

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE DE CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE**

N° d'Ordre :.....

Série :.....

MÉMOIRE DE MAGISTER

Présenté par :

M^{elle} BEKKOUCHE HANENE

Option : Contrôle

THEME

**LA COMMANDE DES SYSTEMES D'ORDRE
FRACTIONNAIRE BASÉ SUR LA FONCTION
DE TRANSFERT IDÉALE DE BODE**

Soutenu le :

Examiné par le jury :

| | | |
|---------------------------|------------|------------------------------------|
| Président : Dr. A. Bennia | Professeur | Université de Mentouri Constantine |
| Rapporteur: Dr. A. Charef | Professeur | Université de Mentouri Constantine |
| Examineur: Dr. S. Filali | Professeur | Université de Mentouri Constantine |
| Examineur: Dr. S. Ladaci | MACC | Université de Skikda |

Année 2008

Remerciements

Je remercie Allah tout puissant qui m'a donné la force et la volonté pour pouvoir finir ce mémoire de magister

Je tiens à remercier vivement et très respectueusement mon directeur de mémoire, le **Professeur Abdelfatah Charef** pour le choix du sujet, d'avoir dirigé ce travail avec professionnalisme, pour tous ces conseils précieux et sa critique constructive qui ont été très positifs, pour le libre accès à sa documentations personnelle, pour l'intérêt qu'il porte au développement de la recherche.

J'exprime ma gratitude envers **Mr. Abdelhak Bennia** Professeur à l'université de Mentouri de Constantine de m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury

Je tiens à remercier **Mr. Salim Filali** Professeur à l'université Mentouri de Constantine, d'avoir accepter de juger ce travail en tant qu'examineur.

Je remercie le **Dr. Ladaci Samir**, Maître Assistant Chargé de Cours de l'Université de Skikda d'avoir accepter faire patrie du jury

Enfin je ne pourrais terminer ces remerciement sans une pensée à l'ensemble des mes enseignants qui sont à l'origine de tout mon savoir et en particulier mes enseignants à l'université de Constantine

Que toutes les personnes (dont le nombre est très élevé pour les citer ici) qui ont contribué de près ou de loin, directement ou indirectement à ce travail, trouvent ici le témoignage de ma profonde reconnaissance. Sans oublier tout le personnel du département d'Electronique, pour le cadre agréable qu'ils nous ont offert pendant notre cycle de formation.

.

DEDICACES

Je dédie ce mémoire :

A ma mère et mon père qui n'ont pas cessé de m'encourager tout au long de mes études pour que j'arrive à ce jour là. Ils sont les plus chers à mon cœur, avec toute ma gratitude,

A mes chers sœurs et frères

A mon mari Adel

A toute ma famille qui m'a aidé dans mes études

A tous mes collègues et amis

BEKKOUCHE HANENE

Sommaire

Liste des figure

| | |
|---|----|
| Introduction Générale | 1 |
| Chapitre I Opérateurs d'ordre fractionnaire | 3 |
| I.1 Introduction au calcul fractionnaire | 3 |
| I.2 Opérateurs d'ordre fractionnaire | 3 |
| I.2.1 Définitions fondamentales | 3 |
| I.2.1.1 Définition de Riemann-Liouville | 4 |
| I.2.1.2 Définition de Gründwald-Leitnikov | 4 |
| I.2.2 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire | 5 |
| I.2.3 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire | 5 |
| I.2.3.1 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire | 5 |
| I.2.3.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire | 6 |
| I.3 Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire | 6 |
| I.3.1 Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire | 6 |
| I.3.2 Approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre Fractionnaire | 8 |
| I.4 La fonction de transfert idéale de Bode | 10 |
| Chapitre II La méthode de conception du correcteur | 12 |
| II.1 Introduction | 12 |
| II.2 Formulation du problème | 13 |
| II.3 Présentation de la méthode de conception | 14 |
| II.3 Exemples illustratifs | 17 |
| II.3.1 Exemple1 | 17 |
| II.3.2 Exemple2 | 20 |

| | | |
|---------------------|---|----|
| Chapitre III | Commande d'un moteur à courant continu | 23 |
| III.1 | Introduction | 23 |
| III.2 | Moteur à courant continu | 23 |
| III.2.1 | Etablissement des équations différentielles | 23 |
| III.2.2 | Calcul de la fonction de transfert du moteur | 24 |
| III.3 | Calcul du correcteur | 26 |
| III.4 | Réponses du système asservi | 28 |
| III.5 | Analyse de la robustesse des performances | 30 |
| III.6 | Discussions et commentaires | 37 |
| | Conclusion Générale | 39 |
| | Références | 41 |

Listes des figures

| | | |
|----------------------|--|----|
| Figure I.1 | Diagramme de Bode d'amplitude et de phase de $L(s)$ pour $1 < \gamma < 2$ | 11 |
| Figure I.2 | Système d'ordre fractionnaire avec la fonction de transfert idéal de Bode $L(s)$ | 11 |
| Figure II.1 | Système classique a retour unitaire | 13 |
| Figure II.2 | Amplitude de la fonction de transfert du processus $G_p(s)$ et de la fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$ | 18 |
| Figure II.3 | Phase de la fonction de transfert du processus $G_p(s)$ et de la fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$ | 19 |
| Figure II.4 | La réponse indicielle du système en boucle fermée | 19 |
| Figure II.5 | Amplitude de la fonction de transfert du processus $G_p(s)$ et de la fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$ | 21 |
| Figure II.6 | Phase de la fonction de transfert du processus $G_p(s)$ et de la fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$ | 22 |
| Figure II.7 | La réponse indicielle du système en boucle fermée | 22 |
| Figure III.1 | moteur à courant continu | 23 |
| Figure III.2 | Circuit d'armature du moteur | 23 |
| Figure III.3 | Charge inerte | 24 |
| Figure III.4 | Schéma fonctionnel du moteur à courant continu | 25 |
| Figure III.5 | Tracés de Bode de la fonction de transfert en B.O $G(s)$ et du moteur $G_p(s)$ | 28 |
| Figure III.6 | La réponse indicielle de la fonction de transfert du moteur ($G_p(s)/250$) et la fonction de transfert en boucle fermée $G(s)$ | 29 |
| Figure III.7 | La réponse indicielle de la fonction de transfert en boucle fermée $G(s)$ pour K_0 fixe et $\tau = [\tau, 0.9\tau, 1.1\tau]$ | 29 |
| Figure III.8 | La réponse indicielle de la fonction de transfert en boucle fermée $G(s)$ pour τ fixe et $K_0 = [K_0, 0.9K_0, 1.1K_0]$ | 30 |
| Figure III.9 | Variation de la MP en fonction du gain K_0 pour $\tau = 1/66.9$ | 31 |
| Figure III.10 | Variation du Dépassement en fonction du gain K_0 pour $\tau = 1/66.9$ | 31 |
| Figure III.11 | Variation de la MP en fonction du gain K_0 pour $\tau = 0.9(1/66.9)$ | 32 |

| | | |
|----------------------|--|----|
| Figure III.12 | Variation du Dépassement en fonction du gain K_0 pour $\tau = 0.9(1/66.9)$ | 32 |
| Figure III.13 | Variation de la MP en fonction du gain K_0 pour $\tau = 1.1(1/66.9)$ | 33 |
| Figure III.14 | Variation du Dépassement en fonction du gain K_0 pour $\tau = 1.1(1/66.9)$ | 33 |
| Figure III.15 | Variation de la MP en fonction du temps de relaxation τ pour $K_0 = 235$ | 34 |
| Figure III.16 | Variation du Dépassement en fonction du temps de relaxation τ pour $K_0 = 235$ | 35 |
| Figure III.17 | Variation de la MP en fonction du temps de relaxation τ pour $K_0 = 0.9(235)$ | 35 |
| Figure III.18 | Variation du Dépassement en fonction du temps de relaxation τ pour $K_0 = 0.9(235)$ | 36 |
| Figure III.19 | Variation de la MP en fonction du temps de relaxation τ pour $K_0 = 1.1(235)$ | 36 |
| Figure III.20 | Variation du Dépassement en fonction du temps de relaxation τ pour $K_0 = 1.1(235)$ | 37 |

Introduction Générale

Introduction Générale

Dans les dernières décades nous avons observé un nombre croissant de travaux associés avec l'application de la théorie du calcul d'ordre fractionnaire (FC) dans beaucoup de domaines scientifiques et l'ingénierie [1-4]. Ce fait est dû à une meilleure compréhension des potentialités du FC dans beaucoup de phénomènes physiques tels que la viscoélasticité, les lignes de transmission, l'électromagnétisme de propagation d'onde, la polarisation des diélectriques et le transfert thermique. Ce sont des exemples qui montrent une dynamique d'ordre fractionnaire, où l'application de l'outil du FC est adéquat et dans certains cas essentielle pour une caractérisation complète des phénomènes impliqués. Dans le domaine de la commande les applications du calcul fractionnaire ont été rares, c'est seulement récemment que se sont apparues quelques applications [5-7].

Tustin et al ont proposé une fonction de transfert d'ordre fractionnaire en boucle ouverte afin de garder une marge de phase appropriée autour et au-dessous de la fréquence du gain unité [8]. Il a suggéré que le correcteur doit être conçu tel que la fonction de transfert globale en boucle ouverte soit une intégrale d'ordre fractionnaire dite fonction de transfert idéale de Bode [8]. Ce n'est qu'au début des années 1990 que le régulateur CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) était proposé par Oustaloup [7]. En profitant des propriétés avantageuses des systèmes d'ordre fractionnaire, ce régulateur permettait d'assurer la robustesse de la commande dans une bande de fréquences donnée, en imposant un gabarit fractionnaire au système de commande en boucle fermée. Ce correcteur garantira que la fonction de transfert en boucle ouverte d'un asservissement classique à retour unitaire sera la fonction idéale de Bode [7]. La réussite de cette approche fut énorme, plusieurs variantes de cette commande ont vu le jour (1^{ère}, 2^{ème} et 3^{ème} générations) et des applications aussi bien en laboratoire qu'en industrie ont été développées. La commande d'ordre fractionnaire venait de naître, et elle captiva l'intérêt de beaucoup de chercheurs. Podlubny en 1999 proposa son régulateur $PI^\lambda D^\mu$ comprenant une intégration fractionnaire d'ordre λ et une dérivation fractionnaire d'ordre μ , élargissant ainsi le champ d'application du calcul fractionnaire à la théorie de la commande [6].

Sachant que le comportement dynamique en boucle fermée d'un système à retour est exclusivement lié à son comportement en boucle ouverte autour de la fréquence du gain unité ω_u ; donc, la motivation pour le correcteur proposé dans ce contexte vient de l'idée d'utiliser une phase plate autour de la fréquence ω_u de sorte que le système en boucle fermée soit

robuste aux variations du gain et que sa réponse indicielle exhibe un dépassement constant dit propriété d'iso amortissement, c'est-à-dire que pour différents gain la réponse indicielle présente la même dépassement. Pour assurer un tel comportement en fréquence, dans un intervalle autour de la fréquence du gain unité ω_u , l'objectif de conception de la commande est alors de réaliser un correcteur qui garantit que la fonction de transfert en boucle ouverte par retour unitaire est la fonction de transfert idéale de Bode.

Les travaux réalisés et les résultats obtenus faisant l'objet de ce mémoire sont présentés comme suit:

Le premier chapitre est consacré à l'introduction des opérateurs et systèmes d'ordre fractionnaire et la méthode d'approximation de la fonction de transfert de ce type de système d'ordre fractionnaire par une fonction rationnelle dans une bande de fréquence donnée.

Le deuxième chapitre présente la méthode de conception du correcteur avec quelques exemples expliquant l'approche de conception du correcteur.

Dans le troisième chapitre est consacré à étudier un système réel avec les réponses fréquentielles et temporel et étudier la robustesse de ce système, pour terminer, on synthétise nos résultats dans une conclusion générale.

Chapitre I

Opérateurs d'ordre fractionnaire

Opérateur d'ordre fractionnaire

I.1. Introduction au calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire est le champ de l'analyse mathématique et l'application des intégrales et des dérivées d'ordre arbitraire. Le calcul fractionnaire peut être considéré comme un sujet ancien et encore nouveau. Ces dernières années l'intérêt considérable pour le calcul fractionnaire a été stimulé par ses applications dans les différents domaines de la physique et de l'ingénierie. La représentation mathématique des systèmes fractionnaires dans le domaine fréquentiel donne des fonctions irrationnelles qui, dans le domaine temporel, correspondent à des équations différentielles difficiles à exploiter. Vu l'absence de méthodes mathématiques, les systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire étaient jusque là étudiés de façon marginale seulement, que ce soit en théorie ou en application. Pour des raisons d'analyse, de synthèse, et de simulation de tels systèmes, l'utilisation des fonctions rationnelles pour l'approximation s'avère d'une grande importance. Alors pour analyser et concevoir les systèmes de commande d'ordre fractionnaire il faut les approximer par des fonctions rationnelles.

I.2 Opérateurs d'ordre fractionnaire

Le calcul d'ordre fractionnaire (intégration et différentiation d'ordre fractionnaire) est un vieux concept qui date de l'époque de Cauchy, Riemann Liouville et Leitnikov au 19ème siècle. Il a été utilisé en mécanique depuis les années 1930 et en électrochimie depuis les années 1960. Dans le domaine de la commande, des travaux intéressants ont été réalisés par I.A. Brin [9], et plus tard plusieurs mathématiciens et physiciens ont étudié les opérateurs différentiels et les systèmes d'ordre fractionnaire [10-12].

L'opérateur intégro-différentiel ${}_c D_t^m$ où m et t sont les limites de l'opération est défini ainsi:

$${}_c D_t^m = \begin{cases} \frac{d^m}{dt^m} & \Re(m) > 0, \\ 1 & \Re(m) = 0, \\ \int_c^t (d\tau)^{-m} & \Re(m) < 0, \end{cases} \quad \text{Où } m \text{ et l'ordre de l'opération, généralement } m \in \mathbb{R}.$$

I.2.1 Définitions fondamentales

Il existe plusieurs définitions mathématiques pour l'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaire. Ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour un large panel de fonctions [3].

I.2.1.1 Définition de Riemann-Liouville

L'intégrale dite de Riemann-Liouville est définie ainsi :

Définition 1 Soient C et \mathfrak{R} les anneaux des nombres complexes et réels respectivement, $\Re(\cdot)$ symbolise la partie réelle d'un nombre complexe.

Soient $\lambda \in C$ avec $\Re(\lambda) > 0$, $t_0 \in \mathfrak{R}$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, +\infty)$.

L'intégrale d'ordre λ de f de borne inférieure t_0 est définie par :

$${}_{RL}I_{t_0}^{\lambda} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_{t_0}^t (t - \xi)^{\lambda-1} f(\xi) d(\xi) \quad (I.1)$$

Avec $t \geq t_0$ et Γ la fonction gamma d'Euler.

Définition 2 Soient $\mu \in C$ avec $\Re(\mu) > 0$, n un entier positif, $t_0 \in \mathfrak{R}$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, +\infty)$. La dérivée d'ordre μ de f de borne inférieure t_0 est définie par:

$${}_{RL}D_{t_0}^{\mu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \mu)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-\mu-1} f(\tau) d\tau \quad (I.2)$$

Où le nombre entier n est tel que $(n-1) < \mu < n$.

Cette dérivée d'ordre fractionnaire peut aussi être définie à partir de l'équation (I.1) comme suit:

$${}_{RL}D_{t_0}^{\mu} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \{I_{t_0}^{(n-\mu)} f(t)\} \quad (I.3)$$

Remarque: pour simplifier l'écriture, on notera dans la suite I^{λ} pour I_0^{λ} et D^{μ} pour D_0^{μ} .

