$\Omega = 1 + \sum_{n=1} \Omega_{2n} \varepsilon^{2n} \quad \text{II-(35)}$$

$$a_0 = \sum_{n=1} a_{2n}^{(0)} \varepsilon^{2n} \quad \text{II-(36)}$$

$$a_k = \sum_{n=0} a_{2n+k}^{(k)} \varepsilon^{2n+k}, k > 0 \quad \text{II-(37)}$$

L'insertion de ces formes dans II-(12) donne une analyse directe de perturbation et on évite les détails. Comme nous sommes premièrement intéressés par les solutions à cycles limites, on simplifie notre analyse. Alors nous cherchons immédiatement des solutions périodiques à a_k . Si ceci est le cas alors en conséquence nous avons:

$$\phi_r = 0 \quad \text{II-(38)}$$

les résultats d'analyse sont:

$$(\alpha_1^{(1)})^{1/2} = N/D \quad \text{II-(39)}$$

avec

$$N = -6c_0^2 c_1 - 6c_0^2 c_1 (1 - 3c_1) + 18c_0^4 c_1^2 (1 - c_1) - 6c_0^2 c_1^3 (3 - c_1) + 6c_1^4 \quad \text{II-(40)}$$

$$D = 18c_0^4 - 3c_0^6 (7c_1^2 + 34c_1 + 3) + c_0^4 (c_1^4 + 58c_1^3 + 186c_1^2 + 22c_1 + 1)$$

$$-9c_0^2c_1^2(5c_1^2 + 14c_1 + 1) + 6c_1^4(2c_1 + 5) \quad \text{II-(41)}$$

$$\beta_1^{(1)} = c_0(1 + c_1)\alpha_1^{(1)} / (c_1 - c_0^2) \quad \text{II-(42)}$$

$$\alpha_2^{(0)} = (-5c_1^2 + 6c_0^2c_1 + c_0^2c_1^2 - 2c_1^3 - 3c_0^4 - c_0^2)(\alpha_1^{(1)}) / 4(c_1 - c_0^2)^2 \quad \text{II-(43)}$$

$$\beta_2^{(0)} = 0 \quad \text{II-(44)}$$

$$\Omega_2 = (-2c_1^3 + 2c_0^2c_1^3 - 2c_1^4 + 2c_0^4c_1 - 2c_0^2c_1 + 2c_0^4)(\alpha_1^{(1)}) / 2c_1(c_1 - c_0^2)^2 \quad \text{II-(45)}$$

$$\alpha_2^{(2)} = \frac{1}{4}(\alpha_1^{(1)})^2 \left[1 - \frac{c_0^2(1 + c_1)^2}{3(c_1 - c_0^2)^2} \right] \quad \text{II-(46)}$$

$$\beta_2^{(2)} = \frac{1}{8}(\alpha_1^{(1)})^2 \left[\frac{3c_0(1 + c_1)}{(c_1 - c_0^2)^2} + \frac{c_0^3(1 + c_1)^3}{3(c_1 - c_0^2)^3} \right] \quad \text{II-(47)}$$

Les calculs ont été faits jusqu'à $O(\varepsilon^4)$. Cependant, pour éviter de calculer toutes les expressions nous montrons seulement quelques unes.

5: COMPARAISON AVEC LES SOLUTIONS EXACTES

Pour les solutions à cycle limite de II-(6), la partie spatiale satisfait,

$$(1 - ic_0) \frac{d^2 F}{dx^2} = (\Omega + i \frac{c_0}{c_1}) F - (1 + i \frac{c_0}{c_1}) |F|^2 F \quad \text{II-(48)}$$

Où $F = (1 + \phi)$. Puisque F est complexe, II-(48) représente un paire d'équations couplée du seconde ordre, ou équivalente à une équation d'ordre quatre. Comme il est facile de vérifier que II-(48) est invariante Pour $F \rightarrow F \exp(i\theta)$, alors l'équation II-(48) peut se réduire par un ordre. On calcule les solutions (numériques) exactes et nous allons les comparer avec les solutions perturbées discutés dans

le paragraphe précédent les courbes de comparaison sont montrées sur les figures II-2, II-3, II-4. Nous montrons aussi la solution numérique (ligne continue) et la solution perturbé (ligne hachuré) pour les valeurs des paramètres $c_0 = 0.25$, $c_1=1$, et pour les cas $\Omega = 0.9, 0.83, 0.7$. le petit paramètre s , pour chaque est 0.52, 0.68, et 0.93 respectivement.

L'erreur quadratique moyenne entre la solution perturbé et la solution exacte pour les trois cas est : 2% , 5% , 6% respectivement.

