

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET**  
**DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITE CONSTANTINE 1**  
**FACULTE DES SCIENCES DE LA TECHNOLOGIE**  
**DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE**

N° d'Ordre :.....

Série :.....

**MÉMOIRE DE MAGISTER**

**Présenté par :**

**Mr Mohamed Charef**

**Option : Contrôle**

**Thème :**

**Commande d'ordre fractionnaire basée sur la "fractionalisation"  
des correcteurs classiques PID**

Soutenu le : 29 /06 /2014

Examiné par le jury :

Président	: B. Boutamina	Maître de Conférences A	Université Constantine 1
Rapporteur	: A. Charef	Professeur	Université Constantine 1
Examineur	: S. Ladaci	Maître de Conférences A	Université de Skikda
Examineur	: A. Djouambi	Maître de Conférences A	Université de O.E. Bouagui

Année 2014

## DÉDICACE

*A mes très chers parents,*

*A mes adorables frères et sœurs,*

*A toute ma famille,*

*A tous mes amis,*

*A tous ce que j'aime,*

*Je dédie ce travail.*

Charef Mohamed

# *Remerciement*

Je remercie Allah tout puissant qui ma donné la force et la volonté pour pouvoir finir ce mémoire de magister.

Je tiens à remercier profondément mon encadreur: le Professeur Abdelfatah Charef pour la confiance qu'il m'a accordée, ses encouragements, et ses précieux conseils, et pour son effort dans ce travail.

J'exprime ma gratitude envers Dr Brahim Boutamina Maître de Conférences à l'université de Constantine1 de m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury.

Je remercie le Dr Abdelbaki Djouambi Maître de Conférences à l'université d'Oum-El-Bouagui d'avoir accepté de juger ce travail en tant qu'examineur.

Je remercie aussi le Dr Samir Ladaci Maître de Conférences à l'université 20 août 1955 de Skikda, d'avoir accepté de juger ce travail en tant qu'examineur.

Je remercier, tous ceux qui m'ont enseigné durant toutes mes études et en particulier mes enseignants à l'université de Constantine1.

Enfin, je tiens aussi à remercier tous ce qui m'a aidé de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

# Table des matières

<b>Introduction Générale</b> .....	1
 <b>CHAPITRE I : Définition, Caractérisation et Approximation des Opérateurs et Systèmes d'Ordre Fractionnaires</b>	
<b>I.1 Introduction</b> .....	3
<b>I.2 Opérateurs d'ordre fractionnaire</b> .....	3
I.2.1 Définition mathématique .....	3
I.2.1.1 Définition de Grunwald-Letnikov .....	3
I.2.1.2 Définition de Riemann-Liouville .....	4
I.2.1.3 Définition de Caputo .....	4
I.2.2 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire .....	4
I.2.3 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire.....	6
I.2.3.1 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire .....	6
I.2.3.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire .....	6
<b>I.3 Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire</b> .....	6
I.3.1 Méthode de Charef : fonction de singularité.....	7
I.3.1.1 Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire .....	7
I.3.1.2 Approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire .....	11
<b>I.4 Systèmes d'ordre fractionnaire</b> .....	14
I.4.1 Définitions.....	14
I.4.2 Approximation du pôle à puissance fractionnaire.....	14
I.4.3 Approximation du zéro à puissance fractionnaire (ZPF) .....	15
I.4.4 Approximation paire de pôle complexe à puissance fractionnaire .....	16
<b>I.5 Conclusion</b> .....	18
 <b>CHAPITRE II : Introduction aux Correcteurs d'Ordre Fractionnaire</b>	
<b>II.1 Introduction</b> .....	19
<b>II.2 Commande d'ordre fractionnaire</b> .....	20
II.2.1 Commande CRONE .....	20
II.2.2 Correcteur d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$ .....	21

II.2.3 Correcteur d'ordre fractionnaire TID .....	22
II.2.4 Correcteur avance-retard de phase d'ordre fractionnaire .....	23
II.2.5 Commande avec référence la fonction de Bode idéale .....	24
<b>II.3 Conclusion</b> .....	<b>25</b>

### **CHAPITRE III : Conception et Analyse des Correcteurs d'Ordre Fractionnaire par "fractionalisation"**

<b>III.1 Introduction</b> .....	<b>26</b>
<b>III.2 Présentation de la méthode</b> .....	<b>26</b>
III.2.1 Motivation .....	26
III.2.2 Méthode de réglage .....	28
III.2.3 Approximation des correcteurs fractionnaire par une fonction rationnelle .....	28
<b>III.3 Analyse de la stabilité</b> .....	<b>29</b>
III.3.1 Stabilité dans le plan de Bode .....	29
III.3.2 Analyse de la stabilité du système asservi après "fractionalisation" .....	30
III.3.2.1 Fractionalisation d'un PI .....	31
III.3.2.2 Fractionalisation d'un PID .....	32
<b>III.4 Exemple illustratif</b> .....	<b>33</b>
<b>III.5 Conclusion</b> .....	<b>36</b>

### **CHAPITRE IV : Applications de la Commande Fractionnaire par Fractionalisation**

<b>IV.1 Introduction</b> .....	<b>37</b>
<b>IV.2 Application 1</b> : Commande de position angulaire d'un moteur à courant continu.....	<b>37</b>
<b>IV.3 Application 2</b> : Commande de la pression de vapeur de séchage.....	<b>42</b>
<b>IV.4 Conclusion</b> .....	<b>45</b>

<b>Conclusion Générale</b> .....	<b>46</b>
----------------------------------	-----------

<b>Références</b> .....	<b>47</b>
-------------------------	-----------

## Table des figures

<b>Figure I.1</b>	Choix des singularités pour l'approximation d'un intégrateur d'ordre fractionnaire .....	9
<b>Figure I.2</b>	Tracé de Bode de $\frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^m}$ et son approximation.....	10
<b>Figure I.3</b>	Réseau équivalent d'un intégrateur d'ordre fractionnaire.....	11
<b>Figure I.4</b>	Réseau équivalent d'un dérivateur d'ordre fractionnaire. ....	13
<b>Figure II.1</b>	Disposition du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ dans le plan $(\lambda, \mu)$ .....	22
<b>Figure II.2</b>	Réponse fréquentielle du correcteur avance-retard de phase d'ordre fractionnaire .....	23
<b>Figure II.3</b>	Système asservi avec fonction de Bode idéale .....	24
<b>Figure II.4</b>	Réponse fréquentielle fonction de Bode idéale .....	25
<b>Figure III.1</b>	Système de commande à retour unitaire .....	26
<b>Figure III.2</b>	Tracé de Bode des correcteurs PI et $(PI)^m$ pour $m=0.21, 0.54$ et $0.87$ .....	27
<b>Figure III.3</b>	Tracé de Bode de FTBO de deux systèmes asservis stable et instable .....	29
<b>Figure III.4</b>	Système de commande classique à retour unitaire .....	34
<b>Figure III.5</b>	Système de commande fractionnaire à retour unitaire .....	34
<b>Figure III.6</b>	Tracé de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte des deux systèmes asservis classique et fractionnaire.....	35
<b>Figure III.7</b>	Les réponses indicielles des deux systèmes asservis classique et fractionnaire .....	35
<b>Figure IV.1</b>	Moteur à courant continu à commande par la tension d'induit.....	37
<b>Figure IV.2</b>	Schéma de l'induit d'un moteur à courant continu à commande par la tension d'induit .....	38
<b>Figure IV.3</b>	Schéma fonctionnelle du moteur à courant continu commandé par l'induit .....	39
<b>Figure IV.4</b>	Commande de position angulaire d'un moteur à courant continu.....	39
<b>Figure IV.5</b>	Tracé de Bode de fonction de transfert en boucle ouverte du système asservi classique.....	40
<b>Figure IV.6</b>	Tracé de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte des deux systèmes asservis classique et fractionnaire.....	41
<b>Figure IV.7</b>	les réponses indicielles des deux systèmes asservis classique et fractionnaire .....	42
<b>Figure IV.8</b>	Tracé de Bode de fonction de transfert en boucle ouverte du système asservi classique .....	43

<b>Figure IV.9</b>	Tracé de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte des deux systèmes asservis classique et fractionnaire. ....	44
<b>Figure IV.10</b>	les réponses indicielles des deux systèmes asservis classique et fractionnaire .....	45

## Résumé:

Le correcteur PID est la technique la plus utilisée dans l'asservissement des processus industriels pour des décennies. L'idée d'employer le calcul fractionnaire dans les boucles de contrôle des systèmes datait du début des années 60. Récemment, des correcteurs d'ordre fractionnaire ont été proposés. L'intérêt pour ce type de correcteurs est justifié par une meilleure flexibilité dans la conception de la commande puisqu'ils ont un ou plusieurs paramètres en plus. Ces paramètres peuvent être utilisés pour satisfaire des performances additionnelles dans la conception des systèmes asservis.

Dans ce mémoire, une méthode de conception de correcteurs d'ordre fractionnaire utilisant une nouvelle technique dite "fractionalisation" des correcteurs PID classiques en se basant sur la théorie des opérateurs et systèmes d'ordre fractionnaire a été proposée. Cette méthode utilise un système asservi classique conçu avec un correcteur PID utilisant n'importe quelle technique de réglage du correcteur PID ; puis le correcteur PID classique est transformé à un correcteur d'ordre fractionnaire par une technique qui consiste à élever la fonction de transfert du correcteur PID classique à une puissance réelle. Des exemples illustratifs ont été présentés pour démontrer l'efficacité de la méthode de commande proposée. L'application de cette nouvelle méthode de commande à des processus benchmarks a été faite pour démontrer aussi l'amélioration des performances des systèmes asservis comparées à ceux obtenues par les correcteurs PID classique correspondant aux correcteurs d'ordre fractionnaire réalisés.

**Mots Clés:** Opérateur d'ordre fractionnaire, Système d'ordre fractionnaire, Correcteur PID, Correcteur d'ordre fractionnaire, Réglage de correcteurs

## **Introduction générale**

Depuis les premiers travaux des dérivées d'ordre fractionnaire il y'a quelques siècles, la théorie du calcul fractionnaire a été développée dans la plupart du temps par des mathématiciens. Dans les dernières décennies un intérêt considérable a été porté au calcul fractionnaire par l'application de ces concepts dans différents domaines de la physique et de l'ingénierie. Beaucoup de systèmes physiques ont affiché un comportement dynamique d'ordre fractionnaire, tels que les systèmes viscoélastique [1], la polarisation électrode électrolyte [2], polarisation d'interfaces [3], le comportement cardiaque [4]. C'est seulement dans les dernières années que l'on peut trouver un progrès signifiant de travaux théoriques qui peuvent servir comme fondation dans la théorie des systèmes et la théorie de la commande [5,6, 7]. Donc, un travail de recherche intensif est encore en cours dans plusieurs domaines d'ingénierie pour l'application de ces concepts d'ordre fractionnaire.

L'idée d'employer le calcul fractionnaire dans les boucles de contrôle des systèmes datait du début des années 60. Oustaloupa développé la Commande Robuste d'Ordre non Entier (CRONE) et a appliqué cette technique dans de divers domaines des systèmes de commande [8]. En profitant des propriétés avantageuses des systèmes d'ordre fractionnaire, ce régulateur permettait d'assurer la robustesse de la commande dans une bande de fréquences donnée. Depuis cette initiative, la commande d'ordre fractionnaire captiva l'intérêt de beaucoup de chercheurs. En 1999, Podlubny a proposé le régulateur  $PI^\lambda D^\mu$ , une généralisation du correcteur PID classique, comprenant une intégration fractionnaire d'ordre  $\lambda$  et une dérivation fractionnaire d'ordre  $\mu$  [9].

Ce travail porte essentiellement sur la contribution au développement d'une technique de la commande classique en utilisant les concepts de la théorie des opérateurs et systèmes d'ordre fractionnaire. Les travaux réalisés sont basés sur l'utilisation des opérateurs et des systèmes d'ordre fractionnaire dans les schémas de commande classique pour obtenir des correcteurs d'ordre fractionnaire. La méthode de conception des correcteurs d'ordre fractionnaire proposée est basée sur une nouvelle technique dite « fractionalisation » des correcteurs PI et PID classiques pour améliorer les performances des systèmes asservis sans toucher à sa stabilité initiale. Cette méthode utilise un système asservi classique conçu avec un correcteur PI ou PID utilisant n'importe technique de réglage du correcteur PID ; puis le correcteur PID classique est transformé à un correcteur d'ordre fractionnaire par la technique de « fractionalisation » qui consiste à élever la fonction de transfert du correcteur PI ou PID

classique à une puissance réelle. L'intérêt de ce genre de correcteurs est justifié par une meilleure flexibilité, puisqu'il a un paramètre supplémentaire qui est l'ordre fractionnaire. Ce paramètre peut être employé pour remplir des caractéristiques additionnelles pour l'amélioration ou l'optimisation des performances ou d'autres conditions intéressantes pour le système à commander.

Les travaux réalisés et les résultats obtenus faisant l'objet de ce mémoire sont présentés en quatre chapitres.

Le chapitre 1 rappelle quelques notions de base sur le calcul d'ordre fractionnaire, dans le but de simplifier la compréhension de ce qui suivra. Une présentation de la méthode de fonction de singularité est donnée pour être utilisée comme méthode d'approximations des opérateurs d'ordre fractionnaire et les systèmes d'ordre fractionnaire.

Le chapitre 2 présente l'historique de l'utilisation du calcul fractionnaire dans les boucles de contrôle des systèmes asservis ainsi que les correcteurs d'ordre fractionnaire proposés dans la littérature.

Le chapitre 3 est consacré à la présentation de la méthode proposée pour la commande des correcteurs(PID)<sup>m</sup> d'ordre fractionnaire par « fractionalisation », la méthode est basée sur les paramètres des correcteurs PI ou PID classiques existants et la minimisation d'un critère de performance. Une comparaison avec la structure PI ou PID classique y est également présentée pour montrer l'intérêt des correcteurs(PI)<sup>m</sup> ou (PID)<sup>m</sup> d'ordre fractionnaire notamment vis à vis des variations des paramètres du système à commander.

Le chapitre 4 est consacré l'application de cette nouvelle méthode de commande à des processus benchmarks.

# CHAPITRE I

## Définition, Caractérisation et Approximation des Opérateurs et Systèmes d'Ordre Fractionnaires

### SOMMAIRE

---

**I.1 Introduction**

**I.2 Opérateurs d'ordre fractionnaire**

**I.3 Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire**

**I.4 Systèmes d'ordre fractionnaires**

**I.5 Conclusion**

---

## I.1 Introduction

Le Calcul d'ordre fractionnaire est un domaine des mathématiques qui traite des dérivés et intégrales des ordres non entiers, en d'autres termes il s'agit d'une généralisation du calcul traditionnel qui conduit à des concepts et des outils similaires mais avec une application beaucoup plus large. Dans les deux dernières décennies le calcul fractionnaire a été redécouvert par les scientifiques et les ingénieurs et a été appliqué dans un nombre croissant de domaines notamment dans le domaine de la théorie de la commande. Le succès des contrôleurs d'ordre fractionnaire est incontestable avec beaucoup de succès en raison d'émergence de méthodes efficaces dans la différenciation et l'intégration des équations d'ordre non entier.

## I.2 Opérateurs d'ordre fractionnaire

### I.2.1 Définition mathématique

Le calcul fractionnaire est une généralisation de l'intégration et de la différenciation à l'opérateur fondamental d'ordre non entier  ${}_a D_t^\alpha$  où  $a$  et  $t$  sont des limites de l'opération.

L'opérateur intègro-différentiel continu est défini comme [6]:

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{-\alpha} & \alpha < 0 \end{cases}$$

Où  $\alpha$  est l'ordre de l'opération, généralement  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Les définitions utilisées pour la diffère-intégral d'ordre fractionnaire général sont la définition de Grunwald-Letnikov (GL), la définition de Riemann Liouville (RL) et la définition de Caputo.

#### I.2.1.1 Définition de Grunwald-Letnikov

Une des définitions les plus rencontrées de la dérivée d'ordre fractionnaire est appelée définition de Grunwald-Letnikov [6], donnée par :

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{{}_a d_t^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh)$$

(I.1)

Cette définition provient de la généralisation aux ordres fractionnaires de la formule donnant la dérivée d'ordre entier supérieur  $n$  d'une fonction continue  $f(t)$ , soit :

$$D^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh) \quad n, N \in \mathbb{N}$$

Sous la condition que les dérivées  $f^{(k)}(t)$  ( $k=1,2,\dots,m+1$ ) sont continues dans  $[t_0, t]$  avec  $m \leq \Re(\alpha) \leq m+1$ , la définition de Grunwald-Letnikov peut être aussi donnée par [10] :

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \quad (I.2)$$

Où  $\Gamma(\alpha)$  est la fonction Gamma généralisée aux nombres fractionnaires, définie par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx \quad (I.3)$$

### **I.2.1.2 Définition de Riemann-Liouville**

Une autre définition très utilisée de la dérivée d'ordre fractionnaire est appelée définition de Riemann-Liouville. Inspirée de la formule de Cauchy donnée par l'équation :

$${}_a D_t^{-n} f(t) = \int_a^t \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f(x) dx \quad (I.4)$$

La définition complète de Riemann-Liouville de la dérivée ou de l'intégrale d'ordre fractionnaire  $\alpha$  de  $f(t)$  est donnée par [6]:

$${}_a D_t^{-\alpha} f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-x)^{-\alpha-1} f(x) dx, & \text{si } \Re(\alpha) < 0 \\ f(t) & \text{si } \Re(\alpha) = 0 \\ D^n [{}_a D_t^{\alpha-n} f(x)] & , n = \min\{k \in \mathbb{N} : k > \Re(\alpha)\}, \text{ si } \Re(\alpha) > 0 \end{cases} \quad (I.5)$$

où  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $n$  un entier positif et  $f$  une fonction localement intégrable définie sur  $[t_0, \infty]$ .

### **I.2.1.3 Définition de Caputo**

A la fin des années 60, dans le cadre de ses travaux sur la dissipation dans un matériau viscoélastique linéaire, Caputo a introduit une autre définition de la dérivation d'ordre fractionnaire [11]. L'expression mathématique de cette définition est :

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(r-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{r-\alpha-1} f^{(r)}(\tau) d\tau \quad (I.6)$$

Avec  $r$  est un entier positif vérifiant l'inégalité  $(r-1) < \alpha < r$ .

