

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministre de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

**Université Mentouri de Constantine**  
**Faculté des Sciences de l'Ingénieur**  
**Département D'électronique**

N° d'Ordre :.....

Série :.....

**MEMOIRE**

**Présenté pour obtenir le Diplôme de Magister en Electronique**

Par

**Mr. Assabaa Mohamed**

Option : **Contrôle**

**THEME**

**Modélisation et Analyse des Equations Différentielles**  
**Linéaires d'Ordre Fractionnaire**

Soutenu le : **01/02/2006**

Examiné Par le Jury :

Président	Dr. A. Bennia	Professeur	Université Constantine
Rapporteur	Dr. A. Charef	Professeur	Université Constantine
Examineur	Dr. N. Mansouri	Professeur	Université Constantine
Examineur	Dr. S. Filali	Maître de Conférences	Université Constantine

*Je dédie ce mémoire*

*A mes très chers parents qui ont tellement fait de sacrifices pour moi*

*A mes chers sœurs et frères*

*A tous mes amis*

*A tous mes collègues et amis de l'option Contrôle des systèmes*

*A tous les membres du laboratoire de Traitement du Signal*



**Assabaa Mohamed**

## *Remerciements*

Avant tout je voudrai remercier Allah qui ma permis d'arriver la ou je suis, et de conclure avec succès ce modeste travail, et pour mes parents qui ma offert aussi affectifs que soucieux de mon avenir.

Je tiens plus particulièrement à exprimer ma gratitude envers Mr. Abdefatah Charef Professeur à l'université Mentouri de Constantine, qui a eu la lourde tache d'être mon encadreur. Ce travail n'aurait jamais abouti sans son indéfectible dynamisme et inébranlable conviction dans l'intérêt de mes travaux. Ses constants encouragements m'ont toujours permis de dépasser les différentes périodes de découragement qui ont pu jalonné cette période de mémoire. Merci.

J'exprime ma reconnaissance au Pr. Abdelhak Bennia, Professeur à l'université Mentouri de Constantine, pour ses conseils grâce auxquels j'ai énormément appris. Je le remercie également, pour l'honneur qu'il ma fait en acceptant de présider le jury.

Je remercie le Pr. Nora Mansouri, Professeur à l'université Mentouri de Constantine, d'avoir accepter de juger ce travail en tant qu'examinatrice.

Je remercie le Dr. Salim Filali, Maître de Conférences à l'université Mentouri de Constantine, d'avoir accepter de juger ce travail en tant qu'examineur.

Je remercie de tout mon cœur mes collègues qui on su créer une ambiance très amicale et détendue. Merci a mon cher ami Boukechiche Faris pour son soutien et aide inestimable. Sans oublier Mr. Mohamed Essaleh Doudache et Mr. Redouane Kafsi pour leurs aide dans la rédaction.

Enfin je ne pourrais terminer ces remerciement sans une pensée à l'ensemble des mes enseignants qui sont à l'origine de tout mon savoir.

# Sommaire

## Légendes des Figures

<b>Introduction Générale</b> .....	1
------------------------------------	---

## **CHAPITRE I: Introduction aux Systèmes d'Ordre Fractionnaire**

I.1. Introduction au calcul fractionnaire.....	3
I.2. Intégral et drivée fractionnaire .....	3
I.2.1. Définitions.....	3
I.2.2. Propriétés.....	4
I.3. La transformée de Laplace des opérateurs fractionnaires .....	5
I.3.1 La transformée de Laplace des intégrales fractionnaires.....	5
I.3.2. La transformée de Laplace des dérivées fractionnaires.....	5
I.4. Equations Différentielles Fondamentales d'Ordre Fractionnaires .....	6
I.4.1.Définition.....	6
I.4.2. Solutions des équations différentielles fondamentales d'ordre fractionnaires par la fonction de Mittag-Leffler .....	7
I.4.3 La fonction généralisée de la réponse impulsionnelle.....	9
I.5. Propriétés importante de la F-fonction.....	12

## **CHAPITRE II : Approximation des Systèmes d'Ordre Fractionnaire Par une Fonction Rationnelle**

II.1. système d'ordre fractionnaire simple.....	15
II.1.1 Approximation par une fonction rationnelle .....	15
II.1.2. Les réponses temporelles .....	17
II.1.2.1. La réponse impulsionnelle.....	17
II.1.2.2 La réponse indicielle.....	18
II.1.3 Réalisation analogique .....	19
II.1.4. Exemple numérique.....	19
II.2. système d'ordre fractionnaire multiple .....	21
II.2.1. Approximation par une fonction rationnelle .....	22
II.2.1.1. Fonction de transfert au zéro à puissance fractionnaire (ZPF) .....	23

II.2.2. Réponses fréquentielles et temporelles.....	25
II.2.2.1. Les réponses fréquentielles.....	25
II.2.2.2. Les réponses temporelles.....	28
II.2.2.2.1. La réponse impulsionnelle.....	28
II.2.2.2.2. La réponse indicielle.....	29
II.2.3 Réalisation analogique .....	30
II.2.4. Exemple numérique .....	33

### **CHAPITRE III : Performances et Caractéristiques du Système d'ordre Fractionnaire Multiple.**

III.1. Performances caractéristiques.....	36
III.1.1. Spécifications fréquentielles.....	37
III.1.1.1. Facteur de qualité Q.....	37
III.1.1.2. Facteur d'amortissement.....	38
III.1.1.2. Pulsation de résonance $\omega_r$ .....	39
III.1.1.3. Facteur de résonance $M_r$ .....	40
III.1.2. Spécifications temporelles.....	40
III.1.2.1. Dépassement (% Mpt=percent max overshoot).....	43
III.1.2.2. Le temps de dépassement ( $t_p$ =peak time).....	43
III.1.2.3. Temps de réponse( $t_s$ =settling time).....	44
III.1.2.4. Le temps de montée ( $t_r$ =rise time).....	45
<b>Conclusion Générale.....</b>	<b>50</b>

## Légendes des Figures

<b>Figure I.1</b>	La réponse fréquentielle lorsque $0 < m < 2$ .....	8
<b>Figure I.2</b>	La fonction $F_m[-1, t]$ , $m$ varie de 0.25 à 2.0.....	11
<b>Figure I.3</b>	La fonction de Mittag-Leffler, $E_m[-t^m]$ , $m$ varie de 0.25 à 2.0.....	11
<b>Figure I.4</b>	La réponse indicielle du système de l'équation (I.16).....	13
<b>Figure II.1</b>	Distribution de la fonction de temps de relaxation $G(\tau)$ de la fonction (II.3) .....	17
<b>Figure II.2</b>	La réponse impulsionnelle du système de la fonction (II.3).....	18
<b>Figure II.3</b>	La réponse indicielle du système de la fonction (II.3).....	18
<b>Figure II.4</b>	Réalisation analogique d'un circuit RC du système d'ordre fractionnaire simple.....	19
<b>Figure II.5</b>	Diagramme de Bode (module et phase) de la fonction de transfert $H(s) = 1/[1 + (10s)^{0.65}]$ et son approximation .....	20
<b>Figure II.6</b>	La réponse impulsionnelle du système $(10)^{0.65}(d^{0.65}y(t)/dt^{0.65}) + y(t) = e(t)$ .....	21
<b>Figure II.7</b>	La réponse indicielle du système $(10)^{0.65}(d^{0.65}y(t)/dt^{0.65}) + y(t) = e(t)$ .....	21
<b>Figure II.8</b>	Approximation de la fonction de transfert $H(s) = (1 + s/20)^{0.5}$ , avec $y = 1$ dB, $\omega_{max} = 10^4$ rad/s.....	24
<b>Figure II.9</b>	La réponse fréquentielle de (II.23) et (II.24) pour plusieurs valeurs de $m$ .....	27
<b>Figure II.10</b>	La réponse impulsionnelle du système pour $y = 1$ dB, $\omega_n = 1$ et $m = 1.1, 1.2, \dots, 1.9$ .....	29
<b>Figure II.11</b>	La réponse indicielle du système pour $y = 1$ dB, $\omega_n = 1$ et $m = 1.1, 1.2, \dots, 1.9$ .....	30
<b>Figure II.12</b>	Réalisation d'un circuit analogique du système d'ordre fractionnaire multiple, pour $1 < m < 2$ .....	31
<b>Figure II.13</b>	Circuit RLC parallèle.....	31
<b>Figure II.14</b>	Réalisation du circuit analogique RC du ZPF $(1 + s\tau_0)^{2-m}$ .....	32
<b>Figure II.15</b>	Diagramme de Bode (module et phase) de la fonction de transfert $H(s) = 1/[1 + (10s)^{1.7}]$ et son approximation.....	34
<b>Figure II.16</b>	La réponse impulsionnelle du système $(1)^{1.7}(d^{1.7}y(t)/dt^{1.7}) + y(t) = e(t)$ .....	35
<b>Figure II.17</b>	La réponse indicielle du système $(1)^{1.7}(d^{1.7}y(t)/dt^{1.7}) + y(t) = e(t)$ .....	35
<b>Figure III.1</b>	Facteur de qualité calculé, simulé et du ref [22].....	38
<b>Figure III.2</b>	Facteur d'amortissement calculé et du ref [22].....	39
<b>Figure III.3</b>	Pulsation de résonance calculée et simulée.....	39

<b>Figure.III.4</b>	Facteur de résonance calculé et simulé.....	40
<b>Figure.III.5</b>	La réponse indicielle en utilisant la fonction de Mittag-Leffler pour plusieurs valeurs de $m$ , $1 < m < 2$ .....	42
<b>Figure.III.6</b>	Le dépassement interpolé, simulé et du ref [22].....	43
<b>Figure.III.7</b>	Le temps de dépassement interpolé, simulé et du ref [22].....	44
<b>Figure.III.8</b>	Temps de réponse interpolé, simulé et du ref [22].....	45
<b>Figure.III.9</b>	Le temps de monté interpolé, simulé et du ref [22].....	45
<b>Figure.III.10</b>	La réponses fréquentielles des deux systèmes (notre approximation et ref [22]) Pour plusieurs valeur de $m$ ; $1 < m < 2$ .....	46
<b>Figure.III.11</b>	La réponses indicielles des deux systèmes (notre approximation et ref [22]) Pour $m=1.05$ .....	47
<b>Figure.III.12</b>	La réponses indicielles des deux systèmes (notre approximation et ref [22]) Pour $m=1.5$ .....	47
<b>Figure.III.13</b>	La réponses indicielles des deux systèmes (notre approximation et ref [22]) Pour $m=1.7$ .....	48
<b>Figure.III.14</b>	La réponses indicielles des deux systèmes (notre approximation et ref [22]) Pour $m=1.9$ .....	48

## **Introduction Générale**

Depuis les premiers travaux des dérivées d'ordre fractionnaire il y'a quelques siècles, la théorie du calcul fractionnaire a été développée pour la plupart par des mathématiciens. Dans les dernières décennies un intérêt considérable a été porté au calcul fractionnaire par l'application de ces concepts dans différents domaines de la physique et de l'ingénierie [1]. Beaucoup de systèmes physiques ont affiché un comportement dynamique d'ordre fractionnaire, tels que les systèmes viscoélastique, la polarisation électrode électrolyte, polarisation d'interfaces, le comportement cardiaque [2]. A cause de leur représentation par des fonctions de transfert irrationnelles, les systèmes d'ordre fractionnaire ont été marginalement étudiés. Mais un grand effort a été fait pour essayer de mettre en pratique les résultats déjà établis. Seulement dans les dernières années que quelqu'un a pu trouver un progrès significatif de travaux théoriques qui peuvent servir comme fondation pour un nombre d'applications dans la théorie des systèmes et la théorie de la commande [3,4]. Donc, un travail de recherche intensif est encore en cours dans plusieurs domaines d'ingénierie pour l'application de ces concepts d'ordre fractionnaire.

Les techniques mathématiques utilisées en théorie des systèmes linéaires demeurent des outils de base dans l'étude, l'analyse et la synthèse des systèmes, par contre les méthodes d'application de ces techniques devraient être mieux développées afin de décrire convenablement les phénomènes naturels divers pour une meilleure compréhension et exploitation [5].

Les systèmes linéaires d'ordre fractionnaire sont des systèmes dynamiques linéaires représentés par des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire dont les ordres de leurs dérivées sont des nombres réelles. Et l'équation différentielle linéaire fondamentale d'ordre fractionnaire est définie par :

$$(\tau_0)^m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + y(t) = e(t) \quad , \quad \text{pour } 0 < m < 2$$

La fonction de transfert de ce type de systèmes est donnée par la fonction irrationnelle suivante :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{1}{[1 + (s\tau_0)^m]} \quad , \quad \text{pour } 0 < m < 2$$

Une des approches utilisées dans la littérature pour faciliter la représentation par un système linéaire invariant dans le temps, l'étude, l'analyse et la synthèse par un circuit électrique analogique des systèmes d'ordre fractionnaire est l'approximation de leurs fonctions de transfert irrationnelles par des fonctions rationnelles dans une bande fréquentielle d'intérêt pratique.

Une méthode facile, effective et très utile pour la théorie des systèmes et la théorie de la commande est présentée pour l'approximation par une fonction rationnelle de la fonction de transfert irrationnelle dans une bande fréquentielle donnée de l'équation différentielle linéaire fondamentale d'ordre fractionnaire. Alors, à partir de cette fonction rationnelle, les réponses impulsionnelle et indicielle de ce type de systèmes ont été tirées. Les performances caractéristiques fréquentielles et temporelles sont aussi obtenues. Une comparaison avec une autre méthode basée sur une certaine fonction dite fonction de Mittag-Leffler a été faite. Des exemples illustratifs ont été présentés pour montrer l'exactitude et l'utilité de la méthode d'approximation.

Les travaux réalisés et les résultats obtenus faisant l'objet de ce mémoire sont présentés comme suit :

Le premier chapitre est consacré à l'introduction au calcul fractionnaire, à l'équation différentielle fondamentale linéaire d'ordre fractionnaire, ainsi qu'à la solution de cette équation par la fonction de Mittag-Leffler.

Le deuxième chapitre présente la méthode d'approximation de la fonction de transfert de ce type de systèmes d'ordre fractionnaire par une fonction rationnelle dans une bande fréquentielle donnée. Les réponses impulsionnelle et indicielle sont obtenues à partir de cette fonction rationnelle. Un circuit analogique a aussi été tiré. Des exemples numériques ont été présentés.

Le troisième chapitre est consacré à la dérivation des performances caractéristiques fréquentielles et temporelles (le dépassement, le temps de dépassement, le temps de montée, la pulsation de résonance, etc.). Les réponses fréquentielles et temporelles ainsi que les performances caractéristiques obtenues par cette méthode ont fait l'objet de comparaison avec la méthode de la fonction de Mittag-Leffler. Pour terminer, on synthétise nos résultats dans une conclusion générale.

## CHAPITRE I

### Introduction aux Systèmes d'Ordre Fractionnaire

#### I.1. Introduction au calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire est le champ de l'analyse mathématique, l'investigation et l'application des intégrales et des dérivées d'ordre arbitraire. Le calcul fractionnaire peut être considéré comme un sujet ancien et encore nouveau. Ces dernières années l'intérêt considérable pour le calcul fractionnaire a été stimulé par les applications que ce calcul trouve dans les différents domaines de la physique et de l'ingénierie [6].

Généralement on sait que les dérivées et les intégrales d'ordre entier ont des interprétations physiques et géométriques claires, qui simplifient de manière significative leur utilisation pour résoudre des problèmes appliqués dans de divers domaines de la science. Puisque l'aspect de l'idée de la différentiation et de l'intégration d'ordre arbitraire ( pas nécessairement un nombre entier ) n'a aucune interprétation géométrique et physique acceptable sur ces opérations pendant plus de 300 ans, et lorsque l'intégration et la différentiation d'ordre fractionnaire sont des généralisations des notions de l'intégration et de la différentiation d'ordre entière. Pour cette raison, il serait idéal pour avoir de telles interprétations physiques et géométriques d'opérateur d'ordre fractionnaire, qui fournissent également un lien pour savoir des interprétations classiques de différentiation et d'intégration d'opérateur d'ordre entier [7].

Evidemment, il y a toujours un manque d'interprétation géométrique et physique de l'intégration et de la différentiation fractionnaire, qui est comparable aux interprétations simples de leurs contre-parties d'ordre entier [8].

#### I.2. Intégral et dérivée d'ordre fractionnaire

##### I.2.1. Définitions

Le calcul fractionnaire est une généralisation de l'intégration et de la différentiation à l'opérateur fondamental d'ordre non entier  ${}_c D_t^m$  où  $c$  et  $t$  sont des limites de l'opération. L'opérateur intégro-différentiel continu est défini comme :

$${}_c D_t^m = \begin{cases} \frac{d^m}{dt^m} & \Re(m) > 0, \\ 1 & \Re(m) = 0, \\ \int_c^t (d\tau)^{-m} & \Re(m) < 0, \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

où  $m$  est l'ordre de l'opération, généralement  $m \in \mathbb{R}$ .

Les deux définitions utilisées pour la différentiel (Spanier et Oldham) d'ordre fractionnaire générale sont la définition de Grunwald-Letnikov (GL) et la définition de Riemann-Liouville (RL) [9]. La définition de GL est donnée par la formule suivante:

$${}_c D_t^m f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-m} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-c}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{m}{j} f(t-jh), \quad (\text{I.2})$$

où  $\lfloor x \rfloor$  signifie la partie entière de  $x$ .

avec :  $\binom{m}{j} = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(j)\Gamma(m-j)}$  et  $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$  est la fonction Gamma.

Les autres définitions bien connues sont par exemple: Caputo, Weyl, et Fourier.

Dans ce travail la définition de Riemann-Liouville de l'intégration et de la différentiation fractionnaire est employée. Pour le cas de  $0 < m < 1$  et  $f(t)$  être une fonction causale de  $t$ , c.-à-d.,  $f(t) = 0$  pour  $t < 0$ , l'intégrale fractionnaire est défini comme:

$${}_0 D_t^{-m} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-m}} d\tau, \quad 0 < m < 1, t > 0, \quad (\text{I.3})$$

et l'expression pour la dérivée d'ordre fractionnaire est :

$${}_0 D_t^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-m)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^m} d\tau, \quad 0 < m < 1, \quad (\text{I.4})$$

où  $\Gamma(\cdot)$  est la fonction gamma.

## I.2.2. Propriétés

1. si  $f(t)$  est une fonction analytique de  $t$ , alors sa dérivée fractionnaire  ${}_0 D_t^m f(t)$  est une fonction analytique de  $t$  et  $m$ .
2. Pour  $m=0$  l'opération  ${}_0 D_t^m f(t)$  est l'opérateur d'identité:

$${}_0 D_t^0 f(t) = f(t)$$

3. La différentiation et l'intégration fractionnaire sont des opérations linéaire:

$${}_0D_t^m af(t) + {}_0D_t^m bg(t) = a {}_0D_t^m f(t) + b {}_0D_t^m g(t).$$

4. La loi additive d'index :

$${}_0D_t^m {}_0D_t^\beta f(t) = {}_0D_t^\beta {}_0D_t^m f(t) = {}_0D_t^{m+\beta} f(t)$$

### I.3. La transformée de Laplace des opérateurs fractionnaires

#### I.3.1. La transformée de Laplace des intégrales fractionnaires

Nous commencerons par la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre  $m > 0$  définie par (I.3), que nous pouvons écrire comme convolution des fonctions  $g(t) = t^{m-1}$  et  $f(t)$  :

$${}_0D_t^{-m} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^t (t - \tau)^{m-1} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(m)} t^{m-1} * f(t). \quad (I.5)$$

la transformée de Laplace de la fonction  $t^{m-1}$  est (I.6) :

$$G(s) = L\{t^{m-1}; s\} = \Gamma(m) s^{-m}. \quad (I.6)$$

Par conséquence, en utilisant la formule pour la transformée de Laplace de la convolution  $L\{f(t)*g(t); s\} = F(s)G(s)$  nous obtenons la transformée de Laplace du Riemann-Liouville et de l'intégrale fractionnaire de Grunwald-Letnikov:

$$L\{{}_0D_t^{-m} f(t); s\} = s^{-m} F(s). \quad (I.7)$$

#### I.3.2. La transformée de Laplace des dérivées fractionnaires

Maintenant tournons-nous vers l'évaluation de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, qui pour cet objectif l'écrire sous la forme:

$${}_0D_t^m f(t) = g^{(n)}(t), \quad (I.8)$$

$$g(t) = {}_0D_t^{-(n-m)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-m)} \int_0^t (t - \tau)^{n-m-1} f(\tau) d\tau, \quad (I.9)$$

$$(n-1 \leq m < n).$$

L'utilisation de la formule pour la transformée de Laplace d'une dérivée d'ordre entière (I.10)

$$L\{f^{(n)}(t); s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \quad (I.10)$$

mène à :

$$L\{ {}_0D_t^m f(t); s \} = s^n G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0). \quad (\text{I.11})$$

La transformée de Laplace de la fonction  $g(t)$  est évaluée par (I.7)

$$G(s) = s^{-(n-m)} F(s). \quad (\text{I.12})$$

En plus, de la définition de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville (I.4) il suit cela :

$$g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} {}_0D_t^{-(n-m)} f(t) = {}_0D_t^{m-k-1} f(t). \quad (\text{I.13})$$

Substituant (I.13) et (I.12) nous obtenons l'expression finale suivante pour la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre  $m > 0$  :

$$L\{ {}_0D_t^m f(t); s \} = s^m F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [ {}_0D_t^{m-k-1} f(t) ]_{t=0} \quad (n-1 \leq m < n). \quad (\text{I.14})$$

Cette transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est bien connue (voir, par exemple [10]). Cependant, sa applicabilité pratique est limitée par l'absence d'interprétation physique des valeurs limites des dérivées fractionnaires sur la borne inférieure  $t = 0$ . jusqu'ici, une telle interprétation n'est pas connue.