I.2.1.2 Définition de Gröndwald-Leitnikov

La dérivée d'ordre fractionnaire d'ordre $\mu > 0$ de G-L est donnée par:

$${}_{GL}D^{\mu} f(t) = \frac{d^{\mu}}{dt^{\mu}} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\mu} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\mu}{j} f(kh - jh) \quad (I.4)$$

Où h est la période d'échantillonnage et les coefficients

$$w_j^{(\mu)} = \binom{\mu}{j} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\mu-j+1)}$$

Avec $w_0^{(\mu)} = \binom{\mu}{0} = 1$, sont les coefficients du binôme suivant:

$$(1-z)^\mu = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\mu}{j} z^j = \sum_{j=0}^{\infty} w_j^{(\mu)} z^j \quad (I.5)$$

La définition de Gründwald-Leitnikov de l'intégrale d'ordre fractionnaire est formulée comme suit:

$${}_{GL} I^\lambda f(t) = {}_{GL} D^{-\lambda} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^\lambda \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{-\lambda}{j} f(kh - jh) \quad (I.6)$$

Où h est la période d'échantillonnage et les coefficients $w_j^{(-\lambda)}$ avec $w_0^{(-\lambda)} = \binom{-\lambda}{0} = 1$, sont les

coefficients du binôme suivant:

$$(1-z)^{-\lambda} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{-\lambda}{j} z^j = \sum_{j=0}^{\infty} w_j^{(-\lambda)} z^j \quad (I.7)$$

I.2.2 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire

Les principales propriétés des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire sont les suivantes:

1. si $f(z)$ est une fonction analytique de z , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire $D^\alpha f(z)$ est une fonction analytique de z et α .
2. pour $\alpha = n$, ou n est un entier, l'opération $D^\alpha f(z)$ donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre entier n .
3. pour $\alpha = 0$ l'opération $D^\alpha f(z)$ est l'opérateur identité: $D^0 f(z) = f(z)$.
4. la différentiation et l'intégration d'ordre fractionnaire sont des opérations linéaires:

$$D^\alpha af(z) + D^\alpha bg(z) = aD^\alpha f(z) + bD^\alpha g(z)$$

5. la loi additive (propriété du semi-groupe)

$$D^\alpha D^\beta f(z) = D^\beta D^\alpha f(z) = D^{\alpha+\beta} f(z)$$

Est valable sous certaines contraintes sur la fonction $f(z)$.

I.2.3 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire

I.2.3.1 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire

Nous commencerons par la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\lambda > 0$ définie par l'équation(I.2), qu'on peut écrire comme une convolution des fonctions $g(t) = t^{\lambda-1}$ et $f(t)$:

$$I^\lambda f(t) = D^{-\lambda} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\tau)^{\lambda-1} f(\tau) d\tau = t^{\lambda-1} * f(t) \quad (I.8)$$

La transformée de Laplace de la fonction $t^{\lambda-1}$ est :

$$G(s) = L\{t^{\lambda-1}; s\} = \Gamma(\lambda)s^{-\lambda} \quad (\text{I.9})$$

En utilisant la formule de la transformée de Laplace de la convolution:

$$L\{f(t) * d(t); s\} = F(s)G(s)$$

On obtient la transformée de Laplace de l'intégrale de Riemann-Liouville et celle de Gründwald- Leitnikov :

$$L\{I^\lambda f(t)\} = s^{-\lambda} F(s) \quad (\text{I.10})$$

I.2.3.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire

Nous citons dans ce qui suit la transformée de Laplace des différentes définitions de la dérivée.

- Dérivée de Riemann-Liouville

$$L\{D^\mu f(t)\} = s^\mu F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D^{\mu-k-1} f(t)]_{t=0} \quad (\text{I.11})$$

Avec $(n-1) < \mu < n$. Cette transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville est bien connue (voir [1, 13]). Mais son applicabilité en pratique est limitée à cause de l'absence d'interprétation physique des valeurs limites des dérivées d'ordre fractionnaire pour $t = 0$.

- Dérivée de Gründwald-Leitnikov

$$L\{D^\mu f(t)\} = s^\mu F(s) \quad (\text{I.12})$$

Remarque :

La résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaire avec la transformée de Laplace se fait de la même manière qu'avec les équations différentielles d'ordre entier.

I.3 Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire

I.3.1 Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire [14, 15]

La fonction de transfert de l'opérateur intégrale d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$H_I(s) = \frac{1}{s^m} \quad (\text{I.13})$$

Avec $s = j\omega$ la fréquence complexe et m est un nombre positif tel que $0 < m < 1$.

Dans une bande de fréquence donnée $[\omega_b, \omega_h]$, cet opérateur d'ordre fractionnaire peut être modelé dans le domaine fréquentiel par un pôle à puissance fractionnaire (PPF) comme suit :

$$H_I(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m} \quad (I.14)$$

Si on suppose que pour $\omega \in [\omega_b, \omega_h]$ on a $\omega \gg \omega_c$, on peut écrire :

$$H_I(s) = \frac{K_I}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^m} = \frac{K_I \omega_c^m}{s^m} = \frac{I}{s^m} \quad (I.15)$$

Avec $K_I = (I/\omega_c^m)$ et ω_c est la fréquence de coupure de PPF qui est obtenue à partir de la basse fréquence ω_b : $\omega_c = \omega_b \sqrt{10^{\left(\frac{\varepsilon}{10m}\right)} - 1}$ où ε est l'erreur maximale permise entre la pente de l'opérateur de puissance fractionnaire de l'équation (I.13) et le PPF de l'équation (I.14) dans la bande de fréquence donnée $[\omega_b, \omega_h]$.

Dans le but de représenter le pôle d'ordre fractionnaire de l'équation (I.14), et par conséquent l'intégrateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une rationnelle.

La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de 20dB/dec sur le tracé de Bode du PPF par un nombre de ligne sous forme de Zig-Zag, produite par une alternance de pente 20 dB/dec et 0 dB/dec correspondant à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négative du plan s tel que $p_0 < z_0 < p_1 < z_1 < \dots < z_{N-1} < p_N$.

D'où l'approximation suivante :

$$H_I(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (I.16)$$

Les p_i et les z_i sont les pôles et les zéros de l'approximation.

En utilisant une méthode graphique simple, les pôles et les zéros de l'approximation s'avèrent sous une forme d'une progression géométrique. Cette méthode graphique d'approximation a commencé par une erreur d'approximation γ en dB et une bande de fréquence d'approximation ω_{\max} .

Pour déterminer le nombre N , la bande de fréquence sur laquelle l'approximation est faite doit être spécifiée, soit " ω_{\max} " cette bande, telle que ω_{\max} est pris 100 fois égal à ω_h son expression est donnée par :

$$N = \text{partie entiere} \left[\frac{\log \left[\frac{\omega_{\max}}{P_0} \right]}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (\text{I.17})$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$p_i = (ab)^i p_0, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N$$

$$z_i = (ab)^i ap_0, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N-1$$

Où a et b sont appelés les rapports de position, leurs expressions en fonction de y et m sont donnée par :

$$a = 10^{\left(\frac{y}{10(1-m)}\right)}, \quad b = 10^{\left(\frac{y}{10m}\right)}$$

Et le premier pôle p_0 et le premier zéro z_0 sont donnés par :

$$p_0 = \omega_c \sqrt{b}, \quad z_0 = ap_0$$

Afin de connaître la contribution de chaque pôle au processus de relaxation. On doit décomposer la fonction rationnelle en somme de fractions élémentaires :

$$H_I(s) = K_I \cdot \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{(ab)^i ap_0} \right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i p_0} \right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i p_0} \right)} \quad (\text{I.18})$$

Où les coefficients h_i sont les résidus et qui sont déterminés par :

$$h_i = K_I \cdot \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^j p_0}{(ab)^j ap_0} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left(1 - \frac{(ab)^j p_0}{(ab)^j p_0} \right)} = K_I \cdot \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^{i-j}}{a} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left(1 - (ab)^{i-j} \right)}, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{I.19})$$

I.3.2 Approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre Fractionnaire

La fonction de transfert d'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$G_D(s) = s^m \quad (\text{I.20})$$

Avec $s = j\omega$: la fréquence complexe et m : est un nombre positive tel que $0 < m < 1$. Dans une bande de fréquence donnée $[\omega_b, \omega_h]$ cet opérateur d'ordre fractionnaire peut être modelé dans le domaine fréquentiel par un zéro à puissance fractionnaire (ZPF) comme suit :

$$G_D(s) = K_D \left(I + \frac{s}{\omega_c} \right)^m \quad (I.21)$$

Si on suppose que pour $\omega \in [\omega_b, \omega_h]$ on a $\omega \gg \omega_c$, on peut écrire :

$$G_D(s) = K_D \left(\frac{s}{\omega_c} \right)^m = \frac{K_D}{\omega_c^m} s^m = s^m \quad (I.22)$$

Avec $K_D = \omega_c^m$ et ω_c est la fréquence de coupure de ZPF qui est obtenue à partir de la basse fréquence ω_b : $\omega_c = \omega_b \sqrt{10 \left(\frac{\varepsilon}{10^m} \right) - 1}$ où ε est l'erreur maximale permise entre la pente de l'opérateur de puissance fractionnaire de l'équation (I.20) et le ZPF de l'équation (I.21) dans la bande de fréquence donnée $[\omega_b, \omega_h]$.

Dans le but de représenter le zéro d'ordre fractionnaire de l'équation (I.21), et par conséquent le dérivateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une rationnelle.

La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de 20mdB/dec sur le tracé de Bode du ZPF par un nombre de ligne sous forme de Zig-Zag, produite par une alternance de pente 20 dB/de cet 0 dB/dec correspondant à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négative du plan s tel que $z_0 < p_0 < z_1 < p_1 < \dots < z_N < p_N$. D'où l'approximation suivante :

$$G_D(s) = K_D \left(I + \frac{s}{\omega_c} \right)^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(I + \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left(I + \frac{s}{p_i} \right)} \quad (I.23)$$

En utilisant une méthode graphique simple, les pôles et les zéros de l'approximation s'avèrent sous une forme d'une progression géométrique. Cette méthode graphique d'approximation a commencé par une erreur d'approximation y en dB et une bande de fréquence d'approximation ω_{\max} .

Pour déterminer le nombre 'N', la bande de fréquence sur laquelle l'approximation est faite doit être spécifiée, soit " ω_{\max} " cette bande, tel que ω_{\max} est pris 100 fois égal à ω_h son expression est donnée par :

$$N = \text{partie entiere} \left[\frac{\log \left[\frac{\omega_{\max}}{p_0} \right]}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (\text{I.24})$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$z_i = (ab)^i z_0, \text{ pour } i = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$p_i = (ab)^i a z_0, \text{ pour } i = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$\text{Avec : } z_0 = \omega_c \sqrt{b} \text{ et } p_0 = a z_0$$

Par conséquent, la fonction rationnelle d'approximation dans une bande de fréquence donnée sera :

$$G_D(s) = s^m = K_D \left(I + \frac{s}{\omega_c} \right)^m \approx K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(I + \frac{s}{(ab)^i z_0} \right)}{\prod_{i=0}^N \left(I + \frac{s}{(ab)^i a z_0} \right)} \quad (\text{I.25})$$

Pour des raisons concernant la réalisation, on va développer $\frac{G(s)}{s}$ en fonctions élémentaires,

alors :

$$\frac{G_D(s)}{s} = \frac{1}{s} \cdot K_D \cdot \prod_{i=0}^N \frac{\left(I + \frac{s}{(ab)^i z_0} \right)}{\left(I + \frac{s}{(ab)^i a z_0} \right)} \quad (\text{I.26})$$

Calculant les résidus des pôles, on obtient :

$$G_D(s) = G_0 + \sum_{i=0}^N \frac{g_i s}{\left(I + \frac{s}{p_i} \right)} \quad (\text{I.27})$$

Avec $G_0 = K_D$ et

$$g_i = K_D \cdot \frac{\prod_{j=0}^N \left(I - (ab)^{(i-j)} a \right)}{\left(-(ab)^i a z_0 \right) \prod_{j=0, j \neq i}^N \left(I - (ab)^{(i-j)} \right)} \text{ Pour } i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{I.28})$$

I.4 La fonction de transfert idéale de Bode

Bode a proposé une forme idéale de la fonction de transfert de la boucle de commande dans son travail sur la conception de feedbacks amplificateurs [16], cette fonction de transfert à la forme :

$$L(s) = \left(\frac{w_c}{s} \right)^\gamma, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Où w_c est la fréquence de coupure désirée et le paramètre γ la pente de la caractéristique idéale du gain. En fait, la fonction de transfert $L(s)$ est un dérivateur d'ordre fractionnaire pour $\gamma < 0$ et un intégrateur d'ordre fractionnaire pour $\gamma > 0$.

Les diagrammes de Bode de $L(s)$ ($1 < \gamma < 2$) sont très simple (figure (I.1)). La courbe d'amplitude est une ligne droite de pente constante $-20\gamma \text{ dB / dec}$, et la courbe de phase est un trait horizontal à $-\gamma\pi/2$ rads. La courbe de Nyquist se réduit à une ligne droite passant par l'origine avec $\arg L(jw) = -\gamma\pi/2$ rad.

Maintenant considérons le système à retour unitaire représenté sur la figure (I.2) avec $L(s)$ est la fonction de transfert idéal de Bode. Ce choix de $L(s)$ donne un système en boucle fermé avec la propriété souhaitable d'être peu sensible au gain change. Si le gain change la fréquence de coupure w_c changera mais la marge de phase de système $PM = \pi(1 - \gamma/2)$ rad, reste indépendamment de la valeur du gain (figure (I.1)).

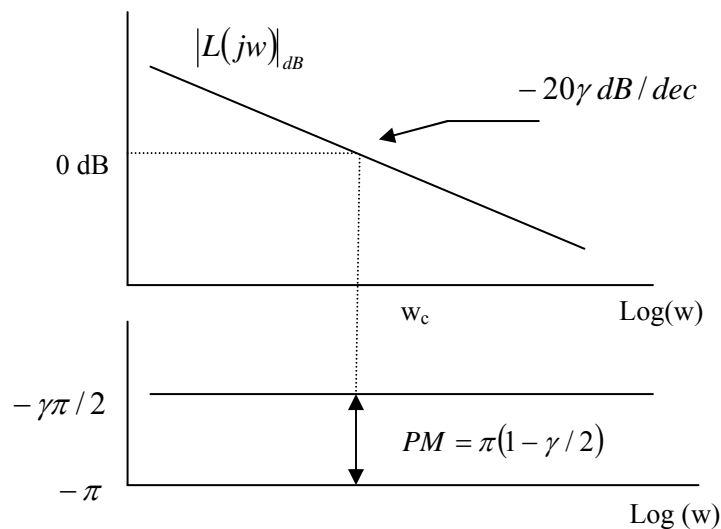


Figure I.1. Diagramme de Bode d'amplitude et de phase de $L(s)$ pour $1 < \gamma < 2$

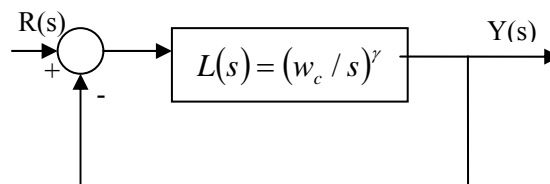


Figure I.2. Système d'ordre fractionnaire avec la fonction de transfert idéal de Bode $L(s)$

Chapitre II

La méthode de conception du correcteur

La méthode de conception du correcteur

II.1 Introduction

Dans les années 40 Bode a proposé une fonction de transfert d'ordre fractionnaire en boucle ouverte pour maintenir la stabilité des amplificateurs à réaction pour de large variation du gain [16]. Appliquant l'idée de Bode à la commande de position d'objet massif, Tustin et al ont proposé une fonction de transfert d'ordre fractionnaire en boucle ouverte afin de garder une marge de phase appropriée autour et au-dessous de la fréquence du gain unité [8]. Il a suggéré que le correcteur doit être conçu tel que la fonction de transfert globale en boucle ouverte soit une intégrale d'ordre fractionnaire dite fonction de transfert idéale de Bode représentée par l'équation suivante [8]:

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_u}\right)^m}, \quad 1 < m < 2 \quad (\text{II.1})$$

Mais l'idée d'utiliser le calcul fractionnaire dans des systèmes de commande a vraiment commencé au début des années 60 [5].