$f^{(r)}(\tau)$ , étant la dérivée d'ordre entier  $r$ , par rapport à  $\tau$ , de la fonction  $f(\tau)$ .  ${}_a D_t^\alpha f(t)$ , désigne la dérivée d'ordre fractionnaire  $\alpha$  de la fonction  $f(t)$  entre  $a$  et  $t$  selon la définition de Caputo.

### **I.2.2 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire**

Les principales propriétés des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire sont les

suivantes:

- deux paramètres, «  $\alpha$  » et «  $a$  » sont nécessaires pour définir un opérateur d'ordre fractionnaire.
- la définition de la dérivation d'ordre fractionnaire étant basée sur celle d'une intégration d'ordre fractionnaire, une dérivation d'ordre fractionnaire revêt un caractère global contrairement à une dérivation entière. Il s'avère en effet que la dérivée d'ordre fractionnaire d'une fonction  $f$  nécessite la connaissance de  $f(t)$  sur l'intervalle  $[a, t]$ , alors que dans le cas entier, seule la connaissance locale de  $f$  autour de  $t$  est nécessaire. Cette propriété permet d'interpréter les systèmes d'ordre fractionnaire comme des systèmes à mémoire longue, les systèmes entiers étant alors interprétables comme des systèmes à mémoire courte.
- la définition de Grünwald-Letnikov décrit l'unification des deux notions, l'intégral et la dérivée d'ordre fractionnaire [6],
- la dérivée d'ordre fractionnaire de l'intégrale de même ordre d'une fonction temporelle  $f(t)$  donne :

$${}_a D_t^\alpha \circ {}_a I_t^\alpha f(t) = f(t) \text{ avec } \Re(\alpha) > 0$$

cette relation n'étant pas toujours vraie pour  $\Re(\alpha) < 0$

- les opérateurs d'intégration d'ordre fractionnaire vérifient la propriété de semi-groupe, soit [5] :

$${}_a I_t^{n1} \circ {}_a I_t^{n2} f(t) = {}_a I_t^{n1+n2} f(t) \text{ avec } \begin{cases} \Re(n2) > 0 \\ \Re(n1) > 0 \end{cases}$$

- contrairement aux opérateurs d'intégration d'ordre fractionnaire, les opérateurs de dérivation d'ordre fractionnaire (réel ou complexe), ne vérifient la propriété de semi-groupe que sous certaines conditions [6], soit :

$${}_a D_t^{n1} ({}_a D_t^{n2} f(t)) = {}_a D_t^{n1+n2} f(t)$$

et

$${}_a D_t^r ({}_a D_t^n f(t)) = {}_a D_t^{r+n} f(t) \text{ si } \begin{cases} r \text{ entier positif} \\ n \text{ arbitraire} \end{cases}$$

- l'opérateur de dérivation d'ordre fractionnaire (réel ou complexe) est linéaire [13]. Ainsi, si  $y$  et  $g$  sont deux fonctions continues et  $(\lambda, \mu)$  réelles, on aura :

$$D^{(\alpha)}(\lambda \cdot y + \mu \cdot g) = \lambda \cdot D^{(\alpha)}(y) + \mu \cdot D^{(\alpha)}(g)$$

- pour  $\alpha = 0$ ,  $D^\alpha y(t)$  est l'opérateur identité ( $D^0 y(t) = y(t)$ ).

### I.2.3 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire

#### I.2.3.1 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire

Nous commencerons par la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha > 0$  définie par l'équation(I.5), qu'on peut écrire comme une convolution des fonctions  $g(t) = t^{\alpha-1}$  et  $f(t)$  [12]:

$$I^\alpha f(t) = D^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = t^{\alpha-1} * f(t) \quad (I.7)$$

La transformée de Laplace de la fonction  $t^{\alpha-1}$  est :

$$G(s) = L\{t^{\alpha-1}; s\} = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha} \quad (I.8)$$

En utilisant la formule de la transformée de Laplace de la convolution:

$$L\{f(t) * d(t); s\} = F(s)G(s)$$

On obtient la transformée de Laplace de l'intégrale de Riemann-Liouville, de Gründwald- Leitnikovet de Caputo :

$$L\{I^\alpha f(t)\} = s^{-\alpha} F(s) \quad (I.9)$$

#### I.2.3.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire

Nous citons dans ce qui suit la transformée de Laplace des différentes définitions de la dérivée.

- **Dérivée de Riemann-Liouville :**

$$L\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum s^k [D^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0} \quad (I.10)$$

Avec  $(n-1) < \alpha < n$ . Cette transformée de Laplace de la dérivée de Riemann- Liouville est bien connue [10]. Mais son applicabilité en pratique est limitée à cause de l'absence d'interprétation physique des valeurs limites des dérivées d'ordre fractionnaire pour  $t=0$ .

- **Dérivée de Gründwald-Leitnikov**

$$L\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) \quad (I.11)$$

- **Dérivée de Caputo**

$$L\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^k(0) \quad (I.12)$$

### I.3 Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire

D'habitude les simulations sont effectuées avec un logiciel préparé pour traiter seulement les puissances d'ordre entier de  $s$ . Alors il est très important de trouver des approximations d'ordre entier pour des fonctions de transfert d'ordre fractionnaire. Autrement

dit, lorsque les simulations doivent être exécutées ou les correcteurs doivent être implémentés, les fonctions de transfert d'ordre fractionnaire sont remplacées par des fonctions de transfert d'ordre entier, avec un comportement assez identique à celles désirées, mais beaucoup plus facile à manipuler. Il existe différentes méthodes pour trouver de telles approximations, les approximations disponibles dans le domaine  $s$  sont appelées des approximations analogiques ou des approximations du domaine fréquentiel. Dans la littérature il existe plusieurs méthodes d'approximation analogique des systèmes d'ordre fractionnaire, et les plus utilisées sont:

- Méthode EFC (Expansion Fractionnaire Continue)
- Méthode de Charef
- Méthode d'Oustaloup

La méthode de Charef est plus élaborée et plus pratique pour les approximations des fonctions de transferts d'ordre fractionnaire, c'est pourquoi nous l'avons utilisée pour l'implémentation de nos schémas de commande et nous la présenterons en détail dans la suite.

### **I.3.1 Méthode de Charef : fonction de singularité**

Dans le but d'implémenter des modèles d'ordre fractionnaire dans les schémas de commande présentés dans ce travail, nous utiliserons la méthode appelée "méthode de la fonction de singularité" développée par Charef et al. [14], [15] qui est présentée dans cette section.

Cette approche repose sur une méthode graphique; elle consiste à approximer la ligne de pente fractionnaire sur le tracé de Bode de la fonction de transfert irrationnelle par un nombre de lignes sous forme de Zig-Zag, produite par une alternance de pente correspondant à une alternance de pôles et de zéros.

#### **I.3.1.1 Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire**

La fonction de transfert de l'opérateur intégrale d'ordre fractionnaire est représentée par la fonction irrationnelle suivante :

$$H_I(s) = \frac{1}{s^m} \quad (I.13)$$

avec  $s = j\omega$  la fréquence complexe et  $m$  est un nombre positif tel que  $0 < m < 1$ .

Dans une bande de fréquence donnée  $[\omega_b, \omega_h]$ , cet opérateur d'ordre fractionnaire peut être modelé dans le domaine fréquentiel par un pôle à puissance fractionnaire (PPF) comme suit :

$$H_I(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m} \quad (I.14)$$

Si on suppose que pour  $\omega \in [\omega_b, \omega_h]$  on a  $\omega \gg \omega_c$ , on peut alors écrire :

$$H_I(s) = \frac{K_I}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^m} = \frac{K_I \omega_c^m}{s^m} = \frac{1}{s^m} \quad (I.15)$$

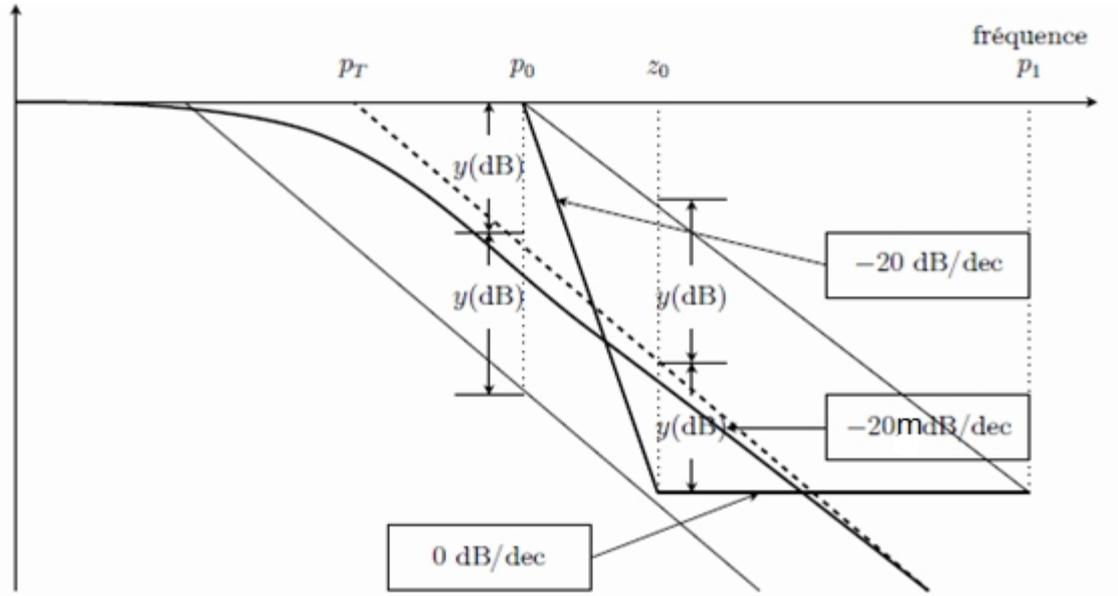
avec  $K_I = \left(\frac{1}{\omega_c^m}\right)$  et  $\omega_c$  est la fréquence de coupure du PPF, obtenue à partir de la basse

fréquence  $\omega_b$ ,  $\omega_c = \omega_b \sqrt{10^{\left(\frac{\varepsilon}{10m}\right)} - 1}$  ou  $\varepsilon$  est l'erreur maximale permise entre la pente de l'opérateur de puissance fractionnaire de l'équation (I.13) et le PPF de l'équation (I.14) dans la bande de fréquence donnée  $[\omega_b, \omega_h]$ . Dans le but de représenter le pôle d'ordre fractionnaire de l'équation (I.14) et par conséquent l'intégrateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une fonction de transfert rationnelle. La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de -20m dB/dec sur le tracé de Bode du PPF par un nombre de ligne sous forme de Zig-Zag, produite par une alternance de pente -20 dB/dec et 0 dB/dec correspondant à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négative du plan s tel que  $p_0 < z_0 < p_1 < z_1 < \dots < z_{N-1} < p_N$ . D'où l'approximation suivante :

$$H_I(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (I.16)$$

Les  $p_i$  et les  $z_i$  sont les pôles et les zéros de l'approximation.

En utilisant une méthode graphique simple [14], les pôles et les zéros de l'approximation s'avèrent sous une forme d'une progression géométrique. Cette méthode graphique d'approximation commence par une erreur d'approximation  $y$  en dB et une bande de fréquence d'approximation  $\omega_{max}$ . Le choix des singularités  $p_i$  et  $z_i$  pour l'approximation en maintenant un écart constant entre la ligne à -20m dB/dec et les lignes droites en zig-zag est présenté sur la figure(I.1).



**Figure(I.1) :** Choix des singularités pour l'approximation d'un intégrateur d'ordre fractionnaire

Pour déterminer le nombre  $N$ , la bande de fréquence sur laquelle l'approximation est faite doit être spécifiée, soit " $\omega_{\max}$ " cette bande, telle que  $\omega_{\max}$  est pris 100 fois égal à  $\omega_h$  son expression est donnée par [14]:

$$N = \text{partie entiere} \left[ \frac{\log \left[ \frac{\omega_{\max}}{p_0} \right]}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (\text{I.17})$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$p_i = (ab)^i p_0, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N$$

$$z_i = (ab)^i a p_0, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N-1$$

où  $a$  et  $b$  sont appelés les rapports de position, leurs expressions en fonction de  $y$  et  $m$  sont donnée par :

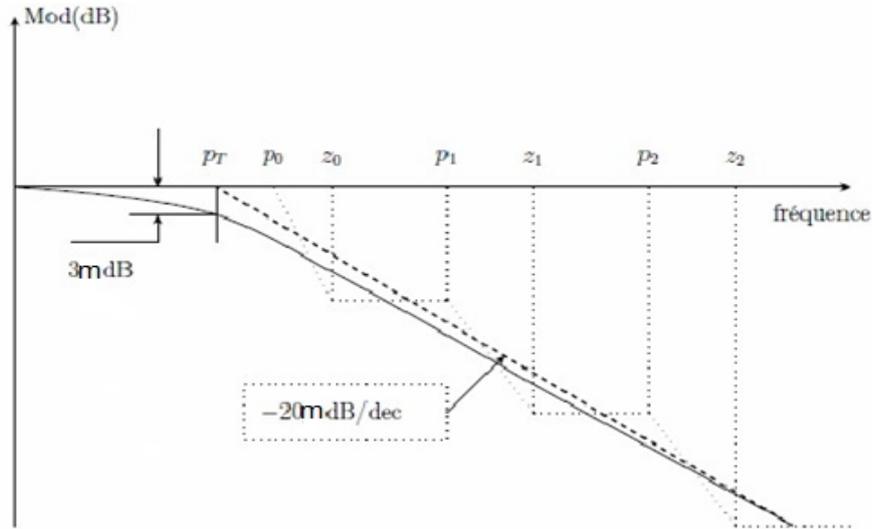
$$a = 10^{\left( \frac{y}{10(1-m)} \right)}, \quad b = 10^{\left[ \frac{y}{10m} \right]}$$

et le premier pôle  $p_0$  et le premier zéro  $z_0$  sont donnés par [14]:

$$p_0 = \omega_c \sqrt{b}, \quad z_0 = a p_0$$

La figure (I.2) présente le diagramme de Bode de  $\frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^m}$  avec une pente de  $-20$  m dB/dec

et son approximation par des lignes en zig-zag avec des pentes individuelles de  $-20$  m dB/dec et  $0$  dB/dec.



**Figure(I.2) :** Tracé de Bode de  $\frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^m}$  et son approximation

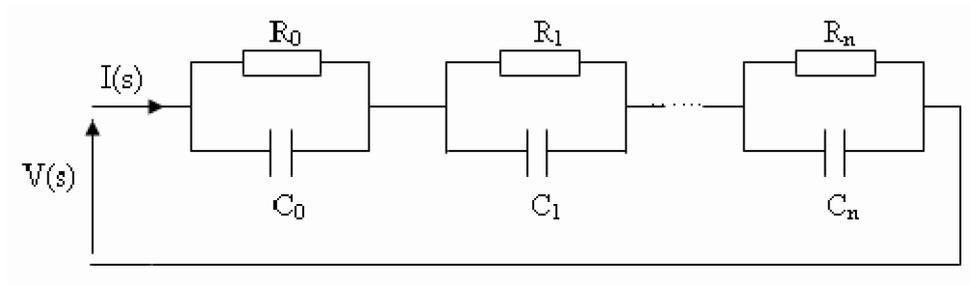
Afin de connaître la contribution de chaque pôle au processus de relaxation. On doit décomposer la fonction rationnelle en somme de fractions élémentaires :

$$H_I(s) = K_i \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{(ab)^i ap_0}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i p_0}\right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i p_0}\right)} \quad (I.18)$$

où les coefficients  $h_i$  sont les résidus et qui sont déterminés par :

$$h_i = K_i \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^i p_0}{(ab)^j ap_0}\right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left(1 - \frac{(ab)^i p_0}{(ab)^j p_0}\right)} = K_i \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^{(i-j)}}{a}\right)}{\prod_{ij=0, j \neq i}^N \left(1 - (ab)^{(i-j)}\right)}, i = 0, 1, \dots, N \quad (I.19)$$

Cette équation correspond à l'impédance d'un réseau RC du type Foster de la 1<sup>ère</sup> forme dont le schéma est représenté dans la figure (I.3) [15].



**Figure(I.3) :** Réseau équivalent d'un intégrateur d'ordre fractionnaire

L'impédance de ce réseau est donnée par :

$$z(s) = \sum_{i=0}^N \left( \frac{R_i}{1 + sR_i C_i} \right) \quad (\text{I.20})$$

que l'on peut faire correspondre à l'équation (I.18) en mettant :

$$R_i = h_i, \quad C_i = \frac{1}{h_i (ab)^i p_0} \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{I.21})$$

### I.3.1.2 Approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire

La fonction de transfert du dérivateur d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$G_D(s) = s^m \quad (\text{I.22})$$

Avec  $s = j\omega$  : la fréquence complexe et  $m$  : est un nombre réel positive tel que  $0 < m < 1$ .

Dans une bande de fréquence donnée  $[\omega_b, \omega_h]$ , cet opérateur d'ordre fractionnaire peut être modelé dans le domaine fréquentiel par un zéro à puissance fractionnaire (ZPF) comme suit [15]:

$$G_D(s) = K_D \left( 1 + \frac{s}{\omega_c} \right)^m \quad (\text{I.23})$$

Si on suppose que pour  $\omega \in [\omega_b, \omega_h]$  on a  $\omega \gg \omega_c$ , on peut écrire :

$$G_D(s) = K_D \left( \frac{s}{\omega_c} \right)^m = \frac{K_D}{\omega_c^m} s^m = s^m \quad (\text{I.24})$$

avec  $K_D = \omega_c^m$  et  $\omega_c$  est la fréquence de coupure de ZPF qui est obtenue à partir de la basse

fréquence  $\omega_b$ ,  $\omega_c = \omega_b \sqrt{10^{\left(\frac{\varepsilon}{10m}\right)} - 1}$  ou  $\varepsilon$  est l'erreur maximale permise entre la pente de l'opérateur de puissance fractionnaire de l'équation (I.22) et le ZPF de l'équation (I.23) dans

une bande de fréquence donnée  $[\omega_b, \omega_h]$ .

