

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE CONSTANTINE
FACULTÉ DES SCIENCES DE L'INGÉNIEUR
DÉPARTEMENT D'ÉLECTRONIQUE

MÉMOIRE DE MAGISTER

Présenté par :

Melle. Hamdaoui Kheira

Option :

Traitement du signal

Thème :

**IMPLÉMENTATION ANALOGIQUE ET
NUMÉRIQUE DE DÉRIVATEUR ET
INTÉGRATEUR D'ORDRE
FRACTIONNAIRE**

Soutenue le :

Examiné par le jury :

Président	Pr. M. Khamadja	Professeur	Université de Constantine
Rapporteur	Pr. A. Charef	Professeur	Université de Constantine
Examineur	Pr. A. Bennis	Professeur	Université de Constantine
Examineur	Dr. T. Laroussi	Maître de conférence	Université de Constantine

Année 2005/2006

Introduction Générale

Le concept des opérateurs d'ordre fractionnaire a été défini aux 19 siècles par Riemann et Liouville. Leur but devait prolonger la différentiation (dérivation ou intégration d'ordre fractionnaire) en employant non seulement un ordre entier mais également des ordres non entiers.

La littérature contient beaucoup d'exemples d'application de cet outil mathématique, également dans la recherche de solutions aux problèmes des équations différentielles ordinaires, des équations différentielles aux dérivées partielles et les équations intégrales, les opérateurs d'ordre fractionnaires sont utilisés en identification des modèles rationnels non entiers, en traitement d'images pour l'extraction de contour [1].

Pour les modèles dits fractals et les modèles multi fractals, ils reposent sur la dérivée non entière définie de façon implicite [1]. Ces modèles sont utilisés dans différents domaines, comme représentation analytique de données expérimentales : impédance de polarisation d'électrode et densité spectrales de puissance du complexe QRS du signal ECG [2].

La difficulté majeure avec les modèles fractionnaires est leur simulation dans le domaine temporel, souvent la solution analytique de la sortie d'un modèle fractionnaire n'est pas simple à calculer. Durant les 20 dernières années des algorithmes numériques ont été développés en utilisant les modèles rationnels continus et discrets dans le temps rapprochant les systèmes fractionnaires [3, 4, 5,6]. Des méthodes basées sur l'expression analytique de la sortie, qui n'est pas simple à calculer, elle exige le calcul d'une intégrale ,en outre elle dépend de la précision utilisée en calculant le produit de convolution [1]. Dans des articles plus récents, on trouve des méthodes basées sur des modèles discrétisés dans le temps, ces méthodes rapprochant le modèle fractionnaire par un modèle rationnel discrétisé, le dérivateur fractionnaire est substitué par son équivalence discrétisée dans le temps. Ce dernier est calculé en utilisant de diverses méthodes d'approximations, les plus récentes sont Euler, Tustin, Simpson, et Al-Alaoui [3, 7, 8, 9,10]. Ces méthodes mènent à une transformation en Z irrationnel qui est ensuite rapprochée par la série de Taylor tronquée ou l'expansion de fraction continue

(CFE). L'inconvénient de telles méthodes est que l'ordre du modèle équivalent est élevé, ce qui rend la simulation très dure à réaliser.

L'objectif poursuivi par ces travaux est de trouver une nouvelle méthode de simulation de la sortie d'un opérateur d'ordre fractionnaire qui garantit les deux critères nécessaires phase constante et amplitude linéaire dans une gamme de fréquences donnée, et qui assure une simulation facile et rapide à réaliser, les investigations de cette méthode et les résultats obtenus seront exposées en quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré à la représentation de certaines notions de l'opérateur d'ordre fractionnaire, et les méthodes d'approximations les plus récentes.

Dans le deuxième chapitre, nous exposerons une approche d'approximation rationnelle d'opérateur d'ordre fractionnaire qui est la méthode d'approximation rationnelle de Charef d'une façon détaillée, le troisième chapitre est réservé à la discrétisation de l'opérateur d'ordre fractionnaire selon deux transformations récentes, la transformation Bilinéaire et la transformation Backward, une implémentation de l'opérateur d'ordre fractionnaire est également présentée.

Le quatrième chapitre est réservé à l'application de la méthode proposée sur les fonctions les plus usuelles : l'échelon, la rampe, sinusoidale, et fonction sinusoidale amortie, La méthode proposée sera ensuite décrite et les résultats de son évaluation, en termes de phase constante et amplitude linéaire dans la bande de fréquences désirée, des comparaisons avec d'autres méthodes sont également présentées.

Opérateurs d'ordre fractionnaire

I.1 Définitions

I.1.1 Définition de GRUNWALD-LETNIKOV

On considère les notations suivantes :

a : Ordre de la dérivation ($a \in \mathbb{R}$),

$D^{(a)}$: Opérateur dérivation non entière d'ordre a .

a) Cas général

La dérivée d'ordre un ($D^{(1)}$) d'une fonction f peut être définie par :

$$D^{(1)} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (\text{I-1})$$

Lorsque n est un entier quelconque, cette formule peut se généraliser et la dérivée d'ordre n de f est définie par :

$$D^{(n)} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \cdot \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot C_n^k \cdot f(t-k.h), \text{ ou } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (\text{I-2})$$

Plus généralement, on définit la dérivée d'ordre a de la fonction f par la relation [11]

$$D^{(a)} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^a} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \binom{a}{k} f(t-k.h) \quad (\text{I-3})$$

Où $\binom{a}{k} = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(k) \cdot \Gamma(a-k)}$ et $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{z-1} \cdot dt$ est la fonction Gamma.

Pour un pas de discrétisation h petit l'équation (I-3) donne une très bonne approximation sous la forme :

$$D^{(a)} f(t) \approx \frac{1}{h^a} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \binom{a}{k} f(t-k.h) \quad (\text{I-4})$$

b) Cas d'une fonction causale

Si f est causale, on montre que la somme infinie de (I-4) se réduit à un nombre K de termes, c'est-à-dire que l'on peut écrire [11]

$$D^{(a)} f(t) \approx \frac{1}{h^a} \cdot \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{a}{k} f(t - k.h) \quad (\text{I-5})$$

Dans le cas d'un échantillonnage, la dérivation d'ordre a à l'instant $t_m = h.m$, où h est le pas d'échantillonnage, est donnée par :

$$D^{(a)} f(t_m) = \frac{1}{h^a} \cdot \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{a}{k} f_{m-k} \quad \text{Ou } f_m = f(t_m) \quad (\text{I-6})$$

Cette expression permet de déterminer numériquement par discrétisation la dérivation non entière d'une fonction f causale.

I.1.2 Définition de RIEMANN-LIOUVILLE

La dérivée d'ordre a , lorsque $a < 1$, d'une fonction f continue s'écrit sous la forme intégrale suivante :

$$D^{(a)} f(t) = f(0) \cdot \frac{t^{-a}}{\Gamma(1-a)} u(t) + \int_0^t \frac{q^{-a}}{\Gamma(1-a)} \cdot D^{(1)} [f(t-q)] dq \quad (\text{I-7})$$

Où $u(t)$ est la fonction échelon unitaire.

I.2 Quelques propriétés de la dérivation non entière

Soit f et g deux fonctions continues.

I.2.1 Linéarité

La dérivation non entière est un opérateur linéaire [10]. Ainsi, si f et g sont deux fonctions continues et (l, m) des réels, on a :

$$D^{(a)} (l.f + m.g) = l.D^{(a)}(f) + m.D^{(a)}(g) \quad (\text{I-6})$$

I.2.2 Opérateur d'identité

Pour $a = 0$, l'opération $D^{(0)}$ est l'opérateur d'identité :

$$D^{(0)} f(t) = f(t) \quad (\text{I-7})$$

I.2.3 La transformée de Laplace

La transformée de Laplace F , fonction de l'opérateur de Laplace s , d'une fonction f , dépendant du temps t , est définie par la relation :

$$F(s) = L\{f(t); s\} = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt \quad (\text{I-8})$$

[11] montre que la transformation de Laplace d'une dérivation d'ordre a de la fonction f est égale au produit de la transformée de Laplace de f et de l'opérateur de Laplace (s) à la puissance a , de manière analogue au cas des dérivations entières :

$$L\{D^{(a)}[f(t)]; s\} = s^a \cdot L\{f(t); s\} \quad (\text{I-9})$$

I.3 Exemples de calcul de dérivée non entière

I.3.1 Dérivation non entière d'une exponentielle

Pour un nombre z quelconque, on a [2] :

$$D^{(a)}[\exp(z \cdot t)] = z^a \cdot \exp(z \cdot t) \quad (\text{I-10})$$

Où $D^{(a)}$ est la dérivation d'ordre a par rapport à la variable t .

I.3.2 Dérivation non entière d'un cosinus (ou d'un sinus)

En utilisant le fait qu'un cosinus (resp. un sinus) est égal à la partie réelle (resp. imaginaire) d'une exponentielle, et que l'opérateur dérivée non entière est linéaire [2], on peut déterminer facilement la dérivation non entière d'ordre a d'un cosinus (resp. un sinus).

Ainsi :

$$D^{(a)}[\cos(w_0 \cdot t - j)] = w_0^a \cdot \cos\left(w_0 \cdot t - j + a \cdot \frac{p}{2}\right) \quad (\text{I-11})$$

$$D^{(a)}[\sin(w_0 \cdot t - j)] = w_0^a \cdot \sin\left(w_0 \cdot t - j + a \cdot \frac{p}{2}\right) \quad (\text{I-12})$$

La figure (I-1) ci-dessous illustre cette notion de dérivation non entière pour une fonction sinusoidale caractérisée par une pulsation de 10 rad/s et un déphasage nul.

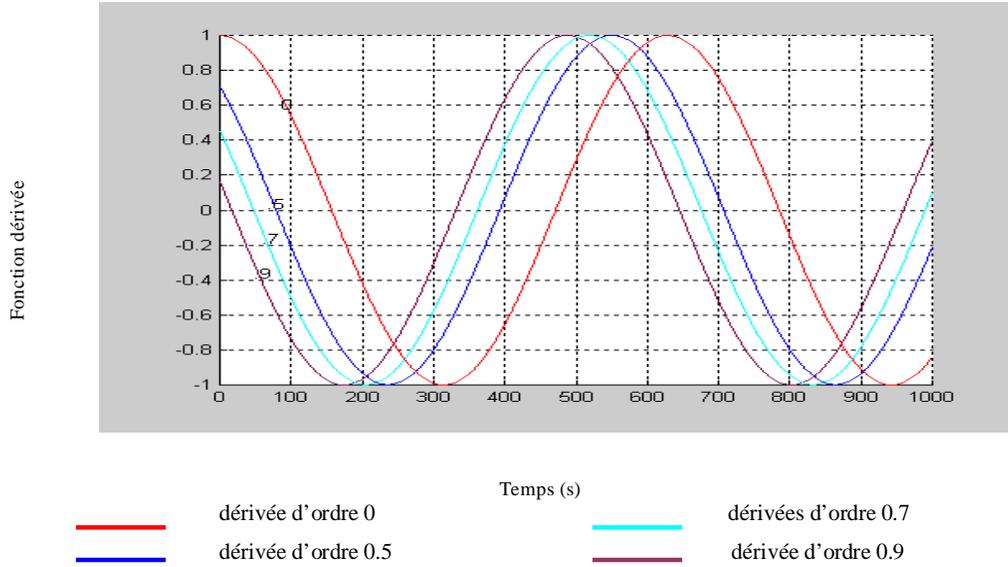


Figure I-1 Dérivation d'ordre a d'une fonction sinusoidale

I.3.3 Dérivation non entière d'une fonction sinusoidale amortie

En utilisant le fait qu'un sinus est égal à la partie imaginaire d'une exponentielle et que l'opérateur dérivé non entière est linéaire [2], on trouve la relation suivante :

$$D^{(a)}[\sin(w_0.t).exp(t/\tau)] = R^a . \sin(w_0.t + a.q).exp(t/\tau) \quad (I-13)$$

Avec :

$$R = \left| \frac{1}{\tau} + i.w_0 \right| \quad \text{et} \quad q = \text{Arg} \left(\frac{1}{\tau} + i.w_0 \right) \quad (I-14)$$

I.4 Méthodes d'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire

I.4.1 Cas continu

I.4.1.1 Approximation en utilisant les expansions de fraction continu (CFE)

et des techniques d'interpolation

En général [12] l'approximation rationnelle de la fonction $G(s) = s^{-a}$, $0 < a < 1$ est obtenue en utilisant la CFE :

$$G_h(s) = \frac{I}{(I + sT)^a} \quad (\text{I-15})$$

$$G_l(s) = \left(I + \frac{I}{s} \right)^a \quad (\text{I-16})$$

Où $G_h(s)$ est l'approximation dans les hautes fréquences ($wT \gg I$), et $G_l(s)$ est l'approximation dans les basses fréquences ($w \ll I$).

I.4.1.2 La méthode d'Oustaloup

La méthode [13] est basée sur l'approximation de la fonction de la forme :

$$H(s) = s^m, \quad m \in R^+ \quad (\text{I-17})$$

Par la fonction rationnelle suivante :

$$\hat{H}(s) = C \prod_{k=-N}^N \frac{I + s/w_k}{I + s/w'_k} \quad (\text{I-18})$$

En utilisant les formules de synthèse suivantes :

$$w'_0 = a^{-0.5} w_u; \quad w_0 = a^{0.5} w_u; \quad \frac{w'_{k+1}}{w'_k} = \frac{w_{k+1}}{w_k} = ah > 1 \quad (\text{I-19})$$

$$\frac{w_{k+1}}{w_k} = h > 1; \quad \frac{w_k}{w'_k} = a > 0; \quad N = \frac{\log(w_N/w_0)}{\log(ah)}; \quad m = \frac{\log a}{\log(ah)} \quad (\text{I-20})$$

Avec

w_u : La fréquence du gain unité. Tel que, $w_u = \sqrt{w_h w_b}$ w_h et w_b

Sont les fréquences transitoires hautes, et basse respectivement.

I.4.1.3 La méthode de Charef

Cette méthode proposée dans [14], est basée sur l'approximation d'une fonction de la forme :

$$H(s) = \frac{I}{\left(I + \frac{s}{p_T} \right)^a} \quad (\text{I-21})$$

Par un quotient de polynômes en fonction de s sous la forme :

$$\hat{H}(s) = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^n \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{I-22})$$

Où les coefficients sont calculés pour obtenir une déviation maximale de la réponse originale de l'amplitude dans le domaine fréquentiel. On définit :

$$a = 10^{y/10(a-1)}, b = 10^{y/10a} \quad ab = 10^{y/10a(1-a)} \quad (\text{I-23})$$

Les pôles et les zéros de la fonction rationnelle approximée sont obtenus à partir des formules suivantes :

$$p_0 = p_T \sqrt{b}, \quad p_i = p_0 (ab)^i, \quad z_i = ap_0 (ab)^i \quad (\text{I-24})$$

Le nombre des pôles et des zéros est lié à la largeur de la bande désirée et au critère d'erreur utilisé par l'expression :

$$N = \left\lceil \frac{\log \left(\frac{w_{max}}{p_0} \right)}{\log(ab)} \right\rceil + 1 \quad (\text{I-25})$$

I.4.2 Cas discret

I.4.2.1 Approximation discrète en utilisant l'intégration et l'expansion

de série entière

En utilisant la fonction génératrice correspondant à la règle de Backward, $w(z^{-1}) = (1 - z^{-1})$ et en utilisant l'expansion de série entière (PSE) de $(1 - z^{-1})^a$,

La formule de Grünwald-Letnikov de la dérivée d'ordre fractionnaire pour un ordre a est obtenue :

$$\nabla_T^a f(nT) = T^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{a}{k} f((n-k)T) \quad (\text{I-26})$$

L'exécution de la PSE de la fonction $(1 - z^{-1})^{-a}$ mène à la formule donnée par

Lubich [15] pour l'intégral d'ordre fractionnaire d'ordre a :

$$\nabla_T^a f(nT) = T^a \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-a}{k} f((n-k)T) \quad (\text{I-27})$$

La fonction de transfert résultante, rapprochant l'opérateur d'ordre fractionnaire est donné par la relation :

$$Y(z) = T^{\text{mb}} PSE\left\{(I - z^{-1})^{\pm a}\right\} F(z) \quad (\text{I-28})$$

Où T est la période d'échantillonnage, $Y(z)$ est la transformée en z de la séquence de sortie $y(nT)$, $F(z)$ est la transformée en z de la séquence d'entrée $f(nT)$, $PSE\{u\}$ dénote l'expression qui résulte de l'expansion de série entière de la fonction u ,
Faire ainsi donné :

$$D^{\pm a}(z) = \frac{Y(z)}{F(z)} = T^{\text{mb}} PSE\left\{(I - z^{-1})^{\pm a}\right\} \quad (\text{I-29})$$

Où $D^{\pm a}(z)$ dénote l'équivalent discret de l'opérateur d'ordre fractionnaire.