Sachant que le comportement dynamique en boucle fermée d'un système à retour est exclusivement lié à son comportement en boucle ouverte autour de la fréquence du gain unité ω_u ; donc, la motivation pour le correcteur proposé dans ce contexte vient de l'idée d'utiliser une phase plate autour de la fréquence ω_u de sorte que le système en boucle fermée soit robuste aux variations du gain et que sa réponse indicielle exhibe un dépassement constant dit propriété d'iso amortissement, c'est-à-dire que pour différents gain la réponse indicielle présente la même dépassement. Pour assurer un tel comportement en fréquence, dans un intervalle autour de la fréquence du gain unité ω_u , l'objectif de conception de la commande est alors de réaliser un correcteur qui garantit que la fonction de transfert en boucle ouverte par retour unitaire est la fonction de transfert idéale de Bode de l'équation (II.1).

Oustaloup a été le premier qui a vraiment introduit un correcteur d'ordre fractionnaire qui garantira que la fonction de transfert en boucle ouverte d'un asservissement classique à retour unitaire sera la fonction idéale de Bode [7]. Il a développé une commande dite commande robuste d'ordre non entier (CRONE) qui consiste de concevoir, pour des processus stable et à phase minimale, un correcteur $C(s)$ qui est donné comme [7, 17]:

$$C(s) = \frac{\beta(s)}{G_0(s)}, \quad G_0(s) \text{ stable et à phase minimale} \quad (\text{II.2})$$

où $G_0(s)$ est la fonction de transfert nominale du processus et $\beta(s)$ est la fonction de transfert en boucle ouverte d'un asservissement classique à retour unitaire tel que pour une bande de fréquence donnée autour de la fréquence du gain unité ω_u ($\omega_b \ll \omega_u \ll \omega_h$) elle est la fonction de transfert idéale de Bode de l'équation (II.1).

II.2 Formulation du problème:

Considérons le système de commande classique à retour unitaire montré sur la figure (II.1). Où, $G_p(s)$ est la fonction du transfert du processus et $C(s)$ est la fonction du transfert du correcteur.

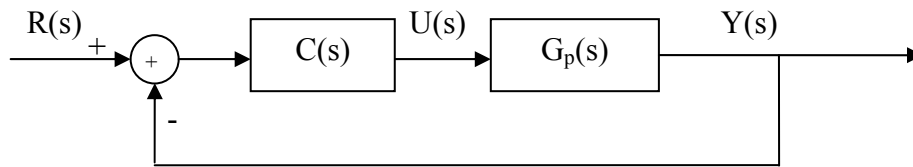


Figure II.1. Système classique a retour unitaire

Le processus est considéré comme un système stable et à phase minimale dont la fonction de transfert $G_p(s)$ est donné par:

$$G_p(s) = K_0 \frac{\prod_{i=0}^k (1 + s/z_{pi})}{\prod_{i=0}^n (1 + s/p_{pi})} \quad (\text{II.3})$$

Où K_0 est le gain statique, p_{pi} et z_{pi} sont respectivement les pôles et les zéros du processus qui sont tous réel et $k < n$. La fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$ de ce système à retour unitaire est donnée par:

$$G(s) = C(s)G_p(s) \quad (\text{II.4})$$

Le problème est donc de trouver le correcteur $C(s)$ qui garantira que la fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$ sera la fonction de transfert idéale de Bode dans une bande de fréquence d'intérêt pratique $[\omega_b, \omega_h]$ autour de la fréquence du gain unité ω_u ($\omega_b \ll \omega_u \ll \omega_h$) et sans utiliser la technique CRONE d'Oustaloup qui utilise l'inverse des dynamiques du processus $G_p(s)$ comme donné dans l'équation (II.2). En d'autres termes, le correcteur doit être conçu tel que la fonction de transfert globale en boucle ouverte soit un

segment de ligne droite dans le diagramme de gain et une phase constante dans le diagramme de phase du tracé de Bode autour de la fréquence de gain d'unité.

II.3 Présentation de la méthode de conception

Pour la fréquence du gain unité ω_u donné et pour un intervalle de fréquence donné $[\omega_b, \omega_h]$ d'intérêt pratique autour de ω_u , la fonction de transfert $G_P(s)$ de l'équation (II.3) peut être décomposée en deux parties comme suit:

$$G_P(s) = G_{P1}(s)G_{P2}(s) = \left[K_{01} \frac{\prod_{i=0}^{k_1} (1 + s/z_{P1i})}{\prod_{i=0}^{n_1} (1 + s/p_{P1i})} \right] \left[K_{02} \frac{\prod_{i=0}^{k_2} (1 + s/z_{P2i})}{\prod_{i=0}^{n_2} (1 + s/p_{P2i})} \right] \quad (II.5)$$

Avec $(k_1+k_2+1)=k$, $(n_1+n_2+1)=n$ et $K_{01}K_{02}=K_0$. Où la fonction $G_{P2}(s)$ contient les pôles et les zéros de $G_P(s)$ qui sont en dehors de l'intervalle de fréquence $[\omega_b, \omega_h]$ loin de la fréquence du gain unité ω_u , tel qu'elle ait dans le plan de Bode une ligne droite dans le diagramme d'amplitude avec une pente de -20db/dec ou -40db/dec et une phase constante de $-\frac{\pi}{2}$ ou $-\pi$ dans le diagramme de phase. Cela signifie que dans cet intervalle de fréquence autour de la fréquence du gain unité ω_u la fonction $G_{P2}(s)$ peut être écrite comme:

$$G_{P2}(s) = K_{02} \frac{\prod_{i=0}^{k_2} (1 + s/z_{P2i})}{\prod_{i=0}^{n_2} (1 + s/p_{P2i})} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_u}\right)^{m_2}} \quad (II.6)$$

où $m_2=1$ ou 2 . La fonction $G_{P1}(s)$ contient les pôles et les zéros restants de la fonction $G_P(s)$. Par conséquent, la fonction de transfert en boucle ouverte sera:

$$G(s) = C(s)G_{P1}(s)G_{P2}(s) \quad (II.7)$$

et dans l'intervalle de fréquence $[\omega_b, \omega_h]$, la fonction $G(s)$ devient :

$$G(s) = C(s)G_{P1}(s)G_{P2}(s) = C(s)G_{P1}(s) \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_u}\right)^{m_2}} \quad (II.8)$$

Maintenant, pour garantir que $G(s)$ est la fonction de transfert idéale de Bode, dans l'intervalle de fréquence donné $[\omega_b, \omega_h]$ autour de la fréquence du gain unité ω_u donné, qui signifie que $G(s)$ doit être:

$$G(s) = C(s)G_{P1}(s) \frac{1}{\left(\frac{s}{w_u}\right)^{m_2}} = \frac{1}{\left(\frac{s}{w_u}\right)^m} \quad (\text{II.9})$$

avec m est un nombre réel tel que $1 < m < 2$; la fonction de transfert du contrôleur $C(s)$ doit être telle que:

$$C(s)G_{P1}(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{w_u}\right)^{m-m_2}} \quad (\text{II.10})$$

Si $m_2=1$, le nombre $(m-m_2)$ est tel que $0 < (m-m_2) < 1$, alors, dans l'intervalle de fréquence donné $[\omega_b, \omega_h]$ autour de la fréquence du gain unité ω_u donné, $C(s)G_{P1}(s)$ est un intégrateur d'ordre fractionnaire. Et si $m_2=2$, le nombre $(m-m_2)$ est tel que $-1 < (m-m_2) < 0$, alors, dans l'intervalle de fréquence donné $[\omega_b, \omega_h]$ autour de la fréquence du gain unité ω_u donné, $C(s)G_{P1}(s)$ est un dérivateur d'ordre fractionnaire. Dans le chapitre I on a présenté l'approximation par une fonction rationnelle, dans une bande de fréquence donnée $[\omega_b, \omega_h]$, de l'intégrateur et du dérivateur d'ordre fractionnaire. Alors, l'équation (II.10) peut être donnée par:

$$\frac{1}{\left(\frac{s}{w_u}\right)^{m-m_2}} = K_F \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{II.11})$$

La nouveauté de cette méthode de conception du correcteur est que des pôles p_i et/ou des zéros z_i de la fonction d'approximation rationnelle ci-dessus de l'intégrateur d'ordre fractionnaire ou du dérivateur d'ordre fractionnaire sont choisis presque égaux aux pôles et aux zéros de $G_{P1}(s)$. Alors, la fonction rationnelle de l'équation (II.11) peut être partagée en deux parties une partie est formée de tous les pôles et les zéros qui sont presque égaux aux pôles et aux zéros de $G_{P1}(s)$ et l'autre partie contient les pôles et les zéros restants. Ainsi, on peut écrire :

$$\frac{1}{\left(\frac{s}{w_u}\right)^{m-m_2}} = K_F \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} = \left[K_c \frac{\prod_{i=0}^{N-(k_1+1)} \left(1 + s/z_{ci}\right)}{\prod_{i=0}^{N-(n_1+1)} \left(1 + s/p_{ci}\right)} \right] \left[K_{01} \frac{\prod_{i=0}^{k_1} \left(1 + s/z_{cli}\right)}{\prod_{i=0}^{n_1} \left(1 + s/p_{cli}\right)} \right] \quad (\text{II.12})$$

Où $K_c K_{01} = K_F$, avec K_{01} est la constante donnée dans l'équation (II.5), et les pôles P_{c1i} et les zéros Z_{c1i} sont celui qui est presque égale aux pôles et les zéros de $G_{p1}(s)$. Si la fonction du transfert du correcteur $C(s)$ est choisie comme :

$$C(s) = K_c \frac{\prod_{i=0}^{N-(k_1+1)} (1 + s/z_{ci})}{\prod_{i=0}^{N-(n_1+1)} (1 + s/p_{ci})} \quad (\text{II.13})$$

et parce que les pôles p_{c1i} et les zéros z_{c1i} de l'équation (II.12) presque égaux aux pôles et aux zéros de $G_{p1}(s)$, on peut alors écrire que :

$$C(s)G_{p1}(s) = \left[K_c \frac{\prod_{i=0}^{N-(k_1+1)} (1 + s/z_{ci})}{\prod_{i=0}^{N-(n_1+1)} (1 + s/p_{ci})} \right] G_{p1}(s) = K_F \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i} \right)} = \frac{1}{\left(\frac{s}{w_u} \right)^{m-m_2}} \quad (\text{II.14})$$

En d'autres termes, la combinaison des pôles et les zéros de $C(s)$ et du $G_{p1}(s)$ donnera exactement la fonction d'approximation rationnelle de l'intégrateur ou du dérivateur d'ordre fractionnaire. Alors, dans l'intervalle de fréquence donné $[\omega_b, \omega_h]$ d'intérêt pratique autour de la fréquence de coupure donnée ω_u , la fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$ de ce système de commande classique à retour unitaire sera donnée comme :

$$\frac{1}{\left(\frac{s}{w_u} \right)^{m-m_2}} \frac{1}{\left(\frac{s}{w_u} \right)^{m_2}} = \frac{1}{\left(\frac{s}{w_u} \right)^m} \quad (\text{II.15})$$

qui est la fonction de transfert idéal de Bode.

Dans cette nouvelle méthode de conception, le correcteur $C(s)$ doit être causal. Alors, supposons que $N_R = n_1 - k_1$ est le degré relatif entre le degré du dénominateur et le degré du numérateur de $G_{p1}(s)$. Si N_R est négatif ou égal à zéro $C(s)$ est causal et il est donné comme dans l'équation (II.13). Si N_R est positif $C(s)$ n'est pas causal et nous devons ajouter au moins N_R pôles à $C(s)$ pour garantir sa causalité, par conséquent $C(s)$ sera donné comme :

$$C(s) = K_c \frac{\prod_{i=0}^{N-(k_1+1)} (1 + s/z_{ci})}{\prod_{i=0}^{N-(n_1+1)} (1 + s/p_{ci})} \frac{1}{\prod_{i=0}^{N_R-1} (1 + s/p_{c2i})} \quad (\text{II.16})$$

Où les pôles p_{c2i} sont obtenus de la même manière à partir du premier pôle p_0 de l'approximation par une fonction rationnel de l'intégrateur d'ordre fractionnaire ou du dérivateur d'ordre fractionnaire. Donc, ces pôles p_{c2i} sont donnés comme suit :

$$p_{c2i} = p_0(ab)^{(N+i+1)} \text{ pour } i=0, 1, \dots, (N_R-1) \quad (\text{II.17})$$

II.3 Exemples illustratifs:

II.3.1 Exemple1:

Comme premier exemple on considère la conception du système asservi à retour unitaire dont la fonction de transfert du processus est donnée comme suit [18] :

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2(2s+1)}$$

Le système en boucle fermée doit garantir les spécifications suivantes :

- dépassement $\leq 10 \%$
- temps de réponse $\leq 1\text{sec}$

Ces spécifications sont équivalentes à une fréquence du gain unité $\omega_u = 1.97 \text{ rad/s}$ et une marge de phase (MP) d'environ 70° . Aucun PID classique ne peut réaliser ces spécifications. Alors pour réaliser une MP constante de 70° avec une fréquence du gain unité $\omega_u = 1.97 \text{ rad/s}$ dans un intervalle de fréquence autour de ω_u donné par $[\omega_b, \omega_h] = [0.1\omega_u, 10\omega_u] =$

$[0.2 \text{ rad/s}, 20 \text{ rad/s}]$, la fonction de transfert en boucle ouverte $G(s) = C(s)G_p(s)$ du système asservi doit être égale à la fonction de transfert idéal de Bode comme suit :

$$G(s) = C(s)G_p(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{w_u}\right)^\alpha}$$

Où α est un nombre réel tel que $1 < \alpha < 2$. Pour avoir une $MP = 70^\circ$ on doit avoir

$$MP = \pi + \text{phase}(C(s)G_p(s)/_{w=w_u}) = 70^\circ. \text{ Alors } 70^\circ = \pi - \alpha \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{11}{9}.$$

On décompose $G_p(s)$ en deux parties: $G_{p1}(s) = \frac{1}{s^2}$ et $G_{p2}(s) = \frac{1}{2s+1}$, tel que $G_{p1}(s)$ contienne

les pôles et les zéros qui se trouve à l'extérieur de l'intervalle de fréquence $[w_b, w_h]$ et $G_{p2}(s)$ contienne le reste des pôles et des zéros. Donc la fonction de transfert en boucle

$$\text{ouverte est: } G(s) = G_{p1}(s)G_{p2}(s)C(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{w_u}\right)^\alpha}. \text{ En mettant } C(s)G_{p2}(s) = \left(\frac{s}{w_u}\right)^m,$$

tel que $0 < m < 1$, on obtient : $\frac{1}{s^2} \left(\frac{s}{w_u} \right)^m = \frac{1}{\left(\frac{s}{w_u} \right)^\alpha} \Rightarrow (2-m) = \alpha \Rightarrow m = \frac{7}{9}$. Alors

$C(s)G_{p2}(s)$ c'est un dérivateur d'ordre fractionnaire d'ordre $m = 7/9$. Pour $K_D = w_u^m$

$$\left(\frac{s}{w_u} \right)^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i} \right)} \cong C(s) \frac{1}{(2s+1)}$$

$$C(s) = (2s+1) \left(\frac{s}{w_u} \right)^m \cong (2s+1) K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i} \right)} \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_{i=0}^{n1} \left(1 + \frac{s}{p_i} \right) \prod_{i=n1+2}^N \left(1 + \frac{s}{p_i} \right)}$$

avec $p_{n1+1} \cong -1/2$, alors :

$$G(s) = \frac{1}{s^2(2s+1)} \frac{K_D \prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_{i=0}^{n1} \left(1 + \frac{s}{p_i} \right) \prod_{i=n1+2}^N \left(1 + \frac{s}{p_i} \right)} \cong \frac{1}{\left(\frac{s}{w_u} \right)^\alpha}$$

Les tracés de Bode de la fonction rationnelle d'approximation sont présentés dans les figures suivantes.