Dans le but de représenter le zéro d'ordre fractionnaire de l'équation (I.23), et par conséquent le dérivateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une fonction de transfert rationnelle. La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de  $20\text{dB/dec}$  sur le tracé de Bode du ZPF par un nombre de ligne sous forme de Zig-Zag, produite par une alternance de pente  $20\text{ dB/dec}$  et  $0\text{ dB/dec}$  correspondant à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négative du plan  $s$  tel que  $z_0 < p_0 < z_1 < p_1 < \dots < z_{N-1} < p_N$  [15]. D'où l'approximation suivante :

$$G_D(s) = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{I.25})$$

En utilisant la méthode graphique simple de [14], les pôles et les zéros de l'approximation s'avèrent sous la forme d'une progression géométrique. Cette méthode d'approximation commence par une erreur d'approximation  $y$  en dB et une bande de fréquence d'approximation  $\omega_{\max}$ . Pour déterminer le nombre 'N', la bande de fréquence sur laquelle l'approximation est faite doit être spécifiée, soit " $\omega_{\max}$ " cette bande, tel que  $\omega_{\max}$  est pris 100 fois égal à  $\omega_h$  son expression est donnée par [15]:

$$N = \text{partie entiere} \left[ \frac{\log \left[ \frac{\omega_{\max}}{z_0} \right]}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (\text{I.26})$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$p_i = (ab)^i az_0 \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N$$

$$z_i = (ab)^i z_0 \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N$$

avec :  $z_0 = \omega_c \sqrt{b}$  et  $p_0 = az_0$ . Par conséquent, la fonction rationnelle d'approximation dans une bande de fréquence donnée sera :

$$G_D(s) = s^m = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i z_0}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i az_0}\right)} \quad (I.27)$$

Pour des raisons concernant la réalisation, on doit décomposer la fonction rationnelle  $\frac{G_D(s)}{s}$  en fonctions élémentaires, alors :

$$\frac{G_D(s)}{s} = \frac{1}{s} \cdot K_D \cdot \prod_{i=0}^N \frac{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i z_0}\right)}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i az_0}\right)} \quad (I.28)$$

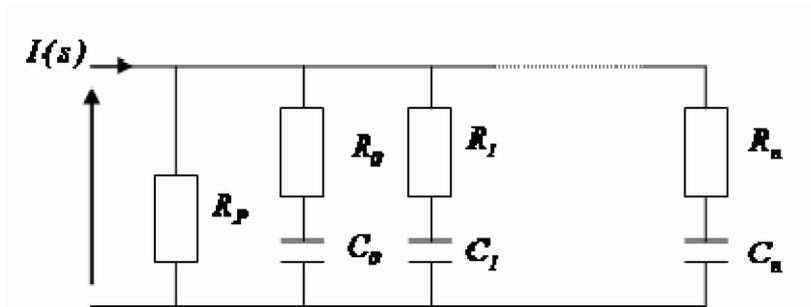
Calculant les résidus des pôles, on obtient :

$$G_D(s) = G_0 + \sum_{i=0}^N \frac{g_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (I.29)$$

avec  $G_0 = K_D$ , et

$$g_i = K_D \frac{\sum_{j=0}^N (1 - (ab)^{(i-j)} a)}{\left(- (ab)^i az_0\right) \prod_{j=0, j \neq i}^N (1 - (ab)^{(i-j)})} \quad (I.30)$$

Cette équation correspond à l'admittance d'un réseau du type Foster de la 2<sup>ème</sup> forme, dont le schéma est représenté à la figure (1.4) [15].



**Figure (1.4) :** Réseau équivalent d'un dérivateur d'ordre fractionnaire.

L'admittance de ce réseau est de la forme :

$$y(s) = \frac{1}{R_p} + \sum_{i=0}^N \left( \frac{sC_i}{1 + sR_iC_i} \right) \quad (I.31)$$

que l'on peut faire correspondre à l'équation (I.29) en mettant :

$$C_i = g_i, \quad R_i = \frac{1}{g_i p_i} \quad \text{et} \quad R_p = G_0 \quad \text{pour} \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (I.32)$$

## **I.4 Systèmes d'ordre fractionnaire**

### **I.4.1 Définitions**

Dans ce contexte, les systèmes d'ordre fractionnaire considérés sont représentés par les fonctions de transfert suivantes [16], pour  $0 < m < 1$  :

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m} \quad (I.33)$$

$$H(s) = \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m \quad (I.34)$$

$$H(s) = \frac{1}{\left(\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1\right)^m} \quad (I.35)$$

La fonction de l'équation (I.33) est appelé pôle à puissance fractionnaire. La fonction de l'équation (I.34) est appelé zéro à puissance fractionnaire. La fonction de l'équation (I.35) est appelé paire de pôle complexe à puissance fractionnaire. Ces trois fonctions sont les éléments de base de ce type de systèmes d'ordre fractionnaire.

### **I.4.2 Approximation du pôle à puissance fractionnaire**

La fonction de transfert irrationnelle du pôle à puissance fractionnaire de l'équation (I.33) peut être approximé, dans une bande fréquentielle  $[0, \omega_h]$ , par une fonction rationnelle en utilisant la technique de la fonction singulière comme suit [16-14]:

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m} \cong \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (I.36)$$

où  $\omega_c$  est la fréquence de coupure,  $m$  est un nombre réel tel que  $0 < m < 1$ ,  $p_i$  et  $z_i$  sont les pôles et les zéros de l'approximation et  $N$  est le nombre de pôles. Les pôles et les zéros de

l'approximation sont générés selon l'algorithme suivant [16]:

$$p_i = (ab)^i p_0, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{I.37})$$

$$z_i = (ab)^i a p_0, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{I.38})$$

Pour une erreur d'approximation en dB  $y$  donnée,  $p_0$ ,  $a$ ,  $b$  and  $N$  sont donnés par [16]:

$$p_0 = \omega_c 10^{\left[\frac{y}{20m}\right]}, \quad a = 10^{\left(\frac{y}{10(1-m)}\right)}, \quad b = 10^{\left[\frac{y}{10m}\right]}, \quad N = \text{partie entiere} \left[ \frac{\log \left[ \frac{\omega_{\max}}{p_0} \right]}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (\text{I.39})$$

où  $\omega_{\max}$  est une fréquence d'approximation tel que  $\omega_{\max} = \delta \omega_h$  avec  $10 < \delta < 1000$ .

Alors, l'expression de la fonction rationnelle de l'équation (I.36) devient:

$$H(s) = \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left( 1 + \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{p_i} \right)} = \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left( 1 + \frac{s}{(ab)^i a p_0} \right)}{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{(ab)^i p_0} \right)} \quad (\text{I.40})$$

La décomposition en éléments simples de la fonction approximante  $H(s)$  de l'équation (I.40) nous permet d'écrire :

$$H(s) = \sum_{i=0}^N \frac{K_i}{\left( 1 + \frac{s}{(ab)^i p_0} \right)} \quad (\text{I.41})$$

où les résidus  $K_i$ , pour  $i = 0, 1, \dots, N$ , sont donnés par l'équation suivante :

$$K_i = \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left( 1 - \frac{(ab)^{i-j}}{a} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left( 1 - (ab)^{i-j} \right)} \quad (\text{I.42})$$

### **I.4.3 Approximation du zéro à puissance fractionnaire (ZPF)**

La fonction de transfert irrationnelle du zéro à puissance fractionnaire de l'équation (I.34) peut être approximé, dans une bande fréquentielle  $[0, \omega_h]$ , par une fonction rationnelle en utilisant la technique de la fonction singulière comme suit [15]:

$$H(s) = \left( 1 + \frac{s}{\omega_c} \right)^m = \frac{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{p_i} \right)} \quad (\text{I.43})$$

où  $\omega_c$  est la fréquence de coupure,  $m$  est un nombre réel tel que  $0 < m < 1$ ,  $p_i$  et  $z_i$  sont les pôles et les zéros de l'approximation et  $N$  est le nombre de pôles. Les pôles et les zéros de l'approximation sont générés, pour  $i = 0, 1, \dots, N$ , selon l'algorithme suivant [15]:

$$p_i = (ab)^i az_0, \quad z_i = (ab)^i z_0 \quad (I.44)$$

Pour une erreur d'approximation en dB  $y$  donnée,  $z_0$ ,  $a$ ,  $b$  and  $N$  sont donnés par [15]:

$$z_0 = \omega_c 10^{\left[\frac{y}{20m}\right]}, \quad a = 10^{\left(\frac{y}{10(1-m)}\right)}, \quad b = 10^{\left[\frac{y}{10m}\right]}, \quad N = \text{partie entiere} \left[ \frac{\log \left[ \frac{\omega_{\max}}{z_0} \right]}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (I.45)$$

où  $\omega_{\max}$  est une fréquence d'approximation tel que  $\omega_{\max} = \delta \omega_h$  avec  $10 < \delta < 1000$ .

Alors, l'expression de la fonction rationnelle de l'équation (I.43) devient:

$$H(s) = \frac{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{p_i} \right)} = \frac{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{(ab)^i z_0} \right)}{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{(ab)^i az_0} \right)} \quad (I.46)$$

La décomposition en éléments simples de la fonction approximante  $H(s)$  de l'équation (I.46) nous permet d'écrire :

$$H(s) = 1 + \sum_{i=0}^N \frac{K_i s}{\left( 1 + \frac{s}{(ab)^i p_0} \right)} \quad (I.47)$$

où les résidus  $K_i$ , pour  $i = 0, 1, \dots, N$ , sont donnés par l'équation suivante :

$$K_i = \left( \frac{-1}{(ab)^i p_0} \right) \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left( 1 - a(ab)^{i-j} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left( 1 - (ab)^{i-j} \right)} \quad (I.48)$$

#### **I.4.4 Approximation paire de pôle complexe à puissance fractionnaire**

La fonction de transfert irrationnelle de la paire de pôle complexe à puissance fractionnaire de l'équation (I.35) peut être aussi approximé, dans une bande fréquentielle  $[0, \omega_h]$ , par une fonction rationnelle en utilisant la technique de la fonction singulière [16]. Deux cas peuvent se présenter :

##### **a) Cas 1 : $0 < m < 0.5$**

Dans ce cas, la fonction irrationnelle  $H(s)$  est tout d'abord approximée comme suit [16]:

$$H(s) = \frac{1}{\left(\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1\right)^m} \cong \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_n}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_n}\right)^\beta}{\left(\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\alpha\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1\right)} \quad (I.49)$$

où  $m$  est un nombre réel tel que  $0 < m < 1$ ,  $\omega_n$  est la fréquence propre du système quand  $m=1$ ,  $\xi$  est le facteur d'amortissement quand  $m=1$ ,  $\alpha = \xi^m$  et  $0 < \beta = 1 - 2m < 1$ . L'approximation du zéro à puissance fractionnaire par une fonction rationnelle est donnée dans la section (I.3.3). Alors, l'expression de la fonction de l'équation (I.49) devient:

$$H(s) = \frac{1}{\left(\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1\right)^m} \cong \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_n}\right)}{\left(\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\alpha\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1\right)} \prod_{i=0}^N \frac{\left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (I.50)$$

Par décomposition en éléments simples on obtient la forme suivante :

$$H(s) = \frac{1}{\left(\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1\right)^m} \cong \frac{As + B}{\left(\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\alpha\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1\right)} + \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (I.51)$$

avec,

$$B = H_a(0) - \sum_{i=0}^N k_i p_i = 1 - \sum_{i=0}^N k_i p_i, \quad A = \frac{\omega_n a^{N+1} - \sum_{i=0}^N k_i p_i}{\omega_n^2} \quad (I.52)$$

$$k_i = \frac{\left(1 - \frac{p_i}{\omega_n}\right)}{\left(\left(\frac{p_i}{\omega_n}\right)^2 - 2\alpha\left(\frac{p_i}{\omega_n}\right) + 1\right)} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\left(1 - \frac{p_i}{z_j}\right)}{\left(1 - \frac{p_i}{p_j}\right)} \quad (I.53)$$

### **b) Cas $0.5 < m < 1$**

Dans ce cas aussi, la fonction irrationnelle  $H(s)$  est approximée, en premier lieu par [16]:

$$H(s) = \frac{1}{\left(\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1\right)^m} \cong \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_n}\right)}{\left(\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\alpha\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_n}\right)^\beta} \quad (I.54)$$

où  $m$  est un nombre réel tel que  $0 < m < 1$ ,  $\omega_n$  est la fréquence propre du système quand  $m=1$ ,

$\xi$  est le facteur d'amortissement quand  $m=1$ ,  $\alpha = \xi^m$  et  $0 < \beta = 2m - 1 < 1$ . L'approximation du pôle à puissance fractionnaire par une fonction rationnelle est donnée dans la section (I.3.2). Alors, l'expression de la fonction de l'équation (I.54) devient:

$$H(s) = \frac{1}{\left( \left( \frac{s}{\omega_n} \right)^2 + 2\xi \left( \frac{s}{\omega_n} \right) + 1 \right)^m} \cong \frac{\left( 1 + \frac{s}{\omega_n} \right)}{\left( \left( \frac{s}{\omega_n} \right)^2 + 2\alpha \left( \frac{s}{\omega_n} \right) + 1 \right)} \prod_{i=0}^N \frac{\left( 1 + \frac{s}{z_i} \right)}{\left( 1 + \frac{s}{p_i} \right)} \quad (I.55)$$

Par décomposition en éléments simples on obtient la forme suivante :

$$H(s) = \frac{1}{\left( \left( \frac{s}{\omega_n} \right)^2 + 2\xi \left( \frac{s}{\omega_n} \right) + 1 \right)^m} \cong \frac{As + B}{\left( \left( \frac{s}{\omega_n} \right)^2 + 2\alpha \left( \frac{s}{\omega_n} \right) + 1 \right)} + \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{\left( 1 + \frac{s}{p_i} \right)} \quad (I.56)$$

avec,

$$B = H_a(0) - \sum_{i=0}^N k_i p_i = 1 - \sum_{i=0}^N k_i p_i, \quad A = \frac{\omega_n a^{-(N+1)} - \sum_{i=0}^N k_i p_i}{\omega_n^2} \quad (I.57)$$

$$k_i = \frac{\left( 1 - \frac{p_i}{\omega_n} \right)}{\left( \left( \frac{p_i}{\omega_n} \right)^2 - 2\alpha \left( \frac{p_i}{\omega_n} \right) + 1 \right)} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\left( 1 - \frac{p_i}{z_j} \right)}{\left( 1 - \frac{p_i}{p_j} \right)} \quad (I.58)$$

## **I.5 Conclusion**

Ce chapitre est une introduction aux éléments de base du calcul d'ordre fractionnaire. Nous avons donné les définitions des opérateurs et des systèmes d'ordre fractionnaire. Les méthodes d'approximation de ces opérateurs et systèmes ont été également présentées. Dans ce chapitre, les systèmes d'ordre fractionnaire considérés sont uniquement ceux nécessaires pour la conception de la commande d'ordre fractionnaire par "fractionalisation" objet de ce mémoire.

# CHAPITRE II

## Introduction aux Correcteurs d'Ordre Fractionnaire

### SOMMAIRE

---

**II.1 Introduction**

**II.2 Commande d'ordre fractionnaire**

**II.3 Conclusion**

---

---

## **II.1 Introduction**

Malgré un éventail très large de processus existants et malgré les diverses formulations envers les exigences requises, le correcteur proportionnel intégral dérivé (PID), dont l'architecture relativement dépouillée consiste en seulement trois termes distincts, s'est imposé dans plus de 90% des boucles de contre-réaction. La prédominance incontestée de ce type de correcteur provient, outre de sa simplicité extrême, des performances qu'il peut offrir aux systèmes en boucle fermée, satisfaisant très souvent les cahiers des charges, si ses paramètres sont choisis judicieusement [17]. Quant à la question de savoir si un correcteur PID est suffisant pour la commande d'un système considéré, une étude qualitative est proposée en [17]. Elle souligne que, lorsque la dynamique d'un système est essentiellement du premier ordre, un correcteur PI est adéquat. C'est également le cas pour un correcteur PID, quand la dynamique dominante est du second ordre. Par contre, si l'ordre du système est plus élevé, les performances peuvent être améliorées par l'utilisation d'autres architectures de contre-réaction. Il résulte également des performances limitées lors de l'emploi de correcteurs PID avec des systèmes possédant des modes oscillants. Aussi, les systèmes dominés par un retard pur engendrent évidemment des difficultés, la prédiction linéaire de l'écart futur par le terme dérivé ne permet pas de résoudre le problème de manière satisfaisante. La structure linéaire du correcteur PID n'est pas adaptée aux systèmes fortement non linéaires. Parfois, d'excellents résultats peuvent néanmoins être obtenus avec d'autre structure de commande. D'ailleurs, bien que plusieurs méthodes de réglage du correcteur PID soient proposées pour commander les systèmes instables les performances obtenues sont souvent modestes [18-19-20-21].

Donc, du à l'augmentation de la complexité des systèmes industriels et aux exigences très élevées en termes de performances et robustesse, pour beaucoup d'applications industriels, le correcteur classique PID ne peut être capable d'accomplir les performances ainsi que la

robustesse désirées. Alors une des possibilités pour résoudre ces exigences est d'utiliser les correcteurs d'ordre fractionnaire qui ont plus de paramètres à régler.

## **II.2 Commande d'ordre fractionnaire**

La décennie précédente a connu des efforts de recherche très remarquable reliés au calcul d'ordre fractionnaire et son application dans la théorie de la commande des systèmes.

Clairement, pour une boucle fermée de commande des systèmes, il existe quatre situations :

- système d'ordre entier avec correcteur d'ordre entier
- système d'ordre entier avec correcteur d'ordre fractionnaire
- système d'ordre fractionnaire avec correcteur d'ordre entier
- système d'ordre fractionnaire avec correcteur d'ordre fractionnaire

En pratique, on considère uniquement le cas du système d'ordre entier avec correcteur d'ordre fractionnaire parce qu'en général le modèle du système peut être déjà obtenu comme un modèle d'ordre entier dans le sens classique.

Du point de vue ingénierie, la signification de commande d'ordre fractionnaire est que c'est une généralisation de la théorie de commande d'ordre entier classique qui pourrait mener à une modélisation plus adéquate et des performances de commande plus robuste. En effet, l'intérêt majeur de la commande d'ordre fractionnaire est l'amélioration ou l'optimisation des performances en utilisant les concepts de la théorie des dérivées, intégrales et des systèmes d'ordre fractionnaire. La première tentative d'appliquer le calcul d'ordre fractionnaire pour la commande des systèmes peut être trouvée dans [22]. Du point de vue historique, il existe dans la littérature quelques structures principales de commande d'ordre fractionnaire [23].