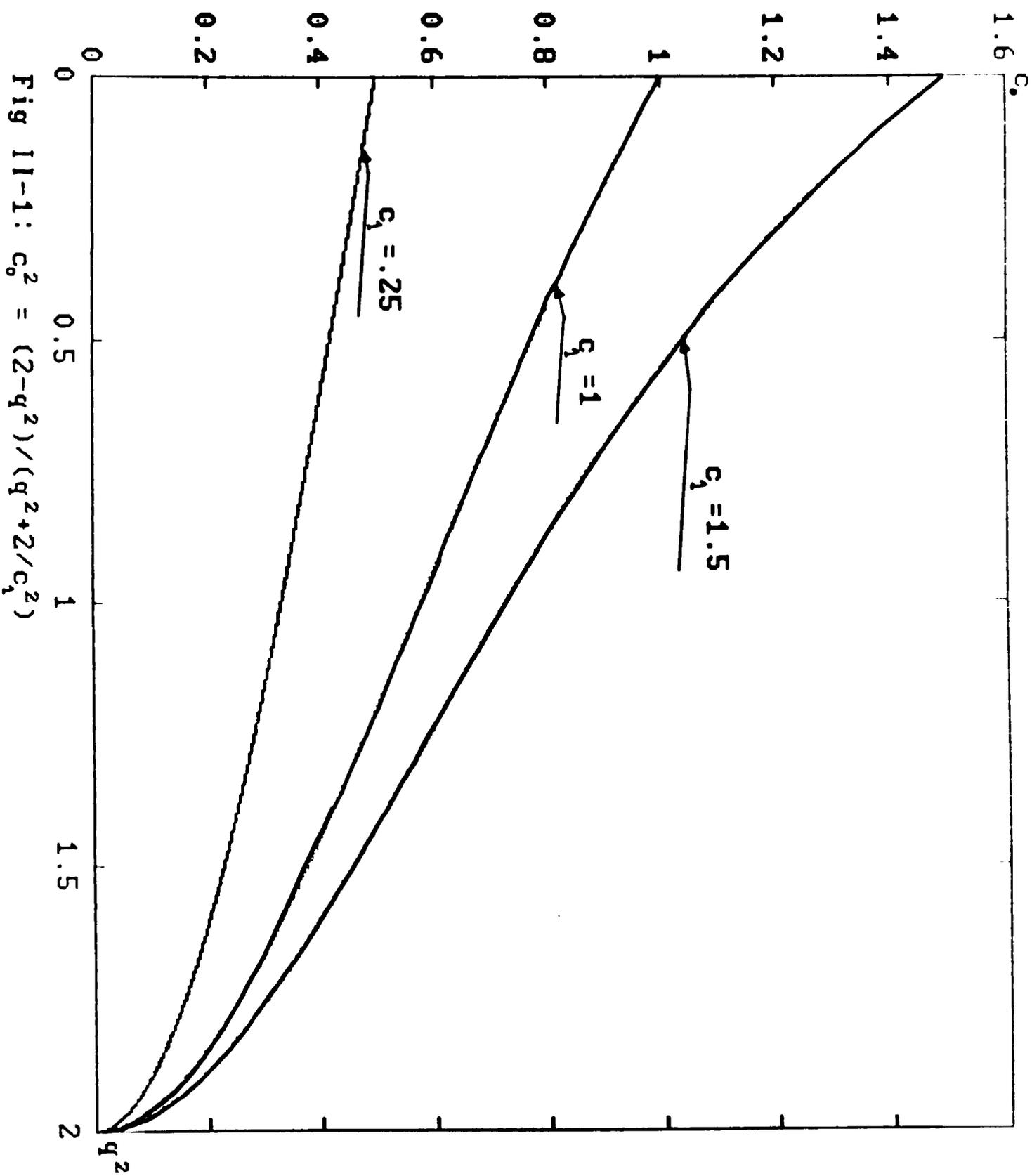


Fig 11-1: $c_0^2 = (2 - q^2) / (q^2 + 2/c_1^2)$

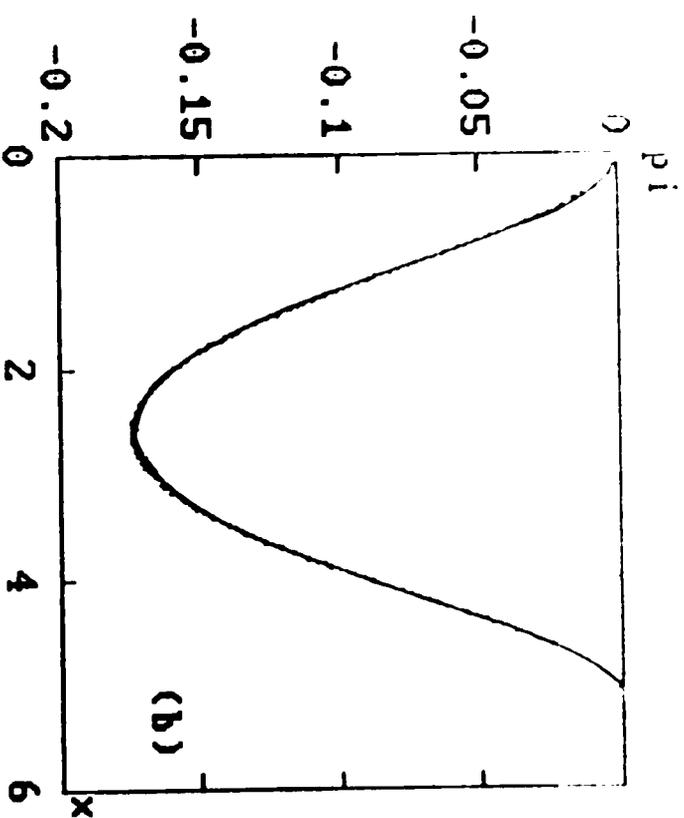
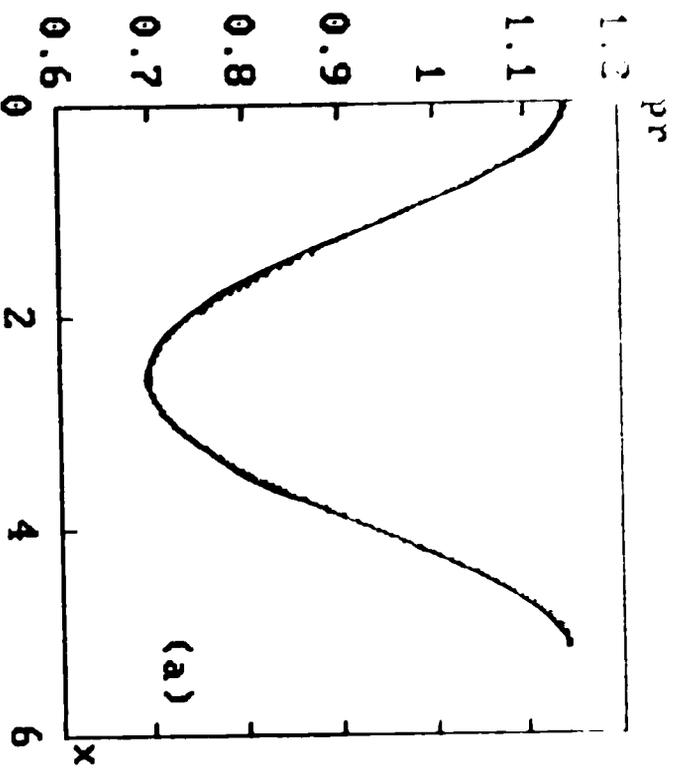


Fig. 11-2: solutions périodiques pour les valeurs des paramètres:

$$\Omega = .9, c_0 = .25, c_1 = 1, q = 1.05: \text{---} \rightarrow \epsilon = .52$$

a: Comparaison des parties réels

b: Comparaison des parties imaginaires

$$\zeta = 2\%$$

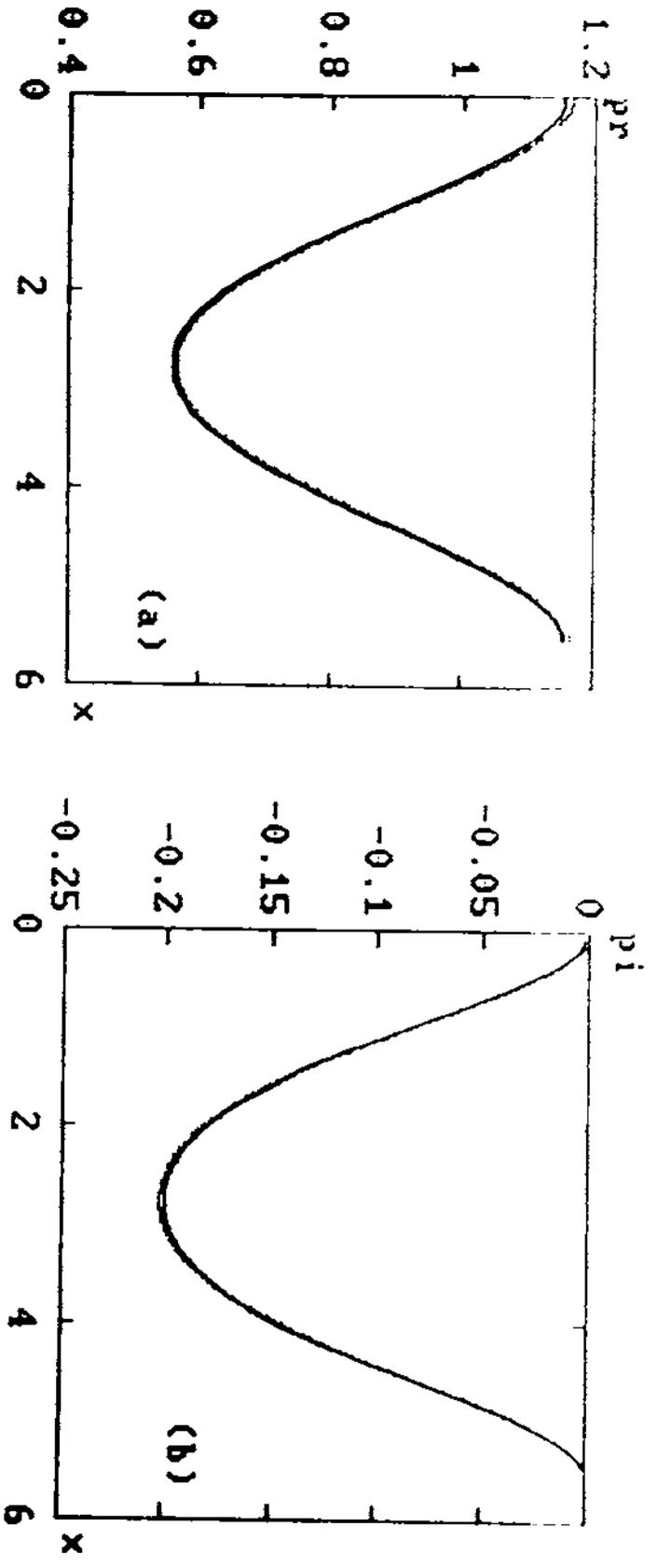


Fig. 11-3: solutions périodiques pour les valeurs des paramètres:

$$\zeta = .83, c_0 = .25, c_1 = 1, q = 1.07: \longrightarrow \delta = .68 \nearrow$$

a: Comparaison des parties réels

b: Comparaison des parties imaginaires

$$\zeta = 5\%$$

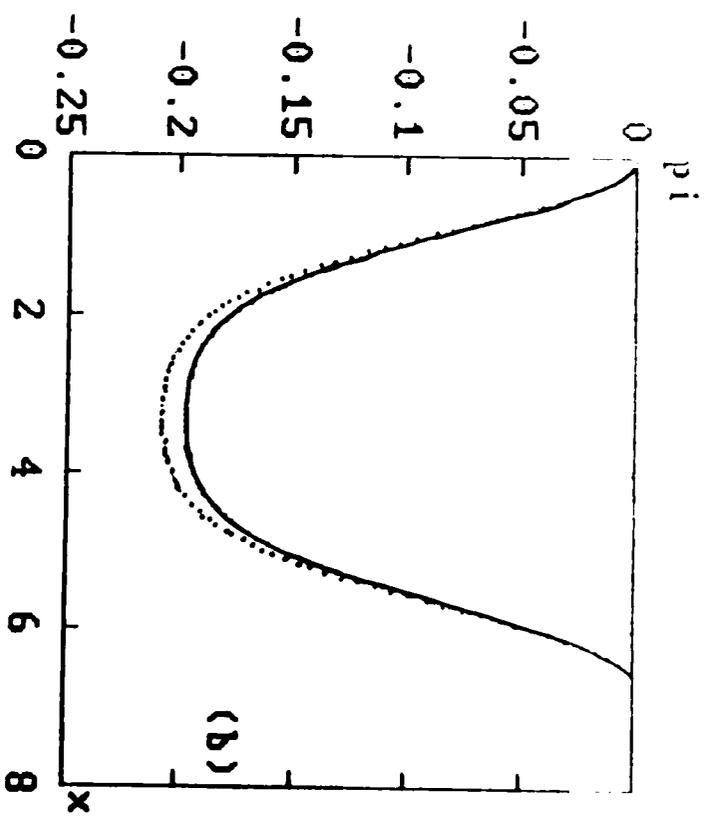
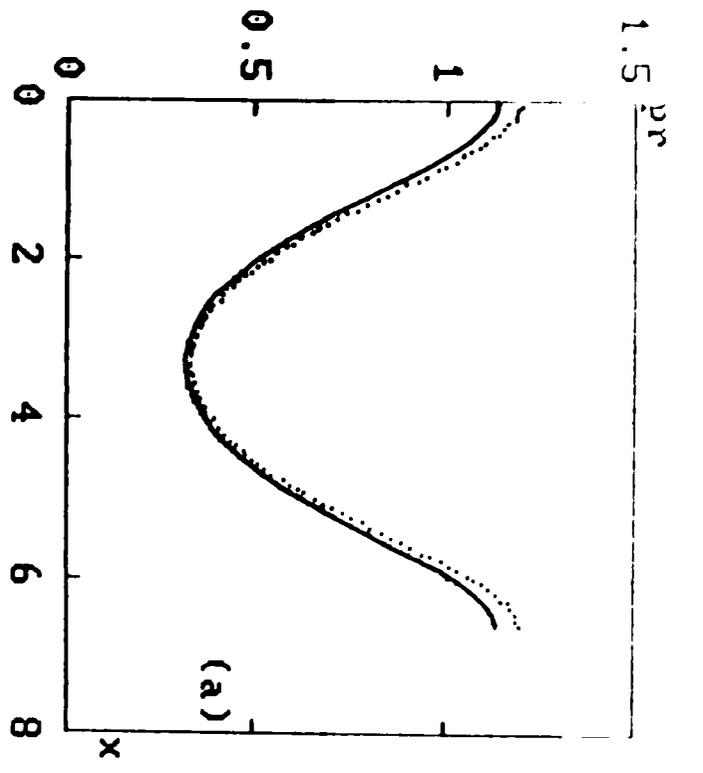