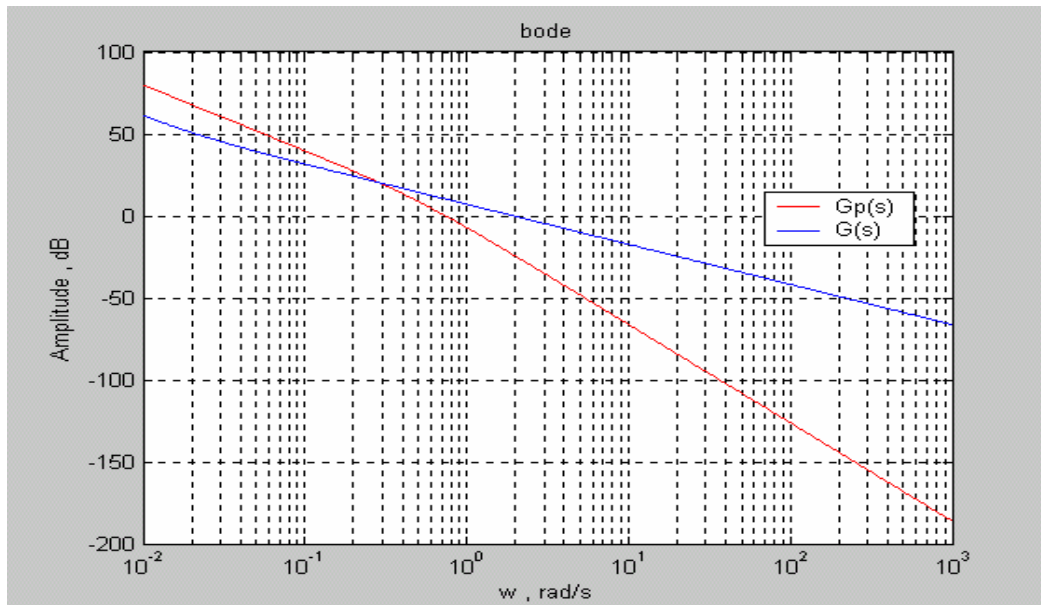


Figure II.2. Amplitude de la fonction de transfert du processus $G_p(s)$ et de la fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$

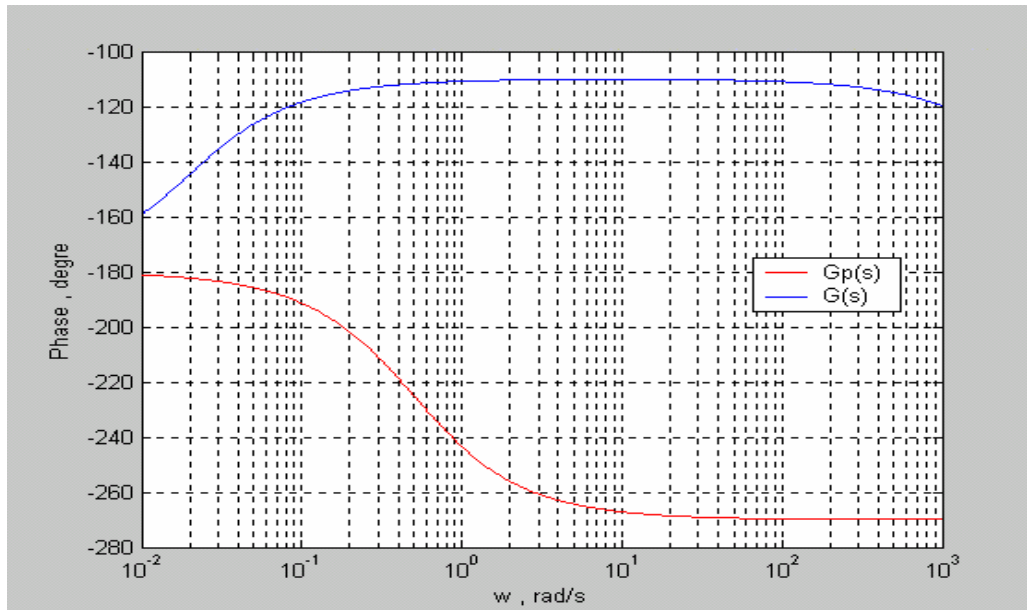


Figure II.3. Phase de la fonction de transfert du processus $G_p(s)$ et de la fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$

On remarque que dans la plage de fréquence $[0.1w_u, 10w_u]$, la phase de $G(s)$ la fonction de transfert en boucle ouverte est de -110° , et la fréquence du gain unité est $w_u=1.97$ rad/sec. Figure (II.4) représente la réponse indicielle du système en boucle fermée. On remarque aussi que le dépassement $\leq 10\%$ et le temps de montée ≤ 1 sec.

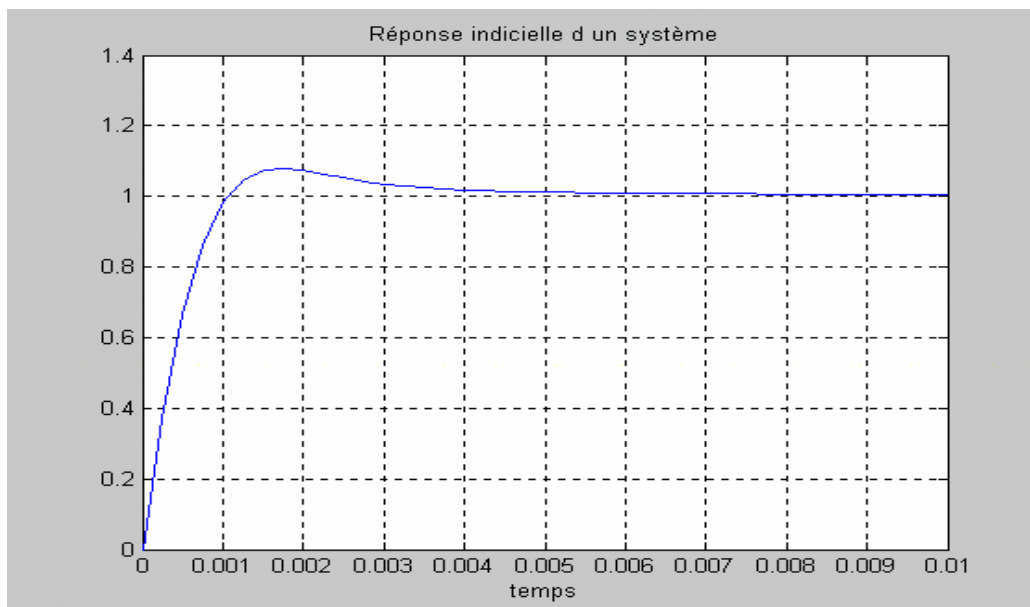


Figure II.4. La réponse indicielle du système en boucle fermée

II.3.2 Exemple2:

On considère la fonction de transfert suivante [19]:

$$G_p(s) = \frac{K_0}{s(\tau s + 1)} = \frac{0.25}{s(s + 1)}$$

Le système en boucle fermée doit garantir les spécifications suivantes :

- la marge de phase $MP=48.5^\circ$
- fréquence du gain unité $\omega_u = 1.00$ rad/s

Pour réaliser une MP constante de 48.5° avec une fréquence du gain unité $\omega_u = 1.00$ rad/s

dans un intervalle de fréquence autour de ω_u donné par $[\omega_b, \omega_h] = [0.1\omega_u, 10\omega_u] =$

$[0.1$ rad/s, 10 rad/s], la fonction de transfert en boucle ouverte $G(s) = C(s)G_p(s)$ du système asservi doit être égale à la fonction de transfert idéal de Bode comme suit :

$$G(s) = C(s)G_p(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{w_u}\right)^\alpha}$$

Où α est un nombre réel tel que $1 < \alpha < 2$. Pour avoir une $MP = 48.5^\circ$ on doit avoir

$$MP = \pi + \text{phase}(C(s)G_p(s)_{w=w_u}) = 48.5^\circ. \text{ Alors } 48.5^\circ = 180 - \alpha 90^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{263}{180} \cong 1.46.$$

On décompose $G_p(s)$ en deux parties: $G_{p1}(s) = \frac{1}{s}$ et $G_{p2}(s) = \frac{1}{s+1}$, tel que $G_{p1}(s)$ contienne

les pôles et les zéros qui se trouve à l'extérieur de l'intervalle de fréquence $[w_b, w_h]$ et

$G_{p2}(s)$ contienne le reste des pôles et des zéros. Donc la fonction de transfert en boucle

ouverte est: $G(s) = G_{p1}(s)G_{p2}(s)C(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{w_u}\right)^\alpha}$. En mettant $C(s)G_{p2}(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{w_u}\right)^m}$, tel que

$$0 < m < 1, \text{ on obtient : } \frac{1}{s} \frac{1}{\left(\frac{s}{w_u}\right)^m} = \frac{1}{\left(\frac{s}{w_u}\right)^\alpha} \Rightarrow (1+m) = \alpha \Rightarrow m = 0.46. \text{ Alors } C(s)G_{p2}(s)$$

c'est un intégrateur d'ordre fractionnaire d'ordre $m=0,46$. Pour $K_I = 1/w_u^m$

$$\frac{1}{\left(\frac{s}{w_u}\right)^m} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \cong C(s) \frac{1}{(s+1)}$$

$$C(s) = \frac{(s+1)}{\left(\frac{s}{w_u}\right)^m} \cong (s+1)K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^{n1} \left(1 + \frac{s}{p_i}\right) \prod_{i=n1+2}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)}$$

avec $p_{n1+1} \cong -1$, alors :

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \frac{K_D \prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^{n1} \left(1 + \frac{s}{p_i}\right) \prod_{i=n1+2}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \cong \frac{1}{\left(\frac{s}{w_u}\right)^\alpha}$$

Les tracés de Bode de la fonction rationnelle d'approximation sont présentés dans les figures suivantes:

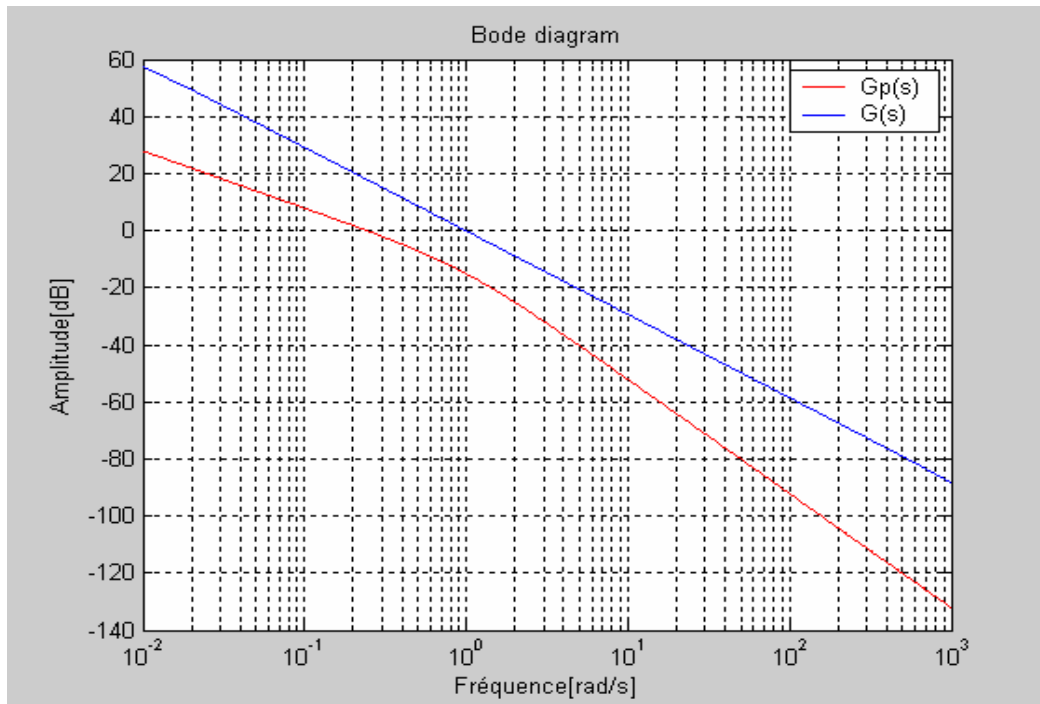


Figure II.5. Amplitude de la fonction de transfert du processus $G_p(s)$ et de la fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$

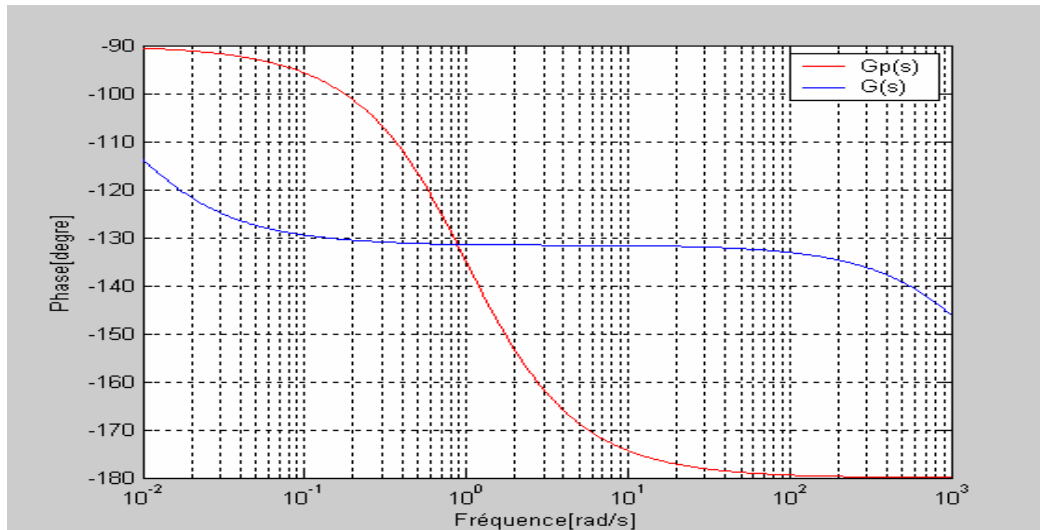


Figure II.6. Phase de la fonction de transfert du processus $G_p(s)$ et de la fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$

On remarque que dans la plage de fréquence $[0.1w_u, 10w_u]$, la phase de $G(s)$ la fonction de transfert en boucle ouverte est de -131.5° ce qui correspond à une $MP = 48.5^\circ$, et la fréquence du gain unité est $w_u = 1.00$ rad/sec. Figure (II.7) représente la réponse indicielle du système en boucle fermée.

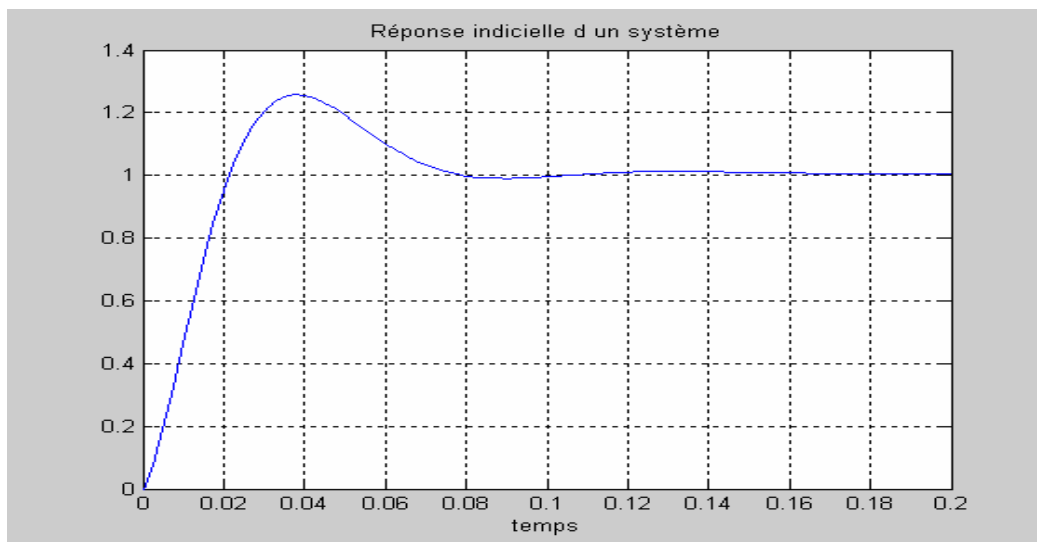


Figure II.7. La réponse indicielle du système en boucle fermée

Chapitre III

Commande d'un moteur à courant continu

Commande d'un moteur à courant continu

III.1 Introduction

Comme application on a choisi la commande d'un moteur à courant continu. L'objectif est alors de faire le calcul du correcteur pour qu'on puisse garantir que la fonction de transfert en boucle ouverte de ce système asservi à retour unitaire soit la fonction de transfert idéale de Bode, dans un domaine de fréquence bien déterminé. Les réponses fréquentielles et temporelles seront obtenues et la robustesse en performances sera aussi étudiée en fonction des variations des paramètres du moteur.