### **II.2.1 Commande CRONE**

Le correcteur CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) a été proposé par Oustaloup au début des années 1990 [8]. La supériorité des performances du correcteur CRONE en

comparaison avec le correcteur PID classique a été démontrée [8]. En profitant des propriétés avantageuses des systèmes d'ordre fractionnaire, ce correcteur permettait d'assurer la robustesse de la commande dans une bande de fréquences donnée, en imposant un gabarit fractionnaire au système de commande en boucle fermée. Ce type de contrôleur est caractérisé par l'effet de l'avance de phase dans une bande limitée. Sa fonction de transfert est donnée par [8]:

$$C(s) = C_0 \frac{(1+s/\omega_b)^r}{(1+s/\omega_h)^{r-1}} \quad (\text{II.1})$$

où  $0 < \omega_b < \omega_h$ ,  $C_0 > 0$  et  $1 < r < 2$ . La réussite de cette approche fut énorme, plusieurs variantes de cette commande ont vu le jour et des applications aussi bien en laboratoire qu'en industrie ont été développées, à titre d'exemple la commande de la suspension de voiture [24].

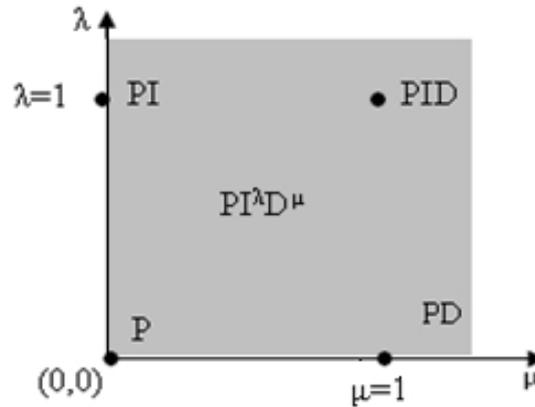
### II.2.2 Correcteur d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$

Le correcteur d'ordre fractionnaire  $PI^\lambda D^\mu$  une généralisation du correcteur PID classique a été proposée par Podlubny en 1999 [9]. Sa fonction de transfert est donnée par [9]:

$$C(s) = K_P + \frac{K_I}{s^\lambda} + K_D s^\mu \quad (\text{II.2})$$

où  $K_p$ ,  $K_I$  et  $K_D$  sont des nombres réels et  $\lambda$  et  $\mu$  sont des nombres réels positives.

De l'équation (II.2), on note que pour  $\lambda = \mu = 1$  le correcteur d'ordre fractionnaire  $PI^\lambda D^\mu$  devient le correcteur PID classique. Figure (II.1) montre la disposition du correcteur d'ordre fractionnaire  $PI^\lambda D^\mu$  dans le plan  $(\lambda, \mu)$ .



**Figure(II.1) :** Disposition du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  dans le plan  $(\lambda, \mu)$

De la figure (II.1), on peut facilement voir que tous les types de correcteurs classiques P, PI, PD and PID sont des cas spéciaux du correcteur d'ordre fractionnaire  $PI^\lambda D^\mu$ . Depuis sa proposition, beaucoup de chercheurs se sont intéressés à l'utilisation et à l'ajustement des paramètres de ce correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire. L'intérêt de ce genre de contrôleurs est justifié par une meilleure flexibilité, puisque en plus des trois paramètres classiques de réglage du correcteur PID, il possède deux autres paramètres de réglage l'ordre d'intégration  $\lambda$  et l'ordre de différentiation  $\mu$ . Ces deux paramètres peuvent être employés pour remplir des caractéristiques additionnelles ou d'autres conditions intéressantes dans la commande des systèmes asservis linéaires.

### II.2.3 Correcteur d'ordre fractionnaire TID

Le correcteur TID a une structure semblable à un correcteur PID classique, mais la composante proportionnelle P est remplacée une composante ayant une fonction de transfert

$\left[ \frac{T}{s^{1/n}} \right]$ , où T est une constante et n est un nombre réel non nul, de préférence entre 2 et 3

[25]. Sa fonction de transfert est donnée par :

$$C(s) = \frac{T}{s^{1/n}} + \frac{I}{s} + Ds \quad (\text{II.3})$$

Le correcteur TID s'approche plus étroitement de la fonction idéale de Bode qui assure un

meilleur rejet de perturbation, et minimise l'effet des variations des paramètres du processus sur la réponse en boucle fermée par rapport aux correcteurs PID.

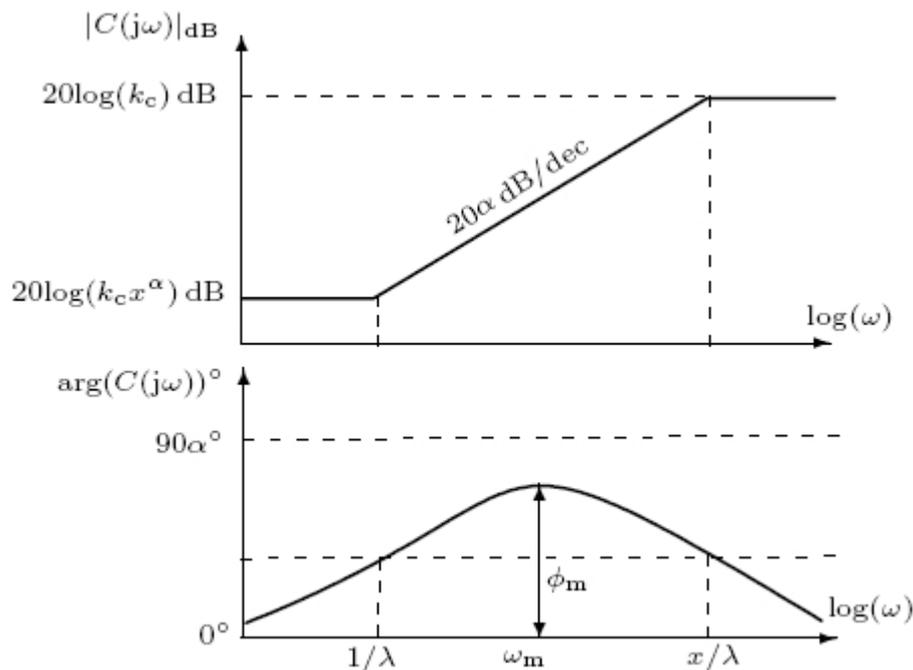
### II.2.4 Correcteur avance-retard de phase d'ordre fractionnaire

Le correcteur avance-retard de phase d'ordre fractionnaire est une généralisation du correcteur avance-retard de phase classique. Il a été proposé dans différents contextes dans [26] et [27].

Sa fonction de transfert est donnée par [27]:

$$C(s) = k_c \left( \frac{s + 1/\lambda}{s + 1/x\lambda} \right)^\alpha = k_c x^\alpha \left( \frac{\lambda s + 1}{x\lambda s + 1} \right)^\alpha \quad (\text{II.4})$$

où  $\lambda$  et  $\alpha$  sont deux réels positifs et  $0 < x < 1$ . Le comportement fréquentiel de ce correcteur est montré dans la figure (II.2).



**Figure(II.2) :** Réponse fréquentielle du correcteur avance-retard de phase d'ordre fractionnaire

Le correcteur avance-retard de phase classique est une méthode de conception populaire des boucles de commande, alors le correcteur avance-retard de phase d'ordre fractionnaire devrait aussi avoir sa valeur comparée aux correcteurs CRONE et  $PI^\lambda D^\mu$ . Cependant, des méthodes

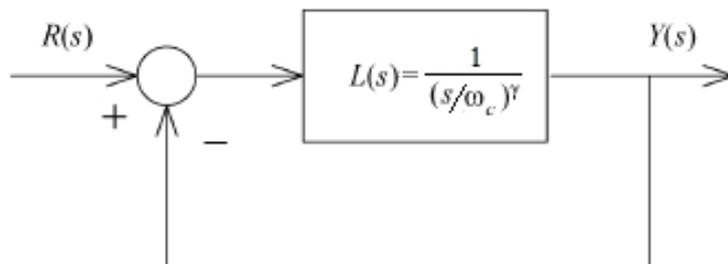
systématiques de conception plus intuitives sont nécessaires.

### II.2.5 Commande avec référence la fonction de Bode idéale

L'iso-amortissement est une propriété très désirable dans les systèmes asservis parce que le système asservi possédant cette propriété sera très robuste vis-à-vis des variations du gain. Pour un système asservi à retour unitaire, la propriété de l'iso-amortissement se reporte au cas où la phase de sa fonction de transfert en boucle ouverte, dans le plan de Bode, est plate. Bode a été le premier qui a proposé une fonction de transfert en boucle ouverte d'un système asservi à retour unitaire garantissant la propriété de l'iso-amortissement [28]. Cette fonction connu sous le nom de fonction de Bode idéale est donnée par :

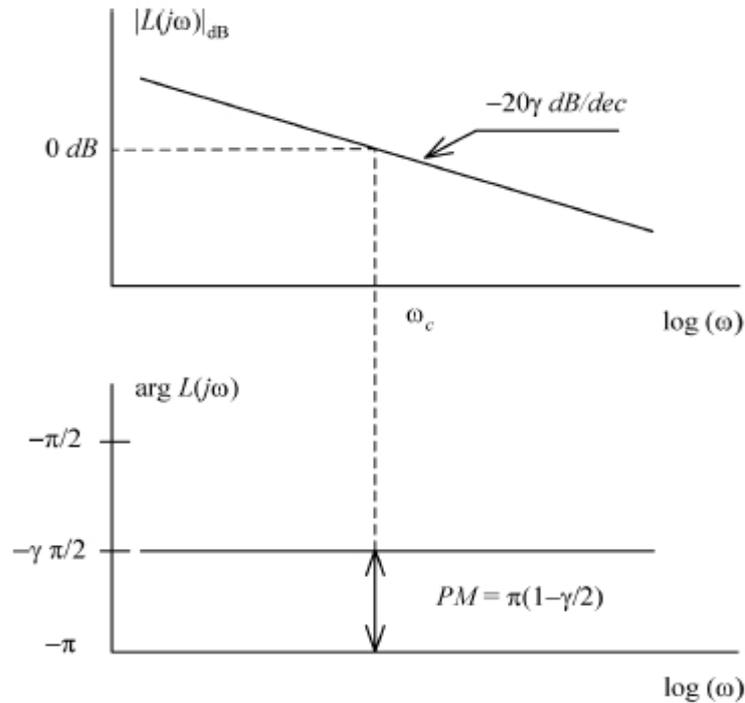
$$L(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^\gamma} \quad (\text{II.5})$$

où  $\omega_c$  est la fréquence de coupure désirée et  $\gamma$  ( $1 < \gamma < 2$ ) est la pente de la caractéristique idéale. Le système asservi à retour unitaire dont la fonction de transfert en boucle ouverte est la fonction de Bode idéale est donnée par :



Figure(II.3) : Système asservi avec fonction de Bode idéale

La réponse fréquentielle de cette fonction est montrée dans la figure (II.4).



Figure(II.4) : Réponse fréquentielle fonction de Bode idéale

On note que, dans le plan de Bode, l'amplitude de cette fonction est une droite de pente constante  $-20\gamma$  dB/dec et sa phase est une droite horizontale de  $\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)$  rad/s. De même, la marge de phase est une constante  $\Phi_m = \pi(1+\gamma/2)$  pour toutes les valeurs de la fréquence. Depuis sa proposition, beaucoup de chercheurs se sont intéressés à l'utilisation de cette fonction comme fonction de référence dans la conception de la commande d'ordre fractionnaire.

### II.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un état de l'art des correcteurs et structures principales de la commande d'ordre fractionnaire. Les opportunités pour la proposition de nouveaux schémas de commande fractionnaire ou l'extension des schémas de commande classiques existants au domaine fractionnaire sont sans limite. Cependant, on devrait avoir besoin de bonnes raisons pour le faire. L'amélioration des performances et de la robustesse est une des raisons pour utiliser la commande fractionnaire.

# CHAPITRE III

## Conception et Analyse des Correcteurs d'Ordre Fractionnaire par “fractionalisation”

### SOMMAIRE

---

- III.1 Introduction**
  - III.2 Présentation de la méthode**
  - III.3 Analyse de la stabilité**
  - III.4 Exemple illustratif**
  - III.5 Conclusion**
-

### III.1 Introduction

Les correcteurs PID étaient les plus populaires du siècle passé. Ils resteront dominants à cause de leur remarquable efficacité, simplicité de mise en œuvre et la large applicabilité. Bien qu'ils soient devenus commercialement disponibles dans les années 1930, l'intérêt à leur conception reste très haut même aujourd'hui. Une précision insuffisante, une stabilité trop relative (instabilité), un temps de réaction trop lent, un dépassement trop important, sont des qualités qui peuvent être inacceptables au regard d'un cahier de charges. Il est donc souvent nécessaire d'intégrer dans le système asservi un réseau correcteur dont l'objectif est d'améliorer un ou plusieurs de ces différents paramètres sans bien sûr le faire au détriment des autres. Donc, les réseaux de correcteurs doivent permettre de réaliser le meilleur compromis entre précision, stabilité et rapidité du système étudié.

Une des possibilités d'améliorer la qualité des boucles est l'utilisation des correcteurs d'ordre fractionnaire. Beaucoup de chercheurs ont été intéressés à l'application et à la conception de ce type de correcteur. Après la commande CRONE [8], le correcteur d'ordre fractionnaire  $PI^\lambda D^\mu$  [9], le correcteur d'ordre fractionnaire TID [25], le correcteur avance-retard de phase d'ordre fractionnaire [27] et la commande avec la fonction de Bode idéale (un intégrateur d'ordre fractionnaire) comme référence [22], on introduit une nouvelle méthode de commande d'ordre fractionnaire dite commande d'ordre fractionnaire par "fractionnalisation" qui consiste à élever la fonction de transfert du correcteur classique PI ou PID existant à une puissance fractionnaire  $m$ , tel que  $0 < m < 1$ .

### III.2 Présentation de la méthode

#### III.2.1 Motivation

Considérons le système de commande classique à retour unitaire montré dans la figure (III.1) :

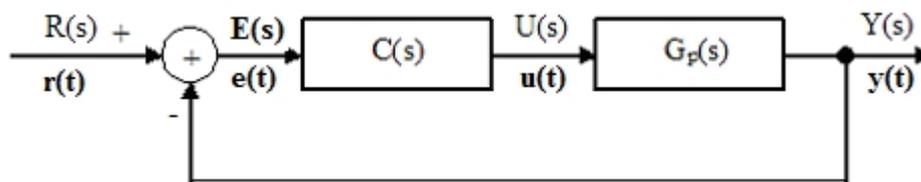


Figure (III.1) : système de commande à retour unitaire

où  $C(s)$  et  $G_p(s)$  sont, respectivement, les fonctions de transfert du correcteur et du processus. Dans ce travail, le correcteur  $C(s)$  du système asservi de la figure (III.1) est un correcteur d'ordre fractionnaire. Ce correcteur d'ordre fractionnaire proposé est une nouvelle structure donnée sous la forme d'un correcteur classique PI ou PID élevé à une puissance réelle  $m$  ( $0 <$

$m < 1$ ) à savoir  $(PI)^m$  ou  $(PID)^m$ . Les fonctions de transfert de ces deux correcteurs d'ordre fractionnaire sont donnés, respectivement, par les deux fonctions suivantes :

$$C(s) = \left( K_p + \frac{K_I}{s} \right)^m \tag{III.1}$$

$$C(s) = \left( K_p + \frac{K_I}{s} + T_D s \right)^m \tag{III.2}$$

Figure (III.2) montre le tracé de Bode des fonctions de transfert du correcteur PI classique  $C_c(s) = \left( 0.73 + \frac{1.058}{s} \right)$  et du correcteur  $(PI)^m$  fractionnaire  $C(s) = \left( 0.73 + \frac{1.058}{s} \right)^m$  pour différentes valeurs de  $m$ .

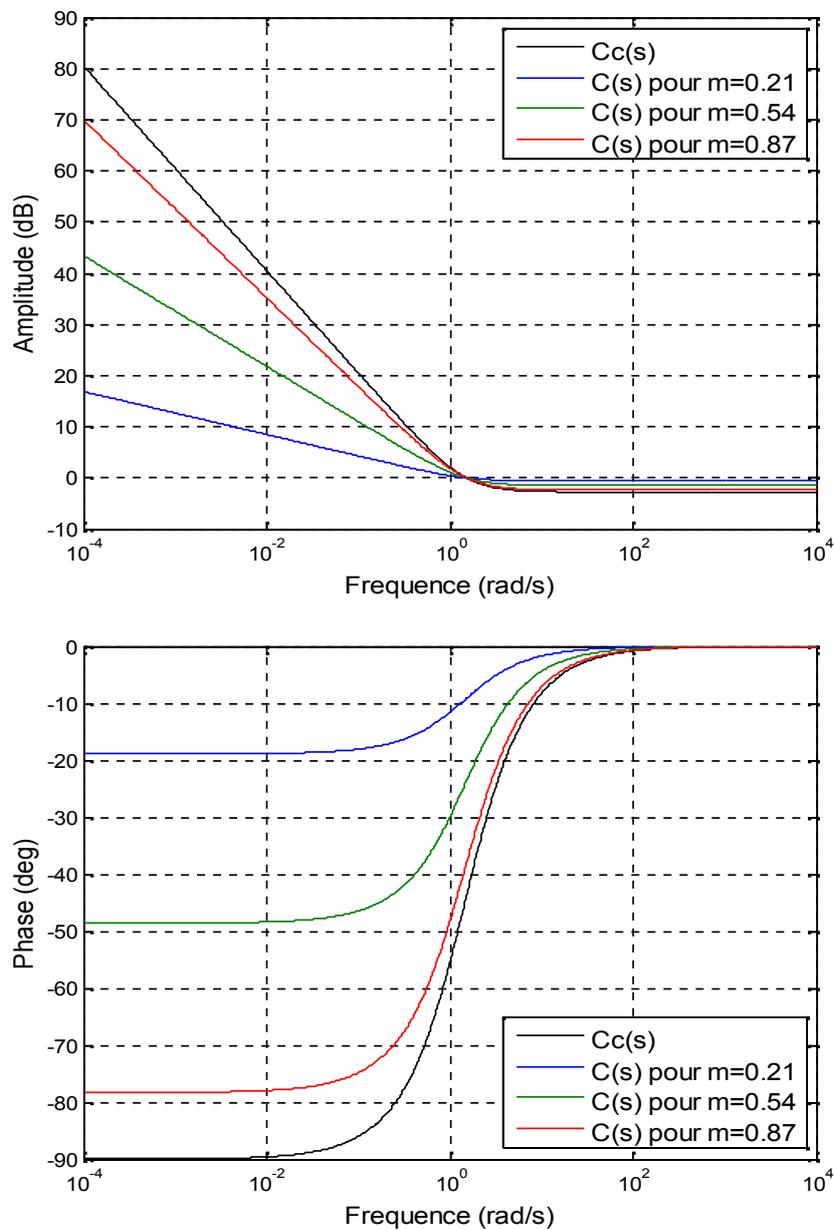


Figure (III.2) : Tracé de Bode des correcteurs PI et  $(PI)^m$  pour  $m=0.21, 0.54$  et  $0.87$

A partir de la figure (III.2), on peut facilement voir que le paramètre  $m$  a une grande influence sur le comportement fréquentielle du correcteur  $(PI)^m$  fractionnaire, donc il peut jouer un rôle dans l'amélioration des performances caractéristiques des systèmes asservis.