Fig. 11-4: Solutions périodiques pour les valeurs des paramètres

$$\Omega = .7, c_0 = .25, c_1 = 1, q = .97: \longrightarrow \epsilon = .95$$

a: Comparaison des parties réels

b: Comparaison des parties imaginaires

$$\zeta = 6\%$$

CHAPITRE III

**LIMITE CUBIQUE DANS L'EQUATION DE
SCHRODINGER**

1:INTRODUCTION

Dans ce chapitre on s'intéresse à la limite cubique dans l'équation de Schrodinger, qui est un cas particulier de l'équation de Landau-Ginzbourg ($c_0 = 0$).

$$iA_t + (1 - ic_0)A_{xx} = i\rho A - (1 + i\rho)|A|^2 A \quad \text{III-(1)}$$

$$0 \leq c_0^2 < c_1, \quad \text{III-(2)}$$

Les propriétés des certaines solutions périodiques séparables sont examinées sous la forme :

$$A(x, t) = \exp(i\Omega t) P(x) \quad \text{III-(3)}$$

avec la période spatiale

$$L = 2\pi/q \quad \text{III-(4)}$$

La solution de Stokes

$$A(x, t) = \exp(i\Omega t) \quad \text{III-(5)}$$

devient linéairement stable si elle est perturbée par une fonction périodique de nombre d'onde q pour:

$$q^2 < 2(1 - c_0^2/c_1)/(1 + c_0^2) \equiv q_0^2 \quad \text{III-(6)}$$

[34]. De plus la solution à cycle limite spatialement dépendant peut-être exprimée dans la région instable de Stokes en terme des petites paramètres[35]. Cette solution a la forme:

$$A(x, t; \varepsilon) = \mathcal{A}(x; \varepsilon) \exp(i\Omega t) (\varepsilon)^t \quad \text{III-(7)}$$

avec

$$\varepsilon^2 = q_0^2 - q^2 \quad \text{III-(8)}$$

$$\mathcal{A}(x; \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\varepsilon) \cos(nqx) \quad \text{III-(9)}$$

$$a_k(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+k}^{(k)} \varepsilon^{2n+k} = \sum_{2n+k} (\alpha_{2n+k}^{(k)} + i\beta_{2n+k}^{(k)}) \varepsilon^{2n+k} \quad \text{III-(10)}$$

$$\Omega(\varepsilon) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{2n} \varepsilon^{2n} \quad \text{III-(11)}$$

où les coefficients sont données en fonction des deux paramètres c_0 ; c_1 .

Dans les trois paragraphes suivants les relations entre cette solution à cycle limite et certain fonctions Jacobienne elliptiques [36] solutions de l'équation cubique de Schrodinger (ECS) sont examinées. Dans la deuxième paragraphe nous rappelons la détermination de ces fonctions elliptiques solutions de (ECS) [4,5,6]. Le troisième paragraphe contient le critère de selection. Dans le dernier paragraphe ce critère est utilisée pour adapter les solutions à cycles limites (III-(7).....III-(11)) avec les solutions fonctions Jacobienne elliptiques de (ECS).

2: L'EQUATION CUBIQUE DE SCHRODINGER

A la limite $c_0 = 0$, III-(1) devient l'équation cubique de Schrodinger

$$iA_x + A_{xx} + |A|^2 A = 0 \quad \text{III-(12)}$$

On observe pour les solutions spéciales de III-(12) données par III-(3), III-(4) la partie spatiale est réelle.

La substitution de III-(3) dans III-(12) donne une équation différentielle pour la fonction d'espace :

$$P_{xx} = \Omega P - P^3. \quad \text{III-(13)}$$

L'intégration de III-(13) nous donne:

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 = E - V(P) \quad \text{III-(14)}$$

où E est la constante d'intégration, et V représente le potentiel :

$$V(P) = \frac{1}{2} P^4 - \Omega P^2 \quad \text{III-(15)}$$

La figure III-1 montre le portrait phase de III-(14) et la figure III-2 montre le puits potentiel $V(P)$.

Il y a trois solutions distinctes de III-(13) qui dépendent du niveau d'énergie E .

(i) $E < 0$:

$$P(x) = \pm \sqrt{2\lambda} \operatorname{dn}(\lambda(x - x_0), k) \quad \text{III-(16)}$$

$$k^2 = (2\lambda^2 - \Omega) / \lambda^2 \quad \text{III-(17)}$$

ou λ, x_0 sont des constantes arbitraires. k est le module de la fonction Jacobiennne elliptique dn , et E est relié avec λ et Ω par la formule:

$$E = 2\lambda^2 (\lambda^2 - \Omega) \quad \text{III-(18)}$$

Cette solution correspond à l'intérieure de la separatrice de la figure III-1 ou la solution est paire. Nous nous intéressons en particulier aux solutions paires de III-(12) pour cela la région qui nous concerne est: $E < 0$.

(ii) $E > 0$:

$$P(x) = \pm \sqrt{\Omega + \lambda^2} \operatorname{cn}(\lambda(x - x_0), k) \quad \text{III-(19)}$$

$$k^2 = (\Omega + \lambda^2) / 2\lambda^2 \quad \text{III-(20)}$$

Où λ, x_0 sont des constantes arbitraires, cn est la fonction Jacobiennne elliptique dont le module est k , et E est reliée avec λ et Ω par la formule:

$$E = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - \Omega^2) \quad \text{III-(21f)}$$

Cette solution correspond à la région dans le plan de phase en dehors de la séparatrice où la solution est impaire.

(iii) $E = 0$:

$$P(x) = \pm \sqrt{2} \lambda \operatorname{sech}(\lambda(x - x_0)) \quad \text{III-(22)}$$

Ceci est le cas limite de (i) , (ii) dans laquelle $k=1$. Dans le plan de phase, il correspond au mouvement sur la séparatrice.

3. CRITERE DE SELECTION

Dans le but d'adapter les solutions fonctions Jacobienne elliptiques avec les solutions à cycle limite (III-(7) III-(11)) quand $c_0 \rightarrow 0$, une autre relation est nécessaire reliant la fréquence Ω à la fonction spéciale P . Pour cela, nous prouvons ce qui suit:

Lemme 1: Pour les solutions de (L-G) données par la forme III-(3), nous avons:

$$(i) \quad (1/c_1 + \Omega) = (1 + 1/c_1) \|P\|_k^4 / \|P\|_2^2 \quad \text{III-(23)}$$

$$(ii) \quad \|P\|_2^2 = \frac{(1 - c_0^2/c_1)}{(1 + c_0^2)} \|P\|_k^4 - \frac{(\Omega - c_0^2/c_1)}{(1 + c_0^2)} \|P\|_2^2 \quad \text{III-(24)}$$

avec:

$$\|P\|_n^n = \int_0^1 |P|^n dx \quad \text{III-(25)}$$

Preuve : Substituant III-(3) dans III-(1) pour obtenir une équation différentielle de la forme suivante:

$$P_{xx} = \frac{(\Omega + ic_0/c_1)}{(1 - ic_0)} P - \frac{(1 + ic_0/c_1)}{(1 - ic_0)} |P|^2 P. \quad \text{III-(26)}$$

Multipliant III-(26) par le conjugué complexe de P, et intégrant sur la période. La séparation des parties réelles et imaginaires donne les résultats, III-(23) et le "critère de sélection" qui sera utilisée dans le paragraphe suivant.

4. SOLUTIONS ADAPTEES

Pour chaque nombre d'onde spécifiée q dans le champ instable de Stokes nous voulons adapter les solutions à cycle limite (III-(7)...III-(11)) dans la limite $c_0 \rightarrow 0$ avec les solutions fonctions Jacobienne elliptiques de (ECS) données par (III-(16)---III-(17)). alors on a besoin de deux conditions pour l'adaptation, Ces conditions sont:

4-1 LES CONDITIONS DE PERIODICITE

$$\frac{2K}{\lambda} = \frac{2\pi}{q} \quad \text{III-(27)}$$

ou K est l'intégrale elliptique complète. Ceci assure l'adaptation entre la période de la solution fonction Jacobienne elliptique III-(16) et la période de la solution à cycle limite (III-(7) --- III-(11)).