## I.4. Equations Différentielles Fondamentales d'Ordre Fractionnaires

### I.4.1. Définition

Les systèmes de commande standard peut se caractériser par type dans le domaine de Laplace. Ces types sont d'ordre entier, dans ce travail on va explorer certaines applications des systèmes d'ordre non entier dans le domaine de Laplace. Pour le but d'accomplir ses résultats dans le champ du calcul fractionnaire [11].

En général les techniques d'analyse de calcul fractionnaire n'ont pas été largement incorporées aux sciences d'ingénierie.

Ceci est en partie en raison de l'idée conceptuellement difficile de prendre la dérivée de  $\frac{1}{2}$  et son manque notoire d'interprétation géométrique, et en partie parce qu'il y a tellement peu d'applications physiques. Des simplifications de calcul ont été fait par l'utilisation de la transformée de Laplace,  $L\{f(t)\}$  l'opérateur qui déplace l'analyse de système du domaine de temps au domaine  $s$ .  $L\{f(t)\} \Rightarrow F(s)$  .

Un des grands avantages de la transformée de Laplace sont que les opérations mathématiques fondamentales comme la convolution, différentiation et intégration, qui

présentent fréquemment des difficultés de calcul dans le domaine de temps, s'avèrent des opérations algébriques simples dans le domaine  $s$ . Pour cette raison, beaucoup de représentation et analyse de systèmes de commande sont fait exclusivement dans le domaine  $s$ , retournant au domaine du temps pour vérifier seulement ces paramètres de conception de système qui sont indiqués en fonction du temps (par exemple temps de montée, le dépassement, le temps de réponse, etc.)[12].

#### I.4.2. Solutions des équations différentielles fondamentales d'ordre fractionnaires par la fonction de Mittag-Leffler

Cette section fournit une solution à l'équation différentielle linéaire fondamentale d'ordre fractionnaire, à savoir,  ${}_c D_t^m x(t) + ax(t) = bu(t)$ . La solution de la réponse impulsionnelle s'avère une série, appelée la F-fonction, qui généralise la fonction exponentielle normale. La F-fonction fournit la base pour l'ordre  $m$  " pole fractionnaire ". Le problème à adresser ici est la solution de l'équation d'ordre fractionnaire :

$${}_c D_t^m x(t) = -ax(t) + bu(t) \quad (\text{I.15})$$

où la notation a été définie en Lorenzo et Hartley (1998). Ici on supposera pour la clarté que le problème commence à  $t=0$  qui place  $c=0$ . On suppose également que tous les états initiales, ou fonctions d'initialisation, sont zéro. Ainsi nous serons principalement concernés par la réponse forcée. La réponse d'initialisation a été adressée en Lorenzo et Hartley (1998). La réécriture de l'équation (I.15) avec ces prétentions donne :

$${}_0 D_t^m x(t) = -ax(t) + bu(t) \quad (\text{I.16})$$

nous emploierons les techniques de transformée de Laplace pour simplifier la solution de cette équation. Afin de faire ainsi pour ce problème, la transformée de Laplace de l'équation différentielle fractionnaire est nécessaire. En utilisant les résultats donnés à Oldham et Spanier (1974) ou Lorenzo et Hartley (1998), et négligeant les termes d'initialisation, l'équation (I.16) peut avoir la transformée Laplace comme suit :

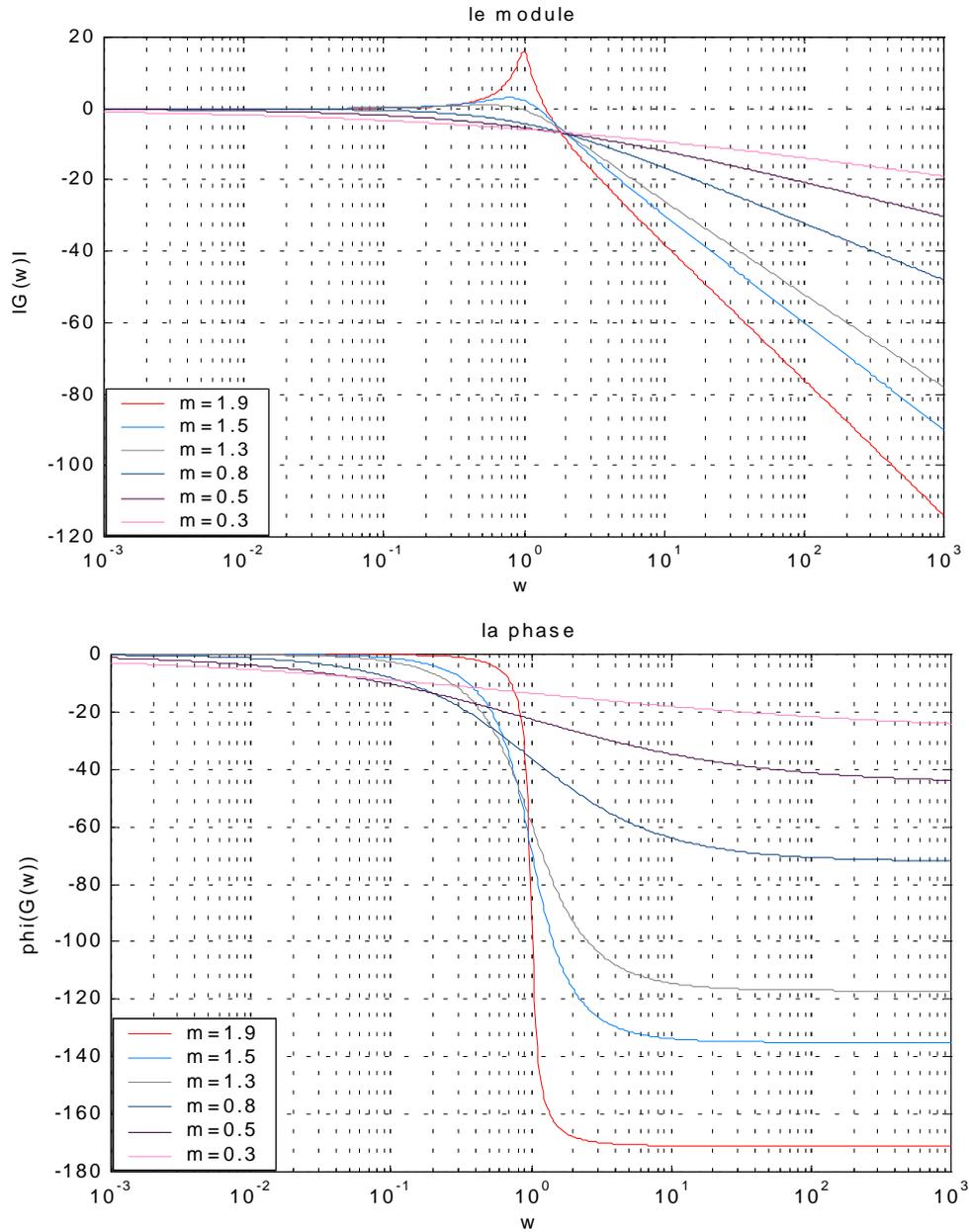
$$s^m X(s) = -aX(s) + bU(s) \quad (\text{I.17})$$

Cette équation peut être réarrangé pour obtenir la fonction de transfert du système :

$$\frac{X(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{b}{s^m + a} \quad (\text{I.18})$$

Ceci est alors la fonction de transfert de l'équation linéaire fondamentale d'ordre fractionnaire. Elle contient aussi, le pole " fractionnaire " fondamental et c'est le module pour des systèmes plus compliqués [13].

Pour avoir quelques réponses fréquentielles pour différentes valeurs de  $m$ , posons  $a=1$  et  $b=1$ , et  $0 < m < 2$ , la figure suivante montre la réponse fréquentielle de l'équation (I.18) pour plusieurs valeurs de  $m$  ;  $0 < m < 2$ .



**Figure I.1** la réponse fréquentielle lorsque  $0 < m < 2$

Typiquement, les fonctions de transfert sont employées pour étudier de diverses propriétés d'un système particulier. Spécifiquement, on peut faire la transformée de Laplace inverse pour obtenir la réponse impulsionnelle du système, qui peut alors utilisée avec l'approche de convolution au problème [14,15]. D'une façon générale, si  $U(s)$  est donnée, alors le produit  $G(s)U(s)$  peut être développer en utilisant les fractions partielles, et la réponse forcée obtenue par

transformation inverse de chaque terme séparément. Pour accomplir ces tâches, il est nécessaire d'obtenir la transformée inverse de l'équation (I.18), qui est la réponse impulsionnelle pour le système d'ordre fractionnaire.

Malheureusement, se rapportant aux tables standard du transformée de Laplace, telles qu'Erdelyi (1952) ou Oberhettinger et Badii (1973), la transformée inverse du côté droit de l'équation (I.18) est seulement connue quand  $m=0.5$   $m=1.0$   $m=2.0$  ou  $a=0$ . Car l'intention est d'obtenir la solution pour  $m$  arbitraire, il est nécessaire de tirer la réponse impulsionnelle fondamentale généralisée pour l'équation d'ordre fractionnaire, l'équation (I.16).

### I.4.3. La fonction généralisée de la réponse impulsionnelle

Bien que les tables du transformée de Laplace ne contiennent pas des termes de la forme de l'équation (I.18), elles contiennent la paire de transformation :

$$\frac{1}{s^m} = L \left\{ \frac{t^{m-1}}{\Gamma(m)} \right\}, \quad m > 0. \quad (\text{I.19})$$

ainsi, si nous pouvons développer le côté droit de l'équation (I.18) dans des puissances descendantes de  $s$  nous pouvons inversé la transformation des séries terme par terme et obtenir la réponse impulsionnelle généralisée, on suppose pour cela  $m > 0$ .

Car la constante  $b$  dans l'équation (I.18) est une constante multiplicatrice, on peut supposer, sans perte de généralité, pour être unité. Alors développant le côté droit de l'équation (I.18) à peu près pour  $s \rightarrow \infty$  l'utilisation d'une longue division, donne :

$$G(s) = \frac{1}{s^m + a} = \frac{1}{s^m} - \frac{a}{s^{2m}} + \frac{a^2}{s^{3m}} - \dots = \frac{1}{s^m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{s^{nm}}. \quad (\text{I.20})$$

On peut maintenant trouver la transformation inverse de cette série terme par terme en utilisant l'équation (I.19). Le résultat est :

$$g(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^m} - \frac{a}{s^{2m}} + \frac{a^2}{s^{3m}} - \dots \right\} = \frac{t^{m-1}}{\Gamma(m)} - \frac{at^{2m-1}}{\Gamma(2m)} + \frac{a^2 t^{3m-1}}{\Gamma(3m)} - \dots \quad (\text{I.21})$$

le côté droit peut maintenant être rassemblé dans une somme et être employé comme définition de la fonction de réponse impulsionnelle généralisée.

$$g(t) = t^{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n t^{nm}}{\Gamma(nm+m)} \equiv F_m[-a, t], \quad m > 0. \quad (\text{I.22})$$

nous avons également la transformée de Laplace importante :

$$L \{ F_m[a, t] \} = \frac{1}{s^m - a}, \quad m > 0. \quad (\text{I.23})$$

Ici nous avons défini la notation que cette fonction soit  $F_m[a,t]$  elle est reliée étroitement à la fonction de Mittag-Leffler  $E_m[at^m]$ , la fonction (Mittag-Leffler, 1903a; Mittag-Leffler, 1903b; Mittag-Leffler, 1905). La fonction de Mittag-Leffler est définie comme suit [13,16] :

$$E_m[x] \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(nm+1)}, \quad m > 0 \quad (\text{I.24a})$$

On met  $x = -at^m$  ceci devient

$$E_m[-at^m] \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n t^{nm}}{\Gamma(nm+1)}, \quad m > 0 \quad (\text{I.24b})$$

dans lequel est semblable, mais pas la même que l'équation (I.22). La transformée de Laplace de cette fonction de Mittag-Leffler peut également être obtenue par l'intermédiaire du transformation terme par terme de la série (I.24b).

$$L\{E_m[-at^m]\} = \left\{ \frac{1}{\Gamma(1)} - \frac{at^m}{\Gamma(1+m)} + \frac{a^2 t^{2m}}{\Gamma(1+2m)} - \dots \right\} = \frac{1}{s} - \frac{a}{s^{m+1}} + \frac{a^2}{s^{2m+1}} - \dots \quad (\text{I.25})$$

ou, d'une manière équivalente

$$L\{E_m[-at^m]\} = \frac{1}{s} \left[ 1 - \frac{a}{s^m} + \frac{a^2}{s^{2m}} - \dots \right] = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{-a}{s^m} \right)^n \quad (\text{I.26})$$

il devrait maintenant être identifié que l'addition dans cette expression est semblable à l'équation (I.20). En utilisant cela, l'équation (I.26) peut être écrite comme suit :

$$L\{E_m[-at^m]\} = \frac{1}{s} \left[ \frac{s^m}{s^m + a} \right] \quad (\text{I.27})$$

ou, d'une manière équivalente :

$$L\{E_m[-at^m]\} = \frac{1}{s} \left[ s^m L\{F_m[-a,t]\} \right] \quad (\text{I.28})$$

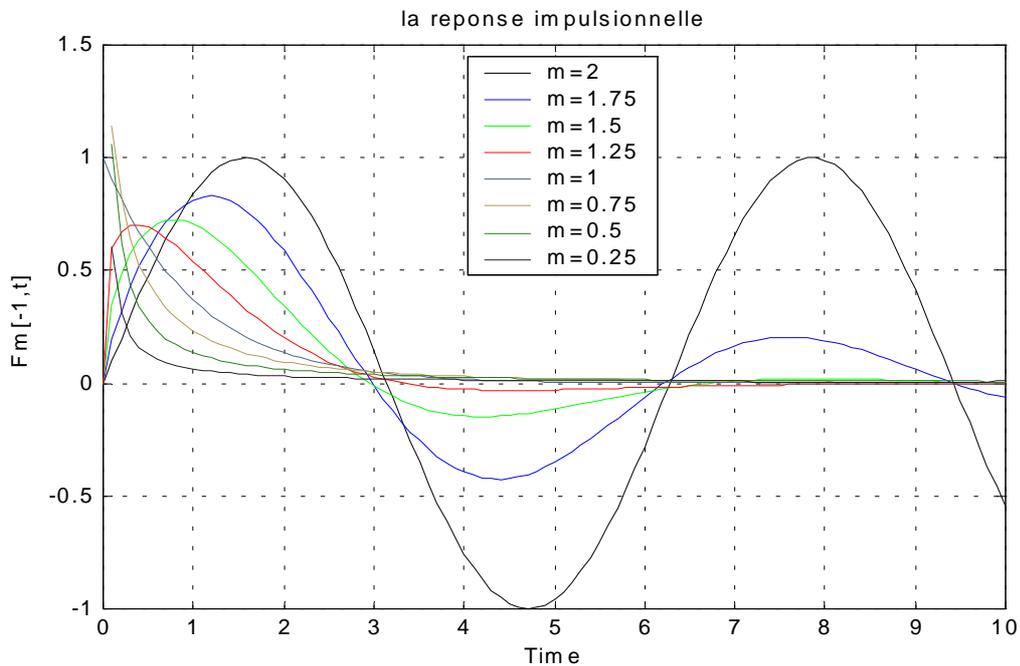
ainsi, le résultat général peut être écrit :

$$L\{E_m[-at^m]\} = \left[ \frac{s^{m-1}}{s^m + a} \right], \quad m > 0 \quad (\text{I.29})$$

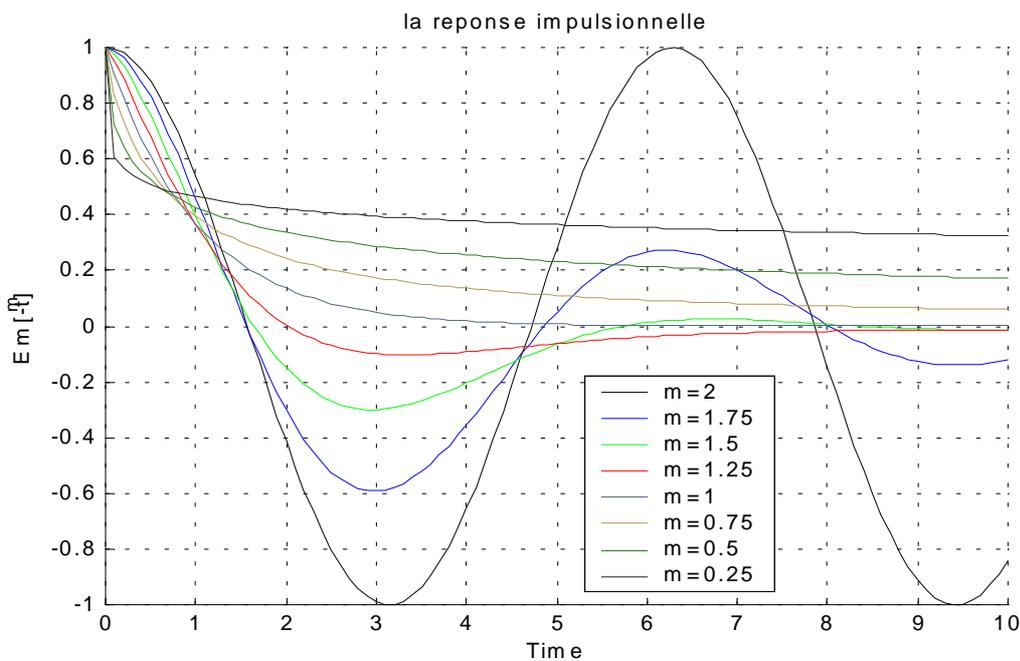
en outre, notifiant de l'équation (I.28), que la E-fonction et la F-fonction peuvent être reliées comme suit,

$${}_0 d_t^{m-1} F_m[a,t] = E_m[at^m]. \quad (\text{I.30})$$

cette section a prouvé que la F-fonction est la réponse impulsionnelle de l'équation différentielle fondamentale linéaire fractionnaire. Le tracé de la F-fonction et la E-fonction pour différentes valeurs de  $m$  sont données sur les figures (I.2) et (I.3), respectivement.



**Figure I.2** La fonction  $F_m[-1, t]$ ,  $m$  varie de 0.25 à 2.0



**Figure I.3** La fonction de Mittag-Leffler,  $E_m[-t^m]$ ,  $m$  varie de 0.25 à 2.0

### I.5. Propriétés importante de la F-fonction

Dans cette section, plusieurs propriétés de la F-fonction sont dérivées. Ceci est fait spécifiquement, de sorte qu'il puisse montrer que la F-fonction résout l'équation différentielle fractionnaire, l'équation (I.16), par substitution direct. Ceci signifie essentiellement que La dérivée d'ordre  $m$  de la fonction  $F_m[a,t]$  renvoient la même fonction  $F_m[a,t]$  pour  $t>0$ , Equation (I.39), plusieurs résultats intermédiaires sont nécessaires pour montrer ces propriétés, et sont maintenant tirés.

Tout d'abord, nous considérerons la réponse à l'échelon du système donné dans l'équation (I.16). Ceci peut être obtenu par l'intermédiaire du transformée de Laplace en transformant la fonction d'entrée  $u(t)$  qui est choisie pour être une fonction échelon unité. Son transformée de Laplace est  $\frac{1}{s}$  qui doit alors être multiplié par la fonction de transfert, par l'intermédiaire de l'équation (I.18), pour donner la transformée de la réponse à l'échelon comme suit :

$$X(s) = \frac{1}{s} \left[ \frac{1}{s^m + a} \right]. \quad (\text{I.31})$$

cette équation peut être manipulée pour donner :

$$X(s) = \frac{1/a}{s} \left[ \frac{a}{s^m + a} \right] = \frac{1/a}{s} \left[ 1 - \frac{s^m}{s^m + a} \right] = \frac{1/a}{s} - \frac{s^m/a}{s(s^m + a)} \quad (\text{I.32})$$

Cette équation peut maintenant être transformée en inverse en utilisant l'équation (I.28) pour le deuxième terme du côté droit. Le résultat est la réponse à l'échelon du système.

$$x(t) = \frac{1}{a} [H(t) - E_m[-at^m]] = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^m + a)} \right\}, \quad (\text{I.33})$$

où  $H(t)$  est la fonction échelon unité de Heaviside, et qui donne également une autre identité de transformée de Laplace. Cette réponse à l'échelon est donnée sur la figure (I.4) pour plusieurs valeurs de  $m$  et  $a=1$ . C'est également intéressant de noter que la prise de la dérivée entière ( ${}_0d_t^1$ ) des deux côtés de l'équation (I.33) donne nécessairement la F-fonction dans le côté gauche (la dérivée de la réponse à l'échelon est la réponse impulsionnelle) ; et une nouvelle identité dans le côté droit ;

$$F_m[-a,t] = \frac{1}{a} [H(t) - E_m[-at^m]]. \quad (\text{I.34})$$

maintenant renvoyant à l'équation (I.28), et multipliant la transformée de Laplace là par  $s^{-m}$  donne  $s^{-m} L\{E_m[-at^m]\} = s^{-1} L\{F_m[-a,t]\} = \frac{1}{s(s^m+a)}$  qui est la transformée de Laplace de l'équation (I.31).