Une autre possibilité pour l'approximation est l'utilisation de la règle trapézoïdale, comme une fonction génératrice :

$$w(z^{-1}) = 2 \frac{I - z^{-1}}{I + z^{-1}} \quad (\text{I-30})$$

I.4.2.2 Approximation discrète en utilisant l'intégration numérique et l'expansion de fraction continue

Une méthode pour obtenir l'équivalent discret de l'opérateur d'ordre fractionnaire, qui combine la règle trapézoïdale et la CFE [16], cette méthode implique :
L'utilisation de la fonction génératrice :

$$w(z^{-1}) = 2 \frac{I - z^{-1}}{I + z^{-1}} \quad (\text{I-31})$$

Où z est la variable complexe, z^{-1} est l'opérateur de retard.

Et l'expansion de fraction continue (CFE) de :

$$\left(w(z^{-1})\right)^{\pm a} = \left(2 \frac{I - z^{-1}}{I + z^{-1}}\right)^{\pm a} \quad (\text{I-32})$$

Pour obtenir les coefficients et la forme de l'approximation.

La fonction de transfert résultante, rapprochant l'opérateur d'ordre fractionnaire peut être exprimée sous la forme :

$$D^{\pm a}(z) = \frac{Y(z)}{F(z)} = T^{\text{ma}} CFE \left\{ \left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^{\pm a} \right\}_{p,q} \quad (\text{I-33})$$

$$= T^{\text{ma}} \frac{P_p(z^{-1})}{Q_q(z^{-1})} \quad (\text{I-34})$$

Où T est la période d'échantillonnage, $CFE\{u\}$ dénote la fonction de transfert résultante de l'application de l'expansion de fraction continue de la fonction u , $Y(z)$ est la transformée en z de la séquence de sortie $y(nT)$, $F(z)$ est la transformée en z de la séquence d'entrée $f(nT)$, p et q sont les ordres de l'approximation, P et Q sont des polynômes de degré p et q correspondant au variable z^{-1} .

I.4.3 Autres approximations

Il est nécessaire de mentionner la méthode diffusive proposé dans[17], les approximations résultantes peuvent être regardées, dans le domaine de l'aplace en tant qu'approximation rationnelle de l'opérateur d'ordre fractionnaire, cette approximation montre un objet commun, que nous observons dans toutes les bonnes approximations rationnelles, elle a des pôles et des zéros entrelacés sur le vrai axe négatif dans le plan s , et la distance entre les pôles et les zéros successifs diminue pendant que l'approximation est améliorée en augmentant le degré des polynômes du numérateur et de dénominateur.

Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire

II.1 Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire

La fonction de transfert de l'opérateur intégrale d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$H_I(s) = \frac{I}{s^m} \quad (\text{II-1})$$

Avec $s = jw$ la fréquence complexe et m est un nombre positif tel que $0 < m < 1$.

Dans une bande de fréquence donnée $[w_b, w_h]$, cet opérateur d'ordre fractionnaire peut être modelé dans le domaine fréquentiel par un pôle à puissance fractionnaire (PPF) comme suit :

$$H_I(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^m} \quad (\text{II-2})$$

Si on suppose que pour $w \in [w_b, w_h]$ on a $w \gg w_c$, on peut écrire :

$$H_I(s) = \frac{K_I}{\left(\frac{s}{w_c}\right)^m} = \frac{K_I w_c^m}{s^m} = \frac{I}{s^m} \quad (\text{II-3})$$

Avec $K_I = (I/w_c^m)$ et w_c est la fréquence de coupure de PPF qui est obtenue à partir de

la basse fréquence w_b : $w_c = w_b \sqrt{10 \left(\frac{e}{10^m}\right) - 1}$ où e est l'erreur maximale permise entre la pente de l'opérateur de puissance fractionnaire de l'équation (II-1) et le PPF de l'équation (II-2) dans la bande de fréquence donnée $[w_b, w_h]$.

Dans le but de représenter le pôle d'ordre fractionnaire de l'équation (II-2), et par conséquent l'intégrateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une rationnelle [14,18].

La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de 20mdB/dec sur le tracé de Bode du PPF par un nombre de ligne sous forme de Zig-Zag, produite par une alternance de pente 20 dB/de cet 0 dB/dec correspondant à une alternance de pôles et de zéros sue l'axe réel négative du plan s tel que $p_0 < z_0 < p_1 < z_1 < \dots < z_{N-1} < p_N$.

D'où l'approximation suivante :

$$H_I(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^m} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{II-4})$$

Les p_i et les z_i sont les pôles et les zéros de l'approximation.

En utilisant une méthode graphique simple [14], les pôles et les zéros de l'approximation s'avèrent sous une forme d'une progression géométrique. Cette méthode graphique d'approximation a commencé par une erreur d'approximation y en dB et une bande de fréquence d'approximation w_{\max} .

Pour déterminer le nombre N, la bande de fréquence sur laquelle l'approximation est faite doit être spécifiée, soit " w_{\max} " cette bande, telle que w_{\max} est pris 100 fois égal à w_h son expression est donnée par [14,18] :

$$N = \text{partie entiere} \left[\frac{\log \left[\frac{w_{\max}}{p_0} \right]}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (\text{II-5})$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$p_i = (ab)^i p_0, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N$$

$$z_i = (ab)^i ap_0, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N-1$$

Où a et b sont appelés les rapports de position, leurs expressions en fonction de y et m sont donnée par :

$$a = 10 \left(\frac{y}{10^{(1-m)}} \right), \quad b = 10 \left(\frac{y}{10^m} \right)$$

Et le premier pôle p_0 et le premier zéro z_0 sont donnés par [14,18] :

$$p_0 = w_c \sqrt{b}, \quad z_0 = ap_0$$

Afin de connaître la contribution de chaque pôle au processus de relaxation. On doit décomposer la fonction rationnelle en somme de fractions élémentaires :

$$H_I(s) = K_I \cdot \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{(ab)^i ap_0} \right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i p_0} \right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{1 + \frac{s}{(ab)^i p_0}} \quad (\text{II-6})$$

Où les coefficients h_i sont les résidus et qui sont déterminés par :

$$h_i = K_I \cdot \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^j p_0}{(ab)^j ap_0} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left(1 - \frac{(ab)^j p_0}{(ab)^j p_0} \right)} = K_I \cdot \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^{i-j}}{a} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left(1 - (ab)^{i-j} \right)}, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{II-7})$$

II.1.1 Exemple d'un intégrateur d'ordre fractionnaire

Pour le but d'illustration prenons un exemple numérique pour un intégrateur d'ordre fractionnaire représenté par :

$$H_I(s) = \frac{1}{s^{0.5}}$$

Pour obtenir la fonction rationnelle d'approximation de cet opérateur d'ordre fractionnaire, on suppose que la bande de fréquence $[w_b, w_h] = [100 \text{ rad/s}, 10000 \text{ rad/s}]$; et pour $e = 10^{-5}$, on obtient $w_c = 0.2146$ et $K_I = 0.4632$ par suite le modèle PPF de cet opérateur d'ordre fractionnaire est donné par :

$$H(s) = \frac{0.4632}{\left(1 + \frac{s}{0.2146} \right)^{0.5}}$$

On choisit l'erreur du PPF par une fonction rationnelle $y = 1$ dB et la bande fréquentielle d'approximation $w_{max} = 100w_h = 10^6 \text{ rad/s}$, les paramètres a, b, p_0, z_0 et N peuvent être facilement calculés et ils sont donnés comme suit :

$a=1.5849$, $b=1.5849$, $p_0=0.2702\text{rad/s}$, $z_0=0.4282\text{ rad/s}$ et $N= 17$.

Les pôles et les zéros de l'approximation sont donnés par les équations suivantes:

$$p_i = 0.2702(2.7514)^i, \text{ pour } i=0,1,\dots,17$$

$$z_i = 0.4282(2.7514)^i, \text{ pour } i=0,1,\dots,16$$

Les tracés de Bode de la fonction rationnelle d'approximation sont présentés dans la figure (II-1).

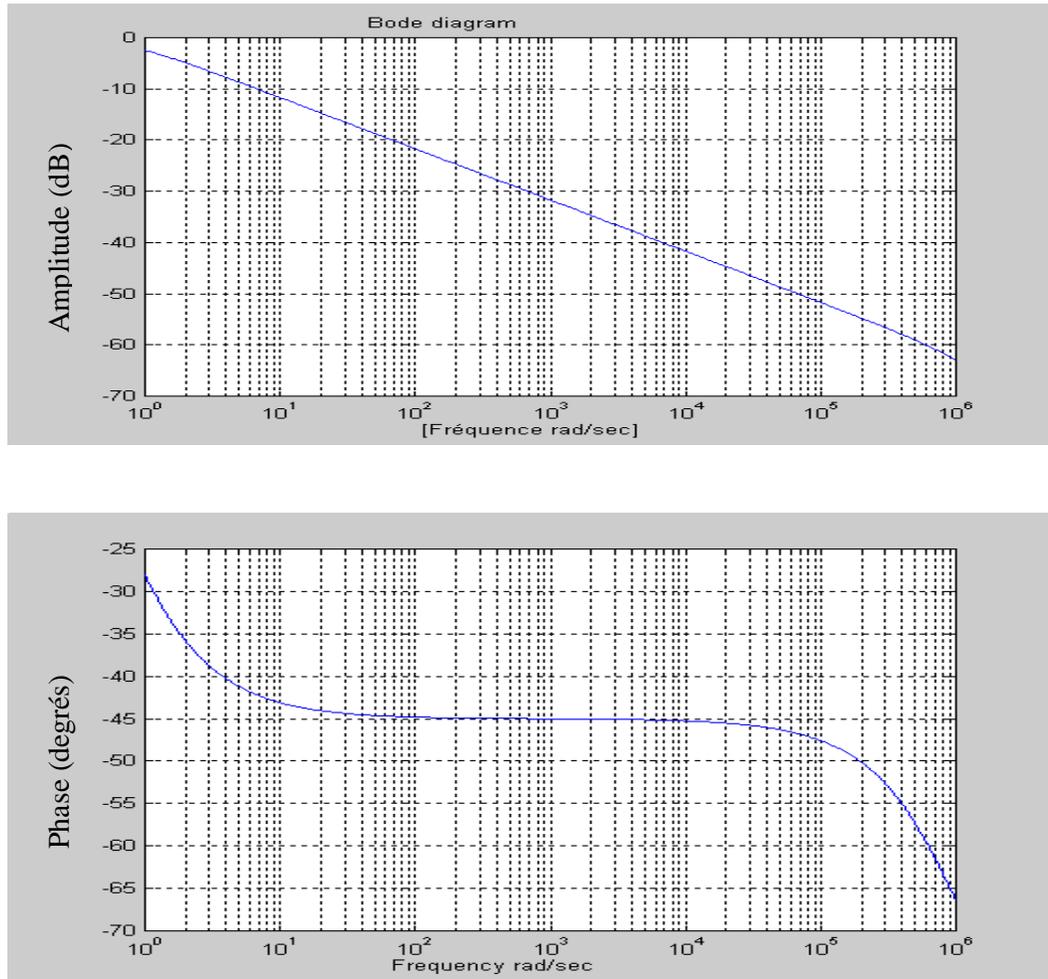


Figure (II-1) Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire $s^{-0.5}$.

On remarque bien que dans la plage de fréquence $[100,10000]$, la pente de la fonction d'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire à une pente de -10dB/dec (20m), et la phase de -45° , ce qui implique la justesse de l'approximation.

II.2 Approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre Fractionnaire

La fonction de transfert d'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$G_D(s) = s^m \quad (\text{II-8})$$

Avec $s = j\omega$: la fréquence complexe et m : est un nombre positive tel que $0 < m < 1$. Dans une bande de fréquence donnée $[\omega_b, \omega_h]$ cet opérateur d'ordre fractionnaire peut être modelé dans le domaine fréquentiel par un zéro à puissance fractionnaire (ZPF) comme suit [18] :

$$G_D(s) = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c} \right)^m \quad (\text{II-9})$$

Si on suppose que pour $\omega \in [\omega_b, \omega_h]$ on a $\omega \gg \omega_c$, on peut écrire :

$$G_D(s) = K_D \left(\frac{s}{\omega_c} \right)^m = \frac{K_D}{\omega_c^m} s^m = s^m \quad (\text{II-10})$$

Avec $K_D = \omega_c^m$ et ω_c est la fréquence de coupure de ZPF qui est obtenue à partir de la basse fréquence ω_b : $\omega_c = \omega_b \sqrt{10 \left(\frac{e}{10^m} \right) - 1}$ où e est l'erreur maximale permise entre la pente de l'opérateur de puissance fractionnaire de l'équation (II-8) et le ZPF de l'équation (II-9) dans la bande de fréquence donnée $[\omega_b, \omega_h]$.

Dans le but de représenter le zéro d'ordre fractionnaire de l'équation ((II-9), et par conséquent le dérivateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une rationnelle.

La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de 20dB/dec sur le tracé de Bode du ZPF par un nombre de ligne sous forme de Zig-Zag, produite par une alternance de pente 20 dB/de cet 0 dB/dec correspondant à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négative du plan s tel que $z_0 < p_0 < z_1 < p_1 < \dots < z_{N-1} < p_N$ [18]. D'où l'approximation suivante :

$$G_D(s) = K_D \left(I + \frac{s}{w_c} \right)^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(I + \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left(I + \frac{s}{p_i} \right)} \quad (\text{II-11})$$

En utilisant une méthode graphique simple [14], les pôles et les zéros de l'approximation s'avèrent sous une forme d'une progression géométrique. Cette méthode graphique d'approximation a commencé par une erreur d'approximation y en dB et une bande de fréquence d'approximation w_{\max} .

Pour déterminer le nombre 'N', la bande de fréquence sur laquelle l'approximation est faite doit être spécifiée, soit " w_{\max} " cette bande, tel que w_{\max} est pris 100 fois égal à w_h son expression est donnée par [14,18] :

$$N = \text{partie entiere} \left[\frac{\log \left[\frac{w_{\max}}{p_0} \right]}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (\text{II-12})$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$z_i = (ab)^i z_0, \text{ pour } i = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$p_i = (ab)^i a z_0, \text{ pour } i = 0, 1, 2, \dots, N$$

Avec : $z_0 = w_c \sqrt{b}$ et $p_0 = a z_0$

Par conséquent, la fonction rationnelle d'approximation dans une bande de fréquence donnée sera :

$$G_D(s) = s^m = K_D \left(I + \frac{s}{w_c} \right)^m \approx K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(I + \frac{s}{(ab)^i z_0} \right)}{\prod_{i=0}^N \left(I + \frac{s}{(ab)^i a z_0} \right)} \quad (\text{II-13})$$

Pour des raisons concernant la réalisation, on va développer $\frac{G(s)}{s}$ en fonctions élémentaires, alors :

$$\frac{G_D(s)}{s} = \frac{1}{s} \cdot K_D \cdot \prod_{i=0}^N \left(\frac{1 + \frac{s}{(ab)^i z_0}}{1 + \frac{s}{(ab)^i a z_0}} \right) \quad (\text{II-14})$$

Calculant les résidus des pôles, on obtient :

$$G_D(s) = G_0 + \sum_{i=0}^N \frac{g_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{II-15})$$

Avec $G_0 = K_D$

$$\text{Et } g_i = K_D \cdot \frac{\prod_{j=0}^N (1 - (ab)^{i-j} a)}{(- (ab)^i a z_0) \prod_{j=0, j \neq i}^N (1 - (ab)^{i-j})} \quad \text{Pour } i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{II-16})$$

II.2.1 Exemple d'un dérivateur d'ordre fractionnaire

Soit l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire suivant :

$$G_D(s) = s^{0.85}$$

De la même façon que l'exemple de PPF, le modèle ZPF du dérivateur d'ordre fractionnaire est donné par :

$$G(s) = 1.5274 \left(1 + \frac{s}{1.6459} \right)^{0.85}$$

Avec : $K_D = 1.5274$ $[w_b, w_h] = [100 \text{ rad/s}, 10000 \text{ rad/s}]$, $e = 10^{-5}$, $w_c = 1.6459$

On choisit l'erreur du ZPF par une fonction rationnelle $y = 0.5$ dB et la bande fréquentielle d'approximation $w_{\max} = 100w_h = 10^6 \text{ rad/s}$, les paramètres a , b , p_0 , z_0 et N peuvent être facilement calculés et ils sont donnés comme suit :

$a = 2.1544$, $b = 1.1450$, $p_0 = 3.7944 \text{ rad/s}$, $z_0 = 1.7612 \text{ rad/s}$ et $N = 17$

Les pôles et les zéros de l'approximation sont donnés par les équations suivantes :

$$p_i = 3.7944 (2.4669)^i, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, 17$$

$$z_i = 1.7612 (2.5119)^i, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, 17$$

Les tracés de Bode de la fonction rationnelle d'approximation sont présentés dans la figure (II-2).