III.2 Moteur à courant continu

Les moteurs à courant continu interviennent souvent comme organe d'action dans le domaine des asservissements. On trouve principalement deux types de commande :

- Commande à flux constant par la tension d'induit variable
- Commande à courant d'induit constant par le flux d'induit variable.

Considérons le cas où le moteur à courant continu est commandé par la tension d'induit variable. La tension V_o imposée aux bornes de l'induit est responsable du courant i qui traverse ce dernier.

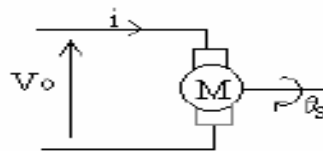


Figure III.1. Moteur à courant continu

III.2.1 Etablissement des équations différentielles

L'induit est modélisé de la manière suivante (en régime permanent, pas d'effet de la part de l'inductance) [20] :

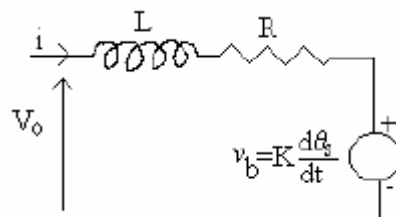


Figure III.2. Circuit d'armature du moteur

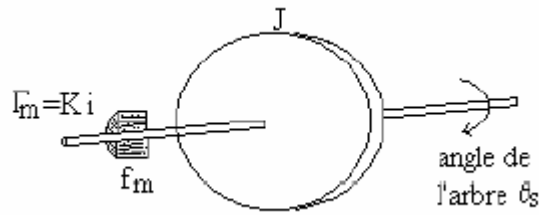


Figure III.3. Charge inerte

L et R représentent respectivement, l'inductance et la résistance du circuit d'armature. L'inertie J s'exprime en (kgm^2), représente la mesure des moments d'inertie de l'armature du moteur et de la charge, et f_m en (Nm/rd/s), est le frottement visqueux total agissant sur l'arbre de sortie.

La tension v_b représente la force électromotrice (fem), elle est proportionnelle à la vitesse de rotation de l'arbre, on peut écrire :

$$V_0 = Ri + L \frac{di}{dt} + K \frac{d\theta_s}{dt} \quad (\text{III.1})$$

La puissance totale absorbée par le moteur est $P_a = V_0 i$. La partie de la puissance susceptible d'être transformée en puissance mécanique est $P_c = v_b i = K \frac{d\theta_s}{dt} i$. C'est P_c qui donne naissance au couple électromagnétique Γ_m disponible sur l'arbre du moteur selon la formule :

$$P_c = \Gamma_m \frac{d\theta_s}{dt} \Rightarrow \Gamma_m = Ki \quad (\text{III.2})$$

Le mouvement de rotation du système constitué par le rotor du moteur et l'arbre de transmission est régi par l'équation :

$$\sum \text{couples} = \text{moment d'inertie} * \text{l'accélération angulaire}$$

ce qui se traduit par : $\Gamma_m - f_m \dot{\theta}_s = J \ddot{\theta}_s$

Tenant compte de (III.2) on peut écrire :

$$Ki = J \ddot{\theta}_s + f_m \dot{\theta}_s \quad (\text{III.3})$$

III.2.2 Calcul de la fonction de transfert du moteur

Pour calculer la fonction de transfert, on utilise la transformée de Laplace, en mettant

$\left(\hat{\theta}_s = L(\theta_s), I = L(i) \text{ et } \hat{V}_0 = L(V_0) \right)$. L'équation (III.3) donne :

$$KI = (Js^2 + f_m s) \hat{\theta}_s \Rightarrow \hat{\theta}_s = K \frac{1}{Js^2 + f_m s} I \quad (\text{III.4})$$

A partir de l'équation (III.1) on trouve,

$$\hat{V}_0 = (R + Ls)I + Ks \hat{\theta}_s \Rightarrow I = \frac{1}{R + Ls} \left[V_0 - Ks \hat{\theta}_s \right] \quad (\text{III.5})$$

A partir des relations (III.4) et (III.5) on peut déduire le schéma fonctionnel suivant pour le moteur à courant continu commandé par l'induit :

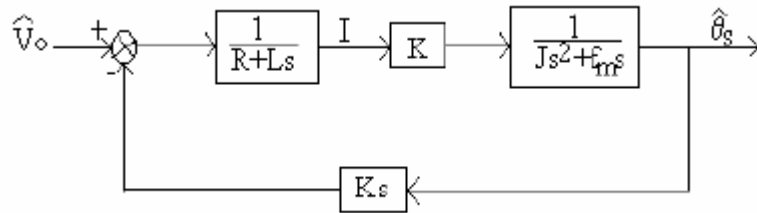


Figure III.4. Schéma fonctionnel du moteur à courant continu

En notant par G la fonction de transfert de la chaîne directe et par H celle de la chaîne de retour on a :

$$G = \frac{K}{(R + Ls)(Js^2 + f_m s)} \text{ et } H = Ks$$

On obtient la forme canonique du système asservi (moteur). Alors la fonction de transfert du moteur est donnée par :

$$F(s) = \frac{\hat{\theta}_s}{\hat{V}_0} = \frac{G}{1 + GH} = \frac{K}{(R + Ls)(Js^2 + f_m s)} \frac{1}{1 + \frac{K^2 s}{(R + Ls)(Js^2 + f_m s)}}$$

Ce qui donne:

$$F(s) = \frac{K}{(R + Ls)(Js^2 + f_m s) + K^2 s}$$

$$F(s) = \frac{K}{s \left[LJs^2 + (RJ + Lf_m)s + Rf_m + K^2 \right]}$$

$$F(s) = \frac{K}{Rf_m + K^2} \frac{1}{s \left[1 + \frac{RJ + Lf_m}{Rf_m + K^2} s + \frac{LJ}{Rf_m + K^2} s^2 \right]}$$

$$\text{On pose: } \alpha = \frac{K}{Rf_m + K^2}$$

$\frac{Rf_m}{Rf_m + K^2}$ Est petit devant un terme lie au frottement. Enfin, comme on peut raisonnablement

supposer que $\frac{L}{R} \ll \frac{RJ}{Rf_m + K^2}$:

$$\frac{RJ + Lf_m}{Rf_m + K^2} \approx \frac{RJ}{Rf_m + K^2} \approx \frac{RJ}{Rf_m + K^2} + \frac{L}{R}$$

Cela permet d'écrire finalement la fonction de transfert sous la forme:

$$F(s) = \frac{\alpha}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)} \text{ tel que: } \tau_1 = \frac{L}{R}, \tau_2 = \frac{RJ}{Rf_m + K^2}$$

En général, pour un moteur à courant continu, on suppose que la self-inductance est négligeable ($L \ll R$) et $Rf_m \ll K^2$, alors la fonction de transfert se réduit à :

$$F(s) = \frac{\alpha}{s(1 + \tau_m s)} \text{ Avec } \alpha = \frac{1}{K} \text{ et } \tau_m = \frac{RJ}{K^2}$$

τ_m est la constante de temps électromécanique du moteur.

III.3 Calcul du correcteur

On considère la fonction de transfert d'un moteur à courant continue comme suit :

$$G_p(s) = \frac{K_0}{s(\tau s + 1)} \quad \text{(III.6)}$$

Les valeurs nominales du gain K_0 et du temps de relaxation τ sont respectivement données par $K_0=235$ et $\tau = 1/66.9$ [20]. On cherche un correcteur $C(s)$ tel que la fonction de transfert en boucle ouverte égale à la fonction de transfert idéal de Bode avec les spécification suivantes :

* la marge de phase en boucle ouverte est $MP=60^\circ$ avec une fréquence du coupure à 0 dB $w_u=47.8\text{rad/sec}$.

* Dépassement $< 20\%$.

* le temps de réponse doit être le plus faible possible.

La fonction de transfert du système en boucle ouverte est donc donnée par dans un intervalle de fréquence $[w_b, w_h] = [0.1w_u, 10w_u]$:

$$G(s) = C(s)G_p(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{w_u}\right)^\alpha} \quad \text{Tel que } \alpha \text{ est un nombre réel et } 1 < \alpha < 2.$$

$$MP = \pi + \text{phase}(C(s)G_p(s))|_{w=w_u}$$

$$60^\circ = 180 - \alpha 90^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{4}{3}$$

On décompose $G_p(s)$ en deux parties:

$$G_{p1}(s) = \frac{1}{s} \quad \text{Et} \quad G_{p2}(s) = \frac{K_0}{\tau s + 1}$$

Tel que $G_{p1}(s)$ contiennent les pôles et les zéros qui se trouve à l'extérieur de l'intervalle de fréquence $[w_b, w_h]$, par contre $G_{p2}(s)$ contient le reste.

$$G(s) = G_{p1}(s)G_{p2}(s)C(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{w_u}\right)^\alpha}$$

$$C(s)G_{p2}(s) = \left(\frac{s}{w_u}\right)^m, \quad \text{tel que } \alpha \text{ est un nombre réel et } 1 < m < 2.$$

$$\frac{1}{s} \left(\frac{s}{w_u}\right)^m = \frac{1}{\left(\frac{s}{w_u}\right)^\alpha} \Rightarrow m = 1 - \alpha \Rightarrow m = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$

$m = -\frac{1}{3} < 0$, Comme m est négatif, le terme $C(s)G_{p2}(s)$ est un intégrateur d'ordre fractionnaire $m = 1/3$.

$$C(s)G_{p2}(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{w_u}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\left(\frac{s}{47.8}\right)^{\frac{1}{3}}} = 1.3777 \frac{\prod_{i=0}^6 \left(1 + \frac{s}{1.0742(4.7084)^i}\right)}{\prod_{i=0}^7 \left(1 + \frac{s}{0.6409(4.7084)^i}\right)}$$

On remarque que $p_4 = 0.6409(4.7084)^3$, donc on peut écrire que:

$$1.3777 \frac{\prod_{i=0}^6 \left(1 + \frac{s}{1.0742(4.7084)^i}\right)}{\prod_{i=0}^7 \left(1 + \frac{s}{0.6409(4.7084)^i}\right)} = \left[\frac{\prod_{i=0}^6 \left(1 + \frac{s}{1.0742(4.7084)^i}\right)}{\prod_{i=0}^3 \left(1 + \frac{s}{0.6409(4.7084)^i}\right) \prod_{i=5}^7 \left(1 + \frac{s}{0.6409(4.7084)^i}\right)} \right] \left[\frac{235}{1 + \frac{s}{66.9}} \right]$$

Donc la fonction de transfert du contrôleur $C(s)$ est donnée par:

$$C(s) = 0.00586 \frac{\prod_{i=0}^6 \left(1 + \frac{s}{1.0742(4.7084)^i}\right)}{\prod_{i=0}^3 \left(1 + \frac{s}{0.6409(4.7084)^i}\right) \prod_{i=5}^7 \left(1 + \frac{s}{0.6409(4.7084)^i}\right)}$$

Dans l'intervalle de fréquence $[4.78 \text{ rad/s}, 478 \text{ rad/s}]$, on a:

$$C(s)G_{p2} = \left[\frac{0.00586 \prod_{i=0}^6 \left(1 + \frac{s}{1.0742(4.7084)^i} \right)}{\prod_{i=0}^3 \left(1 + \frac{s}{0.6409(4.7084)^i} \right) \prod_{i=5}^7 \left(1 + \frac{s}{0.6409(4.7084)^i} \right)} \right] \left[\frac{235}{1 + \frac{s}{66.9}} \right] = \frac{1}{\left(\frac{s}{47.8} \right)^{\frac{1}{3}}}$$

Et la fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$ est:

$$G(s) = C(s)G_p(s) = \left[\frac{0.00586 \prod_{i=0}^6 \left(1 + \frac{s}{1.0742(4.7084)^i} \right)}{\prod_{i=0}^3 \left(1 + \frac{s}{0.6409(4.7084)^i} \right) \prod_{i=5}^7 \left(1 + \frac{s}{0.6409(4.7084)^i} \right)} \right] \left[\frac{235}{s \left(\frac{s}{66.9} + 1 \right)} \right]$$

III.4 Réponses du système asservi

Les traces de diagramme de Bode et de la réponse indicielle de la fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$ et de la fonction de transfert du moteur $G_p(s)$ sont présentées dans les figures suivantes :

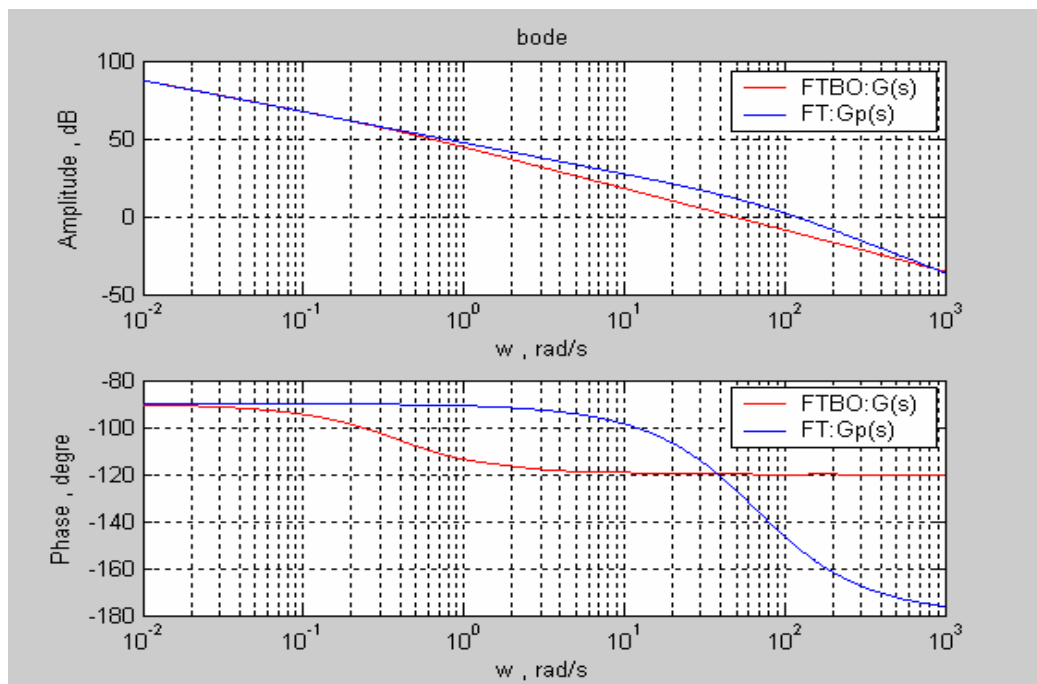


Figure III.5. Tracés de Bode de la fonction de transfert en B.O $G(s)$ et du moteur $G_p(s)$

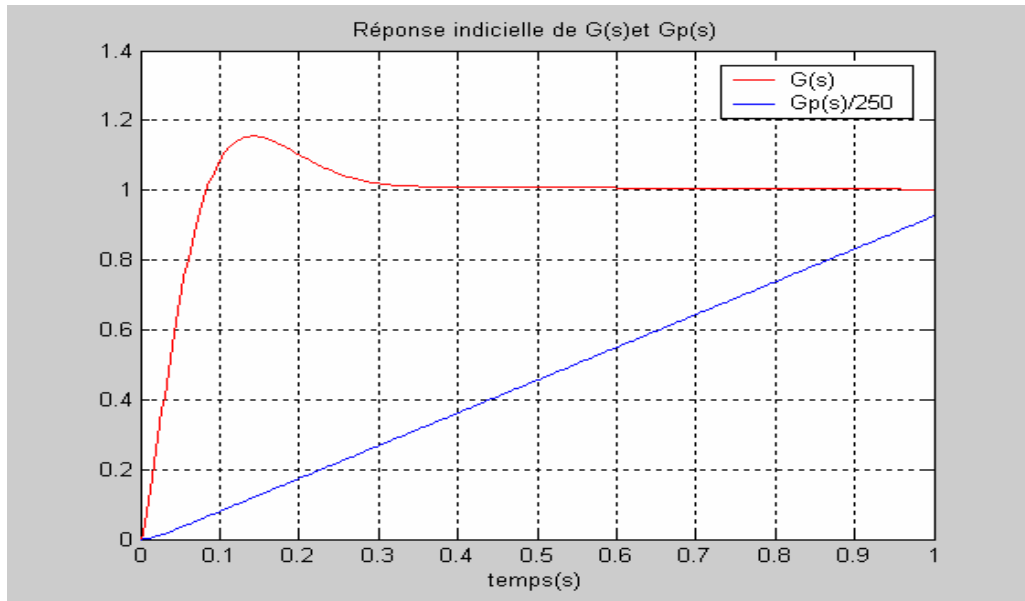


Figure III.6. La réponse indicielle de la fonction de transfert du moteur ($G_p(s)/250$) et la fonction de transfert en boucle fermée $G(s)$

Figures (III.7) et (III.8) contiennent les réponses indicielles de la fonction de transfert en boucle fermée $G(s)$ pour K_0 nominale et τ prend les valeurs $[\tau, 0.9\tau, 1.1\tau]$ et pour τ nominale et K_0 prend les valeurs $[K_0, 0.9K_0, 1.1K_0]$, respectivement.