Transformant en inverse en utilisant l'équation (I.33) prouve que la réponse à l'échelon du système de l'équation (I.16) est également égale à l'intégral d'ordre  $m$  de la fonction de Mittag-Leffler; c'est :

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^m+a)}\right\} = \frac{1}{a}[H(t) - E_m[-at^m]] = {}_0d_t^{-m} E_m[-at^m] \tag{I.35}$$

quelques autres identités intéressantes peuvent être obtenues en prenant la dérivée d'ordre  $m$  de la F-fonction. La prise de la dérivée  $({}_0d_t^m)$  dans le domaine de Laplace en se multipliant par  $s^m$  donne :

$$L^{-1}\left\{\frac{s^m}{(s^m+a)}\right\} = {}_0d_t^m F_m[-a,t] \tag{I.36}$$

il devrait maintenant noter que c'est également la dérivée d'ordre entière de la fonction de Mittag-Leffler,

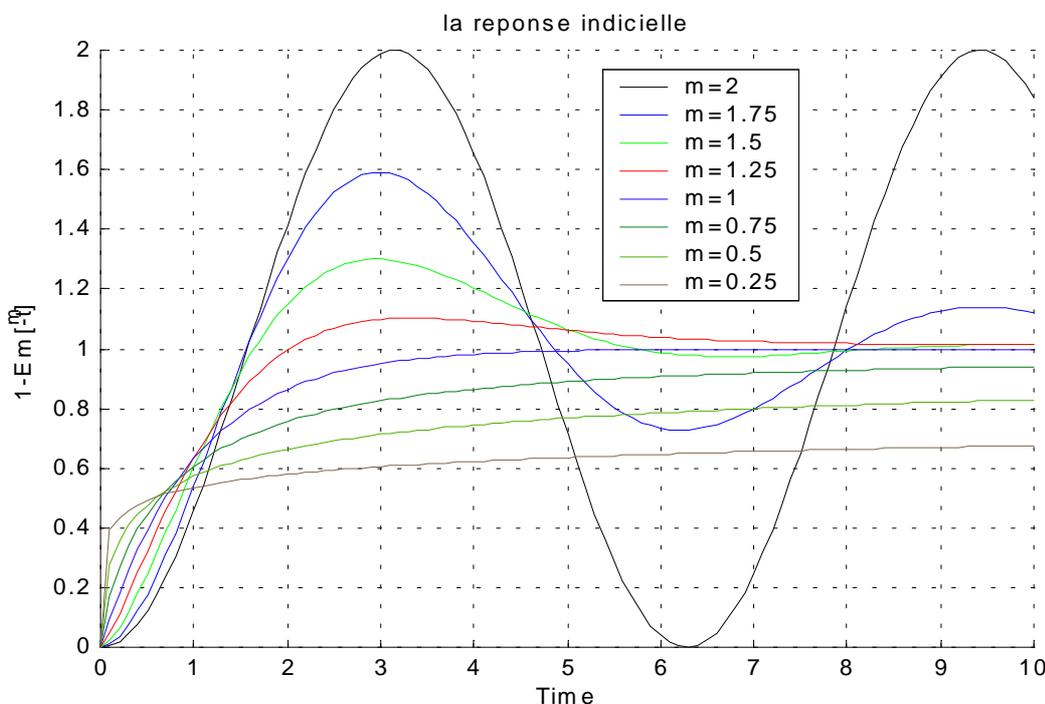


Figure I.4 La réponse indicelle du système de l'équation (I.16)

$$L^{-1} \left\{ \frac{s^m}{(s^m + a)} \right\} = {}_0 d_t^m F_m[-a, t] = {}_0 d_t^1 E_m[-at^m] \quad (\text{I.37})$$

cette équation peut aussi être écrite comme suit :

$$L^{-1} \left\{ \frac{s^m}{(s^m + a)} \right\} = L^{-1} \left\{ 1 - \frac{a}{(s^m + a)} \right\} = \delta(t) - a F_m[-a, t] \quad (\text{I.38})$$

où la fonction delta est identifiée comme impulsion unité. Maintenant comparant l'équation (I.36) et (I.38), il peut voir cela

$${}_0 d_t^m F_m[-a, t] = \delta(t) - a F_m[-a, t] \quad (\text{I.39})$$

Cette équation démontre la propriété d'une fonction propre de restituer la même fonction sur la différentiation d'ordre  $m$ . C'est la généralisation de la fonction exponentielle dans le calcul d'ordre entier.

Il est maintenant facile de montrer que la F-fonction est en effet la réponse impulsionnelle du système de l'équation (I.16). Référez à l'équation (I.16), s'insérant  $u(t) = \delta(t)$  et plaçant  $b=1$ , produit :

$${}_0 d_t^m x(t) = -ax(t) + \delta(t) \quad (\text{I.40})$$

pour que la F-fonction soit la réponse impulsionnelle du système, elle doit être la solution à l'équation (I.16), qui est  $x(t) = F_m[-a, t]$ . l'insertion de ceci dans l'équation (I.40) donne :

$${}_0 d_t^m F_m[-a, t] = -a F_m[-a, t] + \delta(t) . \quad (\text{I.41})$$

cette équation a été obtenue par substitution directe dans l'équation différentielle. Référez à l'équation (I.39), cependant, montre que la dérivée d'ordre  $m$  de la F-fonction du côté gauche est en fait égale au côté droit de l'équation (I.41). Ainsi on lui montre par substitution directe que la F-fonction est en effet la réponse impulsionnelle du système de l'équation (I.16).

## CHAPITRE II

### Approximation des Systèmes d'Ordre Fractionnaire par une Fonction Rationnelle

#### II.1. Système d'ordre fractionnaire simple

Dans ce contexte, le système d'ordre fractionnaire simple est défini comme étant l'équation différentielle fondamentale d'ordre fractionnaire suivante pour  $0 < m < 1$ .

$$(\tau_0)^m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + y(t) = e(t) \quad (\text{II.1})$$

sa fonction de transfert est donnée par :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{1}{[1 + (s\tau_0)^m]} \quad (\text{II.2})$$

#### II.1.1. Approximation par une fonction rationnelle

Dans l'étude des diélectriques, K. S. Cole et R. H. Cole [17] ont constaté que les fonctions de transfert de dispersion/relaxation d'un grand nombre de matériaux peuvent être modelées par l'équation suivante :

$$H(s) = \frac{1}{[1 + (s\tau_0)^m]} \quad 0 < m < 1 \quad (\text{II.3})$$

où  $1/\tau_0$  est la fréquence caractéristique de relaxation,  $s = j\omega$  est la fréquence complexe et  $m$  un nombre réel tel que  $0 < m < 1$  [18].

Il est aussi connu que la fonction de distribution des temps de relaxation  $G(\tau)$  peut être obtenu directement de la fonction de transfert comme [19]:

$$H(s) = \int_0^{\infty} \frac{G(\tau)}{1 + s\tau} d\tau \quad (\text{II.4})$$

Appliquant la méthode de l'équation (II.4) ; K. S. Cole et R. H. Cole ont trouvé que la fonction de distribution des temps de relaxation pour leur modèle de l'équation (II.3) est :

$$H(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^m} = \int_0^{\infty} \frac{G(\tau)}{1 + s\tau} d\tau \quad (\text{II.5})$$

avec:

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin(1-m)\pi}{\left\{ \cosh \left[ m \log \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right) \right] \right\} - \cos(1-m)\pi} \right] \quad (\text{II.6})$$

la figure (II.1) montre le tracé de cette fonction de distribution des temps de relaxation  $G(\tau)$  pour  $m=0.2$  et  $\tau_0=10$ .

L'approximation de la fonction de transfert de l'équation (II.2) par une fonction rationnelle commence par l'échantillonnage de la fonction de distribution des temps de relaxation  $G(\tau)$  de l'équation (II.6) dans une bande fréquentielle d'intérêt pratique  $[0 \text{ } \omega_H]$  en points équidistants sur une échelle logarithmique  $\tau_i$  ( $i=1,2,\dots,2N-1$ ) comme suit :

$$G(\tau) \cong G_s(\tau) = \sum_{i=1}^{2N-1} G(\tau_i) \delta(\tau - \tau_i) \quad (\text{II.7})$$

où  $\tau_i = \tau_N \lambda^{N-i}$  pour  $i=1,2,\dots,2N-1$ , et  $\lambda$  un nombre constant plus grande que l'unité, est définie comme rapport d'un pole au pole précédent où:

$$\lambda = \frac{\tau_i - p_{i+1}}{\tau_{i+1} - p_i} \quad i=1,2,\dots,2N-2 \quad (\text{II.8})$$

avec les pôles  $p_i = \frac{1}{\tau_i}$ , pour  $i=1,2,\dots,2N-1$ .

Substituant l'équation (II.7) dans l'équation (II.4), on obtient:

$$H(s) \cong \int_0^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^{2N-1} G(\tau_i) \delta(\tau - \tau_i)}{1 + s\tau} d\tau = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{G(\tau_i)}{1 + s\tau_i} \quad (\text{II.9})$$

D' où on peut écrire:

$$H(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^m} \cong \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{G(\tau_i)}{1 + s\tau_i} = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{II.10})$$

où  $p_i$  sont les pôles de l'approximation donnée par :

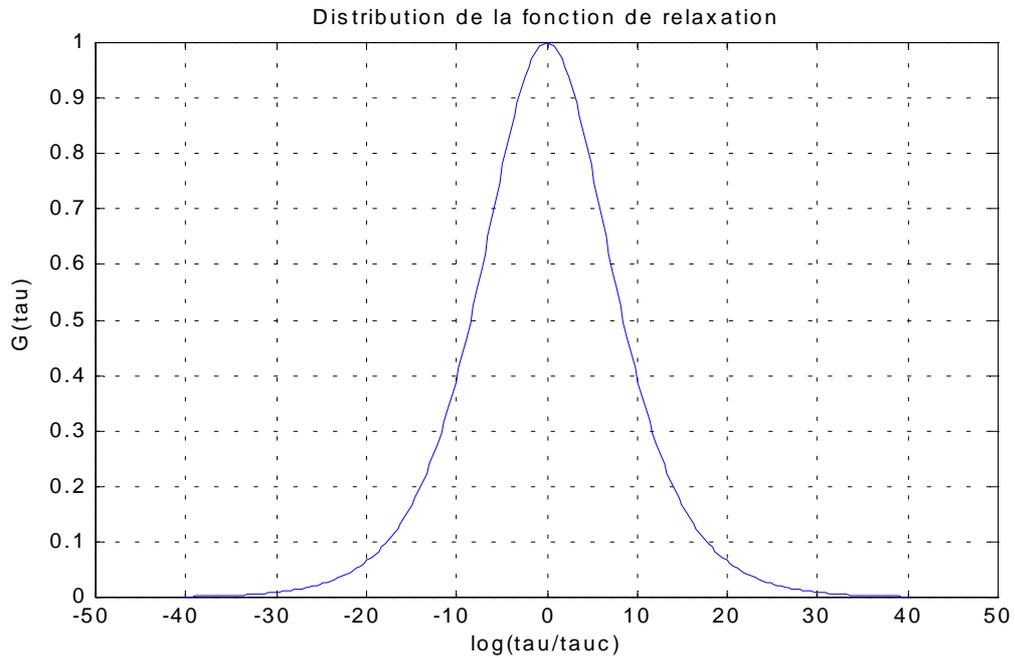
$$p_i = \frac{1}{\tau_i} = (\lambda)^{(i-N)} p_0 \quad \text{pour } i=1,2,\dots,2N-1$$

Sachant que  $p_0 = \frac{1}{\tau_0}$  et  $\lambda = \frac{p_{i+1}}{p_i}$  = rapport d'un pole au pole précédent, les  $k_i$  sont les résidus des pôles donnés par la relation suivante :

$$k_i = G(\tau_i) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin[(1-m)\pi]}{\cosh[m \log(\frac{\tau_i}{\tau_0})] - \cos[(1-m)\pi]} \right] \text{ pour } i=1,2,\dots,2N-1 \quad (\text{II.11})$$

pour une fréquence d'approximation  $w_{\max}$  qui peut être choisie  $1000w_H$ , avec  $[0, w_H]$  est une bande de fréquence d'intérêt pratique, le nombre  $N$  est déterminé comme suit :

$$N = \text{Integer} \left( \frac{\log(\tau_0 w_{\max})}{\log(\lambda)} \right) + 1 \quad (\text{II.12})$$



**Figure II.1** Distribution de la fonction de temps de relaxation  $G(\tau)$  de la fonction (II.3).

## II.1.2. Les réponses temporelles

### II.1.2.1. La réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle du système de la fonction (II.3) est de la forme :

Soit l'entrée une impulsion unité :  $E(s)=1$  ; alors :

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{G(\tau_i)}{(1+s\tau_i)} \quad (\text{II.13})$$

donc la réponse impulsionnelle est :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{1}{\tau_i} (G(\tau_i) \exp(-t/\tau_i)) \quad (\text{II.14})$$

pour  $m=0.3$ ,  $N=10$ ,  $\tau_0=10$ ,  $\lambda=1.5$ ,  $\tau_i = \tau_0 \lambda^{N-i}$  la réponse impulsionnelle prend la forme suivante :

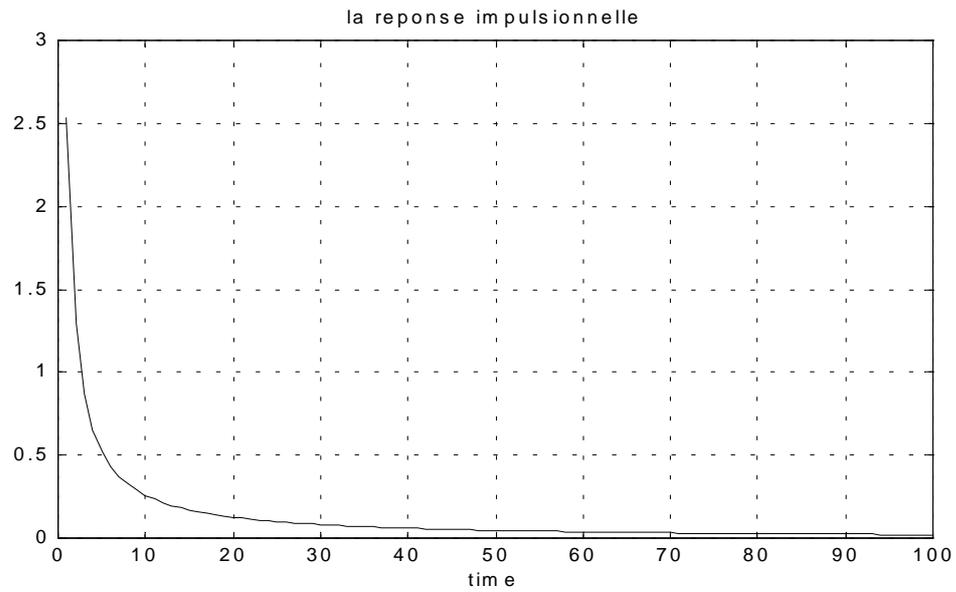


Figure II.2 La réponse impulsionnelle du système de la fonction (II.3)

**II.1.2.2. La réponse indicielle**

La réponse indicielle du système de la fonction (II.3) est de la forme :

Soit l'entrée un échelon unité :  $E(s)=\frac{1}{s}$  ; alors :

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{G(\tau_i)}{s(1+s\tau_i)} \tag{II.15}$$

donc la réponse indicielle est :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{2N-1} G(\tau_i)(1-\exp(-t/\tau_i)) \tag{II.16}$$

pour  $m=0.3, N=10, \tau_c=10, \lambda=1.5, \tau_i=\tau_c\lambda^{N-i}$  la réponse indicielle prend la forme suivante :

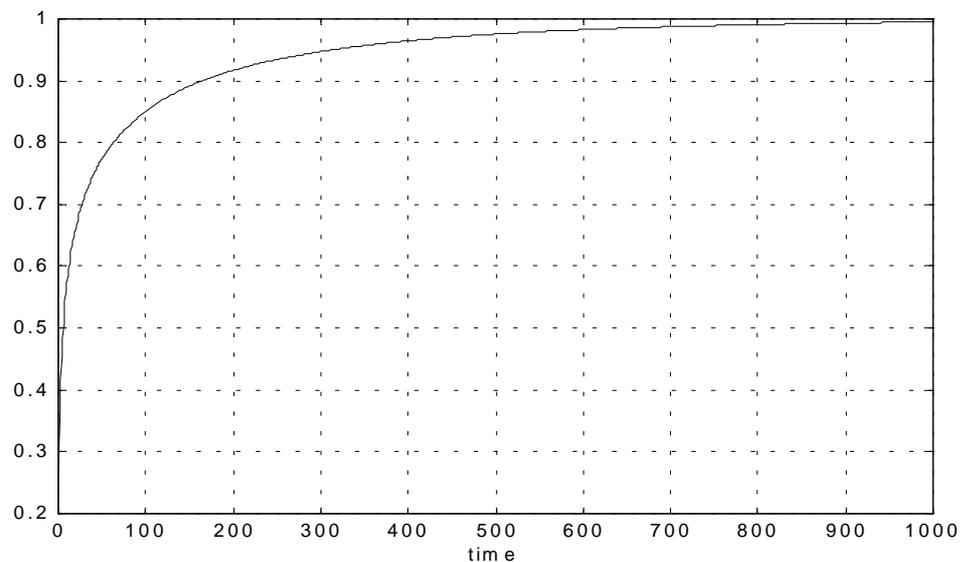


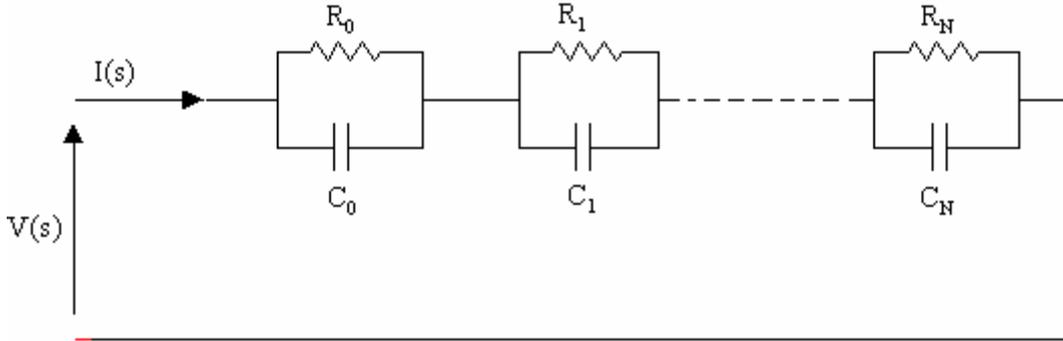
Figure II.3 La réponse indicielle du système de la fonction (II.3)

**II.1.3. Réalisation analogique**

De l'équation (II.9), la fonction de transfert du système est donnée comme :

$$H(s) \approx \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{G(\tau_i)}{1+s\tau_i} = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{\left(1+\frac{s}{p_i}\right)}, \quad \text{avec } p_i = \frac{1}{\tau_i} \quad (\text{II.17})$$

on peut facilement voir que l'équation (II.17) est analogue à une impédance  $Z(s)$  de  $(2N-1)$  cellules RC parallèle connectées en série comme il est montré dans la figure (II.4) :