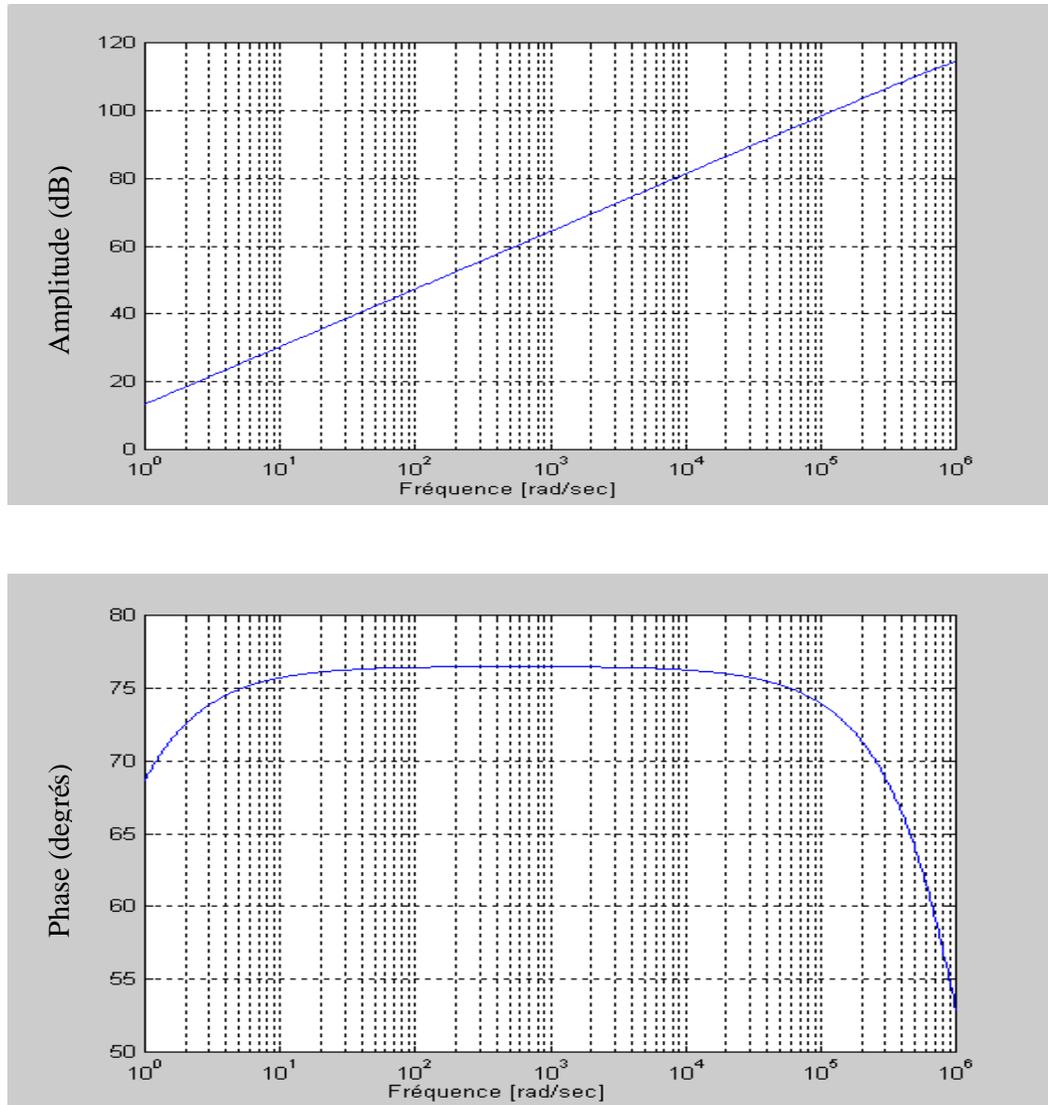


Figure (II-2) Tracés de Bode la fonction d'approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire $s^{0.85}$.

On voit bien que dans la plage de fréquence $[100\text{rad} / s, 10000\text{rad} / s]$, la pente de la fonction d'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire à une pente de 10dB/dec (20m), et la phase de 76.5° , ce qui implique la justesse de l'approximation.

II.3 Implémentation par des circuits électriques analogiques

L'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire dans une bande fréquentielle donnée par une fonction rationnelle a la forme :

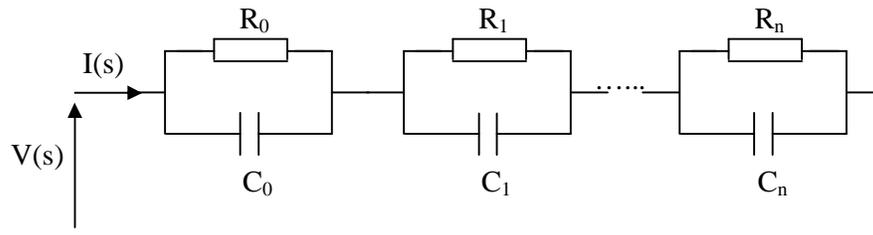
$$H(s) = \frac{K_I}{s^m} = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^m} \approx K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{II-17})$$

La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle approximant l'intégrateur d'ordre fractionnaire $H_I(s)$ donne :

$$H(s) = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{II-18})$$

Avec les h_i sont les résidus des pôles donnés par l'équation (II-7),

Cet équation correspond à l'impédance d'un réseau RC du type Foster 1^{ère} forme dont le schéma est représenté comme suit :



L'impédance de ce réseau est :

$$Z(s) = \sum_{i=0}^N \left(\frac{R_i}{1 + sR_iC_i} \right) \quad (\text{II-19})$$

Alors

$$\left. \begin{array}{l} R_i C_i = \frac{I}{p_i} \\ R_i = h_i \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R_i = h_i \\ C_i = \frac{I}{p_i h_i} \end{array} \right. \quad \text{Pour } i=0,1,\dots,N \quad (\text{II-20})$$

De la même façon, l'approximation de l'opérateur dérivée d'ordre fractionnaire dans une bande fréquentielle donnée par une fonction rationnelle a la forme :

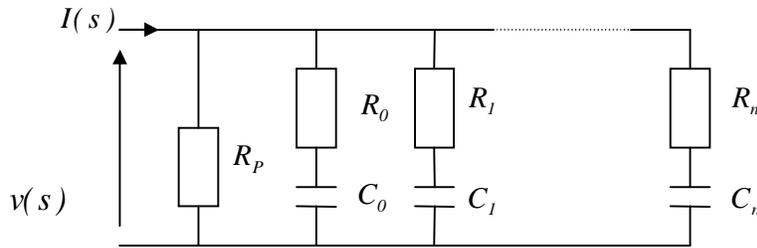
$$G(s) = K_D s^m = K_D \left(I + \frac{s}{w_c} \right)^m = K_D \cdot \frac{\prod_{i=0}^N \left(I + \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left(I + \frac{s}{p_i} \right)} \quad (\text{II-21})$$

La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle approximant le dérivateur d'ordre fractionnaire $G_D(s)$ donne :

$$G(s) = G_0 + \sum_{i=0}^N \frac{g_i s}{\left(I + \frac{s}{p_i} \right)} \quad (\text{II-22})$$

Avec les g_i sont les résidus des pôles donnés par l'équation (II-16)

Cette équation correspond à l'admittance d'un réseau du type Foster 2^{eme} forme dont le schéma est représenté comme suit :



L'admittance de ce réseau est de la forme :

$$Y(s) = \frac{I}{R_p} + \sum_{i=0}^N \frac{sC_i}{(I + sR_i C_i)} \quad (\text{II-23})$$

Alors

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \frac{I}{R_i C_i} \\ g_i &= C_i \\ G_0 &= \frac{I}{R_p} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} C_i &= g_i \\ R_i &= \frac{I}{h_i C_i} \\ R_p &= G_0 \end{aligned} \right. \quad (\text{II-24})$$

Discrétisation et implémentation numérique

III.1 Discrétisation de la fonction d'approximation rationnelle

Dans ce chapitre, on propose une nouvelle méthode pour la discrétisation de l'opérateur d'ordre fractionnaire, elle est basée sur l'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire par une fonction rationnelle continue, la méthode proposée pour approximer l'opérateur d'ordre fractionnaire améliore la qualité de l'approximation, ici nous présentons la méthode de Charef [14,18], ensuite des transformations de fréquence du plan P au plan Z existent, et qui transforment un filtre analogique en un filtre discret, pour cela on a utilisé des méthodes classiques de discrétisation (la méthode Backward [20], la méthode Bilinéaire [20]).

Comme on a montré dans le chapitre précédent, la méthode de Charef [14,18] a permis d'approximer l'opérateur d'ordre fractionnaire par une fonction rationnelle afin de nous permettre d'utiliser les théories simples et bien connues des systèmes linéaires. La fonction rationnelle pour approximer un opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire est donnée par :

$$H_I(s) = \frac{K_I}{\left(I + \frac{s}{w_c}\right)^m} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(I + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(I + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{III-1})$$

La fonction rationnelle pour approximer un opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire est donnée par :

$$G_D(s) = K_D \left(I + \frac{s}{w_c}\right)^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(I + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(I + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{III-2})$$

III.1.1 Discrétisation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire par la transformation

Bilinéaire

La transformation Bilinéaire est connue dans la littérature souvent sous le nom de la méthode trapézoïdale d'intégration, ou la méthode de transformation de Tustin [20], l'équation de la transformation bilinéaire est donnée par :

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (\text{III-3})$$

Où $s = j.w$ est la fréquence complexe et $z = \exp(j.w.T)$ est une variable complexe, T est la période d'échantillonnage. Elle sert à obtenir un filtre discret stable à partir d'un filtre analogique stable.

On a alors :

$$H_I(z) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^m} \Bigg|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \Bigg|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \quad (\text{III-4})$$

On obtient le filtre RII suivant :

$$H_{Bil}(z) = K_I \cdot (z + 1) \cdot \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(\left(1 + \frac{2}{Tz_i}\right)z + \left(1 - \frac{2}{Tz_i}\right) \right)}{\prod_{i=0}^N \left(\left(1 + \frac{2}{Tp_i}\right)z + \left(1 - \frac{2}{Tp_i}\right) \right)} \quad (\text{III-5})$$

On pose :

$$a_i = 1 + \frac{2}{Tz_i} \quad , \quad b_i = \frac{2}{Tz_i} - 1 \quad (\text{III-6})$$

$$d_i = 1 + \frac{2}{Tp_i} \quad , \quad l_i = \frac{2}{Tp_i} - 1 \quad (\text{III-7})$$

Par substitution de (III-6) et (III-7) dans l'équation (III-5) devienne :

$$H_{Bil}(z) = K_I \cdot (z + 1) \cdot \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (a_i z - b_i)}{\prod_{i=0}^N (d_i z - l_i)} \quad (\text{III-8})$$

III.1.1.1 Exemple illustrative

La discrétisation de l'opérateur $s^{-0.3}$, par la transformation Bilinéaire, avec $T=0.001$, dans une gamme de fréquences $[w_b, w_h] = [0.1, 10]$, $e = 10^{-3}$, $y = 1$ a donné les résultats suivants :

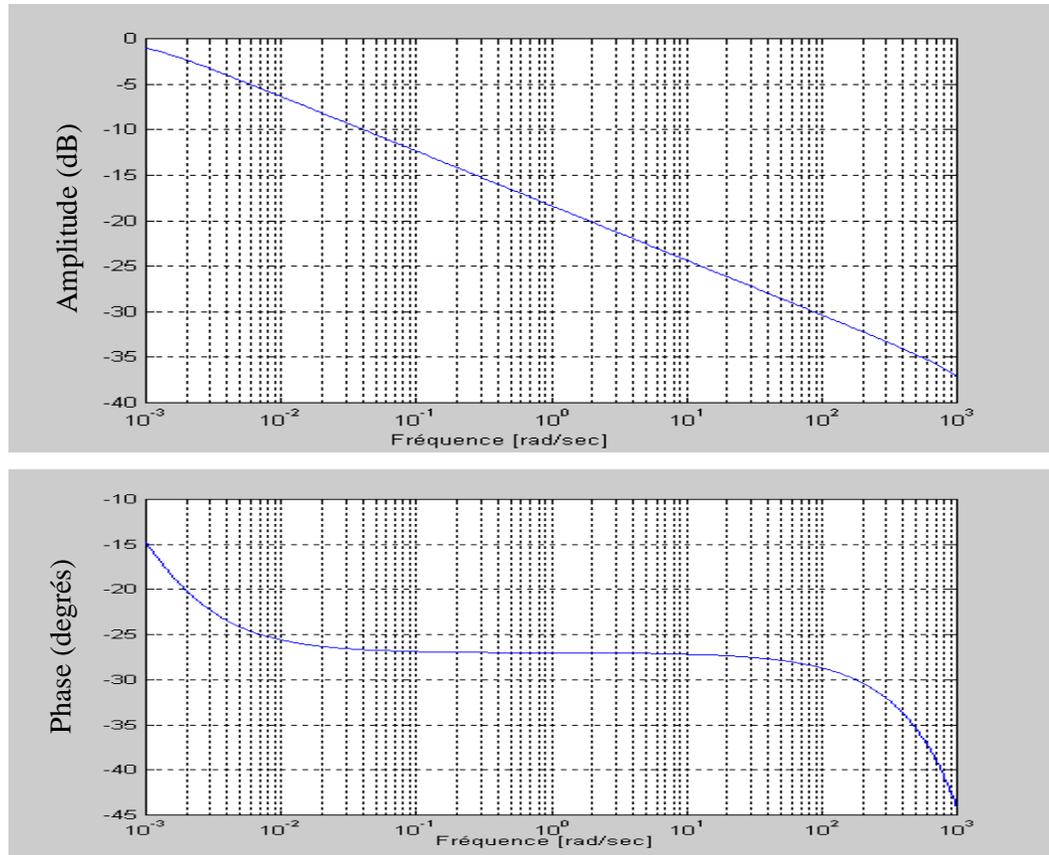


Figure (III-1) Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur Intégrateur d'ordre fractionnaire discrétisé par la transformation Bilinéaire $s^{-0.3}$.

On remarque bien que la discrétisation de l'opérateur intégrateur d'ordre partiel a permis d'obtenir un filtre stable et linéaire, la phase est de -27degrés, l'amplitude a une pente de -6 dB/dec.

III.1.2 Discrétisation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire par la transformation Backward

La transformation Backward est une méthode simple de discrétisation qui produit un filtre discret stable à partir d'un filtre analogique stable [20].

Soit :

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T} \quad (\text{III-9})$$

Où $s = j.w$ est la fréquence complexe et $z = \exp(j.w.T)$ est une variable complexe, T est la période d'échantillonnage.

Donc

$$H(z) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^m} \Bigg|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \Bigg|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} \quad (\text{III-10})$$

Par suite

$$H_{Bac} = K_I \cdot z \cdot \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(\left(1 + \frac{1}{Tz_i}\right) z - \frac{1}{Tz_i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left(\left(1 + \frac{1}{Tp_i}\right) z - \frac{1}{Tp_i} \right)} \quad (\text{III-11})$$

On pose :

$$a_i = 1 + \frac{1}{Tz_i} \quad , \quad b_i = \frac{1}{Tz_i} \quad (\text{III-12})$$

$$d_i = 1 + \frac{1}{Tp_i} \quad , \quad l_i = \frac{1}{Tp_i} \quad (\text{III-13})$$

Par substitution de (II-12) et (III-13) dans l'équation (III-11) devient :

$$H_{Bac}(z) = K_I \cdot z \cdot \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (a_i z - b_i)}{\prod_{i=0}^N (d_i z - l_i)} \quad (\text{III-14})$$

III.1.2.1 Exemple illustrative

On cherche à discrétiser l'opérateur $s^{-0.3}$, selon la transformation Backward, avec $T=0.001$, dans une gamme de fréquences $[w_b, w_h] = [0.1, 10]$, $e = 10^{-3}$, $y = 1$, on obtient le diagramme de Bode suivant :

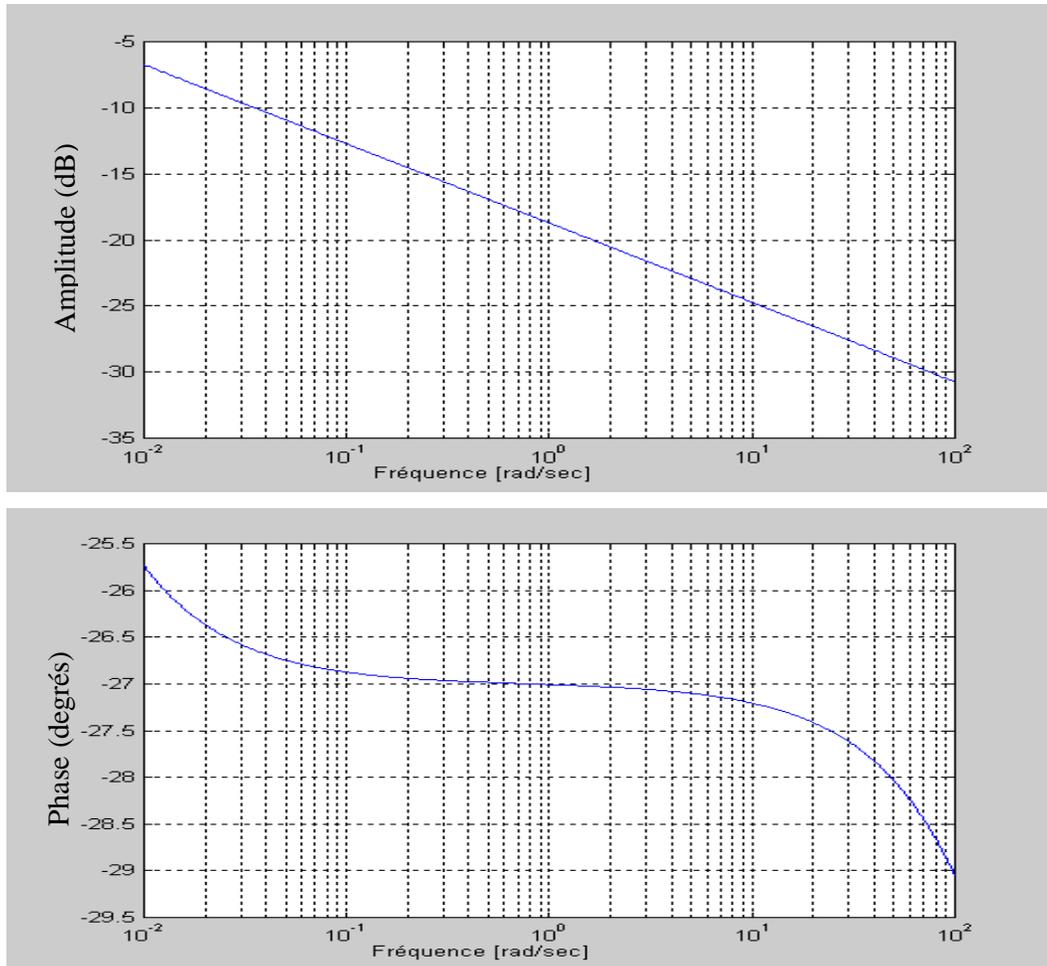


Figure (III-2) Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur Intégrateur d'ordre fractionnaire discrétisé en utilisant la transformation Backward $s^{-0.3}$.