### III.2.2 Méthode de réglage

La méthode proposée pour le réglage des paramètres du correcteurs  $(PI)^m$  ou  $(PID)^m$  est composée de deux étapes ; la première sert à régler les paramètres  $K_P$  et  $T_I$  dans le cas du correcteur PI classique ou les paramètres  $K_P$ ,  $T_I$  et  $T_D$  dans le cas du correcteur PID classique et la seconde étape sert à ajuster l'ordre fractionnaire  $m$ .

#### Première étape :

Pour  $m = 1$ , les paramètres  $K_P$  et  $T_I$  dans le cas du correcteur PI classique ou les paramètres  $K_P$ ,  $T_I$  et  $T_D$  dans le cas du correcteur PID classique sont ajustés en utilisant n'importe quelle technique de réglage existante dans la littérature [29]. Comme notre but est l'introduction de la commande d'ordre fractionnaire par "fractionnalisation", alors dans cette étape on peut tout simplement utiliser le correcteur classique PI ou PID existant dans les systèmes asservis. On note aussi que les systèmes asservis classique utilisée dans cette technique sont déjà stables.

#### Second étape :

Par l'utilisation des paramètres  $K_P$  et  $T_I$  du correcteur PI classique ou les paramètres  $K_P$ ,  $T_I$  et  $T_D$  du correcteur PID classique obtenus dans la première étape de conception, le réglage du paramètre  $m$  se fait par minimisation du critère de performance  $J(m)$  donné par l'intégrale du carrée de l'erreur (ISE). Alors, pour le système de commande à retour unitaire de la figure (III.1) et pour une entrée échelon unité, le critère de performance  $J(m)$  est donné comme suit :

$$J(m) = \int_0^{\infty} [e(t)]^2 dt = \int_0^{\infty} [r(t) - y(t)]^2 dt = \int_0^{\infty} [1 - y(t)]^2 dt \quad (\text{III.3})$$

### III.2.3 Approximation des correcteurs fractionnaire par une fonction rationnelle

Les fonctions de transfert des correcteurs d'ordre fractionnaire proposés  $(PI)^m$  et  $(PID)^m$  des équations (III.1) et (III.2) sont des fonctions irrationnelles qui ne peuvent pas être directement implémenter et utiliser pour l'obtention des réponses des systèmes asservis. Alors, pour faciliter leur implémentation on doit approximer les fonctions de transfert de ces correcteurs d'ordre fractionnaire par des fonctions de transfert d'ordre entier dans une bande fréquentielle désirée. Dans ce contexte la méthode utilisée pour l'approximation des correcteurs d'ordre fractionnaire proposés est la méthode de Charef [14] et [15].

### III.3 Analyse de la stabilité

#### III.3.1 Stabilité dans le plan de Bode

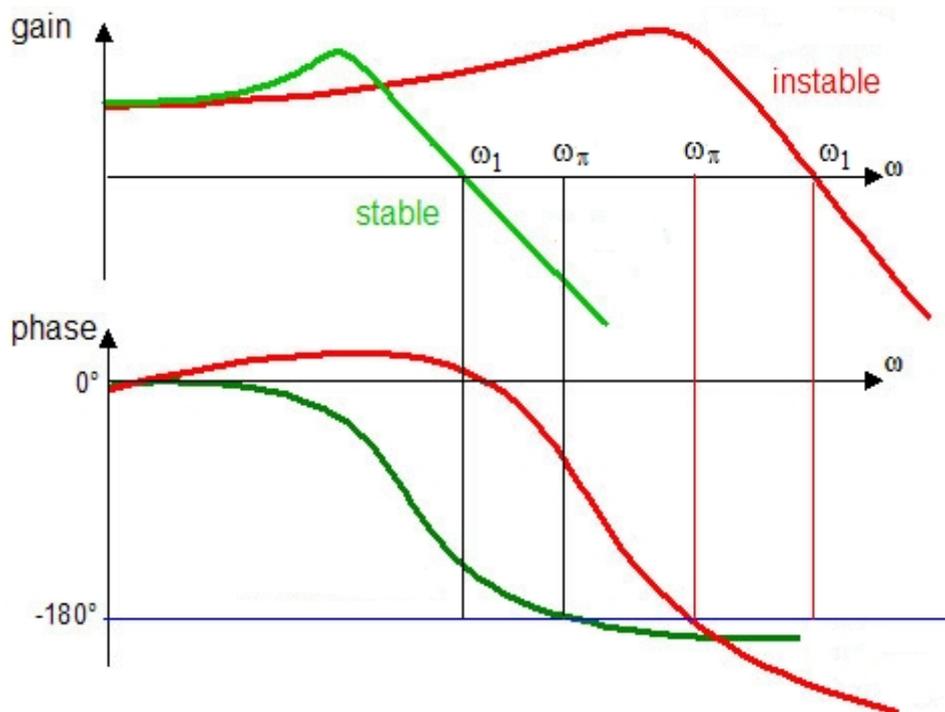
Considérons le système asservi à retour unitaire de la figure (III.1).  $C(s)$  et  $G_p(s)$  sont, respectivement, les fonctions de transfert du correcteur et du processus. La fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) de ce système asservi est donnée comme suit :

$$G_{BO}(s) = C(s)G_p(s) \quad (III.4)$$

Les critères graphiques de stabilité permettent d'étudier la stabilité d'un système asservi à partir de sa réponse fréquentielle en boucle ouverte  $G_{BOC}(s)$ . Le critère de stabilité de Revers qui découle du critère général de Nyquist s'énonce comme suit [30]: un système en boucle fermée est stable si la fréquence  $\omega_1$  du gain unité est inférieure à la fréquence  $\omega_\pi$  de la phase  $-180^\circ$  de sa FTBO. C'est-à-dire, un système en boucle fermée est stable si:

$$\omega_1 < \omega_\pi \quad \text{où} \quad \begin{cases} |G_{BO}(j\omega_1)|_{dB} = 0 \text{ dB} \\ \varphi\{G_{BO}(j\omega_\pi)\} = -180^\circ \end{cases} \quad (III.5)$$

Figure (III.3) montre le tracé de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte d'un système asservi stable et d'un système asservi instable.



**Figure (III.3) :** Tracé de Bode de FTBO de deux systèmes asservis stable et instable

### III.3.2 Analyse de la stabilité du système asservi après "fractionalisation"

Considérons le système asservi classique à retour unitaire de la figure (III.1). Dans le cas où le correcteur  $C(s) = C_c(s)$  un correcteur PI ou PID classique, la fonction de transfert en boucle ouverte de ce système asservi est donnée comme suit :

$$G_{BOC}(s) = C_c(s)G_p(s) \quad (III.6)$$

et dans le cas où le correcteur  $C(s) = C_f(s) = [C_c(s)]^m$  le correcteur d'ordre fractionnaire proposé (PI)<sup>m</sup> ou (PID)<sup>m</sup>, la fonction de transfert en boucle ouverte de ce système asservi est donnée par :

$$G_{BOF}(s) = C_f(s)G_p(s) \quad (III.7)$$

Comme le système asservi en boucle fermée classique utilisée dans la technique de fractionalisation proposée est déjà stable; donc, dans cette section, on veut montrer que le système asservi en boucle fermée après fractionalisation est encore stable pour  $0 < m < 1$ .

Le système en boucle fermée classique est stable, donc on a  $\omega_{cl} < \omega_{c\pi}$  où  $\omega_{cl}$  et  $\omega_{c\pi}$  sont, respectivement, sa fréquence du gain unité et sa fréquence de la phase  $-180^\circ$ ; c'est-à-dire  $|G_{BOC}(j\omega_{cl})|_{dB} = 0$  dB et  $\varphi\{G_{BOC}(j\omega_{c\pi})\} = -180^\circ$ . Alors, on peut écrire que:

$$|G_{BOC}(j\omega_{cl})|_{dB} = |C_c(j\omega_{cl})G_p(j\omega_{cl})|_{dB} = |C_c(j\omega_{cl})|_{dB} + |G_p(j\omega_{cl})|_{dB} = 0 \text{ dB} \quad (III.8)$$

$$|G_p(j\omega_{cl})|_{dB} = -|C_c(j\omega_{cl})|_{dB} \quad (III.9)$$

et

$$\varphi\{G_{BOC}(j\omega_{c\pi})\} = \varphi\{C_c(j\omega_{c\pi})G_p(j\omega_{c\pi})\} = \varphi\{C_c(j\omega_{c\pi})\} + \varphi\{G_p(j\omega_{c\pi})\} = -180^\circ \quad (III.10)$$

$$\varphi\{G_p(j\omega_{c\pi})\} = -180 - \varphi\{C_c(j\omega_{c\pi})\} \quad (III.11)$$

Pour le système asservi en boucle fermée après fractionalisation, on aura :

$$|G_{BOF}(j\omega_{cl})|_{dB} = |C_f(j\omega_{cl})G_p(j\omega_{cl})|_{dB} = |C_f(j\omega_{cl})|_{dB} + |G_p(j\omega_{cl})|_{dB} \quad (III.12)$$

$$|G_{BOF}(j\omega_{cl})|_{dB} = |(C_c(j\omega_{cl}))^m|_{dB} + |G_p(j\omega_{cl})|_{dB} \quad (III.13)$$

$$|G_{BOF}(j\omega_{cl})|_{dB} = m|C_c(j\omega_{cl})|_{dB} - |C_c(j\omega_{cl})|_{dB} = (m-1)|C_c(j\omega_{cl})|_{dB} \quad (III.14)$$

et

$$\varphi\{G_{BOF}(j\omega_{c\pi})\} = \varphi\{C_f(j\omega_{c\pi})G_p(j\omega_{c\pi})\} = \varphi\{C_f(j\omega_{c\pi})\} + \varphi\{G_p(j\omega_{c\pi})\} \quad (III.15)$$

$$\varphi\{G_{BOF}(j\omega_{c\pi})\} = \varphi\{(C_c(j\omega_{cl}))^m\} + \varphi\{G_p(j\omega_{c\pi})\} \quad (III.16)$$

$$\varphi\{G_{BOF}(j\omega_{c\pi})\} = m\varphi\{C_c(j\omega_{c\pi})\} - 180 - \varphi\{C_c(j\omega_{c\pi})\} = (m-1)\varphi\{C_c(j\omega_{c\pi})\} - 180 \quad (III.17)$$

### III.3.2.1 Fractionalisation d'un PI

#### Théorème 1:

Si  $|C_c(j\omega_{c1})|_{dB} > 0$  ou  $|C_c(j\omega_{c1})|_{dB} > 0$  et  $\varphi\{G_{BOF}(j\omega)\} > -180^\circ$  (la fréquence  $\omega_{c\pi}$  de la phase  $-180^\circ$  est indéterminée), le système fractionnaire en boucle fermée avec fractionalisation du correcteur PI est stable pour  $0 < m < 1$ .

#### Démonstration :

Le système fractionnaire en boucle fermée avec fractionalisation du correcteur PI est stable si la fréquence  $\omega_{f1}$  du gain unité est inférieure à la fréquence  $\omega_{f\pi}$  de la phase  $-180^\circ$  de sa FTBO

$G_{BOF}(s) = C_f(s)G_p(s)$ . C'est-à-dire, il est stable si:

$$\omega_{f1} < \omega_{f\pi} \quad \text{où} \quad \begin{cases} |G_{BOF}(j\omega_{f1})|_{dB} = 0 \text{ dB} \\ \varphi\{G_{BOF}(j\omega_{f\pi})\} = -180^\circ \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

**1<sup>er</sup> cas :**  $|C_c(j\omega_{c1})|_{dB} > 0$

- ❖ De l'équation (III.14) on a  $|G_{BOF}(j\omega_{c1})|_{dB} = (m-1)|G_c(j\omega_{c1})|_{dB}$  ; donc si  $|C_c(j\omega_{c1})|_{dB} > 0$  on aura  $|G_{BOF}(j\omega_{c1})|_{dB} = (m-1)|G_c(j\omega_{c1})|_{dB} < 0$  pour  $0 < m < 1$ .

En résumé on a :

$$\begin{cases} |G_{BOF}(j\omega_{f1})|_{dB} = 0 \\ |G_{BOF}(j\omega_{c1})|_{dB} < 0 \end{cases} \Rightarrow \{ \omega_{f1} < \omega_{c1} \} \quad (\text{III.19})$$

- ❖ La fonction de transfert du correcteur PI classique  $C_c(s)$  est donnée par :

$$C_c(s) = \left( K_p + \frac{K_I}{s} \right), \text{ avec } K_p > 0 \text{ et } K_I > 0 \quad (\text{III.20})$$

Dans ce cas  $\varphi\{C_c(j\omega)\}$  la phase de  $C_c(j\omega)$  est telle que  $-\frac{\pi}{2} < \varphi\{C_c(j\omega)\} < 0$ . De

l'équation (III.17) on a  $\varphi\{G_{BOF}(j\omega_{c\pi})\} = (m-1)\varphi\{C_c(j\omega_{c\pi})\} - 180$  ; comme  $\varphi\{C_c(j\omega)\} < 0$  on aura donc  $\varphi\{G_{BOF}(j\omega_{c\pi})\} = (m-1)\varphi\{C_c(j\omega_{c\pi})\} - 180 > -180$  pour  $0 < m < 1$ . En résumé on a :

$$\begin{cases} \varphi\{G_{BOF}(j\omega_{f\pi})\} = -180^\circ \\ \varphi\{G_{BOF}(j\omega_{c\pi})\} > -180^\circ \end{cases} \Rightarrow \{ \omega_{c\pi} < \omega_{f\pi} \} \quad (\text{III.21})$$

- ❖ Le système en boucle fermée classique de départ est stable, alors on a :

$$\omega_{c1} < \omega_{c\pi} \quad (\text{III.22})$$

Des équations (III.19), (III.21) et (III.22), on peut écrire que :

$$\omega_{f1} < \omega_{c1} < \omega_{c\pi} < \omega_{f\pi} \quad (\text{III.23})$$

Alors on a démontré que, pour  $0 < m < 1$ ,  $\omega_{f1} < \omega_{f\pi}$  ; en conséquence le système fractionnaire en boucle fermée avec fractionalisation du correcteur PI est stable.

**2<sup>nd</sup> cas :**  $|C_c(j\omega_{c1})|_{dB} > 0$  et  $\varphi\{G_{BOC}(j\omega)\} > -180^\circ$  (la fréquence  $\omega_{c\pi}$  est indéterminée)

- ❖ Si  $|C_c(j\omega_{c1})|_{dB} > 0$  on a du 1<sup>er</sup> cas  $\omega_{f1} < \omega_{c1}$
- ❖ La phase  $\varphi\{C_c(j\omega)\}$  de  $C_c(j\omega)$  est telle que  $-\frac{\pi}{2} < \varphi\{C_c(j\omega)\} < 0$  ; donc la phase  $\varphi\{C_f(j\omega)\}$  de  $C_f(j\omega) = [C_c(j\omega)]^m$  est telle que  $-\frac{\pi}{2}m < \varphi\{C_f(j\omega)\} < 0$ . La phase de  $G_{BOC}(j\omega)$  est  $\varphi\{G_{BOC}(j\omega)\} = \varphi\{C_c(j\omega)\} + \varphi\{G_p(j\omega)\}$  et celle de  $G_{BOF}(j\omega)$  est  $\varphi\{G_{BOF}(j\omega)\} = m\varphi\{C_c(j\omega)\} + \varphi\{G_p(j\omega)\}$ . Si  $\varphi\{G_{BOC}(j\omega)\} > -180^\circ$  et pour  $0 < m < 1$  on aura  $\varphi\{G_{BOF}(j\omega)\} > -180^\circ$ . Alors le système fractionnaire en boucle fermée avec fractionalisation du correcteur PI est stable.

### III.3.2.2 Fractionalisation d'un PID

#### Théorème 2:

Si  $|C_c(j\omega_{c1})|_{dB} > 0$  et  $-90^\circ < \varphi\{C_c(j\omega_{c\pi})\} < 0$  ou  $|C_c(j\omega_{c1})|_{dB} > 0$  et  $\varphi\{G_{BOC}(j\omega)\} > -180^\circ$  (la fréquence  $\omega_{c\pi}$  de la phase  $-180^\circ$  est indéterminée), le système fractionnaire en boucle fermée avec fractionalisation du correcteur PI est stable pour  $0 < m < 1$ .

#### Démonstration :

Le système fractionnaire en boucle fermée avec fractionalisation du correcteur PID est stable si la fréquence  $\omega_{f1}$  du gain unité est inférieure à la fréquence  $\omega_{f\pi}$  correspondante à la phase  $-180^\circ$  de sa FTBO  $G_{BOF}(s) = C_f(s)G_p(s)$ . C'est-à-dire, il est stable si:

$$\omega_{f1} < \omega_{f\pi} \quad \text{où} \quad \begin{cases} |G_{BOF}(j\omega_{f1})|_{dB} = 0 \text{ dB} \\ \varphi\{G_{BOF}(j\omega_{f\pi})\} = -180^\circ \end{cases} \quad \text{(III.24)}$$

**1<sup>er</sup> cas :**  $|C_c(j\omega_{c1})|_{dB} > 0$  et  $-90^\circ < \varphi\{C_c(j\omega_{c\pi})\} < 0$

- ❖ De l'équation (III.14) on a  $|G_{BOF}(j\omega_{c1})|_{dB} = (m-1)|G_c(j\omega_{c1})|_{dB}$  ; donc si  $|C_c(j\omega_{c1})|_{dB} > 0$  on aura  $|G_{BOF}(j\omega_{c1})|_{dB} = (m-1)|G_c(j\omega_{c1})|_{dB} < 0$  pour  $0 < m < 1$ .