**Figure II.4** Réalisation analogique d'un circuit RC du système d'ordre fractionnaire simple

Cette impédance  $Z(s)$  du circuit de la figure (II.4) est donnée comme :

$$Z(s) = \sum_{i=1}^{2N-1} \left( \frac{R_i}{1+sR_i C_i} \right) \quad (\text{II.18})$$

des équations (II.17) et (II.18) pour  $i=1,2,\dots,2N-1$ , on peut écrire:

$$R_i = k_i \quad \text{et} \quad R_i C_i = \frac{1}{p_i} \quad (\text{II.19})$$

d'où les valeurs des résistances et capacités, pour  $i=1,\dots,2N-1$ , d'un circuit analogique modélisant le système d'ordre fractionnaire simple dans une bande de fréquence donnée sont données par :

$$R_i = k_i \quad \text{et} \quad C_i = \frac{1}{p_i k_i} \quad (\text{II.20})$$

**II.1.4. Exemple numérique**

Pour le but d'illustration prenons un exemple numérique pour un système d'ordre fractionnaire simple représentée par l'équation différentielle linéaire fondamentale d'ordre fractionnaire suivante avec  $m=0.65$  et  $\tau_0=10$

$$(10)^{0.65} \frac{d^{0.65} y(t)}{dt^{0.65}} + y(t) = e(t)$$

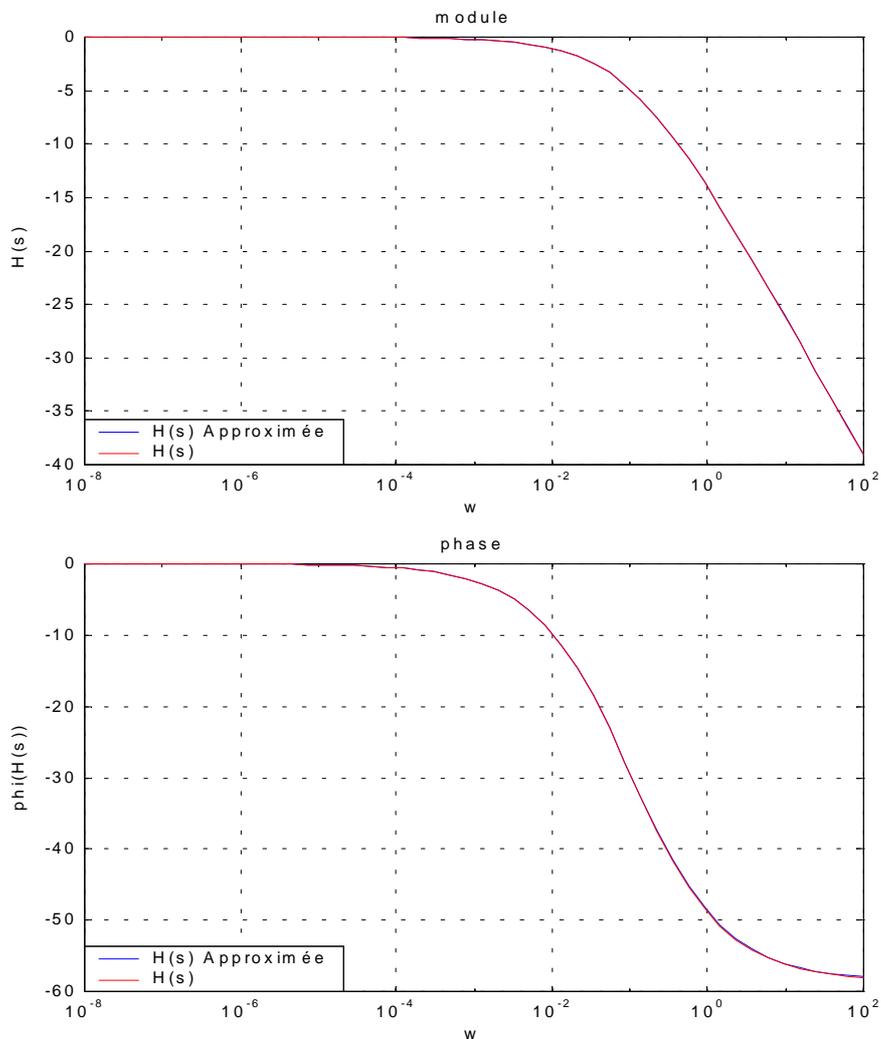
la fonction de transfert est donnée par :

$$H(s) = \frac{1}{1+(10s)^{0.65}}$$

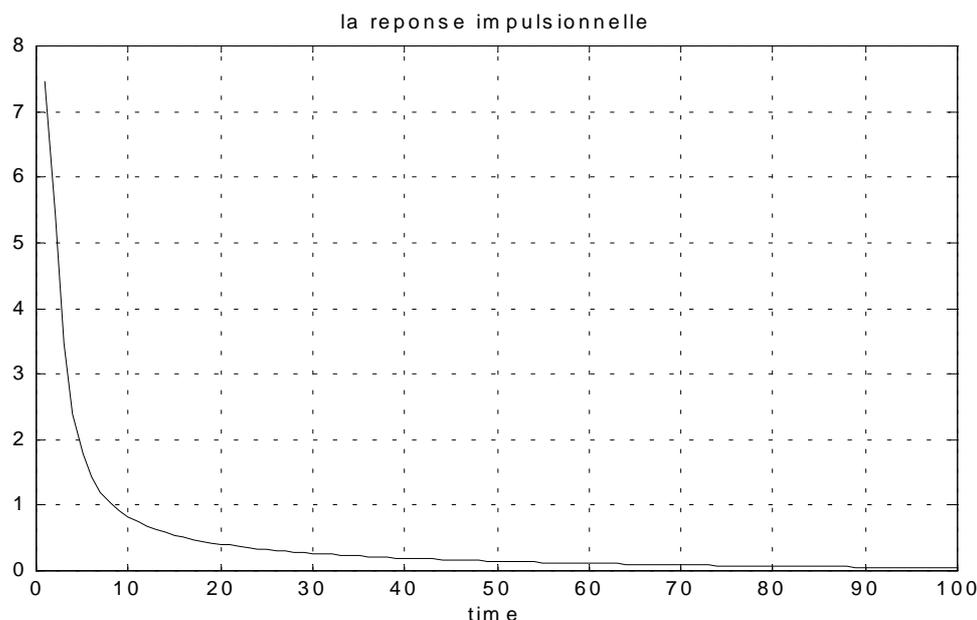
pour une bande de fréquence d'intérêt pratique  $[0, w_H]=[0,100\text{rad/s}]$ , la fréquence d'approximation  $w_{\max}=1000w_H=100000 \text{ rad/s}$ ,  $p_0=0.1 \text{ rad/s}$  et le rapport  $\lambda=4$ , le nombre  $N$ , les pôles  $p_i$  et les résidus  $k_i$  de l'approximation peuvent être facilement calculés de la section (II.1.1)

pour  $i=1,2,\dots,2N-1$ , comme :  $N=10$ ,  $p_i=(4)^{(i-N)}p_0$  et  $k_i = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin[(1-m)\pi]}{\cosh[m\log((4)^{(N-i)})] - \cos[(1-m)\pi]} \right]$

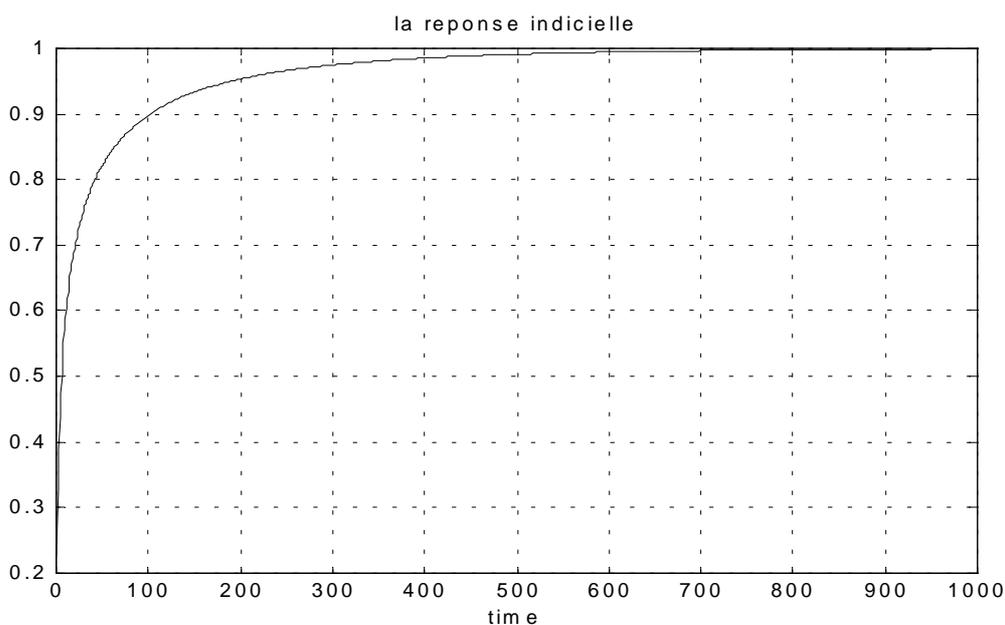
La figure (II.5) montre le diagramme de Bode d'une fonction de transfert d'un système d'ordre fractionnaire simple et son approximation, et les figures (II.6) et (II.7) montrent les réponses impulsionnelle et indicielle du système d'ordre fractionnaire simple.



**Figure II.5** Diagramme de Bode (module et phase) de la fonction de transfert  $H(s) = \frac{1}{1+(10s)^{0.65}}$  et son approximation



**Figure II.6** La réponse impulsionnelle du système  $(10)^{0.65} \frac{d^{0.65} y(t)}{dt^{0.65}} + y(t) = e(t)$



**Figure II.7** La réponse indicielle du système  $(10)^{0.65} \frac{d^{0.65} y(t)}{dt^{0.65}} + y(t) = e(t)$

## II.2. systèmes d'ordre fractionnaire multiple

Dans la section précédente on a fait une étude sur les systèmes fractionnaires simples lorsque  $0 < m < 1$ , on a vu leurs réponses soit fréquentielles ou temporelles. Dans ce qui suit, on va faire une étude sur les systèmes d'ordre fractionnaires multiples (ou du second ordre), lorsque  $1 < m < 2$ . En plus des réponses fréquentielles et temporelles, le système d'ordre fractionnaire multiple a des caractéristiques temporelles : Le dépassement ( $M_p$ , overshoot), Le temps de montée ( $t_r$ , rise time), Le temps de dépassement ( $t_p$ , peak time), Le temps de réponse ( $t_s$ , settling time),

et des caractéristiques fréquentielles : la pulsation de résonance ( $w_r$ ), le facteur de résonance ( $M_r$ ), facteur de qualité ( $Q$ ), et le facteur d'amortissement ( $\xi$ ). Dans (Manabe 1961) une expression approximative est donnée pour le dépassement, obtenu par la simulation de la réponse indicielle et l'ajustement de la courbe [20]. Dans (Barbosa 2004) d'autres formules approximées sont données pour le dépassement et les caractéristiques temporelles, basées sur l'ajustement de la courbe par des fonctions polynômes (MP, tp) en fonction de  $m$ .

Dans ce contexte le système d'ordre fractionnaire multiple est défini comme étant l'équation différentielle fondamentale d'ordre fractionnaire suivante pour  $1 < m < 2$ .

$$(\tau_0)^m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + y(t) = e(t) \quad (\text{II.21})$$

sa fonction de transfert est donnée par :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^m} \quad 1 < m < 2 \quad (\text{II.22})$$

### II.2.1. Approximation par une fonction rationnelle

La fonction de transfert du système d'ordre fractionnaire simple est :

$$H(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^m} \quad (\text{II.23})$$

Cette fonction de transfert sera approximée à la forme de l'équation suivante :

$$H(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^m} \approx \frac{(1 + s\tau_0)^{2-m}}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1}, \text{ pour } 1 < m < 2$$

$$H(s) \approx \frac{(1 + s\tau_0)^{2-m}}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1} \quad (\text{II.24})$$

$$1 < m < 2 \Rightarrow 0 < 2 - m < 1$$

$(1 + s\tau_0)^{2-m}$  : c'est un ZPF (zéro à puissance fractionnaire).

Pour représenter un système d'ordre fractionnaire multiple de l'équation (II.24) par un modèle d'un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer pour une bande de fréquence limitée d'intérêt pratique  $[0, w_H]$  sa fonction de transfert irrationnelle de l'équation (II.23) par une fonction rationnelle. Pour cela on doit approximer le zéro à puissance fractionnaire (ZPF) par une fonction rationnelle dans la bande de fréquence  $[0, w_H]$ .

### II.2.1.1. Fonction de transfert au zéro à puissance fractionnaire (ZPF)

La fonction de transfert d'un système fractionnaire au zéro à puissance fractionnaire est de la forme :

$$H(s) = \left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^m \quad (\text{II.25})$$

$w_c$  : fréquence de coupure.

$m$  : puissance fractionnaire :  $0 < m < 1$

La méthode d'approximation du ZPF consiste d'approximer sa pente 20m dB/dec dans le diagramme de Bode par un nombre de lignes en zig-zag avec des pentes en alternance de 20 dB/dec et 0 dB/dec. L'approximation du zéro à puissance fractionnaire donnée en équation (II.25) par une fonction rationnelle se fait de la façon suivante :

$$H_a(s) = \prod_{i=0}^N \frac{\left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{II.26})$$

Où les pôles et les zéros sont distribués alternativement sur l'axe réel négatif du plant  $s$  des fréquences tels que :  $z_0 < p_0 < z_1 < \dots < z_N < p_N$

et peuvent être générés par les relations suivantes :

$$z_i = (ab)^i z_0 \quad i=0,1,\dots,N$$

$$p_i = (ab)^i a z_0 \quad i=0,1,\dots,N$$

Les paramètres  $a$  et  $b$  sont données par:

$$a = 10^{[y/10(1-m)]}$$

$$b = 10^{[y/10m]} \quad (\text{II.27})$$

$$ab = 10^{[y/10m(1-m)]}$$

L'ordre  $m$  du système, exprimé en fonction de  $a$  et  $b$  comme :

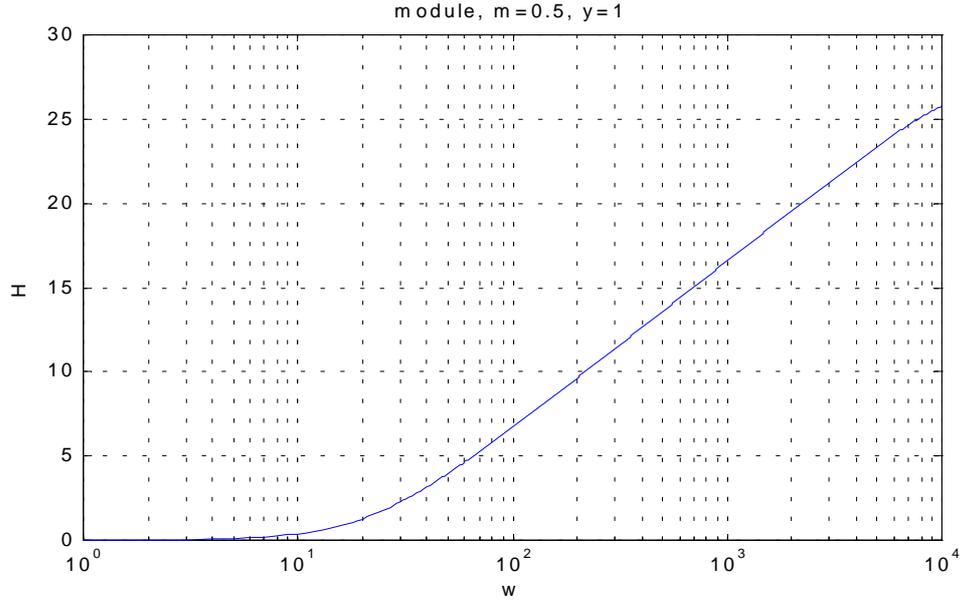
$$m = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (\text{II.28})$$

Le premier zéro est donné par :  $z_0 = w_c \sqrt{b}$

avec  $y$  : l'erreur prescrite elle est exprimée en (dB).

La même méthode de décomposition de singularité pour un système de type (FPP) pole à puissance fractionnaire peut être employé pour analyser ce type système [18].

La figure (II.8) montre le module d'un ZPF, lorsque  $0 < m < 1$ .



**Figure II.8** Approximation de la fonction de transfert  $H(s)=(1+s/20)^{0.5}$ , avec  $y=1\text{dB}$ ,  $w_{\max}=10^4\text{rad/s}$ .

$(1+s\tau_0)^{2-m}$  : c'est un ZPF,  $0 < 2-m < 1$

$$(1+s\tau_0)^{2-m} = \frac{\prod_{i=0}^N (1+\frac{s}{z_i})}{\prod_{i=0}^N (1+\frac{s}{p_i})} \quad (\text{II.29})$$

$G(s) = \frac{1}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1}$  ; c'est un système du second ordre régulier.

où :  $z_0 < p_0 < z_1 < \dots < z_N < p_N$

$z_i = (ab)^i z_0$   $i=0,1,\dots,N$ ,

$p_i = (ab)^i a z_0$   $i=0,1,\dots,N$

$z_0 = w_c \sqrt{b}$  ; premier zéro.

$$a = 10^{\lfloor y/10(1-(2-m)) \rfloor}, \quad b = 10^{\lfloor y/10(2-m) \rfloor}, \quad ab = 10^{\lfloor y/10(2-m)(-1+m) \rfloor}, \quad N = \text{Integer} \left( \frac{\log\left(\frac{w_{\max}}{z_0}\right)}{\log(ab)} \right) + 1$$

En remplaçant l'approximation du ZPF dans l'équation (II.24) on obtient :

$$H(s) = \frac{1}{1+(s\tau_0)^m} \approx \frac{(1+s\tau_0)^{2-m}}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1} \approx \frac{1}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1} \frac{\prod_{i=0}^N (1+\frac{s}{z_i})}{\prod_{i=0}^N (1+\frac{s}{p_i})}$$

$$H(s) \approx \frac{1}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1} \frac{\prod_{i=0}^N (1 + \frac{s}{z_i})}{\prod_{i=0}^N (1 + \frac{s}{p_i})} \quad (\text{II.30})$$

Par décomposition en éléments simples on obtient la forme suivante :

$$H(s) = \frac{As + B}{(\tau_0 s)^2 + 2\xi(\tau_0 s) + 1} + \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{1 + \frac{s}{p_i}} \quad k_i (i=0, 1, \dots, N) \quad (\text{II.31})$$

pour avoir B : posons s=0

$$H(0) = 1 = B + \sum_{i=0}^N k_i p_i$$

$$\Rightarrow B = 1 - \sum_{i=0}^N k_i p_i \quad (\text{II.32})$$

pour avoir A : calculons la limite suivante :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sH(s) = 0$$

donc on a :

$$A = -\tau_0^2 \sum_{i=0}^N k_i p_i, \quad \tau_0 = \frac{1}{\omega_n}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{\omega_n^2} \sum_{i=0}^N k_i p_i \quad (\text{II.33})$$

$$k_i = H(s) \Big|_{s=-p_i}$$

$k_i (i=0, 1, \dots, N)$  ; sont les résidus des pôles qui peuvent être calculés comme suit :

$$k_i = \frac{1}{(a\sqrt{b}(ab)^i)^2 - 2\xi(a\sqrt{b}(ab)^i) + 1} \frac{\prod_{j=0}^N (1 - a(ab)^{i-j})}{\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^N (1 - (ab)^{i-j})} \quad (\text{II.34})$$

$$H(s) = \frac{As + B}{(\tau_0 s)^2 + 2\xi(\tau_0 s) + 1} + \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{1 + \frac{s}{p_i}}$$

## II.2.2. Réponses fréquentielles et temporelles

### II.2.2.1. Les réponses fréquentielles

Soit le système fractionnaire de la fonction de transfert suivante :

$$H(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^m} \text{ on peut l'approximée lorsque } 1 < m < 2 \text{ par la fonction suivante :}$$

$$H(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^m} \approx \frac{(1 + s\tau_0)^{2-m}}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1}, \quad 1 < m < 2, \quad \tau = \frac{1}{\omega_n}$$

L'expression pour l'analyse fréquentielle de  $H(s) = \frac{1}{1+(s\tau_0)^m}$ ,  $\tau_0 = \frac{1}{\omega_n}$  est :

$$H(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^m \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right) + j\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^m \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)} \quad (\text{II.35})$$

La réponse fréquentielle de (II.23) et (II.24) pour plusieurs valeurs de m est donnée dans la fig.(II.9).

$$H(s) = \frac{1}{1+(s\tau_0)^m} \approx \frac{(1+s\tau_0)^{2-m}}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1}, \quad 1 < m < 2$$

On peut facilement montré que :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+(j\omega\tau_0)^m} \approx \frac{(1+j\omega\tau_0)^{2-m}}{(j\omega\tau_0)^2 + 2\xi(j\omega\tau_0) + 1}, \quad 1 < m < 2$$

pour  $\omega \gg \frac{1}{\tau_0}$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{(\omega\tau_0)^m} \approx \frac{(\omega\tau_0)^{2-m}}{(\omega\tau_0)^2} = \frac{1}{(\omega\tau_0)^m}$$

pour  $\omega \ll \frac{1}{\tau_0}$

$$|H(j\omega)| = 1 \approx \frac{1}{1} = 1$$

pour  $\omega = \frac{1}{\tau_0}$ ,

$$|H(j\omega)| = \left| \frac{1}{1+(j)^m} \right| \approx \frac{|(1+j)^{2-m}|}{|2j\xi|}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \cos\frac{m\pi}{2}\right]^2 + \left[\sin\frac{m\pi}{2}\right]^2}} = \frac{(\sqrt{2})^{2-m}}{2\xi} = \frac{(\sqrt{2})^{-m}}{\xi}$$