On remarque bien que la discrétisation de l'opérateur intégrateur d'ordre partiel a permis d'obtenir un filtre stable et linéaire, la phase est de -27 degrés, l'amplitude a une pente de -6 dB/dec.

III.1.3 Discretisation du dérivateur fractionnaire par la transformation Bilinéaire

Soit

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (\text{III-15})$$

Et

$$G(z) = K_D \left(I + \frac{s}{w_c} \right) \bigg|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(I + \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left(I + \frac{s}{p_i} \right)} \bigg|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \quad (\text{III-16})$$

On aura

$$G_{Bil}(z) = K_D \cdot \frac{\prod_{i=0}^N \left(\left(I + \frac{2}{Tz_i} \right) z + \left(I - \frac{2}{Tz_i} \right) \right)}{\prod_{i=0}^N \left(\left(I + \frac{2}{Tp_i} \right) z + \left(I - \frac{2}{Tp_i} \right) \right)} \quad (\text{III-17})$$

On pose

$$a_i = I + \frac{2}{Tz_i} \quad , \quad b_i = \frac{2}{Tz_i} - I \quad (\text{III-18})$$

$$d_i = I + \frac{2}{Tp_i} \quad , \quad l_i = \frac{2}{Tp_i} - I \quad (\text{III-19})$$

Par substitution de (III-18) et (III-19) dans l'équation (III-17) devient:

$$G_{Bil}(z) = K_D \frac{\prod_{i=0}^N (a_i z - b_i)}{\prod_{i=0}^N (d_i z - l_i)} \quad (\text{III-20})$$

I.1.3.1 Exemple illustrative

Soit l'opérateur d'ordre fractionnaire $s^{0.75}$ on veut discrétiser cet opérateur selon la méthode Bilinéaire, avec $T=0.001$, la période d'échantillonnage, $[w_b, w_h] = [0.1, 10]$, $y=1$ dB, $z = 10^{-3}$ on obtient les résultats suivants :

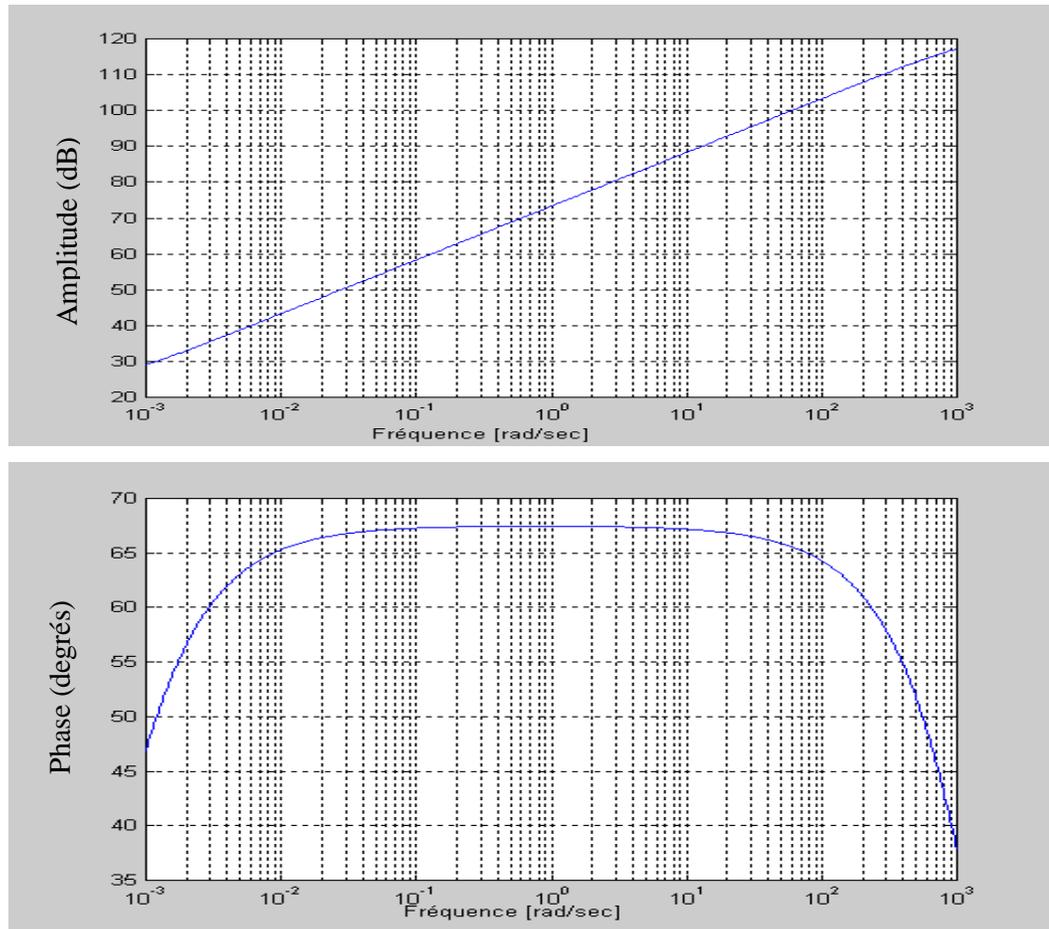


Figure (III-3) Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire discrétisée par la transformation Bilinéaire $s^{0.75}$.

Selon les deux graphes précédents que la transformation Bilinéaire a permis d'avoir des bons résultats, une phase stable de 67.5 degrés, et une amplitude linéaire de pente de +15dB/dec dans la gamme de fréquence choisie.

III.1.4 Discretisation du dérivateur d'ordre fractionnaire par la transformation

Backward

On a

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T} \quad (\text{III-21})$$

Et

$$G(z) = K_D \cdot \left(I + \frac{s}{W_c} \right) \Bigg|_{s=\frac{I-z^{-1}}{T}} \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(I + \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left(I + \frac{s}{p_i} \right)} \Bigg|_{s=\frac{I-z^{-1}}{T}} \quad (\text{III-22})$$

On aura

$$G_{Bac}(z) = K_D \cdot \frac{\prod_{i=0}^N \left(\left(I + \frac{I}{Tz_i} \right) z - \frac{I}{Tz_i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left(\left(I + \frac{I}{Tp_i} \right) z - \frac{I}{Tp_i} \right)} \quad (\text{III-23})$$

On pose

$$a_i = I + \frac{1}{Tz_i}, \quad b_i = \frac{1}{Tz_i} \quad (\text{III-24})$$

$$d_i = I + \frac{I}{Tp_i}, \quad l_i = \frac{I}{Tp_i} \quad (\text{III-25})$$

Par substitution de (III-24) et (III-25) dans l'équation (III-23) devient :

$$G_{Bac}(z) = K_D \cdot \frac{\prod_{i=0}^N (a_i z - b_i)}{\prod_{i=0}^N (d_i z - l_i)} \quad (\text{III-26})$$

Et

$$G_{Bac}(z) = \frac{\prod_{i=0}^N a_i \left(z - \frac{b_i}{a_i} \right)}{\prod_{i=0}^N d_i \left(z - \frac{l_i}{d_i} \right)} = const \cdot \frac{\prod_{i=0}^N (z - z_i)}{\prod_{i=0}^N (z - p_i)} \quad (\text{III-27})$$

Avec, les z_i et les p_i sont les nouveaux pôles et zéros définis par :

$$z_i = \frac{b_i}{a_i}, \quad p_i = \frac{l_i}{d_i} \quad (\text{III-28})$$

Et

$$const = K_D \cdot \prod_{i=0}^n \frac{a_i}{d_i} \quad (\text{III-29})$$

III.1.4.1 Exemple illustrative

On veut discrétiser le dérivateur d'ordre fractionnaire $s^{0.75}$ selon la transformation Backward. Avec $T=0.001$ la période d'échantillonnage, $z = 10^{-3}$ on obtient les résultats suivants :

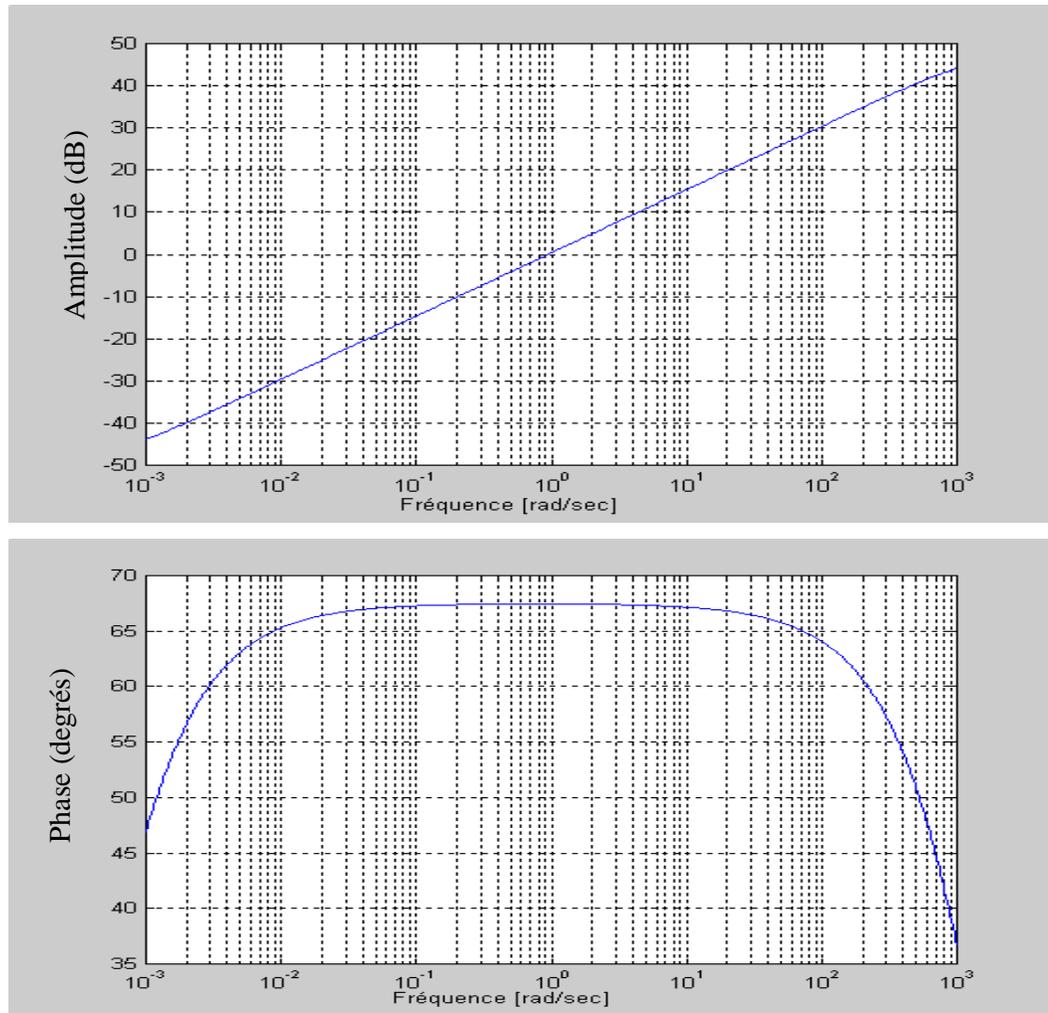


Figure (III-4) Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire discrétisée par la transformation Backward $s^{0.75}$.

D'après le digramme précédent on remarque que la discrétisation par la transformation Backward a permis d'obtenir des bons résultats en phase et en amplitude, la phase est de 67.5 degrés, l'amplitude est une droite linéaire de pente +15dB/de (20.m) dans la plage de fréquences de [0.1, 10].

III.2 Implémentation numérique

La discrétisation de la fonction rationnelle approximée de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire a permis d'obtenir le filtre RII suivant :

$$H_{Bil}(z) = K_I \cdot (z + 1) \cdot \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (a_i z - b_i)}{\prod_{i=0}^N (d_i z - l_i)} \quad (\text{III-30})$$

Avec

$$a_i = T + \frac{2}{z_i}, \quad b_i = T - \frac{2}{z_i} \quad (\text{III-31})$$

$$s_i = T + \frac{2}{p_i}, \quad l_i = T - \frac{2}{p_i} \quad (\text{III-32})$$

Par substitution de (III-31) et (III-32) dans l'équation (III-30) devient:

$$H_{Bil}(z) = K_I \frac{\prod_{i=0}^N (a_i z - b_i)}{\prod_{i=0}^N (d_i - l_i)} \quad (\text{III-33})$$

On pose

$$const = K_I \frac{\prod_{i=0}^N a_i}{\prod_{i=0}^N s_i} \quad (\text{III-34})$$

L'équation (III-30) devient :

$$H_{Bil}(z) = const \frac{\prod_{i=0}^N \left(z - \frac{b_i}{a_i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left(z - \frac{l_i}{d_i} \right)} \quad (\text{III-35})$$

On pose

$$z_i = \frac{b_i}{a_i} \quad \text{Pour } i=0,1,\dots,N$$

$$p_i = \frac{l_i}{d_i} \quad \text{Pour } i=0,1,\dots,N$$

Et

$$\begin{aligned}
 b_0 &= \text{const} \\
 b_1 &= -b_0 \cdot (z_1 + z_2 + \dots + z_n) \\
 b_2 &= b_0 \cdot (z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_1 z_n + \dots) \\
 b_3 &= -b_0 \cdot (z_1 z_2 z_3 + z_1 z_3 z_4 + \dots + z_1 z_n + \dots)
 \end{aligned}$$

De la même manière on obtient les a_i

$$H_{\text{Bil}}(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + \dots + b_n z^{-n-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + \dots + a_n z^{-n-1}} \quad (\text{III-36})$$

Le système linéaire invariant dans le temps est donné par :

$$\begin{aligned}
 y(k) + a_1 y(k-1) + \mathbf{L L L} + a_n y(k-n) + a_{n+1} y(k-(n+1)) = \\
 b_0 e(k) + b_1 e(k-1) + \mathbf{L L L} b_n e(k-n) + b_{n+1} e(k-(n+1))
 \end{aligned} \quad (\text{III-37})$$

La forme matricielle du filtre RII est donnée par :

$$x(k+1) = Ax(k) + Be(k) \quad (\text{III-38})$$

$$y(k) = Cx(k) + De(k) \quad (\text{III-39})$$

Le modèle d'état est donné par :

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \mathbf{L L L L} & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \mathbf{L L L L} & 0 \\ \mathbf{M} & \mathbf{M M} & & & \mathbf{M} \\ -a_n & 0 & 0 & \mathbf{L L L L} & 1 \\ -a_{n+1} & 0 & 0 & \mathbf{L L L L} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_0 \\ b_2 - a_2 b_0 \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \\ b_n - a_n b_0 \\ b_{n+1} - a_{n+1} b_0 \end{bmatrix} \quad (\text{III-40})$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \mathbf{L} \quad \mathbf{L} \quad 0], \quad D = [b_0] \quad (\text{III-41})$$

De la même façon on obtient l'implémentation numérique de l'opérateur d'ordre fractionnaire discrétisé selon les différentes transformations.

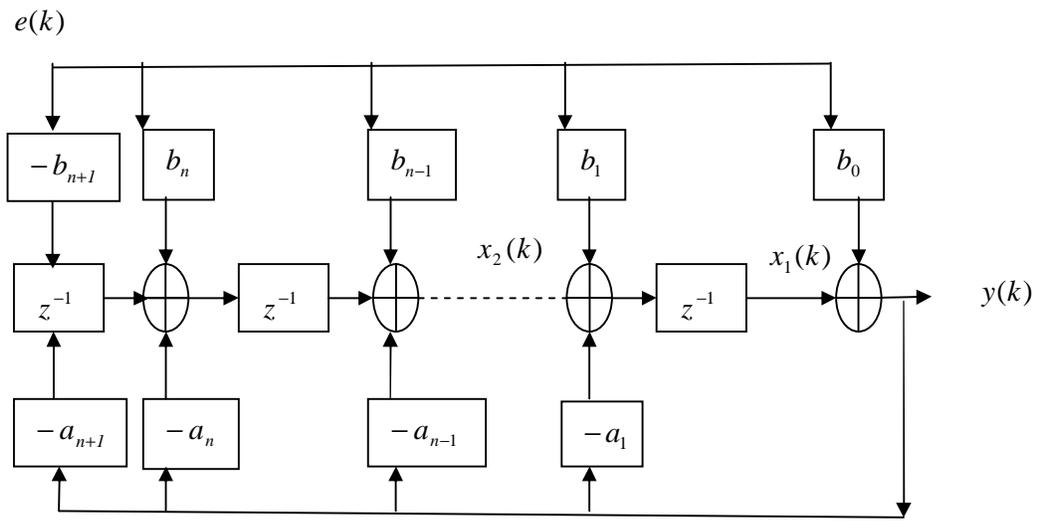


Figure (III-5) Implémentation numérique de l'opérateur d'ordre fractionnaire.