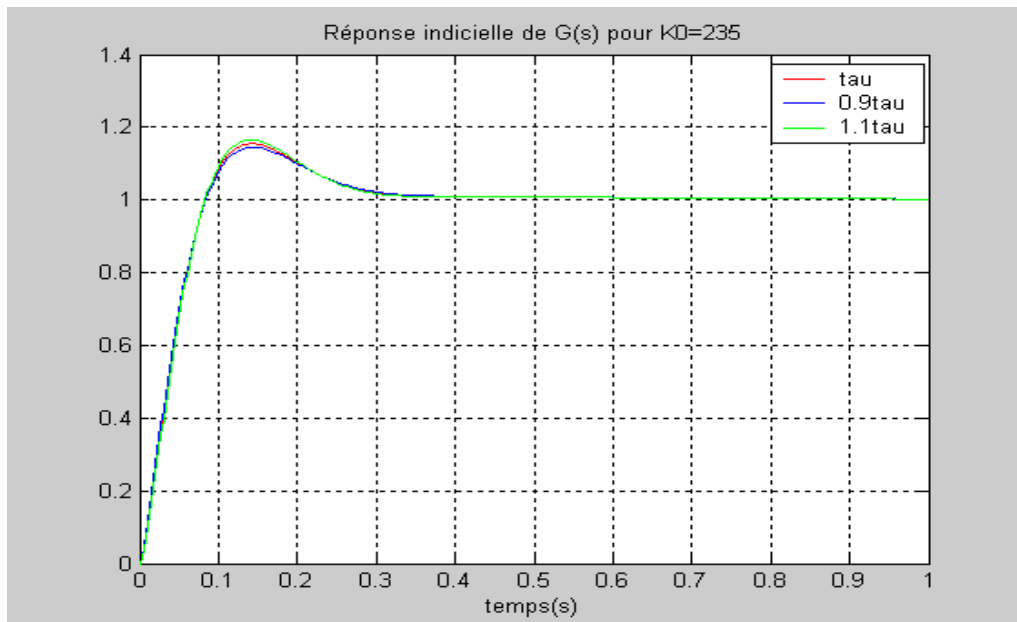


Figure III.7. La réponse indicielle de la fonction de transfert en boucle fermée $G(s)$ pour K_0 fixe et $\tau=[\tau, 0.9\tau, 1.1\tau]$

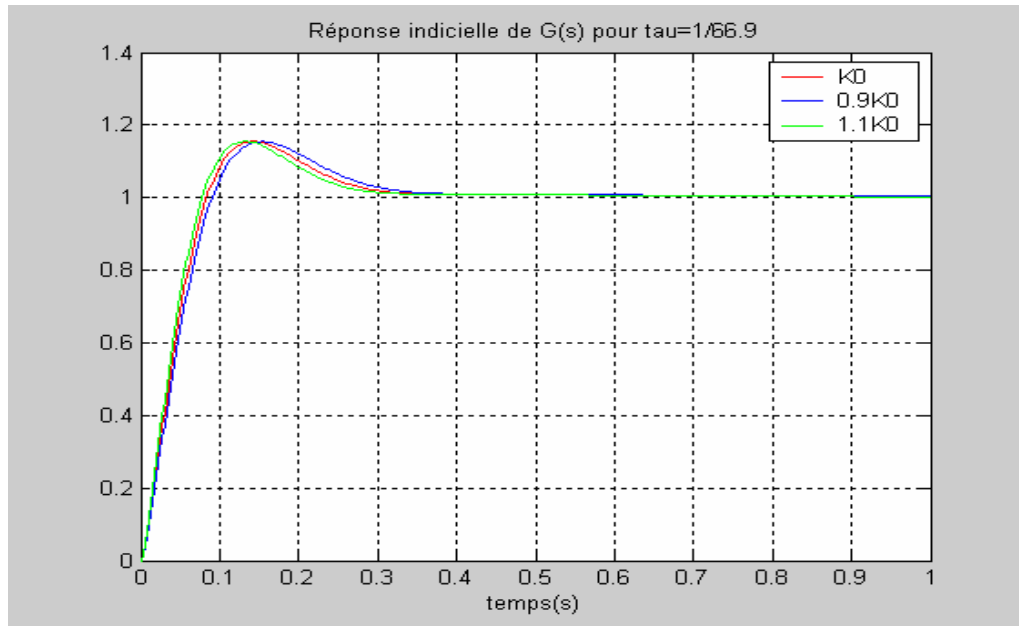


Figure III.8. La réponse indicielle de la fonction de transfert en boucle fermée $G(s)$ pour τ fixe et $K_0 = [K_0, 0.9K_0, 1.1K_0]$.

III.5 Analyse de la robustesse des performances

Généralement, les systèmes sont stables alors la raison d'introduire un asservissement est l'amélioration des performances en présence d'incertitudes. La synthèse du correcteur est effectuée en général sur un modèle nominal du système à asservir. Or, il existe toujours une différence entre ce modèle et la réalité, due à des incertitudes sur les paramètres, des erreurs de mesure, des approximations faites lors du choix de la forme du modèle, ou venant tout simplement de la linéarisation autour d'un point de fonctionnement. Dans cette section, l'analyse de la robustesse des performances du système asservi vis-à-vis aux incertitudes sur le gain K_0 et du temps de relaxation τ du moteur à courant continu de l'équation (III.6) vont être menées. Dans ce contexte les performances qui seront analysé sont la marge de phase (MP) le dépassement (D %).

En gardant fixe le temps de relaxation τ et en faisant varier le gain K_0 dans le domaine de variation $[0.9K_0, 1.1K_0]$ on obtient chaque fois la marge de phase et le dépassement correspondant. Figures (III.9) à (III.14) montrent les variations de la MP et le dépassement (D%) pour les trois valeurs fixes $\tau = 1/66.9$ s, $\tau = 0.9(1/66.9)$ s et $\tau = 1.1(1/66.9)$ s, respectivement.

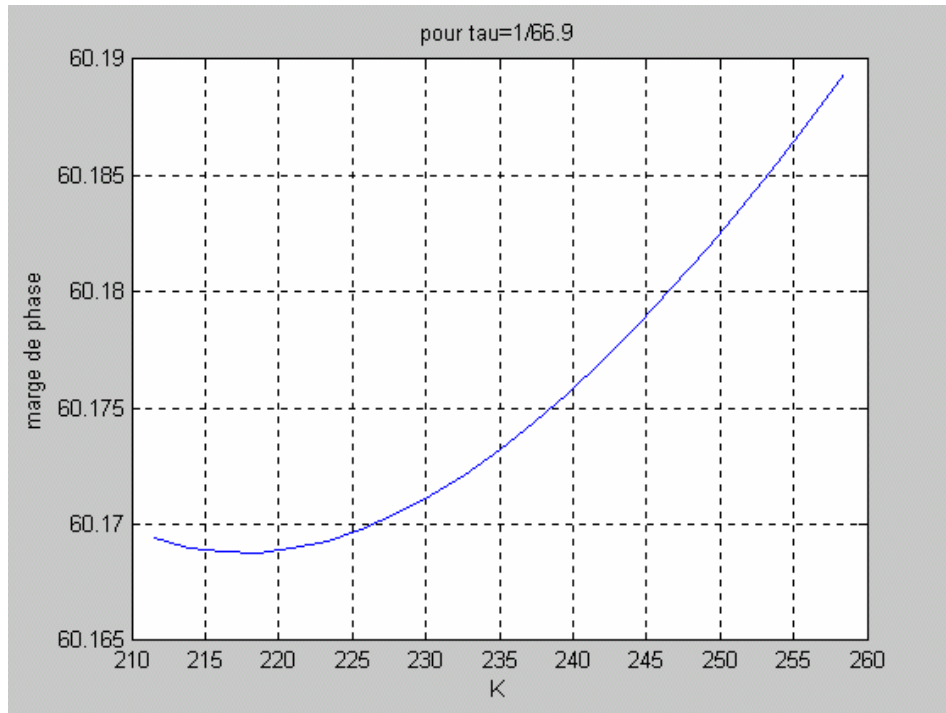


Figure III.9. Variation de la MP en fonction du gain K_0 pour $\tau = 1/66.9$

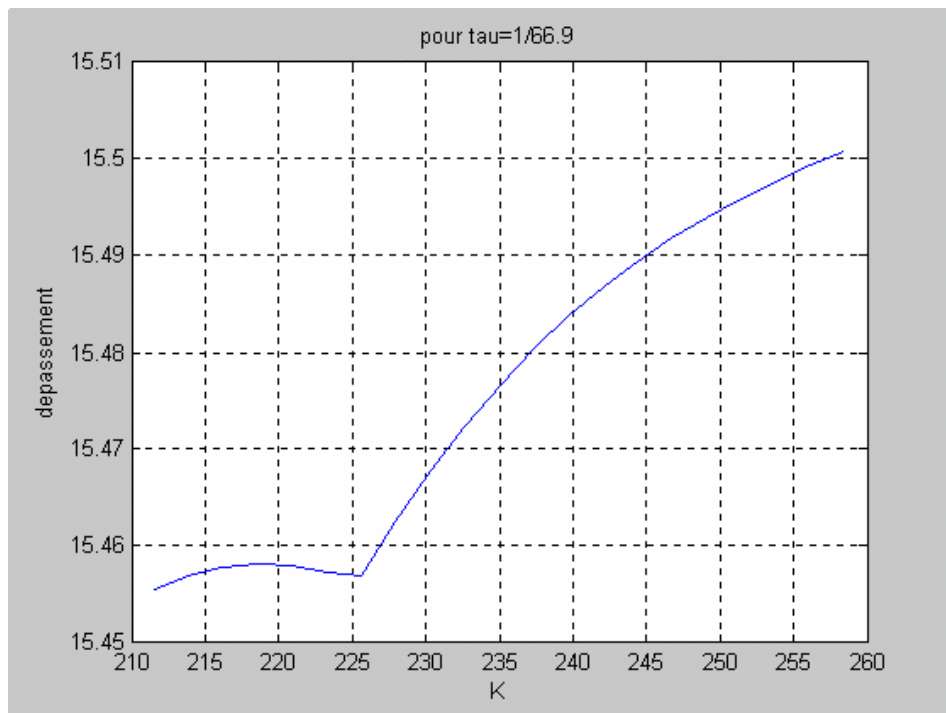


Figure III.10. Variation du Dépassement en fonction du gain K_0 pour $\tau = 1/66.9$

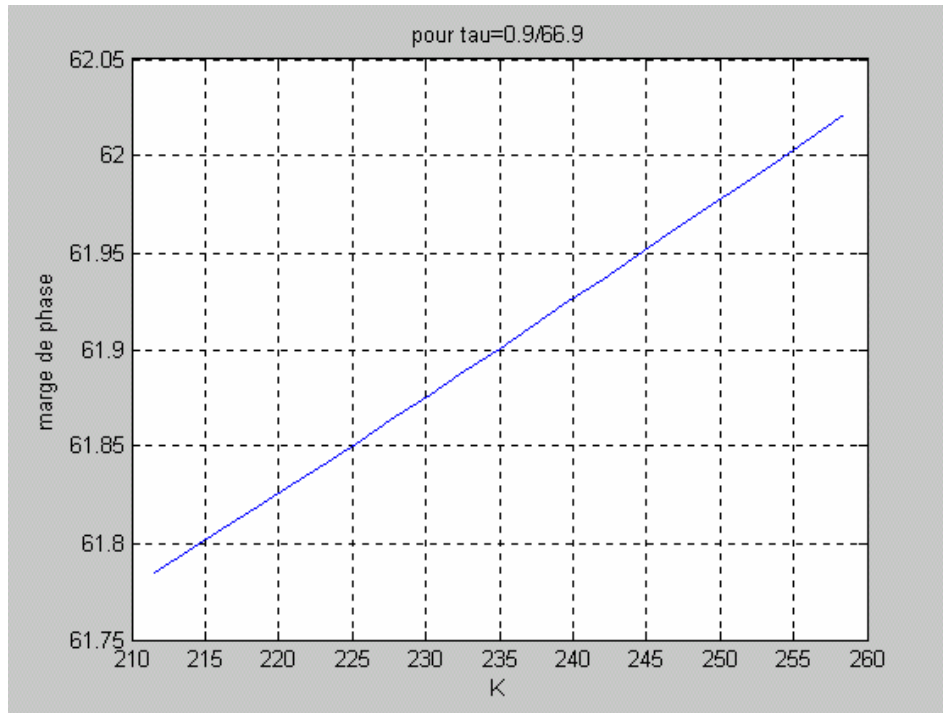


Figure III.11. Variation de la MP en fonction du gain K_0 pour $\tau = 0.9(1/66.9)$

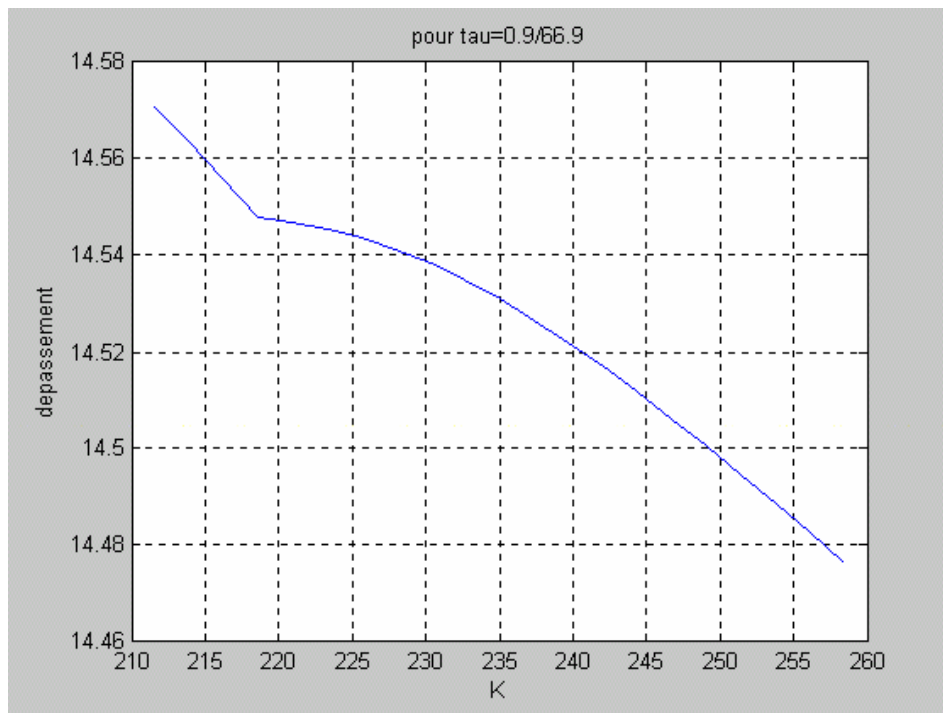


Figure III.12. Variation du Dépassement en fonction du gain K_0 pour $\tau = 0.9(1/66.9)$