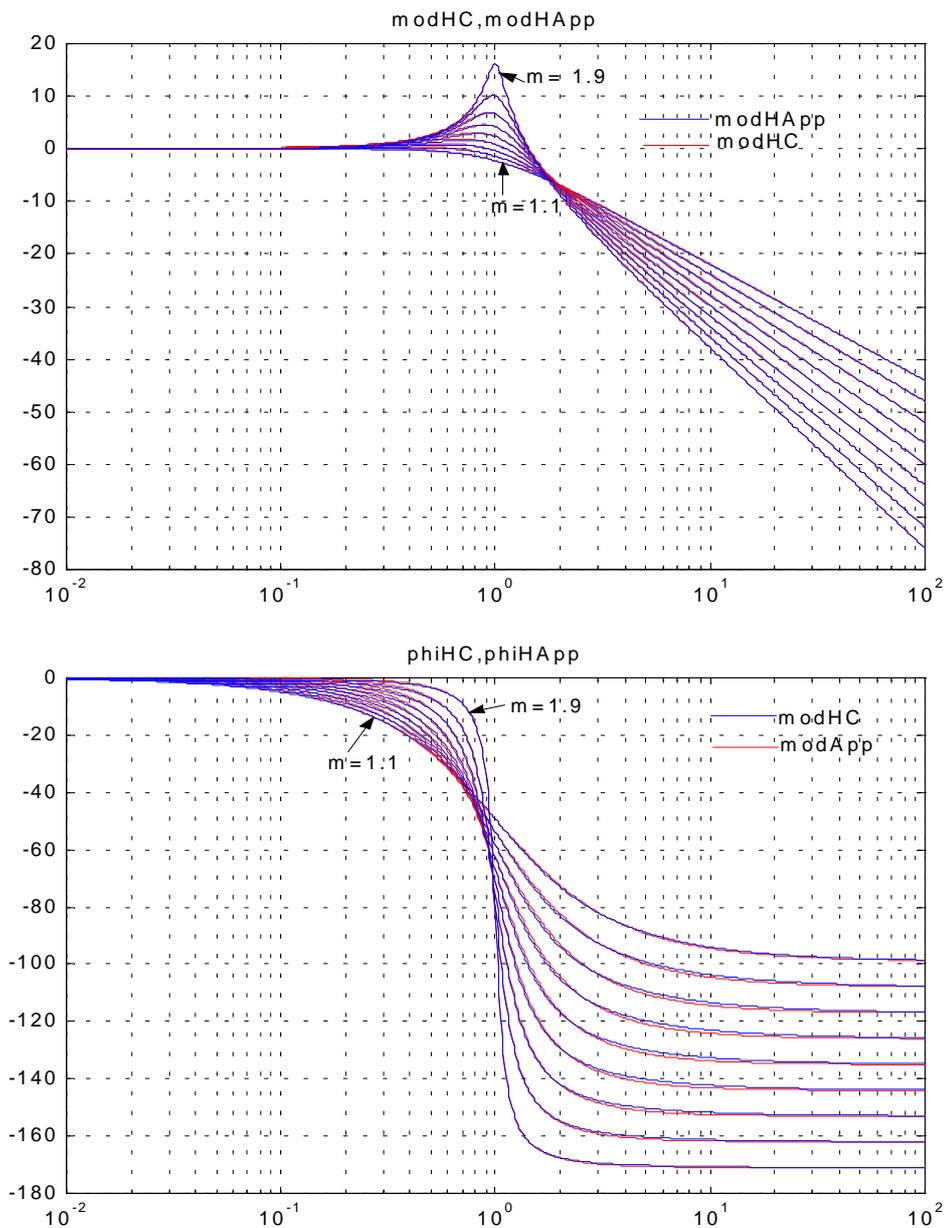
le facteur d'amortissement est donnée par :

$$\xi = \sqrt{\frac{\left[1 + \cos\frac{m\pi}{2}\right]^2 + \left[\sin\frac{m\pi}{2}\right]^2}{2^m}}$$

$$\xi = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{m\pi}{2}}{2^{m-1}}} \tag{II.36}$$

Le facteur d'amortissement est fonction de  $m$  (l'ordre fractionnaire).

De la figure (II.9) on remarque de la réponse fréquentielle de la fonction (II.23) et son approximation (II.24), du système d'ordre fractionnaire multiple que les pentes sont entre  $-20\text{dB}$  et  $-40\text{dB}$  en variant l'ordre  $m$ . Les deux courbes de la fonction (II.23) et son approximation (II.24) sont presque les mêmes, ce qui signifie la bonne approximation de la fonction (II.24).



**Figure.II.9** La réponse fréquentielle de (II.23) et (II.24) pour plusieurs valeurs de  $m$ .

### II.2.2.2. Les réponses temporelles

#### II.2.2.2.1. La réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle du système d'ordre fractionnaire multiple, est donnée dans le domaine fréquentielle par la fonction de transfert suivante :

$$Y(s) = \frac{(1+s\tau_0)^{2-m}}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1} R(s), \quad R(s)=1$$

$$Y(s) = \frac{(1+s\tau_0)^{2-m}}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1} \approx \frac{1}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1} \frac{\prod_{i=0}^N (1 + \frac{s}{z_i})}{\prod_{i=0}^N (1 + \frac{s}{p_i})} \quad (\text{II.37})$$

son approximation est :

$$Y(s) = \frac{As+B}{(\tau_0 s)^2 + 2\xi(\tau_0 s) + 1} + \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{1 + \frac{s}{p_i}}, \quad \tau_0 = \frac{1}{\omega_n} \quad (\text{II.38})$$

$$Y(j\omega) = \frac{Aj\omega + B}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)} + \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{1 + j\frac{\omega}{p_i}} \quad (\text{II.39})$$

B, A et  $k_i$  sont calculées des relations (II.32), (II.33) et (II.34) respectivement.

En utilisant la transformée de Laplace inverse, la réponse impulsionnelle de ce système est donnée par la relation suivante :

$$y(t) = \frac{1}{\omega_n} \left( \frac{B^2 - 2AB\xi\omega_n + A^2\omega_n^2}{1 - \xi^2} \right)^{1/2} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \varphi) + \sum_{i=0}^N k_i p_i e^{-p_i t} \quad (\text{II.40})$$

où la phase  $\varphi$  est donnée par:

$$\varphi = \arctg \frac{A - \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}{B - A\xi\omega_n} \quad (\text{II.41})$$

La figure suivante montre le comportement de la réponse impulsionnelle pour plusieurs valeurs de m :

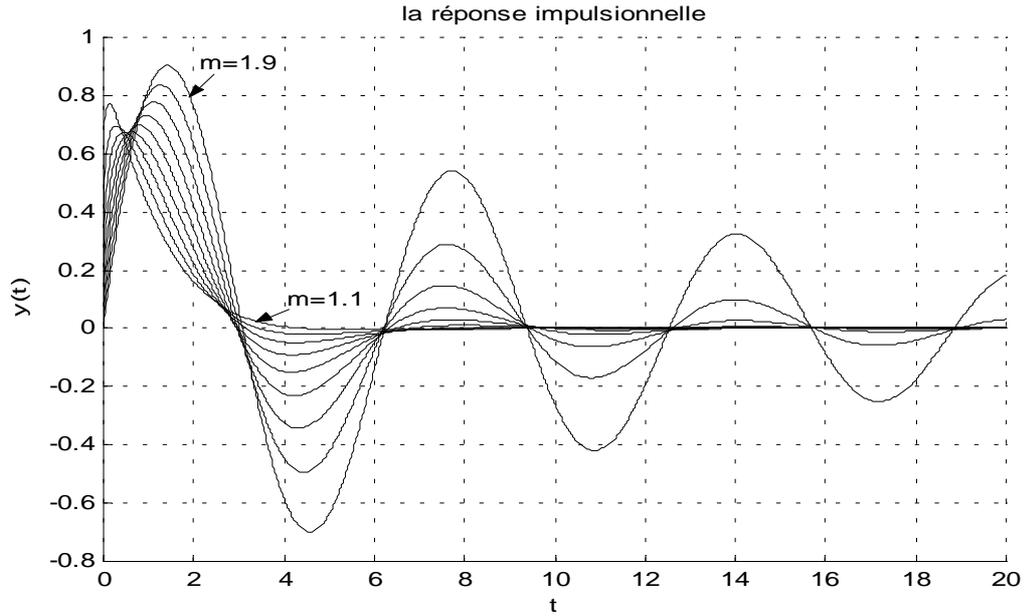


Figure.II.10 La réponse impulsionnelle du système pour  $y=1\text{dB}$ ,  $w_n=1$  et  $m=1.1, 1.2, \dots, 1.9$ .

**II.2.2.2. La réponse indicielle**

La même chose pour la réponse indicielle avec :  $E(s)=\frac{1}{s}$

$$Y(s)=\frac{(1+s\tau_0)^{2-m}}{(s\tau_0)^2+2\xi(s\tau_0)+1}E(s)$$

$$Y(s)=\frac{(1+s\tau_0)^{2-m}}{s((s\tau_0)^2+2\xi(s\tau_0)+1)} \approx \frac{1}{s((s\tau_0)^2+2\xi(s\tau_0)+1)} \prod_{i=0}^N \left(1+\frac{s}{z_i}\right) \prod_{i=0}^N \left(1+\frac{s}{p_i}\right) \quad (\text{II.42})$$

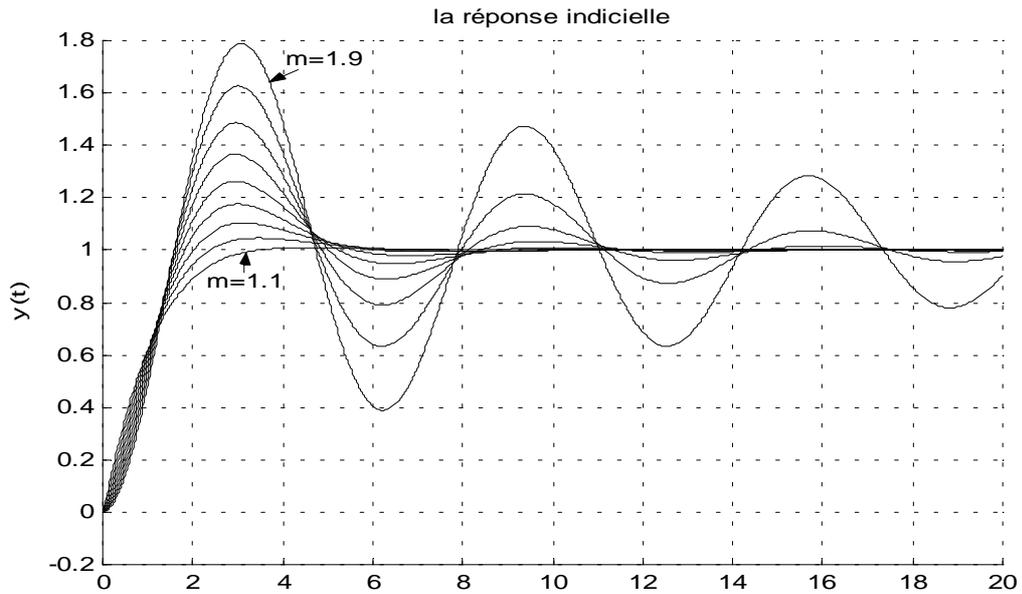
En utilisant la transformée de Laplace inverse, la réponse indicielle de ce système est donnée par la relation suivante :

$$y(t)=1+\frac{1}{wn} \left( \frac{B^2-2AB\xi wn+A^2wn^2}{1-\xi^2} \right)^{1/2} e^{-\xi wnt} \sin(wn\sqrt{1-\xi^2}t+\varphi_1) - \sum_{i=0}^N k_i p_i e^{-p_i t} \quad (\text{II.43})$$

où la phase  $\varphi_1$  est donnée par:

$$\varphi_1 = \arctg \frac{A-wn\sqrt{1-\xi^2}}{B-A\xi wn} - \arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \quad (\text{II.44})$$

La figure suivante montre le comportement de la réponse indicielle pour plusieurs valeurs de  $m$  :



**Figure.II.11** La réponse indicielle du système pour  $y=1\text{dB}$ ,  $\omega_n=1$  et  $m=1.1, 1.2, \dots, 1.9$ .

La figure (II.11) montre la réponse indicielle du système d'ordre fractionnaire multiple pour différentes valeurs de  $m$ , ce système est moins oscillant lorsque la valeur de l'exposant fractionnaire  $m$ , devient de plus en plus petite. Lorsque  $m$  tend vers 1, le système se rapproche du système du premier ordre, et les oscillations diminuent. Inversement, lorsque  $m$  tend vers 2, le système se rapproche du système du second ordre, et les oscillations augmentent (se rapproche du système du second ordre régulier).

### II.2.3. Réalisation analogique

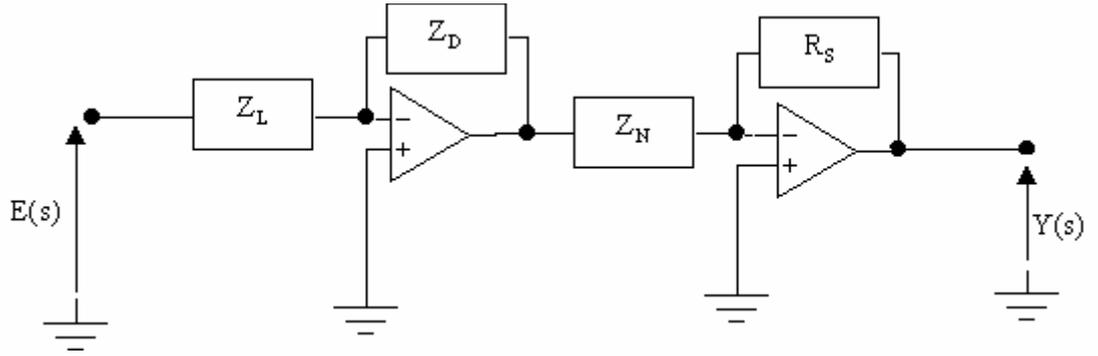
De l'équation (II.24) la fonction de transfert du système d'ordre fractionnaire multiple est donnée par :

$$H(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^m} \approx \frac{(1 + s\tau_0)^{2-m}}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1} = H_N(s) H_D(s) \quad (\text{II.45})$$

$$H_N(s) = (1 + s\tau_0)^{2-m}, \quad H_D(s) = \frac{1}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1}$$

La fonction de transfert  $H(s)$  peut être réalisée par un circuit analogique de la figure (II.12) comme suit :

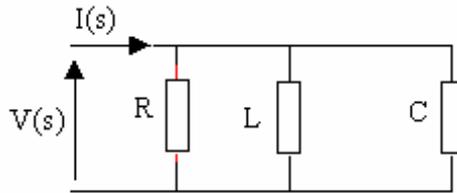
$$H(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^m} \approx \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{Z_D R_S}{Z_L Z_N} \quad (\text{II.46})$$



**Figure.II.12** Réalisation d'un circuit analogique du système d'ordre fractionnaire multiple, pour  $1 < m < 2$

où  $R_s$  est une simple résistance de  $1\Omega$ ,  $Z_L = Ls$  est une impédance d'une simple inductance  $L$ ,  $Z_D$  des impédances du circuit  $RLC$  parallèle de la figure (II.13) :

$$Z_D = \frac{Ls}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1} \tag{II.47}$$



**Figure. II.13** Circuit RLC parallèle

$Y_N = 1/Z_N = H_N(s) = (1 + s\tau_0)^{2-m}$  : est l'admittance d'un circuit analogique qui est dérivé comme :

$$H_N(s) = (1 + s\tau_0)^{2-m} \cong \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} = \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_0(ab)^i}\right)} \tag{II.48}$$

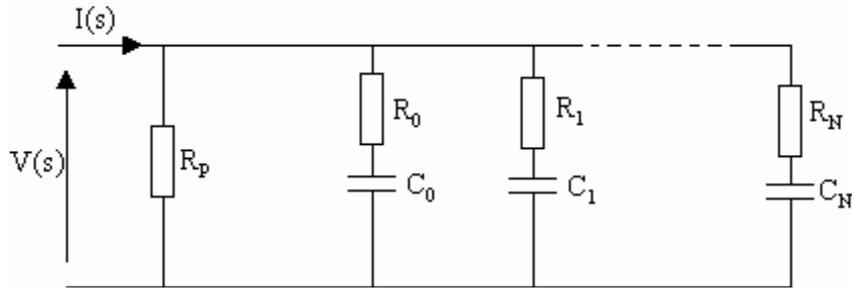
la fonction rationnelle ci-dessus peut se décomposée comme :

$$H_N(s) = H_0 + \sum_{i=0}^N \frac{h_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_0(ab)^i}\right)} \tag{II.49}$$

avec  $H_0=1$  et  $i=0,1,\dots,N$

$$h_i = -\frac{1}{p_0(ab)^i} \frac{\prod_{j=0}^N (1-a(ab)^{(i-j)})}{\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^N (1-(ab)^{(i-j)}} \quad (\text{II.50})$$

On peut remarquer facilement que l'équation (II.48) est analogue à l'admittance  $Y_N(s)$  d'une résistance et  $(N+1)$  cellules RC connectées en parallèle comme il est montré dans la figure suivante :



**Figure II.14** Réalisation du circuit analogique RC du ZPF  $(1+s\tau_0)^{2-m}$

L'admittance  $Y_N(s)$  du circuit de la figure (II.14) est donnée par :

$$Y_N(s) = \frac{1}{R_p} + \sum_{i=0}^N \left( \frac{sC_i}{1+sR_i C_i} \right) \quad (\text{II.51})$$

donc des équations (II.47) et (II.48), et pour  $i=0,1,\dots,N$  on a :

$$H_0 = \frac{1}{R_p}, \quad C_i = h_i, \quad \text{et} \quad R_i C_i = \frac{1}{(ab)^i p_0}$$

les valeurs des résistances et des capacités du circuit analogique réalisant le zéro à puissance fractionnaire dans une bande de fréquence donnée, pour  $i=0,1,\dots,N$  :

$$H_0 = \frac{1}{R_p} = 1, \quad C_i = h_i, \quad \text{et} \quad R_i = \frac{1}{(ab)^i p_0 C_i} \quad (\text{II.52})$$

d'où, la fonction de transfert du circuit de la figure (II.12) donnée par l'équation (II.46) sera :

$$H(s) = \frac{1}{[1+(\tau_0 s)^m]} = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{Z_D R_S}{Z_L Z_N} = \frac{\frac{Ls}{LCs^2 + \frac{Ls}{R} + 1}}{Ls} (1+\tau_0 s)^{(2-m)}$$

$$H(s) = \frac{1}{[1+(\tau_0 s)^m]} = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{(1+\tau_0 s)^{(2-m)}}{LCs^2 + \frac{Ls}{R} + 1} = \frac{(1+\tau_0 s)^{(2-m)}}{(\tau_0 s)^2 + 2\xi(\tau_0 s) + 1}$$

où  $\tau_0^2 = LC$ , et  $\frac{L}{R} = 2\xi\tau_0$  donc :

$$L = 2R\xi\tau_0 \text{ et } C = \frac{\tau_0}{2R\xi} \quad (\text{II.53})$$

### II.2.4. Exemple numérique

Pour le but d'illustration prenons un exemple numérique pour un système d'ordre fractionnaire multiple représentée par l'équation différentielle linéaire fondamentale d'ordre fractionnaire suivante avec  $m=1.7$  et  $\tau_0=1$

$$(1)^{1.7} \frac{d^{1.7} y(t)}{dt^{1.7}} + y(t) = e(t)$$

sa fonction de transfert est donnée par :

$$H(s) = \frac{1}{1+(s)^{1.7}}$$

$$H(s) = \frac{1}{[1+(s)^{1.7}]} = \frac{(1+s)^{(0.3)}}{(s)^2 + 0.259(s) + 1}$$

pour une bande de fréquence d'intérêt pratique  $[0, w_H] = [0, 1000 \text{ rad/s}]$ , l'approximation du ZPF  $(1+s)^{(0.3)}$  par une fonction rationnelle est donnée par :

$$(1+s)^{0.3} = \frac{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{z_0(ab)^i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{p_0(ab)^i} \right)}$$