4-2 CRITERE DE SELECTION

$$\left(\frac{1}{c_1} + \Omega\right) = \left(1 + \frac{1}{c_1}\right) \|P\|_1^4 / \|P\|_2^2 \quad \text{III-(28)}$$

Cette condition tient pour toutes les solutions séparables III-(3) de l'équation de Landau-Ginzburg pour $c_0 = 0$, pour cela nous appliquons la condition à la limite $c_0 \rightarrow 0$.

Exemple 1:

Fixons $q^2 = 2$ et appliquons la deuxième condition sur la formule III-(16) ceci réduit la solution fonction Jacobienne elliptique de (ECS) à la solution de Stokes III-(5). Ceci est généralement facile à comprendre en fixant le module de III-(16):

$$\kappa^2 = 0 \quad \text{III-(29)}$$

et à partir des tables standards des intégrales elliptiques [36], III-(29) \Rightarrow

$$K = \pi/2 \quad \text{III-(30)}$$

En utilisant la condition de périodicité III-(27) \Rightarrow

$$2\lambda = q \quad \text{III-(31)}$$

Mais III-(29), III-(17) \Rightarrow

$$2\lambda^2 = \Omega \quad \text{III-(32)}$$

en utilisant le critère de sélection III-(28) et le fait que $dn(x,0) = 1 \Rightarrow$

$$\frac{\left(\frac{1}{c_1} + \Omega\right)}{\left(\frac{1}{c_1} + 1\right)} = 2\lambda^2 \quad \text{III-(33)}$$

III-(33), III-(32) \Rightarrow

$$\Omega = 1 \quad \text{III-(34)}$$

III-(34), III-(32) \Rightarrow

$$\lambda^2 = 1/2 \quad \text{III-(35)}$$

III-(35), III-(32) \Rightarrow

$$q^2 = 2 \quad \text{III-(36)}$$

Finalement, de III-(36), III-(35), III-(34) et III-(29), on voit que III-(16) tends vers l'unité. Pour cela III-(28) se réduit à la solution de Stokes.

Exemple 2: ($c_1=1$).

Fixons $q = 0$ et appliquons les deux conditions adaptées sur III-(16), la solution de (ECS) se réduit à:

$$A(x, t) = \sqrt{\frac{6}{5}} \exp\left(\frac{3}{5}t\right) \operatorname{sech}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right) \quad \text{III-(37)}$$

Ceci est pour le cas dans lequel le critère de sélection est appliqué avec $c_1=1$. En général, la solution III-(16) venant des conditions adaptées contiendra l'extra paramètre c_1 , reflétant le fait que l'adaptation vient de $c_0 \rightarrow 0$ dans III-(1). Pour vérifier que III-(37) est la solution correcte de (ECS) nous fixons le module de III-(17):

$$\kappa^2 = 1 \quad \text{III-(38)}$$

et utilisons le fait que $\operatorname{dn}(x,1) = \operatorname{sech}(x)$. Les étapes sont similaires à l'exemple 1.

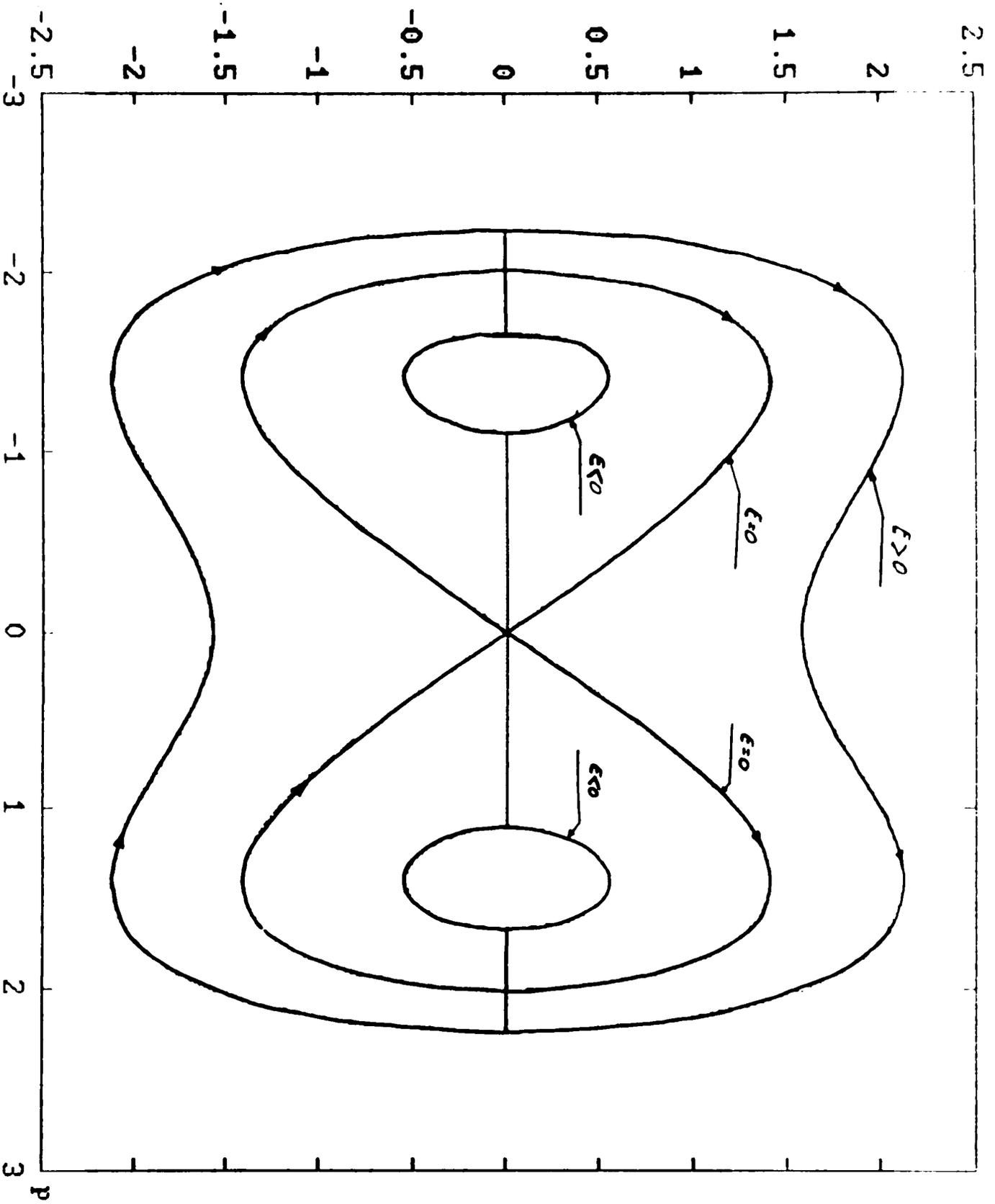


Fig III-1: Le portrait phase de (ECS)

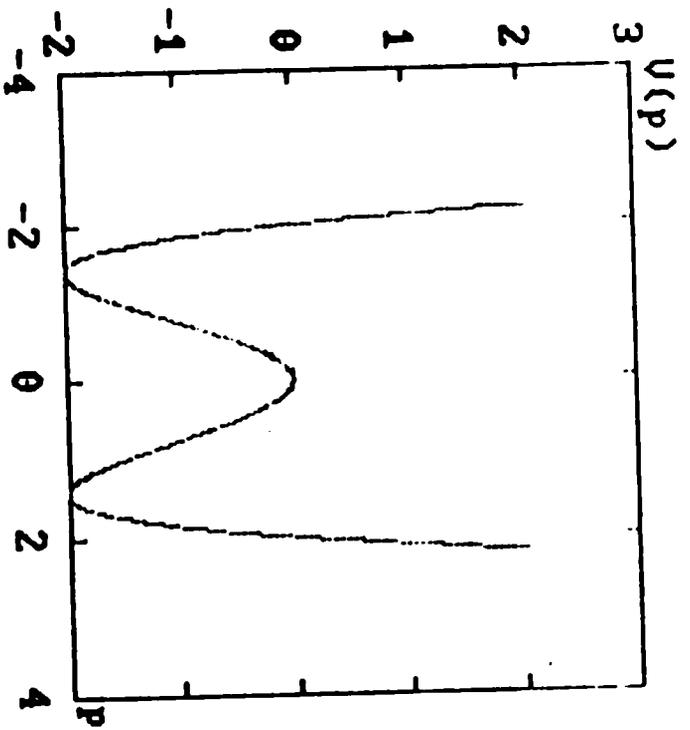


Fig III-2: puits potentiel $U(p)$

pour $\Omega = 2$

f

CHAPITRE IV

STABILITE DES SOLUTIONS A CYCLE LIMITE

I INTRODUCTION

L'équation de Landau-Ginzburg (L-G) a été récemment le foyer de plusieurs travaux et elle est l'équation prototype de l'évolution d'amplitude qui détermine l'enveloppe des ondes perturbées à un paramètre de dimension supercritique. L'équation que nous prenons comme :

$$i\varphi_x + (1 - ic_0)\varphi_{xx} = i\rho\varphi - (1 + i\rho)|\varphi|^2\varphi \quad \text{IV-(1)}$$

$$0 \leq c_0^2 \leq c_1, \rho = c_0/c_1 \quad \text{IV-(2)}$$

supporte les effets de dispersion, diffusion, et la non linearité.