En résumé on a :

$$\begin{cases} |G_{BOF}(j\omega_{f1})|_{dB} = 0 \\ |G_{BOF}(j\omega_{c1})|_{dB} < 0 \end{cases} \Rightarrow \{ \omega_{f1} < \omega_{c1} \} \quad \text{(III.19)}$$

- ❖ La fonction de transfert du correcteur PID classique  $C_c(s)$  est donnée par :

$$C_c(s) = \left( K_p + \frac{K_I}{s} + K_d s \right), \text{ avec } K_p > 0, K_I > 0 \text{ et } K_d > 0 \quad (\text{III.20})$$

Dans ce cas la phase de  $C_c(j\omega)$  est telle que  $-\frac{\pi}{2} < \varphi\{C_c(j\omega)\} < \frac{\pi}{2}$ . De l'équation

(III.17) on a  $\varphi\{G_{\text{BOF}}(j\omega_{c\pi})\} = (m-1)\varphi\{C_c(j\omega_{c\pi})\} - 180$ ; si  $-\frac{\pi}{2} < \varphi\{C_c(j\omega)\} < 0$

on aura donc  $\varphi\{G_{\text{BOF}}(j\omega_{c\pi})\} = (m-1)\varphi\{C_c(j\omega_{c\pi})\} - 180 > -180$  pour  $0 < m < 1$ .

En résumé on a :

$$\begin{cases} \varphi\{G_{\text{BOF}}(j\omega_{f\pi})\} = -180^\circ \\ \varphi\{G_{\text{BOF}}(j\omega_{c\pi})\} > -180^\circ \end{cases} \Rightarrow \{ \omega_{c\pi} < \omega_{f\pi} \} \quad (\text{III.21})$$

- ❖ Le système asservi en boucle fermée classique de départ est stable, alors on a :

$$\omega_{c1} < \omega_{c\pi} \quad (\text{III.22})$$

Des équations (III.19), (III.21) et (III.22), on peut écrire que :

$$\omega_{f1} < \omega_{c1} < \omega_{c\pi} < \omega_{f\pi} \quad (\text{III.23})$$

Alors on a démontré que pour  $0 < m < 1$   $\omega_{f1} < \omega_{f\pi}$ ; en conséquence le système fractionnaire en boucle fermée avec fractionalisation du correcteur PID est stable.

**2<sup>nd</sup> cas :**  $|C_c(j\omega_{c1})|_{\text{dB}} > 0$  et  $\varphi\{G_{\text{BOC}}(j\omega)\} > -180^\circ$  (la fréquence  $\omega_{c\pi}$  est indéterminée)

- ❖ Si  $|C_c(j\omega_{c1})|_{\text{dB}} > 0$  on a du 1<sup>er</sup> cas  $\omega_{f1} < \omega_{c1}$
- ❖ La phase  $\varphi\{C_c(j\omega)\}$  de  $C_c(j\omega)$  est telle que  $-\frac{\pi}{2} < \varphi\{C_c(j\omega)\} < \frac{\pi}{2}$ ; donc la phase  $\varphi\{C_f(j\omega)\}$  de  $C_f(j\omega) = [C_c(j\omega)]^m$  est telle que  $-\frac{\pi}{2}m < \varphi\{C_f(j\omega)\} < m\frac{\pi}{2}$ . La phase de  $G_{\text{BOC}}(j\omega)$  est  $\varphi\{G_{\text{BOC}}(j\omega)\} = \varphi\{C_c(j\omega)\} + \varphi\{G_p(j\omega)\}$  et celle de  $G_{\text{BOF}}(j\omega)$  est  $\varphi\{G_{\text{BOF}}(j\omega)\} = m\varphi\{C_c(j\omega)\} + \varphi\{G_p(j\omega)\}$ . Si  $\varphi\{G_{\text{BOC}}(j\omega)\} > -180^\circ$  et pour  $0 < m < 1$  on aura aussi  $\varphi\{G_{\text{BOF}}(j\omega)\} > -180^\circ$ . Alors le système fractionnaire en boucle fermée avec fractionalisation du correcteur PI est stable.

### III.4 Exemple illustratif

Dans cette section, nous présenterons un exemple de simulation pour montrer l'efficacité de la méthode proposée de la commande fractionnaire par fractionalisation.

Considérons le système de commande classique à retour unitaire montré dans la figure (III.4) :

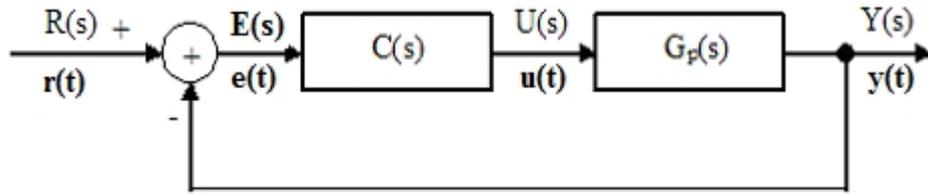


Figure (III.4) : système de commande classique à retour unitaire

où les fonctions de transfert du correcteur  $C(s)$  et du processus  $G_p(s)$  sont données par [31]:

$$C(s) = \left( 0.73 + \frac{1.058}{s} \right) \quad , \quad G_p(s) = \frac{1}{(1+s)} e^{-0.5s}$$

Après fractionnalisation du correcteur PI, on obtient un système de commande fractionnaire à retour unitaire montré dans la figure (III.5) :

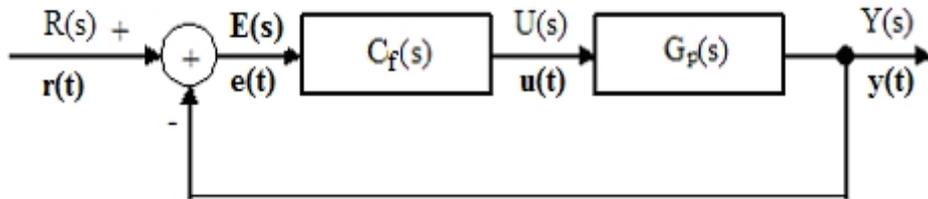


Figure (III.5) : système de commande fractionnaire à retour unitaire

où la fonction de transfert du correcteur  $C_f(s)$  est donnée par :

$$C_f(s) = \left( 0.73 + \frac{1.058}{s} \right)^m$$

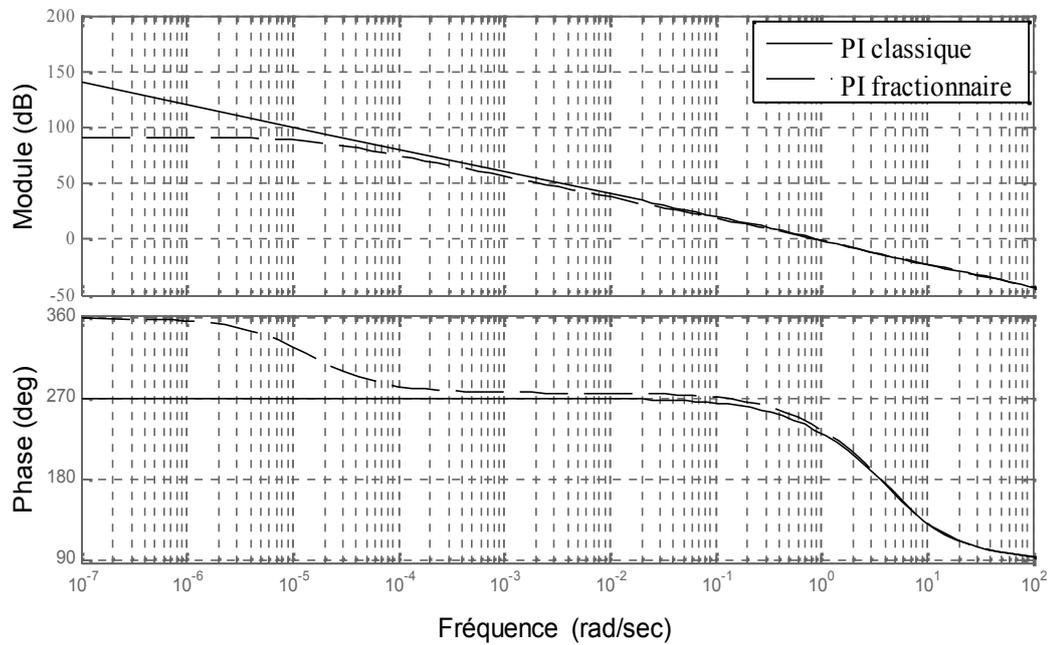
Par minimisation du critère  $J(m)$  de l'équation (III.3) pour une entrée échelon, le paramètre  $m$  de fractionnalisation de  $C_f(s)$  est  $m = 0.93$ . Alors, fonction transfert du correcteur  $C_f(s)$  est :

$$C_f(s) = \left( 0.73 + \frac{1.058}{s} \right)^{0.93}$$

Dans cet exemple la fonction irrationnelle du correcteur fractionnaire  $C_f(s)$  est approximée par une fonction rationnelle dans une bande fréquentielle désirée utilisant les techniques du chapitre I. Le retard  $e^{-0.5s}$  de la fonction de transfert du processus  $G_p(s)$  est aussi approximé par une fonction rationnelle en utilisant l'approximation de Padé du premier ordre définie par :

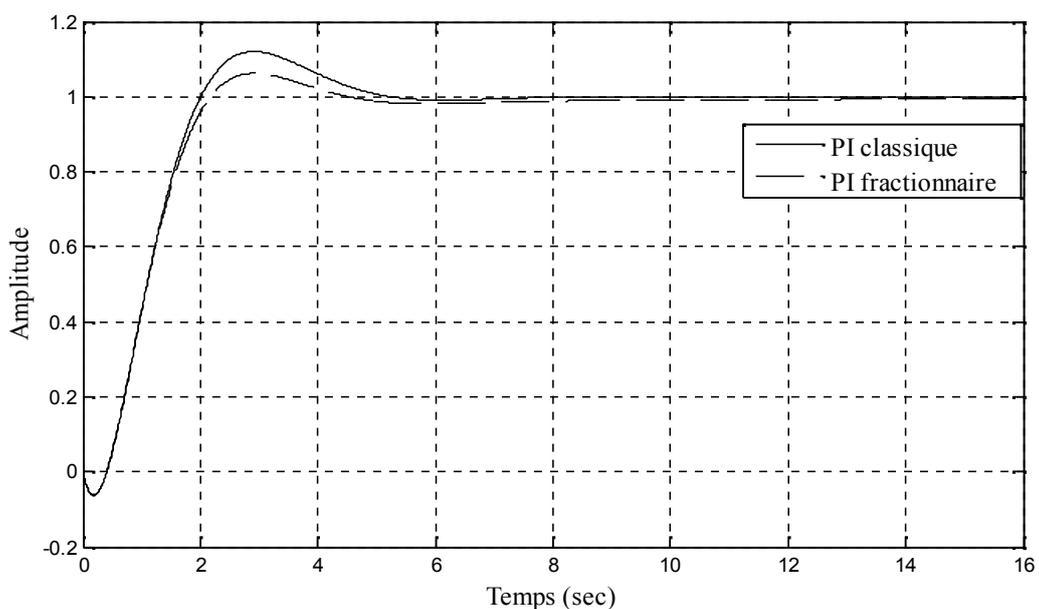
$$e^{-0.5s} = \frac{\left( 1 - \frac{0.5}{2}s \right)}{\left( 1 + \frac{0.5}{2}s \right)} = \frac{(4-s)}{(4+s)}$$

Figure (III.6) présente le tracé de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte  $C(s)G_p(s)$  et  $C_f(s)G_p(s)$  des deux systèmes asservis avec correcteur PI classique et correcteur d'ordre fractionnaire  $(PI)^{0.93}$ .



**Figure (III.6) :** Tracé de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte des deux systèmes asservis classique et fractionnaire

Figure (III.7) présente les réponses indicielles du système en boucle fermée avec le correcteur PI classique  $C(s)$  et le correcteur d'ordre fractionnaire  $C_f(s) = [C_f(s)]^{0.93}$ .



**Figure (III.7):** les réponses indicielles des deux systèmes asservis classique et fractionnaire

Comme le but de l'introduction de nouveaux correcteurs est l'amélioration de la qualité et les performances des systèmes asservis sans toucher à sa stabilité initiale; alors dans cet exemple, on a comparé quelques performances des deux systèmes asservis avec correcteur PI classique et correcteur d'ordre fractionnaire  $(PI)^{0.93}$ . Cette comparaison a été faite en termes du temps de réponse et du dépassement. De la figure (III.7), on note les améliorations suivantes :

- le temps de réponse du système asservi d'ordre fractionnaire est 13.67% plus petit que celui du système asservi classique
- le dépassement du système asservi d'ordre fractionnaire est 47.5% plus petit que celui du système asservi classique

### **III.5 Conclusion**

Dans ce chapitre, une nouvelle méthode de commande d'ordre fractionnaire basé sur la "fractionalisation" a été présentée. Elle consiste à élever la fonction de transfert du correcteur classique PI ou PID existant dans la commande classique à une puissance fractionnaire  $m$ , tel que  $0 < m < 1$ . Une méthode de réglage des paramètres du correcteurs  $(PI)^m$  ou  $(PID)^m$  a été proposée. Deux théorèmes ont été proposés pour établir la stabilité des systèmes asservis après fractionalisation pour  $0 < m < 1$ . Un exemple de simulation pour montrer l'efficacité de la méthode proposée de la commande fractionnaire par fractionalisation a été fait. L'amélioration des performances de la commande proposée comparée à la commande classique a aussi été établie dans cet exemple en termes du temps de réponse et du dépassement.

# CHAPITRE IV

## Applications de la Commande Fractionnaire par Fractionalisation

### SOMMAIRE

---

**IV.1 Introduction**

**IV.2 Application 1 : Commande de position angulaire d'un moteur à courant continu**

**IV.3 Application 2 : Commande de la pression de vapeur de séchage**

**IV.4 Conclusion**

---

### IV.1 Introduction

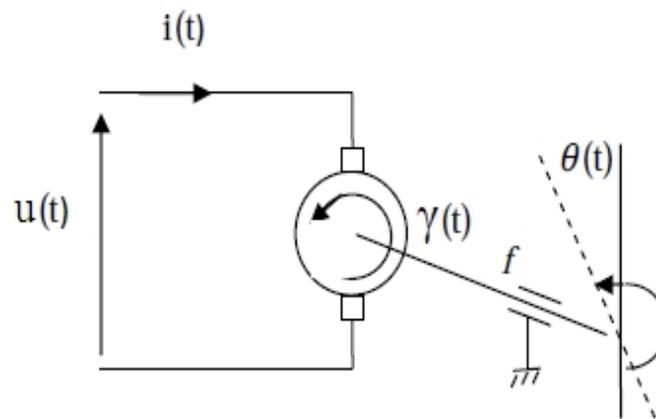
Ce travail porte essentiellement sur la contribution au développement d'une technique de la commande classique en utilisant les concepts de la théorie des opérateurs et systèmes d'ordre fractionnaire. La méthode de conception des correcteurs d'ordre fractionnaire proposée est basée sur une nouvelle technique dite "fractionalisation" des correcteurs PI ou PID classiques pour améliorer les performances des systèmes asservis. Alors, pour bien valider cette méthode, on l'a appliquée à plusieurs systèmes asservis. Les résultats obtenus ont vont être comparés à ceux obtenus en utilisant un correcteur PID classique.

### IV.2 Application 1 : Commande de position angulaire d'un moteur à courant continu

Les moteurs à courant continu interviennent souvent comme organe d'action dans le domaine des asservissements. On trouve principalement deux types de commande [32]:

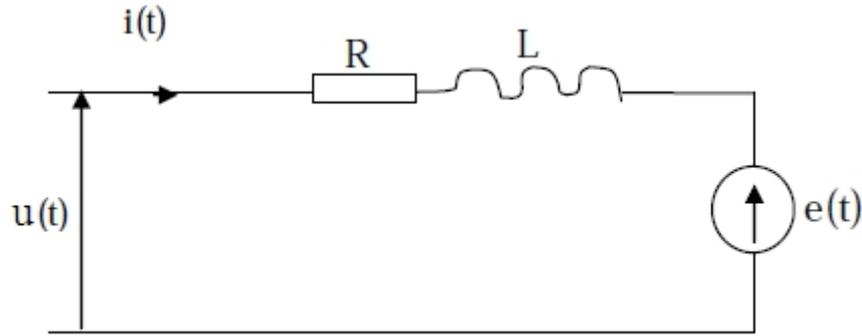
- Commande à flux constant par la tension d'induit variable
- Commande à courant d'induit constant par le flux variable

Dans ce contexte, on considère un moteur à courant continu à commande par la tension d'induit comme celui schématisé sur la figure (IV.1).



**Figure(IV.1) :** Moteur à courant continu à commande par la tension d'induit

L'induit est modélisé, en régime permanent, de la manière suivante (pas d'effet de la part de l'inducteur) [33].