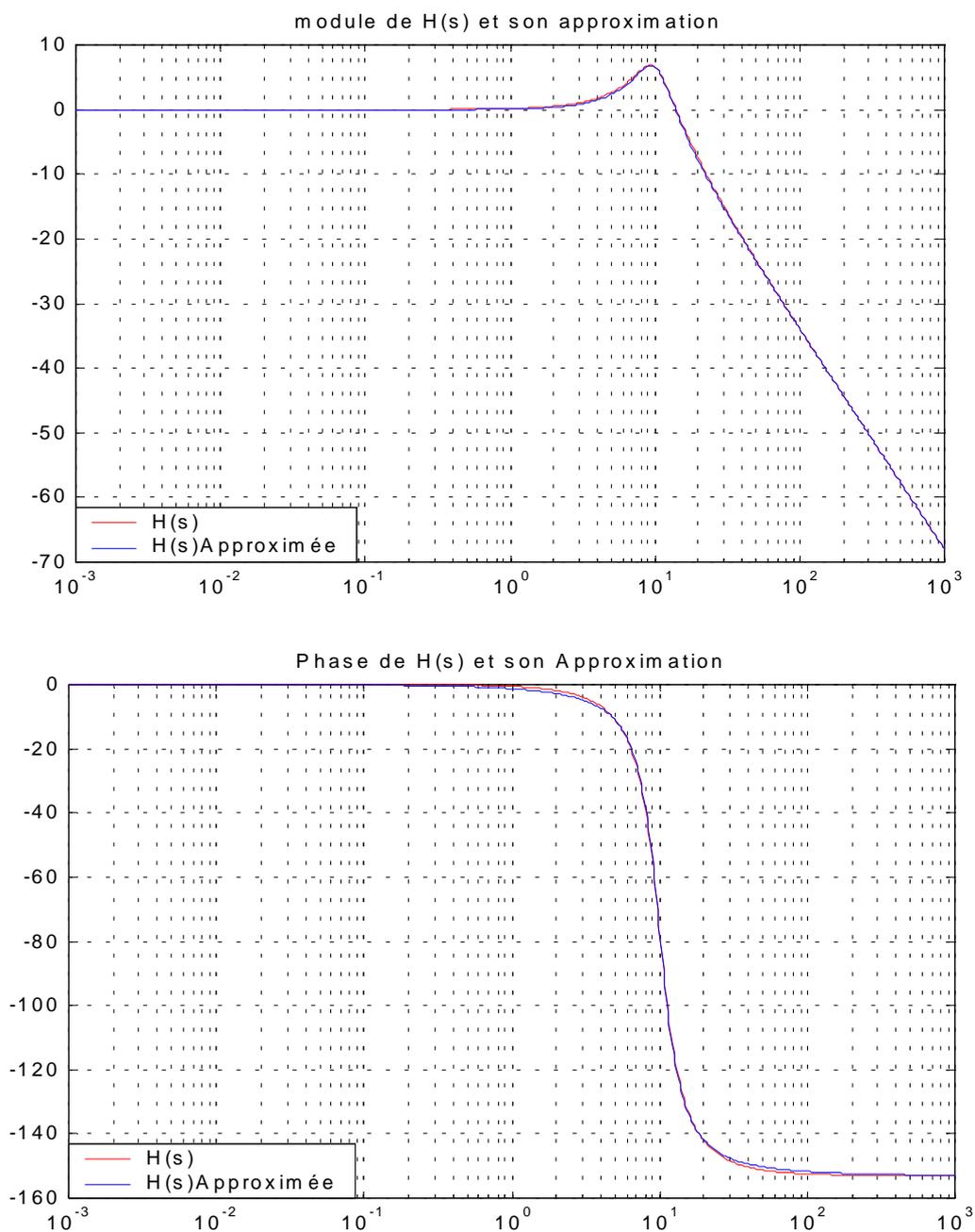
pour une erreur d'approximation  $y=1 \text{ dB}$  et une bande de fréquence d'approximation  $w_{\max} = 100w_H = 100000 \text{ rad/s}$ , les paramètres  $a, b, z_0, p_0$  et  $N$  de l'équation ci-dessus peut être facilement calculés comme :  $a=1.389, b=2.154, z_0=1.4678 \text{ rad/s}, p_0=2.0395 \text{ rad/s}$  et  $N=9$ , donc :

$$(1+s)^{0.3} = \frac{\prod_{i=0}^9 \left( 1 + \frac{s}{1.4678(2.993)^i} \right)}{\prod_{i=0}^9 \left( 1 + \frac{s}{2.0395(2.993)^i} \right)}$$

on a :

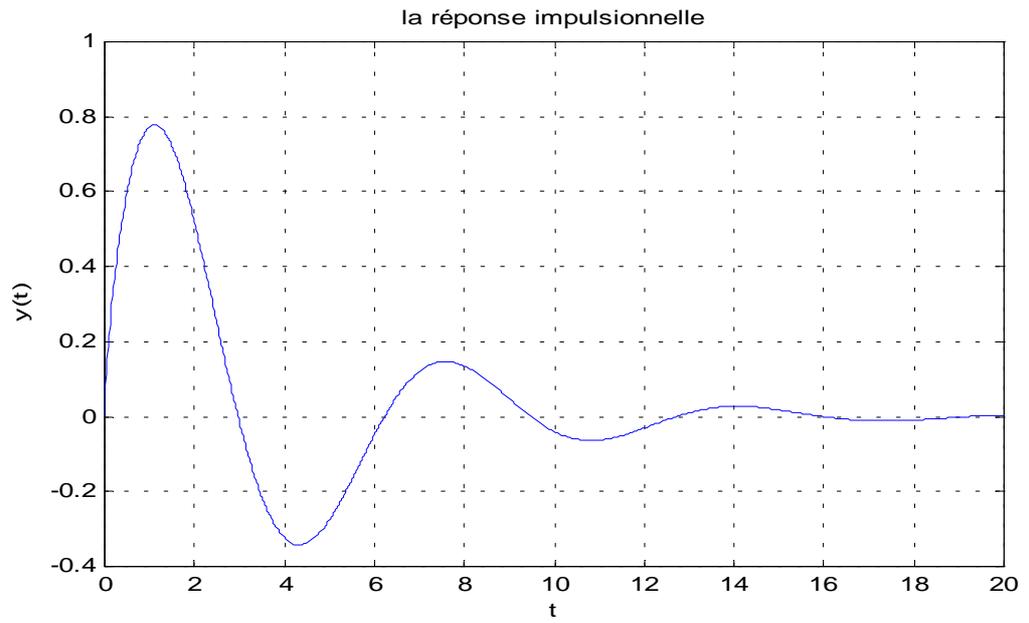
$$H(s) = \frac{1}{1+(s)^{1.7}} = \frac{1}{(s)^2 + 0.259(s) + 1} \frac{\prod_{i=0}^9 \left( 1 + \frac{s}{1.4678(2.993)^i} \right)}{\prod_{i=0}^9 \left( 1 + \frac{s}{2.0395(2.993)^i} \right)}$$

La figure (II.15) montre le diagramme de Bode (module et phase) pour un système d'ordre fractionnaire multiple et son approximation rationnelle. On peut facilement voir qu'ils sont presque les mêmes. Les figures (II.16) et (II.17) montrent les réponses impulsionnelles et indicielles de ce système obtenu de sa fonction d'approximation rationnelle.

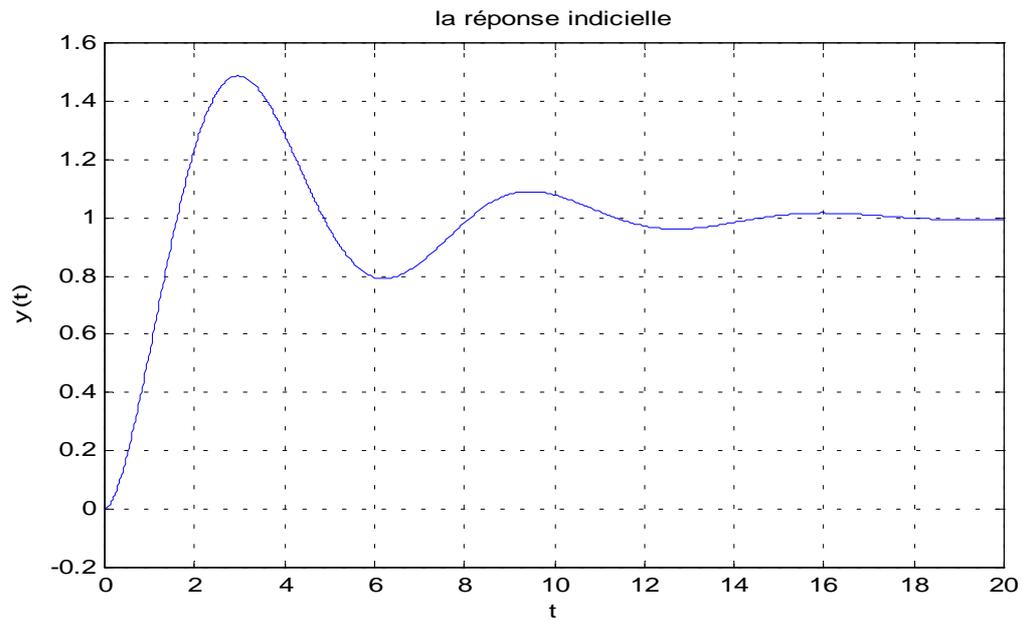


**Figure II.15** Diagramme de Bode (module et phase) de la fonction de transfert

$$H(s) = \frac{1}{1+(s)^{1.7}} \text{ et son approximation}$$



**Figure II.16** La réponse impulsionnelle du système  $(1)^{1.7} \frac{d^{1.7}y(t)}{dt^{1.7}} + y(t) = e(t)$



**Figure II.17** La réponse indicielle du système  $(1)^{1.7} \frac{d^{1.7}y(t)}{dt^{1.7}} + y(t) = e(t)$

## CHAPITRE III

### Performances et Caractéristiques du Système d'ordre Fractionnaire Multiple

#### III.1. Performances caractéristiques

Le système d'ordre fractionnaire multiple est défini comme étant l'équation différentielle fondamentale d'ordre fractionnaire donnée dans l'équation (II.21) par :

$$(\tau_0)^m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + y(t) = e(t) \quad 1 < m < 2$$

sa fonction de transfert est donnée aussi par l'équation (II.22) comme :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{1}{[1 + (s\tau_0)^m]}, \quad 1 < m < 2$$

Cette fonction de transfert sera approximée à la forme de l'équation (II.24) comme suit :

$$H(s) \approx \frac{(1 + s\tau_0)^{2-m}}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1}, \quad \text{pour } 1 < m < 2$$

avec  $0 < 2 - m < 1$  parce que  $1 < m < 2$  et  $(1 + s\tau_0)^{2-m}$  : est un zéro à puissance fractionnaire.

Le but fondamental pour la conception des systèmes asservis consiste à répondre aux conditions fixées par le comportement du système projeté. Les conditions fixées par le comportement du système sont des contraintes que l'on impose aux fonctions mathématiques décrivant ses caractéristiques [21]. En général elle sont de deux types :

1- Les spécifications fréquentielles :

- le facteur de qualité (Q).
- le facteur d'amortissement ( $\xi$ ).
- la pulsation de résonance ( $\omega_r$ ).
- le facteur de résonance ( $M_r$ ).

2- Les spécifications temporelles.

- Le dépassement ( $M_p$ , overshoot).
- Le temps de dépassement ( $t_p$ , peak time).
- Le temps de montée ( $t_r$ , rise time).
- Le temps de réponse ( $t_s$ , settling time).

De la réponse indicielle du système d'ordre fractionnaire multiple de notre méthode, équation (II.43), on peut tirer plusieurs caractéristiques du système par simulation.

$$y(t)=1+\frac{1}{wn}\left(\frac{B^2-2AB\xi w_n+A^2w_n^2}{1-\xi^2}\right)^{1/2} e^{-\xi w_n t} \sin(w_n \sqrt{(1-\xi^2)}t+\varphi_1) - \sum_{i=0}^N k_i p_i e^{-p_i t}$$

Le tableau (III.1) montre les caractéristiques du système tirées de la courbe de la réponse indicielle de l'équation (II.43).

m	Q	wr	Mr	$\xi$	Mp	tp	ts à 2%	tr(10%,90%)
1.05	0.736	0.010	0	0.943	0.001	6.27	-	2.15
1.1	0.769	0.010	0	0.887	0.009	4.52	-	1.91
1.15	0.807	0.206	0.0074	0.831	0.02	3.8	4.56	1.75
1.2	0.850	0.413	0.139	0.775	0.046	3.48	5.13	1.62
1.25	0.900	0.536	0.391	0.720	0.073	3.28	5.3	1.52
1.3	0.957	0.616	0.732	0.666	0.103	3.16	5.33	1.446
1.35	1.023	0.686	1.152	0.612	0.138	3.04	5.3	1.383
1.4	1.101	0.741	1.649	0.559	0.176	3	7.15	1.325
1.45	1.194	0.788	2.226	0.506	0.217	2.96	7.77	1.286
1.5	1.306	0.825	2.893	0.455	0.263	2.96	7.965	1.244
1.55	1.444	0.864	3.663	0.404	0.312	2.96	8.036	1.21
1.6	1.618	0.891	4.555	0.355	0.365	2.96	10.725	1.18
1.65	1.842	0.919	5.598	0.306	0.423	2.96	13.05	1.153
1.7	2.141	0.947	6.831	0.259	0.486	2.96	13.86	1.126
1.75	2.563	0.962	8.328	0.212	0.554	3	16.91	1.106
1.8	3.196	0.977	10.191	0.167	0.627	3	22.81	1.088
1.85	4.254	0.992	12.621	0.123	0.705	3.04	31.79	1.065
1.9	6.372	0.992	16.111	0.081	0.789	3.06	47.64	1.058
1.95	12.735	0.992	22.007	0.040	0.883	3.1	97.65	1.051

**Tableau III.1.** valeurs des caractéristiques enlevées de la courbe de la réponse indicielle.

### III.1.1. Spécifications fréquentielles

#### III.1.1.1. Facteur de qualité Q

Le facteur de qualité est défini par :

de l'équation (II.24) on a :  $Q = |H(jw_n)| = \frac{1}{(\sqrt{2})^m \xi}$  ,  $w_n = \frac{1}{\tau_0}$

avec  $\xi$  est donnée par l'équation (II.36) par :  $\xi = \sqrt{\frac{(1+\cos \frac{m\pi}{2})}{2^{m-1}}}$

donc le facteur de qualité est :

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2\left(1 + \cos\frac{m\pi}{2}\right)}} \quad (III.1)$$

la même formule du facteur de qualité a été trouvée par [22] que la notre.

la figure (III.1) montre le facteur de qualité de l'équation (III.1), du facteur de qualité simulé (du tableau (III.1)) et de la ref [22].

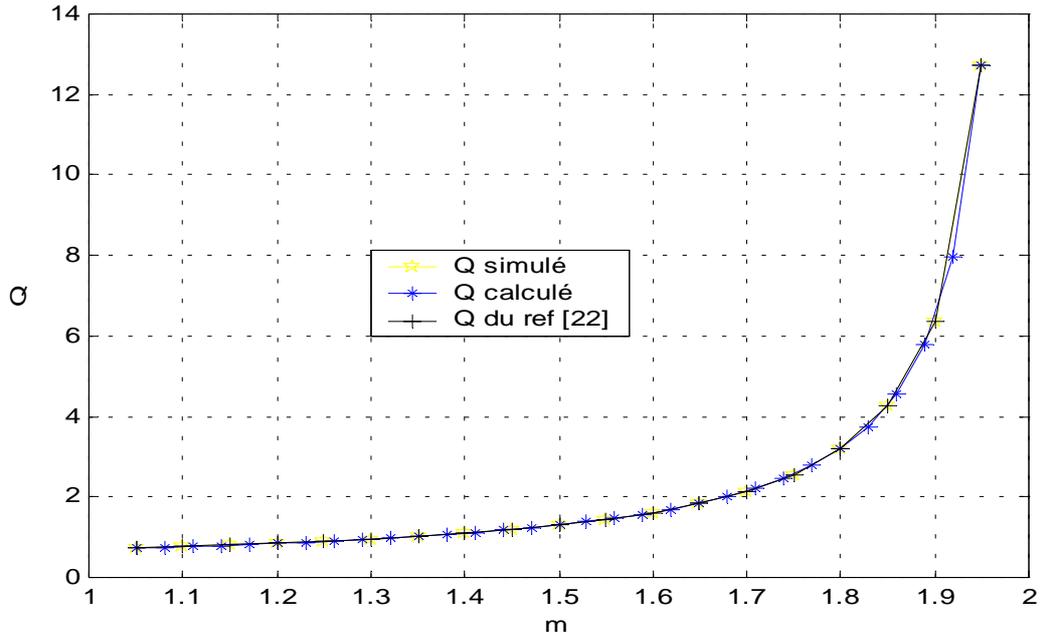


Figure.III.1 Facteur de qualité calculé, simulé et du ref [22]

### III.1.1.2. Facteur d'amortissement $\xi$

Le facteur d'amortissement est donnée dans l'équation (II.36) :  $\xi = \sqrt{\frac{\left(1 + \cos\frac{m\pi}{2}\right)}{2^{m-1}}}$

Le facteur d'amortissement de la ref [22] est donné par :  $\xi_B = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{m}\right)$

La figure (III.2) montre le tracé du facteur d'amortissement de notre méthode et celle de la ref [22] :

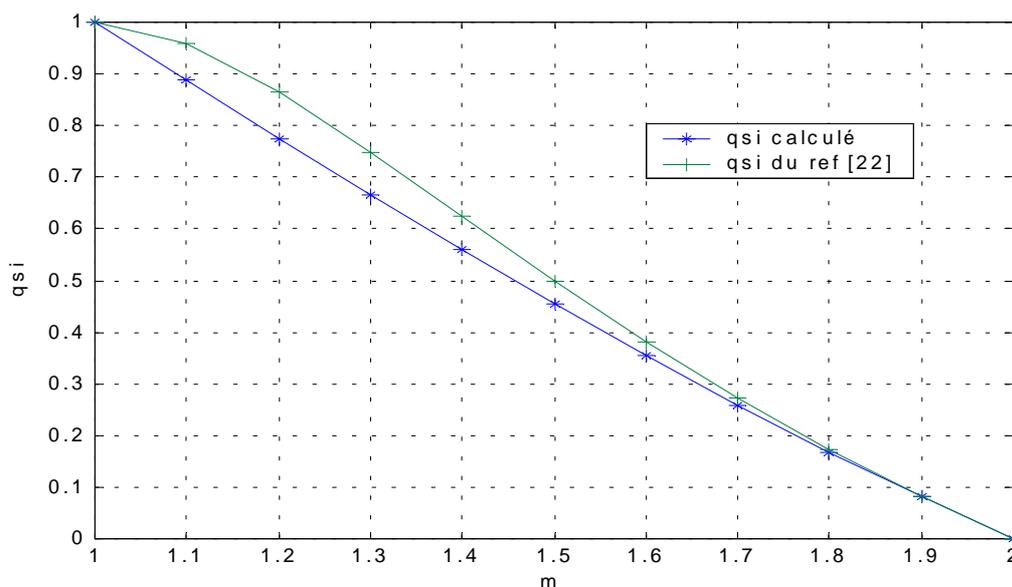


Figure III.2. Facteur d’amortissement calculé et du ref [22].

III.1.1.3. Pulsation de résonance  $w_r$

$$H(jw) = \frac{1}{1 + \left(j \frac{w}{w_n}\right)^m} = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{w}{w_n}\right)^m \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right) + j \left(\frac{w}{w_n}\right)^m \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)} \quad (III.2)$$

pour calculer  $w_r$ , on calcule d’abord  $\frac{d|H(jw)|}{dw} = 0$ , on trouve :

$$w_r = w_n \left(-\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right)^{\frac{1}{m}} \quad (III.3)$$

la même formule de pulsation de résonance a été trouvée par [22] que la notre.

la figure (III.3) montre la pulsation de résonance calculée et simulée (du tableau (III.1)).

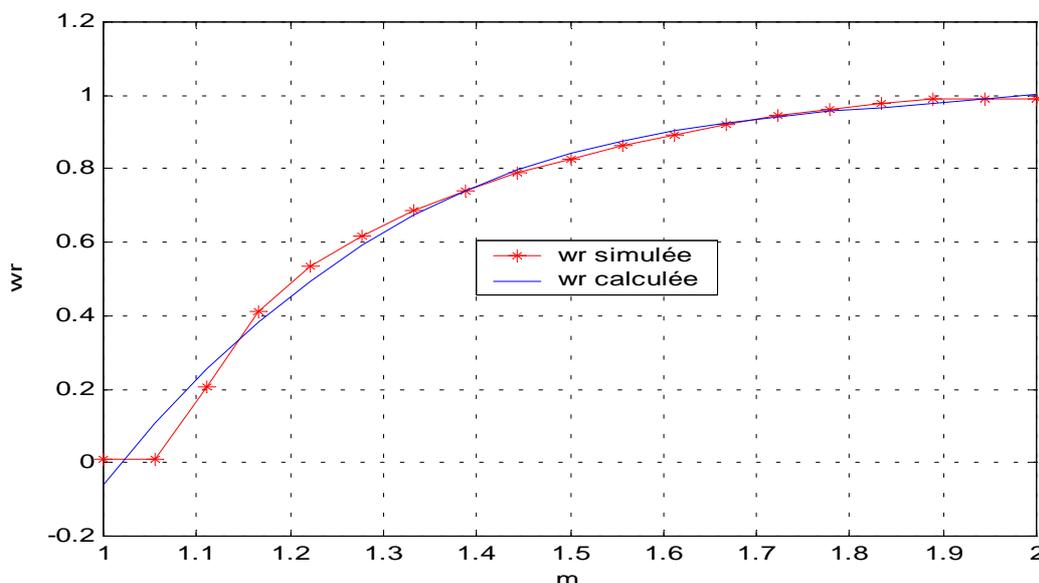


Figure.III.3 pulsation de résonance calculée et simulée.

**III.1.1.4. Facteur de résonance  $M_r$**

Le facteur de résonance  $M_r$  est la valeur maximale du gain de la réponse fréquentielle.