Dans le paragraphe 2 on détermine un système qui préserve un jeu de 3 équations différentielles, ordinaires qui déterminent les oscillations des états dont la période spatiale est fixée. dans le paragraphe 3 nous étudions la stabilité de ces solutions sous une perturbation périodique, en utilisant les méthodes mathématiques relativement élémentaires. En particulier, on examine les mutiplicateurs de Floquet associés avec l'équation variationnelle.

2. SOLUTIONS A CYCLE LIMITE

Comme on l'a déjà vu dans le chapitre I l'équation (L-G) IV-(1) possède des solutions à cycle limite sous la forme des oscillations permanentes.

$$\psi_0 = \phi(x) \exp(i\Omega x) \quad \text{IV-(3)}$$

ici ϕ est tel que :

$$(1 - ic_0)\phi_{xx} = (\Omega + i\rho)\phi - (1 + i\rho)|\phi|^2\phi \quad \text{IV-(4)}$$

L'amplitude complexe ϕ devra être périodique :

$$\phi(x + 2\pi/q) = \phi(x) \quad \text{IV-(5)}$$

Il est immédiate de constater que l'équation IV-(4) donne deux solutions paire et impaire. Dans la plus part des cas nous nous intéresserons aux solutions paires:

$$\phi(-x) = \phi(x) \quad \text{IV-(6)}$$

Il faut observer que les solutions mentionnées en IV-(4) sont invariantes par la multiplication d'un nombre complexe dont le module est unité, c'est-à-dire pour une constante réel θ_0 , l'expression $\phi \exp(i\theta_0)$ est aussi une solution de IV-(4). Ceci suggère que l'équation d'ordre 4 (IV-(4)) peut se réduire par un ordre et pour cette raison on représente ϕ sous la forme:

$$\phi = r^{1/2} \exp\left(i \int_0^x v(x) dx\right) \quad \text{IV-(7)}$$

où r et v sont des fonctions réelles. La substitution directe de IV-(7) va satisfaire le système:

$$\begin{cases} r_x = 2uv \\ v_x = \frac{(c_0 \Omega + \rho)}{(1 + c_0^2)} - \frac{(c_0 + \rho)}{(1 + c_0^2)} r - 2uv \\ u_x = \frac{(\Omega - c_0 \rho)}{(1 + c_0^2)} - \frac{(1 - c_0 \rho)}{(1 + c_0^2)} r - u^2 + v^2 \end{cases} \quad \text{IV-(8)}$$

(La première équation définit u .)

Nous cherchons une solution paire, IV-(6), périodique, IV-(5) de IV-(8). ça nous montre que u et v sont des fonctions impaires, r paire et comme ça

$$u(0) = v(0) = 0 \quad \text{IV-(9)}$$

Dans la procédure qui suit on détermine ϕ , la fréquence Ω qui'est prescrite et le nombre d'onde q correspondant. La trajectoire produite par IV-(8) est examinée lorsqu'elle coupe la surface de section de Poincaré $u=0$. Pour le choix correct de la valeur initiale

$$r(0) = R_0 \quad \text{IV-(10)}$$

et puisque les fonctions u et v sont impaires, alors la trajectoire va couper la surface de section de Poincaré $u = 0$ lorsque $v = 0$ après un demi cycle. On a utilisé les itérations de Newton comme une base pour la détermination de la valeur initiale définie par IV-(10). Si on dénote la valeur de v sur la surface de section section de Poincaré $u = 0$ par $v(R)$ (R est la valeur inconnue) donc:

$$R_0 = R - \hat{v}(R)/\hat{v}_R(R) \quad \text{IV-(11)}$$

définie l'itération, où $\hat{v}_R = \frac{\partial}{\partial R}$. cette fonction dérivée satisfait le système des équations variationnelle:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} r_R &= 2uv_R + 2ru_R \\ \frac{d}{dx} v_R &= \frac{-(c_0 + \rho)}{(1 + c_0^2)} r_R - 2uv_R - 2vu_R \\ \frac{d}{dx} u_R &= \frac{-(1 - c_0\rho)}{(1 + c_0^2)} r_R + 2vv_R - 2uu_R \end{aligned} \quad \text{IV-(12)}$$

Le système IV-(12) (avec la donnée initiale $(r_R, v_R, u_R) = (1, 0, 0)$) est intégré simultanément avec le système IV-(8) jusqu'à ce que la surface de section de Poincaré soit détectée (On utilise la méthode d'Henon [37], (voir annexe) pour se positionner exactement sur la surface de section de Poincaré $u=0$). La nouvelle valeur

de R est déterminée par IV-(11) et à cause de la convergence quadratique de la méthode de Newton, seulement quelques itération sont suffisantes.

Dans la figure IV-1 on montre un cycle limite typique obtenu par cette méthode.

Dans la figure IV-2 on expose une variété des relations de dispersion

$$\Omega = \Omega(q; c_0; c_1) \quad \text{IV-(13)}$$

btenué aussi par cette méthode.

3. POINTS D'EQUILIBRE

Un point d'équilibre $(r_{e,q}, v_{e,q}, u_{e,q})$ est la solution constante du système IV-(8), c'est-à-dire:

$$\phi_x(r_{e,q}, v_{e,q}, u_{e,q}) = (r_{e,q}, v_{e,q}, u_{e,q}) \quad \text{IV-(14)}$$

Pour tout x et pour une stabilité locale on écrit le système IV-(8) de la forme suivante:

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \frac{(\Omega - c_0^2/c_1)}{(1+c_0^2)} - \frac{(1-c_0^2/c_1)}{(1+c_0^2)} \sqrt{r} - u^2 + v^2 \\ \frac{dv}{dx} = \frac{c_0(\Omega + 1/c_1)}{(1+c_0^2)} - \frac{c_0(1+1/c_1)}{(1+c_0^2)} \sqrt{r} - 2uv \\ \frac{dr}{dx} = 4ur \end{cases} \quad \text{IV-(15)}$$

Ce système a 6 points d'équilibres qui sont représentés comme:

$$\vec{\zeta}_n = (u_n, v_n, r_n) \quad n=1, \dots, 6 \quad \text{IV-(16)}$$

ces solutions sont:

de R est déterminée par IV-(11) et à cause de la convergence quadratique de la méthode de Newton, seulement quelques itérations sont suffisantes.

Dans la figure IV-1 on montre un cycle limite typique obtenu par cette méthode.

Dans la figure IV-2 on expose une variété des relations de dispersion

$$\Omega = \Omega(q; c_0; c_1) \quad \text{IV-(13)}$$

obtenue aussi par cette méthode.

3. POINTS D'EQUILIBRE

Un point d'équilibre (r_{eq}, v_{eq}, u_{eq}) est la solution constante du système IV-(8), c'est-à-dire:

$$\phi_x(r_{eq}, v_{eq}, u_{eq}) = (r_{eq}, v_{eq}, u_{eq}) \quad \text{IV-(14)}$$

Pour tout x et pour une stabilité locale on écrit le système IV-(8) de la forme suivante:

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \frac{(\Omega - c_0^2/c_1)}{(1+c_0^2)} - \frac{(1-c_0^2/c_1)}{(1+c_0^2)} \sqrt{1-u^2+v^2} \\ \frac{dv}{dx} = \frac{c_0(\Omega+1/c_1)}{(1+c_0^2)} - \frac{c_0(1+1/c_1)}{(1+c_0^2)} \sqrt{1-u^2+v^2} - 2uv \\ \frac{dr}{dx} = 4ur \end{cases} \quad \text{IV-(15)}$$

Ce système a 6 points d'équilibre qui sont représentés comme:

$$\vec{\zeta}_n = (u_n, v_n, r_n) \quad n=1, \dots, 6 \quad \text{IV-(16)}$$

ces solutions sont:

$$u_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}} \quad \text{IV-(17)}$$

$$u_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}} \quad \text{IV-(18)}$$

$$u_{5,6} = 0 \quad \text{IV-(19)}$$

$$v_m = c_0(\Omega + 1/c_1)/2u_m(1 + c_0^2) \quad m = 1, \dots, 4 \quad \text{IV-(20)}$$

$$v_{5,6} = \pm \sqrt{\frac{(1 - c_0^2/c_1)(\Omega + 1/c_1)}{(1 + c_0^2)(1 + 1/c_1)} - \frac{(\Omega - c_0^2/c_1)}{(1 + c_0^2)}} \quad \text{IV-(21)}$$

$$\Gamma_m = 0 \quad m = 1, \dots, 4 \quad \text{IV-(22)}$$

$$\Gamma_{5,6} = (\Omega + 1/c_1)/(1 + 1/c_1)^2 \quad \text{IV-(23)}$$

où

$$\alpha = -(\Omega - c_0^2/c_1)/(1 + c_0^2) \quad \text{IV-(24)}$$

$$\beta = -c_0^2(\Omega + 1/c_1)^2/4(1 + c_0^2)^2 \quad \text{IV-(25)}$$

Remarque 1 .

A partir du point de vue des solutions de l'équation de Landau-Ginzburg, les points d'équilibres ζ_5, ζ_6 sont plus importants, les quatre points $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$ sont simplement correspondant aux solutions nulles de (L-G). Pour cette raison on se limite à $m = 5, 6$.