Applications et comparaisons

IV.1 Introduction

La simulation de la sortie d'un système d'ordre fractionnaire est compliquée, en raison de son long comportement de la mémoire [1,19], plusieurs méthodes ont été développées pendant la dernière décennie [3,4,8,9,10,11], on peut classer ces méthodes selon trois groupes :

Des méthodes qui sont basées sur le calcul de l'expression analytique de la sortie [1], cette expression analytique de la sortie n'est pas simple, elle exige le calcul d'un intégral d'un côté, et de la précision utilisée pour le calcul du produit de convolution de l'entrée avec la réponse impulsionnelle de l'autre côté.

Autres qui rapprochent le modèle fractionnaire par un modèle rationnel discret dans le temps qui se trouvent dans la littérature sous le nom méthodes directes [3,5,6,9,16,19]. L'inconvénient de ces méthodes et que l'ordre du model entier équivalent est important.

Des méthodes qui rapprochent le modèle fractionnaire par un model rationnel et puis le discrétiser selon les méthodes classiques ou les méthodes indirectes [3,5,6,9,16,19].et qui seront l'objet de notre travail.

Notre travail consiste à présenter un algorithme de calcul de la sortie d'un opérateur d'ordre fractionnaire selon la méthode indirecte, cet algorithme est développé autour de deux filtres RII. L'approximation du filtre RII consiste à trouver la meilleure fonction rationnelle pour des exigences données, le filtre apparenté au filtre analogique, ensuite la fonction rationnelle obtenue est discrétisée selon deux transformations classiques connues, la transformation Bilinéaire (trapézoïdal, Tustin) et la transformation Backward [20]. Enfin nous présentons et discutons les résultats d'application de cette méthode et les comparer avec d'autres méthodes les plus récentes.

IV.2 Réponse d'opérateur d'ordre fractionnaire

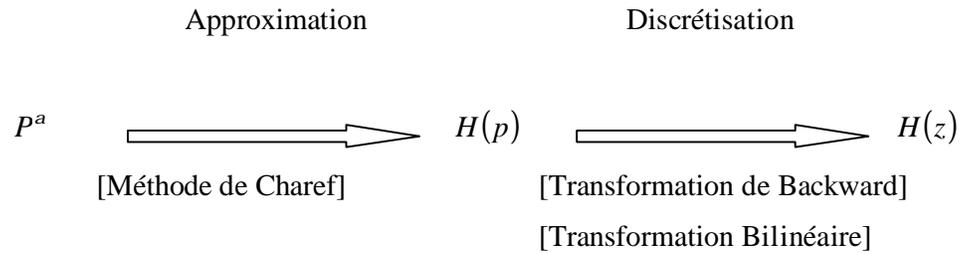
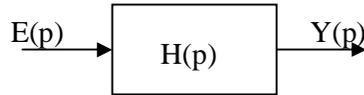
Plusieurs algorithmes ont été développés pour calculer la sortie du model rationnel de l'opérateur d'ordre fractionnaire, ils sont basés généralement sur la fonction de transfert ou sur la représentation d'espace d'état [1,19].

Dans notre cas, on a commencé par la fonction de transfert fractionnaire, le model rationnel est obtenu on remplaçant chaque opérateur d'ordre fractionnaire par une approximation entière dans une bande de fréquence bien définie comme on a montré

dans le deuxième chapitre. Le model de la sortie et par suite la transformée inverse en Z du produit de l'entrée avec la fonction de transfert discrétisée de l'approximation de l'opérateur d'intégration fractionnaire (troisième chapitre) .

On peut résumer cette procédure comme suit :

Soit $E(p)$ l'entrée de l'opérateur d'ordre fractionnaire, $Y(p)$ sa sortie, et $H(p)$ sa fonction de transfert :



On a

$$Y(z) = H(z)E(z) \tag{IV-1}$$

Donc

$$y(kT) = Z^{-1}(H(z)E(z)) \tag{IV-2}$$

Avec $E(z), Y(z)$, et $H(z)$ la transformée en Z de $E(p), Y(p)$, et $H(p)$ respectivement. Dans ce qui suit nous considérons seulement le cas de la dérivation non entière (l'ordre de dérivation est positif).

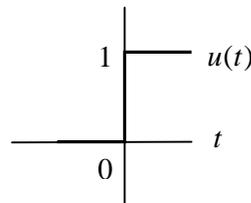
IV.3 Dérivation non entière de quelques fonctions usuelles

Dans notre cas, on a développé des programmes qui consistent à calculer la dérivation non entière de quelques fonctions usuelles : l'échelon, la rampe, la fonction sinusoïdale (cosinus, sinus), le produit d'un exponentiel et d'un cosinus (sinus), selon la méthode Bilinéaire et la méthode Backward.

IV.3.1 La dérivée non entière d'un Echelon

La fonction Echelon unité suivante :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |t| > 0 \\ 0 & \text{pour } |t| < 0 \end{cases}$$



On sait que la transformée en Z d'un échelon est donnée par :

$$U(z) = \frac{z}{z-1} \quad (\text{IV-3})$$

Donc la sortie est :

$$y(kT) = Z^{-1}(H(z)U(z)) \quad (\text{IV-4})$$

H(z) est le résultat de la discrétisation de l'opérateur d'ordre fractionnaire selon la transformation Bilinéaire ou la transformation Backward, comme on a montré précédemment, par application de la transformation Bilinéaire (Backward).

On a

$$G_{Dér Bil}(z) = K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(\left(1 + \frac{2}{Tz_i} \right) z + \left(1 - \frac{2}{Tz_i} \right) \right)}{\prod_{i=0}^N \left(\left(1 + \frac{2}{Tp_i} \right) z + \left(1 - \frac{2}{Tp_i} \right) \right)} \quad (\text{IV-5})$$

Comme on a montré dans le chapitre précédent, on peut écrire l'équation (IV-5) sous la forme :

$$G_{Dér Bil}(z) = const. \frac{\prod_{i=0}^N (z - z_i)}{\prod_{i=0}^N (z - p_i)} \quad (\text{IV-6})$$

L'équation de la sortie est donnée par l'équation :

$$Y(z) = G(z).E(z) \quad (\text{IV-7})$$

Donc :

$$Y(z) = G_{Dér Bil}(z) \cdot \frac{z}{z-1} \quad (\text{IV-8})$$

Par application de la méthode d'inversion de la transformé en z qui est le développement en fractions partielles on peut écrire :

$$\frac{Y(z)}{z} = const. \cdot \frac{\prod_{i=0}^N (z - z_i)}{\prod_{i=0}^{N+1} (z - p_i)} \quad \text{Avec } p_{N+1} = 1 \quad (\text{IV-9})$$

L'équation des résidus est donnée par :

$$A_i = \lim_{z \rightarrow p_i} (z - p_i) \frac{Y(z)}{z} \tag{IV-10}$$

La sortie est donnée par :

$$y(kT) = \sum_{i=0}^{N+1} A_i (p_i)^k \tag{IV-11}$$

Le diagramme de Bode de la dérivation de l'échelon unité est donné par :

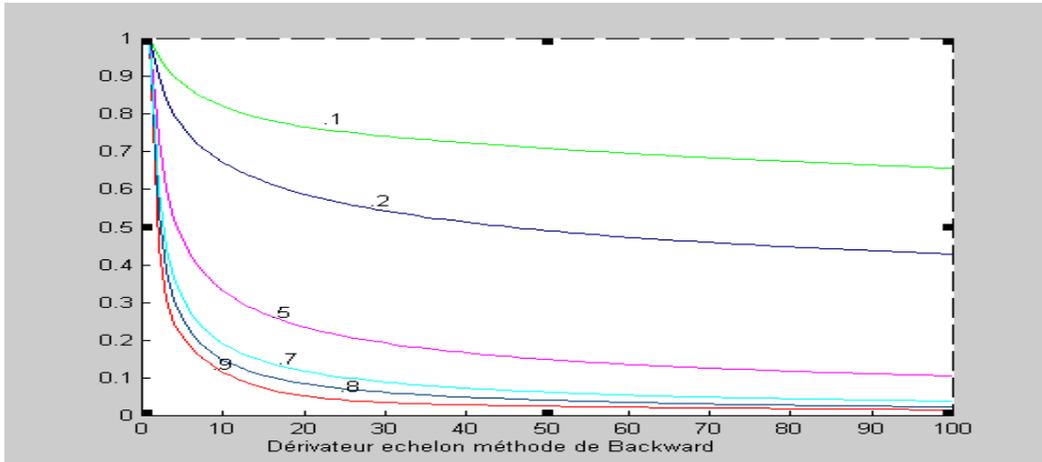


Figure (IV-1) La dérivation non entière de l'échelon par la transformation Backward pour les différentes valeurs de m.

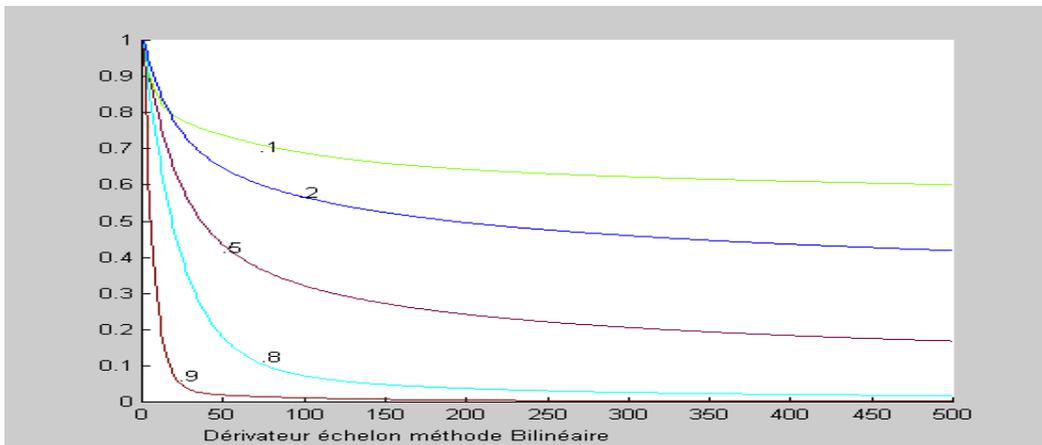
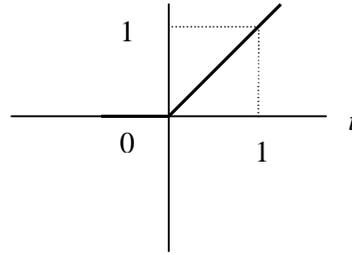


Figure (IV-2) La dérivation non entière de l'Echelon par la transformation Bilinéaire pour les différentes valeurs de m.

IV.3.2 Calcul de la dérivée non entière d'une Rampe

La fonction Rampe est définie par

$r(t) = t \cdot u(t)$, $u(t)$ est l'échelon unité



On a

$$Z(r(t)) = \frac{Tz}{(z-1)^2} \tag{IV-12}$$

$$Y(z) = \text{const} \frac{\prod_{i=0}^N (z-z_i)}{\prod_{i=0}^N (z-p_i)} \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2} \Rightarrow \frac{Y(z)}{z} = \text{const} \frac{\prod_{i=0}^N (z-z_i)}{\prod_{i=0}^N (z-p_i)} \cdot \frac{T}{(z-1)^2} \tag{IV-13}$$

On peut écrire l'équation (IV-13) sous la forme :

$$\frac{Y(z)}{z} = \sum_{i=0}^N \frac{A_i}{(z-p_i)} + \frac{B}{(z-1)} + \frac{C}{(z-1)^2} \tag{IV-14}$$

Calcul des résidus ou les A_i :

$$A_i = \lim_{z \rightarrow p_i} (z-p_i) \frac{Y(z)}{z} \tag{IV-15}$$

Calcul de C :

$$C = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{Y(z)}{z} (z-1)^2 = \lim_{z \rightarrow 1} T \frac{\prod_{i=0}^N (z-z_i)}{\prod_{i=0}^N (z-p_i)} \tag{IV-16}$$

Calcul de B :

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{Y(z)}{z} = -\sum_{i=0}^N \frac{A_i}{p_i} - B + C = T \frac{\prod_{i=0}^N (-z_i)}{\prod_{i=0}^N (-p_i)} \tag{IV-17}$$

Donc

$$B = -\sum_{i=0}^N \frac{A_i}{p_i} - T \frac{\prod_{i=0}^N (z_i)}{\prod_{i=0}^N (p_i)} + C \tag{IV-18}$$

La sortie du dérivateur est donnée par :

$$y(kT) = \sum_{i=0}^N A_i p_i^{kT} + CkT + B \tag{IV-19}$$

Le résultat de la dérivation est donné dans le graphe suivant :

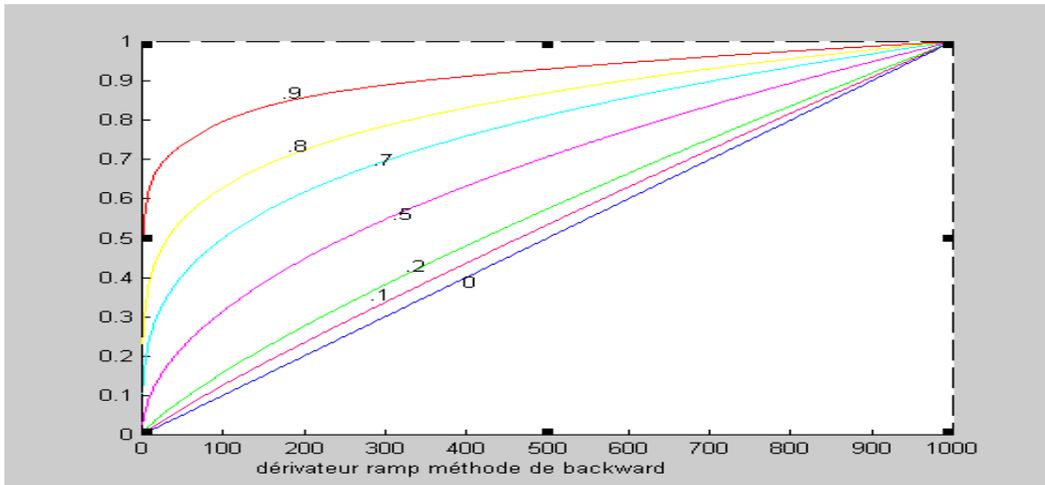


Figure (IV-3) La dérivation non entière d’une rampe selon la transformation Backward pour les différentes valeurs de m.

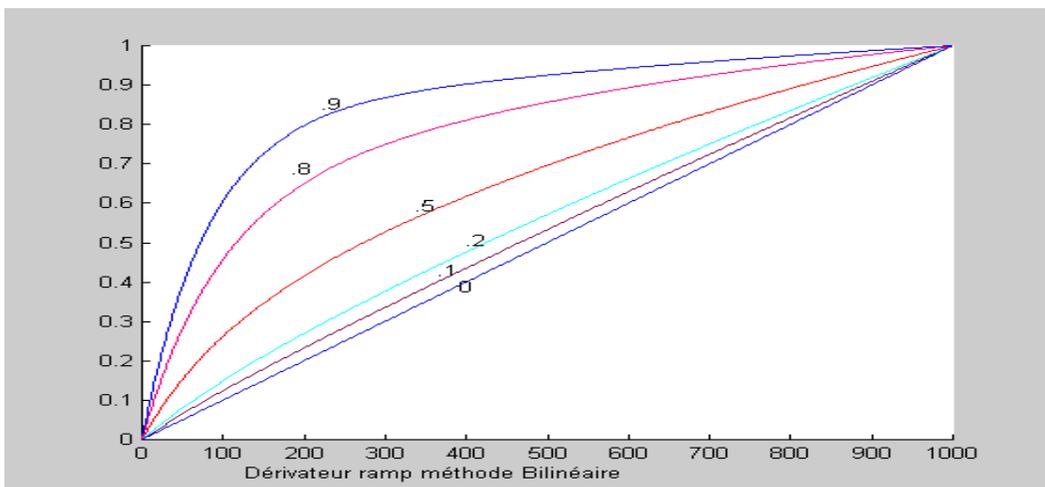


Figure (IV-4) La dérivation non entière d’une rampe selon la transformation Bilinéaire pour les différentes valeurs de m.