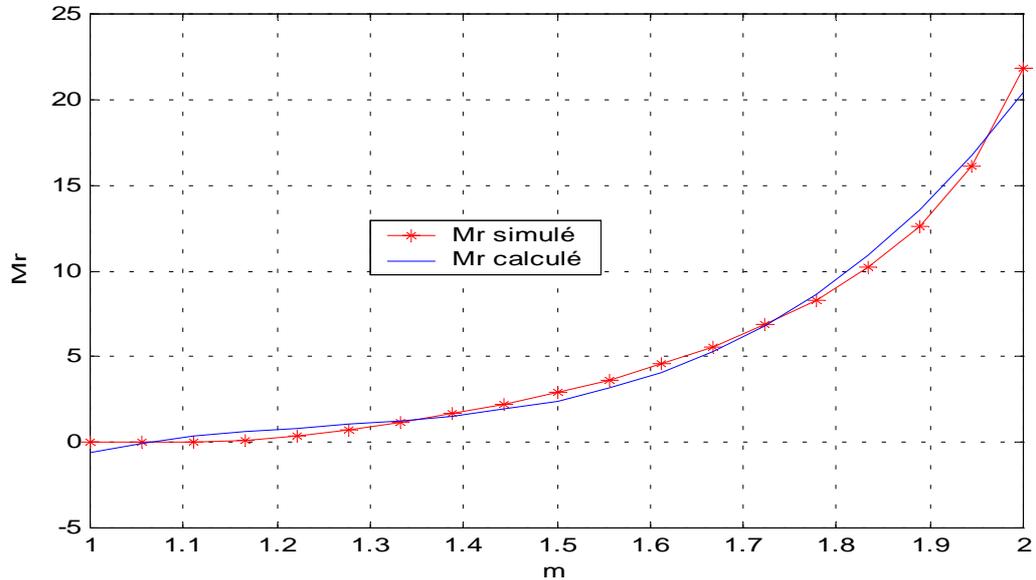
$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^m} \approx \frac{(1 + j\frac{\omega}{\omega_n})^{2-m}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}, \quad 1 < m < 2$$

Le facteur de résonance du système d'ordre fractionnaire multiple est donné par :

$$M_r = |H(j\omega_r)| = \frac{1}{\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)} \tag{III.4}$$

la même formule du facteur de résonance a été trouvée par [22] que la notre.

la figure (III.4) représente le facteur de résonance calculé et simulé .



**Figure.III.4** Facteur de résonance calculé et simulé.

**III.1.2. Spécifications temporelles**

On définit en général les spécifications temporelles à partir de la réponse à l'échelon unité. Le comportement de régime permanent exprimé par l'erreur du régime permanent, est la mesure de la précision du système quand on lui applique un signal d'entrée particulier.

Le comportement transitoire s'exprime à l'aide de la réponse indicielle (réponse à l'échelon unité). Les caractéristiques de performances données couramment sont :

Le dépassement ( $M_p$ ), Le temps de réponse ( $t_s$ ), Le temps de monté ( $t_r$ ), Le temps de dépassement ( $t_p$ ).

De la réponse indicielle suivante :

$$y(t) = 1 + \frac{1}{\omega_n} \left( \frac{B^2 - 2AB\xi\omega_n + A^2\omega_n^2}{1 - \xi^2} \right)^{1/2} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \phi_1) - \sum_{i=0}^N k_i p_i e^{-p_i t}$$

où la phase  $\varphi_1$  est donnée par:

$$\varphi_1 = \arctg \frac{A - wn\sqrt{1-\xi^2}}{B - A\xi wn} - \arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

Il est difficile de trouver les caractéristiques du système par un calcul simple. Donc on utilise une méthode heuristique pour trouver ces caractéristiques sous forme de polynômes, on cherche donc une fonction d'approximation encore appelée modèle qui va répondre à cette question. Ce modèle dépend des paramètres : par exemple, s'il correspond à une fonction polynôme d'un degré donné, les paramètres sont les coefficients du polynôme. Le problème que l'on se pose consiste donc à chercher le meilleur jeu de paramètre de façon à ce que la courbe représentative du modèle passe "au plus prêt" des points de données. On cherche l'équation (polynôme) la plus proche de l'ensemble des points au sens des moindres carrés  $(m_i, x_i)$ ,  $i=0 \dots n$ . en utilisant les valeurs des caractéristiques enlevées de la courbe de la réponse indicielle qui sont déterminées dans le tableau (III.1).

Barbosa [22], a fait une étude sur ce type de systèmes d'ordre fractionnaires pour  $1 < m < 2$ , et il a trouvé des résultats qu'on va les comparés avec les résultats de notre methode. Pour trouver les caractéristiques du système il a utilisé la fonction de Mittag-Leffler pour tracer les réponses temporelles du système, et de ces réponses il a pu extraire les performances du système avec une méthode heuristique (Mp, tr, tp, ts). On commence par l'obtention de la réponse indicielle de la fonction de transfert fractionnaire  $T(s)$ . la sortie  $y(t) = L^{-1}[T(s)R(s)]$ , quand l'entrée est un échelon unité  $R(s) = \frac{1}{s}$ , a la solution :

$$y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{w_n^m}{s(s^m + w_n^m)} \right\} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[-(w_n t)^m]^n}{\Gamma(1 + mn)} = 1 - E_m[-(w_n t)^m] \quad (III.5)$$

où  $E_m(x)$  est la fonction de Mittag-Leffler, donnée par :

$$E_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(1 + mn)}, \quad m > 0 \quad (III.6)$$

Cette fonction est la généralisation de la fonction exponentielle pour  $m=1$  on a :  $E_1(x) = e^x$ .

Considérons le comportement asymptotique de  $E_m[-(w_n t)^m]$ , quand  $t \rightarrow +\infty$  et  $t \rightarrow 0^+$ , comme :

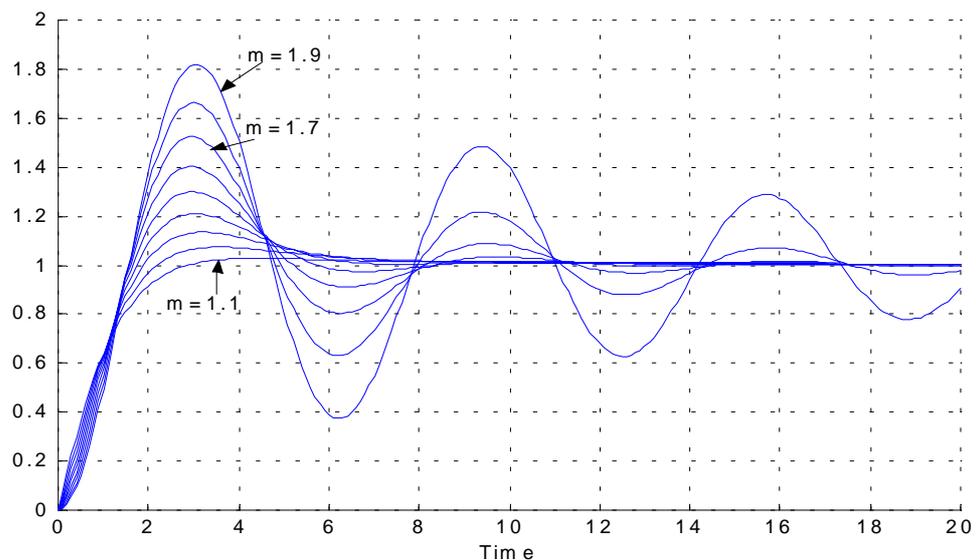
$$E_m \left[ - (w_n t)^m \right] \approx \begin{cases} 1 - \frac{(w_n t)^m}{\Gamma(m+1)} & , \quad w_n t \rightarrow 0^+ \\ \frac{(w_n t)^{-m}}{\Gamma(1-m)} & , \quad w_n t \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

on arrive aux valeurs initiales et finales de réponse indicielle,  $y(t \rightarrow +\infty)$  et  $y(t \rightarrow 0^+)$ , respectivement :

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 1, \quad y(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = 0 \quad (\text{III.8})$$

Les spécifications pour la conception d'un système de commande impliquent souvent certaines exigences associées avec la réponse temporelle du système. On dérive quelques formules usuelles pour caractériser la réponse temporelle de la fonction de transfert d'ordre fractionnaire. Comme dans le cas des systèmes du second ordre sous-amortis on développe des expressions pour le dépassement  $M_p$ , le temps de dépassement  $t_p$ , le temps de montée  $t_r$ , et le temps de réponse  $t_s$ .

La figure (III.5) montre la réponse indicielle du système d'ordre fractionnaire ( $1 < m < 2$ ) en utilisant la fonction de Mittag-Leffler.



**Figure.III.5** La réponse indicielle en utilisant la fonction de Mittag-Leffler pour plusieurs valeurs de  $m$ ,  $1 < m < 2$ .

### III.1.2.1. Dépassement (% Mpt=percent max overshoot)

Le dépassement est la différence maximale existante entre les solutions transitoires et permanentes pour une entrée canonique : en échelon unité. C'est une mesure de la stabilité relative, il est exprimé souvent en pourcentage de la valeur finale de la grandeur de sortie, et à ce dernier correspond un temps de dépassement.

De la courbe de la réponse indicielle on a le Mp interpolé suivant :

$$Mp = (m - 1.005)(m - 0.755) \quad (\text{III.9})$$

ref [22] a trouvé une formule pour le dépassement :

$$Mp = \frac{y_{\max} - y(\infty)}{y(\infty)}, \quad Mp \approx 0.8(m-1)(m-0.75), \quad 1 < m < 2 \quad (\text{III.10})$$

la figure (III.6) montre le dépassement Mp des équations (III.9),(III.10) et du tableau (III.1) :

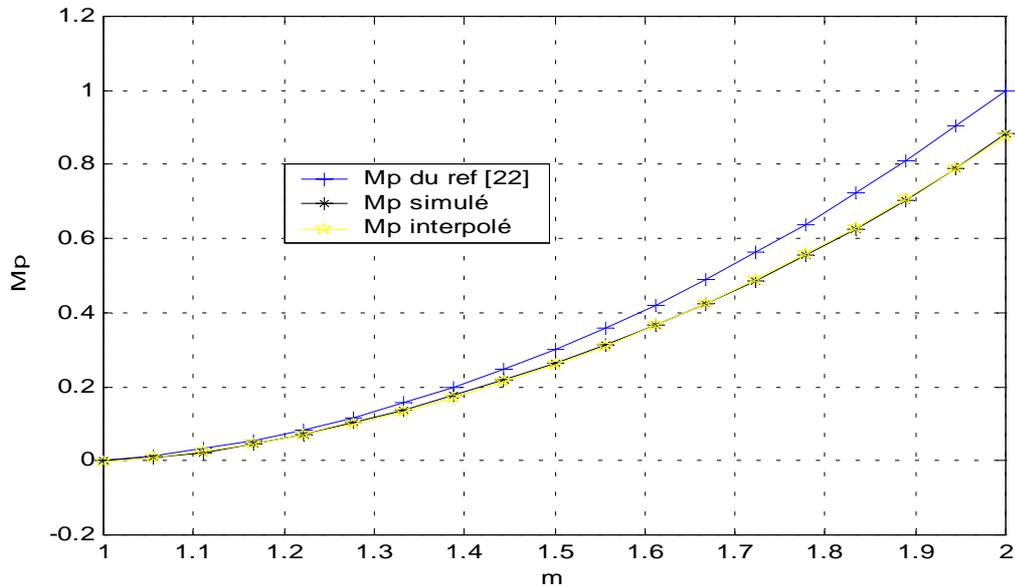


Figure.III.6 Le dépassement interpolé, simulé et du ref [22].

### III.1.2.2. Le temps de dépassement(tp=peak time)

C'est le temps qui correspond au premier maximum. Le temps de dépassement interpolé est :

$$tp = \frac{1.118(m - 0.252)^2}{(m - 0.9)w_n} \quad (\text{III.11})$$

La formule de [22] pour le temps de dépassement (pour une erreur inférieur à 1%) est la suivante:

$$tp = \frac{1.106(m - 0.255)^2}{(m - 0.921)w_n}, \quad 1 < m < 2 \quad (\text{III.12})$$

la figure (III.7) montre le temps de dépassement de l'équation (III.11), tp simulé et du ref [22] :

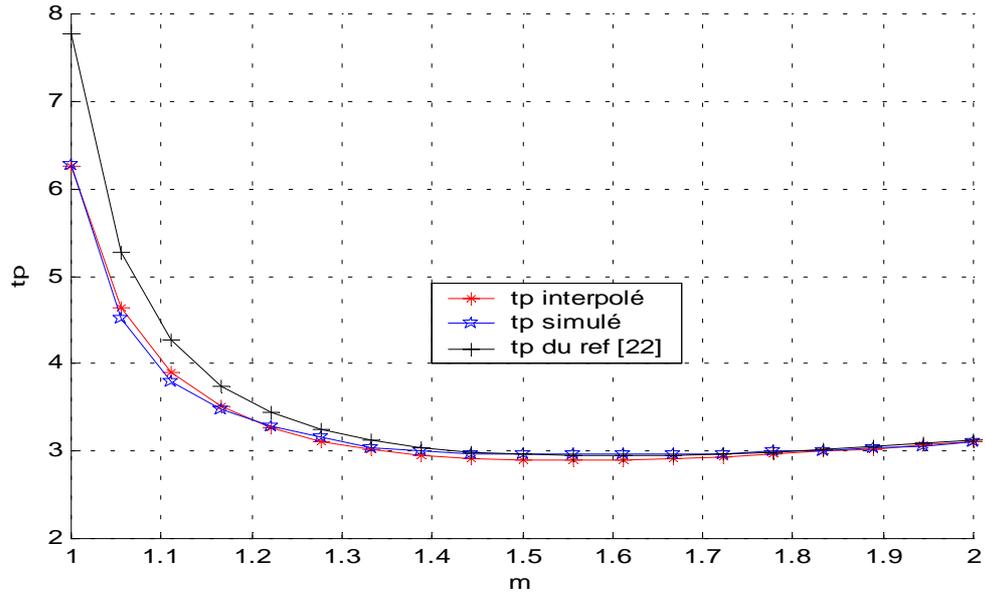


Figure.III.7 Le temps de dépassement interpolé, simulé et du ref [22].

### III.1.2.3. Temps de réponse (ts=settling time)

Le régime transitoire c-à-d l'évolution de la sortie entre deux régimes permanents est une caractéristique très importante lors de la synthèse de toutes systèmes, le système est d'autant plus rapide que son régime transitoire est plus bref, on chiffre la durée de celui-ci par le temps de réponse  $t_s$  du système.

Le temps de réponse est généralement défini par le temps au bout du quel la réponse du système est à  $x\%$  (**2%**) près de sa valeur finale pour une excitation en échelon ( **$0.98 < \text{réponse} < 1.02$  pour  $x=2$** ).

Le temps de réponse interpolé est :

$$t_s(2\%) = \frac{4\sqrt{2^{m-1}}}{w_n \sqrt{1 + \cos(\frac{m\pi}{2})}} = \frac{4}{\xi w_n}, \quad 1.138 < m < 2 \quad (\text{III.13})$$

la formule de ref [22] du temps de réponse à 2% de la valeur finale pour une excitation en échelon est :

$$t_s(2\%) \approx \frac{4}{\cos(\pi - \frac{\pi}{m})w_n} = \frac{4}{\xi_B w_n}, \quad 1.39 < m < 2 \quad (\text{III.14})$$

la figure (III.8) montre le temps de réponse  $t_s$  des équations (III.13),(III.14) et simulé :

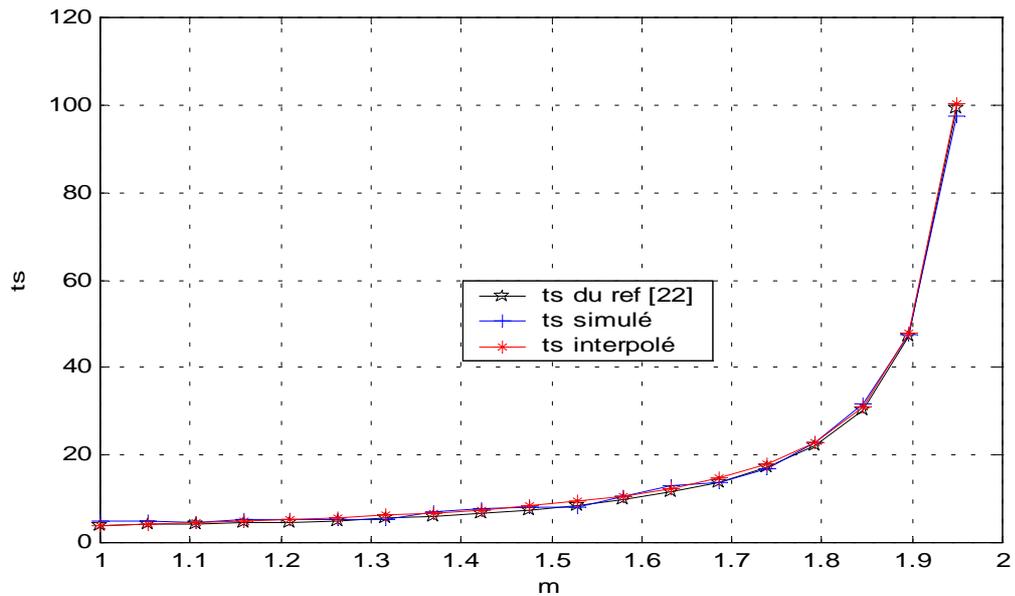


Figure.III.8 Temps de réponse interpolé, simulé et du ref [22].

**III.1.2.4. Le temps de montée(tr =rise time)**

Il est défini comme étant le temps mis pour passer de 10% à 90% de la valeur finale pour une excitation en échelon ( $tr = t_{90\%} - t_{10\%}$ ). Le temps de montée interpolé est :

$$tr \approx \frac{0.135(m + 1.158)^2}{(m - 0.72)w_n}, \quad 1 < m < 2 \tag{III.15}$$

La formule de [22] pour le temps de montée (pour une erreur inférieure à 1%) est la suivante:

$$tr \approx \frac{0.131(m + 1.157)^2}{(m - 0.724)w_n}, \quad 1 < m < 2 \tag{III.16}$$

la figure (III.9) montre le temps de montée de l'équation (III.15),  $tr$  simulé et  $tr$  du ref [22] :