Remarque 2 .

$$u_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}} \quad \text{IV-(17)}$$

$$u_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}} \quad \text{IV-(18)}$$

$$u_{5,6} = 0 \quad \text{IV-(19)}$$

$$v_m = c_0(\Omega + 1/c_1)/2u_m(1 + c_0^2) \quad m = 1, \dots, 4 \quad \text{IV-(20)}$$

$$v_{5,6} = \pm \sqrt{\frac{(1 - c_0^2/c_1)(\Omega + 1/c_1)}{(1 + c_0^2)(1 + 1/c_1)} - \frac{(\Omega - c_0^2/c_1)}{(1 + c_0^2)}} \quad \text{IV-(21)}$$

$$\Gamma_m = 0 \quad m = 1, \dots, 4 \quad \text{IV-(22)}$$

$$\Gamma_{5,6} = (\Omega + 1/c_1)/(1 + 1/c_1)^2 \quad \text{IV-(23)}$$

où

$$\alpha = -(\Omega - c_0^2/c_1)/(1 + c_0^2) \quad \text{IV-(24)}$$

$$\beta = -c_0^2(\Omega + 1/c_1)^2/4(1 + c_0^2)^2 \quad \text{IV-(25)}$$

Remarque 1 .

A partir du point de vue des solutions de l'équation de Landau-Ginzburg, les points d'équilibre ζ_5, ζ_6 sont plus importants, les quatre points $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$ sont simplement correspondant aux solutions nulles de (L-G). Pour cette raison on se limite à $m = 5, 6$.

Remarque 2 .

Pour le cas spécial $c_1=1$, les points d'équilibres $\vec{\zeta}_5, \vec{\zeta}_6$ sont indépendants de c_0 et

il s'en suit:

$$u_{5,6} = 0 \quad \text{IV-(26)}$$

$$v_{5,6} = \pm \sqrt{\frac{(1-\Omega)}{2}} \quad \text{IV-(27)}$$

$$r_{5,6} = (\Omega+1)^2/4 \quad \text{IV-(28)}$$

Remarque 3 .

Pour le cas spécial $c_1 \rightarrow \infty$, les points d'équilibres $\vec{\zeta}_5, \vec{\zeta}_6$ coïncident et ils deviennent:

$$u_{5,6} = 0 \quad \text{IV-(29)}$$

$$v_{5,6} = 0 \quad \text{IV-(30)}$$

$$r_{5,6} = \Omega^2 \quad \text{IV-(31)}$$

Remarque 4 .

Dans le cas pour lequel $\Omega = 1$, les deux points d'équilibres $\vec{\zeta}_5, \vec{\zeta}_6$ coïncident et ils deviennent :

$$u_{5,6} = 0 \quad \text{IV-(32)}$$

$$v_{5,6} = 0 \quad \text{IV-(33)}$$

$$r_{5,6} = 1 \quad \text{IV-(34)}$$

La solution correspondant à l'équation de Landau-Ginzburg pour ce cas est la solution de Stokes.

4. STABILITE

4.1 STABILITE DES POINTS D'EQUILIBRES

Pour étudier la stabilité linéaire du deux points d'équilibres $\vec{\zeta}_5, \vec{\zeta}_6$ on doit linéariser le système autour de ces deux points d'équilibres et on examine les valeurs propres de la matrice:

$$M = \begin{bmatrix} -2u_n & 2v_n & -(1 - c_0^2/c_1)/2\sqrt{\tau_n}(1 + c_0^2) \\ -2v_n & -2u_n & -c_0(1 + 1/c_1)/2\sqrt{\tau_n}(1 + c_0^2) \\ 4\tau_n & 0 & 4u_n \end{bmatrix} \quad (n = 5, 6) \quad \text{IV-(35)}$$

On étudie les deux cas :

(i) L'équation cubique de Schrodinger: $c_0 = 0, c_1 = 1$

(ii) La limite $c_1 \rightarrow \infty$

(i) $c_0 = 0, c_1 = 1$

La substitution direct dans IV-(26), IV-(27), IV-(28) donne les deux points d'équilibres $\vec{\zeta}_5, \vec{\zeta}_6$, tant que la matrice se réduit à:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2v_n & -1/2\sqrt{\tau_n} \\ -2v_n & 0 & 0 \\ 4\tau_n & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{IV-(36)}$$

Les valeurs propres de la matrice M_1 sont les solutions de l'équation cubique:

$$\lambda^3 + [4v_n^2 + 2\sqrt{\tau_n}]\lambda = 0 \quad \text{IV-(37)}$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{\Omega-3} \quad \text{IV-(38)}$$

On conclure:

• pour les fréquences $\Omega > 3$:

$$\text{Re}(\lambda_1) = 0, \quad \text{Re}(\lambda_2) > 0, \quad \text{Re}(\lambda_3) < 0.$$

•• pour les fréquences $\Omega \leq 3$:

$$\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) = \text{Re}(\lambda_3) = 0.$$

Les vecteurs propres associés avec les valeurs propres IV-(38) solutions de l'équation IV-(37) sont calculées facilement:

- correspondant à $\lambda_1 = 0$ pour les solutions $\vec{\zeta}_5, \vec{\zeta}_6$, les vecteurs propres sont:

$$\vec{A}_{3,z} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2(1-\Omega)(1+\Omega)^2}} \end{bmatrix}, \quad \text{IV-(39)}$$

- correspondant à $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{\Omega-3}$ pour les deux solutions $\vec{\zeta}_5, \vec{\zeta}_6$ les vecteurs propres sont:

$$\vec{A}_{3,z} = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{\Omega-3}/(1+\Omega)^2 \\ -\sqrt{2(1-\Omega)}/(1+\Omega)^2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{A}_{3,z} = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{\Omega-3}/(1+\Omega)^2 \\ \sqrt{2(1-\Omega)}/(1+\Omega)^2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{IV-(40)}$$

(ii) $\omega_1 \rightarrow \infty$

Les points d'équilibres coïncident et ils sont données par IV-(29), IV-(30), IV-(31), tant que la matrice M se réduit à:

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2\Omega(1+c_0^2) \\ 0 & 0 & -c_0/2\Omega(1+c_0^2) \\ 4\Omega^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{IV-(41)}$$

Les valeurs propres de M_2 sont:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \sqrt{-2\Omega/(1+c_0^2)} \quad \text{IV-(42)}$$

On conclut que:

• pour les fréquences $\Omega < 0$:

$$\text{Re}(\lambda_1) = 0, \text{Re}(\lambda_2) > 0, \text{Re}(\lambda_3) < 0.$$

•• pour les fréquences $\Omega > 0$:

$$\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) = \text{Re}(\lambda_3) = 0.$$

Les vecteurs propres associés avec les valeurs propres IV-(42) sont:

• correspondant à $\lambda_1 = 0$

$$\bar{y}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{IV-(43)}$$

• correspondant à $\lambda_{2,3} = \sqrt{-2\Omega/(1+c_0^2)}$

$$\bar{y}_{\pm} = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{-2\Omega/(1+c_0^2)}/4\Omega^2 \\ \mp c_0/\sqrt{-8\Omega^3(1+c_0^2)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{IV-(44)}$$

4-2: STABILITE DES SOLUTIONS PERIODIQUES

La stabilité des solutions périodiques (solutions à cycles limites) est déterminée par ses multiplicateurs caractéristiques, connu aussi sous le nom de multiplicateurs de Floquet.

Les multiplicateurs caractéristiques sont une généralisation des valeurs propres pour un point d'équilibre.

La solution périodique (solution à cycle limite) correspond au point fixe dans la "carte de Poincaré" P . La stabilité de la solution périodique correspond à la stabilité du point fixe. Pour ce faire, et par analogie avec le point d'équilibre, la stabilité du point fixe $(r(0), v(0), u(0))$ de P est déterminée en linéarisant P au voisinage du point fixe $(r(0), v(0), u(0))$.

soit :

$$x = (r, v, u) \quad \text{IV-(45)}$$

Alors, le système discret

$$\delta x_{k+1} = DP(x^*) \delta x_k \quad \text{IV-(46)}$$

détermine le comportement local de P autour du point fixe x^* .

Soit p la dimension de $DP(x^*)$. L'orbit de P pour une condition initiale $x_0 + \delta x_0$ est:

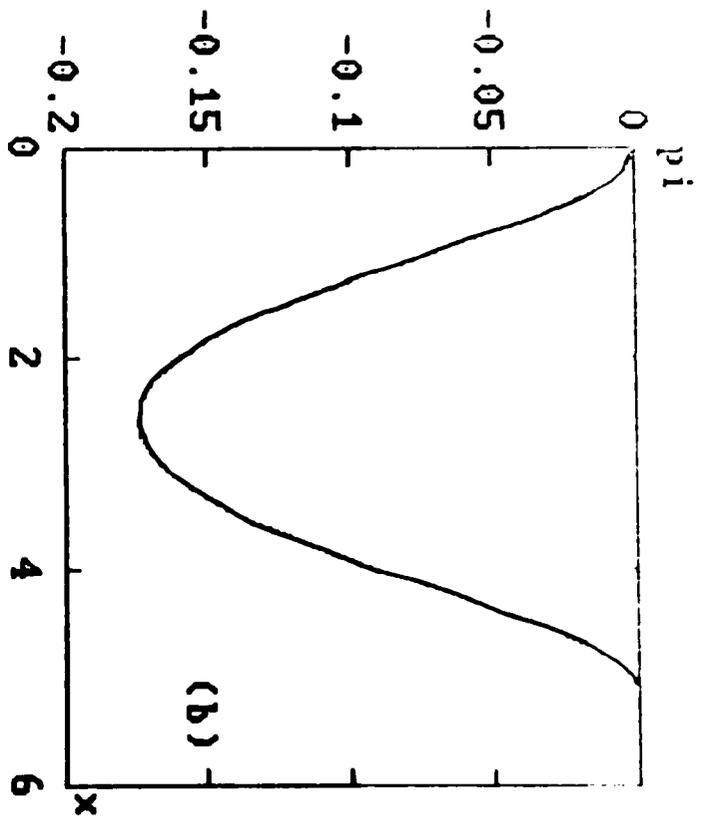
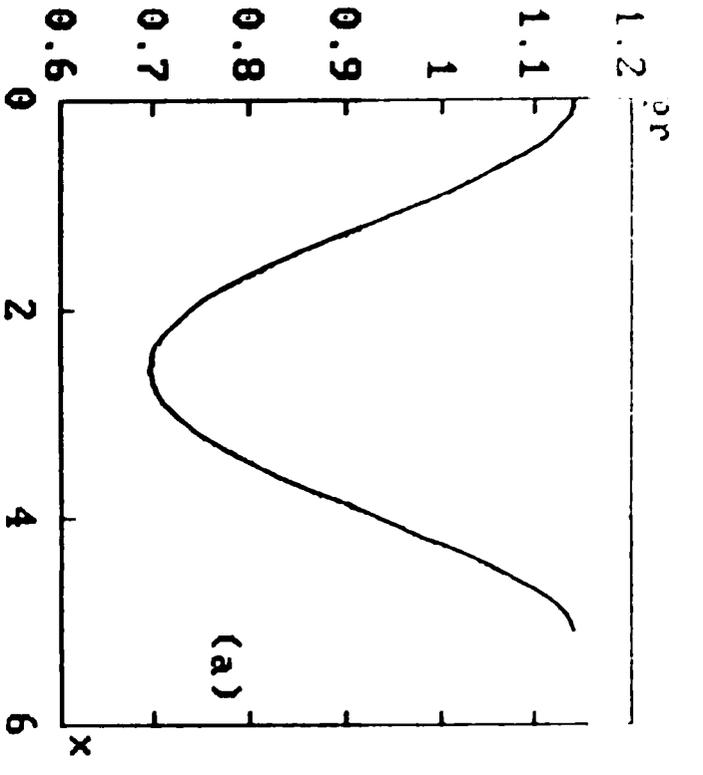
$$x_k = x^* + \delta x_k \quad \text{IV-(47)}$$

$$x_k = x^* + (DP(x^*))^k \delta x_0 \quad \text{IV-(48)}$$

$$x_k = x^* + c_1 \eta_1 m_1^k + \dots + c_p \eta_p m_p^k \quad \text{IV-(49)}$$

où $\{m_i\}$ et $\{\eta_i\}$, $i = 1 \dots p$, sont les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $DP(x^*)$; $\{c_i\}$, $i = 1, \dots, p$, sont les constantes choisies suivant les conditions initiales.

les valeurs propres $\{m_i\}$ sont les multiplicateurs caractéristiques du point fixe et ils déterminent la stabilité de la solution périodique. Si toutes les valeurs m_i se trouvent à l'intérieure du cercle unité, alors la solution périodique est asymptotiquement stable. Si toutes les multiplicateurs m_i se trouvent en d'hors du cercle unité, la solution périodique instable. S'il y a des multiplicateurs caractéristiques dont le module est inférieure à 1 et d'autres supérieurs à 1, alors la solution périodique est nonstable.



FigIV-1: Solutions périodiques

- a: Partie réel**
- b: Partie imaginaire**

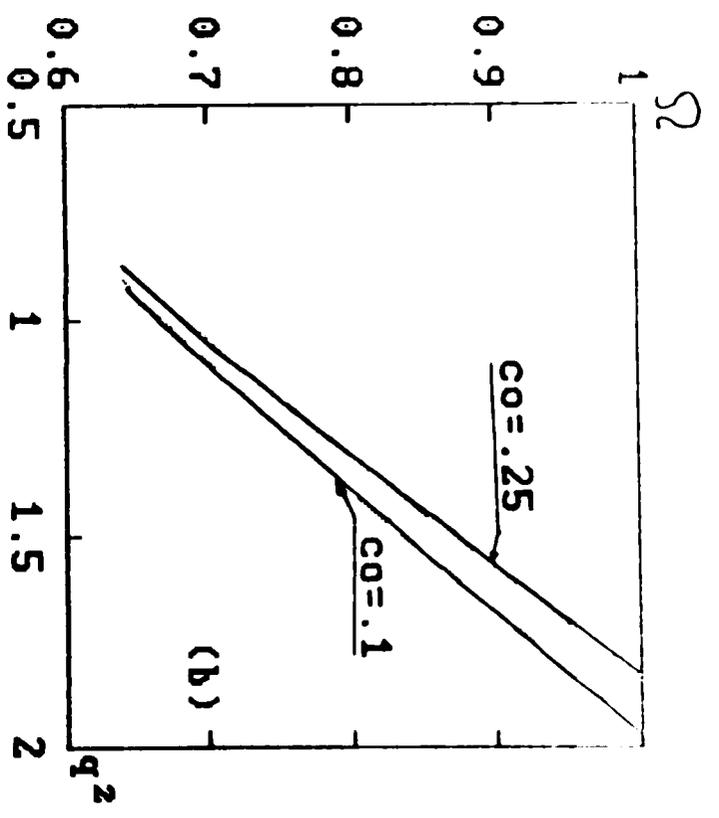
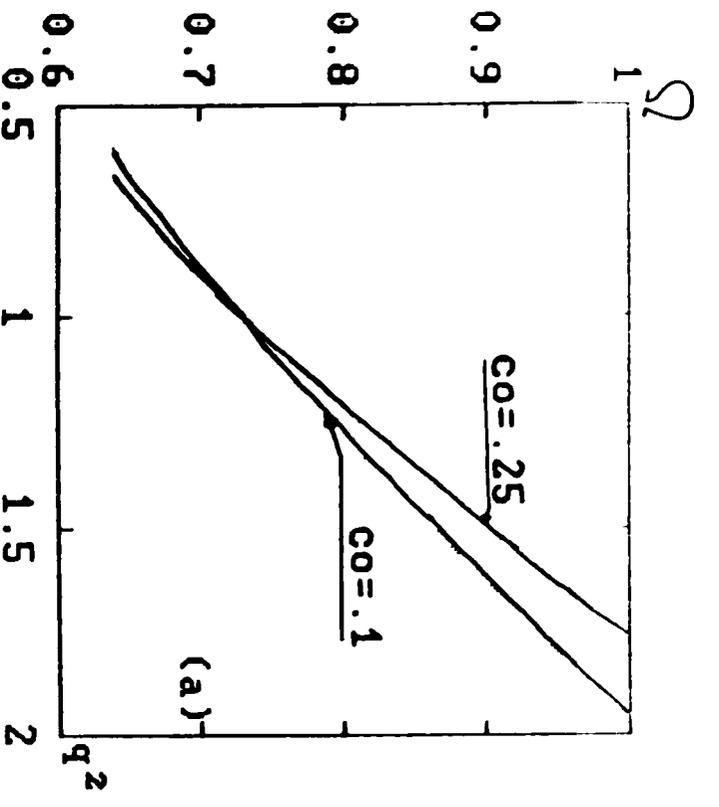


Fig. IV-2: relation de dispersion, $\Omega = \Omega(q, c_0, c_1)$

a: $c_1 = 1$, b: $c_1 = 2.25$

CONCLUSION

CONCLUSION

Les études numériques récentes sur la transition vers le *chaos* sont focalisées sur l'équation de *Landau-Ginzburg* (L-G). Pour cela cette étude portait sur l'analyse des systèmes non-linéaires modélisés par l'équation complexe (L-G). Cette équation est satisfaite par la solution de Stokes. Les études numériques mentionnées dans l'introduction suggèrent que la solution de Stokes se bifurque premièrement en un cycle limite, l'examen de cette hypothèse est effectué à travers une analyse de perturbation, autour de la solution de Stokes, on remarque que la solution perturbée proposée, aura toujours une nouvelle période. Pour déterminer cet effet on a intégré numériquement l'équation (L-G); et on a comparé la solution numérique avec la solution perturbée. Ce résultat d'analyse montre qu'il y a un bon accord entre la théorie de perturbation et la méthode numérique utilisée.

Le traitement numérique est basé sur la technique de *Poincaré*. Nous avons utilisé la carte de Poincaré pour les systèmes autonomes pour déterminer les *points fixes* et par conséquent les *solutions à cycles limites*. L'utilité de la carte de Poincaré consiste en la réduction de l'ordre et l'existence d'une correspondance "une à une" entre les systèmes continus et discrets. Pour cela l'étude de la *stabilité* des solutions à cycles limite correspond à la stabilité du point fixe. Pour ce faire l'analyse de la stabilité du point fixe est déterminée, en linéarisant P (Carte Poincaré) autour du point fixe, on obtient alors la matrice DP (matrice des dérivées partielles), les valeurs propres de DP sont les multiplicateurs caractéristiques, connu aussi comme multiplicateurs de Floquet qui déterminent la stabilité du point fixe.

Nous avons résolu l'équation de Landau-Ginzburg dans différentes configurations, chaque configuration peut s'appliquer à un phénomène physique bien précis.