**Figure(IV.2):** Schéma de l'induit d'un moteur à courant continu à commande par la tension d'induit

L'équation liant la tension  $u(t)$  de l'induit (rotor) et le courant d'induit  $i(t)$  est donnée par :

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t) = u(t) \quad (IV.1)$$

où  $R$  est la résistance de l'induit du moteur,  $L$  est son inductance et  $e(t)$  est la force électromotrice qui est proportionnelle à la vitesse de rotation du rotor et elle est donnée par :

$$e(t) = K_e \omega(t) = K_e \frac{d\theta}{dt} \quad (IV.2)$$

Où  $\omega(t)$  est la vitesse de rotation du rotor et  $\theta(t)$  est sa position. L'équation mécanique liant le couple agissant sur le rotor et sa position s'écrit comme suit :

$$\gamma(t) - f \frac{d\theta(t)}{dt} = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \quad (IV.3)$$

où  $\gamma(t)$  est le couple moteur,  $f$  le coefficient de frottement visqueux et  $J$  le moment d'inertie du rotor. Le couple  $\gamma(t)$  est proportionnel au courant d'induit  $i(t)$  :

$$\gamma(t) = K_m i(t) \quad (IV.4)$$

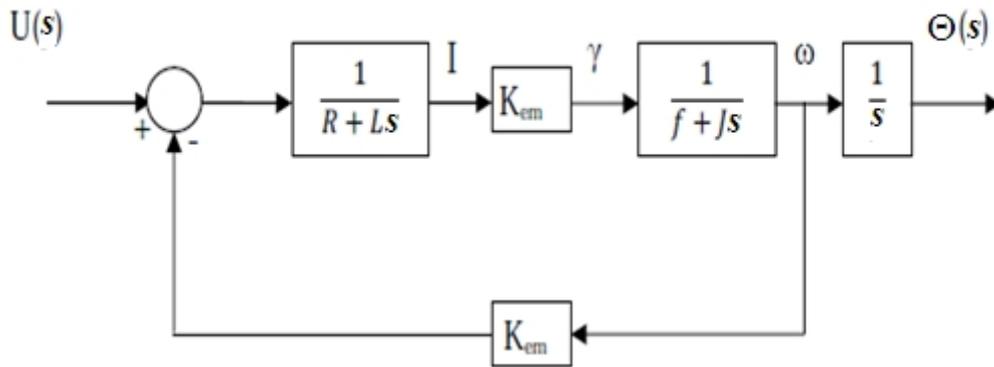
En générale les coefficients  $K_e$  et  $K_m$  sont si proches qu'il est raisonnable de les considérer égaux. Donc, on pose  $K_e = K_m = K_{em}$ , alors des équations (IV.1), (IV.3) et (V.4) on obtient [33] :

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = u(t) - e(t) \quad (IV.5)$$

$$\gamma(t) = K_{em} i(t) \quad (IV.6)$$

$$K_{em} i(t) = f \frac{d\theta(t)}{dt} + J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \quad (IV.7)$$

A partir des relations de dessus, on peut déduire le schéma fonctionnel suivant pour le moteur à courant continu commandé par l'induit :



Figure(IV.3) : Schéma fonctionnelle du moteur à courant continu commandé par l'induit

Alors, la fonction de transfert du moteur  $G(s) = \Theta(s)/U(s)$  est donnée par :

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{\frac{K_{em}}{Rf + K_{em}}}{s \left[ 1 + \frac{RJ + Lf}{Rf - K_{em}^2} s + \frac{LJ}{Rf + K_{em}^2} s^2 \right]} \quad (IV.6)$$

Le système en boucle fermée de l'asservissement de position angulaire d'un moteur à courant continu est montré dans la figure (III.4) :

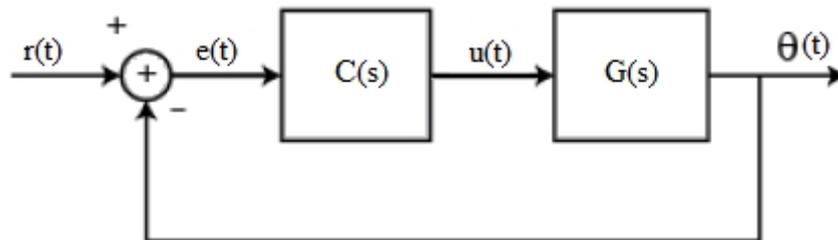


Figure (IV.4) : Commande de position angulaire d'un moteur à courant continu

Pour l'application numérique, le moteur à courant continu considéré est de type Maxon dont la fonction de transfert nominale est donnée par [34]:

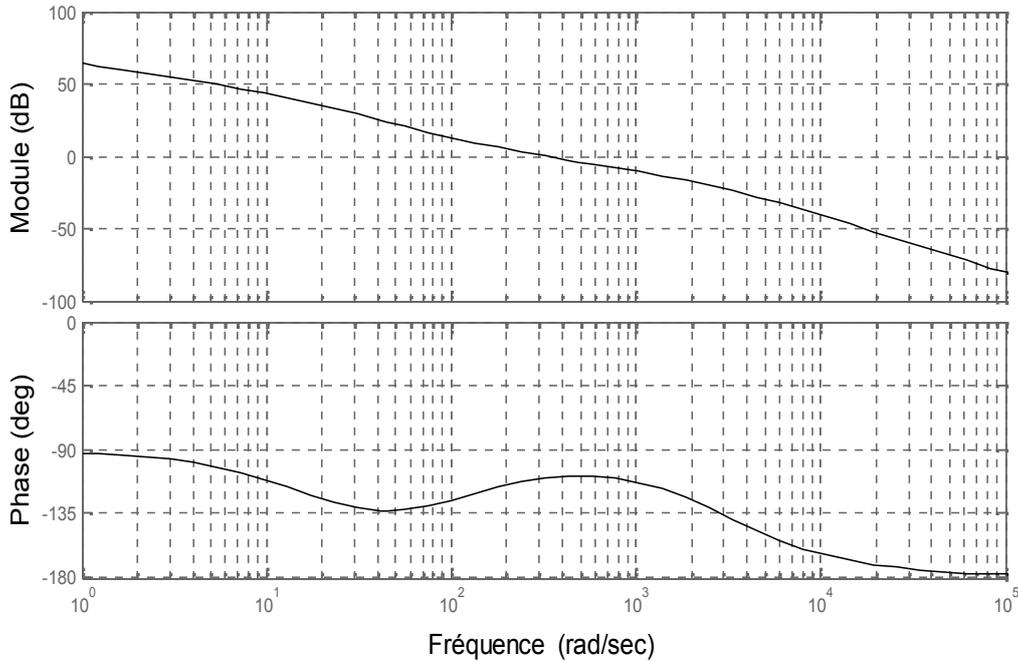
$$G(s) = \frac{16.58}{1.73 \times 10^{-5} s^2 + 5.24 \times 10^{-2} s + 1}$$

Pour le cas classique, l'asservissement de position du moteur a été réalisé en utilisant un correcteur PI. Le réglage des paramètres  $K_p$  et  $K_I$  du correcteur PI a conduit à la fonction de transfert suivante [34]:

$$C(s) = C_c(s) = \left( K_p + \frac{K_I}{s} \right) = \left( 1 + \frac{100}{s} \right) = \left( \frac{s+100}{s} \right)$$

Figure (III.5) présente le tracé de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte  $C(s)G(s)$  du système asservi classique qui est donnée par :

$$C(s)G(s) = \frac{16.58(s+100)}{s(1.73 \times 10^{-5}s^2 + 5.24 \times 10^{-2}s + 1)}$$



**Figure (IV.5) :** Tracé de Bode de fonction de transfert en boucle ouverte du système asservi classique

Le système asservi en boucle fermée classique est stable ; donc on a  $\omega_{c1} = 316.22$  rad/s et  $\omega_{c\pi}$  est indéterminée où  $\omega_{c1}$  et  $\omega_{c\pi}$  sont, respectivement, sa fréquence du gain unité et sa fréquence de la phase  $-180^\circ$ . Maintenant, utilisant la technique de fractionalisation proposée, la fonction de transfert du correcteur d'ordre fractionnaire, pour  $0 < m < 1$ , est donnée par:

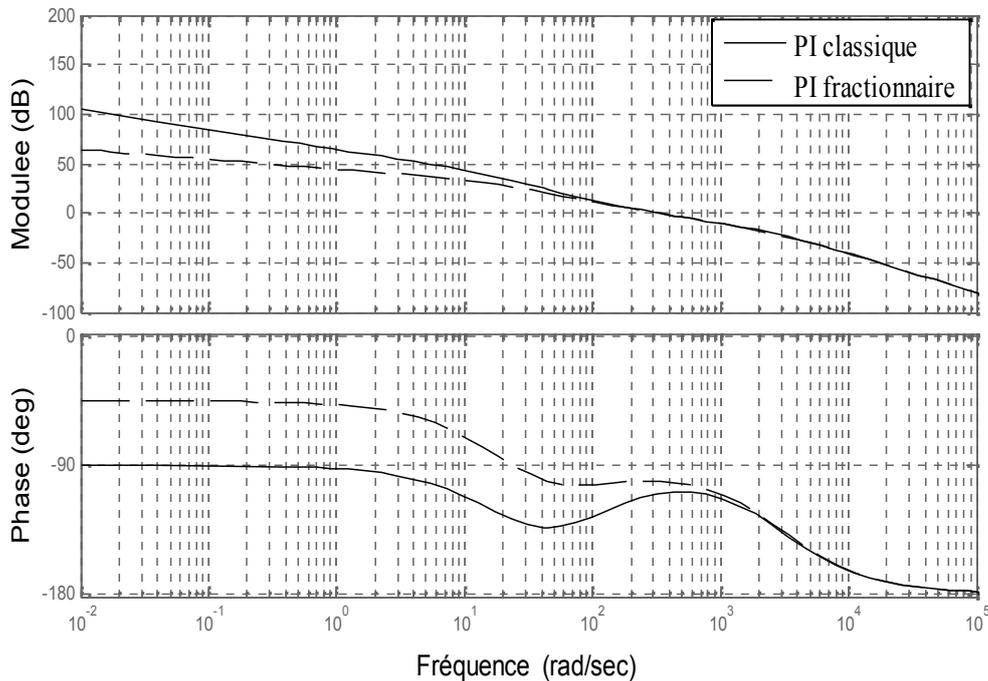
$$C(s) = C_f(s) = \left( \frac{s+100}{s} \right)^m$$

De la figure (III.5), on remarque qu'on a  $\varphi\{G_{BOC}(j\omega)\} > -180^\circ$ , pour  $0 < \omega < +\infty$ , et  $|C_c(j\omega_{c1})|_{dB} = 0.41 \text{ dB} > 0$ ; donc, d'après le théorème 1 le système asservi en boucle fermée fractionnaire est stable pour  $0 < m < 1$ . La valeur du paramètre  $m = 0.5$  est obtenue par minimisation du critère  $J(m)$  de l'équation (III.3). Alors, la fonction de transfert  $C_f(s)$  du correcteur d'ordre fractionnaire (PI)<sup>m</sup> est donnée par :

$$C(s) = C_f(s) = \left( \frac{s+100}{s} \right)^{0.5}$$

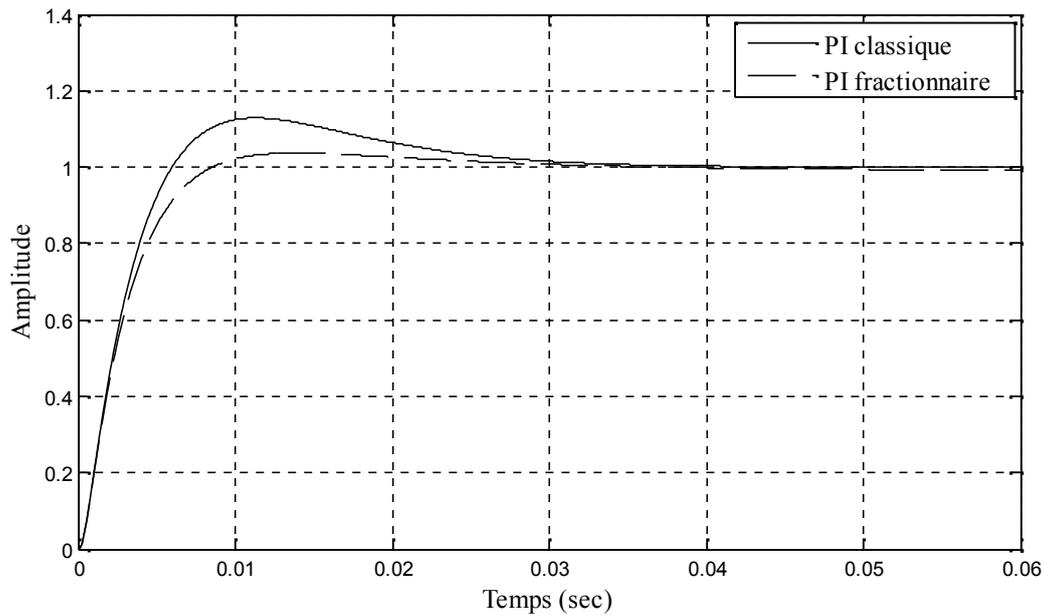
La fonction irrationnelle du correcteur fractionnaire  $C_f(s)$  est approximée par une fonction rationnelle dans une bande fréquentielle désirée utilisant les techniques du chapitre I.

Figure (IV.6) présente le tracé de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte  $C(s)G_p(s)$  et  $C_f(s)G_p(s)$  des deux systèmes asservis avec correcteur PI classique et correcteur d'ordre fractionnaire  $(PI)^{0.5}$ .



**Figure (IV.6) :** Tracé de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte des deux systèmes asservis classique et fractionnaire.

Figure (IV.7) présente les réponses indicielles du système en boucle fermée avec le correcteur PI classique  $C(s)$  et le correcteur d'ordre fractionnaire  $C_f(s) = [C_f(s)]^{0.5}$ .



**Figure (IV.7):** les réponses indicielles des deux systèmes asservis classique et fractionnaire.

Comme le but de l'introduction de nouveaux correcteurs est l'amélioration de la qualité et les performances des systèmes asservis sans toucher à sa stabilité initiale; alors dans cet exemple, on a comparé quelques performances des deux systèmes asservis avec correcteur PI classique et correcteur d'ordre fractionnaire  $(PI)^{0.5}$ . Cette comparaison a été faite en termes du temps de réponse et du dépassement. De la figure (IV.7), on note les améliorations suivantes :

- le temps de réponse du système asservi d'ordre fractionnaire est 19.44% plus petit que celui du système asservi classique
- le dépassement du système asservi d'ordre fractionnaire est 76.92% plus petit que celui du système asservi classique.

### IV.3 Application 2 : Commande de la pression de vapeur de séchage

Le modèle suivant est une version modifiée de la fonction de transfert pour la pression de vapeur de séchage associé à la machine de boîtes en papier sèche. Ils ont ajouté 5 secondes de retard à cette fonction de transfert pour le rendre plus stimulant et réaliste [35]:

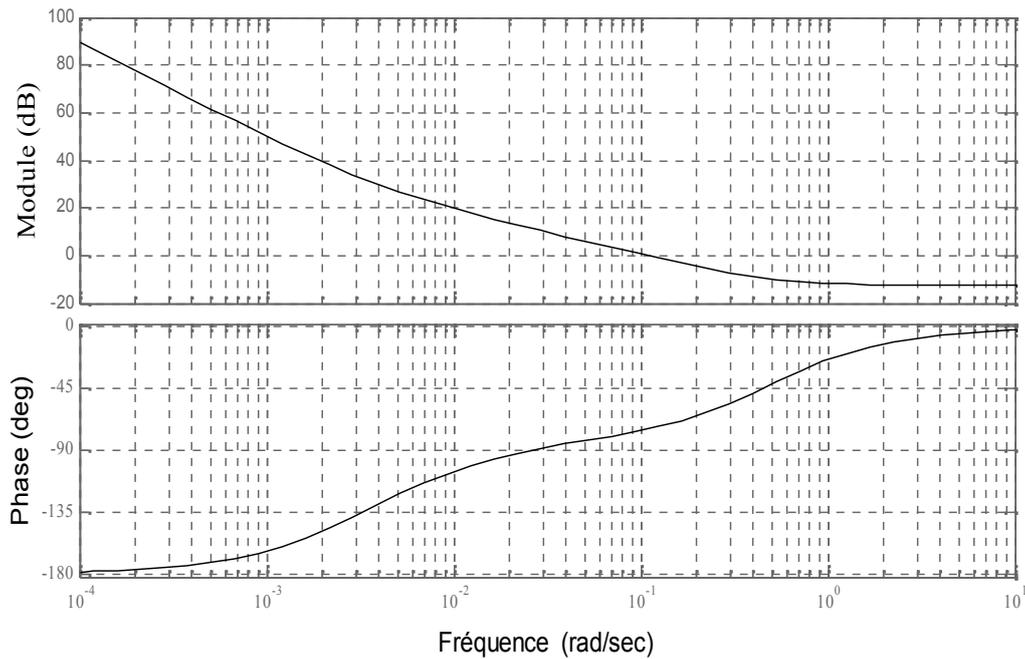
$$G(s) = \frac{0.005(300s + 1)}{s(20s + 1)} e^{-5s}$$

Pour le cas classique, la commande de la pression de vapeur de séchage a été réalisée en utilisant un correcteur PID. Le réglage des paramètres  $K_p$ ,  $K_D$  et  $K_I$  du correcteur PID a conduit à la fonction de transfert suivante [35]:

$$C(s) = C_c(s) = \left( K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s \right) = \left( 1.6 + \frac{0.0615}{s} + 3.2s \right) = \left( \frac{3.2s^2 + 1.6s + 0.0615}{s} \right)$$

Figure (IV.8) présente le tracé de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte  $C(s)G(s)$  du système asservi classique qui est donnée par :

$$C(s)G(s) = \frac{(1.5s + 0.005)(3.2s^2 + 1.6s + 0.0615)}{s^2(20s + 1)} e^{-5s}$$



**Figure (IV.8) :** Tracé de Bode de fonction de transfert en boucle ouverte du système asservi classique.

Le système asservi en boucle fermée classique est stable ; donc on a  $\omega_{cl} = 0.11 \text{ rad/s}$  et  $\omega_{c\pi}$  est indéterminée où  $\omega_{cl}$  et  $\omega_{c\pi}$  sont, respectivement, sa fréquence du gain unité et sa fréquence de la phase  $-180^\circ$ . Maintenant, utilisant la technique de fractionalisation proposée, la fonction de transfert du correcteur d'ordre fractionnaire, pour  $0 < m < 1$ , est donnée par:

$$C(s) = C_f(s) = \left( \frac{3.2s^2 + 1.6s + 0.0615}{s} \right)^m$$

De la figure (IV.8), on remarque qu'on a  $\phi\{G_{BOC}(j\omega)\} > -180^\circ$ , pour  $0 < \omega < +\infty$ , et  $|C_c(j\omega_{cl})|_{dB} = 4.15 \text{ dB} > 0$ ; donc, d'après le théorème 2 le système asservi en boucle fermée fractionnaire est stable pour  $0 < m < 1$ . La valeur du paramètre  $m = 0.85$  est obtenue par