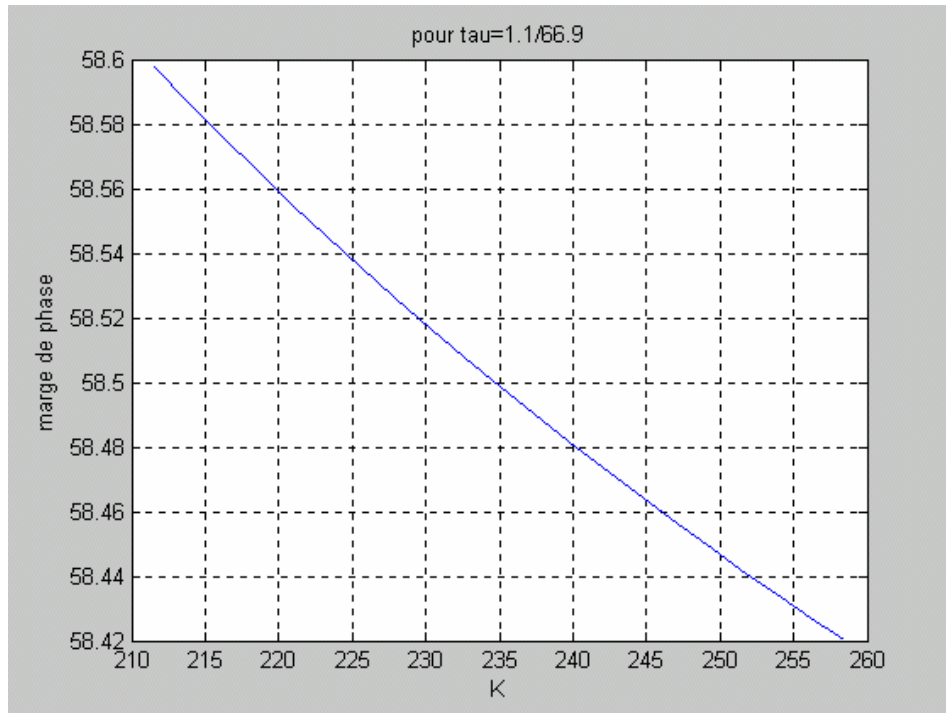


Figure III.13. Variation de la MP en fonction du gain K_0 pour $\tau = 1.1(1/66.9)$

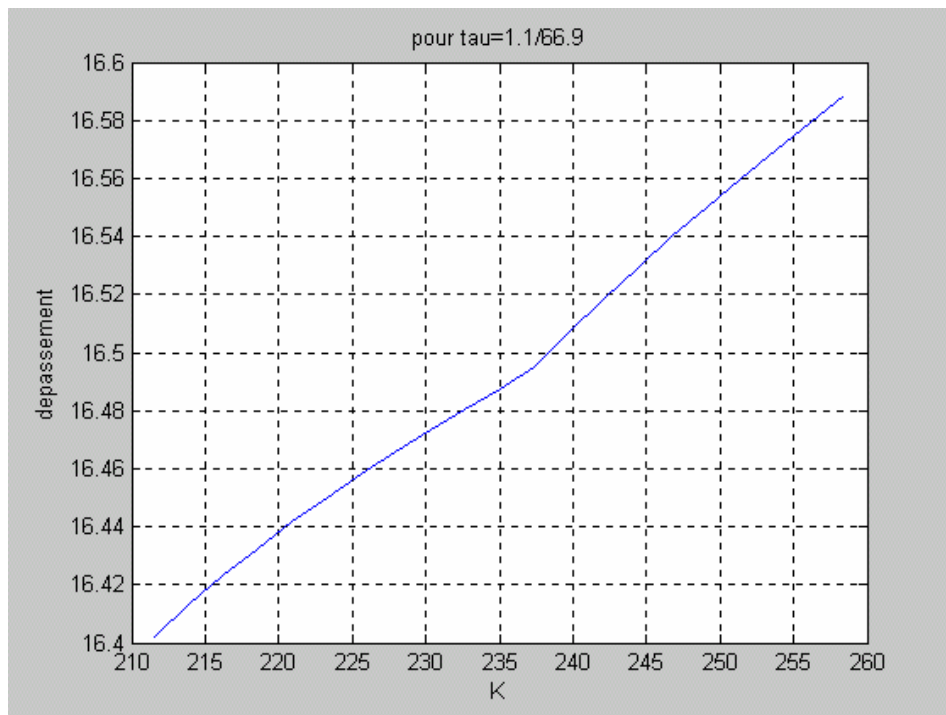


Figure III.14. Variation du Dépassement en fonction du gain K_0 pour $\tau = 1.1(1/66.9)$

Et pour quantifier les variations des performances données sur les figures précédentes, on calcule les erreurs relatives commises dans le cas de la de variation du gain K_0 pour un temps de relaxation fixe en utilisant les formules suivantes :

$$\text{Erreur(MP)\%} = \frac{|MP_{\max} - MP_{\text{nom}}|}{MP_{\text{nom}}}$$

$$\text{Erreur(D)\%} = \frac{|D_{\max} - D_{\text{nom}}|}{D_{\text{nom}}}$$

MP_{\max} et D_{\max} sont respectivement les valeurs de la marge de phase et du dépassement dont les erreurs sont maximales par rapport à leurs valeurs nominales respectives MP_{nom} et D_{nom} dans le domaine de variation du gain K_0 pour les trois différentes valeurs du temps de relaxation τ . Les valeurs de MP_{nom} et D_{nom} correspondant aux paramètres nominaux $K_0 = 235$ et $\tau = 1/66.9$ sont égales à : $MP_{\text{nom}} = 60,173$ et $D_{\text{nom}} = 15,476$. Les valeurs de MP_{\max} et D_{\max} sont obtenus à partir des figures précédentes et ils sont égaux à :

$MP_{\max} = 62,021^\circ$ et $D_{\max} = 16,588\%$. Alors les erreurs obtenues sont :

$$\text{Erreur (MP)\%} = 0,0307 \quad \text{et} \quad \text{Erreur (D)\%} = 0,0718.$$

Maintenant, en gardant fixe le gain K_0 en faisant varier le temps de relaxation τ dans le domaine de variation $[0,9\tau \quad 1,1\tau]$ on obtient chaque fois la marge de phase et le dépassement correspondants. Figures (III.15) à (III.20) montrent les variations de la MP et le dépassement (D%) pour les trois valeurs fixes $K_0 = 235$, $K_0 = 0,9 (235)$ et $K_0 = 1,1 (235)$, respectivement.

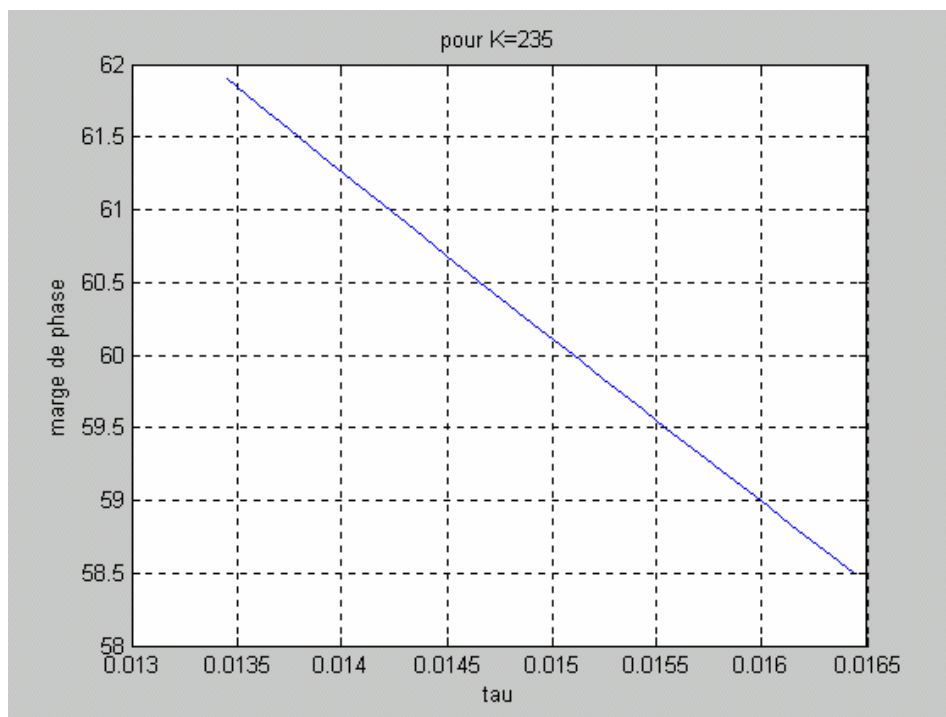


Figure III.15. Variation de la MP en fonction du temps de relaxation τ pour $K_0 = 235$

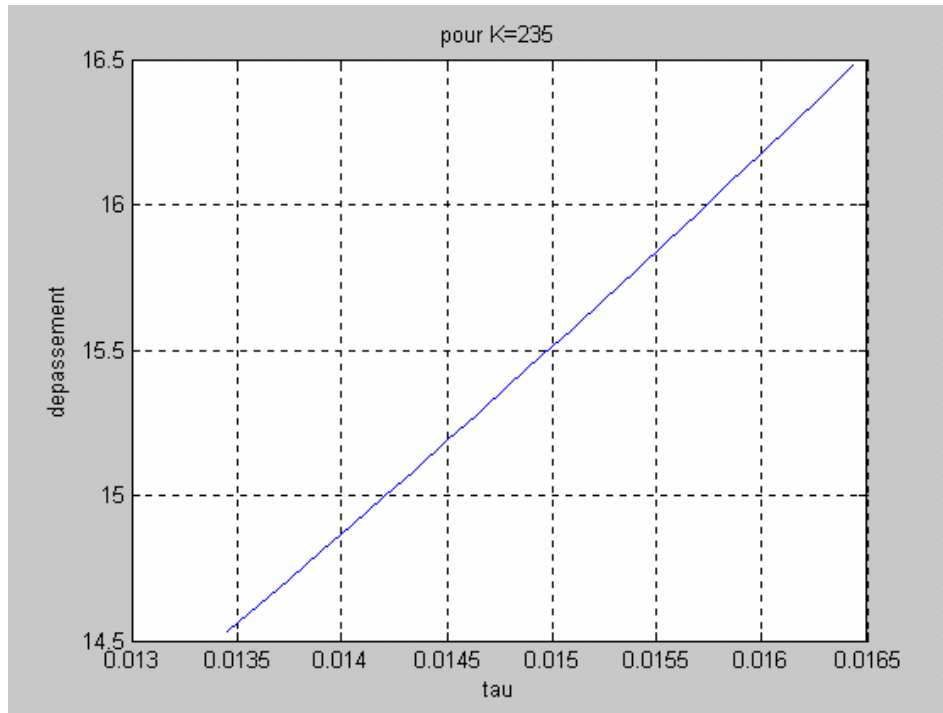


Figure III.16. Variation du Dépassement en fonction du temps de relaxation τ pour $K_0 = 235$

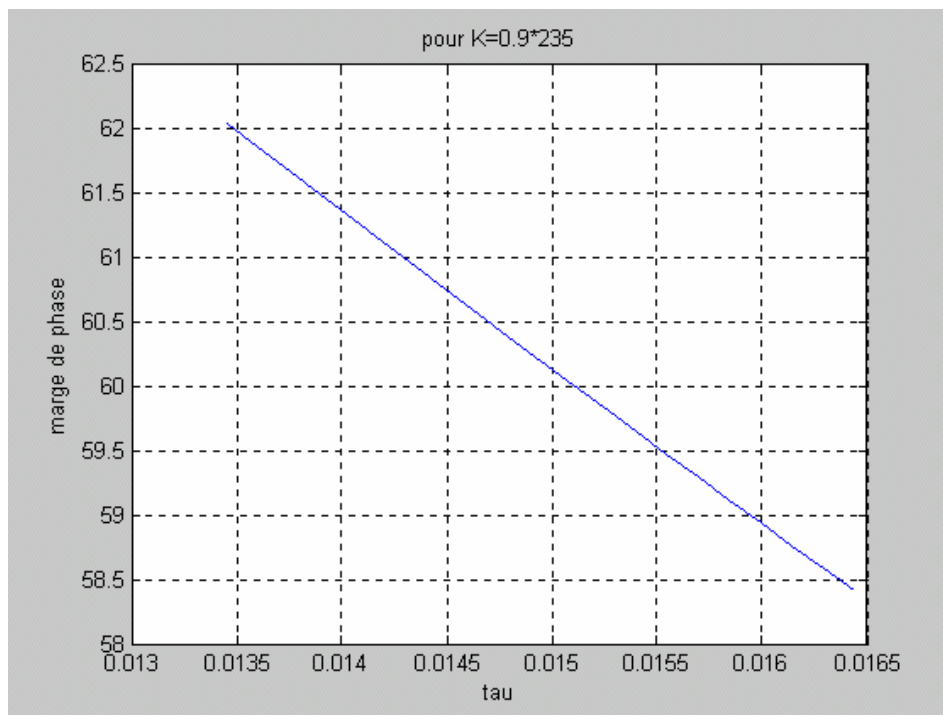


Figure III.17. Variation de la MP en fonction du temps de relaxation τ pour $K_0 = 0.9 (235)$

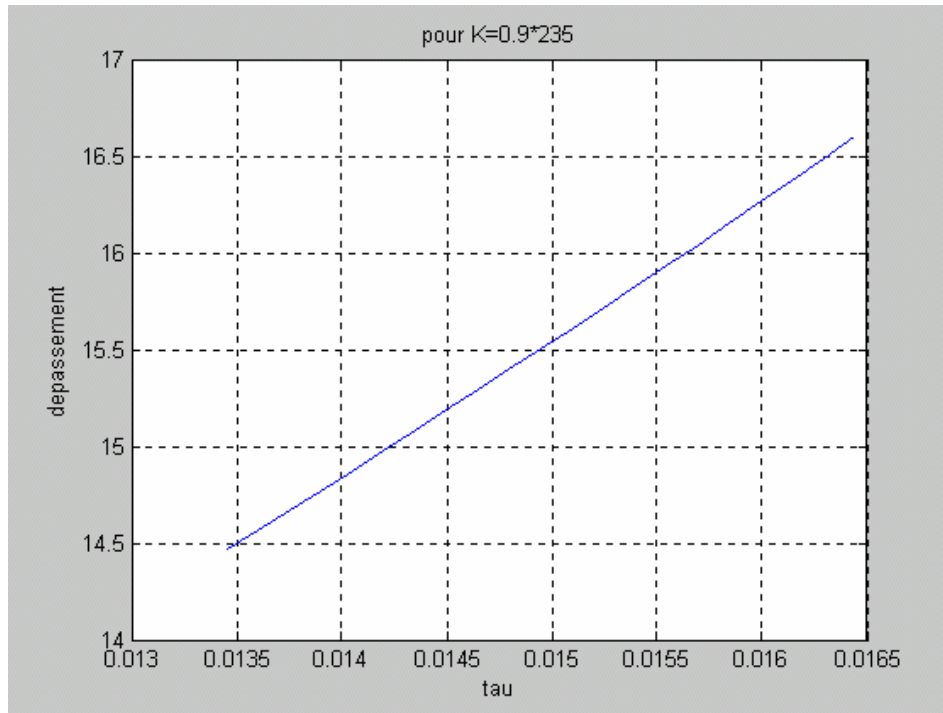


Figure III.18. Variation du Dépassement en fonction du temps de relaxation τ pour $K_0 = 0.9$ (235)