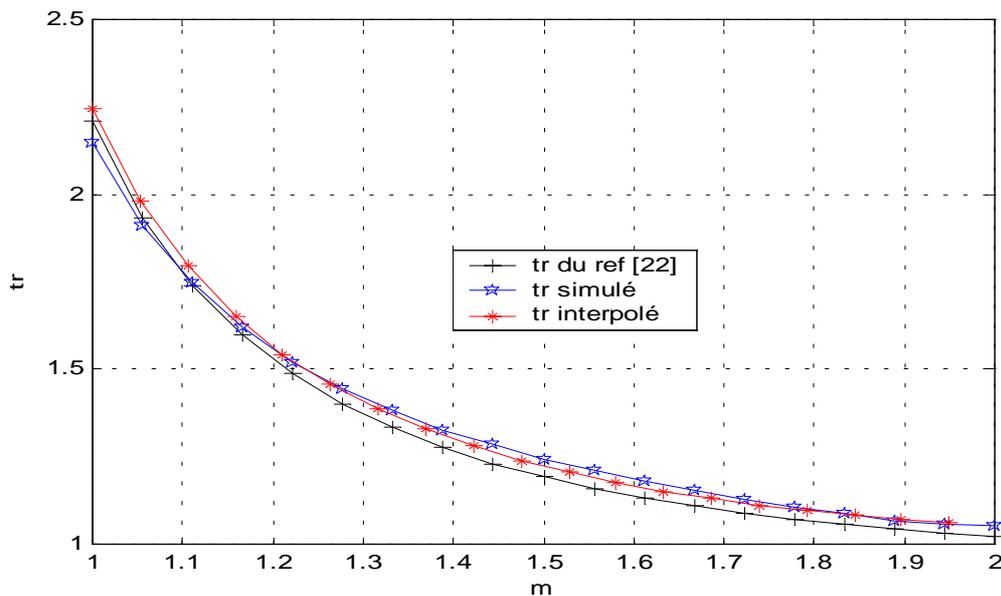
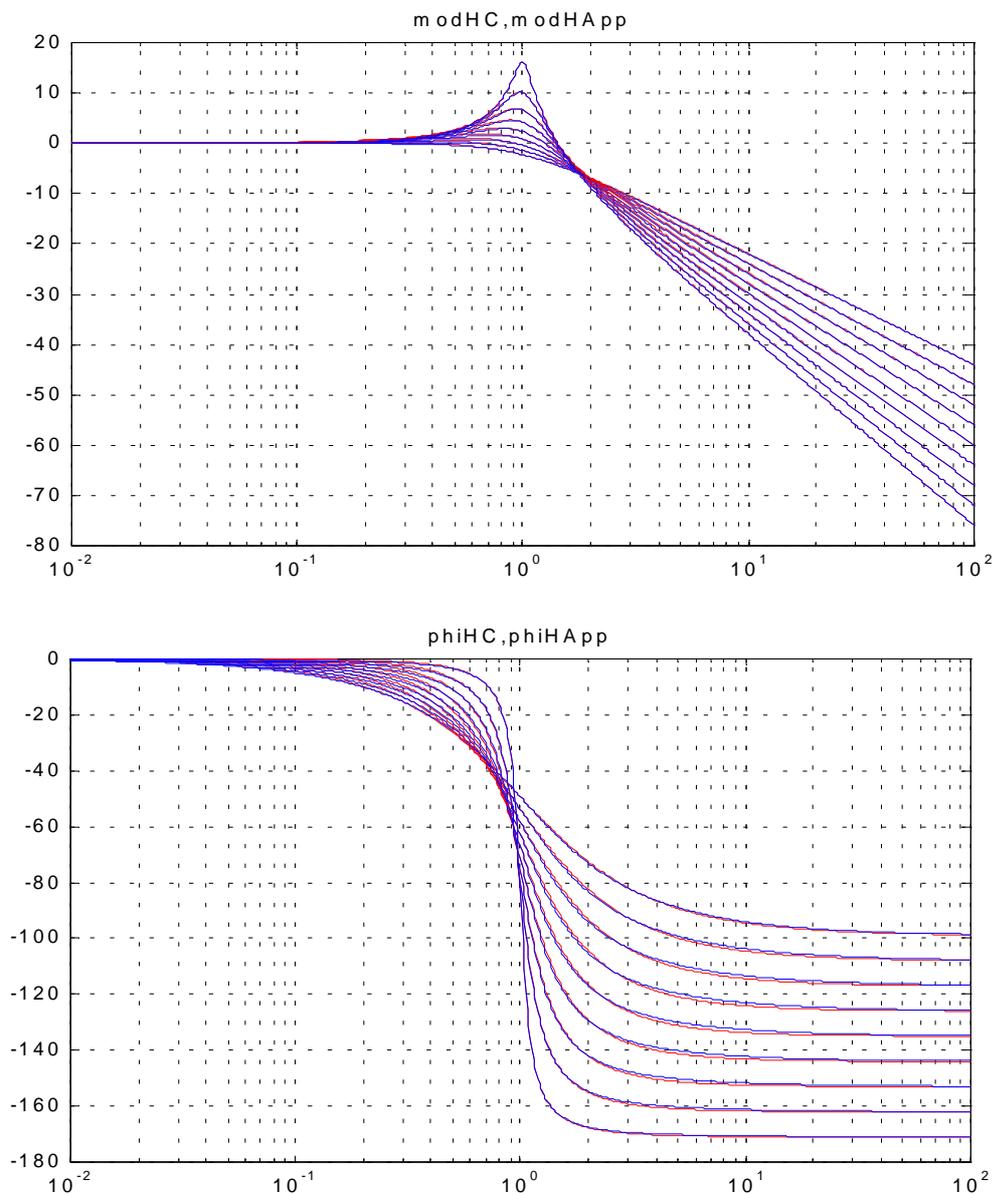
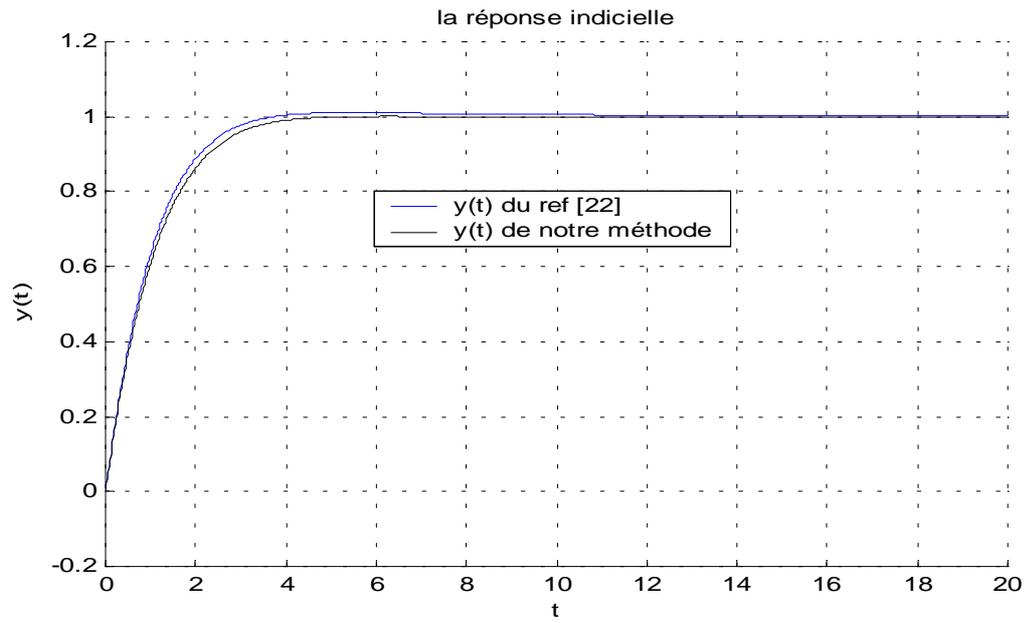


Figure.III.9 Le temps de montée interpolé, simulé et du ref [22].

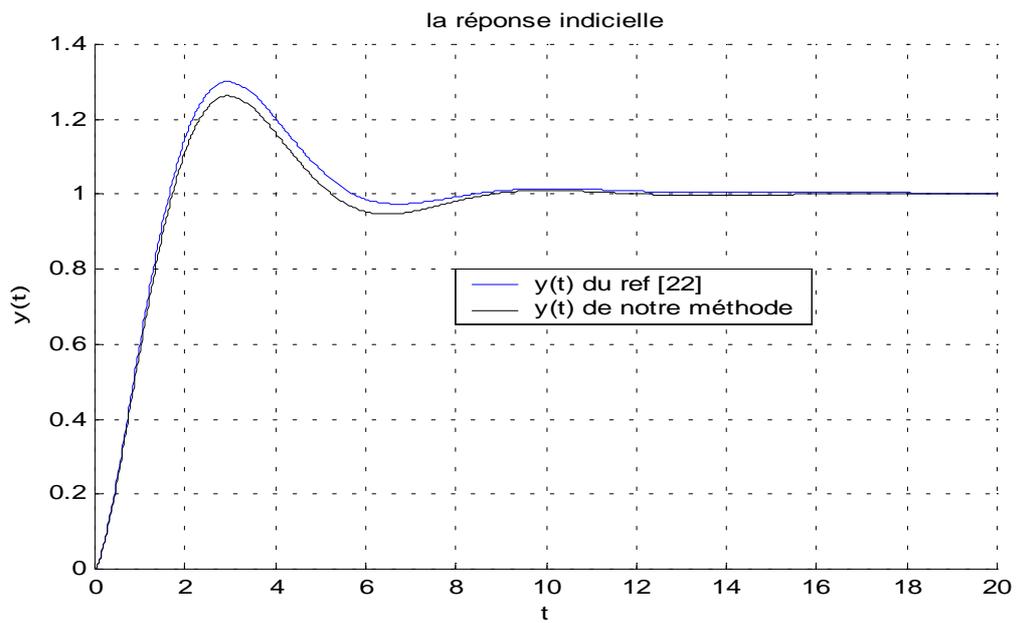
Des deux méthodes on remarque que les caractéristiques temporelles et fréquentielles, ont des valeurs près surtout lorsque on s'approche de  $m=2$ . Les figures suivantes montre l'évolution des deux fonctions, soit de notre méthode ou de la fonction de Mittag-Leffler, les réponses temporelles et fréquentielles sont presque les mêmes surtout lorsque  $m$  tend vers 2. On remarque aussi que le dépassement lorsque ( $1 < m < 1.4$ ) est presque le même dans les deux méthodes, et lorsque ( $1.4 < m < 2$ ) le dépassement est inférieur dans notre méthode que dans [22] (le système de notre approximation est plus amorti).



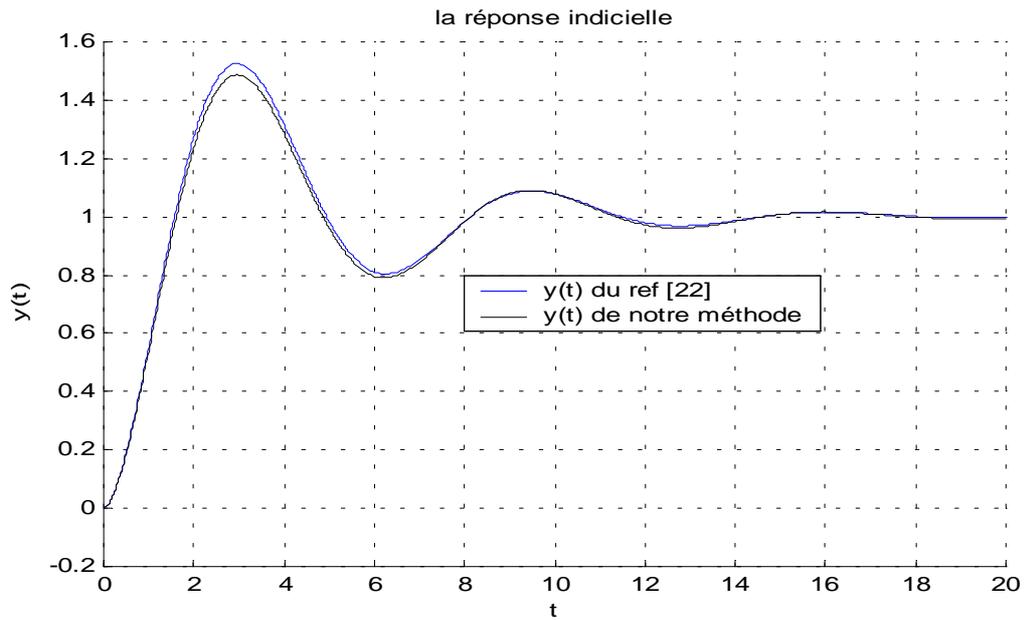
**Figure.III.10** La réponse fréquentielle des deux systèmes (notre approximation et ref [22])  
Pour plusieurs valeur de  $m$  ;  $1 < m < 2$ .



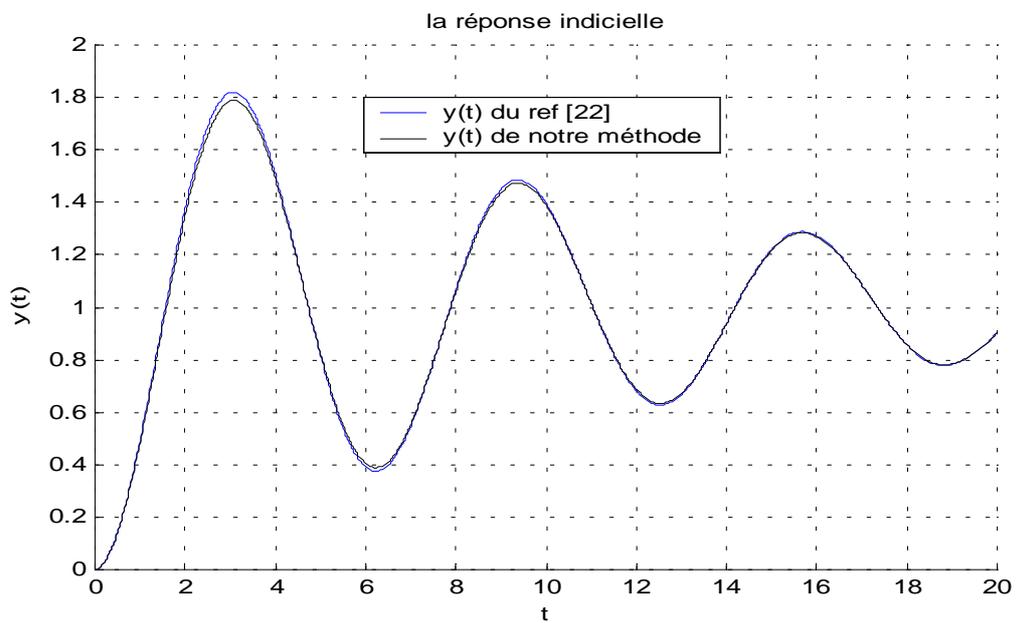
**Figure.III.11** La réponse indicielle des deux systèmes (notre approximation et ref [22])  
 Pour  $m=1.05$ .



**Figure.III.12** La réponse indicielle des deux systèmes (notre approximation et ref [22])  
 Pour  $m=1.5$ .



**Figure.III.13** La réponse indicielle des deux systèmes (notre approximation et ref [22])  
 Pour  $m=1.7$ .



**Figure.III.14** La réponse indicielle des deux systèmes (notre approximation et ref [22])  
 Pour  $m=1.9$ .

Dans ce chapitre on a vu quelques performances caractéristiques du système d'ordre fractionnaire multiple, on a tiré des réponses fréquentielles, temporelles et plusieurs caractéristiques (fréquentielles et temporelles). Les caractéristiques fréquentielles soit le facteur de qualité, le facteur de résonance et la pulsation de résonance sont facile à extraire de la réponse fréquentielle (l'équation (III.2)), ( à cause de la complexité des calculs pour extraire le facteur de résonance et la pulsation de résonance on a fait recours à l'équation (III.2) pour les extraire), en ce qui concerne les caractéristiques temporelles, il est vraiment difficile de les trouvés par les calculs, donc on cherche les formules de ces caractéristiques ( le dépassement, le temps de monté et le temps de réponse en fonction du facteur fractionnaire) par une méthode heuristique directement des graphes des réponses temporelles (tableau III.1). Par comparaison de ces paramètres par notre approximation et un autre travail utilisant la fonction de Mittag-Leffler , on a appris que les formes des réponses sont presque similaires surtout lorsque  $m$  tend vers 2.

## Conclusion Générale

Le but de ce travail a été la modélisation et l'analyse des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire en utilisant les concepts des systèmes d'ordre fractionnaire.

Un certain type de systèmes d'ordre fractionnaire sont représentés par une équation différentielle fondamentale linéaire d'ordre fractionnaire comme suit :

$$(\tau_0)^m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + y(t) = e(t) \quad , \quad \text{pour } 0 < m < 2$$

sa fonction de transfert est aussi donnée par :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{1}{[1 + (s\tau_0)^m]} \quad , \quad \text{pour } 0 < m < 2.$$

En approximant la fonction de transfert de l'équation différentielle linéaire fondamentale d'ordre fractionnaire par une fonction rationnelle dans une bande de fréquence d'intérêt pratique, on facilite son analyse et sa synthèse. Une méthode simple qui consiste à approximer ce type de systèmes par une fonction rationnelle est présentée. Ses réponses impulsionnelle et indicielle ont été tirées. Les performances caractéristiques fréquentielles et temporelles sont aussi obtenues. Ces approximations sont vraiment convenable pour l'analyse, la réalisation et l'implémentation des systèmes de commande d'ordre fractionnaire parce qu'il est possible de faire l'analyse et la conception directement dans le plan  $s$ .

Une comparaison avec une autre méthode basée sur une certaine fonction dite fonction de Mittag-Leffler a été faite. Des exemples illustratifs ont été présentés pour montrer l'exactitude et l'utilité de la méthode d'approximation. De la réponse indicielle du système d'ordre fractionnaire multiple, on a tiré des spécifications fréquentielles et temporelles importantes pour connaître le comportement de notre système. La difficulté de trouver les spécifications temporelles par calculs simples nous a poussée d'utiliser une méthode heuristique pour trouver ces spécifications. La mise en avant des avantages de cette approximation fut par l'intermédiaire d'une étude comparative avec l'approximation basée sur la fonction de Mittag-Leffler.

En observant les spécifications des deux méthodes, on a remarqué que les réponses fréquentielles et temporelles sont proches surtout lorsque le facteur  $m$  s'approche de 2.

## Références

- [1] T. Poinot, J.-C. Trigeassou, 'A method for modelling and simulation of fractional systems,' *Signal processing* N° 83, 2003
- [2] Hun H. Sun, A. Charef, 'The Time Domain Analysis of The Fractal System for Electrode Polarization phenomenon,' *Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*. Vol.12, No. 1, 1990
- [3] Shunji Manabe, 'Early development of fractional order control,' *Proceedings of DETC'03, ASME 2003 Design Engineering Technical Conferences and Computers and information in Engineering Conference, Chicago, Illinois, USA, September 2-6, 2003*
- [4] A. Charef, H.H.Sun, Y.Y.Tsao, B.Onaral. 'Fractal System as Represented by Singularity Function,' *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol.37, N° 9, September 1992
- [5] Zoubir Santouh, *Réalisation des filtres fractionnaires basés sur la méthode d'approximation de la fonction singulière, mémoire de Magister, Université Mentouri de Constantine, Algérie 2002.*
- [6] Rudolf Gorenflo and Francesco Mainardi, 'Fractional Calculus, Integral and Differential Equations of Fractional Order,' *CISM LECTURE NOTES, International Centre for Mechanical Sciences, Palazzo del Torso, Piazza Garibaldi, Udine, Italy, Décembre 2000.*
- [7] Igor Podlubny, 'Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Fractional Differentiation,' *Fractional calculus and applied analysis*, 5, N° 4, 2002
- [8] Piotr W. Ostalczyk, 'The time varying Fractional Order Difference Equations', *Proceedings of DETC'03, ASME 2003 Design Engineering Technical Conferences and Computers and information in Engineering Conference, Chicago, Illinois, USA, September 2-6, 2003*
- [9] Ivo Petras, Igor Podlubny, Paul O'Leary, Lubomir Dorcak and Blas M. Vinagre, 'Analogue Realization of Fractional Order Controllers', *Fakulta BERG, TU Kocise, 2002.*
- [10] K. B. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus*. Academic Press, New York, 1974.
- [11] Mark Axtell and M. E. Bise, 'Fractional Calculus Applications in Control Systems' *Proceedings of the IEEE Nat. Aerospace and Electronics Conf., N.Y, 1990*
- [12] Alain Oustaloup, *La dérivation non entière, Théorie synthèse et applications*, Edition Hermes, Paris, 1995
- [13] Tom T. Hartley, and Carl F. Lorenzo, *A Solution To The Fundamental Linear Fractional Order Differential Equation*. NASA/TP\_1998-208693.

- [14] Y.Y. Tsao, D. Wawrzynsky, B. Onaral, 'Modeling of Bioelectrode Interfaces and Scaling Systems', Bioengineering Conference, 1989, Proceeding of the 1989 Fifteenth Annual Northeast 27-28, March 1989
- [15] Nabil T. Shawagfeh, 'Analytical Approximate Solutions for Nonlinear Fractional Differential equations,' Applied Mathematics and Computation N° 131, 2002
- [16] F. Mainardi and R. Gorenflo 'On Mittag-Leffler-Type Functions in Fractional Evolution Processes,' Journal of Computational and Applied Mathematics 118, 2000
- [17] K. S. Cole and R. H. Cole, Dispersion and absorption in dielectrics, alternation current characterization, "J. Chem. Physics vol. 9, 1941.
- [18] Sun H. H., Charef, A., Tsao, Y.Y., and Onaral, B., 'Analysis of Polarization Dynamics by Singularity Decomposition Method,' Annals of Biomedical Engineering, Vol. 20, 1992
- [19] J. R. MacDonald, Impedance spectroscopy, NY, John Wiley, 1987
- [20] B. B. Vinagre, C. A. Monje, A. J. Calderon, Y. Q. Chen and V. Feliu, 'The fractional integrator as a reference function,' Proceedings of the 1<sup>st</sup> IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications FDA'04, Bordeaux, France, July 2004
- [21] Richard C. Dorf and Robert H .Bishop, Modern Control Systems, Seventh Edition, Addison-Wesley Publishing Company, USA,1995
- [22] Ramiro s. Barbosa, J. A. Tenreiro Machado, and Isabel M. Ferreira, 'Tuning of PID Controllers Based on Bod's Ideal Transfer function,' Nonlinear Dynamics 38, 2004

## Résumé

Le but principal de ce mémoire est la modélisation et l'analyse des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire en utilisant les concepts des systèmes d'ordre fractionnaire. Ce travail fournit une fonction d'approximation rationnelle d'une fonction de transfert irrationnelle des équations différentielles linéaires fondamentales d'ordre fractionnaire pour  $0 < m < 2$ . Des méthodes simples, utiles dans la théorie de commande, qui consistent à approximer, pour une bande de fréquence donnée de la fonction de transfert de ce système d'ordre fractionnaire par une fonction rationnelle. Des réponses impulsionnelle et indicielle sont dérivées et un simple circuit analogique qui peut servir comme un système d'ordre fractionnaire analogique est obtenu. Des caractéristiques fréquentielles et temporelles sont obtenues de l'analyse des réponses fréquentielles et temporelles, et ils sont comparées à des caractéristiques d'autres travaux appliquant une méthode basée sur une certaine fonction dite fonction de Mittag-Leffler. Des exemples illustratifs sont présentés pour montrer l'exactitude et l'utilité de ces méthodes d'approximation.

## **Abstract**

The principal goal of this work is modeling and analysis linear fractional order differential equation using fractional order systems concepts. This work provide a rational approximation from irrational transfer function of the fundamental linear fractional differential equation for  $0 < m < 2$ . using simple methods of systems and control theories, which consist to approximate for a given frequency band of the transfer function of this fractional system with a rational function. Impulse and step responses of this type of systems are derived and simple analog circuits realizations which can serve as analog fractional order system are also obtained. Frequency and temporal characteristics can be obtained from the analysis frequency and temporal responses, and compared with other characteristics of other work using some function called Mittag-Leffler function. Illustrative examples have been presented to show the exactitude and utility of the approximation methods.

.  $0 < m < 2$

. Mittag-Leffler