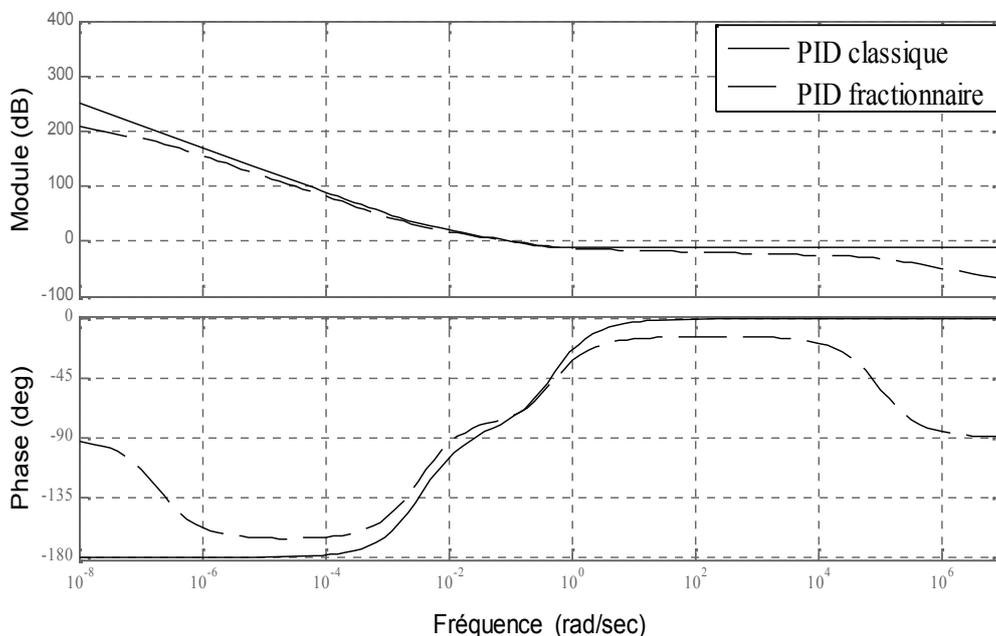
minimisation du critère  $J(m)$  de l'équation (III.3). Alors, la fonction de transfert  $C_f(s)$  du correcteur d'ordre fractionnaire  $(PID)^m$  est donnée par :

$$C(s) = C_f(s) = \left( \frac{3.2s^2 + 1.6s + 0.0615}{s} \right)^{0.85}$$

Dans cet exemple la fonction irrationnelle du correcteur fractionnaire  $C_f(s)$  est approximée par une fonction rationnelle dans une bande fréquentielle désirée utilisant les techniques du chapitre I. Le retard  $e^{-0.5s}$  de la fonction de transfert du processus  $G_p(s)$  est aussi approximé par une fonction rationnelle en utilisant l'approximation de Padé du premier ordre définie par :

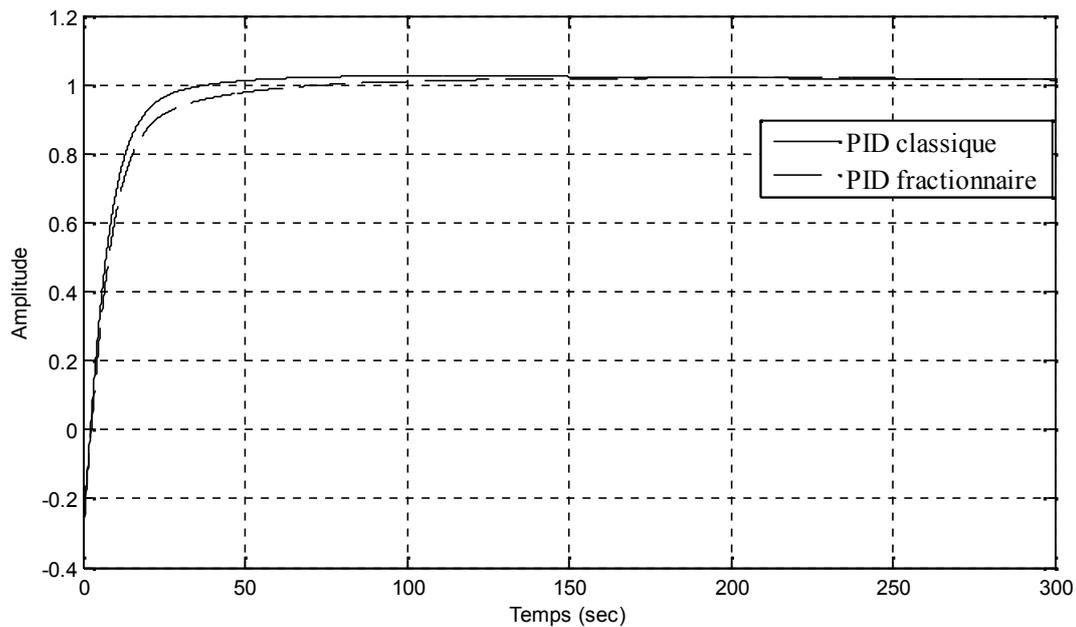
$$e^{-0.5s} = \frac{\left(1 - \frac{0.5}{2}s\right)}{\left(1 + \frac{0.5}{2}s\right)} = \frac{(4-s)}{(4+s)}$$

Figure (IV.9) présente le tracé de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte  $C(s)G_p(s)$  et  $C_f(s)G_p(s)$  des deux systèmes asservis avec correcteur PID classique et correcteur d'ordre fractionnaire  $(PID)^{0.85}$ .



**Figure (IV.9) :** Tracé de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte des deux systèmes asservis classique et fractionnaire.

Figure (IV.10) présente les réponses indicielles du système en boucle fermée avec le correcteur PID classique  $C(s)$  et le correcteur d'ordre fractionnaire  $C_f(s) = [C_f(s)]^{0.85}$ .



**Figure (IV.10):** les réponses indicielles des deux systèmes asservis classique et fractionnaire

Comme le but de l'introduction de nouveaux correcteurs est l'amélioration de la qualité et les performances des systèmes asservis sans toucher à sa stabilité initiale; alors dans cet exemple, on a comparé quelques performances des deux systèmes asservis avec correcteur PID classique et correcteur d'ordre fractionnaire (PID)<sup>0.85</sup>. Cette comparaison a été faite en termes du temps de réponse et du dépassement. De la figure (IV.10), on note les améliorations suivantes :

- le temps de réponse du système asservi d'ordre fractionnaire est 74.92% plus petit que celui du système asservi classique
- le dépassement du système asservi d'ordre fractionnaire est 21.2% plus petit que celui du système asservi classique.

#### IV.4 Conclusion

Dans ce chapitre, les asservissements de la position angulaire d'un moteur à courant continu et de la commande de la pression de vapeur de séchage en utilisant la méthode de conception des correcteurs d'ordre fractionnaire par fractionalisation des correcteurs PI ou PID classiques ont été présentés. Les résultats obtenus montrent une nette amélioration des performances caractéristiques des deux systèmes en boucle fermée avec les correcteurs fractionnaires proposés comparée à ceux des deux systèmes en boucle fermée avec les correcteurs classiques.

## **Conclusion générale**

Dans le but d'améliorer la qualité des performances et la robustesse des systèmes asservis beaucoup de chercheurs se sont intéressés à l'application du calcul d'ordre fractionnaire dans le domaine de la commande conduisant à la naissance du domaine de la commande d'ordre fractionnaire. Des correcteurs et des algorithmes impliquant des opérateurs et des systèmes d'ordre fractionnaire dans leur implémentation ou structure ont été élaborés telles que la commande CRONE, le correcteur d'ordre fractionnaire  $PI^\lambda D^\mu$ , le correcteur d'ordre fractionnaire TID, le correcteur avance-retard de phase d'ordre fractionnaire et la commande en boucle fermée ayant un intégrateur d'ordre fractionnaire comme référence.

Ce travail porte essentiellement sur la contribution au développement de la commande d'ordre fractionnaire. En effet, une nouvelle méthode de conception des systèmes asservis dite commande par fractionalisation des correcteurs PI ou PID classiques en se basant sur la théorie des opérateurs et des systèmes d'ordre fractionnaire a été proposée. Cette technique consiste à élever la fonction de transfert du correcteur classique PI ou PID d'un système asservi à une puissance fractionnaire  $m$ , tel que  $0 < m < 1$ .

Le réglage des paramètres du correcteur proposé se fait en premier lieu par utilisation d'une des méthodes classiques pour ajuster les paramètres  $K_p$ ,  $T_I$  et  $T_D$ . Puis, employer les paramètres  $K_p$ ,  $T_I$  et  $T_D$  déjà calculés pour ajuster le paramètres  $m$  en minimisant l'intégrale du carrée de l'erreur (ISE) du système de commande. Deux théorèmes ont été proposés pour établir la stabilité des systèmes asservis après fractionalisation pour  $0 < m < 1$  correspondant aux correcteurs d'ordre fractionnaire proposés  $(PI)^m$  et  $(PID)^m$ .

Des exemples illustratifs ont été présentés pour démontrer l'efficacité de la méthode de commande proposée. L'application de cette nouvelle méthode de commande à des processus benchmarks a été faite pour démontrer l'efficacité et l'amélioration des performances des systèmes asservis comparées à ceux obtenues par les correcteurs PI ou PID classique correspondant aux correcteurs d'ordre fractionnaire réalisés.

Les résultats numériques obtenus par simulation ont montrés qu'il y'a une nette amélioration des performances des systèmes asservis avec les correcteurs d'ordre fractionnaire proposés.

Comme perspective on suggère l'extension de cette méthode aux correcteurs d'ordre fractionnaire proposés  $(PI)^m$  et  $(PID)^m$  pour  $m > .1$  On suggère aussi l'extension de cette méthode à d'autres correcteurs classiques tel que les correcteurs avance et retard de phase.

## Références

- [1] Makris, N. and Constantinou, M.C., 'Fractional-Derivative Maxwell Model for Viscous-Dampers', Journal of Structural Engineering, Vol. 117, No. 9, pp 2708-2724, 1991
- [2] Ichise, M., Nagayanagi, Y., and Kojima, T., 'An analog simulation of non integer order transfer functions for analysis of electrode processes', Journal of electro-analytical chemistry, Vol. 33, No. 2, pp 253-265, 1971
- [3] Sun, H. and Onaral, B., 'A unified approach to represent metal electrode interface', IEEE Transactions on Biomedical Engineering, Vol. 30, No. 7, pp 399-406, 1984
- [4] Goldberger, A.L., Bhargava, V. and West, B. J. and Mandel, A. J., 'On a mechanism of cardiac electrical stability : the fractal hypothesis', Biophysical Journal, Vol. 48, No. 3, pp 525-528, 1985
- [5] Samko, S.G., Kilbas A.A. and Marichev, O.I., 'Fractional integrals and derivatives: Theory and applications', Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon, 1993
- [6] Miller, K.S. and Ross, B., 'An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations', John Wiley and Sons, New York, 1993
- [7] Podlubny, I., 'Fractional differential equations', Academic Press, San Diego, 1999
- [8] Oustaloup, A., 'La commande CRONE', Hermès, Paris, 1991
- [9] Podlubny, I., 'Fractional order systems and  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  controllers', IEEE Transactions on automatic control, Vol. 44, No. 1, pp 208-214, 1999
- [10] Podlubny, I., 'Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications', Academic Press, San Diego, 1999
- [11] Caputo, M., 'Linear models of dissipation whose  $q$  is almost frequency independent', Geophysical J. of the Royal Astronomical Society, Vol. 13, No. 5, pp 529-539, 1967
- [12] Filipe, A., 'Pseudo-invariance sous groupe de transformations : un nouveau concept pour la commande robuste', Séminaire Toulousain «Représentation Diffusive et Applications», N° 1, novembre 2000, pp 29- 48, disponible sur : <http://conf.laas.fr/st-rda/>
- [13] Chen, Y. Q., 'Fractional order calculus, Fractional filter and fractional-order Control: An Overview & some recent developments', Utah State University Seminar, March 6, 2003, disponible sur : [http://mechatronics.ece.usu.edu/foc/ece6800chen\\_foc.pdf](http://mechatronics.ece.usu.edu/foc/ece6800chen_foc.pdf)
- [14] Charef, A., Sun, H.H., Tsao, Y.Y. and Onaral, B., 'Fractal system as represented by singularity function', IEEE Trans. on Automa. Cont., Vol. 37, No. 9, pp 1465-1470, 1992
- [15] Charef, A., 'Analogue realization of fractional order integrator, differentiator and fractional  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  controllers', IEE Proceeding on Control Theory Applications, Vol. 153, No. 6, pp 714-720, 2006

- [16] Charef, A., 'Analysis and synthesis of fractal systems', Ph.D Thesis, Drexel University, Philadelphia, USA, 1992
- [17] Astrom, K. and Hagglund, T., 'PID controllers: theory, design and tuning', Instrument Society of America, Research Triangle Park, North Carolina, USA, 1995
- [18] Gang, C., Haibin, Y., Weihua, X., and Jian, C., 'PID control of unstable process with large dead time', Chinese Jour. of scientific instrument, Vol. 26, No. 3, pp.301–303, 2005
- [19] Hwang, C. and Hwang, J.H., 'On stabilization of first-order plus dead-time unstable processes using PID controllers', IEE Proceeding on Control Theory Applications, Vol. 151, No. 1, pp 89-94, 2004
- [20] Majhi, S. and Atherton, D.P., 'Autotuning and controller design for unstable time delay processes', UKACC International Conference on Control, Swansea, UK, 1-4 Sept., 1998
- [21] Majhi, S. and Atherton, D.P., 'Online tuning of controllers for an unstable FOPDT process', IEE Proc.-Control Theory Appl., Vol.147, No. 4, pp 421–427, 2000
- [22] Manabe, S., 'The non-integer integral and its application to control systems', Japanese Institute of Electrical Engineers Journal, Vol. 6, No.3-4, pp 589-597, 1960
- [23] Chen, Y.Q and Xue, D., 'A comparative introduction of four fractional order controllers', In Proceedings of the 4<sup>th</sup> IEEE World Congress on Intelligent Control and Automation, Shanghai, China, 10-14 June, 2002
- [24] Oustaloup, A., 'La dérivation non entière', Hermès, Paris, 1995
- [25] Lurie, B.J., 'Three-parameter tunable Tilt-Integral-Derivative (TID) controller'. United States Patent No. US 5371670 A, Washington, DC : National Aeronautics and Space Administration, USA, 1993
- [26] Raynaud, H.F. and Zergainoh, A., 'State-space representation for fractional order controllers'. Automatica, Vol. 36, No. 7, pp 1017–1021, 2000
- [27] Monje, C.A., Vinagre, B.M., Calderón, A.J., Feliu, V and Chen, Y.Q., 'Self-tuning of fractional lead-lag compensators', Proceedings of the 16th IFAC World Congress, Prague, Czech Republic, 4- 8 July, 2005
- [28] Bode, H. W, 'Network Analysis and Feedback Amplifier Design', Tung Hwa Book Company, Shanghai, China, 1949
- [29] O'Dwyer, A., 'Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules', London, UK, 2009
- [30] Mastascusa, E. J., 'Using Bode Plots to Evaluate Stability With The Nyquist Stability Criterion', disponible sur : <http://www.facstaff.bucknell.edu/mastascu/econtrolhtml/freq/nyquist3.html>
- [31] Tavakoli, S and Fleming, P., 'Optimal tuning of PI controllers for first order plus dead time/long dead time models using dimensional analysis', Proceedings of the European Control Conference, Cambridge, UK, 1-4 September, 2003

- [32] Tissir, E., 'Cours d'asservissement linéaires continus', Université Sidi Mohammed BenAbdellah, disponible sur : <http://www.scribd.com/doc/20894657/Cours-Genie-Autom-ISAI>
- [33] Bidan, P., 'Commande diffusive d'une machine électrique : une introduction', Proceedings ESAIM, Vol. 5, pp 55-68, 1998
- [34] Le Lann, C., 'Le PID utilisé en régulation de position et/ou de vitesse de moteurs électriques', Paris, 2007, disponible sur : <http://www.totofweb.net/projets/pid/rapport.pdf>
- [35] En Tech Control Engineering Inc, 'Automatic controller dynamic specification', Toronto, 1993, disponible sur: <http://www.emersonprocess.com/entechcontrol/download/publications/control.pdf>

Abstract:

The PID controller is the most common technique used in the stabilization of industrial processes for decades. The idea of using fractional calculus in control loops systems dating from the early 60s. Recently, correcting fractional order has been proposed. The interest for this type of correction is justified by greater flexibility in the design of the control they have one or more parameters and more. These parameters can be used to meet additional performance in the design of servo systems.

In this paper, a design method of fractional order correction using a new technique called "fractionalization" of conventional PID controllers based on the theory of operators and fractional order systems has been proposed. This method uses a conventional servo system designed with a PID controller using any technical adjustment of PID controller, and then the classic PID controller is transformed to a fractional order correction by a technique that consists of raising the transfer function corrector classic PID real power. Illustrative examples are presented to demonstrate the effectiveness of the proposed control method. The application of this new control method to benchmark process was also made to demonstrate the performance improvement compared to those obtained by the conventional PID controllers corresponding to the corrective order fractional made servo systems.

Keywords: Operator of fractional order, fractional order system,  
Correcteur PID, Correcteur d'ordre fractionnaire, Réglage de correcteurs

## ملخص:

المصحح PID هو لتقنية الأكثر استعمالا في ضبط الأنظمة الصناعية لعشرات الستينات (فكرة استخدام الحساب الجزئي في مراقبة حلقات الأنظمة التي يعود تاريخها إلى أوائل الستينات). في الآونة الأخيرة تم اقتراح مصحح جزئي و الفائدة من استعمال هذا المصحح تتبين بأفضلية و مرونة أكثر في إعداد النظام و التحكم في معيار أو أكثر. هذه المعايير يكمن استعمالها في تحسين نماذج أنظمة التحكم .

في هذه المذكرة تم اقتراح طريقة تصميم من اجل المصحح الجزئي باستخدام تقنية جديدة تسمى "Fractionalisation" للمصحح PID الكلاسيكي القائم على نظرية المشغلين و الأنظمة الجزئية.

يستخدم هذا الأسلوب نظاما كلاسيكيا مضبوطا مصمما مع مصحح PID مع أي تعديل فني. يتم تحويل المصحح الجزئي بواسطة هذا الأسلوب الذي يتمثل في رفع معادلة النقل للمصحح PID الكلاسيكي إلى درجة حقيقية.

يتم عرض أمثلة توضيحية لتبيين فعالية أسلوب التحكم المقترح و هذه الطريقة الجديدة تم تطبيقها في التحكم لمعرفة تحسن الأداء و المقارنة مع تلك التي تم الحصول عليها بواسطة المصحح PID الكلاسيكي ونظيره المصحح الجزئي المنجز.

### كلمات المفاتيح:

المشغل الجزئي، الأنظمة الجزئية، المصحح PID ، المصحح الجزئي، تعديل المصحح.