D'autres propositions de solutions conduisent à établir des similitudes entre l'équation de Landau-Ginzburg et l'équation non-linéaire de Boltzman. Ceci, pourrait donner lieu à la recherche d'un nouveau type d'ondes dans les plasma à forte collision. Il suffirait d'établir des analogies entre les coefficients de l'équation de Landau-Ginzburg et les coefficients de l'équation non-linéaire de Boltzman.

Nous comptons développer nos prochaines recherches dans ce domaine.

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie

- [1] L.D. Landau, C.R Acad. Sci. U.R.S.S. 44, 311, 1944.
- [2] J.T. Stuart, "On the non linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows.Part II.", J. Fluid Mech. 9 (1960),353-370.
- [3] J. Watson, ""On the non linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows.Part I.", J. Fluid Mech. 9
- [4] J.D. Gibbon, M,J. McGuinness, "Amplitude equations at the critical points of unstable dispersive physical systems", PRoc.Roy. Soc. Lond. A377, 185-219, 1981
- [5] A. c. Newell, J.A. Whitehead, "finite bandwidth, finite amplitude convection ", J. Fluid Mech. 38, 279,1969.
- [6] L.M. Hocking, K. Stewartson, J.T. Stuart," Anonlinear instability burst in plane parallel flow" , J.fluid Mech.51,1972, 705-35.
- [7] M. Pavlik, G. Rowlands, "The propagation of solitary waves in piezoelectric semiconductors", J. Phys. C8, 1189, 1975.
- [8] R. Grimshaw, "Modulation of an internal gravity wave packet in a stratified shear flow ", Wave Motion, 3, 1981, 81-103.
- [9] D.J. Benney, A.C. Newell, "The propagation of nonlinear wave envelopes", J. Math. Phys. 1967, 46, 133-39.
- [10] G.B. Whithan, "linear and nonlinear Waves", J.Wiley & Sons Inc., 1974.
- [11] V.E. Zakharov. 1968,"Stability of periodic waves of finite

amplitude on the surface of a deep fluid", *Soc. Phys. J. Appl. Mec. Tech. Phys.*, 4, 190-194.

- [12] A. Jeffery, T. Kawahara, "Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory", Pittman, 1982.
- [13] Y. Kuramoto, "Diffusion induced chaos in reaction systems" *Progress of Theoretical Physics* supp. (64), 346, 1978.
- [14] H. Moon, P. Huerre, L.G. Redekopp, "Three-frequency Motion and chaos in the Ginzburg-Landau equation, *Phys. Rev. Letters* 49(7): 458, Aug. 1982.
- [15] H. Moon, P. Huerre, L.G. Redekopp, "Transition to chaos in the Ginzburg-Landau Equation", *Physica D* 7 : 135, 1983.
- [16] K. Nozaki, N. Bekki, "Pattern selection and spatio-temporal transition to chaos in the Ginzburg-Landau equation, *Phys. Rev. Lett.* 51: 2171, 1983.
- [17] C.S. Bretherton, E.A. Spiegel, "Intermittency through modulational instability, *Phys. Lett.* Vol. 96A, No.8, 20, June 1983.
- [18] L. Keefe, "Dynamics of perturbed Wavetrain Solutions to the Ginzburg-Landau equation" Ph.D. Dissertation, University of southern california, 1984.
- [19] J.M.T. Thompson, and H.B. Stewart, "Nonlinear dynamics and chaos", University College London, 1991
- [20] F. de Carfort "Asservissement linéaires continus" Dunod
- [21] J.J. Di Stefano, A.R. Stubberud, I. J. Williams "Systèmes Asservis" cours et problèmes, Serie schaum.
- [22] T. S. Parker and L.O. Chua, "Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems" *IEEE* august 1987.
- [23] T.M. Thompson and H.B Stewart, *Non linear dynamics and chaos* 1995.
- [24] M. Hasler et J. Neiryck: *Circuits non linéaires*. Presses Polytechniques Romandes, 1985.
- [25] R. J. Deissler, "Noise Sustained structure intermittency and the Ginzburg-Landau equation". In. P.K. Newton. Phd. Brown

University, May 1986.

- [26] R. C. Deprima, W. Eckhaus, and L. A. Segel, **Non-linear wave-number interaction in near-critical two dimensional flows**, *J. Fluid Mech.*, 49,705, 1971.
- [27] D. J. Benney and G. J. Roskes, **Wave instabilities**, *Stud. Appl. Math.* 48, 377 , 1969.
- [28] A. Davey and K. Stewartson, **"On three-dimensional packets of surface wave"***Proc. Roy. Soc. London* , A338, 101, 1974.
- [29] T. B. Benjamin and J. E. Feir, **The disintegration of wave trains on deep water**, *J. Fluid Mech.*, 27, 417, 1967.
- [30] H. Hasimoto and H. Ono, **"Nonlinear modulation of gravity waves"**.*J. Phys. Soc. Japan*, 33, 805, 1972.
- [31] W. Eckhaus, **"Studies in non-Linear Stability Theory"**, *Springer Tracts in Natural Philosophy*, vol. 6, Springer-Verlag, 1965.
- [32] J. T. Stuart and R. C. Diprima, **"The Eckhaus and Benjamin-Feir resonance mechanisms"** *Proc. Roy. Soc. Lond. A* , 362, 27, 1978.
- [33] P. K. Newton , **"Instabilites in the Ginzburg-Landau Equation"** Ph. D., Brown University, May 1986.
- [34] V. V. Nemytiskiki and V. V. Stepanov, **"Qualitative Theory of differential Equations"**, Princeton Univ. Press, 1960.
- [35] P. K. Newton, L. Sirovich **" Instabilities of the Ginzburg-Landau Equation: Periodic Solutions"**, In P.K. Newton. 1987.
- [36] M. Abramowitz, I.A. Stegun eds. **"Handbook of Mathematical Functions"**, Dover Publications, Inc., New york,1965.
- [37] M.Henon/**on the numerical computation of poincaré map**.*Physica* 5D: 412-14, 1982.

ANNEXE

Dans la majorité des cas, la cart de Poincaré n'est pas donnée par des équations explicites; elle est définie implicitement par (1) et (2).

Pour trouver l'image d'un point p de Σ , on doit suivre la trajectoire partant de ce point jusqu'à ce qu'elle coupe Σ une fois encore. On est donc confronté à deux problèmes pratiques?:

(i) Intégrer numériquement le système d'équations différentielles (1) pour calculer la trajectoire;

(ii) Detecter et calculer les intersections avec la surface de la section Σ définie par (2).

Le premier problème a été étudié intensivement et peut être considéré comme complètement résolu: Maintenant , on peut choisir entre plusieurs algorithmes d'intégration avec lesquels on peut trouver les trajectoires. Le problème se pose surtout au niveau du second point. La technique usuelle est d'intégrer, c'est-à-dire, d'obtenir une séquence des points d'intégration sur la trajectoire, et d'évaluer S donnée par (2) à chaque point d'intégration jusqu'à ce qu'un changement de signe est détecté, cela veut dire que la surface de la section Σ a été coupée; le point d'intersection est alors trouvé par interpolation. Ici le choix doit être fait . On peut faire une interpolation linéaire entre les deux derniers points d'intégration; cette méthode est simple mais produit une erreur qui est inacceptable dans plusieurs cas. (on ne peut pas calculer avec précision le point d'intersection c'est-à-dire le point qui se trouve exactement sur la surface de section $\Sigma!$).

Une méthode pour s'en sortir de cette difficulté consiste à trouver une combinaison d'intégration tel que un point d'integration se positionner exactement sur la surface de la section Σ .

On considère le cas où (2) a la forme simple:

$$x_1 - a = 0 \quad (3)$$

où a est une constante, cette forme particulière est la plus fréquemment utilisée en pratique. Par un changement de coordonnées, on peut écrire (3) sous la forme:

$$x_N - a = 0 \quad (4).$$

Notre problème est que x_N dans (4) est une variable dépendante; cependant on ne peut pas spécifier d'avance sa variation d'un seul pas d'intégration. *Cette observation nous donne la clé:*

On réarrange le système différentiel de telle sorte que x_N devienne la variable indépendante! Ceci est fait en divisant les (N-1) premières équations différentielles dans (1) par la dernière, et inverser la dernière fonction:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dx_N} = \frac{f_1}{f_N} \\ \frac{dx_{N-1}}{dx_N} = \frac{f_{N-1}}{f_N} \\ \frac{dt}{dx_N} = \frac{1}{f_N} \end{array} \right. \quad (5)$$

t devient maintenant une variable dépendante; x_N la variable indépendante. La procédure pratique est comme suit :

On intègre numériquement le système donné par (1) jusqu'à ce qu'un changement de signe est détecté sur la quantité $S = x_N - a$. On se déplace alors au système (5), et en utilisant le dernier point calculé comme un point initial (dernier point avant le changement de signe) on intègre le système (5) pour un seul pas, et prenant comme pas d'intégration:

$$\Delta x_N = -8 \tag{6}.$$

Après ce pas d'intégration la trajectoire se positionne exactement sur la surface de section de Poincaré Σ .

Après avoir noté les coordonnées de ce point, on revient au système (1) pour terminer l'intégration.

La seule erreur dans cette procédure est l'erreur d'intégration pour le système (5).