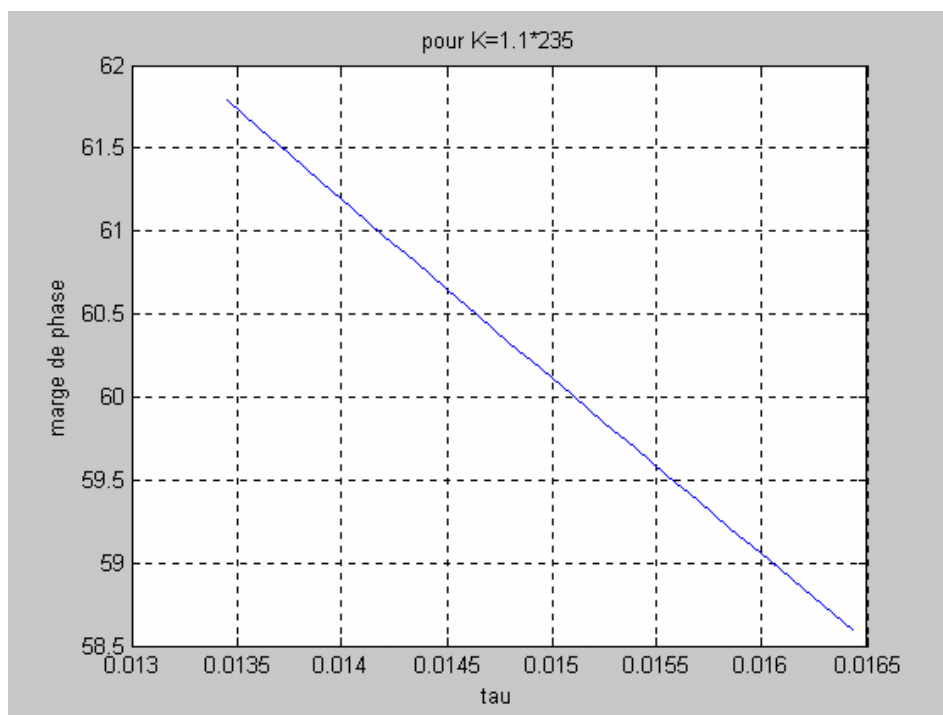


Figure III.19. Variation de la MP en fonction du temps de relaxation τ pour $K_0 = 1.1$ (235)

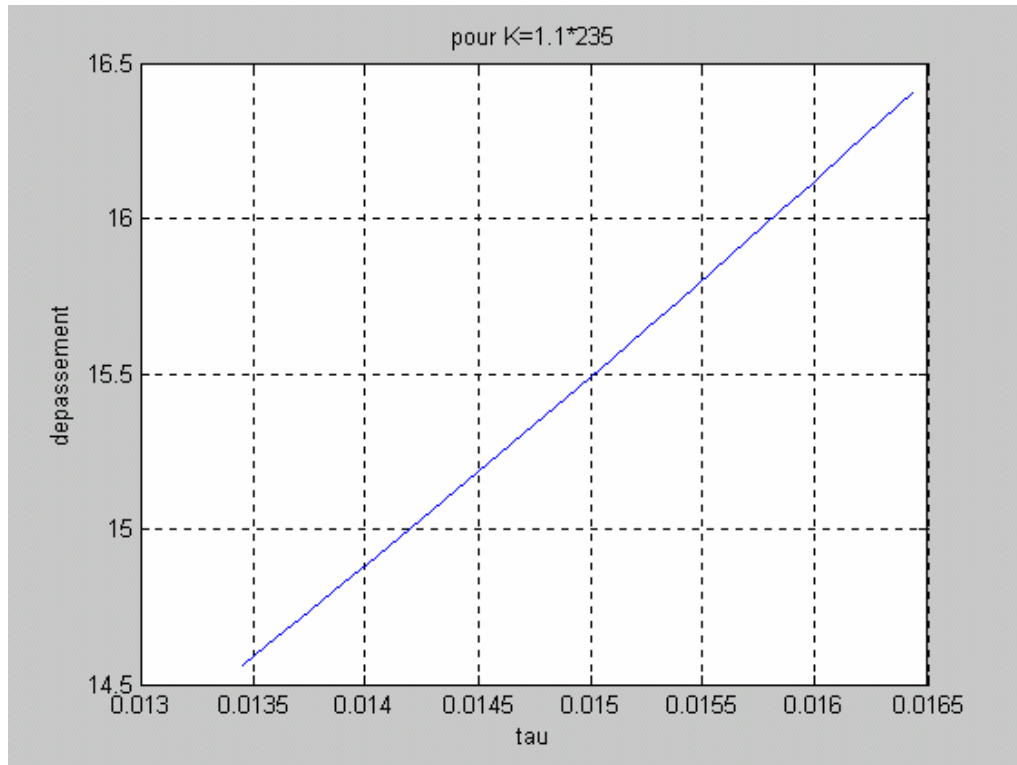


Figure III.20. Variation du Dépassement en fonction du temps de relaxation τ pour $K_0 = 1.1$ (235)

De la même façon que précédemment les erreurs relatives commises dans le cas de la variation du temps de relaxation τ pour un gain K_0 fixe en utilisant les formules suivantes :

$$\text{Erreur(MP)\%} = \frac{|MP_{\max} - MP_{\text{nom}}|}{MP_{\text{nom}}}$$

$$\text{Erreur(D)\%} = \frac{|D_{\max} - D_{\text{nom}}|}{D_{\text{nom}}}$$

Les valeurs de MP_{nom} et D_{nom} correspondant aux paramètres nominaux $K_0 = 235$ et $\tau = 1/66.9$ sont égales à : $MP_{\text{nom}} = 60,173$ et $D_{\text{nom}} = 15.476$. Les valeurs de MP_{\max} et D_{\max} sont obtenus à partir des figures précédentes et ils sont égales à :

$MP_{\max} = 62.035^\circ$ et $D_{\max} = 16.598\%$. Alors les erreurs obtenues sont :

$\text{Erreur (MP)\%} = 0.0309$ et $\text{Erreur (D)\%} = 0.0725$.

III.6 Discussions et commentaires :

Figure (III.5) contient le tracé log-log de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$ du système asservi. Dans cette figure on peut clairement voir que, dans la plage de fréquence $[0.1w_u, 10w_u] = [4.78 \text{ rad/s}, 478.00 \text{ rad/s}]$, le module est une droite de pente

-26,67 dB/dec qui est égale à 20α dB/dec passant par la fréquence $\omega_u=47.8$ rad/sec à 0 dB et que la phase est une droite horizontale correspondant à -120° qui est égale à $(\frac{\pi}{2}\alpha)^\circ$ ce qui donne une marge de phase de 60° exactement. Donc on a réalisé un correcteur qui garantisse que la fonction de transfert en boucle ouverte du système asservi dans le domaine fréquentiel d'intérêt pratique [4.78 rad/s, 478.00 rad/s] est une fonction idéale de Bode. Figure (III.6) représentent les réponses indicielles du moteur et du système asservi en boucle fermée. On remarque de cette figure que la réponse du moteur diverge et que la réponse du système en boucle fermée a un dépassement $< 20\%$ et un temps de réponse très faible pour atteindre sa valeur finale.

Les bons résultats commentés précédemment de la conception du système asservi sont obtenus pour les valeurs nominales du gain $K_0=235$ et du temps de relaxation $\tau=1/66.9$ du moteur à courant continu. Comme le but de notre conception est la réalisation d'une fonction de transfert idéale de Bode pour garantir une bonne robustesse des performances vis-à-vis des incertitudes des paramètres du moteur, alors on a fait une étude des variations des performances du système asservi en fonction des variations des deux paramètres, le gain K_0 et le temps de relaxation τ , du moteur. Les Figures (III.9) à (III.20) représentent les variations de la marge de phase MP et le dépassement D% du système asservi en fonctions des variations du gain K_0 et du temps de relaxation τ dans un domaine de 10% de part et d'autre de leurs valeurs nominales. De ces figures on remarque que les variations de la MP et du dépassement D% sont très faibles et ils sont quantifiés par les erreurs relatives les plus mauvaises comme suit:

$$\text{Erreur}(MP)\% = \frac{|MP_{\max} - MP_{\text{nom}}|}{MP_{\text{nom}}} = 0.0309\%$$

$$\text{Erreur}(D)\% = \frac{|D_{\max} - D_{\text{nom}}|}{D_{\text{nom}}} = 0.0725\%$$

D'après ces résultats on peut dire donc qu'on a réalisé un système asservi très performant vis-à-vis des incertitudes des paramètres du moteur à courant continu.

Conclusion Générale

Conclusion Générale

Sachant que le comportement dynamique en boucle fermée d'un système à retour est exclusivement lié à son comportement en boucle ouverte autour de la fréquence du gain unité ω_u ; donc, la motivation pour le correcteur proposé dans ce contexte vient de l'idée d'utiliser une phase plate autour de la fréquence ω_u de sorte que le système en boucle fermée soit robuste aux variations du gain et que sa réponse indicielle exhibe un dépassement constant dit propriété d'iso amortissement, c'est-à-dire que pour différents gain le réponse indicielle présente la même dépassement. Pour assurer un tel comportement en fréquence, dans un une bande de fréquence d'intérêt pratique $[\omega_b, \omega_h]$ autour de la fréquence du gain unité ω_u donnée, l'objectif de conception de la commande est alors de réaliser un correcteur qui garanti que la fonction de transfert en boucle ouverte par retour unitaire est la fonction de transfert idéale de Bode.

Après avoir introduit, en premier lieu, les concepts des opérateurs et systèmes d'ordre fractionnaire qui sont, en général, représentés par des fonctions de transfert irrationnelles, on a présenté la méthode d'approximation de leurs fonctions de transfert par une fonction rationnelle dans une bande de fréquence donnée dans le but de faciliter leurs simulations. Puis la technique détaillée de conception du correcteur qui garanti que la fonction de transfert en boucle ouverte par retour unitaire du système asservi est la fonction de transfert idéale de Bode dans un une bande de fréquence d'intérêt pratique $[\omega_b, \omega_h]$ autour de la fréquence du gain unité ω_1 donnée a été présentée. Des exemples d'illustration ont été faits pour montrer l'efficacité de la conception. L'étape suivante a été consacrée à l'application de cette méthode de conception à un moteur à courant continu. Après le calcul du correcteur et l'obtention des réponses fréquentielles et temporelles du systèmes en boucle fermée et vérification des performances projetées, une analyse de la robustesse des performances qui sont représentées dans notre cas par de la marge de phase et du dépassement vis-à-vis des incertitudes sur le gain K_0 et du temps de relaxation τ du moteur a courant continu. On a trouvé que les variations de la MP et du dépassement $D\%$ sont très faibles et ils sont quantifiés par les erreurs relatives des cas étudiés les moins performants comme suit:

$$Erreur(MP)\% = \frac{|MP_{\max} - MP_{nom}|}{MP_{nom}} = 0.0309\%$$

$$Erreur(D)\% = \frac{|D_{\max} - D_{nom}|}{D_{nom}} = 0.0725\%$$

D'après ces erreurs relatives obtenues on peut dire qu'on a réalisé un système asservi très performant vis-à-vis des incertitudes des paramètres du moteur à courant continu.

Comme perspective, on suggère l'application de cette technique à d'autres systèmes plus compliqués avec des modifications sur la technique d'imbrication du correcteur et du processus.

Références

Références

- [1] Oldham, K. B. and Spanier, J., *The Fractional Calculus: Theory and Application of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, Academic Press, New York, 1974.
- [2] Oustaloup, A., *La Dérivation Non Entière*, Hermès, Paris, 1995.
- [3] Podlubny, I., *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, California, 1999.
- [4] Hilfer, R., *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore, 2000.
- [5] Manabe, S., 'The non-integer integral and its application to control systems', *ETJ of Japan* 6(3/4), 1961, 83-87.
- [6] Podlubny, I., 'Fractional-order systems and $PI^\lambda D^\mu$ -controllers', *IEEE Transactions on Automatic Control* 44(1), 1999.
- [7] Oustaloup, A., *La commande CRONE*, Hermès, Paris, 1991
- [8] Tustin, A. et al, 'The design of systems for automatic control of the position of massive object', *Proceedings of Institution of Electrical Engineers*, 105, Part C, Suppl. N° 1, 1958.
- [9] I.A. Brin. On the stability of certain systems with distributed and lumped parameters, *Automatic Remote Control*, N° 23, 1962.
- [10] A.M.A. El-Sayed and F.M. Gaafar. Fractional calculus and some intermediate physical processes. *Applied Mathematics and Computation*, 144, 2003.
- [11] C.F. Lorenzo and T.T. Hartley. Variable order and Distributed order Fractional Operators. *Nonlinear Dynamics*, 29, 2002.
- [12] H.M. Srivastava and R.K. Saxena. Operators of fractional integration and their applications. *Applied Mathematics and Computation*, 118, 2001.
- [13] K.S. Miller and B. Ross., *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, Wiley, New York, USA, 1993.
- [14] A. Charef, H. H. Sun, Y. Y. Tsao, B. Onaral, Fractal system as represented by singularity function, *IEEE, Trans on automatic control*, Vol. 37, N° 9, Sept 1992.
- [15] A. Charef, Analogue realisation of fractional order integrator, differentiator and fractional $PI^\lambda D^\mu$ controllers, *IEE proceedings on Control Theory and Applications*, Volume 153, Issue 6, November 2006

-
- [16] Bode,H.W., Network Analysis and Feedback Amplifier Design, Van Nostrand, New York, 1945.
- [17] Xue, D. and Chen, Y.Q., 'A Comparative Introduction of Four Fractional Order Controllers', Proceedings of the 4th World Congress on Intelligent Control and Automation, Shanghai, China, June 2002.
- [18] Caponetto, R., Fortuna, L. and Porto, D., 'A New Tuning Strategy for a Non Integer Order Controller', Proceedings of the 1st IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications FDA'04, Bordeaux, France, July 2004.
- [19] Monje,C.A., Vinagre, B.M., Chen, Y.Q., Feliu, V., Lanusse, P., and Sabatier, J., 'Proposals for fractional $PI^{\lambda}D^{\mu}$ tuning', Proceedings of the 1st IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications FDA'04, Bordeaux, France, July2004
- [20] D'Azzo, John J., Houpis, Constantine H. and Stuart N. Sheldon, Linear control system analysis and design with matlab, fifth edition, Marcel Dekker, Inc., New York, 2003

Abstract:

The principal goal of this work is the fractional order control based on Bode's ideal transfer function. The closed loop dynamic behaviour is exclusively linked to the open loop behaviour around the unity gain crossover frequency ω_u . Therefore, the motivation of the proposed controller in this context comes from the consideration of using the idea of 'flat phase' around the unity gain crossover frequency ω_u so that the closed loop system is robust to gain variations and the step response exhibit an iso-damping property, i. e. for different gain the step response present the same overshoot. To ensure similar frequency behaviour, in a frequency range of practical interest $[\omega_b, \omega_h]$ around a given unity gain crossover frequency ω_u , a controller have then been proposed based on fractional order systems which will guarantee that the open-loop transfer function of a unity feedback control will be the Bode's ideal transfer function. Illustrative examples were made to show the effectiveness of the design and the results obtained have been also presented and discussed.

Résumé:

Le but principal de ce mémoire est la commande d'ordre fractionnaire basée sur la fonction de transfert idéale de Bode. Le comportement dynamique en boucle fermée d'un système à retour est exclusivement lié à son comportement en boucle ouverte autour de la fréquence du gain unité ω_u . Donc la motivation pour le correcteur proposé dans ce contexte vient de l'idée d'utiliser une phase plate autour de la fréquence ω_u de sorte que le système en boucle fermée soit robuste aux variations du gain et que sa réponse indicielle exhibe un dépassement constant dit propriété d'iso-amortissement, c'est-à-dire que pour différents gain la réponse indicielle présente le même dépassement. Pour assurer un tel comportement en fréquence, dans une bande de fréquence d'intérêt pratique $[\omega_b, \omega_h]$ autour de la fréquence du gain unité ω_u donnée, un correcteur a été alors proposé en se basant sur les systèmes d'ordre fractionnaire qui garantissait que la fonction de transfert en boucle ouverte par retour unitaire est la fonction de transfert idéale de Bode. Des exemples d'illustration ont été faits pour montrer l'efficacité de la conception et les résultats obtenus sont aussi présentés et discutés.

ملخص:

.BODE

. W_u

W_u

.
 W_u $[\omega_b , \omega_h]$

. BODE

.