IV-3-3 La dérivation non entière d'un cosinus (ou d'un sinus)

On a montré que la dérivation non entière d'un cosinus (resp. sinus) de pulsation w_0 avec un déphasage j en utilisant la méthode indirecte mentionné Précédamment, est équivalente à la relation suivante [2] :

$$D^{(m)}[\cos(w_0 t - j)] = w_0^m \cdot \cos\left(w_0 t - j + m \cdot \frac{P}{2}\right) \quad (\text{IV-20})$$

$$D^{(m)}[\sin(w_0 t - j)] = w_0^m \cdot \sin\left(w_0 t - j + m \cdot \frac{P}{2}\right) \quad (\text{IV-21})$$

Avec un déphasage de $m \cdot \frac{P}{2}$ et une amplitude de w_0^m .

Soit

$$e(t) = \cos(w_0 t) \Rightarrow E(z) = \frac{z^2 - z \cos(w_0 T)}{z^2 - 2z \cos(w_0 T) + 1} \quad (\text{IV-22})$$

Ainsi

$$Y(z) = \frac{\prod_{i=0}^N (z - z_i)}{\prod_{i=0}^N (z - p_i)} \cdot \frac{z^2 - z \cos(w_0 T)}{z^2 - 2z \cos(w_0 T) + 1} \quad (\text{IV-23})$$

La sortie est donnée par

$$y(kT) = \sum_{i=0}^N A_i p_i^{kT} + a \cos(w_0 kT + j) \quad (\text{IV-24})$$

Avec

$$a = \frac{B + 1}{\cos(j)} \quad (\text{IV-25})$$

$$j = \arctan\left(\frac{C + B \cos(w_0 T)}{(B + 1) \sin(w_0 T)}\right) \quad (\text{IV-26})$$

Les constantes B, C sont données par

$$B = -\sum_{i=0}^N A_i \quad (\text{IV-27})$$

$$C = \sum_{i=0}^N \frac{A_i}{p_i} + \left[1 - \frac{\prod_{i=0}^N z_i}{\prod_{i=0}^N p_i} \right] \cdot \cos(w_0 T) \quad (\text{IV-28})$$

Calcul des résidus (A_i) :
$$A_i = \lim_{z \rightarrow p_i} (z - p_i) \frac{Y(z)}{z} \quad (\text{IV-29})$$

Dans notre cas, on a élaboré des programmes qui permettent de calculer la dérivation non entière d'un cosinus(sinus) en utilisant les deux méthodes précédentes, avec une période d'échantillonnage $T=0.001s$.

Le tableau suivant rapporte le déphasage et l'amplitude calculés, ainsi que le déphasage et l'amplitude approximées selon la méthode Bilinéaire et Backward.

m ordre de la dérivation.	Déphasage calculé.	Déphasage approximé Bilinéaire.	Déphasage approximé Backward.	Amplitude calculée.	Amplitude calculée Bilinéaire.	Amplitude calculée Backward.
0.1	0.1571	0.1556	0.1551	0.6310	0.6105	0.6443
0.2	0.3142	0.3136	0.3126	0.3981	0.3815	0.4200
0.3	0.4712	0.4698	0.4683	0.2512	0.2500	0.2827
0.4	0.6283	0.6267	0.6247	0.1585	0.1518	0.1812
0.5	0.7854	0.7834	0.7809	0.1000	0.0949	0.1183
0.6	0.9425	0.9396	0.9366	0.0631	0.0620	0.0795
0.7	1.0996	1.0974	1.0939	0.0398	0.0341	0.0478
0.8	1.2566	1.2551	1.2511	0.0251	0.0185	0.0287
0.9	1.4137	1.4116	1.4071	0.0158	0.0094	0.0167

Tableau (IV-1) Amplitude et déphasage approximés selon la transformation Bilinéaire et la transformation Backward pour les différentes valeurs de l'ordre fractionnaire m de $\cos(10t)$, $T=0.001s$.

Les résultats de la dérivation non entière d'une fonction cosinus selon la transformation Bilinéaire et Backward sont donnés dans le graphe suivant

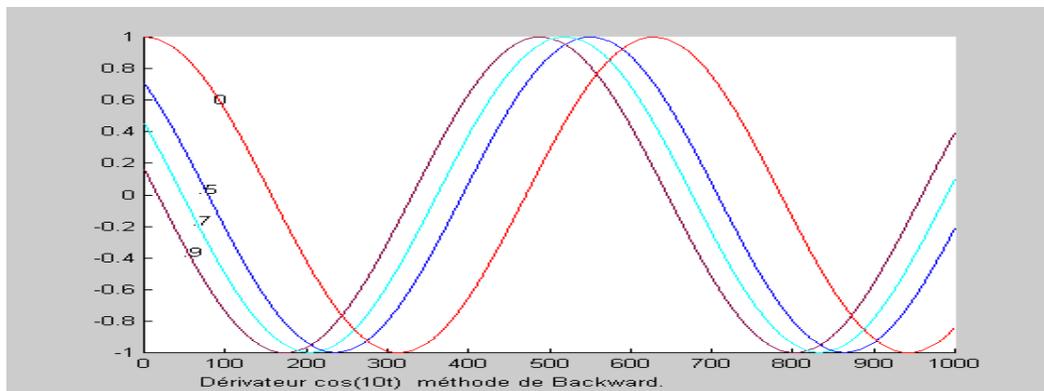


Figure (IV-5) La dérivation non entière de $\cos(10t)$ selon la transformation Backward pour les différentes valeurs de m .

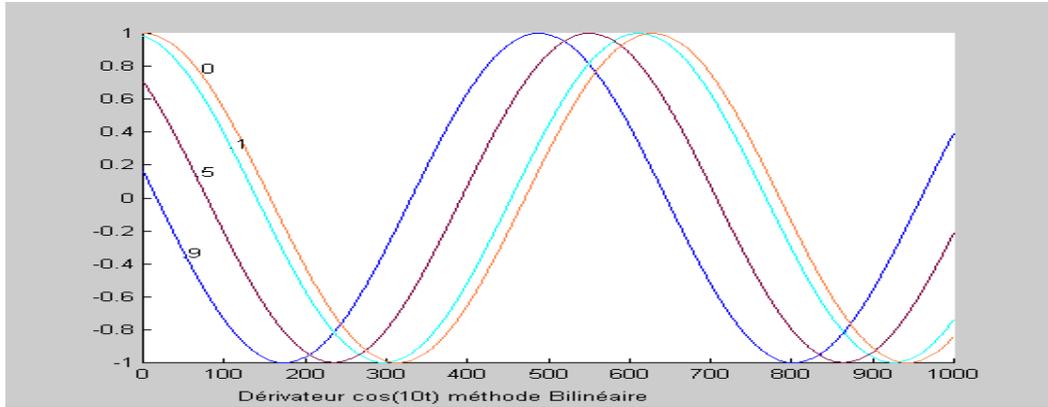


Figure (IV-6) Dérivation non entière de $\cos(10t)$ selon la transformation Bilinéaire pour différents valeurs de m .

IV-3-4 Dérivation non entière d’une fonction sinusoïdale amortie

On a montré que la dérivation non entière d’un produit d’une fonction et sinusoïdale amortie, du type : $\cos(w_0 \cdot t) \cdot \exp(a \cdot T)$, en utilisant la méthode indirecte mentionné Précédamment, est équivalente à la relation suivante [2]

$$D^{(m)}[\cos(w_0 \cdot t) \cdot \exp(a \cdot t)] = R^m \cdot \cos(w_0 \cdot t + m \cdot j) \cdot \exp(a \cdot t) \tag{IV-30}$$

Avec : $R = |a + i \cdot w_0|$ et $j = \text{Arg}(a + i \cdot w_0)$ (IV-31)

Soit

$$e(t) = [\cos(w_0 \cdot t) \cdot \exp(at)]$$

$$\Rightarrow E(z) = \frac{z^2 - z \cdot \exp(-at) \cdot \cos(w_0 T)}{z^2 - 2z \exp(-aT) \cdot \cos(w_0 T) + \exp(-2aT)} \tag{IV-32}$$

Donc

$$Y(z) = \text{const.} \cdot \frac{\prod_{i=0}^N (z - z_i)}{\prod_{i=0}^N (z - p_i)} \cdot \frac{z^2 - z \cdot \exp(-at) \cdot \cos(w_0 T)}{z^2 - 2z \exp(-aT) \cdot \cos(w_0 T) + \exp(-2aT)} \tag{IV-33}$$

L’équation de la sortie est donnée par

$$y(kT) = \sum_{i=0}^N A_i p_i^{kT} + a \cdot \cos(w_0 T k + j) \cdot \exp(-aT) \tag{IV-34}$$

$$\text{Où} \quad a = \frac{(I + b)}{\cos(j)} \quad (\text{IV-35})$$

$$j = -\arctan\left(\frac{C + b \cdot \cos(w_0 T) \cdot \exp(-aT)}{(I + b) \cdot \exp(-aT) \cdot \sin(w_0 T)}\right) \quad (\text{IV-36})$$

Les constantes B, C sont données par :

$$B = -\sum_{i=0}^N A_i \quad (\text{IV-37})$$

$$\text{Et} \quad C = \sum_{i=0}^N \frac{A_i}{p_i} \cdot \exp(-2aT) + \left(I - \frac{\prod_{i=0}^N z_i}{\prod_{i=0}^N p_i} \right) \cdot (\exp(-aT) \cdot \cos(w_0 T)) \quad (\text{IV-38})$$

$$\text{Avec} \quad A_i = \lim_{z \rightarrow p_i} (z - p_i) \frac{Y(z)}{z} \quad (\text{IV-39})$$

Dans notre cas, on a élaboré des programmes qui permettent le calcul de la dérivation non entière d'une fonction sinusoïdale amortie avec un déphasage nul, pour une période d'échantillonnage $T=0.001s$. Le tableau suivant rapporte le déphasage et l'amplitude calculés, ainsi que le déphasage et l'amplitude approximés selon la transformation Bilinéaire et la transformation Backward.

m ordre de la dérivation.	Déphasage calculé.	Déphasage approximé Bilinéaire.	Déphasage approximé Backward.	Amplitude calculée.	Amplitude approximée Bilinéaire	Amplitude approximée Backward.
0.1	0.1551	0.1555	0.1377	0.7943	0.7587	0.8700
0.2	0.3102	0.3142	0.2953	0.6310	0.5859	0.6968
0.3	0.4652	0.4633	0.4273	0.5012	0.4962	0.6320
0.4	0.6203	0.6216	0.5834	0.3981	0.3759	0.5056
0.5	0.7754	0.7812	0.7399	0.3163	0.2793	0.4007
0.6	0.9305	0.9284	0.8664	0.2512	0.2409	0.3765
0.7	1.0856	1.0953	1.0329	0.1996	0.1643	0.2829
0.8	1.2406	1.2465	1.1455	0.1585	0.1357	0.2852
0.9	1.3957	1.4343	1.3579	0.1259	0.0728	0.1687

Tableau (IV-2) Déphasage et amplitude calculés et approximés selon la transformation Bilinéaire et Backward.

Les résultats de la dérivation d'une fonction sinusoidale amortie par la transformation Bilinéaire sont présentés dans la figure suivante

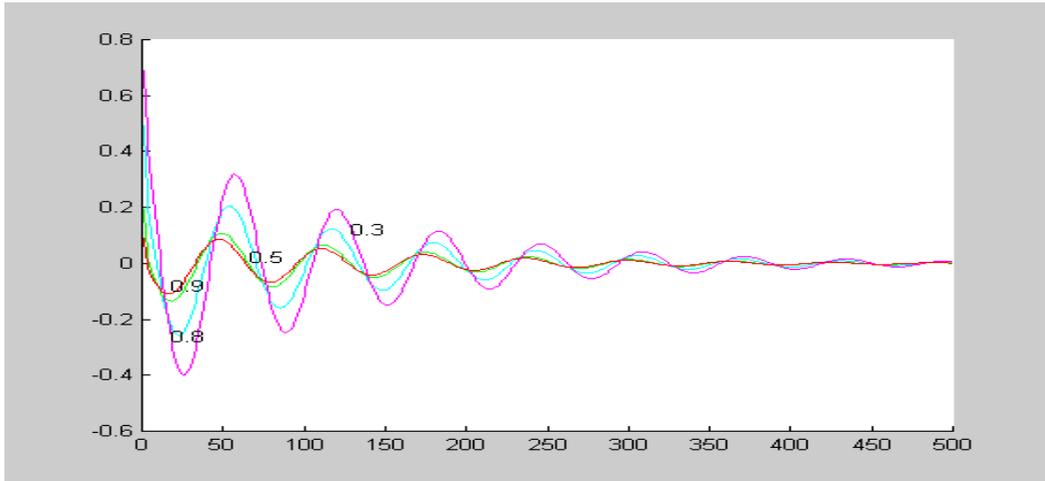
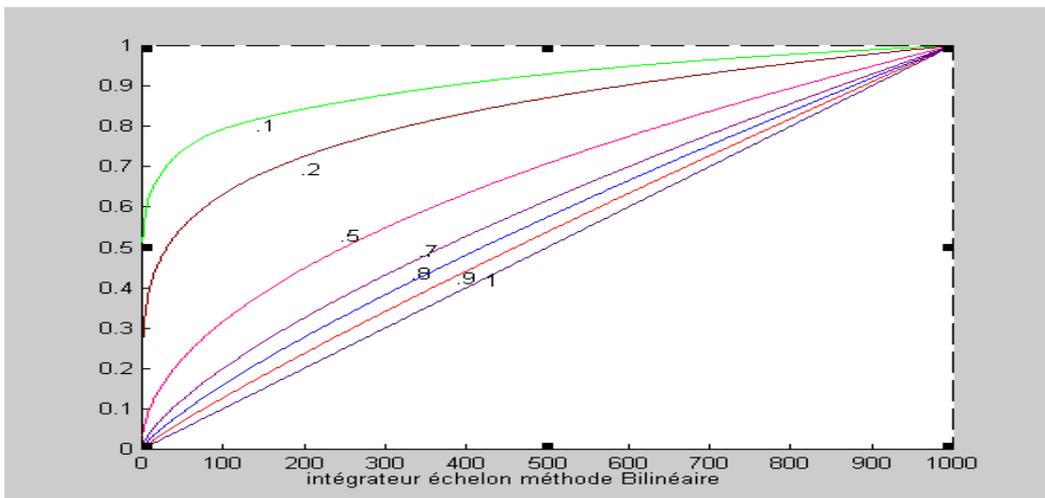


Figure (IV-7) La dérivation non entière de $\cos(100t)\exp(-8t)$ pour les différents valeurs de m et une période d'échantillonnage $T=0.001$ s par la transformation Bilinéaire.

IV-4 Intégration non entière de quelques fonctions usuelles

On a également développé des programmes qui consistent à calculer l'intégration non entière de quelques fonctions usuelles : l'échelon, la rampe, la fonction sinusoidale (cosinus, sinus), fonction sinusoidale amortie, selon la transformation Bilinéaire et la transformation Backward. On obtient les résultats suivants :



Figure(IV-8) Intégrateur de l'échelon par la transformation Bilinéaire pour les différentes valeurs de m , $T=0.001$ s.

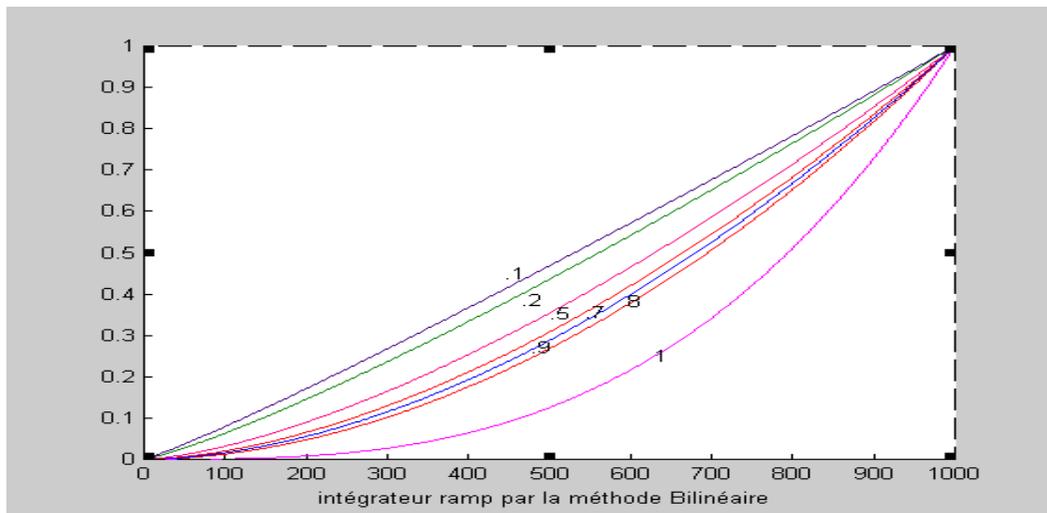


Figure (IV-9) Intégrateur non entier de la rampe par la transformation Bilinéaire pour les différentes valeurs de m , $T=0.001s$.

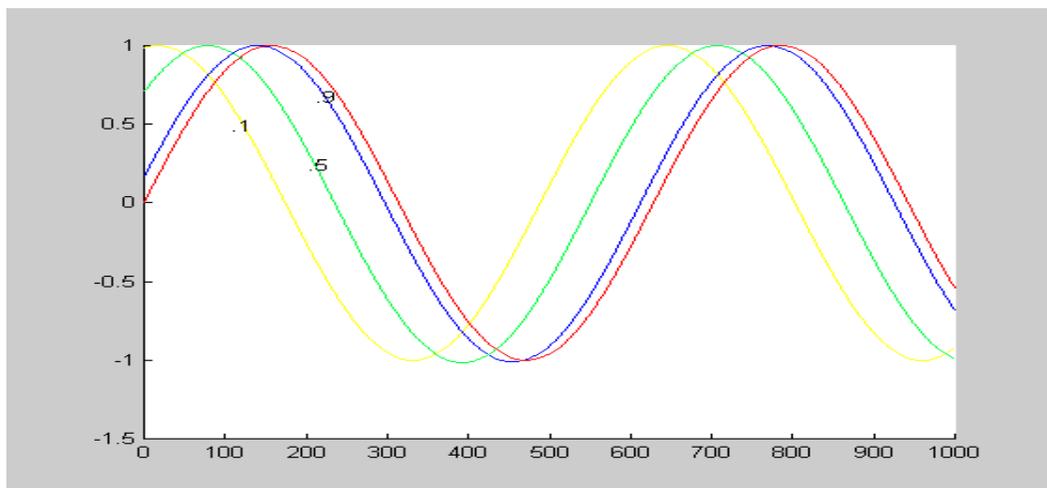


Figure (IV-10) Intégrateur d'ordre fractionnaire d'une fonction sinusoidale $\text{Cos}(10t)$ par la transformation Bilinéaire pour les différentes valeur de m , $T=0.001s$.

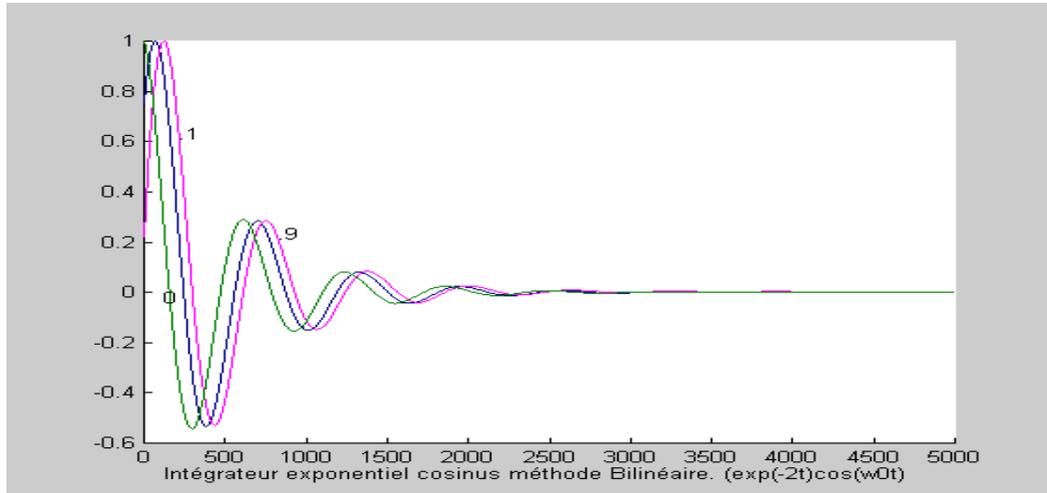


Figure (IV-11) Intégrateur d'ordre fractionnaire de la fonction sinusoïdale amortie $\exp(-2t)\cos(100t)$ par la transformation Bilinéaire, $T=0.001s$.

IV-5 Résultats et commentaires

Nous avons présenté des algorithmes de calculs de la dérivation non entière des différentes fonctions, basées sur la discrétisation de l'opérateur d'ordre fractionnaire selon la transformation Bilinéaire et la transformation Backward. Le tableau (IV-1) rapporte les résultats obtenus avec l'utilisation des deux transformations avec une période d'échantillonnage $T=0.001s$, dans une gamme de fréquence de $[0.1, 10]$ pour les différentes valeurs de l'ordre de dérivation non entière m , comparés avec des valeurs théoriques pour une fonction sinusoïdale, et la même procédure pour le produit d'une fonction sinusoïdale amortie. Les résultats sont rapportés au tableau (IV-2) pour une période d'échantillonnage $T=0.001s$, dans une gamme de fréquence $[0.1\text{rad/s}, 10\text{rad/s}]$, ces résultats montrent l'efficacité des deux méthodes avec la remarque que la transformation Bilinéaire donne des meilleurs résultats dans la gamme de hautes fréquences, ce qui est montré dans la figure suivante :

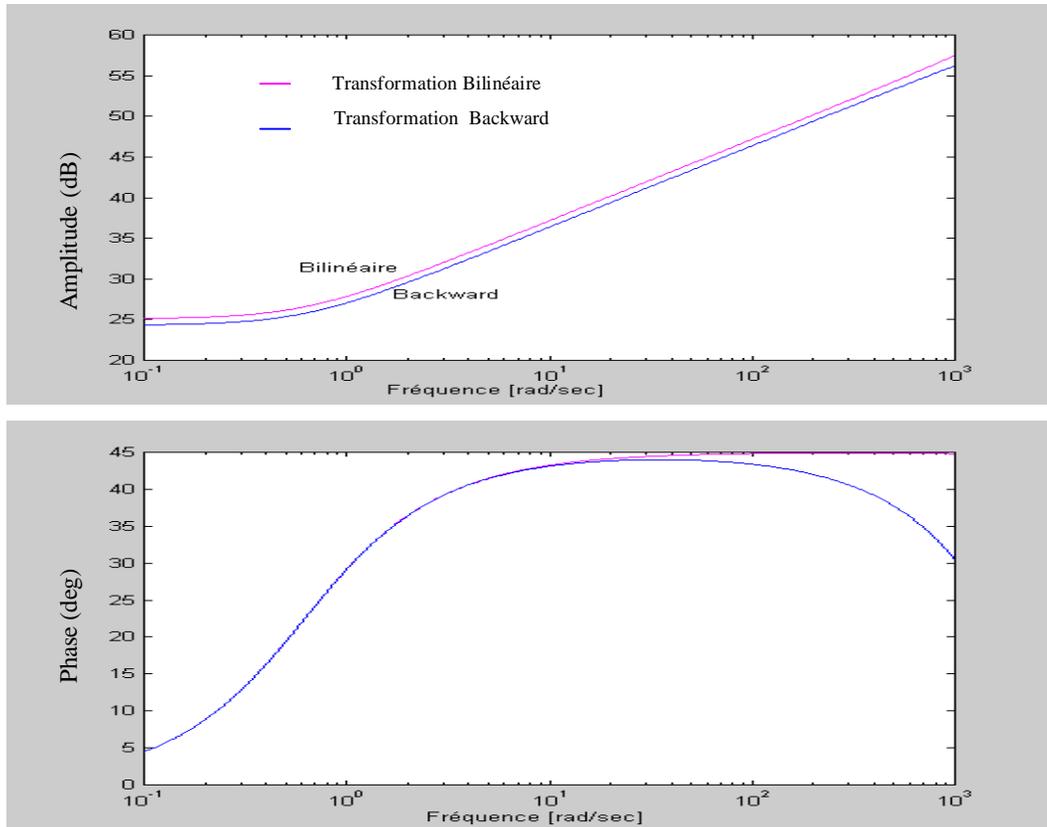


Figure (IV-12) Comparaison de phase et d'amplitude du dérivateur d'ordre fractionnaire $s^{0,5}$ pour la transformation Bilinéaire et la transformation Backward pour une gamme de fréquence [100 rad/s,1000 rad/s], $T=0.001$ s.

IV-6 Comparaison avec d'autres méthodes

Au cours de notre travail, on a effectué une comparaison entre notre approche et quelques méthodes récentes qu'on va décrire brièvement comme suit :

IV-6-1 La discrétisation récursive de Tustin

Le point clé de la discrétisation de Tustin du différentiateur d'ordre fractionnaire est comment Obtenir une formule récursive [5,6,16] par introduire ce qu'on appelle la récursivité de Muir utilisée à l'origine dans les données géophysiques avec l'application de la prospection de pétrole.

La récursivité de Muir est motivée en calculant la réponse de réflexion d'une vague de plan vertical par l'intermédiaire de l'impédance de n piles posées sur la terre, et qui peut

être employée dans la discrétisation récursive du différentiateur d'ordre fractionnaire de la fonction génératrice de Tustin.

La formule récursive pour r positif tel que : $0 < r < 1$ est donnée par

$$\left(w(z^{-1})^r\right) = \left(\frac{2}{T}\right)^r \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^r = \left(\frac{2}{T}\right)^r \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n(z^{-1}, r)}{A_n(z^{-1}, -r)} \quad (\text{IV-40})$$

Avec

$$A_0(z^{-1}, r) = 1 \quad (\text{IV-41})$$

Et

$$A_n(z^{-1}, r) = A_{n-1}(z^{-1}, r) - C_n z^n A_{n-1}(z, r) \quad (\text{IV-42})$$

Tel que

$$C_n = \begin{cases} \frac{r}{n} & n : \text{est impair} \\ 0 & n : \text{est pair} \end{cases} \quad (\text{IV-43})$$

Par conséquent

$$s^r \approx \left(\frac{2}{T}\right)^r \frac{A_n(z^{-1}, r)}{A_n(z^{-1}, -r)} \quad (\text{IV-44})$$

IV-6-2 Discrétisation directe en utilisant l'expansion de fraction continu (CFE) de l'opérateur de Al-Alaoui

Le model discrétisé basé sur l'opérateur de Tustin présente une large erreur dans les hautes fréquences, pour avoir une meilleure approximation dans les hautes fréquences, l'opérateur de Al-alaoui est utilisé. Cette méthode est basée sur l'utilisation de la CFE, pour la discrétisation de l'opérateur d'ordre fractionnaire à l'aide d'une règle symbolique de calcul. On utilise l'opérateur de Al-Alaoui [6,8], la fonction génératrice de discrétisation est donnée par :

$$\left(w(z^{-1})\right)^{\pm r} = \left(\frac{8}{7T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}/7}\right)^{\pm r} \quad (\text{IV-45})$$

L'équation (IV-45) est infinie, pour l'approximée avec fonction rationnelle finie, l'expansion de Fraction continue est recommandée.

La fonction discrétisée qui rapproche l'opérateur d'ordre fractionnaire est donnée par

$$D^{\pm}(z) \approx \left(\frac{8}{7T}\right)^{\pm r} \text{CFE} \left\{ \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}/7}\right)^{\pm r} \right\}_{p,q} \quad (\text{IV-46})$$

$$= \left(\frac{8}{7T} \right)^{\pm r} \frac{P_p(z^{-1})}{Q_q(z^{-1})} \quad (\text{IV-47})$$

Où CFE{u} signifie l'expansion de fraction continue de u , p, q sont les ordres de l'approximation, P et Q sont deux polynômes d'ordres p, q respectivement, généralement $p=q=n$. Cette méthode donne des bons résultats aux hautes fréquences.

Dans la figure suivante, on présente le diagramme de phases et d'amplitudes pour les 3 méthodes :

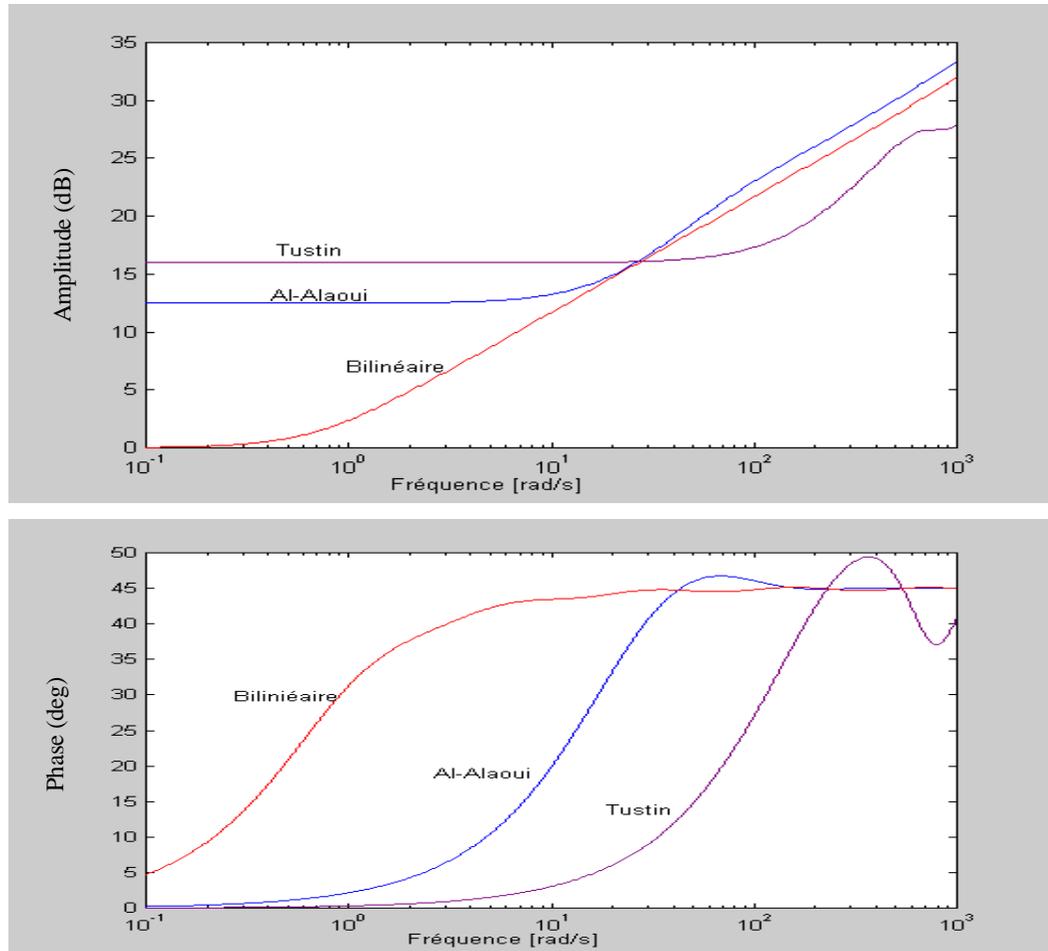


Figure (IV-13) Diagramme de Bode pour les 3 méthodes de l'opérateur $s^{0.5}$ pour $N=7, T=0.001s$, gamme de fréquences [100rad/s, 1000rad/s].

On comparant les résultats obtenus par la méthode proposée, qui est la méthode Bilinéaire avec les méthodes les plus récentes pour la discrétisation de l'opérateur d'ordre fractionnaire $s^{0.5}$, nous constatons que les performances de la méthode proposée sont comparables à celles de ces méthodes, elle donne une phase constante, et une amplitude linéaire dans les hautes fréquences.

IV-7 Conclusion

Une méthode de simulation pour un opérateur d'ordre fractionnaire est présentée, c'est une méthode indirecte qui est basée sur l'approximation du model fractionnaire par un model rationnel continu selon la méthode de Charef, la méthode proposée pour rapprocher l'opérateur d'ordre fractionnaire améliore la qualité de l'approximation.

Elle est comme la plupart des méthodes basée sur un model rationnel approximé limité dans une bande de fréquences pour garantir la validité de l'approximation.

Le model rationnel obtenu est un filtre analogique de type RII, il est discrétisé selon deux transformations classiques qui sont la transformation Bilinéaire, et la transformation Backward, des applications aux fonctions les plus usuelles :Echelon, Rampe, Sinusoïdale, fonction sinusoidale amortie, sont également présentées.

Les résultats obtenus montrent l'efficacité de la transformation Bilinéaire dans la gamme des hautes fréquences, et ces résultats sont comparables à ceux des méthodes les plus récentes. Elle donne une phase constante, et une amplitude linéaire dans la gamme des hautes fréquences.

Conclusion Générale

Dans ce mémoire, nous avons présenté une nouvelle méthode de simulation d'un opérateur d'ordre fractionnaire, basée sur la discrétisation de la fonction rationnelle rapprochant le model fractionnaire selon la méthode de charef. Dans le but d'améliorer les deux critères de performance, phase minimale et amplitude linéaire dans une bande de fréquences bien déterminée.

Le chapitre I traite principalement les différentes notions d'opérateur d'ordre fractionnaire, nous avons commencé par deux définitions les plus récentes, qui sont la définition de Grunwald-Letnikov et la définition de Riemann-Liouville, on a introduit quelques propriétés de la dérivation non entière. Enfin nous avons présentés quelques approches de l'opérateur d'ordre fractionnaire dans le cas continu et discret.

Le chapitre II traite l'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire par une fonction rationnelle dans le cas analogique, on a présenté une méthode simple qui est la méthode de Charef basée sur la représentation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire s^{-m} ($0 < m < 1$) par un pôle de puissance fractionnaire (PPF) dans une bande de fréquence bien déterminée, ensuite le (PPF) est rapproché par une fonction rationnelle, et le même cas pour le dérivateur d'ordre fractionnaire s^m qui est présenté par un zéro de puissance fractionnaire (ZPF), nous avons implémenté des circuits analogiques simples qui peuvent servir comme un différentiateur et intégrateur fractionnaire.

Le chapitre III est réservé à la discrétisation et l'implémentation numérique des opérateurs d'ordre fractionnaire, on a présenté une méthode basée sur l'approximation de l'opérateur fractionnaire par une fonction rationnelle continue, ensuite la fonction rationnelle est discrétisée selon la transformation Bilinéaire et la transformation Backward, on a également présenté et discutés les résultats obtenues, nous avons également donné une implémentation numérique pour l'opérateur d'ordre fractionnaire discrétisé selon les deux transformations.

Le chapitre IV est réservé à l'application de la méthode décrite dans le troisième chapitre sur les fonctions les plus usuelles, c'est une méthode indirecte qui est basée sur l'approximation du model fractionnaire par un model rationnel continu selon la méthode

de charef. La méthode proposée améliore la qualité de l'approximation, le model rationnel et ensuite discrétisé selon deux transformations classiques, la transformation Bilinéaire et la transformation Backward, on a également présentés des applications de cette méthode sur quelques fonctions : Echelon, Ramp, Sinusoïdale, et fonction sinusoidale amortie, ces résultats sont comparables à ceux des méthodes les plus récentes. Elle donne une phase constante, et une amplitude linéaire.

Résumé

Ce travail traite l'intégrateur d'ordre fractionnaire s^{-m} ($0 < m < 1$), et le dérivateur d'ordre fractionnaire s^m ($0 < m < 1$) et leur implémentation analogique et numérique.

Une nouvelle méthode très simple est représentée, d'abord l'intégrateur d'ordre fractionnaire s^{-m} ($0 < m < 1$) est modelé par un pôle de puissance fractionnaire (PPF) dans une bande de fréquences bien déterminée, le (PPF) est rapproché par une fonction rationnelle, la même idée est également employée pour modeler le différentiateur d'ordre fractionnaire s^m par un zéro de puissance fractionnaire (ZPF), on a également implémenté des circuits analogiques simples qui peuvent servir comme un différentiateur et intégrateur d'ordre fractionnaire.

Pour l'implémentation numérique et le calcul de la sortie de l'intégrateur d'ordre fractionnaire (différentiateur d'ordre fractionnaire) on a discrétisé la fonction de transfert obtenue par l'intermédiaire de deux transformations les plus récentes, la transformation Bilinéaire (Trapézoïdal, Tustin) et la transformation Backward dans une bande de fréquence donnée. Quelques exemples sont présentés et comparés. Ces méthodes sont examinées et comparées à des méthodes les plus récentes de la discrétisation du différentiateur et d'intégrateur d'ordre fractionnaire s^m .

ملخص

هذا الموضوع يعالج المكامل بدرجة ناطقة s^{-m} ($0 < m < 1$) و المشتق بدرجة ناطقة s^m ($0 < m < 1$)، كما يتطرق أيضا إلى الإنشاء التماثلي (Implémentation Analogique) و الرقمي (Implémentation Numérique).

في هذه المذكرة قمنا بطرح طريقة جديدة، أو لا قمنا بصياغة المكامل بدرجة ناطقة s^{-m} ($0 < m < 1$) على شكل قطب (pôle) ذو أس ناطق (PPF) داخل مجال محدد من التواترات، ثم تقريب الأس الناطق (PPF) بواسطة دالة ناطقة، و نتبع نفس الفكرة لصياغة المشتق بأس ناطق s^m ($0 < m < 1$)، على شكل صفر ذو أس ناطق (ZPF)، و قمنا كذلك بإنشاء دارات تماثلية بسيطة و التي بإمكانها أن تلعب دور مكامل أو مشتق بدرجة ناطقة.

بالنسبة للإنشاء الرقمي قمنا بالتقطيع الرقمي (Discrétisation) لدالة الإنتقال المتحصل عليها سابقا عن طريق التحويل الثنائي (Transformation Bilinéaire) و التحويل التراجعي (Transformation de Backward) في مجال من التواترات المحددة. قمنا بإعطاء بعض الأمثلة و مقارنتها، قمنا كذلك بتحليل و دراسة و مقارنة هذه الطرائق مع أخرى معروفة و الخاصة بالتقطيع الرقمي للمكامل أو المشتق ذو الدرجة الناطقة s^m .

Liste des figures

Figure	Titre	Page
I-1	Dérivation d'ordre a d'une fonction sinusoïdale.....	07
II-1	Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire $s^{-0.5}$	16
II-2	Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire $s^{-0.85}$	20
III-1	Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire discrétisée par la transformation Bilinéaire $s^{-0.3}$	26
III-2	Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire discrétisée par la transformation Backward $s^{-0.3}$	28
III-3	Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire discrétisée par la transformation Bilinéaire $s^{-0.75}$	30
III-4	Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire discrétisée par la transformation Backward $s^{0.75}$	32
III-5	Implémentation numérique de l'opérateur d'ordre fractionnaire.....	35
IV-1	La dérivation non entière de l'échelon par la transformation Backward pour les différents valeurs de m	40
IV-2	La dérivation non entière de l'échelon par la transformation Bilinéaire pour les différents valeurs de m	40
IV-3	La dérivation non entière d'une rampe par la transformation de Backward pour les différents valeurs de m	42
IV-4	La dérivation non entière d'une rampe par la transformation Bilinéaire pour les différents valeurs de m	42
IV-5	La dérivation non entière de $\cos(10t)$ selon la transformation Backward pour les différents valeurs de m	44
IV-6	La dérivation non entière de $\cos(10t)$ par la transformation Bilinéaire pour les différents valeurs de m	45

IV-7	La dérivation non entière de $\cos(100t)\exp(-8t)$ pour les différents valeurs de m et une période d'échantillonnage $T=0.001s$ par la transformation Bilinéaire.....	47
IV-8	Intégrateur de l'échelon par la transformation Bilinéaire pour les différents valeurs de m	47
IV-9	Intégrateur non entier de la rampe par la transformation Bilinéaire pour les différentes valeurs de $m, T=0.001s$	48
IV-10	Intégrateur d'ordre fractionnaire d'une fonction sinusoïdale $\cos(10t)$ par la transformation Bilinéaire pour $T=0.001s$	48
IV-11	Intégrateur d'ordre fractionnaire d'une exponentielle $\exp(-2t)\cos(100t)$ par la transformation Bilinéaire pour $T=0.001s$	49
IV-12	Comparaison de phase et d'amplitude de dérivateur d'ordre fractionnaire pour la transformation Backward et la transformation Bilinéaire pour une gamme de fréquence de $[100 \text{ rad/s}, 1000 \text{ rad/s}]$, $T=0.001s$ et $m=0.5$	50
IV-13	Diagramme de Bode pour les trois méthodes (Tustin, Al-alaoui, Bilinéaire) pour l'opérateur $s^{0.5}$, $N=7, T=0.001s$ pour une gamme de fréquences $[100\text{rad/s}, 1000\text{rad/s}]$	52

Liste des tableaux

Tableau	Titre	Page
IV-1	Amplitude et déphasage calculés et approximés selon la transformation Bilinéaire et la transformation Backward pour les différentes valeurs de l'ordre fractionnaire m de $\cos(10t)$, $T=0.001s$	44
IV-2	Déphasage et amplitude calculés et approximés selon la transformation Bilinéaire et Backward.....	46

Références

- [1] A.Oustaloup, La dérivation non entière, Hermes, 1995.
- [2] K. B. Oldham and J. Spanier, The fractional calculus, Academic press, New York, 1974.
- [3] B. Vinagre, A. Podlubny, A.Hernandez, V. Feliu, Some approximations of fractional operators used in control theory and applications, Fractional calculus App. Anal. Vol. 3, no 3, pp 231-248, 2000.
- [4] A.Oustaloup, Systèmes linéaires d'ordre fractionnaire, Masson, 1983.
- [5] Y. Q. Chen, B. M. Vinagre, I. Podlubny, A new discretization method for fractional Order differentiators via continued fraction expansion, Proceedings of ASME, Desi. Eng. Tech.conferences, Chicago, Illinios, USA, Sept 2-6, 2003.
- [6] Y. Q. Chen and K.L. Moore, Discretization shemes for fractional-order differentiators and integrators, IEEE, Trans. On circuits and systems-I: fundamental theory and applications, Vol. 49, no. 3, pp. 363-367, 2002.
- [7] D.Tabak Digitalization of control systems, Comput. Aided Des. Vol 32, pp 13-18, 1971.
- [8] M. A. Al-Alaoui, Novel IIR differentiator from the Simpson Integration rule, IEEE, Trans. On circuits and systems-I: fundamental theory and applications, Vol. 41, no 2, 186-187, 1994.
- [9] I. Petras, I. Podlubny, P. O'leary, L. Dorcak and B. M. Vinagre, Analogue realization of fractional order controllers, fakulta BERG, TU Kosice, 2002.
- [10] Y. Q. Chen, Fractional order calculus, Fractional filter and fractional-order control: An overview & some recent developments, available on line at <http://mechatronics.ece.usu.edu/foc/>, USU Industrial math seminar, Nov 6, 2003.
- [11] I. Podlubny, Fractional-order systems and $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controllers, IEEE, Trans. On automatic control, Vol. 44, no. 1, pp 208-214, 1999.
- [12] S. C. D. Roy, On the realisation of a constant-argument immitance or fractional operator, IEEE, Trans. On circuit theory, Vol. 14, no. 3, 264-274, 1967.
- [13] A. Oustaloup, F. Leveron, B. Mathieu and F. M. Nanot, Frequency-band complex non integer differentiator: Characterization and synthesis, IEEE, Trans. On circuit and systems I: Fundamental theory and applications, Vol. 47, no. 1, 25-39, 2000.

- [14] A. Charef, H. H. Sun, Y. Y. Tsao, B. Onaral, Fractal system as represented by singularity function, IEEE, Trans on automatic control, Vol. 37, no. 9, pp 317-329, Sept 1992.
- [15] C. Lubich, Discretized fractional calculus, SIAM journal of mathematical analysis, Vol. 17, no. 3, 704-719, 1986.
- [16] B. M. Vinagre, Y. Q. Chen, I. Petras, Two direct Tustin discretization methods for fractional order differentiator/ integrator, Journal of the franklin institute, Vol. 340, 349-346, 2003.
- [17] D. Heleschewitz and D. Matignon, Diffusive realisation of fractional integrodifferential operators: Structural analysis under approximation, IFAC conference on system, structure and control, Nantes, France, Vol. 2, 243-248, 1998.
- [18] A. Charef, Analogue realisation of fractional order integrator, differentiator and fractional $PI^{\alpha}D^{\beta}$ controllers, to appear in IEE proceedings on control theory and applications.
- [19] M. Aoun, R. Malti, F. Levron and A. Oustaloup, Numerical simulations of fractional systems, Proceedings of ASME, Desi. Eng. Tech. Conferences, Chicago, Illinois, USA, Sept 2-6, 2003.
- [20] K. Ogata, Discrete-time control systems, Prentice Hall, Englewood, Cliffs, USA, 1987.
- [21] M. Benmalek, Filtrage et détection de l'onde-R du signal électrocardiographique ECG par utilisation des opérateurs d'ordre fractionnaire, Mémoire de magister en Electronique.
- [22] M. Chossat, Aide mémoire de mathématique de l'ingénieur, Bordas, Paris, 1977.
- [23] M. Kunt, Techniques modernes de traitement numérique des signaux, Romandes, 1991.

Sommaire

Introduction Générale	01
------------------------------------	----

Chapitre I	Opérateurs d'ordre fractionnaire	Page
-------------------	---	-------------

I.1 Définition	
I.1.1 Définition de GRUNWALD-LETNIKOV.....	04
I.1.2 Définition de RIEMANN-LIOUVILLE.....	04
I.2 Quelques propriétés de la dérivation non entière.....	05
I.2.1 Linéarité.....	05
I.2.2 Opérateur d'identité.....	06
I.2.3 La transformée de Laplace.....	06
I.3 Exemple de calcul de dérivée non entière.....	06
I.3.1 Dérivation non entière d'une exponentielle.....	06
I.3.2 Dérivation non entière d'un cosinus (ou d'un sinus).....	06
I.3.3 Dérivation non entière d'un produit de fonction sinusoïdale amortie.....	07
I.4 Méthodes d'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire.....	07
I.4.1 Cas continu.....	07
I.4.1.1 Approximation en utilisant les expansions de fraction continu (CFE) et des techniques d'interpolation.....	07
I.4.1.2 La méthode d'Oustaloup.....	08
I.4.1.3 La méthode de Charef.....	08
I.4.2 Cas discret.....	09
I.4.2.1 Approximation discrète en utilisant l'intégration et l'expansion de serie entière.....	09
I.4.2.2 Approximation discrète en utilisant l'intégration numérique et l'expansion de fraction continue.....	10
I.4.3 Autres approximations.....	10

Chapitre II	Approximation des opérateurs d'ordre Fractionnaire.....	13
II.1	Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire.....	13
II.1.1	Exemple d'un intégrateur d'ordre fractionnaire.....	15
II.2	Approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire.....	17
II.2.1	Exemple d'un dérivateur d'ordre fractionnaire.....	19
II.3	Implémentation par des circuits électriques analogiques.....	21
Chapitre III	Discrétisation et implémentation numérique.....	24
III.1	Discrétisation de la fonction d'approximation rationnelle.....	24
III.1.1	Discrétisation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire par la transformation Bilineaire.....	24
III.1.1.1	Exemple illustrative.....	25
III.1.2	Discrétisation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire par la transformation Backward	26
III.1.2.1	Exemple illustrative.....	27
III.1.3	Discrétisation du dérivateur d'ordre fractionnaire par la transformation Bilineaire.....	28
III.1.3.1	Exemple illustrative.....	29
III.1.4	Discrétisation du dérivateur d'ordre fractionnaire par la transformation Backward.....	30
III.1.4.1	Exemple illustrative.....	32
III.2	Implémentation numérique.....	33
Chapitre IV	Applications et comparaisons.....	37
IV.1	Introduction.....	37
IV.2	Réponse d'opérateur d'ordre fractionnaire.....	37
IV.3	Dérivation non entière de quelques fonctions usuelles.....	38
IV.3.1	La dérivée non entière d'un Echelon.....	38

IV.3.2 Calcul de la dérivée non entière de la rampe.....	41
IV.3.3 La dérivation non entière d'un cosinus (ou d'un sinus)	43
IV.3.4 Dérivation non entière d'une fonction sinusoïdale amortie.....	45
IV.4 Intégration non entière de quelques fonctions usuelles.....	47
IV.5 Résultats et commentaires.....	49
IV.6 Comparaison avec d'autres méthodes.....	50
IV.6.1 La discrétisation récursive de Tustin.....	50
IV.6.2 Discrétisation directe en utilisant l'expansion de fraction continu (CFE) de l'opérateur de Al-alaoui.....	51
IV.7 Conclusion.....	53
Conclusion Générale.....	54

Abstract

This work deals with the fractional order differentiator s^m and integrator s^{-m} ($0 < m < 1$) and its analogue and numerical implementation.

A very simple and new method is represented, first the fractional order integrator s^{-m} ($0 < m < 1$) is modelled by a fractional power pole (FPP), in a given frequency band of practical interest. Next, this FPP is approximated by a rational function, the same idea is used to model the fractional order differentiator s^m ($0 < m < 1$) by a fractional power zero (FPZ), using the rational function approximation of these fractional order operators, we can derive simple analogue circuits which can serve as fractional order integrator, differentiator.

For the numerical implementation and the computation of the output, we have discretized the obtained transfer function via two most recent transformations, the Bilinear (Trapezoidal, Tustin) transformation, and the Backward transformation in a given frequency band. Some examples are represented and compared. These two methods are tested and compared using some of the most recent functions and the results are presented, discussed and compared with that of most recent methods of discretization of the fractional order differentiator s^m .

Remerciements

Je tiens à remercier vivement et très respectueusement mon directeur de mémoire, le **Professeur Abdelfatah Charef** pour le choix du sujet, d'avoir dirigé ce travail avec compétence et professionnalisme, pour tous ses conseils précieux et sa critique constructive qui ont été très positifs, pour le libre accès à sa documentations personnelle, pour l'intérêt qu'il porte au développement de la recherche, ainsi que toutes les facilités matérielles qu'il m'a accordé pour l'accomplissement de ce travail.

Mes vifs remerciements vont au **Professeur M. Khamadja** pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury et également au **Professeur A. Bennia** et au **Docteur T. Laroussi** d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je tiens à remercier également le **Professeur H. Tebbikh** et le **Docteur S. Benjoudi** pour leurs aide et soutient, sans oublier le **Docteur H. Serridi** pour ses encouragements et précieux conseils. Je remercie entre autre **Melle F. Salhi** pour son aide et soutient.

Les travaux présentés ici n'auraient certainement pas été menés à bien sans la collaboration et l'amabilité de l'ensemble de mes collègues chercheurs. Je remercie en particulier **S. Boudour**, **S. Benkrinah**, **H. Krouma**, **M. Benmalek**, **A. Belghoubi**, **A. Naceri**, et **M. Asabaa** pour l'aide qu'ils m'ont portée aux moments propices.

Que toutes les personnes (dont le nombre est très élevé pour les citer ici) qui ont contribué de près ou de loin, directement ou indirectement à ce travail, trouvent ici le témoignage de ma profonde reconnaissance. Sans oublier tout le personnel du département d'électronique, pour le cadre agréable qu'ils nous ont offert pendant notre cycle de formation.

Dédicace

Je dédie ce travail

A mes parents.

A la mémoire de mon frère Amor.

A mes frères, sœurs et belles sœurs.

A Ines et Zakariya.

A tout mes amis.

K. Hamdaoui